

06
Т 78

ПРОВЕРЕНО
196 г.

Т Р У Д Ы
ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ
ОБСЕРВАТОРИИ

имени А. И. Воейкова

ВЫПУСК 60(122)

ФИЗИКА ПРИЗЕМНОГО СЛОЯ АТМОСФЕРЫ

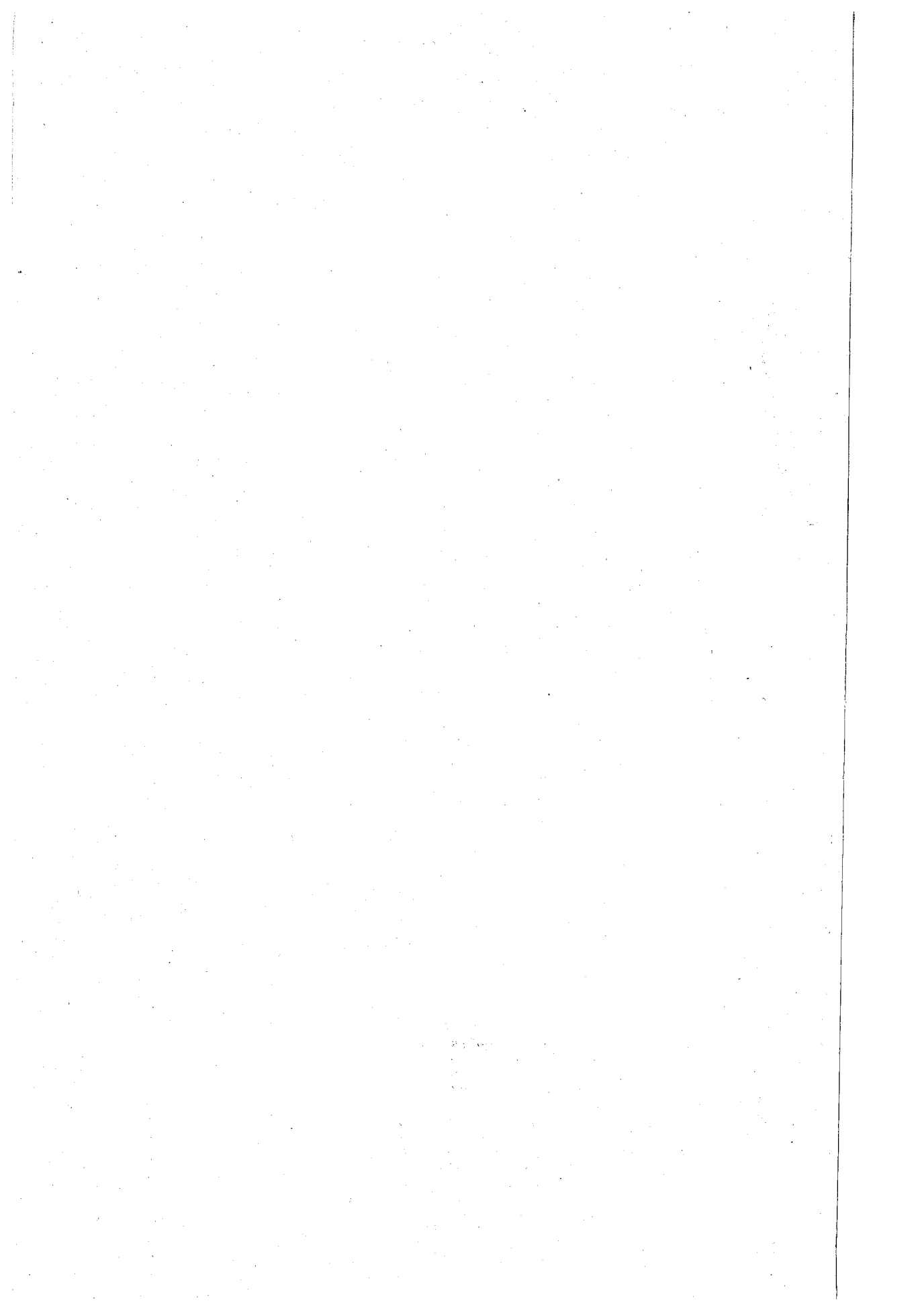
Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук
Д. Л. ЛАЙХТМАНА

БИБЛИОТЕКА
ЛЕНИНГРАДСКОГО
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД • 1956



К ВОПРОСУ ОБ УЧЕТЕ ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ ПРИ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЗДУШНОЙ МАССЫ

(Стационарный случай)

Предлагаемая работа ставит целью получить при некоторых упрощающих предположениях общее решение задачи о трансформации воздушной массы для полуплоскости, учитывающее горизонтальную диффузию.

Сформулированная задача сводится к решению дифференциального уравнения:

$$u(x, y, z) \frac{\partial q(x, y, z)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} k_x(x, y, z) \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y(x, y, z) \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z(x, y, z) \frac{\partial q}{\partial z}, \quad (I)$$

при граничных условиях

$$q(x, y, z) \Big|_{\substack{x=0 \\ z>0 \\ -\infty < y < \infty}} = f(y, z), \quad (II)$$

$$q(x, y, z) \Big|_{\substack{z=0 \\ x>0 \\ -\infty < y < \infty}} = \varphi(x, y), \quad (III)$$

$$\left. \begin{aligned} q(x, y, z) &\neq \infty \\ k_z \frac{\partial q}{\partial z} &\neq \infty \end{aligned} \right\} \text{при } z \rightarrow \infty, \quad (IV)$$

$$\left. \begin{aligned} q(x, y, z) &\neq \infty \\ k_y \frac{\partial q}{\partial y} &\neq \infty \end{aligned} \right\} \text{при } y \rightarrow \pm \infty, \quad (V)$$

где обозначено:

x — направление ветра, т. е. направление движения воздушной массы ($x=0$ — вертикальная плоскость на наветренном краю подстилающей поверхности);

$u(x, y, z)$ — скорость ветра;

y — перпендикулярное ветру направление;

z — вертикальное направление ($z=0$ при $x>0$ — подстилающая поверхность);

$q(x, y, z)$ — свойство или субстанция воздушной массы (температура, влажность и т. п.);

$k_x(x, y, z)$ — составляющая горизонтальной диффузии вдоль оси x -ов (по ветру и против ветра);

$k_y(x, y, z)$ — горизонтальная диффузия (поперек ветра);

$k_z(x, y, z)$ — составляющая турбулентной диффузии по вертикали.

Поясним несколько граничные условия.

Условие (II) характеризует тот факт, что свойства натекающей воздушной массы при $x=0$, т. е. над краем подстилающей поверхности, известны. Это,

как указывается в работе [1], физически не совсем корректная постановка, так как при $x < 0$ субстанция q будет зависеть от того, что происходит при дальнейшем продвижении массы и поэтому не может быть заранее задано.

Ниже будет показано, что для условий атмосферы это обстоятельство не является существенным.

Граничное условие (III) характеризует свойства подстилающей поверхности. Очевидно, оно может быть видоизменено (например, вместо задания величины q можно задать турбулентный поток ее).

Условия (IV) — (V) характеризуют факт ограниченности величин q и их турбулентных потоков на больших расстояниях.

Решение уравнения (1) в общем случае, когда u , k_x , k_y , k_z являются функциями от x , y , z , в настоящее время не представляется возможным. Поэтому так же, как и в работах [2] и [3], сделаем следующие упрощения:

а) пренебрежем турбулентным перемешиванием в направлении ветра; для обоснования этого сравним величины $u \frac{\partial q}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial q}{\partial x}$ в предположении, что q — абсолютная температура, тогда:

$$u \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[uq - k_x \frac{\partial q}{\partial x} \right],$$

где: \bar{u} — среднее значение скорости ветра, и так как $\bar{u} \sim 1$ м/сек., $q \sim 10^2$ градуса; $k_x \sim 1$ м²/сек. (см. работу [2]); $\frac{\partial q}{\partial x} \sim 10^{-1}$ град/м, то $\bar{u}q \gg k_x \frac{\partial q}{\partial x}$; аналогичную оценку можно произвести и тогда, когда q есть влажность;

б) предположим, как и в упомянутых работах М. Е. Берлянда и Д. Л. Лайхмана [2] и [3], что величины u , k_y и k_z меняются только по вертикали и по следующим законам:

$$u(z) = u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{\epsilon_1}, \quad (1)$$

$$k_y = au(z) = au_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{\epsilon_1}, \quad (2)$$

$$k_z = k_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{1-\epsilon}, \quad (3)$$

где: ϵ_1 , a — некоторые положительные константы, u_1 и k_1 — скорость ветра и коэффициент турбулентной диффузии на высоте H , ϵ — параметр, характеризующий турбулентное состояние (в нашей задаче ϵ предполагается положительным, ибо рассматриваются только инверсионные условия).

После указанных упрощений, уравнение (1) примет вид:

$$u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{\epsilon_1} \frac{\partial q}{\partial x} = au_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{\epsilon_1} \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} k_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{1-\epsilon} \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (1^*)$$

Таким образом, наша задача о трансформации воздушной массы, учитывающая боковое перемешивание, сведется к решению дифференциального уравнения (1*) при граничных условиях (II) — (V).

Уравнение (1*) рассматривалось уже в работах М. Е. Берлянда, Девиса, Л. С. Гандина и Р. Э. Соловейчика и других.

М. Е. Берлянд [2] применил уравнение (1*) к задаче о температурном поле грелок, применяемых для обогрева растений с целью предохранения их от заморозков. Задача свелась у него к решению (1*) с нулевым условием на поверхности (при $z=0$) и с начальным условием (при $x=0$), отличным от нуля и равном некоторой постоянной только при $L \leq z < H$, где L_1 и H — некоторые постоянные высоты.

Девис [4] привлек уравнение (1*) к решению задачи об испарении с пространства, ограниченного параболой. Начальное условие (при $x=0$) у него нулевое, на испаряющей поверхности задана постоянная концентрация.

Л. С. Гандин и Р. Э. Соловейчик [1] применили уравнение типа (1*) (они также учитывали и диффузию против ветра, задавая ее пропорциональной последней) к задаче об испарении с ограниченных водных поверхностей. Получено общее решение в предположении, что известна концентрация пара над всей подстилающей поверхностью как внутри водоема, так и вне его. В связи с этим условия на границах водоема типа (II) не вводятся в рассмотрение. В настоящей работе дается общее решение для полуплоскости, которое доводится в отдельных случаях до расчетных формул и учитывает начальные условия.

После этих предварительных замечаний перейдем к решению задачи. Вначале дадим решение (1*) при краевых условиях (II) — (V), заданных в общем виде; затем полученное решение применим к задаче о трансформации воздушной массы над подстилающей поверхностью в форме полосы конечной ширины.

1. ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ

§ 1. Вывод общего решения

Введем безразмерные координаты по формулам:

$$\theta = \frac{k_1 \varepsilon^2 x}{4n^2 z_1^2 u_1}, \quad (4)$$

$$\omega = \frac{\varepsilon y}{2nz_1} \sqrt{\frac{k_1}{au_1}}, \quad (5)$$

$$\eta = \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{\varepsilon}{2n}}, \quad (6)$$

где $n = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon_1 + \varepsilon}$; тогда вместо (1*) получим уравнение:

$$\eta^{1-2n} \frac{\partial q(\theta, \omega, \eta)}{\partial \theta} = \eta^{1-2n} \frac{\partial^2 q}{\partial \omega^2} + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta^{1-2n} \frac{\partial q}{\partial \eta}. \quad (7)$$

Вместо условий (II) — (V) получим:

$$q(\theta, \omega, \eta) \Big|_{\theta=0} = f_1(\omega, \eta) = f(y, z), \quad (8)$$

$$-\infty < \omega < \infty$$

$$q(\theta, \omega, \eta) \Big|_{\eta=0} = \varphi_1(\theta, \omega) = \varphi(x, y), \quad (9)$$

$$-\infty < \omega < \infty$$

$$\left. \begin{aligned} q(\theta, \omega, \eta) &\neq \infty \\ \eta^{1-2n} \frac{\partial q}{\partial \eta} &\neq \infty \end{aligned} \right\} \text{при } \eta \rightarrow \infty, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} q(\theta, \omega, \eta) &\neq \infty \\ \frac{\partial q}{\partial \omega} &\neq \infty \end{aligned} \right\} \text{при } \omega \rightarrow \pm \infty. \quad (11)$$

Таким образом, задача сведется к решению уравнения (7) при условиях (8) — (11).

Для решения воспользуемся вначале формулами обращения Фурье:

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}(\theta, \nu, \eta) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu\omega} q(\theta, \omega, \eta) d\omega, \\ q(\theta, \omega, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu\omega} \bar{q}(\theta, \nu, \eta) d\nu. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Умножим (7) на $e^{i\nu\omega}$, где ν — произвольный параметр, и проинтегрируем по ω от $-\infty$ до ∞ :

$$\eta^{1-2n} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \theta} = \eta^{1-2n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 q}{\partial \omega^2} e^{i\nu\omega} d\omega + \frac{\partial}{\partial \eta} \eta^{1-2n} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \eta},$$

или, проинтегрировав два раза по частям, получим:

$$\eta^{1-2n} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \eta} \eta^{1-2n} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \eta} - \nu^2 \eta^{1-2n} \bar{q}(\theta, \nu, \eta) + \eta^{1-2n} \lim_{R \rightarrow \infty} G_1(R, \nu, \theta, \eta), \quad (13)$$

где:

$$\begin{aligned} G_1(R, \nu, \theta, \eta) &= e^{i\nu R} \left[\frac{\partial q}{\partial \omega} \Big|_{\omega=R}^{-i\nu} q(\theta, R, \eta) \right] - \\ &- e^{i\nu R} \left[\frac{\partial q}{\partial \omega} \Big|_{\omega=-R}^{-i\nu} q(\theta, -R, \eta) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Граничные условия (8) — (11) примут вид:

$$\bar{q}(\theta, \nu, \eta) \Big|_{\eta > 0}^{\theta=0} = \bar{f}_1(\nu, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\bar{\omega}, \eta) e^{i\nu\bar{\omega}} d\bar{\omega}, \quad (8')$$

$$\bar{q}(\theta, \nu, \eta) \Big|_{\theta > 0}^{\eta=0} = \bar{\varphi}_1(\nu, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\bar{\omega}, \theta) e^{i\nu\bar{\omega}} d\bar{\omega}, \quad (9')$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{q}(\theta, \nu, \eta) &\neq \infty \\ \eta^{1-2n} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \eta} &\neq \infty \end{aligned} \right\} \text{при } \eta \rightarrow \infty. \quad (10')$$

Для дальнейшего решения воспользуемся методом Д. Л. Лайхтмана, примененного им в работе [3]. Умножим (14) на $\eta^n J_n(\lambda, \eta)$ где J_n — функция Бесселя и λ — произвольный параметр, и проинтегрируем по η от 0 до ∞ :

$$\begin{aligned} \frac{dY(\theta, \nu, \lambda)}{d\theta} &= \int_0^{\infty} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[\eta^{1-2n} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \eta} \right] \eta^n J_n(\lambda, \eta) d\eta - \nu^2 Y(\theta, \nu, \lambda) + \\ &+ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \eta^{1-n} G_1(R, \nu, \theta, \eta) J_n(\lambda, \eta) d\eta, \end{aligned}$$

где

$$Y(\theta, \nu, \lambda) = \int_0^{\infty} \eta^{1-n} \bar{q}(\theta, \nu, \eta) J_n(\lambda, \eta) d\eta \quad (15)$$

Далее, произведя справа интегрирование по частям два раза и учитывая известные из свойств бесселевых функций соотношения

$$\begin{aligned}\eta^n J_n(\lambda\eta) \Big|_{\eta=0} &= 0, \\ \eta^{1-2n} \frac{d}{d\eta} [\eta^n J_n(\lambda\eta)] \Big|_{\eta=0} &= \frac{2^{1-n} \lambda^n}{\Gamma(n)}, \\ \frac{d}{d\eta} \left\{ \eta^{1-2n} \frac{d}{d\eta} [\eta^n J_n(\lambda\eta)] \right\} &= -\lambda^2 \eta^{1-n} J_n(\lambda\eta),\end{aligned}$$

где $\Gamma(n)$ — функция гамма, на основании условия (9) получим:

$$\begin{aligned}\frac{dY}{d\theta} + (\nu^2 + \lambda^2) Y(\theta, \nu, \lambda) &= \frac{2^{1-n} \lambda^n}{\Gamma(n)} \varphi_1(\nu, \theta) + \\ + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} \eta^{1-n} G_1(R, \nu, \theta, \eta) J_n(\lambda\eta) d\eta &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \overline{W}(N, \theta, \nu, \lambda),\end{aligned}\quad (16)$$

где:

$$\begin{aligned}\overline{W}(N, \theta, \nu, \lambda) &= \eta^{1-2n} \frac{\partial \bar{q}}{\partial \eta} \eta^n J_n(\lambda\eta) \Big|_{\eta=N} - \\ - \bar{q}(\theta, \nu, \eta) \eta^{1-2n} \frac{d}{d\eta} [\eta^n J_n(\lambda\eta)] \Big|_{\eta=N}.\end{aligned}\quad (17)$$

Вместо (8') получим:

$$\begin{aligned}Y(\theta, \nu, \lambda) \Big|_{\theta=0} = Y_0(\nu, \lambda) &= \int_0^{\infty} \eta^{1-n} f_1(\nu, \bar{\eta}) J_n(\lambda\bar{\eta}) d\bar{\eta} = \\ = \int_0^{\infty} \eta^{1-n} J_n(\lambda\bar{\eta}) d\bar{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} f(\bar{\omega}, \bar{\eta}) e^{i\nu\bar{\omega}} d\bar{\omega}.\end{aligned}\quad (18)$$

Выражение (16) есть дифференциальное уравнение относительно $Y(\theta, \nu, \lambda)$ и его решение при начальном условии (18) есть

$$\begin{aligned}Y(\theta, \nu, \lambda) &= e^{-(\nu^2 + \lambda^2)\theta} \int_0^{\infty} \eta^{1-n} J_n(\lambda\bar{\eta}) d\bar{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\bar{\omega}, \bar{\eta}) e^{i\nu\bar{\omega}} d\bar{\omega} + \\ + \frac{2^{1-n} \lambda^n}{\Gamma(n)} \int_0^{\theta} e^{-(\nu^2 + \lambda^2)\bar{\theta}} d\bar{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\bar{\omega}, \theta - \bar{\theta}) e^{i\nu\bar{\omega}} d\bar{\omega} &+ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^{\theta} e^{-(\nu^2 + \lambda^2)\bar{\theta}} d\bar{\theta} \times \\ \times \int_0^{\infty} \eta^{1-n} G_1(R, \nu, \theta - \bar{\theta}, \bar{\eta}) J_n(\lambda\bar{\eta}) d\bar{\eta} &+ \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^{\theta} \overline{W}(N, \theta - \bar{\theta}, \nu, \lambda) \times \\ \times e^{-(\nu^2 + \lambda^2)\bar{\theta}} d\bar{\theta}.\end{aligned}\quad (19)$$

Далее из (15) согласно формуле обращения Фурье — Бесселя [5] следует:

$$\bar{q}(\theta, \nu, \eta) = \eta^n \int_0^{\infty} \lambda Y(\theta, \nu, \lambda) J_n(\lambda\eta) d\lambda\quad (20)$$

и если это выражение подставим во вторую из формул Фурье (12), получим:

$$q(\theta, \omega, \eta) = \frac{\eta^n}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu\omega} d\nu \int_0^{\infty} \lambda Y(\theta, \nu, \lambda) J_n(\lambda\eta) d\lambda.$$

Подставим сюда вместо $Y(\theta, \nu, \lambda)$ ее значение по (19) и поменяем порядок интегрирования, тогда получим

$$\begin{aligned}
 q(\theta, \omega, \eta) = & \frac{\eta^n}{2\pi} \int_0^\infty \bar{\eta}^{1-n} d\bar{\eta} \int_{-\infty}^\infty f_1(\bar{\omega}, \bar{\eta}) d\bar{\omega} \int_0^\infty e^{-\lambda^2} \lambda J_n(\lambda \bar{\eta}) J_n(\lambda \eta) d\lambda \times \\
 & \times \int_{-\infty}^\infty e^{-\nu^2 \theta - i\nu(\omega - \bar{\omega})} d\nu + \frac{\eta^n}{\Gamma(n) 2\pi} \int_0^\theta d\bar{\theta} \int_{-\infty}^\infty \varphi_1(\bar{\omega}, \theta - \bar{\theta}) d\bar{\omega} \times \\
 & \times \int_0^\infty e^{-\lambda^2 \bar{\theta}} \lambda^{1+n} J_n(\lambda \eta) d\lambda \int_{-\infty}^\infty e^{-\nu^2 \bar{\theta} - i\nu(\omega - \bar{\omega})} d\nu + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{\eta^n}{2\pi} \int_0^\infty \bar{\eta}^{1-n} d\bar{\eta} \times \\
 & \times \int_0^\theta d\bar{\theta} \int_0^\infty e^{-\lambda^2 \bar{\theta}} \lambda J_n(\lambda \eta) J_n(\lambda \bar{\eta}) d\lambda \int_{-\infty}^\infty e^{-\nu^2 \bar{\theta} - i\nu \omega} G_1(R, \nu, \theta - \bar{\theta}, \bar{\eta}) d\nu + \\
 & + \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\eta^n}{2\pi} \int_0^\theta d\bar{\theta} \int_0^\infty \lambda J_n(\lambda \eta) e^{-\lambda^2 \bar{\theta}} d\lambda \int_{-\infty}^\infty e^{-\nu^2 \bar{\theta} - i\nu \omega} \bar{W}(N, \theta - \bar{\theta}, \nu, \lambda) d\nu. \quad (21)
 \end{aligned}$$

Упростим выражение (22):

а) внутренние интегралы первых двух членов (22) известны:

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 \theta} \lambda J_n(\lambda \eta) J_n(\lambda \bar{\eta}) d\lambda = \frac{1}{2\theta} I_n\left(\frac{\eta \bar{\eta}}{2\theta}\right) e^{-\frac{\eta^2 + \bar{\eta}^2}{4\theta}}, \quad (22)$$

$$\int_0^\infty e^{-\lambda^2 \theta} \lambda^{1+n} J_n(\lambda \eta) d\lambda = \frac{\eta^n}{(2\theta)^{1+n}} e^{-\frac{\eta^2}{4\theta}}, \quad (23)$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-\nu^2 \theta - i\nu(\omega - \bar{\omega})} d\nu = 2 \int_0^\infty e^{-\nu^2 \theta} \cos \nu(\omega - \bar{\omega}) d\nu = \sqrt{\frac{\pi}{\theta}} e^{-\frac{(\omega - \bar{\omega})^2}{4\theta}}, \quad (24)$$

б) далее, учитывая условия ограниченности (10') и (11'), можно после некоторых выкладок, которые для краткости опускаем, показать, что пределы последних двух выражений (21) равны нулю.

После этих упрощений получим искомое выражение для величины q :

$$q(\theta, \omega, \eta) = q_1(\theta, \omega, \eta) + q_2(\theta, \omega, \eta), \quad (25)$$

где:

$$q_1(\theta, \omega, \eta) = \frac{\eta^n}{4\sqrt{\pi\theta^{3/2}}} \int_0^\infty \bar{\eta}^{1-n} e^{-\frac{\eta^2 + \bar{\eta}^2}{4\theta}} I_n\left(\frac{\eta \bar{\eta}}{2\theta}\right) d\bar{\eta} \int_{-\infty}^\infty f_1(\bar{\omega}, \bar{\eta}) e^{-\frac{(\omega - \bar{\omega})^2}{4\theta}} d\bar{\omega}, \quad (26)$$

$$q_2(\theta, \omega, \eta) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\Gamma(n)} \left(\frac{\eta^2}{4}\right)^n \int_0^\theta e^{-\frac{\eta^2}{4\bar{\theta}}} \frac{d\bar{\theta}}{\bar{\theta}^{3/2+n}} \int_{-\infty}^\infty \varphi_1(\bar{\omega}, \theta - \bar{\theta}) e^{-\frac{(\omega - \bar{\omega})^2}{4\bar{\theta}}} d\bar{\omega}. \quad (27)$$

Для турбулентного потока, т. е. для величины

$$Q(x, y) = Q(\theta, \omega) = -k_z \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0}, \quad (28)$$

из (26) и (27) с учетом (3) и (6) получим:

$$Q(\theta, \omega) = Q_1(\theta, \omega) + Q_2(\theta, \omega), \quad (29)$$

где:

$$Q_1(\theta, \omega) = - \frac{k_1 \varepsilon}{4^{1+n} n V \pi \Gamma(n) z_1 \theta^{\frac{3}{2}+n}} \int_0^{\infty} \bar{\eta} e^{-\frac{\bar{\eta}^2}{4\theta}} d\bar{\eta} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\bar{\omega}, \bar{\eta}) e^{-\frac{(\omega - \bar{\omega})^2}{4\theta}} d\bar{\omega}, \quad (30)$$

$$Q_2(\theta, \omega) = - \frac{k_1 \varepsilon}{4^{1+n} n V \pi \Gamma(n) z_1} \lim_{\theta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\bar{\eta}^2}{4\theta}} \left(2n - \frac{\bar{\eta}^2}{2\theta}\right) \frac{d\bar{\theta}}{\bar{\theta}^{\frac{3}{2}+n}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(\bar{\omega}, \theta - \bar{\theta}) e^{-\frac{(\omega - \bar{\omega})^2}{4\theta}} d\bar{\omega}. \quad (31)$$

Таким образом, общее решение задачи о трансформации воздушной массы, учитывающее боковое турбулентное перемешивание, представлено выражениями (25) и (29). Трансформация складывается из двух частей:

а) части, вызванной неравновесным начальным состоянием воздушной массы у наветренного края подстилающей поверхности; она дается формулами (26) и (30);

б) части, обусловленной влиянием подстилающей поверхности. Эта часть дается формулами (27) и (31).

Если боковая диффузия отсутствует, то легко получить известное для этого случая решение, данное Д. Л. Лайхтманом в работе [3].

Действительно, в этом случае в основном уравнении (1*) нужно положить $\alpha = 0$, что соответствует $y = \infty$ (или $\omega = \infty$). Формулы (26) и (27) тогда дают:

$$q_1(\theta, \infty, \eta) = \frac{\eta^n}{2\theta} \int_0^{\infty} \bar{\eta}^{1-n} e^{-\frac{\bar{\eta}^2 + \eta^2}{4\theta}} I_n\left(\frac{\eta \bar{\eta}}{2\theta}\right) f_1(\infty, \bar{\eta}) d\bar{\eta}, \quad (26')$$

$$q_2(\theta, \infty, \eta) = \frac{1}{\Gamma(n)} \left(\frac{\eta^2}{4\theta}\right)^n \int_0^{\theta} e^{-\frac{\bar{\eta}^2}{4\theta}} \varphi_1(\infty, \theta - \bar{\theta}) \frac{d\bar{\theta}}{\bar{\theta}^{1+n}}, \quad (27')$$

т. е. решения, совпадающие с формулами Д. Л. Лайхмана.

§ 2. Преобразование общего решения

Общее решение, представленное формулами (26), (27), (30) и (31) для непосредственных расчетов не подходит, ибо содержит двойные несобственные интегралы. Преобразуем их к виду, более удобному для вычислений. Для этой цели сделаем замену переменных в интегралах.

1. Вместо переменной $\bar{\eta}$ (или \bar{z}) в (26), меняющейся от 0 до ∞ , введем новую переменную ν , меняющуюся монотонно в конечных пределах от 0 до 1:

$$\frac{\eta^n}{2\theta} \int_0^{\bar{\eta}} \bar{\eta}^{1-n} e^{-\frac{\bar{\eta}^2 + \eta^2}{4\theta}} I_n\left(\frac{\eta \bar{\eta}}{2\theta}\right) d\bar{\eta} = \nu \cdot \frac{\eta^n}{2\theta} \int_0^{\infty} \bar{\eta}^{1-n} e^{-\frac{\bar{\eta}^2 + \eta^2}{4\theta}} I_n\left(\frac{\eta \bar{\eta}}{2\theta}\right) d\bar{\eta}$$

или, после некоторых преобразований:

$$2s^2 \int \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{\sigma}{2n}} \eta_0^{1-n} e^{-s^2(1+\eta_0^2)} I_n(2s^2\eta_0) d\eta_0 = \nu [1 - P(2s^2; 2n)], \quad (33)$$

где

$$s = \frac{\eta}{2\sqrt{\theta}} = \frac{nz_1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{u_1}{k_{1x}}} \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{\sigma}{2n}}, \quad (34)$$

$$P(2s^2; 2n) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_{s^2}^{\infty} e^{-\sigma} \sigma^{n-1} d\sigma. \quad (35)$$

Таблицы функции (35) имеются в книге Слущкого (6).

2. Вместо переменной $\bar{\omega}$ (или \bar{y}) в (26) и (30) вводим переменную λ , которая также меняется монотонно в интервале (0, 1):

$$\lambda = \frac{1}{2\sqrt{\pi\theta}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(\omega - \bar{\omega})^2}{4\theta}} d\bar{\omega}$$

или

$$\lambda = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi \left[\delta \left(\frac{\bar{y}}{y} - 1 \right) \right] \right\}, \quad (36)$$

где: Φ — функция Крампа.

$$\delta = \frac{\omega}{2\sqrt{\theta}} = \frac{y}{2\sqrt{ax}}. \quad (37)$$

3. Вместо переменной $\bar{\theta}$ (или \bar{x}) в (27) вводим переменную r , меняющуюся монотонно в интервале (0, 1):

$$\left(\frac{\gamma^2}{4}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\bar{\theta}} e^{-\frac{\gamma^2}{4(\theta - \bar{\theta})}} \frac{d\bar{\theta}}{(\theta - \bar{\theta})^{1+n}} = r \left(\frac{\gamma^2}{4}\right)^n \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\theta} e^{-\frac{\gamma^2}{4(\theta - \bar{\theta})}} \frac{d\bar{\theta}}{(\theta - \bar{\theta})^{1+n}},$$

или

$$r = 1 - \frac{P\left(\frac{2s^2}{1 - \frac{x}{x}}; 2n\right)}{P(2s^2; 2n)}. \quad (38)$$

4. Вместо $\bar{\omega}$ (или \bar{y}) в (27) и (31) вводим переменную ρ , причем $0 < \rho < 1$

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta - \bar{\theta})}} \int_{-\infty}^{\bar{\omega}} e^{-\frac{(\omega - \bar{\omega})^2}{4(\theta - \bar{\theta})}} d\bar{\omega} = \rho,$$

или

$$\rho = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \Phi \left[\frac{\delta}{\sqrt{1 - \frac{x}{x}}} \left(\frac{\bar{y}}{y} - 1 \right) \right] \right\}. \quad (39)$$

5. Вместо $\bar{\eta}$ (или \bar{z}) в (30) вводим v_0 , где $0 < v_0 < 1$

$$\frac{2}{4^{1+n} \Gamma(n) \theta^{1+n}} \int_0^{\bar{\eta}} \bar{\eta} e^{-\frac{\bar{\eta}^2}{4\theta}} d\bar{\eta} = v_0 \frac{2}{4^{1+n} \Gamma(n) \theta^{1+n}} \int_0^{\infty} \bar{\eta} e^{-\frac{\bar{\eta}^2}{4\theta}} d\bar{\eta},$$

или

$$v_0 = 1 - e^{-s_0^2 \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{\varepsilon}{n}}}, \quad (40)$$

где

$$s_0 = s|_{z=z_1} = \frac{1}{2\sqrt{\theta}} = \frac{nz_1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{u_1}{k_1 x}}. \quad (41)$$

Теперь на основании (33), (36), (38), (39) и (40) формулы общего решения (26), (27), (30) и (31) примут вид:

$$q_1(\theta, \omega, \eta) = q_1(x, y, z) = [1 - P(2s^2; 2n)] \int_0^1 dv \int_0^1 f(\bar{y}, \bar{z}) d\lambda, \quad (42)$$

$$q_2(\theta, \omega, \eta) = q_2(x, y, z) = P(2s^2; 2n) \int_0^1 dr \int_0^1 \varphi(\bar{x}, \bar{y}) d\rho, \quad (43)$$

$$Q_1(\theta, \omega) = Q_1(x, y) = -\frac{k_1 \varepsilon}{nz_1} \frac{s_0^{2n}}{\Gamma(n)} \int_0^1 dv_0 \int_0^1 f(\bar{y}, \bar{z}) d\lambda, \quad (44)$$

$$Q_2(\theta, \omega) = Q_2(x, y) = -\frac{k_1 \varepsilon}{nz_1} \frac{s_0^{2n}}{\Gamma(n)} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^x \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{\bar{x}}{x}\right)^{-n} e^{-\frac{s^2}{1 - \frac{\bar{x}}{x}}} \right] \times \\ \times d\bar{x} \int_0^1 \varphi(\bar{x}, \bar{y}) d\rho. \quad (45)$$

Решения (42), (43) и (44) можно применить для непосредственных вычислений величин q и Q , ибо интегралы имеют конечные пределы (0,1) и могут вычисляться графически или по формулам приближенного интегрирования. Задача эта значительно облегчается, если заранее затабулировать или представить графически зависимости (33), (36), (38), (39) и (40) для различных значений параметров s , n , δ и ε/n .

§ 3. Учет начального условия (в общем виде)

Остановимся подробнее на вычислении трансформации воздушной массы, обусловленной неравновесным распределением у края ($x=0$), т. е. на вычислении величин $q_1(x, y)$ и $Q_1(x, y)$ [формулы (26) и (30)].

Применяя к внешним интегралам (42) и (44) формулу Чебышева (7) для приближенного вычисления интегралов при m ординатах, получим:

$$q_1(x, y, z) = [1 - P(2s^2; 2n)] \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \int_0^1 f(\bar{y}; \bar{z}_j) d\lambda, \quad (42')$$

$$Q_1(x, y) = -\frac{k_1 \varepsilon}{nz_1} \frac{s_0^{2n}}{\Gamma(n)} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \int_0^1 f(\bar{y}; \bar{z}_j) d\lambda, \quad (44')$$

где согласно (33) и (40):

$$\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^{\frac{n}{\varepsilon}} 2s^2 \int_0^{\varepsilon} \eta_0^{1-n} e^{-s^2(1+\eta_0^2)} I_n(2s^2\eta_0) d\eta_0 = \frac{(1+\sigma_j)}{2} [1 - P(2s^2; 2n)], \quad (33')$$

$$\bar{z}_j = z_1 \left[\frac{\ln \frac{2}{1-\sigma_j}}{s_0^2} \right]^{\frac{n}{\varepsilon}} \quad (40')$$

и где σ_i — ординаты Чебышева, а \ln — натуральный логарифм.

При малых значениях параметра s , на основании (33') можно получить явную зависимость $\frac{\bar{z}_j}{z}$ от σ_j в виде:

$$\frac{\bar{z}_j}{z} = \left[\frac{\ln \frac{2}{1-\sigma_j}}{s^2} \right]^{\frac{n}{\varepsilon}} \left\{ 1 + \frac{s^2}{1+n} + \frac{s^4}{(1+n)(2+n)} \left[1 - \left(1+n - \frac{1}{2(1+n)} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \ln \frac{2}{1-\sigma_j} \right] + \dots \right\} \quad (33'')$$

Если начальное распределение $f(y, z)$ зависит только от высоты z , то (42') и (44') упрощаются и примут вид:

$$q_1(x, z) = [1 - P(2s^2; 2n)] \cdot \frac{f(\bar{z}_1) + f(\bar{z}_2) + \dots + f(\bar{z}_m)}{m}, \quad (42'')$$

$$Q_1(x) = -\frac{k_1 \varepsilon s_0^{2n}}{nz_1 \Gamma(n)} \cdot \frac{f(\bar{z}_1) + f(\bar{z}_2) + \dots + f(\bar{z}_m)}{m}. \quad (44'')$$

Таким образом, вычисление q_1 и Q_1 в случае, если начальное распределение зависит только от высоты, сводится к нахождению средней арифметической из значений функции f на некоторых переменных высотах z . Эти высоты могут быть заранее вычислены в зависимости от значений параметров s , n и n/ε .

II. ТРАНСФОРМАЦИЯ ВОЗДУШНОЙ МАССЫ НАД ПОЛОСКОЙ

§ 1. Получение расчетных формул

Применим полученные формулы к следующему случаю (рис. 1): воздушная масса движется вдоль незамерзшего водоема в форме полубесконечного канала, шириной L и окруженного однородной снежной поверхностью.

Допустим, что $x=0$ совпадает с краем канала и ось x расположена по направлению движения массы и посередине канала.

Рассматривая трансформацию температуры, можно граничные условия (II) и (III) задать в следующем виде:

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} T_0 \text{ при } x > 0 & -\infty < y < \frac{L}{2}, \\ \varphi_0 \text{ при} & -\frac{L}{2} \leq y \leq \frac{L}{2}, \\ T_0 \text{ при} & \frac{L}{2} < y < \infty, \end{cases} \quad (III')$$

где: T_0 — температура снега (считаем ее постоянной), а φ_0 — температура незамерзшего водоема (также постоянная);
 б)

$$f(y, z) = f(z) = T_0 + f_0(z), \quad (\text{II}')$$

причем $f_0(0) = 0$. Кроме того, здесь начальное условие (II) не будет зависеть от y , ибо перед вступлением на водоем воздушная масса двигалась по однородной снежной поверхности; очевидно также, что в воздушной массе, поступившей на водоем, установится инверсия температуры до некоторой высоты, т. е. условие (II') здесь задается в общем виде (но не зависящем от y) и с инверсией по высоте.

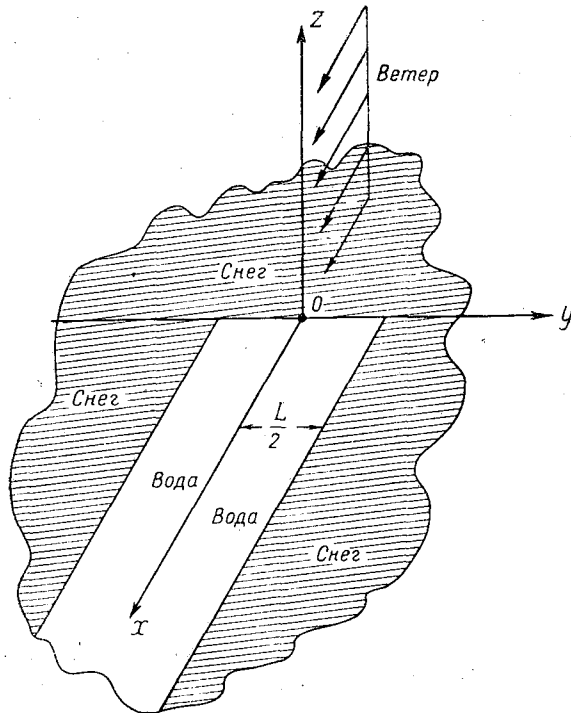


Рис. 1.

Если в качестве величины $q(x, y, z)$ взять $T(x, y, z) - T_0$, где T — температура, то на основании выведенных ранее формул (25), (42'') и (43) получим:

$$T(x, y, z) = T_0 + T_1(x, z) + T_2(x, y, z), \quad (46)$$

где:

$$T_1(x, z) = [1 - P(2s^2; 2n)] \cdot \frac{f_0(\bar{z}_1) + f_0(\bar{z}_2) + \dots + f_0(\bar{z}_m)}{m}, \quad (47)$$

$$T_2(x, y, z) = P(2s^2; 2n) (\varphi_0 - T_0) \int_0^1 \left[\rho\left(\frac{L}{2}; s; r\right) - \rho\left(-\frac{L}{2}; s; r\right) \right] dr \quad (48)$$

и так как согласно (39):

$$\rho\left(\frac{L}{2}; s; r\right) - \rho\left(-\frac{L}{2}; s; r\right) = \frac{1}{2} \left\{ \Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\frac{x}{x}} \frac{\frac{L}{2}+y}{y}}\right) + \right. \\ \left. + \Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\frac{x}{x}} \frac{\frac{L}{2}-y}{y}}\right) \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \Phi\left(\frac{\delta_L + \delta}{\sqrt{1-\frac{x}{x}}}\right) + \Phi\left(\frac{\delta_L - \delta}{\sqrt{1-\frac{x}{x}}}\right) \right\},$$

где $\delta_L = \frac{L}{2\sqrt{ax}}$ и ограничиваясь в (47) тремя высотами \bar{z} (то-есть, берем в формуле Чебышева три ординаты, что обеспечивает в большинстве случаев необходимую точность), получим следующие расчетные формулы:

$$T_1(x, z) = [1 - P(2s^2; 2n)] \cdot \frac{f_0(\bar{z}_1) + f_0(\bar{z}_2) + f_0(\bar{z}_3)}{3}, \quad (47')$$

$$T_2(x, y, z) = (\varphi_0 - T_0) S(x, y, z), \quad (48')$$

где

$$S(x, y, z) = S_1(s, n, \delta_L + \delta) + S_1(s, n, \delta_L - \delta) \quad (49)$$

и где

$$S_1(s, n, \delta) = S_1(x, y, z) = \frac{1}{2} P(2s^2; 2n) \int_0^1 \Phi\left(\frac{\delta}{\sqrt{1-\frac{x}{x}}}\right) dr \quad (50)$$

[связь между \bar{x}/x и r в (51) дается формулой (38)].

Для того, чтобы расчет по формулам (47') и (48') стал возможным, необходимо, кроме входных данных, иметь в наличии следующие вспомогательные величины:

1) значения трех высот \bar{z}_1 , \bar{z}_2 и \bar{z}_3 в зависимости от величин параметров s , n и ε . Эти высоты можно рассчитать по формуле (33''), полагая там поочередно $\sigma_1 = -0,7071$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = 0,7071$ (эти числа суть значения трех ординат Чебышева). В приложении 1 даются значения этих высот для различных s при $n = 0,1$ и $\varepsilon = 1/8$;

2) значения функции $P(2s^2, 2n)$ в виде таблицы или графика. Эта функция затабулирована в упомянутой выше книге Слуцкого [6]. В приложении № 1 приведены ее значения для $n = 0,1$ и для различных значений s ;

3) значения функции $S_1(s, n, \delta)$ в зависимости от параметров s , n и δ . В приложении 2 дается значение этой функции для различных s и δ и для $n = 0,1$, рассчитанных приближенным интегрированием по формуле (50).

Для турбулентного потока тепла, т. е. для величины

$$Q(x, y) = -c_p \rho k_z \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0},$$

где c_p и ρ — соответственно удельная теплоемкость и плотность воздуха, получим:

$$Q(x, y) = Q_1(x) + Q_2(x, y), \quad (29')$$

где согласно (44'') и (45):

$$Q_1(x) = -\frac{c_p \rho k_1 \varepsilon}{n z_1} \frac{s_0^{2n}}{\Gamma(n)} \cdot \frac{f_0(z_1) + f_0(z_2) + f_0(z_3)}{3}, \quad (51)$$

$$Q_2(x, y) = -\frac{c_p \rho k_1 \varepsilon}{2n z_1} s_0^{2n} \frac{\varphi_0 - T_0}{\Gamma(n)} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^x \frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{\bar{x}}{x}\right)^{-n} e^{-\frac{s^2}{1 - \frac{\bar{x}}{x}}} \right] \times$$

$$\times \left\{ \Phi \left(\frac{\delta_L + \delta}{\sqrt{1 - \frac{\bar{x}}{x}}} \right) + \Phi \left(\frac{\delta_L - \delta}{\sqrt{1 - \frac{\bar{x}}{x}}} \right) \right\} d\bar{x}$$

или, интегрируя по частям и переходя к пределу при $s \rightarrow 0$, получим:

$$Q_2(x, y) = \frac{c_p \rho k_1 \varepsilon}{n z_1} \frac{s_0^{2n} (\varphi_0 - T_0)}{\Gamma(n)} S_0(x, y), \quad (52)$$

$$S_0(x, y) = S_{10}(n; \delta_L + \delta) + S_{10}(n; \delta_L - \delta), \quad (53)$$

где

$$S_{10}(n; \delta) = \frac{1}{2} \left[\Phi(\delta) \pm \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{(\delta^2)^n \sqrt{\pi}} P(2\delta^2; 2n + 1) \right], \quad (54)$$

где знак „+“ берется при $\delta > 0$, а знак „-“ при $\delta < 0$.

Для расчета турбулентного потока тепла Q по формулам (51) и (52) необходимо, кроме входных данных, иметь:

1) значения трех высот z_1 , z_2 и z_3 в зависимости от параметров s_0 и n/ε . В приложении 3 даны эти высоты для различных s_0 и $n/\varepsilon = 0,8$;

2) значения $S_{10}(n, \delta)$ для различных δ и n . Эта функция для $n = 0,1$ приведена в приложении 4.

Ниже дается пример расчета по полученным формулам (48) (48'), (51) и (52).

§ 2. Пример

Рассчитаем величины $T(x, y, z)$ и $Q(x, y, z)$ по следующим исходным данным:

- 1) $T_0 = -20^\circ$ (градусы Цельсия)
 - 2) $\varphi_0 = 1^\circ$
 - 3) $L = 1000$ метров
 - 4) $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1}{8}$
 - 5) $a = 1$ метр
 - 6) $z_1 = 1$ метр
 - 7) $\frac{k_1}{u_1} = 0,05$ метров
 - 8) $u_1 = 1,5$ метра, $k_1 = 0,075$ м²/сек.
 - 9) распределение температуры в натекающей воздушной массе при $x = 0$ дано в табл. 1 (инверсия до высоты 200 м, затем падение с градиентом $\sigma^0/\text{км}$).
- Рассчитаем вначале по формулам (35), (38) и (42) исходные параметры s , δ , $\delta_L + \delta$, $\delta_L - \delta$ и S_0 , оставляя переменными x , y и z , тогда получим:

$$s = \frac{3,58}{\sqrt{x}} z^{0,625}, \quad (34')$$

$$\delta = \frac{y}{2\sqrt{x}}; \quad \delta_L + \delta = \frac{500 + y}{2\sqrt{x}}; \quad \delta_L - \delta = \frac{500 - y}{2\sqrt{x}}, \quad (37')$$

$$s_0 = \frac{3,58}{\sqrt{x}}. \quad (41')$$

Таблица 5

Высоты	у	х					
		0	100	1 000	10 000	50 000	100 000
z = 0	0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0
	450	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0
	490	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0
	±500	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0	21,0
	510	0	0	0	0	0	0
	550	0	0	0	0	0	0
	600	0	0	0	0	0	0
	1 000	0	0	0	0	0	0
z = 0,1	0	0	7,6	10,1	12,5	13,9	14,3
	250	0	7,6	10,1	12,5	13,9	14,1
	350	0	7,6	10,1	12,5	13,4	13,8
	400	0	7,6	10,1	12,3	12,9	13,2
	450	0	7,6	10,0	11,8	12,5	12,7
	490	0	7,2	8,8	10,2	10,5	10,9
	±500	0	3,8	5,2	6,2	7,0	7,2
	510	0	0,4	1,3	2,3	3,4	3,4
	550	0	0	0,0	0,7	1,4	1,6
	600	0	0	0,0	0,2	0,9	1,0
	650	0	0	0	0	0,4	0,5
	750	0	0	0	0	0	0,2
	1 000	0	0	0	0	0	0
z = 2	0	0	1,9	5,6	8,7	10,2	11,3
	250	0	1,9	5,6	8,7	9,9	10,8
	350	0	1,9	5,6	8,6	9,5	10,4
	400	0	1,9	5,6	8,4	9,1	9,8
	450	0	1,9	5,4	7,7	8,1	9,1
	490	0	1,6	3,9	5,8	6,1	7,1
	±500	0	1,0	2,8	4,4	5,1	5,6
	510	0	0,2	1,6	3,0	4,0	4,2
	550	0	0	0,1	1,0	2,0	2,2
	600	0	0	0,0	0,4	0,1	1,4
	650	0	0	0,0	0	0,7	0,8
	750	0	0	0,0	0	0,4	0,5
	1 000	0	0	0,0	0	0,0	0,0
z = 50	0	0	0	0	2,7	5,0	6,0
	250	0	0	0	2,7	4,8	5,6
	350	0	0	0	2,6	4,2	5,2
	400	0	0	0	2,4	3,8	4,6
	450	0	0	0	2,0	3,2	4,1
	490	0	0	0	1,5	2,6	3,3
	±500	0	0	0	1,4	2,5	3,0
	510	0	0	0	1,2	2,3	2,9
	550	0	0	0	0,7	1,7	2,1
	600	0	0	0	0,3	1,2	1,6
	650	0	0	0	0	0,8	1,0
	750	0	0	0	0	0,4	0,5
	1 000	0	0	0	0	0,0	0,0
z = 300	0	0	0	0	0,5	1,6	2,6
	250	0	0	0	0,4	1,4	2,4
	350	0	0	0	0,4	1,2	2,1
	400	0	0	0	0,4	1,0	1,9
	450	0	0	0	0,3	0,9	1,7
	490	0	0	0	0,2	0,8	1,5
	±500	0	0	0	0,2	0,8	1,3
	510	0	0	0	0,2	0,7	1,3
	550	0	0	0	0,2	0,7	1,2
	600	0	0	0	0,1	0,4	1,0
	650	0	0	0	0	0,4	0,8
	750	0	0	0	0	0,2	0,5
	1 000	0	0	0	0	0,0	0,0

Влияние боковой диффузии сказывается в уменьшении прогрева над водоемом (уменьшение по сравнению с тем, который был бы при отсутствии боковой диффузии) и в нагревании воздушной массы над снежной поверхностью (при отсутствии боковой диффузии этот прогрев отсутствовал бы совсем). Изменения эти практически сказываются только в сравнительно узких полосах над краями канала, где $y = \pm 500$ м, и расширяющихся с удалением воздушной массы от края $x = 0$ (например, при $x = 100$ км влияние это простирается в обе стороны на расстоянии до 250 м). Заметим, что эти результаты получены при значении параметра $a = 1$ м; это соответствует в нашем примере тому, что боковая диффузия на высоте 1 м превышает вертикальную диффузию на той же высоте в 20 раз ($k_y|_{z=1} = a \cdot u_1 = 1,5$ м²/сек., $k_z|_{z=1} = k_1 = 0,075$ м²/сек.). Если боковое перемешивание усилится, то влияние его будет простирается дальше (например, если при $a = 1$ м оно доходило до 250 метров, то при $a = 10$ м боковое перемешивание уже будет заметно на расстоянии $250 \sqrt{10} \approx 800$ м от края водоема). Влияние боковой диффузии на поток тепла у поверхности аналогично, только действует в противоположную сторону, чем на температуру: оно увеличивает поток по сравнению с тем, который имелся бы при отсутствии бокового перемешивания. С приближением к краям водоема поток тепла увеличивается, а над самыми краями, вследствие предположенного там разрыва температуры между поверхностью воды и снега, поток тепла равен бесконечности, причем со стороны воды — плюс бесконечность (масса мгновенно прогревается), а со стороны снега — минус бесконечность (масса мгновенно отдает тепло, занесенное боковой диффузией).

Таблица 6

y	x					
	0	100	1 000	10 000	50 000	100 000
0	∞	0,312	0,248	0,192	0,172	0,160
± 250	∞	0,312	0,248	0,192	0,183	0,164
± 350	∞	0,312	0,248	0,194	0,181	0,170
± 400	∞	0,312	0,248	0,198	0,187	0,176
± 450	∞	0,312	0,251	0,207	0,200	0,189
± 490	∞	0,320	0,273	0,244	0,241	0,230
± 500	∞	∞	∞	∞	∞	∞
± 510	0	-0,009	-0,030	-0,053	-0,067	-0,072
± 550	0	0	-0,002	-0,015	-0,027	-0,032
± 600	0	0	0	-0,005	-0,015	-0,019
± 650	0	0	0	-0,002	-0,009	-0,013
± 750	0	0	0	0	-0,004	-0,007
$\pm 1 000$	0	0	0	0	-0,001	-0,003

Для получения суммарной трансформации (от начального условия и от подстилающей поверхности) следует согласно (46) и (29') сложить полученные эффекты.

Таким образом, приведенный пример позволяет сделать следующий вывод о влиянии боковой диффузии: боковую диффузию необходимо учитывать вблизи краев, расположенных вдоль ветра, где существуют значительные градиенты. Влияние простирается в сравнительно узких полосах, по обе стороны расширяющихся при продвижении воздушной массы от края $x = 0$. (При $x = 100$ км влияние еще заметно на расстоянии порядка нескольких сотен метров от края, увеличиваясь по мере приближения к нему).

В общем случае полученные формулы дают возможность судить о дальности влияния боковой диффузии по следующему критерию: ею можно пренебречь, когда $|y| > \sqrt{ax}$ (это видно, например, из таблиц приложений 2 и 4, если

сравнить значения табличных функций для $|\delta| = \infty$, что соответствует отсутствию боковой диффузии и значению $\delta = \frac{y}{2\sqrt{ax}}$ порядка $0,5-1$). Что касается влияния боковой диффузии на величину $q(x, y, z)$ и на ее турбулентный поток (например, на испарение), то неучет ее вблизи краев (т. е. при $y < \sqrt{ax}$) может привести к значительным ошибкам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. и Соловейчик Р. Э. К теории испарения с ограниченных водоемов Доклады Академии Наук СССР, том 86, № 1, 1952.
2. Берлянд М. Е. Эффективность открытого обогрева растений при заморозках. Труды ГГО, выпуск 23 (85), 1950.
3. Лайхтман Д. Л. Трансформация воздушной массы под влиянием подстилающей поверхности. Метеорология и гидрология, № 1, 1947.
4. Davies D. R. Proc. of R. S., A. 190, p. 232, 1947.
5. Грей Э. и Метьюз Г. Б. Функции Бесселя и их применение к физике и механике Москва, 1949. Изд. иностр. лит-ры.
6. Слуцкий Е. Е. Таблицы для вычисления неполной функции и функции вероятности Изд. АН СССР, 1950.
7. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях, Гостехиздат, 1950.

Приложение 1

Значения \bar{z}_1/z , \bar{z}_2/z , \bar{z}_3/z и $1 - P(2s^2, 2n)$

при $n = 0,1$; $\varepsilon = 0,125$

s	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	$3 \cdot 10^{-2}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$7,5 \cdot 10^{-2}$
\bar{z}_1/z	$1,44 \cdot 10^4$	$2,51 \cdot 10^3$	$1,10 \cdot 10^3$	576	363	63,2	27,5	14,4
\bar{z}_2/z	$4,68 \cdot 10^4$	$8,13 \cdot 10^3$	$3,39 \cdot 10^3$	1 800	1 170	204	90,0	47,3
\bar{z}_3/z	$10,7 \cdot 10^4$	$18,2 \cdot 10^3$	$8,13 \cdot 10^3$	4 160	2 630	468	204	106
$1 - P(2s^2, 2n)$	0,264	0,336	0,364	0,396	0,418	0,520	0,578	0,624

s	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	1,0	1,2
\bar{z}_1/z	9,10	3,11	1,68	1,12	0,831	0,675	0,577	0,515	0,464	0,458
\bar{z}_2/z	29,7	10,1	5,47	3,63	2,70	2,15	1,82	1,62	1,39	1,28
\bar{z}_3/z	66,9	22,9	12,3	8,17	6,02	4,79	4,00	3,47	2,76	2,29
$1 - P(2s^2, 2n)$	0,666	0,759	0,819	0,863	0,896	0,920	0,940	0,955	0,976	0,988

Значения $S_1(s, n, \delta)$ при $n = 0,1$ [$S_1(s, n, \delta) = -S_1(s, n, -\delta)$]

δ	Значения S														
	0	10^{-3}	$5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	0,05	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	1,00	1,20
0	0,500	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10^{-3}	0,500	0,0755	0,0167	0,0084	0,0017	0,0009	0,0004	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001	0	0	0
$5 \cdot 10^{-3}$	0,500	0,174	0,0756	0,0375	0,0091	0,0040	0,0019	0,0011	0,0007	0,0005	0,0003	0,0002	0,0002	0,0001	0
0,01	0,500	0,228	0,121	0,0758	0,0162	0,0080	0,0038	0,0022	0,0015	0,0010	0,0007	0,0005	0,0004	0,0002	0,0001
0,05	0,500	0,288	0,179	0,107	0,0382	0,0210	0,0138	0,0096	0,0070	0,0048	0,0034	0,0026	0,0017	0,0009	0,0004
0,1	0,500	0,309	0,253	0,210	0,115	0,0698	0,0348	0,0210	0,0138	0,0096	0,0067	0,0051	0,0034	0,0018	0,0009
0,2	0,500	0,341	0,275	0,247	0,156	0,108	0,0605	0,0393	0,0264	0,0185	0,0131	0,0100	0,0067	0,0034	0,0017
0,3	0,500	0,358	0,292	0,261	0,177	0,129	0,0775	0,0538	0,0370	0,0263	0,0188	0,0134	0,0097	0,0050	0,0024
0,4	0,500	0,365	0,304	0,272	0,188	0,142	0,0925	0,0643	0,0454	0,0328	0,0236	0,0171	0,0124	0,0064	0,0031
0,5	0,500	0,368	0,311	0,280	0,194	0,150	0,101	0,0718	0,0520	0,0378	0,0277	0,0201	0,0147	0,0076	0,0037
0,6	0,500	0,368	0,315	0,285	0,199	0,156	0,107	0,0772	0,0565	0,0418	0,0308	0,0226	0,0166	0,0086	0,0043
0,8	0,500	0,368	0,318	0,290	0,206	0,162	0,114	0,0840	0,0626	0,0468	0,0350	0,0259	0,0192	0,0101	0,0051
1,0	0,500	0,368	0,318	0,291	0,209	0,166	0,117	0,0875	0,0657	0,0497	0,0374	0,0279	0,0208	0,0110	0,0057
1,2	0,500	0,368	0,318	0,291	0,211	0,167	0,119	0,0892	0,0672	0,0510	0,0386	0,0289	0,0216	0,0116	0,0059
1,4	0,500	0,368	0,318	0,291	0,211	0,167	0,120	0,0900	0,0680	0,0516	0,0392	0,0295	0,0221	0,0119	0,0061
1,6	0,500	0,368	0,318	0,291	0,211	0,167	0,120	0,0906	0,0683	0,0520	0,0395	0,0298	0,0223	0,0120	0,0061
1,8	0,500	0,368	0,318	0,291	0,211	0,167	0,120	0,0906	0,0685	0,0521	0,0396	0,0299	0,0224	0,0120	0,0062
2,0	0,500	0,368	0,318	0,291	0,211	0,167	0,120	0,0906	0,0685	0,0522	0,0397	0,0299	0,0224	0,0120	0,0062
	0,500	0,368	0,318	0,291	0,211	0,167	0,120	0,0906	0,0685	0,0522	0,0397	0,0299	0,0224	0,0120	0,0062

Значение величины $\bar{z}_1/z_1, \bar{z}_2/z_2, \bar{z}_3/z_3$ при $z = 0,1$

s_0	10^{-3}	$3 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$7,5 \cdot 10^{-3}$	10^{-2}	0,03	0,05	0,075	0,100	0,150	0,200	0,250	0,300	0,360	0,450	0,500	0,600	0,800
\bar{z}_1/z_1	$1,44 \cdot 10^4$	$2,51 \cdot 10^3$	1 100	576	363	63,2	27,5	14,4	9,10	4,78	3,02	2,11	1,58	1,23	0,993	0,695	0,520	0,328
\bar{z}_2/z_2	$4,68 \cdot 10^4$	$8,13 \cdot 10^3$	3 390	1 880	1 170	204	90	47,3	29,7	15,5	9,75	6,88	5,11	4,00	3,22	2,67	1,68	1,06
\bar{z}_3/z_3	$10,7 \cdot 10^4$	$18,2 \cdot 10^3$	8 130	4 160	2 630	468	204	106	66,9	35,1	22,1	15,5	11,5	9,06	7,32	6,04	3,81	2,41

Значение функции $S_{10}(\delta, n)$ при $n = 0,1$ [$S_{10}(-\delta, n) = -S_{10}(\delta, n)$]

$S_{10}(\delta, n)$	0,000 ∞	0,001 1,672	0,003 1,342	0,005 1,212	0,007 1,134	0,010 1,056	0,012 1,018
$S_{10}(\delta, n)$	0,014 0,987	0,016 0,962	0,018 0,940	0,020 0,920	0,025 0,881	0,050 0,770	0,075 0,712
$S_{10}(\delta, n)$	0,10 0,675	0,12 0,654	0,14 0,636	0,16 0,620	0,18 0,609	0,20 0,599	0,25 0,578
$S_{10}(\delta, n)$	0,30 0,562	0,40 0,542	0,50 0,528	0,60 0,520	0,70 0,514	0,80 0,509	0,90 0,506
$S_{10}(\delta, n)$	1,0 0,502	1,2 0,502	1,4 0,501	1,6 0,501	1,8 0,500	0,500	

О ПЕРИОДИЧЕСКОМ ХОДЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПРИ НАЛИЧИИ АДВЕКЦИИ

В существующих теориях суточного хода температуры обычно не учитывается адвекция, т. е. перенос воздушных масс в горизонтальном направлении. Поэтому при практическом предвычислении температуры приходится вводить ее адвективное изменение независимо от суточного хода, так что реальное изменение температуры получается простым наложением суточного хода на ее адвективное изменение. Между тем очевидно, что адвекция существенно влияет на характер суточного хода температуры. Попытке учета этого влияния посвящена настоящая работа.

Рассматривается одна из наиболее простых физических схем влияния адвекции на суточный ход температуры. Коэффициент турбулентного перемешивания в атмосфере k полагается постоянным, не зависящим ни от высоты, ни от времени. Скорость ветра также принимается постоянной. Коэффициент температуропроводности в почве считается постоянным, причем горизонтальным теплообменом в почве пренебрегается. Для удобства будем рассматривать не температуру, а ее отклонение от некоторой средней (среднесуточной), кроме того будем считать, что это отклонение в атмосфере равно нулю над наветренной границей рассматриваемой области.

При указанных предположениях решение задачи моделирует суточный ход температуры воздуха над ограниченной территорией суши и суточный ход температуры в почве, при отсутствии местной циркуляции типа бриза. Условие над наветренной границей оправдывается тогда тем, что суточный ход температуры воздуха над водной поверхностью незначителен.

Отметим, что применяемый ниже метод может быть обобщен и на решение задач в более общей постановке. Возможности такого обобщения будут обсуждены в конце работы.

1. Математическая постановка задачи

При указанных выше предположениях уравнения, описывающие задачу, будут следующими:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad z > 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \tau}{\partial z^2}; \quad z < 0, \quad (2)$$

где T — отклонение температуры воздуха от среднесуточной; τ — отклонение температуры почвы от среднесуточной; u — скорость ветра; k — коэффициент турбулентного перемешивания в атмосфере; κ — коэффициент температуропроводности почвы; t — время; x — горизонтальная координата, направленная по ветру и отсчитываемая от наветренной границы территории; z — вертикальная координата, направленная от подстилающей поверхности вверх.

В качестве граничных условий используем:
 равенство нулю отклонения температуры воздуха над наветренной границей области

$$T|_{x=0} = 0, \quad (3)$$

затухание суточного хода температуры с удалением от подстилающей поверхности

$$T|_{z=+\infty} = \tau|_{z=-\infty} = 0, \quad (4)$$

равенство температур почвы и воздуха на подстилающей поверхности

$$T|_{z=0} = \tau|_{z=0}, \quad (5)$$

уравнение теплового баланса подстилающей поверхности

$$-l \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\lambda \frac{\partial \tau}{\partial z} \Big|_{z=0} + R(t), \quad (6)$$

где l — коэффициент теплопроводности воздуха; λ — коэффициент теплопроводности почвы; $R(t)$ — радиационный баланс подстилающей поверхности, считаемый известной периодической функцией времени:

$$R(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_n e^{in\omega t}. \quad (7)$$

$R(t)$ не зависит от горизонтальных координат.

Итак, задача сводится к решению системы уравнений (1), (2) при граничных условиях (3), (4), (5) и (6).

2. Решение задачи

В соответствии с периодическим ходом радиационного баланса (7) будем искать также периодические решения для функций T и τ

$$T(t, x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n(x, z) e^{in\omega t}, \quad (8)$$

$$\tau(t, x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \tau_n(x, z) e^{in\omega t}. \quad (9)$$

Подставляя (7), (8) и (9) в уравнения и граничные условия задачи, получим для определения комплексных амплитуд гармоник температуры воздуха $T_n(x, z)$ и почвы $\tau_n(x, z)$ уравнения

$$in\omega T_n + u \frac{\partial T_n}{\partial x} = k \frac{\partial^2 T_n}{\partial z^2}; \quad z > 0, \quad (10)$$

$$in\omega \tau_n = \kappa \frac{\partial^2 \tau_n}{\partial z^2}; \quad z < 0 \quad (11)$$

и граничные условия

$$T_n|_{x=0} = 0, \quad (12)$$

$$T_n|_{z=+\infty} = 0, \quad (13)$$

$$\tau_n|_{z=-\infty} = 0, \quad (14)$$

$$T_n|_{z=0} = \tau_n|_{z=0}, \quad (15)$$

$$-l \frac{\partial T_n}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\lambda \frac{\partial \tau_n}{\partial z} \Big|_{z=0} + R_n. \quad (16)$$

Решение уравнения (11) при условии (14) имеет вид

$$\tau_n(x, z) = \tau_n(x, 0) e^{(1+i)a_n z}, \quad (17)$$

где $a_n = \sqrt{\frac{n\omega}{2x}}$.

Благодаря такой форме зависимости $\tau_n(x, z)$ можно из условий (15) и (16) исключить $\tau_n(x, 0)$, в результате чего получим граничное условие для функции $T_n(x, z)$

$$-l \frac{\partial T_n}{\partial z} \Big|_{z=0} + (1+i)\lambda a_n T_n \Big|_{z=0} = R_n. \quad (18)$$

Для решения уравнения (10) при условиях (12), (13) и (18) применим операционное преобразование по координате x . Обозначая

$$\theta_n(z; p) = p \int_0^{\infty} T_n(x, z) e^{-px} dx,$$

получим для функции $\theta_n(z; p)$ (у которой в дальнейшем будем опускать обозначение второго аргумента) уравнение

$$\theta_n'' = \left(\frac{in\omega}{k} + \frac{u}{k} p \right) \theta_n$$

при граничных условиях

$$-l \theta_n'(0) + (1+i)\lambda a_n \theta_n(0) = R_n$$

и

$$\theta_n(\infty) = 0.$$

Находя отсюда функцию θ_n , получим

$$\theta_n(z; p) = \sqrt{\frac{k}{u}} \frac{R_n}{l} \frac{e^{-\sqrt{\frac{u}{k}} z} \sqrt{\frac{in\omega}{u} + p}}{\sqrt{\frac{k}{u} \frac{(1+i)\lambda a_n}{l} + \sqrt{\frac{in\omega}{u} + p}}}. \quad (19)$$

Для нахождения оригинала $T_n(x, z)$ по изображению $\theta_n(z; p)$, представленному формулой (19), воспользуемся известным соотношением

$$\begin{aligned} & \frac{e^{-\sqrt{a}(p+a)}}{b+\sqrt{p+a}} \div \frac{e^{-\sqrt{a}a}}{2(b+\sqrt{a})} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x}} - \sqrt{ax} \right) + \\ & + \frac{e^{\sqrt{a}a}}{2(b-\sqrt{a})} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x}} + \sqrt{ax} \right) - \frac{be^{\sqrt{a}a + b^2x - ax}}{b^2 - a} \times \\ & \times \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{x}} + b\sqrt{x} \right), \end{aligned} \quad (20)$$

где

$$\operatorname{erfc}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_y^{\infty} e^{-\eta^2} d\eta.$$

Формула (20) может быть получена, например, из формулы 3.129 Справочника по операционному исчислению В. А. Диткина и П. И. Кузнецова, если положить там $c=0$ и $t=x$. Тогда для функции $T_n(x, z)$ получим окончательно

$$T_n(x, z) = (1-i) \frac{R_n}{2\lambda a_n} \left\{ \frac{e^{-(1+i)c_n z}}{2(1+s)} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{uz^2}{kx}} - (1+i) d_n \sqrt{x} \right] + \right. \\ \left. + \frac{e^{(1+i)c_n z}}{2(1-s)} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{uz^2}{kx}} + (1+i) d_n \sqrt{x} \right] - \right. \\ \left. - \frac{e^{(1+i) \frac{c_n}{s} z + \frac{1-s^2}{s^2} \cdot 2id_n^2 x}}{1-s^2} \operatorname{erfc} \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{uz^2}{kx}} + (1+i) \frac{d_n}{s} \sqrt{x} \right] \right\}, \quad (21)$$

где

$$a_n = \sqrt{\frac{n\omega}{2\lambda}}; \quad d_n = \sqrt{\frac{n\omega}{2k}}, \\ c_n = \sqrt{\frac{n\omega}{2u}}; \quad s = \frac{l}{\lambda} \sqrt{\frac{x}{k}}.$$

Чтобы найти теперь $\tau_n(x, z)$, положим в (21) $z=0$ и подставим результат на основании условия (15) в выражение (17); тогда получим

$$\tau_n(x, z) = (1-i) \frac{R_n}{2\lambda a_n} e^{(1+i)a_n z} \left\{ \frac{1}{2(1+s)} \operatorname{erfc} [-(1+i) d_n \sqrt{x}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(1-s)} \operatorname{erfc} [(1+i) d_n \sqrt{x}] - \frac{e^{\frac{1-s^2}{s^2} 2id_n^2 x}}{1-s^2} \operatorname{erfc} \left[(1+i) \frac{d_n}{s} \sqrt{x} \right] \right\}. \quad (22)$$

Как видно из формул (21) и (22), комплексные амплитуды гармоник температуры воздуха и почвы выражаются через интегралы вероятности от комплексного аргумента, которые табулированы. В общем случае вещественная и мнимая части интеграла вероятности от комплексного аргумента не выражаются через обычные специальные функции. Лишь в частном случае „полумнимого“ аргумента они сводятся к известным интегралам Френеля. Это облегчает анализ наиболее важных характеристик процесса — температуры и потоков тепла на подстилающей поверхности, которые, как это будет показано ниже, выражаются именно через интеграл вероятности от „полумнимого“ аргумента.

Для нахождения самих температур по комплексным амплитудам их гармоник необходимо подставить выражения (21) и (22) в формулы (8) и (9), при этом целесообразно перейти к тригонометрической форме рядов:

$$T = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} T_n \cos n\omega t - \operatorname{Im} T_n \sin n\omega t),$$

$$\tau = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (\operatorname{Re} \tau_n \cos n\omega t - \operatorname{Im} \tau_n \sin n\omega t).$$

3. Анализ решения

Рассмотрим наиболее важные физические характеристики процесса — распределение температуры на подстилающей поверхности и вертикальные потоки тепла на этой поверхности. Температуру подстилающей поверхности получим из (21) или (22), полагая $z = 0$:

$$T_n(x, 0) = \tau_n(x, 0) = (1 - i) \frac{R_n}{2\lambda a_n} \left\{ \frac{1}{2(1+s)} \operatorname{erfc} [-(1+i) d_n \sqrt{x}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(1-s)} \operatorname{erfc} [(1+i) d_n \sqrt{x}] - \frac{e^{-\frac{1-s^2}{s^2} 2id_n^2 x}}{1-s^2} \operatorname{erfc} \left[(1+i) \frac{d_n}{s} \sqrt{x} \right] \right\}.$$

Из этих же формул получим турбулентный поток тепла

$$P_n = -l \left. \frac{\partial T_n}{\partial z} \right|_{z=0} = R_n \left\{ \frac{s}{2(1+s)} \operatorname{erfc} [-(1+i) d_n x] - \right. \\ \left. - \frac{s}{2(1-s)} \operatorname{erfc} [(1+i) d_n \sqrt{x}] + \frac{e^{-\frac{1-s^2}{s^2} 2id_n^2 x}}{1-s^2} \operatorname{erfc} \left[(1+i) \frac{d_n}{s} \sqrt{x} \right] \right\}$$

и поток тепла в почву

$$\Pi_n = \lambda \left. \frac{\partial \tau_n}{\partial z} \right|_{z=0} = R_n \left\{ \frac{1}{2(1+s)} \operatorname{erfc} [-(1+i) d_n \sqrt{x}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2(1-s)} \operatorname{erfc} [(1+i) d_n \sqrt{x}] - \frac{e^{-\frac{1-s^2}{s^2} 2id_n^2 x}}{1-s^2} \operatorname{erfc} \left[(1+i) \frac{d_n}{s} \sqrt{x} \right] \right\}.$$

Используя известное соотношение

$$\operatorname{erfc}(-y) = 2 - \operatorname{erfc}(y),$$

можно несколько упростить три последние выражения, переписав их следующим образом:

$$T_n(x, 0) = \tau_n(x, 0) = (1 - i) \frac{R_n}{2\lambda a_n} \left\{ \frac{1}{1+s} + \frac{s}{1-s^2} \operatorname{erfc} [(1+i) d_n \sqrt{x}] - \right. \\ \left. - \frac{e^{-\frac{1-s^2}{s^2} 2id_n^2 x}}{1-s^2} \operatorname{erfc} \left[(1+i) \frac{d_n}{s} \sqrt{x} \right] \right\}, \quad (23)$$

$$P_n = R_n \left\{ \frac{s}{1+s} - \frac{s}{1-s} \operatorname{erfc} [(1+i) d_n \sqrt{x}] + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\frac{1-s^2}{s^2} 2id_n^2 x}}{1-s^2} \operatorname{erfc} \left[(1+i) \frac{d_n}{s} \sqrt{x} \right] \right\}, \quad (24)$$

$$\Pi_n = R_n \left\{ \frac{1}{1+s} + \frac{s}{1-s} \operatorname{erfc} [(1+i) d_n \sqrt{x}] - \right. \\ \left. - \frac{e^{-\frac{1-s^2}{s^2} 2id_n^2 x}}{1-s^2} \operatorname{erfc} \left[(1+i) \frac{d_n}{s} \sqrt{x} \right] \right\}. \quad (25)$$

Из формул (24) и (25) видно, что полученное решение удовлетворяет условию (16). Наличие этого условия позволяет ограничиться вычислением только одного из двух потоков (например, P_n). Для отделения вещественных и мнимых частей в полученных выражениях воспользуемся соотношениями

$$\operatorname{erfc}[(1+i)y] = 1 - C\left(\frac{2y}{\sqrt{\pi}}\right) - S\left(\frac{2y}{\sqrt{\pi}}\right) + i\left[S\left(\frac{2y}{\sqrt{\pi}}\right) - C\left(\frac{2y}{\sqrt{\pi}}\right)\right],$$

где

$$C\left(\frac{2y}{\sqrt{\pi}}\right) = \int_0^{\frac{2y}{\sqrt{\pi}}} \cos \frac{\pi}{2} \eta^2 d\eta; \quad S\left(\frac{2y}{\sqrt{\pi}}\right) = \int_0^{\frac{2y}{\sqrt{\pi}}} \sin \frac{\pi}{2} \eta^2 d\eta - \text{интегралы Френеля.}$$

Заметим, что в общем случае величины R_n являются комплексными. Исключение представляет тот практически наиболее интересный случай, когда ход радиационного баланса обладает симметрией. Если выбрать точку симметрии за начало отсчета времени, то величины R_n будут вещественными. Для простоты ограничимся рассмотрением этого случая. Очевидно, рассмотрение общего случая никаких принципиальных трудностей не представляет.

Учитывая это замечание, получим в результате отделения вещественных и мнимых частей

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} T_n &= \frac{R_n}{\lambda a_n (1-s^2)} \left\{ 1 - 2sC(\sqrt{\xi}) + \right. \\ &+ \left. \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1-s^2}{s^2} \xi\right) \left[2C\left(\frac{1}{s} \sqrt{\xi}\right) - 1 \right] + \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1-s^2}{s^2} \xi\right) \left[2S\left(\frac{1}{s} \sqrt{\xi}\right) - 1 \right] \right\}, \\ -2 \operatorname{Im} T_n &= \frac{R_n}{\lambda a_n (1-s^2)} \left\{ 1 - 2sS(\sqrt{\xi}) + \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1-s^2}{s^2} \xi\right) \left[2S\left(\frac{1}{s} \sqrt{\xi}\right) - 1 \right] - \right. \\ &- \left. \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1-s^2}{s^2} \xi\right) \left[2C\left(\frac{1}{s} \sqrt{\xi}\right) - 1 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{Re} P_n &= \frac{2R_n}{1-s^2} \left\{ -s^2 + s [C(\sqrt{\xi}) + S(\sqrt{\xi})] v^2 + \right. \\ &+ \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1-s^2}{s^2} \xi\right) \left[1 - C\left(\frac{1}{s} \sqrt{\xi}\right) - S\left(\frac{1}{s} \sqrt{\xi}\right) \right] + \\ &+ \left. \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1-s^2}{s^2} \xi\right) \left[C\left(\frac{1}{s} \sqrt{\xi}\right) - S\left(\frac{1}{s} \sqrt{\xi}\right) \right] \right\} \\ -2 \operatorname{Im} P_n &= \frac{2R_n}{1-s^2} \left\{ s [C(\sqrt{\xi}) - S(\sqrt{\xi})] + \right. \\ &+ \cos\left(\frac{\pi}{2} \frac{1-s^2}{s^2} \xi\right) \left[C\left(\frac{1}{s} \sqrt{\xi}\right) - S\left(\frac{1}{s} \sqrt{\xi}\right) \right] - \\ &- \left. \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{1-s^2}{s^2} \xi\right) \left[1 - C\left(\frac{1}{s} \sqrt{\xi}\right) - S\left(\frac{1}{s} \sqrt{\xi}\right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

В этих формулах фигурируют значения величин при $z=0$ и $\xi = \frac{4a_n^2}{\pi} x$. Для получения окончательных формул для температуры на подстилающей поверхности

и турбулентного потока тепла необходимо только подставить полученные выражения в соответствующие разложения Фурье:

$$T(t, x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} [2 \operatorname{Re} T_n(x, 0) \cos n\omega t - 2 \operatorname{Im} T_n(x, 0) \sin n\omega t],$$

$$P(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} [2 \operatorname{Re} P_n(x) \cos n\omega t - 2 \operatorname{Im} P_n(x) \sin n\omega t].$$

Представляет интерес исследовать эти выражения для малых и для больших значений аргумента ξ . Используя первые члены соответствующих рядов, получим из формул (26):

а) для малых значений ξ

$$2 \operatorname{Re} T_n(x, 0) = \frac{2R_n}{\lambda a_n} \frac{1}{s} \sqrt{\xi} = \frac{4R_n}{l} \sqrt{\frac{kx}{\pi u}},$$

$$-2 \operatorname{Im} T_n(x, 0) = \frac{R_n}{\lambda a_n} \frac{\pi}{2s^2} \xi = \frac{R_n \lambda}{l^2} \frac{kx}{u},$$

$$2 \operatorname{Re} P_n(x) = 2R_n,$$

$$-2 \operatorname{Im} P_n(x) = 2R_n \frac{1+s^2}{s^2(1-s^2)} \sqrt{\xi} = 4R_n \frac{\lambda k}{l^2 \kappa} \frac{\lambda^2 k + l^2 \kappa}{\lambda^2 k - l^2 \kappa} \sqrt{\frac{n\omega x}{2\pi u}},$$

б) для больших значений

$$2 \operatorname{Re} T_n(x, 0) = \frac{R_n}{\lambda a_n} \frac{1}{1+s},$$

$$-2 \operatorname{Im} T_n(x, 0) = \frac{R_n}{\lambda a_n} \frac{1}{1+s},$$

$$2 \operatorname{Re} P_n(x) = 2R_n \frac{s}{1+s},$$

$$-2 \operatorname{Im} P_n(x) = 0.$$

Отсюда можно заключить следующее:

I. На малых расстояниях от наветренной границы рассматриваемой области температура подстилающей поверхности и турбулентный поток тепла ведут себя так, как если бы не существовало теплообмена в почве. В частности, турбулентный поток тепла при этом равен радиационному балансу.

II. На больших расстояниях от наветренной границы амплитуды гармоник температуры подстилающей поверхности становятся не зависящими от расстояния, а их фазы запаздывают по отношению к соответствующим гармоникам радиационного баланса на $1/4$ полупериода. ✓

III. Предельное значение температуры подстилающей поверхности не зависит от скорости ветра. Ее величина не зависит от адвекции.

IV. Турбулентный поток тепла на больших расстояниях также оказывается не зависящим ни от расстояния, ни от адвекции, а амплитуды его гармоник меньше амплитуд соответствующих гармоник радиационного баланса.

V. Фазы гармоник турбулентного потока тепла на малых и больших расстояниях от наветренной границы области тождественны с фазами соответствующих гармоник радиационного баланса, однако на промежуточных расстояниях имеет место сдвиг по фазе.

Аналогичным образом может быть проведен анализ распределения температуры для любого уровня (как в воздухе, так и в почве).

4. Простейший численный пример

На рис. 1 и 2 приведены результаты некоторых подсчетов для следующего простейшего случая. Радиационный баланс считается заданным в виде одной (первой) гармоники:

$$R(t) = \cos \omega t.$$

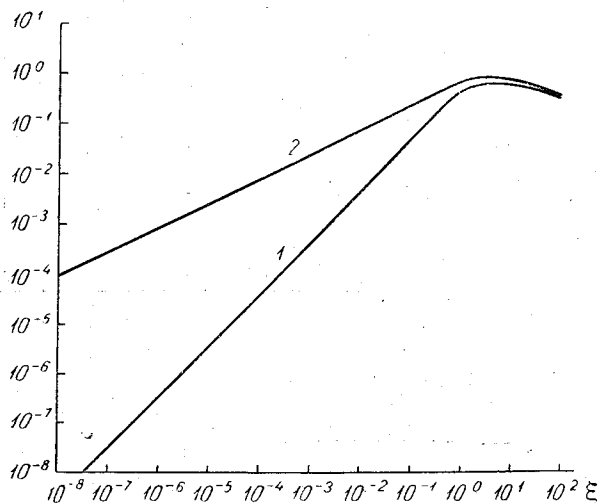


Рис. 1.

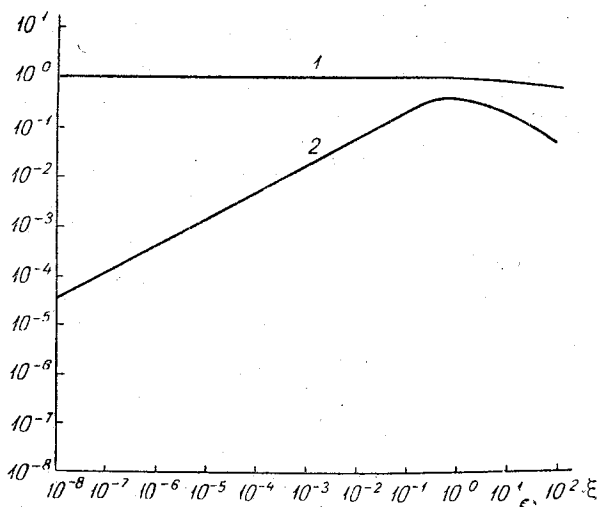


Рис. 2.

Расчеты произведены для подстилающей поверхности и результаты приведены к безразмерной форме. Тогда единственным параметром является величина

$$s = \frac{l}{\lambda} \sqrt{\frac{\kappa}{k}},$$

характеризующая взаимоотношение теплопроводящих свойств воздуха и почвы. Пример рассчитан для случая $s = 2$.

На рис. 1 изображена зависимость от расстояния коэффициентов при $\cos \omega t$ (кривая 1) и при $\sin \omega t$ (кривая 2) для температуры подстилающей поверхности. На рис. 2 даны аналогичные зависимости для турбулентного потока тепла. Как видно из обозначений на чертежах, все найденные величины, а также и аргумент, даны в безразмерной форме. Общий характер зависимости соответствует сделанным ранее качественным выводам. Интересно отметить, что для распределения температуры переходная зона получается весьма незначительной, т. е. области, в которых практически пригодны формулы для малых и для больших значений аргумента, почти смыкаются одна с другой.

5. Заключительные замечания

В заключение остановимся на возможных путях обобщения рассмотренной задачи.

а) Естественным обобщением является введение вместо условия (3) произвольного распределения температуры воздуха над наветренной границей области. Если это распределение удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}; \quad z > 0,$$

то решение сводится к рассмотренной задаче. Именно, в этом случае нужно только рассматривать все характеристики в отклонениях от соответствующих характеристик на границе $x = 0$, а не от среднесуточных значений. При этом в соответствующих разложениях дополнительно появятся нулевые гармоники.

б) Весьма просто можно ввести обобщение, учитывающее взаимодействие между тепло- и влагообменом в атмосфере. В этом случае дополнительно появляется уравнение

$$\frac{\partial q}{\partial t} + u \frac{\partial q}{\partial x} = k \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}; \quad z > 0$$

(где q — удельная влажность) при условии заданной связи между температурой и влажностью на подстилающей поверхности и при добавлении соответствующего члена в уравнение теплового баланса ее. Наиболее простым путем решения такой задачи является построение линейных комбинаций влажности и температуры воздуха с разделенными граничными условиями. Решение для каждой из этих двух комбинаций сводится к решению рассмотренной задачи.

в) Как это обычно делается в динамической метеорологии, в качестве „второго приближения“ естественно рассматривать скорость ветра и коэффициент вертикального турбулентного перемешивания не постоянными, а зависящими только от высоты. При этом наиболее существенным является учет переменности коэффициента перемешивания. Соответствующее обобщение весьма легко осуществить, если ввести так называемый квазистационарный приземный слой $0 < z < h$, в котором можно считать потоки тепла и влаги не зависящими от высоты. В этом случае процесс решения не отличается от приведенного выше. Что касается учета переменности скорости ветра, то он, повидимому, может быть осуществлен только приближенными или численными методами, например методом М. Е. Швеца.

г) Вблизи наветренной границы рассматриваемой области может быть еще весьма существенно влияние теплообмена в почве по горизонтали, которое обычно в аналогичных задачах не рассматривается. Можно показать, что в этом случае решение задачи сводится к интегральному уравнению.

ВЛИЯНИЕ АДВЕКЦИИ НА ИНТЕНСИВНОСТЬ ТАЯНИЯ СНЕГА

Как известно, таяние снега определяется следующими тремя факторами: а) радиационным притоком тепла; б) притоком тепла, обусловленным вертикальным турбулентным обменом; в) притоком тепла из нижних слоев почвы.

В настоящей работе рассматривается влияние турбулентного обмена на таяние снега. Повидимому, этот фактор в настоящее время меньше всего изучен. Вместе с тем его значение весьма существенно, особенно в прибрежных районах, где чаще всего наблюдается адвекция теплых воздушных масс.

Механизм таяния снега под влиянием турбулентного обмена можно представить следующим образом.

Теплая и влажная воздушная масса приходит на поверхность, покрытую снегом. Турбулентный обмен обуславливает приток тепла к деятельной поверхности, как из-за того, что температура воздушной массы значительно выше температуры снега, так и благодаря ее высокой влажности. Водяной пар, поступающий вследствие турбулентного перемешивания к поверхности снега, конденсируется, выделяющаяся при этом скрытая теплота парообразования также тратится на таяние снега.

§ 1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Предположим, что в область $x > 0$, где деятельная поверхность покрыта снегом, поступает теплый и влажный воздух с известной температурой и влажностью, которые мы обозначим через $T_0(z)$ и $q_0(z)$.

Если температура и влажность достаточны для того, чтобы снег начал таять, то на деятельной поверхности для $x > 0$ температура достигает и остается равной 0°C , а влажность — $3,80$ г/кг.

Для того чтобы определить количество тающего снега за единицу времени, необходимо вычислить поток тепла к деятельной поверхности, обусловленный теплопередачей, и скрытую теплоту, которая выделяется на деятельной поверхности вследствие конденсации притекающего к ней водяного пара.

Обозначим через $\frac{dm}{dt}$ массу снега, тающего за единицу времени.

На основании предыдущего

$$l \frac{dm}{dt} = \left| -k\rho c_p \frac{\partial T}{\partial z} - Lk\rho \frac{\partial q}{\partial z} \right|_{z=0},$$

$$l \frac{dm}{dt} = -k\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{L}{c_p} \frac{\partial q}{\partial z} \right) \Big|_{z=0} = -k\rho c_p \frac{\partial \vartheta}{\partial z} \Big|_{z=0}. \quad (1)$$

Здесь: k — коэффициент турбулентности, ρ — плотность воздуха, T — температура воздуха, q — абсолютная влажность, ϑ — эквивалентная температура, t — время, l — теплота таяния льда, равная 80 кал/г.

В соответствии с вышеизложенным, интересующие нас величины температуры и влажности могут быть найдены из решения следующих дифференциальных уравнений:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (2)$$

$$u \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (3)$$

Как следует из уравнения (1), нас интересует не температура и влажность в отдельности, а их сумма, так называемая эквивалентная температура.

Из уравнений (2) и (3) легко получить уравнение для определения эквивалентной температуры:

$$u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial \vartheta}{\partial z}. \quad (4)$$

Это уравнение решается при следующих краевых условиях:

$$\vartheta(x, z)|_{x=0} = \vartheta_0(z), \quad (5)$$

$$\vartheta(x, z)|_{\substack{z=0 \\ x \gg 0}} = 9,6, \quad (6)$$

$$\vartheta(x, z)|_{z \rightarrow \infty} = \vartheta_0(\infty). \quad (7)$$

Здесь $\vartheta_0(z)$ — начальная эквивалентная температура приходящей воздушной массы.

Полагаем $u(z)$ и $k(z)$ степенными функциями высоты:

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= u_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^\varepsilon \\ k(z) &= k_1 \left(\frac{z}{z_1}\right)^{1-\varepsilon} \end{aligned} \right\} \varepsilon > 0, \quad (8)$$

где k_1 и u_1 — коэффициент турбулентности и скорость ветра на высоте z_1 ; ε — параметр, характеризующий стратификацию воздушной массы.

Введем безразмерные координаты:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{2}{1+2\varepsilon} \left(\frac{z}{z_1}\right)^{\frac{1+2\varepsilon}{2}}, \\ \xi &= \frac{k_1 x}{u_1 z_1^2}. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Решение указанной задачи известно (1):

$$\begin{aligned} \vartheta(\zeta, \xi) &= \frac{\zeta^n}{2\xi} \int_0^\infty u^{1-n} e^{-\frac{u^2 + \zeta^2}{4\xi}} I_n\left(\frac{u\zeta}{2\xi}\right) \vartheta_0(u) du + \\ &+ \frac{\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2n}}{\Gamma(n)} \int_0^\xi \frac{e^{-\frac{\zeta^2}{4(\xi-v)}}}{(\xi-v)^{1+n}} \bar{\vartheta}_0(v) dv, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$n = \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}.$$

Выражение для потока имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} P_\vartheta(\xi, \zeta) &= \frac{K_1 (1-2n)^{2n-1} c_p}{z_1 \Gamma(n)} \rho \left\{ \frac{\bar{\vartheta}_0(0,0)}{\xi^n} + \int_0^\xi \frac{\bar{\vartheta}_0'(v) dv}{(\xi-v)^n} - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2\xi^{1+n}} \int_0^\infty u e^{-\frac{u^2}{4\xi}} \vartheta_0(u) du. \right. \end{aligned} \quad (11)$$

пара из воздуха к подстилающей поверхности. Кроме того, имеет существенное значение начальное распределение абсолютной влажности в воздушной массе по высоте. Оно обуславливает перенос водяного пара по вертикали, в нашей задаче — вынос водяного пара в верхние слои воздушной массы.

Для быстроты расчета уравнения (19) и (20) номографированы (рис. 1 и 2).

На номограмме (рис. 1) на горизонтальной оси отложена величина начальной температуры воздушной массы при $z=0$, т. е. температура поверхности воды того водоема, откуда приходит воздушная масса; на вертикальной оси — масса стаявшего снега в $г/см^2$ сутки, деленная на скорость ветра.

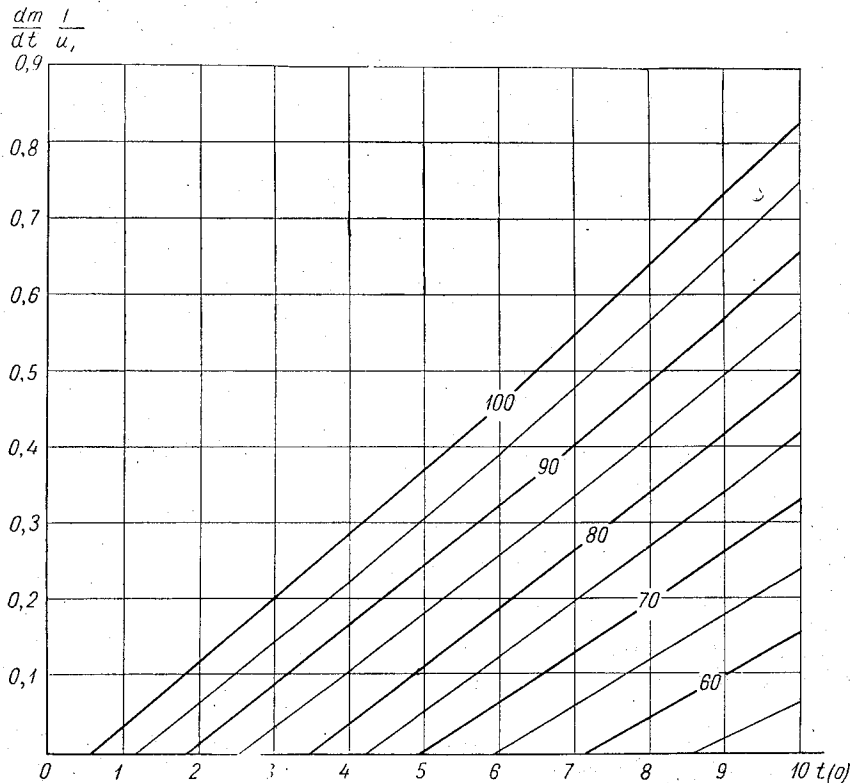


Рис. 1.

Наклонные линии являются изолиниями относительной влажности.

Для определения массы стаявшего снега следует от точки на горизонтальной оси, соответствующей температуре воды, подняться по вертикали до изолинии данной относительной влажности и на вертикальной оси считать величину $\frac{dm}{dt} \cdot \frac{1}{u_1}$. Умножив эту величину на скорость ветра, получим массу снега, стаявшего в сутки с площади в 1 см^2 .

По номограмме (рис. 2) $\frac{dm}{dt}$ находится тем же методом, как и по номограмме на рис. 1, с той лишь разницей, что исходными данными в этом случае являются температура воздуха и относительная влажность в будке. Обе номограммы построены для $x=20 \text{ км}$, $n=0,1$, $\frac{k_1}{u_1}=0,02 \text{ м}$ в точке, для которой проводится расчет.

Поскольку процесс трансформации полей температуры и абсолютной влажности воздушной массы при $x > 15-20 \text{ км}$ сильно замедляется, то расчет таяния снега

по предложенным номограммам можно проводить и для $x > 20$ км; номограмма обеспечивает достаточную для практики точность до 100 км.

Проверка полученных результатов на опытном материале проводилась по номограмме 2. За исходные данные берется температура и относительная влажность в будке в 13 часов и скорость ветра на высоте 1 м.

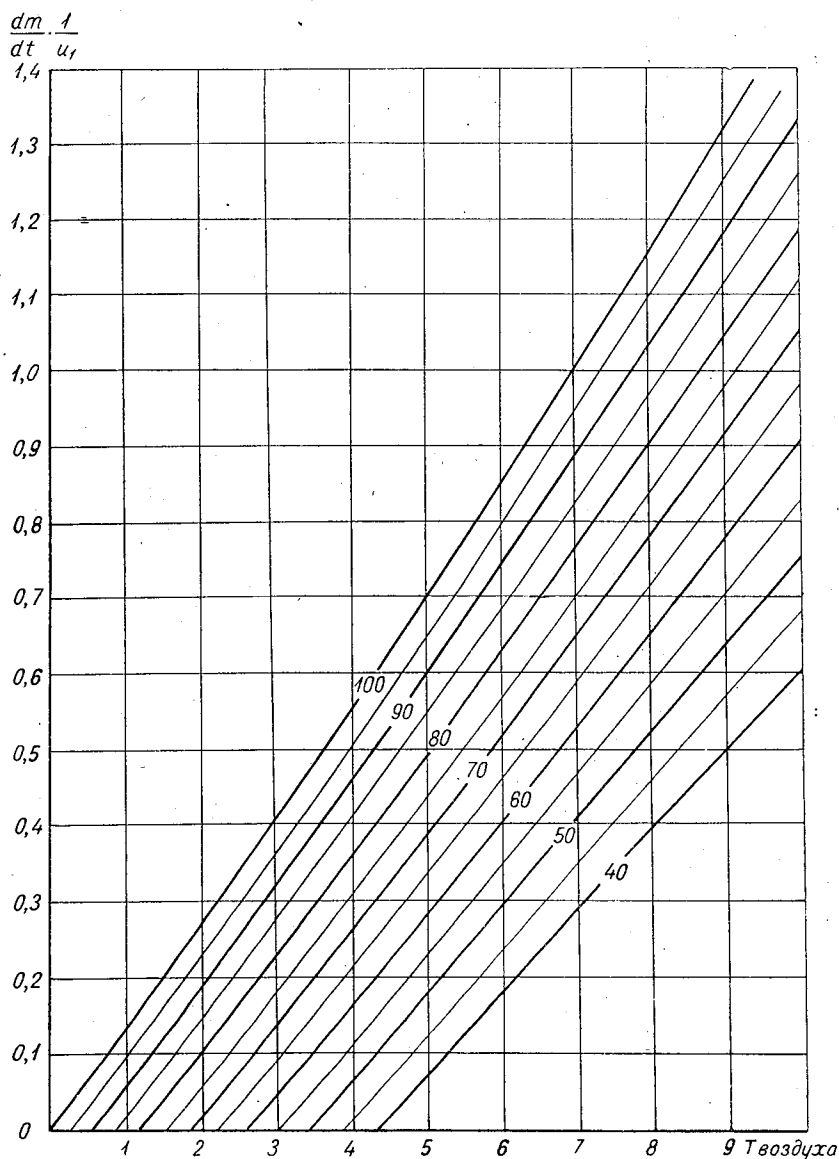


Рис. 2.

Рассчитанная по номограмме величина $\frac{dm}{dt}$ делится на плотность снега. Полученная высота слоя стаявшего снега h сравнивается с измеренной величиной изменения высоты снега за сутки.

Результаты проверки приводятся в табл. 1 и 2. Сравнение рассчитанных и измеренных величин h показало, что рассчитанные высоты меньше измеренных. Это объясняется тем, что в действительности таяние снега при адвекции в какой-то

Таблица 1

Дата	T в час	r	u_1	Облачн.	$\frac{dm}{dt}$	h расч.	h изм.
Валдай							
1951 г.							
2/IV	1,3	94	4,5	10/10			
3/IV	2,0	82	5,0	10/10	0,14	2,0	7,0
4/IV	4,0	84	3,0	10/10	0,42	3,6	5,0
5/IV	3,1	67	3,0	10/10	0,14	1,0	4,0
6/IV	7,8	56	2,0	8/0	0,60	3,0	4,0
7/IV	1,6	81	5,0	10/10	0,09	0,75	1,0
1954 г.							
22/III	1,6	78	5,0	10/10			
23/III	3,0	100	4,0	10/10	0,44	4,4	5,0
24/III	7,2	68	3,0	10/00	0,67	5,1	5,0
Пункт Белая Холуница							
1953 г.							
1/IV	3,3	86	5	10/8	0,34	3,0	1
2/IV	1,6	87	3	10/8	0,15	0,8	1
3/IV	2,3	16	6	1/1	0	0	2
4/IV	1,9	36	4	6/0	0	0	3
5/IV	5,4	48	7	0/0	0,22	3,0	2
6/IV	8,0	32	2	0/0	0,33	1,5	7
7/IV	8,8	27	1	0/0	0,76	1,0	2
8/IV	6,4	35	1	0/0	0,43	1,0	9
9/IV	4,7	68	3	10/0	0,35	2,0	5
10/IV	7,1	52	3	10/9	0,47	3,0	8
11/IV	2,7	77	3	10/10	0,20	1,0	3
12/IV	2,9	66	2	10/10	0,12	0,5	

Таблица 2

Дата	T	r	u_1	Облачн.	$\frac{dm}{dt}$	h расч.	h изм.
Арзамас							
1953 г.							
27/III							
28/III	0,5	96	10	10/10	0,06	1,7	0,0
30/III	1,2	78	6	10/0	0,02	0,4	2,0
31/III	2,0	91	6	10/5	0,21	3,4	4,0
1/IV	1,4	93	6	10/10	0,16	2,7	2,0
2/IV	1,6	92	4	10/10	0,18	2,0	5,0
1953 г.							
30/III	2,1	96	4,5	10/10	1,0	3,0	4,0
31/III	4,9	92	3	10/10	1,9	5,4	5,0
1/IV	4,0	72	3	10/10	0,9	2,5	2,0
2/IV	0,6	56	6	7/7	0	0	0,0
3/IV	3,2	38	1	3/0	0	0	2,0
4/IV	4,8	43	6	0/0	0,5	1,4	2,0
Вятские Поляны							
1953 г.							
28/III	1,1	94	3,5	10/10			
29/III	2,3	80	1,3	6/6	0,16	0,9	4,0
30/III	1,2	63	2,0	2/1	0,00	0	3,0
31/III	2,0	80	4,0	10/10	0,13	1,7	2,0
1/IV	3,5	90	4,5	10/10	0,40	5,8	5,0
2/IV	2,2	80	3,5	10/10	0,15	1,8	3,0
3/IV	1,0	28	9,0	0/0	0,00	0,0	1,0
4/IV	2,2	66	3,5	0/0	0,04	0,5	10,0
5/IV	4,1	64	4,0	0/0	0,24	3,2	2,0
6/IV	4,2	64	1,3	0/0	0,26	1,0	7,0
7/IV	5,6	56	0,6	0/0	0,34	0,7	6

мере обуславливается, кроме адвективного фактора, еще коротковолновой и длинноволновой радиацией.

При полной облачности рассчитанные и измеренные величины h отличаются мало, при слабой облачности расхождения большие.

Проведенная проверка носит предварительный характер, так как число отобранных примеров далеко не достаточно для каких-либо строгих выводов.

Однако проведенные расчеты вполне доказывают, что роль адвективного фактора в процессе таяния снега велика. В условиях теплой адвекции при полной облачности интенсивность таяния снега не меньше, чем в безоблачные дни, и почти полностью обуславливается турбулентным потоком тепла из воздуха; таяние снега за счет радиационных факторов незначительное.

ЛИТЕРАТУРА

Л а й х т м а н Д. Л. Трансформация воздушной массы под влиянием подстилающей поверхности. *Метеорология и гидрология*, № 1, 1947.

К ВОПРОСУ ОБ ОБРАЗОВАНИИ АДВЕКТИВНЫХ ТУМАНОВ

ВВЕДЕНИЕ

Предсказание туманов является одной из важных задач метеорологии, решение которой имеет большое значение для практики.

Необходимость и важность решения этой задачи определяется тем ущербом, который наносят туманы нашему народному хозяйству.

Особенно страдают от туманов все виды транспорта.

В густых туманах видимость падает до нескольких метров. Из всех случаев аварий самолетов по метеорологическим условиям, значительная часть вызвана туманами.

Транспорт страдает не только от наличия густых и продолжительных туманов, но и от внезапности их появления. Поэтому наряду с проблемой рассеивания туманов встает не менее важная проблема точного предсказания появления туманов.

Адвективными называются туманы, образующиеся в результате изменения свойств воздушной массы вследствие ее перемещения с одной подстилающей поверхности на другую.

В настоящее время адвективные туманы прогнозируются только синоптическим методом, который дает возможность предсказать туман лишь в том случае, если он уже отмечен рядом станций. Первое образование адвективных туманов синоптическим методом предсказать трудно, так как оно связано с рядом сложных физических процессов в воздушной массе, которые нельзя проследить по синоптической карте.

В настоящей работе предлагается метод предвычисления одного из видов адвективных туманов, основанный на расчете трансформации полей температуры и абсолютной влажности воздушной массы под влиянием подстилающей поверхности.

Адвективные туманы делятся на два типа:

1) туманы вследствие холодной адвекции на теплую водную поверхность — туманы испарения,

2) туманы вследствие адвекции теплого влажного воздуха на холодную поверхность — туманы охлаждения.

В настоящей работе исследуются туманы охлаждения, которые образуются при переходе теплой влажной воздушной массы с моря на холодный континент.

Для образования тумана необходим резкий контраст температур между подстилающей поверхностью и воздушной массой, чтобы охлаждение было достаточным для значительной конденсации.

Такие условия наблюдаются осенью в прибрежных районах, когда температура подстилающей поверхности на континенте уже ниже 0, в то время как температура водной поверхности, которая определяет температуру воздушной массы над водой, еще сравнительно высокая.

Вторжение воздушных масс с моря в подобных условиях сопровождается образованием густых туманов, продолжительностью от нескольких часов до нескольких суток.

Образование тумана в вышеуказанных условиях является результатом трансформации воздушной массы при перемещении вследствие ее взаимодействия с подстилающей поверхностью. Поэтому предвычисление адвективных туманов охлаждения сводится к количественному учету изменения свойств воздушной массы в процессе трансформации.

Непосредственной причиной образования всякого тумана является увеличение относительной влажности воздушной массы до 100%.

Элементарный анализ формулы относительной влажности

$$r = \frac{e}{E} 100\%$$

показывает, что изменение относительной влажности определяется изменением температуры и абсолютной влажности воздуха. Поэтому для предвычисления адвективных туманов охлаждения необходимо уметь рассчитывать изменение температуры и абсолютной влажности в воздушной массе по мере ее перемещения над подстилающей поверхностью с новыми свойствами.

§ 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вопрос о трансформации воздушных масс уже рассматривался в работах Н. Р. Малкина, Д. Л. Лайхтмана, М. Е. Берлянда.

Совершенно очевидно, что процесс трансформации в приземном слое обуславливается, главным образом, турбулентным перемешиванием. Приток тепла от лучистого теплообмена, за счет изменения агрегатного состояния водяного пара, в первом приближении можно не учитывать.

Задача сводится к интегрированию дифференциального уравнения:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + u \frac{\partial \tau}{\partial x} + v \frac{\partial \tau}{\partial y} + w \frac{\partial \tau}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial \tau}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial \tau}{\partial z}, \quad (1)$$

где τ — концентрация переносимой субстанции (для температуры $\tau = c_p T$; для влажности $\tau = q$).

Это уравнение можно упростить, сделав ряд предположений, которые в большинстве случаев довольно хорошо выполняются

1) Пришедшая воздушная масса однородна в направлении, перпендикулярном скорости ветра. Если скорость ветра направлена по оси x , то τ есть функция только от x и z . Член $v \frac{\partial \tau}{\partial y} = 0$.

2) Что касается члена $\frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial \tau}{\partial x}$, то им можно пренебречь только в том случае, если выполняется неравенство

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[u\tau - k_x \frac{\partial \tau}{\partial x} \right] \gg 0 \text{ или } u\tau \gg k_x \frac{\partial \tau}{\partial x}.$$

В случае адвекции, когда скорость перемещения воздушной массы значительна, это неравенство имеет место: поток субстанции вследствие горизонтального перемешивания пренебрежимо мал по сравнению с потоком субстанции вследствие адвекции.

Следовательно, в нашей задаче можно положить члены $\frac{\partial}{\partial y} k_y \frac{\partial \tau}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial x} k_x \frac{\partial \tau}{\partial x}$ равными нулю.

3) Вертикальная составляющая среднего потока отсутствует, т. е. $w = 0$, член $w \frac{\partial \tau}{\partial z} = 0$.

4) В каждой точке состояние установившееся

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} = 0.$$

Все эти предположения отражают особенности естественных процессов. Уравнение (1) при указанных предположениях принимает вид:

$$u \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k_x \frac{\partial \tau}{\partial z}. \quad (2)$$

Будем решать уравнение (2) для температуры и влажности отдельно:

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (2a)$$

где T — температура воздуха.

Начальные условия:

$$\lim_{x \rightarrow 0} T(x, z) = T^0(z). \quad (3)$$

В момент перехода воздушной массы с моря на континент, т. е. при $x = 0$, ее температура — известная функция высоты.

Распределение температуры на подстилающей поверхности на континенте принимается известным:

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ x \gg 0}} T(x, z) = T_0(x). \quad (4)$$

Температура подстилающей поверхности зависит только от удаления от края. Предполагается, что в период адвекции она не меняется. В действительности, нагревание почвы от воздуха имеет место, но оно мало по сравнению с охлаждением воздуха и им можно пренебречь.

Граничные условия задачи:

Влияние подстилающей поверхности на свойства воздушной массы существенно в некотором пограничном слое. На большой высоте оно уже не ощущается:

$$\lim_{z \rightarrow \infty} T(x, z) = T^0(z). \quad (5)$$

Из приведенного уравнения и краевых условий следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} T(x, z) &\neq \infty, \\ k(z) \frac{\partial T}{\partial z} &\neq \infty. \end{aligned} \quad (6)$$

Если

$$T(x, z) = \tau(x, z) + T_0(z),$$

где $\tau(x, z)$ есть изменение температуры воздуха под влиянием подстилающей поверхности на высоте z и на расстоянии x , то для $\tau(x, z)$ уравнение (2) и, соответственно, начальные и граничные условия переписутся:

$$u(z) \frac{\partial T_0(z)}{\partial x} + u(z) \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial \tau}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial T_0(z)}{\partial z}.$$

Для приземного слоя, где имеет место степенной закон изменения температуры с высотой (условие квазистационарности)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial T_0}{\partial z} &= 0; \\ u(z) \frac{\partial T_0}{\partial x} &= 0, \text{ т. к. } \frac{\partial T_0(z)}{\partial x} = 0. \end{aligned}$$

Тогда

$$u(z) \frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial \tau}{\partial z}, \quad (7)$$

$$\tau(x, z)|_{x=0} = 0, \quad (8)$$

$$\tau(x, z)|_{z=0} = T_0(x) - T^0(z)|_{x=0}, \quad (9)$$

$$\tau(x, z)|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (10)$$

$$\tau(x, z)|_{x=\infty} \neq \infty. \quad (11)$$

Для влажности уравнение (2) напишется в виде:

$$u \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial q}{\partial z}. \quad (26)$$

Краевые условия для температуры (3), (5), (7) сохраняются и для влажности

$$\lim_{x \rightarrow 0} q(x, z) = q^0(z), \quad (12)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} q(x, z) = q^0(z), \quad (13)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x, z) \neq \infty. \quad (14)$$

Но условие (4), условие на подстилающей поверхности, для влажности непригодно. Влажность воздуха вблизи водной поверхности очень близка к насыщающей при температуре воды. Для суши это условие не выполняется. Условие для влажности на подстилающей поверхности на континенте можно сформулировать, исходя из следующих соображений:

1) в холодную половину года поверхность материка мерзлая или имеет температуру, близкую к 0;

2) приходящий воздух влажный и более теплый, чем почва. В таких условиях испарение с подстилающей поверхности пренебрежимо мало.

Конденсация на поверхности почвы может быть, но также незначительная, так как влагосодержание воздуха при сравнительно низких температурах недостаточное для обильного выпадения росы.

Все это говорит за то, что в первом приближении можно считать влагосодержание воздушной массы после того, как она вступила на континент, постоянной величиной. Турбулентное перемешивание приведет лишь к перераспределению влажности по высоте.

Граничное условие на поверхности запишется: испарение с подстилающей поверхности равно нулю

$$k(z) \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0.$$

Запишем уравнение (2) для изменения влажности:

$$x(x, z) = q(z; x) - q^0(z),$$

$$u(z) \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} k(z) \frac{\partial x}{\partial z}. \quad (15)$$

Краевые условия:

$$1) \quad x(x, z)|_{x=0} = 0, \quad (16)$$

$$2) \quad x(x, z)|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad (17)$$

$$3) \quad x(x, z)|_{x \rightarrow \infty} \neq \infty \quad (18)$$

$$4) \quad k(z) \frac{\partial q}{\partial z} \Big|_{z=0} = k(z) \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{z=0} + k(z) \frac{\partial q_0}{\partial z} \Big|_{z=0},$$

$$k(z) \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{z=0} = -k(z) \frac{\partial q_0}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{E}{\rho},$$

$$k(z) \frac{\partial x}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{E}{\rho}. \quad (19)$$

При решении уравнений (7) и (15) изменение скорости ветра и коэффициента турбулентности с высотой для приземного слоя аппроксимируем степенным законом

$$\left. \begin{aligned} u(z) &= u_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^\varepsilon \\ k(z) &= k_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^{1-\varepsilon} \end{aligned} \right\} \varepsilon > 0, \quad (20)$$

где k_1 и u_1 — коэффициент турбулентности и скорость ветра на определенной высоте z ; ε — параметр, характеризующий стратификацию воздушной массы.

Введем безразмерные координаты:

$$\zeta = \frac{2}{1+2\varepsilon} (\eta)^{\frac{1+2\varepsilon}{2}}; \quad \eta = \frac{z}{z_1};$$

$$\xi = \frac{k_1 x}{u_1 z_1^2}.$$

Решение уравнения (7) для изменения температуры находится методом Фурье. Оно приводится в работе Д. Л. Лайхтмана [2].

Окончательная формула имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \tau(\zeta, \xi) &= \frac{\zeta^n}{2\xi} \int_0^\infty u^{1-n} \cdot e^{-\frac{u^2 + \xi^2}{4\xi}} \cdot I_n \left(\frac{u\xi}{2\xi} \right) \cdot \tau_0(u) du + \\ &+ \frac{\left(\frac{\zeta}{2} \right)^{2n}}{\Gamma(n)} \int_0^\xi \frac{e^{-\frac{v^2}{4(\xi-v)}}}{(\xi-v)^{1+n}} \cdot \tau_0(v) dv, \\ n &= \frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Первый интеграл формулы (21) представляет ту часть изменения температуры воздуха, которая обусловлена отличием начального распределения температуры с высотой от равновесного.

Второй интеграл — изменение температуры под влиянием подстилающей поверхности.

Предположим, что вертикальное распределение температуры в поступающей воздушной массе определяется по степенному закону:

$$T^\circ(z) = T_0 - T_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^\varepsilon. \quad (22)$$

Тогда $\tau_0(u)$ в уравнении (21) можно заменить следующим выражением:

$$\tau_0(u) = T_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^\varepsilon = \frac{2^{-2n} \cdot u^{2n}}{(1-2n)^{2n}} \cdot T_1.$$

Первый интеграл в уравнении (21) в этом случае не зависит от x , другими словами: изменение температуры за счет неравновесности отсутствует.

Трансформация температуры под влиянием подстилающей поверхности [вторая часть уравнения (21)] легко находится при заданном распределении температуры на подстилающей поверхности.

Так как горизонтальный градиент температуры на поверхности почвы в холодную половину года очень мал и задача решается для прибрежных районов, где x меняется в небольших пределах, то предполагаем $T_0(x) = \text{const}$. Тогда: $\tau(\xi) = T_0 - T^\circ(z) = T_{\text{почвы}} - T_{\text{воды}}$.

Подставив значение $\tau_0(v) = T_{\text{почвы}} - T_{\text{воды}}$ во второе слагаемое уравнения (21), получим выражение для изменения температуры:

$$\tau(\zeta, \xi) = (T_{\text{почвы}} - T_{\text{воды}}) \cdot P\left(\frac{\zeta^2}{2\xi}, 2n\right), \quad (23)$$

где $P\left(\frac{\zeta^2}{2\xi}, 2n\right)$ — функция вероятности.

Тогда окончательное выражение для температуры примет вид

$$T(\zeta, \xi) = T_0 - T_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^\varepsilon + (T_{\text{почвы}} - T_{\text{воды}}) \cdot P\left(\frac{\zeta^2}{2\xi}, 2n\right). \quad (24)$$

Решение исходного уравнения для влажности имеет вид:

$$\begin{aligned} x(\zeta, \xi) = & \frac{\zeta^n}{2\xi} \int_0^\infty u^{1-n} \cdot e^{-\frac{u^2 + \zeta^2}{4\xi}} \cdot I_n\left(\frac{u\zeta}{2\xi}\right) \cdot x^\circ(u) du + \\ & + \left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2n} \frac{\xi}{\Gamma(n)} \int_0^\xi \frac{e^{-\frac{\zeta^2}{4(\xi-v)}}}{(\xi-v)^{1+n}} \cdot x_0(v) dv. \end{aligned} \quad (25)$$

Начальное распределение абсолютной влажности с высотой задаем степенным законом:

$$q_0(z) = q_0 - q_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^\varepsilon. \quad (26)$$

Очевидно, что первое слагаемое уравнения (25) так же, как и в уравнении (21), не зависит от x .

Выражение для $x_0(\xi)$ находим из условия на подстилающей поверхности:

$$-k(z) \frac{\partial x}{\partial z} = -\frac{k_1}{z_1} \frac{2^{2n-1}}{(1-2n)^{1-2n}} \zeta^{1-2n} \frac{\partial x}{\partial \zeta} = -\frac{E}{\rho},$$

$$x_0(\xi) = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{z_1}{k_1} \frac{\Gamma(n)}{(1-2n)^{2n-1}} \cdot \frac{\sin \pi n}{\pi n} \cdot \xi^n.$$

Подставив $x_0(\xi)$ во вторую часть уравнения (25), получим окончательное выражение для $x_0(\xi)$:

$$x(\zeta, \xi) = \frac{\left(\frac{\zeta}{2}\right)^{2n} q_1}{(1-2n)^{2n}} \left[1 - e^{-\frac{\zeta^2}{4\xi}} \cdot \left(\frac{\zeta^2}{4\xi}\right)^{-n} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\zeta^2}{4\xi}\right)^j}{\Gamma(j-n+1)} \right]. \quad (27)$$

Изменение абсолютной влажности в воздушной массе определяется интенсивностью турбулентного перемешивания и начальным распределением влажности с высотой.

Уравнения (21) и (27) дают возможность рассчитать трансформацию полей температуры и абсолютной влажности в воздушной массе вследствие адвекции.

§ 2. ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ НОМОГРАММ

Для быстроты расчета уравнения (23) и (27) номографированы. Номограмма представлена на рис. 1.

Расчет „ τ “ и „ x “ по номограмме производится следующим образом:

1) Зная величину x (расстояние пункта, для которого делается расчет τ и x , от края, по которому резко изменились условия на подстилающей поверхности) и высоту (z), рассчитываем величину ξ по формуле:

$$\xi = \frac{k_1 x}{u_1 z_1^2}.$$

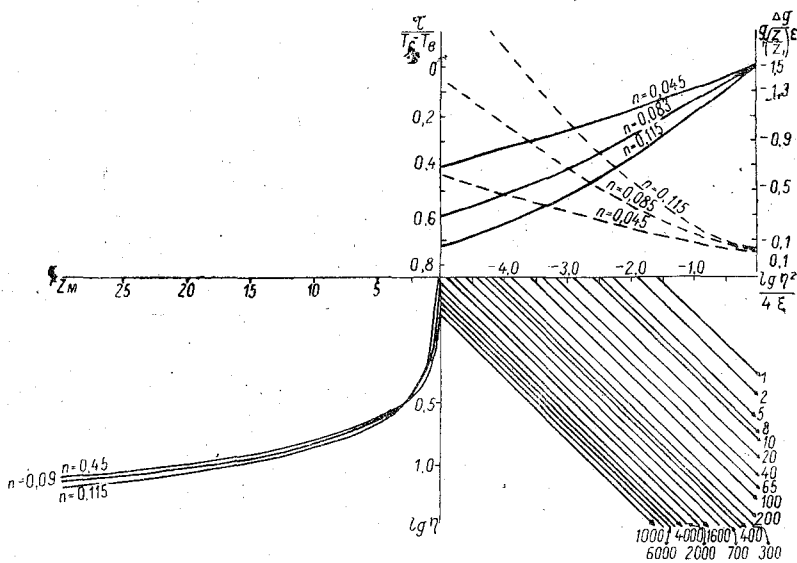


Рис. 1.

2) От точки на отрицательной горизонтальной оси, соответствующей высоте z , опускаемся до кривой с заданным значением n , затем по горизонтали идем до пересечения с прямой, соответствующей рассчитанному значению ξ .

От точки пересечения по вертикали поднимаемся, пересекая шкалу $\lg \frac{z^2}{4\xi}$, до кривой в правом верхнем углу номограммы, соответствующей заданному значению n . От сплошной кривой по горизонтали налево отсчитываем величину $\frac{\tau}{T_B - T_n}$; от пунктирной направо отсчитываем величину

$$x/q_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^e.$$

Зная величины $(T_B - T_n)$ и $q_1 \left(\frac{z}{z_1} \right)^e$, находим новое значение температуры и абсолютной влажности в воздушной массе после трансформации. Если величина абсолютной влажности больше насыщающей влажности при данной температуре, то начинается конденсация водяного пара и образуется туман.

Целью настоящей работы является построение оперативного метода предвычисления адвективных туманов. Следовательно, предвычисление тумана должно быть

не только точным, но и простым. По указанной номограмме расчет сложен и требует много входных данных: x , $\frac{k_1}{u_1}$, ε , $T_{\text{воды}}$, $T_{\text{континента}}$.

Ряд расчетов, проведенный с целью выявления роли каждого из этих факторов в процессе образования тумана, показал:

1) Изменение параметров $\frac{k_1}{u_1}$ и ε слабо влияет на величину перенасыщения воздушной массы. При увеличении $\frac{k_1}{u_1}$ и ε , т. е. при усилении турбулентного обмена, усиливается понижение температуры, но также увеличивается вынос влаги в верхние слои воздушной массы, поэтому величина перенасыщения мало изменяется.

2) Основными факторами, влияющими на образование тумана, являются контраст температур суши и моря и влагосодержание воздушной массы, зависящее от температуры воды.

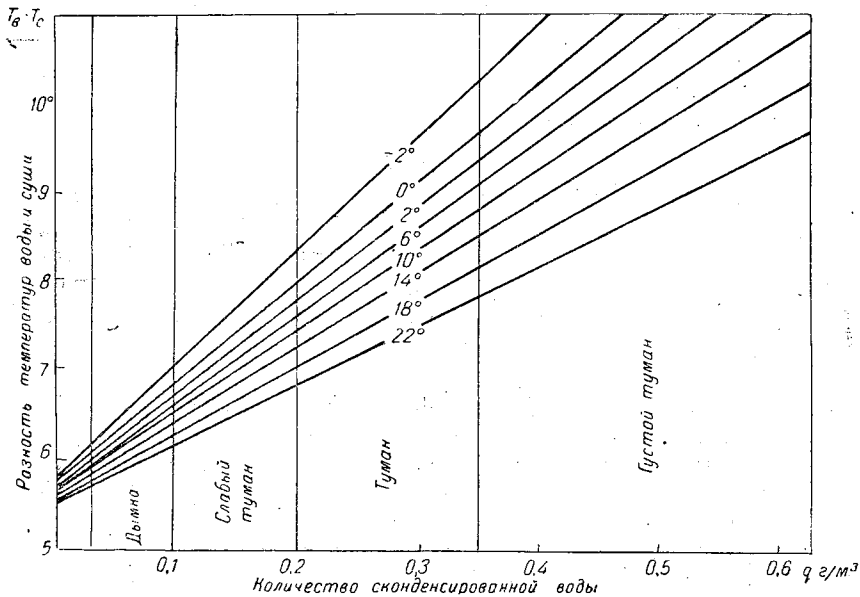


Рис. 2.

Прогностический график (рис. 2) и дает величину сконденсированной воды в единице объема, т. е. водность тумана в зависимости от разности ($T_{\text{воды}} - T_{\text{почвы}}$) и $T_{\text{воды}}$.

Для прогноза тумана следует: от точки на вертикальной оси, соответствующей разности температур поверхности суши и моря, по горизонтали дойти до наклонной прямой — изолинии температуры водной поверхности; от точки пересечения по вертикали опуститься до горизонтальной оси и отсчитать величину водности тумана в $г/м^3$.

Вертикальные прямые линии на графике разделяют области различной водности тумана: дымка, слабый туман, туман, густой туман.

Водность тумана рассчитывалась с помощью формул Д. Л. Лайхмана [3] для температурной поправки на конденсацию:

$$\Delta t = (t' - \tau) \frac{e}{e + 10},$$

где Δt — температурная поправка на конденсацию; t' — температура воздуха; e — абсолютная влажность воздуха; τ — точка росы при влажности e .

Прибавляя Δt к t' , получаем температуру ($t' + \Delta t$) воздуха после конденсации водяного пара.

По температуре $t' + \Delta t$ находим e' — насыщающую влажность. Разность $e - e'$ будет водностью тумана.

График (рис. 2) построен для расстояния $x = 50$ км. По номограмме (рис. 1) видно, что величины τ и x мало меняются в зависимости от x . Кроме того, x в нашей задаче меняется в небольших пределах, так как задача решается для береговой зоны шириной около 100 км. Совершенно очевидно, что без больших погрешностей график (рис. 2) можно использовать для предвычисления туманов для $x = 25 - 100$ км.

§ 3. ПРОВЕРКА ОПРАВДЫВАЕМОСТИ МЕТОДА ПРОГНОЗА ТУМАНОВ НА ОНЫТНОМ МАТЕРИАЛЕ

Проверка метода прогноза туманов по графику (на рис. 2) проводилась на архивном материале четырех пунктов в прибрежной полосе Балтийского моря: Клайпеда, Венспилс, Ленинград, аэродром „Шоссейная“. На основании синоптических карт с 1948 по 1953 г. отбирались туманы при ветрах с западной составляющей и при полной облачности.

В таких условиях образовавшийся днем туман можно считать адвективным. Туман, образовавшийся ночью, можно считать если не чисто адвективным, то, по крайней мере, с преобладающим влиянием адвекции.

Чтобы учесть охлаждение воздушной массы за счет радиационного излучения, при прогнозе туманов используем не среднесуточную температуру почвы, а минимальную.

Так как минимальная температура почвы на сутки вперед в настоящее время прогнозируется с невысокой точностью, то при прогнозе тумана можно использовать минимальную температуру почвы за предшествующие сутки. Это не скажется существенно на точности прогноза, поскольку теплая адвекция связана всегда с развитой циклонической деятельностью, а следовательно, со значительной облачностью и минимальная температура почвы ото дня ко дню мало меняется.

Температура воды на поверхности имеет незначительную суточную амплитуду. Для прогноза туманов следует брать среднесуточную температуру и, по возможности, не по береговым станциям, где сказывается влияние холодного континента и температура воды не будет репрезентативной характеристикой термического режима данного водоема, а по островным станциям в открытом море.

Итак, в случае вероятности теплой адвекции с моря на континент для предвычисления тумана необходимо знать температуру водной поверхности и минимальную температуру почвы в пункте, для которого делается расчет. За неимением возможности прогнозировать эти данные на следующие сутки, следует переносить их с предыдущих суток, т. е. брать уже известный минимум температуры почвы и среднесуточную температуру воды.

Таблица 1

Наименование пункта	Адвекция с туманом		Адвекция без тумана	
	число случаев	оправдано	число случаев	оправдано
Клайпеда и Венспилс	22	17	11	11
Аэродром „Шоссейная“	26	23	—	—
Ленинград	8	8	23	18
Сумма	56	48	34	29

Проверка метода проводилась по данным за сутки, предшествовавшие адвекции.

Результаты проверки оправдываемости прогнозов сведены в табл. 1.

Всего 90 случаев. Оправдалось 77 случаев. Средний процент оправдываемости 86%.

§ 4. ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТЬ ТУМАНА

Вследствие теплообмена между теплой воздушной массой и холодной подстилающей поверхностью температура почвы повышается, контраст температур „почва—воздух“ уменьшается и вновь приходящий воздух с течением времени все меньше и меньше охлаждается. Наконец, при некотором значении $T_{\text{почвы}}$ контраст температур становится недостаточным для образования тумана.

Так как воздушная масса непрерывно движется, то образующийся туман все время оттекает от места своего образования. Поэтому тот момент, когда $T_{\text{почвы}}$ достигнет некоторой критической величины, после которой невозможно дальнейшее образование тумана, можно считать моментом прекращения тумана, а отрезок времени, в течение которого происходило нагревание почвы, — максимальной продолжительностью тумана. В условиях адвекции, когда суточный ход температуры почвы слабо выражен и радиационное нагревание подстилающей поверхности незначительное, максимальная возможная продолжительность тумана должна быть близка к действительной.

Для учета изменения температуры подстилающей поверхности решалось уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}. \quad (28)$$

При граничных условиях:

$$1) T|_{t=0} = T_0 - \text{const},$$

$$2) -k\rho c_p \frac{\partial T'}{\partial z} + k_1 \rho_1 c_1 \frac{\partial T}{\partial z} = S_K + S_D - \sigma T^4. \quad (29)$$

Полагаем в первом приближении, что поток тепла к почве известен и задан формулой:

$$P = -k\rho c_p \frac{\partial T'}{\partial z} = A (T_0 - T_0'), \quad (30)$$

где

$$A = \frac{\bar{k}_1 (1 + 2\varepsilon)^{\frac{1}{1+2\varepsilon}}}{z_1 \Gamma\left(\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}\right)} \cdot \xi^{-\frac{\varepsilon}{1+2\varepsilon}},$$

T_0 — температура почвы, T_0' — температура воздуха (температура воды), \bar{k}_1 — коэффициент турбулентности в воздухе, k_1 — коэффициент теплопроводности почвы.

Тогда условие на поверхности примет вид:

$$k_1 \rho_1 c_1 \frac{\partial \tau}{\partial z} + (A + 4\sigma T_0^3) \left[\frac{k\rho c_p \frac{\partial T_0}{\partial z}}{A + 4\sigma T_0^3} - \frac{A (T_0 - T_0')}{A + 4\sigma T_0^3} - \tau \right] = 0, \quad (31)$$

где τ — изменение температуры почвы вследствие адвекции.

Известно, что решение уравнения (28) при указанных краевых условиях имеет следующий вид:

$$\tau(t) = \frac{A (T_0' - T_0)}{A + 4\sigma T_0^3} \left\{ 1 - e^{H^2 k_1 t} \cdot (1 - \text{erf}[H\sqrt{k_1 t}]) \right\}, \quad (32)$$

где t — продолжительность адвекции,

$$H = \frac{A + 4\sigma T_0^3}{k_1 \rho_1 c_1}.$$

Из уравнения (32) видно, что изменение температуры, а следовательно, и продолжительность тумана зависят от разности температур „почва—воздух“, от начальной температуры воздуха, так как из графика (рис. 2) видно, что предельная разность температур, при которой возможно образование тумана, зависит от начальной температуры воздуха и от характеристик почвы.

Для прогноза продолжительности тумана построен график для средних значений тепловых характеристик почвы (рис. 3).

Для определения продолжительности тумана следует: от точки на вертикальной оси, соответствующей разности температур „почва—воздух“, дойти по горизонтали до кривой, соответствующей температуре воды (сплошные кривые — для

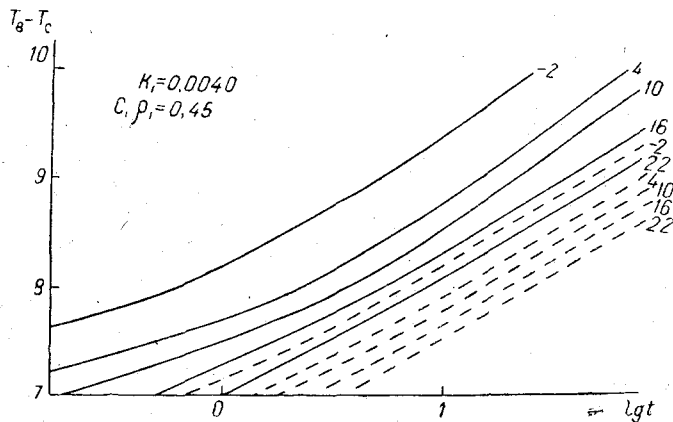


Рис. 3.

продолжительности тумана, пунктирные — для тумана и дымки); затем, опускаясь по вертикали, отсчитать на горизонтальной оси продолжительность в часах.

Величину продолжительности тумана следует считать ориентировочной, так как суточный ход температуры почвы накладывается на изменение температуры почвы вследствие адвекции, и в действительности продолжительность тумана будет несколько меньше. Оправдываемость прогноза продолжительности тумана на опытном материале не проверялась.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузьмин П. П. О вертикальном градиенте скорости ветра, температуры и влажности воздуха над морем. Труды ГГИ, вып. 11, 1941.
2. Лайхтман Д. Л. Трансформация воздушной массы под влиянием подстилающей поверхности. Метеорология и гидрология, № 1, 1947.
3. Лайхтман Д. Л. О введении температурной поправки на конденсацию при радиационном выхолаживании приземного слоя атмосферы. Труды ГГО, № 27, 1951.
4. Слуцкий Е. Е. Таблицы неполной Г-функции и функции вероятности. Издат. АН СССР, М.—Л., 1950.

ОБ ИНТЕНСИВНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ОБМЕНА НАД ВОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

Значительное количество физических процессов, происходящих над водной поверхностью и являющихся результатом взаимодействия воды и атмосферы, в большой степени определяются интенсивностью турбулентного перемешивания над водой. Таковы, например, процессы тепло- и влагообмена воды и атмосферы, дрейфовые течения и другие. Несмотря на большую важность этих процессов

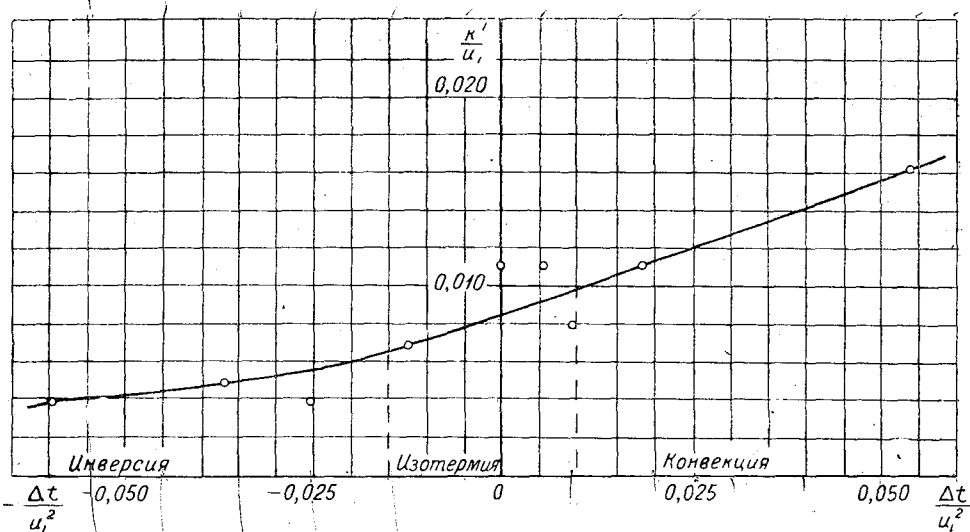


Рис. 1. Зависимость $\frac{k_1}{u_1}$ от $\frac{\Delta t}{u_1^2}$.

для различных отраслей народного хозяйства, турбулентность над морем сравнительно мало изучена. Повидимому, основной причиной этого являются специфические трудности, связанные с исследованием процессов, происходящих в приводном слое атмосферы.

Ниже излагаются некоторые результаты, представляющие собой определенный вклад в существующие сведения о турбулентности над водной поверхностью. Наиболее важной характеристикой интенсивности турбулентности над водной поверхностью является коэффициент турбулентности в вертикальном направлении. Как известно, этот коэффициент входит в формулы для расчета потоков тепла, влаги, количества движения и других.

Для определения указанной характеристики в нашем распоряжении имелись результаты наблюдений скорости диффузии пассивной субстанции в атмосфере.

Как известно, пространственное распределение диффундирующей субстанции в значительной степени зависит от интенсивного вертикального обмена. На основании наблюдения над параметрами, характеризующими распределение диффундирующей субстанции, рассчитывался вертикальный коэффициент турбулентности.

Имея в каждом из опытов данные о температурном градиенте (Δt) и скорости ветра (u_1), можно найти связь коэффициента турбулентности с обычными метеорологическими характеристиками над водной поверхностью. Такого типа обработке и анализу были подвергнуты данные 54 опытов.

На рис. 1 приводятся осредненные по различным значениям $\frac{\Delta t}{u_1^2}$ зависимости $\frac{k_1}{u_1}$ от $\frac{\Delta t}{u_1^2}$, где k_1 — коэффициент турбулентности на высоте 1 м, u_1 — скорость ветра на высоте 1 м, $\Delta t = t_{0,5} - t_{2,0}$ — разность температур между уровнями 0,5 и 2,0 м над водой.

На рисунке приведены точки, осредненные для отдельных серий. В каждой серии $\frac{\Delta t}{u_1^2}$ колеблется в определенных пределах. Серии выбирались таким образом, чтобы в каждую из них попало одинаковое количество опытов. Как следует из рис. 1, при безразличном равновесии значение $\frac{k_1}{u_1}$ над водной поверхностью имеет порядок 0,008 (справедливо для скорости ветра до 7 м/сек.), что значительно отличается от соответствующих значений для суши, где оно имеет значение порядка 0,05. Это указывает на существенно меньшую шероховатость водной поверхности по сравнению с сушей. Сравнительно малая шероховатость водной поверхности (даже при высоких волнах), повидимому, объясняется хорошо обтекаемой формой волны, вследствие чего затрудняется вихреобразование.

Полученные значения коэффициента турбулентности над водной поверхностью позволили определить коэффициенты в формуле для испарения воды. Известно, что при логарифмическом распределении ветра и влажности над водной поверхностью, что соответствует условиям безразличного равновесия, скорость испарения может быть рассчитана по следующей формуле:

$$E = [q_{(z_1)} - q_{(z_2)}] \frac{\rho}{\ln \frac{z_2}{z_1}} \cdot \frac{k}{u_1 z_1} \cdot u_1, \quad (1)$$

где $q_{(z_1)}$, $q_{(z_2)}$ — удельная влажность воздуха на уровнях z_1 и z_2 соответственно; ρ — плотность воздуха, равная 1300 г/м³, остальные обозначения прежние.

Заменяя удельную влажность абсолютной (в миллибарах) и подставляя значение $\frac{k_1}{u_1}$, найденное на основании наших опытов, получим для испарения за сутки в мм

$$E = 0,24 \frac{l_{(z_1)} - l_{(z_2)}}{\lg \frac{z_2}{z_1}} u_1. \quad (2)$$

Расчеты по этой формуле дают правильный порядок величин.

К ВОПРОСУ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТУРБУЛЕНТНОЙ ВЯЗКОСТИ В ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

В работе [1] Д. Л. Лайхтман предложил новый метод определения коэффициента турбулентной вязкости k в пограничном слое атмосферы из наблюдений над вертикальным профилем ветра. Как показала сравнительная экспериментальная проверка различных методов определения k , произведенная М. П. Чуриновой [2], этот метод является наиболее точным и простым, заслуживающим внедрения в практику научно-исследовательской работы.

Однако нельзя не отметить, что схема вычислений k , примененная М. П. Чуриновой, еще достаточно сложна и требует много времени для производства вычислений. Этот недостаток можно устранить, если вычисления производить графически, с помощью специальной номограммы. В связи с этим в настоящей статье рассматриваются возможные способы графического определения коэффициента турбулентной вязкости из наблюдений над вертикальным профилем ветра.

Если предположить, что k с высотой z не меняется и что вертикальный профиль ветра обусловлен только турбулентным обменом, то уравнения движения в общем виде запишутся так:

$$\left. \begin{aligned} u &= u_g + e^{-\lambda z} (a_x \cos \lambda z + a_y \sin \lambda z), \\ v &= v_g + e^{-\lambda z} (a_y \cos \lambda z - a_x \sin \lambda z). \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Здесь u, v — компоненты скорости ветра \vec{c} ; u_g, v_g — компоненты геострофического ветра \vec{c}_g ; a_x, a_y — некоторые неизвестные постоянные, $\lambda = \sqrt{\frac{\omega \sin \varphi}{k}}$, $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ сек.}^{-1}$ — угловая скорость вращения земли, φ — географическая широта места наблюдения. (Стрелочками над буквами отмечены векторные величины; те же буквы без стрелки обозначают модуль вектора).

Для определения коэффициента турбулентности k сначала необходимо решить уравнения (1) относительно λ , причем так, чтобы неизвестные постоянные a_x, a_y были исключены, а затем вычислить k по формуле:

$$k = \frac{\omega \sin \varphi}{\lambda^2}. \quad (2)$$

Прежде чем перейти к решению уравнений движения, следует отметить, что предположение $k(z) = \text{const}$ или $\lambda(z) = \text{const}$, которому соответствуют уравнения (1), выполняется в слое выше некоторого уровня $z = H$, порядка 50–100 м над поверхностью земли. Поэтому целесообразно перенести начало координат с уровня земли ($z = 0$) на уровень $z = H$. Пусть u_H, v_H — компоненты скорости ветра \vec{c}_H , наблюдающейся на высоте $z = H$, и $u' = u - u_H, v' = v - v_H, u'_g = u_g - u_H, v'_g = v_g - v_H$. (Штрихами отмечены соответствующие величины в новой координатной системе). Выберем оси координат так, чтобы было $v'_g = 0$, и примем следующую связь между старыми постоянными a_x, a_y и новыми H, u'_g :

$$\left. \begin{aligned} a_x &= -u'_g e^{\lambda H} \cos \lambda H \\ a_y &= -u'_g e^{\lambda H} \sin \lambda H \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Тогда в новой координатной системе уравнения движения переписутся следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} u' &= u'_g (1 - e^{-\lambda z'} \cos \lambda z') \\ v' &= u'_g e^{-\lambda z'} \sin \lambda z' \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Диаграмма скоростей ветра как функции высоты, построенная по уравнению (4), называется, как известно, спиралью Экмана.

На рис. 1 изображена спираль Экмана и компоненты скоростей в системах координат (u, v) и (u', v') . Отдельные точки на спирали отмечены высотами (H, z, z_g) , к которым относятся соответствующие скорости ветра $(\vec{c}_H, \vec{c}, \vec{c}_g)$. Здесь

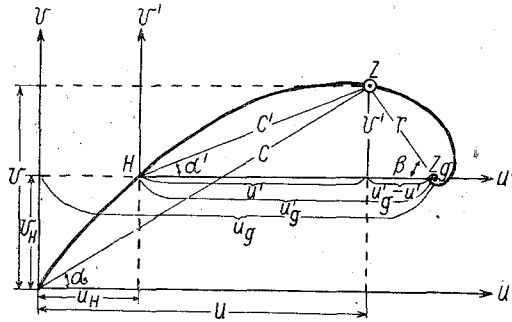


Рис. 1. Спираль Экмана.

z_g — высота, на которой $\vec{c} = \vec{c}_g$. (Теоретически $z_g \rightarrow \infty$, практически $z_g \approx 0,5 - 1,5$ км).

Для удобства определения λ запишем уравнения (4) в полярных координатах. При этом обратим внимание на то, что спираль Экмана можно рассматривать, с одной стороны, как векторную диаграмму вектора \vec{c}' с началом координат в точке H (очевидно, $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{c}_H$); в этом случае полярными координатами точки z будут (c', α') ; с другой стороны — как векторную диаграмму вектора

$\vec{r} = \vec{c} - \vec{c}_g$ с началом в точке z_g , тогда координатами точки z будут (r, β) . В первом случае уравнения спирали (в параметрической форме) запишутся так:

$$\frac{c'}{u'_g} = \sqrt{u'^2 + v'^2} = \sqrt{1 - 2e^{-\lambda z'} \cos \lambda z' + e^{-2\lambda z'}}, \quad (5)$$

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{e^{-\lambda z'} \sin \lambda z'}{1 - e^{-\lambda z'} \cos \lambda z'}, \quad (6)$$

а во втором:

$$r = \sqrt{(u'_g - u')^2 + v'^2} = u'_g e^{-\lambda z'}, \quad (7)$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{v'}{u'_g - u'} = \operatorname{tg} \lambda z'. \quad (8)$$

Таким образом, мы получили 4 уравнения, каждое из которых позволяет найти $\lambda z'$ как функцию одной из следующих величин: $\frac{c'}{u'_g}$, α' , r , β . Пусть y — общее обозначение для этих величин $[y = f(\lambda z')]$ и

$$\lambda z' = F(y), \quad (9)$$

тогда

$$\lambda = \frac{dF(y)}{dz}, \quad (10)$$

откуда по формуле (2) легко вычислить k .

Таков путь определения коэффициента турбулентности из наблюдений над вертикальным профилем ветра. Теперь рассмотрим конкретно отдельные вычислительные операции и графические методы осуществления их.

1) Исходными данными для определения k у нас будут результаты шаропилотных наблюдений на различных высотах, т. е. модуль вектора скорости ветра c (дается с точностью до 1 м/сек.) и направление ветра d (в градусах). По этим данным следует построить на миллиметровой бумаге графики изменения с высотой c и d , откладывая по оси ординат z (примерный масштаб — в 1 мм графика 20 м), а по оси абсцисс в первом графике — c (в 1 мм — 0,1 м/сек.), во втором — d (в 1 мм — 1°). По нанесенным точкам следует провести сглаженные кривые, с которых затем снять данные c (с точностью до 0,1 м/сек.) и $d' = d - d_0$ для высот через 100—200 м (d_0 выбирается так, чтобы было удобно производить отсчет d' и чтобы значения d' не превышали 90°). Пример построения сглаженных профилей c и d показан на рис. 2.

2) По сглаженным значениям c и d нужно построить векторную диаграмму скоростей (в виде отдельных точек, не соединенных кривой; точки подписать соответствующими высотами). Эти построения, как и все другие, лучше выполнять на листе кальки, накладываемом на бланк специальной, облегчающей эти построения, номограммы. Для построения диаграммы скоростей номограмма должна содержать сектор с дугой в 90° и радиусом примерно в 20 см. На дуге должны быть нанесены градусные деления для построения d' , на радиусе — линейная шкала для откладывания c (в 1 см — 1 м/сек.).

Для удобства пользования бланк номограммы должен быть прикреплен к чертежной доске, а в центре сектора укреплен металлический центр в виде острого штифтика. Для построения отдельных точек диаграммы скоростей на кальке следует провести прямую (ближе к краю листа), положить кальку на сектор так, чтобы штифтик проколол ее в точке на проведенной линии. Поворачивая затем лист кальки вокруг центра так, чтобы линия проходила через то деление на дуге, которое соответствует углу d' , поставить на кальке карандашом точку на радиусе сектора против деления, соответствующего модулю скорости c . Точку отметить соответствующей высотой.

3) На построенной таким образом диаграмме \vec{c} нужно найти точки H и z_g . Для этого номограмма должна содержать спираль Экмана. Лист кальки с диаграммой \vec{c} нужно наложить на спираль так, чтобы наибольшее число точек, по крайней мере в средней части диаграммы, ложилось на спираль. Если некоторые точки в этой части диаграммы несколько „выскакивают“ (вследствие недостаточной точности построения диаграммы), их следует зачеркнуть и поставить новые на спирали, производя перенос перпендикулярно к последней. Это не относится к точкам у поверхности земли. Они, как правило, не ложатся на спираль, потому что в приземном слое коэффициент турбулентности меняется с высотой. На высотах, где скорость ветра близка к геострофическому ветру, также возможно отклонение точек диаграммы от спирали (вследствие недостаточной точности измерений \vec{c} , а также неостоянства \vec{c}_g с высотой). Такие точки можно не принимать во внимание.

Точкой H можно считать первую точку (считая от поверхности земли), которая ложится на спираль. Точка z_g определяется по спирали как начало полярных координат. Расстояние между точками z_g и H на диаграмме равно u_g' .

4) Обработанная таким образом диаграмма скоростей ветра позволяет находить для каждой ее точки значения величин $\frac{c'}{u_g'}$, α' , r , β . Используя значения одной из этих величин, далее нужно определить $\lambda z'$ для каждой точки диаграммы (для

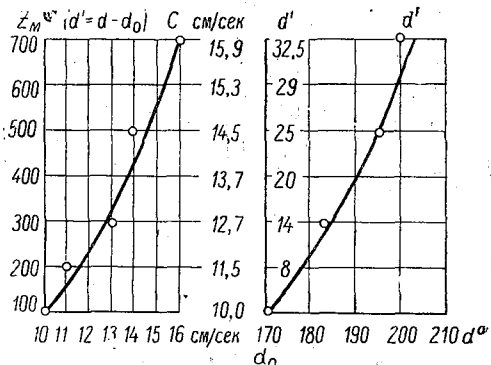


Рис. 2. Пример построения сглаженных профилей c и d .

всех используемых значений z). Этой цели могут служить 4 различных графика функций $y_i = f_i(\lambda z')$, соответственно уравнениям (5), (6), (7), (8). Наша номограмма для вычисления k может содержать или все 4 графика, или только те из них, которые мы сочтем наиболее приемлемыми. Эти 4 графика мы рассмотрим особо. На рис. 4 схематически показан график функции $y = f(\lambda z')$. Определение $\lambda z'$ является промежуточной операцией, и отсчета $\lambda z'$ делать не нужно.

5) Для производства вычислений λ по формуле (10) можно воспользоваться координатной сеткой, в которой построен график $y = f(\lambda z')$, если по оси ординат нанести дополнительную линейную шкалу для z (рис. 3). Положение нуля этой шкалы O' на оси ординат может быть произвольным.

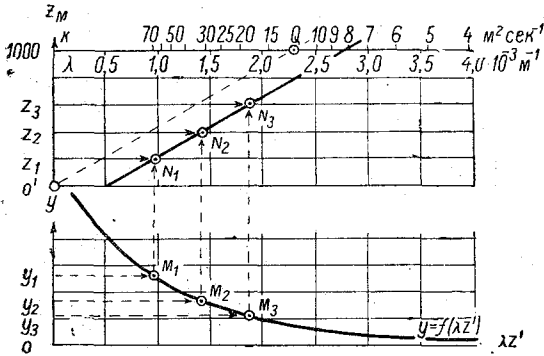


Рис. 3. Схема вычислений по номограмме для определения k .

поставить на кальке точку N_1 . Аналогично строятся другие точки N_2 , N_3 и т. д., через которые затем проводится сглаженная прямая. Эту прямую нужно перенести параллельно самой себе так, чтобы она проходила через начало координат O' , и получить прямую $O'Q$. Очевидно, абсцисса точки Q пересечения прямой $O'Q$ с линией $z = 1$ (за единицу z примем 1000 м) равна λ . На рис. 3 на линии $z = 1000$ м нанесены шкалы λ (внизу) и k (вверху). Отсчет в точке Q по верхней шкале и дает искомое значение коэффициента турбулентности k .

Теперь рассмотрим графики для определения $\lambda z'$ (рис. 4) и особенности пользования ими.

1) Кривая I построена по уравнению (5) в координатах $(\lambda z', \frac{c'}{u_g})$. Для определения $\lambda z'$ нужно предварительно произвести вычисление $\frac{c'}{u_g}$.

2) Кривая II является графиком функции

$$y = \lambda z' \frac{e^{-\lambda z'} \sin \lambda z'}{1 - e^{-\lambda z'} \cos \lambda z'}, \quad (11)$$

построенным в координатах $(\lambda z', y)$. Нетрудно видеть, что координаты любой точки M' ($\lambda z', y$) на кривой II удовлетворяют уравнению (6):

$$y = \operatorname{tg} \alpha' = \frac{e^{-\lambda z'} \sin \lambda z'}{1 - e^{-\lambda z'} \cos \lambda z'}, \quad (12)$$

где α' — угол между осью абсцисс и проведенной через начало координат прямой OM' . Таким образом, этот график позволяет легко определять $\lambda z'$ по известному α' .

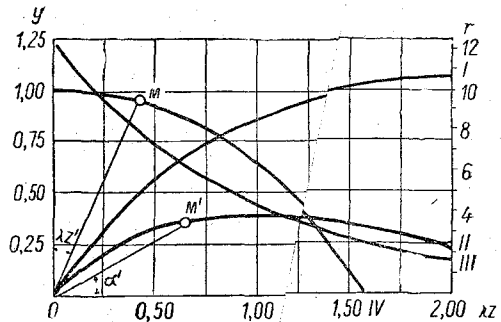


Рис. 4. Графики функций $y_i = f_i(\lambda z')$.

Для пользования графиком следует лист кальки с векторной диаграммой \vec{c} наложить на график так, чтобы точка H диаграммы совпала с началом координат графика, а линия $H z_g$ — с осью абсцисс. Точки M_1, M_2, M_3 и т. д. можно находить с помощью линейки, устанавливаемой так, чтобы один край ее проходил через начало координат и последовательно через точки z_1, z_2, z_3 и т. д.

3) Кривая III построена по уравнению (7). Построение удобнее выполнять, пользуясь обратной функцией

$$\lambda z' = \ln u'_g - \ln r \quad (13)$$

и откладывая по оси ординат значения r , а по оси абсцисс $\ln u'_g - \ln r = \lambda z'$ при произвольном u'_g . Для пользования графиком значения r нужно снимать с векторной диаграммы скоростей ($r = z_g z$).

Решение уравнения (13) относительно λ , т. е.

$$\lambda = - \frac{d}{dz} \ln r, \quad (14)$$

которое является одним из решений уравнений движения (1), положено в основу определения коэффициента турбулентности по методу Д. Л. Лайхтмана [1, 2].

4) Кривая IV построена по уравнению

$$y = \frac{\lambda z'}{\operatorname{tg} \lambda z'} \quad (15)$$

Правила пользования этой кривой те же, что и кривой II, только лист кальки с диаграммой \vec{c} нужно накладывать так, чтобы с началом координат графика совпадала точка z_g , а линия $z_g H$, например, с осью ординат.

На диаграмме \vec{c} , наложенной на кривую IV указанным способом, проведем прямую через начало координат (т. е. точку z_g) и точку $z (v - v_g, u_g - u)$. Легко увидеть, что координаты точки $M (\lambda z', y)$, в которой эта прямая пересекается с кривой IV, удовлетворяют уравнению (8):

$$\frac{\lambda z'}{y} = \frac{v - v_g}{u_g - u} = \frac{v'}{u'_g - u'} = \operatorname{tg} \lambda z' \quad (16)$$

Оценивая рассмотренные 4 кривые с точки зрения простоты, точности и удобства пользования, можно сказать, что в наибольшей степени этим требованиям удовлетворяют кривые II и IV, с помощью которых построение каждой точки N (на неподвижном листе кальки) осуществляется двумя рабочими движениями (установка линейки для получения M и движение от M к N).

Кривая III менее удобна, так как она требует большего числа рабочих движений, чем также уменьшается точность вычислений.

Кривую I следует считать вообще неприемлемой для практической работы, прежде всего потому, что использованное для ее построения уравнение содержит параметр u_g , который хотя и поддается принципиально определению, но усложняет вычисления и уменьшает их точность.

На рис. 5 изображен общий вид номограммы. В нижнем правом углу номограммы помещен сектор в 90° с градусными делениями; по оси ординат с правой стороны нанесена шкала модуля скорости ветра c , нуль которой совпадает с центром сектора. В верхней части номограммы построена спираль Экмана. В прямоугольных координатах, началом которых служит нижний левый угол номограммы, проведена кривая IV.

Внизу по оси абсцисс нанесена линейная шкала $\lambda z'$, а по оси ординат слева — шкала высоты z . На линиях $z = 1000$ и $z = 500$ нанесена шкала k , рассчитанная по уравнению (2) для $\varphi = 60^\circ$.

На рис. 6 показан пример определения k по данным шаропилотных наблюдений 15. 8. 47 г. 6 час. в Колтушах (данные c и d приведены на рис. 1). Диаграмма c , построенная по этим данным, наложена на спираль Экмана.

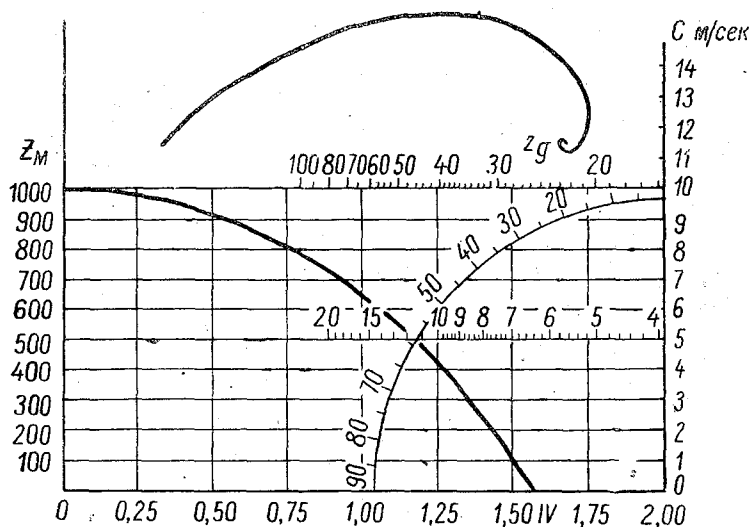


Рис. 5. Номограмма для определения коэффициента турбулентной вязкости.

Наложение позволило найти на диаграмме H и z_g . Практически можно принять $H=100$. Далее диаграмма c перенесена в новое положение (показано пунктиром) так, чтобы точка z_g совпала с началом координат (левый нижний угол).

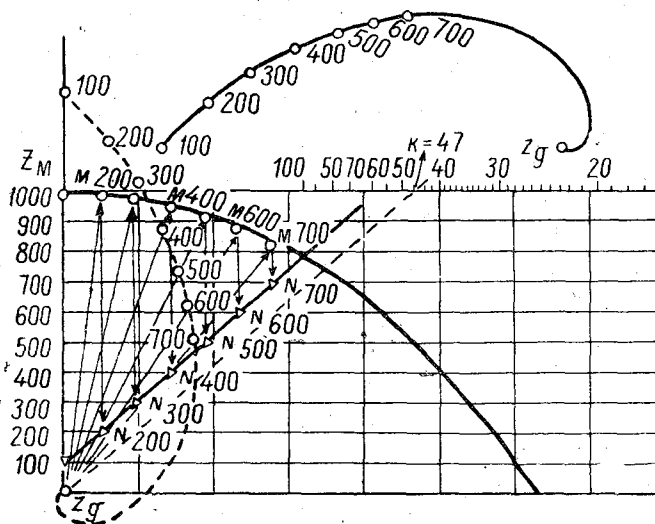


Рис. 6. Пример определения k с помощью номограммы.

Затем через начало координат и точки диаграммы, подписанные числами 200, 300 и т. д. (соответственно высотам), проведены прямые линии. Получены точки M_{100} , M_{200} и т. д., в которых пересекаются указанные прямые с кривой IV. Следующая операция — перенос точек M параллельно оси ординат и получение точек

N_{100} , N_{200} и т. д., ординаты которых $z = 100, 200$ и т. д. Через точки N проведена сглаженная прямая, которая затем перенесена параллельно (смещена так, чтобы она проходила через начало координат). Перенесенная прямая (показана пунктиром) пересекается со шкалой в точке, соответствующей значению коэффициента турбулентной вязкости $k = 47 \text{ м}^2/\text{сек.}^{-1}$.

Как показал опыт, все вычисления с помощью номограммы занимают 5—7 минут, вместо нескольких часов, необходимых для вычисления k обычным способом. Это свидетельствует о целесообразности применения описанной номограммы в практической работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лайхтман Д. Л. Новый метод определения коэффициента турбулентной вязкости в пограничном слое атмосферы. Труды ГГО, вып. 37, 1952.
2. Чуринова М. П. Некоторые данные о коэффициенте турбулентности в свободной атмосфере. Труды ГГО, вып. 28, 1952 г.

К РАСЧЕТУ СУТОЧНОГО ХОДА КОРОТКОВОЛНОВОЙ РАДИАЦИИ В ЯСНЫЕ ДНИ

Вопрос о суточном ходе коротковолновой радиации имеет первостепенное значение при решении задачи суточного хода температуры воздуха.

Как известно, на верхней границе атмосферы (или на земной поверхности в предположении отсутствия атмосферы) поток солнечной энергии (J), приходящийся на единицу площади горизонтальной площадки в единицу времени, определяется из выражения:

$$J = \frac{J_0}{\rho^2} \cos \theta. \quad (1)$$

Здесь J_0 — солнечная постоянная, ρ — расстояние, выраженное в долях среднего расстояния от Солнца до Земли, θ — зенитное расстояние Солнца,

$$\cos \theta = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos \omega t = A(\varphi, \delta) + B(\varphi, \delta) \cos \omega t,$$

φ — широта места, δ — склонение Солнца, ωt — часовой угол, который может принимать только такие значения, которые дают $J > 0$, т. е. значения, заключенные между часовыми углами восхода ($-\omega t_0$) и захода (ωt_0) Солнца. $A(\varphi, \delta)$ и $B(\varphi, \delta)$ в течение суток можно считать постоянными.

Ослабление солнечной радиации в земной атмосфере обусловлено:

1) поглощением кислородом на уровнях выше 100 км, слоями озона на высоте 20—50 км, водяным паром и другими составными частями сухого воздуха;

2) рассеиванием молекулами сухого воздуха и водяного пара, а также рассеиванием и диффузным отражением твердыми и жидкими частицами, взвешенными в атмосфере.

Поэтому при решении задачи суточного хода коротковолновой радиации у земной поверхности необходимо каким-то образом учесть потерю радиации в атмосфере.

Поскольку при исследовании теплового режима воздуха необходимо знание суммарной радиации, мы не рассматриваем отдельно суточный ход прямой и рассеянной радиации. Ослабление же суммарной радиации в атмосфере происходит в основном за счет поглощения ее составными частями воздуха и примесями.

Практически существенным поглощением обладают следующие газы: кислород, озон, углекислый газ и водяной пар, а из примесей — пыль.

Кислород и озон вызывают сильное поглощение в ультрафиолетовой области. Результатом сильного поглощения кислорода и озона в этой области является то, что солнечный спектр, наблюдаемый у земной поверхности, обрывается с ультрафиолетового его конца на длине волны около 300 м μ . Кроме того, озон дает широкую полосу с максимумом поглощения около 600 м μ . Общее поглощение, обусловленное этой полосой, составляет 0,6% от величины полного потока солнечной радиации.

Теоретические расчеты, произведенные Калитиным Н. Н. [2] в предположении, что Солнце излучает как абсолютно черное тело при $T = 6000^\circ$, для сухой и чистой атмосферы показали, что при высоте Солнца около 90° участок спектра от $\lambda = 350$ м μ до конца спектра дает только 0,065 кал/см 2 мин.; это составляет

около 3,4% от солнечной постоянной. При меньших высотах эта величина еще меньше. При определении суточного хода коротковолновой радиации у земной поверхности поглощение, обусловленное кислородом и озоном, можно учесть введением некоторого поправочного коэффициента. Причем, этот коэффициент, как указывалось выше, будет зависеть от высоты Солнца. Можно, однако, вводить средний коэффициент для всех высот Солнца.

Углекислый газ имеет ряд полос поглощения лишь в инфракрасной части спектра, практического влияния на поглощение солнечных лучей они не имеют.

Задача о суточном ходе коротковолновой радиации сводится, таким образом, к учету поглощения солнечных лучей водяным паром.

Связь между количеством водяного пара в атмосфере и поглощением солнечной энергии исследовалась рядом авторов. За границей этим вопросом занимались Фоуль [7] и Меллер [6], у нас — Н. Н. Калитин [3] и В. Г. Кастров [4, 5].

Используя экспериментальный материал Меллер представил эту зависимость в следующем виде:

$$\Delta J = \alpha u^\epsilon \text{ кал/см}^2\text{мин.} \quad (2)$$

где ΔJ — количество поглощенной водяным паром солнечной радиации, α и ϵ — постоянные величины. По данным Меллера эти коэффициенты равны $\alpha = 0,172$; $\epsilon = 0,303$, u — содержание водяного пара на пути солнечных лучей (в г/см²).

Величина u зависит от наклона солнечных лучей. Если обозначить содержание водяного пара в вертикальном столбе воздуха от $z=0$ до $z=\infty$ через M , содержание в столбе воздуха выше некоторого уровня z — через m , зенитное расстояние — θ , то для слоя выше z можно записать

$$u = \frac{M - m}{\cos \theta}.$$

Воспользовавшись функцией пропускания для коротковолновой радиации

$$d_s \left(\frac{M - m}{\cos \theta} \right) = \frac{J_0 - \Delta J}{J_0} = 1 - \nu \left(\frac{M - m}{\cos \theta} \right)^\epsilon, \quad (3)$$

получим поток солнечной радиации на горизонтальную поверхность на высоте z , ослабленный за счет поглощения солнечных лучей водяным паром, в виде:

$$J(m, t) = \frac{J_0}{p^2} \left[1 - \nu \left(\frac{M - m}{\cos \theta} \right)^\epsilon \right] \cos \theta. \quad (4)$$

Здесь J_0 — солнечная постоянная, ΔJ — радиация, поглощаемая водяным паром, $\nu = \frac{0,172}{J_0} = 0,0905$.

На основании формулы (4) нами была построена номограмма, позволяющая определить суммарную радиацию в любой момент времени, если известны оптическая масса и зенитное расстояние Солнца. Номограмма рассчитана для среднего расстояния земли от солнца ($J_0 = 1,90$ кал/см² мин.) при условии, что отражение солнечной радиации атмосферой составляет 8%.

Поправка на поглощение солнечной радиации озоном и кислородом вводилась в зависимости от зенитного расстояния Солнца из табл. 1, которая составлена на основании упомянутой выше работы Н. Н. Калитина о распределении энергии в солнечном спектре и зависимости энергии, приходящейся на участок спектра до $\lambda = 350$ мμ, от высоты Солнца.

Таблица 1

θ	0—20	20—40	40—55	55—65	65—75	75—80	80—90
ΔJ (%)	3,5	3,0	2,5	2,0	1,5	1,0	0,5

Предлагаемая диаграмма представлена на рис. 1. При расчетах по этой номограмме необходимо вводить поправки на действительное расстояние Земли от Солнца. Поправки для приведения вычисленной радиации к действительному расстоянию от Солнца взяты из работы [1] и приводятся в табл. 2.

Номограмма может быть использована для расчетов коротковолновой радиации в местах не очень запыленных.

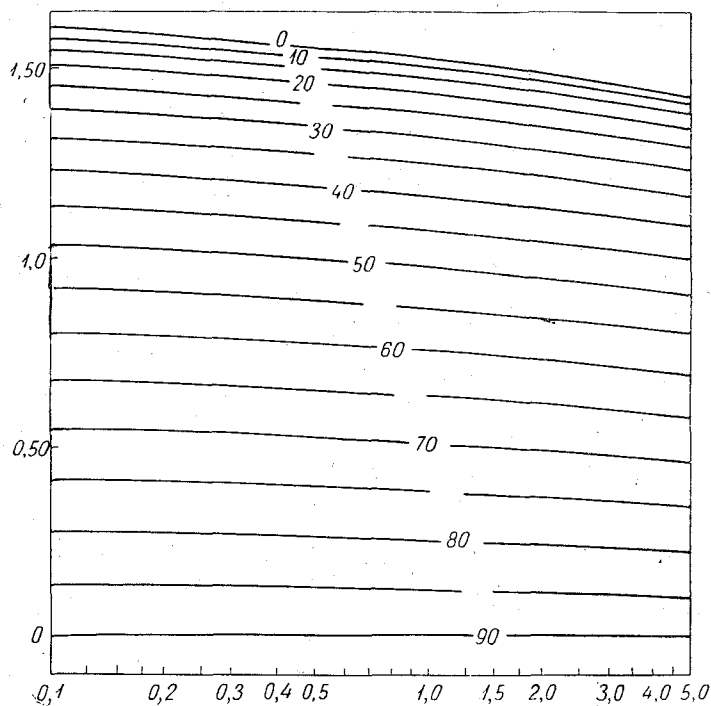


Рис. 1. Номограмма для расчета коротковолновой радиации.

В крупных индустриальных центрах и в окружающих их местностях необходимо знать поглощение солнечной радиации пылью и учесть его введением дополнительной поправки.

Таблица 2

Дни	Месяцы											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1	3,3	2,9	1,8	0,1	-1,5	-2,8	-3,4	-3,0	-1,8	-0,2	1,5	2,8
11	3,3	2,6	1,3	-0,5	-2,0	-3,1	-3,4	-2,7	-1,3	0,4	2,0	3,1
21	3,2	2,2	0,7	-1,0	-2,5	-3,3	-3,2	-2,3	-0,8	0,9	2,4	3,2

В практике очень часто при расчетах суточного хода коротковолновой радиации требуется знание коэффициентов разложения приходящей коротковолновой радиации в ряд Фурье.

$$J(m, t) = \sum_{-\infty}^{\infty} j_n e^{-in\omega t}.$$

Если принять $(M - m)^\varepsilon$ постоянным в течение дня, то значения первых четырех коэффициентов разложения в ряд (j_n) запишутся:

$$j_0 = \frac{J_0}{\rho^2} \left[\frac{B}{\pi} (\sin \omega t_0 - \omega t_0 \cos \omega t_0) - \frac{\nu}{\tau} (M - m)^\varepsilon N_0 \right], \quad (5)$$

$$j_1 = \frac{J_0}{\rho^2} \left[\frac{B}{2\pi} \left(\omega t_0 - \frac{\sin 2\omega t_0}{2} \right) - \frac{\nu}{\tau} (M - m)^\varepsilon N_1 \right], \quad (6)$$

$$j_2 = \frac{J_0}{\rho^2} \left[\frac{B}{3\pi} \sin^3 \omega t_0 - \frac{\nu}{\tau} (M - m)^\varepsilon N_2 \right], \quad (7)$$

$$j_3 = \frac{J_0}{\rho^2} \left[\frac{B}{3\pi} \sin^3 \omega t_0 \cos \omega t_0 - \frac{\nu}{\tau} (M - m)^\varepsilon N_3 \right]. \quad (8)$$

Здесь ωt_0 — часовой угол захода Солнца

$$N_n = \int_{-i_0}^{i_0} (A + B \cos \omega t)^{1-\varepsilon} e^{in\omega t} dt = \int_{-i_0}^{i_0} (A + B \cos \omega t)^{1-\varepsilon} \cos n\omega t,$$

так как функция $J(m, t)$ является четной.

Значения коэффициентов (j_n) на верхней границе атмосферы получаются из (5) — (8), если положить $M - m = 0$.

Для практического использования полученных формул можно заранее составить таблицы, позволяющие определять значения коэффициентов j_n для различных φ , δ и $(M - m)$. Такие таблицы и были составлены нами для $\varphi = 40, 50, 60^\circ$; $\delta = 23, 20, 15, 10$ и 5° при различном содержании водяного пара в атмосфере (для $M - m$ принимались значения $-0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5$ г/см²).

Для промежуточных значений φ , δ и $(M - m)$ коэффициенты j_n определяются простым интерполированием (см. приложение 1).

Таблицы составлены для среднего расстояния Земли от Солнца, солнечная постоянная принималась равной 1,90 кал/см² мин. Поправки на поглощение солнечной радиации озоном и кислородом и для приведения к действительному расстоянию от Солнца вводятся для полученных коэффициентов из табл. 1 и 2.

Кроме того, вводится поправка на отражение солнечной радиации атмосферой. Величина коротковолновой радиации при известных j_n равна

$$J(m, t) = j_0 + 2(j_1 \cos \omega t + j_2 \cos 2\omega t + j_3 \cos 3\omega t + \dots). \quad (9)$$

Как показали расчеты, при разложении коротковолновой радиации в ряд достаточно ограничиться первыми четырьмя членами.

На рис. 2, 3 и 4 приводится суточный ход рассчитанной нами и наблюдаемой суммарной радиации для ст. Пахта-Арал ($\varphi = 41^\circ$), ст. Павловск ($\varphi = 60^\circ$) и ст. Колтуши ($\varphi = 60^\circ$) за отдельные дни. Поглощение солнечной радиации пылью не учитывалось. Как показывают графики, для ст. Пахта-Арал рассчитанные значения достаточно хорошо согласуются с наблюдаемыми величинами коротковолновой радиации.

Для ст. Павловск рассчитанные значения оказываются на 1—3% ниже наблюдаемых. Очевидно, такое расхождение объясняется влиянием пыли (ст. Павловск расположена в 30—40 км от Ленинграда).

Еще большее влияние имеет место для ст. Колтуши, которая расположена всего в нескольких километрах от индустриального района г. Ленинграда. Для этой станции расхождение рассчитанных значений коротковолновой радиации с наблюдаемыми составляет 4—5%.

Как показало сравнение вычисленных значений солнечной радиации с наблюдаемыми, предложенная методика определения величины приходящей коротковолновой радиации для ясных дней является вполне приемлемой и перспективной.

Дальнейшее развитие данной проблемы, как нам представляется, должно идти по пути разработки следующих вопросов:

а) экспериментальной проверки формулы Меллера на основании наблюдений над поглощением солнечной радиации водяным паром и уточнения коэффициентов этой формулы;

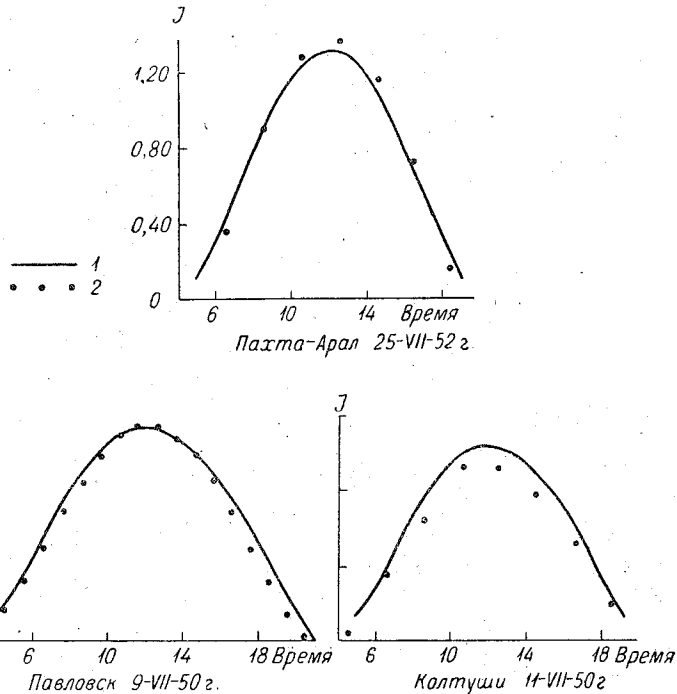


Рис. 2. Суточный ход коротковолновой радиации.
1 — рассчитанная кривая, 2 — наблюдения.

б) выяснения ослабляющего действия пыли на коротковолновую радиацию, особенно поглощения пылью, а также уточнения величины альбедо атмосферы в зависимости от географических районов;

в) учета облачности при расчетах суточного хода коротковолновой радиации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гайворонский И. И. и Аверкиев М. С. Метеорологический практикум. Гидрометеоздат, 1949 г.
2. Калигин Н. Н. Актинометрия. Гидрометеоздат, 1938 г.
3. Калигин Н. Н. Об ослаблении солнечной радиации водяными парами и аэрозолями. Метеорология и гидрология № 1, 1947 г.
4. Кастров В. Г. К вопросу о поглощении солнечной радиации атмосферным водяным паром. Изв. АН СССР, серия географ. и геофиз., № 5, 1949 г.
5. Кастров В. Г. Измерение поглощения солнечной радиации в свободной атмосфере до 3--5 км. Труды ЦАО, вып. 8, 1952 г.
6. Handbuch der Geophysik, Bd. VIII, 1943 г.
7. Mügge R., Möller F. Zur Berechnung von Strahlungsströmen und Temperaturänderungen in Atmosphären von beliebigen aufbau Zeitschrift. f. Geophys. u. VIII, H¹/₂, 1932 г.

Таблица значений коэффициентов разложения коротковолновой радиации в ряд Фурье

δ°	Коэффициенты j_n для $\varphi = 60^\circ$							
	<i>m — n</i>							
	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5

j_0 (кал/см²мин)

23	0,6787	0,6185	0,6044	0,5948	0,5870	0,5807	0,5751	0,5701
20	0,6243	0,5686	0,5556	0,5467	0,5396	0,5337	0,5285	0,5239
15	0,5371	0,4883	0,4769	0,4690	0,4628	0,4576	0,4531	0,4490
10	0,4539	0,4112	0,4013	0,3944	0,3890	0,3844	0,3805	0,3770
5	0,3764	0,3395	0,3309	0,3250	0,3202	0,3163	0,3129	0,3098

j_1 (кал/см²мин)

23	0,4027	0,3712	0,3638	0,3588	0,3548	0,3514	0,3485	0,3459
20	0,3897	0,3585	0,3512	0,3462	0,3422	0,3389	0,3360	0,3335
15	0,3600	0,3300	0,3230	0,3182	0,3143	0,3112	0,3084	0,3059
10	0,3218	0,2929	0,2862	0,2815	0,2778	0,2747	0,2720	0,2696
5	0,2708	0,2444	0,2383	0,2351	0,2306	0,2278	0,2254	0,2232

j_2 (кал/см²мин)

23	0,0289	0,0308	0,0312	0,0315	0,0317	0,0319	0,0321	0,0322
20	0,0443	0,0446	0,0446	0,0447	0,0447	0,0447	0,0447	0,0448
15	0,0677	0,0658	0,0654	0,0650	0,0648	0,0646	0,0644	0,0643
10	0,0856	0,0812	0,0801	0,0794	0,0788	0,0784	0,0780	0,0776
5	0,0968	0,0902	0,0887	0,0876	0,0867	0,0860	0,0854	0,0849

j_3 (кал/см²мин)

23	-0,0212	-0,0203	-0,0201	-0,0199	-0,0198	-0,0197	-0,0196	-0,0196
20	-0,0280	-0,0260	-0,0256	-0,0253	-0,0250	-0,0248	-0,0246	-0,0245
15	-0,0314	-0,0276	-0,0267	-0,0261	-0,0256	-0,0252	-0,0248	-0,0245
10	-0,0261	-0,0224	-0,0215	-0,0209	-0,0204	-0,0200	-0,0197	-0,0194
5	-0,0147	-0,0114	-0,0106	-0,0100	-0,0096	-0,0092	-0,0089	-0,0086

j_0 (кал/см²мин)

23	0,7046	0,6460	0,6322	0,6228	0,6153	0,6091	0,6036	0,5988
20	0,6493	0,5943	0,5815	0,5727	0,5656	0,5598	0,5547	0,5502
15	0,5831	0,5326	0,5208	0,5127	0,5062	0,5008	0,4962	0,4920
10	0,5177	0,4720	0,4614	0,4540	0,4482	0,4434	0,4391	0,4354
5	0,4526	0,4106	0,4008	0,3941	0,3887	0,3842	0,3804	0,3769

j_1 (кал/см²мин)

23	0,4643	0,4287	0,4204	0,4147	0,4102	0,4064	0,4031	0,4002
20	0,4403	0,4057	0,3976	0,3921	0,3877	0,3840	0,3808	0,3779
15	0,4128	0,3793	0,3715	0,3661	0,3618	0,3583	0,3552	0,3524
10	0,3805	0,3486	0,3412	0,3361	0,3320	0,3286	0,3256	0,3230
5	0,3443	0,3148	0,3079	0,3032	0,2994	0,2963	0,2936	0,2911

δ°	Коэффициенты j_n для $\varphi = 60^\circ$							
	$m - t$							
	0,0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5

j_2 (кал/см²мин)

23	0,0782	0,0762	0,0757	0,0753	0,0751	0,0748	0,0746	0,0745
20	0,0891	0,0858	0,0850	0,0845	0,0841	0,0838	0,0835	0,0832
15	0,1067	0,1015	0,1003	0,0994	0,0988	0,0982	0,0978	0,0973
10	0,1194	0,1124	0,1108	0,1096	0,1088	0,1080	0,1074	0,1068
5	0,1269	0,1188	0,1169	0,1156	0,1145	0,1137	0,1129	0,1122

j_3 (кал/см²мин)

23	-0,0396	-0,0353	-0,0343	-0,0336	-0,0330	-0,0326	-0,0322	-0,0318
20	-0,0386	-0,0338	-0,0327	-0,0319	-0,0313	-0,0308	-0,0304	-0,0300
15	-0,0340	-0,0289	-0,0277	-0,0269	-0,0262	-0,0257	-0,0252	-0,0248
10	-0,0251	-0,0202	-0,0190	-0,0183	-0,0176	-0,0171	-0,0167	-0,0163
5	-0,0132	-0,0092	-0,0082	-0,0076	-0,0070	-0,0066	-0,0062	-0,0059

j_0 (кал/см²мин)

23	0,6921	0,6350	0,6217	0,6126	0,6052	0,5992	0,5939	0,5892
20	0,6645	0,6099	0,5972	0,5884	0,5814	0,5756	0,5706	0,5661
15	0,6092	0,5575	0,5454	0,5371	0,5304	0,5249	0,5201	0,5159
10	0,5670	0,5187	0,5074	0,4997	0,4935	0,4884	0,4839	0,4799
5	0,5156	0,4712	0,4608	0,4538	0,4480	0,4433	0,4392	0,4355

j_1 (кал/см²мин)

23	0,4834	0,4455	0,4366	0,4306	0,4257	0,4217	0,4182	0,4150
20	0,4727	0,4353	0,4265	0,4205	0,4157	0,4118	0,4083	0,4052
15	0,4513	0,4152	0,4067	0,4009	0,3963	0,3925	0,3891	0,3861
10	0,4254	0,3907	0,3826	0,3770	0,3725	0,3688	0,3656	0,3628
5	0,3961	0,3634	0,3557	0,3504	0,3462	0,3428	0,3397	0,3370

j_2 (кал/см²мин)

23	0,1160	0,1113	0,1102	0,1095	0,1089	0,1084	0,1080	0,1076
20	0,1254	0,1200	0,1187	0,1178	0,1172	0,1166	0,1161	0,1156
15	0,1380	0,1302	0,1288	0,1272	0,1262	0,1253	0,1246	0,1240
10	0,1470	0,1385	0,1365	0,1352	0,1341	0,1332	0,1324	0,1317
5	0,1526	0,1428	0,1405	0,1390	0,1377	0,1367	0,1358	0,1349

j_3 (кал/см²мин)

23	-0,0413	-0,0362	-0,0350	-0,0342	-0,0336	-0,0331	-0,0326	-0,0322
20	-0,0382	-0,0330	-0,0318	-0,0310	-0,0303	-0,0297	-0,0292	-0,0288
15	-0,0310	-0,0257	-0,0244	-0,0236	-0,0229	-0,0224	-0,0218	-0,0214
10	-0,0218	-0,0174	-0,0164	-0,0158	-0,0152	-0,0148	-0,0144	-0,0140
5	-0,0111	-0,0071	-0,0062	-0,0056	-0,0050	-0,0046	-0,0042	-0,0039

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ И ПОТОКА ТЕПЛА В ПОЧВУ ПО ОСРЕДНЕННЫМ ТЕМПЕРАТУРАМ

1. КОЭФФИЦИЕНТ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ

Как известно, рассматриваемый коэффициент характеризует скорость проникновения температур в почву и эта величина не остается постоянной с глубиной вследствие вертикальной неоднородности свойств почвы (пористости, влажности и т. п.). Кроме того, коэффициент температуропроводности, ввиду колебания влажности, подвержен и изменениям во времени. По этим причинам коэффициент, рассчитанный по температурным данным, будет являться средним для данного слоя почвы и для данного отрезка времени. Опыт вычислений по имеющимся формулам (1), (2), (3), (4) показывает, что результат в значительной степени будет зависеть от выбора промежутка времени, как в отношении его продолжительности, так и в отношении времени суток, что можно, повидимому, объяснить влиянием случайных ошибок в определении температуры и схематизацией теории передачи тепла в почву.

В предлагаемой работе путем введения осредненных температур по глубине и по времени несколько уменьшается влияние на результат вычисления случайных колебаний и ошибок в определении температуры. Введение осредненных температур позволяет более точно охарактеризовать среднее значение коэффициента температуропроводности для данного слоя, ибо, в отличие от других способов [1, 3], предлагаемые формулы расчета требуют знания всего поля температур взятого слоя почвы, а не только на двух или трех уровнях. Указанные уточнения неизбежно вызывают усложнение расчетных формул. Однако в тех случаях, когда другие расчетные методы определения коэффициента температуропроводности, упомянутые нами выше, не дают удовлетворительных результатов или вовсе неприменимы¹, использование предлагаемых формул будет, по нашему мнению, вполне оправданным.

Мы основываемся при выводе наших формул на уравнении теплопроводности в виде:

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}, \quad (1)$$

где $T(z, t)$ — температура почвы; z — глубина, отсчитываемая от поверхности почвы или от другого уровня; t — время, отсчитываемое от момента первого наблюдения; k — средний коэффициент температуропроводности почвы в слое толщиной „ H “ за промежуток времени t .

Уравнение (1) явно не учитывает источников тепла, которые могут находиться в почве. По этой причине применение ее, например к мерзлому грунту, где непрерывно выделяется или поглощается тепло вследствие замерзания или оттаивания находящейся в ней влаги, необосновано. Однако, как показано в работе [6], вычисленный формально при этих условиях коэффициент температуропроводности будет определенным образом связан с истинным его значением, наблюдаемым

¹ Например, при расчетах в зимних или других условиях, когда колебания температуры в почве невелики.

в талой почве. На основании вычисленного так называемого „кажущегося“ коэффициента температуропроводности можно по льдистости мерзлой почвы и некоторым другим ее характеристикам определить значение коэффициента талой почвы. Более подробно этот вопрос разобран в упомянутой работе [6].

Переходим к выводу предлагаемых нами формул. Умножим обе части уравнения (1) на $\varphi(z)$ и проинтегрируем по z от $z=0$ до $z=H$, где $\varphi(z)$ — некоторая функция, которая будет определена ниже:

$$\int_0^H \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \varphi(z) dz = k \int_0^H \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \varphi(z) dz.$$

Проинтегрировав правый интеграл два раза по частям, получим:

$$k \int_0^H \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \varphi(z) dz = k \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \varphi(z) \Big|_0^H - k T(z, t) \frac{d\varphi(z)}{dz} \Big|_0^H + k \int_0^H T(z, t) \frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} dz.$$

Ввиду произвольности функции $\varphi(z)$ положим:

$$\varphi(0) = \varphi(H) = 0, \quad (2)$$

что исключает из рассмотрения трудноопределяемые производные $\frac{\partial T}{\partial z}$, тогда:

$$k \int_0^H \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \varphi(z) dz = k \left[T(0, t) \frac{d\varphi(z)}{dz} \Big|_{z=0} - T(H, t) \frac{d\varphi(z)}{dz} \Big|_{z=H} + \int_0^H T(z, t) \frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} dz \right],$$

где $\varphi(z)$ — любая функция, удовлетворяющая условиям (2). Таким образом, имеем:

$$\int_0^H \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \varphi(z) dz = k \left[T(0, t) \frac{d\varphi(z)}{dz} \Big|_{z=0} - T(H, t) \frac{d\varphi(z)}{dz} \Big|_{z=H} + \int_0^H T(z, t) \frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} dz \right].$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства по времени от $t=0$ до $t=t$:

$$\int_0^H [T(z, t) - T(z, 0)] \varphi(z) dz = k \int_0^t \left[T(0, \xi) \frac{d\varphi(z)}{dz} \Big|_{z=0} - T(H, \xi) \frac{d\varphi(z)}{dz} \Big|_{z=H} + \int_0^H T(z, \xi) \frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} dz \right] d\xi,$$

где ξ — переменное время, меняющееся от $\xi=0$ до $\xi=t$.

Проинтегрируем еще раз обе части нового равенства по времени от $t=0$ до $t=t$ и разделим на t .

$$\begin{aligned} & \int_0^H \left\{ \frac{1}{t} \int_0^t [T(z, \xi) - T(z, 0)] d\xi \right\} \varphi(z) dz = \\ & = k \frac{1}{t} \int_0^t d\sigma \int_0^\sigma \left[T(0, \xi) \frac{d\varphi(z)}{dz} \Big|_{z=0} - T(H, \xi) \frac{d\varphi(z)}{dz} \Big|_{z=H} + \int_0^H T(z, \xi) \frac{d^2 \varphi(z)}{dz^2} dz \right] d\xi. \end{aligned}$$

Изменяя последовательность интегрирования в правом интеграле согласно правилу Дирихле, получим:

$$k = \frac{\int_0^H [A(z, t) - T(z, 0)] \varphi(z) dz}{\int_0^t \left[T(0, \xi) \frac{d\varphi(z)}{dz} \Big|_{z=0} - T(H, \xi) \frac{d\varphi(z)}{dz} \Big|_{z=H} + \int_0^H T(z, \xi) \frac{d^2\varphi(z)}{dz^2} dz \right] \left(1 - \frac{\xi}{t}\right) d\xi}, \quad (3)$$

где

$$A(z, t) = \frac{1}{t} \int_0^t T(z, \xi) d\xi, \quad (4)$$

т. е. $A(z, t)$ — осредненная по времени температура на глубине z .

Задавая определенным образом функцию $\varphi(z)$ удовлетворяющей условиям (2), можно получить различные варианты формулы (3).

Рассмотрим два наиболее простых случая:

$$\varphi(z) = \frac{z}{2H} (H - z), \quad (5)$$

$$\varphi(z) = \frac{H}{2\pi} \sin \frac{\pi}{H} z. \quad (6)$$

Подставляя эти значения $\varphi(z)$ в (3), получим следующие две формулы для расчета коэффициента температуропроводности k :

$$k = \frac{\frac{1}{2H} \int_0^H [A(z, t) - T(z, 0)] z (z - H) dz}{\int_0^t [\bar{T}(\xi) - T_c(\xi)] \left(1 - \frac{\xi}{t}\right) d\xi}, \quad (7)$$

$$k = \frac{\frac{H^2}{\pi^2} [\bar{P}(t) - P(0)]}{\int_0^t [T_c(\xi) - P(\xi)] \left(1 - \frac{\xi}{t}\right) d\xi}, \quad (8)$$

где введены обозначения:

$$\bar{T}(\xi) = \frac{1}{H} \int_0^H T(z, \xi) dz, \quad (9)$$

т. е. средняя температура слоя, толщиной H , в моменты t

$$T_c(\xi) = \frac{T(0, \xi) + T(H, \xi)}{2}, \quad (10)$$

$$P(\xi) = \frac{\pi}{2H} \int_0^H T(z, \xi) \sin \frac{\pi z}{H} dz, \quad (11)$$

$$\bar{P}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t P(\xi) d\xi. \quad (12)$$

Введем вместо z и ξ новые переменные интегрирования:
тогда получим:

$$\eta = \frac{z}{H}, \quad \sigma = \frac{\xi}{t},$$

$$k = \frac{H^2 M_1(t)}{2t N_1(t)}, \quad (13)$$

$$k = \frac{H^2 M_2(t)}{\pi^2 t N_2(t)}, \quad (14)$$

где:

$$M_1(t) = \int_0^1 [A(\eta H; t) - T(\eta H; 0)] \eta(1 - \eta) d\eta, \quad (15)$$

$$N_1(t) = \int_0^1 [T_c(\sigma t) - \bar{T}(\sigma t)] (1 - \sigma) d\sigma, \quad (16)$$

$$M_2(t) = \bar{P}(t) - P(0), \quad (17)$$

$$N_2(t) = \int_0^1 [T_c(\sigma t) - P(\sigma t)] (1 - \sigma) d\sigma, \quad (18)$$

$$\bar{T}(\sigma t) = \int_0^1 T(\eta H; \sigma t) d\eta, \quad (19)$$

$$P(\sigma t) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 T(\sigma t; \eta H) \sin \pi \eta d\eta, \quad (20)$$

$$\bar{P}(t) = \int_0^1 P(\sigma t) d\sigma, \quad (21)$$

$$A(\eta H; t) = \int_0^1 T(\eta H; \sigma t) d\sigma. \quad (22)$$

Интегралы (15), (16), (18), (19), (20), (21), (22) можно вычислить или графически (как площади подинтегральных кривых), или аналитически, применяя приближенные формулы. Рассмотрим эти способы подробнее.

Графический способ

Здесь формулы (15), (16), (18), (20) удобно переписать в следующем виде:

$$M_1(t) = \int_0^1 [A(\eta H; t) - T(\eta H; 0)] d \left[\frac{\eta^2}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \eta \right) \right], \quad (15')$$

$$N_1(t) = \int_0^1 [T_c(\sigma t) - \bar{T}(\sigma t)] d \left[\sigma \left(1 - \frac{\sigma}{2} \right) \right], \quad (16')$$

$$N_2(t) = \int_0^1 [T_c(\sigma t) - P(\sigma t)] d \left[\sigma \left(1 - \frac{\sigma}{2} \right) \right], \quad (18')$$

$$P(\sigma t) = \int_0^1 T(\eta H; \sigma t) d \sin^2 \frac{\pi \eta}{2}. \quad (20')$$

Для вычисления этих величин строится график, где по одной оси откладывается одна из функций $\frac{\eta^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\eta\right)$; $\delta\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)$ или $\sin^2 \frac{\pi\eta}{2}$, а по другой оси — соответствующие значения подинтегральной функции, строится кривая и измеряется площадь подинтегральной кривой. Для облегчения построения графиков можно пользоваться таблицами соответствующих функций (см. табл. 1 и 2). Расчеты по этим формулам мы не приводим, так как аналогичные примеры расчета даны в работе [3].

Таблица 1

η	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
$\frac{\eta^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\eta\right)$	0	0,0012	0,005	0,011	0,017	0,026	0,036	0,047	0,059	8,71
$\sin^2 \frac{\pi\eta}{2}$	0	0,0062	0,024	0,054	0,096	0,147	0,205	0,273	0,347	0,422
η	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,90	1	
$\frac{\eta^2}{2}\left(1 - \frac{2}{3}\eta\right)$	0,083	0,096	0,108	0,120	0,131	0,140	0,149	0,162	0,167	
$\sin^2 \frac{\pi\eta}{2}$	0,500	0,578	0,656	0,725	0,795	0,855	0,905	0,975	1,000	

Таблица 2

σ	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
$\sigma\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)$	0	0,049	0,095	0,139	0,180	0,219	0,255	0,289	0,320	0,349
σ	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,90	1,00	
$\sigma\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right)$	0,375	0,399	0,420	0,439	0,455	0,469	0,480	0,495	0,500	

Аналитический метод

Численный расчет величин (15), (16), (18), (19), (20), (21), (22) сводится к приближенному вычислению интегралов следующих типов:

$$J_1 = \int_0^1 \varphi(\eta) \eta (1 - \eta) d\eta, \quad (23)$$

$$J_2 = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \varphi(\eta) \sin \pi\eta d\eta, \quad (24)$$

$$J_3 = \int_0^1 \varphi(\eta) d\eta, \quad (25)$$

$$J_4 = \int_0^1 f(\sigma) (1 - \sigma) d\sigma, \quad (26)$$

$$J_5 = \int_0^1 f(\sigma) d\sigma. \quad (27)$$

Для вычисления интегралов (23) — (25) предположим, что значения $\varphi(\eta)$ заданы через равные промежутки в следующих точках: $\eta=0$; $\eta=0,25$; $\eta=0,5$; $\eta=0,75$ и $\eta=1$, т. е., что известны значения $\varphi(0)$, $\varphi(1/4)$, $\varphi(1/2)$, $\varphi(3/4)$ и $\varphi(1)$. Интерполяционный полином Лагранжа (5) для этого случая имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi(\eta) = & \frac{32}{8} \varphi(0) \left[\eta^4 - \frac{5}{2} \eta^3 + \frac{35}{16} \eta^2 - \frac{25}{32} \eta + \frac{3}{32} \right] - \\ & - \frac{128}{3} \varphi\left(\frac{1}{4}\right) \left[\eta^4 - \frac{9}{4} \eta^3 + \frac{13}{8} \eta^2 - \frac{3}{8} \eta \right] + 64 \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \left[\eta^4 - 2\eta^3 + \frac{19}{16} \eta^2 - \frac{3}{16} \eta \right] - \\ & - \frac{128}{3} \varphi\left(\frac{3}{4}\right) \left[\eta^4 - \frac{7}{4} \eta^3 + \frac{7}{8} \eta^2 - \frac{1}{8} \eta \right] - \frac{32}{3} \varphi(1) \left[\eta^4 - \frac{3}{2} \eta^3 + \frac{11}{16} \eta^2 - \frac{3}{32} \eta \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Подставляя (28) в (23), (24) и (25) и произведя интегрирование, получим:

$$J_1 = 0,00397 [\varphi(0) + \varphi(1)] + 0,05079 \left[\varphi\left(\frac{1}{4}\right) + \varphi\left(\frac{3}{4}\right) \right] + 0,0571 \varphi\left(\frac{1}{2}\right), \quad (23')$$

$$J_2 = 0,02091 [\varphi(0) + \varphi(1)] + 0,29523 \left[\varphi\left(\frac{1}{4}\right) + \varphi\left(\frac{3}{4}\right) \right] + 0,36774 \varphi\left(\frac{1}{2}\right), \quad (24')$$

$$J_3 = 0,07778 [\varphi(0) + \varphi(1)] + 0,35556 \left[\varphi\left(\frac{1}{4}\right) + \varphi\left(\frac{3}{4}\right) \right] + 0,13333 \varphi\left(\frac{1}{2}\right). \quad (25')$$

[Формула (25') есть известная [5] формула Котеса при пяти ординатах].

Применяя интерполяционную формулу Лагранжа и считая, что функция $f(\sigma)$ от $\sigma=0$ до $\sigma=1$ задана через равные промежутки в точках $\sigma_0=0$, $\sigma_1=\frac{1}{n}$, $\sigma_2=\frac{2}{n}$, ..., $\sigma_n=\frac{n}{n}=1$ (n — число промежутков), можно для величины (26) получить формулу:

$$J_4 = \alpha_0 f(0) + \alpha_1 f\left(\frac{1}{n}\right) + \alpha_2 f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \alpha_k f\left(\frac{k}{n}\right) + \dots + \alpha_n f(1), \quad (26')$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ — постоянные числа, независимые от функции $f(\sigma)$, но зависящие от числа промежутков (значения чисел α_k даны в табл. 3).

Величину J_5 можно рассчитать при тех же предположениях относительно функции $f(\sigma)$ по аналогичной формуле (формула Котеса):

$$J_5 = \beta_0 f(0) + \beta_1 f\left(\frac{1}{n}\right) + \beta_2 f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + \beta_k f\left(\frac{k}{n}\right) + \dots + \beta_n f(1) \quad (27')$$

(числа β_k даны в табл. 3).

Таблица 3

n	\bar{k}								
	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1 α_n	0,3333	0,1667							
2 β_n	0,5000	0,5000							
3 α_n	0,1667	0,3333	0,0000						
4 β_n	0,1667	0,6667	0,1667						
5 α_n	0,1083	0,3000	0,0750	0,0167					
6 β_n	0,1250	0,3750	0,3750	0,1250					
7 α_n	0,0778	0,2667	0,0667	0,0889	0,0000				
8 β_n	0,0778	0,3556	0,1333	0,3556	0,0778				
9 α_n	0,0690	0,1980	0,1170	0,0627	0,0533	0,0000			
10 β_n	0,0660	0,2605	0,1736	0,1736	0,2605	0,0660			
11 α_n	0,0583	0,1688	0,1125	0,0625	0,0750	0,0188	0,0042		
12 β_n	0,0488	0,2571	0,0321	0,3238	0,0321	0,2571	0,0488		
13 α_n	0,0444	0,1742	0,0544	0,1161	0,0390	0,0552	0,0138	0,0031	
14 β_n	0,0434	0,2070	0,0765	0,1730	0,1730	0,0765	0,2070	0,0434	
15 α_n	0,0389	0,1556	0,0500	0,1111	0,0389	0,0667	0,0167	0,0222	0,0000
16 β_n	0,0348	0,2078	-0,0327	0,3702	-0,1605	0,3702	-0,0327	0,2078	0,0348

Итак, основываясь на полученных формулах (23¹) — (27¹), можно расчет величины k аналитическим способом производить по формулам (13) или (14), где входящие величины рассчитываются так:

$$M_1(t) = 0,0040 \left\{ [A(0, t) + A(H, t)] - [T(0, 0) + T(H, 0)] \right\} + \\ + 0,0508 \left\{ \left[A\left(\frac{H}{4}; t\right) + A\left(\frac{3H}{4}; t\right) \right] - \left[T\left(\frac{H}{4}; 0\right) + T\left(\frac{3H}{4}; 0\right) \right] \right\} + \\ + 0,0571 \left[A\left(\frac{H}{2}; t\right) - T\left(\frac{H}{2}; 0\right) \right], \quad (15')$$

$$N_1(t) = \alpha_0 [T_c(0) - \bar{T}(0)] + \alpha_1 \left[T_c\left(\frac{t}{n}\right) - \bar{T}\left(\frac{t}{n}\right) \right] + \alpha_2 \left[T_c\left(\frac{2t}{n}\right) - \bar{T}\left(\frac{2t}{n}\right) \right] + \dots \\ \dots + \alpha_{n-1} \left[T_c\left(\frac{(n-1)t}{n}\right) - \bar{T}\left(\frac{(n-1)t}{n}\right) \right] + \alpha_n [T_c(t) - \bar{T}(t)], \quad (16')$$

$$A(\eta H; t) = A(z, t) = \beta_0 T(z, 0) + \beta_1 T\left(z, \frac{t}{n}\right) + \\ + \beta_2 T\left(z, \frac{2t}{n}\right) + \dots + \beta_n T(z, t), \quad (22')$$

$$\bar{T}(\sigma t) = 0,0778 [T(0; \sigma t) + T(H; \sigma t)] + 0,3556 \left[T\left(\frac{H}{4}; \sigma t\right) + T\left(\frac{3H}{4}; \sigma t\right) \right] + \\ + 0,1333 T\left(\frac{H}{2}; \sigma t\right), \quad (23')$$

$$P(\sigma t) = 0,0209 [T(0; \sigma t) + T(H; \sigma t)] + 0,2952 \left[T\left(\frac{H}{4}; \sigma t\right) + T\left(\frac{3H}{4}; \sigma t\right) \right] + \\ + 0,3667 T\left(\frac{H}{2}; \sigma t\right), \quad (20')$$

$$\bar{P}(t) = \beta_0 P(0) + \beta_1 P\left(\frac{t}{n}\right) + \beta_2 P\left(\frac{2t}{n}\right) + \dots + \beta_{n-1} P\left(\frac{(n-1)t}{n}\right) + \beta_n P(t), \quad (21')$$

$$N_2(t) = \alpha_0 [T_c(0) - P(0)] + \alpha_1 \left[T_c\left(\frac{t}{n}\right) - P\left(\frac{t}{n}\right) \right] + \\ + \alpha_2 \left[T_c\left(\frac{2t}{n}\right) - P\left(\frac{2t}{n}\right) \right] + \dots + \alpha_n [T_c(t) - P(t)]. \quad (18')$$

Ниже будет дан пример расчета k по численному (аналитическому) методу.

II. ПОТОК ТЕПЛА В ПОЧВУ

Здесь мы получим уточненную формулу для расчета количества тепла, протекающего через единицу поверхности почвы за конечный промежуток времени, т. е. величину:

$$Q(t) = - \int_0^t c\rho k \frac{\partial T(z, \xi)}{\partial z} \Big|_{z=0} d\xi, \quad (29)$$

где $c\rho$ — объемная теплоемкость почвы, а остальные обозначения прежние.

Умножим уравнение (1) на $\omega(z)$, где $\omega(z)$ — любая функция, удовлетворяющая условиям:

$$\omega(H) = 0; \quad \frac{d\omega(z)}{dz} \Big|_{z=0} = 0, \quad (30)$$

и проинтегрируем по z от $z=0$ до $z=H$, где H имеет прежнее значение:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^H T(z, t) \omega(z) dz = k \int_0^H \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \omega(z) dz.$$

Проинтегрируем правую часть дважды по частям и, воспользовавшись (29) и (30), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^H T(z, t) \omega(z) dz = & \omega(0) \frac{1}{c\rho} \frac{\partial Q(t)}{\partial t} - kT(H, t) \frac{d\omega(z)}{dz} \Big|_{z=H} + \\ & + k \int_0^H T(z, t) \frac{d^2\omega(z)}{dz^2} dz. \end{aligned}$$

Проинтегрируем далее полученное выражение по времени от $t=0$ до $t=t$, тогда получим:

$$\begin{aligned} Q(t) = \frac{c\rho}{\omega(0)} \left\{ \int_0^H [T(z, t) - T(z, 0)] \omega(z) dz + k \int_0^t T(H, \xi) \frac{d\omega(z)}{dz} \Big|_{z=H} d\xi - \right. \\ \left. - k \int_0^t d\xi \int_0^H T(z, \xi) \frac{d^2\omega(z)}{dz^2} dz \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Рассмотрим два вида функции $\omega(z)$, удовлетворяющие условиям (30):

$$\omega(z) = \frac{1}{2H} (H^2 - z^2) \text{ и } \omega(z) = \frac{\pi}{2H} \cos \frac{\pi}{2H} z,$$

тогда, соответственно, получим две формулы для расчета величины $Q(t)$:

$$\begin{aligned} Q(t) = c\rho H \left\{ \int_0^1 [T(\eta H; t) - T(\eta H; 0)] (1 - \eta^2) d\eta + \right. \\ \left. + \frac{2kt}{H^2} \int_0^1 [\bar{T}(\sigma t) - T(H; \sigma t)] d\sigma \right\}, \end{aligned} \quad (32)$$

$$Q(t) = \frac{2c\rho H}{\pi} \left\{ M(t) - M(0) + \frac{k\pi^2 t}{4H^2} \int_0^1 [M(\sigma t) - T(H; \sigma t)] d\sigma \right\}, \quad (33)$$

где

$$M(t) = \frac{\pi}{2H} \int_0^H T(z, t) \cos \frac{\pi}{2H} z dz = \frac{\pi}{2} \int_0^1 T(\eta H; t) \cos \frac{\pi\eta}{2} d\eta, \quad (34)$$

а остальные обозначения прежние.

Аналогично, как и в предыдущем разделе, вычисление можно производить графически и аналитически.

Графический способ

Здесь формулам придают вид:

$$Q(t) = c\rho H \left\{ \int_0^1 [T(\eta H; t) - T(\eta H; 0)] d\left(\eta - \frac{\eta^3}{3}\right) + \right. \\ \left. + \frac{2kt}{H^2} \int_0^1 [\bar{T}(\sigma t) - T(H; \sigma t)] d\sigma \right\}, \quad (32')$$

$$M(t) = \int_0^1 T(\eta H; t) d \sin \frac{\pi\eta}{2}. \quad (34')$$

Числа $\eta - \frac{\eta^3}{3}$ и $\sin \frac{\pi\eta}{2}$ даны в табл. 4.

Таблица 4

η	0	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
$\eta - \frac{\eta^3}{3}$	0	0,050	0,100	0,149	0,197	0,245	0,291	0,336	0,379	0,419
$\sin \frac{\pi\eta}{2}$	0	0,078	0,156	0,233	0,309	0,383	0,454	0,522	0,588	0,649
η	0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,90	1	
$\eta - \frac{\eta^3}{3}$	0,457	0,494	0,528	0,558	0,586	0,608	0,629	0,657	0,667	
$\sin \frac{\pi\eta}{2}$	0,707	0,760	0,809	0,853	0,891	0,924	0,951	0,988	1	

Аналитический способ

Аналогично, как и для коэффициента температуропроводности, можно получить следующие формулы:

$$Q(t) = c\rho H \left[A_1(t) + \frac{2kt}{H^2} B_1(t) \right], \quad (32.1)$$

$$Q(t) = \frac{2c\rho H}{\pi} \left[A_2(t) + \frac{k\pi^2 t}{4H^2} B_2(t) \right], \quad (32.2)$$

где:

$$A_1(t) = \int_0^1 [\bar{T}(\eta H, t) - T(\eta H; 0)] (1 - \eta^2) d\eta, \quad (35)$$

$$B_1(t) = \int_0^1 [\bar{T}(\sigma t) - T(H, \sigma t)] d\sigma, \quad (36)$$

$$A_2(t) = M(t) - M(0), \quad (37)$$

$$B_2(t) = \int_0^1 [M(\sigma t) - T(H, \sigma t)] d\sigma, \quad (38)$$

причем величины $A_1(t)$, $B_1(t)$; $M(\sigma t)$ и $B_2(t)$ можно численно рассчитать по формулам:

$$A_1(t) = 0,0818 [T(0, t) - T(0, 0)] + 0,3175 \left[T\left(\frac{H}{4}; t\right) - T\left(\frac{H}{4}; 0\right) \right] + \\ + 0,1238 \left[T\left(\frac{H}{2}; t\right) - T\left(\frac{H}{2}; 0\right) \right] + 0,1397 \left[T\left(\frac{3H}{4}; t\right) - T\left(\frac{3H}{4}; 0\right) \right] + \\ + 0,0040 [T(H; t) - T(H; 0)], \quad (35')$$

$$B_1(t) = \beta_0 [\bar{T}(0) - T(H, 0)] + \beta_1 \left[\bar{T}\left(\frac{t}{n}\right) - T\left(H; \frac{t}{n}\right) \right] + \\ + \beta_2 \left[\bar{T}\left(\frac{2t}{n}\right) - T\left(H; \frac{2t}{n}\right) \right] + \dots + \beta_n [\bar{T}(t) - T(H, t)], \quad (36')$$

где числа β берутся из табл. 3.

$$M(\sigma t) = 0,1285 T(0; \sigma t) + 0,4924 T\left(\frac{H}{4}; \sigma t\right) + 0,1805 T\left(\frac{H}{2}; \sigma t\right) + \\ + 0,1954 T\left(\frac{3H}{4}; \sigma t\right) + 0,0036 T(H; \sigma t), \quad (34')$$

$$B_2(t) = \beta_0 [M(0) - T(H, 0)] + \beta_1 \left[M\left(\frac{t}{n}\right) - T\left(H; \frac{t}{n}\right) \right] + \\ + \beta_2 \left[M\left(\frac{2t}{n}\right) - T\left(H; \frac{2t}{n}\right) \right] + \dots + \beta_n [M(t) - T(H, t)] \quad (38')$$

и где $T(\sigma t)$ вычисляется по формуле (23').

III. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Приведем пример расчета коэффициента температуропроводности и потока тепла численным методом.

На метеостанции „Колтуши“ в течение 16 и 17 февраля 1955 г. под оголенной от снега площадкой наблюдались следующие температуры почвы (табл. 5).

Таблица 5

Глубина (см)	Время (часы)									
	19	1	7	13	19	1	7	13	19	
0	-7,6	-8,1	-9,7	-10,5	-17,0	-19,0	-15,0	-9,0	-10,6	
5	-4,7	-4,8	-4,9	-6,0	-8,7	-10,9	-10,8	-7,7	-7,6	
10	-5,2	-5,4	-5,0	-6,2	-8,4	-10,4	-10,4	-8,6	-8,0	
15	-4,3	-4,5	-4,0	-4,8	-6,1	-7,8	-8,6	-7,6	-7,0	
20	-3,1	-3,2	-3,0	-3,3	-4,0	-5,2	-6,2	-6,0	-5,4	

Вычисление коэффициента температуропроводности по формуле (13) удобно производить по следующей схеме (табл. 6).

Таблица 6

Время	19	1	7	13	19	1	7	13	19	7	13	19	11
t (часы)	0	6	12	18	24	30	36	42	48				
β	0,0348	0,2078	-0,0327	0,3702	-0,1605	0,3702	-0,0327	0,2078	0,0348				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11			
$z = 0$ T	-7,6	-8,1	-9,7	-10,5	-17,0	-19,0	-15,0	-9,0	-10,6	-11,54			
βT	-0,26	-1,68	0,32	-3,88	2,73	-7,02	0,49	-1,87	-0,37				
$z = 5$ T	-4,7	-4,8	-4,9	-6,0	-8,7	-10,9	-10,8	-7,7	-7,6				
βT	-0,16	-1,01	0,16	-2,20	1,40	-4,03	0,35	-1,60	-0,26				
$z = 10$ T	-5,2	-5,4	-5,0	-6,2	-8,4	-10,4	-10,4	-8,6	-8,0				
βT	-0,18	-1,12	0,16	-2,30	1,34	-3,83	0,34	-1,79	-0,28				
$z = 15$ T	-4,3	-4,5	-4,0	-4,8	-6,1	-7,8	-8,6	-7,6	-7,0				
βT	-0,15	-0,93	0,13	-1,79	0,98	-2,88	0,28	-1,58	-0,24				
$z = 20$ T	-3,1	-3,2	-3,0	-3,3	-4,0	-5,2	-6,2	-6,0	-5,4				
βT	-0,11	-0,68	0,10	-1,22	0,65	-1,92	0,20	-1,25	-0,19				
$T(0, t) + T(20, t)$	-10,7	-11,3	-12,7	-13,8	-21,0	-24,2	-21,2	-15,0	-16,0				
$T(5, t) + T(15, t)$	-9,0	-9,3	-9,0	-10,8	-14,8	-18,7	-19,4	-15,3	-14,6				
$0,0778 [T(0, t) + T(20, t)]$	-0,83	-0,88	-0,99	-1,08	-1,64	-1,88	-1,65	-1,17	-1,25				
$0,3556 [T(5, t) + T(15, t)]$	-3,20	-3,32	-3,18	-3,84	-5,28	-6,65	-6,90	-5,44	-5,18				
$0,1333T(10, t)$	-0,69	-0,72	-0,67	-0,83	-1,11	-1,38	-1,38	-1,15	-1,07				
$T(t)$	-4,72	-4,92	-4,84	-5,75	-8,03	-9,91	-9,93	-7,76	-7,50				
$T_c(t)$	-5,35	-5,65	-6,35	-6,90	-10,50	-12,10	-10,60	-7,50	-8,00				
$T_c(t) - T(t)$	-0,63	-0,73	-1,51	-1,15	-2,47	-2,19	-0,67	0,26	-0,50				
α	0,0389	0,1556	0,0500	0,1111	0,0389	0,0667	0,0167	0,0222	0				
$\alpha [\bar{T}_c(t) - \bar{T}(t)]$	-0,024	-0,114	-0,076	-0,128	-0,096	-0,146	-0,011	0,006	0				

Поясним несколько схему: средние температуры по времени $A(z, t)$ получены сложением всех чисел βT соответствующих строк; средние температуры по глубине $T(t)$ получены сложением вышестоящих трех чисел.

Дальнейшее вычисление величины k производится следующим образом.

1) По формуле (15') и используя найденные выше числа $A(z, t)$ вычисляем величину $M_1(t)$:

$$M_1(t) = 0,0040 \{ (-11,54 - 4,42) - (7,6 - 3,1) \} + \\ + 0,0508 \{ (-7,35 - 6,16) - (-4,7 - 4,3) \} + 0,0571 (-7,66 + 5,2),$$

откуда:

$$M_1(t) = -3,93 \text{ град.}$$

2) Находим величину $N_1(t)$. Согласно формуле (16'), эта величина определится как сумма всех чисел последней строки схемы; получим:

$$N_1(t) = -0,589 \text{ град.}$$

3) „Кажущийся“ коэффициент температуропроводности найдется теперь по формуле (13), учитывая, что в нашем примере $H = 20$ см и $t = 48$ часов:

$$k = \frac{H^2 M_1(t)}{2t N_1(t)} = \frac{400 (-0,393)}{2,48 (-0,589)},$$

или

$$k = 2,78 \text{ см}^2/\text{час} = 0,00077 \text{ см}^2/\text{сек.}$$

Рассчитаем теперь суммарный поток тепла в почву за этот же период. Вычисления выполняем по формуле (32').

1. Вычисляем по формуле (35') величину $A_1(t)$:

$$A_1(t) = 0,0818 (-10,6 + 7,6) + 0,3175 (-7,6 + 4,7) + 0,1238 (-8,0 + 5,2) + \\ + 0,1397 (-7,0 + 4,3) + 0,0040 (-5,4 + 3,1),$$

откуда:

$$A_1(t) = -1,92 \text{ град.}$$

2. Вычисляем по (36') величину $B_1(t)$. Это вычисление удобно выполнить по схеме (табл. 7).

Таблица 7

Время	19	1	7	13	19	1	7	13	19
t	0	6	12	18	24	30	36	42	48
β	0,0348	0,2078	-0,0327	0,3702	-0,1605	0,3702	-0,0327	0,2078	0,0348
$\bar{T}(t)$	-4,72	-4,92	-4,84	-5,75	-8,03	-9,91	-9,93	-7,76	-7,50
$T(20, t)$	-3,10	-3,20	-3,00	-3,30	-4,00	-5,20	-6,20	-6,00	-5,40
$\bar{T}(t) - T(20, t)$	-1,62	-1,72	-1,84	-2,45	-4,03	-4,71	-3,73	-1,76	-2,10
$\beta[\bar{T}(t) - T(20, t)]$	-0,06	-0,36	0,06	-0,99	0,65	-1,74	0,12	-0,37	-0,07

Величина $B_1(t)$ найдется как сумма чисел последней строки схемы:

$$B_1(t) = -2,68 \text{ град.}$$

3. Учитывая, что средняя объемная теплоемкость почвы c_p равнялась $0,56 \text{ кал/см}^3 \text{ град.}$, получим по (32.1) следующее значение суммарного потока тепла:

$$Q(t) = 0,56 \cdot 20 \left[-1,92 - \frac{2 \cdot 2,78 \cdot 48}{400} \cdot 2,68 \right] = 0,56 \cdot 20 (-1,92 - 1,78),$$

откуда

$$Q(t) = -41,5 \text{ кал/см}^2,$$

т. е. за рассматриваемый промежуток времени каждый квадратный сантиметр поверхности почвы теряет $41,5$ калорий тепла.

Вычисление по тем же данным коэффициента температуропроводности и потока тепла в почву по второй паре формул (14) и (32.2) (порядок расчета аналогичен) дали следующие результаты:

$$k = 2,72 \text{ см}^2/\text{час} = 0,00076 \text{ см}^2/\text{сек.},$$

$$Q(t) = -41,7 \text{ кал/см}^2.$$

Как видно, сходимость с предыдущими значениями хорошая.

4. В рассматриваемом примере получен коэффициент температуропроводности мерзлой почвы („кажущийся“ коэффициент). Эта же характеристика соответствующей талой почвы¹, может быть найдена по „кажущемуся“ коэффициенту температуропроводности и имея некоторые данные о мерзлой почве (льдистость, общее количество влаги и т. п.). Подробно этот вопрос разобран в работе [6].

При расчете по предлагаемым формулам потока тепла в мерзлую почву необходимо использовать „кажущийся“ коэффициент температуропроводности и объемную теплоемкость, полученную с учетом как замерзшей, так и незамерзшей влаги, т. е. термические характеристики мерзлой почвы.

В заключение заметим, что предлагаемые формулы в их графическом варианте могут быть применены без существенных ограничений в смысле расположения отдельных наблюдений по времени и по глубине. Необходимо только, чтобы имеющееся число наблюдений достаточно полно характеризовало поле температур для рассматриваемого отрезка времени и для интересующего слоя почвы.

Применение аналитического варианта предполагает, что наблюдения температуры на одной и той же глубине разделены равными интервалами времени (не более восьми) и наблюдения расположены на пяти равноотстоящих уровнях в почве, т. е. рассматриваемый слой разделен на четыре равных промежутка. В противном случае необходимо перестроить температурное поле в соответствии с указанными требованиями. Это может быть, например, достигнуто снятием необходимых температур с кривых, характеризующих данное температурное поле в почве.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лайхтман Д. Л. О точном методе получения коэффициента температуропроводности почвы. Труды ГГО, — вып. 2, 1947.
2. Волошинова Г. А. Сравнение различных методов определения коэффициента температуропроводности. Труды ГГО, — вып. 22 (84), 1950.
3. Цейтин Г. Х. К вопросу об определении некоторых тепловых свойств почвы. Труды ГГО, — вып. 39 (101), 1953.
4. Огнева Т. А. Некоторые особенности теплового баланса деятельной поверхности. Гидрометеоздат, 1955.
5. Крылов А. Н. Лекции о приближенных вычислениях. Гостехиздат, 1950.
6. Материалы по лабораторным исследованиям мерзлых грунтов. Сборник 1. Издательство АН СССР, 1953.

¹ В рассматриваемом случае коэффициент температуропроводности талой почвы равен $0,0037 \text{ см}^2/\text{сек.}$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТОКОВ ТЕПЛА В ПОЧВЕ В ЗИМНЕЕ ВРЕМЯ

Вычисление потоков тепла в мерзлой почве обычным путем, т. е. по распределению температуры в почве и ее термическим характеристикам, представляет значительные трудности.

Измерение температуры почвы в зимнее время проводится обычно вытяжными термометрами, устанавливаемыми на глубинах от 20 см и глубже. Такое расположение термометров не дает картины распределения температуры в верхнем 20-сантиметровом слое, в котором в основном и происходят процессы теплообмена. Кроме того, при наличии снежного покрова температурные градиенты в почве очень невелики, и для вычисления потоков тепла измерения температуры должны проводиться с большой точностью.

Термические характеристики мерзлой почвы обладают сильной изменчивостью как в пространстве, так и во времени вследствие того, что в почве при любой отрицательной температуре всегда содержится некоторое количество незамерзшей воды, зависящее от механической структуры почвы и ее температуры. Таким образом, при изменении температуры мерзлой почвы происходит изменение фазового состава воды в ней, что существенно сказывается на ее термических характеристиках. В настоящей работе эти затруднения были учтены и выбрана специальная методика определения как температуры, так и термических характеристик почвы.

1. ИЗМЕРЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ ПОЧВЫ

Температура почвы измерялась дистанционным способом при помощи полупроводниковых термометров сопротивления, которые были установлены в верхнем слое почвы через 5 см, начиная от поверхности.

Полупроводниковые термометры сопротивления — термисторы находят в последнее время все более широкое применение в метеорологии как для измерения температуры, так и для измерения влажности (в психрометрах) и скорости ветра (в термоанемометрах). Большое внимание к этому рода датчикам объясняется большим температурным коэффициентом сопротивления (при 20° С примерно в 10 раз больше, чем у металлов), малыми габаритами, большим внутренним сопротивлением, исключающим влияние подводящих проводов и изменения сопротивления контактов. Разработанные у нас в СССР термисторы [1, 2] обладают большой стабильностью своих характеристик.

При измерении температуры термисторами последние включаются обычно в качестве одного из плеч в мост Витстона [3, 4, 5, 6]. Так как между сопротивлением термистора и температурой зависимость не линейная, а экспоненциальная, то для получения линейной шкалы измерительного прибора М. А. Кагановым предложен специальный метод расчета плеч моста. Однако чувствительность схемы при этом несколько снижается.

В настоящей работе описывается схема прибора с термисторами в качестве датчиков, разработанная с целью увеличения точности измерений при любом общем диапазоне измеряемых температур.

В приборе использована схема балансного каскада, относящаяся к числу схем усилителей с повышенной стабильностью. Каскад представляет собой мост, обра-

зубый двумя совершенно одинаковыми лампами L_1 и L_2 и сопротивлениями их анодных нагрузок R_{a1} и R_{a2} , также равными друг другу (рис. 1). Сопротивления R_1 , R_2 , R_d и T_n (или K_n) представляют собой плечи „внешнего“ моста, в измерительную диагональ которого включены управляющие сетки ламп L_1 и L_2 .

Если „внешний“ мост находится в равновесии, т. е. $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_{dn}}{T_n}$, то потенциалы точек b и d одинаковы, лампы L_1 и L_2 находятся в одинаковом режиме и, следовательно, анодные токи их равны между собой. При этом падение напряжения на анодных нагрузках $J_{a1} \cdot R_{a1}$ и $J_{a2} R_{a2}$, а, следовательно, и потенциалы точек e и f будут одинаковыми и ток в микроамперметре (μA) отсутствует.

Изменение сопротивления термистора T при изменении его температуры повле-

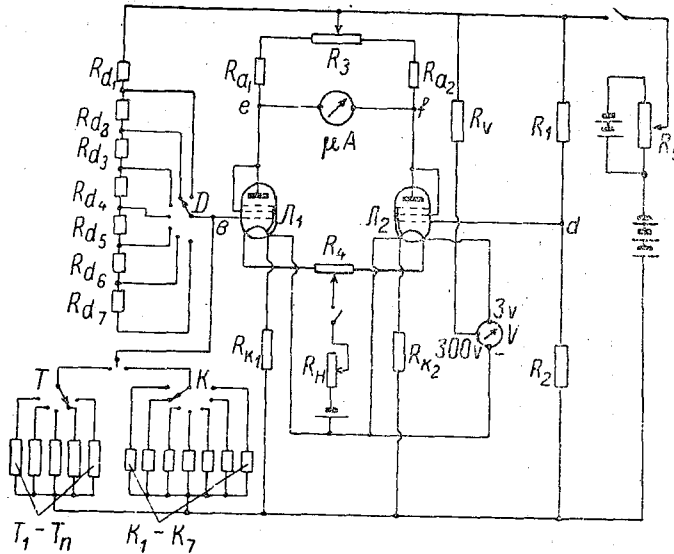


Рис. 1. Схема прибора для измерения температуры полупроводниковым термометром сопротивления.

чет за собой изменение в отношении $\frac{R_{dn}}{T_n}$ и изменение потенциала точки b , т. е. изменение входного напряжения, что, в свою очередь, вызовет определенное изменение силы анодного тока J_{a1} лампы L_1 .

В то же время потенциал сетки лампы L_2 остается прежним, так как сопротивления R_1 и R_2 не изменяются с температурой. При этом в диагонали ef появится разность потенциалов и микроамперметр отметит определенную силу тока. Если параметры ламп совершенно одинаковы, то понижение напряжения накала или анодного напряжения не нарушит равновесия моста. Но абсолютно тождественных ламп не существует. Поэтому для регулировки схемы введены потенциометры R_3 и R_4 .

Чувствительность данной схемы можно варьировать в широких пределах, изменяя составляющие ее сопротивления. Так, сопротивления R_{k1} и R_{k2} введены для создания отрицательного смещения на сетках ламп. Изменяя при расчете схемы величины R_1 , R_2 и R_k , меняем потенциал сетки лампы u_g . Наибольшая чувствительность схемы, согласно динамической характеристике лампы, будет при u_g от 0 до 2в. Лампы взяты типа 2К2-М, пентод, прямого накала. Анодное напряжение равно 60 в, напряжение накала 2 в.

Переключение с одного диапазона измерений на другой осуществляется переключателем D .

Полный диапазон измерений температуры может быть, таким образом, сколь угодно большим, в зависимости от того, какие крайние величины сопротивлений включены в плечо R_{d_n} и в каких пределах температур может работать взятый в качестве термометра термистор.

Прибор проходил полевые испытания в 1951 г. в экспедиции ГГО в Каменную Степь, в 1952 г. на метеостанции „Воейково“. Подробные наблюдения температуры почвы проводились зимой 1954—1955 гг. на м/ст. Колтуши на двух площадках: очищенной от снега и с ненарушенным снежным покровом.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕРМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕРЗЛОЙ ПОЧВЫ

При определении теплоемкости мерзлой почвы была использована установленная З. А. Нерсесовой [1] закономерность, согласно которой изменение фазового состава воды в грунте при замерзании и оттаивании можно в первом приближе-

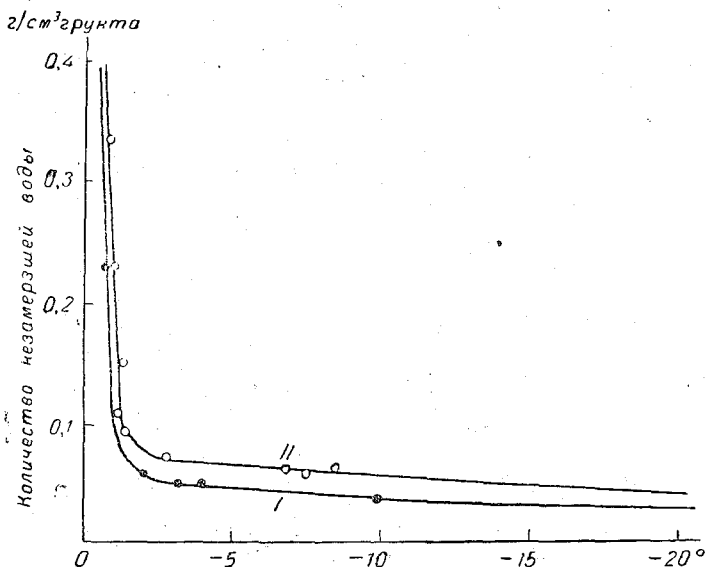


Рис. 2. Кривая изменения содержания незамерзшей воды в зависимости от температуры.
I — оголенная площадка; II — травостой.

нии характеризовать кривой изменения содержания незамерзшей воды в зависимости от температуры.

Такие кривые, согласно инструкции [2], были получены для образцов, соответствующих почве оголенной площадки и площадки под снегом (рис. 2).

Объемная теплоемкость мерзлой почвы вычислялась по формуле:

$$c_{м. п.} = c_{п.} \cdot g_{п.} + c_{л.} \cdot g_{л.} + c_{н. в.} \cdot g_{н. в.},$$

где $c_{п.}$ — теплоемкость минеральной части почвы; $g_{п.}$ — вес минеральной части почвы; $c_{л.}$ — теплоемкость льда, равная 0,5 кал/г; $g_{л.}$ — вес льда; $g_{н. в.}$ — вес незамерзшей воды.

Теплоемкость минеральной части исследуемой почвы, определенная при отрицательной температуре, равна 0,16 кал/г.

Общая влажность почвы ($g_{в.}$), необходимая для вычисления количества льда в почве по формуле $g_{л.} = g_{в.} - g_{н. в.}$, определялась 1 раз в неделю весовым способом.

Коэффициент температуропроводности K мерзлой почвы рассчитывался по формуле Г. Х. Цейтина [10].

Имея величины двух термических характеристик почвы — теплоемкости и температуропроводности, а также зная распределение температур в почве по глубине и по времени, можно вычислить поток тепла в почве.

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОТОКОВ ТЕПЛА В ПОЧВЕ

Вычисление проводилось по формуле Г. Х. Цейтина [10].

Потоки тепла вычислялись за 2-часовой и за 6-часовой промежутки времени.

На рис. 3 дан в качестве примера ход во времени потока тепла в почве на оголенной площадке для 16—21 января, 16—21 февраля и 16—21 марта 1955 г. (сплошные линии). Как видно из графика, величины потоков тепла колеблются в широких пределах, в ряде случаев меняя знак (т. е. вместо отдачи имеет место приток тепла к почве из воздуха). Так, в январе минимум потока был равен $-40,35$ кал/см² 6 час. (6 января), максимум $+30,0$ кал/см² 6 час. (7 января). В феврале крайние значения потоков составляют $-27,8$, $+16,9$ кал/см² 6 час. в марте $-28,3$, $+43,9$ кал/см² 6 час.

Если просуммировать за каждый месяц отдельно положительные и отрицательные величины потоков тепла, получается результат, приведенный в табл. 1.

Таблица 1

Характеристика теплового баланса	Январь	Февраль	Март
Потеря тепла почвой ккал/см ² мес.	-0,621	-0,397	-0,622
Приток тепла в почву	+0,237	+0,214	+0,610
Результирующий поток	-0,384	-0,183	-0,012

Цифры, приведенные в таблице, свидетельствуют о том, что и в зимнее время приток тепла в почву из воздуха иногда представляет довольно значительную величину. Положительная часть потока составляет в январе 38% от отрицательной, в феврале — 54%. В марте величины положительного и отрицательного потока практически равны друг другу и результирующий поток близок к нулю.

Сравнивая между собой потоки в почве по месяцам, видим, что в феврале величина суммарного потока как положительного так и отрицательного меньше, чем в январе и марте. Это объясняется различием в температурном режиме указанных месяцев, имевшем место в 1955 г.

Как правило, повышение температуры воздуха уменьшает отдачу тепла почвой, а иногда ведет к поглощению тепла почвой; понижение температуры, наоборот, увеличивает отдачу тепла почвой. Таким образом, положительные величины потоков тепла имеют место в случае повышения температуры, отрицательные — в случае понижения температуры воздуха.

Просуммировав за каждый месяц все повышения и понижения температуры от срока к сроку (за 6 часов), получаем следующие данные (табл. 2).

Таблица 2

Сумма превращений температуры одного знака	Январь	Февраль	Март
$\Sigma(+\Delta t^\circ)$	+129,8	+94,5	+214,9
$\Sigma(-\Delta t^\circ)$	-134,0	-99,7	-208,4

Минимум величины суммарных потоков тепла в феврале вызван, таким образом, минимальными в этом месяце флуктуациями температуры воздуха.

Можно установить количественную связь между величинами потоков тепла (Q), вычисленными за некоторые промежутки времени (2, 6 часов), и изменениями температуры воздуха (Δt) за те же промежутки.

Коэффициенты корреляции между Q и Δt и соответствующие уравнения регрессии для января, февраля и марта 1955 г. приведены ниже.

	Январь	Февраль	Март
Коэффициент корреляции	0,61 ± 0,04	0,80 ± 0,03	0,77 ± 0,02
Уравнение регрессии	$Q = 2,06\Delta t - 3,08$	$Q = 2,49\Delta t - 1,34$	$Q = 2,14\Delta t - 0,29$

Рассматривая ход потока во времени (рис. 3) с точки зрения выявления суточного хода, следует отметить, что в январе суточный ход потока тепла в почве отсутствует и колебания в величинах потоков вызываются лишь неперидическими изменениями погодных условий (изменение облачности, адвекция теплого или холодного воздуха и т. д.). В феврале в отдельные дни (17, 18 и 21 февраля) наблюдается максимум потока в 7—13 часов, аналогичный максимум в летнее

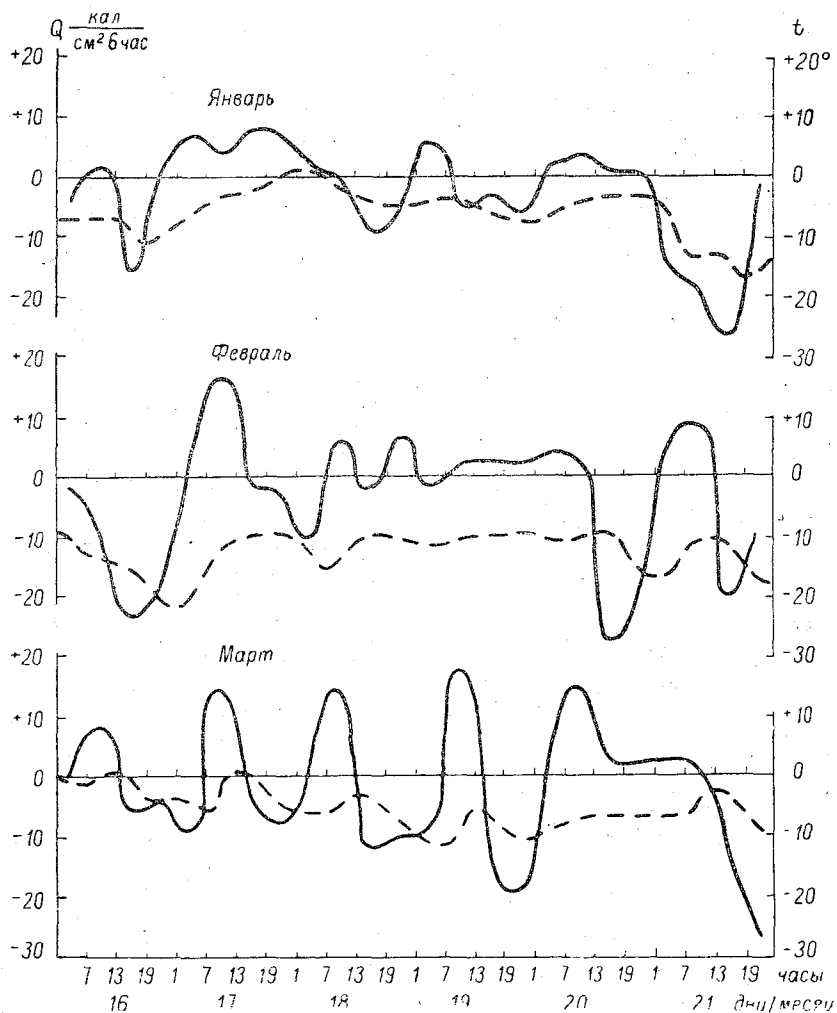


Рис. 3. Временной ход потоков тепла в почве.

время. В марте суточный ход потока тепла подобен летнему и выявляется совершенно отчетливо.

Полученные результирующие величины потоков тепла в почве для отдельных зимних месяцев (табл. 1) хорошо согласуются с расчетами Т. А. Огневой [9], полученными совершенно иным путем по наблюдениям в Колтушах за несколько лет. По вычислениям Огневой, потери тепла почвой равны:

за январь	0,32 ккал/см ² мес.
за февраль	0,20 "
за март	0,06 "

Представляет интерес определение величины потоков тепла в почве на площадке с ненарушенным снежным покровом. В январе месяце суммарный поток

равен $0,03$ ккал/см², что составляет $\frac{0,03}{0,38} \times 100 = 8\%$ от величины суммарного потока для оголенной площадки, т. е. потеря тепла почвой, защищенной снежным покровом (средняя высота снега в январе была $h = 17$ см), в данном случае примерно в 12 раз меньше потери тепла оголенной поверхностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. Коломиец Б. Т. Термисторы. Электричество, № 3, 1947.
2. Коломиец Б. Т. и Шефтель И. Т. Новые типы термосопротивлений. Электричество, № 4, 1951.
3. Коломиец Б. Т. и Шефтель И. Т. Измерение температур полупроводниковыми термометрами сопротивления. Журн. техн. физики, в. 10, т. 27, 1947.
4. Каганов М. А. Основы электрического расчета приборов для измерения температур при помощи термисторов. Автоматика и телемеханика, № 1, 1952.
5. Чудновский А. Ф. Применение полупроводников при исследовании природных явлений. Журн. техн. физики т. XXV, в. 12, 1955.
6. Penman H. L. and Long J. A portable thermistor bridge for Micrometeorology among growing crops. Journ. of. Scient. Instr. vol. 23, № 3, 1949.
7. Нерсесова З. А. Фазовый состав воды в грунтах при замерзании и оттаивании. Материалы по лабор. исследованиям мерзлых грунтов. Сб. 1, 1953.
8. Нерсесова З. А. и Коннова О. С. Инструктивные указания по определению теплоемкости мерзлых грунтов. Материалы по лабор. исследованиям мерзлых грунтов. Сб. 2, 1954.
9. Огнева Т. А. Некоторые особенности теплового баланса деятельной поверхности. Гидрометеоздат, 1955.
10. Цейтин Г. Х. О вычислении коэффициента температуропроводности и потока тепла в почву по осредненным температурам (печатается в этом сборнике).

О ТОЧНОСТИ ГРАДИЕНТНЫХ ИЗМЕРЕНИЙ ТЕМПЕРАТУРЫ И ВЛАЖНОСТИ

Современные исследования процессов, происходящих в приземном слое атмосферы, неизбежно сопряжены с измерениями градиентов температуры и влажности воздуха, поэтому чрезвычайно важно иметь оценку полезности измеряемых величин. В наши задачи входило выяснить, какое количество отсчетов температуры и влажности следует сделать в течение одного часа или какого-либо другого

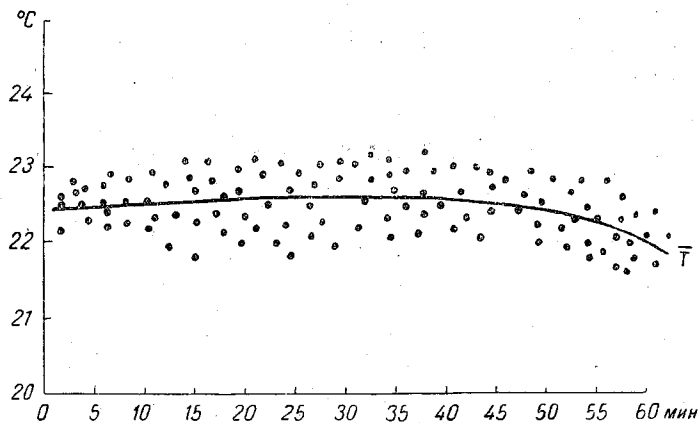


Рис. 1.

промежутка времени, чтобы ошибка измерения не превышала $0,1^{\circ}\text{C}$, какое количество отсчетов необходимо сделать одновременно, чтобы обеспечить такую же точность.

Для этой цели нами были произведены серийные наблюдения на высотах 0,5 и 1,5 м над луговой поверхностью в 12 точках, расположенных друг от друга на расстоянии 4—5 м. Измерения производились в июле 1954 г. в Колтушах.

Было произведено три часовых серии по 27 отсчетов в час, по каждому из психрометров. Завод пружин вентиляторов, смачивания батиста и отсчеты по термометрам для соблюдения полной синхронизации производились строго по сигналам.

За все серии наблюдений было в общей сложности произведено около 4000 измерений по всем термометрам, что дало около двух тысяч измерений влажности и порядка одной тысячи измерений градиентов температуры.

Материалы наблюдений после обычной первичной обработки были тщательно проанализированы и оценены величины отклонений измерения температуры, обусловленные случайными ошибками и естественной пульсацией.

Методика оценки отклонений состояла в следующем. Результаты наблюдений каждого из 12 пунктов наносились на миллиметровую бумагу последовательно от начала часа наблюдения до конца, затем по среднему расстоянию между точками проводилась сглаженная кривая, которую мы считали за значение средней температуры (см. рис. 1).

После нанесения кривой хода изменения средней температуры составлялась таблица отклонений наблюдаемых температур от средней температуры, с точностью до 0,1° С. Аналогично обрабатывались наблюдения всех 12 пунктов. Из таблицы отклонений температуры ΔT от средней величины (для всех 12 пунктов и 3 часовых серий) находилось среднее квадратичное отклонение единичных отсчетов σ

$$\bar{\sigma}_1 = \sum_i^n \sqrt{\frac{\Delta T_i^2}{n}},$$

двойных отсчетов

$$\bar{\sigma}_2 = \sum \sqrt{\frac{\left(\frac{\Delta T_i + \Delta T_{i+1}}{2}\right) + \dots + \left(\frac{\Delta T_{n-1} + \Delta T_n}{2}\right)}{n}},$$

тройных наблюдений σ_3 и так далее, до алгебраического суммирования по 10 отсчетам и нахождения σ_{10} ; тем самым находилась зависимость величины среднего квадратичного отклонения $\bar{\sigma}$ от осреднения по одному, двум..... десяти отсчетам.

Изменения $\bar{\sigma}$ для температуры на высотах 0,5 и 1,5 м приведены в табл. 1 и показаны на рис. 2.

На обеих высотах зависимость от числа осредненных точек оказалась одинаковой. $\bar{\sigma}$ для высоты 0,5 м несколько выше, что характеризуется большими размерами пульсаций температуры воздуха на уровне 0,5 м.

Таблица 1

Высота в м	Число наблюдений									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,5	0,34	0,26	0,21	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08
1,5	0,30	0,24	0,18	0,15	0,13	0,11	0,10	0,09	0,09	0,08

По такой же схеме были обработаны величины психрометрической разности температуры и градиенты температуры на высотах 0,5 и 1,5 м над земной поверхностью. Результаты изменения $\bar{\sigma}$ в зависимости от числа осредненных наблюдений приведены в таблице 2 и на рис. 3.

Таблица 2

Высота в м	Число осредняемых наблюдений									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20,5	0,32	0,23	0,19	0,16	0,13	0,12	0,08	0,07	0,08	0,08
21,5	0,30	0,21	0,16	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08	0,07	0,07

Из табл. 2 и рис. 3 следует также, что пульсации психрометрической разности температур на высоте 0,5 м несколько выше, чем на высоте 1,5 м.

В табл. 3 и на рис. 4 представлены изменения $\bar{\sigma}$ в зависимости от числа осредненных наблюдений для разности температуры сухих термометров на тех же высотах.

Оказалось, что величины средних отклонений в разности температуры имеют близкие значения с отклонениями температуры, измеренных на высотах 0,5 и 1,5 м.

Таблица 3

Число осреднений	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Средняя разность температур	0,30	0,21	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,07	0,08	0,07

Казалось естественным, что отклонение градиентов температуры от средней величины должно быть значительно выше соответствующих отклонений непосред-

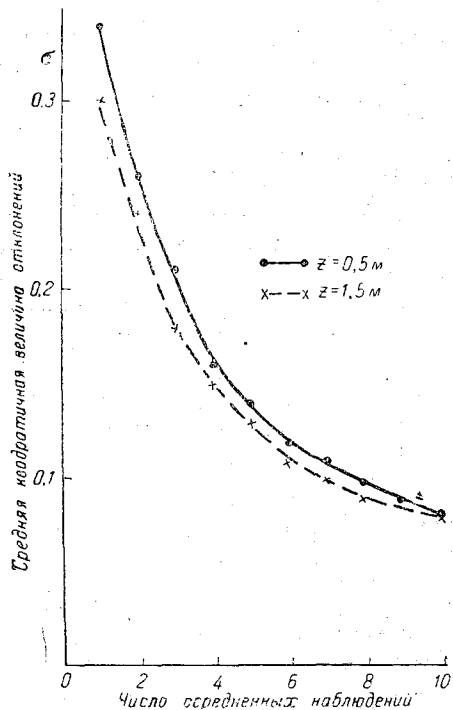


Рис. 2.

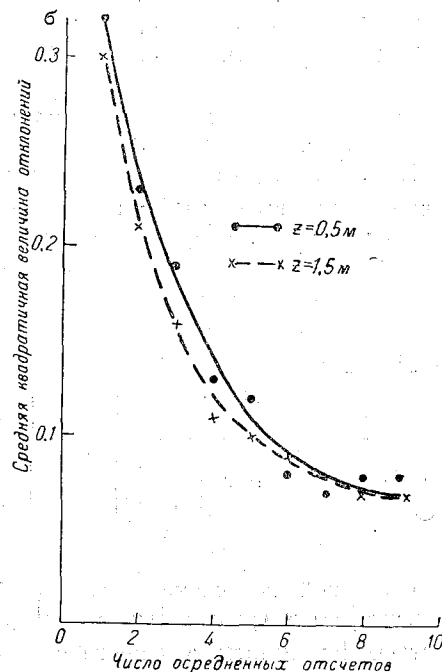


Рис. 3.

ственных значений температуры, поскольку отклонение температуры от средней величины составляет:

$$\Delta T = T_i - \bar{T},$$

а отклонение градиента температуры

$$\delta T = T_1 - T_2 = 2\Delta T.$$

Небольшие расхождения между величинами средних квадратичных значений температуры и градиента температуры могут быть объяснены тем, что рассеяние величин $\frac{dT}{dz}$ и T_z имеют близкие значения и обусловлены синхронными, однозначными пульсациями температуры на обоих уровнях или колебаниями температуры только на одном из уровней.

Для подтверждения этого нами приводится график (рис. 5) хода температуры на высотах 0,5 и 1,5 м из третьего часа наблюдений (16—17 часов) для пункта

№ 1. Очевидно, пульсации температуры, происходящие на уровне 0,5 м, обуславливают пульсации того же периода и приблизительно той же амплитуды на уровне 1,5 м. Площадь рассеяния точек как для температуры, так и для разности температур Δt приблизительно одинакова (см. рис. 4).

Из вышеизложенного следует, что для измерения температуры, психрометрической разности температур и градиента температуры с точностью $0,1^\circ$ необходимо произвести 6—7 наблюдений в час или меньший промежуток времени, а 10 наблюдений всегда приводят к отклонению не выше $0,08^\circ \text{C}$.

Для выяснения необходимого количества одновременных наблюдений, обеспечивающих точность измерения температуры $0,1^\circ$, произведена аналогичная обработка результатов одновременных наблюдений по 10 срокам наблюдений, взятых из трех часовых серий.

Как и следовало ожидать, разброс синхронных отсчетов оказался значительно меньшим, что видно из меньших величин средних квадратичных отклонений.

Изменение величин σ для синхронных наблюдений в зависимости от числа осредненных наблюдений показаны на рис. 6 и сведены в табл. 4.

Из графика следует, что для обеспечения точности $0,1^\circ$ синхронных наблюдений необходимо произвести 4—5 отсчетов температуры, а точность $0,06^\circ$ достигается при 6—7 отсчетах.

Правильность нанесения кривых среднего значения температуры по экспериментальным точкам подтверждена симметричностью кривой распределения отклонений, изображенной на рис. 7.

Первые две часовые серии производились при величинах градиента температуры в $0,8^\circ$ на 1 м высоты; третья часовая серия — при градиенте в $0,5^\circ/\text{м}$. Сопоставление величин средних квадратичных отклонений во втором случае оказалось значительно меньшим.

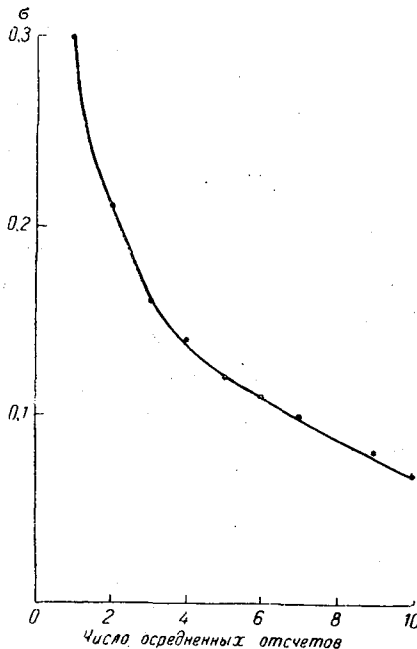


Рис. 4.

Таблица 4

Число осредненных наблюдений	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Среднеквадратичное отклонение температур	0,25	0,19	0,15	0,11	0,09	0,08	0,06	0,05	0,06	0,05

Ниже приводится таблица 5 для градиентов $0,8$ и $0,5^\circ/\text{м}$ в зависимости от числа осредненных наблюдений.

Таблица 5

Число осредненных наблюдений	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\Delta T = -0,8^\circ \text{C}$	0,29	0,21	0,14	0,13	0,11	0,11	0,06	0,06	0,08	0,07
$\Delta t = -0,5^\circ \text{C}$	0,21	0,15	0,16	0,09	0,05	0,05	0,05	0,04	0,03	0,03

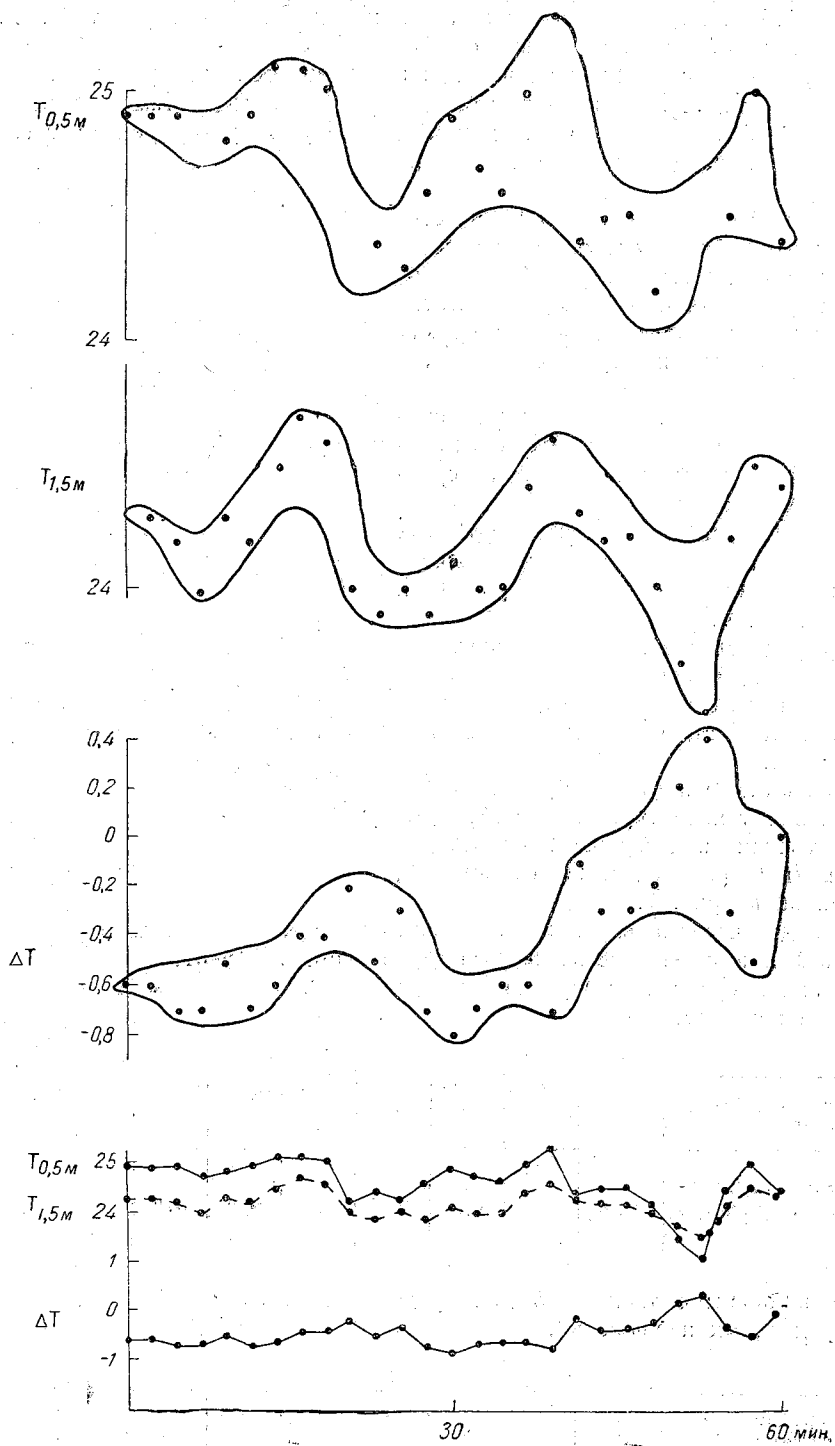


Рис. 5.

Из таблицы видно, что при меньших градиентах температуры абсолютные значения отклонений среднеквадратичных величин температуры сильно уменьшаются, что вполне естественно, поскольку при меньших отрицательных градиентах увеличивается устойчивость стратификации воздуха и уменьшается теплообмен нижележащих слоев воздуха с верхними и ослабляются пульсации температуры.

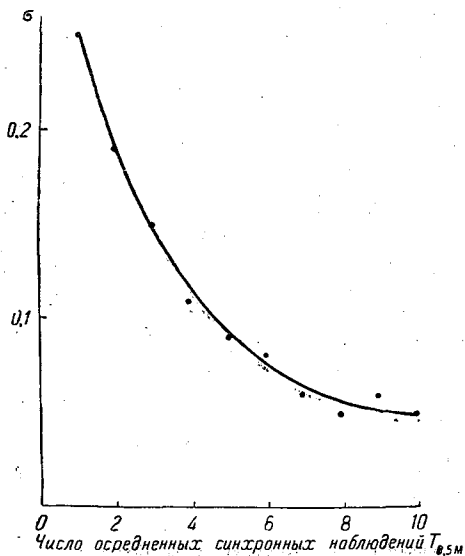


Рис. 6.

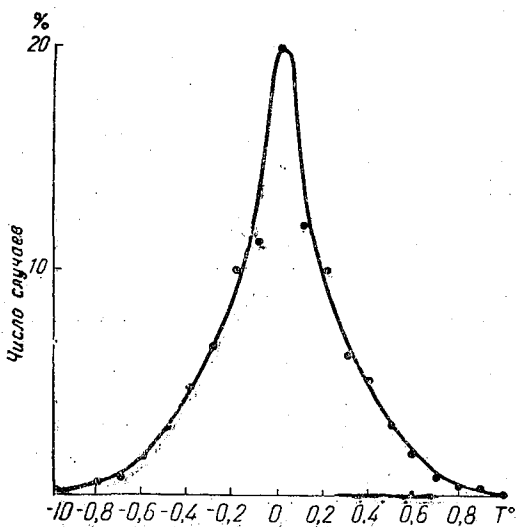


Рис. 7.

С уменьшением отрицательных градиентов следует ожидать уменьшения пульсаций температуры и меньших отклонений отдельных измерений температуры от ее средней величины.

Оценка точности измерений градиентов температуры может быть произведена лишь только в результате проведения подобных наблюдений при различных значениях градиентов.

Для градиентов $-0,8^\circ/\text{м}$ и $-0,5^\circ/\text{м}$ можно утверждать, что при 5—6 осреднениях относительные погрешности будут соответственно равны 14% и 10%, а при 8—10 отсчетах соответственно 8% и 6%.

ВЫВОДЫ

1. Отклонения в измерениях температуры обуславливаются, главным образом, естественной пульсацией температуры; уменьшение рассеяния результатов не может быть достигнуто повышением уровня точности отсчета по термометрам до $0,03^\circ$ — $0,05^\circ$. Более точное определение средней температуры можно получить увеличением инерционности термометров в 3—5 раз.

2. Отклонение отдельных измерений от средней температуры возрастает с неустойчивостью термической стратификации; так, например: при градиенте температуры $-0,8^\circ/\text{м}$ величина σ при 5—6 одновременных отсчетах равна $0,10^\circ\text{С}$ и при 9—10 отсчетах $0,06^\circ$.

3. Психрометрическая разность температур измеряется еще более точно, поскольку ΔT значительно больше разности показаний сухих термометров, установленных на высоте 0,5 и 1,5 м.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
✓ Г. Х. Цейтин. К вопросу об учете горизонтальной диффузии при трансформации воздушной массы	3
✓ Л. С. Гандин и Р. Э. Соловейчик. О периодическом ходе температуры при наличии адвекции	23
Д. Л. Лайхтман и Л. А. Ключникова. Влияние адвекции на интенсивность таяния снега	32
○ Л. А. Ключникова. К вопросу об образовании адвективных туманов	40
Д. Л. Лайхтман и Г. П. Орленко. Об интенсивности турбулентного обмена над водной поверхностью	51
А. В. Ткаченко. К вопросу об определении коэффициента турбулентной вязкости в пограничном слое атмосферы	53
✓ Л. Р. Орленко. К расчету суточного хода коротковолновой радиации в ясные дни	60
Г. Х. Цейтин. О вычислении коэффициента температуропроводности и потока тепла в почву по осредненным температурам	67
Н. В. Серова. Вычисление потоков тепла в почве в зимнее время	80
Н. В. Кучеров. О точности градиентных измерений температуры и влажности	86

Редактор *Л. А. Келарев.*

Техн. редактор *К. Ф. Шумихин.*

Корректор *З. И. Мироненко.*

Сдано в набор 7/VII 1956 г.
Бумага 70 × 108¹/₁₆.
Тираж 700 экз.

Бум. л. 2,88.
М-33717

Подписано к печати 8/IX 1956 г.
Печ. л. 7,90. Уч.-изд. л. 8,25.
Индекс МЛ-68.

Гидрометеорологическое издательство. Ленинград, В. О., 2-я линия, д. 23.
Заказ № 673. Цена 5 руб. 80 коп.

2-я типолитография Гидрометеоздата, Ленинград, Прачечный пер., д. 6.