

ПРОВЕРЕНО
1951 г.

06.5515
78
ПРОВЕРЕНО
1960 г.

Т Р У Д Ы
ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ
ОБСЕРВАТОРИИ
имени А. И. Воейкова

ВЫПУСК 23(85)

ВОПРОСЫ ПРИКЛАДНОЙ МЕТЕОРОЛОГИИ

Под редакцией
доктора физ.-мат. наук
М. И. ЮДИНА

БИБЛИОТЕКА
ЛЕНИНГРАДСКОГО
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД • 1950.

77762

АННОТАЦИЯ

Настоящий сборник посвящен двум важным проблемам: проблеме ветровых нагрузок на строительные сооружения и защиты растений от заморозков.

Первый вопрос рассматривается как с метеорологической, так и с аэродинамической стороны. Второй проблеме посвящены статьи, в которых исследуются методы открытого обогрева растений и предсказания заморозков.

Кроме того, в сборник включен ряд статей теоретического характера.

Сборник рассчитан на студентов старших курсов, аспирантов и научных работников, специализирующихся по прикладной и сельскохозяйственной метеорологии, а также на практиков, занимающихся вопросами ветровых нагрузок на строительные сооружения и защиты растений от заморозков.

Редактор *М. И. Юдин*

Техн. редакторы *Ф. А. Юлиш* и *М. С. Рулева*

Сдано в набор 3/VI 1950 г.

Подписано к печати 7/VIII 1950 г.

Изд. № 46

Индекс М-Л-46. Бумага 70 × 105¹/₁₆.

Бум. л. 2³/₈ Печ. л. 6,31

Уч.-изд. л. 6,93

Печ. зн. в 1 бум. л. 116 720

Тираж 800 экз.

Цена 4 руб.

г. Ленинград. Гидрометеиздат 1950 г.

М-22823.

Зак. № 1108

2-я типо-литография Гидрометеиздата, г. Ленинград, Прачечный пер., 6.

ПРОБЛЕМА ВЕТРОВЫХ НАГРУЗОК НА СТРОИТЕЛЬНЫЕ СООРУЖЕНИЯ КАК ЗАДАЧА ПРИКЛАДНОЙ МЕТЕОРОЛОГИИ

§ 1. Среди множества различных вопросов практики социалистического строительства, в той или иной мере связанных с применением метеорологии, проблема ветровых нагрузок на строительные сооружения занимает одно из первых мест. Это место определяется прежде всего большим практическим и экономическим значением, которое имеет расчет проектируемых строительных сооружений на ветровые нагрузки. Лишь небольшие строительные сооружения и одноэтажные дома, строящиеся в районах со слабым ветром, допускают пренебрежение ветровыми нагрузками. Существуют, однако, такие сооружения, для которых действие ветра является практически единственным подлежащим учету внешним фактором (например, высокие мачты, башни и т. п.). Для большинства же строительных сооружений учет ветровой нагрузки является необходимой составной частью проектирования, пренебрежение которой ни в коем случае недопустимо. Поэтому даже незначительное усовершенствование методов учета ветровых нагрузок, проведенное на массовом материале проектируемых и строящихся сооружений, могло бы дать весьма значительный экономический эффект.

Обычный способ использования метеорологических данных в прикладных вопросах заключается в том, что основная тяжесть исследования ложится на работника соответствующей отрасли техники, а роль метеоролога ограничивается предоставлением справочного материала. При решении ряда важнейших практических задач такой способ оказывается совершенно недостаточным. Это относится к задачам, центр тяжести которых должен лежать в исследовании метеорологических закономерностей, а характеристики, связанные с самим приложением, по существу, играют в них роль входных параметров. Такой путь рассмотрения практических задач характерен для прикладной метеорологии и указан М. И. Юдиным [8], [9], который показал плодотворность этого метода на примере авиационной метеорологии.

Из литературы вопроса о ветровых нагрузках тоже можно почерпнуть примеры того, как придание метеорологическим определяющим факторам лишь вторичной роли приводит подчас к тупику весьма интересное исследование.

Имеется множество работ (см., например, [12]), посвященных разработке приближенных методов расчета ветровых усилий. Все они ни в коей мере не основываются на конкретных свойствах ветра как фактора, определяющего рассматриваемое явление. Поэтому сравнение различных приближенных методов между собой может дать выводы лишь об удобстве вычислений, но не дает никаких выводов по главному вопросу — в какой мере законны упрощения, полагаемые в основу того или иного способа. Тем самым разработка приближенных методов оказалось в своеобразном тупике: при наличии многих взаимно конкурирующих приближенных способов — полная невозможность доказать или сравнить их обоснованность.

Другой пример. Отделом прикладной метеорологии Главной геофизической обсерватории был получен запрос от одной проектной организации о среднем

профиле ветра на различных высотах. В запросе не указывалось, какие именно ветры интересуют заказчика, но упоминалось о том, что речь идет о расчете ветровых нагрузок. Поскольку вопрос о ветровых нагрузках разрабатывался в отделе, заказчику было указано, что его должен интересовать не средний профиль ветра вообще, а средний профиль сильного ветра, и были приведены соответствующие данные. Использование этих данных позволило уменьшить расчеты на ветровые нагрузки на 20% и тем привело к многомиллионной экономии государственных средств.

Этот простой практический пример наглядно показывает преимущества метода прикладной метеорологии. В самом деле, нельзя обвинять строителей в том, что они не знали об особенностях профиля сильного ветра. Если бы на их запрос был дан формальный ответ, то вместо реальной экономии средств могла получиться фиктивная экономия — расчетные нагрузки оказались бы недостаточными.

Чтобы получить существенные результаты в исследовании проблемы ветровых нагрузок, нужно провести специальные метеорологические исследования, в частности по изучению структуры сильного ветра и ее влиянию на ветровые нагрузки, а также по изучению географического районирования их.

Столь же важно произвести общий анализ состояния проблемы ветровых нагрузок с метеорологической точки зрения и попытаться получить выводы, которые можно было бы сразу, непосредственно использовать для улучшения существующих норм ветровых нагрузок на строительные сооружения.

§ 2. Одним из основных вопросов проблемы ветровых нагрузок, на который должна дать ответ метеорология, является следующий.

Можно представить себе две основные причины разрушения зданий ветром. Если наступает резкое изменение атмосферного давления, то может оказаться, что давления вне здания и внутри его окажутся существенно различными и создавшийся перепад приведет к разрушению той или иной части здания. Этот эффект не связан с действием ветра, а вызывается исключительно изменением давления. С другой стороны, сильный ветер может также оказывать разрушающее действие. Это чисто динамическое действие никак не связано с изменением статического, атмосферного давления, а зависит от скорости, направления и структуры ветра. Естественно возникает вопрос о том, какой из этих двух эффектов является решающим? Понятно при этом, что вопрос этот весьма важен с практической точки зрения, поскольку, ответив на него, можно, например, решить, является ли наиболее опасным самый центр циклона, в котором давление весьма понижено, но скорости невелики, или окрестность циклона, где велики скорости, но давления слабо понижены.

В 1934 г. этот вопрос дискутировался в английском журнале „Meteorological Magazine“, причем последнее слово осталось за сторонником решающего действия давления [11]. В качестве обоснования приводился известный факт более частого разрушения здания вовне (срыв крыши и т. п.), чем внутри. Этот факт связывался с тем, что повышение давления, как это общеизвестно в метеорологии, никогда не бывает столь значительным и резким, как понижение (результат действия силы Кориолиса). Сам же эффект разрушения зданий сравнивался с вылетанием пробки из бутылки под действием перепада давлений.

Можно, однако, показать, что эта аналогия является поверхностной, а точка зрения на роль давления — не выдерживающей критики.

В самом деле, изменения давления, даже самые резкие, всегда происходят не слишком быстро. С другой стороны, здания никогда не бывают абсолютно герметичными — всегда имеет место так называемая инфильтрация, т. е. проникновение воздуха сквозь мелкие щели здания и сквозь поры материала. Благодаря инфильтрации не слишком быстрые изменения статического давления уравниваются соответствующими изменениями внутреннего давления, так что никакого практического ощутимого перепада не возникает. В связи с этим можно сослаться на такой элементарный и общеизвестный факт, что измерения давления в закрытом помещении дают удовлетворительную картину хода давления вне этого помещения.

Таким образом, имеются все основания считать, что изменения давления практически не оказывают влияния на ветровые нагрузки и тем более не могут привести к разрушению зданий.

Было бы весьма интересно попытаться подкрепить эти качественные рассуждения ориентировочным подсчетом. Для этого, однако, необходимы количественные данные о влиянии инфильтрации, в настоящее время, к сожалению, отсутствующие. Поэтому изучение процесса инфильтрации, важное и само по себе [3], [6], приобретает дополнительное значение.

§ 3. Чем с более высокими сооружениями приходится иметь дело, тем важнее учитывать, что скорость ветра существенно зависит от высоты, обращаясь в нуль у самой поверхности земли и увеличиваясь с удалением от нее. Хотя об этом факте упоминалось уже в самых первых нормах ветровых нагрузок, учет его производился и производится в настоящее время совершенно неправильно. Так, и по сие время можно встретить предписания о том, что ветровая нагрузка на единицу поверхности всех зданий должна повышаться с увеличением высоты здания. Иначе говоря, рекомендуется вводить некоторый множитель, больший единицы, которым учитывается превышение высоты сооружения над некоторой нормальной. Этот множитель вводится по отношению ко всем участкам здания, вне зависимости от высоты, на которой находятся эти участки.

В сравнительно недавнее время в нормах ряда стран введен дифференцированный учет изменения ветра с высотой, т. е. рекомендованы „поправочные“ множители, зависящие от высоты. Однако при этом в некоторых случаях, например в немецких нормах, оставлен в силе и прежний учет — поправка на высоту самого здания, так что в результате создалось странное положение: действие одной и той же причины учитывается дважды.

Совершенно ясно, что изменение ветра с высотой должно учитываться путем введения различных скоростных напоров на разных высотах, а не путем введения поправок на высоту сооружения. Тем более ясно, что существование обоих путей учета является совершенно недопустимым.

Прогресс в отношении учета изменения ветра с высотой при расчете ветровых нагрузок был тесно связан с прогрессом в изучении самого изменения ветра с высотой. До сравнительно недавнего времени не было известно закона, описывающего это изменение в приземном слое. Только в начале XX в. было выяснено, что оно хорошо описывается степенным законом:

$$\frac{v}{v_1} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^n,$$

где v — скорость ветра на уровне z , v_1 — на уровне z_1 , а показатель степени n варьирует в зависимости от атмосферных условий примерно от 1/10 до 1/4. В связи с этим в немецких, а также в советских нормах 1933 г. (по предложению Реттера [6]) было введено предписание пользоваться формулой

$$\frac{v}{v_1} = \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{1}{4}}.$$

В качестве обоснования такого выбора указывалось (см. [6]), что этот закон соответствует наиболее крутому росту скорости ветра и что поэтому он может давать только завышенные по отношению к действительным значения скорости ветра на высотах, больших чем z_1 . Это завышение является тогда частью запаса прочности.

Некоторую роль играло также то обстоятельство, что „закон 1/4“ приводит к весьма простому виду аналитической зависимости от высоты скоростного напора, т. е. величины

$$q = \frac{1}{2} \rho v^2,$$

где ρ — плотность воздуха; q — оказывается пропорциональным корню из высоты.

Однако существующие в настоящий момент знания об изменении ветра с высотой в приземном слое позволяют выбрать более удачный способ учета этого изменения при расчете ветровых нагрузок.

Сформулируем основные принципы, которыми на наш взгляд следует руководствоваться при учете изменения ветра с высотой.

Прежде всего нужно отметить, что введение дополнительных запасов прочности является не положительным, а скорее отрицательным фактором. В самом деле, так называемые „запасы прочности“ представляют собой, по существу, не что иное, как дополнительные затраты „на незнание“, т. е. связанные с отсутствием достаточно полного запаса знаний об исследуемом явлении. Поэтому введение этих запасов прочности тогда, когда имеющиеся знания позволяют без них обойтись, совершенно необосновано и вредно. Тем более это относится к запасам прочности, растущим с высотой, ибо они приводят к необходимости утяжелять конструкцию более высоких уровней, а потому и к необходимости усилить также низкие уровни, фундамент и т. д., что сильно увеличивает материальные затраты.

Весьма важно также, что существенными являются не столько интегральные нагрузки на ту или иную поверхность, сколько интегральные моменты ветровых нагрузок относительно тех или иных осей, а для сооружений не слишком малых размеров — также и местные ветровые нагрузки. Беря же запасы прочности, меняющиеся с высотой, мы получим совершенно неправильное представление как о моментах, так и о локальных нагрузках.

Из всего сказанного вытекает, что при выборе закона для профиля ветра с высотой, который следует использовать при расчете ветровых нагрузок, решающую роль должно играть естественное требование о том, чтобы этот профиль был бы возможно ближе к реальному. Всякие же искусственные соображения, связанные с запасами прочности, не должны приниматься во внимание.

Для расчета ветровых нагрузок важно уметь описывать не профиль ветра вообще, а профиль сильного ветра. Хотя данных о непосредственном экспериментальном изучении профиля сильного ветра в настоящее время весьма немного, тем не менее можно на основании косвенных соображений высказать ряд заключений о свойствах профиля сильного ветра.

В настоящее время можно считать доказанным, что распределение ветра вблизи земной поверхности существенно зависит от термической стратификации атмосферы, т. е. от направления и величины вертикального потока тепла. Имеется множество теоретических схем, описывающих влияние стратификации на профиль метеорологических элементов и, в частности, ветра в приземном слое атмосферы. Наибольшей экспериментальной проверке была подвергнута так называемая схема М. И. Будыко [1], [2], причем проверка самыми разнообразными путями показала, что результаты, получаемые согласно этой схеме, находятся в хорошем согласии с действительностью. Схема М. И. Будыко дает зависимость профилей метеорологических элементов от стратификации в явном виде и этим она выгодно отличается от других схем, в частности, от схемы Д. Л. Лайхтмана [5], хотя в последней учитываются некоторые весьма тонкие закономерности.

Основываясь как на проверенности схемы М. И. Будыко, так и на том, что она дает явную форму зависимости профиля ветра от термической стратификации, мы будем для получения профиля сильного ветра исходить из этой схемы. Заметим, впрочем, что те же выводы могут быть получены и из схемы Д. Л. Лайхтмана, если только привлечь к рассмотрению некоторые дополнительные экспериментальные зависимости. Можно было бы и вообще не использовать никакой теоретической схемы, а исходить только из найденных экспериментально качественных закономерностей. Результат от этого не изменится.

Формула зависимости ветра от высоты согласно схеме М. И. Будыко имеет вид:

$$v = \frac{v_*}{\alpha m} \ln \frac{mz}{z_0}. \quad (1)$$

Здесь v_* — так называемая динамическая скорость — параметр, который лишь с большим трудом может быть определен независимо, и практически обычно также определяется из профиля ветра (или температуры); χ — универсальная безразмерная постоянная; z — высота, на которой скорость ветра равна v , а z_0 — так называемая шероховатость — параметр размерности длины, зависящий от свойств земной поверхности. Множитель m отражает собою влияние термической стратификации. Он связан с вертикальным потоком тепла соотношением:

$$m = \sqrt{1 + \left(\frac{\chi g h P}{2 \bar{\theta} \bar{\rho} c_p v_*^3} \right)^2} + \frac{\chi g h P}{2 \bar{\theta} \bar{\rho} c_p v_*^3}, \quad (2)$$

где g — ускорение силы тяжести, h — постоянная размерности длины (так называемая „высота приземного слоя“, $\bar{\theta}$ и $\bar{\rho}$ — соответственно — средняя температура и средняя плотность, c_p — теплоемкость воздуха при постоянном давлении, P — вертикальный поток тепла, считаемый положительным, если он направлен вверх.

Как это видно из формулы (2), при безразличной стратификации атмосферы, характеризующейся отсутствием вертикального потока тепла ($P=0$), множитель m равен единице, так что профиль ветра, согласно (1), подчиняется в этом случае простому логарифмическому закону:

$$v = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{z}{z_0}. \quad (3)$$

В зависимости от величины потока тепла P и динамической скорости v_* множитель m меняется в сравнительно широких пределах, примерно от 0,2 при значительных потоках тепла вниз (глубокие инверсии) до 4 — при значительных потоках тепла вверх (сильно конвективные условия).

Однако сильные ветры обладают в этом отношении существенной особенностью. Именно, как это можно усмотреть из формулы (1), для сильных ветров характерны большие значения динамической скорости v_* . Но из формулы (2) следует, что при увеличении v_* влияние потока тепла P быстро уменьшается, поскольку определяющим является отношение $\frac{P}{v_*^3}$.

Поэтому при сильных ветрах множитель m не должен значительно отличаться от единицы.

В силу всего сказанного можно сделать вывод, что для расчета ветровых нагрузок можно принять $m=1$ и пользоваться простым логарифмическим законом (3).

Как мы упоминали выше, значение динамической скорости лишь с большим трудом поддается непосредственному определению. Поэтому приходится отказаться от определения абсолютных значений скорости ветра по формуле (3) и довольствоваться относительными значениями, которые, впрочем, только и требуется знать при расчете ветровых нагрузок. Именно, если v_1 есть известное значение скорости на некотором, также известном уровне z_1 , то отношение $\frac{v}{v_1}$ подчиняется формуле

$$\frac{v}{v_1} = \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{z_1}{z_0}}, \quad (4)$$

легко получаемой из (3).

Значение шероховатости может также быть определено из профиля сильного ветра. Для этого достаточно разрешить выражение (4) относительно z_0 . Еще удобнее провести это вычисление графически, пользуясь тем, что величина z_0 имеет смысл того уровня, на котором скорость ветра обращается в нуль. Поэтому, построив график $(v, \ln z)$, легко экстраполяцией найти значение $\ln z_0$ (а значит и z_0), соответствующее $v = 0$.

Весьма удобно то обстоятельство, что определение z_0 может производиться не обязательно при сильном ветре и притом не обязательно при равновесной

стратификации атмосферы, а при любых условиях. Для этого случая также существуют аналитические и графические способы, изложенные, например, в работе [4].

Согласно существующим представлениям, закон (4) верен лишь в нижнем слое — до высоты нескольких десятков метров, а выше этот закон искажается под действием добавочных сил (силы Кориолиса, горизонтального градиента давления), трудно определяемых, а главное — сильно меняющихся. Однако не произойдет большой ошибки, если при расчете ветровых нагрузок принять, что логарифмический закон (4) верен во всем том слое, который требуется для расчета (не выше 100—150 м).

Если перейти от изменения ветра с высотой к изменению так называемого скоростного напора q :

$$q = \frac{1}{2} \rho v^2,$$

как это обычно делается при расчете ветровых нагрузок, то надо, очевидно, пользоваться формулой

$$\frac{q}{q_1} = \frac{\ln^2 \frac{z}{z_0}}{\ln^2 \frac{z_1}{z_0}}. \quad (5)$$

Эту формулу и следует рекомендовать взамен применяемой в настоящее время „формулы корня квадратного“

$$\frac{q}{q_1} = \sqrt{\frac{z}{z_1}}.$$

Из сказанного отнюдь не следует, что использование формулы (5) полностью решает вопрос об учете изменения ветра с высотой при расчете ветровых нагрузок.

В самом деле, мы уже указывали, что изменение сильных ветров с высотой до настоящего времени подвергалось непосредственному экспериментальному изучению в совершенно недостаточной мере.

Кроме того, нужно учитывать, что кроме „обычных“ динамически обусловленных сильных ветров, существуют еще сильные ветры, обусловленные орографическими причинами (например, бора). Роль таких ветров в разрушении строительных сооружений велика, а возможность применения к ним формулы (5) по меньшей мере сомнительна.

Наконец, нужно еще иметь в виду влияние всевозможных препятствий рельефа, растительности или строительных сооружений на аэродинамику потока (по этому вопросу см. также [3]).

В отношении влияния растительности можно сказать следующее. Существуют два крайних режима, при которых картина обтекания сравнительно проста. Если сооружение весьма значительно выдается над окружающей его растительностью, то поскольку с точки зрения ветровых нагрузок интересны главным образом высокие уровни сооружения, растительность можно схематически рассматривать как своеобразную „макросшероховатость“. Иначе говоря, в этом случае ветер будет отличаться от „обычного“ только большим значением шероховатости. Если, наоборот, сооружение ниже, чем окружающая его растительность, то действие ее можно схематически рассматривать как своеобразную „виртуальную вязкость“, так что в этом случае ветер будет отличаться от обычного только меньшими по абсолютной величине значениями. В промежуточных же случаях картина обтекания будет значительно сложнее.

В силу всех этих причин предложение формулы (5) отнюдь не исключает необходимости в проведении специальных опытов по непосредственному изучению профиля сильного ветра. Это изучение нужно не только и не столько для подтверждения справедливости формулы (5), сколько для того, чтобы осветить условия, заведомо не охватываемые формулой (5). Проведение таких опытов следует считать одной из главных задач, стоящих в порядке дня.

§ 4. Весьма важным для проблемы ветровых нагрузок является вопрос о структуре ветрового поля. Значение его определяется прежде всего тем, что никакие попытки теоретической количественной трактовки проблемы ветровых нагрузок немислимы без учета структуры естественного потока. В частности, объяснение таких явлений, как резонанс колебаний сооружения с порывами ветра или возникновение сильных нагрузок в малой области и за малый отрезок времени, может быть получено только с использованием представлений о структуре ветра.

Необходимо при этом иметь в виду, что структура естественного (ветрового) потока весьма существенно отличается от структуры искусственного потока, создаваемого, например, в аэродинамических трубах. Это различие связано, во-первых, с наличием поверхности земли, которая играет роль твердой стенки и определяет собой неоднородность структурных свойств потока в вертикальном направлении; во-вторых, вследствие различия масштабов явления, турбулентные возмущения значительно более выражены в естественных условиях, чем для искусственного потока. Поэтому от модельного изучения ветровых нагрузок нельзя ожидать исчерпывающего исследования влияния структуры естественного потока.

Степень турбулизации воздушного потока может быть характеризована безразмерным критерием, введенным Л. Г. Лойцяным:

$$Ka = \frac{|\bar{v}'|}{\bar{v}},$$

где $|\bar{v}'|$ — средняя абсолютная величина пульсации скорости, а \bar{v} — средняя скорость.

Простое сравнение характерных значений Ka указывает на существенное различие структуры искусственного и естественного потоков. В самом деле, в условиях аэродинамической трубы, даже при наличии специальных „турбулизирующих“ устройств, Ka редко выходит за пределы сотых долей. В атмосфере же Ka в большинстве случаев имеет порядок нескольких десятых, а иногда даже единицы. Таким образом, в естественном потоке, как правило, турбулентность более развита, чем в искусственном.

Можно указать, к чему приводит это обстоятельство в отношении ветровых нагрузок. Известно, что при увеличении степени турбулентности потока, обтекающего тела с углами, острыми краями и т. п., могут происходить перемещения линий отрыва струй.

В терминах динамических давлений это означает, что появляются дополнительные области отрицательных давлений и вообще усиливается роль отрицательных давлений, т. е. динамических давлений, направленных от тела к потоку. Отсюда вытекает, что вследствие различия турбулентной структуры естественного и искусственного потоков следует ожидать больших отрицательных давлений в натуре, чем в модели и, следовательно, принимать специальные меры против этих отрицательных давлений (см. также [10]).

При изучении различных задач, связанных с динамическим давлением ветра, часто возникает вопрос, на какую скорость ветра следует обращать внимание: на среднюю за сравнительно длительный период или на значительно большую скорость, осуществляющуюся в весьма малые промежутки времени? Существует даже специальная терминология, различающая „максимальную среднюю скорость ветра“ и „максимальную скорость ветра в порывах“. Понятно, что такое разделение весьма условно и правильнее говорить о максимумах скорости, подвергнутой осреднению за тот или иной промежуток времени. Но, так или иначе, важно ответить на вопрос, какой максимальный интервал времени осреднения допустим при расчете, в частности, ветровых нагрузок.

Следующий грубо ориентировочный подсчет позволяет подойти к ответу на этот вопрос.

Можно говорить о некотором условном масштабе длины для ветровой нагрузки, рассматривая его как минимальное расстояние, на котором должна существовать некоторая большая нагрузка, чтобы представлять опасность в смысле разрушения

здания. Поскольку такая опасность может возникнуть при действии нагрузки даже на часть какой-либо поверхности (например, крыши) сооружения, то упомянутый масштаб должен быть во всяком случае не больше 50—60 м. Воспользуемся далее тем хорошо известным в теории метеорологических полей фактом, что субстанциональные производные всегда значительно меньше локальных и конвективных производных, так что последние можно с достаточной точностью считать равными по абсолютной величине (см., например, [8]). Иначе говоря, изменение, в частности, скорости в данной неподвижной точке можно приравнять к переносу скорости воздушным потоком, поскольку изменение скорости в движущейся частице весьма мало.

Этот факт дает основание приравнять характерную длину L произведению характерного времени T на характерную скорость v , так что:

$$T = \frac{L}{v}.$$

Поскольку скорости ветра, опасные в отношении разрушения, имеют порядок $v = 30$ м/сек., то подставляя L и v , получаем, что характерное время имеет порядок величины 2 сек. Совершенно очевидно, наконец, что интервал осреднения не должен, во всяком случае, превосходить характерное время T . Таким образом, максимальный возможный интервал осреднения имеет порядок 2 сек.

Понятно, что этот подсчет носит ориентировочный характер, но порядок величины максимально допустимого интервала осреднения им уловлен, повидимому, правильно. Этот интервал оказывается весьма малым, чем в значительной мере обуславливается трудность всей проблемы ветровых нагрузок.

§ 5. Важность учета явления резонанса при проектировании строительных сооружений не нуждается в подробном обосновании: общеизвестны те губительные последствия, к которым может привести неучет возможности резонанса. Наряду с такими возможными причинами резонанса строительных сооружений, как работа различных машин внутри сооружения или по соседству с ним, необходимо иметь в виду также и возможность резонанса с ветром, т. е. близости собственных периодов колебаний сооружения или части его к периодам ветровой нагрузки как возмущающей силы.

В существующих нормах ветровой нагрузки вопросам, связанным с резонансом, уделяется существенное внимание. В частности, имеется указание об увеличении расчетных нагрузок для сооружений, более „поддающихся“ колебаниям и, кроме того, приведены элементарные формулы расчета частот собственных колебаний простейших конструктивных элементов.

Однако все эти расчеты как бы повисают в воздухе, не доводясь до логического завершения вследствие того, что отсутствуют какие-либо указания о частотах вынуждающей силы, т. е. ветровой нагрузки.

Между тем существующие представления о структуре ветрового поля позволяют сделать некоторые заключения по этому вопросу.

В пульсациях скорости ветра лишь изредка удается подметить некоторый преобладающий ритм, сильно искаженный другими, неупорядоченными пульсациями и связанный обычно с наличием термической или орографической неоднородностями. В подавляющем же большинстве случаев такого преобладающего ритма не оказывается, и мы имеем дело с аperiodическими пульсациями. Это означает, что пульсации скорости ветра имеют не дискретный, а непрерывный спектр частот и поэтому попытки выделения какой-то одной частоты или разложения пульсаций в ряд Фурье по частотам, кратным какой-либо одной, обречены на неудачу.

Из непрерывности спектра частот пульсаций не следует, однако, что все частоты оказывают одинаковое влияние. Дело в том, что энергия турбулентных пульсаций распределена по их спектру неоднородным образом и, в частности, на пульсации очень большой частоты (т. е. очень малого периода) приходится весьма малая часть общей энергии: именно на порывы ветра с периодом нескольких десятых секунды и меньше расходуется ничтожная доля общей турбулентной энергии.

Для проблемы ветровых нагрузок этот факт весьма важен. В самом деле, большинство строительных сооружений (или их частей) обладает периодами собственных колебаний, меньшими указанной величины. Следовательно, для таких сооружений возможность резонанса с ветровой нагрузкой в силу сказанного практически исключена. Эта возможность имеет место лишь для некоторых сооружений или их частей, обладающих сравнительно большими периодами собственных колебаний (высокие башни, трубы, мачты и т. п.). Только такие сооружения и должны рассматриваться с учетом возможности резонанса с ветровой нагрузкой. Для них должны вводиться соответствующие, довольно значительные повышения расчетных норм.

Таким образом, привлечение имеющихся представлений о структуре ветра приводит к выводу, что для большинства сооружений — с короткими периодами собственных колебаний — не следует повышать норм на возможность „ветрового“ резонанса, для сооружений же, периоды собственных колебаний которых сравнительно велики, нужно предусматривать значительное повышение расчетных норм.

§ 6. Учет зависимости максимальных скоростей ветра от географических условий и, в связи с этим, географическое районирование максимальных скоростей ветра имеют кардинальное значение для проблемы ветровых нагрузок. Однако исследование этих вопросов связано со значительными трудностями.

На одну трудность мы уже указывали выше. Именно, было выяснено, что максимальный допустимый интервал осреднения скорости ветра не превышает нескольких секунд. Но климатографические данные выводятся обычно из первичного материала, представляющего собой не непрерывный во времени ряд данных, а совокупность отдельных дискретных, так называемых срочных наблюдений. Поэтому, даже если бы мы обладали нужными данными, возможность применения их при районировании ветровых нагрузок была бы весьма сомнительна.

Необходимо далее иметь в виду, что в настоящее время сравнительно удовлетворительно изучены лишь вопросы, связанные с климатографией средних, в то время как климатография кривых распределения находится в зачаточном состоянии. Между тем ясно, что для проблемы ветровых нагрузок среднее значение скорости ветра не представляет никакого интереса, а важны лишь „максимальные“ скорости. Именно, нужно знать частоты сильных ветров в данном месте, т. е. знать сравнительно детально верхний участок кривой распределения скоростей ветра. Такие сведения в климатографических сводках не приводятся.

Строго говоря, даже имея данные по кривым распределения, мы еще не будем в состоянии сразу сделать вывод о расчетной величине скоростного напора в данном месте. Действительно, рассчитывать на самую большую скорость, встречающуюся, например, раз в тысячи лет, конечно, нецелесообразно. Поэтому-то и нужно знать не крайнюю точку кривой распределения, а некоторый участок вблизи этой точки. Но мы не имеем объективного критерия, который позволил бы выбрать нужную нам точку на кривой распределения. Впрочем, ясно, что выработать такой критерий можно будет только после изучения реальных кривых распределения.

В этом отношении рассматриваемая проблема во многом аналогична проблеме давления воды на гидротехнические сооружения.¹ Там тоже невыгодно вести расчет для максимальных скоростей течения, когда-либо встречающихся в данном месте, и тоже поэтому стоит вопрос о выборе некоторой оптимальной точки на кривой распределения скоростей течения.

Можно представить себе следующую постановку вопроса. Построим кривую, выражающую вероятное время t , в течение которого данное гидротехническое сооружение в данном месте не будет разрушено течением, в зависимости от максимальной скорости течения $v_{\text{макс}}$, на которую это сооружение рассчитано.² Вид этой кривой будет, очевидно, зависеть как от рода сооружений, так и от характеристик течения. Примерный характер такой кривой изображен на рис. 1.

¹ На эту аналогию мне указал М. И. Будыко.

² В гидрологии обычно рассматривается не скорость, а связанная с ней величина расхода.

Очевидно, что вести расчет для весьма малых v_{\max} (например, v_1 на рис. 1) невыгодно: тогда сооружение будет быстро разрушено потоком (именно через время t_1). С другой стороны, выбор значения v_{∞} , соответствующего бесконечному времени разрушения, также не дает оптимального решения: хотя сооружение не разрушится потоком, оно разрушится от других причин или устареет, и стоимость его будет слишком велика. Наиболее выгодным оказывается некоторое промежуточное значение v_0 , при котором, с одной стороны, сооружение придется восстанавливать сравнительно редко, а с другой — стоимость его будет сравнительно невелика. Пользуясь кривой рис. 1 и зная, кроме того, зависимость стоимости постройки и стоимости восстановления сооружения от величины t , можно без труда найти это оптимальное значение.

Именно такая постановка задачи необходима для правильного, экономически оправданного ее решения. Это в равной мере относится и к гидротехническим сооружениям, подвергающимся действию течения реки, и к строительным сооружениям, подвергающимся действию ветра.

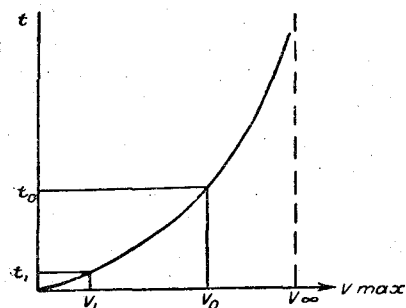


Рис. 1

Однако для того, чтобы научиться применительно к проблеме ветровых нагрузок строить кривые зависимости t от v_{\max} , нужно обладать достаточно полным решением как аэродинамической, так и метеорологической сторон этой проблемы. В самом деле, для построения таких кривых надо знать достаточно хорошо и свойства кривых распределения больших скоростей ветра и характер действия на сооружения сильного ветра. Существующих в настоящее

время в метеорологии и в аэродинамике знаний по этим вопросам явно недостаточно. Надо отметить, что гидротехника обладает гораздо большими знаниями по кривым распределения скоростей течения, а также по вопросу о действии его на гидротехнические сооружения. Поэтому упомянутая гидротехническая проблема в настоящее время разрешена удовлетворительно, в то время как до решения аналогичной проблемы в отношении ветровых нагрузок еще очень далеко.

Кроме перечисленных трудностей географического районирования максимальных скоростей ветра, имеется еще одна трудность, которая представляется нам наиболее существенной, несмотря на то, что она носит чисто технический характер. Дело в том, что применяемый на большинстве метеорологических станций стандартный прибор для измерения скорости ветра (так называемый флюгер с легкой доской) вообще не в состоянии уловить различные большие скорости, фиксируя только, что скорость ветра больше 15 м/сек. Но для ветровых нагрузок интересны лишь скорости, превышающие, во всяком случае, 20 м/сек. Таким образом, речь идет не только о том, что нужно заново производить обработку первичных данных, но и о том, что большая часть первичных данных непригодна для нашей цели. Имеются лишь отдельные, никем не собранные и не систематизированные измерения больших скоростей флюгерами с тяжелой доской, ураганомерами Гольцмана и другими приборами, обработку которых надлежит произвести. Одновременно необходимо поставить вопрос о том, что флюгеры с тяжелой доской должны применяться повсеместно. Климатографические данные должны прежде всего соответствовать основному назначению — быть достаточными для важнейших прикладных задач.

В связи с трудностями, с которыми связано районирование ветровых нагрузок, не представляется возможным дать в настоящее время каких-либо рецептов по изменению существующих норм, и нам придется ограничиться лишь некоторыми замечаниями к постановке этой задачи.

Мы не будем здесь касаться истории рассматриваемого вопроса, сведения о которой можно найти, например, в работах [7], [12] и других, а обратимся сразу к современному состоянию этого вопроса.

Обращает на себя внимание крайне хаотичное состояние, в котором находится районирование ветровых нагрузок в капиталистических странах. Приведем некоторые примеры.

Естественно было бы ожидать, что в странах со значительной территорией должно иметь место сравнительно детальное районирование ветровых нагрузок, а для стран с малой территорией можно, при прочих равных условиях, ограничиться одной градацией. Известно, однако, что во Франции, например, принята одна градация. В США вообще не существует какого-либо общего положения по учету ветровых нагрузок, так что отдельные штаты, а иногда и отдельные города имеют свои нормы и свои расчетные максимальные скорости ветра, причем простое сопоставление этих нормативов показывает, что различие их ни в какой степени не связано с географическим районированием ветровых нагрузок, а вызвано совершенно случайными обстоятельствами, характерными для капиталистической анархии производства. С этим же связан и факт чрезвычайно частого разрушения в США зданий ветром. Наоборот, в Голландии существуют специальные карты максимальных скоростных напоров, с явно излишней для ее небольшой территории детальностью. Нужно в связи с этим заметить, что слишком подробное районирование так же нецелесообразно, как и слишком грубое, поскольку чрезмерная детализация ведет к излишнему усложнению расчетов, а высокая точность, если она при этом получается, все равно не может быть использована из-за неточности других входных данных. Кроме того, максимальная скорость ветра в силу своей значительной изменчивости вообще не должна подвергаться слишком детальному районированию.

В Советском Союзе районирование произведено значительно целесообразнее, чем в капиталистических странах, но и оно в настоящее время не удовлетворяет возросших запросов социалистического строительства. Именно районирование ветровых нагрузок выразилось в разделении территории СССР на несколько зон, причем правильнее говорить даже не о разделении, а о выделении некоторых областей с сильными ветрами.

Нормы СССР предусматривают три зоны:

1) побережье Черного моря вблизи Новороссийска; 2) побережья, не отнесенные к первой зоне; 3) все остальное.

Мы видим, что третья зона („все остальное“) охватывает несравненно большую территорию, чем выделенные зоны сильных ветров.

Не подлежит сомнению, что такое районирование явно устарело. Даже если говорить о районировании не как о разделении, а как о выделении отдельных районов, то и с такой точки зрения существующее районирование нуждается в значительном усовершенствовании. Это относится, в частности, к Северу и особенно к Дальнему Востоку Советского Союза. Грандиозный размах социалистического строительства в этих районах сделал насущно необходимым освещение их с точки зрения ветровых нагрузок. Широко известно, что в этих районах встречаются весьма сильные ветры. Между тем по существующим нормам эти районы относятся к третьей зоне, что совершенно не согласуется с действительным положением вещей. Насколько назрел этот вопрос, видно хотя бы потому, что к разработке его уже приступили по своей инициативе местные организации. Этот факт, разумеется, следует приветствовать, но он не только не устраняет, а наоборот, подчеркивает необходимость централизованной разработки всего вопроса о районировании ветровых нагрузок в целом.

Пути усовершенствования существующего районирования ветровых нагрузок совершенно очевидны.

Прежде всего на сети метеостанций необходимо ввести в качестве стандартного прибора флюгер с тяжелой доской или какой-либо другой прибор, позволяющий измерять большие скорости ветра. Наличие этих приборов, наряду с применяемыми флюгерами с легкой доской, позволит получить кривые распределения скоростей ветра, охватывающие весь спектр скоростей. Знание таких кривых распределения необходимо отнюдь не только для проблемы ветровых нагрузок на строительные

сооружения, но и для целого ряда других важных прикладных вопросов, как, например, вопрос о полезном использовании энергии ветра.

Нельзя, однако, отложить усовершенствование районирования ветровых нагрузок до того времени, когда будут введены повсеместно флюгеры с тяжелой доской и накоплены достаточно длинные ряды наблюдений по ним. Необходимо уже сейчас начать систематизацию и обработку тех немногочисленных, но ценных данных, которые доставляют применявшиеся и до настоящего времени в некоторых местах приборы для измерения больших скоростей ветра. Тогда можно будет надеяться и на появление косвенных методов, предложение и использование которых будет тем легче, чем больше будет собрано данных.

Накопление этих данных должно позволить установить принципы рационального районирования и решить ряд других вопросов, связанных с районированием ветровых нагрузок. Можно предполагать, что уже эти предварительные данные позволят существенно улучшить существующее районирование этих нагрузок.

Нам представляется, что на примере проблемы ветровых нагрузок на строительные сооружения видна плодотворность методов исследования прикладной метеорологии.

В самом деле, уже сама постановка этой проблемы как задачи прикладной метеорологии позволила дать ответ на ряд важных вопросов, возникающих при изучении ветровых нагрузок. Несмотря на то, что эти ответы представляют собою лишь первое, грубое приближение, некоторые из них уже сейчас могут быть использованы для улучшения существующих норм. Так, в частности, можно рекомендовать более удачно, чем это делается сейчас, учитывать изменение ветра с высотой, более целесообразно предусматривать возможность „ветрового“ резонанса.

Некоторые выводы настоящей работы, хотя они и не должны найти непосредственного отражения в нормах, представляются принципиально важными, как, например, вывод о несущественности статического давления или вывод о необходимости малых интервалов осреднения.

Ясно, однако, что, ограничиваясь только постановкой задачи, нельзя рассчитывать на получение сколько-нибудь исчерпывающих результатов: необходима разработка задачи. Эта разработка, по нашему мнению, должна протекать по двум линиям: по экспериментальной и климатографической. Экспериментальные работы должны уточнить наши знания о профиле и структуре сильного ветра и об изменении их вблизи препятствия. Климатографические исследования должны дать основу для рационального географического районирования ветровых нагрузок.

ЛИТЕРАТУРА

1. Будыко М. И. Испарение в естественных условиях. Гидрометеоздат, 1948.
2. Будыко М. И. Турбулентный обмен в нижних слоях атмосферы. „Метеорология и гидрология“, № 2, 1946.
3. Гандин Л. С. О моделировании ветровых нагрузок на строительные сооружения. Настоящий сборник.
4. Гандин Л. С. Сравнительный анализ некоторых методов определения коэффициента турбулентного перемешивания в приземном слое воздуха. Труды ГГО, вып. 16 (78), 1949.
5. Лайхтман Д. Л. О профиле ветра в приземном слое атмосферы при стационарных условиях. Труды НИУ ГУГМС, сер. 1, вып. 39, 1947.
6. Ретгер Э. И. Ветровые нагрузки на строительные сооружения. 1936.
7. Рынин Н. А. Давление ветра на здания. Труды аэромех. лаб. Института инж. путей сообщ., 1913.
8. Юдин М. И. Вопросы теории турбулентности и структуры ветра с приложением к задаче о колебаниях самолета. Труды НИУ ГУГМС, сер. 1, вып. 33, 1946.
9. Юдин М. И. Прикладные проблемы учения об атмосферной турбулентности. „Метеорология и гидрология“, № 3, 1947.
10. Crossley. Wind pressure on buildings. Meteorological Magazine, p. 68, 1935.
11. Durst C. S. Wind pressures on buildings. Meteorological Magazine, p. 208, 1934.
12. Fleming R. Wind action on buildings. Engineering, vol 136 pp. 481, 536, 590, 1933; vol 140, pp. 432, 539, 1935; vol. 145, p. 280, 1938.

О МОДЕЛИРОВАНИИ ВЕТРОВЫХ НАГРУЗОК НА СТРОИТЕЛЬНЫЕ СООРУЖЕНИЯ

§ 1. Одним из основных вопросов проблемы ветровых нагрузок на строительные сооружения является вопрос о том, как действует заданный ветровой поток на то или иное сооружение, какие по величине и направлению усилия возникают под действием заданного ветра в строительном сооружении. Только ответив на этот вопрос, можно ввести соответствующие усиления конструкции с тем, чтобы сооружение могло противостоять действию ветровых нагрузок.

Строительные сооружения имеют сложную геометрическую форму. В них всегда имеются углы, так что обтекание их при любом состоянии атмосферы является отрывным. В подавляющем большинстве случаев сооружения — полые внутри и имеют отверстия, что еще более усложняет картину обтекания. Между тем современное состояние аэродинамики позволило теоретически исследовать лишь обтекание тел самой простой формы и притом хорошо обтекаемых. Даже к задаче об обтекании тела такой простой геометрической формы, как сплошной куб, в настоящее время подход неизвестен.

Отсюда ясно, что теоретическое изучение обтекания строительных сооружений воздушным потоком в настоящее время пока невозможно; единственным путем остается экспериментальный.

Опыты по изучению ветровых нагрузок естественно разделить на натурные и модельные, т. е. на опыты с самими сооружениями на естественном ветре и опыты с моделями сооружений в искусственном воздушном потоке.

Натурные опыты над ветровыми нагрузками наталкиваются на существенные затруднения. Прежде всего они требуют громоздкой и дорогостоящей аппаратуры и наличия большого штата исследователей. Далее следует иметь в виду, что основной интерес представляет изучение действия сильного ветра, который случается сравнительно редко; поэтому большая часть времени уходит впустую, на выжидание сильного ветра.

Весьма существенно, наконец, что картина обтекания реальных сооружений очень сложна, и потому необходимо систематическое изучение ее, начиная с простейших схем и переходя постепенно к более сложным. При этом целесообразно рассматривать отдельно влияние всевозможных усложняющих факторов, как, например, различных пристроек, отверстий или рядом стоящих сооружений. Понятно, что такое систематическое изучение в натуральных условиях провести чрезвычайно трудно.

В течение трех лет, с 1936 по 1938 гг., в США проводились натурные опыты по изучению ветровых нагрузок на известное здание Empire States Building. Эти опыты были весьма громоздки, на проведение их была затрачена огромная сумма. Можно было бы думать, что такие „грандиозные“ опыты позволят резко продвинуть вперед проблему ветровых нагрузок. Однако этого не случилось. Более того, достаточно ознакомиться с отчетом об этих опытах [11], чтобы убедиться, что они не дали, по существу, никаких выводов. Этот единственный в своем роде пример

красноречиво подтверждает как необходимость постепенного, систематического изучения обтекания сооружения, так и трудности, возникающие при проведении натурных опытов.

Понятно поэтому то внимание, которое исследователи проблемы ветровых нагрузок уделяли и уделяют модельным опытам.

§ 2. Необходимость проведения опытов, и притом модельных, для исследования ветровых нагрузок была ясна уже ученым, впервые обратившимся к этой проблеме. Первые модельные опыты были выполнены еще в конце прошлого столетия. Однако в них, как и в последующих работах, использовались такие несовершенные способы создания воздушного потока относительно модели, как карусель или падающее приспособление, вследствие чего работы эти лишены практической ценности. Русский ученый Н. А. Рынин впервые произвел опыты в аэродинамической трубе [6]. Его обстоятельные и тщательные эксперименты позволили получить ряд важных выводов и стимулировали дальнейшее модельное изучение ветровых нагрузок, как, например, работу [9]. В дальнейшем, после первой мировой войны в аэродинамических лабораториях всех стран в том или ином объеме производились опыты над моделями строительных сооружений. Особенной систематичностью, продуманностью методики и богатством выводов отличались работы советских авторов К. Бункина и А. Черемухина в ЦАГИ [1] и Э. И. Реттера в Институте промышленных сооружений. Книга последнего [5] и в настоящее время является единственной в мировой литературе по широте охвата темы и значительности выводов.

Во всех существующих нормах ветровых нагрузок учтены результаты модельных исследований. В ряде случаев вводились новые нормы в связи с появлением новых модельных результатов, как это можно видеть на примере немецких норм.

Анализ всего обширного и многообразного материала модельных исследований, накопившегося в настоящее время, не входит в задачи настоящей статьи. Как мы попытаемся ниже показать, далеко не все результаты модельных опытов в настоящее время используются в практике расчета ветровых нагрузок и, в частности, в существующих нормах, причем это относится не к отдельным числовым результатам, а к ряду принципиальных выводов. Таким образом, между данными современной аэродинамики и их использованием при расчете ветровых нагрузок на строительные сооружения существует определенный разрыв. Выявить этот разрыв и предложить меры для его уничтожения и является основной нашей задачей.

§ 3. Обратимся прежде всего к вопросу о том, какие именно величины, получаемые или могущие быть полученными в результате модельных опытов, важны для проблемы ветровых нагрузок.

В практике неизвестно случаев, чтобы под действием сильного ветра происходила передвижка всего сооружения в целом: сооружения всегда бывают наиболее сильно укреплены у фундамента. Поэтому равнодействующие сил ветровых давлений на ту или иную поверхность не представляют большого интереса. Существенными являются всевозможные моменты этих сил и, главным образом, опрокидывающие моменты, т. е. моменты относительно горизонтальных осей.

С другой стороны, известно, что сооружения редко опрокидываются целиком. Гораздо чаще сильные ветры вызывают повреждение отдельных частей сооружения. Это связано, во-первых, с тем, что ветровые давления распределены по поверхности сооружения весьма неравномерным образом; во-вторых, сооружение никогда не бывает, да и не должно быть укреплено всюду в равной мере. Поэтому еще больший интерес, чем интегральные характеристики — моменты, представляют дифференциальные характеристики — распределения давлений по поверхности обтекаемого ветром сооружения.

Важно еще иметь в виду, что, зная распределение давлений, можно без труда подсчитать и всевозможные интегральные моменты. Поэтому знание только дифференциальной характеристики, т. е. распределения динамических давлений, является достаточным для полного расчета ветровых нагрузок.

Среди строительных конструкций часто встречаются полые внутри сооружения, как, например, различные здания. Рассчитывая ветровые нагрузки на такие соору-

жения, необходимо принимать во внимание не только внешние, но и внутренние давления, т. е. оперировать с суммарными динамическими давлениями. Точно так же, имея дело с каркасными сооружениями, надо учитывать давления ветра на все стороны каждого элемента такого сооружения, иначе говоря, надо также оперировать с суммарными динамическими давлениями.

Таким образом, для расчета ветровых нагрузок нужно знать распределения суммарных динамических давлений по поверхностям всех элементов строительного сооружения.

§ 4. Проанализируем результаты, даваемые модельными опытами для обтекания плоской пластинки при различных углах набегания потока. На рис. 1 приведены заимствованные из книги Е. В. Красноперова [4] распределения динамических давлений на наклонную квадратную пластинку при различных углах наклона ее

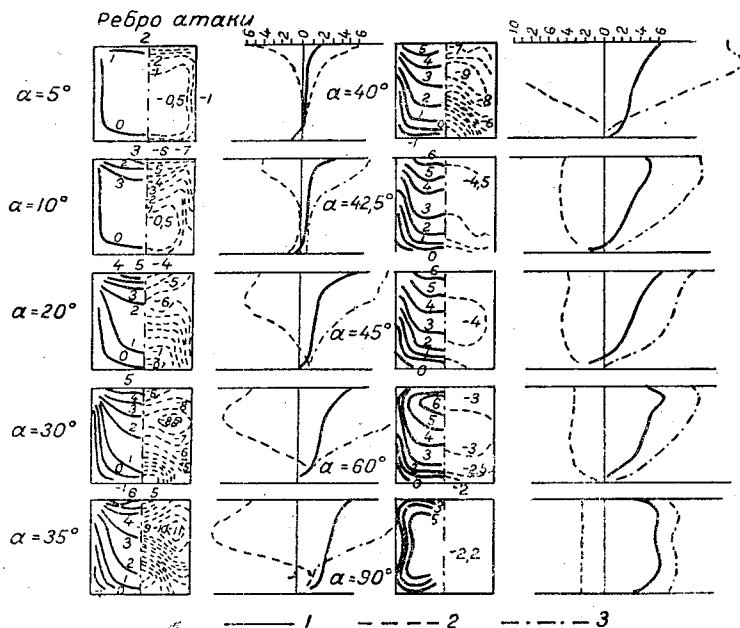


Рис. 1.

1 — наветренная сторона, 2 — подветренная сторона, 3 — суммарное давление.

по отношению к потоку воздуха, двигавшегося со скоростью 10 м/сек. Эти распределения представляют распределения давлений (рис. 1) двумя способами — в виде изодинам, т. е. линий равного динамического давления для „более наветренной“ и „более подветренной“ сторон пластинки, и в виде эпюр динамического давления для среднего сечения пластинки. Мы дополнили эти графики еще эпюрой суммарного давления. Все динамические давления измерены в долях так называемого скоростного напора, т. е. величины $\frac{\rho V^2}{2}$.

Из рис. 1 видно, что при некотором значении угла набегания потока, лежащем вблизи 40° , происходит резкое изменение распределения давлений, так что общая картина при малых и больших углах оказывается совершенно различной. Этот угол носит название критического. Для углов набегания, близких к критическому, характерно резкое увеличение отрицательного давления на „более подветренной“ стороне и, как следствие, резкое увеличение суммарного давления.

Заметим, что распределение давлений зависит также от удлинения пластинки, т. е. от соотношения ее сторон, и от числа Рейнольдса:

$$Re = \frac{VL}{\nu},$$

БИБЛИОТЕКА
2 Труды ЛЕНИНГРАДСКОГО
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА

где V — скорость набегания потока, L — характерный размер пластинки, ν — кинематический коэффициент вязкости потока, но качественно картина не меняется и, в частности, практически всегда имеются критические углы, хотя расположение их и меняется в зависимости от удлинения пластинки и числа Re .

Это обстоятельство наводит на мысль, что и при обтекании строительных сооружений могут существовать некоторые „невыгоднейшие“ углы набегания ветра, при которых динамические давления оказываются наибольшими по абсолютной величине.

Что это действительно так, нетрудно убедиться путем анализа результатов, полученных в опытах над моделями строительных сооружений. Рассмотрим, например, данные работы Эйфеля [9], посвященной изучению обтекания модели ангара.

На рис. 2 воспроизведены эпюры внешних динамических давлений на среднее сечение модели ангара при различных углах натекания потока, заимствованные из упомянутой работы Эйфеля и также измеренные в долях скоростного напора.

Мы видим, что максимальные по абсолютной величине динамические давления имеют место не при поперечном набегании потока, а при движении его под углом 60° к фасаду ангара. При этом „невыгоднейшем“ угле динамические давления достигают сравнительно больших значений и притом весьма неравномерно распределены по поверхности ангара, так что возникают значительные местные разрушающие усилия.

Еще существеннее эффект „невыгоднейших“ углов для суммарных давлений при наличии отверстий. На рис. 3 дана эпюра суммарных давлений

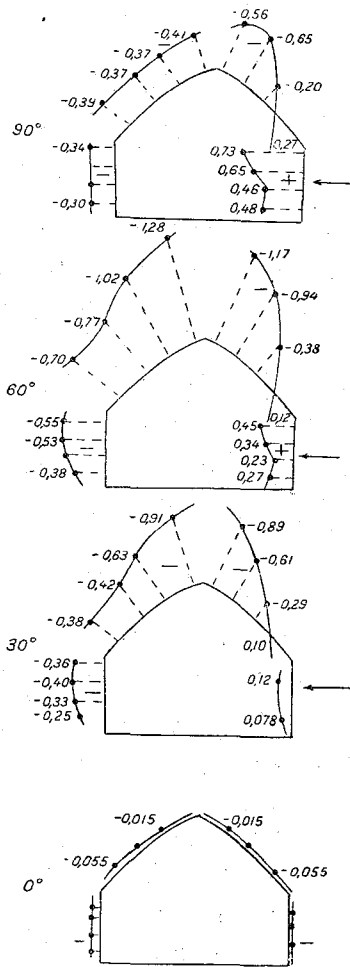


Рис. 2.

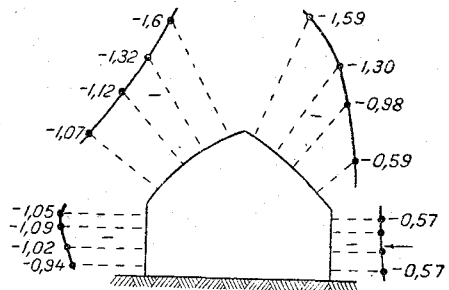


Рис. 3.

на среднее сечение модели ангара с открытой торцевой стенкой для угла набегания потока 30° , являющегося „невыгоднейшим“ углом в этом случае. Суммарные давления достигают еще более значительных абсолютных величин: максимальное превосходит 1,6.

Ясно, что эффект „невыгоднейших“ углов должен учитываться при проектировании строительных сооружений. Действительно, в первую очередь должны приниматься во внимание условия, наиболее опасные в смысле разрушения сооружений.

Однако в существующих нормах всех стран, в том числе и отечественных [2], эти углы никак не учитываются, а рассматриваются лишь случаи поперечного, а иногда еще и продольного натекания ветра. После сказанного ясно, что такое положение является совершенно неудовлетворительным и должно в ближайшее же время быть исправлено.

В ряде случаев сильный ветер имеет ярко выраженное преимущественное направление, как, например, бора в Новороссийске. Для таких случаев вполне естественной является постановка вопроса о наиболее выгодном расположении сооружения по отношению к преобладающему направлению сильного ветра. Этот вопрос должен, очевидно, рассматриваться специально в каждом случае, причем для его решения необходимо знать распределение динамических давлений при разных углах набегания ветра.

Рисунки 2 и 3 показывают также, что подавляющая часть поверхности крыши подвержена отрицательным давлениям, а имеющие место в отдельных частях положительные давления невелики. Этот факт имеет важное значение в вопросе о совместном учете действия ветровой и снежной нагрузок — он показывает, что эти нагрузки имеют противоположное направление. Отсюда следует, что предусматривать совместное „давление“ на крыши зданий со стороны ветра и снега, значит вводить совершенно ненужные запасы прочности: достаточно учитывать лишь возможность существования только каждой нагрузки порознь. Это важное обстоятельство также не нашло своего отражения в существующих нормах.

§ 5. Для того чтобы использовать результаты модельных испытаний при проектировании ветровых нагрузок, необходимо знать, не меняется ли картина распределения давлений при переходе от модели к натуре, не имеется ли практически ощутимого „масштабного „эффекта“, искажающего эту картину. Ввиду трудности натуральных опытов затруднена и непосредственная проверка величины масштабного эффекта. Поэтому рядом исследователей был использован косвенный метод проверки. Именно, производились только модельные испытания, но брались несколько геометрически подобных моделей разных размеров и сравнивались распределения динамических давлений в относительных единицах.

Заимствованный нами из работы [9] рис. 4 показывает результаты одной из серий таких опытов. В этих опытах использовались три модели, причем линейные размеры наибольшей превосходили размеры наименьшей в 40 раз. Как видно из рис. 4, масштабный эффект даже для такого существенного различия масштабов оказался пренебрежимо малым.

К аналогичным результатам пришли и другие исследователи. Под влиянием этих результатов, а также вследствие того, что размеры объекта превосходят размеры наибольшей модели в меньшей степени, чем различие наибольшей и наименьшей моделей, в литературе вопроса укоренилось мнение о несущественности масштабного эффекта. Поэтому результаты модельных опытов считалось возможным без какого-либо изменения переносить на проектирование моделируемого сооружения.

Однако сравнительно недавно была выполнена прямая проверка масштабного эффекта. Отверстия для снятия давления в разных точках стен и крыши исследуемого здания были соединены с приемными частями батарейного микроманометра, показания которого фотографировались исследователем в тот момент, когда оказывались соответствующие ветровые условия. Аналогичным образом производились модельные опыты в аэродинамической трубе. Сравнение выявило существенное различие распределений динамических давлений в натуральных и модельных условиях.

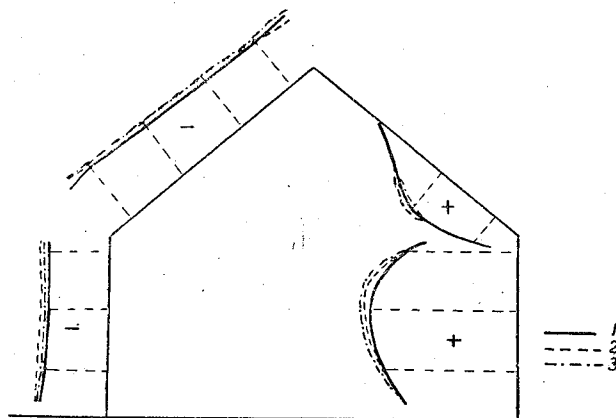


Рис. 4.
1 — ангар $400 \times 400 \times 340$ мм³, 2 — ангар $50 \times 50 \times 42,5$ мм³, 3 — ангар $8 \times 8 \times 6,8$ мм³.

Это различие видно на рис. 5, взятом из заметки Дерста [8]. Он относится к случаю, когда ветер был перпендикулярен к меньшей из стен. На верхнем рисунке показаны точки, в которых замерялось давление, слева даны результаты модельных опытов, а справа — натуральных (пересчитанные с „английских“ величин $\frac{p}{\rho V^2}$ на обычные $\frac{2p}{\rho V^2}$).

Мы видим, что эти результаты для модели и природы существенно отличаются друг от друга. В частности, отрицательные давления на наветренный склон крыши оказываются по абсолютной величине меньшими в натуральных, чем в модельных условиях примерно в полтора раза, так что для перехода от модели к натуре следует умножить результаты на „масштабный коэффициент“ 0,67. Наоборот, отрицательные давления на подветренный скат крыши оказываются в натуральных условиях примерно в полтора раза большими, чем в модельных, так что для перехода от модели к натуре следует умножить результаты на „масштабный коэффициент“ 1,5.

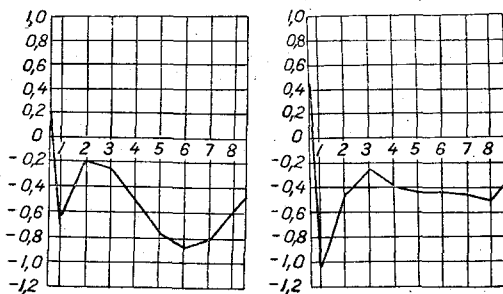
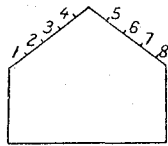


Рис. 5.

Этот график, приводящийся во всех учебниках, показывает, что в то время, как в широком интервале чисел Рейнольдса сопротивление меняется слабо, существует весьма узкий интервал, так называемые критические числа Рейнольдса, в которых изменение сопротивления весьма велико, так что в закритической области оно значительно меньше, чем в докритической. Это объясняется турбулизацией пограничного слоя обтекания цилиндра, который, будучи турбулентным, отрывается от цилиндра при закритических числах Рейнольдса дальше вниз по потоку. Картина распределения давлений по поверхности цилиндра тоже оказывается различной в докритической и закритической областях чисел Re , как это можно видеть из рис. 7, взятого из книги [4].

На нем сплошной линией показано распределение давлений при закритических, а прерывистой — при докритических числах Рейнольдса.

Из этого элементарного примера видно, что относительное изменение размера не является определяющим для масштабного эффекта, а все зависит от абсолютного размера. Иначе говоря, изменение размеров обтекаемого тела в одинаковое число раз может привести к различным эффектам, в зависимости от того, пройдет ли переход через критическое значение числа Re .

Поэтому косвенный путь проверки масштабного эффекта, о котором мы говорили выше, не может дать никаких сведений о масштабном эффекте — этот путь является незаконным.

Для того чтобы проверка влияния масштабного эффекта, выполняемая в лабораторных условиях, была бы законна, необходимо, чтобы эта проверка произво-

Таким образом, получается противоречие между результатами косвенных проверок масштабного эффекта, указывающими на его незначительность, и результатами непосредственной проверки масштабного эффекта, согласно которой этот эффект отнюдь не мал. Однако это противоречие только кажущееся.

Во всех приведенных только что фактах легко разобраться, если воспользоваться некоторыми основными закономерностями, известными в современной аэродинамике.

Обратимся прежде всего к рис. 6, где воспроизведена зависимость коэффициента сопротивления цилиндра C_x от числа Рейнольдса, т. е. при прочих равных условиях — от диаметра цилиндра d .

дилась при том же интервале чисел Re , который имеет место при переходе от модели к натуре. Такая возможность существует. Мы имеем в виду аэродинамические трубы переменной плотности, позволяющие, несмотря на уменьшение размера объекта, сохранить нужное значение числа Рейнольдса за счет увеличения плотности (увеличение ρ приводит к соответствующему уменьшению

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

а потому и к увеличению

$$Re = \frac{VL}{\nu} = \frac{VL\rho}{\mu},$$

где μ — так называемый динамический коэффициент вязкости, практически не зависящий от плотности). Постановка модельных испытаний в трубе переменной плотности

позволит подойти к исчерпывающему решению вопроса о масштабном эффекте при моделировании ветровых нагрузок и потому представляется насущно необходимой.

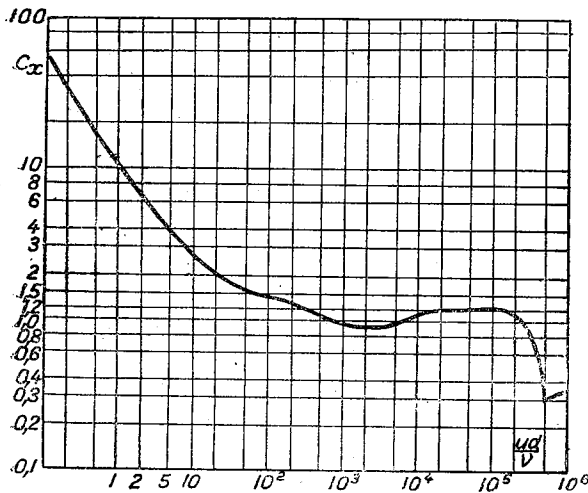


Рис. 6.

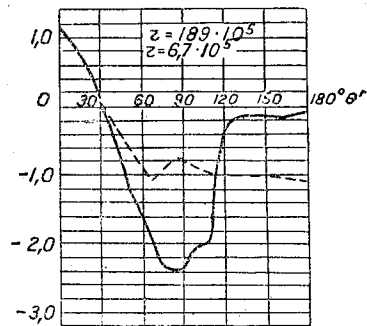


Рис. 7.

До тех пор, пока мы не располагаем результатами таких опытов, можно лишь привести некоторые качественные соображения.

Имея дело с сооружениями, обладающими углами, вряд ли можно думать о возможности для них такого же кризиса сопротивления, связанного с турбулизацией и „затягиванием“ пограничного слоя. Скорее можно предполагать, что увеличивающееся с увеличением числа Рейнольдса инерция воздушного потока приводит к тому, что, начиная с некоторого значения Re , область отрыва струй перемещается вверх по потоку. Сравнение графиков на рис. 5 и 7 показывает, что изменение картины распределения давления имеет разный характер в случае цилиндра и в случае здания.

Далее, нет никаких оснований думать, что для строительного сооружения обязательно должен существовать лишь один критический режим обтекания, как это имеет место в случае цилиндра. Если верно предположение о роли инерции воздушного потока, то можно себе представить, например, возможность схемы изменения характера обтекания, приведенной на рис. 8.

Так или иначе ясно, что изменение режима обтекания строительных сооружений должно иметь более сложный характер, чем изменение режима обтекания шара. Тем не менее в обоих случаях число Re является определяющим параметром, и опыты для одного, пусть большого интервала чисел Re , не позволяют сделать никаких заключений о характере явлений при другом, пусть даже малом интервале чисел Re . Поэтому вывод об отсутствии масштабного эффекта для ветровых нагрузок

зок является неосновательным. Наоборот, есть все основания предполагать, что имеет место существенный масштабный эффект, причем он может вызываться как непосредственно увеличением числа Re , так и инфильтрацией (см. стр. 54). Вопрос нуждается в дополнительном экспериментальном изучении.

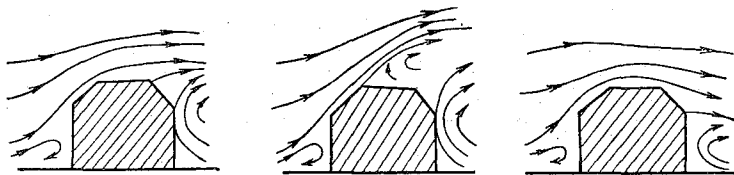


Рис. 8.

§ 6. Влияние отверстий в зданиях на распределение суммарных динамических давлений изучалось рядом авторов. Мы хотим здесь обратить внимание на один практически важный вывод, вытекающий из этих работ.

Действие одного отверстия может быть объяснено следующим образом. Если отверстие не слишком велико, то его влиянием на распределение внешних давлений можно пренебречь. Что касается внутреннего давления, то оно весьма существенно меняется. Именно, оно оказывается в первом приближении равным тому внешнему давлению, которое имеет место у отверстия. Благодаря этому радикально изменяются и суммарные давления. Влияние двух и, тем более, нескольких отверстий рассчитать априори трудно, особенно если учесть возможность появления местных токов воздуха внутри здания; ясно, однако, что и в этом случае картина распределения суммарных давлений изменится весьма существенно.

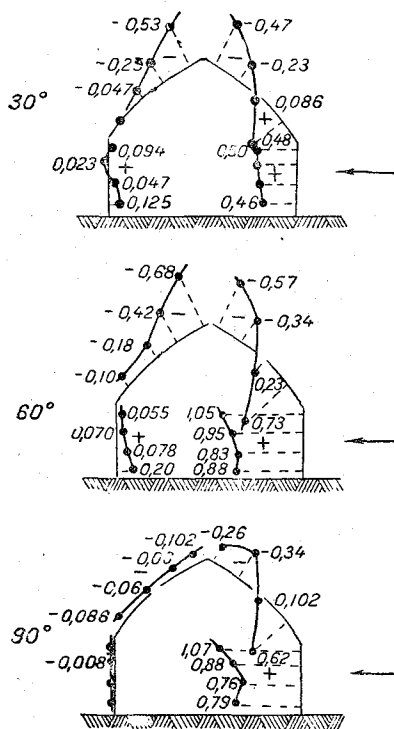


Рис. 9.

Естественно поэтому поставить вопрос, нельзя ли путем устройства специальных отверстий добиться существенного изменения ветровых нагрузок. Рассматривая рис. 9, мы видим, что такая возможность действительно имеется. На этом рисунке показано распределение суммарных давлений на ангар в случае наличия двух специальных отверстий на обоих скатах крыши [9]. Сравнение рис. 9 с приведенными выше графиками для случая отсутствия таких специальных отверстий (рис. 2) указывает на значительное уменьшение давлений. Особенно это относится к отрицательным давлениям, являющимся, как известно, особенно опасными в смысле разрушения зданий (срывы крыш и т. п.).

Поэтому целесообразно при конструировании зданий предусматривать устройство специальных отверстий, открываемых при сильном ветре и тем предохраняющих здание от разрушения ветром.

Расположение и размеры этих отверстий могут быть выяснены в каждом случае отдельно путем постановки специальных модельных исследований. Накопление материала таких исследований позволит в дальнейшем проектировать предохранительные отверстия и без специальных опытов.

Можно еще заметить, что проектирование предохранительных отверстий должно производиться с учетом того, какие именно (по знаку) давления и на какие части

здания являются наиболее опасными и потому подлежат уничтожению в первую очередь. В частности, можно думать, что важно не столько уменьшить абсолютную величину всех суммарных динамических давлений, сколько уменьшить отрицательные давления, действующие на крышу.

Вопрос о предохранительных отверстиях представляется весьма важным и актуальным. Между тем он никак не затрагивается не только в существующих нормах ветровых нагрузок, но даже и в специальных монографиях, как, например, в книге Э. И. Реттера [5].

Можно предложить идею устройства автоматических ветрозащитных отверстий, которая представляется нам весьма заманчивой. Речь идет о такой конструкции, при которой предохранительные отверстия открывались бы автоматически действием самого ветра. Легко видеть, что конструктивное оформление этой идеи не встречает каких-либо затруднений.

На рис. 10 приведена схема возможного варианта устройства одного такого автоматического ветрозащитного отверстия. Устройство это чрезвычайно простое: некоторая часть крыши здания может открываться вверх под действием силы отрицательного динамического давления ветра. Нетрудно произвести расчет такого устройства. Обозначим:

- l — размер отверстия вдоль ската (длина),
- b — размер отверстия поперек ската (ширина),
- d — толщина открывающейся части,
- ρ — плотность (удельный вес) материала открывающейся части,
- ρ_0 — плотность воздуха,
- v — скорость ветра,
- α — угол наклона ската крыши к горизонту,
- g — ускорение силы тяжести,
- $c(x)$ — локальный аэродинамический коэффициент (безразмерное динамическое давление), зависящий от координаты x вдоль склона, которая отсчитывается от закрепленного конца открывающейся части.

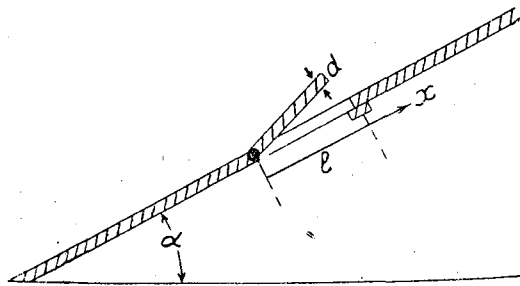


Рис. 10.

На участок открывающейся части длиной dx , расположенный на расстоянии x от закрепленного конца, будут действовать две силы — сила отрицательного динамического давления, направленная вверх перпендикулярно плоскости крыши и равная

$$-c(x) \frac{\rho_0 v^2}{2} b dx$$

(знак минус введен потому, что величина $c(x)$ существенно отрицательна), и сила тяжести, проекция которой на направление, перпендикулярное плоскости крыши, равна

$$\rho g b d \cos \alpha dx.$$

Открывание отверстия начнется тогда, когда скорость ветра достигнет значения, при котором суммарный момент первой силы относительно закрепленной линии станет равным суммарному моменту второй силы:

$$-\int_0^l x c(x) \frac{\rho_0 v^2}{2} b dx = \int_0^l \rho g b d \cos \alpha x dx.$$

Введем средний по моменту аэродинамический коэффициент \bar{C} соотношением

$$\int_0^l x c(x) dx = \frac{l^2}{2} \bar{C}.$$

Тогда, производя интегрирование, получим после элементарных преобразований формулу для толщины проектируемой открывающейся части:

$$d = -\bar{C} \frac{\rho_0}{\rho} \frac{v^2}{2g \cos \alpha}.$$

Эта формула не содержит ширины открывающейся части b , а длина l входит в нее только через посредство коэффициента \bar{C} . Согласно этой формуле, толщина открывающейся части зависит, по существу, только от удельного веса ее, от угла наклона крыши, от скорости ветра, при которой должно открываться отверстие, и от коэффициента \bar{C} .

Произведем примерный подсчет по приведенной формуле. Пусть $\rho = 7,8 \text{ г/см}^3$ (железо); $v = 30 \text{ м/сек}$; $\alpha = 30^\circ$; $\bar{C} = -1$. Подставляя эти значения, а также константы $\rho_0 = 1,3 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3$, $g \approx 10 \text{ м/сек}^2$ в формулу для d , найдем значение толщины проектируемой открывающейся части:

$$d = \frac{1}{6} 10^{-3} \frac{9 \cdot 10^2}{2 \cdot 10 \cdot 0,87} \approx 8,6 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 8,6 \text{ мм},$$

Как видно, получается вполне реальная величина.

Важно отметить, что влияние снежной нагрузки на автоматические ветрозащитные отверстия может не учитываться специально, если только снег покрывает всю поверхность крыши более или менее равномерно. В самом деле, благодаря действию снежной нагрузки отверстие откроется при скоростях ветра больших, чем при отсутствии снега, но и опасными будут тогда именно эти большие скорости.

Понятно, что предложенное представляет собою только схему, при реальном осуществлении которой, возможно, придется ввести некоторые добавочные устройства. Но простота схемы позволяет надеяться на то, что и добавочные устройства окажутся простыми и легко осуществимыми.

§ 7. В каждом реальном строительном сооружении имеется множество мелких отверстий, как, например, щелей в местах сочленения различных деталей сооружения, или пор в материале, через которые просачивается воздух. Это просачивание — так называемая инфильтрация — играет существенную роль в ветровых нагрузках на сооружение.

Первым обратил внимание на роль инфильтрации советский исследователь Э. И. Реттер [5]. Однако он приравнивал действие инфильтрации действию некоторого числа отверстий, что вряд ли обосновано, поскольку большое число и малые размеры отверстий приводят, повидимому, к качественно иной картине явления. Именно, этот вопрос можно трактовать скорее с точки зрения механики газовых потоков в пористых средах.

Поскольку очевидно, что инфильтрация не моделируется, говоря о ней, следует прежде всего заметить, что она может служить одной из причин масштабного эффекта: либо при стремлении к точному соответствию модели натуре щели и поры получаются гораздо большими, либо при использовании схематической модели (часто вообще делаемой сплошной) инфильтрация оказывается пренебрежимо мала.

Влияние инфильтрации сводится, очевидно, к тому, что внутреннее давление в некоторой степени реагирует на изменение внешних давлений. Поэтому инфильтрация приводит к уменьшению суммарных давлений и, следовательно, является благоприятным фактором в отношении ветровых нагрузок.

Поскольку статическое давление, т. е. атмосферное давление в невозмущенном потоке, меняется сравнительно медленно, то есть основание считать, что благодаря инфильтрации внутреннее давление успевает реагировать на эти изменения (см. по этому вопросу также [3]).

Более того, благодаря инфильтрации внутреннее давление, повидимому, реагирует и на динамические внешние давления. Если исходить из гипотезы о том,

что вследствие отсутствия направленных потоков давление одинаково во всей внутренности здания и что инфильтрацию можно рассматривать как квазистационарный процесс, то можно предложить следующую схему учета инфильтрации.

Обозначим статическое давление (равное полному давлению в невозмущенном потоке) через p_0 , а полные внешние давления, разные в разных точках обтекаемого здания, через $p_1(s)$. В случае отсутствия влияния инфильтрации на внутреннее динамическое давление полное внутреннее давление, очевидно, равнялось бы p_0 . Если внешнее динамическое давление полностью передается инфильтрацией во внутрь, там установится полное давление, равное среднему из полных внешних давлений по поверхности, т. е.

$$\frac{1}{s} \oint\!\!\!\oint_{(s)} p_1(s) ds.$$

Представляя полное внешнее давление как сумму статического p_0 и динамического p , мы можем переписать это выражение в виде:

$$p_0 + \frac{1}{s} \oint\!\!\!\oint_{(s)} p(s) ds.$$

В реальном, промежуточном случае полное внутреннее давление должно, очевидно, лежать между этими двумя пределами и потому оно может быть записано в виде:

$$p_0 + \frac{\alpha}{s} \oint\!\!\!\oint_{(s)} p(s) ds,$$

где α — некоторый положительный и меньший единицы коэффициент, характеризующий интенсивность инфильтрации и зависящий от величины и плотности расположения отверстий, через которые может просачиваться воздух.

Таким образом, суммарное динамическое давление p_Σ может быть рассчитано по формуле:

$$p_\Sigma(s) = p(s) - \frac{\alpha}{s} \oint\!\!\!\oint_{(s)} p(s) ds.$$

Важность вопросов, связанных с инфильтрацией, заставляет считать насущно необходимой постановку специальных модельных опытов по количественному исследованию ее роли. В частности, таким путем можно будет проверить гипотезу, лежащую в основе предлагаемой схемы расчета влияния инфильтрации и, в случае ее правильности, экспериментально определять коэффициент α .

§ 8. В нормах ряда стран предусматривается учет так называемой защищенности, т. е. влияния всевозможных преград для ветрового потока, как, например, кустарника, леса, других сооружений, на ветровые нагрузки на строительные сооружения. Считая, что такие преграды приводят к уменьшению скорости ветра, авторы норм предлагают вводить для учета этого обстоятельства специальный коэффициент защищенности, равный примерно 0,6—0,8.

Это предложение не является обоснованным. Если наличие преград и приводит к уменьшению ветра в среднем, то для отдельных сильных ветров эти преграды могут, вследствие неблагоприятного аэродинамического эффекта, привести в некоторых случаях даже к усилению ветра.

Можно указать следующий характерный пример. В работе [10] приведены результаты модельных опытов, специально посвященных влиянию соседних зданий на ветровые нагрузки на данное строительное сооружение. Постановка опытов была неудачна: вместо того, чтобы с помощью схематических моделей наиболее четко выявить интересующий их эффект, авторы экспериментировали с моделями, представляющими здания (в том числе тот же Empire States Building) во всей их сложности. Тем не менее совершенно отчетливо выявилось, что присутствие строений

меньшей высоты не только не приводит к уменьшению ветровых нагрузок на исследуемое здание, но изредка даже повышает их. Это связано, во-первых, со сжатием струй и соответственным увеличением скорости движения воздуха над преградой (эффект конфузора), а во-вторых, с тем, что неравномерное распределение давлений на различные участки поверхности исследуемого здания приводит к увеличению всевозможных моментов сил.

К аналогичным выводам можно придти, изучая данные по аэрации жилых кварталов (см., например, работу Томсона [7], там же имеется и литература вопроса).

Таким образом, введение дробного „коэффициента защищенности“ ничем не оправдано, и вводить соответствующую рекомендацию в нормы ветровых нагрузок не следует.

§ 9. Подводя итоги, следует прежде всего отметить, что далеко не все выводы модельных исследований нашли свое отражение в существующих нормах ветровых нагрузок. Это отставание относится не столько к численным данным, сколько к принципиальным результатам и может быть легко ликвидировано.

В частности, нужно во всех случаях учитывать не результирующие силы ветровых нагрузок, а местные суммарные динамические давления. Далее необходимо использовать данные модельных испытаний при всех углах набегающего потока, обратив особое внимание на невыгоднейшие углы. Не следует учитывать путем снижения расчетных норм влияние так называемой защищенности, т. е. наличие леса, кустарника, соседних строений и т. п.; не следует также повышать расчетные нормы на случай одновременного действия ветровой и снежной нагрузок. Наконец, следует обратить внимание на важную мысль об устройстве специальных защитных отверстий и, в частности, на возможность конструирования автоматических ветрозащитных отверстий.

Все эти меры позволят уже сейчас, без каких бы то ни было дополнительных мероприятий, существенно улучшить учет ветровых нагрузок при проектировании строительных сооружений. Вместе с тем ряд вопросов подлежит дополнительному изучению путем постановки специальных модельных опытов. Это в первую очередь относится к вопросу о так называемом масштабном эффекте, т. е. о взаимоотношении между результатами модельных опытов и поведением объекта в реальных условиях. В этот важный вопрос может быть внесена ясность, если поставить специальные модельные исследования в аэродинамических трубах переменной плотности.

Далее, чрезвычайно важным представляется лабораторное изучение влияния инфильтрации, т. е. проникновения воздуха через мелкие щели и поры сооружений. Такое изучение будет иметь значение как для оценки влияния инфильтрации на масштабный эффект, так и для разработки методов расчета влияния инфильтрации. В частности, можно будет проверить правильность предложенной здесь схемы расчета и, в случае ее законности, определить входящий в нее экспериментальный параметр.

Некоторые вопросы, требующие модельных исследований, затронуты нами также в статье [3].

Таким образом, наряду с путями немедленного усовершенствования практики расчета ветровых нагрузок на строительные сооружения можно указать также желательные направления дальнейшего изучения этой проблемы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бункин К. и Черемухин А. Давление ветра на крыши и стены зданий. Труды ЦАГИ, № 30, 1928.
2. Расчет строительных конструкций. Нагрузка ветровая. ГОСТ 1664—42.
3. Гандин Л. С. Проблема ветровых нагрузок на строительные сооружения как задача прикладной метеорологии. Настоящий сборник.
4. Красноперов Е. В. Экспериментальная аэродинамика, ч. 2, ОНТИ, 1936.
5. Реттер Э. И. Ветровые нагрузки на строительные сооружения, 1936.

6. Рынин Н. А. Давление ветра на здания. Труды аэромеханической лаборатории института инженеров путей сообщения, Петербург, 1913.
 7. Томсон. Аэрация городской застройки. Изд. Акад. мед. наук, 1948.
 8. Durst C. S. Wind pressures on buildings. Meteorological Magazine, vol 69, p. 208, 1934.
 9. Eiffel G. Nouvelles recherches sur la resistance de l'air et l'aviation faites au Laboratoire d'Auteuil. Paris 1914.
 10. Harris. Influence of neighbouring structures on the wind pressure on tall buildings. Bureau of Standarts. Journ of Research., vol 12, № 1, 1934.
 11. Rathbun. Wind forces on a tall building. Proc. Amer. Soc. Civil Engint., vol 64, № 7, 1938; vol 65, № 10, 1939.
-

ЭФФЕКТИВНОСТЬ ОТКРЫТОГО ОБОГРЕВА РАСТЕНИЙ ПРИ ЗАМОРОЗКАХ

Одним из основных способов борьбы с заморозками, наряду с применением дымовых завес и дымовых куч, является метод открытого обогрева растений с помощью специальных грелок.¹

Первые испытания нефтяных грелок в СССР были произведены в конце двадцатых годов под руководством Г. Т. Селянинова на Сочинской опытной станции в целях защиты citrusовых растений от морозов [1]. Впоследствии параллельно с внедрением грелок для открытого обогрева плантаций в научных организациях Управления субтропических культур проводились большие опытные работы по изучению эффективности этого метода. После интересных работ Г. Т. Селянинова основные исследования велись во Всесоюзном научно-исследовательском институте влажных субтропиков (ВНИИВС) при участии В. С. Лаврийчук, Г. Б. Надарая, В. П. Никифорова, С. В. Мгалоблишвили и др. [2] и получили широкий исследовательский характер. В Америке, где грелки появились еще в конце прошлого столетия и получили очень широкое распространение, опытные работы носили узко технический характер, что значительно снижало возможности усовершенствования метода и изучения эффективности его.

В первое время во ВНИИВС испытанию подверглись различного типа американские грелки (системы „Джумбо“, „Ламора“ и др.). В результате был установлен целый ряд существенных недостатков их и встал вопрос о создании новых, более совершенных грелок. С последней задачей прекрасно справился В. П. Никифоров. Он сконструировал совершенно новую грелку, которая по своим качествам превосходила американские конструкции.

Работы ВНИИВС и Сочинской опытной станции сделали крупный шаг вперед по исследованию эффективности нефтяных грелок, и в постановлении ЦК ВКП(б) и СНК СССР от 25 апреля 1940 г. „О мерах по дальнейшему развитию чайного хозяйства, citrusовых культур, виноградарства и качественного виноделия в Грузинской ССР“ отмечалась необходимость применения в наиболее морозоопасных местах системы открытого обогрева плантаций.

К сожалению, в последние годы внимание к вопросам открытого обогрева как средству защиты растений от заморозков значительно ослабело.

Отметим, что работы ВНИИВС и Сочинской опытной станции остались все же неполными. Это в первую очередь связано с метеорологической и теоретической сторонами проблемы. Отсутствие развитой теории явлений затрудняло обобщение полученных эмпирических материалов и изучение ряда важных условий применимости данного метода, а также сопоставления эффективности его с другими способами борьбы с заморозками.

¹ В сельскохозяйственной литературе обогревание плантаций с помощью грелок принято называть методом открытого обогрева в отличие от способов обогрева растений в индивидуальных и групповых укрытиях.

Задачу нашей работы мы видели, в первую очередь, в заполнении этого существенного пробела.

В данной статье мы исследуем вопрос о распространении тепла от грелок в приземном слое воздуха.

Рассмотрение настоящей задачи должно дать ответ на существенные вопросы о зависимости теплового эффекта грелок от метеорологических условий и других важных факторов. Развитая ниже теория пригодна для исследования эффективности различных систем грелок, но конкретные расчеты выполнены лишь для грелок системы В. П. Никифорова, как наиболее совершенных.

Тепловой баланс грелки

Прежде чем перейти к основному вопросу о распространении тепла от грелок, предварительно остановимся на вопросе о том, как происходит передача тепла от грелки окружающему пространству.

Имеются два типа грелок Никифорова — так называемые широкотрубная и узкотрубная грелки. Фотографии их даны на рис. 1.

Оба типа грелок состоят из нижнего бака для нефти и цилиндрической трубы, сделанных из листового черного железа. Высота бака примерно 0,5 м, а трубы — около 1½ м. Диаметр широкотрубной грелки — 0,3 м, а узкотрубной — 0,2 м. Грелки различаются между собой также регуляторами подачи воздуха. При среднем режиме грелок широкотрубная грелка расходует в час 1,75 кг нефти, а узкотрубная 1,2 кг. При работе поверхность трубы нагревается до температуры 300—350° С. Теплоотдача от грелки происходит тремя путями:

1) часть тепла отдается окружающему пространству вследствие конвективного теплообмена при обтекании воздухом нагретых стенок грелки;

2) горячие стенки излучают тепло радиации в более холодное пространство;

3) часть тепла выносится из трубы нагретыми газами и благодаря ветру и турбулентному обмену отдает окружающему воздуху.

Эти три составляющие теплового баланса грелки дополняются еще одной компонентой, связанной с потерей тепла за счет неполного сгорания нефти.

Определение всех четырех составляющих было произведено специальной комиссией Главного управления субтропических культур НКЗ СССР и результаты ее опубликованы в работе В. С. Лаврийчук [3]. К сожалению, в этой работе приводятся лишь итоговые значения расчета, и нам не удалось выяснить, каким образом произведен этот расчет комиссией, а также какие исходные данные были положены в его основу.

Не имея возможности оценить справедливость использованной методики для определения составляющих баланса, мы произвели самостоятельный расчет. Это имеет также тот смысл, что по предлагаемой методике можно, с одной стороны, рассчитать тепловой баланс других грелок, а с другой стороны, выяснить при необходимости зависимость соотношения между компонентами баланса от скорости ветра и других факторов.

Оценку компонент теплового баланса грелки можно сделать следующим образом:

1. Тепло, отдаваемое воздуху путем конвекции $Q_{\text{конв}}$, может быть определено по формуле:

$$Q_{\text{конв}} = \alpha S (T_{\text{гр}} - T_{\text{в}}),$$

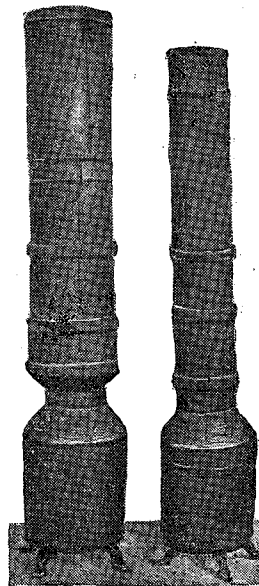


Рис. 1.

где α — коэффициент теплоотдачи, S — площадь поверхности грелки, $T_{гр}$ — температура поверхности грелки, $T_{в}$ — температура окружающего воздуха.

Коэффициент теплоотдачи α находится с помощью эмпирических формул, установленных на основании теории подобия. Так, при обтекании вертикальной трубы имеет место следующее соотношение:

$$Nu = C Re^n,$$

где $Nu = \frac{\alpha d}{\lambda}$ — число Нуссельта, $Re = \frac{ud}{\nu}$ — число Рейнольдса, d — диаметр трубы, λ и ν — соответственно молекулярная теплопроводность и вязкость воздуха, C и n — параметры, значения которых определяются в зависимости от Re по таблицам (например, [4]), u — скорость ветра.

Найденный таким образом коэффициент теплоотдачи α соответствует ламинарному состоянию воздуха. Для турбулентной атмосферы полученное значение α нужно еще умножить на коэффициент $\epsilon_{турб}$, который для наших условий можно принять равным 1,5 [4].

Определив α , непосредственно вычислим $Q_{конв}$; при этом следует принять во внимание, что нижний бак грелки — резервуар для нефти — обычно холодный и поэтому площадь бака в S не учитывается.

Мы нашли, что при средних скоростях ветра (2–3 м/сек.) количество теплоты, отдаваемое за счет конвекции $Q_{конв}$ для широкотрубной грелки равно примерно 6000 ккал/час. По отношению к общему расходу тепла, соответствующему сгоранию 1,75 кг нефти в час, это составит 35%.

Так как обычно расстояние между грелками намного превышает диаметр грелки (это отношение всегда больше 15–20), то теплообмен за счет конвекции в случае системы грелок можно рассчитывать так, как будто каждая из грелок изолирована.

Теплота, теряемая грелкой за счет излучения, легко определяется по закону Стефана — Больцмана.

$$Q_{изл} = r\sigma (T_{гр}^4 - T_{в}^4) S,$$

где σ — постоянная Стефана — Больцмана, $T_{гр}$ — абсолютная температура поверхности грелки, $T_{в}$ — абсолютная температура воздуха, S — площадь грелки, r — отношение излучения поверхности грелки к излучению абсолютно черного тела.

Значение коэффициента r для листового черного железа по ряду справочников ([4], [5], [6]) следует принять $\approx 0,7$.

Тогда для широкотрубной грелки получим, что теплота, теряемая через стенки вследствие излучения $Q_{изл}$, равна 6000 ккал/час, что составляет 35% по отношению к общему расходу тепла.

Принимая результаты комиссии, что потери тепла, связанные с неполнотой сгорания нефти, составляют $\approx 8\%$, из уравнения баланса получим, что тепло нагретых газов, выходящих из грелки, составляет 22%.

Таким образом, тепловой баланс широкотрубной грелки может быть представлен в следующем виде:

1) Теплота, отдаваемая за счет конвекции	35%
2) Теплота излучения	35%
3) Потери тепла от неполного сгорания нефти	8%
4) Тепло нагретых газов	22%

Для узкотрубной грелки мы получали примерно такие же относительные значения компонент теплового баланса.

Расхождения в полученных значениях с результатами работы [3] для широкотрубной грелки можно считать допустимыми, поскольку нам неизвестны исходные данные, принятые для расчета указанной выше комиссией.

Из приведенных выше данных можно заключить, что около $\frac{3}{5}$ общего количества теплоты от грелки расходуется путем конвекции от стенок и теплообмена нагретых газов с воздухом над грелкой и $\frac{1}{3}$ — путем излучения.

Следует указать, что сам по себе тепловой баланс грелки еще ничего не говорит об эффективности открытого обогрева плантации.

Для решения последнего вопроса необходимо исследовать повышение температуры на разных расстояниях от грелки при различных метеорологических условиях. К этому мы сейчас и переходим.

Температурное поле вблизи грелки

Итак установлено, что $\frac{3}{5}$ общего количества теплоты, выделяемого грелкой, отдается соседним слоям воздуха нагретыми газами и путем конвекции от стенок. Рассмотрим теперь вопрос о распространении этого тепла в приземном слое воздуха. На передаче тепла от грелок путем излучения мы остановимся ниже.

Для исследования температурного поля вблизи грелки удобно ввести в рассмотрение цилиндрический источник тепла, состоящий из трубы грелки и некоторого столба нагретых газов над ней. Будем считать, что эффективная высота такого цилиндра H и что теплота равномерно по высоте поступает в атмосферу.

Определение повышения температуры приземного слоя воздуха вблизи тепловых источников нами рассматривалось в [7], [8]. Эта задача имеет много общего с задачей распространения тепла от грелок.

Можно принимать, что тепло распространяется в пространстве, как взвешенные частицы в атмосфере. Такое предположение основано на установленном в последние годы факте, что распространение тепла и пассивных субстанций в турбулентной атмосфере описывается одним и тем же коэффициентом турбулентности обмена.

Прекрасным подтверждением сказанного могут служить результаты опытов Г. Т. Селянинова, опубликованные еще в 1930 г. [1]. На Сочинской опытной станции в феврале—марте 1928 г. измерялось повышение температуры воздуха на расстоянии вокруг грелки американской системы „Бостон“. Обсуждая результаты опытов, Г. Т. Селянинов отмечает подобие между распространением тепла и дыма, выходящего из грелки. Он пишет, что „температура воздуха повышалась только с подветренной стороны и только в том случае, если дым от пламени непосредственно направлялся на прибор“. При удалении от струи дыма повышения температуры не обнаруживалось, не наблюдалось также никакого повышения температуры с наветренной стороны и непосредственно над пламенем даже вблизи грелки. „Эти исследования, — пишет автор, — повторялись несколько раз и всегда с одним и тем же результатом“.

Возвращаясь теперь к принятой схеме распространения тепла в приземном слое воздуха, отметим, что следует учитывать некоторую часть тепла, уходящую в почву. Это означает, что необходимо рассмотреть систему уравнений теплопроводности в воздухе и почве при условии сопряжения температуры и потоков тепла на поверхности раздела. Однако полное решение такой системы чрезвычайно усложнило бы задачу, поэтому мы решили пойти по другому пути и рассмотреть два крайних случая.

В первом предполагается, что поток тепла в почву мал, т. е. теплопроводность почвы принимается равной нулю; во втором, наоборот, — земля имеет бесконечно большую теплопроводность, поэтому все тепло, поступающее на поверхность почвы, будет ею полностью поглощаться и, таким образом, тепловой эффект на поверхности почвы будет равен нулю.

Очевидно, что истинное решение будет лежать между решениями для этих двух крайних случаев.

Далее можно воспользоваться тем условием, что нас интересует температурное поле лишь на сравнительно небольших расстояниях от грелки. Как будет показано ниже, при таком условии оба крайних случая имеют весьма близкие между собой решения, а это означает для нашей задачи, что можно не рассматривать

всей системы уравнений, а лишь ограничиться уравнением теплопроводности для воздуха.

Поскольку обычно при заморозках грелки действуют довольно продолжительное время, задачу о диффузии тепла можно рассматривать как стационарную.

Уравнение турбулентной теплопроводности в стационарном случае может быть записано в следующей форме:

$$u \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad (1)$$

$$x, z > 0.$$

Здесь ось x направлена вдоль среднего ветра, y — поперек ветра; z — вертикально вверх; τ представляет разность между температурой, установившейся в результате обогрева, и температурой воздуха на необогреваемом участке; u — скорость ветра; k_y, k_z — горизонтальная и вертикальная составляющие коэффициента турбулентного обмена.

Мы не пишем в уравнении (1) члена, соответствующего диффузии тепла вдоль оси x , поскольку при наличии ветра этим членом можно пренебречь по сравнению с остальными членами (1) (последний вывод можно сделать хотя бы из того факта, что при наличии ветра дым от труб всегда распространяется по ветру). Добавление этого члена принципиальных трудностей не создает, а приводит только к лишним громоздким выкладкам.

Начало координат совмещаем с центром основания грелки.

Полагаем, что скорость ветра и вертикальная составляющая коэффициента турбулентного обмена, которую обычно называют просто коэффициентом обмена, изменяются в общем случае по степенному закону:

$$u = u_1 z^n, \quad (2)$$

$$k_z = k_1 z^m, \quad (3)$$

$$n, m > 0$$

Что касается горизонтальной составляющей коэффициента турбулентного обмена k_y , то примем сделанное ранее предположение о том, что она пропорциональна скорости ветра, т. е.

$$k_y = k_0 u = k_0 u_1 z^n. \quad (4)$$

Такое предположение, хотя бы в качестве интерполяционной функции для k_y , нам представляется естественным. Действительно, значение k_y должно возрастать с высотой, поскольку на поверхности земли $k_y = 0$, а на некоторой высоте оно отлично от нуля.

Кроме того, степень возрастания k_y с высотой должна быть значительно меньше, чем для вертикальной составляющей k_z , так как на последнее удаление от поверхности земли должно сказаться гораздо больше. Выбранный вид функции (4) удовлетворяет и этому условию, ибо обычно для скорости ветра $n \approx 0,2$ и $m \approx 1$ для k_z .

Примерно к таким же выводам можно прийти, сопоставляя значение горизонтальной составляющей k_y , найденное нами по очертанию дымового облака [9], с вертикальной компонентой k_z на нижней границе слоя изотропной турбулентности [10].

Таким образом, уравнение теплопроводности (1) запишется в следующем виде:

$$u_1 z^n \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} k_1 z^m \frac{\partial \tau}{\partial z} + k_0 u_1 z^n \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2}. \quad (5)$$

Краевые условия на поверхности почвы ($z = 0$), как уже упоминалось, принимаются двух типов, соответственно им разыскиваются два решения, которые в дальнейшем будем различать индексами I и II. Итак, при $z = 0$

$$(I) c_p \rho k_1 z^m \frac{\partial \tau_1}{\partial z} = 0,$$

$$(II) \tau_{II} = 0,$$

где c_p и ρ — теплоемкость и плотность воздуха.

Граничное условие при $x = 0$ зададим следующим образом:

$$c_p \rho \tau = \frac{Q}{d(H-h_1)u} \quad (6)$$

при $h_1 \leq z \leq H$ и $|y| \leq d$ и

$$\tau = 0$$

для других z и y .

Здесь Q — количество тепла, образующегося при сгорании топлива в единицу времени; d — диаметр грелки; u — скорость ветра; $h_1 \approx 0,5$ м — высота холодного бака.

Поскольку диаметр грелки d всегда значительно меньше интересующих нас расстояний x ($d \ll x$), то можно перейти к пределу $d \rightarrow 0$ и рассматривать бесконечно тонкий цилиндр высотой H . Тогда (6) запишется с помощью дельта-функции $\delta(y)$. При $x = 0$:

$$c_p \rho \tau = \frac{Q \delta(y)}{(H-h_1)u_1 z^n} \quad (7)$$

для $h_1 \leq z \leq H$ и

$$\tau = 0$$

для других z .

Кроме того, ставится условие, что при $x, y, z \rightarrow \infty$

$$\tau \rightarrow 0. \quad (8)$$

Таким образом, рассматриваемая задача сводится к следующему: имеется уравнение (5), надо найти его решение при граничных условиях (I) или (II) и (7) и (8).

Полученное решение математически сформулированной таким образом задачи показывает, что два выражения для τ_1 и τ_{II} , соответствующие двум крайним случаям (совершенно не проводящей тепло почвы и абсолютно теплопроводящей), формально отличаются лишь тем, что индекс функции Бесселя

$$I_{\pm \frac{1-m}{2+n-m}} \left[\frac{2(z\zeta)^{\frac{2+n-m}{2}}}{\frac{k}{u_1} x (2+n-m)^2} \right],$$

входящей в эти выражения в качестве множителя, в первом случае взят со знаком минус, во втором — со знаком плюс.

Уже упоминалось, что для нашей задачи главный интерес представляет отыскать решение для сравнительно небольших x (примерно 10—20 м) и не очень малых z (обычно на уровне кроны дерева, т. е. $z = 1-3$ м). Но при таких значениях x и z аргумент указанной функции Бесселя довольно большой, поэтому не будет большой погрешности, если эту функцию заменить ее асимптотическим представлением, которое, как известно, в первом приближении не зависит от показателя порядка функции:

$$I_{\pm k}(s) = \frac{e^s}{\sqrt{2\pi s}}.$$

Отсюда следует, что в первом приближении в интересующих нас пределах изменения x и z совпадают оба решения, соответствующие двум совершенно крайним случаям. Это позволяет утверждать, что в первом приближении можно не рассматривать утечку тепла в почву и ограничиться рассмотрением уравнения теплопроводности только для воздуха.

На больших расстояниях от грелки возможно, что учет потока тепла в почву будет иметь некоторое значение.

Для конкретных расчетов примем, что вертикальная составляющая коэффициента турбулентного обмена k_z линейно возрастает с высотой $k_z = k_1 z$, т. е. в (3) $m = 1$. Для изменения ветра с высотой в качестве интерполирующей функции (2) можно в среднем принимать степенную функцию с показателем $n = \frac{1}{5}$, т. е. $u = u_1 z^{1/5}$.

Тогда окончательно получим, что повышение температуры вблизи грелки определяется по формуле:

$$\tau = \frac{Qe^{-\frac{y^2}{4k_0 x}}}{2,4c_p \rho (H - h_1) k_1 \sqrt{\pi k_0 x^3}} \int_{h_1}^H e^{-\frac{z^{1,2} + \tau^{1,2}}{1,44 \frac{k_1}{u_1} x}} I_0 \left[\frac{(z^2)^{0,6}}{0,72 \frac{k_1}{u_1} x} \right] dz. \quad (9)$$

В (9) порядок бесселевой функции оказался равным нулю, тем самым исчезли те два значения его со знаками минус и плюс в общем выражении, которые обеспечивали удовлетворение граничных условий (I) и (II). Нетрудно проверить, что выражение (9) относится к первому случаю (I), т. е. когда потоком тепла в почву пренебрегают и τ представляет собой τ_I . Для τ_{II} , когда в (3) $m = 1$, изложенным способом нельзя получить решение и его надо установить особым путем. Но этого можно не делать, поскольку непосредственно оно нам не нужно и, кроме того, из физических соображений понятно, что и для $m = 1$ должен сохраниться установленный выше вывод о малом отличии в распределении температур на близких от грелки расстояниях для двух крайних случаев (I) и (II), справедливый для любых m и n , в частности и для m , довольно мало отличающихся от единицы.

Значение интеграла в (9) было нами затабулировано и это позволило легко определить повышение температуры вблизи грелки на различных расстояниях от нее и на разных высотах над почвой, а также для ряда значений H .

Для расчета остается еще установить неопределенное пока значение параметра H , который представляет собой высоту введенного выше цилиндрического теплового источника. Эта высота складается из высоты грелки и некоторой эффективной высоты h — столба нагретых газов над грелкой. Ориентировочно оценить значение h можно на основании теплового баланса грелки (§ 1) из соотношения теплоты конвекции и теплоты нагретых газов. Поскольку теплота конвекции от стенок отдается на протяжении $1\frac{1}{2}$ м (высота трубы), то можно предполагать, что $h \approx 1$ м.

Вычисление по полученным в следующем параграфе формулам показывает, что значение h достаточно определить весьма грубо и что точность предложенной сейчас оценки $h \approx 1$ м вполне можно считать практически достаточной. Как указывалось, значение высоты холодного бака $h_1 \approx 0,5$ м. Таким образом, $H = 3$ м.

Тепловой эффект системы грелок

На плантациях располагают от 100 до 500 грелок на гектар (рис. 2). Поэтому практический интерес представляет тепловой эффект не отдельной грелки, а системы их. Грелки расставляют рядами между деревьев обычно так, что расстояние между рядами такое же, как и между соседними грелками в ряду, т. е. применяют так называемую квадратную расстановку (рис. 3).

Мы будем принимать, что температурное поле системы грелок создается в результате наложения температурных полей отдельных грелок, так как расстояние между ними значительно больше их диаметров.

Поскольку тепловой эффект уменьшается с удалением от грелки, то повышение температуры на некотором участке AB (рис. 3) будет определяться только соседними грелками.

Исследования решения (9) для отдельной грелки показывают, что τ убывает по y , т. е. в направлении, перпендикулярном к ветру, гораздо быстрее, чем по x , т. е. по ветру.

Для определения теплового эффекта на участке AB оказывается достаточно принимать во внимание лишь грелки двух ближайших продольных рядов, тогда



Рис. 2.

как с наветренной стороны надо учитывать 3—4 ряда. Поэтому, если говорить о тепловом эффекте системы грелок, то достаточно рассмотреть эффект на участке CD от группы грелок, выделенных на рис. 4.

Тогда, согласно (9), получим:

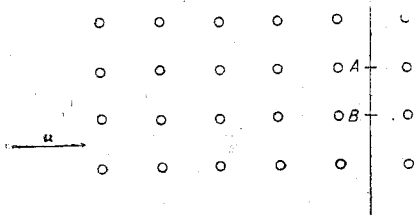
$$\begin{aligned} \tau_{\text{сист}} = & \frac{Q}{2,4c_p \rho (H - h_1) k_1 \sqrt{\pi k_0}} \left\{ \frac{J\left(\frac{a}{2}\right)}{\left(\frac{a}{2}\right)^{3/2}} \left[e^{-\frac{y^2}{2k_0 a}} + e^{-\frac{(a-y)^2}{2k_0 a}} \right] + \right. \\ & + \frac{J\left(\frac{3a}{2}\right)}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2} \left[e^{-\frac{y^2}{6k_0 a}} + e^{-\frac{(a-y)^2}{6k_0 a}} \right] + \frac{J\left(\frac{5a}{2}\right)}{\left(\frac{5a}{2}\right)^2} \left[e^{-\frac{y^2}{10k_0 a}} + e^{-\frac{(a-y)^2}{10k_0 a}} \right] + \\ & \left. + \frac{J\left(\frac{7a}{2}\right)}{\left(\frac{7a}{2}\right)^2} \left[e^{-\frac{y^2}{14k_0 a}} + e^{-\frac{(a-y)^2}{14k_0 a}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь введено обозначение:

$$J(x) = \int_{h_1}^H e^{-\frac{z^{1,2} + \tau^{1,2}}{1,44 \frac{k_1}{u_1} x}} I_0 \left[\frac{(z\tau)^{0,6}}{0,72 \frac{k_1}{u_1} x} \right] dz. \quad (11)$$

Формула (10) дает значение теплового эффекта в любой точке CD , но для этого нужно задавать точное значение y .

Однако такое значение y фактически установить нельзя, поскольку направление скорости ветра всегда колеблется по крайней мере в пределах двух румбов. Поэтому имеет смысл перейти от значений $\tau_{\text{сист}}$ по y к среднему значению на участке CD



$$\Delta T = \frac{1}{a} \int_0^a \tau_{\text{сист}} dy.$$

Рис. 3.

Значение ΔT будем принимать за тепловой эффект системы грядок.

Интегрируя (10), получим

$$\Delta T = \frac{QJ\left(\frac{a}{2}\right)}{0,6c_p \rho (H - h_1) k_1 a^2} \left[\Phi\left(\sqrt{\frac{a}{2k_0}}\right) + \frac{J\left(\frac{3a}{2}\right)}{3J\left(\frac{a}{2}\right)} \Phi\left(\sqrt{\frac{a}{6k_0}}\right) + \right. \\ \left. + \frac{J\left(\frac{5a}{2}\right)}{5J\left(\frac{a}{2}\right)} \Phi\left(\sqrt{\frac{a}{10k_0}}\right) + \frac{J\left(\frac{7a}{2}\right)}{7J\left(\frac{a}{2}\right)} \Phi\left(\sqrt{\frac{a}{14k_0}}\right) \right]. \quad (12)$$

Здесь Φ — функция Крампа.

Выведенная выше формула дает значение теплового эффекта, получаемого в результате распространения тепла, отдаваемого грядкой путем конвекции и тепла нагретых газов. При этом можно считать, что в установившихся условиях повышение температуры воздуха и растений будет примерно одно и то же.

До сих пор из нашего рассмотрения была исключена теплота, излучаемая стенками, механизм распространения которой отличается от рассмотренного выше.

Повышение температуры листьев, плодов в результате облучения зависит от многих факторов (размеров и массы листьев и всего растения, их тепловых характеристик, от плотности посадки и др.). Поэтому точный учет эффекта облучения теоретическим путем чрезвычайно сложен. Теплота излучения практически не поглощается воздухом, а воспринимается растением и почвой, а от нагретых растений путем турбулентного теплообмена отдается окружающему воздуху, и дальнейшее распространение ее определяется принятым выше механизмом турбулентной диффузии.

В установившихся условиях происходит как бы перемена источников тепла от грядки к ближайшим растениям. Тогда, чтобы учесть хотя бы ориентировочно тепловой эффект, связанный с облучением, при достаточно большом количестве грядок и деревьев можно условно считать, что Q в (9) включает и теплоту, излучаемую стенками. Но при этом следует помнить, что вычисленный эффект будет несколько занижен и что за счет облучения повышение температуры листьев, расположенных очень близко от грядки, может быть даже значительно выше.

На основании формулы (12) была рассчитана табл. 1, в которой дано значение $\frac{u\Delta T}{Q}$ для разных высот z над почвой в зависимости от количества грядок n .

на 1 га (u — скорость ветра на высоте 2 м, Q — расход нефти одной грелкой в кг/час).

При расчете таблицы взято значение $\frac{k_1}{u_1} = 0,05$ м, $k_0 = 0,25$ м. Теплота сгорания 1 кг нефти принята равной 10 000 ккал 8% этого количества тепла теряется из-за неполноты горения. Значение n введено вместо расстояния между грелками a ($na^2 = 1$ га).

В табл. 1 дано значение теплового эффекта грелок при скорости ветра 1 м/сек. и расходе нефти 1 кг/час. Для других скоростей ветра полученные числа надо разделить на значение скорости ветра в м/сек, а для других расходов — умножить на значение расхода в кг/час.

Для грелок системы Никифорова расход Q составляет для широкотрубной — 1,75 кг/час, а для узкотрубной — 1,2 кг/час. Тогда, на основании табл. 1, получим значения теплового эффекта для широкотрубной и узкотрубной грелок при скорости ветра 1 м/сек. представленные в табл. 2 и 3.

Из таблиц отчетливо видно, как снижается тепловой эффект при уменьшении

Таблица 1

Количество грелок на 1 га	Высота z , м		
	1,0	1,5	2,0
500	2,5	2,5	2,1
400	2,1	2,1	1,8
300	1,7	1,7	1,5
200	1,3	1,3	1,1
100	0,9	0,9	0,75

Таблица 2

Тепловой эффект широкотрубной грелки при $u = 1$ м/сек.

Количество грелок на 1 га	Высота z , м		
	1,0	1,5	2,0
500	4,4	4,4	3,7
400	3,7	3,7	3,2
300	3,0	3,0	2,6
200	2,3	2,3	2,0
100	1,6	1,6	1,3

Таблица 3

Тепловой эффект узкотрубной грелки при $u = 1$ м/сек.

Количество грелок на 1 га	Высота z , м		
	1,0	1,5	2,0
500	3,0	3,0	2,5
400	2,5	2,5	2,2
300	2,0	2,0	1,8
200	1,6	1,6	1,3
100	1,1	1,1	0,9

количества грелок. Например, при уменьшении общего количества грелок на гектар в 5 раз тепловой эффект снижается примерно в 3 раза. Повышение температуры на высоте 1 м и 1,5 м одинаково и только начиная с высоты 2 м оно заметно уменьшается.

Наши таблицы позволяют определить тепловой эффект также в зависимости от скорости ветра и от расхода горючего, таким образом, без труда можно установить эффект при различных форсировках грелки — слабой, средней или сильной.

Полученные формулы и таблицы позволяют сделать еще ряд полезных выводов.

Естественно, для установления всех этих зависимостей эмпирическим путем потребовалось бы провести очень большое количество опытов, и в настоящее время нет такого эмпирического материала, на котором можно было бы проверить все установленные зависимости. Однако основные из них подтверждаются. Так, согласно [3], для широкотрубных грелок при плотности их 500 штук на га повышение температуры воздуха действительно составляет 4° и лишь для близко рас-

положенных от грелок листьев эффект был больше, что также понятно из сказанного выше.

До сих пор мы рассматривали квадратную расстановку грелок (рис. 3). На практике могут встречаться и другие расстановки, но в большинстве случаев грядки устанавливаются заранее на постоянные места по квадратной схеме. В тех же случаях, когда не требуется значительного повышения температуры (например, в начале заморозка), зажигают не все грядки, а скажем через ряд или через два, причем расстояния между грядками по ветру и поперек ветра будут разные (прямоугольная схема). Рассмотрим прямоугольную расстановку грелок (рис. 4), в которой расстояние по ветру $2b$ в два раза больше, чем интервал поперек ветра b .

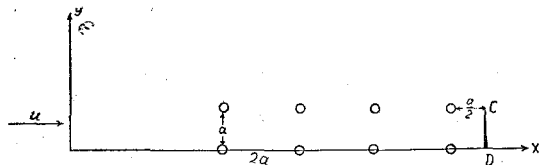


Рис. 4.

Возникает вопрос, насколько отличается тепловой эффект при одной и той же плотности грелок на гектар, но при разных схемах расстановки — квадратной (рис. 3) и прямоугольной (рис. 4).

Ответ на этот вопрос укажет, какая из этих схем практически выгоднее.

Для прямоугольной расстановки тепловой эффект может быть определен совершенно аналогично тому, как было выше сделано для квадратной. Тогда

$$\Delta T_{\text{сист}} = \frac{QJ(b)}{1,24c_p(H-h_1)k_1b^2} \left[\Phi\left(\sqrt{\frac{b}{4H_0}}\right) + \frac{J(3b)}{3J(b)} \Phi\left(\sqrt{\frac{b}{12k_0}}\right) + \frac{J(5b)}{5J(b)} \Phi\left(\sqrt{\frac{b}{20k_0}}\right) \right],$$

Расчеты по этой формуле показали, что при одной и той же плотности грелок n на гектар ($2nb^2 = 1$ га) тепловой эффект для n от 100 до 500 точно такой же, как и для квадратной расстановки, рассчитанной по формуле (12). Заранее ожидать, не производя расчетов, что тепловой эффект при этом останется таким, как при квадратичной схеме, не было оснований.

В начале статьи мы отмечали, что построение теоретической схемы для определения эффективности открытого обогрева должно позволить сравнить тепловой эффект данного метода с другими основными методами борьбы с заморозками. Такое сопоставление, на основании приведенных выше расчетов и работ [7], [8], [11], [12], действительно выполнено и дано в [12].

Оказывается, что тогда как для скорости ветра 1 м/сек. при плотности 500 грелок на 1 га и расходе на одну грядку 1 кг нефти в час, т. е. 500 кг нефти на 1 га/час, тепловой эффект составляет 2,5°, то для тех же условий при сжигании 500 кг на 1 га/час дымовой смеси белого дыма эффект равен 1° С, для черного дыма — 2° С, при сгорании 500 кг на 1 га/час дымовых куч эффект будет около 0,5°.

Здесь дано ориентировочное сравнение эффекта от сжигания ряда материалов при некоторых средних условиях и одной и той же скорости ветра. Сейчас уже нетрудно выполнить такое сравнение и при различных условиях. Установленный тепловой эффект несомненно достаточен, чтобы во многих случаях уберечь теплолюбивые растения от заморозков разной интенсивности.

Имея приведенное сравнение, остается лишь решить вопрос экономического характера: какие материалы и какие методы наиболее выгодно применять в той или иной местности.

В заключение выражаю глубокую признательность профессору М. И. Юдину и П. Н. Красикову за обсуждение данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Селянинов Г. Т. Труды по с/х метеорологии, вып. XXI, 1930.
 2. „Советские субтропики“, № 1—2, 1934; № 10, 1935; № 10, 1936; № 12, 1939; Бюллетень ВНИИЧ и СК, № 3 и № 4, 1948.
 3. Лаврийчук В. С. „Советские субтропики“, № 11—12, 1940.
 4. Михеев М. А. Курс теплопередачи. 1947.
 5. Энциклопед. справ. Машиностроение, т. I, кн. 1. Машгиз, 1947.
 6. Бойко А. И. Труды ВНИИМ, вып. 4 (59), 1947.
 7. Берлянд М. Труды ГГО, вып. 12, 1948.
 8. Берлянд М. Е. и Красиков П. Н. Труды ГГО, вып. 12, 1948.
 9. Берлянд М. ИАН, сер. геофиз., т. VIII, № 1, 1944.
 10. Берлянд М. Труды НИУ ГУГМС, сер. 1, вып. 26, 1947.
 11. Красиков П. Н. Труды ГГО, вып. 12, 1948.
 12. Берлянд М. Е. и Красиков П. Н. Труды ГГО, вып. 19 (81), 1950.
-

К ТЕОРИИ ТЕПЛООВОГО РЕЖИМА ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ ВОЗДУХА

Для теоретического исследования временного и пространственного поля температуры в приземном слое воздуха и искусственного регулирования теплового режима вблизи поверхности земли, особенно в ночные часы (борьба с заморозками путем создания дымовых завес, механическое перемешивание воздуха, полив почвы и др.), необходимо получить решение системы уравнений теплопроводности для воздуха и почвы при известном распределении температуры в начальный момент и заданных граничных условиях на поверхности земли.

При построении уравнения теплопроводности для приземного слоя воздуха в последние годы довольно широко используется модель коэффициента турбулентного обмена, предложенная М. И. Юдиным и М. Е. Швецом [1], согласно которой коэффициент обмена линейно растет с высотой до некоторого уровня, после которого он принимается постоянным.¹ В данной статье, однако, нас будут интересовать изменения температуры воздуха лишь непосредственно вблизи поверхности земли, причем за сравнительно короткие сроки. Таким образом, для упрощения задачи можно принимать линейный рост коэффициента обмена с высотой и не учитывать „излома“ последнего, как это делает ряд авторов (например, И. Г. Лютерштейн и А. Ф. Чудновский [3]).

Существующие способы теоретического определения изменения температуры приземного слоя воздуха со временем можно разбить на три группы:

- 1) по начальным данным и по заданной температуре или потоку тепла на поверхности почвы;
- 2) с привлечением суточного хода температур и использованием условий суточной периодичности;
- 3) по начальному распределению температуры в воздухе и почве и заданному радиационному балансу.

Понятно, что первая группа совершенно не удовлетворяет условиям прогноза температуры, так как в ней необходимо задавать столь существенную характеристику, как временный ход температуры поверхности почвы. Эта группа методов может иметь значение либо для анализа температурного поля, либо как некоторый вспомогательный этап при решении прогностической задачи.

Вторая группа методов, привлекающая решение задачи суточного хода, строго говоря, может быть лишь искусственно использована для предсказания температуры. Действительно, она справедлива только для условий, когда температура в данные сутки такая же, как была в предыдущие и будет в следующие. Но в таких случаях нет необходимости в прогнозе. Влияние же отклонений действительных условий от периодических до настоящего времени не исследовано. И задача прогноза состоит в том, чтобы предсказать ход температуры, если условия как раз изменились по сравнению с предыдущими сутками.

¹ Решение указанной задачи с учетом модели коэффициента обмена по М. И. Юдину и М. Е. Швецу дано в нашей работе [2].

При исследовании ночного выхолаживания вблизи поверхности земли использование суточного хода температуры приводит еще и к другим серьезным трудностям.

Так, например, известно, что при определении ночного хода температуры можно свободно пренебречь расходом тепла на испарение. Привлечение же суточного хода температуры без учета испарения в дневных условиях, как это обычно делают ([3] и др.), несомненно, связано с существенными погрешностями. Такое же положение до некоторой степени имеет место и с учетом изменения коэффициента турбулентного обмена со временем, поскольку наибольшие изменения его относятся к дневным часам. Кроме того, переход к суточному ходу требует дополнительных характеристик о радиационном балансе за полные сутки, что также осложняет задачу о ночном выхолаживании.

Поэтому нам представляется, что наибольшие возможности исследования изменения температурного поля вблизи поверхности земли связаны с решением задач третьей группы, в которых главным является задание начального распределения температуры и радиационного баланса на поверхности почвы.

Задачи этого типа являются также основными при изучении способов регулирования теплового режима приземного слоя воздуха [4]. При этом не исключается возможность использовать задачи первых двух типов в качестве вспомогательных.

В настоящей статье рассматривается решение задачи об изменении температуры при заданных начальных условиях и радиационном балансе на поверхности почвы. Здесь следует указать на некоторые неправильные попытки учета начального распределения температуры в ряде работ последних лет. В этих работах предполагается, что при получении нестационарного решения уравнения теплопроводности в качестве начального условия можно принять распределение температуры, найденное из решения стационарной задачи. При таком предположении общее решение ищется сразу в виде суммы стационарного решения и решения, удовлетворяющего нулевым начальным условиям. Это, по существу, означает, что начальное распределение не оказывает влияния на изменение температуры со временем, что, конечно, неправильно. Чтобы убедиться в последнем, достаточно, например, при помощи предлагаемых таким образом решений вычислить температуру в произвольный момент времени t_2 , после чего найти сначала температуру в момент $t = t_1$ ($t_1 < t_2$), а затем, принимая t_1 за начальный момент, снова определить температуру при $t = t_2$. Тогда полученные результаты по тем же формулам, но формально разными путями, оказывается, будут существенно отличаться между собой.

Перейдем теперь к решению указанной задачи.

Рассмотрим систему уравнений теплопроводности для воздуха и почвы:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial z} (x_0 + k_1 z) \frac{\partial T}{\partial z} + Q(z, t), \dots (0 \leq z < \infty), \\ \frac{\partial \Theta}{\partial t} &= x \frac{\partial^2 \Theta}{\partial z^2}, \dots \quad 0 \geq z > -\infty, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где T — температура воздуха, Θ — температура почвы, $x_0 + k_1 z$ — коэффициент турбулентного обмена, x_0 и x — коэффициенты молекулярной теплопроводности соответственно воздуха и почвы, $Q(z, t)$ — представляет функцию действия тепловых источников в атмосфере (например, адвективные или радиационные притоки тепла, если в первом приближении принять их известными).

Пусть заданы граничные условия на поверхности почвы ($z = 0$):

$$T = \Theta; \quad -\lambda_0 \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda \frac{\partial \Theta}{\partial z} = B(t)$$

и начальное распределение температуры в воздухе и почве при $t = 0$:

$$T = T_0(z); \quad \Theta = \Theta_0(z),$$

где $B(t)$ — радиационный баланс у поверхности земли, $\lambda_0 = c_p \rho x_0$ и λ — коэффициенты молекулярной теплопроводности воздуха и почвы.

Определим $T(z, t)$ и $\Theta(z, t)$ для произвольных z, t . До настоящего времени решения такой задачи не было получено.

Для решения ее используем операционный метод. Тогда от уравнений в частных производных (1) перейдем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{dz}(x_0 + k_1 z) \frac{d\tau}{dz} - p\tau = -q(z, p) - pT_0(z), \quad (2)$$

$$x \frac{d^2\vartheta}{dz^2} - p\vartheta = -d\Theta_0(z) \quad (3)$$

с граничными условиями при $z = 0$:

$$\tau = \vartheta; \quad -\lambda_0 \frac{d\tau}{dz} + \lambda \frac{d\vartheta}{dz} = b(p). \quad (4)$$

Здесь малыми буквами обозначены соответствующие изображения, полученные по формулам типа:

$$\tau = p \int_0^{\infty} e^{-pt} T(z, t) dt.$$

Решение уравнений (2) и (3) будем иметь в виде двух слагаемых:

$$\tau = \tau^\circ + g; \quad \vartheta = \vartheta^\circ + g_1.$$

где τ° и ϑ° — решения однородных частей уравнений (2) и (3).

Тогда

$$\tau^\circ = AK_0 \left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px} \right); \quad x = x_0 + k_1 z, \quad (5)$$

$$\vartheta^\circ = Be^z \sqrt{\frac{p}{x}},$$

где $K_0(y)$ — функция Макдональда, A и B — постоянные интегрирования.

Для получения однозначных решений делается разрез вдоль отрицательной части вещественной оси.

g и g_1 определим при помощи теоремы Гильберта, согласно которой

$$\left. \begin{aligned} g &= - \int_0^{\infty} G(z, \zeta) f(\zeta, p) d\zeta, \\ g_1 &= - \frac{p}{x} \int_0^{\infty} G_1(z, \zeta) \Theta_0(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где $f(z, p) = q(z, p) + pT_0(z)$ и $G(z, \zeta)$ и $G_1(z, \zeta)$ — соответствующие функции Грина. Построение функций Грина производится согласно следующим четырем условиям:

1) $G(z, \zeta)$ и $G_1(z, \zeta)$ являются решениями однородных частей уравнений, соответственно (2) и (3); 2) $G(z, \zeta)$ — непрерывна в интервале $0 \leq z < \infty$, а $G_1(z, \zeta)$ — в интервале $-\infty < z \leq 0$; 3) производные $\frac{dG}{dz}$ и $\frac{dG_1}{dz}$ при $\zeta = z$ имеют скачок, соответственно равный $\frac{1}{x}$ и 1; 4) $G(z, \zeta) = 0$ при $z = 0$ и $z = \infty$, $G_1(z, \zeta) = 0$ при $z = 0$ и $z = -\infty$.

Для уравнения (2) (заменяя в нем аргумент z на ζ) в силу первого и четвертого условий полагаем:

$$G(z, \zeta) = a(z) I_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{ps}\right) + b(z) K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{ps}\right) \dots (0 \leq \zeta \leq z),$$

$$G(z, \zeta) = c(z) K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{ps}\right) \dots (z \leq \zeta < \infty),$$

причем

$$\dot{a}(z) I_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px_0}\right) + b(z) K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px_0}\right) = 0.$$

Здесь $s = x_0 + k_1 \zeta$; a, b, c — пока неизвестные функции, $I_0(y)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента. Удовлетворяя второму и третьему условиям, получим:

$$a(z) I_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px}\right) + b(z) K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px}\right) = c(z) K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px}\right),$$

$$a(z) I_1\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px}\right) - b(z) K_1\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px}\right) = -c(z) K_1\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px}\right) - \frac{1}{\sqrt{px}}.$$

Определив из последних трех условий $a(z)$, $b(z)$ и $c(z)$, найдем выражения для функции Грина:

$$\left. \begin{aligned} G(z, \zeta) &= 2 \frac{K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px}\right) v_0(x_0, s)}{k_1 K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px_0}\right)} \dots (0 \leq \zeta \leq z), \\ G(z, \zeta) &= 2 \frac{K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{ps}\right) v_0(x_0, x)}{k_1 K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px_0}\right)} \dots (z \leq \zeta < \infty), \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где введено обозначение

$$v_0(\xi, \eta) = I_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{p\xi}\right) K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{p\eta}\right) - I_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{p\eta}\right) K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{p\xi}\right). \quad (8)$$

Совершенно аналогично построим функцию $G_1(z, \zeta)$:

$$G_1(z, \zeta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x}{p}} \left[e^{(z-\zeta) \sqrt{\frac{p}{x}}} - e^{(z+\zeta) \sqrt{\frac{p}{x}}} \right] \dots (z \leq \zeta \leq 0),$$

$$G_1(z, \zeta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{z}{p}} \left[e^{(\zeta-z) \sqrt{\frac{p}{z}}} - e^{(\zeta+z) \sqrt{\frac{p}{z}}} \right] \dots (-\infty < \zeta \leq z). \quad (9)$$

Из (6) и (7) после несложного преобразования получим:

$$g = -\frac{2}{k_1} \frac{v_0(x_0, x)}{K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px_0}\right)} \int_0^\infty K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{ps}\right) f(\zeta, p) d\zeta + \frac{2}{k_1} \int_0^z v_0(s, x) f(\zeta, p) d\zeta \quad (10a)$$

и из (6) и (9):

$$\begin{aligned} g_1 &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{z}} \left\{ \int_0^z \left[e^{(z-\zeta) \sqrt{\frac{p}{z}}} - e^{(z+\zeta) \sqrt{\frac{p}{z}}} \right] \Theta_0(\zeta) d\zeta + \right. \\ &\quad \left. + \int_z^{-\infty} \left[e^{(\zeta-z) \sqrt{\frac{p}{z}}} - e^{(\zeta+z) \sqrt{\frac{p}{z}}} \right] \Theta_0(\zeta) d\zeta \right\} \quad (10b) \end{aligned}$$

Удовлетворяя теперь граничным условиям (4), получим два уравнения для определения постоянных интегрирования A и B в (5):

$$AK_0\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{px}\right) = B,$$

$$A\lambda_0\sqrt{\frac{p}{x_0}}K_1\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{px_0}\right) + B\sqrt{\frac{p}{x}} - \lambda_0\left(\frac{dg}{dz}\right)_{z=0} + \lambda\left(\frac{dg_1}{dz}\right)_{z=0} = b(p).$$

Определяя сначала согласно (10а) и (10б) $\left(\frac{dg}{dz}\right)_{z=0}$ и $\left(\frac{dg_1}{dz}\right)_{z=0}$, найдем A и B , после чего нетрудно получить окончательное выражение для τ :

$$\begin{aligned} \tau = & \frac{K_0\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{px}\right)}{\Delta\sqrt{p}} b(p) + \frac{2}{k_1} \int_0^\infty \frac{1}{\Delta\sqrt{p}} [\Delta v_0(x, x_0) - \Delta_0 v_2(x, x_0)] K_0\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{ps}\right) f(\zeta, p) d\zeta + \\ & + \frac{\lambda}{x} \int_0^\infty \frac{\sqrt{p} K_0\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{px}\right)}{\Delta} e^{-\zeta\sqrt{\frac{p}{x}}} \Theta_0(-\zeta) d\zeta + \frac{2}{k_1} \int_0^z v_0(s, x) f(\zeta, p) d\zeta, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\Delta = \Delta_0 K_1\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{px_0}\right) + \Delta K_0\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{px_0}\right), \quad (12)$$

$$v_2(\xi, \eta) = -\left[I_0\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{p\xi}\right)K_1\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{p\eta}\right) + I_1\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{p\eta}\right)K_0\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{p\xi}\right)\right], \quad (13)$$

$$\Delta_0 = \frac{\lambda_0}{\sqrt{x_0}}; \quad \Delta = \frac{\lambda}{\sqrt{x}}.$$

Подобным же образом найдем выражение для ϑ — изображения для температуры почвы.

Оригиналы для выражений τ и ϑ , т. е. сами температуры $T(z, t)$ и $\Theta(z, t)$ получим по формулам обращения. При этом следует воспользоваться тем, что (11) представлена в виде суммы произведений двух функций изображений, для одной из которых (вторые множители) оригинал известен по условиям задачи. Обозначив первые множители через $u_j(p)$ ($j=1, 2, \dots$) и определив оригиналы $\varphi_j(t)$ для этих функций, можно на основании известной теоремы Бореля легко получить искомое выражение для температуры. Согласно (11) определим $u_j(p)$ следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u_1(p) &= \sqrt{p} \frac{K_0\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{px}\right)}{\Delta}; \\ u_2(p) &= \frac{\sqrt{p}}{\Delta} [\Delta v_0(x, x_0) - \Delta_0 v_2(x, x_0)] K_0\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{ps}\right); \\ u_3(p) &= \frac{\sqrt{p}}{\Delta} K_0\left(\frac{2}{k_1}\sqrt{px}\right) e^{-\zeta\sqrt{\frac{p}{x}}}; \quad u_4(p) = pv_0(s, k). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Для того чтобы воспользоваться формулой обращения в целях получения оригиналов $\varphi_j(t)$, необходимо предварительно исследовать особые точки $u_j(p)$ и характер поведения этих функций на бесконечности ($p \rightarrow \infty$).

Поскольку рассматриваемые здесь функции Бесселя и Макдональда не имеют особых точек в области изменения p , то особенности $u_j(p)$ будут находиться в нулях знаменателя Δ , исключая при этом точку разветвления в начале координат. Вместе с тем мы докажем сейчас, что Δ в рассматриваемой области $|\arg p| \leq \pi$ не обращается в нуль, откуда будет следовать, что функции $u_j(p)$ не имеют здесь особых точек.

Для доказательства,¹ воспользовавшись интегральным представлением функции Макдональда, нетрудно получить следующую вспомогательную формулу:

$$K_0(y_1)K_1(y_2) + K_0(y_2)K_1(y_1) = \frac{y_1 + y_2}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2} - \frac{y_1^2 + y_2^2}{2\gamma}} \left[K_0\left(\frac{y_1 y_2}{\gamma}\right) + K_1\left(\frac{y_1 y_2}{\gamma}\right) \right] \frac{d\gamma}{\gamma^2}. \quad (15)$$

Если предположить теперь, что y_1 и y_2 комплексны и взаимно сопряжены

$$y_1 = re^{i\varphi}; \quad y_2 = re^{-i\varphi},$$

то

$$K_0(re^{i\varphi})K_1(re^{-i\varphi}) + K_0(re^{-i\varphi})K_1(re^{i\varphi}) = r \cos \varphi \int_0^{\infty} e^{-\frac{\gamma}{2} - \frac{r^2 \operatorname{ch} \varphi}{2\gamma}} \left[K_0\left(\frac{r^2}{\gamma}\right) + K_1\left(\frac{r^2}{\gamma}\right) \right] \frac{d\gamma}{\gamma^2}. \quad (16)$$

При $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ выражение (16) всегда положительно и не может обратиться в нуль, так как $K_0\left(\frac{r^2}{\gamma}\right)$ и $K_1\left(\frac{r^2}{\gamma}\right)$, как известно, всегда больше нуля.

Для того чтобы доказать теперь, что Δ не имеет комплексных нулей, достаточно рассмотреть квадрат модуля:

$$|\Delta|^2 = \Delta \Delta^* = \Lambda_0^2 \left| K_1\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{p x_0}\right) \right|^2 + \Lambda^2 \left| K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{p x_0}\right) \right|^2 + \Lambda \Lambda_0 \left[K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{p x_0}\right) K_1^*\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{p x_0}\right) + K_1\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{p x_0}\right) K_0^*\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{p x_0}\right) \right],$$

который в силу (16) не может обратиться в нуль при $|\arg p_i| < \pi$.

Не обращается в нуль Δ также и на отрицательной и положительной части вещественной оси ($\arg p = \pm \pi$ и $\arg p = 0$), так как здесь не имеют нулей функции $K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{p x_0}\right)$ и $K_1\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{p x_0}\right)$, являющиеся слагаемыми в Δ (12), а при больших p , если использовать асимптотические представления, получим, что они одного знака.

Итак, доказано, что функции $u_j(p)$ не имеют особых точек в области $|\arg p| \leq \pi$, исключая точку разветвления при $p = 0$.

Согласно асимптотическим формулам, для больших y :

$$I_n(y) \sim \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}}; \quad K_n(y) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y}. \quad (17)$$

Подставив эти формулы в (14), найдем, что $u_j(p)$ исчезают на бесконечности ($p \rightarrow \infty$) быстрее, чем $e^{-a\sqrt{p}}$, где a — некоторое положительное число, причем надо $u_2(p)$ и $u_4(p)$ рассматривать совместно как сумму $u_2(p) + u_4(p)$.

Установленные свойства функций $u_j(p)$ позволяют применить для отыскания $\varphi_j(t)$ формулу обращения Римана-Меллина:

$$\varphi_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{e^{pt}}{p} u_j(p) dp. \quad (18)$$

От контурных интегралов по прямой σ , расположенной справа от особых точек $u_j(p)$, легко перейти к действительным интегралам. Последнее можно осуществить

¹ Это можно доказать еще другими способами.

двумя способами. Нужно дополнить прямую σ до замкнутого контура (пунктирная линия), как это сделано на рис. 1 или же как показано на рис. 2, причем ветви контуров AP и BQ (рис. 1) и CQ и EP (рис. 2) рассматриваются бесконечно удаленными.

Затем, поскольку внутри этих контуров нет особых точек $u_j(p)$, а на бесконечно удаленных ветвях функции $u_j(p)$ экспоненциально убывают к нулю, то от интегрирования по прямой σ в (18) можно перейти к интегрированию по мнимой оси AB — в первом случае (рис. 1) или к интегрированию по участкам CD и EF на отрицательной части вещественной оси (т. е. по двум берегам разрезанной плоскости p) — во втором случае (рис. 2). При этом точка разветвления обходится при интегрировании на рис. 1 по полуокружности, а на рис. 2 — по окружности бесконечно малого радиуса. Используя ряды для бесселевых функций, нетрудно убедиться, что как интеграл по полуокружности в первом случае, так и интеграл по окружности во втором случае исчезают, если радиус стремится к нулю.

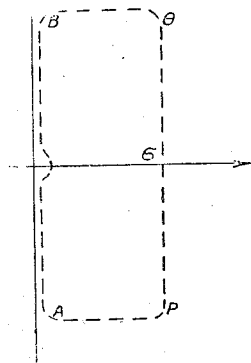


Рис. 1.

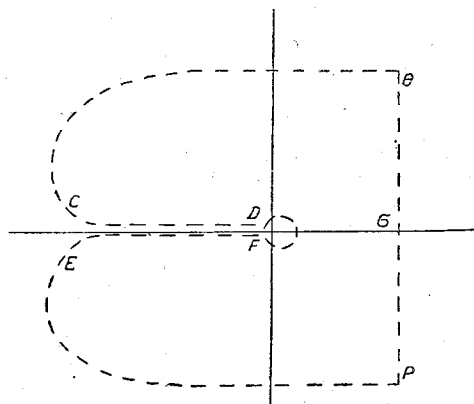


Рис. 2.

Тогда в первом случае (рис. 1):

$$\varphi_j(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} u_j(p = i\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im} [u_j(p = i\omega) e^{i\omega t}] \frac{d\omega}{\omega}, \quad (19)$$

$$i = 1, 2, 3, 4,$$

поскольку

$$u_j(-i\omega) = u_j^*(i\omega),$$

и во втором случае:

$$\varphi_j(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im} [u_j(\sqrt{p} = -i\omega)] e^{-\omega t} \frac{d\omega}{\omega}, \quad (20)$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Во втором случае $\varphi_4(t) = 0$, поскольку $u_4(p)$ в отличие от других функций $u_j(p)$ не имеет точки разветвления при $p = 0$.

Обращаясь теперь к (11) и применяя теорему Бореля, получим:

$$T(z, t) = \sum_j \int_0^t \varphi_j(t - \xi) \Phi_j(\xi) d\xi, \quad (21)$$

где $\Phi_j(t)$ — известные по условиям задачи функции, например $\Phi_1(t) = B(t)$.

Этим заканчивается получение общего решения поставленной задачи. Дальнейшая конкретизация при исследовании тех или иных вопросов, указанных в начале статьи, связана с выбором соответствующих функций $B(t)$; $Q(z, t)$; $T_0(z)$ и $\Theta_0(z)$.

Так, например, при решении задачи о ночном ходе температуры вблизи поверхности земли на основании большого опытного материала известно, что радиационный баланс $B(t)$, или, как его в данном случае называют, эффективное излучение, в течение ночи остается постоянным ($B(t) = B$).

Кроме того, можно принять $Q(z, t) = 0$ и, если выбрать за начальный момент ($t = 0$) время, близкое к заходу солнца, то в это время в воздухе температура почти постоянна с высотой, тогда как в почве при этом температура существенно изменяется с глубиной. Изменение температуры в почве, согласно обработке ряда эмпирических данных, произведенной Г. А. Чикировой, может быть аналитически представлено следующим образом:

$$\Theta_0(z) = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\Theta_1}{H_1} z \dots (-H_1 \leq z \leq 0), \\ -\frac{\Theta_1 - \Theta_2}{H_2 - H_1} z + \frac{H_2 \Theta_1 - \Theta_2 H_1}{H_2 - H_1} \dots (-H_2 \leq z \leq -H_1), \\ \Theta_2 \dots (-H_2 \geq z), \end{array} \right\} \quad (22)$$

причем $T_0(z) = 0$.

Здесь отсчет температуры ведется от начальной температуры поверхности почвы.

В качестве второго примера можно привести задачу об определении теплового эффекта вследствие снижения эффективного излучения в дымовой завесе при борьбе с ночными заморозками [5]. В этом случае рассматривается разность температур на задымленном и незадымленном участках и поэтому можно принять начальные условия однородными и, кроме того, как показано в [4], в этом случае $B(t)$ практически постоянно во времени, а функция $Q(z, t)$ зависит лишь от высоты.

Как в этих примерах, так и в других задачах, функции $B(t)$, $Q(z, t)$, $T_0(z)$ и $\Theta_0(z)$ всегда можно представить такими интерполирующими формулами, чтобы интегралы в (21) по t и по z легко определялись, и тогда решение сведется к вычислению однократных интегралов.

При вычислении интегралов (19) и (20) можно воспользоваться асимптотическими формулами для больших значений аргумента бесселевых функций и рядами для малых аргументов, а также таблицами функций Бесселя от аргумента $y\sqrt{z}$ в интегралах (19), а в интегралах (20) формулами:

$$\left. \begin{array}{l} I_0(-iy) = J_0(iy); \quad I_1(-iy) = -iJ_1(y), \\ K_0(-iy) = -\frac{\pi}{2} [N_0(y) - iJ_0(y)]; \quad K_1(y) = -\frac{\pi}{2} [J_1(y) + iN_1(y)], \end{array} \right\} \quad (23)$$

Остановимся для примера на первой задаче — определении ночного выхолаживания. Подставляя (22) в (11), получим:

$$\begin{aligned} \tau = & \left(B + \lambda \frac{\Theta_1}{H_1} \right) \frac{K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px}\right)}{\Delta \sqrt{p}} + \lambda \left[\frac{\Theta_2 H_1 - H_2 \Theta_1}{(H_2 - H_1) H_1} e^{-H_1 \sqrt{\frac{p}{x}}} + \right. \\ & \left. + \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{H_2 - H_1} e^{-H_2 \sqrt{\frac{p}{x}}} \right] \frac{K_0\left(\frac{2}{k_1} \sqrt{px}\right)}{\Delta \sqrt{p}}. \end{aligned} \quad (24)$$

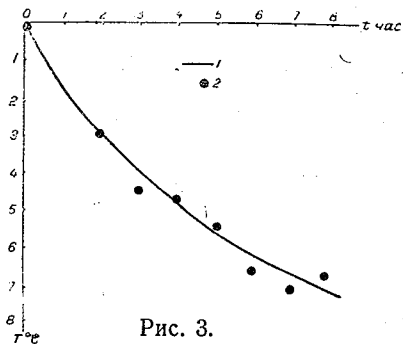


Рис. 3.

Применяя теперь к (24) формулы (20) и (23), найдем следующее выражение для температуры:

$$T(z, t) = \left(B + \lambda \frac{\Theta_1}{H_1} \right) \Phi_1(z, t) + \lambda \frac{\Theta_2 H_1 - \Theta_1 H_2}{(H_2 - H_1) H_1} \Phi_2(H_1, z, t) + \lambda \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{H_2 - H_1} \Phi_2(H_2, z, t), \quad (25)$$

где

$$\Phi_1(z, t) = \frac{2\sqrt{t}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\xi^2}}{\alpha^2 + \beta^2} \left[\beta J_0 \left(\frac{2\xi}{k_1} \sqrt{\frac{x}{t}} \right) - \alpha N_0 \left(\frac{2\xi}{k_1} \sqrt{\frac{x}{t}} \right) \right] \frac{d\xi}{\xi^2}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(H, z, t) = & \frac{2\sqrt{t}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-\xi^2}}{\alpha^2 + \beta^2} \left\{ \beta J_0 \left(\frac{2\xi}{k_1} \sqrt{\frac{x}{t}} \right) - \alpha N_0 \left(\frac{2\xi}{k_1} \sqrt{\frac{x}{t}} \right) \right\} \cos \frac{H\xi}{\sqrt{\pi t}} - \\ & - \left[\alpha J_0 \left(\frac{2\xi}{k_1} \sqrt{\frac{x}{t}} \right) + \beta N_0 \left(\frac{2\xi}{k_1} \sqrt{\frac{x}{t}} \right) \right] \sin \frac{H\xi}{\sqrt{\pi t}} \frac{d\xi}{\xi^2}; \end{aligned} \quad (27)$$

$$\alpha = \Lambda_0 J_1 \left(\frac{2\xi}{k_1} \sqrt{\frac{x_0}{t}} \right) + \Lambda N_0 \left(\frac{2\xi}{k_1} \sqrt{\frac{x_0}{t}} \right),$$

$$\beta = \Lambda_0 N_1 \left(\frac{2\xi}{k_1} \sqrt{\frac{x_0}{t}} \right) - \Lambda J_0 \left(\frac{2\xi}{k_1} \sqrt{\frac{x_0}{t}} \right).$$

Обычно $H_2 \approx 1$ м. Простые вычисления показывают, что при таком значении H_2 интеграл (27) мал и поэтому в (25) можно пренебречь третьим членом по сравнению с первыми двумя.

Пример вычисления по полученным формулам представлен на рис. 3.

Здесь сопоставлен теоретически найденный ход температуры в вечернее и ночное время с данными наблюдений в поселке Колтуши Ленинградской области в ясную безоблачную ночь с 19 на 20 июля 1948 г. За начальный момент времени было принято 20 час. 19 июля.

В качестве входных параметров взято:

$$B = 0,1 \text{ кал/см}^2 \cdot \text{мин.}; \quad \Theta_1 = 3^\circ \text{ C}; \quad \Theta_2 = -5^\circ \text{ C}; \quad H_1 = 5 \text{ см}; \\ H_2 = 100 \text{ см}; \quad \lambda = 0,002 \text{ кал/см} \cdot \text{сек.} \cdot \text{град.}; \quad \chi = 0,005 \text{ см}^2/\text{сек.}$$

Как видно из рис. 3, совпадение вычисленных и опытных значений вполне удовлетворительно. Отметим, что для данного случая часто применяемая формула Брента дает весьма большое расхождение с фактическими данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин М. И. и Швец М. Е. Труды ГГО; вып. 31, 1940.
2. Берлянд М. Е. ДАН, LXVII, № 6, 1949.
3. Лютерштейн И. Г. и Чудновский А. Ф. Труды НИУ ГУГМС, сер. 1, вып. 28, 1946.
4. Берлянд М. Е. Труды ГГО, вып. 12, 1948.

О СХЕМЕ ПРАНДТЛЯ В ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

§ 1. При исследовании турбулентных течений широко применяется так называемая схема Прандтля, приводящая к возможности построения уравнений турбулентного движения в замкнутой форме. Как известно, Прандтль рассматривает уравнение одномерного турбулентного течения несжимаемой жидкости вдоль стенки, в которое входит лишь одна составляющая турбулентных напряжений. Идея Прандтля состоит в выражении этой составляющей через элементы среднего движения. Для этого оказывается необходимым ввести ряд гипотез:

1) считается возможным в разложении пульсационной скорости в ряд Тейлора сохранить только первый член:

$$u' = \bar{u}|_{z-l} - \bar{u}'_z = \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} l', \quad (1)$$

где \bar{u} — средняя скорость вдоль стенки, u' — пульсационная скорость вдоль стенки, z — координата в направлении, перпендикулярном стенке, l' — некоторое расстояние, определяемое первым равенством формулы (1);

2) компоненты пульсационной скорости считаются пропорциональными друг другу:

$$w' = -\alpha u', \quad (2)$$

где α — отрицательный коэффициент пропорциональности.

Применение этих двух гипотез позволяет выразить турбулентное напряжение через элементы среднего движения:

$$-\rho \overline{u'w'} = \rho l'^2 \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right)^2, \quad (3)$$

где $l = \sqrt{\alpha l'^2}$ — так называемый путь смешения.

Следует указать, что поскольку эти две гипотезы используются лишь для получения соотношения (3), то естественно было бы считать единственной гипотезой постулирование этого соотношения.

Для замыкания задачи необходимо еще сделать ту или иную гипотезу относительно пути смешения. В качестве такой гипотезы Прандтль принимает следующую:

3) путь смешения считается пропорциональным удалению от стенки

$$l = \kappa z, \quad (4)$$

где κ — константа.

Хотя непосредственные измерения пульсационных элементов воздушных потоков не подтверждают гипотез Прандтля и, в особенности, вторую гипотезу, тем не менее результаты, получаемые применением схемы Прандтля, как до сих пор считалось, хорошо подтверждаются экспериментальными данными. Это противоречивое обстоятельство и послужило поводом к попытке более строгого применения схемы Прандтля.

§ 2. Как известно, осредненные уравнения движения несжимаемой жидкости, так называемые уравнения Рейнольдса, имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{X} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'^2} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'}, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \bar{Y} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'v'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'^2} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'w'}, \\ \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \bar{Z} - \frac{\partial}{\partial x} \overline{u'w'} - \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'w'} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'^2}, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где x , y и z — декартовы координаты (ось x направлена по течению, ось z — от стенки); \bar{u} , \bar{v} и \bar{w} — составляющие средней скорости; u' , v' и w' — составляющие пульсационной скорости; X , Y и Z — составляющие действующей силы; p — давление; ρ — плотность; t — время.

Осредненное уравнение неразрывности имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Будем рассматривать стационарное одномерное движение ($\bar{v} = \bar{w} = 0$) вдоль стенки $z = 0$, считая, что все элементы движения не зависят от y и все, кроме давления, не зависят от x ; из действующих сил рассмотрим сперва только силы вязкости. Кроме того, примем $v' \equiv 0$, т. е. вектор пульсационной скорости будем считать расположенным в плоскости xz .

Заметим, что эта система гипотез не является необходимой, а принята нами как наиболее наглядная для одномерной задачи. Те же результаты могут быть получены, если ограничимся требованиями: 1) все элементы движения, кроме давления, считаются зависящими только от z ; 2) компоненты средней скорости по y и z равны нулю и 3) отсутствует корреляция между v' и w' .

В этом случае система уравнений (5) и (6) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2}, \\ 0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5')$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'^2}, \\ 0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6')$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости.

Вторым членом последнего уравнения (5') обычно пренебрегают. Некоторым основанием к этому может служить то обстоятельство, что обычно должна учитываться сила тяжести. Тогда упомянутое уравнение запишется в виде

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - g - \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'^2}$$

и можно предположить, что последний член мал по сравнению с каждым из остальных. Если силу тяжести не учитывать, то пренебрегать этим членом нельзя.

Обычно принято также пренебрегать членом $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ в первом уравнении (5'), и мы пока сохраним это предположение.

Тогда вместо системы (5') и (6') имеем одно уравнение:

$$-\frac{\partial}{\partial z} \overline{u'w'} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} = 0. \quad (7)$$

Введем в рассмотрение суммарное удельное напряжение σ , слагающееся из удельного турбулентного напряжения — $\overline{u'w'}$, и удельного напряжения молекулярного (ламинарного) трения $\nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$:

$$\sigma = -\overline{u'w'} + \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z}. \quad (8)$$

Тогда, интегрируя уравнение (7), получаем:

$$\sigma = \sigma_0, \quad (9)$$

где постоянная σ_0 представляет собой напряжение молекулярного трения у стенки $\left(\sigma_0 = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \Big|_{z=0} \right)$.

Это видно из того, что в выражении (8) при $z=0$ первый член правой части пропадает, так как у стенки не могут существовать пульсации вертикальной скорости.

Таким образом, мы приходим к основному уравнению рассматриваемой задачи

$$-\overline{u'w'} + \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \sigma_0. \quad (10)$$

Легко видеть, что, сохранив в первом уравнении (5') член $p = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x}$ и считая его не зависящим от z , мы получили бы вместо (9)

$$\sigma = \sigma_0 + Pz \quad (9')$$

и соответственно, вместо (10)

$$-\overline{u'w'} + \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = \sigma_0 + Pz. \quad (10')$$

§ 3. Аналогичным образом можно рассматривать задачу о течении жидкости в трубе. При этом будем исходить из уравнений Рейнольдса и уравнения неразрывности в цилиндрической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \varphi} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} - \frac{\bar{v}^2_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} + F_r - \frac{\partial}{\partial r} \overline{v'_r{}^2} - \\ &- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \overline{v'_r v'_\varphi} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'_r v'_z} - \frac{1}{r} \overline{v'_r{}^2} + \frac{1}{r} \overline{v'_\varphi{}^2}; \\ \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial \varphi} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial z} + \frac{\bar{v}_r \bar{v}_\varphi}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \varphi} + F_\varphi - \frac{\partial}{\partial r} \overline{v'_r v'_\varphi} - \\ &- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \overline{v'_\varphi{}^2} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'_\varphi v'_z} - \frac{2}{r} \overline{v'_r v'_\varphi}; \\ \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} + \bar{v}_r \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial r} + \frac{\bar{v}_\varphi}{r} \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial \varphi} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + F_z - \frac{\partial}{\partial r} \overline{v'_r v'_z} - \\ &- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \overline{v'_\varphi v'_z} - \frac{\partial}{\partial z} \overline{v'_z{}^2} - \frac{1}{r} \overline{v'_r v'_z}. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \bar{v}_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \bar{v}_r = 0, \quad (12)$$

где t — время; r , φ и z — цилиндрические координаты ($r=0$ — ось трубы; z — направлено по течению); \bar{v}_r , \bar{v}_φ , \bar{v}_z — составляющие средней скорости; v'_r , v'_φ , v'_z — составляющие пульсационной скорости; F_r , F_φ , F_z — составляющие действующей силы; p — давление, ρ — плотность.

Так же как и ранее, рассматриваем стационарную одномерную задачу ($\bar{v}_r = \bar{v}_\varphi = 0$), считая, что все элементы движения не зависят от φ , все, кроме давления, не зависят от z , действует только сила вязкости и вектор пульсационной скорости расположен в плоскостях zr .

Эта система гипотез снова не является необходимой. Достаточно считать лишь, что: 1) все элементы, кроме давления, зависят только от r ; 2) составляющие средней скорости по r и по φ равны нулю и 3) отсутствует корреляция между v_r' и v_φ' , и при этом все сделанные выводы останутся в силе. В этом случае система уравнений (11) и (12) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial r} \bar{v}_r^2 - \frac{1}{r} \bar{v}_r'^2, \\ 0 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (11')$$

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \overline{v_r' v_z'} - \frac{1}{r} \overline{v_r' v_z'} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}, \\ 0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12')$$

Первое из уравнений (11') обычно не рассматривается на основании соображений, подобных приведенным выше для третьего из уравнений (5'). Следует отметить, что в данном случае эти соображения менее обоснованы.

Если пренебречь членом $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$ в третьем уравнении (11'), то вместо системы (11') и (12') получаем уравнение

$$-\frac{\partial}{\partial r} \overline{v_r' v_z'} - \frac{1}{r} \overline{v_r' v_z'} + \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \bar{u}}{\partial r} = 0. \quad (13)$$

Вводя в рассмотрение величину

$$\sigma = -\overline{v_r' v_z'} + \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial r}, \quad (14)$$

имеющую тот же смысл, что и ранее, перепишем уравнение (13) в виде:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\sigma}{r} = 0. \quad (15)$$

Интегрируя, получаем:

$$\sigma = \frac{\text{const}}{r}. \quad (16)$$

Легко показать абсурдность этого результата.

В самом деле, если в (16) постоянная не нуль, то на оси трубы суммарное удельное трение (5) бесконечно. Если же постоянная равна нулю, то всюду, в том числе и на стенке трубы, суммарное удельное трение равно нулю. Очевидно, что ни то, ни другое невозможно.

Следовательно, мы вынуждены в этом случае учитывать продольный градиент давления. Тогда вместо уравнения (15) будем иметь:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial r} + \frac{\sigma}{r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}, \quad (15')$$

Считая величину $P = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}$ не зависящей от r и интегрируя (15'), получим:

$$\sigma = \frac{1}{r} \left(\frac{Pr^2}{2} + \text{const} \right).$$

Здесь постоянная должна быть равна нулю, так как суммарное удельное трение на оси трубы, во всяком случае, должно быть ограничено. Поэтому получаем:

$$\sigma = \frac{Pr}{2}.$$

В частности, на стенке трубы (при $r=R$, где R — радиус трубы):

$$\sigma = \sigma_0 = \frac{PR}{2},$$

Используя это, перепишем предыдущее равенство в другой форме:

$$\sigma = \sigma_0 \frac{r}{R}. \quad (16')$$

Подставляя выражение для σ из (14), получаем основное уравнение рассматриваемой задачи:

$$-\overline{v_r'v_z'} + \nu \frac{\overline{\partial u}}{\partial r} = \sigma_0 \frac{r}{R}, \quad (17)$$

Выясненная только-что некорректность постановки задачи о движении без учета продольного градиента давления наводит на мысль, что и в случае одномерного течения вблизи плоской стенки также должен учитываться продольный градиент давления, т. е. вместо уравнения (16) следует исходить из уравнения (10). Так как обычно в плоской задаче градиент давления не учитывается, то мы будем рассматривать оба эти случая.

§ 4. Основные уравнения рассматриваемых задач (10), (10') и (17) являются не замкнутыми и для их замыкания используются гипотезы Прандтля. Тогда эти уравнения принимают соответственно следующий вид:

$$x^2 z^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \nu \frac{du}{dz} - v_*^2 = 0; \quad (18)$$

$$x^2 z^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \nu \frac{du}{dz} - v_*^2 - Pz = 0; \quad (19)$$

$$x^2 (R-r)^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2 - \nu \frac{du}{dr} - v_*^2 \frac{r}{R} = 0, \quad (20)$$

где $v_* = \sqrt{\sigma}$ — так называемая динамическая скорость и частное дифференцирование заменено полным, так как искомая функция в каждом случае зависит только от одного аргумента.

В уравнениях (18) и (19) \bar{u} обозначено через u ; в уравнении (20) \bar{v}_r обозначено также через u и всюду учтено, что путь смещения пропорционален расстоянию от стенки; поэтому в (20) вместо соотношения (4) использовано равенство

$$l = x(R-r), \quad (4')$$

При решении задач рассматриваемого типа использовалось следующее обстоятельство. В непосредственной близости от стенки можно пренебречь турбулентным трением, поскольку оно здесь очень мало по сравнению с молекулярным трением, которое именно в этой области достигает наибольшей величины. В достаточном удалении от стенки, наоборот, можно пренебречь молекулярным трением по сравнению с турбулентным. Поэтому, например, вместо уравнения (18) решаются уравнения

$$\nu \frac{du}{dz} - v_*^2 = 0 \quad (18')$$

при малых z и

$$x^2 z^2 \left(\frac{du}{dz}\right)^2 - v_*^2 = 0 \quad (18'')$$

при больших z .

Получающиеся решения „склеиваются“ на некотором удалении от стенки (находим, по существу, из экспериментальных данных). Область от стенки до уровня склейки, в которой пренебрегается влияние турбулентности, носит название ламинарного подслоя.

В некоторых случаях ламинарный подслой не вводится, но зато рассматриваются „шероховатые“ стенки и вводится некоторый уровень $z_0 > 0$ (тоже определяемый экспериментально), на котором скорость должна обращаться в нуль. В этих случаях влияние молекулярного трения вообще не учитывается. Введение ламинарного подслоя или уровня шероховатости с формальной точки зрения обусловлено тем, что при интегрировании уравнения без учета молекулярного трения нельзя иначе удовлетворить условию „прилипания“, т. е. обращения скорости в нуль на стенке.

Следует отметить, что разделение области течения на два слоя носит искусственный характер. Оно, по существу, соответствует рассмотрению лишь крайних случаев (очень малых и очень больших удалений от стенки), в то время как основная область течения фактически не рассматривается. Поэтому допустимость склейки вызывает большие сомнения.

Между тем вполне естественным является путь решения полных уравнений (18), (19), (20) без каких-либо упрощений. Этому и будет посвящена предлагаемая заметка.

§ 5. Рассмотрим весь комплекс динамических задач, возникающих при исследовании течения над плоскостью и течения в цилиндрической трубе при использовании схемы Прандтля. Все эти задачи могут быть классифицированы по следующим двум признакам:

1. В качестве первого признака возьмем форму поверхности, ограничивающей течение и учет перепада давления. По этому признаку рассматриваемые задачи делятся на три группы:

- а) течение над плоскостью без учета перепада давления;
- б) течение над плоскостью с учетом перепада давления;
- в) течение в цилиндрической трубе с учетом перепада давления.

Задачи о течении в цилиндрической трубе без учета перепада давления, как это было показано выше, являются некорректными по своей постановке. Именно это обстоятельство сделало целесообразным введение такого признака.

2. В качестве второго признака возьмем способ учета ламинарного трения. По этому признаку задачи делятся также на три типа:

а) задачи без учета ламинарного трения („однослойные“ задачи). Рассмотрение таких задач оказывается возможным только в случае, когда поверхность, ограничивающая течение, шероховата;

б) „двухслойные“ задачи. В области, прилегающей к стенке („ламинарный подслоя“), учитывается только ламинарное трение, а в остальной области течения — только турбулентное трение. Учет шероховатости стенки в двухслойных задачах не дает ничего нового¹ и нами проведен не будет;

в) задачи с учетом как турбулентного, так и ламинарного трения („непрерывные“ задачи).

Таким образом, всего мы имеем 9 задач, которые и рассмотрим последовательно, причем группировку задач будем проводить по второму признаку.

Математические выкладки при решении каждой из этих задач будем опускать, так как они носят совершенно элементарный характер. Таким образом, для каждой задачи мы будем приводить исходные уравнения, граничные условия и получающееся решение. В некоторых случаях будем также давать анализ этого решения.

„Непрерывные“ задачи могут решаться при двух типах граничных условий: при условии обращения скорости в нуль на самой стенке — для гладкой стенки и при условии обращения скорости в нуль на некотором расстоянии от стенки — для

¹ Это верно в случаях, если высота шероховатости меньше высоты ламинарного подслоя. В противном случае ламинарный подслой отсутствует, и задача сводится к типу а)

шероховатой. Понятно, что наиболее интересным является решение непрерывных задач при наличии гладких стенок. Этим случаем мы и ограничимся. Получаемые ниже результаты без труда могут быть обобщены и на случай шероховатых стенок.

§ 6. „Однослойные“ задачи. а) Течение над плоскостью без учета градиента давления (задача Прандтля). Исходным уравнением, согласно (18), будет:

$$\chi^2 z^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 = v_*^2; \quad (21)$$

граничное условие

$$u|_{z=z_0} = 0, \quad (22)$$

где z_0 — так называемый уровень шероховатости ($z_0 > 0$).

Решение имеет вид:

$$u = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{z}{z_0}.^1 \quad (23)$$

б) Течение над плоскостью с учетом градиента давления. Исходным уравнением, согласно (19), будет:

$$\chi^2 z^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 = v_*^2 + Pz, \quad (24)$$

граничное условие

$$u|_{z=z_0} = 0. \quad (22)$$

Решение имеет вид:

$$u = \frac{v}{\chi} \ln \frac{(\sqrt{v_*^2 + Pz} - v_*)(\sqrt{v_*^2 + Pz_0} + v_*)}{(\sqrt{v_*^2 + Pz} + v_*)(\sqrt{v_*^2 + Pz_0} - v_*)} + \frac{2}{\chi} [\sqrt{v_*^2 + Pz} - \sqrt{v_*^2 + Pz_0}] \quad (25)$$

В частности, для малых удалений от стенки, т. е. при $\frac{Pz}{v_*^2} \ll 1$ (и тем более $\frac{Pz_0}{v_*^2} \ll 1$) имеем:

$$u \approx \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{z}{z_0} + \frac{v_*}{\chi} P(z - z_0). \quad (25')$$

Сравнивая (25') и (23), можно заключить, что при малых расстояниях от стенки влияние перепада давления выражается добавочным членом

$$\frac{v_*}{\chi} P(z - z_0),$$

пропорциональным расстоянию от стенки.

в) Течение в цилиндрической трубе. Исходным уравнением, согласно (20), будет:

$$\chi^2 (R - r)^2 \left(\frac{du}{dr} \right)^2 = v_*^2 \frac{r}{R}; \quad (26)$$

граничное условие

$$u|_{r=R-h_0} = 0, \quad (27)$$

где R — радиус трубы, а h_0 — шероховатость, отсчитываемая от стенки.

Решение имеет вид:

$$u = \frac{v_*}{\chi} \ln \frac{(\sqrt{R-h} - \sqrt{R-h_0})(\sqrt{R} + \sqrt{R-h_0})}{(\sqrt{R-h} + \sqrt{R-h_0})(\sqrt{R} - \sqrt{R-h_0})} + 2 \frac{v_*}{\chi} \left[\sqrt{1 - \frac{h}{R}} - \sqrt{1 - \frac{h_0}{R}} \right], \quad (28)$$

где $h = R - r$ — расстояние от стенки.

¹ Как показали экспериментальные исследования, $\chi = 0,38$.

В частности, для малых удалений от стенки, т. е. при $\frac{h}{R} \ll 1$ (и тем более $\frac{h_0}{R} \ll 1$), имеем:

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{h}{h_0} - \frac{v_*}{\kappa R} (h - h_0). \quad (28')$$

Так как при описании течений в трубах часто применяется формула (23), то, сравнивая (28') и (23), мы замечаем, что между этими формулами имеется существенное различие. Интересно отметить, что формула (28') дает правильное значение производной $\frac{du}{dh}$ даже на оси трубы ($\left. \frac{du}{dh} \right|_{h=R} = 0$), несмотря на то, что эта формула выведена только для небольших удалений от стенки. Можно отметить еще аналогию между формулами (28') и (26'), выражающуюся в том, что наряду с логарифмическим членом входит линейный.

§ 7. „Двухслойные“ задачи. а) Течение над плоскостью без учета градиента давления (задача Кармана). В ламинарном подслое имеет место уравнение

$$\nu \frac{du}{dz} = v_*^2 \quad (29)$$

при граничном условии

$$u|_{z=0} = 0. \quad (30)$$

Вне ламинарного подслоя (в турбулентном „ядре“ течения) имеет место уравнение

$$\kappa^2 z^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 = v_*^2 \quad (21)$$

Кроме того, требуется непрерывность изменения скорости при переходе из ламинарного подслоя в турбулентное ядро:

$$u|_{\delta-0} = u|_{\delta+0}. \quad (31)$$

Здесь δ — толщина ламинарного подслоя, равная из соображений размерности

$$\delta = \alpha \frac{\nu}{v_*}, \quad (32)$$

где α — безразмерная постоянная.

Решение имеет вид:

$$u = \frac{v_*^2}{\nu} z \quad \text{— в ламинарном подслое} \quad (33_1)$$

и

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{z}{\alpha \frac{\nu}{v_*}} + \alpha v_* \quad \text{— в турбулентном ядре.}^1 \quad (33_2)$$

б) Течение над плоскостью с учетом градиента давления. В ламинарном подслое имеет место уравнение

$$\nu \frac{du}{dz} = v_*^2 + Pz, \quad (34)$$

при граничном условии

$$u|_{z=0} = 0. \quad (30)$$

¹ Как показали экспериментальные исследования, $\alpha = 11,5$.

В турбулентном ядре течения имеет место уравнение

$$\kappa^2 z^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 = v_*^2 + Pz. \quad (24)$$

Кроме того, требуется непрерывность изменения скорости при переходе из ламинарного подслоя в турбулентное ядро:

$$u|_{\delta-0} = u|_{\delta+0}. \quad (31)$$

Решение имеет вид:

$$u = \frac{v_*^2}{\nu} z + \frac{P}{2\nu} z^2 \text{ — в ламинарном подслое,} \quad (35_1)$$

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{\left(\sqrt{v_*^2 + Pz} - v_* \right) \left(\sqrt{v_*^2 + \alpha \frac{P\nu}{v_*}} + v_* \right)}{\left(\sqrt{v_*^2 + Pz} + v_* \right) \left(\sqrt{v_*^2 + \alpha \frac{P\nu}{v_*}} - v_* \right)} + \\ + \frac{2}{\kappa} \left[\sqrt{v_*^2 + Pz} - \sqrt{v_*^2 + \alpha \frac{P\nu}{v_*}} \right] + \alpha v_* + \alpha^2 \frac{P\nu}{2v_*^2} \text{ — в турбулентном ядре.} \quad (35_2)$$

Строго говоря, в этом решении постоянные могут зависеть от безразмерного параметра задачи (вообще говоря, малого) $\frac{P\nu}{v_*^3}$.

в) Течение в цилиндрической трубе. В ламинарном подслое имеет место уравнение

$$\nu \frac{du}{dr} = v_*^2 \frac{r}{R}, \quad (36)$$

при граничном условии

$$u|_{r=R} = 0. \quad (30')$$

В турбулентном ядре течения имеет место уравнение (26).

Кроме того, требуется непрерывность изменения скорости при переходе из ламинарного подслоя в турбулентное ядро:

Решение имеет вид:

$$u|_{\delta-0} = u|_{\delta+0} \quad (31)$$

$$u = \frac{v_*^2}{\nu} h - \frac{v_*^2}{2\nu R} h^2 \text{ — в ламинарном подслое,} \quad (37_1)$$

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{\left(\sqrt{R} - \sqrt{R-h} \right) \left(\sqrt{R} + \sqrt{R - \alpha \frac{\nu}{v_*}} \right)}{\left(\sqrt{R} + \sqrt{R-h} \right) \left(\sqrt{R} - \sqrt{R - \alpha \frac{\nu}{v_*}} \right)} + \quad (37_2)$$

$$+ \frac{2v_*}{\kappa} \left[\sqrt{1 - \frac{h}{R}} - \sqrt{1 - \frac{\alpha\nu}{v_* R}} \right] + \alpha v_* - \alpha^2 \frac{\nu}{2R} \text{ — в турбулентном ядре, где}$$

$h = R - r$ — расстояние от стенки.

Строго говоря, и в этой задаче постоянные могут зависеть от безразмерного параметра задачи — $\frac{\nu}{v_* R}$, вообще говоря, малого. Этот параметр может быть записан в виде $\frac{1}{Re}$, где Re — число Рейнольдса, в котором вместо характерной скорости подставлена динамическая скорость.

§ 8. „Непрерывные“ задачи. а) Течение над плоскостью без учета градиента давления. Уравнение задачи имеет вид

$$\kappa^2 z^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \nu \frac{du}{dz} = v_*^2, \quad (18)$$

при граничном условии

$$u|_{z=0} = 0 \quad (30)$$

Вообще говоря, уравнению (18) соответствуют два уравнения первой степени относительно производной. Физический смысл имеет, очевидно, только то из них, которое в пределе, при $\nu \rightarrow 0$, переходит в соответствующее уравнение однослойной задачи. Это замечание будет иметь силу и для двух последующих рассматриваемых нами задач.

Решение имеет вид:

$$u = \frac{v_*}{x} \ln \left[\frac{z}{\nu} + \sqrt{1 + \left(\frac{z}{\frac{\nu}{2v_*x}} \right)^2} \right] + \frac{v_*}{x} \frac{2v_*x}{z} \left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{z}{\frac{\nu}{2v_*x}} \right)^2} \right]. \quad (38)$$

В частности, при малых удалениях от стенки, т. е. при $\frac{z}{\frac{\nu}{2v_*x}} \ll 1$ имеем

$$u \approx \frac{v_*^2}{\nu} z, \quad (33)$$

что, как и следовало ожидать, совпадает с профилем скорости при ламинарном движении.

Наоборот, при значительных удалениях от стенки, т. е. при $\frac{z}{\frac{\nu}{2v_*x}} \gg 1$, имеем

$$u = \frac{v_*}{x} \ln \frac{z}{\frac{\nu}{4v_*x}} - \frac{v_*}{x}. \quad (39)$$

Последнее выражение следует сравнить с выражениями (23) для соответствующей однослойной задачи, и с выражением (33₂) для скорости в турбулентном ядре соответствующей двухслойной задачи. Для этого удобно формулу (39) преобразовать к виду

$$u = \frac{v_*}{x} \ln \frac{z}{\frac{e\nu}{4v_*x}}, \quad (39')$$

где e — неперово число.

Тогда из непосредственного сравнения формул (23) и (39') видно, что величина

$$\bar{z}_0 = \frac{e\nu}{4v_*x} \approx 0,7 \frac{\nu}{v_*x} \quad (40)$$

играет роль шероховатости (z_0). Соотношение (40) интересно не только тем, что им сопоставляется шероховатость с вязкостью, но также и тем, что, в противоположность обычным представлениям, оказывается, что шероховатость \bar{z}_0 зависит не от геометрических характеристик стенки непосредственно, а через посредство суммарного трения. Кроме того, согласно (40), шероховатость \bar{z}_0 , при прочих равных условиях, прямо пропорциональна кинематическому коэффициенту вязкости ν .

Для сравнения формул (39) и (33₂) приведем последнюю к одночленному виду. Тогда получим

$$u = \frac{v_*}{x} \ln \frac{z}{\frac{\alpha\nu}{v_*e^{\alpha x}}}. \quad (33_2')$$

Сравнивая это выражение с (39'), получим следующее условие совпадения профилей (33) и (39'):

$$e^{\alpha x + 1} = 4\alpha x, \quad (41)$$

Однако, как нетрудно видеть, это уравнение не имеет вещественных корней. Это наводит на мысль о сомнительности решения для турбулентного ядра течения в соответствующей двухслойной задаче.

Отметим, что левая и правая части (41) наиболее близки при $\alpha x = 1$, т. е. при $x = 0,38$; $\alpha = 2,6$. Значение $\alpha = \frac{1}{x}$ примечательно тем, что при нем в двухслойных задачах „склеиваются“ на уровне δ не только u , но и $\partial u/\partial z$.

б) Течение над плоскостью с учетом градиента давления. Уравнение задачи имеет вид

$$x^2 z^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 + \nu \frac{du}{dz} = v_*^2 + Pz, \quad (19)$$

при граничном условии

$$u|_{z=0} = 0 \quad (30)$$

Применяя сделанное выше замечание о выборе знака, получаем после весьма громоздких, но принципиально несложных выкладок решение задачи в следующей форме:

$$u = \frac{v_*}{x} \left\{ \frac{M}{x_1 + \xi_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{3M}{-x_1 + \xi_1} + \frac{1}{2} \sqrt{\xi_1} \left(3 + \frac{3x_1 + 2}{\xi_1} \right) [F(k_1, \varphi) - F(k_1, \varphi_0)] - \right. \\ \left. - 3 \sqrt{\xi_1} [E(k_1, \varphi) - E(k_1, \varphi_0)] + \sqrt{\xi_1} \left[3 + \frac{\xi_1 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} \right)}{k_1 + \xi_1 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}} \right] \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sqrt{1 - k_1^2 \sin^2 \varphi} \right\}, \quad (42)$$

где

$$M = \frac{P\nu}{2xv_*^2}$$

x — вещественный корень уравнения $x^2 + x^2 + M^3 = 0$.

$$\xi = \sqrt{3x_1^2 + 2x_1};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{P}{v_*^2} \frac{z - x_1}{\xi_1}; \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi_0}{2} = -\frac{x_1}{\xi_1};$$

$$k_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \frac{3x_1 + 1}{\xi_1};$$

$F(k_1, \varphi)$ и $E(k_1, \varphi)$ — эллиптические интегралы соответственно первого и второго рода в канонической форме.

Проанализируем теперь полученное решение, для чего преобразуем формулу (42) для двух случаев — малых и больших удалений от стенки.

При малых удалениях от стенки, как и следовало ожидать, получаем:

$$u = \frac{v_*^2}{x} z + \frac{P}{2\nu} z^2, \quad (35_1)$$

т. е. профиль скорости при ламинарном движении.

Для больших удалений от стенки получаем:

$$u = \frac{v_*}{x} \ln \frac{16xv_*^2 \sqrt{v_*^2 + Pz} - v_*}{e^3 P\nu \sqrt{v_*^2 + Pz} + v_*} + \frac{2}{x} \sqrt{v_*^2 + Pz}. \quad (43)$$

Это выражение похоже по своему виду на формулу (25) профиля скорости в соответствующей однослойной задаче. Так же, как и ранее, эта аналогия может

быть использована для нахождения величины, играющей в профиле (43) роль шероховатости. Для этого приведем формулу (25) к виду:

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln \left[\frac{\sqrt{v_*^2 + Pz_0} + v_*}{\sqrt{v_*^2 + Pz_0} - v_*} e^{-\frac{2}{v_*} \sqrt{v_*^2 + Pz_0} \sqrt{v_*^2 + Pz} - v_*} \right] + \frac{2}{\kappa} \sqrt{v_*^2 + Pz}. \quad (25'')$$

Сравнивая (25'') и (43), получаем искомое соотношение:

$$\frac{16\kappa v_*^3}{c^3 P \nu} = \frac{\sqrt{v_*^2 + Pz_0} + v_*}{\sqrt{v_*^2 + Pz_0} - v_*} e^{-\frac{2}{v_*} \sqrt{v_*^2 + Pz_0}}. \quad (44)$$

Если воспользоваться дополнительно малостью величины \bar{z}_0 , то последнее выражение даст

$$\bar{z}_0 \approx \frac{e}{4} \frac{\nu}{\kappa v_*} \approx 0,7 \frac{\nu}{\kappa v_*}, \quad (45)$$

т. е. в точности ту же формулу, что и в задаче без учета градиента давления [формула (40)]. Это вполне естественно, поскольку полученная приближенная формула (45) для \bar{z}_0 не содержит P , а предыдущая задача получается из нашей как частный случай при $P=0$.

Таким образом, снова, как и в предыдущем случае, мы получаем вывод о пропорциональности величины \bar{z}_0 кинематической вязкости. Но этот вывод теперь верен только приближенно. Вывод же о том, что \bar{z}_0 зависит от свойства поверхности стенки только через посредство напряжения трения, остается в силе.

Перейдем к сравнению полученной формулы (43) с выражением (35₂) для скорости в турбулентном ядре течения соответствующей двухслойной задачи. Для этого приведем формулу (35₂) к виду, аналогичному (43). Тогда получим

$$u = \frac{v_*}{\kappa} \ln \left[\frac{\sqrt{v_*^2 + \alpha \frac{P\nu}{v_*} + v_*}}{\sqrt{v_*^2 + \alpha \frac{P\nu}{v_*} - v_*}} e^{-\frac{2}{v_*} \sqrt{v_*^2 + \alpha \frac{P\nu}{v_*} + \alpha x + \frac{\alpha^2 \nu P \nu}{2v_*^3} \sqrt{v_*^2 + Pz} - v_*}} \right] + \frac{2}{\kappa} \sqrt{v_*^2 + Pz}. \quad (35_2')$$

Из сравнения формул (35₂') и (43) получим следующее условие совпадения профилей:

$$\frac{16\kappa v_*^3}{e^3 P \nu} = \frac{\sqrt{v_*^2 + \alpha \frac{P\nu}{v_*} + v_*}}{\sqrt{v_*^2 + \alpha \frac{P\nu}{v_*} - v_*}} e^{-\frac{2}{v_*} \sqrt{v_*^2 + \alpha \frac{P\nu}{v_*} + \alpha x + \frac{\alpha^2 \nu P \nu}{2v_*^3}}}. \quad (46)$$

Условие совпадения профилей может быть получено с достаточной степенью точности при использовании в равенстве (46) малости параметра $\frac{P\nu}{v_*^3}$. Тогда равенство (46) приведет к простому виду:

$$e^{1+\alpha x} \approx 4\alpha x, \quad (47)$$

в точности совпадающему с соответствующим равенством для предыдущей задачи [формула (41)].

Таким образом, и в рассматриваемом случае не существует такого значения αx , при котором профиль скорости в турбулентном ядре двухслойной задачи совпадал бы с профилем скорости в непрерывной задаче. Этот факт может быть доказан не только с помощью приближенной формулы (47), но и с помощью точного выражения (46).

в) Течение в цилиндрической трубе. Уравнение задачи имеет вид:

$$x^2(R-r)^2 \left(\frac{du}{dz} \right)^2 - \nu \frac{du}{dr} = v_*^2 \frac{r}{R}, \quad (20)$$

при граничном условии

$$u|_{r=R} = 0. \quad (30')$$

Решение этой задачи весьма похоже на решение предыдущей задачи, также выражаясь через эллиптические интегралы. Именно, это решение имеет вид:

$$u = \frac{v_*}{z} \left\{ \frac{N}{y_1 - \eta_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2}} + \frac{3N}{y_1 + \eta_1} - \frac{1}{2} \sqrt{\eta_1} \left(3 + \frac{2-3y_1}{\eta_1} \right) \left[F(k_2, \psi) - F(k_2, \psi_0) \right] + 3 \sqrt{\eta_1} \left[E(k_2, \psi) - E(k_2, \psi_0) \right] - \sqrt{\eta_1} \left(3 + \frac{\eta_1 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} \right)}{y_1 - \eta_1 \operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2}} \right) \operatorname{tg} \frac{\psi}{2} \sqrt{1 - k_2^2 \sin^2 \psi} \right\}. \quad (48)$$

где

$$N = \frac{\nu}{2xv_*R},$$

y_1 — вещественный корень уравнения

$$y^3 - y^2 - N^2 = 0;$$

$$\eta_1 = \sqrt{3y_1^2 - 2y_1};$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\psi}{2} = -\frac{1 - \frac{2}{R} - y_1}{\eta_1}; \quad \operatorname{tg}^2 \frac{\psi_0}{2} = \frac{y_1}{\eta_1},$$

$$k_2^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \frac{3y_1 - 1}{\eta_1},$$

$F(k_2, \varphi)$ и $E(k_2, \varphi)$ — эллиптические интегралы, соответственно первого и второго рода в канонической форме.

Проанализируем теперь полученное решение, для чего преобразуем формулу (48) для двух случаев малых и больших удалений от стенки трубы.

При малых удалениях от стенки, как и следовало ожидать, получаем

$$u = \frac{v_*^2}{\nu} h - \frac{v_*^2}{2\nu R} h^2, \quad (49)$$

где $h = R - r$, т. е. профиль скорости при ламинарном движении в трубе.

Для значительных удалений от стенки трубы получаем

$$u = \frac{v_*}{z} \ln \frac{16xv_*R}{e^{3\nu}} \frac{\sqrt{R} - \sqrt{R-h}}{\sqrt{R} + \sqrt{R-h}} + 2 \frac{v_*}{z} \sqrt{1 - \frac{h}{R}}. \quad (50)$$

Это выражение похоже по своему виду на формулу (23) профиля скорости в соответствующей однослойной задаче. Найдем снова величину, играющую в профиле (50) роль шероховатости, для чего приведем формулу (28) к виду

$$u = \frac{v_*}{z} \ln \left[\frac{\sqrt{R} + \sqrt{R-h_0}}{\sqrt{R} - \sqrt{R-h_0}} e^{-2 \sqrt{1 - \frac{h_0}{R}} \frac{\sqrt{R} - \sqrt{R-h}}{\sqrt{R} + \sqrt{R-h}}} \right] + 2 \frac{v_*}{z} \sqrt{1 - \frac{h}{R}}. \quad (28'')$$

Сравнивая (28'') и (50), получаем искомое соотношение

$$\frac{16\chi v_* R}{e^{3\chi}} = \frac{\sqrt{R + \sqrt{R - \bar{h}_0}}}{\sqrt{R - \sqrt{R - \bar{h}_0}}} e^{-2\sqrt{1 - \frac{\bar{h}_0}{R}}} \quad (51)$$

Если воспользоваться дополнительно малостью величины \bar{h}_0 , то последнее выражение дает:

$$\bar{h}_0 \approx \frac{e}{4} \frac{\nu}{\chi v_*} \approx 0,7 \frac{\nu}{\chi v_*}, \quad (52)$$

т. е. в точности то же равенство, которое точно выполнялось в плоской задаче без учета градиента давления [формула (40)] и приближенно — в плоской задаче с учетом градиента давления [формула (45)].

Перейдем к сравнению полученной формулы (50) с выражением (37₂) для скорости в турбулентном ядре течения соответствующей двухслойной задачи. Для этого преобразуем формулу (37₂) к виду, аналогичному (50). Тогда получим

$$u = \frac{v_*}{\chi} \ln \left[\frac{\sqrt{R + \sqrt{R - \frac{\alpha\nu}{v_*}}} e^{-2\sqrt{1 - \frac{\alpha\nu}{v_* R} + \alpha\chi - \frac{\alpha^2\chi\nu}{2v_* R}} \sqrt{R - \sqrt{R - h}}}{\sqrt{R - \sqrt{R - \frac{\alpha\nu}{v_*}}} \sqrt{R + \sqrt{R - h}}} \right] + 2 \frac{v_*}{\chi} \sqrt{1 - \frac{h}{R}} \quad (37_2')$$

Из сравнения формул (37₂') и (50) получим следующее условие совпадения профилей:

$$\frac{16\chi v_* R}{e^{3\chi}} = \frac{\sqrt{R + \sqrt{R - \frac{\alpha\nu}{v_*}}} e^{-2\sqrt{1 - \frac{\alpha\nu}{v_* R} + \alpha\chi - \frac{\alpha^2\chi\nu}{2v_* R}}}{\sqrt{R - \sqrt{R - \frac{\alpha\nu}{v_*}}}} \quad (53)$$

Условие совпадения профилей может быть получено с достаточной точностью при использовании в равенстве (53) малости параметра

$$\frac{\nu}{v_* R}$$

Тогда равенство (53) приводится к простому виду

$$e^{1+\alpha\chi} = 4\alpha\chi, \quad (54)$$

что снова полностью совпадает с равенством, выполнявшимся точно в задаче о течении над плоскостью без учета градиента давления [формула (41)] и приближенно — в задаче о течении над плоскостью с учетом градиента давления.

Можно отметить факт далеко идущего соответствия между последними двумя задачами, видный, например, из сравнения формул (42) и (48), а также (43) и (50). Это соответствие легко могло бы быть установлено и непосредственно из исходных уравнений (19) и (20). Именно, легко видеть, что подстановкой $R - r = h$ уравнение (20) приводится к виду

$$\chi^2 h^2 \left(\frac{du}{dh} \right)^2 + \nu \frac{du}{dh} - v_*^2 + v_*^2 \frac{h}{R} = 0, \quad (20')$$

который совпадает с (19), если установить соответствие

$$p \sim -\frac{v_*^2}{R},$$

где в левой части стоит величина, характеризующая плоскую задачу, а в правой части — величина, относящаяся к цилиндрической задаче.

Подчеркнем, что речь идет лишь о формальной аналогии, что видно, например, из различного характера вхождения градиента давления в правую и левую части формулы (55).

Из этой же формулы непосредственно видно, что плоскому случаю при отсутствии градиента давления соответствует цилиндрический случай с бесконечно большим радиусом трубы.

Имея в виду сравнение полученных результатов с опытом, удобно несколько преобразовать формулу (50). Именно, из (50) получаем:

$$u|_{h=R} = u_{\text{макс}} = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{16\kappa v_* R}{e^{3\gamma}} \quad (55)$$

и поэтому

$$\frac{u_{\text{макс}} - u}{v_*} = -\frac{1}{\kappa} \left[\ln \frac{\sqrt{R} - \sqrt{R-h}}{\sqrt{R} + \sqrt{R-h}} + 2 \sqrt{1 - \frac{h}{R}} \right] \quad (56)$$

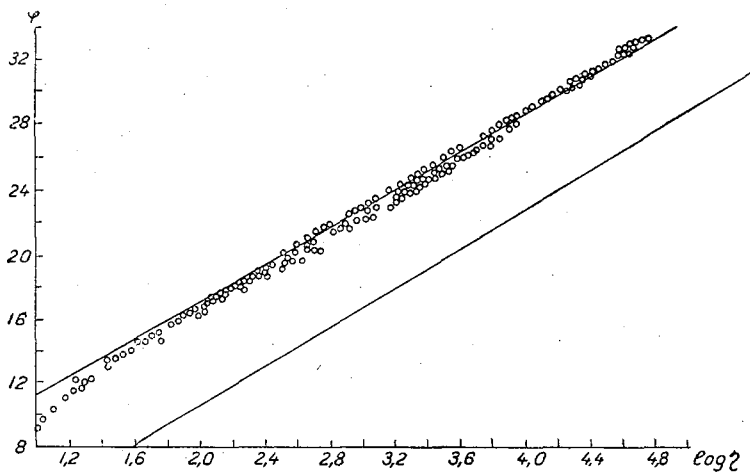


Рис. 1.

Эта формула напоминает известную формулу Кармана, полученную при совершенно иных предположениях.

§ 9. Сравним теперь полученные теоретические профили скорости с экспериментальными данными.

Остановимся сперва на случае течения над плоскостью. Хотя для этой цели наиболее естественно было бы воспользоваться данными о распределении скоростей при обтекании пластинки, однако обычно поступали иначе. Так, Карман сравнивал теоретический профиль скорости для двухслойного течения над плоскостью без учета градиента давления с экспериментальными данными о распределении скоростей в цилиндрической трубе. Мы будем поступать точно так же, имея в виду сравнить между собою все три профиля скорости (экспериментальный профиль для цилиндрической трубы и теоретические профили для двухслойной и непрерывной задач о течении над плоскостью без учета градиента давления). Опытные данные взяты нами из книги Л. Г. Лойцянского „Аэродинамика пограничного слоя“ (изд. 1941 г., стр. 295, рис. 102).

На рис. 1, где обозначено $\varphi = \frac{u}{v_*}$, $\eta = \frac{vz}{v_*}$, точками нанесены экспериментальные данные, тонкой сплошной линией — решение двухслойной задачи для турбулентного ядра течения и жирной сплошной линией — решение непрерывной задачи.

Как видно из рис. 1, профиль скорости для непрерывной задачи не согласуется с экспериментальными данными.

Перейдем к теоретическому профилю скорости для непрерывной цилиндрической задачи, причем при сравнении будем исходить из формулы (56). Опытные данные

для этого случая нами также взяты из упомянутой книги Л. Г. Лойцянского (стр. 332, рис. 117).

На рис. 2 точками нанесены экспериментальные данные, а кривая соответствует формуле (56).

Так же как и в предыдущем случае, видно, что профиль скорости непрерывной задачи не согласуется с опытными данными. Если в предыдущем случае в качестве причины расхождения кривых можно было подозревать несоответствие схемы плоской задачи и течения в трубе, то теперь этот довод отпадает.

Между тем, как известно (и как, в частности, видно также из рис. 1), выводы из однослойных и двухслойных задач хорошо подтверждаются опытными данными.

Для выяснения причин всего этого естественно сравнить между собой постановку и пути решения однослойных и двухслойных задач, с одной стороны, и непрерывных — с другой.

Нетрудно видеть, что постановка непрерывных задач основана на тех же гипотезах Прандтля, как и в однослойном и двухслойном случаях; никаких добавочных гипотез не используется, ни одна из принятых гипотез не остается без использования. Различие состоит только в том, что в непрерывных задачах соответствующие уравнения [(18), (19) или (20)] решаются точно и получаемые решения не содержат каких-либо параметров подгонки, в то время как в однослойных и двухслойных задачах соответствующие уравнения решаются приближенно и в решениях появляются произвольные константы (z_0 — в однослойных и α — в двухслойных задачах), определяемые из опытных данных.

Упрощения, допускаемые при решении однослойных и двухслойных задач, заключаются в отбрасывании того или иного члена в дифференциальных уравнениях задачи. Как легко видеть, эти упрощения приводят к систематической ошибке в величине градиента скорости, а именно — к его завышению.

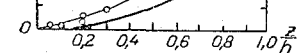


Рис. 2.

Из изложенного следует вывод о том, что при корректности гипотез Прандтля должно иметь место совпадение опытных профилей скорости с теоретическими

профилями непрерывных задач. Поскольку же подобное совпадение не имеет места, то согласование с опытом одно- и двухслойных задач не может рассматриваться как доказательство корректности гипотез Прандтля.

Таким образом, мы с неизбежностью приходим к выводу о некорректности схемы Прандтля.

Вместе с тем мы не имеем достаточных оснований для детализации этого вывода, т. е. для указания того, какая именно из гипотез Прандтля неверна. Однако можно привести некоторые соображения по этому поводу.

Как известно, формула (4) обосновывается обычно тем, что, кроме пути смешения, имеется еще только одна величина размерности длины — расстояние от стенки (если не учитываются силы вязкости). Но при учете сил вязкости, т. е. при рассмотрении непрерывных задач, появляется вторая величина размерности длины — отношение $\frac{\nu}{v_*}$. Влияние этой величины может оказаться существенным, во всяком случае, вблизи стенки. Это наводит на мысль, что соотношение (4) вряд ли имеет силу для любых z или h вплоть до стенки. Поэтому нам представляется, что именно эта гипотеза Прандтля наиболее сомнительна.

Вместо с тем можно указать на то, что основное соотношение Прандтля (3) выведено в предположении отсутствия вязкости; точнее говоря, при выводе этого соотношения влияние вязкости нигде явно не учитывается. Естественно поэтому считать, что и равенство (3) не должно выполняться там, где влияние вязкости существенно.

Можно, однако, трактовать выражение (3) просто как определение функции l , связывающее, кроме того, $\overline{u'v'}$ и $\frac{d\overline{u}}{dz}$ не вызывающим сомнений условием, что $\overline{u'v'} = 0$ при $\frac{d\overline{u}}{dz} = 0$. При такой трактовке равенства (3) достаточно говорить лишь о невыполнимости вблизи стенки соотношения (4).

§ 10. В заключение укажем на возможность использования идеи непрерывных задач при решении некоторых других вопросов.

Так, нами использовалась лишь гипотеза Прандтля (4) о пропорциональности пути смещения удалению от стенки. С тем же основанием может быть рассмотрена известная гипотеза о пути смещения

$$l = \kappa \frac{du}{d^2u}, \quad (4'')$$

введенная Карманом. Однако при интегрировании получающихся уравнений возникают математические трудности. Можно думать, что и в этом случае мы должны будем прийти к выводу о некорректности исходной системы гипотез.

Естественно также поставить вопрос о применении идеи непрерывных задач к схеме переноса завихренности.

Наконец, укажем еще на то, что, наряду с динамическими задачами, можно рассматривать также и тепловые и диффузионные. В связи с этим заслуживает упоминания отмеченное Д. А. Франк-Каменецким несовпадение констант α для обмена количества движения и теплообмена. Именно, если „динамическое“ значение α равно 11,5, то „термическое“ значение α , приведенное Д. А. Франк-Каменецким в книге „Диффузия и теплопередача в химической кинетике“ (стр. 182 и 186), равно 4,4. Интересно отметить, что это значение близко к полученному выше „оптимальному“.

К ТЕОРИИ ИЗМЕНЕНИЯ ВЕТРА В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

В приземном слое атмосферы распределение скорости ветра во времени и пространстве может быть описано следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} k(t, z) \frac{\partial W}{\partial z} + 2i\omega_z (W_g - W), \quad (1)$$

где $W = U_x + iU_y$ — вектор скорости ветра, U_x и U_y — его составляющие по осям X и Y , $W_g = \frac{1}{2\omega_z \rho} \left(-\frac{\partial p}{\partial y} + i \frac{\partial p}{\partial x} \right)$ — вектор градиентного ветра, p — давление, ρ — плотность воздуха, ω_z — вертикальная компонента угловой скорости вращения земли, $k(t, z)$ — коэффициент турбулентного обмена.

Вектор скорости ветра W должен удовлетворять двум граничным условиям:

1) у поверхности земли на некоторой малой высоте $z = z_0$ (уровень шероховатости) $W = 0$;

2) при больших z ($z \rightarrow \infty$) на границе приземного слоя атмосферы W асимптотически приближается к градиентному ветру $W = W_g$.

В данной статье будут рассмотрены два вопроса о временных изменениях скорости ветра: 1) задача суточного хода ветра, 2) определение изменений скорости ветра со временем, если известно начальное распределение ее по высоте и ход изменений градиентного ветра (последний может быть получен, например, по методу И. А. Кибеля).

1. При решении задачи о суточном ходе ветра существенно более полно учесть зависимость коэффициента обмена от времени, поскольку именно благодаря резким изменениям коэффициента обмена ото дня к ночи, как уже известно много лет, можно качественно объяснить замечательную особенность суточного хода ветра — так называемое „обращение ветра“, которое заключается в том, что скорость ветра в нижних слоях имеет максимум днем и минимум ночью, а в верхних слоях — наоборот. Количественная теория должна учитывать это существенное обстоятельство, поэтому здесь будет рассмотрен общий случай периодической зависимости коэффициента обмена от времени:

$$k(t, z) = k(t)z \text{ при } z \leq h \text{ и } k(t, z) = k(t)h \text{ при } z \geq h.$$

Линейная зависимость коэффициента обмена от высоты в нижнем слое воздуха при различных состояниях устойчивости убедительно показана в последние годы М. И. Будыко [1].

Существует и другая точка зрения, согласно которой изменение коэффициента обмена с высотой описывается степенной зависимостью: $k(t, z) = k(t)z^P$ при $z \leq h$, где P значительно изменяется в течение суток ($0 < P < 1$). Укажем, однако, что использование последней зависимости создало бы чрезвычайные математические трудности, вследствие существенных изменений P со временем.

Далее отметим, что в последние годы многими авторами показано, что $k(t, z)$ весьма велико днем и мало ночью и что функция $k(t)$ резко отличается от гармонической.

Впервые задача о суточном ходе ветра с учетом гармонической зависимости коэффициента обмена от времени была рассмотрена Б. И. Извековым [2]. Он нашел решение (1) для случая

$$k(t, z) = \alpha + \beta \cos \omega t,$$

т. е. когда значения коэффициента обмена изменяются только со временем, но не зависят от высоты. Затем Джау [3] получил решение (1) при $k(t, z)$ линейно возрастающим с высотой, и изменяющимся гармонически со временем.

Позже этим вопросом занимался Л. Т. Матвеев, который более полно учел зависимость коэффициента обмена от высоты и принял $k(t)$ гармонической функцией.

Следует указать также на важное решение уравнения Фикка при периодической зависимости коэффициента обмена от времени для задачи суточного хода температуры, которое дано в работе М. И. Юдина [4]. Интересные результаты по суточному ходу ветра получены М. Е. Швецом [5], который исходил из уравнения для стационарного состояния и учитывал изменение коэффициента обмена со временем параметрически.

Переходя к решению уравнения (1), произведем подстановку:

$$W = e^{-2i\omega z} V + W_g; \quad \tau = \int_0^t k(\xi) d\xi. \quad (2)$$

Учитывая, что в установившихся условиях градиентный ветер в течение суток практически не сильно меняется, примем для простоты W_g постоянным. Подставив (2) в (1), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial V}{\partial z} \quad \text{при } z \leq h, \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial \tau} &= h \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} \quad \text{при } z \geq h. \end{aligned} \right\} \quad (3)^1$$

Граничные условия будут:

при $z = z_0$:

$$V = -W_g e^{2i\omega z}, \quad (4)$$

при $z = \infty$:

$$\bar{V} = 0. \quad (5)$$

Кроме того, условие „склейки“ при $z = h$: $W = \bar{W}$ и $\frac{\partial W}{\partial z} = \frac{\partial \bar{W}}{\partial z}$ дает

$$V = \bar{V} \quad \text{и} \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}.$$

Решение (3) ищем методом Фурье:

$$V = \sum_n F_n(\tau) \Phi_n(z).$$

Тогда

$$\frac{1}{F_n} \frac{dF_n}{d\tau} = \frac{1}{\Phi_n} \frac{d}{dz} \frac{d\Phi_n}{dz} = \alpha_n,$$

где α_n — некоторая постоянная.

¹ Здесь и в дальнейшем величины, относящиеся к слою $z \geq h$, мы обозначаем теми же буквами, что и для слоя $z \leq h$, с черточкой над ними.

Отсюда

$$V = \sum_n e^{\alpha_n \tau} [A_n I_0(2\sqrt{\alpha_n z}) + B_n K_0(2\sqrt{\alpha_n z})]. \quad (6)$$

Здесь $I_0(y)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента, $K_0(y)$ — функция Макдональда.

Принимая во внимание (5), получим:

$$\bar{V} = \sum_n C_n e^{\alpha_n \tau - z} V^{\frac{\alpha_n}{h}},$$

A_n , B_n и C_n — постоянные интегрирования. Согласно (2) и (6):

$$W = e^{-2i\omega_z t} \sum_n e^{\alpha_n \tau} [A_n I_0(2\sqrt{\alpha_n z}) + B_n K_0(2\sqrt{\alpha_n z})] + W_g. \quad (7)$$

Нам надо выбрать α_n так, чтобы W было периодической функцией времени с периодом $T_0 = 24$ час. Для этого учтем следующие обстоятельства. По условиям задачи $k(t)$ имеет период T_0 , тогда из (2) следует, что τ при увеличении t на T_0 возрастает на величину $\tau_0 = k_0 T_0$, где $k_0 = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} k(\xi) d\xi$ — среднесуточное значение коэффициента обмена. Отсюда вытекает, что W (7) будет периодической функцией времени с периодом T_0 , если

$$\alpha_n = \frac{2n\pi i}{\tau_0} + \frac{2i\omega_z}{k_0}, \quad (8)$$

где n — целые числа от $-\infty$ до $+\infty$.

Для того чтобы удовлетворить условию „прилипания“ (4) на уровне шероховатости $z = z_0$, представим периодическую функцию $e^{2i\omega_z(t - \frac{\tau}{k_0})}$ следующим рядом Фурье по функциям $e^{\frac{2n\pi i}{\tau_0} \tau}$:

$$e^{2i\omega_z(t - \frac{\tau}{k_0})} = \sum_{-\infty}^{\infty} r_n e^{\frac{2n\pi i}{\tau_0} \tau}, \quad (9)$$

где

$$r_n = \frac{1}{\tau_0} \int_0^{\tau_0} e^{2i\omega_z t - \alpha_n \tau} d\tau, \quad (10)$$

откуда

$$e^{2i\omega_z t} = \sum_n r_n e^{\alpha_n \tau}$$

и тогда из (4) и (6) получим

$$A_n I_0(2\sqrt{\alpha_n z_0}) + B_n K_0(2\sqrt{\alpha_n z_0}) = -W_g r_n. \quad (11)$$

Поскольку при рассмотрении суточного хода ветра практически всегда можно ограничиться всего несколькими гармониками, то аргумент бесселевых функций в (11) мал и, раскладывая функции в ряд, можно учитывать лишь первые члены:

$$I_0(2\sqrt{\alpha_n z_0}) \approx 1; \quad K_0(2\sqrt{\alpha_n z_0}) \approx -\frac{1}{2} \ln \gamma^2 \alpha_n z_0.$$

$\gamma = 1,781$ — постоянная Эйлера.

Тогда из (11):

$$A_n = \frac{B_n}{2} \ln \gamma^2 \alpha_n z_0 - W_g r_n. \quad (12)$$

Условие „склейки“ при $z = h$ дает:

$$\begin{aligned} A_n I_0(2\sqrt{\alpha_n h}) + B_n K_0(2\sqrt{\alpha_n h}) &= C_n e^{-\sqrt{\alpha_n h}}, \\ A_n I_1(2\sqrt{\alpha_n h}) - B_n K_1(2\sqrt{\alpha_n h}) &= -C_n e^{-\sqrt{\alpha_n h}}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений и уравнения (12) найдем A_n , B_n и C_n , откуда получим:

$$V_n = W_g r_n \frac{s(z, h)}{s(z_0, h)},$$

где

$$\begin{aligned} s(z, h) &= I_0(2\sqrt{\alpha_n z}) K_0(2\sqrt{\alpha_n h}) - I_0(2\sqrt{\alpha_n h}) K_0(2\sqrt{\alpha_n z}) - \\ &- I_0(2\sqrt{\alpha_n z}) K_1(2\sqrt{\alpha_n h}) - I_1(2\sqrt{\alpha_n h}) K_0(2\sqrt{\alpha_n z}) \end{aligned}$$

и

$$\bar{V}_n = \frac{W_g r_n}{2\sqrt{\alpha_n h} s(z_0, h)} e^{(h-z)\sqrt{\frac{\alpha_n}{h}}}.$$

Поскольку и здесь аргументы бесселевых функций практически малы ($|n| < 10$), то снова применяя разложение в ряд, получим:

$$s(z, h) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{z}{h} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha_n h}}; \quad s(z_0, h) \approx \frac{1}{2} \ln \frac{z_0}{h} - \frac{1}{2\sqrt{\alpha_n h}}.$$

Таким образом:

$$\begin{aligned} V_n &= W_g r_n \frac{1 + \sqrt{\alpha_n h} \lg \frac{h}{z}}{1 + \sqrt{\alpha_n h} \lg \frac{h}{z_0}}, \\ \bar{V}_n &= -W_g r_n \frac{e^{(h-z)\sqrt{\frac{\alpha_n}{h}}}}{1 + \sqrt{\alpha_n h} \lg \frac{h}{z_0}}, \end{aligned}$$

и окончательно:

$$\left. \begin{aligned} W &= W_g \left[1 - e^{2i\omega_z \left(\frac{\tau}{k_0} - t\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r_n \frac{1 + \sqrt{\alpha_n h} \ln \frac{h}{z}}{1 + \sqrt{\alpha_n h} \ln \frac{h}{z_0}} e^{2n\pi i \frac{\tau}{\tau_0}} \right], \\ \bar{W} &= W_g \left[1 - e^{2i\omega_z \left(\frac{\tau}{k_0} - t\right)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{r_n}{1 + \sqrt{\alpha_n h} \ln \frac{h}{z_0}} e^{(h-z)\sqrt{\frac{\alpha_n}{h}} + 2n\pi i \frac{\tau}{\tau_0}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Этими формулами заканчивается получение общего решения задачи о суточном ходе ветра. Дальнейшие вычисления будут связаны с заданием конкретного вида $k(t)$. Если аналитический вид функции $k(t)$ сложен или $k(t)$ задана графически, то предварительно следует по (2) построить таблицу или график τ в зависимости от t .

II. Перейдем ко второму вопросу — исследованию нестационарного изменения скорости ветра. Снова исходим из уравнения (1) и при этом положим, что в начальный момент ($t=0$) задано распределение ветра с высотой $W = W_0(z)$ — полученное, например, по шаропилотным данным и, кроме того, известно изменение градиентного ветра со временем, т. е. функция $W_g(t)$. Нам представляется особенно важным учет хода градиентного ветра со временем.

Примем также, что $k(t, z) = k(t)z$ при $z \leq h$ и $k(t, z) = k(t)h$ при $z \geq h$, где $k(t)$ — в общем случае некоторая известная функция.

Выполним, как и в первой части подстановку (2). Тогда (1) перейдет в

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \tau} &= \frac{\partial}{\partial z} z \frac{\partial V}{\partial z} - Q(\tau) \dots (z \leq h), \\ \frac{\partial \bar{V}}{\partial \tau} &= h \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial z^2} - Q(\tau) \dots (z \geq h). \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Здесь

$$Q(\tau) = \frac{e^{2i\omega z t}}{k(t)} \frac{\partial W_g}{\partial t},$$

где $t = t(\tau)$.

Граничные условия будут:
при $z = z_0$:

$$V = -e^{2i\omega z t} W_g(t),$$

при $z = \infty$:

$$\bar{V} = 0$$

и условие „склейки“ при $z = h$:

$$V = \bar{V}; \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial \bar{V}}{\partial z}.$$

При $t = 0$:

$$V = W_0(z) - W_g(0).$$

Решение этой системы уравнений производится операционным методом. Преобразуем наши функции от τ на комплексную плоскость p по формулам

$$v = p \int_0^{\infty} e^{-p\tau} V(z, \tau) d\tau.$$

Перейдя к изображениям, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} z \frac{dv}{dz} - pv &= f(z, p), \\ h \frac{d^2 \bar{v}}{dz^2} - p\bar{v} &= \bar{f}(z, p), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где

$$f(z, p) = \bar{f}(z, p) = q(p) - p[W_0(z) - W_g(0)].$$

Малыми буквами обозначены соответствующие изображения (например, $v \doteq V(z, \tau)$; $q(p) \doteq Q(\tau)$).

Для получения однозначных решений сделаем разрез вдоль отрицательной части вещественной оси. Решение (15) представим в виде

$$v = v^0 + g; \quad \bar{v} = \bar{v}^0 + \bar{g},$$

где v^0 и \bar{v}^0 — решения однородных частей уравнений. Тогда

$$\left. \begin{aligned} v^0 &= AI_0(2\sqrt{pz}) + BK_0(2\sqrt{pz}), \\ \bar{v}^0 &= Ce^{-z\sqrt{\frac{p}{h}}}. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Здесь A, B, C — постоянные интегрирования.

Согласно фундаментальной теореме Гильберта:

$$g = \int_{z_0}^h G(z, \zeta) f(\zeta, p) d\zeta,$$

$$\bar{g} = \frac{1}{h} \int_h^\infty \bar{G}(z, \zeta) \bar{f}(\zeta, p) d\zeta.$$

Здесь G и \bar{G} — соответствующие функции Грина. Можно показать, что

$$G(z, \zeta) = 2 \frac{s_0(z_0, \zeta) s_0(z, h)}{s_0(z_0, h)} \quad \text{при } z_0 \leq \zeta \leq z,$$

$$G(z, \zeta) = 2 \frac{s_0(z_0, \zeta) s_0(z, h)}{s_0(z_0, h)} \quad \text{при } z \leq \zeta \leq h,$$

где

$$s_0(\xi, \eta) = I_0(2\sqrt{p\xi}) K_0(2\sqrt{p\eta}) - I_0(2\sqrt{p\eta}) K_0(2\sqrt{p\xi}) \quad (17)$$

и

$$\bar{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h}{p}} \left[e^{(2h-\zeta-z)\sqrt{\frac{p}{h}}} - e^{(\zeta-z)\sqrt{\frac{p}{h}}} \right] \quad \text{при } h \leq \zeta \leq z,$$

$$\bar{G}(z, \zeta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{h}{p}} \left[e^{(2h-z-\zeta)\sqrt{\frac{p}{h}}} - e^{(z-\zeta)\sqrt{\frac{p}{h}}} \right] \quad \text{при } z \leq \zeta < \infty.$$

Тогда после элементарных преобразований

$$g = 2 \frac{s_0(z_0, z)}{s_0(z_0, h)} \int_{z_0}^h s_0(\zeta, h) f(\zeta, p) d\zeta + 2 \int_{z_0}^z s_0(z, \zeta) f(\zeta, p) d\zeta, \quad (18)$$

$$\bar{g} = \frac{1}{2\sqrt{hp}} \left\{ \int_h^z \left[e^{(2h-z-\zeta)\sqrt{\frac{p}{h}}} - e^{(\zeta-z)\sqrt{\frac{p}{h}}} \right] \bar{f}(\zeta, p) d\zeta + \right.$$

$$\left. + \int_z^\infty \left[e^{(2h-\zeta-z)\sqrt{\frac{p}{h}}} - e^{(z-\zeta)\sqrt{\frac{p}{h}}} \right] \bar{f}(\zeta, p) d\zeta. \right. \quad (19)$$

Из условия „прилипания“ при $z = z_0$ и условия „склейки“ при $z = h$ получим три уравнения для нахождения A, B, C :

$$AI_0(2\sqrt{pz_0}) + BK_0(2\sqrt{pz_0}) = \psi(p),$$

$$AI_0(2\sqrt{ph}) + BK_0(2\sqrt{ph}) = Ce^{-\sqrt{ph}},$$

$$\sqrt{\frac{p}{h}} [AI_1(2\sqrt{ph}) - BK_1(2\sqrt{ph})] + \left(\frac{dg}{dz}\right)_{z=h} = -\sqrt{\frac{p}{h}} Ce^{-\sqrt{ph}} + \left(\frac{d\bar{g}}{dz}\right)_{z=h},$$

где

$$\psi(p) \doteq -e^{2i\omega z^t} W_g(t). \quad (20)$$

Определив предварительно из (18) и (19) $\left(\frac{dg}{dz}\right)_{z=h}$ и $\left(\frac{d\bar{g}}{dz}\right)_{z=h}$, а затем A, B, C , после несложных выкладок получим:

$$v = \frac{s(z, h)}{s(z_0, h)} \psi(p) + 2 \int_{z_0}^h \frac{s_0(z_0, z) s(\zeta, h)}{s(z_0, h)} f(\zeta, p) d\zeta + \\ + \int_h^\infty \frac{s_0(z, z_0) e^{-\zeta \sqrt{\frac{p}{h}}}}{s(z_0, h) \sqrt{hp}} f(\zeta, p) d\zeta + 2 \int_{z_0}^z s_0(z, \zeta) f(\zeta, p) d\zeta, \quad (21)$$

где

$$s(\xi, \eta) = I_0(2\sqrt{p\xi}) K_0(2\sqrt{p\eta}) - I_0(2\sqrt{p\eta}) K_0(2\sqrt{p\xi}) - \\ - I_0(2\sqrt{p\xi}) K_1(2\sqrt{p\eta}) - I_1(2\sqrt{p\eta}) K_0(2\sqrt{p\xi}). \quad (22)$$

Аналогичное выражение найдем для \bar{v} .

Второй этап задачи состоит в переходе от полученных изображений искомым функциям, т. е. оригиналам $V(z, \tau)$ и $\bar{V}(z, \tau)$.

Воспользуемся тем, что выражение для v (21) представлено в виде суммы произведений двух функций изображений, причем оригиналы вторых множителей известны согласно условиям задачи. Поэтому достаточно определить оригиналы первых множителей — некоторых вспомогательных функций $u_j(p)$, после чего, применяя теорему Бореля (теорема свертки), легко получим окончательные результаты. Из (21) следует, что такими вспомогательными функциями будут:

$$\left. \begin{aligned} u_1(p) &= p \frac{s(z, h)}{s(z_0, h)}; & u_2(p) &= p \frac{s_0(z_0, z) s(\zeta, h)}{s(z_0, h)}; \\ u_3(p) &= \sqrt{p} \frac{s_0(z, z_0)}{s(z_0, h)} e^{-\zeta \sqrt{\frac{p}{h}}}; & u_4(p) &= p s_0(z, \zeta). \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Оригиналы $\varphi_j(\tau)$ для функции $u_j(p)$ могут быть определены по формуле обращения Римана — Меллина:

$$\varphi_j(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{p\tau} \frac{u_j(p)}{p} dp. \quad (24)$$

Однако для применения формулы обращения необходимо исследовать особые точки $u_j(p)$ и поведение этих функций на бесконечности.

Нетрудно видеть, что особые точки $u_j(p)$ должны совпасть с нулями знаменателя $s(z_0, h)$. Вместе с тем можно показать, что в рассматриваемой плоскости $p, s(z_0, h)$ не обращается в нуль, исключая точку разветвления при $p=0$.

Действительно, обратимся к выражению (22) и рассмотрим функцию

$$s(z, h) = I_0(2\sqrt{pz}) K_0(2\sqrt{ph}) - I_0(2\sqrt{ph}) K_0(2\sqrt{pz}) - \\ - I_0(2\sqrt{pz}) K_1(2\sqrt{ph}) - I_1(2\sqrt{ph}) K_0(2\sqrt{pz})$$

и пусть $s_1(z, h)$ и $s_2(z, h)$ соответствуют разным значениям параметра p_1 и p_2 . Функции $s_1(z, h)$ и $s_2(z, h)$ удовлетворяют уравнениям Бесселя:

$$\frac{d}{dz} z \frac{ds_1}{dz} - p_1 s_1 = 0,$$

$$\frac{d}{dz} z \frac{ds_2}{dz} - p_2 s_2 = 0.$$

Умножив первое уравнение на s_2 , второе на s_1 , затем проинтегрировав по z в пределах от z_0 до h и вычитая одно из другого, получим:

$$(p_2 - p_1) \int_{z_0}^h s_1 s_2 dz = \int_{z_0}^h \left[s_2 \frac{d}{dz} z \frac{ds_1}{dz} - s_1 \frac{d}{dz} z \frac{ds_2}{dz} \right] dz = z \left(s_1 \frac{ds_1}{dz} - s_2 \frac{ds_2}{dz} \right) \Big|_{z_0}^h.$$

Если теперь предположить, что $s_1(z_0, h) = s_2(z_0, h) = 0$, и учесть, что

$$s(h, h) = -\frac{1}{2\sqrt{ph}}; \quad \left(\frac{ds}{dz} \right)_{z=h} = \frac{1}{2h},$$

то получим

$$(p_2 - p_1) \int_{z_0}^z s_1 s_2 dz = -\frac{1}{4\sqrt{h}} \left(\frac{1}{\sqrt{p_1}} - \frac{1}{\sqrt{p_2}} \right). \quad (25)$$

Примем теперь, что p_1 и p_2 взаимно сопряжены:

$$p_1 = \rho e^{i\alpha}; \quad p_2 = \rho e^{-i\alpha}. \quad (26)$$

Тогда от (25) приходим к равенству:

$$8\rho^{\frac{3}{2}} \sqrt{h} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \int_{z_0}^h s_1 s_2 dz = -1,$$

которое невозможно при $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$ или $|\alpha| = |\arg p| \leq \pi$, так как s_1 и s_2 также взаимно сопряжены и

$$\int_{z_0}^h s_1 s_2 dz > 0.$$

Таким образом доказано, что при $|\arg p| \leq \pi$ невозможно, чтобы уравнение $s(z_0, h)$ имело бы комплексные корни p . Необходимо отдельно еще рассмотреть случай $\alpha = 0$, т. е. когда p — действительно и тогда, согласно (26), будут одинаковы p_1 и p_2 , а также $\sqrt{p_1}$ и $\sqrt{p_2}$.

Нетрудно убедиться, что и в этом случае, т. е. на положительной части действительной оси $s(z_0, h)$ не обращается в нуль. Для этого нужно $s(z_0, h)$ рассмотреть как сумму двух слагаемых

$$s_0(z_0, h) \text{ и } -I_0(2\sqrt{pz_0}) K_1(2\sqrt{ph}) - I_1(2\sqrt{pz_0}) K_0(2\sqrt{pz_0}).$$

При положительном p каждое из слагаемых не обращается в нуль, а при больших p (привлекая асимптотические представления бесселевых функций) легко видеть, что они имеют один и тот же знак, отсюда следует, что их сумма также не может обращаться в нуль.

Таким образом мы доказали, что $u_j(p)$ не имеет особых точек во всей плоскости $|\arg p| \leq \pi$. Чтобы определить поведение $u_j(p)$ на бесконечности, используем асимптотические формулы

$$I_n(y) \sim \frac{e^y}{\sqrt{2\pi y}} \text{ и } K_n(y) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2y}} e^{-y}.$$

Подставив последние в (23), получим, что $u_j(p)$ при $p \rightarrow \infty$ убывает быстрее, чем $e^{-a\sqrt{p}}$, где a — некоторое положительное число, при этом надо совместно рассматривать сумму $u_2(p) + u_4(p)$.

Установленные свойства функции $u_j(p)$ позволяют перейти от контурного интеграла (24), в котором интегрирование производится по прямой σ , расположенной справа от особых точек $u_j(p)$, к действительным интегралам. Чтобы осуществить

это, имеются две возможности: 1) перейти от интегрирования по прямой σ к интегрированию по мнимой оси (AB) (рис. 1); 2) заменить интегрирование по прямой σ интегрированием по участкам CD и EF на отрицательной части вещественной оси (рис. 2).

Действительно, это возможно, поскольку внутри замкнутых (пунктирных) контуров на рис. 1 и 2 нет особых точек и на ветвях контуров AP и $B\theta$ (рис. 1) и EP и $C\theta$ (рис. 2) функция $u_j(p)$ экспоненциально убывает к нулю, если рассматривать эти ветви бесконечно удаленными.

Точка разветвления в начале координат обходится при интегрировании в первом случае по полуокружности, а во втором случае — по окружности бесконечно малого радиуса r . Используя ряды для бесселевых функций, легко установить, что пределы интегралов как по полуокружности, так и по окружности при $r \rightarrow 0$ в обоих случаях равны нулю.

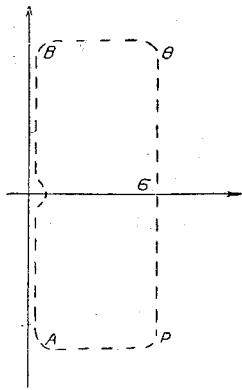


Рис. 1.

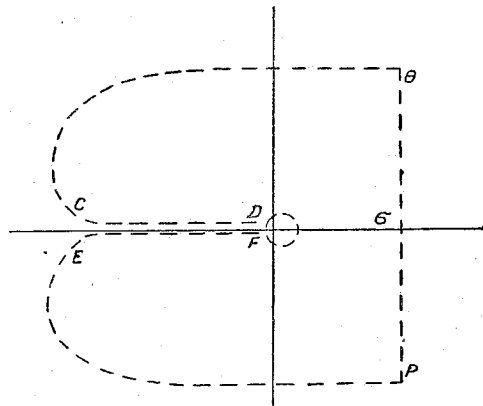


Рис. 2.

Таким образом, в первом случае (рис. 1) мы получим, что

$$\varphi_j(\tau) = \frac{1}{2\pi i} VP \int_{-\infty}^{+\infty} u_j(p=i\omega) e^{i\omega\tau} \frac{d\omega}{\omega},$$

где VP — означает главное значение интеграла в смысле Коши. Или так как $u_j(-i\omega) = u_j^*(i\omega)$, то

$$\varphi_j(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im} [u_j(p=i\omega) e^{i\omega\tau}] \frac{d\omega}{\omega}. \quad (27)$$

Во втором случае (рис. 2) аналогично получим

$$\varphi_j(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \text{Im} [u_j(V\bar{p} = -i\omega)] e^{-\omega^2\tau} \frac{d\omega}{\omega}. \quad (28)$$

Следует отметить, что во втором случае $\varphi_4(\tau) = 0$, так как $u_4(p)$, в отличие от других функций $u_j(p)$, не имеет в начале координат точки разветвления.

При вычислении полученных интегралов можно воспользоваться рядами и асимптотическими формулами для бесселевых функций и, кроме того, в интеграле (27) функциями Томсона (действительная и мнимые части функции Бесселя от аргумента $y\sqrt{i}$), а в интеграле (28) — следующими формулами:

$$I_0(-iy) = J_0(y); \quad I_1(-iy) = -iJ_1(y),$$

$$K_0(-iy) = -\frac{\pi}{2} [N_0(y) - iJ_0(y)]; \quad K_1(y) = -\frac{\pi}{2} [J_1(y) - iN_1(y)].$$

Обращаясь теперь к (21) и применяя теорему Бореля, найдем, что

$$\bar{V} = \sum_j \int_0^{\tau} \varphi_j(\tau - \vartheta) \Phi_j[t(\vartheta)] d\vartheta, \quad (29)$$

где $\Phi_j[t(\vartheta)]$ — известные по условиям задачи функции, например:

$$\Phi_1(t) \doteq \psi(p),$$

т. е. из (20)

$$\Phi_1(t) = -e^{2i\omega_z t} W_g(t).$$

Перейдя теперь от V к W , согласно (2), мы сведем решение поставленной задачи к вычислению обыкновенных квадратур.

Для получения формул, удобных к практическому использованию, следует удачно подобрать интерполирующие функции $W_g(t)$, $W_0(z)$ и особенно $k(t)$. Примером удачно выбранной функции $k(t)$ может служить выражение, предложенное М. И. Юдиным в упомянутой работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Будько М. И. Испарение в естественных условиях. Гидрометеиздат, 1948.
2. J s w e k o w B. J. Met. Z. 46, 1929, 1.
3. Jeon-Jang J a w. Mem. Nat. Res. Inst. Meteorol. Ac. Sinica, v 13, № 4, 1943.
4. Юдин М. И. ИАН, серия геофиз., № 4, 1949.
5. Швец М. Е. ИАН, сер. геофиз., № 2. 1943.

СО Д Е Р Ж А Н И Е

	Стр.
Л. С. Г ан д и н. Проблема ветровых нагрузок на строительные сооружения как задача прикладной метеорологии	3
Л. С. Г ан д и н. О моделировании ветровых нагрузок на строительные сооружения	15
М. Е. Берлянд. Эффективность открытого обогрева растений при заморозках	28
М. Е. Берлянд. К теории теплового режима приземного слоя воздуха	40
Л. С. Г ан д и н и Р. Э. Соловейчик. О схеме Прандтля в теории турбулентности	49
М. Е. Берлянд. К теории изменения ветра в приземном слое атмосферы	66

БИБЛИОТЕКА
ЛЕНИНГРАДСКОГО
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА