

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

Общественное № 2

Т Р У Д Ы ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

ВЫПУСК 2 (64)

ФИЗИКА АТМОСФЕРЫ

Под редакцией
канд. физ.-мат. наук
Р. Э. СОЛОВЕЙЧИКА



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД • 1947

АННОТАЦИЯ

В настоящем сборнике помещены некоторые из работ выполненных в 1945 г. в отделе физики атмосферы Главной геофизической обсерватории. Работа Д. Л. Лайхмана относится к вопросу о волновых движениях на поверхности раздела воздушных масс. Работы Н. Р. Малкина и М. Е. Швеца посвящены влиянию теплового излучения воздуха на изменение его температуры. В работе И. И. Честной предлагается метод для определения нижней границы облачности по наземным данным. Наконец статьи Д. Л. Лайхмана и А. Ф. Чудновского посвящены методам определения физических характеристик почвы.

Сборник в целом рассчитан на специалистов по физике атмосферы, а также на аспирантов соответствующего профиля.

Российский государственный
гидрометеорологический
институт
БИБЛИОТЕКА
195196, СПб, Малоохтинский пр., 98

ИЗДАТЕЛЬСТВО ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА

СПБ-1951

О ВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА В АТМОСФЕРЕ

Введение

В опубликованной ранее работе [1] нами получено уравнение движения сжимаемой жидкости при любом вертикальном градиенте потенциальной температуры. Допущение о постоянстве градиента потенциальной температуры, а не градиента абсолютной температуры, как это делается обычно, нам кажется более соответствующим условиям реальной атмосферы.

При выводе уравнения мы пренебрегали квадратом отношения фазовой скорости волны к скорости звука по сравнению с единицей. Это допущение приводит к совершенно незначительным погрешностям при рассмотрении гравитационных волн.

Благодаря этому, мы получили простое дифференциальное уравнение, которое может быть приложено к решению целого ряда задач, представлявших ранее значительную математическую трудность из-за чрезвычайной громоздкости исходного дифференциального уравнения.

Ниже мы рассмотрим вопрос о волновых движениях на поверхности раздела и выявим при этом роль температурного градиента. В такой общности задача рассматривается впервые.

Еще Гельмгольц в работе „Über atmosphärische Luftbewegungen“ предположил, что в атмосфере на поверхностях разрыва могут образоваться волны, подобные волнам на поверхности воды. Он же первый, исходя из принципа подобия, установил, что воздушные волны должны быть во много раз длиннее волн, которые образуются на поверхности воды. После Гельмгольца теорией воздушных волн занимался Вин. Последний показал, что для того, чтобы определить длину волн, недостаточно знать параметры поверхности разрыва, на которой образуются волны, но должна быть известна и форма самой волны.

Для случая, когда высота волны много менее длины, Вин дал следующую формулу для длины волны (при условии стационарности волн):

$$\lambda = \frac{2\pi}{g} v^2 \frac{T_1 + T_2}{T_1 - T_2},$$

где v^2 — скачок скорости ветра, T_1 и T_2 — температуры с обеих сторон поверхности, g — ускорение силы тяжести.

Свою формулу Вин вывел для однородной несжимаемой жидкости. Оба слоя имеют разные, но постоянные плотности и скорости.

А. Вегенер [3] показал, каким образом можно изучать стационарные воздушные волны при помощи змейковых подъемов. При прохождении змея через область воздушных волн на ленте метеорографа возникают периодические колебания температуры из-за разности температур между окружающим воздухом и адиабатически смещающейся по вертикали частицей. Зная скорость вращения барабана на змей-

ковом метеорографе, скорость ветра, скорость движения змея и направление полета воздушных волн, можно вычислить длину волн. Вегенер попытался сравнить, насколько согласуются длины волн, вычисленные из теоретических соображений, с фактически наблюдающимися длинами волн.

Оказалось, что вычисленная длина волны систематически превышает длину наблюдаемой волны. Результат вполне естественный, так как, заменяя реальную атмосферу однородной несжимаемой жидкостью, мы лабильзируем среду, в которой образуются воздушные волны, а при одинаковых параметрах поверхности разрыва, как увидим ниже, лабильзация среды приводит к увеличению длины стационарных волн.

После Вегенера в 1931 г. была опубликована работа Гаурвица [4]. В этой работе Гаурвиц учел действие сжимаемости и неоднородности среды. После довольно длинных выкладок он дал следующую формулу для длины воздушных волн, образующихся на поверхности раздела двух изотермических слоев с разными скоростями и температурами:

$$\lambda = \frac{2\pi}{g} v^2 \frac{T_2 + T_1}{\sqrt{(T_2 - T_1)^2 + \frac{2v^2}{R} (T_2 + T_1) \frac{x-1}{x}}}$$

$$\left(x = \frac{c_p}{c_v}\right)$$

Вычисления Гаурвица хорошо согласуются с наблюдениями Вегенера.

Мы рассмотрим воздушные волны в сжимаемой жидкости для произвольного температурного градиента, соответственно любому постоянному значению $\frac{d \ln \Theta}{dz}$.

Постоянство градиента энтропии соответствует увеличивающемуся с высотой, хотя и в весьма слабой степени, температурному градиенту.

Пусть поверхность разрыва расположена на $z = 0$, причем

$$\text{для } z < 0 \quad \bar{u} = u_1, \quad \frac{d \ln \Theta}{dz} = \beta_1;$$

$$\text{для } z > 0 \quad \bar{u} = u_2, \quad \frac{d \ln \Theta}{dz} = \beta_2;$$

$$\bar{\rho}_{10} - \bar{\rho}_{20} > 0, \quad \text{т. е. } T_{20} > T_{10}$$

где $\bar{\rho}_{10}$ и $\bar{\rho}_{20}$ — соответствующие значения плотности с обеих сторон поверхности разрыва.

Пусть, кроме того, на $z = -h_1$ и $z = +h_2$ расположены твердые стенки.

Для рассматриваемого случая уравнение движения¹ напишется:

$$\frac{d^2 \bar{\rho} w}{dz^2} + \beta \frac{d \bar{\rho} w}{dz} + \bar{\rho} w \left[\frac{\beta g}{(\bar{u} - c)^2} - k^2 \right] = 0 \quad (1)$$

и краевые условия задачи:

$$(\bar{\rho} w) = 0 \quad \text{при } z = -h_1, \quad z = +h_2 \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} ik(p_1 - p_2)(u_1 - c) - w_1(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)g = 0, \\ ik(p_1 - p_2)(u_2 - c) - w_2(\bar{\rho}_1 - \bar{\rho}_2)g = 0. \end{aligned} \right\} \text{при } z = 0. \quad (3)$$

(здесь p_i — давление).

¹ См. цитированную выше работу.

Решение уравнения (1), как нетрудно видеть, напишется:

$$\bar{\rho} w = A e^{\left(-\frac{\beta}{2} + \delta\right)z} + B e^{\left(-\frac{\beta}{2} - \delta\right)z}, \quad (4)$$

т.е. $-\frac{\beta}{2} + \delta$ и $-\frac{\beta}{2} - \delta$ корни уравнения

$$s^2 + \beta s + \frac{\beta g}{(u-c)^2} - k^2 = 0. \quad (5)$$

Удовлетворяя условиям на твердых стенках, получим:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} w_1 &= A \operatorname{sh} \delta_1 (h_1 + z) e^{-\frac{\beta_1}{2}z}, \\ \bar{\rho} w_2 &= B \operatorname{sh} \delta_2 (h_2 - z) e^{-\frac{\beta_2}{2}z}. \end{aligned} \quad (6)$$

Для того, чтобы решения оставались отличными от нуля, удовлетворяя остальным правым условиям, получим подставляя (6) в (3), следующее трансцендентное уравнение, которому должно удовлетворять c :

$$\bar{\rho}_{20} \left\{ (u_2 - c)^2 \left[\frac{\beta_2}{2} - \delta_2 \operatorname{cth} (\delta_2 h_2) \right] - g \right\} = \bar{\rho}_{10} \left\{ (u_1 - c)^2 \left[\frac{\beta_1}{2} + \delta_1 \operatorname{cth} (\delta_1 h_1) \right] - g \right\}. \quad (7)$$

Для простоты ограничимся случаем, когда оба слоя достаточно большой глубины, тогда, начиная с h , для которых $\delta h > 2,7$, $\operatorname{cth} \delta h$ с точностью до 0,009 равен единице.

При таких условиях уравнение (7) напишется:

$$\bar{\rho}_{20} \left[(u_2 - c)^2 \left(\frac{\beta_2}{2} - \delta_2 \right) - g \right] = \bar{\rho}_{10} \left[(u_1 - c)^2 \left(\frac{\beta_1}{2} + \delta_1 \right) - g \right] \quad (8)$$

Решая уравнение, получим зависимость между длиной волны, скоростью ее распространения и параметрами поверхности раздела.

Стационарные волны

Для рассмотрения стационарных волн на поверхности раздела достаточно в уравнении (8) положить $c = 0$. В таком случае получим

$$\bar{\rho}_{20} \left[u_2^2 \left(\frac{\beta_2}{2} - \delta_2 \right) - g \right] = \bar{\rho}_{10} \left[u_1^2 \left(\frac{\beta_1}{2} + \delta_1 \right) - g \right] \quad (9)$$

Решим полученное уравнение относительно k , которое входит в δ_1 и δ_2 (см. формулу 5), применяющимся в таких случаях методом Лэмба. На основании уравнения (5)

$$\frac{\beta_2}{2} - \delta_2 = -s_2 \quad \text{и} \quad \frac{\beta_1}{2} + \delta_1 = -s_1$$

где s_1 и s_2 — корни уравнения (5); тогда уравнение (9) можно написать:

$$\bar{\rho}_{20} [u_2^2 s_2 + g] = \bar{\rho}_{10} [u_1^2 s_1 + g] = \mu, \quad (10)$$

откуда

$$s_2 = \frac{\mu - g}{u_2^2}; \quad s_1 = \frac{\mu - g}{u_1^2}$$

причем, на основании сказанного, выражения стоящие справа удовлетворяют уравнению (5), следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\mu}{\rho_{20}} - g \right]^2 + \beta_2 \left[\frac{\mu}{\rho_{20}} - g \right] + \frac{\beta_2 g}{u_2^2} - k^2 &= 0, \\ \left[\frac{\mu}{\rho_{10}} - g \right]^2 + \beta_1 \left[\frac{\mu}{\rho_{10}} - g \right] + \frac{\beta_1 g}{u_1^2} - k^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Из полученных уравнений остается исключить вспомогательную переменную μ . Положим для простоты $\beta_1 = \beta_2$ и $-u_1 = +u_2 = v$ (последнее не нарушает их общности), тогда из уравнения (11), исключая попеременно μ и μ^2 , получаем:

$$\begin{aligned} \mu^2 &= \bar{\rho}_{10} \bar{\rho}_{20} (g^2 - k^2 v^4), \\ \mu &= \frac{(g^2 - k^2 v^4) (\bar{\rho}_{10} + \bar{\rho}_{20})}{2g - \beta v^2}. \end{aligned}$$

Возведя второе уравнение в квадрат и приравняв затем правые части, имеем:

$$\frac{(g^2 - k^2 v^4) (\bar{\rho}_{10} + \bar{\rho}_{20})^2}{(2g - \beta v^2)^2} = \bar{\rho}_{10} \bar{\rho}_{20},$$

откуда получаем:

$$\lambda = \frac{2\pi}{K} = \frac{2\pi}{g} \frac{v^2 (\bar{\rho}_{10} + \bar{\rho}_{20})}{\sqrt{(\bar{\rho}_{10} - \bar{\rho}_{20})^2 + \frac{v^2 \beta}{g^2} (4g - \beta v^2) \bar{\rho}_{10} \bar{\rho}_{20}}}$$

Если ввести вместо плотностей температуру, то получим:

$$\lambda = \frac{2\pi}{g} v^2 \frac{T_{10} + T_{20}}{\sqrt{(T_{20} - T_{10})^2 + \frac{v^2 \beta T_{10} T_{20}}{g^2} (4g - \beta v^2)}} \quad (12)$$

Таким образом длина стационарных волн, как и для случая несжимаемой жидкости, однозначно определяется через параметры поверхности разрыва. Из уравнения (12) имеем:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta} = - \frac{\lambda^3 T_{10} T_{20} g \left(2 - \frac{v^2}{g} \beta \right)}{4\pi^2 v^2 (T_{10} + T_{20})^2}, \quad (13)$$

следовательно, при увеличении вертикального температурного градиента длина стационарных волн будет возрастать и наоборот.

Из этой же формулы видно, что температурный градиент весьма существенно влияет на длину волны, особенно в области сравнительно длинных волн.

Покажем теперь, что известные формулы Вина и Гаурвица являются частным случаем полученной формулы.

Полагая $\beta = 0$, получим формулу Вина

$$\lambda = \frac{2\pi}{g} v^2 \frac{T_{10} + T_{20}}{T_{20} - T_{10}}.$$

Формула Гаурвица дана для изотермии, полагая поэтому в формуле (12)

$$\frac{dT}{dz} = \gamma = 0,$$

имеем

$$\beta_0 = \frac{d \ln \theta_0}{dz} = \frac{\gamma a}{T} = \frac{2Ag}{c_p (T_{10} + T_{20})} = \frac{2g}{R(T_{10} + T_{20})} \cdot \frac{x-1}{x} \quad (14)$$

Тогда получим формулу Гаурвица

$$\lambda = \frac{2\pi}{g} v^2 \frac{T_{10} + T_{20}}{\sqrt{(T_{10} - T_{20})^2 + 2v^2 \frac{T_{10} + T_{20}}{R} \cdot \frac{x-1}{x}}}$$

Таким образом формулы Вина и Гаурвица применимы только для адиабатической или изотермической стратификации. Для строгого исследования воздушных волн ни в коем случае нельзя пренебрегать температурными особенностями среды.

В табл. 1 дано изменение длины волны, вызываемое изменением температурного градиента на $0,1^\circ/100$ м.

Таблица вычислена для $T_{10} = 270^\circ$, $T_{20} = 275^\circ$, $v = 2$ м/сек.; как следует из таблицы, относительная ошибка в длине волны, возникающая при ошибке в температурном градиенте на $0,1^\circ/100$ м для волн длиной 1500—2000 м равна 30—60%.

Отсюда следует, что для строгого исследования воздушных волн температурные зондирования должны быть весьма точными.

Нам кажутся, поэтому, совершенно непонятными результаты, полученные Треем [2] где он приводит сравнение длин волн, наблюдавшихся и вычисленных теоретически по формуле Вина, получая небольшие расхождения порядка 10—15% (Гаурвиц, в свое время, также выражал недоумение по поводу этих результатов).

В табл. 2 приводим несколько примеров, опубликованных А. Вегенером, наблюдавшихся воздушных волн; здесь же приведена длина волны, вычисленная по формулам Вина-Вегенера, Гаурвица и по нашей формуле.

Таблица 1

λ	$\frac{\partial \lambda}{\partial \beta}$	$\Delta \lambda$	$\frac{\Delta \lambda}{\lambda}$
200	$3245 \cdot 10^2$	1,0	0,5%
500	$5072 \cdot 10^3$	19,0	4%
1000	$4083 \cdot 10^4$	150,0	15%
1500	$1378 \cdot 10^5$	506,0	34%
2000	$3266 \cdot 10^6$	1196,0	60%

Таблица 2

Дата	v	T_{cp}	$\frac{d \ln \theta}{dz}$	ΔT	По полученной формуле	По Гаурвицу	По Вегенеру	Наблюденное
6/II 1905	5,2	266,2	$2,02 \cdot 10^{-5}$	4,2	1600	1365	2320	1600
12/II 1906	2,0	270	$2,4 \cdot 10^{-5}$	1,4	631	601	1380	709 (1037)
19/II 1906	1,5	269	$2,04 \cdot 10^{-5}$	3,7	200	196	213	175

Небольшой материал имеющихся в нашем распоряжении наблюдений не позволяет делать какие-либо заключения, хотя полученные результаты вполне соответствуют высказанным выше теоретическим соображениям. Отметим, что метод наблюдений над стационарными волнами по змейковым записям неточен, так как змейковый метеорограф приспособлен для других целей. Специальные наблюдения с соответствующим прибором, несомненно, дали бы весьма ценные результаты.

Таким образом мы можем определять, какие волны могут быть стационарными на заданной поверхности раздела. Вероятно, при некоторой лабилизации условий, такие волны могут потерять устойчивость и дадут начало турбулентным вихрям того или иного масштаба. Наши исследования относятся только к горизонтальным

поверхностям раздела в свободной атмосфере небольшой протяженности. Кроме того, в атмосфере, как известно, встречаются еще два других рода поверхностей раздела, это, во-первых, фронтальные поверхности и, во-вторых, небольшие поверхности раздела, появляющиеся в потоке при обтекании неровностей на земной поверхности. Первые потребовали бы для своего рассмотрения учета отклоняющей силы вращения земли; для рассмотрения вторых необходимо ввести в уравнение вязкие члены. Вероятно, волновые процессы на поверхностях раздела всех трех указанных родов имеют некоторую аналогию. Как известно, волны на фронтальных поверхностях раздела при потере устойчивости приводят к образованию циклонов. Волны же на поверхностях раздела двух других типов приводят к образованию больших и малых турбулентных вихрей, причем вертикальная подвижность, вероятно, тем меньше, чем больше соответствующая стационарная волна. Рассмотрим теперь, при каких условиях волны на поверхности раздела могут потерять устойчивость.

Условия потери устойчивости

Рассмотрим уравнение (8):

$$\bar{\rho}_{20} \left[(u_2 - c)^2 \left(\frac{\beta_2}{2} - \delta_2 \right) - g \right] = \bar{\rho}_{10} \left[(u_1 - c)^2 \left(\frac{\beta_1}{2} + \delta_1 \right) - g \right],$$

$$\delta_i = \sqrt{\frac{\beta_i^2}{4} - \frac{g \beta_i}{(u_i - c)^2} + k^2}.$$

В этом выражении будем пренебрегать членами второго порядка малости. Так как мы рассматриваем короткие волны, то естественно считать $\frac{\beta^2}{k^2} \ll 1$. В этом случае

$$\delta_i = k \sqrt{\frac{\beta_i^2}{4k^2} - \frac{g\beta_i}{k^2(u_i - c)^2} + 1} \cong k \sqrt{1 - \frac{g\beta_i}{k^2(u_i - c)^2}}.$$

Обозначим

$$\frac{g\beta_i}{k^2(u_i - c)^2} = x,$$

где $x \ll 1$; тогда¹

$$\delta_i \cong \left(1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} - \dots \right) k,$$

или ограничиваясь только членами первого порядка малости

$$\delta_i \Rightarrow k - \frac{g\beta_i}{2k(u_i - c)^2}.$$

Тогда уравнение (8) напишется:

$$\bar{\rho}_{20} \left[\frac{\beta_2}{2} (u_2 - c)^2 - k(u_2 - c)^2 + \frac{g\beta_2}{2k} - g \right] = \bar{\rho}_{10} \left[\frac{\beta_1}{2} (u_1 - c)^2 + k(u_1 - c)^2 - \frac{2\beta_1}{k} - g \right] \quad (15)$$

или

$$\bar{\rho}_{20} \left(\frac{\beta_2}{2} - k \right) \left[(u_2 - c)^2 + \frac{g}{k} \right] = \bar{\rho}_{10} \left(\frac{\beta_1}{2} + k \right) \left[(u_1 - c)^2 - \frac{g}{k} \right].$$

¹ Для несжимаемой жидкости $\delta = 1$; ограничиваясь первым членом разложения, тем самым вводим некоторую поправку на сжимаемость.

Для простоты положим теперь

$$\beta_1 = \beta_2 \text{ и } -u_1 = +u_2 = v,$$

тогда получим:

$$\bar{\rho}_{20} \left(\frac{\beta}{2} - k \right) \left[(v - c)^2 + \frac{g}{k} \right] = \bar{\rho}_{10} \left(\frac{\beta}{2} + k \right) \left[(v + c)^2 - \frac{g}{k} \right]. \quad (16)$$

Собирая члены, содержащие одинаковые степени c и деля их на коэффициент при c^2 , получим:

$$0 = c^2 - 2vc \frac{\frac{\beta}{2}(\bar{\rho}_{10} + \bar{\rho}_{20}) + k(\bar{\rho}_{10} - \bar{\rho}_{20})}{\frac{\beta}{2}(\bar{\rho}_{10} - \bar{\rho}_{20}) - k(\bar{\rho}_{10} + \bar{\rho}_{20})} + \frac{g}{k} \frac{\frac{\beta}{2}(\bar{\rho}_{10} + \bar{\rho}_{20}) + k(\bar{\rho}_{10} - \bar{\rho}_{20})}{-\frac{\beta}{2}(\bar{\rho}_{10} - \bar{\rho}_{20}) - k(\bar{\rho}_{10} + \bar{\rho}_{20})} +$$

$$+ v^2 \frac{\left[\frac{\beta}{2}(\bar{\rho}_{10} - \bar{\rho}_{20}) - k(\bar{\rho}_{10} + \bar{\rho}_{20}) \right]}{-\frac{\beta}{2}(\bar{\rho}_{10} - \bar{\rho}_{20}) - k(\bar{\rho}_{10} + \bar{\rho}_{20})},$$

но

$$\frac{\bar{\rho}_{10} - \bar{\rho}_{20}}{\bar{\rho}_{10} + \bar{\rho}_{20}} = \frac{T_{20} - T_{10}}{T_{20} + T_{10}} = \frac{\Delta T}{T}$$

тогда:

$$c^2 + 2vc \frac{\frac{\beta}{2} + k \frac{\Delta T}{T}}{k + \frac{\beta \Delta T}{2T}} - \frac{g}{k} \frac{\frac{\beta}{2} + k \frac{\Delta T}{T}}{k + \frac{\beta \Delta T}{2T}} - v^2 \frac{\frac{\beta \Delta T}{2T} - k}{\frac{\beta \Delta T}{2T} + k} = 0, \quad (17)$$

$$c = -v \frac{\frac{\beta}{2} + k \frac{\Delta T}{T}}{k + \frac{\beta \Delta T}{2T}} \pm \sqrt{v^2 \left(\frac{\frac{\beta}{2} + k \frac{\Delta T}{T}}{k + \frac{\beta \Delta T}{2T}} \right)^2 + \frac{g}{k} \frac{\frac{\beta}{2} + k \frac{\Delta T}{T}}{k + \frac{\beta \Delta T}{2T}} + v^2 \left[\frac{\frac{\beta \Delta T}{2T} - k}{\frac{\beta \Delta T}{2T} + k} \right]},$$

откуда следует, что волны потеряют устойчивость если

$$v^2 \left(\frac{\frac{\beta}{2} + k \frac{\Delta T}{T}}{k + \frac{\beta \Delta T}{2T}} \right)^2 + \frac{g}{k} \frac{\frac{\beta}{2} + k \frac{\Delta T}{T}}{k + \frac{\beta \Delta T}{2T}} + v^2 \left(\frac{\frac{\beta \Delta T}{2T} - k}{\frac{\beta \Delta T}{2T} + k} \right) < 0. \quad (18)$$

Если, кроме того, считать члены вида $\frac{\beta}{k} \cdot \frac{\Delta T}{T}$; $\frac{\beta^2}{k^2}$ много меньшими единицы, то при пренебрежении ими по сравнению с единицей, уравнение упростится и условия потери устойчивости напишутся

$$v^2 < \frac{\frac{g}{k^2} \left(\frac{\beta}{2} + k \frac{\Delta T}{T} \right)}{1 - \frac{\Delta T}{T}}. \quad (19)$$

Таким образом, при заданном разрыве температуры и заданном вертикальном температурном градиенте, разрыв ветра не может превосходить некоторого определенного значения. Увеличение скачка температуры и уменьшение вертикального температурного градиента увеличивает устойчивость движения, а увеличение скачка ветра уменьшает его устойчивость.

При $\beta = 0$ получаем известную формулу для скорости волн на поверхности разрыва в несжимаемой жидкости:

$$c = -v \frac{\Delta T}{T} \pm \sqrt{\frac{g}{k} \frac{\Delta T}{T} - v^2 \frac{4 T_{10} T_{20}}{T_{10} + T_{20}}} \quad (20)$$

Полученные выше соотношения позволяют, таким образом, вычислять длину стационарных волн, возникающих на поверхностях разрыва, и условия, при которых может потеряться устойчивость движения.

Нам кажется, что так как длина волны может измеряться довольно точно визуальным путем, то такие наблюдения дадут возможность судить о структуре атмосферы в слое, где возникли эти волны, поскольку их длина определяется этими величинами. Так например, если имеется температурное зондирование в области таких волн, то, зная размеры, можем получить характер распределения ветра в указанной области. Организация специальных исследований таких волновых движений, до сих пор нигде и никем не предпринятая, дала бы чрезвычайно интересный материал.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лайхтман Д. Л. Условия вертикальной устойчивости при меняющейся с высотой скорости ветра. Труды НИУ, вып. 24. Гидрометеоздат. Л. 1946.
2. Trey F. Ein Beitrag zum Studium der Luftwogen. Met. Zs. Bd. 36. 1919.
3. Wegener A. Studien über Luftwogen. Beitr. Phys. fr. Atm. Bd. II. s. 55.
4. Haurwitz B. Über die Wellenlänge von Luftwogen. Gerl. Beitr. Bd. 34. s. 213.

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ И ИЗМЕНЕНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ НА РАЗЛИЧНЫХ ВЫСОТАХ ПОД ВЛИЯНИЕМ ЛУЧИСТОГО И ТУРБУЛЕНТНОГО ТЕПЛООБМЕНА

Со времени появления работ Эмдена [1] и Шварцшильда известно, что теория лучистого равновесия сравнительно хорошо представляет распределение температуры в верхних слоях атмосферы, но дает преувеличенные градиенты температуры внизу. А. А. Фридман [2] показал, что это расхождение в значительной степени может быть объяснено наличием некоторых вертикальных движений воздуха; физический характер этих движений в то время, однако, был недостаточно выяснен. Опираясь на современную теорию турбулентности, И. А. Кибель [3] получил недавно чрезвычайно точное совпадение вычисленного им распределения температуры с наблюдаемым. Тем не менее можно заметить, что работы Кибеля не исчерпывают вопроса ни с точки зрения физической постановки задачи, ни с точки зрения математического решения ее.

Я остановлюсь в этой статье на математической стороне вопроса. Решение Кибеля основано на утверждении, что коэффициент полученного им дифференциального уравнения сохраняет почти постоянное значение. Правильнее, повидимому, предположить, что этот коэффициент (вид его приведен ниже) стремится с высотой к бесконечности, так как входящая в знаменатель его плотность водяных паров ρ_w уменьшается чрезвычайно быстро, при сравнительно медленном изменении остальных величин.

М. Е. Швец [4] в своей работе о суточном ходе температуры вовсе не останавливается на вопросе о погрешности предлагаемого им метода последовательных приближений и применяет его в таком виде, что в уравнении Шварцшильда теряется в правой части член $\alpha \rho_w A$, учитывающий поглощение длинноволновой радиации в атмосфере, и потому самый характер физического явления описывается у него неправильно; работа содержит и другие неточности.

При таких условиях хорошее совпадение наблюдаемых и вычисленных величин может быть случайным и не служит безусловным доказательством правильности теории; результаты вычисления в большой степени зависят от принятых значений физических постоянных, которые известны лишь приближенно, с точностью до десятков или даже до сотен процентов. У Кибеля эти постоянные (например, коэффициент поглощения α и альбедо) приведены без всякого обоснования, у Швеца значение α вовсе не приведено.

Не вдаваясь в обсуждение постоянных, что потребует специального исследования (так как желательно установить вероятную погрешность каждого числа и каждой гипотезы и вывести отсюда хотя бы предполагаемую погрешность окончательного результата), и сохраняя пока, в основном, гипотезу серого или квазисерого излучения¹, я хочу несколько уточнить математическое решение задачи, как для

¹ В первой части рассматривается „квазисерое“ поглощение, в соответствии с теорией Гульберга; в конце второй части приведены формулы, учитывающие селективное поглощение.

стационарного случая, так и для случая меняющейся со временем температуры; последний вопрос рассматривается во второй части настоящей статьи и метод исследования там несколько изменен; вторая часть может читаться независимо от первой.

О стационарном распределении температуры с высотой

Рассмотрим стационарное распределение температуры в воздушной массе, простирающейся от земной поверхности ($x=0$) до бесконечности вверх.

Исследование вопроса будем вести при некоторых упрощающих предположениях — уравнения лучистого теплообмена напишем, следуя Шварцшильду (и другим авторам), предполагая, что излучающая среда (водяной пар) ведет себя как тело с коэффициентом поглощения средним для всей области поглощения и что поток лучистой энергии направлен по вертикали. Сверху приходит коротковолновая солнечная радиация, среднегодовой приход которой, исправленный заранее за общее земное альbedo, будем обозначать через $S(x)$.

Через $A(x)$ и $B(x)$ обозначим длинноволновую радиацию, идущую соответственно сверху и снизу.

Предполагая, что ось ox направлена вертикально вверх, напишем уравнения Шварцшильда:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial x} &= a_2(A - fE); \quad \frac{\partial B}{\partial x} = a_2(fE - B), \\ a_2 &= k_2 \rho_w, \end{aligned} \quad (1)$$

где ρ_w — плотность водяного пара, k_2 — коэффициент поглощения, f — коэффициент Гульберта [5].

Здесь имеются две возможности: если положить $f=1$ (как сделано для простоты во второй части этой статьи), то получатся обыкновенные уравнения Шварцшильда и B будет вся длинноволновая радиация, идущая снизу; если же $f < 1$ то под B надо разуметь только „ w радиацию“ — ту часть длинноволновой радиации, которая испускается в области поглощения водяного пара.

По Гульберту f меняется в интересующем нас промежутке от 0,65 до 0,55; возможно, что его следует взять несколько большим, но, видимо, с достаточной степенью точности можно считать $f = \text{const}$.

Для коротковолновой радиации (солнечной) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} &= a_1 S, \quad a_1 = k_1 \rho_w, \\ E &= \sigma T^4, \end{aligned} \quad (1a)$$

где σ — постоянная Стефана-Больцмана, T — абсолютная температура.

Уравнение теплового баланса (уравнение теплопроводности с учетом лучеиспускания) имеет вид:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} Q + a_2 \left(A + B - 2fE + \frac{a_1 S}{a_2} \right), \quad (2)$$

где для сокращения, обозначено

$$Q = \begin{cases} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \\ k\rho \left(\gamma_a + \frac{\partial T}{\partial x} \right) \end{cases}$$

$c = 0,24$ — теплоемкость воздуха, ρ — плотность воздуха, k — постоянная.

Первый член правой части $\frac{\partial Q}{\partial x}$ характеризует турбулентный перенос тепла, причем можно выбрать одну из двух возможностей — либо $\lambda = k\rho = \text{const}$, и в этом

случае нижняя строчка в турбулентном члене $\frac{\partial Q}{\partial x}$ совпадает с верхней, либо $k = \text{const}$, тогда они различны.

Повидимому, обычно предполагается первая возможность¹, но необходимы добавочные, особенно экспериментальные, исследования для выяснения этого вопроса. Рассмотрим здесь простейший случай — стационарного (например, среднегодового) распределения температуры.

Вводя обычные обозначения $A - B = Z$, $A + B = Y$ и полагая $T = T_0 + \vartheta$, где T_0 — постоянная, перепишем (1) и (2) в виде

$$\frac{dY}{dx} = a_2 Z; \quad \frac{dZ}{dx} = a_2 (Y - 2fE), \quad (3)$$

$$\frac{d}{dx} [Z + Q + S] = 0, \quad \text{где} \quad (4)$$

$$Q = \begin{cases} \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \\ k\rho \left(\gamma_a + \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right). \end{cases}$$

Граничные условия будут при $x=0$ (поверхность земли): $B = fE_0$, т. е.

$$Y - Z = 2fE_0$$

$$A - E + S + Q = 0,$$

т. е.

$$Z + S + Q = (1 - f)E_0. \quad (5)$$

Последнее есть условие баланса на земной поверхности (причем средний поток тепла из земли равен нулю); при $x = \infty$ (верхняя граница атмосферы)

$$A = 0, \quad B + (1 - f)E_0 = S. \quad (5a)$$

Из (4) и (5) имеем на всех высотах

$$Z + S + Q = (1 - f)E_0. \quad (6)$$

Перепишав $2fE$ в виде

$$2fE = 2(\sigma T_0^4 + 4\sigma T_0^3 \vartheta)f = c + 2\mu f \vartheta$$

получим, дифференцируя (2) и используя (1a) и (3), в стационарном случае:

$$2\mu f \frac{d\vartheta}{dx} = a_2 Z + \frac{d}{dx} \frac{1}{a_2} \frac{dS}{dx} + \frac{d}{dx} \frac{1}{a_2} \frac{dQ}{dx}.$$

Введем в качестве новой независимой переменной оптическую толщину атмосферы

$$\xi = \int_x^\infty a_2 dx.$$

Обозначим затем $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = u$, и заменяя Z согласно (6), получим:

$$\frac{2\mu fu}{a_2} = \frac{d^2 S}{d\xi^2} + \frac{d^2 Q}{d\xi^2} + E_0(1 - f) - (Q + S)$$

Отсюда

$$\frac{d^2 \lambda u}{d\xi^2} - \left(1 + \frac{2\mu f}{a_2 \lambda} \right) \lambda u = S - \frac{d^2 S}{d\xi^2} + Q_1 + E_0(1 - f) = F,$$

¹ Кибель И. А. в своей статье [3] пишет: „так, если положить... то получим слабое возрастание λ с высотой“, из чего можно заключить, что, по его мнению, λ должна мало меняться.

где

$$Q_1 = \begin{cases} 0 \\ \gamma_a (\lambda - \lambda''), \end{cases}$$

а F обозначает правую часть.

Чтобы выразить аналитически коэффициенты этого уравнения, примем во внимание, что ρ и ρ_w могут быть приближенно представлены показательными функциями

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{x}{H}}, \quad \rho_w = \rho_{w0} e^{-m \frac{x}{H}},$$

где H — толщина однородной атмосферы; по Ганну $m = 3$, но согласно более новым данным, повидимому, лучше взять $m = 4$; тогда

$$\xi = \int_x^\infty k_2 \rho_w dx = \frac{k_2 \rho_{w0}}{mH} e^{-m \frac{x}{H}} = \frac{a_2 H}{m}$$

Полагая для краткости

$$y = \lambda u = \lambda \frac{d\vartheta}{dx},$$

получим:

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - \left(1 + \frac{2H\rho f 1}{m\lambda\xi}\right) y = F_1.$$

Так как

$$\frac{dS}{d\xi} = -\frac{a_1}{a_2} S = -\frac{k_1}{k_2} S,$$

то

$$S = S_0 e^{-\frac{k_1}{k_2} \xi}$$

и F_1 имеет вид

$$F_1 = S_0 \left[1 + \left(\frac{k_1}{k_2}\right)^2\right] e^{-\frac{k_1}{k_2} \xi} + Q_1 + E_0(1-f).$$

В дальнейшем остановимся на рассмотрении первой из двух указанных возможностей, т. е. примем λ постоянной и рассматривая ту же задачу, что и Кибель, обозначая

$$\beta = \frac{k_1}{k_2}, \quad F_1 = S_0(1 + \beta^2) e^{-\beta\xi} + E_0(1-f), \quad b = \frac{2\rho f H}{m\lambda},$$

получим

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} - \left(1 + \frac{b}{\xi}\right) y = F. \quad (7)$$

Граничные условия, отвечающие этому уравнению, получим, комбинируя уравнения (6) и (2):

$$Z + S + Q = E(1-f)$$

$$Y - 2fE + \frac{1}{a_2} \frac{dS}{dx} + \frac{1}{a_2} \frac{dQ}{dx} = 0$$

откуда

$$Y - Z - 2fE + \frac{1}{a_2} \frac{dS}{dx} - S + \frac{1}{a_2} \frac{dQ}{dx} - Q = E(f-1).$$

Но на земле

$$B = fE,$$

$$\text{т. е. } Y - Z - 2fE = 2B - 2fE = 0,$$

следовательно,

$$\frac{d}{d\xi}(\lambda u) + \lambda u + S + \frac{dS}{d\xi} + E(f-1) = 0,$$

Или, помня что $\lambda u = y$,

$$\text{где } \frac{dy}{d\xi} + y = \varphi, \quad (8)$$

$$\varphi = -S_0(1-\beta)e^{-\beta\xi} + E(1-f)$$

и что в выражении для F мы выбрали верхнюю строку.

На второй границе $\xi = 0$ (т. е. $x = \infty$) мы имели $Z = B$, т. е. из (6) следует:

$$y = 0 \quad (9)$$

Итак, мы получили дифференциальное уравнение (8) второго порядка с существенно переменными коэффициентами и при граничных условиях (8) и (9) на обоих границах.

Заметим, что до сих пор нет значительного расхождения с формулами Кибеля, который, обозначая $y_1 = \frac{B-A}{S_0}$, получает (в наших обозначениях) свое уравнение:

$$\frac{d^2 y_1}{d\xi_1^2} - \left(1 + \frac{8\sigma T^3 f}{\lambda k_2 \rho_w}\right) y_1 = -\frac{8\sigma T^3 f}{\lambda k_2 \rho_w} e^{-\beta\xi} \quad (10)$$

при граничных условиях несколько, впрочем, отличных от наших.

Если считать k_2 или λ не постоянным, а медленно убывающим с высотой, так что можно принять $\frac{T^3}{\lambda k_2} \propto \text{const}$, то лучше исходить из уравнения Кибеля. Наибольшее различие дальнейших рассуждений состоит в том, что Кибель принимает коэффициенты при y и при свободном члене постоянными, утверждая, что „величины T , ρ_w , λ , k_2 каждая порознь меняются с высотой, но комбинация $\frac{fT^3}{\lambda k_2 \rho_w}$ сохраняет почти постоянное значение“.

Это утверждение остается необоснованным, так как стоящий в знаменателе множитель ρ_w (пропорциональный ξ) обращается в нуль на границе атмосферы ($\xi = 0$) и даже в среднем слое ее от 1 до 10 км уменьшается в 160 раз. Остальные же множители меняются сравнительно мало.

Поэтому представляет некоторый интерес хотя бы приближенное решение уравнения (7) или (10), не предполагая коэффициенты его постоянными. При этом следует еще раз обратить внимание, что действительные физические постоянные, входящие в задачу, особенно суммарный коэффициент поглощения k_2 , известен очень плохо. Кибель не приводит оснований, по которым он выбрал то его значение ($k_2 = 7,25 \text{ см}^2/\text{г}$ на поверхности земли), которым он пользуется также как для величины альbedo, принимаемое им равным 0,7 для широты 41° .

Для приближенного решения задачи ее удобно свести к интегральному уравнению, именно к уравнению типа Вольтера, которое обеспечивает хорошую сходимость. Так как предельные условия заданы на обоих концах промежутка, то исключение одной из постоянных приходится откладывать до конца вычисления.

Положим в уравнении (7) $\frac{d^2 y}{d\xi^2} = v(\xi)$, откуда

$$y(\xi) = \int_0^\xi (\xi - \eta) v(\eta) d\eta + C_1 \xi, \quad (11)$$

где C_1 пока определять не будем.

Уравнение (7) примет вид

$$v(\xi) = \int_0^\xi \left(1 + \frac{b}{\xi}\right) (\xi - \eta) v(\eta) d\eta + F(\xi), \quad (12)$$

где

$$F(\xi) = F_1 + C_1 \xi \left(1 + \frac{b}{\xi}\right),$$

или

$$F(\xi) = S_0 (1 + \beta^2) e^{-\beta \xi} + E_0 (1 - f) + C_1 (\xi + b);$$

пренебрегая же поглощением коротковолновой радиации, как это делает Миланкович, —

$$F(\xi) = A + B\xi, \quad (13)$$

где

$$A = S_0 + C_1 b + E_0 (1 - f), \quad B = C_1.$$

Ядро нашего уравнения имеет вид:

$$k(\xi, \eta) = \xi - \eta + b - \frac{\eta}{\xi} b, \quad (14)$$

т. е.

$$|k(\xi, \eta)| < \xi + b < \xi_0 + b = K_0 = \text{const},$$

что обеспечивает быструю сходимость решения.

Полагая

$$v(\xi) = v_0(\xi) + v_1(\xi) + \dots + v_n(\xi) + \dots,$$

получим

$$v_0(\xi) = F;$$

$$v_{n+1}(\xi) = \int_0^\xi k(\xi, \eta) v_n(\eta) d\eta; \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

Или, так как

$$|F| < S_0 (1 + \beta) = C_1 (b + \xi_0) = M,$$

$$|v_1(\xi)| < K_0 M \xi,$$

$$|v_2(\xi)| < M \frac{(K_0 \xi)^2}{2} \dots |v_n(\xi)| < M \frac{(K_0 \xi)^n}{n!} \dots$$

Найдем первые приближения для гипотезы (13) Миланковича

$$v_0 = A + B\xi,$$

вычисляя по формуле

$$v_{n+1} \xi = \left(1 + \frac{b}{\xi}\right) \left\{ \xi \int_0^\xi v_n(\eta) d\eta - \int_0^\xi \eta v_n(\eta) d\eta \right\},$$

получим:

$$v_1(\xi) = \frac{B}{6} \xi^3 + \left(\frac{A}{2} + \frac{Bb}{6} \right) \xi^2 + \frac{bA}{2} \xi,$$
$$v_2(\xi) = (\xi + b) \left[\frac{B}{120} \xi^4 + \frac{1}{12} \left(\frac{A}{2} + \frac{bB}{6} \right) \xi^3 + \frac{bA}{12} \xi^2 \right].$$

Так же могут быть получены все остальные приближения и решение, полученное по формуле:

$$y = C_1 \xi + \int_0^\xi (\xi - \eta) v(\eta) d\eta = C_1 \xi + L v,$$

где

$$L v = \int_0^\xi (\xi - \eta) v(\eta) d\eta,$$

будет

$$y = C_1 \xi + L v_0 + L v_1 + \dots,$$

или

$$y = C_1 \xi + \left(\frac{A}{2} \xi^2 + \frac{B}{6} \xi^3 \right) + \left[\frac{bA}{12} \xi^2 + \frac{1}{12} \left(\frac{A}{2} + \frac{bB}{6} \right) \xi^3 + \frac{B}{120} \xi^5 \right] + \dots$$

Из граничного условия 8 и (5a), а при $f=0$ из одного условия (8), остается определить C_1 .

Точно так же, но немного сложнее, могут быть выполнены все квадратуры и найдены, исходя из гипотезы (12), в конечном виде все приближения.

Наконец, исходя из уравнения Кибеля, и принимая по решению за первое приближение, может быть найдено второе приближение, выражаемое через функции $E_i(x)$. Однако, все эти расчеты будут иметь значение лишь при более или менее надежном определении физических постоянных, которые у Кибеля приведены без обоснования.

Замечание. Можно ставить вопрос и о точном решении уравнения (7).

Применяя преобразование Лапласа

$$y(\xi) = \int_l e^{\xi\eta} Z(\eta) d\eta,$$

где (l) есть некоторый контур в комплексной плоскости, к однородному уравнению (7) $\xi y''(\xi) - (b + \xi) y = 0$, получим, обозначая через $[f(\eta)]_l$ приращение функции $f(\eta)$ когда η описывает контур l ,

$$\left[z(\eta) e^{\xi\eta} (\eta^2 - 1) \right]_l - \int_l e^{\xi\eta} \left\{ \frac{dz}{d\eta} (\eta^2 - 1) + (2\eta + b) z(\eta) \right\} d\eta = 0.$$

Принимая за z решение обыкновенного уравнения

$$\frac{1}{z} \frac{dz}{d\eta} = - \frac{2\eta + b}{\eta^2 - 1},$$

т. е.

$$z = \frac{1}{\eta^2 - 1} \left(\frac{\eta + 1}{\eta - 1} \right)^{\frac{b}{2}}.$$

Таким образом

$$y(\xi) = \int_l e^{\xi\eta} \frac{d\eta}{(\eta - 1)^{1 + \frac{b}{2}} (\eta + 1)^{1 - \frac{b}{2}}}$$

где контур (l) таков, что

$$\left[e^{\xi\eta}(\eta+1)^{\frac{b}{2}}(\eta-1)^{-\frac{b}{2}} \right]_l = 0.$$

Найдя решение однородного уравнения, сможем отыскать и решение уравнения неоднородного.

Об изменении температуры на различных высотах под влиянием лучистого и турбулентного теплообмена

Направив ось ox вертикально вверх от поверхности земли, где положим $x=0$, обозначим через $A(x)$ и $B(x)$ потоки длинноволновой радиации, идущие вертикально сверху и снизу и напишем уравнение Шварцшильда для переноса лучистой энергии

$$\frac{dA}{dx} = a_2(A - E), \quad (15)$$

$$\frac{dB}{dx} = a_2(E - B),$$

где $a_2 = k_2\rho_w$ и ρ_w есть плотность поглощающей среды (водяного пара), k_2 — коэффициент поглощения им длинноволновой радиации, $E = \sigma T^4$, где σ — постоянная Стефана-Больцмана, T — абсолютная температура; положим

$$T = T_0 + \vartheta,$$

где $T_0 = T_0(x, t)$ есть заданная функция, например $T_0 = \text{const}$ или $T_0 = T(0, t) - \gamma x$ при $x \leq H$, $T_0 = T(0, t) - \gamma H$, при $x \geq H$, где γ — постоянная и H есть средняя высота стратосферы.

Уравнение теплопроводности напишем в виде:

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + a_2(A + B - 2E) + a_1 S, \quad (16)$$

где S — коротковолновая (солнечная) радиация, $a_1 = k_1\rho_w$, $a_2 = k_2\rho_w$.

Коэффициенты поглощения k_1 и k_2 считаем постоянными, $c = 0,24$ — теплоемкость воздуха, ρ — плотность его.

Введем, как это принято в рассматриваемом вопросе, новое независимое переменное ξ :

$$\xi = \int_x^\infty k_2 \rho_w dx = \int_x^\infty a_2 dx$$

и обозначим

$$\xi_0 = \int_0^\infty k_2 \rho_w dx.$$

Граничные условия будут

$$\text{при } x = \infty (\xi = 0): S = S_0, A = 0;^1 \quad (17)$$

(приходящая солнечная радиация)

$$\text{при } x = 0 (\xi = \xi_0): B = E_0 \quad (18)$$

¹ Выкладки упростятся, если, следуя Кибелю, положить еще в этой точке $B = S_0$; законность этого условия для нестационарного случая сомнительна.

и условие баланса на земной поверхности

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x} + A - E = \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial x}, \quad (18a)$$

где λ и T_1 обозначают коэффициент теплопроводности и температуру земли; последнюю температуру на достаточной глубине можно считать постоянной. Впрочем, для более точных расчетов здесь можно ввести в рассмотрение еще один промежуток — приземный слой воздуха, толщина которого имеет порядок 100 м, где все плотности можно считать постоянными, коэффициент же турбулентности $\frac{\lambda}{c_p}$, наоборот, линейно возрастающим, что дает решение опять-таки в Бесселевых функциях, приведенных в моей предыдущей статье [6].

Уравнения Шварцшильда (15) в новой переменной переписутся в виде:

$$\frac{\partial A}{\partial \xi} + A - E = 0; \quad \frac{\partial B}{\partial \xi} - B + E = 0;$$

откуда

$$A = e^{-\xi} \int_0^{\xi} E(\eta) e^{\eta} d\eta,$$

так как

$$A|_{\xi=0} = 0;$$

$$B = C_1 e^{\xi} - e^{\xi} \int_0^{\xi} E(\eta) e^{-\eta} d\eta, \quad (19)$$

где C_1 может быть определено из условий при $x=0$ ($\xi=\xi_0$), что дает, однако, уравнение Фредгольма; если же отложить определение C_1 до последнего момента, как это было сделано для стационарного случая (или определить C_1 по условию Кибеля), то можно будет воспользоваться аппаратом уравнений Вольтерра, что будет сделано мною после.

Подставив выражения A и B в уравнение (16), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \lambda a_2 \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{c_p}{a_2} \frac{\partial T}{\partial t} - 2E + e^{-\xi} \int_0^{\xi} E(\eta) e^{\eta} d\eta + C_1 e^{\xi} - \\ - e^{\xi} \int_0^{\xi} E(\eta) e^{-\eta} d\eta - \frac{\partial S}{\partial \xi} = 0; \end{aligned} \quad (20)$$

что в силу условия $E = \sigma(T_0 + \vartheta)^4$ является интегродифференциальным уравнением относительно функции ϑ (или E).

Чтобы выразить аналитически коэффициенты нашего уравнения, надо прежде всего задать вид функции, которой изображается плотность водяных паров; обычно для этого пользуются показательной функцией

$$\rho_w(x) = \rho_w(0) e^{-\frac{x}{H}},$$

где H есть высота однородной атмосферы (по Ганну) и $n=3$, но если взять табличку средних плотностей ρ_w , приведенных, например, Хвостиковым [7] в единицах г/см^3

x км	$\rho_w 10^6$	$6,7 e^{-3\frac{x}{n}}$	$6,7 e^{-4\frac{x}{n}}$
0 км	6,7	6,7	6,7
1	4,8	4,6	4,1
2	2,6	3,2	2,5
3	1,7	2,2	1,5
4	0,9	1,5	0,9
5	0,5	1,0	0,5
6	0,3	0,7	0,3
7	0,1	0,5	0,2
8	0,08	0,33	0,12
9	0,03	0,23	0,08
10	0,03	0,16	0,05
11	0,02	0,11	0,03
12	0,01	0,07	0,02
13	0,01	0,05	0,01

то увидим, что (кроме первого километра) лучше взять $n = 4$.

Близкое к $n = 4$ значение берут, повидимому и Вагг и Phylipps [8] (Баур и Филиппс).

В таком случае, полагая, что приближенно имеет место соотношение

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{x}{H}}$$

(где H — высота однородной атмосферы) и

$$\begin{aligned} \rho_w &= \rho_{w0} e^{-4\frac{x}{H}}, \\ \xi &= \int_x^\infty a_2(x) dx = \int_x^\infty e^{-4\frac{x}{H}} k_2 dx = \frac{H}{4} a_2, \end{aligned} \quad (21)$$

т. е.

$$a_2 = \frac{4}{H} \xi;$$

далее

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{x}{H}}; \quad \frac{c_p \rho}{a_2} = \frac{c_p \rho(0)}{k \rho_w(0)} e^{2\frac{H}{x}} = b \xi^{-\frac{3}{4}},$$

где постоянная $b = \frac{c_p \rho(0)}{k \rho_w(0)}$.

Таким образом, точка $\xi = 0$ является особой для нашего уравнения и, если разрешить уравнение относительно старшей производной, то коэффициенты его обратятся в бесконечность.

Считая λ постоянной, удобно принять за неизвестную функцию температурную поправку $\vartheta = T - T_0$, где $T_0 = T(0, t) - \gamma x$.

Аналогично положим $T_1 = T_{1,0} + \vartheta_1$, где $T_{1,0}$ — заданная функция, тогда уравнение теплопроводности (20) будет:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} - b \xi^{-\frac{3}{4}} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} - b \xi^{-\frac{3}{4}} \frac{\partial T_0}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial \xi} - 2E + \\ + \int_0^\xi E(\eta) (e^{\xi-\eta} - e^{\eta-\xi}) d\eta + C_1 e^\xi = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Произведем обычную линеаризацию граничного условия (18а), полагая

$$E = \sigma T^4 = \sigma T_0^4 + \mu \vartheta,$$

где

$$\mu = \mu(t, 0) = 4\sigma T_0^3;$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + A - \mu \vartheta - \lambda_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} &= \lambda \gamma - \sigma T_0^4; \\ \vartheta - \vartheta_1 \Big|_{x=0} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Аналогичная линеаризация уравнения теплопроводности дает:

$$a \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} - b \xi^{-\frac{3}{4}} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = F(\xi, t) + f(\xi, t, \vartheta), \quad (24)$$

где F есть известная функция

$$F(\xi, t) = b \xi^{-\frac{3}{4}} \frac{\partial T_0}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \xi} - 2\sigma T_0^4 + \sigma \int_0^\xi T_0^4 (e^{\xi-\eta} - e^{\eta-\xi}) d\eta + C_1 e^\xi,$$

$$f(\xi, t, \vartheta) = -2\mu \vartheta + \int_0^\xi \mu \vartheta (e^{\xi-\eta} - e^{\eta-\xi}) d\eta.$$

Здесь $\frac{\mu \vartheta}{\sigma T_0^4} = 4 \frac{\vartheta}{T_0}$ имеет порядок $4 \frac{10}{270} \approx \frac{1}{7}$.

Имея в виду, что даже в пределах среднего слоя от 1 до 10 км ρ_w , т. е. ξ уменьшается более чем в сто раз, как видно из вышеприведенной таблички, постараемся точно учесть это изменение, опустив в то же время в первом приближении функцию f в правой части (а $\mu(t)$ в краевом условии (23) будем считать равным его среднему значению).

Функция F может быть вычислена без труда; если бы мы, например, положили T_0 просто постоянным или не зависящим от x : $T_0 = c$ или $c(t)$, то функция F была бы:

$$F = \frac{\partial S}{\partial \xi} + C(e^\xi + e^{-\xi}) - C_1 e^\xi, \quad (25)$$

но при этом увеличилась бы опускаемая функция f .

Если более точные наблюдения покажут, что λ и k с высотой убывают достаточно быстро, чтобы положить $\frac{\lambda}{T^3} = \text{const}$, то целесообразно принять за неизвестную функцию величину E , которую представим в виде:

$$E = E_0(x, t) + \varepsilon$$

где E_0 есть заданная функция.

Полагая

$$\frac{\lambda}{4\sigma T^3} \frac{H}{4} = a, \quad \frac{c_p \rho(0)}{k \rho_w(0) T^3} = b,$$

получим:

$$\begin{aligned} a \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial \varepsilon}{\partial \xi} - b \xi^{-\frac{3}{4}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= -a \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial E_0}{\partial \xi} + b \xi^{-\frac{3}{4}} \frac{\partial E_0}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \xi} + \\ &+ \int_0^\xi E_0 (e^{\xi-\eta} - e^{\eta-\xi}) d\eta - C_1 e^\xi + 2\varepsilon + \int_0^\xi \varepsilon (e^{\xi-\eta} - e^{\eta-\xi}) d\eta, \end{aligned} \quad (26)$$

т. е. уравнение того же типа, что и прежде, но полученное без линеаризации.

Граничное условие (18) примет при этом вид:

$$\frac{\lambda}{\mu(t)} \frac{\partial E}{\partial x} + A - E = \frac{\lambda_1}{\mu(t)} \frac{\partial E_1}{\partial x}, \quad E|_{x=0} = E_1|_{x=0}.$$

Это линейное условие, но с переменными (по времени) коэффициентами.

Переходя теперь к решению упрощенного уравнения (24), положим $\vartheta = ye^{\omega t}$, тогда однородное уравнение (24)

$$a \frac{\partial}{\partial \xi} \xi \frac{\partial y}{\partial \xi} - b \omega \xi^{-\frac{3}{4}} y = 0$$

приводится к уравнению Бесселя и решение его имеет вид:

$$y = Z_0 \left(i 8 \sqrt{\frac{b \omega}{a}} \xi^{\frac{1}{8}} \right)$$

следовательно,

$$\vartheta = \left[C_1 I_0 \left(i 8 \sqrt{\frac{b \omega}{a}} \xi^{\frac{1}{8}} \right) + C_2 N_0 \left(i 8 \sqrt{\frac{b \omega}{a}} \xi^{\frac{1}{8}} \right) \right] e^{\omega t}$$

Взяв еще подходящее граничное условие при $x = \infty$, например $\vartheta|_{x=\infty} = 0$, и поступая дальше так же, как в моей предыдущей статье [6], т. е. определив постоянные C_1 и C_2 из граничных условий и найдя таким образом фундаментальные функции задачи, получим решение ее. Полагая ω мнимым, получим периодическое решение задачи. После этого можно будет ставить вопрос о решении уравнения (24) во втором приближении. Однако, в настоящее время более актуальным является вопрос о сколько-нибудь точном определении физических постоянных (особенно коэффициента поглощения), входящих в условие задачи.

На весьма больших высотах, где коэффициент ξ при старшей производной будет достаточно мал, можно, повидимому, этот член вовсе отбросить, поскольку мы имеем ограниченное решение, и тогда можно сохранить остальные члены интегро-дифференциального уравнения, т. е. не отбрасывать функцию E .

Впрочем можно применить преобразование Лапласа, $\vartheta(s) = \int_0^{\infty} e^{-s\xi} \vartheta(\xi) d\xi$, для точного решения интегродифференциального уравнения (24); затруднения представит только член с дробной степенью ξ в левой части; этот член исчезнет для стационарного случая и превратится в член с целой степенью в стратосфере, где плотность водяных паров падает с той же скоростью, как и плотность воздуха.

В этих двух случаях решение может быть получено в явном виде при помощи операционного исчисления.

Замечание. Изложенный метод может быть обобщен и на случай селективного поглощения.

Положим

$$A = \sum_{i=1}^n A_i, \quad B = \sum_{i=1}^n B_i, \quad E = \sum_{i=1}^n E_i, \quad \text{где } E_i = p_i E$$

(где p_i медленно меняются и их можно считать либо постоянными, либо известными).

Каждому индексу отвечает свой коэффициент поглощения k_i и, введя новое независимое переменное $\zeta = \int_x^{\infty} \rho_{\omega} dx$, получим уравнения Шварцшильда в виде:

$$\frac{\partial A_i}{\partial \zeta} + k_i A_i - k_i E_i = 0, \quad \frac{dB_i}{d\zeta} - k_i B_i + k_i E_i = 0;$$

подставляя полученные отсюда решения в уравнение теплопроводности, получим, например, вместо (26)

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} a \zeta \frac{\partial E}{\partial \zeta} - b \zeta^{-\frac{3}{4}} \frac{\partial E}{\partial t} = -2E \sum_{i=1}^n k_i p_i + \sum_{i=1}^n C_i k_i e^{k_i \zeta} +$$

$$+ \int_0^{\zeta} E(\eta) \left[\sum_{n=1}^n k_i p_i \operatorname{ch} k_i (\xi - \eta) \right] d\eta,$$

где

$$C_i = \int_0^{\zeta_0} E(\eta) e^{-k_i \eta} d\eta + E_i(0) e^{-k_i \zeta}.$$

Уравнение может быть подвергнуто дальнейшему упрощению.

Можно также разбить на n отдельных уравнений не только уравнения (2) Шварцшильда, но и уравнение (1), введя там предварительно E вместо T .

ЛИТЕРАТУРА

1. E m d e n R. Über Strahlungsgleichgewicht der atmosphärischen Strahlung. Sitzungsberichte. München 1913. (55).
2. Ф р и д м а н А. А. Friedman A. Sur la distribution de la temperature aux diverses hauteurs. Геофизический сборник, т. 1, вып. 1. 1914.
3. Ф р и д м а н А. А. О распределении температуры с высотой при наличии лучистого обмена. Известия Физической Обсерватории, 1920.
4. К и б е л ь И. А. О распределении температуры в земной атмосфере. ДАН, XXXIX, № 1, 1943. К теории трансформации воздушных масс. ДАН, XLVII, 1945.
5. Ш в е ц М. Е. Суточный ход температуры и лучистый теплообмен. Изв. Ак. Наук СССР, серия географии, № 2. 1943.
6. H u l b e r t. Physical Rev. vol. 38 (1931) 1882, см. также „Динамическую Метеорологию“, ч. I. стр. 164.
7. М а л к и н Н. Р. О трансформации воздушных масс. Известия Ак. Наук СССР, серия географии и геофизики, т. IX, № 2, 1945.
8. Х в о с т и к о в. Очерки по физике земной атмосферы. Успехи Физических Наук. т. 19, стр. 49. ОНТИ. 1938.
9. V a u g u n d P h y l i p p s. Gerlands Beitr. d. Geophys. 45. 1935.

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ТЕПЛООВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ТЕМПЕРАТУРУ ВОЗДУХА

Тепловое излучение воздуха играет важную роль в термодинамике атмосферы. Изучение ряда вопросов, как, например, энергетического баланса подстилающей поверхности, трансформации воздушной массы, температурного режима стратосферы принципиально не может быть выполнено без учета теплового излучения воздуха.

В настоящей работе изучается тепловое излучение в неподвижной атмосфере. Исследуются, главным образом, периодические изменения элементов теплового излучения (температуры, эффективного излучения, радиационного баланса). Общей постановке задачи о нестационарном тепловом излучении воздуха посвящена работа члена-корреспондента Акад. наук И. А. Кибеля [1].

Уравнение притока тепла в неподвижной атмосфере, если пренебречь притоком тепла от конденсации или парообразования, с достаточной степенью точности может быть представлено в виде:

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (1)$$

где T — температура, ρ — плотность воздуха, t — время, c_p — теплоемкость, ε_1 и ε_2 — соответственно притоки тепла от излучения и от турбулентной теплопроводности.

Принимая, что существуют лишь два радиационных потока, которые имеют вертикальное направление вверх или вниз и являются пучками параллельных лучей, согласно Шварцшильду [2] и Эмдену [3], приток тепла ε_1 может быть представлен в виде:

$$\varepsilon_1 = \alpha \rho_w (A + B - 2f\sigma T^4 + \beta S), \quad (2)$$

где α , $\alpha\beta$, $f\alpha$ — коэффициенты поглощения для серой радиации; α — для длинноволновой; $\alpha\beta$ — для коротковолновой (солнечной); A — поток длинноволновой радиации, идущей сверху; B — поток длинноволновой радиации, идущей снизу; S — поток коротковолновой радиации; множитель f , характеризующий степень черноты воздуха, вводится по Гульберту [4]; σ — постоянная Стефана-Больцмана; ρ_w — плотность водяного пара.

Выражение (2) получается следующим образом. Сквозь элементарный слой воздуха, ограниченный горизонтальными плоскостями z и $z + \Delta z$, проходит прямая и рассеянная радиация солнца — S , тепловое излучение $A(z, t)$, идущее сверху вниз, и тепловое излучение $B(z, t)$, идущее снизу вверх. Считая, что поглощение длинноволновой радиации совершается лишь водяным паром, содержащимся в воздухе, т. е. пренебрегая поглощением для всех других газов, составляющих атмосферу, можно утверждать, что элементарным слоем поглощается от излучений A и B количество энергии равно $\alpha \rho_w (A + B) dz$, а от солнечной радиации количество $\beta \alpha \rho_w S$. Элементарный слой излучает через обе свои граничные поверхности количество энергии равно $2\alpha \rho_w f \sigma T^4$. Таким образом приток тепла ε_1 определяется выражением (2).

При выводе этого выражения делается предположение, что излучение как коротковолновое, так и длинноволновое — серое, т. е. что коэффициенты α и β не зависят от длины волны. Предполагая, что турбулентный поток тепла, параллельный подстилающей поверхности, исчезающе мал, можно представить ε_2 в виде:

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (3)$$

где λ — коэффициент теплопроводности.

Таким образом, уравнение (1) окончательно запишется так:

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha \rho_w (A + B - 2E + \beta S), \quad (4)$$

($E = f \sigma T^4$).

Чтобы определить потоки A и B , необходимо привлечь к рассмотрению еще уравнения переноса лучистой энергии. Эти уравнения были установлены Шварцшильдом [2]. Они могут быть получены на основании следующих элементарных соображений. Излучение A ослабляется при прохождении элементарного слоя толщины dz на величину $\alpha A dz$; следовательно, на эту величину увеличивается A при прохождении элементарного слоя в направлении положительных z ; кроме того, это излучение, проходя через элементарный слой, увеличивается на величину собственного излучения этого слоя по направлению к подстилающей поверхности $\alpha \rho_w E$, т. е. убывает на эту величину в направлении возрастающих z , поэтому

$$\frac{\partial A}{\partial z} = \alpha \rho_w (A - E). \quad (5)$$

Аналогично находится дифференциальное уравнение для B :

$$\frac{\partial B}{\partial z} = \alpha \rho_w (E - B). \quad (6)$$

Коротковолновая радиация $S(z, t)$ определяется из закона Бугера — Ламберта:

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \beta \alpha \rho_w S. \quad (7)$$

Кроме этих уравнений необходимо написать еще уравнение теплопроводности для подстилающей среды (почва, вода):

$$c_1 \rho_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z}, \quad (8)$$

где T_1 — температура подстилающей среды, λ_1 — коэффициент теплопроводности, c_1 — теплоемкость, ρ_1 — плотность этой среды.

В качестве граничных принимаются на подстилающей поверхности (т. е. при $z=0$) следующие условия:

1) Уравнение теплового баланса:

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = A - B + S - Q \quad (9)$$

(Q — расход тепла на испарение или конденсацию).

2) Непрерывность радиационных потоков

$$B = q E_0(0, t) \quad (10)$$

(q — величина близкая к единице, характеризует степень черноты подстилающей поверхности; E_0 — излучение подстилающей поверхности).

3) Равенство температур

$$T(0, t) = T_1(0, t). \quad (11)$$

На границе атмосферы (т. е. при $z = \infty$):

$$A = 0, \quad (12)$$

$$S = W \quad (13)$$

(W — поток солнечной радиации).

Удобно ввести в рассмотрение новую функцию и новую независимую переменную по формулам:

$$F = A + B, \quad (14)$$

$$dx = \alpha \rho_w dz \quad (15)$$

$$(0 \leq x \leq x_H, \quad x_H = \int_0^{\infty} \alpha \rho_w dz).$$

Тогда вместо уравнений (5), (6) и (7) будем иметь:

$$\frac{\partial A}{\partial x} = A - E, \quad (16)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = E - B, \quad (17)$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \beta S. \quad (18)$$

Из (16) и (17) следует, что

$$A - B = \frac{\partial E}{\partial x},$$

поэтому излучения A , B и E выразятся через функцию F следующим образом:

$$A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x} + F \right), \quad (19)$$

$$B = \frac{1}{2} \left(F - \frac{\partial F}{\partial x} \right), \quad (20)$$

$$E = \frac{1}{2} \left(F - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right). \quad (21)$$

Эффективное излучение, которое мы обозначим через R , будет равно

$$R = A - B = \frac{\partial F}{\partial x}. \quad (22)$$

Из уравнения (21) следует, что

$$F = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x - 2 \int_0^x E(\xi, t) \operatorname{sh}(x - \xi) d\xi \quad (23)$$

($C_1(t)$ и $C_2(t)$ — произвольные постоянные интегрирования).

Предположим, что нам известна температура на поверхности $T(0, t)$. Тогда C_1 и C_2 могут быть найдены из граничных условий (10) и (12).

Условие (10) может быть записано в виде:

$$F - \frac{\partial F}{\partial x} = 2qE_0,$$

оно дает

$$C_1 - C_2 = 2qE_0.$$

Из условия (12), которое теперь может быть заменено выражением

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_H, t) + F(x_H, t) = 0,$$

получаем уравнение для определения C_2 :

$$C_2 = \int_0^{x_H} E e^{-\xi} d\xi - qE_0 \quad (24)$$

Следовательно, произвольная функция времени C_2 может быть определена после того, как найдено выражение для E , содержащее C_2 в первой степени.

Нетрудно видеть, что уравнение (23) может быть также представлено в виде:

$$F = 2qE_0 \operatorname{ch} x + C_2 e^x - 2 \int_0^x E(\xi, t) \operatorname{sh}(x - \xi) d\xi, \quad (25)$$

а эффективное излучение — выражением:

$$R = \frac{\partial E}{\partial x} = 2qE_0 \operatorname{sh} x + C_2 e^x - 2 \int_0^x E(\xi, t) \operatorname{ch}(x - \xi) d\xi. \quad (26)$$

Воспользовавшись вновь введенной функцией F , перепишем уравнение притока тепла (4) так:

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \alpha \rho_w \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \beta S \right),$$

или

$$\frac{c_p \rho}{4 \delta f T^3 \alpha \rho_w} \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\lambda \alpha \rho_w}{4 f \sigma T^3} \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \beta S.$$

Введем обозначения:

$$\frac{c_p \rho}{\alpha \rho_w 4 f \sigma T^3} = m, \quad \frac{\lambda \alpha \rho_w}{4 f \sigma T^3} = \eta,$$

тогда

$$m \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \eta \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \beta S. \quad (27)$$

Подставляя в это уравнение значение E из (21), находим для определения F соотношение:

$$m \frac{\partial}{\partial t} \left(F - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \eta \frac{\partial}{\partial x} \left(F - \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \beta S \quad (28)$$

Функция E может быть непосредственно найдена из интегродифференциального уравнения.

Действительно, вычисляя $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ из (25) и подставляя найденное значение в (27),

имеем:

$$m \frac{\partial E}{\partial t} + 2E = \frac{\partial}{\partial x} \eta \frac{\partial E}{\partial x} - 2 \int_0^x E \operatorname{sh}(x - \xi) d\xi + \Phi(x, t) \quad (29)$$

где

$$\Phi(x, t) = 2qE_0 \operatorname{ch} x + C_2 e^x + \beta S$$

Произвольная функция C_2 имеет простое физическое значение. Положив в (26) $x=0$, находим:

$$C_2 = R(0, t) = \int_0^{x_H} E e^{-\xi} d\xi - qE_0$$

Следовательно, C_2 представляет собою эффективное излучение для подстилающей поверхности.

Рассмотрим периодические изменения элементов теплового излучения. Представим все рассматриваемые элементы в виде суммы двух величин — среднесуточного значения и отклонения от среднесуточного значения; причем отклонения от среднесуточного значения представим рядом Фурье. Следовательно:

$$\left. \begin{aligned} T &= \bar{T}(x) + \tau(x, t) = \bar{T}(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_n(x) e^{-in\omega t} \\ E &= \bar{E}(x) + e(x, t) = \bar{E}(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_n(x) e^{-in\omega t} \\ \Phi &= \bar{\Phi}(x) + f(x, t) = \bar{\Phi}(x) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n(x) e^{-in\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

и т. д. Большими буквами с чертой обозначены среднесуточные значения элементов, маленькими — отклонения от этих значений.

Между функциями $\tau(x, t)$ и $e(x, t)$ существует простое соотношение. Имеем:

$$E = f\sigma T^4 = f\sigma [\bar{T}(x) + \tau(x, t)]^4 = f\sigma [\bar{T}^4 + 4\bar{T}^3\tau + \dots],$$

откуда следует, что с достаточной точностью

$$e = f\sigma \bar{T}^3 \tau,$$

Подставляя (30) в уравнение (29) и заменяя коэффициенты уравнения m и η их среднесуточными значениями ($m = \text{const}$), мы расчленим его на два уравнения, одно из которых позволит определить отклонения от среднесуточного значения, а другое — найти среднесуточное значение. Последнее уравнение не выписываем, так как нахождение средних значений температуры не входит в нашу задачу. Этот вопрос служил предметом ряда исследований Кибеля [1], Эмдена [3], Фридмана [6] и др.

Для определения функции $e_n(x, t)$ получаем следующее интегродифференциальное уравнение:

$$(2 - in\omega m)e_n = \frac{\partial}{\partial x} \eta \frac{\partial e_n}{\partial x} - 2 \int_0^x e_n \text{sh}(x - \xi) d\xi + f_n(x, t) \quad (31)$$

или, взяв входящий в это выражение интеграл по частям:

$$-in\omega m e_n = \frac{\partial}{\partial x} \eta \frac{\partial e_n}{\partial x} - 2 \int_0^x \frac{\partial e_n}{\partial \xi} \text{ch}(x - \xi) d\xi + C_{2n} e^x + \beta S_n \quad (32)$$

Не нарушая общности, можно считать, что нам известна температура на поверхности (при $x=0$); ибо если это не имеет места, то всегда, как это легко показать, значение поверхностной температуры может быть легко найдено из уравнения теплового баланса (9).

Положим

$$e_n(0) = \alpha_n \quad (33)$$

Кроме того, положим

$$\eta \frac{\partial e_n}{\partial x} \Big|_{x=0} = \delta_n \quad (34)$$

Величина δ_n подлежит определению.

Чтобы привести интегродифференциальное уравнение к интегральному, положим

$$\frac{\partial}{\partial x} \eta \frac{\partial e_n}{\partial x} = W_n(x) \quad (35)$$

Принимая во внимание условия (33) и (34), находим:

$$\frac{\partial e_n}{\partial x} = \frac{\delta_n}{\eta(x)} + \frac{1}{\eta(x)} \int_0^x W_n(\xi) d\xi \quad (36)$$

$$e_n = \alpha_n + \delta_n \int_0^x \frac{d\xi}{\eta(\xi)} + \int_0^x W_n(\xi) d\xi \int_{\xi}^x \frac{dy}{\eta(y)} \quad (37)$$

Подставляя эти значения в уравнение (32) и, воспользовавшись формулой Дирихле для изменения порядка интегрирования, получаем следующее интегральное уравнение для определения функции W_n .

$$W_n(x) - \int_0^x W_n(\xi) K(x, \xi) d\xi = F_n(x), \quad (38)$$

где ядро

$$K(x, \xi) = \int_{\xi}^x \frac{\gamma_n + 2 \operatorname{ch}(x - \sigma)}{\eta(\sigma)} d\sigma, \quad (39)$$

и

$$\begin{aligned} F_n(x) &= \gamma_n \alpha_n + \delta_n \int_0^x \frac{\gamma_n + 2 \operatorname{ch}(x - \sigma)}{\eta(\sigma)} d\sigma + C_{2n} e^x + \beta S_n = \\ &= \gamma_n \alpha_n + \delta_n K(x, 0) + C_{2n} e^x + \beta S_n; \\ \gamma_n &= -in \omega m. \end{aligned} \quad (40)$$

Решение этого интегрального уравнения имеет вид:

$$W_n(x) = F_n(x) + \int_0^x \Gamma(x, \xi) F_n(\xi) d\xi, \quad (41)$$

где $\Gamma(x, \xi)$ — резольвента.

Подставляя решение (41) в выражение для e_n и воспользовавшись формулой Дирихле для перемены порядка интегрирования, находим:

$$e_n = \alpha_n + \delta_n \int_0^x \frac{dy}{\eta(y)} + \int_0^x F_n(\mu) \tilde{\Phi}(x, \mu) d\mu, \quad (42)$$

где

$$\tilde{\Phi}(x, \mu) = \int_{\mu}^x \frac{dy}{\eta(y)} \left[1 + \int_{\mu}^x \Gamma(\mu, \xi) d\xi \right]$$

Теперь можно приступить к определению C_{2n} и δ_n . Мы имеем граничное условие (24), которое может быть представлено в виде:

$$C_{2n} = \int_0^{x_H} e_n e^{-\xi} d\xi - \alpha_n.$$

Подставляя сюда значение e_n , имеем:

$$C_{2n} = -\alpha_n e^{-x_H} + \delta_n \int_0^{x_H} \frac{e^{-y} - e^{-x_H}}{\eta(y)} dy + \int_0^{x_H} F_n(\mu) \Omega(x_H, \mu) d\mu,$$

где

$$\Omega(x_H, \mu) = \int_{\mu}^{x_H} e^{-\sigma} \Phi(\sigma, \mu) d\sigma.$$

Наконец, подставляя в последнее соотношение выражение для $F_n(\mu)$, находим:

$$\begin{aligned} C_{2n} \left[1 + \int_0^{x_H} e^{\mu} \Omega(x_H, \mu) d\mu \right] - \delta_n \int_0^{x_H} \left[K(x, 0) \Omega(x_H, \mu) + \frac{e^{-\mu} - e^{-x_H}}{\eta(\mu)} \right] d\mu = \\ = (\gamma_n \alpha_n + \beta S_n) \int_0^{x_H} \Omega(x_H, \mu) d\mu - \alpha_n e^{-x_H}. \end{aligned} \quad (43)$$

Чтобы определить δ_n , установим следующее граничное условие: будем считать, что на границе атмосферы (при $x = x_H$) отсутствует приток тепла от турбулентной теплопроводности, т. е.

$$\frac{d}{dx} \eta \frac{de_n}{dx} \Big|_{x=x_H} = 0,$$

или

$$W_n(x_H) = 0,$$

что дает, согласно уравнению (41), соотношение:

$$F_n(x_H) + \int_0^{x_H} \Gamma(x_H, \xi) F_n(\xi) d\xi = 0.$$

Подставляя сюда значение $F_n(\xi)$, после несложных преобразований, получаем:

$$\begin{aligned} C_{2n} \left[e^{x_H} + \int_0^{x_H} \Gamma(x_H, \xi) e^{\xi} d\xi \right] - \delta_n \left[K(x_H, 0) + \int_0^{x_H} \Gamma(x_H, \xi) K(\xi, 0) d\xi \right] = \\ = (\gamma_n \alpha_n + \beta S_n) \left(1 + \int_0^{x_H} \Gamma(x_H, \xi) d\xi \right). \end{aligned} \quad (44)$$

Уравнения (43) и (44) служат для определения C_{2n} и δ . Решение интегрального уравнения сильно упрощается, если функцию $\eta(x)$ заменить ее средним значением, т. е. если положить $\eta(x) = \eta_0 = \text{const}$. В этом случае ядро интегрального уравне-

ния будет зависеть от разности аргументов, и его решение, как известно, будет иметь вид:

$$W_n(x) = F_n(x) + \int_0^x \sum_{m=1}^{\infty} K_m(x, \xi) F_n(\xi) d\xi, \quad (45)$$

где повторные ядра $K_m(x, \xi)$ определяются при помощи формул:

$$\begin{aligned} K_1(x, s) &= K(x, s) \\ K_2(x, s) &= \int_s^x K(x, y) K_1(y, s) dy \\ &\dots \dots \dots \\ K_m(x, s) &= \int_s^x K(x, y) K_{m-1}(y, s) dy \end{aligned}$$

Ряд, фигурирующий под знаком интеграла в формулах (45), сходится абсолютно и равномерно в области $0 \leq (x, s) \leq x_H$. Известно, что если ядро исходного интегрального уравнения является функцией разности своих аргументов и может быть представлено в виде сходящегося степенного ряда:

$$K(x - \xi) = \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{\mu} \frac{(x - \xi)^{\mu}}{\mu!},$$

то разрешающее ядро имеет вид:

$$\Gamma(x - \xi) = \sum_{m=1}^{\infty} K_m(x - \xi) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_{\nu}}{\nu!} (x - \xi)^{\nu},$$

причем последний ряд будет сходиться абсолютно и равномерно, в той же области.

Вычисления, которые здесь не приводятся ввиду их громоздкости, показывают, что амплитуды суточного хода температуры, эффективного излучения и т. д. сложным образом зависят от ряда параметров, характеризующих время года, облачность, влажность воздуха, состояние подстилающей поверхности, турбулентность воздуха.

Амплитуда суточного хода температуры убывает с высотой — очень быстро вблизи подстилающей поверхности и медленно в свободной атмосфере.

Суточный ход температуры в свободной атмосфере объясняется, главным образом, тепловым излучением воздуха.

Влияние теплового излучения воздуха на суточный ход температуры наиболее заметно в теплое время года (большие S_n).

Если не принимать во внимание тепловое излучение воздуха, то ошибка в определении амплитуды суточного хода температуры воздуха вблизи подстилающей поверхности в теплое время года может достигать 2—3°.

Эффективное излучение имеет заметный суточный ход. Амплитуда суточного хода эффективного излучения может составлять 20—30% от среднего значения эффективного излучения.

Встречающееся в литературе утверждение о том, что эффективное излучение не имеет суточного хода (см., например, Брент „Физическая и динамическая метеорология“), вследствие того, что упругость водяного пара имеет слабый суточный ход, является ошибочным.

Изучение неперiodического изменения температуры воздуха, при учете теплового излучения, наталкивается на большие математические трудности, главным обра-

зом потому, что приходится удовлетворять сложным граничным условиям. Сравнительно легко может быть разрешена эта задача для того частного случая, когда можно пренебречь притоком тепла от турбулентной теплопроводности по сравнению с радиационным притоком.

Это, вероятно, будет иметь место при глубоких инверсиях и при тумане.

Брент ([7] стр. 120) пишет: „На очень малых высотах над земной поверхностью турбулентность не может развиваться до больших размеров, и тогда перенос тепла осуществляется по преимуществу радиацией. Поэтому-то в солнечные дни, когда приток приходящей радиации велик, тепло с поверхности передается очень медленно, даже на близкие к земной поверхности уровни, вследствие чего в приземном слое часто образуются сверхадиабатические градиенты“.

Если предположение Брента справедливо, то нижеследующие выводы будут обладать большой общностью.

Возвращаясь к уравнениям (4) и (9) мы, на основании малости турбулентного потока тепла, можем их переписать в виде:

$$c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \rho_w (A + B - 2E) = \alpha \rho_w F'' \quad (46)$$

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial z} = A - B + S = F' + S. \quad (47)$$

(В первом уравнении (46) мы упустили, для упрощения выкладок, приток тепла от коротковолновой радиации, который, вообще говоря, мал. Штрихами обозначаем дифференцирование по x).

Граничные условия (10) и (11) остаются в силе. Будем отсчитывать температуры от значения температуры поверхности подстилающей среды в начальный момент времени.

Пусть в начальный момент температура воздуха определяется функцией:

$$T(z, 0) = T_0(z),$$

тогда, на основании (46), в последующие моменты времени, температура воздуха будет определяться по формуле:

$$T = T_0(z) + \frac{\alpha \rho_w}{c_p \rho} \int_0^t F'' dt \quad (48)$$

Предположим, что начальное распределение температуры подстилающей среды задано

$$T_1(0, z) = \Theta_0(z)$$

Тогда, как известно,

$$T_1 = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \Theta_0(\xi) \left[e^{-\frac{(\xi-z)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\xi+z)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \right) T_1(0, \tau) d\tau \quad (49)$$

представляет решение уравнения теплопроводности (8), причем $a = \sqrt{\frac{\lambda_1}{c_1 \rho_1}}$.

Обозначим первый интеграл в (49) через $\gamma(z, t)$, тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial T_1}{\partial z} &= \frac{\partial \gamma}{\partial z} - \frac{a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\frac{e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \right) T_1(0, \tau) d\tau = \\ &= \frac{\partial \gamma}{\partial z} + \frac{1}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{e^{-\frac{z^2}{4a^2(t-\tau)}}}{\sqrt{t-\tau}} \right) T_1(0, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и полагая $z=0$, находим

$$\lambda \left. \frac{\partial T_1}{\partial z} \right|_{z=0} = \lambda \left. \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right|_{z=0} - \frac{\lambda}{a\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\partial T_1(0, \tau)}{\partial \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (50)$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{\partial T(0, t)}{\partial t} = \frac{\partial T_1(0, t)}{\partial t} = \frac{\alpha \rho_w}{c_p \rho} F''(0, \tau)$$

и, что при выводе формулы (50) мы считали ось oz направленной вертикально вниз, можно уравнение теплового баланса переписать в виде:

$$-F'(0, t) + S = -\lambda \left. \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right|_{z=0} + \frac{\lambda}{a\sqrt{\pi}} \frac{\alpha \rho_w}{c_p \rho} \int_0^t \frac{F''(0, \tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}. \quad (51)$$

Продифференцировав уравнение (22) по x , имеем:

$$F''' = A' - B' = A + B - 2E.$$

На основании граничного условия (10) из этого уравнения следует, если считать степень черноты воздуха и подстилающей поверхности одной и той же, что

$$F''(0, \tau) = F'(0, \tau).$$

Таким образом мы получаем интегральное уравнение для определения эффективного излучения $F'(0, t)$:

$$F' + \nu \int_0^t \frac{F d\tau}{\sqrt{\alpha - \tau}} = Q(\alpha), \quad (52)$$

где

$$Q(\alpha) = -\lambda \left. \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right|_{z=0} + S(\alpha), \quad \nu = \frac{\lambda}{a\sqrt{\pi}} \frac{\alpha \rho_w}{c_p \rho}.$$

Чтобы найти решение этого уравнения, умножим обе его части на $\frac{d\alpha}{\sqrt{t-\alpha}}$ и полученное соотношение проинтегрируем от 0 до t :

$$\int_0^t \frac{F' d\alpha}{\sqrt{t-\alpha}} + \nu \int_0^t \frac{d\alpha}{\sqrt{t-\alpha}} \int_0^\alpha \frac{F' d\tau}{\sqrt{\alpha-\tau}} = \int_0^t \frac{Q(\alpha) d\alpha}{\sqrt{t-\alpha}},$$

или

$$\int_0^t \frac{F' d\alpha}{\sqrt{t-\alpha}} + \nu \int_0^t F' d\tau \int_{-\alpha}^t \frac{d\alpha}{\sqrt{(t-\alpha)(\alpha-\tau)}} = \int_0^t \frac{Q(\alpha) d\alpha}{\sqrt{t-\alpha}};$$

так как

$$\int_{\alpha}^t \frac{d\tau}{V(t-\alpha)(\alpha-\tau)} = \pi,$$

то окончательно получаем:

$$\int_0^t \frac{F' d\alpha}{V t - \alpha} + v\pi \int_0^t F' d\tau = \int_0^t \frac{Q(\alpha) d\alpha}{V t - \alpha} \quad (53)$$

Исключая из (52) и (53) интеграл $\int_0^t \frac{F' d\alpha}{V t - \alpha}$, находим

$$F' - v^2\pi \int_0^t F' d\tau = Q - v \int_0^t \frac{Q(\alpha) d\alpha}{V t - \alpha}.$$

Полагая

$$\int_0^t F' dt = \xi, \quad F' = \frac{d\xi}{dt},$$

получаем для определения ξ линейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\xi}{dt} - v^2\pi\xi = Q(t) - v \int_0^t \frac{Q(\alpha) d\alpha}{V t - \alpha}.$$

Решением этого уравнения будет:

$$\xi = \int_0^t Q(\alpha) e^{v^2\pi(t-\alpha)} \operatorname{erfc}[v\sqrt{\pi}\sqrt{t-\alpha}] d\alpha \quad (54)$$

Следовательно, эффективное излучение F' будет определяться по формуле:

$$F' = \frac{d}{dt} \int_0^t Q(\alpha) e^{v^2\pi(t-\alpha)} \operatorname{erfc}[v\sqrt{\pi}\sqrt{t-\alpha}] d\alpha. \quad (55)$$

Здесь введено обозначение:

$$\operatorname{erfc}(y) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-\alpha^2} d\alpha.$$

Температура $T(0, t)$ теперь легко находится из формулы (46)

$$T = \frac{\alpha\rho_w}{c_p\rho} \int_0^t F''(0, t) dt = \frac{\alpha\rho_w}{c_p\rho} \xi.$$

Если приток тепла к поверхности $Q = \text{const}$, тогда, полагая для сокращения $\frac{\alpha\rho_w}{c_p\rho} = \beta$, имеем:

$$T = \beta Q \int_0^t e^{v^2\pi(t-\alpha)} \operatorname{erfc}[v\sqrt{\pi}\sqrt{t-\alpha}] d\alpha. \quad (56)$$

Интегрируя (56) по частям и произведя замену переменных

$$\sqrt{\pi(t-a)} = y, \quad d\alpha = -\frac{2ydy}{\sqrt{\pi}}$$

имеем:

$$T = \frac{\beta Q}{\pi \nu^2} \int_0^{\sqrt{\pi t}} 2y e^{-y^2} \operatorname{erfc} y dy = \frac{\beta Q}{\nu^2 \pi} \left\{ e^{-\nu^2 \pi t} \operatorname{erfc} \nu \sqrt{\pi t} - 1 + 2 \nu \sqrt{t} \right\}.$$

Для больших значений t :

$$\operatorname{erfc} \nu \sqrt{\pi t} = \frac{e^{-\nu^2 \pi t}}{\pi \nu \sqrt{t}} \left(1 - \frac{1}{2 \nu^2 \pi t} + \dots \right),$$

следовательно, для этих значений t :

$$T = \frac{2\beta Q}{\pi \nu} \sqrt{t} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{Q}{\sqrt{\lambda_1 c_1 \rho_1}} \sqrt{t}.$$

Эта формула совпадает с формулой для ночного понижения температуры, полученной Брентом [7] из других соображений. Так как

$$\operatorname{erfc}(y) = 1 - \frac{2e^{-y^2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{y}{1} + \frac{2y^3}{1 \cdot 3} + \frac{2^2 y^5}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots \right),$$

то для небольших значений t ($t < 2 \cdot 10^4$ сек.) температура

$$T = \beta Q t \left(1 - \frac{4}{3} \nu \sqrt{t} \right);$$

а эффективное излучение

$$R(0, t) = Q(1 - 2 \nu \sqrt{t})$$

Как уже указывалось, степень черноты воздуха и подстилающей среды считалась одной и той же. Пусть излучение подстилающей поверхности будет qE , тогда условие $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial F}{\partial x}(0, t)$ уже не будет выполняться, — оно заменится теперь следующим условием:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial F}{\partial x}(0, t) + 2(q-1)\sigma T^4(0, t).$$

и, вместо интегрального уравнения (52), теперь будет

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \nu \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x} \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = Q + 2\nu(1-q)\sigma \int_0^t \frac{T^4(0, \tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}}.$$

Так как $(1-q) \ll 1$, то решение этого интегрального уравнения может быть получено путем последовательных приближений, причем за первое приближение следует взять полученное выше решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. И. Кибель. ДАН, XXXIX, № 1 (1943).
2. Schwarzschild. Nachr. d. König. Ges. d. Wiss. Göttingen (1906).
3. Emden. Münch. Ber. (1913).
4. E. Hulburt. The Physical Review, Vol. 38, № 10 (1932).
5. И. А. Кибель. ДАН XLVII, № 6 (1945).
6. А. А. Фридман. О распределении температуры с высотой при наличии лучистого теплообмена земли и солнца. Изв. Главн. геофиз. обсерватории. № 2. 1920.
7. Брент. Физическая и динамическая метеорология. Перевод под ред. Б. И. Извекова Гидрометеоиздат. 1938.

О ТОЧНОМ МЕТОДЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ ПОЧВЫ

Наиболее распространенный метод определения коэффициента температуропроводности почвы основан на анализе распространения суточной температурной волны в почву. По затуханию амплитуды волны или отставанию фазы с глубиной можно, пользуясь довольно простыми формулами, вычислить коэффициент температуропроводности. При вычислении указанным методом делается предположение, что на поверхности почвы температура в течение суток меняется синусоидально. Простое рассмотрение фактического материала показывает, что аппроксимирование суточного хода температуры синусоидой возможно лишь с большими ошибками. Отклонения почти всегда оказываются существенными. Кроме того, в облачные дни или дни с меняющейся облачностью, суточный ход температуры может оказаться совершенно неправильным и в этих случаях такое аппроксимирование вообще недопустимо.

Все это, естественно, будет вызывать ошибки в коэффициенте температуропроводности, разные по величине при разных условиях; оценить вероятные ошибки представляется весьма сложным. Недавно автором, совместно с А. Ф. Чудновским, был предложен более общий метод определения коэффициента температуропроводности почвы, основанный на анализе распространения с глубиной любого импульса температуры, представляющегося в виде аналитической или таблично заданной функции. Указанный метод предполагает лишь, что в начальный момент распределение температуры с глубиной может быть представлено линейной функцией.

В настоящей работе предлагается совершенно общий метод определения коэффициента температуропроводности, лишенный каких-либо ограничений.

Техника расчетов, несмотря на это, оказывается достаточно элементарной. Преимуществом этого метода является еще и то, что единственным источником погрешностей в коэффициенте температуропроводности являются ошибки в измерениях температуры. Поскольку последние достаточно хорошо известны, то можно указать в каждом отдельном случае максимальную или вероятную ошибку. Знание возможных ошибок физических констант в ряде случаев представляется совершенно необходимым, для оценки надежности получаемых выводов.

Для получения основной формулы воспользуемся уравнением температуропроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}. \quad (1)$$

* Умножим обе части уравнения на $(x - H) dx dt$ и проинтегрируем по x от h до H и по t от 0 до τ . Тогда, после простых преобразований получим:

$$\int_h^H (x - H) [T(x, \tau) - T(x, 0)] dx = -\lambda \int_0^\tau (h - H) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=h} d\tau - \lambda \int_0^\tau [T(H, t) - T(h, t)] dt. \quad (2)$$

При этом сделаны достаточно общие предположения, фактически всегда выполняющиеся. Функция $T(x, t)$ такова, что

$$\int_0^t dt \int_n^H (x-H) \frac{\partial T}{\partial t} dx = \int_h^H (x-H) dx \int_0^t \frac{\partial T}{\partial t} dt;$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=H} \neq \infty;$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=h} \neq \infty.$$

При аналогичных предположениях для $x = H_1$ можно написать

$$\int_h^{H_1} (x-H_1) [T(x, \tau) - T(x, 0)] dx = -\lambda \int_0^\tau (h-H_1) \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=h} d\tau - \lambda \int_0^\tau [T(H_1, t) - T(h, t)] dt. \quad (3)$$

Умножая теперь (2) на $(h-H_1)$ и (3) на $(h-H)$ и складывая получаем:

$$\lambda = \frac{(h-H_1) \int_h^{H_0} (x-H) [T(x, \tau) - T(x, 0)] dx - (h-H) \int_h^{H_1} (x-H_1) [T(x, \tau) - T(x, 0)] dx}{(h-H) \int_0^\tau [T(H_1, t) - T(h, t)] dt - (h-H_1) \int_0^\tau [T(H, t) - T(h, t)] dt}. \quad (4)$$

Совершенно очевидно, что не нарушая общности, мы можем принять начало координат на глубине h , тогда формула запишется несколько проще:

$$\lambda = \frac{H \int_0^{H_1} (x-H_1) [T(x, \tau) - T(x, 0)] dx - H_1 \int_0^H (x-H) [T(x, \tau) - T(x, 0)] dx}{H \int_0^\tau [T(H_1, t) - T(0, t)] dt - H_1 \int_0^\tau [T(H, t) - T(0, t)] dt}. \quad (5)$$

Из последней формулы легко получить среднюю ошибку, с которой получается коэффициент температуропроводности. Если обозначить, для краткости, числитель дроби буквой χ , а знаменатель буквой ζ и предположить, что средняя ошибка в значении функции $T(x, t)$ равна ошибке отдельного измерения ΔT деленной на число измерений в интервале интегрирования, то получим:

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \pm \left\{ \frac{HH_1 \left(\frac{H_1}{n_{0H_1}} - \frac{H}{n_{0H}} \right)}{\chi} \pm \frac{2\tau}{n_{0\tau} \zeta} (H-H_1) \right\} \Delta T. \quad (6)$$

Здесь через n_{0H} ; n_{0H_1} ; $n_{0\tau}$ обозначено число измерений температуры в соответствующем интервале.

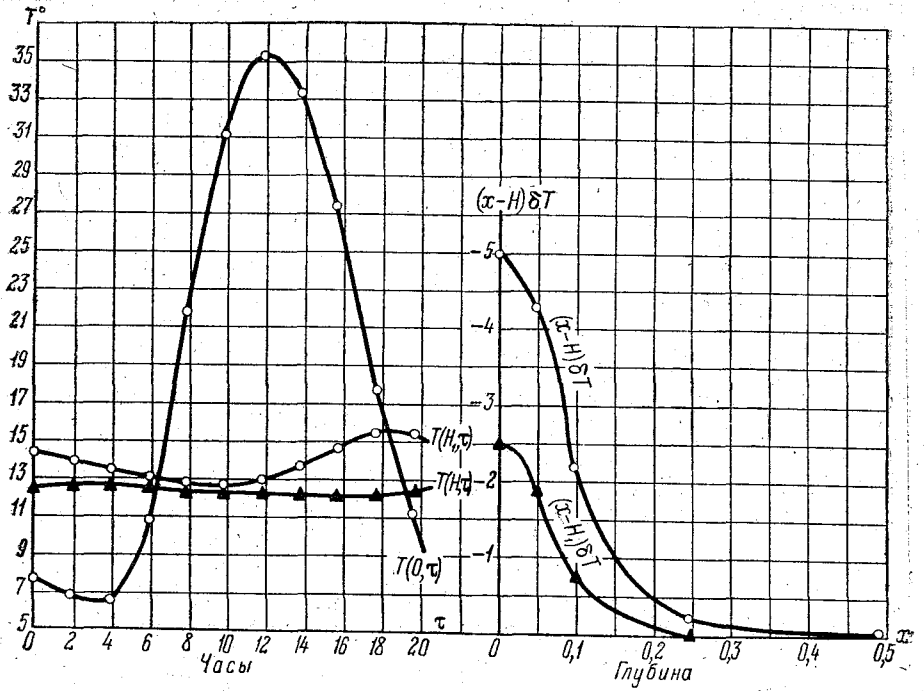


Рис. 1. Вычисления за май.

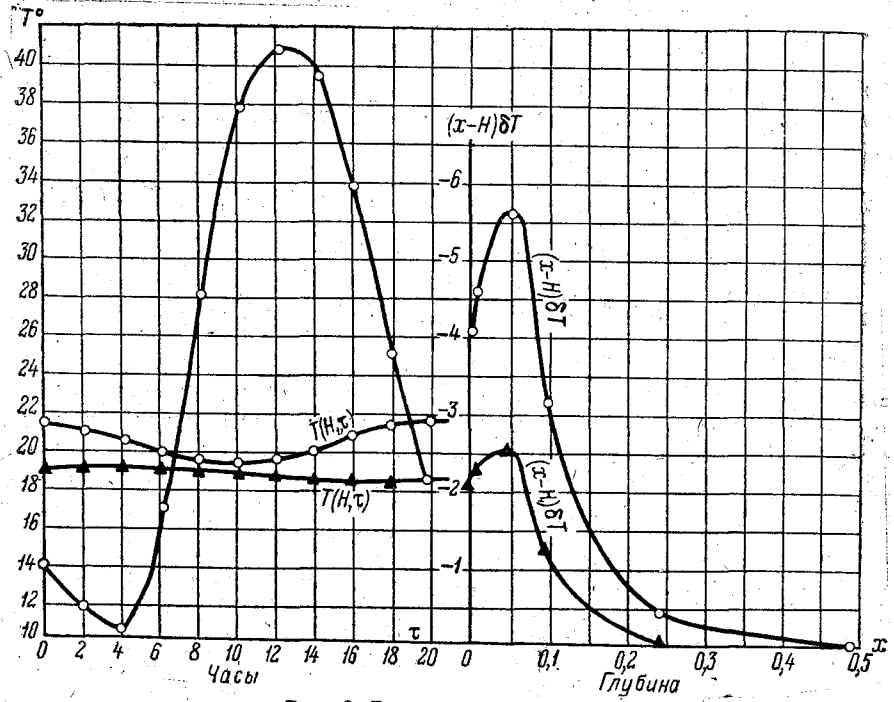


Рис. 2. Вычисления за июнь.

Приведем теперь несколько примеров по применению полученной формулы. Для этого мы воспользовались результатами наблюдений над температурой почвы на разных глубинах в пустыне Гоби, опубликованных Альбрехтом. Вычисления проделаны для пяти месяцев с мая по сентябрь включительно.

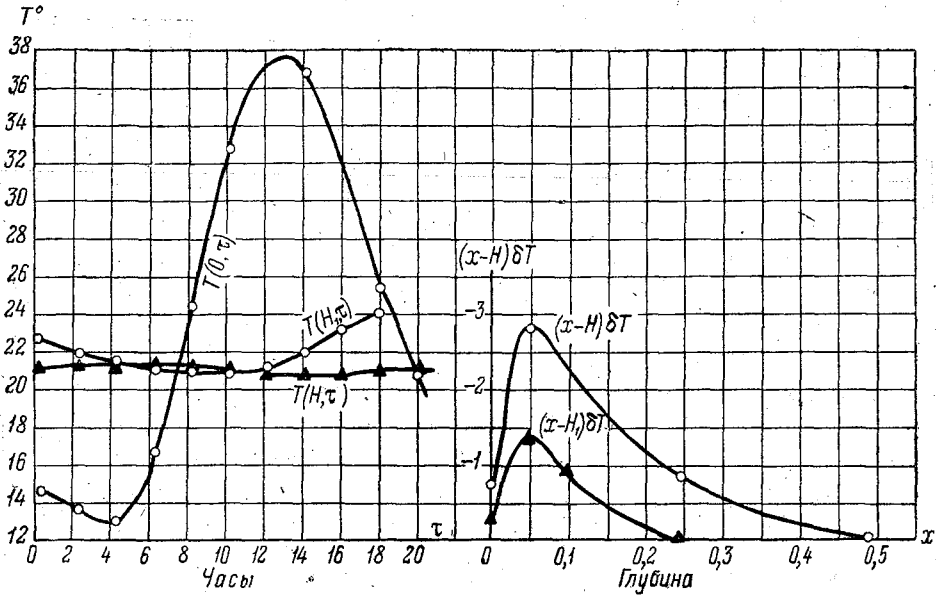


Рис. 3. Вычисления за июль.

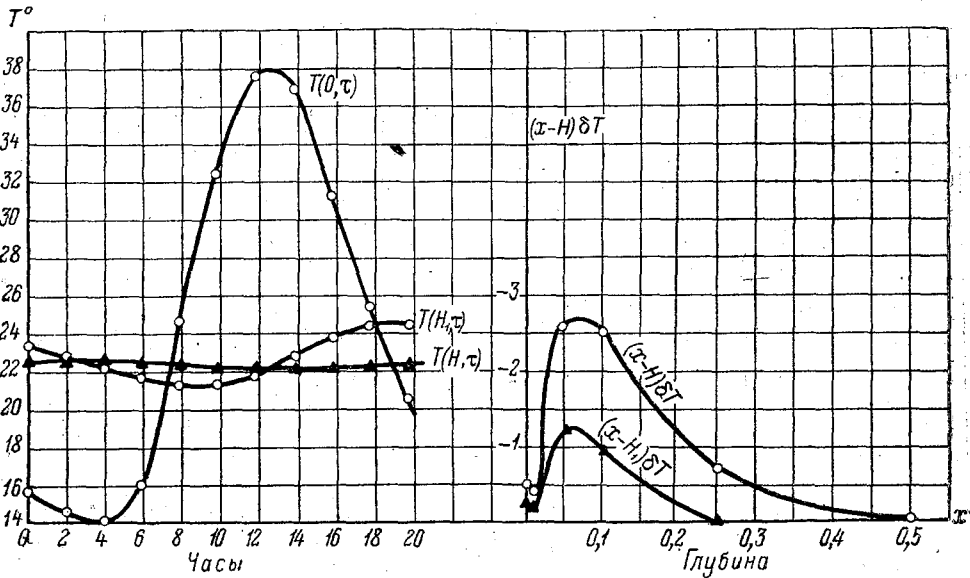


Рис. 4. Вычисления за август.

Значения H_1 и H выбирались для всех случаев равными 24,8 и 49,8 см соответственно.

На рис. 1—5 приведены значения функций:

$$(x - H_1) [T(x, \tau) - T(x, 0)] = (x - H_1) \delta T(x),$$

$$(x - H) [T(x, \tau) - T(x, 0)] = (x - H) \delta T(x),$$

$$T(H, t); T(H_1, t); T(0, t)$$

для каждого месяца.

При помощи планиметра измерялась площадь между соответствующими кривыми и по формуле (5) вычислялся коэффициент температуропроводности.

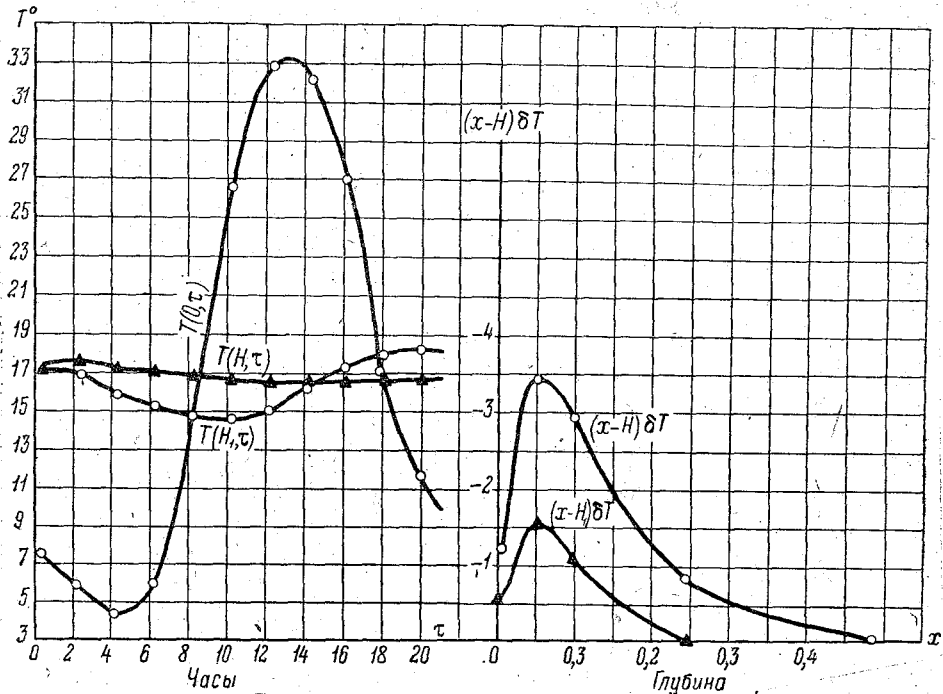


Рис. 5. Вычисления за сентябрь.

За этот же период Альбрехт наблюдал баланс влаги в почве на основании измерившихся осадков и испарения. Это дало возможность сравнить полученные значения коэффициента температуропроводности с влагосодержанием почвы.

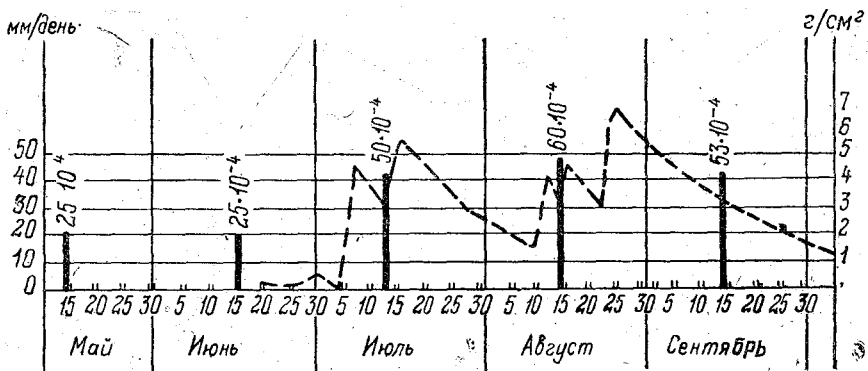


Рис. 6.

На рис. 6, заимствованном из упомянутой работы, приводятся результаты такого сравнения. На чертеже пунктирной линией дано изменение влагосодержания со временем. Вертикальные прямые пропорциональны вычисленному по полученной формуле коэффициенту температуропроводности и весьма близко соответствуют ходу влагосодержания.

Естественно возникает мысль о возможности определять вариации влагосодержания и испарение по вариациям коэффициента температуропроводности, имея столь надежный метод определения его.

В заключение отметим, что предлагаемый метод принципиально пригоден для определения температуропроводности не только почвы, но и снега и льда, а видоизменив его можно будет определять и температуропроводность воздуха.

В следующей работе мы предполагаем более подробно разобрать последний вопрос.

ЛИТЕРАТУРА

1. Albrecht F. Ergebnisse von Dr. Haudes Beobachtungen der Strahlung und des Wärmehaushaltes der Erdoberfläche an den beiden Standlagern bei Jkengüng und am Edsem-gol 1931/32. Stockholm. 1941.
Reports from the scientific expedition to north-western provinces of China under the leadership of dr. Sven-Hedin. The sino-swedish expedition. IX. Meteorology.

ПРИБОР ДЛЯ ОДНОВРЕМЕННОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФИЦИЕНТОВ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ И ОБЪЕМНОЙ ТЕПЛОЕМКОСТИ ПОЧВОГРУНТОВ В ЕСТЕСТВЕННЫХ УСЛОВИЯХ

(почвенный теплообменмер)

Постановка задачи

До последнего времени определение термических характеристик почвы как и прочих порошкообразных веществ производилось лабораторными методами.

Методов определения термических характеристик почвогрунтов в естественных условиях без взятия пробы грунта почти не существует.

В литературе известны два метода, предназначенные для этой цели. Однако, предлагаемый здесь метод, как нам кажется, более правилен, а практическое осуществление нового прибора, основанного на выдвигаемом нами теоретическом принципе применения „мгновенного источника“, несравненно проще, чем в применяемых сейчас методах.

Мы имеем в виду предложенный Михельсоном [1] тепловой зонд для определения коэффициента теплопроводности. Этот метод должен приводить к значительным искажениям результатов опыта вследствие того, что действие зонда в этом случае основано на уравнениях стационарного температурного режима в почве. Последний же наступает в почве по прошествии нескольких часов от начала нагревания почвы (4 часа и более), т. е. когда почва возле зонда уже значительно просохнет. Сухая же почва имеет значительно более низкую теплопроводность.

Второе обстоятельство, вытекающее из стационарного условия в почве и делающее этот метод практически неприменимым, заключается в том, что в течение такого длительного опыта почва будет нагреваться вокруг зонда вследствие суточного температурного хода, и эта последняя причина может вызвать повышение температур соизмеримое с повышением температур, обусловленных источником тепла (зонда).

Второй метод А. Куртенера и А. Чудновского [2], основанный на нестационарном режиме температур в почве, при котором опыт продолжается всего лишь минуты, страдает подобными недостатками уже в гораздо меньшей степени. Влияние суточной амплитуды здесь учитывается. Но оба метода обладают крупным дефектом, состоящим в том, что для их применения необходимо сложное оборудование: аккумуляторы, мост, амперметр и т. д. Если учесть особенность полевого опыта, то нужно признать это решающим недостатком существующих методов.

Эти недостатки были преодолены нами в совместной с В. З. Богомоловым работе [3], в которой был выдвинут принцип мгновенного источника тепла. Последний в виде нагретой пластины погружается в почву, вызывая минимальные нарушения в режиме влажности.

Вместе с тем никакого электрооборудования и электроприборов не требуется при работе по этому методу. И все же, для массового и широкого применения этот правильный принцип требует дальнейшего усовершенствования. Во-первых, непре-

рывные погружения и извлечения пластины из почвы вызывают механическое нарушение почвы. Во-вторых, описанная пластина дает возможность находить лишь одну из трех термических характеристик — температуропроводность почвы. Для определения теплопроводности и теплоемкости необходимо идти на усложнение путем введения нежелательных в полевых условиях термопар и гальванометра. Наконец, прием применим только в теплое время года и непригоден при наличии снега, мерзлого грунта и отрицательных температур.

Ниже предлагается прибор, лишенный этих недостатков. Основные принципы, которыми мы руководствовались при построении прибора для определения термических характеристик почвы, таковы:

1) предполагается нестационарное распределение температур в почве; действие теплового источника во время испытания должно быть кратковременным, таким, чтобы явлением миграции влаги в почве можно было пренебречь;

2) во время испытания необходимо либо устранить, либо учесть влияние суточного хода температуры;

3) прибор, предназначенный для испытаний в поле, должен быть по возможности простым; в поле выносятся минимальное оборудование; электрооборудование не используется;

4) прибор должен определять не одну из трех термических характеристик, а все три величины одновременно;

5) прибор должен представлять собой стационарную установку и не вызывать механических нарушений почвы;

6) прибор должен работать круглый год.

Теоретический принцип метода

Сделаем для почвы довольно близкое к действительности предположение об однородности среды в горизонтальном направлении для расстояния порядка 20—30 см (однородность относится и к физическим свойствам и к температуре среды).

Если введем в почву на некоторую глубину плоскую пластину и сообщим ей на одно мгновение некоторое количество тепла, то можно считать, что направление теплового потока в центральной его части будет перпендикулярно к поверхности пластины. Степень однородности теплового потока в центральной его части будет определяться расстоянием от пластины, размерами ее и термическими свойствами среды. Все это устанавливается экспериментально. Распределение температур почвы θ вдоль потока, как функция времени t и расстояния от пластины x может быть написана в виде следующего частного решения дифференциального уравнения Фурье:

$$\theta = \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}} + \theta_0 \quad (1)$$

где K — коэффициент температуропроводности почвы, A — величина, пропорциональная мощности источника, θ_0 — температура почвы до опыта.

Следовательно, процесс таков, что вначале во всех областях температура повышается, проходит через максимум и затем постепенно падает до своего начального значения.

Дифференцируя (1) по t , можно вычислить, в какое время t_m будет достигнута максимальная температура в точке x_m , т. е. на расстоянии x_m от пластины. При этом получается

$$t_m = \frac{x_m^2}{2K}$$

откуда

$$K = \frac{x_m^2}{2t_m} \quad (2)$$

Зная начальную температуру нагретой пластины, температуру ее через некоторое время τ после введения в почву, а также массу и теплоемкость пластины, можно определить количество тепла θ , отданного пластиной почве.

С другой стороны, то же количество тепла Q может быть вычислено, исходя из повышения температуры почвы θ , его объемной теплоемкости $c\gamma$ и площади пластины s (c — удельная теплоемкость, γ — плотность почвы).

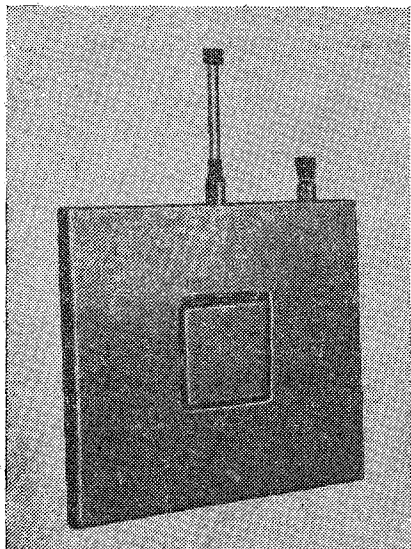


Рис. 1. Общий вид прибора.

климатических явлений (заморозки, вечная мерзлота), на местах полезен прибор без всякого электрического оборудования (рис. 1).

Такое оборудование бывает крайне трудно приобрести на местных станциях. Кроме того оказывается невозможным зарядить аккумуляторы в полевых условиях. Наконец, часто отсутствует квалифицированный состав для организации и производства относительно сложного в техническом отношении опыта. В свете этих замечаний представляет интерес упрощенный принцип мгновенного источника.

В почву вкапывается раз навсегда коробка размером $15 \times 18 \times 0,5$ см. Коробка сделана из тонкой (0,5 — 0,3 мм) красной меди и оканчивается сверху эбонитовым наконечником-трубочкой.

В нужный момент через эту трубочку наливается теплая вода примерно 60° (знание температуры воды не необходимо). Далее отверстие трубочки закрывается пробкой. На некотором расстоянии (от 3 до 5 см) от центра пластины в почве помещен ртутный термометр, фиксирующий повышение температуры в точке, получающееся от мгновенного источника, каковым является горячая пластина. По сути дела, этот опыт ничем не отличается от электрической схемы прибора. Роль тока играет теплая вода. Принцип мгновенности здесь осуществляется в такой же мере, как при нагревании пластины током. Большой тепловой импульс как в том, так и в другом случае сообщается пластине в первое мгновение. В дальнейшем происходит остывание ее, которое в обоих случаях определяется свойствами почвы и тепловой инерцией пластины. В точке x_m получается кривая нагревания (во времени), проходящая через максимум; момент времени, соответствующий этому максимуму, равен t_m и искомое $K = \frac{x_m^2}{2t_m}$.

По окончании опыта вода из коробки извлекается с помощью резиновой трубочки и резиновой груши. При избранных размерах коробки в центре имеет

$$Q = \int_{-\infty}^{+\infty} c\gamma s\theta dx \quad (3)$$

откуда

$$\theta = \frac{Q}{\sqrt{2\pi kt\gamma cs}} e^{-\frac{x^2}{4Kt}} \quad (4)$$

Подставляя значение Q , полученное из опыта, получаем значение $c\gamma$

$$\ln c\gamma = \ln Q - \ln \theta - \frac{x^2}{4Kt} - \frac{1}{2} \ln 2\pi Kt - \ln S. \quad (5)$$

Величина K находится из формулы (2); найдя $c\gamma$ можно из уравнения $Kc\gamma = \lambda$ определить теплопроводность почвы λ .

Полевой прибор для определения термических характеристик почвы

В условиях поля, когда необходимы массовые, быстрые определения, в частности, при всевозможных экспедиционных обследованиях больших площадей, а также при изучении ряда микро-

место однородный поток и растекание тепла в бока не оказывает влияния на результат.

Удобство прибора состоит в том, что он дает возможность делать два опыта (с двух сторон симметрично помещаются в почве по одному термометру). Величина поверхности обуславливает концентрированный мощный тепловой поток при невысокой температуре воды. Так например, достаточно создать разность температур в 15° между почвой и коробкой, чтобы получить ощутительные показания термометра. Наконец употребление прибора не связано с нарушением структуры. Самым же ценным качеством прибора является возможность исследования почв при отрицательных температурах. Ни один из известных методов не обладает этим свойством. Для этой цели необходимо вместо воды наливать в коробку охлаждающую смесь и пользоваться другим решением (интеграл ошибок Гаусса).

Для измерения данным прибором других характеристик, λ и $c\gamma$ следует его видоизменить таким образом: коробка делается составной (рис. 2), центральная коробка А имеет площадь в $5 \times 5 \text{ см}^2$. Эта коробка отделена воздушным зазором от „защитной“ внешней коробки, окружающей центральную. Соединяются обе коробки в двух местах эбонитовыми перетяжками: В верхней части внутренняя коробка имеет эбонитовую трубочку. Последняя проходит через внешнюю защитную коробку и выходит наружу.

Опыт ведется так: вся система закапывается в почву, через отверстие в эбонитовую трубочку наливается из пробирки ровно столько воды, сколько входит в центральную коробку ($5 \times 5 \times 0,5 = 12,5 \text{ г}$). Затем быстро вставляется термометр через эту трубочку так, что его чувствительная часть приходится на центр всей системы. Термометр снабжен резиновой пробкой, которая надета на нем. Последняя при погружении термометра в центральную коробку закрывает собой отверстие центральной коробки, входя в эбонитовую трубочку между коробками. Затем в другое отверстие, находящееся также сверху, но ближе к краю, наливается та же вода, которая теперь попадает во внешнюю коробку. Учет последней в весовом отношении не обязателен (надо лишь следить за тем, чтобы вода более или менее полностью заполнила защитную коробку).

Через некоторое время после начала работы прибора, в момент t_1 , например, фиксируем показание термометра в центре системы θ_1 , и далее, через некоторый промежуток времени, в момент t_2 , снова отмечаем показание термометра θ_2 . По охлаждению воды в центральной коробке, зная массу и теплоемкость ее, находим согласно формулам (4) выражение для $c\gamma$. Так как величина k получается на этом приборе из максимума кривой нагревания (в любой точке в почве), то получается возможность нахождения всех термических характеристик.

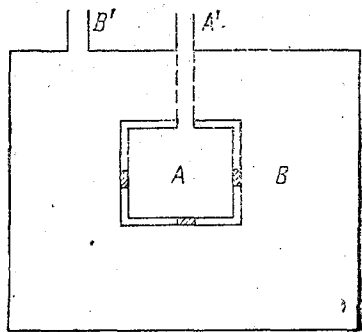


Рис. 2. Схема прибора.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. А. Михельсон. Отчетные доклады научных учреждений Тимиряз. с.-х. акад. за 1925 г. изд. Тех. А. 1926.
2. А. В. Куртнер и А. Ф. Чудновский. ЖТФ № 11, 1938.
3. В. В. Богомолов и А. Ф. Чудновский. ЖТФ № 14, 1939.

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ОБЛАКОВ ПО НАЗЕМНЫМ ДАННЫМ

Точное определение высоты уровня конденсации по наземным данным представляет большой практический и теоретический интерес. Для этой цели существуют несколько формул, основанных на теоретических соображениях или эмпирических данных.

В настоящей работе приводятся результаты сравнения высот, полученных вычислением по наземным данным с фактическими высотами.

Вычисление велось по формулам Ферреля, Ипполитова и Лайхмана.

Формула Ферреля — наиболее распространенная

$$H = 122(t - \tau), \quad (1)$$

где H — высота облаков, t — температура воздуха у земли (в метеорологической будке) и τ — температура точки росы. Эта формула выведена теоретически как уровень начала конденсации в адиабатически поднимающемся воздухе, с учетом расширения его при поднятии. Формула Ферреля годна для конвективных облаков. Для расчетов по этой формуле, кроме температуры воздуха, нужно было знать температуру точки росы, которая находилась по температуре и относительной влажности с помощью психрометрических таблиц.

Формула Ипполитова — эмпирическая — связывает высоту облаков с относительной влажностью f у земли и имеет весьма простой вид:

$$H = 22(100 - f), \quad (2)$$

причем для кучевых облаков и влажности меньше 50% коэффициент брался, по рекомендации автора, не 22, а 24.

Формула Лайхмана, выведенная на основании наиболее вероятного распределения температуры и влажности с высотой, если известны их значения у поверхности земли, так же как и формула Ипполитова связывает высоту облачности с наземной относительной влажностью, но имеет несколько более сложный вид, а именно:

$$H = A \lg \frac{100(1 + \alpha)}{f} \quad \text{или} \quad H = A(B - \lg f), \quad (3)$$

где A и B — постоянные, от правильного определения которых зависят результаты дальнейших вычислений.

Из формулы видно, что

$$B = (\lg f)_{H=0} \quad \text{и} \quad A = - \frac{dH}{d \lg f}, \quad (4)$$

следовательно их легко можно определить графически, если построить график с осями H и $\lg f$.

После того, как значения постоянных найдены и подставлены в формулу, вычисление по ней высот не представляет никаких трудностей.

Вышеприведенные формулы применимы для всех случаев облаков, связанных со свойствами нижележащих воздушных слоев, т. е. либо для облаков, вызванных турбулентным перемешиванием, либо для облаков, пришедших со стороны, но продолжавшихся в данной местности не менее 1—2 часов, т. е. время достаточное для того, чтобы благодаря вертикальному переносу, установилось некоторое равновесное состояние между облаком и приземным воздухом. Для обработки был использован материал новосибирских шаропилотных подъемов, представленный Е. С. Селезневой и отобранный в соответствии с вышеуказанными условиями. Весь материал был разбит по типу облачности. Кроме того, внутри каждой группы была произведена разбивка по сезонам.

Из наземных данных в этом материале имелись наблюдения температуры, относительной влажности и ветра в момент выпуска шара-пилота. Скорость ветра являлась основным критерием наличия вертикального перемешивания. Влажность и температура использовались в формуле для вычисления высот.

Результаты подсчетов по всем этим формулам приведены в табл. 1—4. В них H_1 — высоты, полученные по формуле Ферреля, H_2 — по формуле Ипполитова и H_3 — по формуле Лайхтмана, ΔH — разность между высотой, полученной по формуле и фактической, полученной по вхождению шара-пилота в облако.

St и Frst. Весна

Таблица 1

Дата	t°	$f\%$	H высота	$H_1 = 122 (t - \tau)$			$H_2 = 22 (100 - f)$			$H_3 = 5335 (2,029 - \lg f)$		
				H_1	ΔH_1	$\frac{\Delta H_1}{H}$	H_2	ΔH_2	$\frac{\Delta H_2}{H}$	H_3	ΔH_3	$\frac{\Delta H_3}{H}$
10/IV	2,7	80	690	378	-312	45	440	-250	36	672	-18	3
11/V	-5,7	75	770	451	-319	41	550	-220	29	822	+51	7
16/III	-0,5	90	400	183	-217	54	220	-180	45	400	0	0
26/III	-7,4	82	600	318	-282	46	396	-204	34	614	+13	2
5/IV	1,4	91	440	171	-269	61	198	-242	55	373	-67	15
17/III	0,4	73	850	524	-326	38	594	-256	30	886	+35	4
18/III	0,1	84	620	293	-327	52	352	-268	43	560	-60	10
19/III	-0,7	84	530	293	-237	44	352	-178	34	560	+30	6
20/III	0,4	87	550	232	-318	57	286	-264	48	475	-76	14
21/III	-4,3	94	310	110	-200	64	132	-178	58	299	-12	4
21/III	-4,0	92	320	134	-186	58	176	-144	45	347	+26	8
21/III	-2,9	88	460	208	-252	54	264	-196	43	453	-7	2
22/III	-4,9	94	270	110	-160	59	132	-138	51	299	+28	10
22/III	-2,1	89	400	195	-205	51	242	-158	40	427	+26	7
1/IV	-3,9	79	620	378	-242	39	462	-158	26	699	+79	13
1/IV	0,8	90	570	183	-387	67	220	-350	61	400	-170	30
14/IV	0,8	78	620	415	-205	33	484	-136	22	731	+111	18
24/IV	6,1	84	580	305	-275	47	352	-228	39	560	-20	3
27/V	13,6	85	530	305	-225	42	330	-200	38	532	+3	0
14/III	-3,4	89	460	183	-277	60	242	-218	47	427	-34	7
20/III	-8,8	78	600	390	-210	35	484	-116	19	731	+131	22
23/III	-2,0	84	560	293	-267	47	352	-208	37	560	0	0
28/IV	3,4	95	280	85	-195	69	110	-170	61	272	-8	3
4/IV	2,1	87	550	244	-306	55	286	-264	48	475	-76	14
Σ абс. величин					6 199	1 218		4 924	989		1 081	202
n					24	24		24	24		24	24
средн.					258	51 ⁰ / ₀		205	41 ⁰ / ₀		45	8 ⁰ / ₀

Для вычисления высот по формуле Лайхтмана предварительно были найдены значения постоянных. На рис. 1 показано определение их для слоистых облаков весной в Новосибирске. По одной оси отложены высоты, по другой — логарифмы относительной влажности. Как видно на рис. 1, точки с небольшим разбросом легли вдоль прямой. Эта прямая пересекается с осью $\lg f$ в точке $\lg f = 2,029$, а так как $(\lg f)_{H=0} = B$, то получаем $B = 2,029$.

Таблица 2

St и Frst. Лето

Дата	t°	$f\%$	H высота	$H_1 = 122 (t - \tau)$			$H_2 = 22 (100 - f)$			$H_3 = 4972 (2,028 - \lg f)$		
				H_1	ΔH_1	$\frac{\Delta H_1}{H}$	H_2	ΔH_2	$\frac{\Delta H_2}{H}$	H_3	ΔH_3	$\frac{\Delta H_3}{H}$
21/VI	11,8	82	620	354	-266	43	396	-224	36	569	-51	8
12/VIII	14,7	80	560	415	-145	26	440	-120	21	622	+62	11
20/VIII	14,3	76	530	512	-18	34	528	-2	0	736	+206	39
21/VIII	14,2	90	430	195	-235	55	220	-210	49	368	-62	14
22/VIII	12,0	92	320	159	-161	50	176	-144	45	318	-2	0
22/VIII	13,6	87	560	256	-304	54	286	-274	49	438	-122	22
31/VIII	14,0	83	480	342	-138	29	374	-106	22	542	+62	13
9/VIII	15,5	95	250	98	-155	61	110	-140	56	247	-1	0
Σ абс. знач.				1 419	352		1 220	278		568	107	
n				8	8		8	8		8	8	
средн.				177	440%		152	350%		71	130%	

Таблица 3

St и Frst. Осень

Дата	t°	$f\%$	H высота	$H_1 = 122 (t - \tau)$			$H_2 = 22 (100 - f)$			$H_3 = 5452 (2,027 - \lg f)$		
				H_1	ΔH_1	$\frac{\Delta H_1}{H}$	H_2	ΔH_2	$\frac{\Delta H_2}{H}$	H_3	ΔH_3	$\frac{\Delta H_3}{H}$
11/IX	6,7	94	240	109	-131	55	132	-108	45	294	+54	22
15/IX	5,0	70	880	610	-270	31	660	-220	25	992	+112	13
20/IX	0,0	90	340	171	-169	50	220	-120	35	398	+58	17
29/IX	10,1	94	270	109	-161	59	132	-138	51	294	+24	9
29/IX	6,3	75	750	500	-250	33	550	-200	26	829	+79	11
8/X	-2,0	74	900	488	-412	46	572	-328	36	861	-39	4
27/X	-1,0	82	500	329	-171	34	396	-104	20	616	+116	23
28/X	-4,3	94	260	98	-162	62	132	-128	49	294	+34	13
28/X	-2,5	90	430	171	-259	60	220	-210	49	398	-32	7
28/X	-2,3	93	290	122	-168	58	154	-136	47	332	+42	14
29/X	-1,7	94	240	110	-130	54	132	-108	45	294	+54	23
29/X	-1,6	97	230	49	-181	79	66	-164	71	228	-2	1
30/X	-6,3	83	400	293	-107	27	374	-26	6	589	+189	47
1/XI	0,0	91	460	159	-301	65	198	-262	57	381	-79	17
1/XI	0,1	86	530	256	-274	52	308	-222	42	512	-18	3
4/XI	-6,5	84	560	268	-292	52	352	-208	37	562	+2	0
30/IX	4,3	95	320	85	-235	73	110	-210	66	277	-43	13
29/X	3,3	96	480	73	-407	85	88	-392	82	255	-225	47
6/IX	6,8	81	410	366	-44	11	418	+8	2	649	+239	58
6/IX	11,3	96	260	73	-187	72	88	-172	66	255	-5	2
1/X	4,1	85	480	281	-199	41	330	-150	31	534	+46	10
7/X	6,3	78	740	439	-301	41	484	-256	35	736	-4	0
14/X	2,8	55	1 140	1 000	-140	12	990	-150	13	1 575	+435	38
3/XI	-2,0	96	270	73	-197	73	88	-182	67	255	-15	6
Σ абс. знач.				5 148	1 225		4 202	1 003		1 942	398	
n				24	24		24	24		24	24	
средн.				214	510%		175	420%		81	160%	

Другая постоянная A определялась по наклону прямой. Вычисления велись по формуле:

$$A = - \frac{H_1 - H_2}{\lg f_1 - \lg f_2} \quad (5)$$

Для нашего случая получилось $A = 5335$.

Дата	t°	$f\%$	H высота	$H_1 = 122 (t - \tau)$			$H_2 = 22 (100 - f)$			$H_3 = 5825 (2,000 - \lg f)$		
				H_1	ΔH_1	$\frac{\Delta H_1}{H}$	H_2	ΔH_2	$\frac{\Delta H_2}{H}$	H_3	ΔH_3	$\frac{\Delta H_3}{H}$
16/V	11,0	40	940	1 586	+646	69	1 440	+500	53	2 318	+1 378	146
17/V	12,6	40	2 250	1 623	-627	28	1 440	-810	36	2 318	+68	3
22/V	18,2	67	950	756	-194	20	792	-158	17	1 014	+64	7
24/V	20,1	44	1 230	1 537	+307	25	1 314	+114	9	2 080	+850	69
27/V	7,1	49	1 810	1 220	-590	33	1 224	-586	32	1 806	-4	0
28/V	10,1	43	2 140	1 464	-676	32	1 368	-772	36	2 138	-2	0
14/VI	11,4	38	2 030	1 684	-346	17	1 488	-542	27	2 447	+417	20
15/VI	10,6	61	1 070	756	-314	29	936	-134	13	1 252	+182	17
21/VI	19,6	46	2 020	1 452	-568	28	1 296	-724	36	1 963	-57	3
26/VI	26,4	50	1 880	1 379	-501	27	1 200	-680	36	1 753	-127	7
13/VI	20,6	49	1 710	1 354	-356	21	1 224	-486	28	1 806	+96	6
22/VI	18,5	50	1 840	1 293	-547	30	1 200	-640	29	1 753	-87	5
27/VII	18,0	62	1 060	902	-158	15	912	-148	14	1 212	+152	15
30/VII	21,7	59	2 100	1 027	-1 073	51	984	-1 116	53	1 334	-766	36
15/VIII	13,7	66	2 340	744	-1 596	68	816	-1 524	65	1 049	1 291	55
29/VIII	10,3	52	1 650	1 147	-503	30	1 152	-498	30	1 654	+4	0
Σ абс. знач.					9 002	523		9 432	514		5 545	385
n					16	16		16	16		16	16
средн.					563	330/0		589	320/0		346	240/0
Σ абс. знач.					8 356	454		8 932	461		4 167	243
n					15	15		15	15		15	15
средн.					557	30		596	310/0		278	160/0

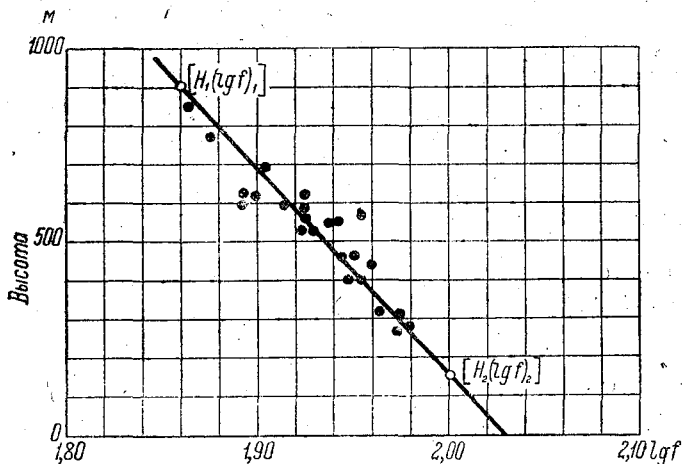


Рис. 1.

Следовательно, для вычисления высот слоистых облаков в весеннее время в районе Новосибирска, получилась формула:

$$H = 5335 [2,029 - \lg f] \tag{6}$$

Аналогичным путем были найдены значения A и B для других облаков и сезонов. Были получены следующие значения:

	St и Frst			Си и Сб
	Весна	Лето	Осень	Весна и лето
A	5 335	4 972	5 452	5 825
B	2,029	2,028	2,027	2,000

¹ Вторая графа осреднений относится к той же таблице, но не содержащей случая 16/V, о чем оговорено в тексте.

Так как случаев С_и и С_б было довольно мало, пришлось объединить вместе все имевшиеся случаи (весна и лето).

Также, пожалуй, недостаточно случаев летних St и Frst, поэтому низкое значение *A* для лета может быть обусловлено малочисленностью этих случаев.

Как видно из таблиц для St и Frst (табл. 1—3), самую большую ошибку в определении высот дает формула Ферреля. Среднее значение $\frac{\Delta H_1}{H} = 50\%$, причем все ΔH имеют один знак (при суммировании и осреднении ΔH знак этот не учитывался — бралось абсолютное значение).

Формула Ипполитова дает меньшую ошибку. Среднее значение $\frac{\Delta H_2}{H} = 40\%$, причем знак ΔH_2 как и ΔH_1 почти во всех случаях отрицателен.

По формуле же Лайхтмана средняя относительная ошибка значительно меньше и составляет в среднем 13%, причем положительные и отрицательные значения ΔH встречаются одинаково часто.

Для кучевых облаков (табл. 4) результат несколько другой. Здесь $\frac{\Delta H_1}{H}$ и $\frac{\Delta H_2}{H}$ одного порядка 32 — 33%.

Формула Лайхтмана снова дает наилучшую сходимость с фактическими данными. Средняя ошибка — 24%.

Здесь обращает на себя внимание первый случай — подъем 16 мая, в котором явная неувязка со всем остальным материалом. Действительно, если сравнить его со следующим случаем, то видно, что относительная влажность в обоих случаях одинакова — 40%, температура почти одинакова, а высота облаков в первом случае почти в 2½ раза меньше, чем во втором. Повидимому, это было случайное облако, не удовлетворяющее условиям, на которые рассчитаны эти формулы, и, вероятно, правильнее будет выбросить этот случай из рассмотрения. Тогда ошибка в определении высоты снизится для H_1 и H_2 до 30 — 31%, а для H_3 до 16% (нижние числа в табл. 4). Ошибка того же порядка, как и для слоистых облаков.

Среднее значение постоянной *B* в формуле Лайхтмана, т. е. значение логарифма влажности, обуславливающей начало конденсации, равно 2,029. Следовательно, влажность при начале конденсации должна доходить до 107%. Все высоты, полученные по формуле Ипполитова, явно занижены. Поэтому мы внесли некоторое исправление в формулу Ипполитова, в соответствии с данными, полученными при работе с формулой Лайхтмана, а именно — придали формуле Ипполитова вид:

$$H = 22(107 - f) \quad (7)$$

Результат, полученный вычислением по этой исправленной формуле Ипполитова, приведен в сводной табл. 5, в графе H_4 среднее значение $\frac{\Delta H}{H}$ для St с 40% для формулы Ипполитова в обычном виде падает до 13%. Для С_и и С_б разница не так значительна, но также бесспорна (24% вместо 31%).

Таблица 5

St и Frst

Средние результаты вычисления высот облаков по различным формулам

Сезон	H факт.-чек.	H_1 средн.	ΔH_1	$\frac{\Delta H_1}{H}$	H_2 средн.	ΔH_2	$\frac{\Delta H_2}{H}$	H_3 средн.	ΔH_3	$\frac{\Delta H_3}{H}$	H_4 средн.	ΔH_4	$\frac{\Delta H_4}{H}$	H_5 средн.	ΔH_5	$\frac{\Delta H_5}{H}$
Весна	524	266	258	51%	319	205	41%	524	45	8%	473	58	11%	510	46	9%
Лето	469	291	277	44%	316	152	35%	480	71	13%	470	63	12%	507	78	15%
Осень	474	260	214	51%	300	175	42%	517	81	16%	454	65	15%	500	79	19%
Лето и весна	1 739	1 527	557	30%	1 158	596	31%	1 705	274	16%	1 326	458	24%	1 885	274	16%

Для низких облаков, как видно из табл. 5, формула Лайхмана и исправленная формула Ипполитова дают одинаковую точность определения высот; для более высоких же облаков явное преимущество дает формула Лайхмана.

Единственная трудность вычисления высот по формуле Лайхмана — определение постоянных A и B , которые различны для разных географических районов и зависят от времени года. Неумелое определение их может привести к значительным систематическим ошибкам. Поэтому было интересно выяснить, какой результат получится, если в формулу подставить средние значения этих постоянных и вычислять по ней высоты всех облаков, независимо от сезона, типа облачности и места наблюдения. Вычисленные таким образом высоты даны в табл. 5 в графе H_5 .

Результат можно считать очень хорошим. Ошибка увеличилась от такой замены постоянных всего на 2—3% для слоистых облаков, а для кучевых осталась даже без изменения.

Таким образом, для мест, где почему-либо нет возможности определять свои постоянные, можно без особенного ущерба пользоваться этой формулой в ее „универсальном“ виде:

$$H = 5253 (2,028 - \lg f) \quad (8)$$

и, таким образом, вычисление высот сведется к очень простым действиям.

Все вышеизложенное говорит о преимуществе формулы Лайхмана перед другими. Для малых высот близкий результат дает и исправленная формула Ипполитова, но с увеличением высоты растет и ошибка.

Это объясняется тем, что логарифмика только на небольшом интервале может быть аппроксимирована линейной функцией, даже при удачном выборе коэффициентов, что как раз имеет место в исправленном варианте Ипполитова. К этому пришел впоследствии и сам Ипполитов, заменив одну прямую двумя, с различными коэффициентами в разных интервалах.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Лайхтман Д. Л. О волновых движениях на поверхности раздела в атмосфере	3
Малкин Н. Р. О распределении и изменении температуры на различных высотах под влиянием лучистого и турбулентного теплообмена	11
Швец М. Е. К вопросу о влиянии теплового излучения на температуру воздуха	24
Лайхтман Д. Л. О точном методе определения теплопроводности почвы	36
Чудновский А. Ф. Прибор для одновременного определения коэффициентов теплопроводности, температуропроводности и объемной теплоемкости почвогрунтов в естественных условиях	42
Честная И. И. Об определении нижней границы облаков по наземным данным	46

Отв. редактор *Р. Э. Соловейчик.*

Техн. редактор *Л. Б. Кононова.*

Сдано в набор 16/IV 1947 г.

Подписано к печати 12/VI 1947 г.

Изд. № 35.

Индекс М-Л-35.

Бумага 70 × 105 см.

Зн. в 1 печ. л. 70 000.

Уч. изд. л. 5,6.

Печ. л. 3 1/4.

Тираж 600 экз.

Цена 6 руб.

Гидрометеиздат.

г. Ленинград 1947 г.

МО 2472

Заказ № 584.