

06  
771

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

---

147312

ПРОВЕРЕНО  
ПРОВЕРЕНО  
1960г.

# ТРУДЫ

## ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

имени А. И. Воейкова

ВЫПУСК 98

ВОПРОСЫ АВИАЦИОННОЙ МЕТЕОРОЛОГИИ

Под редакцией  
д-ра физ.-мат. наук

М. И. ЮДИНА

БИБЛИОТЕКА  
ЛЕНИНГРАДСКОГО  
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА



---

ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД · 1959

### АННОТАЦИЯ

В сборнике освещается ряд вопросов авиационной метеорологии: методика определения характеристик турбулентности атмосферы по данным записей колебаний самолета, связь колебаний с метеорологическими условиями, вероятность возникновения болтанки самолета в нескольких отдельных пунктах на территории Советского Союза. Рассматриваются вопросы горизонтальной и вертикальной протяженности облаков.

Рассчитан на специалистов в области аэрологии и метеорологического обслуживания авиации. Представляет интерес для специалистов аэродинамиков и аэронавигаторов.

## **БОКОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ САМОЛЕТА, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ВЛИЯНИЕМ ПОРЫВОВ ВЕТРА**

### **1. Постановка задачи**

В настоящей работе рассмотрены боковые колебания самолета в полете с точки зрения влияния порывов ветра. Конечно, ветер — не единственный фактор, определяющий отклонение самолета от заданного режима полета, но есть все основания предполагать, что неоднородность набегающего потока, наличие турбулентных вихрей в атмосфере, соизмеримых с размерами самолета, являются существеннейшей причиной подобного рода отклонений. В значительной мере такие отклонения зависят от профессиональных навыков и личных свойств пилота (быстрота реакции и др.). Учет этих влияний очень сложен, если только вообще возможен при современном состоянии науки. Естественно поэтому ограничиться рассмотрением случая с идеальным пилотом или просто рассмотреть полет без вмешательства летчика, что здесь и будет сделано.

Влияние неравномерности работы мотора на изменение параметров кинематики летящего самолета при современном состоянии техники практически почти не сказывается.

Коль скоро порывы ветра являются определяющим фактором для отклонений самолета от установленного режима полета, то, зная характеристики возмущенного движения самолета, можно определить соответствующие характеристики порывов ветра.

Подобный подход к использованию данных о колебаниях самолета в полете для определения ветровых характеристик атмосферы известен довольно давно. К рассмотрению обычно привлекались элементы продольных колебаний самолета, что позволяло с той или иной степенью точности определять скорость вертикальных движений в атмосфере. Как известно, продольные колебания самолета обусловлены не только вертикальными порывами ветра, но также и горизонтальными.

Вследствие неизотропности обтекания самолета влияние горизонтальных порывов сказывается в значительно меньшей мере, поэтому при решении обратной задачи — восстановление поля порывов ветра по записям ускорений центра тяжести самолета или какой-либо другой характеристики возмущенного движения самолета — не представляется возможным определить сколько-нибудь надежно горизонтальные порывы ветра при технике современного приборостроения.

Как будет видно из дальнейшего, при рассмотрении боковых колебаний самолета наблюдается обратная картина, а именно основную роль в создании таких колебаний играют горизонтальные порывы ветра

(боковые по отношению к самолету) и заметно меньшую — вертикальные. Поэтому можно определять горизонтальные порывы ветра по характеристикам боковых колебаний самолета. С этой целью в настоящей работе будут прежде всего выведены уравнения, связывающие боковые колебания самолета с порывами ветра.

## 2. Дифференциальные уравнения боковых колебаний самолета

При выводе дифференциальных уравнений боковых колебаний самолета воспользуемся обычными гипотезами о характере аэродинамического сопротивления самолета в полете. В первую очередь это относится к гипотезе стационарности, согласно которой сопротивление самолета не зависит от предыстории движения, а целиком определяется заданием элементов движения относительно воздуха в данный момент времени.

Второй гипотезой является предположение о зависимости боковых сил и моментов только от элементов бокового движения самолета и полной независимости их от элементов движения продольной группы. Это положение мы применим как ко всему самолету в целом, так и к отдельным симметричным узлам конструкции: крыльям, фюзеляжу, хвостовому оперению.

Так как порывы ветра вызывают малое отклонение элементов движения самолета от состояния установившегося режима полета и нас в дальнейшем будут интересовать характеристики именно этих отклонений, то мы ограничимся рассмотрением приближенных (линеаризованных) уравнений такого движения. В качестве основного движения, на которое накладываются малые возмущения, мы примем прямолинейный, близкий к горизонтальному полет. Тогда благодаря указанным особенностям зависимости аэродинамических сил и моментов от элементов движения самолета линеаризованные уравнения распадаются на две независимые системы, одна из которых содержит элементы движения продольной группы, а вторая — поперечной. Поэтому мы непосредственно составим уравнения боковых колебаний, содержащие только элементы движения поперечной группы.

Прежде всего остановимся на координатных осях. В рассмотрение будут введены две системы осей:

а) неподвижная система, связанная с землей. Ось  $OX_1$  совпадает с направлением воздушной скорости невозмущенного полета самолета, который, как было сказано выше, предполагается равномерным и прямолинейным, весьма близким к горизонтальному. Ось  $OZ_1$  направлена вертикально вниз, ось  $OY_1$  — вправо от направления полета;

б) система осей  $XYZ$ , связанная с самолетом. Начало координат этой системы находится в центре тяжести самолета; в невозмущенном движении координатные оси этих систем совпадают. Отметим, что оси  $XYZ$  являются главными осями инерции, что несколько упрощает запись уравнений.

Условимся сразу же и о правиле отсчета углов. За положительное направление углов и моментов принято направление против часовой стрелки. Угол скольжения  $\beta$  положителен, если вектор скорости отклонен влево от плоскости симметрии самолета. Угол атаки положителен в том случае, когда проекция вектора скорости самолета на плоскость симметрии отклонена от оси  $X$  к оси  $Z$ .

Уравнения боковых движений самолета общеизвестны, поэтому на их выводе мы останавливаться не будем:

$$\left. \begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= Y_1 \\ A \frac{dp}{dt} + (C - B) qr &= L \\ C \frac{dr}{dt} + (B - A) pq &= N \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $m$  — масса самолета,  $v$  — проекция путевой скорости центра тяжести самолета на ось  $OY$  (связанную с землей),  $t$  — время,  $A, B, C$  — моменты инерции самолета относительно связанных осей  $OX, OY$  и  $OZ$ ,  $p, q, r$  — проекции вектора угловой скорости самолета на те же связанные оси,  $Y_1$  — проекция равнодействующей вектора внешних сил, влияющих на самолет. Она равна проекции равнодействующей аэродинамических сил, так как составляющая силы тяжести по этой оси равна нулю,  $L$  и  $N$  — проекции вектора момента аэродинамических сил на связанные оси.

Особенностью уравнений (1) по сравнению с обычной формой записи является то, что первое уравнение записано в неподвижных осях, а не в связанных с самолетом, как это обычно делается.

Вообще говоря, в приведенные уравнения следовало бы добавить еще члены, содержащие угловую скорость земли (кориолисовы ускорения), но, как показали соответствующие оценки, их влиянием можно пренебречь.

В современной аэродинамике достаточно хорошо изучены проекции равнодействующей аэродинамических сил на связанные оси. Поэтому нам будет удобно выразить проекции аэродинамических сил на неподвижные оси через их проекции на связанные оси. Воспользовавшись известными соотношениями, связывающими косинусы углов между осями введенных координатных систем с углами, характеризующими положение самолета в пространстве (углы тангажа, рыскания и крена), первое уравнение перепишем в виде

$$m \frac{dv}{dt} = X \sin \psi \cos \vartheta + Y (\cos \psi \cos \Phi + \sin \psi \sin \Phi \sin \vartheta) + \\ + Z (-\cos \psi \sin \Phi + \sin \psi \cos \Phi \sin \vartheta),$$

где  $X, Y, Z$  — проекции равнодействующей аэродинамических сил на оси, связанные с самолетом,  $\vartheta$  — угол тангажа,  $\psi$  — угол рыскания,  $\Phi$  — угол крена.

Линеаризируем наши уравнения, помня, что в установившемся режиме полета  $\vartheta_0 = \psi_0 = \Phi_0 = 0, p_0 = q_0 = r_0 = 0$ .

$$\left. \begin{aligned} m \frac{d\Delta v}{dt} &= \Delta Y + mg \Delta \Phi \\ A \frac{d\Delta p}{dt} &= \Delta L \\ C \frac{d\Delta r}{dt} &= \Delta N \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

При этом использовались соотношения основного режима полета

$$Y_0 = 0, \quad L_0 = N_0 = 0, \quad Z_0 = -mg.$$

Три вторых равенства, характеризующие невозмущенный режим, очевидны. Первое становится также вполне естественным, если вспомнить, что основной полет происходит без скольжения относительно воздуха.

Кроме того, предполагалось, что лобовое сопротивление  $X_0 = G \sin \Theta$  ( $\Theta$  — угол планирования) является также малой величиной первого порядка малости, поэтому член  $X_0 \Delta \psi$  как величина второго порядка малости во внимание не принимался.

Для самолетов с большим лобовым сопротивлением, для которых весьма пологое планирование невозможно, следует рассматривать моторный полет. Рассмотрение моторного полета не представляет никаких принципиальных трудностей, так как силы и моменты, действующие на самолет, не приобретают при такой постановке задачи дополнительных зависимостей от новых аргументов. Влияние работы мотора скажется только на численных значениях коэффициентов в разложениях компонентов аэродинамических сил и моментов (подробнее об этом в [1]), поэтому для того, чтобы не загромождать работу дополнительными расчетами, не связанными с основным направлением статьи (оценкой влияния воздействия порыва ветра), мы ограничимся рассмотрением планирования самолета с малым лобовым сопротивлением.

Для простоты в дальнейшем условимся опускать значок  $\Delta$  у возмущений элементов движения самолета (например, вместо  $\Delta \psi$  будем писать  $\psi$ , вместо  $\Delta v$  —  $v$  и т. д.).

### 3. Приращения аэродинамических сил и моментов в возмущенном движении

Приращения аэродинамических сил и моментов в возмущенном движении с достаточной степенью точности могут быть представлены линейными функциями малых возмущений. Это значит, что, разлагая упомянутые силы и моменты в ряд по малым параметрам, можно ограничиться первыми членами разложения.

В обычных аэродинамических задачах производные от сил и моментов по различным параметрам кинематики самолета разбивают на два класса: статические и вращательные производные.

Первая группа имеет место в случае чисто поступательного движения, к ней относятся производные по  $u$ ,  $v$  и  $w$  (для боковых колебаний это будет  $\frac{\partial Y}{\partial v}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial v}$  и  $\frac{\partial N}{\partial v}$ ).

Вторая группа появляется при наложении на упомянутое поступательное движение поворотов самолета относительно осей, связанных с землей. К этой группе относятся производные по  $p$ ,  $q$  и  $r$  (в случае боковых колебаний это будут  $\frac{\partial Y}{\partial p}$ ,  $\frac{\partial Y}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial p}$ ,  $\frac{\partial L}{\partial r}$ ,  $\frac{\partial N}{\partial p}$  и  $\frac{\partial N}{\partial r}$ ).

Набегающий поток стилизуется обычно как однородный, поэтому в случае поступательного движения самолета вариации относительных скоростей  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  и  $\Delta w$  считаются одинаковыми для обоих крыльев, фюзеляжа и хвостового оперения (учет возмущенности потока, обтекающего оперение, производится обычным образом).

Такая постановка задачи не вызывает сомнений в случае продувки самолета в аэродинамических трубах, где размеры вихрей, содержащихся в набегающем потоке, малы по сравнению с размахом крыльев и поток практически можно считать однородным. При полете в реальной атмосфере неоднородности набегающего потока делают вполне

соизмеримыми с линейными размерами самолета. Вследствие этого в различных участках пограничного слоя самолета могут возникать существенные разности воздушных скоростей, что может вызвать дополнительные силы и моменты, существенно искажающие кинематику самолета. Простейшим примером может служить разность вертикальных скоростей потока относительно самолета на левом и правом крыльях, что приведет к различию подъемных сил крыльев и возникновению дополнительного момента крена, создающего угрозу опрокидывания самолета относительно оси  $OX$ .

При анализе влияния порывистости ветра на полет роль этого фактора должна быть выяснена в первую очередь. С этой целью приращения аэродинамических сил и моментов запишем с учетом разности значений ветра на различных участках пограничного слоя самолета. Разобьем для этого пограничный слой самолета на такие участки, аэродинамические характеристики которых были бы достаточно хорошо известны и в то же время, чтобы центры давления этих участков отстояли друг от друга по возможности дальше, так как на очень близко расположенных участках исследуемый эффект будет выражен слабо.

За такие участки для нашей задачи примем фюзеляж самолета, вертикальное оперение и оба крыла (каждое отдельно). Как известно, и в обычной задаче о сопротивлении самолета равнодействующие аэродинамических сил и моментов подсчитываются как сумма сил и моментов от перечисленных элементов конструкций самолетов. Только там отклонения воздушной скорости самолета от установившегося режима основного невозмущенного движения принимаются одинаковыми на всех этих частях, а здесь эти возмущения полагаются различными. Обозначим каждый из выделенных участков определенным индексом. Так, все величины, относящиеся к левому крылу, будут иметь индекс 1, к правому — 2, к фюзеляжу — 3 и к хвостовому оперению — 4.

Влияние различных элементов конструкции самолета на общую величину той или иной силы весьма различно. Одни влияют очень сильно и, по сути дела, определяют собой ту или иную силу или момент. Другие, наоборот, почти не оказывают никакого влияния и поэтому без большой погрешности могут быть опущены.

В дальнейшем мы будем учитывать влияние только определяющих узлов конструкции и отбрасывать малосущественные детали, что хотя и сделает задачу несколько более грубой, зато весьма существенно облегчит громоздкие расчеты и анализ результатов.

Роль перечисленных выше участков пограничного слоя самолета в создании равнодействующих аэродинамических сил и моментов качественно достаточно хорошо известна и подтверждена количественно для различных типов конструкции.

С весьма большой степенью точности можно принять, что боковая сила  $Y$  создается только за счет фюзеляжа и вертикального оперения. Роль крыльев при этом ничтожно мала. Если вспомнить, что в обычных расчетах зависимостью боковой силы от компонентов угловой скорости пренебрегается, то приращение боковой силы  $\Delta Y$  может быть записано в виде

$$\Delta Y = \frac{\partial Y_3}{\partial \beta} \beta_3 + \frac{\partial Y_4}{\partial \beta} \beta_4, \quad (3)$$

где  $\beta$  означает угол скольжения.

В условиях неподвижного воздуха угол скольжения легко выражается через боковой компонент воздушной скорости (в данном случае равной путевой)

$$\beta = \frac{v}{V},$$

где  $V$  — скорость полета самолета.

В случае движущегося воздуха (наличие ветра) угол скольжения  $\beta$ , как это следует из рис. 1, связан с путевой скоростью  $v$  при выбранном нами правиле знаков следующим соотношением:

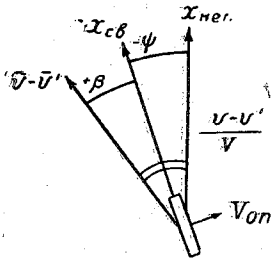


Рис. 1.

$$\beta = \psi - \frac{v - v'}{u_0 - u_0'}, \quad (4)$$

где  $v'$  — значения бокового компонента ветра,  $u_0 - u_0' = V$  — воздушная скорость самолета.

Подставляя выражение (4) в (3) и используя введенные ранее индексы, получим

$$\Delta Y = \frac{\partial Y_3}{\partial \beta} \left( \psi - \frac{v - v_3'}{V} \right) + \frac{\partial Y_4}{\partial \beta} \left( \psi - \frac{v - v_4'}{V} \right). \quad (5)$$

Перейдем к составлению выражения для приращения момента крена.

Момент крена определяется главным образом моментом от крыльев. Моменты от других частей самолета — фюзеляжа и хвостового оперения — оказываются несущественными, поскольку их центры давления расположены очень близко к оси  $OX$ .

$$\Delta L = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \beta} (\beta_1 + \beta_2) + \frac{\partial L}{\partial p} p + \frac{\partial L}{\partial r} r. \quad (6)$$

Здесь зависимость момента от компонентов угловой скорости весьма существенна, поэтому появились члены  $\frac{\partial L}{\partial p} p + \frac{\partial L}{\partial r} r$ . Зависимость моментов крена обоих крыльев от скольжения принимается естественно одинаковой.

$$\frac{\partial L_1}{\partial \beta} = \frac{\partial L_2}{\partial \beta} = \frac{1}{2} \frac{\partial L}{\partial \beta},$$

где  $L$  — суммарный момент крена.

В выражении (4) учтены разности значений только боковых компонентов ветра. К этому следует добавить члены, обусловленные различием вертикальных компонентов ветра на крыльях. Вследствие появления вертикального компонента скорости воздуха угол атаки изменится на величину  $\Delta \alpha$ . Воспользовавшись соотношением между приращением угла атаки, с одной стороны, и приращениями параметров кинематики самолета и вертикального компонента ветра, с другой, получим

$$\Delta \alpha = \Delta \vartheta - \frac{w - w'}{V}, \quad (7)$$

где  $\Delta \vartheta$  — приращение угла тангажа,  $w$  — вертикальный компонент путевой скорости центра тяжести самолета.

Выражения для приращения угла атаки на обоих крыльях будут отличаться, очевидно, только индексами у  $w'$ .

Так как при выводе этих уравнений мы полагаем, что координаты центров давления отдельных участков пограничного слоя при пере-



ходе от обтекания однородным потоком к обтеканию неоднородным не изменяются, т. е. плечи сил, дополнительно возникающих за счет названного приращения угла атаки, остаются неизменными, то приращение момента крена за счет разности вертикальных порывов ветра на крыльях будет пропорционально разности приращений угла атаки

$$L_w = \Delta\alpha_1 - \Delta\alpha_2 = \frac{w_1' - w_2'}{V}. \quad (8)$$

Приращение момента крена за счет разности боковых компонентов ветра на крыльях выводится совершенно аналогично с той только разницей, что разность приращений угла атаки в данном случае имеет вид

$$\Delta\alpha_1' - \Delta\alpha_2' = \chi (\beta_1 + \beta_2), \quad (9)$$

где  $\chi$  — угол  $V$ -образности крыльев.

Учитывая все сказанное, выражение для полного приращения момента крена можно переписать

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial \beta} \left( \psi - \frac{v - \frac{v_1' + v_2'}{2}}{V} + \frac{1}{2\chi} \frac{w_1' - w_2'}{V} \right) + \frac{\partial L}{\partial p} p + \frac{\partial L}{\partial r} r. \quad (10)$$

Перейдем к выражению для приращения момента рысканья. Эта проекция полного момента аэродинамических сил создается главным образом за счет влияния вертикального оперения. Кроме того, некоторое влияние оказывают крылья и фюзеляж. Вывод приращения момента рысканья вполне аналогичен выводу приращения момента крена

$$\begin{aligned} \Delta N = & \frac{\partial N_1}{\partial \beta} \left( \psi - \frac{v - \frac{v_1' + v_2'}{2}}{V} + \frac{1}{2\chi} \frac{w_1' - w_2'}{V} \right) + \frac{\partial N_3}{\partial \beta} \left( \psi - \frac{v - v_3'}{V} \right) + \\ & + \frac{\partial N_4}{\partial \beta} \left( \psi - \frac{v - v_4'}{V} \right) + \frac{\partial N}{\partial p} p + \frac{\partial N}{\partial r} r. \end{aligned} \quad (11)$$

#### 4. Безразмерная форма системы уравнений боковых колебаний и ее решение

Подставляя выражения для приращения аэродинамических сил и моментов (5), (10) и (11) в систему (2), получим:

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= \frac{\partial Y_3}{\partial \beta} \left( \psi - \frac{v - v_3'}{V} \right) + \frac{\partial Y_4}{\partial \beta} \left( \psi - \frac{v - v_4'}{V} \right) - mg\Phi, \\ A \frac{dp}{dt} &= \frac{\partial L}{\partial \beta} \left( \psi - \frac{2v - v_1' - v_2'}{2V} + \frac{1}{2\chi} \frac{w_1' - w_2'}{V} \right) + \frac{\partial L}{\partial p} p + \frac{\partial L}{\partial r} r, \\ C \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial N_1}{\partial \beta} \left( \psi - \frac{2v - v_1' - v_2'}{2V} + \frac{1}{2\chi} \frac{w_1' - w_2'}{V} \right) + \frac{\partial N_3}{\partial \beta} \left( \psi - \frac{v - v_3'}{V} \right) + \\ &+ \frac{\partial N_4}{\partial \beta} \left( \psi - \frac{v - v_4'}{V} \right) + \frac{\partial N}{\partial p} p + \frac{\partial N}{\partial r} r. \end{aligned}$$

Перейдем теперь, как это обычно делается, к безразмерной форме записи этой системы, вводя следующие обозначения:

$$Y = c_y \frac{\rho V^2}{2} s, \quad L = c_l \frac{\rho V^2}{2} sb, \quad N = c_n \frac{\rho V^2}{2} sb$$

$$A = i_A \frac{mb^2}{4}, \quad c = i_c \frac{mb^2}{4}, \quad p = \frac{pb}{2V}, \quad r = \frac{rb}{2V}$$

$$\underline{v} = \frac{v}{V}, \quad \underline{v}_j' = \frac{v_j'}{V}, \quad \underline{\omega}_j' = \frac{\omega_j'}{V} \quad (j=1, 2, 3, 4)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial \beta} = y_\beta \frac{\rho V^2}{2} s, \quad y_\beta = \frac{\partial c_y}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = l_\beta \frac{\rho V^2}{2} sb, \quad l_\beta = \frac{\partial c_l}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial N}{\partial \beta} = n_\beta \frac{\rho V^2}{2} sb, \quad n_\beta = \frac{\partial c_n}{\partial \beta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial p} p = \underline{p} l_p \frac{\rho V^2}{2} sb, \quad l_p = \frac{\partial c_l}{\partial \left(\frac{rb}{2V}\right)}$$

$$\frac{\partial N}{\partial p} p = \underline{p} n_p \frac{\rho V^2}{2} sb, \quad n_p = \frac{\partial c_n}{\partial \left(\frac{rb}{2V}\right)}$$

$$\frac{\partial N}{\partial r} r = \underline{r} n_r \frac{\rho V^2}{2} sb, \quad n_r = \frac{\partial c_n}{\partial \left(\frac{rb}{2V}\right)}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} r = \underline{r} l_r \frac{\rho V^2}{2} sb, \quad l_r = \frac{\partial c_l}{\partial \left(\frac{rb}{2V}\right)}$$

$$\underline{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \tau = \frac{m}{\rho s V}, \quad \mu = \frac{2m}{\rho s b}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\psi}{dt} &= \frac{\psi_{\beta_3}}{2} (\psi - \underline{v} - \underline{v}_3') + \frac{y_{\beta_4}}{2} (\psi - \underline{v} - \underline{v}_4') + \frac{c_y}{2} \Phi \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{l_\beta}{i_A} \left[ \psi - \underline{v} + \frac{v_1' + v_2'}{2} + \frac{1}{2\chi} (\underline{\omega}_1' - \underline{\omega}_2') \right] + \frac{l_p}{i_A} p + \frac{l_r}{i_A} r \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{n_\beta}{i_c} \left[ \psi - \underline{v} + \frac{v_1' + v_2'}{2} + \frac{1}{2\chi} (\underline{\omega}_1' - \underline{\omega}_2') \right] + \\ &+ \frac{n_{\beta_3}}{i_c} (\psi - \underline{v} + \underline{v}_3') + \frac{n_{\beta_4}}{i_c} (\psi - \underline{v} + \underline{v}_4') + \frac{n_l}{i_c} p + \frac{n_r}{i_c} r. \end{aligned} \right\} (12)$$

При этом использовалось соотношение

$$mg = \frac{1}{2} c_z \rho V^2 s.$$

Система (12), состоящая из трех уравнений, связывает пять функций:  $\underline{v}$ ;  $\psi$ ;  $\Phi$ ;  $p$  и  $r$ , определяющих кинематику возмущений бокового движения самолета с компонентами скорости ветра. Для того чтобы выразить каждую из пяти интересующих нас функций через значение ветра, к системе (12) следует добавить еще два уравнения. Такими уравнениями будут служить зависимости между компонентами угловой

скорости самолета ( $p$ ,  $r$ ) и углами, характеризующими положение связанных осей в пространстве ( $\psi$ ,  $\Phi$ ):

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{q \sin \Phi + r \cos \Phi}{\cos \vartheta},$$

$$\frac{d\Phi}{dt} = p + (q \sin \Phi + r \cos \Phi) \operatorname{tg} \vartheta.$$

После линеаризации

$$\frac{d\psi}{dt} = r, \quad \frac{d\Phi}{dt} = p$$

и перехода к безразмерной форме записи эти уравнения примут вид

$$\frac{d\psi}{dt} = \mu r, \quad \frac{d\Phi}{dt} = \mu p. \quad (13)$$

Таким образом система оказывается замкнутой.

Перенесем функции, подлежащие определению, в левую часть; объединим при этом члены с  $v$  и  $\psi$ , используя соотношения:

$$\left. \begin{aligned} y_{\beta_3} + y_{\beta_4} &= y_{\beta} \\ n_{\beta_1} + n_{\beta_3} + n_{\beta_4} &= n_{\beta} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

(под  $n_{\beta_1}$  понимается производная по углу скольжения от момента, создаваемого обоими крыльями). Черточки внизу при этом опустим, подразумевая, что в дальнейшем речь будет идти о безразмерных величинах:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} + \frac{y_{\beta}}{2} v - \frac{y_{\beta}}{2} \psi - \frac{c_z}{2} \Phi &= \frac{y_{\beta_3}}{2} v_3' + \frac{y_{\beta_4}}{2} v_4' \\ \frac{dp}{dt} + \frac{l_{\beta}}{i_A} v - \frac{l_p}{i_A} p - \frac{l_{\beta}}{i_A} \psi - \frac{l_r}{i_A} r &= \frac{l_{\beta}}{2i_A} \left( v_1' + v_2' + \frac{\omega_1' - \omega_2'}{\chi} \right) \\ \frac{dr}{dt} + \frac{n_{\beta}}{i_c} v - \frac{n_r}{i_c} r - \frac{n_{\beta}}{i_c} \psi - \frac{n_p}{i_c} p &= \\ &= \frac{n_{\beta_1}}{2i_c} \left( v_1' + v_2' + \frac{\omega_1' - \omega_2'}{\chi} \right) + \frac{n_{\beta_3}}{i_c} v_3' + \frac{n_{\beta_4}}{i_c} v_4' \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

При отсутствии порывов ветра эта система переходит в обычную систему дифференциальных уравнений малых боковых колебаний самолета. Положим  $v_1' = v_2' = v_3' = v_4' = \omega_1' = \omega_2' = 0$  и введем в уравнение новую переменную — угол скольжения  $\beta = \psi - v$ .

Тогда, продифференцировав первое уравнение по времени и воспользовавшись соотношениями (13), получим систему:

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} - \frac{y_{\beta}}{2} \frac{d\beta}{dt} + \frac{c_z}{2} \mu p - \mu \frac{dr}{dt} = 0,$$

$$\frac{dp}{dt} - \frac{l_{\beta}}{i_A} \beta - \frac{l_p}{i_A} p - \frac{l_r}{i_A} r = 0,$$

$$\frac{dr}{dt} - \frac{n_{\beta}}{i_c} \beta - \frac{n_p}{i_c} p - \frac{n_r}{i_c} r = 0,$$

совпадающую с приведенной в работе Райха [2].

Прежде чем переходить к интегрированию системы (15), остановимся на влиянии разности вертикальных скоростей ветра на

результат расчетов. Как видно из уравнения (15), этот эффект может быть только тогда существен, когда разность вертикальных порывов на крыльях достигает примерно суммы боковых импульсов, умноженной на угол  $V$ -образности крыльев, т. е. когда выполняется соотношение

$$\omega_1' - \omega_2' \approx \chi(v_1' + v_2').$$

В современных конструкциях угол поперечного  $V(\chi)$  в радианах составляет примерно 0,1.

Таким образом, вертикальные порывы ветра будут сказываться на боковых колебаниях самолета только в тех случаях, когда разность их значений на крыльях самолета составит примерно 20% величины горизонтальных порывов. Такое соотношение не является невероятным, но может осуществиться только при наличии резкой изменчивости вертикальных скоростей.

В настоящей статье мы не будем подробно рассматривать влияние различий порывов ветра в разных участках пограничного слоя самолета, хотя полученные уравнения позволяют ответить на этот вопрос, если заданы поля порывов.

Мы рассмотрим здесь более простую задачу, а именно будем полагать, что пространственная изменчивость порывов невелика и ветер можно охарактеризовать одним значением, полученным в результате осреднения по всему пограничному слою самолета.

Полагая тогда в выражении (15)  $v_1' = v_2' = v_3' = v_4' = v'$ ;  $\omega_1' = \omega_2'$  и воспользовавшись соотношением (14), систему (15) перепишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} + \frac{y_\beta}{2} v - \frac{y_\beta}{2} \psi - \frac{c_z}{2} \Phi &= \frac{y_\beta}{2} v' \\ \frac{dp}{dt} + \frac{l_\beta}{i_A} v - \frac{l_p}{i_A} p - \frac{l_\beta}{i_A} \psi - \frac{l_r}{i_A} r &= \frac{l_\beta}{i_A} v' \\ \frac{dr}{dt} + \frac{n_\beta}{i_c} v - \frac{n_p}{i_c} p - \frac{n_r}{i_c} r - \frac{n_\beta}{i_c} \psi &= \frac{n_\beta}{i_c} v' \\ \frac{d\psi}{dt} - \mu r &= 0 \\ \frac{d\Phi}{dt} - \nu p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Система (17) несколько упрощается, если ввести в рассмотрение новую переменную — полный угол скольжения  $\beta = \psi - v$ . В отличие от обычного угла скольжения здесь под  $v$  понимается пульсация путевой, а не воздушной скорости.

После перехода к переменной  $\beta$  система (17) запишется в виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\beta}{dt} + \frac{y_\beta}{2} \beta - \frac{c_z}{2} \Phi - \mu r &= \frac{y_\beta}{2} v' \\ \frac{dp}{dt} - \frac{l_\beta}{i_A} \beta - \frac{l_p}{i_A} p - \frac{l_r}{i_A} r &= \frac{l_\beta}{i_A} v' \\ \frac{dr}{dt} - \frac{n_\beta}{i_c} \beta - \frac{n_p}{i_c} p - \frac{n_r}{i_c} r &= \frac{n_\beta}{i_c} v' \\ \frac{d\Phi}{dt} - \nu p &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Полученная система аналогична системе дифференциальных уравнений, описывающих продольные колебания самолета под влиянием порывов ветра, полученной в свое время М. И. Юдиным. Эта система оказалась несколько проще как по структуре левых частей уравнений, так и по числу функций в свободных членах [правые части уравнений продольных колебаний самолета содержат два компонента скорости: горизонтальной (продольный) и вертикальный]

Следуя М. И. Юдину, запишем решение (18) в виде

$$\varphi_i(t) = \sum_{\nu=1}^4 \sum_{j=1}^4 \frac{D_{ji}(\lambda_\nu)}{\frac{dD(\lambda)}{d\lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_\nu}} \left[ \alpha_j e^{\lambda_\nu(t-t_0)} + b_j \int_{t_0}^t v'(\tau) e^{\lambda_\nu(t-\tau)} d\tau \right], \quad (19)$$

где  $\varphi_i$  означает соответственно угол полного скольжения ( $i=1$ ), угловую скорость  $p$  ( $i=2$ ), угловую скорость  $q$  ( $i=3$ ), угол крена, уменьшенный в  $\mu$  раз ( $i=4$ );  $D(\lambda)$  — определитель системы (18),  $b_j$  — коэффициенты в правых частях уравнений,  $\lambda_\nu$  — корни характеристического уравнения системы (18),  $\alpha_j$  — значения  $\varphi_j$  в начальный момент времени  $t_0$ .

С помощью решения (19) можно получить статистические характеристики колебаний самолета, если известны характеристики порывов ветра на трассе полета.

Система (18) дает также возможность определять горизонтальные порывы ветра (боковые по отношению к самолету) через любую из величин, характеризующих боковые возмущения самолета в полете.

В качестве примера рассмотрим вопрос о соотношении между амплитудами горизонтальных порывов ветра и боковыми ускорениями центра тяжести самолета для возмущений различных частот. Как известно, аналогичной задаче для продольных колебаний самолета посвящен целый ряд работ как в отечественной, так и в иностранной литературе.

Разложим функции  $\varphi_i$  в ряды Фурье

$$\varphi_i = \sum B_{ik} e^{jk\omega t} \quad (20)$$

и будем искать решение  $v(\tau)$  также в виде разложения

$$v = \sum A_k e^{jk\omega t}. \quad (21)$$

Поскольку нас интересует связь между боковыми ускорениями и горизонтальными порывами ветра, то нам удобнее вернуться к системе (17). Исключив из этой системы угловые скорости, получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv}{dt} + a_{11}v - a_{11}\psi - a_{13}\Phi &= a_{11}v' \\ \frac{d^2\Phi}{dt^2} - a_{23} \frac{d\Phi}{dt} + a_{21}v - a_{22} \frac{d\psi}{dt} - a_{21}\psi &= a_{21}v' \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} - a_{32} \frac{d\psi}{dt} - a_{31}\psi + a_{31}v - a_{33} \frac{d\Phi}{dt} &= a_{31}v' \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= \frac{y_\beta}{2}, & a_{13} &= \frac{c_z}{2} \\ a_{21} &= \frac{l_\beta}{i_A} \mu, & a_{22} &= \frac{l_r}{i_A}, & a_{23} &= \frac{l_p}{i_A} \\ a_{31} &= \frac{n_\beta}{i_c} \mu, & a_{32} &= \frac{n_r}{i_c}, & a_{33} &= \frac{n_p}{i_c} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Подставив (20) и (21) в (22) и исключив  $B_{2k}$  и  $B_{3k}$ , получим соотношения между комплексными амплитудами  $A_k$  и  $B_{1k}$ .

$$\frac{B_{1k}}{A_k} = \frac{c_5 \omega^2 k^2 + c_2 - j \omega k (a_{11} \omega^2 k^2 + c_7)}{\omega^4 k^4 + c_1 \omega^2 k^2 + c_2 - j \omega k (c_3 \omega^2 k^2 + c_4)}, \quad (24)$$

где

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= a_{33} a_{22} - a_{23} a_{32} + a_{31} + a_{11} (a_{23} + a_{32}) \\ c_2 &= a_{13} (a_{31} a_{22} - a_{21} a_{32}) \\ c_3 &= a_{11} - a_{23} - a_{32} \\ c_4 &= a_{11} (a_{33} a_{22} - a_{23} a_{32}) - a_{21} a_{13} - a_{31} a_{23} + a_{33} a_{21} \\ c_5 &= a_{11} (a_{23} + a_{32}) \\ c_6 &= a_{11} (a_{33} a_{22} - a_{23} a_{32}) - a_{21} a_{13} \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Здесь  $B_{1k}$  — комплексная амплитуда возмущений боковой скорости самолета.

Нас в дальнейшем будет интересовать соотношение между боковыми ускорениями самолета и горизонтальными порывами ветра. Используя соотношение  $B_{1k}' = j \omega k B_{1k}$ , где  $B_{1k}'$  — комплексная амплитуда возмущений боковых ускорений, перепишем формулу (24) в виде

$$\frac{B_{1k}'}{A_k} = \frac{\omega^2 k^2 (a_{11} \omega^2 k^2 + c_7) + j \omega k (c_5 \omega^2 k^2 + c_2)}{\omega^4 k^4 + c_1 \omega^2 k^2 + c_2 - j \omega k (c_3 \omega^2 k^2 + c_4)}. \quad (26)$$

Отношение квадратов модулей амплитуд может быть тогда представлено в виде

$$\frac{|B_{1k}'|^2}{|A_k|^2} = \frac{(a_{11} x + c_7)^2 x + (c_5 x + c_2)^2}{(x^2 + c_1 x + c_2)^2 + (c_3 x + c_4)^2 x}, \quad (27)$$

где  $x = \omega^2 k^2$ .

Конкретные расчеты выполним для самолета «Нортроп-2Е», аэродинамические характеристики которого опубликованы в работе А. Л. Райха [2]:

$$\begin{aligned} \frac{c_z}{2} &= 0,22, & \frac{l_\beta}{i_A} &= 1,175, & \frac{l_p}{i_A} &= -7,8, & \frac{n_p}{i_A} &= -0,354, \\ \frac{y_\beta}{2} &= 0,265, & \frac{n_\beta}{i_c} &= 0,385, & \frac{l_r}{i_c} &= 1,99, & \frac{n_r}{i_c} &= -0,702, \\ \mu &= 11,8, & \tau &= 1,3. \end{aligned}$$

Численные значения коэффициентов  $a_{ij}$  оказываются соответственно равными:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0,265, & a_{13} &= 0,220, \\ a_{21} &= 13,9, & a_{22} &= 1,99, & a_{23} &= -7,8, \\ a_{31} &= 4,54, & a_{32} &= -0,702, & a_{33} &= -0,354. \end{aligned}$$

График передаточной функции приведен на рис. 2.

Полученная функция аналогична передаточным функциям для продольных колебаний самолета (определение вертикальных скоростей ветра по вертикальным перегрузкам центра тяжести самолета) [4]. Низкочастотные боковые порывы ветра мало сказываются на боковых ускорениях самолета. Начиная с некоторой области частот передаточная функция меняется весьма слабо, стремясь к асимптотическому значению  $a_{11} = \frac{y_\beta}{2} = \frac{1}{2} c_y^2$  (здесь под  $c_y$  понимается коэффициент бокового сопротивления).

Аналогичное асимптотическое значение для продольных колебаний равно  $\frac{1}{2} c_z^2$  (где  $c_z$  — коэффициент подъемной силы). Таким образом, и в случае боковых колебаний может быть получена приближенная формула, связывающая боковые ускорения самолета с боковыми порывами ветра

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} c_y^{\beta} v'$$

или, возвращаясь к размерным величинам,

$$v = \frac{2G}{\rho s v \frac{\partial c_y}{\partial \beta}} \Delta n_y,$$

где  $\Delta n_y$  выражено в долях ускорения силы тяжести.

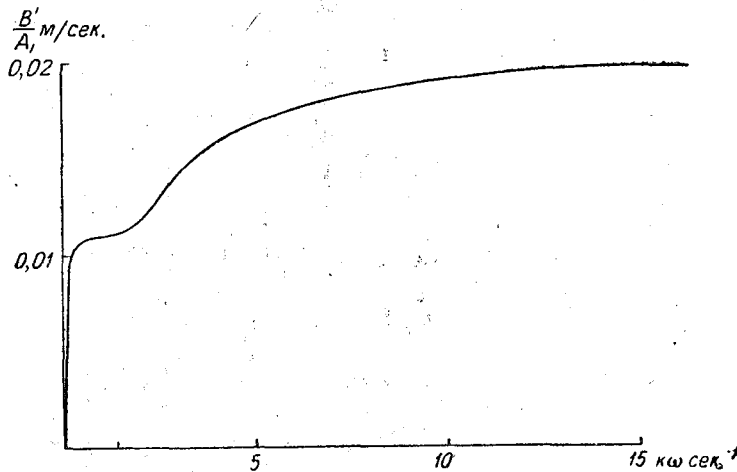


Рис. 2.

Так же как и в случае продольных колебаний, эта формула верна только для высокочастотных возмущений. Для определения низкочастотных возмущений следует учитывать зависимость передаточной функции от частоты.

Коэффициент  $c_y^{\beta}$  на порядок меньше коэффициента  $c_z^{\alpha}$ , поэтому для определения горизонтальных порывов ветра (боковых по отношению самолета) требуются более чувствительные акселерографы. Для определения горизонтальных порывов с той же точностью, с какой определяются вертикальные порывы с помощью вертикальных перегрузок, чувствительность применяемых акселерографов должна быть увеличена на порядок.

## РЕЗЮМЕ

В статье выводятся уравнения, устанавливающие связь между боковыми колебаниями самолета и горизонтальными порывами ветра. Уравнения записываются в общей форме с учетом возможного различия компонентов ветра на различных участках пограничного слоя самолета.

Решение приводится для частного случая, когда ветер можно задать одним значением, осредненным по всему пограничному слою

самолета. Проводится анализ влияния порывов ветра различных масштабов на боковые ускорения центра тяжести самолета.

Выясняется возможность решения обратной задачи — нахождения характеристик горизонтальной порывистости ветра по боковым ускорениям самолета.

Численные расчеты выполнены для самолета «Нортроп-2Е».

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ведров В. С. Динамическая устойчивость самолета. М. Оборонгиз, 1938.
2. Райх А. Л. Расчет боковой динамической устойчивости самолета. Труды ЦАГИ, вып. 458, 1939.
3. Дубов А. С. К вопросу определения вертикальных скоростей ветра по данным самолетного акселерографа. Труды ГГО, вып. 81, 1959.



## О КОЛЕБАНИЯХ САМОЛЕТА, СНАБЖЕННОГО АВТОПИЛОТОМ, В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

### § 1. Введение

1. В теории динамической устойчивости самолета при изучении колебания самолета в полете до сравнительно недавнего времени недостаточно учитывалась физическая природа турбулентных движений в атмосфере как основного фактора, вызывающего колебания самолета. В этой теории чаще всего рассматривались лишь свободные колебания самолета, т. е. действие турбулентных движений воздуха вообще не учитывалось. Если же влияние ветра принималось во внимание, то рассматривалась чрезвычайно идеализированная схема изменения составляющих ветра со временем (например, синусоидальные колебания или единичный порыв), весьма далекая от реальной структуры ветра.

М. И. Юдин впервые отчетливо сформулировал тот факт, что вследствие турбулентной структуры ветра теория колебаний самолета в реальной, турбулентной атмосфере должна строиться с привлечением предположений статистической теории турбулентности. Юдин разработал общий метод исследования колебаний твердого тела в турбулентной атмосфере на основе так называемой теории структурных функций (или моментов связи) и применил его к анализу продольных колебаний самолета. Оценочные подсчеты, произведенные им на основании этого анализа, подтвердили, что турбулентные пульсации вектора скорости движения воздуха являются основной причиной колебаний самолета в полете. В дальнейшем А. С. Дубовым и другими аппарат структурных функций был применен к ряду других задач, связанных с динамикой полета самолета в реальной атмосфере.

В связи с успехами, достигнутыми на этом пути, естественно возникла мысль о применении тех же идей к обратной задаче — использованию самолета в качестве зондировщика турбулентности. Этот вопрос был рассмотрен в работах А. С. Дубова [1, 2, 3], который, исходя из предложенных Юдиным уравнений, вывел формулы, позволяющие определять характеристики атмосферной турбулентности по записи колебаний самолета в полете.

В работе [2] Дубов применил к исследованию этого вопроса метод спектрального анализа.

2. Сопоставляя между собой метод структурных функций и метод спектрального анализа<sup>1</sup>, можно видеть, что каждый из этих мето-

<sup>1</sup> Здесь и в дальнейшем речь идет лишь о спектральном анализе соотношений между самими анализируемыми величинами, а не их статистическими характеристиками (например, корреляционными функциями). Что касается спектрального анализа корреляционных функций, то этот метод вполне эквивалентен методу структурных функций.

147312

дов обладает определенными преимуществами и недостатками. Метод структурных функций позволяет непосредственно связать интересующие нас характеристики (например, средние квадратические колебания скорости, высоты, ускорений самолета и др.) со статистическими характеристиками задаваемых полей. Подсчеты по получающимся формулам весьма просты, хотя вывод их может быть и сложным. Метод в равной степени применим в случае любого количества заданных полей.

Однако, применяя аппарат структурных функций, мы не получаем никаких выводов о том, каковы различия в реакции самолета как чувствительной системы на турбулентные пульсации различных участков спектра частот. Кроме того, при применении указанного метода встречаются и чисто математические затруднения в связи со взятием квадратур при достаточно общей форме задания структурных функций. В противоположность этому метод спектрального анализа специально предназначен для исследования реакции самолета на атмосферные возмущения различных частот. Теория его чрезвычайно проста, хотя вычисления по соответствующим формулам могут отнимать много времени.

Основным недостатком спектрального анализа является то, что он в непосредственной своей форме применим лишь в случае наличия одного фактора, влияющего на исследуемый нами процесс. При наличии же многих факторов удается оценивать лишь влияние каждого из них порознь, но не влияние всех факторов в совокупности. Поэтому следует признать методы структурных функций и спектрального анализа существенно дополняющими друг друга. Наиболее рационально применять оба метода, как это и делается при решении многих прикладных задач статистической теории турбулентности.

3. При построении соответствующей теории необходимо принять ту или иную схему управления самолетом. Насколько нам известно, до настоящего времени при исследовании колебаний самолета в реальной атмосфере применялась одна из двух простейших схем — полет либо с брошенной, либо с закрепленной ручкой руля высоты. Между тем при наличии значительной болтанки полет как с брошенной, так и с закрепленной ручкой в течение сколько-нибудь длительного времени опасен, и поэтому ни один из указанных режимов на практике в точности не выполняется. В связи с этим представляет интерес рассмотреть колебания самолета в реальной атмосфере при наличии автопилота, причем можно рассчитывать, что уравнивания, описывающие влияние автопилота, в некоторой мере применимы и для описания действий пилота при управлении самолетом без автопилота.

Помимо сказанного, значительный интерес представляет исследование влияния автопилота на решение как прямой, так и обратной задачи. Решение прямой задачи при наличии автопилота позволяет выяснить, как влияет автопилот на колебания самолета при заданном характере атмосферной турбулентности. На основе решения этой задачи может рассматриваться вопрос об «оптимальном» автопилоте, который в наибольшей мере уменьшал бы колебания самолета, обусловленные турбулентными пульсациями скорости в реальной атмосфере.

Решение обратной задачи при наличии автопилота позволяет выяснить, как влияет автопилот на связь между регистрируемыми характеристиками колебаний самолета и реальными значениями пульсаций вектора скорости в атмосфере. В связи с решением обратной задачи также может быть поставлен вопрос о выборе автопилота, наилучшего

с этой точки зрения, т. е. такого, при котором на основании регистрации колебаний самолета можно будет с наибольшей точностью и достоверностью оценивать турбулентные флюктуации вектора скорости движения воздуха.

Нужно иметь в виду, что требования к автопилоту, оптимальному в смысле гашения колебаний, и к автопилоту, при котором оптимальным образом производится зондирование атмосферной турбулентности, в основном диаметрально противоположны. Если в первом случае автопилот должен в максимальной мере гасить колебания самолета, то для решения второй задачи колебания самолета должны быть достаточно значительными, чтобы по записи их можно было бы восстанавливать характеристики атмосферной турбулентности. Это означает, что самолет-зондировщик турбулентности должен быть, вообще говоря, снабжен автопилотом с иными параметрами, чем самолеты, предназначенные для обычных целей.

В настоящей работе рассматривается теория колебаний самолета с автопилотом в реальной атмосфере. Ввиду сложности вопроса представлялось правильным рассмотреть сначала простейшую постановку задачи. В работе исследуется в основном лишь случай так называемого идеального автопилота. Анализ более сложных схем автопилотов, равно как и подход к выбору оптимальных в указанных выше смыслах параметров автопилотов, должен явиться предметом дальнейших исследований.

## § 2. Уравнение продольных колебаний самолета с автопилотом

4. Уравнения малых продольных колебаний самолета относительно горизонтального моторного полета с постоянной скоростью были выведены в работе [1] и имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1' + a_{11}\varphi_1 + a_{12}\varphi_2 + a_{13}\varphi_3 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ \varphi_2' + a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2 - a_{22}\varphi_3 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \\ \varphi_3'' + a_{44}\varphi_3' + a_{41}\varphi_1 + a_{42}\varphi_2 - a_{42}\varphi_3 &= \\ &= a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + b_{43}u_2' \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где коэффициенты  $a_{ij}$  выражаются через аэродинамические характеристики самолета соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} a_{11} &= c_x, \quad a_{21} = -c_y, \quad a_{41} = -m^a c_y \\ a_{12} &= \frac{1}{2}(c_y - c_x^a), \quad a_{22} = \frac{1}{2}(c_x + c_y^a), \quad a_{44} = m^a + m^z \\ a_{13} &= \frac{1}{2}c_x^a, \quad b_{43} = -m^z, \quad a_{42} = -m^z + \frac{1}{2}m^a(c_x + c_y^a) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  представляют собой безразмерные (отнесенные к воздушной скорости самолета  $V$ ) отклонения горизонтальной и вертикальной составляющих скорости самолета, а  $u_1$  и  $u_2$  — соответственно пульсации (также безразмерные) горизонтальной и вертикальной составляющих скорости движения воздуха.  $\varphi_3$  представляет собой отклонение угла тангажа, штрихи означают дифференцирование по безразмерному времени. В формулах (2) использованы стандартные обозначения для аэродинамических коэффициентов, принятые, например, в работе [3]. Поэтому на пояснении этих обозначений не останавливаемся.

Уравнение (1) удобно, особенно для решения «обратной задачи», использовать в несколько иной форме. Поскольку акселерометр реагирует не на скорости, а на ускорения самолета, преобразуем систему (1) так, чтобы в ней вместо  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  фигурировали безразмерные составляющие ускорения самолета по горизонтали  $n_1$  и по вертикали  $n_2$ . Поскольку  $n_1$  и  $n_2$  после линеаризации связаны с  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  соотношениями (см. [1]):

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \varphi_1' - a\varphi_3; \left( a = \frac{1}{2} c_y \right) \\ n_2 &= \varphi_2' \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

то уравнения (1) можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} n_1' + a_{11}n_1 + a_{12}n_2 + (a_{13} + a)\varphi_3' + a_{11}a\varphi_3 &= \\ &= a_{11}u_1' + a_{12}u_2' \\ n_2' + a_{21}n_1 + a_{22}n_2 - a_{22}\varphi_3' + a_{21}a\varphi_3 &= \\ &= a_{21}u_1' + a_{22}u_2' \\ \varphi_3''' + a_{44}\varphi_3'' - a_{42}\varphi_3' + a_{41}a\varphi_3 + a_{41}n_1 + a_{42}n_2 &= \\ &= a_{41}u_1' + b_{43}u_2'' + a_{42}u_2' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Систему (4) удобно записать в символической форме в виде матрицы, используя оператор дифференцирования  $D$ :

$$\left\{ \begin{array}{ccccc} n_1 & n_2 & \varphi_3 & u_1 & u_2 \\ D + a_{11} & a_{12} & a_{13}D + a(D + a_{11}) & -a_{11}D & -a_{12}D \\ a_{21} & D + a_{22} & -a_{22}D + aa_{21} & -a_{21}D & -a_{22}D \\ a_{41} & a_{42} & (D^2 + a_{44}D - a_{42})D + aa_{41} & -a_{41}D & -(b_{43}D + a_{42})D \end{array} \right\} \quad (5)$$

5. Рассмотрим теперь уравнения, описывающие влияние автопилота. Поскольку нас интересуют малые (т. е. линейные) продольные колебания самолета, то естественно рассмотреть линейный автопилот.

Как показано в работе [4], уравнение «продольной» системы автопилота может быть записано таким образом:

$$T_i \frac{ra}{b} \dot{\vartheta} + \frac{ra}{b} \vartheta - T_i \frac{r_1 l}{kb} \ddot{\delta} - \left( \frac{r_1 l}{kb} + T_i r_1 \right) \dot{\delta} = 0,$$

где  $\vartheta = \varphi_3$  — угол тангажа,  $\delta$  — отклонение руля высоты,  $T_i$  — время изодрома, зависящее от параметров сервомотора (рулевой машинки) автопилота,  $k$  — коэффициент демпфирования сервомотора,  $a$ ,  $b$ ,  $r$ ,  $r_1$  — плечи рычагов передающего устройства автопилота,  $l = a + b$ ; точка сверху означает дифференцирование по размерному времени.

Вводя в написанное уравнение обозначения:

$$\frac{ra}{r_1 b} = \alpha_1, \quad \frac{l}{b} = \frac{a}{b} + 1 = \alpha_2, \quad \frac{1}{k} = T_k, \quad \delta = \varphi_5$$

и относя  $T_i$  и  $T_k$  к характерному времени  $\tau$  (т. е. обозначая  $\frac{T_i}{\tau} = T_1$ ,  $\frac{T_k}{\tau} = T_2$ ), приведем это уравнение к виду

$$\alpha_1 (T_1 D + 1) \varphi_3 = [\alpha_2 T_1 T_2 D + (\alpha_2 T_2 + T_1)] D \varphi_5$$

или

$$(D + a_{15}) \varphi_3 = (a_{51} D + a_{52}) D \varphi_5, \quad (6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{15} &= \frac{1}{T_1} = \frac{\tau}{T_i}, & a_{51} &= \frac{a_2}{a_1} T_2 = \frac{r_1 l}{rak\tau} \\ a_{52} &= \frac{1}{a_1} + \frac{a_2}{a_1} \frac{T_2}{T_1} = \frac{r_1 b}{ra} + \frac{r_1 l}{rakT_1} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Обычно  $T_1 \gg 1$ ,  $T_2 \ll 1$ . Если положить  $T_1 = \infty$ ,  $T_2 = 0$ , что соответствует так называемому идеальному автопилоту, то вместо (6) и (7) будем иметь:

$$\varphi_3 = a_{52} \varphi_5, \quad (8)$$

$$a_{52} = \frac{1}{a_1} = \frac{r_1 b}{ra}. \quad (9)$$

Согласно соотношению (8), идеальный автопилот мгновенно реагирует на изменение угла тангажа соответствующим отклонением руля высоты  $\varphi_5$ . Величина  $a_1$  является передаточным числом идеального автопилота.

Вследствие отклонения руля  $\varphi_5$  возникает дополнительный момент, равный (в пределах линейной теории)

$$\Delta M_a = M_\delta \varphi_5,$$

где существенно отрицательная величина  $M_\delta$  представляет собой производную от момента по углу  $\delta$ .

Соответствующее приращение безразмерного момента равно  $-a_{45} \varphi_5$ , где  $a_{45} = -m_\delta$  — уже положительная величина ( $m_\delta$  — производная безразмерного момента по углу  $\delta$ ). Поэтому уравнение моментов [третье из уравнений (1)] примет при наличии автопилота вид

$$\varphi_3'' + a_{44} \varphi_3' + a_{41} \varphi_1 + a_{42} \varphi_2 - a_{42} \varphi_3 + a_{45} \varphi_5 = a_{41} u_1 + a_{42} u_2 + b_{43} u_2'.$$

6. На основании всего сказанного систему линейных уравнений продольных колебаний самолета (4) при наличии линейного автопилота можно записать как:

$$\begin{aligned} n_1' + a_{11} n_1 + a_{12} n_2 + (a + a_{13}) \varphi_3' + a_{11} a \varphi_3 &= a_{11} u_1' + a_{12} u_2', \\ n_2' + a_{21} n_1 + a_{22} n_2 - a_{22} \varphi_3' + a_{21} a \varphi_3 &= a_{21} u_1' + a_{22} u_2', \\ \varphi_3''' + a_{44} \varphi_3'' - a_{42} \varphi_3' + a a_{41} \varphi_3 + a_{41} n_1 + a_{42} n_2 + a_{45} \varphi_5' &= \\ &= a_{41} u_1' + a_{42} u_2' + b_{43} u_2'', \\ a_{51} \varphi_5'' + a_{52} \varphi_5' &= \varphi_3' + a_{15} \varphi_3 \end{aligned}$$

или в матричной форме:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} n_1 & n_2 & \varphi_3 & \varphi_5 & u_1 & u_2 \\ D + a_{11} & a_{12} & a_{13} D + a(D + a_{11}) & 0 & -a_{11} D & -a_{12} D \\ a_{21} & D + a_{22} & -a_{22} D + a a_{21} & 0 & -a_{21} D & -a_{22} D \\ a_{41} & a_{42} & (D^2 + a_{44} D - a_{42}) D + a a_{41} & a_{45} D & -a_{41} D & -(b_{43} D + a_{42}) D \\ 0 & 0 & D + a_{15} & -(a_{51} D + a_{52}) D & 0 & 0 \end{array} \right\} \quad (10)$$

Вследствие громоздкости системы (10) результаты ее анализа трудно сопоставимы с выводами для случая отсутствия автопилота. В системе (10) влияние автопилота характеризуется слишком большим числом параметров, и рационально на первых порах рассмотреть наиболее простую схему, а именно схему идеального автопилота.

Применяя описанные выше упрощения, приведем систему (10) для случая идеального автопилота к виду:

$$\left\{ \begin{array}{cccccc} n_1 & n_2 & & \varphi_3 & u_1 & u_2 \\ D + a_{11} & a_{12} & & a_{13}D + a(D + a_{11}) & -a_{11}D & -a_{12}D \\ a_{21} & D + a_{22} & & -a_{22}D + aa_{21} & -a_{21}D & -a_{22}D \\ a_{41} & a_{42} & (D^2 + a_{44}D + a_{43})D + aa_{41} & & -a_{41}D & -(b_{43}D + a_{42})D \end{array} \right\} \quad (11)$$

где  $D$  — оператор дифференцирования по времени (безразмерному)

$$\left. \begin{array}{l} a_{43} = c - a_{42} \\ c = \frac{a_{45}}{a_{52}} = -\alpha_1 m_3 \end{array} \right\} \quad (12)$$

так что влияние автопилота характеризуется одним параметром  $c$ . В случае  $c = 0$  возвращаемся к системе (5).

### § 3. Уравнения прямой и обратной задач

7. Система трех уравнений (11) содержит пять функций:  $n_1$ ,  $n_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  и, следовательно, позволяет выразить все эти функции через любые две. При решении прямой задачи о колебаниях самолета в турбулентной атмосфере функции  $u_1$  и  $u_2$ , характеризующие турбулентные пульсации вектора скорости движения воздуха, должны, очевидно, рассматриваться как заданные. Тогда система (11) даст возможность определить функции  $n_1$ ,  $n_2$  и  $\varphi_3$ , характеризующие продольные колебания самолета.

Менее определенной является постановка обратной задачи об определении характеристик атмосферной турбулентности по данным о колебаниях самолета в полете.

В принципе возможно регистрировать любое количество характеристик колебаний самолета, а не только минимально необходимое количество таких характеристик — две. При этом дополнительные сведения можно было бы использовать для контроля результатов, или, точнее говоря, для уменьшения влияния ошибок регистрации колебаний самолета на результаты определения турбулентных пульсаций скорости.

Однако практически в настоящее время удается вполне надежно регистрировать лишь одну характеристику колебаний самолета — вертикальное ускорение (перегрузку)  $n_2$ . Таких сведений недостаточно для определения величин  $u_1$  и  $u_2$  (или любой одной из этих величин). Поэтому приходится ограничиваться теми или иными дополнительными гипотезами.

Практически наибольший интерес представляет вертикальная составляющая скорости движения воздуха  $u_2$ . Система (11) позволяет выразить  $u_2$  через регистрируемую величину  $n_2$  и любую одну из остающихся трех величин  $n_1$ ,  $u_1$ ,  $\varphi_3$ . Следуя А. С. Дубову [3], рассмотрим сначала две из этих трех постановок задачи:

- а) прямая задача — связь между функциями  $n_2$ ,  $u_1$  и  $u_2$ ,
- б) обратная задача — связь между функциями  $n_1$ ,  $n_2$  и  $u_2$ .

8. Уравнение прямой задачи может быть, согласно (11), записано в виде

$$\Delta_I n_2 = \Delta_{I2} u_2 + \Delta_{I1} u_1, \quad (13)$$

где  $\Delta_I$ ,  $\Delta_{I2}$  и  $\Delta_{II}$  представляют собой дифференциальные определители:

$$\begin{aligned}
 \Delta_I &= \begin{vmatrix} D + a_{11} & a_{12} & a_{13}D + a(D + a_{11}) \\ a_{21} & D + a_{22} & -a_{22}D + aa_{21} \\ a_{41} & a_{42} & (D^2 + a_{44}D + a_{43})D + aa_{41} \end{vmatrix} = \\
 &= D \begin{vmatrix} D + a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & D + a_{22} & -a_{22} \\ a_{41} & a_{42} & D^2 + a_{44}D + a_{43} \end{vmatrix}, \\
 \Delta_{I2} &= \begin{vmatrix} D + a_{11} & a_{12}D & a_{13}D + a(D + a_{11}) \\ a_{21} & a_{22}D & -a_{22}D + aa_{21} \\ a_{41} & (b_{43}D + a_{42})D & (D^2 + a_{44}D + a_{43})D + aa_{41} \end{vmatrix} = \\
 &= D^2 \begin{vmatrix} D + a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{22} \\ a_{41} & b_{43}D + a_{42} & D^2 + a_{44}D + a_{43} \end{vmatrix}, \\
 \Delta_{II} &= \begin{vmatrix} D + a_{11} & a_{11}D & a_{13}D + a(D + a_{11}) \\ a_{21} & a_{21}D & -a_{22}D + aa_{21} \\ a_{41} & a_{41}D & (D^2 + a_{44}D + a_{43})D + aa_{41} \end{vmatrix} = \\
 &= D^3 \begin{vmatrix} a_{21} & -a_{22} \\ a_{41} & D^2 + a_{44}D + a_{43} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \tag{14}$$

Интересно отметить, что параметр  $a$  выпал из уравнения (13). Это естественно, поскольку параметр  $a$  введен при замене  $\varphi_1$  через функции  $n_1$  и  $\varphi_3$ . Поэтому пока нас не интересуют функции  $n_1$  и  $\varphi_3$  [а в уравнении (13) они не содержатся], параметр  $a$  не должен входить в уравнение.

Вычисляя определители (14), получим:

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta_I &= D(D^4 + A_{13}D^3 + A_{12}D^2 + A_{11}D + A_{10}) \\
 \Delta_{I2} &= D^2(A_{23}D^3 + A_{22}D^2 + A_{21}D + A_{20}) \\
 \Delta_{II} &= D^3(A_{32}D^2 + A_{31}D + A_{30})
 \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

где коэффициенты  $A_{ij}$  выражаются через аэродинамические коэффициенты  $a_{ij}$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned}
 A_{13} &= a_{11} + a_{22} + a_{44} \\
 A_{12} &= a_{43} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + a_{44}(a_{11} + a_{22}) \\
 A_{11} &= a_{44}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + a_{22}(a_{42} + a_{43}) + (a_{11}a_{43} - a_{13}a_{41}) \\
 A_{10} &= a_{22}[a_{11}(a_{42} + a_{43}) - a_{41}(a_{12} + a_{13})] + a_{21}(a_{13}a_{42} - a_{12}a_{43}) \\
 A_{23} &= a_{22} \\
 A_{22} &= a_{22}(a_{44} + b_{43}) + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\
 A_{21} &= a_{44}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + a_{22}(a_{42} + a_{43}) + b_{43}(a_{11}a_{22} + a_{13}a_{21}) \\
 A_{20} &= a_{22}[a_{11}(a_{42} + a_{43}) - a_{41}(a_{12} + a_{13})] + a_{21}(a_{13}a_{42} - a_{12}a_{43}) \\
 A_{32} &= a_{21} \\
 A_{31} &= a_{21}a_{44} \\
 A_{30} &= a_{21}a_{43} + a_{22}a_{41}
 \end{aligned} \right\} \tag{16}$$

9. Аналогичным образом уравнение обратной задачи можно, согласно (11), записать в виде

$$\Delta_{II} a_2 = \Delta_{II2} n_2 + \Delta_{II1} n_1, \quad (17)$$

где дифференциальные детерминанты  $\Delta_{II}$ ,  $\Delta_{II2}$  и  $\Delta_{II1}$  определяются равенствами:

$$\begin{aligned} \Delta_{II} &= \begin{vmatrix} a_{11}D & a_{12}D & (a_{13} + a)D + a_{11}a \\ a_{21}D & a_{22}D & -a_{22}D + a_{21}a \\ a_{41}D & (b_{43}D + a_{42})D & (D^2 + a_{44}D + a_{43})D + a_{41}a \end{vmatrix} = \\ &= D^3 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + a \\ a_{21} & a_{22} & -a_{22} \\ a_{41} & b_{43}D + a_{42} & D^2 + a_{44}D + a_{43} \end{vmatrix}, \\ \Delta_{II2} &= \begin{vmatrix} a_{11}D & a_{12} & (a_{13} + a)D + a_{11}a \\ a_{21}D & D + a_{22} & -a_{22}D + a_{21}a \\ a_{41}D & a_{42} & (D^2 + a_{44}D + a_{43})D + a_{41}a \end{vmatrix} = \\ &= D^2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + a \\ a_{21} & D + a_{22} & -a_{22} \\ a_{41} & a_{42} & D^2 + a_{44}D + a_{43} \end{vmatrix}, \\ \Delta_{II1} &= \begin{vmatrix} a_{11}D & D + a_{11} & (a_{13} + a)D + a_{11}a \\ a_{21}D & a_{21} & -a_{22}D + a_{21}a \\ a_{41}D & a_{41} & (D^2 + a_{44}D + a_{43})D + a_{41}a \end{vmatrix} = \\ &= -D^3 \begin{vmatrix} a_{21} & -a_{22} \\ a_{41} & D^2 + a_{44}D + a_{43} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

или:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_{II} &= D^3 (B_{12}D^2 + B_{11}D + B_{10}) \\ \Delta_{II2} &= D^2 (B_{23}D^3 + B_{22}D^2 + B_{21}D + B_{20}) \\ \Delta_{II1} &= D^3 (B_{32}D^2 + B_{31}D + B_{30}) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

где в свою очередь:

$$\left. \begin{aligned} B_{12} &= a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \\ B_{11} &= a_{44}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + b_{43}[a_{11}a_{22} + (a + a_{13})a_{21}] \\ B_{10} &= a_{22}[a_{11}(a_{43} + a_{42}) - a_{41}(a + a_{12} + a_{13}) + \\ &\quad + a_{21}[(a + a_{13})a_{42} - a_{12}a_{43}] \\ B_{23} &= a_{11} \\ B_{22} &= a_{11}a_{44} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) \\ B_{21} &= a_{44}(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) + [a_{11}a_{43} - (a + a_{13})a_{41}] \\ B_{20} &= a_{22}[a_{11}(a_{43} + a_{42}) - a_{41}(a + a_{12} + a_{13})] + \\ &\quad + a_{21}[(a + a_{13})a_{42} - a_{12}a_{43}] \end{aligned} \right\} \quad (19)$$



$$\left. \begin{aligned} B_{32} &= -a_{21} \\ B_{31} &= -a_{21}a_{44} \\ B_{30} &= -(a_{21}a_{43} + a_{22}a_{44}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

На решение обратной задачи параметр  $a$ , как видно из (19), оказывает влияние, поскольку одной из величин, входящих в уравнение обратной задачи (17), является горизонтальная перегрузка  $n_1$ .

10. Выражения (16) и (19) для коэффициентов  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  могут быть упрощены за счет того, что коэффициенты  $a_{ij}$  (а также  $a$  и  $b_{43}$ ), фигурирующие в этих формулах, не независимы друг от друга, а связаны соотношениями (2), (3) и (12). Удобно выбрать в качестве независимых аэродинамических параметров величины  $a_{11}$ ,  $a_{13}$ ,  $a_{21}$ ,  $a_{22}$ ,  $m^\alpha$ ,  $m^\alpha$ ,  $c$  и учесть дополнительно соотношение  $m^q = 2m^\alpha$ , выполняющееся для большинства типов самолетов.

Тогда, выражая еще некоторые из коэффициентов  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  друг через друга, получим сравнительно простые формулы:

$$\left. \begin{aligned} A_{13} &= a_{11} + a_{22} + 3m^\alpha, \\ A_{12} &= B_{12} + m^\alpha + m^\alpha (3a_{11} + 2a_{22}) + c, \\ A_{11} &= a_{11}m^\alpha + m^\alpha \left( 2B_{12} + \frac{1}{2}a_{21}^2 \right) + (a_{11} + a_{22})c, \\ A_{10} &= A_{20} = \frac{1}{2}a_{21}^2m^\alpha + B_{12}c, \\ A_{23} &= a_{22}, \\ A_{22} &= 2a_{22}m^\alpha + B_{12}, \\ A_{21} &= m^\alpha \left( 2B_{12} + \frac{1}{2}a_{21}^2 \right) + a_{22}c, \\ A_{32} &= -B_{32} = a_{21}, \\ A_{31} &= -B_{31} = 3m^\alpha a_{21}, \\ A_{30} &= -B_{30} = a_{21}m^\alpha + a_{21}c, \\ B_{12} &= a_{11}a_{22} + a_{13}a_{21} + \frac{1}{2}a_{21}^2, \\ B_{11} &= m^\alpha (2B_{12} + a_{21}^2), \\ B_{10} &= B_{20} = a_{21}^2m^\alpha + B_{12}c, \\ B_{23} &= a_{11}, \\ B_{22} &= 3a_{11}m^\alpha + B_{12}, \\ B_{21} &= m^\alpha (2B_{12} + a_{21}^2) + a_{11}m^\alpha + a_{11}c. \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

Из формул (20) видно, что идеальный автопилот влияет не на все коэффициенты  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$ : коэффициенты, которые не содержат величины  $c$ , остаются неизменными в результате введения идеального автопилота или изменения его передаточного числа. Полагая в (20)  $c=0$ , получим выражения для коэффициентов  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  для случая отсутствия автопилота. При этом, как видно из (20), ни один из коэффициентов не обратится в нуль. Это означает, в частности, что при введении идеального автопилота (в противоположность реальному линейному автопилоту) порядок уравнений прямой и обратной задач не повышается, а остается неизменным.

#### § 4. Спектральные передаточные функции

11. Уравнения (13) и (17) можно переписать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} n_2 &= \frac{\Delta_{12}(D)}{\Delta_1(D)} u_2 + \frac{\Delta_{11}(D)}{\Delta_1(D)} u_1 \\ u_2 &= \frac{\Delta_{112}(D)}{\Delta_{11}(D)} n_2 + \frac{\Delta_{111}(D)}{\Delta_{11}(D)} n_1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где обозначениями  $\Delta_{12}(D) \dots$  подчеркнуто, что определители  $\Delta_{12}, \Delta_{11} \dots$  зависят от дифференциального оператора  $D$ .

Пусть сначала  $u_1 = 0$ , т. е. горизонтальные пульсации скорости отсутствуют. Тогда первое из уравнений (21) примет одночленный вид

$$n_2 = \frac{\Delta_{12}(D)}{\Delta_1(D)} u_2. \quad (22)$$

Представим  $n_2$  и  $u_2$  как интегралы Фурье:

$$\left. \begin{aligned} n_2 &= \int_0^{\infty} A_{n_2}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \\ u_2 &= \int_0^{\infty} A_{u_2}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

где  $t$  — безразмерное время,  $\omega$  — частота (также безразмерная), а  $A_{n_2}(\omega)$  и  $A_{u_2}(\omega)$  — комплексные амплитуды при частоте  $\omega$  для функций  $n_2$  и  $u_2$  соответственно.

Подставляя (23) в (22), получим

$$A_{n_2}(\omega) = \frac{\Delta_{12}(i\omega)}{\Delta_1(i\omega)} A_{u_2}(\omega). \quad (24)$$

Выразим комплексные амплитуды через вещественные амплитуды и начальные фазы:

$$\begin{aligned} A_{n_2}(\omega) &= |A_{n_2}|(\omega) e^{-i\varphi_{n_2}(\omega)}, \\ A_{u_2}(\omega) &= |A_{u_2}|(\omega) e^{-i\varphi_{u_2}(\omega)} \end{aligned}$$

и введем действительные и мнимые части комплексных выражений  $\Delta$ :

$$\begin{aligned} \Delta_{12}(i\omega) &= \Delta_{12}^{(1)}(\omega) + i\Delta_{12}^{(2)}(\omega), \\ \Delta_1(i\omega) &= \Delta_1^{(1)}(\omega) + i\Delta_1^{(2)}(\omega). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (24), получим:

$$|A_{n_2}|(\omega) e^{-i\varphi_{n_2}(\omega)} = \frac{\Delta_{12}^{(1)}(\omega) + i\Delta_{12}^{(2)}(\omega)}{\Delta_1^{(1)}(\omega) + i\Delta_1^{(2)}(\omega)} |A_{u_2}|(\omega) e^{-i\varphi_{u_2}(\omega)},$$

откуда

$$\left[ \frac{|A_{n_2}|(\omega)}{|A_{u_2}|(\omega)} \right]^2 = \frac{[\Delta_{12}^{(1)}(\omega)]^2 + [\Delta_{12}^{(2)}(\omega)]^2}{[\Delta_1^{(1)}(\omega)]^2 + [\Delta_1^{(2)}(\omega)]^2} \quad (25)$$

$$\operatorname{tg} [\varphi_{n_2}(\omega) - \varphi_{u_2}(\omega)] = \frac{\Delta_{I2}^{(1)}(\omega) \Delta_I^{(2)}(\omega) - \Delta_{I2}^{(2)}(\omega) \Delta_I^{(1)}(\omega)}{\Delta_{I2}^{(1)}(\omega) \Delta_I^{(1)}(\omega) + \Delta_{I2}^{(2)}(\omega) \Delta_I^{(2)}(\omega)} \quad (26)$$

Выражение (25) дает квадрат передаточной функции амплитуд  $u_2$  и  $n_2$ , а выражение (26) — тангенс передаточной функции фазы, т. е. запаздывания фазы  $n_2$  по сравнению с фазой функции  $u_2$ .

Аналогичным образом, если в уравнении (21) отбросить второй член правой части, т. е. положить горизонтальную перегрузку равной нулю, то получим:

$$\left[ \frac{|A_{u_2}(\omega)|}{|A_{n_2}(\omega)|} \right]^2 = \frac{[\Delta_{II2}^{(1)}(\omega)]^2 + [\Delta_{II2}^{(2)}(\omega)]^2}{[\Delta_{II1}^{(1)}(\omega)]^2 + [\Delta_{II1}^{(2)}(\omega)]^2} \quad (27)$$

$$\operatorname{tg} [\varphi_{u_2}(\omega) - \varphi_{n_2}(\omega)] = \frac{\Delta_{II2}^{(1)}(\omega) \Delta_{II1}^{(2)}(\omega) - \Delta_{II2}^{(2)}(\omega) \Delta_{II1}^{(1)}(\omega)}{\Delta_{II2}^{(1)}(\omega) \Delta_{II1}^{(1)}(\omega) + \Delta_{II2}^{(2)}(\omega) \Delta_{II1}^{(2)}(\omega)} \quad (28)$$

12. Возвращаясь к уравнениям (21), не будем теперь пренебрегать в них величинами  $u_1$  и  $n_1$  соответственно. Тогда амплитуда и фаза, например величины  $n_2$  из первого уравнения (21), будут зависеть от четырех величин: амплитуд  $u_2$  и  $u_1$  и их фаз. Между всеми этими шестью величинами существует два соотношения, получаемых, например, приравниванием (после разложения в интеграл Фурье) действительных и мнимых частей в равенстве (21) или приравниванием отдельно модулей и аргументов. При этом из таких соотношений, очевидно, невозможно получить передаточные функции отдельно для амплитуд и для фаз колебаний. Иначе говоря, передаточная функция для амплитуд будет существенно зависеть от соотношения фаз колебаний  $u_2$  и  $u_1$  и т. п.

Сказанным определяется существенное ограничение метода спектральных передаточных функций: он применим только в случае наличия одного влияющего фактора. Вследствие этого ограничения можно было бы теперь лишь анализировать отдельно передаточные функции от  $u_1$  к  $n_2$  и от  $n_1$  к  $u_2$ , пренебрегая первыми членами правых частей уравнений (21). Учитывая, однако, что нас интересует в первую очередь связь между  $u_2$  и  $n_2$ , удобнее действовать несколько иным путем. Именно оценим по модулю (т. е. по амплитуде) соотношение влияний  $u_1$  и  $u_2$  в первом уравнении (21) и соответственно соотношение влияний  $n_1$  и  $n_2$  во втором. Эти соотношения описываются, очевидно, функциями  $\lambda_I(\omega)$  и  $\lambda_{II}(\omega)$ , определяемыми равенствами

$$\left. \begin{aligned} \lambda_I(\omega) &= \left| \frac{\Delta_{I1}(i\omega)}{\Delta_{I2}(i\omega)} \right|^2 \left( \frac{|u_1(\omega)|}{|u_2(\omega)|} \right)^2 = \\ &= \frac{[\Delta_{II1}^{(1)}(\omega)]^2 + [\Delta_{II1}^{(2)}(\omega)]^2}{[\Delta_{II2}^{(1)}(\omega)]^2 + [\Delta_{II2}^{(2)}(\omega)]^2} \left[ \frac{|u_1(\omega)|}{|u_2(\omega)|} \right]^2 \\ \lambda_{II}(\omega) &= \left| \frac{\Delta_{II1}(i\omega)}{\Delta_{II2}(i\omega)} \right|^2 \left( \frac{|n_1(\omega)|}{|n_2(\omega)|} \right)^2 = \\ &= \frac{[\Delta_{II1}^{(1)}(\omega)]^2 + [\Delta_{II1}^{(2)}(\omega)]^2}{[\Delta_{II2}^{(1)}(\omega)]^2 + [\Delta_{II2}^{(2)}(\omega)]^2} \left[ \frac{|n_1(\omega)|}{|n_2(\omega)|} \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Для того чтобы производить оценки по формулам (29), необходимо знать средние величины отношений  $\frac{u_1}{u_2}$  и  $\frac{n_1}{n_2}$  в разных уча-

стках спектра частот. Следуя А. С. Дубову, мы примем в дальнейших расчетах за неизменным более обстоятельных данных, что эти средние отношения не зависят от частоты и составляют

$$\left| \frac{u_1}{u_2} \right|(\omega) \equiv 1,$$

$$\left| \frac{n_1}{n_2} \right|(\omega) \equiv 0,1,$$

т. е. что имеет место изотропия турбулентных пульсаций скорости движения воздуха и что для всех частей спектра среднее отношение горизонтальной перегрузки к вертикальной равно 0,1.

13. Согласно (15) и (18), имеем:

$$\begin{aligned} \Delta_I &= i\omega(\omega^4 - A_{13}i\omega^3 - A_{12}\omega^2 + A_{11}i\omega + A_{10}), \\ \Delta_{I2} &= -\omega^2(-A_{23}i\omega^3 - A_{22}\omega^2 + A_{21}i\omega + A_{20}), \\ \Delta_{I1} &= -i\omega^3(-A_{32}\omega^2 + A_{31}i\omega + A_{30}), \\ \Delta_{II} &= -i\omega^3(-B_{12}\omega^2 + B_{11}i\omega + B_{10}), \\ \Delta_{II2} &= -\omega^2(-B_{23}i\omega^3 - B_{22}\omega^2 + B_{21}i\omega + B_{20}), \\ \Delta_{II1} &= -i\omega^3(-B_{32}\omega^2 + B_{31}i\omega + B_{30}). \end{aligned}$$

Отсюда:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_I^{(1)} &= (A_{13}x - A_{11})x \\ \Delta_I^{(2)} &= (x^2 - A_{12}x + A_{10})\sqrt{x} \\ \Delta_{I2}^{(1)} &= (A_{22}x - A_{20})x \\ \Delta_{I2}^{(2)} &= (A_{23}x - A_{21})x\sqrt{x} \\ \Delta_{I1}^{(1)} &= A_{31}x^2 \\ \Delta_{I1}^{(2)} &= (A_{32}x - A_{30})x\sqrt{x} \\ \Delta_{II}^{(1)} &= B_{11}x^2 \\ \Delta_{II}^{(2)} &= (B_{12}x - B_{10})x\sqrt{x} \\ \Delta_{II2}^{(1)} &= (B_{22}x - B_{20})x \\ \Delta_{II2}^{(2)} &= (B_{23}x - B_{21})x\sqrt{x} \\ \Delta_{II1}^{(1)} &= B_{31}x^2 \\ \Delta_{II1}^{(2)} &= (B_{32}x - B_{30})x\sqrt{x} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

где

$$x = \omega^2, \quad (31)$$

а коэффициенты  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$  определяются равенством (20).

Подставляя (30) в формулы (25)–(29), получим:  
для прямой задачи

$$\left[ \frac{|A_{n_2}|(\omega)}{|A_{n_1}|(\omega)} \right]^2 = \frac{(A_{22}x - A_{20})^2 + (A_{23}x - A_{21})^2 x}{(x^2 - A_{12}x + A_{10})^2 + (A_{13}x - A_{11})^2 x} x, \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} [\varphi_{n_2}(\omega) - \varphi_{n_1}(\omega)] &= \\ &= \frac{(A_{22}x - A_{20})(x^2 - A_{12}x + A_{10}) - (A_{23}x - A_{21})(A_{13}x - A_{11})x}{[(A_{22}x - A_{20})(A_{13}x - A_{11}) + (A_{23}x - A_{21})(x^2 - A_{12}x + A_{10})]\sqrt{x}}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\lambda_I^2(\omega) = \frac{A_{31}^2 x + (A_{32} x - A_{30})^2}{(A_{22} x - A_{20})^2 + (A_{23} x - A_{21})^2} x, \quad (34)$$

для обратной задачи

$$\left[ \frac{|A_{u_2}(\omega)|}{|A_{u_2}(\omega)|} \right]^2 = \frac{(B_{22} x - B_{20})^2 + (B_{23} x - B_{21})^2 x}{[B_{11}^2 x + (B_{12} x - B_{10})^2] x}, \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{tg} [\varphi_{u_2}(\omega) - \varphi_{n_2}(\omega)] = \\ & = \frac{(B_{22} x - B_{20})(B_{12} x - B_{10}) - B_{11}(B_{23} x - B_{21}) x}{[(B_{22} x - B_{20}) B_{11} + (B_{23} x - B_{21})(B_{12} x - B_{10})] \sqrt{x}}, \end{aligned} \quad (36)$$

$$\lambda_{II}^2(\omega) = 0,01 \frac{B_{31}^2 x + (B_{32} x - B_{30})^2}{(B_{22} x - B_{20})^2 + (B_{23} x - B_{21})^2 x}. \quad (37)$$

14. Анализ формул (32) — (37) позволяет высказать ряд общих заключений.

Передаточная функция амплитуд  $\frac{|A_{n_2}|}{|A_{u_2}|}$  для прямой задачи, согласно (32), обращается в нуль при  $\omega=0$ . Это означает, что длиннопериодические колебания вертикальной скорости не оказывают почти никакого воздействия на движение самолета. Это означает также, что длиннопериодические пульсации вертикальной скорости в атмосфере весьма плохо определяются по записи акселерографа, поскольку даже большие значения  $u_2$  вызывают лишь малые перегрузки  $n_2$ , и меньшая абсолютная ошибка регистрации последних приведет, вообще говоря, к большой ошибке определения  $u_2$ . Этот вывод получен А. С. Дубовым [1].

При малых  $\omega$  рассматриваемая функция ведет себя как линейная функция, а именно

$$\left| \frac{A_{n_2}}{A_{u_2}} \right|(\omega) \approx \frac{A_{20}}{A_{10}} \omega = \omega,$$

т. е. безразмерная передаточная функция равна безразмерной частоте.

При больших значениях  $\omega$  функция стремится к конечной величине

$$\left| \frac{A_{n_2}}{A_{u_2}} \right|(\infty) = A_{23} = a_{22} = \frac{1}{2} (c_x + c_y^a),$$

не зависящей от передаточного числа автопилота. Это означает, что для высокочастотных колебаний передаточная функция амплитуд перестает зависеть от частоты и целиком определяется (в своей безразмерной форме) аэродинамическим коэффициентом  $a_{22}$ .

Передаточная функция амплитуд для обратной задачи в том виде, в каком она входит в (35), обращается при  $\omega=0$  в бесконечность. Это обстоятельство и, кроме того, желательность сопоставления функций для прямой и обратной задач делают более удобным введение выражения, обратного (35), т. е.

$$\left[ \frac{|A_{n_2}(\omega)|}{|A_{u_2}(\omega)|} \right]^2 = \frac{B_{11}^2 x + (B_{12} x - B_{10})^2}{(B_{22} x - B_{20})^2 + (B_{23} x - B_{21})^2 x}. \quad (35')$$

Согласно (35), передаточная функция амплитуд для обратной задачи  $\frac{|A_{n_2}|}{|A_{u_2}|}$  также обращается в нуль при  $\omega=0$ , а при малых  $\omega$  ведет себя как  $\frac{B_{10}}{B_{20}} \omega = \omega$ , т. е. так же, как и безразмерная передаточная функция амплитуд для прямой задачи, равна самой безразмерной ча-

стоте. При больших же значениях  $\omega$  функция стремится тоже к конечному значению, но, вообще говоря, к иному, чем в случае прямой задачи. Именно теперь

$$\left| \frac{A_{n_2}}{A_{u_2}} \right|(\infty) = \frac{B_{12}}{B_{23}} = a_{22} + \frac{a_{21}}{a_{11}} \left( a_{13} + \frac{1}{2} a_{21} \right).$$

Это предельное значение совпадает с предыдущим только в случае, когда  $a_{13} + \frac{1}{2} a_{21} = 0$ , т. е. когда  $a_{12} = 0$ , или, что то же, когда  $c_y = c_x^*$ .

Из сказанного вытекает, что идеальный автопилот влияет лишь на значения передаточных функций амплитуд в промежуточной части спектра частот. Предельные значения этих функций для больших и для малых частот от идеального автопилота не зависят.

15. Рассмотрим формулы для передаточных функций фаз колебаний (33) и (36), причем опять для удобства сравнения с (33) перепишем (36) в виде

$$\operatorname{tg} [\varphi_{n_2}(\omega) - \varphi_{u_2}(\omega)] = \frac{B_{11}(B_{23}x - B_{21})x - (B_{22}x - B_{21})(B_{12}x - B_{10})}{[(B_{22}x - B_{20})B_{11} + (B_{23}x - B_{21})(B_{12}x - B_{10})] \sqrt{x}}. \quad (36')$$

Согласно (33), при малых  $\omega$   $\operatorname{tg}(\varphi_{n_2} - \varphi_{u_2})$  ведет себя как

$$\frac{-A_{20}A_{10}}{A_{20}A_{11} - A_{10}A_{21}} \frac{1}{\omega} = \frac{-\left(\frac{1}{2} a_{21}^2 m^2 + B_{12}c\right)}{a_{11}(m^2 + c)} \frac{1}{\omega}$$

и при  $\omega \rightarrow 0$  обращается в  $-\infty$ , причем  $\varphi_{n_2} - \varphi_{u_2}$  обращается в  $-\frac{\pi}{2}$ , т. е. колебания  $n_2$  «опережают» колебания  $u_2$  на четверть периода. Этот вывод означает, что длиннопериодические колебания вертикальной скорости самолета совпадают по фазе с колебаниями вертикальной скорости воздуха, поскольку, как известно, колебания ускорения  $n_2$  «опережают» колебания скорости  $\varphi_2$  на четверть периода.

Коэффициент при  $\frac{1}{\omega}$  в последней формуле зависит от передаточного числа автопилота  $c$ , но зависимость эта слабая, поскольку величины  $\frac{1}{2} a_{21}^2$  и  $B_{12}$  не сильно отличаются друг от друга.

При больших  $\omega$  передаточная функция фаз для прямой задачи (33) ведет себя как

$$\frac{A_{22} - A_{23}A_{13}}{A_{23}} \frac{1}{\omega} = -\left(m^2 + a_{22} - \frac{a_{12}a_{21}}{a_{22}}\right) \frac{1}{\omega}$$

и при  $\omega \rightarrow \infty$  стремится к нулю со стороны отрицательных значений. Иначе говоря, с ростом частоты фаза перегрузки  $n_2$  стремится к совпадению с фазой вертикальной скорости воздуха  $u_2$ . При этом колебания вертикальной скорости самолета отстают от колебаний  $u_2$  на четверть периода. Коэффициент при  $\frac{1}{\omega}$  в соответствующей формуле не зависит от идеального автопилота.

Анализ формулы (36') для обратной задачи приводит к выводам, в качественном отношении аналогичным предыдущим, но количе-

ственно отличающимся от них. Функция  $\operatorname{tg}(\varphi_{n_2} - \varphi_{u_2})$  из (36') ведет себя при малых  $\omega$  как

$$\frac{-B_{20}B_{10}}{B_{10}B_{21} - B_{20}B_{11}} \frac{1}{\omega} = \frac{-(a_{21}^2 m^\alpha + B_{12}c)}{a_{11}(m^\alpha + c)} \frac{1}{\omega},$$

а при больших  $\omega$  как

$$\frac{B_{11}B_{23} - B_{22}B_{12}}{B_{23}B_{12}} \frac{1}{\omega} = -\left(m^\alpha + \frac{B_{12}}{a_{11}} - \frac{a_{21}^2}{B_{12}}\right) \frac{1}{\omega}.$$

16. «Функции ошибок»  $\lambda_I$  и  $\lambda_{II}$  представляют собой с формальной точки зрения «передаточные функции» амплитуд от  $u_1$  к  $u_2$  и от  $n_1$  к  $n_2$  соответственно. Согласно (24), функция  $\lambda_I$  при малых  $\omega$  ведет себя как

$$\lambda_I(\omega) \approx -\frac{A_{30}}{A_{20}} \omega = -\frac{a_{21}(m^\alpha + c)}{\frac{1}{2}a_{21}^2 m^\alpha + B_{12}c} \omega$$

(знак минус введен потому, что коэффициент  $a_{21}$  существенно отрицателен, а  $\lambda_I(\omega)$  — величина положительная) и с уменьшением  $\omega$  стремится к нулю. С ростом  $\omega$   $\lambda_I(\omega)$  стремится к конечному пределу

$$\lambda_I(\infty) = -\frac{A_{32}}{A_{23}} = -\frac{a_{21}}{a_{23}}.$$

Аналогичны предельные виды функции  $\lambda_{II}(\omega)$ , а именно при малых  $\omega$

$$\lambda_{II}(\omega) = -0,1 \frac{B_{30}}{B_{20}} \omega = -0,1 \frac{a_{21}(m^\alpha + c)}{a_{21}^2 m^\alpha + B_{12}c} \omega$$

и при больших

$$\lambda_{II}(\infty) = 0,1 \frac{B_{32}}{B_{23}} = -0,1 \frac{a_{21}}{a_{11}}.$$

Отсюда следует, что для длиннопериодических колебаний относительная роль отбрасываемых факторов мала, а для короткопериодических колебаний эта роль составляет некоторый конечный процент.

Анализ функции  $\lambda_{II}$  не дает полностью определенного ответа о влиянии отброшенной горизонтальной перегрузки, поскольку при малых частотах функция (35) стремится к бесконечности, а  $\lambda_{II}$  — к нулю. Поэтому целесообразно рассмотреть еще передаточную функцию амплитуд от  $n_1$  к  $u_2$ , квадрат которой дается равенством

$$\left[ \frac{|A_{u_2}|(\omega)}{|A_{n_1}|(\omega)} \right]^2 = \frac{B_{31}^2 x + (B_{32}x - B_{30})^2}{B_{11}^2 x + (B_{12}x - B_{10})^2}. \quad (38)$$

Согласно (38), функция  $\frac{|A_{u_2}|}{|A_{n_1}|}$  стремится к конечным пределам и при больших и при малых частотах, а именно

$$\left| \frac{A_{u_2}}{A_{n_1}} \right| (0) = \frac{B_{30}}{B_{10}} = -\frac{a_{21}(m^\alpha + c)}{a_{21}^2 m^\alpha + B_{12}c},$$

$$\left| \frac{A_{u_2}}{A_{n_1}} \right| (\infty) = \frac{B_{32}}{B_{12}} = -\frac{a_{21}}{B_{12}}.$$

Это означает, что горизонтальная перегрузка вносит при определении вертикальной скорости в атмосфере вклад, конечный как при больших, так и при малых частотах колебаний.

Интересно, что в случае автопилота с большим передаточным числом  $c$  значения этой передаточной функции при малых и больших  $\omega$  совпадают.

### § 5. Примеры

17. На основании полученных формул был произведен расчет примеров для тех же самолетов и тех же режимов, как это сделано А. С. Дубовым в работе [3]. Сопоставление полученных результатов с результатами подсчетов Дубова позволяет выявить влияние идеального автопилота. В табл. 1 приведены исходные аэродинамические параметры самолета ПО-2 и скоростного самолета, в табл. 2 даны результаты вычислений тех же коэффициентов  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$ , которые не зависят от передаточного числа автопилота.

Таблица 1

	$a_{11}$	$a_{12}$	$a_{21}$	$a_{22}$	$m^a$	$m^b$
ПО-2 . . . . .	0,122	0,191	-0,610	1,95	0,057	1,80
Скоростной самолет . . . . .	0,027	0,150	-0,400	2,29	21,2	1,57

Таблица 2

	$A_{12}$	$A_{22}$	$A_{32}$	$A_{31}$	$B_{12}$	$B_{11}$	$B_{22}$	$B_{21}$	$B_{32}$	$B_{31}$	
ПО-2 . . . . .	7,47	1,95	7,33	-0,610	-3,29	0,308	1,78	0,122	0,967	0,610	3,29
Скоростной самолет . . . . .	7,02	1,29	7,27	-0,400	-1,89	0,0820	0,509	0,027	0,209	0,400	1,89

Имея в виду возможность варьирования передаточного числа автопилота, мы выбрали три значения параметра  $c$ , а именно  $c=0$ ,  $c=2$  и  $c=4$ . Соответствующие значения коэффициентов  $A_{ij}$  и  $B_{ij}$ , зависящих от  $c$ , приведены в табл. 3.

Таблица 3

	$c$	$A_{12}$	$A_{11}$	$A_{10}$	$A_{21}$	$A_{20}$	$A_{30}$	$B_{10}$	$B_{21}$	$B_{20}$	$B_{30}$
ПО-2 . . . . .	0	8,05	1,45	0,0106	1,44	0,0106	-0,035	0,021	1,79	0,021	0,035
	2	10,05	5,58	0,627	5,34	0,627	-1,26	0,637	2,03	0,637	1,26
	4	12,05	9,74	1,243	9,24	1,243	-2,48	1,263	2,28	1,253	2,48
	Скоростной самолет . . . . .	0	28,6	0,96	1,70	0,383	1,70	-8,48	3,40	1,08	3,40
	2	30,6	5,59	1,86	4,96	1,86	-9,28	3,56	1,13	3,56	9,28
	4	32,6	10,23	2,03	9,54	2,03	-10,08	3,73	1,19	3,73	10,08

Результаты расчетов передаточных функций представлены графически на рис. 1—8. Из анализа кривых на этих рисунках вытекают следующие заключения.

1. Действие идеального автопилота не сводится к уменьшению при прочих равных условиях колебаний самолета во всем спектре частот. Уменьшая амплитуды колебаний в одних участках спектра частот, идеальный автопилот увеличивает эти амплитуды в других участках. В практически интересном интервале частот идеальный автопилот, как правило, уменьшает размахи колебаний меньших частот и увеличивает размахи колебаний больших частот. На передаточную функцию амплитуд колебаний для очень больших и очень малых частот идеальный автопилот не влияет.



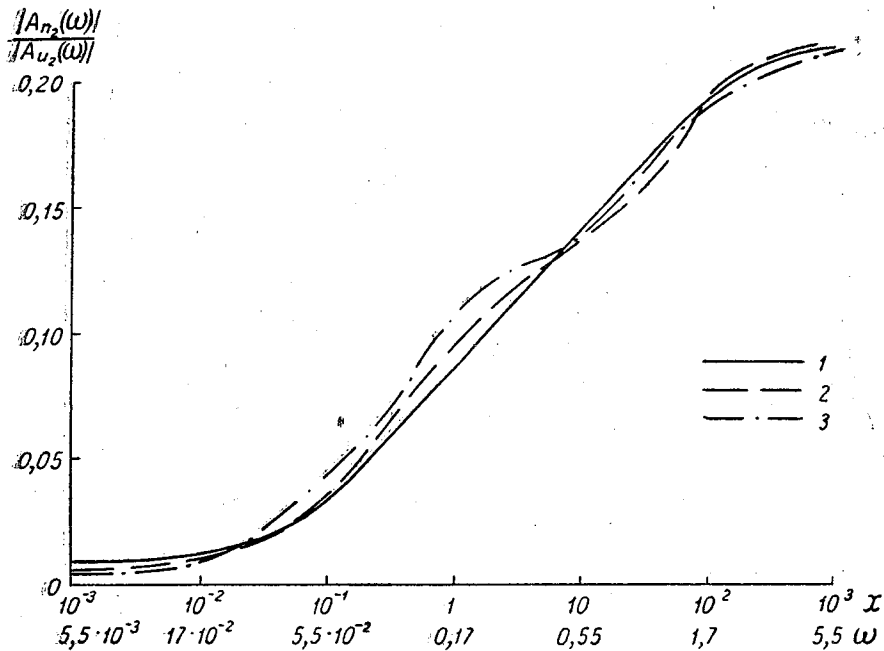


Рис. 1. Передаточная функция амплитуд прямой задачи в пренебрежении горизонтальной пульсацией скорости движения воздуха  $\frac{|A_{n_2}(\omega)|}{|A_{u_2}(\omega)|}$  для самолета ПО-2.

По оси абсцисс отложены в логарифмическом масштабе безразмерная переменная  $x$  (верхняя шкала) и частота  $\omega$  в герцах (нижняя шкала).  
 $1 - c = 0, 2 - c = 2, 3 - c = 4.$

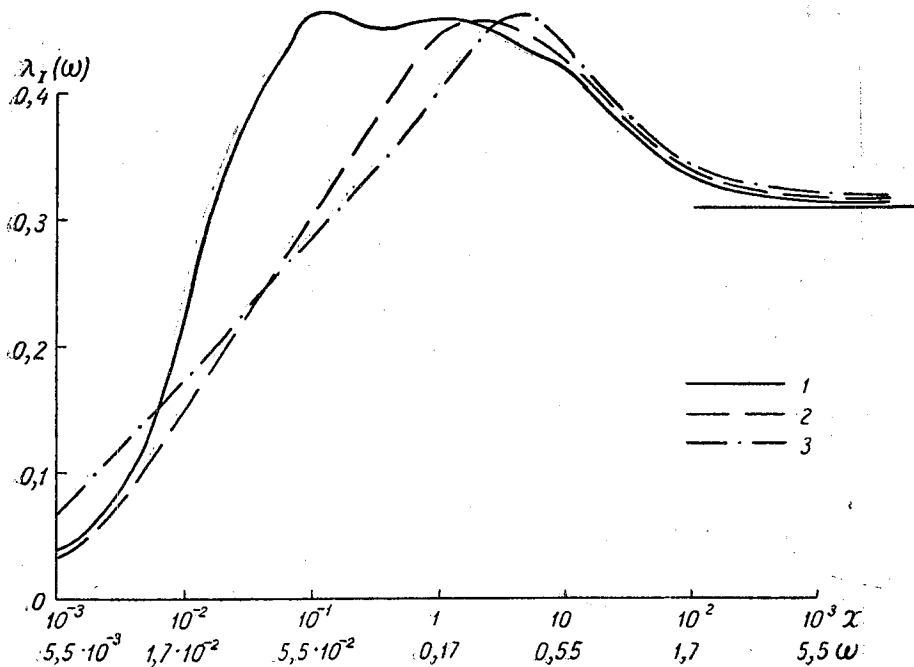


Рис. 2. Функция ошибок  $\lambda_1(\omega)$  прямой задачи для самолета ПО-2.

Усл. обозначения см. на рис. 1.

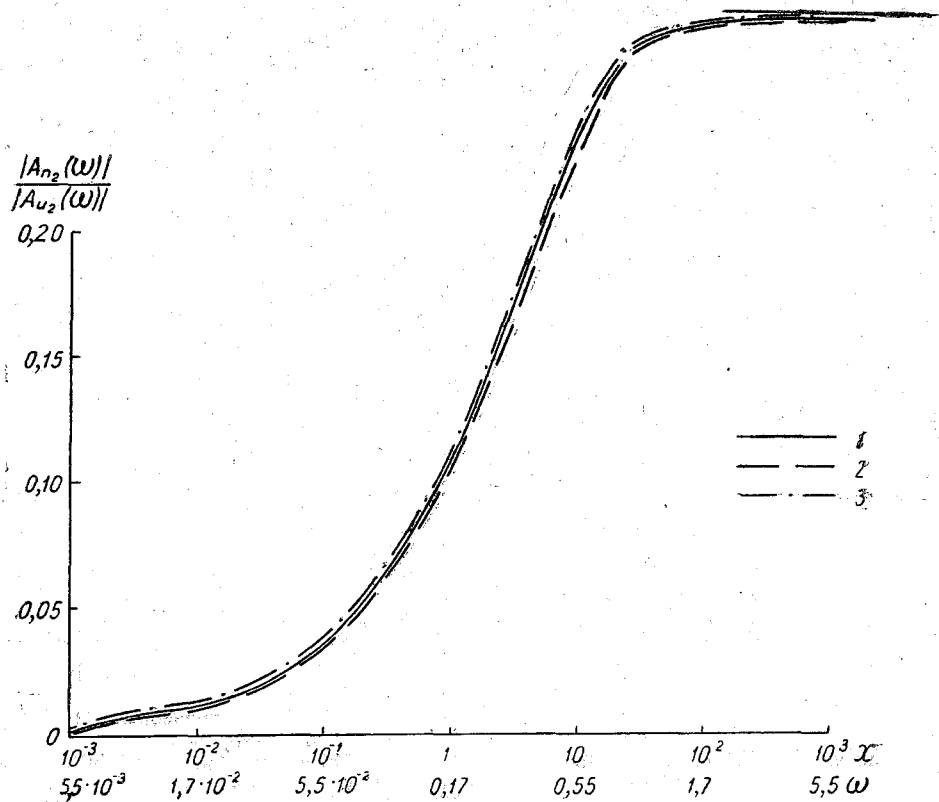


Рис. 3. Передаточная функция амплитуд обратной задачи в пренебрежении горизонтальной перегрузкой самолета для самолета ПО-2.  
Усл. обозначения см. на рис. 1.

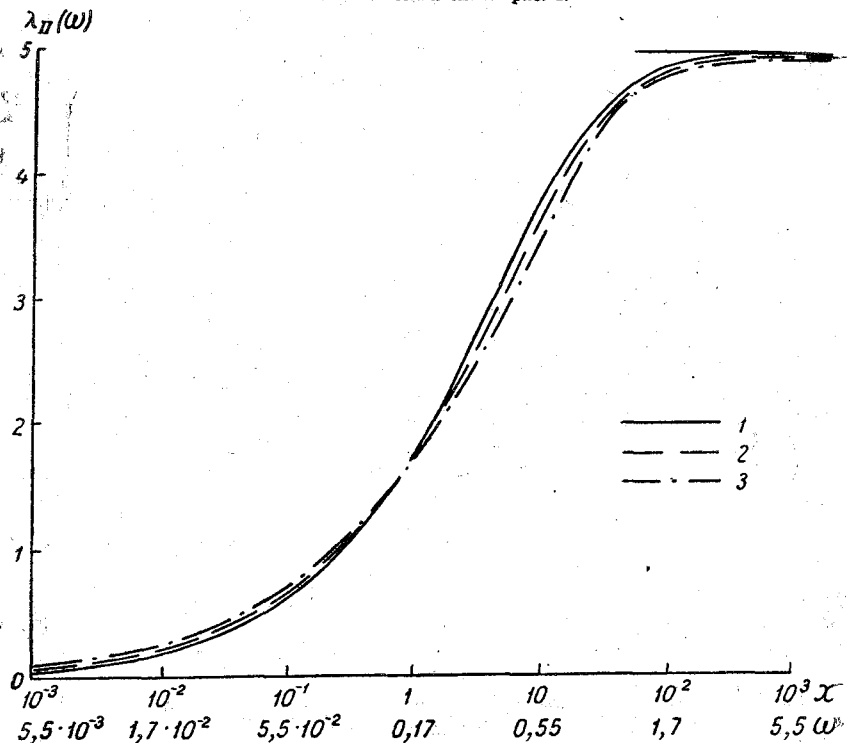


Рис. 4. Функция ошибок  $\lambda_D(\omega)$  обратной задачи для самолета ПО-2.  
Усл. обозначения см. на рис. 1.

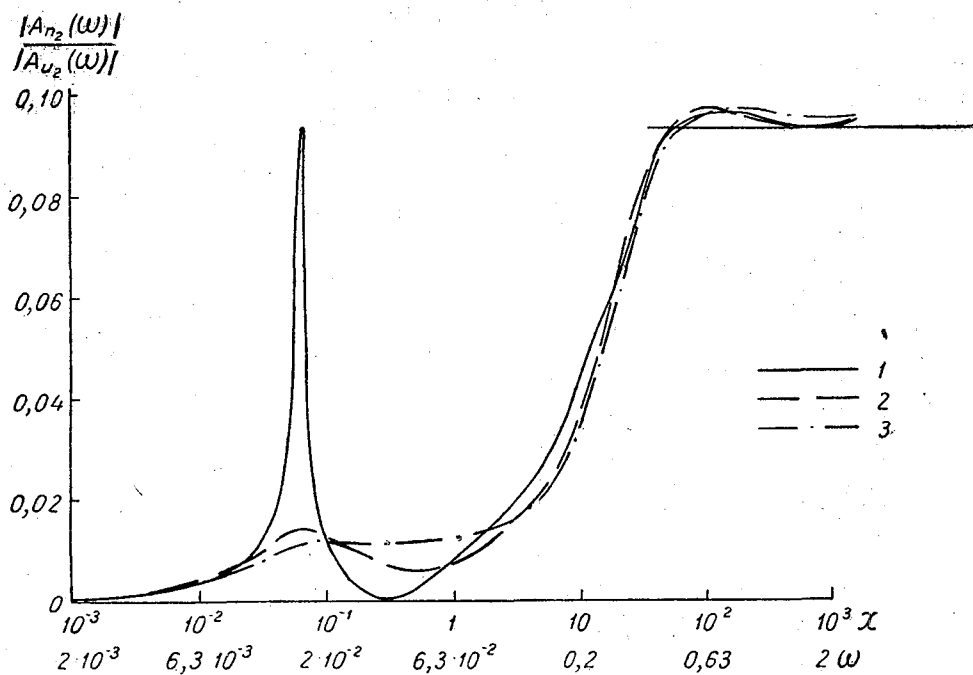


Рис. 5. Передаточная функция амплитуд прямой задачи в пренебрежении горизонтальной пульсацией скорости движения воздуха для скоростного самолета.  
Усл. обозначение см. на рис. 1.

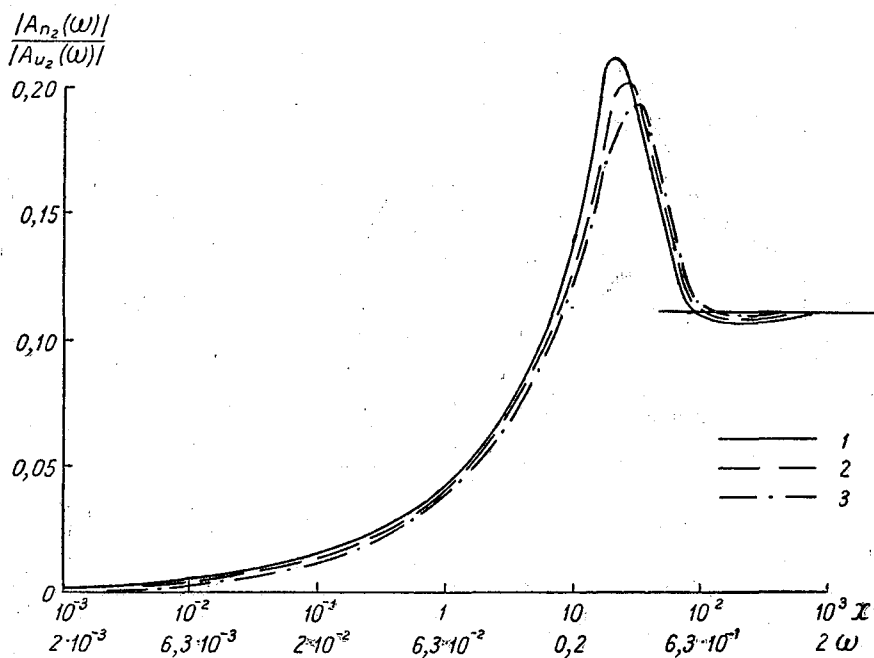


Рис. 6. Передаточная функция амплитуд обратной задачи в пренебрежении горизонтальной перегрузкой самолета для скоростного самолета.  
Усл. обозначения см. на рис. 1.

2. Влияние автопилота на передаточные функции характеризуется также «срезанием» максимумов и минимумов этих функций: максимальные значения функций уменьшаются, а минимальные — увеличиваются, в результате чего передаточная функция становится более близкой к монотонной.

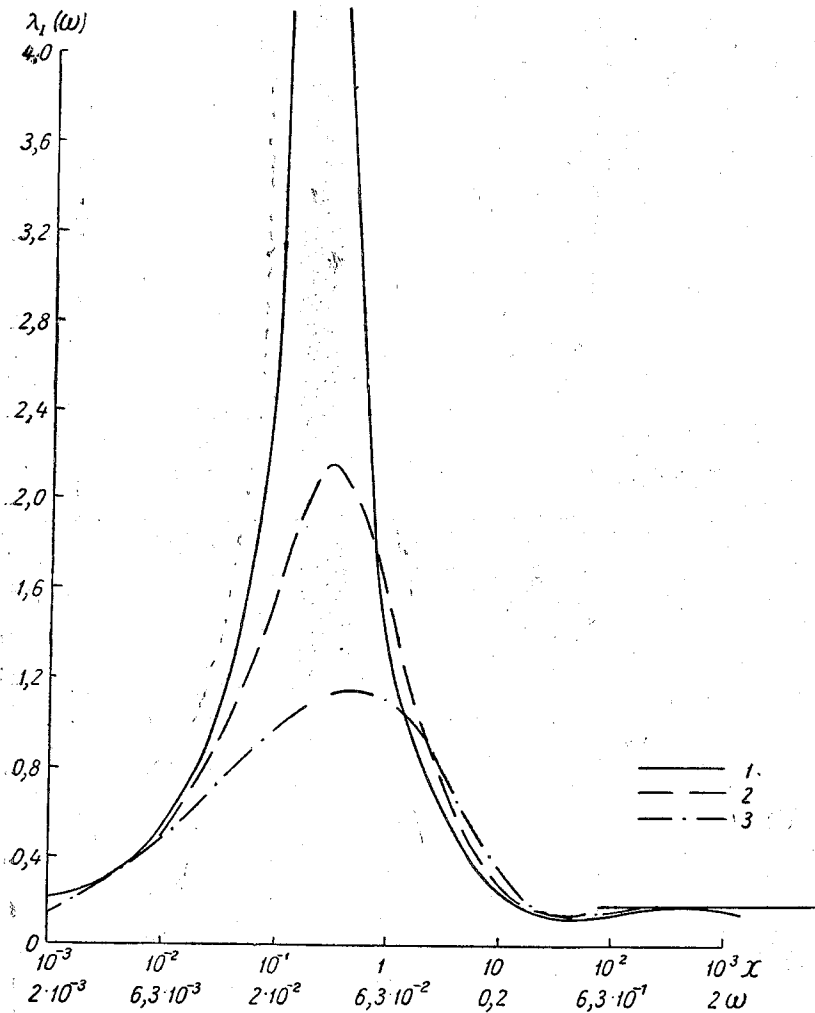


Рис. 7. Функция ошибок  $\lambda_1(\omega)$  прямой задачи для скоростного самолета.

Усл. обозначения см. на рис. 1.

3. Влияние автопилота на колебания самолета ПО-2, который и без автопилота чрезвычайно устойчив, невелико. Значительно существеннее влияние автопилота на скоростной самолет, выражающееся главным образом в упомянутом выше срезании максимумов и минимумов передаточных функций.

4. Передаточная функция амплитуд горизонтальной перегрузки на вертикальные скорости в атмосфере в весьма широком участке спектра частот практически постоянна.

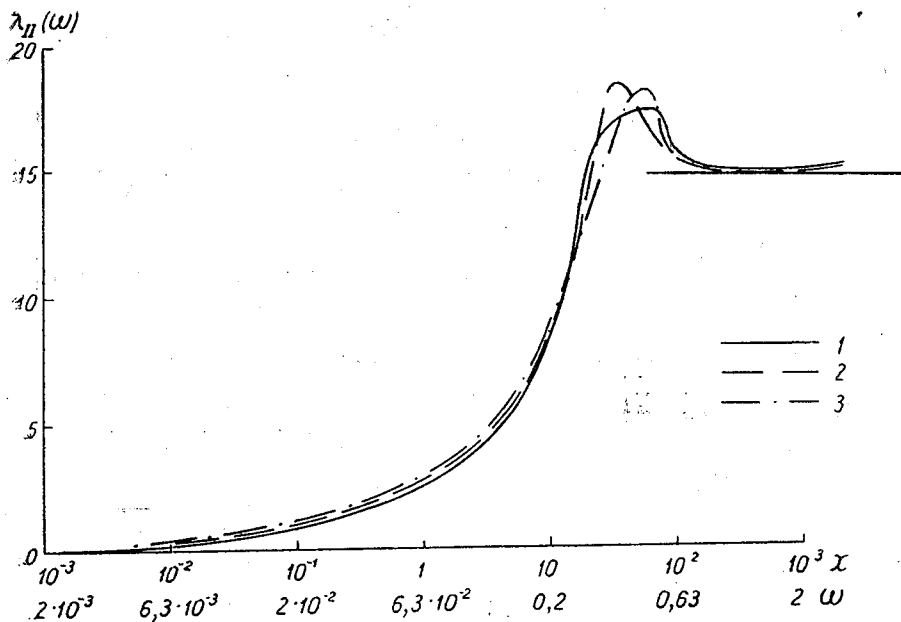


Рис. 8. Функция ошибок  $\lambda_{II}(\omega)$  обратной задачи для скоростного самолета.

Усл. обозначения см. на рис. 1.

## РЕЗЮМЕ

В статье построена система дифференциальных уравнений, описывающих продольные колебания самолета в турбулентной атмосфере при наличии линейного автопилота. Для случая идеального автопилота получены и детально проанализированы спектральные передаточные функции для амплитуд и фаз колебаний.

В качестве примера приведены вычисления спектральных передаточных функций для двух самолетов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Дубов А. С. Определение вертикальных порывов ветра по показаниям акселерографа, установленного в центре тяжести самолета. Труды ГГО, вып. 16 (78), 1949.
2. Воронцов П. А., Дубов А. С. Методика исследования структуры воздушного потока с самолета. Труды ГГО, вып. 51 (113), 1955.
3. Дубов А. С. К вопросу определения вертикальных скоростей ветра по данным самолетного акселерографа. Труды ГГО, вып. 81, 1959.
4. Остославский И. В., Калачев Г. Ф. Продольная устойчивость и управляемость самолета. Оборонгиз, 1949.
5. Ольман Б. В., Токарев В. П., Соловьев Я. И. Автопилоты. Оборонгиз, 1946.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ПОРЫВОВ ВЕТРА ПО ЗАПИСЯМ АКСЕЛЕРОГРАФА НА УПРАВЛЯЕМОМ САМОЛЕТЕ

1. В настоящее время существует целый ряд исследований, посвященных определению вертикальных порывов ветра по данным о перегрузках центра тяжести летящего самолета. Одним из наиболее существенных ограничений, используемых при таких расчетах, является требование «невмешательства» летчика в управление самолетом. Это требование делает практически невозможным определение вертикальных порывов ветра в случае сильно развитой турбулентности, так как в условиях резкой болтанки полет в течение 1—2 мин. без управления связан с риском для жизни экипажа. Поэтому определение этим методом вертикальных токов в кучевых облаках, представляющих значительный интерес для метеорологов, оказывается невозможным. Можно назвать целый круг вопросов, для решения которых знание вертикальных токов в условиях сильно развитой турбулентности является основным.

2. Попытка учесть эффект влияния рулей управления была сделана Л. С. Гандиным в задаче об определении вертикальных порывов ветра по записям ускорений центра тяжести самолета, снабженного автопилотом [1]. Рассмотренный случай идеального автопилота позволил получить количественные поправки, учитывающие эффект гашения возмущений.

Естественный интерес вызывает более общая постановка задачи. Пусть имеются характеристики перегрузок самолета, являющихся результатом влияния как порывов ветра (болтанка), так и изменения положения рулей. Требуется исключить из имеющихся акселерограмм ускорения маневра и восстановить распределение порывов ветра, обусловившее данную степень болтанки. Для решения этой задачи необходимо иметь, естественно, дополнительную информацию о кинематике или динамике рулей. Решение этой задачи позволит выполнять расчеты вертикальных скоростей ветра для полетов в областях с сильно развитой болтанкой, когда сильные броски самолета могут выправляться усилиями летчика на соответствующие рули.

3. В качестве основного движения мы примем прямолинейный, горизонтальный равномерный полет. Тогда, ограничиваясь рамками линейной теории, из общей системы уравнений движения самолета можно выделить группу уравнений, содержащих только параметры продольного движения. В обычных аэродинамических задачах эта система содержит скорости самолета относительно воздуха. Если в эту систему ввести теперь характеристики скорости самолета относительно земли, то в ней появляются члены, содержащие характеристики скорости переносного движения, т. е. скорости воздушной среды. Полученная таким

образом система уравнений позволяет установить связь между отклонениями самолета от установившегося полета и порывами ветра.

Как показал М. И. Юдин, эта система для случая полета без вмешательства летчика в управление самолетом имеет следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} + a_{11}\varphi_1 + a_{12}\varphi_2 + a_{13}\varphi_3 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ \frac{d\varphi_2}{dt} + a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2 - a_{22}\varphi_3 &= a_{11}u_1 + a_{22}u_2 \\ \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + a_{44}\frac{d\varphi_3}{dt} + a_{41}\varphi_1 + a_{42}\varphi_2 - a_{42}\varphi_3 &= \\ &= a_{41}u_1 + a_{42}u_2 + b_{43}\frac{du_2}{dt} \end{aligned} \right\} (1)$$

где  $\varphi_1$ ,  $u_1$ ,  $\varphi_2$  и  $u_2$  — пульсации горизонтальных (индекс 1) и вертикальных (индекс 2) скоростей самолета и ветра соответственно,  $\varphi_3$  — угол тангажа,  $a_{ij}$  — постоянные коэффициенты, зависящие от аэродинамических и конструктивных характеристик самолета и от режима основного полета,  $t$  — безразмерное время.

Если во время полета летчик будет менять положение руля высоты, то тем самым будут меняться и аэродинамические силы и моменты, действующие на самолет. В современных курсах аэродинамики (например, [2]) принимается, что при этом наибольшие изменения будет претерпевать момент сил в продольной плоскости, что изменениями проекций сил на продольную и нормальную оси самолета, обусловленными отклонением руля высоты, можно пренебречь. Таким образом, два первых уравнения системы (1) останутся неизменными, а в третьем уравнении появится дополнительный член.

4. Для определения этого члена запишем уравнение моментов для возмущенного движения в виде

$$I \frac{d\varphi_3}{dt} = \Delta M' + M_z^{\delta} \delta, \quad (2)$$

где  $I$  — момент инерции самолета,  $\Delta M'$  — приращения момента аэродинамических сил без вмешательства летчика,  $M_z^{\delta}$  — производная от момента аэродинамических сил в продольной плоскости самолета по углу отклонения руля высоты,  $\delta$  — отклонение руля высоты,  $\bar{t}$  — размерное время.

Приращение момента за счет отклонения руля высоты принято здесь линейной функцией этого отклонения, поскольку мы остаемся в рамках линеаризованной задачи.

Используя равенство

$$M_z^{\delta} = m_z^{\delta} S b_a \frac{\rho V^2}{2},$$

где  $S$  — площадь крыльев самолета,  $b_a$  — аэродинамическая хорда крыла,  $\rho$  — плотность воздуха,  $V$  — скорость невозмущенного полета самолета, и переходя к безразмерным переменным, мы получим требуемое уравнение моментов с учетом изменения руля высоты. Так как уравнение (2) отличается от аналогичного уравнения, из которого было получено третье уравнение системы (1), только наличием члена  $M_z^{\delta} \delta$ ,

то интересующая нас система будет отличаться от системы (1) членом в третьем уравнении, содержащем  $\delta$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dt} + a_{11}\varphi_1 + a_{12}\varphi_2 + a_{13}\varphi_3 &= a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ \frac{d\varphi_2}{dt} + a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2 - a_{22}\varphi_3 &= a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \\ \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + a_{44}\frac{d\varphi_3}{dt} + a_{41}\varphi_1 + a_{42}\varphi_2 - a_{42}\varphi_3 &= \\ &= a_{41}a_1 + a_{42}u_2 + b_{43}\frac{du_2}{dt} + m_\delta\delta \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где

$$a_{11} = c_x + k, \quad a_{12} = \frac{c_y - c_x^\alpha}{2}, \quad a_{13} = \frac{c_x^\alpha}{2},$$

$$a_{21} = -c_y, \quad a_{22} = \frac{c_x + c_y^\alpha}{2}, \quad b_{43} = -m_\alpha,$$

$$a_{41} = -m_\alpha c_y, \quad a_{42} = -m_\alpha + m_\alpha \frac{c_x + c_y^\alpha}{2}, \quad a_{44} = m_q + m_\alpha.$$

В качестве характерного времени здесь была принята величина  $\tau = \frac{m}{\rho S V}$ , относительной плотности  $\mu = \frac{m}{\rho S b_a}$  ( $m$  — масса самолета). Поэтому формулы для коэффициентов  $m_q$ ,  $m_\alpha$  и  $m_\delta$  имеют следующий вид:

$$m_q = -\frac{m_z^\omega}{2r_z^2}, \quad m_\alpha = -\frac{m_z^\alpha}{2r_z^2},$$

$$m_\alpha = -\mu \frac{m_z^\alpha}{2r_z^2}, \quad m_\delta = \frac{m_z^\delta \mu}{2r_z^2},$$

где  $r_z^2 = \frac{I_z}{mb_a^2}$  — квадрат безразмерного радиуса инерции самолета относительно оси  $OZ$ .

5. Система (3), состоящая из трех уравнений, связывает шесть величин:  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ,  $u_1$ ,  $u_2$  и  $\delta$ . Таким образом, каждая из них может быть выражена через три любые из оставшихся функций.

Поскольку нашей задачей является определение вертикальных порывов ветра по колебаниям самолета, то интересующее нас  $u_2$  может быть выражено через  $\varphi_2$ ,  $\delta$  и любую из двух величин:  $\varphi_3$  (угол тангажа) или  $\varphi_1$  (горизонтальную скорость центра тяжести самолета).

Аналогичная задача возникает при определении вертикальных порывов ветра при полете без вмешательства летчика (там, конечно, отсутствует член  $\delta$ ). Поскольку регистрация вспомогательной величины ( $\varphi_3$  или  $\varphi_1$ ) с требуемой точностью связана с рядом трудностей приборного характера и учет ее значительно усложняет расчеты, то был разработан ряд приближенных методов для расчета вертикальных порывов ветра только по записям вертикальных перегрузок. Мы не будем здесь останавливаться на вопросе оптимального соответствия того или иного метода точному решению (см. [3]). Так как целью данной статьи является разработка способа учета воздействий летчика, то, акцентируя внимание на этом вопросе, мы для упрощения дальнейшего изложения зададимся наиболее простым и распространенным приближением, позволяющим исключить из рассмотрения дополнительную вели-



чину  $\varphi_3$  или  $\varphi_1$ . При желании этот метод может быть обобщен и на другие приближения или применен к точному решению.

Говоря о наиболее простом приближении, мы имеем в виду приближение, основанное на дифференциальных, а не на конечных соотношениях, между вертикальным порывом ветра и вертикальной перегрузкой самолета. Это приближение может быть получено, если в системе (1) пренебречь горизонтальными движениями. Если аналогичное допущение сделать относительно системы (3), то задача сводится к решению двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_2}{dt} + a_{22}\varphi_2 - a_{22}\varphi_3 &= a_{22}u_2 \\ \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} + a_{44}\frac{d\varphi_3}{dt} + a_{42}\varphi_2 - a_{42}\varphi_3 &= a_{42}u_2 + b_{43}\frac{du_2}{dt} + m_3\delta \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Исключая  $\varphi_3$  и вводя в рассмотрение вертикальную перегрузку  $n_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$ , получим

$$u_2'' + \sigma u_2' = a_0 n_2'' + a_1 n_2' + a_2 n_2 + a_3 \delta, \quad (5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= m_q \\ a_0 &= \frac{2}{c_x + c_y^\alpha} \\ a_1 &= 1 + \frac{2(m_q + m_a)}{c_x + c_y^\alpha} \\ a_2 &= m_q + \frac{2m_a}{c_x + c_y^\alpha} \\ a_3 &= -m_3 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Штрихи означают дифференцирование по безразмерному времени. Решение уравнения (5) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} u_2 = c_1 + c_2 e^{-\sigma t} - \frac{1}{\sigma} \int_0^t (a_0 n_2'' + a_1 n_2' + a_0 n_2 + \\ + a_3 \delta) [e^{-\sigma(t-\tau)} - 1] d\tau, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — постоянные интегрирования.

Так как запись перегрузок дает нам значения  $n_2(t)$ , а графическое дифференцирование связано с большими ошибками, то для членов, содержащих производные от  $n_2$ , выполним интегрирование по частям. Тогда

$$\begin{aligned} u_2 = c_1 - \frac{a_1}{\sigma} n_2(0) - \frac{a_0}{\sigma} n_2'(0) + \left[ c_2 + \frac{(a_1 - a_0\sigma) n_2(0) + a_0 n_2'(0)}{\sigma} \right] e^{-\sigma t} + \\ + a_0 n_2(t) + \frac{1}{\sigma} \int_0^t [a_2 n_2(\tau) + a_3 \delta(\tau)] d\tau - \frac{1}{\sigma} \int_0^t [(a_2 - a_1\sigma + \\ + a_0\sigma^2) n_2(\tau) + a_3 \delta(\tau)] e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (8)$$

Первые три члена представляют некоторую постоянную для данной записи величину. Заметим, что  $\sigma$  обычно положительно и весьма велико, что обеспечивает очень быстрое затухание влияния начальных условий.

Таким образом, за исключением небольшого участка в начале акселерограммы, процесс можно рассматривать как установившийся. Тогда с точностью до произвольной постоянной, которая может быть определена из условий равенства нулю средней величины вертикальных порывов на участке зондирования, решение (8) можно переписать в виде

$$u_2 = \frac{1}{\sigma} \int_0^t [a_2 n_2(\tau) + a_3 \delta(\tau)] d\tau + a_0 n_2(t) - \\ - \frac{1}{\sigma} \int_0^t [(a_2 - a_1 \sigma + a_0 \sigma^2) n_2(\tau) + a_3 \delta(\tau)] e^{-\sigma(t-\tau)} d\tau. \quad (9)$$

Выражение (9) нельзя, естественно, трактовать как соотношение, позволяющее определить вклад отклонений руля высоты под воздействием летчика в расчетные значения вертикальной скорости ветра. Ускорения  $n_2(\tau)$ , снимаемые с акселерограммы, обусловлены как влиянием порывов ветра, так и влиянием усилий летчика на руль высоты. Члены, содержащие  $\delta(\tau)$ , компенсируют вторую составляющую регистрируемых ускорений, и таким образом  $u_2$  определяется только по «ветровым» составляющим ускорения.

При отсутствии отклонений руля высоты уравнение (5) переходит в известное приближение для связи между  $u_2$  и  $n_2$  при полете без вмешательства летчика. При отсутствии порывов ветра это уравнение переходит в соотношение между перегрузками и отклонениями руля высоты, приводимое в современных курсах аэродинамики [2].

## РЕЗЮМЕ

В статье выводится соотношение, позволяющее рассчитывать порывы ветра по записям вертикальных перегрузок центра тяжести самолета на управляемом самолете. Влияние усилий летчика на руль высоты исключается путем привлечения к расчетам записей отклонения руля высоты.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. О колебаниях самолета, снабженного автопилотом, в турбулентной атмосфере (см. настоящий сб.).
2. Остославский И. В. Аэродинамика самолета. М., Оборонгиз, 1958.
3. Дубов А. С. К вопросу определения вертикальных скоростей ветра по данным самолетного акселерографа. Труды ГГО, вып. 81, 1959.

## **СВЯЗЬ МЕЖДУ ПАРАМЕТРАМИ БОЛТАНКИ САМОЛЕТОВ РАЗЛИЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ОДНИХ И ТЕХ ЖЕ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ**

Болтанка самолетов относится к одному из наиболее вредных результатов влияния метеорологических условий на полет самолета. В лучшем случае это явление приводит к чрезмерной напряженности летчика (а следовательно, и быстрой его утомляемости) во время пилотирования транспортных самолетов, а в наиболее неблагоприятных случаях может вызвать катастрофу.

Степень интенсивности болтанки зависит, как известно, не только от характера метеорологических условий, но и от конструктивных параметров самолета и режима полета. Самолеты с различными характеристиками устойчивости будут, естественно, по-разному реагировать на возмущения набегающего потока, поэтому может оказаться, что на участке трассы, относительно спокойном для самолета определенного типа, машина другой конструкции будет испытывать интенсивную болтанку.

Прежде всего определим, как мы будем оценивать болтанку. При обычных полетах возмущенное движение самолета оценивается по субъективным ощущениям летчика. Существует определенная шкала болтанки с несколькими градациями, которые условными значками фиксируются в бортовом журнале.

Легко себе представить количественные инструментальные измерения отклонений параметров кинематики самолета от установившегося режима полета. Такими параметрами могут быть, вообще говоря, возмущения углов, определяющих положение самолета в пространстве (углы тангажа, крена и рыскания), броски самолета по высоте, пульсации скорости, отдельные компоненты ускорений центра тяжести самолета. Выбор того или иного параметра определяется главным образом простотой и надежностью его регистрации.

При современном состоянии техники этим требованиям наиболее полно отвечает вертикальный компонент ускорения центра тяжести самолета. Прежде всего он сравнительно легко и надежно регистрируется специальными самописцами — акселерографами [1], [2]. Н. З. Пинус, обработав огромное количество данных о перегрузках, установил известное соответствие между шкалой болтанки и величиной регистрируемых прибором ускорений, выполняющееся только при значительном осреднении материала наблюдений [3], [4]. Вряд ли нужно здесь специально говорить о преимуществе инструментальных записей, поскольку возможность субъективной ошибки в оценке отдельного случая болтанки и зависимость этой оценки от натренированности пилота совершенно очевидны.

Болтанка самолета сопровождается, естественно, не только появлением вертикальных перегрузок, но также возникновением разворотов, появлением крена, резких боковых бросков и т. д. Все эти возмущения связаны между собой. Характер связи определяется дифференциальными уравнениями возмущенного движения самолета. В специальных задачах о поведении отдельных приборов на самолете, таких как, например, задача о стабилизации гировертикали, могут потребоваться и другие характеристики болтанки, скажем характеристики пульсаций углов тангажа и крена, но для общей постановки задачи, для общей оценки болтанки достаточно ограничиться вертикальными перегрузками.

Причиной болтанки самолета являются возмущения набегающего воздушного потока, атмосферные вихри самых различных размеров и интенсивностей, переносимые воздушными течениями. Самолет при полете в реальной атмосфере обтекается потоком, скорость которого все время пульсирует по величине и направлению. В силу анизотропности коэффициентов сопротивления самолет особенно резко реагирует на изменение вертикальных компонентов ветра.

В настоящее время существует целый ряд приближенных соотношений, связывающих вертикальные перегрузки самолета с вертикальными компонентами порывов ветра. Анализ возникающих при этом ошибок и некоторые рекомендации по использованию того или иного приближения даны в работе [5]. Приближенность упомянутых соотношений обусловлена тем, что система дифференциальных уравнений продольных колебаний самолета, состоящая из трех уравнений, связывает между собой пять функций (вертикальные и горизонтальные компоненты скорости самолета и ветра и угол тангажа). Таким образом, каждая из этих функций может быть выражена через две другие из оставшихся четырех. Так, например, вертикальная скорость порыва ветра может быть точно выражена через значения вертикального и продольного компонентов ускорений центра тяжести самолета, через значение вертикального компонента этого ускорения и значения угла тангажа и т. п. Можно выразить также вертикальную перегрузку через значения вертикальных и горизонтальных порывов ветра.

Отдельные члены, содержащиеся в этих точных соотношениях, имеют различный порядок величины, поэтому после пренебрежения ими могут быть получены приближенные соотношения, связывающие вертикальные порывы ветра теперь уже только с одним из параметров кинематики самолета — вертикальным ускорением центра тяжести.

В настоящей статье использовано приближение, полученное в работе [6], которое дает неплохие результаты для устойчивых самолетов. Согласно этому приближению, должно выполняться следующее равенство:

$$u_z(t) = \int_0^t n(\tau) d\tau + bn(t) + C, \quad (1)$$

где  $u_z(t)$  — вертикальный компонент порыва ветра,  $n(t)$  — вертикальные ускорения центра тяжести самолета,  $b$  — коэффициент, зависящий от аэродинамических характеристик самолета и режима полета,  $C$  — постоянная интегрирования, определяемая из условия равенства нулю значения  $u_z$ , осредненного за достаточно большой интервал времени.

Если выражения (1) записать в безразмерном виде, то

$$b = \frac{1}{(C_y^a + C_x)} \left( 1 + \frac{C_x^a}{C_y} \right), \quad (2)$$

где  $C_y$  и  $C_x$  — коэффициенты подъемной силы и лобового сопротивления соответственно,  $C_y^a$  и  $C_x^a$  — производные от этих коэффициентов по углу атаки.

Поставленная задача о связи между параметрами болтанки двух самолетов различных конструкций может быть решена с помощью соотношения (1). Применим это равенство к обоим самолетам и отметим, что левые части при этом должны оставаться неизменными, поскольку вертикальные скорости в атмосфере не зависят от того, какой самолет пересекает данную воздушную массу. Приравнявая правые части полученных соотношений, легко получить дифференциальное уравнение, решение которого и будет ответом на поставленный вопрос.

Но здесь возникает следующая трудность. Вертикальные скорости в атмосфере являются не только функцией координат, но зависят также и от времени. Приравнивая между собой значения вертикальных скоростей воздушных масс, пересекаемых двумя разными самолетами в один и тот же момент времени, мы не можем, так как из-за различных скоростей полета самолеты будут находиться в рассматриваемый момент времени в разных точках пространства. Вертикальные скорости воздушных масс могут отличаться друг от друга в этих точках вследствие пространственной изменчивости этой характеристики поля ветра.

Приравнивая значения вертикальных скоростей ветра при прохождении самолетами одной и той же точки пространства также, строго говоря, нельзя, так как самолеты проходят эту точку в различные моменты времени и здесь может сказаться временная изменчивость поля вертикальных скоростей.

Оценим прежде всего изменчивость вертикальных скоростей ветра во времени и пространстве. По отношению к движущемуся самолету полное изменение вертикальной скорости ветра запишется в виде

$$\frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + V_c \frac{\partial u_z}{\partial x}, \quad (3)$$

где  $\frac{\partial u_z}{\partial t}$  — изменение вертикального компонента ветра в фиксированной точке пространства,  $V_c$  — скорость самолета.

Согласно широко применяющейся в метеорологии гипотезе о переносе пульсаций средним потоком можно записать следующее равенство, достаточно точно выполняющееся в реальной атмосфере:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} \approx - V_B \frac{\partial u_z}{\partial s}, \quad (4)$$

где  $V_B$  — средняя скорость ветра,  $s$  — горизонтальная координата, отсчитываемая по направлению ветра.

Если отвлечься от фронтальных областей и других резких неоднородностей, то в среднем можно считать, что  $\frac{\partial u_z}{\partial x}$  мало зависит от выбранного направления  $x$  (т. е. от направления полета самолета). Тогда, согласно равенству (4), окажется, что первый член в правой части соотношения (3) в  $\frac{V_B}{V_c}$  раз меньше второго.

Если мы теперь для упрощения поставленной задачи о соотношении интенсивностей болтанки двух разных самолетов пренебрежем локальной производной по времени в выражении (3), т. е. будем считать  $u_z$  только функцией  $x$ , то, согласно сказанному, возникающая погрешность будет при этом порядка  $\frac{V_B}{V_C}$ .

Иными словами, если скорость самолета значительно больше скорости ветра, то можно считать, что самолет пересекает стационарное поле вертикальных порывов ветра. Естественно, что такое предположение можно делать только для небольших интервалов времени. Время выдерживания самолета на горизонтальном участке при определении характеристик болтанки составляет примерно 1—2 мин., т. е. является достаточно малым.

На основании всего сказанного перепишем выражение (1) в виде

$$u_z(x) = \frac{1}{V} \int_0^x n(\zeta) d\zeta + bn(x) + C, \quad (5)$$

использовав соотношение

$$x = Vt,$$

где  $V$  — средняя скорость полета.

Применяя соотношение (5) к двум различным самолетам и приравнявая левые части (теперь  $u_z$  определяется только координатой  $x$ ), найдем

$$\frac{1}{V_1} \int_0^x n^{(1)}(\zeta) d\zeta + b_1 n^{(1)}(x) + C_1 = \frac{1}{V_2} \int_0^x n^{(2)}(\zeta) d\zeta + b_2 n^{(2)}(x) + C_2, \quad (6)$$

где индексом 1 обозначены данные одного самолета, а индексом 2 — данные другого.

Дифференцируя выражение (6) по  $x$  и интегрируя полученное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{V_1} n^{(1)}(x) + b_1 \frac{dn^{(1)}(x)}{dx} = \frac{1}{V_2} n^{(2)}(x) + b_2 \frac{dn^{(2)}(x)}{dx} \quad (7)$$

относительно  $n^{(1)}(x)$ , запишем

$$n^{(1)}(x) = n^{(1)}(0) e^{-\frac{x}{b_1 V_1}} + \frac{1}{b_1 V_2} \int_0^x e^{-\frac{x-\zeta}{b_1 V_1}} \left[ n^{(2)}(\zeta) + b_2 V_2 \frac{dn^{(2)}(\zeta)}{d\zeta} \right] d\zeta. \quad (8)$$

Выражение (8) позволяет определять характеристики болтанки одного самолета, если известны таковые для другого самолета в тех же метеорологических условиях.

Для приведения соотношения (8) к расчетному виду остановимся прежде всего на аналитическом выражении зависимости перегрузок от координаты  $x$  (на акселерограммах обычно откладывается не координата  $x$ , а время  $t$ , связанное с  $x$  соотношением  $t = \frac{x}{V}$ ). Анализ многочисленных акселерограмм самолетных зондирований, проведенных Центральной аэрологической обсерваторией, показал, что с достаточной степенью точности эту зависимость можно представить в виде ломаной линии. Такое представление акселерограмм носит несколько стилизо-

ванный характер. На самом деле в вершинах и впадинах записи острых углов нет и ускорения плавно переходят от роста к убыванию и, наоборот, от убывания к росту без резких скачков производной, что и позволило нам дифференцировать соотношение (6).

Но для численного определения интеграла, содержащегося в выражении (8), мы воспользуемся упомянутой стилизацией, т. е. разобьем запись на участки, ограниченные соседними экстремумами, и примем, что внутри каждого интервала перегрузка изменяется линейно.

Выражение (8) можно тогда переписать в виде

$$n^{(1)}(x) = n^{(1)}(0) e^{-\frac{x}{b_1 V_1}} + \frac{1}{b_1 V_2} e^{-\frac{x}{b_1 V_1}} \sum_{i=2}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} e^{\frac{\zeta}{b_1 V_1}} \left[ n_{i-1}^{(2)} + \frac{n_i^{(2)} - n_{i-1}^{(2)}}{x_i - x_{i-1}} (\zeta - x_{i-1}) + b_2 V_2 \frac{n_i^{(2)} - n_{i-1}^{(2)}}{x_i - x_{i-1}} \right] d\zeta \quad (9)$$

или после взятия квадратур

$$n^{(1)}(x) = e^{-\frac{x}{b_1 V_1}} \left[ n^{(1)}(0) + \frac{V_1}{V_2} \sum_{i=2}^k e^{\frac{x_i}{b_1 V_1}} \left\{ n_{i-1}^{(2)} + \frac{\Delta_i n^{(2)}}{\Delta_i x} (b_2 V_2 - b_1 V_1) \left( 1 - e^{-\frac{\Delta_i x}{b_1 V_1}} \right) + \Delta_i n^{(2)} \right\} \right], \quad (10)$$

где  $\Delta_i n = n_i - n_{i-1}$ ,  $\Delta_i x = x_i - x_{i-1}$ ,  $n^{(1)}(0)$  — значение перегрузки первого самолета в начале площадки,  $n_i^{(2)}$  и  $x_i$  — координаты точек изломов акселерограммы,  $n_k^{(2)}$  — значение перегрузки второго самолета на расстоянии  $x_k$  от начала отсчета пути,  $x_k$  — координата точки, в которой мы хотим определить значение перегрузки.

Акселерограмма обычно задается (таблично или графически) в виде функции перегрузки самолета от времени, а не от пространственной координаты. Поэтому для расчетов удобнее в выражении (10) заменить  $x_i$  и  $\Delta x_i$  на  $t_i = \frac{x_i}{V_2}$  и  $\Delta t_i = \frac{\Delta x_i}{V_2}$

$$n^{(1)}(t) = e^{-\frac{V_2 t}{V_1 b_1}} \left[ n^{(1)}(0) + \frac{V_1}{V_2} \sum_{i=2}^k e^{\frac{V_2 t_i}{V_1 b_1}} \times \left\{ \left[ n_{i-1}^{(2)} + \frac{\Delta_i n^{(2)}}{\Delta_i t} \left( b_2 - \frac{V_1}{V_2} b_1 \right) \right] \left( 1 - e^{-\frac{V_2 \Delta_i t}{V_1 b_1}} \right) + \Delta_i n^{(2)} \right\} \right]. \quad (11)$$

Значение  $n^{(1)}(0)$  — величина перегрузки в начальный момент — остается неопределенным. Так как влияние начальных условий распространяется весьма недалеко в силу наличия экспоненциального множителя  $e^{-\frac{V_2 t}{V_1 b_1}}$ , то при производстве расчетов можно ограничиться участками акселерограммы, где влияние начальных условий практически от-

существует. В проделанных расчетах это влияние исчезало примерно через 5 сек. при общей продолжительности записи 1 мин.

Зависимость полученного решения от аэродинамических характеристик и режимов полета обоих самолетов очевидна из выражения (11). Влияние метеорологических условий сказывается менее явным образом. Прежде всего это влияние заключено в величинах перегрузок  $n_i^{(2)}$ , поскольку один и тот же самолет при различной интенсивности вертикальных движений воздуха будет испытывать различные вертикальные ускорения.

Помимо величины вертикальных скоростей, существенное значение имеет также изменчивость вертикальных скоростей в пространстве (характерные размеры вихрей в атмосфере). При переходе от пространственных характеристик к временным это означает, что результат расчета весьма существенно зависит от величины  $\Delta_i t$ , точнее не от абсолютной величины  $\Delta_i t$ , а от безразмерного отношения  $\frac{V_2 \Delta_i t}{V_1 b_1}$ .

Разберем два крайних случая, когда это отношение очень велико и когда очень мало.

$$a) \quad \frac{V_2 \Delta_i t}{V_1 b_1} \gg 1.$$

Пренебрегая  $e^{-\frac{V_2 \Delta_i t}{V_1 b_1}}$  по сравнению с единицей и членом

$$\frac{\Delta_i n}{V_2 \Delta_i t} \left( \frac{b_2 V_2}{b_1 V_1} - 1 \right)$$

по сравнению с  $n_i$ , что всегда можно сделать при достаточно больших значениях  $\Delta_i t$ , из равенства (11) получим

$$n^{(1)}(t) = e^{-\frac{V_2 t}{V_1 b_1}} \frac{V_1}{V_2} \sum_{i=2}^k n_i^{(2)} e^{\frac{V_2 t_i}{V_1 b_1}}, \quad (12)$$

или, ограничься  $k$ -тым членом суммы,

$$\frac{n^{(1)}(t)}{V_1} = \frac{n^{(2)}(t)}{V_2}. \quad (13)$$

Таким образом, при структуре вертикальных скоростей, очень медленно изменяющихся в пространстве, перегрузки самолетов не зависят от аэродинамических свойств конструкции и определяются только скоростями полета (при заданном поле вертикальных скоростей ветра).

К этому же заключению можно прийти и другим путем. Если в атмосфере существуют только вихри очень большого масштаба, которые как бы захватывают самолет, а более мелкие вихревые образования, создающие дополнительные скорости относительно самолета, отсутствуют, то

$$v_{jz} = u_z, \quad (14)$$

т. е. самолет переносится в вертикальном направлении вместе с воздухом, успевая в каждый момент времени воспринимать вертикальную скорость воздушной среды. Тогда

$$n^{(j)} = \frac{dv_{jz}}{dt} = V_j \frac{\partial v_{jz}}{\partial x},$$



откуда на основании равенства (14) следует

$$\frac{n^{(j)}}{V_j} = \frac{du_z}{dx} = C$$

(постоянная  $C$  зависит только от метеорологических условий и не зависит от типа самолета).

$$б) \quad \frac{V_2}{V_1} \frac{\Delta t}{b_1} \ll 1.$$

Этот случай соответствует резкой изменчивости вертикальных скоростей в пространстве. Самолет в полете пересекает мелкие вихри, причем вследствие малости их характерных горизонтальных размеров не успевает принимать вертикальную скорость воздушной среды. Тогда в равенстве

$$u_z = v_{jz} + b_j n^{(j)} \quad (15)$$

большую роль начинает играть второй член. Приравнявая опять правые части соотношения (15), можно записать приближенное равенство

$$b_1 n^{(1)} = b_2 n^{(2)}. \quad (16)$$

Таким образом, отношение перегрузок самолетов двух различных конструкций заключено в пределах между  $\frac{V_1}{V_2}$  и  $\frac{b_2}{b_1}$ .

То или иное значение исследуемого отношения в полученном интервале, границы которого определяются аэродинамическими характеристиками  $\frac{b_2}{b_1}$  или характеристиками режимов полета  $\frac{V_1}{V_2}$ , обуславливается метеорологическими условиями, структурой вертикальных порывов ветра. При наличии в набегающем потоке возмущений интенсивной завихренности (малые линейные размеры и большие окружные скорости) отношение перегрузок определяется аэродинамическими характеристиками самолетов. В случае незначительной завихренности набегающих возмущений (большие диаметры и малые окружные скорости) отношение перегрузок приближается к  $\frac{V_1}{V_2}$ , т. е. делается зависящим только от отношения скоростей.

Для проверки полученных зависимостей между характеристиками болтанки самолетов различных конструкций в одинаковых метеорологических условиях были обработаны данные комплексной экспедиции, проводимой под руководством Центральной аэрологической обсерватории.

Зондирование проводилось самолетами ЛИ-2 и ПО-2 в слое от 100 до 3000 м. Записи ускорений производились акселерографами системы DVL (на самолете ПО-2) и обычным рейсовым (на самолете ЛИ-2).

Идеальная постановка эксперимента, когда характеристики колебаний самолета определяются в тождественных условиях (структура и пространственное распределение вертикальных скоростей воздушной среды), естественно, невозможна в силу изменчивости мгновенных распределений порывов ветра. Получить материалы для детального сравнения хода мгновенных значений перегрузок различных самолетов оказывается, таким образом, невозможно. Поэтому для сравнения будут использованы статистические характеристики болтанки. Для акселерограмм такими характеристиками могут служить средние (по модулю) значения ускорений центра тяжести самолета и средние периоды. Такие

осредненные характеристики будут определяться (помимо конструктивных данных самолета) общими термодинамическими условиями воздушной среды, в которой происходит полет. Полеты самолетов в среде с приблизительно одинаковыми термодинамическими условиями осуществить сравнительно легко.

Для получения таких материалов были отобраны все случаи полетов самолетов обоих типов над равниной, отличающиеся друг от друга по срокам полета не больше часа и при разностях высот, не превосходящих нескольких десятков метров. Таким образом, тождественность термодинамических условий (воздушной среды), в которой производилось зондирование различными самолетами, старались обеспечивать при отборе материала максимальным сближением временных и пространственных координат обоих полетов.

Существует и другой метод отбора таких данных — привлечение к рассмотрению материалов зондирований, проводимых в различное время суток и на различных высотах, но с одинаковыми характеристиками термодинамических условий воздушной среды (например, с одинаковыми числами Ричардсона, которые широко используются при подобного рода анализах). Так как мы не располагали достаточными данными по распределению среднего ветра и температуры на высотах, то такой метод сравнения использован не был.

Требованиям максимально близкой последовательности зондирований различными самолетами отвечали 8 пар серий, данные о которых сведены в табл. 2.

Так как развертка времени у рейсового акселерографа была недостаточно быстрой, определить средние периоды для перегрузок по акселерограммам ЛИ-2 оказалось невозможным и сравнение характеристик болтанки пришлось ограничить сопоставлением средних амплитуд ускорений центра тяжести самолетов.

Расчетные значения  $b_j$  для соответствующего диапазона скоростей и высот полета, обычно встречающихся при зондировании, сведены в табл. 1.

Выражение (2) дает безразмерную форму записи  $b_j$ . При получении расчетной формулы (11) следовало прежде всего перейти к размерным величинам, так как в противном случае оказалось бы, что мы приравнивали между собой значения вертикальных скоростей, измеренные в разных единицах. Если учесть, что  $n$  снимается с акселерограмм в долях  $g$  (ускорение силы тяжести), то выражение (1) в размерной форме примет следующий вид:

$$u(t) = g \int_0^t n(\tau) d\tau + b_{\text{без}} \frac{G}{\rho s V} n(t) + C,$$

где  $G$  — вес самолета,  $\rho$  — плотность воздуха,  $s$  — площадь несущих поверхностей,  $V$  — скорость полета самолета.

Значение  $b_j$ , необходимое для расчетов по соотношению (8), определится тогда из соотношения

$$b_j = \frac{G_j}{g \rho s_j V_j (C_{y_j}^z + C_{x_j})} \left( 1 + \frac{C_{x_j}^z}{C_{y_j}} \right). \quad (17)$$

По этой формуле и рассчитывались  $b_j$ , приведенные в табл. 1 (значения  $\rho$  брались согласно данным о стандартной атмосфере).

Значения параметра  $b$  (м/сек)

H, м	V, км/час					
	80	90	105	120	200	210
	ПО-2 (G = 1100 кг)			ЛИ-2 (G = 11 000 кг)		
100	-5,46	4,60	3,74	3,28	5,05	4,78
200	-5,48	4,62	3,76	3,31	5,07	4,80
500	5,58	4,71	4,21	3,38	5,12	4,90
1000	—	4,90	4,38	3,80	5,58	5,32
2000	—	6,18	5,09	4,26	6,41	6,04

На рис. 1 и 2 даны примеры акселерограмм для ПО-2, снятые непосредственно с записи прибора, и для ЛИ-2, полученные расчетным путем по материалам зондирования на ПО-2.

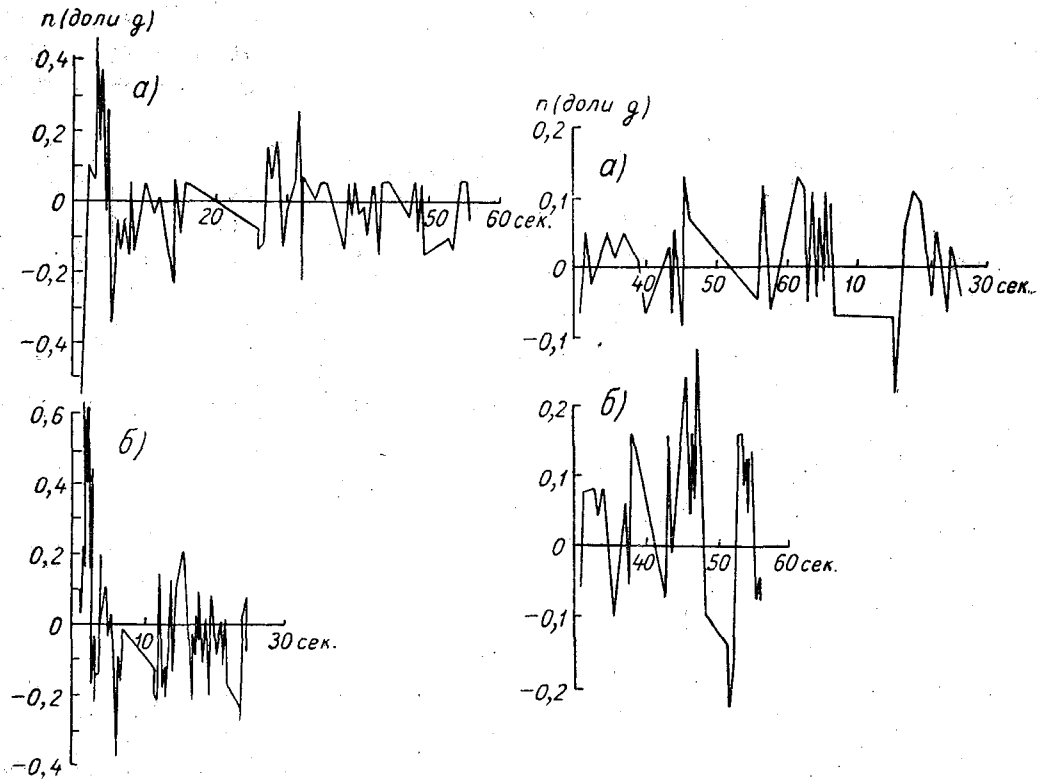


Рис. 1. Образцы акселерограмм:  
а — для ПО-2 (фактическая), б — для ЛИ-2 (рассчитанная).

Помимо расчетов по формуле (11), перегрузки ЛИ-2 определялись также другим расчетным методом. В литературе по определению вертикальных порывов ветра по записям акселерографа широко используется соотношение

$$u_z = b_1 n, \quad (18)$$

где  $u_z$  — вертикальный порыв ветра,  $n$  — вертикальная перегрузка центра тяжести самолета,  $b_1$  — коэффициент пропорциональности, зави-

сящий от аэродинамических свойств самолета, режима полета и др.,

$$b_1 = \frac{G}{g \rho S V C_y^{\alpha}} \cdot 2 \quad (19)$$

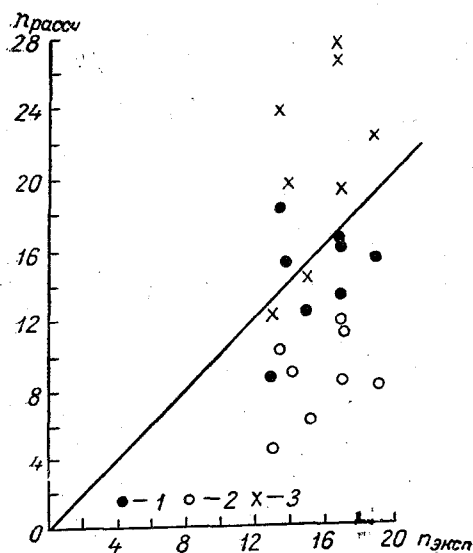


Рис. 2. Сопоставление фактических и расчетных значений перегрузок самолета ЛИ-2 по акселерограммам для ПО-2. 1 — по формуле (11), 2 — по формуле (13), 3 — по формуле (20).

Как видно из сопоставления выражений (19) и (17), эти параметры весьма близки друг к другу.

Если использовать соотношение (19) в качестве связи между вертикальными порывами ветра и ускорениями самолета, то, повторив все рассуждения, которые приводились при выводе выражения (8), мы получим расчетную формулу такого вида:

$$n^{(1)}(x) = \frac{b_1^{(2)}}{b_1^{(1)}} n^{(2)}(x). \quad (20)$$

Это выражение совпадает с выражением (16), т. е. является частным случаем расчетной формулы (11), относящимся к условиям резкой изменчивости вертикальных порывов ветра по трассе полета.

Результаты расчетов по формулам (11) и (20) сведены в табл. 2.

Таблица 2

Тип самолета	Дата	Время (час. мин.)	Высота (м)	Перегрузки в долях g			
				ПО-2	ЛИ-2		экспериментальные значения
					формула (11)	формула (20)	
ПО-2	13/VII	14 35—36	1000	0,09	0,15	0,09	0,14
ЛИ-2		14 30—33					
ПО-2	13/VII	14 40—41	500	0,11	0,18	0,10	0,14
ЛИ-2		14 37—40					
ПО-2	14/VII	12 35—36	200	0,11	0,15	0,08	0,19
ЛИ-2		14 18—20					
ПО-2	14/VII	12 42—43	500	0,09	0,13	0,08	0,17
ЛИ-2		13 28—31					
ПО-2	18/VII	12 01—02	200	0,12	0,16	0,11	0,17
ЛИ-2		12 50—53					
ПО-2	18/VII	12 07—08	500	0,13	0,16	0,12	0,17
ЛИ-2		13 00—03					
ПО-2	19/VII	8 52—53	500	0,07	0,12	0,06	0,15
ЛИ-2		8 45—48					
ПО-2	19/VII	8 55—56	200	0,06	0,08	0,04	0,13
ЛИ-2		8 36—39					

Эти же данные нанесены на рис. 2, где приведены также результаты расчетов по формуле (13). Из рисунка следует, что лучшее совпадение расчетных и экспериментально полученных значений перегрузок самолета ЛИ-2 позволяет получить формула (11). Соотношения (13) и (20) дают, как и следовало ожидать, заниженные и завышенные значения соответственно.

Наблюдающийся разброс точек в значительной мере может быть отнесен за счет неполной тождественности термодинамических условий воздушных сред, в которых происходили полеты.

Некоторое улучшение результатов может быть получено также при использовании более точных дифференциальных соотношений между вертикальными порывами ветра и ускорениями центра тяжести самолета [5].

Автор весьма признателен Н. З. Пинусу за предоставление материалов по самолетному зондированию, а также начальнику комплексной экспедиции А. Х. Хргиану и руководителю авиационных исследований В. А. Александрову за оказанную помощь при получении экспериментальных материалов, необходимых для выполнения изложенной работы.

## РЕЗЮМЕ

В статье излагается метод определения вертикальных ускорений центра тяжести самолета под влиянием порывов ветра по данным об аналогичных ускорениях самолета другой конструкции в тех же условиях порывистости. Проводится сопоставление рассчитанных и измеренных величин осредненных значений ускорения для самолетов ПО-2 и ЛИ-2.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кобринский Н. Е. Методы и приборы для измерения ускорений. Л. — М., АН СССР, 1942.
2. Калининский А. Б. и Пинус Н. З. Аэрология. Гидрометиздат, 1951.
3. Пинус Н. З. К вопросу об экспериментальном исследовании порывистости воздушных потоков в свободной атмосфере. Метеорология и гидрология, № 4, 1946.
4. Пинус Н. З. К вопросу об оценке атмосферной турбулентности по интенсивности болтанки скоростных самолетов. Метеорология и гидрология, № 10, 1956.
5. Дубов А. С. К вопросу определения вертикальных скоростей ветра по данным самолетного акселерографа. Труды ГГО, вып. 81, 1959.
6. Дубов А. С. Определение скорости вертикальных порывов ветра при самолетных зондированиях с помощью акселерографа. Труды ГГО, вып. 16(78), 1949.

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА ПО УСКОРЕНИЮ САМОЛЕТА

Процессы турбулентного перемешивания в атмосфере имеют весьма большое значение как для решения прикладных задач, так и для общих теоретических исследований.

Наибольший интерес представляют в настоящее время характеристики вертикального обмена. В приземном слое коэффициент вертикального перемешивания изучен весьма подробно. Работы советских метеорологов [1], [2] позволяют с удовлетворительной точностью и достаточной оперативностью определять этот коэффициент с помощью градиентных наблюдений над распределением ветра и температуры в приземном слое воздуха. Сопоставление результатов определения коэффициента обмена независимыми методами доказывает надежность применяемых способов.

Не следует думать, что задача определения коэффициента перемешивания в приземном слое решена полностью. Еще до сих пор не найдены методы достаточно точного определения характеристик обмена в глубоких инверсиях, совершенно не изучено количественное влияние на обмен рельефа, неоднородностей подстилающей поверхности и других факторов. Но во всяком случае можно утверждать, что для приземного слоя существуют некоторые проверенные схемы расчета коэффициента вертикального турбулентного обмена, уточнением и дальнейшей разработкой которых можно распространить эти методы и на другие условия.

К сожалению, применить эту методику к свободной атмосфере невозможно. Упомянувшиеся расчеты для приземного слоя воздуха базируются на широком использовании теории пограничного слоя. Отсутствие ограничивающей твердой стенки существенно меняет картину обмена. Резкое увеличение спектра вихрей приводит к необходимости отнесения полученных значений коэффициента обмена к определенному масштабу. Известны экспериментальные исследования турбулентности по теплоотдаче шаров, которые привели к очень малым значениям обмена в свободной атмосфере; это явилось следствием того факта, что практически в эксперименте учитывалось только влияние короткопериодической части спектра вихрей (малый диаметр шаров) [3]. Вопрос о количественном спектральном анализе коэффициента турбулентного обмена еще находится в стадии общих теоретических рассмотрений и далек от приложения к практическим расчетам.

В приземном слое за характеристику обмена принимается результат влияния вихрей всех размеров, пронизывающих данный слой. Максимальные размеры вихрей определяются высотой слоя воздуха, для которого требуется определить характеристики обмена. С этой точки

зрения различие значений коэффициента вертикального обмена на разных уровнях можно рассматривать как следствие изменения частот прохождения вихрей различных характерных размеров с высотой.

В свободной атмосфере такая суммарная оценка обмена не может удовлетворить всех запросов к характеристикам обмена со стороны различных отраслей метеорологии и народнохозяйственных задач. Являясь эффективной характеристикой процесса для исследований макромасштабных явлений (скажем, задач общей циркуляции), она окажется совершенно непригодной для исследования облакообразования, болтанки самолетов и т. д.

Второй особенностью исследований свободной атмосферы является отсутствие резких градиентов в вертикальном распределении метеоэлементов. Если в планетарном пограничном слое еще можно использовать данные по распределению ветра с высотой для определения коэффициента перемешивания, то на уровнях, где ветер близок к геострофическому, этот способ практически не применим при существующей точности аэрологических исследований.

Результаты расчетов коэффициента обмена в планетарном пограничном слое по данным о распределении ветра с высотой [4], [5] получили бы большую убедительность, если бы они были сравнены с результатами расчетов, проведенных независимым методом. Поскольку в упомянутых расчетах используются сглаженные кривые распределения ветра с высотой, можно полагать, что полученные численные значения являются несколько завышенными.

Одним из возможных независимых методов может служить структурный метод определения характеристик обмена. Опыт использования такого сопоставления в приземном слое дал положительные результаты [6].

Наряду с разновидностями способов определения коэффициентов обмена по изменению ветра с высотой как в пограничном, так и в приземном слое воздуха в обширной литературе по турбулентному обмену в атмосфере описывается несколько структурных методов. Наиболее важными и распространенными из них являются методы Гессельберга [7], Эртеля [8] и разработанный в конце 40-х годов метод Е. С. Ляпина [9].

Для определения коэффициента вертикального турбулентного обмена по методам Гессельберга и Ляпина необходимо иметь данные о регистрации вертикальных скоростей, получение которых связано с известными трудностями чисто приборного характера.

Метод Эртеля с этой точки зрения значительно более удобен. Для решения той же задачи здесь требуется знать только вертикальный градиент и пульсации любой пассивной субстанции. Теория этого метода является эклектическим соединением элементов полуэмпирической теории Прандтля и статистического подхода к изучению турбулентности. Ряд не вполне обоснованных гипотез приводит к резкому расхождению значений коэффициента обмена, полученных согласно расчетным формулам Эртеля, с результатами определения этой характеристики другими методами, что свидетельствует о ненадежности данного способа определения коэффициента обмена. Более подробное критическое изложение метода и результаты упомянутого сравнения даны в работах Л. Ф. Щербаковой [10] и И. С. Борушко [11].

Метод Гессельберга основан на использовании регистрации вертикальных скоростей в движущейся воздушной массе. Этот метод был использован при обработке данных полетов Леттау и Швердфегера на аэростатах [12]. С помощью специальных приспособлений в полетах

регистрировались вертикальные скорости воздушных масс, вместе с которыми перемещался аэростат. Расчеты по этому методу дали удовлетворительные результаты, но методика получения необходимых данных очень сложна. Необходимость перемещения вместе с воздушным потоком делает невозможным определение коэффициента обмена в заранее заданной области в указанное время.

Для решения такой задачи естественно воспользоваться самолетным зондированием. По записям вертикальных ускорений центра тяжести самолета можно построить эпюры вертикальных скоростей воздушных масс, которые пересекает самолет [16]. Тот факт, что самолет имеет собственную скорость относительно движущихся воздушных масс, не позволяет применить здесь методику Гессельберга. С этой точки зрения является вполне естественным использовать метод Ляпина. Подобно методу Гессельберга здесь также необходимо располагать данными регистрации вертикальных скоростей, но эта регистрация предполагается выполненной не в движущейся воздушной массе, а в фиксированной точке пространства.

В случае самолетного зондирования приемником скорости ветра является сам самолет. Таким образом, в данном случае прибор, регистрирующий вертикальные порывы ветра, не связан жестко с Землей, а обладает некоторой собственной скоростью относительно ее. Отсюда вытекает необходимость обобщения метода Е. С. Ляпина на случай подвижного приемника скорости ветра.

Такое обобщение было выполнено автором настоящей статьи в 1950 г., в результате чего была получена следующая расчетная формула для коэффициента обмена:

$$k = \frac{u_z^2 D}{2} \frac{\bar{V}}{u_x}, \quad (1)$$

где  $k$  — коэффициент вертикального турбулентного обмена,  $u_z$  — среднее (по модулю) значение вертикальной скорости ветра,  $D$  — среднее время существования вертикальной скорости одного знака (предполагается, что среднее значение вертикальных скоростей ветра за время осреднения равно нулю),  $\bar{V}$  — средняя (по модулю) скорость движущегося приемника относительно воздуха,  $u_x$  — среднее (по модулю) значение горизонтальных порывов ветра.

В случае неподвижного приемника скоростей выражение (1), естественно, переходит в формулу Ляпина. Действительно, если приемник неподвижен, то роль  $\bar{V}$  будет играть средняя скорость ветра (при условии, что пульсации значительно меньше средней скорости), и соотношение (1) переписывается в виде

$$k = \frac{u_z^2 D}{2} \frac{\bar{U}}{u_x}, \quad (2)$$

где  $\bar{U}$  — средняя скорость ветра.

Если приемник скоростей движется вместе с воздушной массой, то  $\bar{V} = u_x$  и выражение (1) перейдет в

$$k = \frac{u_z^2 D}{2},$$

т. е. формулу Гессельберга.

Для определения коэффициента обмена по формуле (1) необходимо знать следующие величины: средние (по модулю) вертикальные и горизонтальные пульсации, среднее время существования вертикальной скорости одного знака (средний полупериод) и среднюю скорость воздушного потока относительно приемника.



В настоящее время по ускорениям самолета можно с достаточной точностью определять только характеристики вертикальных пульсаций скорости, воздушных течений (как величину, так и средний период). Точность используемых акселерографов не позволяет определить горизонтальные порывы ветра сколько-нибудь надежно.

Средняя воздушная скорость самолета за время выполнения очередной площадки определяется весьма надежно по стандартным приборам.

В выражении (1) горизонтальные пульсации содержатся только в виде отношения  $\frac{u_z}{u_x}$ , характеризующего степень анизотропности структуры воздушного потока. Для приземного слоя воздуха, где ограничивающее влияние неподвижной стенки — земной поверхности — приводит к резкой анизотропности структуры потока, это отношение существенно меньше единицы. Влияние земной поверхности на анизотропность структуры простирается, согласно данным Беста, до высот порядка 30—40 м, выше которых при изотермических условиях достигается приближенно выполняющаяся изотропность [14], вследствие чего можно принять, что  $\frac{u_z}{u_x} = 1$ .

Помимо этой чисто динамической причины нарушения изотропности, существуют причины термодинамического происхождения. Сильные перегревы нижних слоев воздуха в конвективных условиях приводят к возникновению дополнительных вертикальных скоростей, что должно увеличить отношение  $\frac{u_z}{u_x}$ . Оценка этого эффекта А. Р. Константиновым [6], выполненная на основании обработки данных в приземном слое, показала, что в весьма большом диапазоне устойчивости атмосферы — от инверсий до конвективных условий — указанное отношение меняется примерно на 10—12%, т. е. причины термодинамического происхождения незначительно сказываются на степени анизотропности структуры потока.

К аналогичным выводам приходит П. А. Воронцов [15] на основе исследований структуры порывов ветра в пограничном слое земли.

Подобного рода исследования для свободной атмосферы, к сожалению, не выполнялись. Имеются соображения, подтверждающие, что влияние степени устойчивости на изотропность структуры потока в свободной атмосфере будет проявляться столь же незначительно. П. А. Воронцов считает, что в свободной атмосфере для безоблачных слоев это отношение остается несколько меньше единицы [15].

На основании всего сказанного в дальнейших расчетах будет приниматься, что  $\frac{u_z}{u_x} = 1$ . Можно полагать, что это допущение приводит к ошибке в определении коэффициента обмена порядка 10—20%. В инверсионных слоях полученные значения будут несколько завышены, в конвективных условиях — несколько занижены. Это приведет также к некоторой сглаженности суточного хода коэффициента обмена.

Отметим, что отказ от учета анизотропности порывов ветра вовсе не означает отказ от рассмотрения влияния устойчивости стратификации воздушной среды на коэффициент обмена. Устойчивость стратификации резко сказывается на величине вертикальных скоростей и продолжительности существования вертикальной скорости одного знака (средний период). Множитель  $\frac{u_z}{u_x}$  менее сильно зависит от температурной стратификации, что и дало возможность принять его приближенно равным единице.

Структура вертикальных скоростей в атмосфере носит многомасштабный характер. В соответствии с тем, какой участок спектра турбулентных движений мы будем рассматривать, будут получаться и соответствующие значения коэффициента обмена. При постановке той или иной задачи, имеющей дело с турбулентным переносом количества движения тепла, влаги и т. п., характеристики турбулентности следует брать соответственно масштабу явления. Так, характеристики обмена, вводимые в задачу о рассеянии дымового облака, должны резко отличаться от характеристик турбулентного обмена, рассматриваемых в задаче об общей циркуляции. Это означает, что одни и те же вертикальные движения могут рассматриваться с точки зрения задач одного масштаба, как некие упорядоченные движения, а с точки зрения задач другого, значительно более крупного масштаба эти же движения могут рассматриваться как элементы вихрей.

Аналогичное положение существует и с горизонтальными движениями. Если с точки зрения физики приземного слоя средняя скорость ветра в циклонах не является элементом турбулентного движения, определяя при этом общую интенсивность вихреобразования, то в задаче об общей циркуляции эти элементы атмосферных движений иногда стилизуются в виде отдельных вихрей, обуславливающих турбулентный перенос количества движения, влаги и т. п.

Анемограммы вертикальных скоростей, полученных в результате самолетного зондирования, носят, вполне естественно, также многомасштабный характер.

На возмущения с большими периодами наложены здесь возмущения с заметно меньшими периодами [16]. Расчеты по полной эпюре вертикальных скоростей дали очень большие значения коэффициентов обмена, что связано, вероятно, с влиянием эффектов какого-то большого масштаба (*Grossturbulenz*, по терминологии Леттау). Отметим, что определение длиннопериодических возмущений связано с большими неточностями [13] и что число таких периодов при продолжительности времени выдерживания горизонтальной площадки около минуты оказывается явно недостаточным для надежного определения среднего времени существования пульсаций одного знака. Поэтому мы отказались от определения характеристик турбулентности большого масштаба и попытались ограничиться короткопериодическими участками спектра возмущений. Это было вызвано, кроме того, следующим соображением. Если для определения вертикальных скоростей ветра, содержащих весь возможный спектр возмущений, необходимо решать громоздкие дифференциальные уравнения, то для высокочастотных возмущений связь между вертикальными скоростями ветра и ускорением центра тяжести самолета крайне проста и сводится к линейной зависимости [13]. Здесь возникает одно неудобство, а именно то значение частот возмущений, выше которых можно пользоваться линейными связями между ускорениями самолета и вертикальными порывами ветра, будет разным для различных самолетов. Расчеты характеристик турбулентности по ускорениям различных самолетов не будут, таким образом, тождественны в силу того, что они обусловлены разными участками спектра возмущений. Этот недостаток смягчается тем, что области таких частот не очень сильно отличаются друг от друга. Можно представить себе также задачу о пересчете найденных характеристик к характеристикам, полученным с помощью некоего самолета, рассматриваемого в качестве стандартного. Напомним, что в метеорологии, особенно в актинометрии, целый ряд физических величин измеряется таким образом, что результаты измерений связаны с использованием того или иного прибора

и поэтому либо указывается, каким способом измерена данная величина, либо производятся специальные пересчеты.

В связи со всем сказанным возникает вопрос, в какой мере полученные значения коэффициентов турбулентного обмена будут соответствовать тем характеристикам турбулентности, которые необходимы для расчетов переносов тепла и влаги по вертикали, суточных ходов метеоэлементов и т. п. Для этого, естественно, надо провести сравнение результатов выполненных расчетов с другими независимыми определениями тех же характеристик обмена. Ранее уже говорилось о том, что наиболее надежно указанные характеристики определяются для приземного слоя. С этой целью из материалов экспедиции ГГО—ЦАО 1947 г. [16] были отобраны все случаи полета, проводившиеся на минимальной высоте и сопровождающиеся при этом градиентными наблюдениями. Полеты в экспедиции проводились на самолете ПО-2, запись ускорений осуществлялась акселерографом DVL. Полеты проводились в течение пяти дней, градиентные наблюдения выполнялись только для четырех из этих дней: 17, 19, 21 и 23 августа 1947 г. Минимальные высоты полетов составляли 50 м.

После использования допущения об изотропности порывов расчетная формула принимает следующий вид:

$$k = \frac{u_z D \bar{V}}{2}. \quad (3)$$

Величина  $u_z$ , как было сказано выше, находилась с помощью соотношения

$$u_z = bn, \quad (4)$$

где  $n$  — ускорение центра тяжести самолета в долях ускорения силы тяжести,  $b$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от аэродинамических характеристик самолета и режима полета. Значения этой величины даны в настоящем сборнике [17].

Поскольку переход от ускорений самолета к вертикальным скоростям выполняется с помощью линейного преобразования (4), то величина  $D$  — среднее время существования вертикальной скорости одного знака — определялась непосредственно из акселерограммы как среднее время существования ускорения самолета одного знака.

Среднее значение воздушной скорости бралось по данным указателя скорости на приборном щите самолета.

Результаты расчетов по формуле (3) сведены в табл. 1. Два значения коэффициентов обмена в одной графе соответствуют результатам расчетов, выполненных по материалам двух последовательных выдерживаний площадок, следующих друг за другом через интервал 1—2 мин. и отличающихся азимутами полетов. Надо отметить сравнительно малое расхождение между результатами таких расчетов, что является подтверждением достаточности интервала осреднения (величина площадки) для изучаемых масштабов возмущений.

Расчеты коэффициентов обмена по градиентным наблюдениям выполнялись для высоты 1 м. Для сравнения значений коэффициентов обмена, полученных обоими методами, следовало привести их к одной высоте. Для этой цели мы воспользовались известной схемой Юдина — Швеца [18], стилизующей изменение коэффициента обмена с высотой в виде линейного роста до некоторой высоты  $h$ , выше которой значения коэффициента обмена остаются постоянными. Эта схема выдержала испытание временем и до сих пор успешно используется в различных расчетах, связанных с характеристиками турбулентного обмена.

Значение величины  $h$  взято, согласно исследованиям М. И. Будыко [19], равным 30 м. В настоящее время есть основания полагать, что это значение является несколько заниженным. С помощью упомянутой зависимости значения коэффициентов обмена были отнесены к высоте 1 м. Величины коэффициентов обмена на этой высоте по данным градиентных наблюдений были определены Л. Ф. Щербаковой. При производстве наблюдений ветер измерялся на высоте 5 и 1 м, температура — на 2 и 0,55 м. Расчеты проводились для отдельных десятиминутных серий и относились к времени середины серии.

На рис. 1—4 нанесены все результаты расчетов как по градиентным наблюдениям, так и по самолетным зондированиям. Участки графиков, на которых есть результаты только одних расчетов, объясняются отсутствием данных для того или иного метода.

Таблица 1

Значения коэффициента обмена ( $\text{м}^2/\text{сек}$ ) на уровне 50 м, рассчитанные по ускорениям самолета

17/VIII	Время	7 42	8 30	9 53	12 04	13 35	15 35	17 26	18 53
	(час. мин.)								
	Коэффициент обмена	8,8 9,8	12,6 18,2	7,8 4,8	7,0 9,3	5,0 4,4	4,8 5,7	5,3 5,6	4,7 3,2
19/VIII	Время	8 02	10 32	12 14	16 17	17 37	19 21		
	(час. мин.)								
	Коэффициент обмена	5,4 5,8	5,4	5,5 7,6	9,6 5,8	4,0 4,0	9,9 6,4		
21/VIII	Время	6 20	9 36	11 40	14 20	15 5	17 25	18 55	
	(час. мин.)								
	Коэффициент обмена	4,4 3,6	9,94	10,6	10,1	7,7	5,3	6,4	
23/VIII	Время	7 29	9 35	11 30	13 27	15 35	17 25	18 55	
	(час. мин.)								
	Коэффициент обмена	3,2	7,3	5,2	5,0	8,6	5,3	6,5	

Полеты проводились только в дневные часы, поэтому суточный ход коэффициента получился не очень резко выраженным. Не следует, однако, думать, что при полетах ночью можно было бы столь же надежно получить малые значения коэффициента обмена. Совершенно очевидно, что самолет является очень грубым «прибором» и вертикальные скорости меньше 0,1 м/сек им практически не регистрируются (в значительной мере это обуславливается точностью применяемых акселерографов). Поэтому для определения коэффициента перемешивания при слабо развитом обмене (отсутствие болтанки) рекомендовать этот способ нельзя. Что касается определения малых значений коэффициента обмена на больших высотах, об этом речь будет идти несколько позже.

Из рис. 1—4 следует, что в конвективных условиях определение коэффициента обмена описываемым методом дает результаты, вполне сравнимые с данными о величине турбулентного перемешивания по градиентным методам. Можно полагать, что данные, полученные посредством самолетного зондирования, оказываются все же несколько заниженными, поскольку значение высоты  $h$  при приведении к уровню 1 м было также несколько занижено.

В табл. 2 приведены средние значения коэффициентов обмена за дневное время на высоте 50 м. Данные расчетов по градиентным наблюдениям относились здесь к уровню 50 м с помощью того же «ломающегося» закона при значениях  $h=30$  м и  $h=50$  м.

Для расчетов коэффициента обмена по ускорениям самолета были использованы также материалы экспедиции ЦАО в районе Тбилиси.

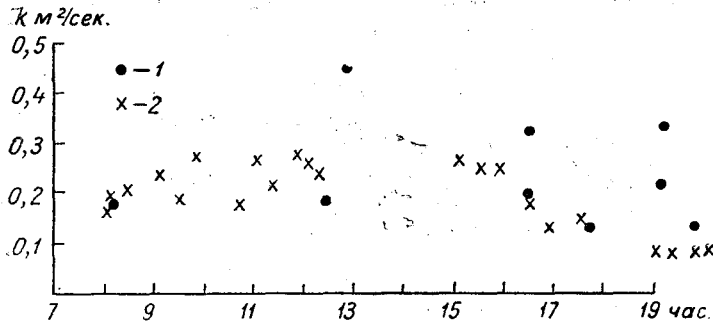


Рис. 1. Результаты расчетов коэффициента обмена; 19 августа 1947 г.  
 1 — по самолетным данным, 2 — по данным градиентных наблюдений.

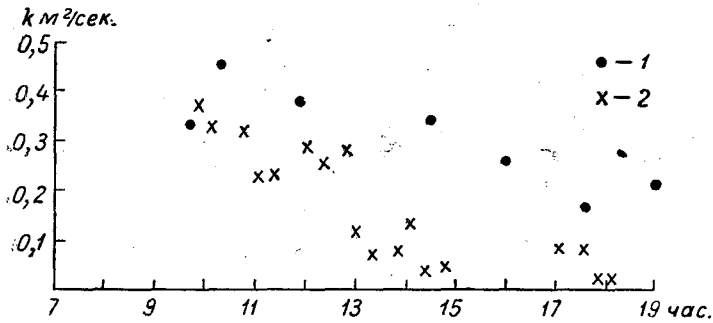


Рис. 2. Результаты расчетов коэффициента обмена; 20 августа 1947 г.  
 1 — по самолетным данным, 2 — по данным градиентных наблюдений.

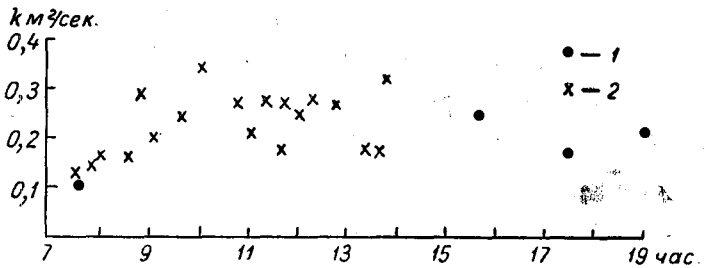


Рис. 3. Результаты расчетов коэффициента обмена; 23 августа 1947 г.  
 1 — по самолетным данным, 2 — по данным градиентных наблюдений.

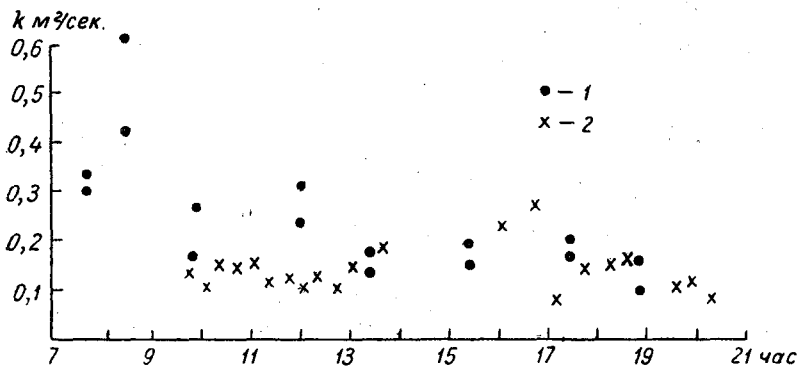


Рис. 4. Результаты расчетов коэффициента обмена; 17 августа 1947 г.  
 1 — по самолетным данным, 2 — по данным градиентных наблюдений.

Минимальные высоты зондирования составляли 100 м. Тип самолета и акселерограф были те же самые, что и в полетах в районе Москвы.

Таблица 2

Средние значения коэффициентов обмена ( $\text{м}^2/\text{сек}$ ) на высоте 50 м, по данным самолетного зондирования и по градиентным наблюдениям

Число	7/VIII	19/VIII	21/VIII	23/VIII
Самолет	7,3	6,3	8,5	5,9
Градиентные наблюдения	$h = 30 \text{ м}$	4,4	4,4	6,8
	$h = 50 \text{ м}$	7,3	8,7	11,3

Таким образом, оптимальное соотношение между результатами расчетов соответствует значению  $h$ , заключенному между 30 и 50 м.

В отличие от московской экспедиции, где на минимальной высоте делалось 7—10 площадок в день, здесь в силу специфики общего задания экспедиции в день делалось на высоте

100 м только 2—3 площадки. Эти отдельные точки могли выпасть из общего суточного хода. Приведение коэффициента обмена, вычисленного на высоте 100 м, к уровню 1 м также было связано с большими ошибками по сравнению с аналогичными расчетами на материалах московской экспедиции. Определение наземных характеристик проводилось здесь с меньшей точностью, поскольку ветер измерялся на высотах 2 и 1 м. В силу этих причин графики, аналогичные графикам на рис. 1—4, для тбилисской экспедиции построены не были.

Материалы тбилисской экспедиции позволяют получить картину распределения коэффициента обмена с высотой в различное время суток. 20 июля на самолете ПО-2 было сделано три вылета: в 5 час. 58 мин., 10 час. 35 мин. и 14 час. 15 мин. Площадки с включенным акселерографом делались в одинаковой последовательности при каждом полете на следующих высотах: 100, 200, 500, 1000, 2000, 2000, 1000, 500, 200, 100 м.

Измерения на одних и тех же высотах, проведенные на различных курсах полета в моменты времени, мало отстоящие друг от друга, позволяли в известной степени судить о надежности полученных цифр. В табл. 3 приведены значения

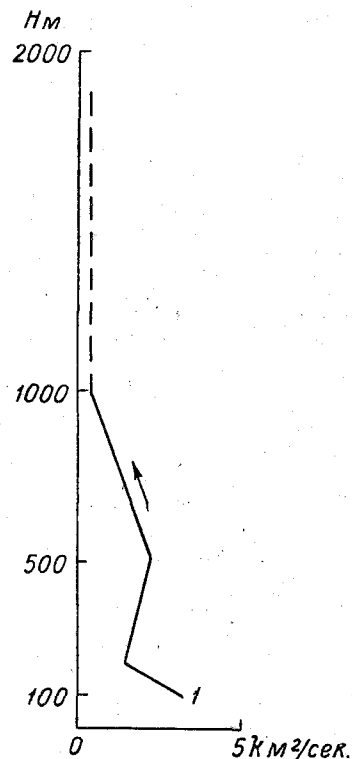


Рис. 5. Вертикальный профиль коэффициента обмена, по данным полета в 5 час. 30 мин.

коэффициентов обмена, вычисленные для одних и тех же высот при подъеме и спуске. Эти же данные нанесены на рис. 5—7.

Полученное распределение коэффициента обмена с высотой вполне соответствует общим представлениям о зависимости этой характеристики обмена от высоты в слое до 2 км в различное время суток. Утром (6 час. по московскому времени) обмен наиболее сильно развит в нижних слоях, прилегающих к земле, постепенно убывая с высотой. По мере развития турбулентности (10 час. 35 мин.) максимум коэффициента обмена смещается в более высокие слои (уровень

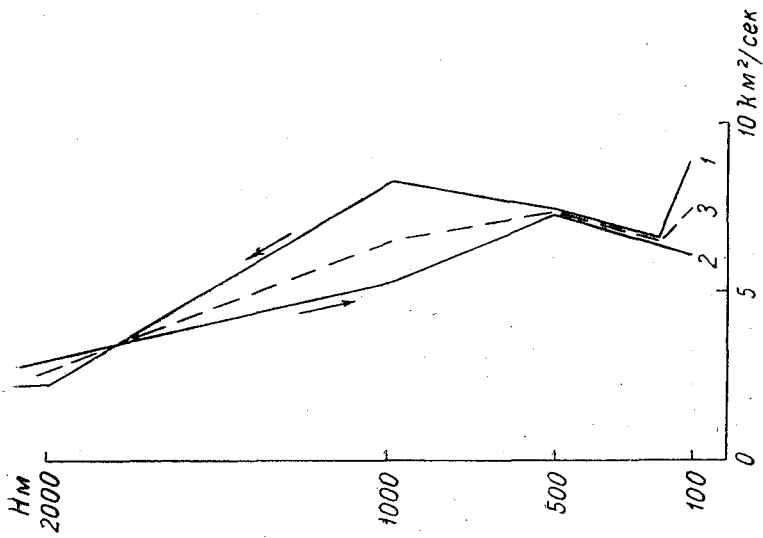


Рис. 6. Вертикальный профиль коэффициента обмена, по данным полета в 10 час. 35 мин.  
1 — подъем, 2 — спуск, 3 — среднее значение.

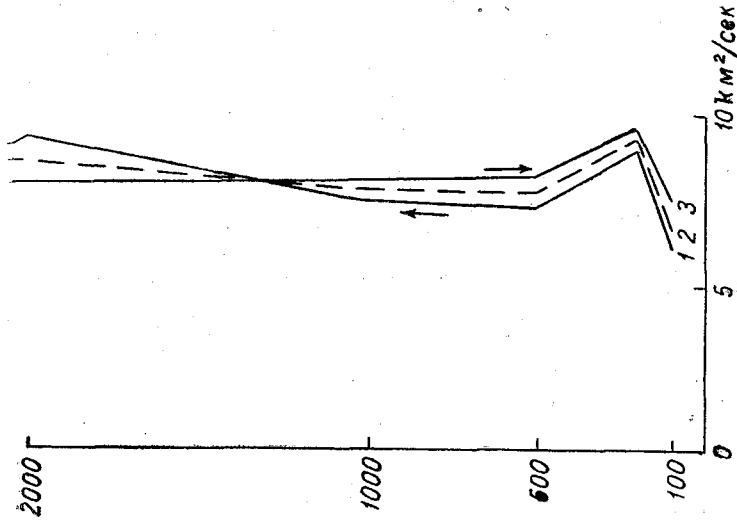


Рис. 7. Вертикальный профиль коэффициента обмена, по данным полета в 14 час. 15 мин.  
Усл. обозначения см. на рис. 6.

порядка 500 м), затем наблюдается убывание, причем на высоте 2 км обмен имеет уже существенно большие значения. Наконец, в условиях сильно развитого турбулентного перемешивания значения коэффициента вертикального обмена, начиная с 200 м, практически не меняются с высотой.

Наибольшие расхождения между значениями коэффициента обмена, полученными при спуске и подъеме, оказались на высоте 1000 м при полете в 10 час. 35 мин. В значительной мере эти расхождения объясняются изменением термодинамических условий в этом слое (вертикальные градиенты температуры), которые произошли за интервал времени между двумя зондированиями.

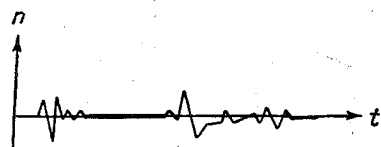


Рис. 8.

Интервалы между зондированиями на одной и той же высоте в силу принятого плана полета были разными на различных высотах: минимальные на 2000 м и максимальные на 100 м.

Естественно поэтому было ожидать, что на высоте 100 м расхождения по абсолютной величине между полученными значениями окажутся наибольшими, что и получилось в действительности. Значительные относительные расхождения на высоте 2000 м объясняются малыми абсолютными значениями коэффициента обмена, а не большими разностями данных по спуску и подъему.

Таблица 3

Значения коэффициента обмена ( $\text{м}^2/\text{сек}$ ) на различных высотах 20 июля 1947 г. в районе Тбилиси

Высота (м)		100			200			500			1000			2000		
Время (час. мин.)		подъем	спуск	расхождение (%)	подъем	спуск	расхождение (%)	подъем	спуск	расхождение (%)	подъем	спуск	расхождение (%)	подъем	спуск	расхождение (%)
подъем	спуск															
5 58	7 00	3,1	—	—	1,5	—	—	2,3	—	—	0,4	—	—	2,4	—	—
10 35	12 34	8,9	6,2	35	6,5	6,5	0	7,5	7,4	1	8,2	5,3	42	2,2	2,9	28
14 15	15 41	5,1	7,5	20	9,0	9,7	4	7,4	8,2	6	7,6	8,2	6	9,5	8,2	14

Примечание. Во время первого полета (5 час. 58 мин.) площадки делались только на подъеме, так как на высоте 3000 м была замечена нечеткость в работе мотора и спуск совершался без производства площадок.

Остановимся на одной особенности обработки акселерограмм. На некоторых лентах, относящихся, как правило, к значительным высотам, запись имела вид, представленный на рис. 8. Это означало, что наряду с областями сильных возмущений существуют участки безболтанки (в пределах точности регистрации прибора). Такие ленты обрабатывались следующим способом. Вначале коэффициент обмена находился только по участкам записи, где были возмущения, а для характеристики турбулентного состояния всей области полученное значение множилось на отношение длины участков записи с наличием ускорений к общей длине записи.

Если сравнивать полученные значения коэффициента обмена с результатами исследований, выполненных другими методами для слоя 100—2000 м, то окажется следующее.



Структурные методы дают средние значения, близкие к полученным в данной работе. Большой разброс значений у Леттау и Швердфегера объясняется разнообразием условий. Их полеты выполнялись в инверсионных слоях и при конвективных условиях, в облаках и при безоблачном небе, в различные времена года. Условия же полетов 20 июля 1947 г. были более однородными, поэтому и результаты оказались более стабильными.

Что касается данных о коэффициенте обмена, полученных по распределению ветра с высотой в пограничном слое, то здесь имеется значительное расхождение как с данными Лайхтмана и Чудновского [4], так и с результатами Мильднера [20]. Возможно, что это расхождение связано с различием масштабов явлений. Так, например, может оказаться, что профиль ветра в пограничном слое определяется иным масштабом возмущений, отличным от масштаба порывов, которые удовлетворяют условию использования формулы (4) для перехода ускорений самолета к вертикальным порывам ветра. Кроме того, есть основания полагать, что значения коэффициента обмена, рассчитанные по распределению ветра с высотой в пограничном слое, несколько завышены, так как при расчетах обычно используются сглаженные профили ветра, что эквивалентно увеличению интенсивности турбулентного обмена, определяющего этот профиль. В книге Лайхтмана и Чудновского [4] характерность полученных данных просто постулируется, никаких сравнений с другими данными (например, данными Ханевской) не производится.

Согласно изложенной методике был выполнен целый ряд расчетов коэффициента обмена М. П. Чуриновой, П. А. Воронцовым, Л. Т. Матвеевым. Они пришли также к заключению о том, что полученные значения дают несколько заниженное представление о характеристиках обмена. В связи с этим следует сказать следующее.

Имеются некоторые основания для того, чтобы считать полученные значения коэффициента обмена несколько заниженными действительно. При самолетном зондировании из весьма широкого спектра атмосферных вихрей оказываются исключенными самые мелкие и самые крупные вихри. На самые мелкие вихри самолет не реагирует в силу значительности инерции. Вихри очень больших размеров, т. е. очень большие поднимающиеся и опускающиеся массы воздуха, либо просто «захватывают» самолет и переносят его без изменения угла атаки, либо эти изменения оказываются настолько незначительными, что при существующей точности акселерографов не могут быть выявлены на записи. Так как величина обмена определяется в первую очередь большими вихрями, то пренебрежение влиянием малых вихрей практически не скажется на величине полученных характеристик обмена. Ограниченность спектра вихрей сверху может несколько уменьшить величину коэффициента обмена.

Каким образом можно изменить методику расчета, чтобы учесть эти отброшенные влияния? Прежде всего следует по иному определять вертикальные скорости. Если мы хотим учесть влияние длиннопериодических возмущений, мы вынуждены отказаться от использования соотношения (4). Строго говоря, коэффициент  $b$  в этом соотношении является функцией частоты возмущений. Характер этой зависимости для самолета ПО-2 дан на рис. 9. В выполненных выше расчетах коэффициента обмена использовалось асимптотическое значение этого параметра, что соответствовало рассмотрению только высокочастотного участка спектра возмущений. Средние периоды регистрируемых акселерографом ускорений соответствовали области частот около

3 сек.<sup>-1</sup>, где, как видно из рис. 9, значения  $b$  отличаются от асимптотических значений, а именно оказываются заметно большими. Таким образом, если отказаться от использования асимптотических значений параметра  $b$  и приближенно считать, что средние характеристики обмена определяются возмущениями, частота которых соответствует средней частоте регистрируемых ускорений, то расчеты коэффициента обмена с привлечением значений параметра  $b$ , снятых с кривой на рис. 9 (или с аналогичной кривой для самолета другого типа), дадут заметное увеличение характеристик обмена. Таким образом, учет воз-

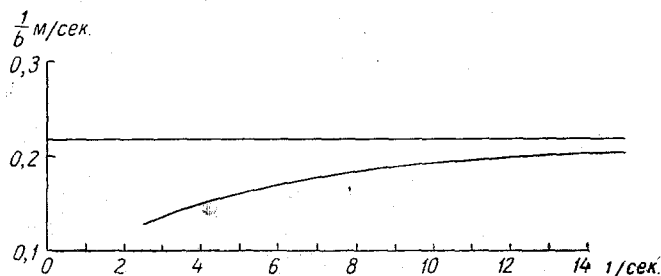


Рис. 9.

мущений больших масштабов, естественно, приводит к увеличению значений коэффициента обмена.

Следует заметить, что для возмущений слишком низких частот этот метод определения  $b$  не может быть рекомендован, так как, во-первых, в этой области значения параметра  $b$  должны определяться по другой кривой [13] (поэтому кривая на рис. 9 не доходит до начала координат), и, во-вторых, вообще точность определения низкочастотных возмущений вертикальной скорости ветра по акселерограммам невелика.

## РЕЗЮМЕ

В результате обобщения формулы Ляпина на случай подвижного анемометра разработан метод определения коэффициента вертикального турбулентного обмена по акселерограммам самолетного зондирования. Метод дает возможность определять характеристики обмена в короткопериодической части спектра возмущений. Проведено сопоставление с результатами расчетов по градиентным наблюдениям (в приземном слое). Указаны пути совершенствования методики с целью учета влияния вихрей большего масштаба.

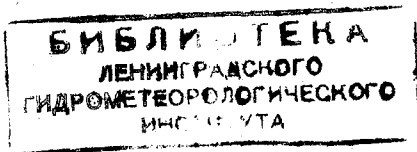
## ЛИТЕРАТУРА

1. Будыко М. И., Лайхтман Д. Л., Тимофеев М. П. Определение коэффициента турбулентного обмена в приземном слое воздуха. Метеорология и гидрология, № 3, 1953.
2. Монин А. С., Обухов А. М. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы. Труды Геофизического ин-та АН СССР № 24 (5), 1954.
3. Лойцянский Л. Г. и Шваб В. А. Тепловая шкала турбулентности. Труды ЦАГИ, № 239, 1936.
4. Лайхтман Д. Л. и Чудновский А. Ф. Физика приземного слоя атмосферы. ГИТЛ, 1949.
5. Чуринова М. П. Некоторые данные о коэффициенте турбулентности в свободной атмосфере. Труды ГГО, вып. 28, 1951.
6. Константинов А. Р. Исследование турбулентной структуры ветра в приземном слое атмосферы. Труды ГГО, вып. 16 (78), 1949.

7. Hesselberg. Eine neuer Ausdruck für der Austauschkoefizient. Ann. der Hydrogr. Bd. 57, 1927.
  8. Ertel H. Eine Methode zur Berechnung des Austauschkoefizienten. Gerl. Beitr. z. Geophysik. Bd. 25, 1930.
  9. Ляпин Е. С. О турбулентном перемешивании воздуха в атмосфере. Метеорология и гидрология № 5, 1948.
  10. Щербак ова Л. Ф. О характеристике турбулентного обмена по микроколебаниям и среднему градиенту скорости ветра. Труды ГГО, вып. 16(78), 1949.
  11. Борущко И. С. Определение коэффицента турбулентного перемешивания способом Эртеля. Труды ГГО, вып. 16(78), 1949.
  12. Lettau und Swerdfeger. Untersuchungen über Atmosphärische Turbulenz...3 Mitteilungen. Met. Zeitsch. 50, 1933, 51, 1934; 53, 1956.
  13. Дубов А. С. К вопросу определения вертикальных скоростей ветра по данным самолетного акселерографа. Труды ГГО, вып. 81, 1959.
  14. Best. Transfer of heat and momentum in the lowest layers of the atmosphere. Geophys. Mem. vol. 65, 1935.
  15. Воронцов П. А. Аэрологические исследования структуры воздушного потока над хлопковым полем и полупустыней. Труды ГГО, вып. 39, 1953.
  16. Дубов А. С. Определение скорости вертикальных порывов ветра при самолетных зондированиях с помощью акселерографа. Труды ГГО, вып. 16(78), 1949.
  17. Дубов А. С. Связь между параметрами болтанки самолетов различных конструкций при одних и тех же метеорологических условиях (см. настоящий сб.).
  18. Юдин М. И. и Швец М. Е. Стационарная модель распределения ветра с высотой в турбулентной атмосфере. Труды ГГО, вып. 31(8), 1940.
  19. Будыко М. И. Высота приземного слоя воздуха. Труды ГГО, вып. 6(69), 1947.
  20. Mildner R. Über die Reibung in einer speziellen Luftmasse. Beitr. zur Phys. d. fr. Atm. Bd. 19, 1939.
-

## СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
✓ А. С. Дубов. Боковые колебания самолета, обусловленные влиянием порывов ветра . . . . .	3
У. С. Гандин. О колебаниях самолета, снабженного автопилотом, в турбулентной атмосфере . . . . .	17
А. С. Дубов, А. Л. Генкин. Определение вертикальных порывов ветра по записям акселерографа на управляемом самолете . . . . .	38
А. С. Дубов. Связь между параметрами болтанки самолетов различных конструкций при одних и тех же метеорологических условиях . . . . .	43
А. С. Дубов. Определение коэффициента турбулентного обмена по ускорению самолета . . . . .	54



Редактор *Ю. В. Власова*

Корректоры: *К. И. Розина* и *Г. Я. Русакова*

Техн. редактор *А. Н. Сергеев*

Сдано в набор 8/V 1959 г. Полнено к печати 19/XI 1959 г. Бумага 70 × 108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. л. 2,12.  
Печ. л. 5,82. Уч.-изд. л. 5,15. Тираж 1100 экз. М-53052. Индекс МЛ-319

Гидрометеорологическое издательство. Ленинград, В-53, 2-я линия, д. № 23

Заказ № 3/684. Цена 3 руб. 60 коп.

Типография № 3 Госгортехиздата, Ленинград, ул. Салтыкова-Щедрина, 54