

06
Т78

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

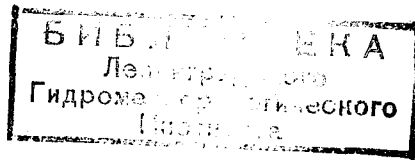
Т Р У Д Ы ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

имени А. И. Воейкова

ВЫПУСК 124

ВОПРОСЫ ДИНАМИЧЕСКОЙ МЕТЕОРОЛОГИИ
И ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ
КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук
М. Е. ШВЕЦА



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД · 1962

162742

АННОТАЦИЯ

Настоящий выпуск содержит статьи, посвященные вопросам численного метода прогноза погоды и объективного анализа метеорологических полей. Сборник рассчитан на научных работников по динамической и синоптической метеорологии.

МНУ С. ПЕТЕРБУРГСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
ИСТИНА В СВОБОДЕ

Л. С. ГАНДИН

ОБ ОПТИМАЛЬНОМ СОГЛАСОВАНИИ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Рассмотрен вопрос о согласовании полей различных метеорологических элементов друг с другом в процессе их объективного анализа. Предложен способ согласования полей, основанный на минимизации средней квадратической ошибки результата. Приведен пример согласования полей.

1. При объективном анализе метеорологических полей с помощью электронных вычислительных машин широко применяется согласование данных о различных метеорологических элементах или об одном и том же элементе, определенном различными способами. Так, например, данные измерений ветра используют для уточнения сведений о высотах изобарических поверхностей, данные прогноза того или иного элемента на рассматриваемый срок привлекают в дополнение к данным наблюдений и т. п.

Согласование полей является важным этапом объективного анализа. Дополнительная информация, привлекаемая при согласовании, позволяет получить согласованные поля, обладающие существенно большей точностью, чем каждое из исходных полей до их согласования. Согласованные поля, в отличие от исходных, удовлетворяют с должной степенью точности тем соотношениям между полями метеорологических элементов, которые должны выполняться в атмосфере. Кроме того, процесс согласования может способствовать выявлению, а затем и устранению ошибочных данных.

Предлагавшиеся до настоящего времени способы согласования метеорологических полей в процессе их объективного анализа являются формальными в том смысле, что правила, по которым производится согласование, никак не связаны со свойствами рассматриваемых полей. Естественно считать, что преимущества, получаемые в результате согласования полей, выявятся более полно, если, производя согласование, руководствоваться имеющимися сведениями о структуре рассматриваемых метеорологических полей.

В работах [1—3] был рассмотрен вопрос об определении значений какого-либо элемента в точках регулярной сетки с помощью оптимальной интерполяции, т. е. метода, основанного на минимизации среднего в вероятностном смысле квадрата ошибки интерполяции. Выяснено, что оптимальная интерполяция приводит к более точным результатам, чем применяемые в настоящее время формальные способы. Естественно поэтому и к вопросу о согласовании полей подойти с точки зрения мини-

мизации среднего квадрата ошибки. Этому и посвящена настоящая работа.

2. Пусть имеются поля двух метеорологических элементов Φ и Ψ и пусть сведения об этих двух полях известны с некоторыми ошибками, т. е. известны не величины Φ и Ψ , а величины

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \Phi + \delta_\varphi \\ \psi &= \Psi + \delta_\psi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

где δ_φ и δ_ψ — ошибки определения φ и ψ .

Пусть с заданным коэффициентом корреляции r выполняется простое соотношение

$$\Phi = \Psi \quad (2)$$

или вообще пусть наряду со статистическими характеристиками полей Φ и Ψ и их ошибок δ_φ и δ_ψ известны также характеристики статистической связи величины Φ и Ψ . Задача состоит в том, чтобы на основании этих данных определить «истинные» значения Φ и Ψ с наименьшей средней квадратической ошибкой.

Эта задача аналогична известной задаче фильтрации случайных последовательностей (см. например [4]) и может рассматриваться как некоторое ее обобщение. Именно в задаче о фильтрации речь идет об одной случайной последовательности, а не о двух. Уменьшение ошибок достигается при этом за счет привлечения данных при других значениях аргументов, т. е. в нашем случае значений метеорологического элемента в других точках. При согласовании полей также можно использовать данные в других точках, помимо рассматриваемой, и тогда переход от фильтрации к согласованию представляет собой вполне очевидное обобщение задачи. Весьма существенно, однако, что согласование в противоположность фильтрации можно производить и в простейшем «одноточечном» варианте, т. е. уточнять данные о φ и ψ только по их значениям в одной точке.

То обстоятельство, что мы рассматриваем только величины, между которыми выполняется обязательно корреляция типа равенства (2), а не какое-либо более общее соотношение, лишь слабо ограничивает общность постановки задачи. Действительно, если вместо (2) должно выполняться с заданной точностью общее соотношение

$$F(\Phi, \Psi) = 0, \quad (3)$$

то все равно получится условие типа (2), если только уравнение (3) есть уравнение с разделяющимися переменными, т. е. если оно может быть представлено в виде

$$F_1(\Phi) = F_2(\Psi). \quad (4)$$

Именно, тогда примем $F_1(\Phi)$ и $F_2(\Psi)$ за те два элемента, которые подлежат согласованию. В результате получим согласованные поля не элементов Φ и Ψ , а функций $F_1(\Phi)$ и $F_2(\Psi)$, а для того чтобы перейти к согласованным Φ и Ψ , надо еще только выполнить обращение функций F_1 и F_2 . В частности, если в F_1 и F_2 входят значения элементов в нескольких точках, то обращение их сведется к решению соответствующих разностных уравнений.

Лишь в случае когда переменные в соотношении (3) не разделяются, т. е. оно не может быть представлено в виде (4), задача согласования полей является более общей, чем сформулированная выше. Но такие

случаи при объективном анализе метеорологических полей не встречаются.

Заметим еще, что, поскольку сформулированная задача вполне симметрична относительно элементов Φ и Ψ , достаточно искать согласованные значения только одного из этих элементов, например Φ .

3. Рассмотрим сначала общий случай согласования полей по данным во многих точках. Пусть известны значения φ в n точках с индексами $i=1, 2, \dots, n$, а значения ψ в m точках с индексами $k=1, 2, \dots, m$, возможно совпадающих полностью или частично с предыдущими точками. Будем искать значение Φ в некоторой точке с индексом 0, которая может совпадать или не совпадать с какой-либо из перечисленных выше точек, в виде линейной комбинации

$$\Phi_0 = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i + \sum_{k=1}^m b_k \psi_k, \quad (5)$$

где веса a_i и b_k подчиним требованию, чтобы средний квадрат ошибки такого представления

$$E = \left[\Phi_0 - \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i + \sum_{k=1}^m b_k \psi_k \right) \right]^2 \quad (6)$$

был минимальным.

Выражение (6) можно переписать в виде

$$E = \Phi_0^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i \Phi_0 \varphi_i - 2 \sum_{k=1}^m b_k \Phi_0 \psi_k + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \varphi_i \varphi_j + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l \psi_k \psi_l + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_i b_k \varphi_i \psi_k$$

или на основании (1)

$$E = \Phi_0^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i \Phi_0 (\varphi_i + \delta_{\varphi i}) - 2 \sum_{k=1}^m b_k \Phi_0 (\psi_k + \delta_{\psi k}) + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j (\varphi_i + \delta_{\varphi i}) (\varphi_j + \delta_{\varphi j}) + \\ + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l (\psi_k + \delta_{\psi k}) (\psi_l + \delta_{\psi l}) + \\ + 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_i b_k (\varphi_i + \delta_{\varphi i}) (\psi_k + \delta_{\psi k}), \quad (7)$$

где, например, $\delta_{\varphi i}$ означает ошибку определения величины Φ_i , т. е. величины Φ в i -той точке.

Сделаем теперь ряд предположений о статистических характеристиках рассматриваемых полей и ошибок их определения. Ошибки будем считать случайными в том смысле, что они не коррелируют ни с истинными значениями элементов

$$\overline{\delta_{\varphi i} \Phi_j} = \overline{\delta_{\varphi i} \Psi_k} = \overline{\delta_{\psi k} \Phi_i} = \overline{\delta_{\psi k} \Psi_l} = 0, \quad (8)$$

ни между собой в различных точках:

$$\begin{aligned} \overline{\delta_{\varphi i} \delta_{\varphi j}} &= 0 & (i \neq j), \\ \overline{\delta_{\psi k} \delta_{\psi l}} &= 0 & (k \neq l), \end{aligned} \quad (9)$$

ни между собой для различных элементов

$$\overline{\delta_{\varphi i} \delta_{\psi k}} = 0. \quad (10)$$

В силу (8), (9) и (10) выражение (7) примет вид

$$\begin{aligned} E &= \overline{\Phi_0^2} - 2 \sum_{i=1}^n a_i \overline{\Phi_0 \Phi_i} - 2 \sum_{k=1}^m b_k \overline{\Phi_0 \Psi_k} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \overline{\Phi_i \Phi_j} + \sum_{i=1}^n a_i^2 \overline{\sigma_i^2} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l \overline{\Psi_k \Psi_l} + \sum_{k=1}^m b_k^2 \overline{\tau_k^2} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_i b_k \overline{\Phi_i \Psi_k}, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$\sigma_i^2 = \overline{\delta_{\varphi i}^2} \quad \text{и} \quad \tau_k^2 = \overline{\delta_{\psi k}^2}$$

представляют собой средние квадраты ошибок.

Относительно самих величин Φ и Ψ предположим, что средние значения их равны нулю. Практически это означает, что вместо самих значений элементов рассматриваются все время отклонения их от нормы. Тогда можно с большой степенью точности считать поля Φ и Ψ однородными и изотропными в отношении моментов второго порядка. При этом

$$\overline{\Phi_i^2} = \overline{\Phi_j^2} = \overline{\Phi^2}; \quad \overline{\Psi_k^2} = \overline{\Psi_l^2} = \overline{\Psi^2},$$

а средние произведения вида $\overline{\Phi_i \Phi_j}$, $\overline{\Phi_i \Psi_k}$ и $\overline{\Psi_k \Psi_l}$ зависят только от расстояний между соответствующими точками.

Соответственно этому введем безразмерные величины, а именно: нормированную автокорреляционную функцию для Φ

$$\mu_{ij} = \frac{\overline{\Phi_i \Phi_j}}{\overline{\Phi^2}}, \quad (12)$$

нормированную автокорреляционную функцию для Ψ

$$\nu_{kl} = \frac{\overline{\Psi_k \Psi_l}}{\overline{\Psi^2}}, \quad (13)$$

нормированную взаимно-корреляционную функцию

$$\rho_{ik} = \frac{\overline{\Phi_i \Psi_k}}{\sqrt{\overline{\Phi^2} \overline{\Psi^2}}}, \quad (14)$$

нормированные средние квадраты ошибок («меры ошибок») определения Φ и Ψ :

$$\eta_i = \frac{\sigma_i^2}{\overline{\Phi^2}}; \quad \zeta_k = \frac{\tau_k^2}{\overline{\Psi^2}}, \quad (15)$$

меру ошибки согласования

$$\varepsilon = \frac{E}{\Phi^2}, \quad (16)$$

отношение дисперсий Ψ и Φ

$$\lambda^2 = \frac{\overline{\Psi^2}}{\Phi^2}. \quad (17)$$

С помощью обозначений (12) — (17) перепишем формулу (11) в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon = 1 - 2 \sum_{i=1}^n a_i \nu_{0i} - 2\lambda \sum_{k=1}^m b_k \rho_{0k} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \nu_{ij} + \sum_{i=1}^n a_i^2 \eta_i + \\ + \lambda^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l \nu_{kl} + \lambda^2 \sum_{k=1}^m b_k^2 \zeta_k + \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_i b_k \rho_{ik}. \end{aligned} \quad (18)$$

Заметим, что некоторые из введенных предположений не являлись необходимыми, а были сделаны лишь на основании соображений об использовании полученных теоретических формул для согласования конкретных метеорологических полей.

Условия минимума ε по отношению к коэффициентам a_i и b_k приводят к системе $m + n$ линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \nu_{ij} a_j + \eta_i a_i + \lambda \sum_{k=1}^m \rho_{ik} b_k = \nu_{0i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n \rho_{ik} a_i + \lambda \sum_{l=1}^m \nu_{kl} b_l + \lambda \zeta_k b_k = \rho_{0k} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

с помощью которой выражение (18) может быть приведено к простому виду

$$\varepsilon = 1 - \sum_{i=1}^n a_i \nu_{0i} - \lambda \sum_{k=1}^m b_k \rho_{0k}. \quad (20)$$

4. Если статистические характеристики полей Φ и Ψ и ошибок, фигурирующие в системе (19), известны, то решение ее не представляет трудностей. После этого по формуле (20) можно оценить и меру ошибки согласованного значения Φ_0 . Само это значение определится по формуле (5).

Аналогичным образом согласованное значение Ψ_0 можно найти по формуле

$$\Psi_0 = \sum_{k=1}^m b_k' \psi_k + \sum_{i=1}^n a_i' \varphi_i, \quad (21)$$

где коэффициенты b_k' и a_k' определяются из системы уравнений

$$\left. \begin{aligned} \sum_{l=1}^m \nu_{kl} b_l' + \zeta_k b_k' + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n \rho_{ik} a_i' = \nu_{0k} \quad (k = 1, 2, \dots, m) \\ \sum_{k=1}^m \rho_{ik} b_k' + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^n \nu_{ij} a_j' + \frac{1}{\lambda} \eta_i a_i' = \nu_{0i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

а мера ошибки согласования (отнесенная к $\overline{\Psi^2}$) найдется по формуле

$$\varepsilon' = 1 - \sum_{k=1}^m b'_k \nu_{0k} - \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n a'_i \rho_{0i}. \quad (23)$$

Подчеркнем тот очевидный факт, что в результате согласования получаются два различных значения — Φ_0 и Ψ_0 . Исключение составляет лишь случай, когда φ и ψ представляют собой значения одного и того же элемента, но определенные различными способами. В этом случае, очевидно, $\lambda=1$ и, кроме того, корреляционные функции μ , ν и ρ совпадают друг с другом. Тогда и система (22) совпадает с системой (19), так что $\Psi_0 = \Phi_0$. Практически такой случай может встретиться, например, если строить два поля высоты изобарической поверхности — определенной по температуре из уравнения статики и найденной радиолокационным методом. Согласование измеренных и прогностических значений также может рассматриваться как согласование одних и тех же значений, но определенных различными путями. Если же, например, согласуются значения реальной и геострофической функций тока¹, в результате получим два поля — поле геострофической функции тока, согласованное со значениями реальной функции тока, и поле реальной функции тока, согласованное со значениями геострофической функции тока.

В связи со сказанным отметим еще следующее обстоятельство. Желая сравнить между собой два каких-либо элемента, обычно требуют, чтобы значения этих элементов были определены независимым образом. По таким независимым значениям определяют меры связи полей двух элементов, например среднюю квадратическую разность, коэффициент корреляции и т. п. Но такая процедура законна только в том идеальном случае, когда ошибки определения обоих элементов равны нулю. Наличие же этих ошибок существенно, и притом они систематически искажают результаты. В частности, если ошибки случайны, то расхождение между двумя элементами оказывается завышенным: средняя квадратическая разность получается больше ее действительного значения, а коэффициент корреляции — меньше. Желая же получить правильные результаты, необходимо сопоставлять между собой не независимо определенные, а согласованные значения двух элементов, которые лишь в минимальной мере искажены влиянием ошибок наблюдений.

5. Выведенные выше формулы позволяют производить при объективном анализе метеорологических полей согласование одновременно с интерполяцией их в узлы регулярной сетки. Однако практически объединять эти два процесса неудобно, по крайней мере в настоящее время. Действительно, взаимно-корреляционные функции метеорологических элементов изучены еще чрезвычайно слабо. Кроме того, использование формул типа (19) приводит хотя и к элементарным, но сравнительно громоздким выкладкам. Например, чтобы проинтерполировать отдельно элемент φ и элемент ψ , нужно решить две системы — порядков n и m . Система же (19) есть система порядка $n + m$, и решение ее займет существенно больше времени. Далее, если выполнять согласование после интерполяции в узлы регулярной сетки, то легче выявить ошибочные данные. Именно, сильное расхождение между согласованным и несогласованным значениями элемента в узле сетки может служить одним из признаков наличия ошибок в исходных данных. Наконец, особенно су-

¹ Под реальной функцией тока здесь понимается функция тока соленоидальной части реального ветра.

шественно то обстоятельство, что после выполнения оптимальной интерполяции полей в узлы регулярной сетки сравнительно точное согласование их может быть произведено весьма простым путем.

Для пояснения этого обстоятельства рассмотрим некоторые положения, относящиеся к теории оптимальной интерполяции. Формулы оптимальной интерполяции [1] могут быть получены как частный случай (5), (19) и (20) при $b_h = 0$. Оптимальная интерполяция выполняется по формуле

$$\Phi_0 = \sum_{i=1}^n p_i \varphi_i, \quad (24)$$

где коэффициенты p_i определяются из системы

$$\sum_{j=1}^n \nu_{ij} p_j + \eta_i p_i = \nu_{i0}, \quad (25)$$

а мера ошибки оптимальной интерполяции дается формулой

$$\varepsilon = 1 - \sum_{i=1}^n \nu_{i0} p_i. \quad (26)$$

Пусть имеется n точек (A), в которых есть данные наблюдений, m точек (B), в которых наблюдений нет, и точка C, в которой также нет наблюдений, и пусть мы выполнили оптимальную интерполяцию из всех точек (A) в каждую из точек (B). Покажем тогда, что

1) оптимальная интерполяция из точек (A + B) в точку C эквивалентна оптимальной интерполяции только из точек (A) и потому дает ту же самую ошибку;

2) ошибка оптимальной интерполяции из точек (B) в точку C больше (или по крайней мере не меньше) ошибки оптимальной интерполяции из точек (A) в точку C.

6. Для удобства доказательства этих положений введем обозначение

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} \nu_{ij} & \text{при } i \neq j \\ \nu_{ii} + \eta_i & \text{при } i = j \end{cases}$$

Тогда система (25) переписется в виде

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p_j = \alpha_{i0}. \quad (27)$$

Поэтому интерполяция из (A) в C будет осуществляться по формуле

$$\Phi_C = \sum_{i=1}^n p_i \varphi_i, \quad (28)$$

где p_i определяются из системы

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p_j = \alpha_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (29)$$

Аналогичным образом интерполяция из точек (А) в каждую из точек В осуществляется по формуле

$$\varphi_{n+k} = \sum_{i=1}^n p_{ik} \varphi_i \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (30)$$

где веса p_{ik} определяются из системы

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p_{jk} = \alpha_{i, n+k} \quad (i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, m). \quad (31)$$

Наконец, интерполяция из точек (А + В) в точку С осуществляется по формуле

$$\Phi_C = \sum_{i=1}^{n+m} p'_i \varphi_i, \quad (32)$$

где веса p'_i определяются из системы

$$\sum_{j=1}^{n+m} \alpha_{ij} p'_j = \alpha_{i0} \quad (i = 1, 2, \dots, n+m). \quad (33)$$

Подставляя (30) в последние m членов суммы (32), получим

$$\Phi_C = \sum_{i=1}^n \left(p'_i + \sum_{k=1}^m p'_{n+k} p_{ik} \right) \varphi_i. \quad (34)$$

Сопоставление (28) и (34) при учете произвольности величин φ_i показывает, что для эквивалентности обоих путей необходимо, чтобы выполнялось n равенств

$$p'_j + \sum_{k=1}^m p'_{n+k} p_{jk} = p_j \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (35)$$

Покажем, что приведенные равенства действительно выполняются. Для этого умножим левую часть (35) на α_{ij} ($i = 1, 2, \dots, n$) и просуммируем по j от 1 до n .

Преобразуя получающееся выражение на основании соотношений (29), (31) и (33), получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p'_j + \sum_{k=1}^m p'_{n+k} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p_{jk} &= \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p'_j + \sum_{k=1}^m \alpha_{i, n+k} p'_{n+k} \\ &= \sum_{j=1}^{n+m} \alpha_{ij} p'_j = \alpha_{i0} = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p_j. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \left(p'_j + \sum_{k=1}^m p'_{n+k} p_{jk} - p_j \right) = 0 \quad (36)$$

при всех i от 1 до n .

Определитель из первых n строчек и столбцов матрицы $\|\alpha_{ij}\|$ отличен от нуля, поскольку интерполяция из точек (А) осуществима, т. е. поскольку система (29) и системы (31) имеют решения. Поэтому из (36) вытекает (35). Тем самым первое положение доказано.

7. Перейдем к доказательству второго положения. Теперь, кроме интерполяции из (А) в С по (28) и (29) и интерполяции из (А) в (В) по (30) и (31), будем иметь дело с интерполяцией из (В) в С по формуле

$$\Phi_C = \sum_{k=1}^m p_k \varphi_{n+k} \quad (37)$$

или согласно (30)

$$\Phi_C = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m p_k p_{ik} \varphi_i. \quad (38)$$

Мера ошибки интерполяции по формуле (38) будет

$$\begin{aligned} \varepsilon'_C = \frac{1}{\Phi^2} \left(\Phi_C - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m p_k p_{ik} \varphi_i \right)^2 &= 1 - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_{i0} p_k p_{ik} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m p_k p_l p_{ik} p_{jl} \alpha_{ij}, \end{aligned}$$

а мера ошибки интерполяции по формуле (28) равна

$$\varepsilon_C = \frac{1}{\Phi^2} \left(\Phi_C - \sum_{i=1}^n p_i \varphi_i \right)^2 = 1 - 2 \sum_{i=1}^n \alpha_{i0} p_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p_i p_j.$$

Находя разность $\varepsilon'_C - \varepsilon_C$ и подставляя в нее α_{i0} из (29), получим

$$\begin{aligned} \varepsilon'_C - \varepsilon_C &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} p_i p_j - 2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \alpha_{ij} p_j p_k p_{ik} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m \alpha_{ij} p_k p_l p_{ik} p_{jl} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \left(p_i p_j - 2 p_j \sum_{k=1}^m p_k p_{ik} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m p_k p_l p_{ik} p_{jl} \right). \end{aligned}$$

В этой двойной сумме наряду с приведенным членом будет также член, получающийся в результате замены i на j и j на i . Так как матрица $\|\alpha_{ij}\|$ симметрична, то этот член может быть записан в виде

$$\alpha_{ij} \left(p_i p_j - 2 p_i \sum_{k=1}^m p_k p_{jk} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m p_k p_l p_{ik} p_{jl} \right).$$

Изменим теперь несколько порядок суммирования, а именно половину второго слагаемого (вычитаемого) выписанного общего члена суммы перенесем в симметричный ему член суммы, и наоборот. Тогда получим

$$\begin{aligned} \varepsilon'_C - \varepsilon_C &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \left(p_i p_j - p_i \sum_{k=1}^m p_k p_{jk} - \right. \\ &\left. - p_j \sum_{k=1}^m p_k p_{ik} + \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m p_k p_l p_{ik} p_{jl} \right) \end{aligned}$$

или

$$\varepsilon'_C - \varepsilon_C = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left(p_i - \sum_{k=1}^m p_k p_{ik} \right) \left(p_j - \sum_{k=1}^m p_k p_{jk} \right) \alpha_{ij}. \quad (39)$$

Но квадратичная форма

$$N = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \alpha_{ij}$$

является положительно определенной, т. е. она неотрицательна при любых h_i и равна нулю только в случае, когда все h_i равны нулю. Это вытекает из того факта, что величина N с точностью до существенно положительного множителя Φ^2 представляет собой средний квадрат линейной комбинации

$$\sum_{i=1}^n h_i \varphi_i.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \overline{\left(\sum_{i=1}^n h_i \varphi_i \right)^2} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \overline{\varphi_i \varphi_j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \overline{(\varphi_i + \delta_{\varphi_i})(\varphi_j + \delta_{\varphi_j})} = \\ &= \overline{\Phi^2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \alpha_{ij} + \sum_{i=1}^n h_i^2 \eta_i \right) = \overline{\Phi^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \alpha_{ij}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\varepsilon'_C \geq \varepsilon_C,$$

и второе положение также доказано.

8. Из доказанных положений вытекает ряд выводов относительно методики объективного анализа.

Многие авторы рекомендуют использовать при объективном анализе наряду с данными наблюдений также данные некоторых «фиктивных станций», полученные ранее путем интерполяции по фактическим данным. В частности, в качестве таких фиктивных станций часто используют (например, [5]) узлы регулярной сетки, в которые интерполяция уже выполнена. Из доказанного вытекает, что такая рекомендация несостоятельна — включение фиктивной станции никогда не приведет к улучшению результата интерполяции, а может привести лишь к его ухудшению.

Применительно к согласованию полей полученные результаты наводят на мысль, что, имея дело с полями, проинтерполированными в узлы регулярной сетки, можно без существенной потери точности ограничиться простейшим «одноточечным» согласованием, т. е. привлекать для получения согласованного значения Φ в некотором узле сетки лишь значения φ и ψ в том же узле.

Формулы для такого согласования получаются из общих формул, выведенных в п. 3, как простейший частный случай. Именно в этом случае

$$\Phi = a\varphi + b\psi, \quad (40)$$

где a и b находятся из системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (1 + \eta)a + \lambda rb &= 1 \\ ra + (1 + \zeta)\lambda b &= r \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

($r = \rho_{00}$ — коэффициент корреляции между Φ и Ψ), т. е.

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1 + \zeta - r^2}{(1 + \eta)(1 + \zeta) - r^2} \\ b &= \frac{1}{\lambda} \frac{r\eta}{(1 + \eta)(1 + \zeta) - r^2} \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

а мера ошибки согласования ε равна

$$\varepsilon = 1 - a - \lambda rb. \quad (43)$$

Формулы (42) и (43) весьма просты и позволяют легко выполнить согласование, если известны меры ошибок η и ζ , коэффициент корреляции r и отношение изменчивостей λ .

Проанализируем эти формулы.

Если φ определяется совершенно точно $\eta = 0$, то $b = 0$, $a = 1$ и $\varepsilon = 0$, т. е. в этом случае никакой необходимости в данных о ψ нет.

Вес данных о ψ при прочих равных условиях тем больше, чем больше ошибка определения φ и чем больше коэффициент корреляции r . Этот вес весьма просто связан с относительной изменчивостью второго элемента λ : произведение $b\lambda$ от λ не зависит. Не зависят от λ ни вес первых данных a , ни ошибка согласования ε , поскольку она содержит лишь произведение $b\lambda$.

Если $\zeta = 0$, $r = \pm 1$ и $\eta \neq 0$, то $a = 0$, т. е. данные о первом элементе не нужны, если второй элемент определяется совершенно точно и между Φ и Ψ имеет место точная линейная прямая или обратная связь. Соответственно этому вес первых данных тем больше, чем менее точно измеряется и менее точно коррелирует с ними второй элемент.

Если φ и ψ представляют собой значения одного и того же элемента, но определенные различными путями, то $r = \lambda = 1$ и формулы (42) и (43) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{\zeta}{\eta + \zeta + \eta\zeta} \\ b &= \frac{\eta}{\eta + \zeta + \eta\zeta} \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\varepsilon = \frac{\eta\zeta}{\eta + \zeta + \eta\zeta}. \quad (45)$$

Из формулы (45) видно, что согласование полей существенно уточняет результаты анализа. В частности, сколь бы велики ни были η и ζ , величина ε всегда меньше единицы. Впрочем, более реальным является случай, когда η и ζ малы. Тогда уменьшение квадрата ошибки происходит в отношении

$$\frac{\eta}{\varepsilon} \approx \frac{\eta + \zeta}{\zeta},$$

которое может неограниченно расти с ростом точности дополнительно привлекаемых данных.

9. Формулы (42) и (43) дают возможность производить согласование полей, если известны статистические характеристики истинных полей Φ и Ψ . Более доступны непосредственному определению характеристики измеренных полей φ и ψ . В рамках принятых нами предположений (8),

(9), (10) между характеристиками этих двух родов существуют простые соотношения.

Величина

$$\eta = \frac{\sigma^2}{\Phi^2}$$

есть мера ошибки φ по отношению к дисперсии истинного значения Φ . Аналогичная мера ошибки φ по отношению к дисперсии измеренных значений φ будет

$$\eta' = \frac{\sigma^2}{\varphi^2} = \frac{\sigma^2}{\Phi^2 + \sigma^2} = \frac{\eta}{1 + \eta},$$

откуда

$$\eta = \frac{\eta'}{1 - \eta'}. \quad (46)$$

Таким же образом

$$\zeta = \frac{\zeta'}{1 - \zeta'}. \quad (47)$$

Совершенно так же по аналогии с

$$\lambda = \sqrt{\frac{\Psi^2}{\Phi^2}}$$

введем величину, характеризующую отношение изменчивостей ψ и φ ,

$$\lambda' = \sqrt{\frac{\psi^2}{\varphi^2}} = \sqrt{\frac{\Psi^2 + \tau^2}{\Phi^2 + \sigma^2}},$$

т. е. такую, что

$$\lambda = \lambda' \sqrt{\frac{1 + \eta}{1 + \zeta}} = \lambda' \sqrt{\frac{1 - \zeta'}{1 - \eta'}}. \quad (48)$$

Наконец, коэффициент корреляции измеренных значений r' связан с коэффициентом корреляции истинных значений r соотношением

$$r = \frac{r'}{\sqrt{(1 - \eta')(1 - \zeta')}}. \quad (49)$$

Подставляя соотношения (46)–(49) в формулы (42) и (43), получим выражения:

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1 - \eta' - r'^2}{1 - r'^2} \\ b &= \frac{1 - \eta' r'}{\lambda' (1 - r'^2)} \\ \varepsilon &= \frac{\eta' (1 - \eta' - r'^2)}{(1 - \eta')(1 - r'^2)} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

по которым удобно производить вычисления, но анализ которых затруднен тем обстоятельством, что величины r' и λ' заключают в себе влияние ошибок наблюдения. Представляет интерес то обстоятельство, что формулы (50) не содержат меры ошибки ζ' , хотя результат согласования, конечно, зависит от точности, с которой известно значение φ .

10. Приведем пример согласования полей. На рис. 1 изображен участок поля суточных изаллогипс АТ₃₀₀ за период 3 часа 20/X—3 часа

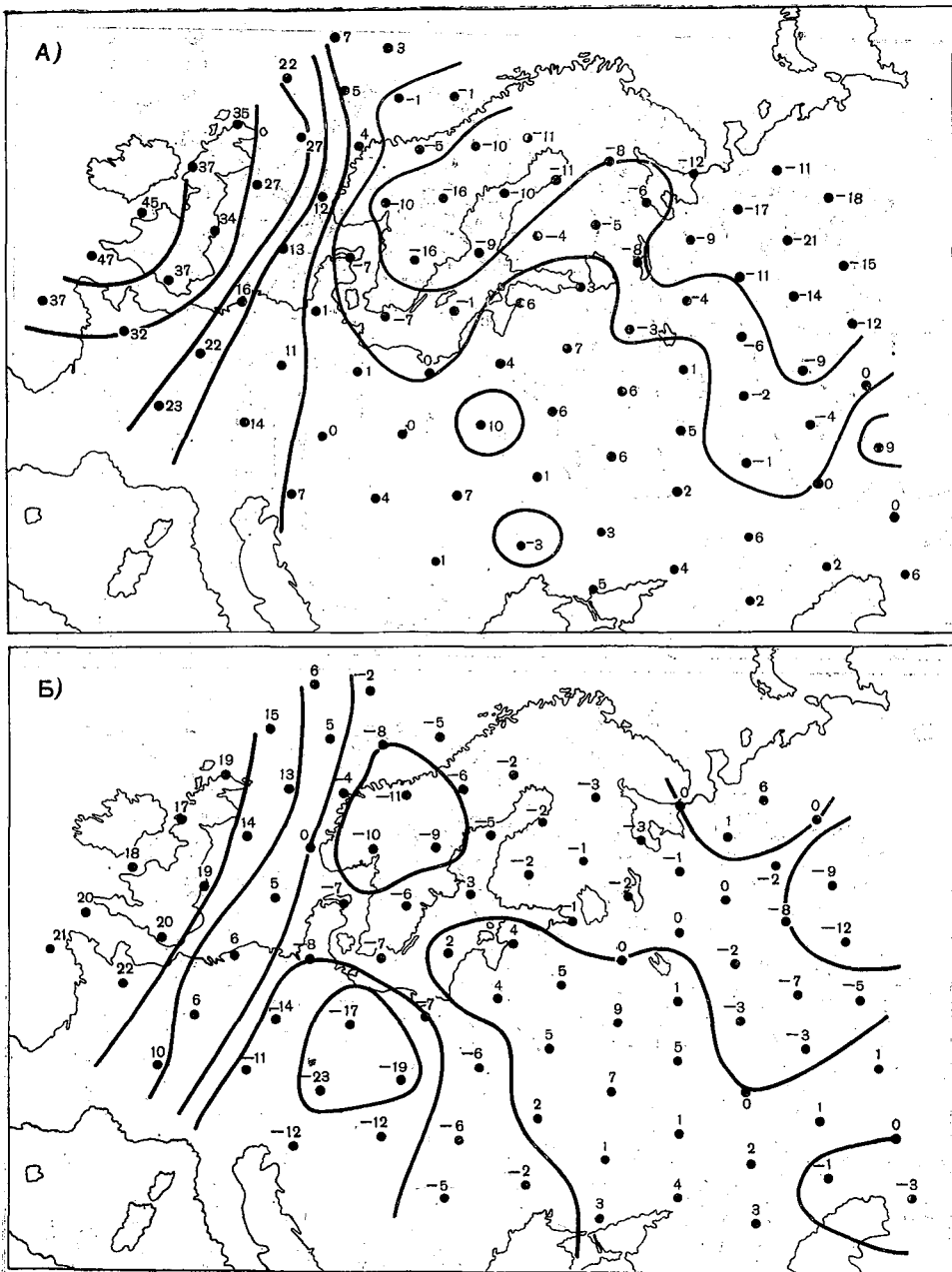


Рис. 1. Поле суточных изменений высоты поверхности 300 мб за период 3 часа 20/X по 3 часа 21/X 1959 г.

А — по данным наблюдений, Б — по данным численного прогноза.

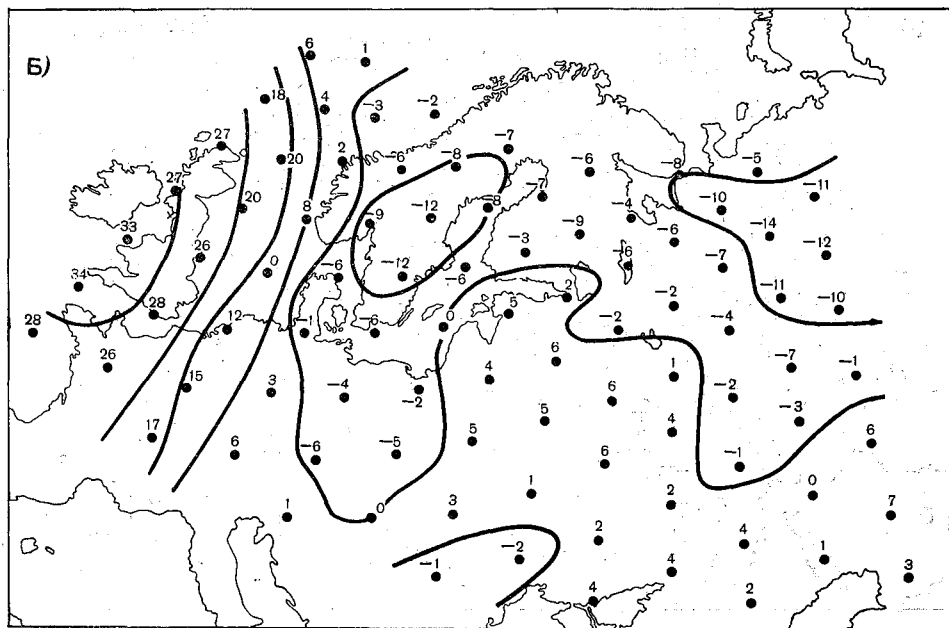
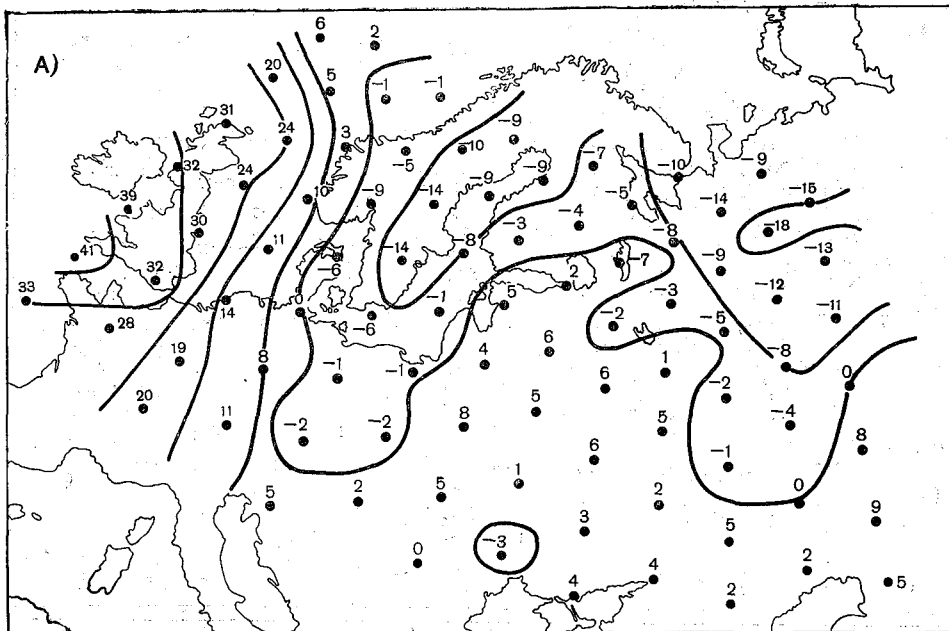


Рис. 2. Согласованные поля суточных изменений высоты 300 мб.
 А — при $a = 0,833$, $\sigma = 0,083$, Б — при $a = 0,625$, $\sigma = 0,250$.

21/X 1959 г., построенный по данным наблюдений (А) и по результатам прогноза (Б) путем имитации графического метода на вычислительной машине «Урал-1».

Как показано в работе [3], мера ошибки η анализа высоты поверхности 500 мб над хорошо освещенной территорией составляет около 0,04. Можно думать, что для поверхности 300 мб точность несколько ниже. Примем $\eta = 0,05$. Но мы имеем дело не с самой высотой, а с ее изменениями за сутки. Это скажется на значении η двояким путем. Так как суточные изменения получаются вычитанием из одного значения H_{300} другого, то квадрат абсолютной ошибки, а с ним и η нужно увеличить вдвое. Кроме того, нам нужна мера ошибки по отношению к дисперсии не самой высоты, а ее межсуточных изменений. Для поверхности 300 мб последняя составляет по ориентировочным оценкам около 70% первой. Поэтому нужно еще разделить η на 0,7. В результате получим $\eta = 0,14$.

Что касается меры ошибок прогностических изменений ζ , то, поскольку эти ошибки велики, можно с достаточной точностью принять ζ равным квадрату относительной ошибки прогноза, который составляет примерно от 0,5 до 1.

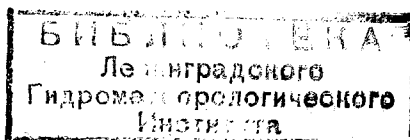
Соответственно сказанному, мы рассмотрели два крайних случая: случай наименьшего влияния прогностических значений ($\eta = 0,10$; $\zeta = 1,00$) и случай наибольшего их влияния ($\eta = 0,20$; $\zeta = 0,50$). Подсчеты по формулам (44) и (45) дали для первого случая $a = 0,833$, $b = 0,083$, $\varepsilon = 0,083$, а для второго $a = 0,625$, $b = 0,250$, $\varepsilon = 0,125$. Естественно, что во втором случае имело место значительно большее снижение ошибки в результате согласования (0,125 по сравнению с 0,200), чем в первом (0,083 по сравнению с 0,100). Поля, получившиеся в результате этих двух вариантов согласования, показаны на рис. 2.

Можно видеть, что различия полей наблюдаемых и прогностических изменений высоты заметно сказались на обоих согласованных полях. Как видно на рис. 1, основное различие между наблюдаемым и прогностическим полями состоит в наличии в юго-западном секторе района сильно выраженного прогностического ядра падения, не подтвердившегося данными наблюдений. Этот факт привел к тому, что на обоих согласованных полях (рис. 2 А и Б) язык отрицательных изменений H_{300} распространился дальше к югу по сравнению с рис. 1 а. Кроме того, вблизи западной границы района градиенты изаллогипс H_{300} получились в результате согласования с прогнозом существенно меньшими, чем по данным наблюдений. Имеются и другие, менее выраженные различия.

Вместе с тем сравнение рис. 2 А и Б показывает, что, несмотря на отличие значений в ряде точек, общая конфигурация изогипс в этих двух вариантах согласованного поля отличается весьма мало. Следовательно, изменяя параметры согласования в сравнительно широких, но разумных пределах, можно рассчитывать, что эти изменения мало повлияют на результат согласования.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г ан д и н Л. С. Об оптимальной интерполяции и экстраполяции метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 114, 1960.
2. Г ан д и н Л. С., Ф а т е е в А. В. Анализ точности различных методов интерполяции. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
3. Г ан д и н Л. С. Об объективном анализе метеорологических полей. Материалы совещания координационной комиссии по численным методам прогноза. 1961. Гидрометеоздат.
4. Я г л о м А. М. Введение в теорию стационарных случайных процессов. Успехи математических наук, т. 7, вып. 5 (51), 1952.
5. Gilchrist В., Cressman G. P. An experiment in objective analysis. Tellus, vol. 6, № 4, 1954.



ОБ ОПЕРАТИВНОЙ МЕТОДИКЕ РАСЧЕТНОГО АНАЛИЗА МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Рассмотрены основные вопросы построения оперативной методики расчетного анализа метеорологических полей с помощью вычислительных машин большого быстродействия.

1. За последние годы в Главной геофизической обсерватории выполнен ряд работ по проблеме объективного анализа метеорологических полей и вообще автоматизации работы прогностических центров. Во всех этих работах предлагаемые методы испытывались за неимением других возможностей с помощью вычислительной машины «Урал-1», обладающей небольшим быстродействием.

Совершенно ясно, что оперативное применение объективного анализа немыслимо при использовании такой машины, как «Урал-1». Например, автоматическое раскодирование и первичный контроль одной аэрологической телеграммы занимает на этой машине время порядка 5 мин., а на вычисление изолиний какого-нибудь элемента требуется несколько часов. Более того, некоторые этапы объективного анализа практически невозможно осуществить на этой машине в том виде, в каком это требуется в оперативной практике. В частности, интерполяция в узлы правой сетки по данным реальной, переменной сети станций должна занимать машинное время порядка суток и потому практически неосуществима не только в оперативном, но и в исследовательском плане.

Вместе с тем исследования, выполненные с помощью машины «Урал-1», позволяют в настоящее время разработать основы методики объективного анализа метеорологических полей при использовании вычислительных машин, обладающих достаточным быстродействием. Этому и посвящена настоящая статья.

2. Под объективным или расчетным анализом понимают обычно процедуру, следуя которой удается с помощью вычислительной машины получить значения метеорологических элементов в узлах регулярной сетки по их значениям на сети станций. Эту процедуру целесообразно рассматривать, однако, как часть более широкого алгоритма, предусматривающего полностью автоматическую обработку данных метеорологических сообщений, начиная с ввода их в машину и раскодирования и кончая построением диагностических и прогностических карт.

Если вычислительная машина используется для объективного анализа или численного прогноза, то явно нецелесообразно выполнять работу, предшествующую вычислениям и следующую за ними, вручную,

так как это в значительной мере обесценило бы выигрыш во времени и возможностях анализа и прогноза, который дает применение машины. Поэтому в дальнейшем рассматривается в той или иной мере вся совокупность этапов автоматического анализа метеорологических полей в широком смысле, как было сказано выше. При этом рассматривается только та работа, которая должна проводиться в прогностических центрах. Вопросы же автоматизации обработки сигналов радиозондов и вообще этапы, предшествующие передаче аэрологических сводок, выходят за рамки данной статьи.

При изучении указанного круга вопросов полезно учитывать то обстоятельство, что расчетный анализ может выполняться как в связи с численным прогнозом, так и независимо от него. Поскольку численному прогнозу поддаются в настоящее время поля далеко не всех метеорологических элементов и поскольку для потребностей практики важно иметь не только прогностические, но и диагностические поля, необходимо, чтобы результатами, выдаваемыми из машины, являлись, кроме прогностических полей некоторых элементов, и диагностические поля всех проанализированных элементов. Более того, по окончании анализа могут быть подсчитаны, а затем и выданы из машины диагностические поля вторичных метеорологических элементов, которые не определяются по данным над одним пунктом и потому не входят в аэрологические телеграммы. В качестве таких элементов могут фигурировать, например, вихрь, дивергенция, вертикальная скорость, притоки тепла, влаги и т. п.

Некоторые из этапов автоматической обработки данных могли бы выполняться с помощью небольших специализированных вычислительных машин. Однако, поскольку для основных этапов, таких, как численный прогноз, все равно необходима универсальная машина, экономически целесообразнее, вероятно, выполнять с помощью ее все этапы, которые могут быть на ней реализованы. Вместе с тем для выполнения некоторых этапов, а именно ввода данных и выдачи результатов, может потребоваться оснащение машины специальными приставками, если соответствующие устройства не входят в комплект данной машины.

Трудно представить себе, что для автоматизации работы крупного прогностического центра достаточно будет оснастить его одной универсальной вычислительной машиной. Во-первых, объем вычислений по мере расширения сферы приложения объективного анализа может превзойти возможности одной машины. Во-вторых, для обеспечения бесперебойной работы необходимо, чтобы вычисления производились параллельно на двух машинах.

3. Автоматическая работа крупного прогностического центра может быть представлена совокупностью следующих основных этапов:

- 1) ввод данных,
- 2) первичная обработка сообщений,
- 3) объективный анализ,
- 4) вычисление полей вторичных элементов,
- 5) вычисление диагностических изолиний,
- 6) выдача диагностических карт,
- 7) численный прогноз,
- 8) вычисление прогностических изолиний,
- 9) выдача прогностических карт.

Исходным материалом являются сигналы (импульсы) на линиях связи, представляющие собой определенным образом закодированные данные метеорологических сообщений с различных станций. Назначение первого этапа состоит в том, чтобы ввести эти данные в машину. Первичная обработка заключается в распознавании этих сообщений, их раско-

дировании и приведении к виду, в каком обычно хранятся числовые данные в запоминающих устройствах машины. Попутно в процессе первичной обработки производится (в той мере, в какой это возможно) выявление ошибочных данных, которые частично исправляются.

Целью следующего этапа — объективного анализа — является получение на основании хранящихся в машине результатов первичной обработки и других, дополнительных данных значений всех интересующих нас метеорологических элементов на соответствующих изобарических поверхностях в узлах заранее заданной регулярной сетки. Однако объективный анализ не сводится к простой интерполяции из пунктов наблюдения в узлы регулярной сетки. В процессе его производится также согласование метеорологических полей друг с другом и дополнительная проверка, имеющая своей целью выявление и исправление ошибочных данных.

Дальнейшее движение информации должно происходить по трем параллельным каналам. Во-первых, на основании результатов объективного анализа могут быть вычислены и выданы из машины карты изолиний полей проанализированных элементов. Во-вторых, те же результаты могут быть использованы для вычисления значений в узлах сетки вторичных элементов, зависящих от дифференциальных характеристик проанализированных полей. По полученным значениям этих вторичных элементов также могут быть вычислены и выданы карты изолиний. В-третьих, на основании результатов объективного анализа может быть выполнен численный прогноз ряда метеорологических полей. По прогностическим значениям элементов в узлах регулярной сетки можно вычислить и выдать из машины прогностические карты изолиний.

Весьма существенно, что при такой структуре алгоритма вычисления, связанные с построением карт, могут быть во всех трех вариантах выполнены по одной и той же программе, поскольку исходный материал для таких вычислений представляется в одной и той же форме — в виде значений в узлах используемой регулярной сетки.

Выполнение седьмого этапа — численного прогноза — зависит от применяемой прогностической модели, математической формы решения и других моментов, не связанных с общей методикой автоматической обработки данных. Для наших целей важно лишь, что исходные данные и результаты этого этапа представляют собой значения метеорологических элементов в узлах одной и той же регулярной сетки. То же относится и к четвертому этапу — вычислению полей вторичных элементов. Поэтому в дальнейшем рассматриваются все перечисленные выше этапы, за исключением указанных двух.

4. Характер ввода данных в машину определяется в значительной степени тем, как осуществляется передача и прием метеорологических сообщений. В настоящее время эти сообщения передаются по обычным каналам телеграфной и радиосвязи. Передача и прием производятся с помощью телетайпа и трансмиттера. Закодированный текст сообщений набивается вручную на бумажную перфоленгу, которую вводят в трансмиттер. Последний работает одновременно с принимающим телетайпом (для синхронизации служат специальные стартовые и стоповые импульсы). Передача и прием происходят сериями по семь импульсов — стартовый, пять смысловых и стоповый. Каждая серия соответствует одному элементарному действию печатающего устройства телетайпа. Соответственно различным комбинациям пяти токовых и бестоковых посылок возможны 32 таких действия. Каждое из этих 5-разрядных двоичных чисел преобразуется в действие печатающего устройства соответственно специальному коду, различному для телетайпов разных систем.

Результатом этих действий является печатный текст на бумаге. Кроме того, телетайп выдает также бумажную перфоленту, на которой в виде комбинаций пробивок фиксируются переданные комбинации импульсов.

Телетайп работает с приблизительно постоянной скоростью, которая лимитируется инерцией механических устройств телетайпа и трансмиттера и потому весьма невелика. В частности, она значительно ниже скорости ввода данных во все существующие электронные вычислительные машины. Эта скорость лишь в несколько раз превышает среднюю скорость работы квалифицированной машинистки.

В силу сказанного не представляется целесообразным вводить в машину информацию непосредственно по мере ее поступления. Необходимо хранить поступающие сообщения в той или иной форме с тем, чтобы в нужный момент ввести в машину сравнительно большое количество данных. Наиболее удобно хранить эту информацию на элементах внешней памяти машины — перфоленте или перфокартах.

Среди различных типов электронных вычислительных машин существуют такие, ввод в которые может осуществляться с обычной перфоленты телетайпа, например «IBM-704» в США, «Meteor» в Англии. Эти машины, очевидно, наиболее удобны для наших целей, так как не требуют никаких входных приставок.

Для других же машин можно сконструировать приставки, переводящие данные с перфоленты телетайпа в элементы внешней памяти. Применительно к машине «Урал-1» такая приставка построена А. П. Кутенко. Приставка работает в составе контрольно-считывающего устройства машины «Урал-1» в режиме реперфорации. Скорость работы ее равна скорости реперфорации, т. е. в несколько раз превосходит скорость реперфорации данных вручную.

Следует отметить, что способ передачи метеорологической информации по обычным каналам связи с помощью телетайпов и трансмиттеров уже сейчас является существенной преградой для оперативного анализа и прогноза погоды. В результате такого способа передачи информации она поступает в прогностические центры с запозданием на 4—6 час. по отношению к сроку наблюдений. По мере дальнейшего роста объема метеорологической информации возникает настоятельная необходимость в усовершенствовании способов ее передачи.

Можно думать, что к тому времени, когда повсеместно будет применяться автоматическая обработка сигналов радиозондов, станет возможным передавать результаты этой обработки не с «механической», а с «электронной» скоростью. При таких условиях окажется целесообразным вводить данные не во внешние запоминающие устройства вычислительных машин, а непосредственно в их оперативные накопители.

В настоящее время можно утверждать, что скорость ввода метеорологической информации в машину ограничивается не темпом работы входных устройств, а скоростью передачи этой информации по каналам связи.

5. Согласно сказанному, форма, в которой метеорологические сообщения вводятся непосредственно с перфоленты телетайпа в вычислительную машину, отличается от той формы, в которой обычно фигурируют в машине исходные данные для вычислений, следующим:

1) двоичные числа распределены по элементам запоминающего устройства не так, как этого требует код машины; например, на перфолентах машин «Урал-1» и БЭСМ осуществляется продольная развертка чисел, а на перфоленте телетайпа — поперечная;

2) двоичные числа представляют собой результат двукратного кодирования сообщений — соответственно метеорологическому коду и коду телетайпа;

3) среди этой информации имеется значительное количество излишней, не подлежащей обработке (например, сведения об особых точках вертикальных профилей, качественные признаки погоды и т. п.).

Следовательно, для того чтобы введенные данные можно было бы использовать для анализа метеорологических полей, над этими данными необходимо выполнить ряд операций, а именно:

1) перевести запись импульсов в форму, «привычную» для данной вычислительной машины;

2) распознать нужные для дальнейшего сообщения, отделить их от ненужных; найти начало каждого нужного сообщения;

3) раскодировать данные, содержащиеся в опознанных сообщениях, или ту часть их, которая потребуется для анализа;

4) заслать раскодированные данные в ячейки запоминающего устройства в форме, удобной для их последующего анализа.

Автоматическое выполнение этих действий с помощью вычислительной машины и представляет собой то, что мы назвали первичной обработкой сообщений. Попутно в процессе первичной обработки проводится контроль выполнимости уравнения статики с целью выявления и устранения грубых ошибок вычисления, кодирования и передачи высот изобарических поверхностей.

И. В. Рубцов [1] детально исследовал пути и возможности первичной обработки сообщений. В частности, им составлена программа первичной обработки с помощью машины «Урал-1» данных, введенных при помощи приставки Кутенко. Программа Рубцова применима при ряде ограничений. Опознаются только данные, закодированные отечественным кодом. Раскодируются сообщения о высоте, температуре, влажности (точка росы) и ветре на главных изобарических поверхностях. Постулируется определенное взаимно однозначное соответствие между пробивками на перфоленте телетайпа и текстом сообщения.

Последнее условие требует пояснения.

Известно, что, печатая на машинке и будучи связанными заданием воспроизвести вполне определенный текст, мы все же имеем некоторую степень произвола. Желая, например, перейти к следующей строке, можно либо сначала вернуть каретку в первоначальное положение, а затем произвести «пережат», либо выполнить эти операции в обратном порядке: Это различие не будет видно в тексте. Можно перед переходом к следующей строке сделать несколько «пробелов» — пропусков букв; они также не будут видны. Можно в любом месте текста поднять каретку (на обычных машинках это соответствует переходу от строчных букв к заглавным) и сразу же опустить — это также не будет видно по тексту.

Наряду с этими «невидимыми» возможны и «видимые» модификации, не влияющие на содержание печатного текста, такие, как печатание строк через один или несколько пережатов, пропуск одного или нескольких знаков между словами и т. п.

Так же обстоит дело и с телетайпом. Поскольку на перфоленте фиксируются все сигналы, не только печатающие, но и управляющие, то между записью на перфоленте и текстом нет взаимно однозначной связи. Однозначность сохраняется только в одном направлении — от перфоленты к тексту, а в противоположном направлении имеет место определенный произвол. В принципе можно было учесть наличие произвола в программе первичной обработки сообщений, однако это привело бы

к сильному увеличению и без того громоздкой программы. Во избежание этого была постулирована однозначная связь между текстом и записью на перфоленте. Следует заметить, что весьма целесообразно было бы ввести такую регламентацию на линиях передачи. Она была бы полезной для автоматической обработки любых сообщений по каналам связи, а не только метеорологических.

Программа Рубцова оказалась весьма громоздкой и заняла почти всю оперативную память машины и часть внешнего накопителя.

Эта громоздкость обусловлена не существом задачи, а структурой существующего кода. Вопрос о кардинальном усовершенствовании метеорологических кодов давно назрел и должен в ближайшее время явиться темой специального исследования. Но даже при существующем коде, несмотря на громоздкость программы, расчет времени показывает, что первичная обработка может выполняться оперативно за достаточно малое время.

Действительно, обработка сообщения одной аэрологической станции с помощью машины «Урал-1» требует около 5 мин. машинного времени. В настоящее время по всему земному шару передают сообщения около 1000 аэрологических станций. Предположим, что к моменту перехода к автоматической обработке это число увеличится вдвое, и выполним пересчет времени для машины, которая выполняет каждую операцию примерно в 200 раз быстрее, чем «Урал-1», и требует в силу трехадресности команд примерно вдвое меньше операций, чем одноадресная машина «Урал-1». Тогда получим, что последовательная обработка всех 2000 сообщений потребует около 25 мин. машинного времени. Отказ от однозначности связи между перфолентой и текстом и включение иностранных кодов могут увеличить это время не более чем в 2—3 раза.

Разумеется, путем усовершенствования кода машинное время на первичную обработку сообщений может быть весьма значительно снижено.

6. Этап объективного анализа в свою очередь складывается из трех основных процессов — интерполяции в узлы регулярной сетки, согласования полей и контроля и устранения ошибок. Рассмотрим каждый из этих процессов.

При разработке методики интерполяции прежде всего возникает вопрос, в каких пунктах нужно использовать данные при интерполяции в заданную точку регулярной сетки.

В принятых в настоящее время способах интерполяции ограничиваются определенной окрестностью каждого узла сетки. При этом, однако, получаются невыгодные условия для тех районов, где точность интерполяции и без того низка, т. е. где сеть станций редкая. Действительно, в районах с редкой сетью весьма ценны данные станций, даже сравнительно далеко отстоящих от некоторого узла сетки, в то время как в районах с густой сетью такие данные не нужны, так как они практически ничего не добавляют к информации, которую можно получить по данным более близких станций. Поэтому мы считаем более правильным фиксировать не размеры окрестности каждого узла, а количество ближайших станций, данные которых подлежат использованию. При этом важно обеспечить, чтобы «влияющие» станции располагались приблизительно равномерно вокруг узла сетки.

Каким следует выбрать количество влияющих пунктов? Теоретически рассуждая, можно производить интерполяцию таким образом, чтобы включение данных каждого дополнительного влияющего пункта во всяком случае не ухудшило бы (в среднем) результат. Однако сведения о связях значений элемента в различных точках, на которых мы

основываем интерполяцию, неизбежно являются приближенными. Поэтому включение слишком большого числа влияющих пунктов может привести к росту влияния фиктивных связей и ухудшить результат. Возможно, что на основании приведенных соображений удастся количественно сформулировать задачу об оптимальном выборе числа влияющих станций, однако в настоящее время пути постановки и тем более решения такой задачи недостаточно ясны. Поэтому разумным путем являются численные эксперименты, т. е. сравнение результатов, полученных при интерполяции в один и тот же узел по различному числу исходных данных. Предварительные расчеты показывают, в частности, что применительно к анализу высоты поверхности 500 мб целесообразно использовать 7—8 влияющих станций для каждого узла сетки. Для ветра на том же уровне предпочтительнее использовать только 5—6 влияющих станций, поскольку сведения о структуре ветра являются более приближенными.

В работе [2] было произведено теоретическое и эмпирическое сопоставление различных методов интерполяции. Было выяснено, что при редкой сети станций наилучшие результаты дает так называемая оптимальная интерполяция [3]. При густой сети преимущество оптимальной интерполяции минимально и более целесообразно пользоваться интерполяционными весами, зависящими только от расстояния между станцией и узлом сетки [4]. Этот способ значительно проще, чем оптимальная интерполяция и, кроме того, именно в случае густой сети станций возможны осложнения с применением оптимальной интерполяции, связанные с малостью определителя системы уравнений для нахождения интерполяционных весов.

Таким образом, интерполяцию целесообразно производить различными способами при густой и редкой сети станций. В качестве критерия густоты сети станций может быть использовано требование, чтобы все расстояния от рассматриваемого узла регулярной сетки до выбранных влияющих станций не превышали некоторой заранее заданной величины. В частности, применительно к высоте поверхности 500 мб в качестве такого граничного расстояния целесообразно брать примерно 600—800 км.

При густой сети интерполяции подвергаются непосредственно наблюдаемые значения. Интерполяционные веса зависят только от расстояний между влияющими станциями и узлом сетки. Эта зависимость может быть задана либо аппроксимационной формулой [4], либо таблицей значений, между которыми допустима линейная интерполяция. После нахождения весов их необходимо еще нормировать, т. е. разделить на сумму всех весов.

При редкой сети интерполяции подвергаются отклонения метеорологического элемента от нормы. Поэтому до выполнения интерполяции нужно из найденных значений на влияющих станциях вычесть величины норм, а после выполнения интерполяции необходимо к результату ее добавить значение нормы в узле сетки.

Интерполяционные веса в случае редкой сети не нормируются. Они получаются решением системы алгебраических линейных уравнений, порядок которой совпадает с количеством влияющих станций [3]. Коэффициенты этой системы зависят от меры случайных ошибок наблюдений и от расстояний между каждой парой используемых точек (включая и влияющие станции и узел сетки). Эта зависимость также может быть задана в виде формулы либо таблично.

Итак, можно рекомендовать следующую последовательность вычислений, связанных с интерполяцией:

- 1) выбор влияющих станций для данного узла регулярной сетки;
- 2) определение расстояний между узлом сетки и каждой из влияющих станций;
- 3) сравнение каждого из этих расстояний с заданным граничным расстоянием.

Далее возможны два варианта.

- А) Если все расстояния, найденные в п. 3, меньше граничного:
 - 4) вычисление ненормированных весов;
 - 5) нормировка весов;
 - 6) выполнение интерполяции.
- Б) Если хоть одно из расстояний, найденных в п. 3, превосходит граничное:
 - 4) вычисление расстояний между всеми влияющими станциями;
 - 5) составление системы уравнений для определения интерполяционных весов и ее решение;
 - 6) вычитание норм из значений элемента на влияющих станциях;
 - 7) выполнение интерполяции;
 - 8) добавление нормы в узле сетки к результату интерполяции.

Помимо основного результата интерполяции — значений анализируемого элемента в узлах регулярной сетки, весьма полезно знать вероятные ошибки этих значений. Ошибка интерполяции при редкой сети станций может быть после определения весов оценена по простой формуле, вытекающей из теории оптимальной интерполяции и не зависящей от наблюдаемых значений элемента [3]. Что касается густой сети, то и в этом случае может быть выполнена такая оценка, но соответствующая формула несколько сложнее и в нее входят расстояния не только от влияющих станций до узла сетки, но и между станциями. Поэтому если в процессе интерполяции оценивать также ее точность, то следует несколько изменить последовательность вычислений. Именно п. Б 4 нужно тогда перенести на более ранний этап; удобно, в частности, включить его во второй этап, т. е. сразу определять все расстояния. Кроме того, в пп. А 5 и Б 5 следует включить также оценки ошибок интерполяции.

Заметим еще, что ради единообразия можно в обоих вариантах интерполировать отклонения от норм, поскольку в случае густой сети существенно, интерполировать ли эти отклонения или сами величины.

Расчеты, выполненные в Центральном институте прогнозов в связи с реализацией данной методики интерполяции на вычислительной машине большого быстродействия, показали, что интерполяция одного поля высот на территории, охватываемой обычной синоптической картой, требует примерно 10—20 мин. машинного времени. В настоящее время этого вполне достаточно. В дальнейшем по мере расширения территории, для которой выполняется анализ, и увеличения числа анализируемых полей может встретиться необходимость использовать несколько вычислительных машин для одновременного выполнения анализа нескольких полей. Однако в ближайшее время такая потребность вряд ли возникнет.

7. После выполнения интерполяции или в процессе ее должно быть произведено согласование полей. Под согласованием мы понимаем такое изменение полей, в результате которого поля различных элементов оказываются связанными между собой соотношениями, которые вычисляются в реальной атмосфере с той же примерно точностью, с какой реально выполняются эти соотношения. Согласование необходимо, поскольку вследствие влияния ошибок наблюдений и интерполяции поля, полученные в результате интерполяции, не окажутся, вообще говоря,

согласованными в должной мере. Если использовать несогласованные поля, например, в качестве начальных для численного прогноза, то в начальный момент не будут выполняться те соотношения, которые берутся в основу предвычисления. В результате могут возникнуть некоторые фиктивные начальные возмущения, которые приведут к искажению прогноза. Подобные же осложнения могут произойти и при использовании несогласованных полей для анализа и прогноза погоды качественными методами синоптики.

Согласование полей весьма важно и в другом отношении, в особенности для районов с редкой сетью. Поскольку при согласовании какого-либо поля с другим используется информация об обоих этих полях, точность согласованного поля может существенно превышать точность исходных полей.

Вопросы согласования метеорологических полей были рассмотрены в работе [5]. В ней показано, что достаточно удовлетворительные результаты должен давать весьма простой «одноточечный» способ согласования, требующий для своей реализации ничтожно малого (по сравнению с интерполяцией) машинного времени.

Для объективного анализа наибольшее значение имеют два рода согласования — согласование полей высот и ветра на каждой изобарической поверхности и согласование диагностических и прогностических полей.

Согласование полей высот (давления) и ветра обычно производят на основе требования, чтобы выполнялись геострофические соотношения. Как заметил М. И. Юдин, такое требование явно нелогично, если при численном прогнозе использовать негеострофическую модель. Однако попытки основываться на более сложных соотношениях типа общего уравнения дивергенции приводят к чрезмерно громоздким построениям. По-видимому, целесообразно пользоваться все же геострофическими соотношениями, требуя, однако, чтобы ветер не равнялся геострофическому, а лишь коррелировал с ним в заданной мере. Тогда получим не одно, а два поля — поле реального ветра, приспособленного к геострофическому, и поле геострофического ветра, приспособленного к реальному.

Уточненное поле реального ветра можно получить весьма просто. Именно нужно вычислить, пользуясь конечно-разностным приближением, значения геострофического ветра в узлах регулярной сетки и затем по формулам работы [5] получить поле реального ветра, согласованное с полученными данными о геострофическом ветре.

Несколько сложнее обстоит дело с нахождением поля высот, согласованного с данными о реальном ветре. В частности, если построить поле геострофического ветра, согласованное с данными о реальном ветре, то такое поле не будет, вообще говоря, соленоидальным, и ему не будет соответствовать никакое поле высот. Во избежание этого можно предложить следующий путь. Сначала по полю ветра определяем вихрь скорости, затем путем решения конечно-разностного уравнения Пуассона находим функцию тока. После этого требуется лишь согласовать имеющиеся поле высот с данными о функции тока.

Для того чтобы решить уравнение Пуассона для определения функции тока, необходимо задать граничные условия. Приблизительно можно принять на границе рассматриваемой территории функцию тока равной геострофической. Если стремиться к большей точности, то можно взамен этого потребовать на границе равенства ветра реальному его значению, что эквивалентно заданию нормальной производной от функции тока. Тогда решение получится с точностью до произвольной константы, кото-

рую можно определить, например, требуя, чтобы средние вдоль границы значения искомой и геострофической функции тока совпадали друг с другом.

Результаты применения описанной методики зависят от ряда моментов, а именно от структуры и шага регулярной сетки, от вида конечно-разностных формул для производных и оператора Лапласа, от метода решения уравнения Пуассона и, наконец, от значений мер ошибок согласовываемых величин и коэффициента корреляции между ними. Вопрос о рациональном выборе всех этих деталей подлежит специальному изучению. Заметим также, что данная методика применима лишь для свободной атмосферы. При согласовании же давления и ветра у земли необходимо учитывать наличие систематических отклонений ветра от геострофического благодаря приземному трению и орографии.

Согласование полей высот и ветра играет важную роль повсюду, независимо от густоты сети станций. В работе [4] показано, что поле высот, полученное без учета данных о ветре, может быть лишено некоторых существенных мелкомасштабных особенностей. В противоположность этому согласование фактических и прогностических полей существенно главным образом в районах с редкой сетью станций. Например, если в течение срока прогноза барические образования перемещались с хорошо освещенной данными наблюдений территории на плохо освещенную, то результаты прогноза для последней могут заслуживать даже большего доверия, чем значения, проинтерполированные по данным редкой сети станций.

Согласование фактических и прогностических полей может производиться еще проще, чем согласование высот и ветра. В работе [5] приведен пример такого согласования. На этом примере видно, что согласованное поле мало меняется с изменением в разумных пределах принимаемых значений ошибок исходных полей.

8. Весьма важной частью автоматической обработки метеорологических сообщений является обнаружение и исключение грубых ошибок в метеорологических данных. Эта часть процедуры разработана еще в недостаточной мере.

Из общего числа ошибок, обусловленных различными причинами, в принципе весьма просто могут быть исключены ошибки, возникающие на линиях связи. Для этого достаточно применить широко распространенный в практике оперирования на вычислительных машинах метод контрольного суммирования. Именно после определенного заранее количества знаков сообщения должен каждый раз передаваться результат их формального суммирования, понимаемого в том или ином заранее обусловленном смысле. После получения сообщения это контрольное суммирование выполняется в прогностическом центре. Если результат не сходится с переданным, то соответствующий участок сообщения бракуется.

К сожалению, эта простая процедура не предусмотрена существующими кодами, вследствие чего многие искажения сообщений на линиях связи в настоящее время трудно обнаружить. В дальнейшем при усовершенствовании кодов совершенно необходимо предусмотреть в них контрольное суммирование.

Для того чтобы контроль данных на наличие в них ошибок был достаточно полным, необходимо производить его несколько раз на различных этапах автоматической обработки данных.

После первичной обработки данных может выполняться и первичный, «вертикальный» контроль их. Именно на основании уравнения статики толщины главных изобарических слоев должны быть пропорциональны

их средним температурам. Среднюю температуру слоя можно с погрешностью тем меньшей, чем тоньше слой, заменить средним арифметическим из значений температуры на границах слоя. Таким образом, между разностью высот двух соседних главных изобарических поверхностей и суммой температур на них должно выполняться определенное соотношение. Если погрешность в выполнении этого соотношения превышает величину, которая может быть объяснена нелинейностью профиля температуры, то по крайней мере одна из четырех фигурирующих в нем величин (двух высот и двух температур) неверна.

И. В. Рубцов [1] составил программу такого первичного контроля с помощью машины «Урал-1». Ему удалось предусмотреть в некоторых случаях не только выявление, но и исправление ошибочных данных. В остальных же случаях сомнительность данных фиксировалась с помощью специального индекса, с тем чтобы на дальнейших этапах анализа можно было выяснить, какие именно из данных ошибочны.

Первичный контроль позволяет выявить наличие ошибок вычисления высот, а также ошибок кодирования, передачи и приема данных о высоте и температуре. Ошибочность наблюдений таким способом выявлена быть не может. Поэтому важным средством выявления ошибочных данных является «горизонтальный» контроль, т. е. сравнение значений элемента на соседних станциях с целью выявления «выскакивающих» значений. Весьма эффективным средством контроля может служить выполнение интерполяции на данную станцию с окружающих. Эта интерполяция может выполняться совершенно так же, как для получения значений в узлах регулярной сетки. Критерием ошибочности данных на станции является расхождение между ними и результатом интерполяции на эту станцию по данным других станций. Допустимое расхождение зависит от вероятной ошибки интерполяции и может быть принято пропорциональным ему. Если расхождение превышает допустимое, то данные на такой станции можно либо забраковать, либо заменить результатом интерполяции.

Заметим, что программа контроля на основе данного подхода будет мало отличаться от программы интерполяции в узлы регулярной сетки, что, разумеется, весьма удобно.

Наконец, еще одна возможность контроля ошибок возникает при согласовании полей. Большие расхождения между согласовываемыми элементами могут рассматриваться как один из признаков наличия ошибок в исходных данных.

Все сказанное о методах выявления и устранения ошибочных данных может рассматриваться лишь как предварительные соображения, поскольку детальных исследований различных способов устранения ошибок до настоящего времени не производилось.

9. Заключительным этапом автоматической работы прогностического центра является построение карт с помощью электронной вычислительной машины. Эти карты могут быть трех родов — диагностические, прогностические и карты вторичных элементов. Исходный материал для таких карт получается в машине в одном и том же виде — в форме значений подлежащих картированию элементов в узлах регулярной сетки. Поэтому методика и программа построения изолиний может быть одинакова для всех трех родов карт.

Вопросы расчета координат точек изолиний были детально рассмотрены в статье [6]. После написания этой статьи была опубликована работа Виппермана [7], посвященная тому же вопросу. Методика расчета изолиний, предложенная Випперманом, является весьма произвольной и приводящей к недостаточно точным результатам. Приходится поэтому

признать, что до настоящего времени не имеется более совершенных методов расчета изолиний, чем те, которые были предложены в работе [6].

Как указано в этой работе, время, необходимое для расчета одного поля изолиний с помощью машины с производительностью 20 тыс. операций в секунду, будет составлять около минуты. Во всяком случае это время мало по сравнению с тем временем, которое потребуется для объективного анализа, и особенно для численного прогноза.

Н. Я. Самойлов исследовал вопрос о путях вывода результатов расчета изолиний из машины. Им разработана и построена специальная электронная приставка к вычислительной машине, на экранах которой выдаются точки изолиний. Приставка сконструирована применительно к вычислительной машине «Урал-1», однако в результате небольших конструктивных изменений она может быть приспособлена практически к любой вычислительной машине.

Таким образом, выполненные исследования позволяют в настоящее время подойти к автоматизации работы крупных прогностических центров на основе использования современных быстродействующих электронных вычислительных машин.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рубцов И. В. Автоматическая подготовка исходных данных для численного анализа и прогноза погоды (см. настоящий сб.).
2. Г ан д и н Л. С., Ф а т е е в А. В. Анализ точности различных методов интерполяции, Труды ГГО, вып. 121, 1961.
3. Г ан д и н Л. С. Об оптимальной интерполяции и экстраполяции метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 114, 1960.
4. Г ан д и н Л. С. Об объективном анализе метеорологических полей. Труды координационной комиссии по численным методам прогноза. 1961.
5. Г ан д и н Л. С. Об оптимальном согласовании метеорологических полей (см. настоящий сб.).
6. Г ан д и н Л. С., Болтенков В. П. О построении карт с помощью электронной вычислительной машины. Труды ГГО, вып. 114, 1960.
7. W i r p e r m a n n F. Kartenmäßige Darstellung atmosphärischer Felder auf dem Schirm einer Kathodenstrahlröhre. Tellus, 11, № 2, 1959.

АВТОМАТИЧЕСКАЯ ПОДГОТОВКА ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО АНАЛИЗА И ПРОГНОЗА ПОГОДЫ

Рассмотрен вопрос о возможностях автоматического раскодирования и первичного контроля аэрологических сообщений с помощью универсальной машины «Урал-1». Приведен пример.

Развитие вычислительной техники позволяет уже сейчас применять электронные вычислительные машины в различных метеорологических целях. В частности, вычислительные машины успешно используются для прогноза полей некоторых метеорологических элементов; ведутся работы по использованию вычислительных машин для анализа и построения карт и для других целей.

Следует, однако, указать, что подготовка исходных данных, на основании которых производится решение подобных задач с помощью вычислительных машин, осуществляется до настоящего времени вручную. Эта подготовка чрезвычайно трудоемка. Время, затрачиваемое на нее во много раз превосходит машинное время, необходимое для решения задачи, и тем самым существенно уменьшается эффективность использования электронной вычислительной машины и возможности численных методов. Так, например, по данным Биркмана и Любимова [2], из 2 час. 12 мин., затрачиваемых на различные операции при численном прогнозе по баротропной схеме, непосредственно на прогноз, осуществляемый машиной «Стрела», с двойным просчетом было затрачено всего 7 мин. Около 1,5 часа оставшегося времени расходовалось на ручную подготовку исходных данных: раскодирование и нанесение принятых аэрологических данных на карты; проведение изогипс и снятие исходных данных в узлах правильной сетки; перфорация или набивка этих данных на перфокарты и проверка перфокарт.

Наметившееся за последние годы развитие расчетных методов анализа карт [1] или так называемого объективного анализа позволяет исключить из ручной подготовки исходных данных такие трудоемкие операции, как нанеска принятых данных на карты, проведение изолиний, контроль и исправление ошибок, интерполяция и снятие исходных данных в точках правильной сетки.

Однако и при осуществлении машинного объективного анализа оставшиеся ручные операции (раскодирование и особенно перфорация вводимых в вычислительную машину данных) существенно увеличивают общее время решения задачи и требуют от исполнителя большого внимания. Опыт показал, что, несмотря на тщательность ручной перфорации исходного материала, очень часто при этом вносятся дополнительные случайные ошибки, неизбежно сказывающиеся на результатах анализа и прогноза. С целью полной автоматизации процессов анализа и прог-

ноза возникла необходимость в осуществлении автоматической подготовки исходных данных, которая исключала бы всякие ручные операции.

По сведениям зарубежной печати, автоматическая подготовка исходных данных в комплексе с объективным анализом и численным прогнозом осуществляется в Америке с 1957 г. Эти сведения недостаточны полны, чтобы составить точное представление о принципах, положенных в основу автоматической подготовки.

В СССР заметный интерес к проблеме автоматической подготовки исходных данных начал проявляться лишь с 1959 г. Насколько нам известно, до сих пор эта проблема находится в стадии решения и опубликованных работ по ней в отечественной литературе нет.

В настоящей статье будут изложены некоторые результаты нашей работы, цель которой состояла в исследовании возможности автоматической подготовки исходных данных при помощи универсальной вычислительной машины.

На основании анализа существующей системы кодирования и передачи аэрологических сводок при помощи телетайпа нами была разработана соответствующая методика автоматической подготовки исходных данных к объективному анализу и прогнозу. Эта методика предусматривает автоматический ввод обрабатываемой информации непосредственно с бумажной ленты телетайпа, на которую, как известно, может производиться прием текста метеорологических сводок. Известно также, что цифры и буквы текста, принятого на бумажную перфоленту, воспроизводятся на ней в виде пятипозиционных комбинаций пробивок (согласно коду телетайпа). Кроме букв и цифр, на этой ленте фиксируются так называемые управляющие сигналы, при помощи которых достигается формирование печатного текста. К ним относятся сигналы: пробел печати, перевод строки, возврат каретки и др.

Предлагаемая методика предусматривает поиск, распознавание и раскодирование аэрологических телеграмм, а также контроль и исправление некоторых грубых случайных ошибок.

Укажем на то, что комбинации пробивок, выражающие собой каждый из знаков обрабатываемого текста, могут быть представлены в запоминающих устройствах машины вполне определенными двоичными числами. Методика автоматической подготовки, в частности первые ее этапы, основана на анализе каждого знака текста телеграмм. Для этого в программе, составленной по такой методике, предусмотрены специальные блоки команд, при помощи которых вычислительная машина формирует либо двоичные числа, являющиеся кодами букв, цифр и управляющих сигналов, что имеет место при поиске и распознавании типа сводок и некоторых других операций, либо двоично-десятичные выражения цифр текста, что в свою очередь наблюдается при раскодировании количественных значений элементов в телеграмме.

Распознавание типа сводки осуществляется путем поиска и анализа так называемых «заголовков» бюллетеней. В заголовке бюллетеня, передаваемом перед группой телеграмм, указывается вид этого заголовка и номер бюллетеня. Номер бюллетеня однозначно определяет характер данных, закодированных в телеграммах, следующих после заголовка. В сводках ЦИПа аэрологическим телеграммам с данными для карт барической топографии предшествуют заголовки вида «БЮЛ 46...» (в сводках за 03 часа) и «БЮЛ 111...» (в сводках за 15 час.); аэрологическим телеграммам с данными зондирования на стандартных уровнях и данными особых точек соответственно «БЮЛ 46/47...» и «БЮЛ 111/112...»; аэрологическим телеграммам азиатской территории СССР предшествует заголовок вида «Аэро АТС...»

Распознавание характера сообщений и поиск нужных телеграмм схематически изображены на рис. 1.

Поиск начала очередной телеграммы производится по контролю двух рядом расположенных комбинаций пробивок «перевод строки», передаваемых обычно перед каждой телеграммой. После нахождения указанного сочетания производится уточнение, не буквенным ли текстом начинается телеграмма. Это достигается проверкой первого знака телеграммы (не является ли он знаком «буквы», который передается всегда перед буквенным текстом). Если окажется, что следует не буквенный текст, и

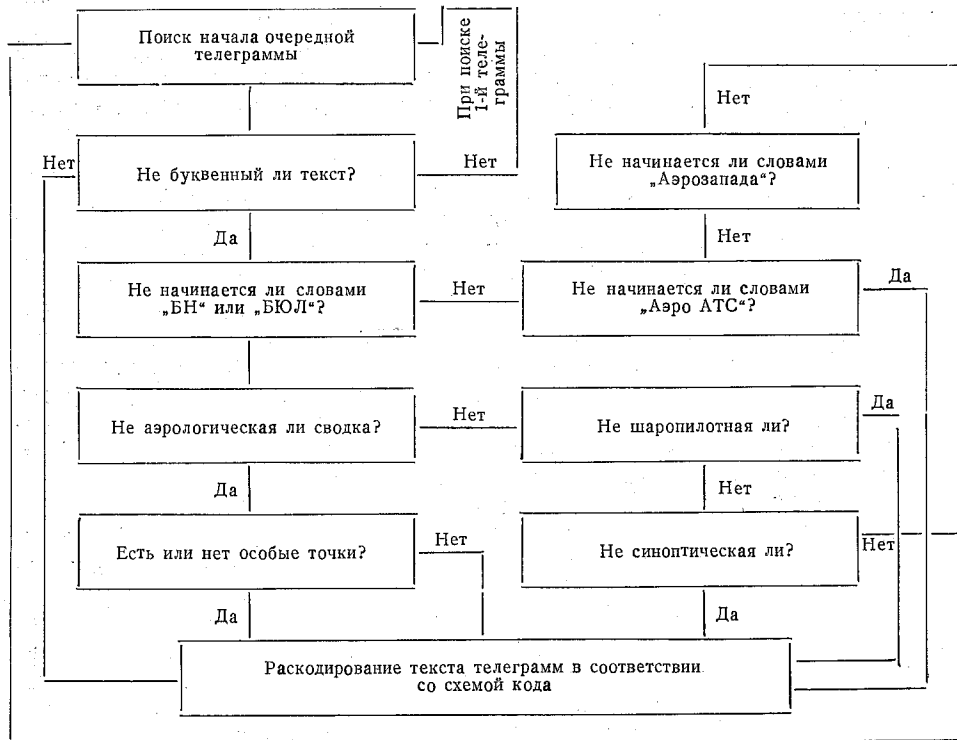


Рис. 1. Блок распознавания типа сводок и поиска нужных телеграмм.

если при этом производится поиск самой первой телеграммы в сводке, то поиск ее возобновляется в том же порядке до тех пор, пока не будет найден самый первый заголовок. При поиске всех последующих телеграмм (кроме первой) найденное начало цифрового текста воспринимается как начало очередной телеграммы, следующей после заголовка, спознанного в предыдущих операциях. В этом случае найденная телеграмма раскодируется вычислительной машиной по той же схеме кода, что и предыдущая. Если окажется, что очередная телеграмма начинается буквенным текстом, то последующими операциями устанавливается, не заголовок ли это и каков его вид. Все телеграммы, следующие после опознанного заголовка, раскодируются по соответствующей ему схеме.

В прилагаемой программе описанный блок реализован частично. Обеспечен поиск и распознавание только аэрологических телеграмм, что объясняется ограниченностью памяти машины «Урал-1».

После того как будет опознан тип сообщения, вычислительная машина, найдя начало первой после заголовка телеграммы по сочетанию

знаков «возврат каретки» и «перевод строки», приступает к определению координат станции. Это достигается путем последовательного сравнения координатных индексов, выражающих номер большого района JJ и номер станции iii, найденной телеграммы с возможными номерами, помещенными в запоминающие устройства машины. Возможные номера больших районов JJ помещены в виде словаря в оперативной памяти машины. Этот словарь, кроме номеров, содержит номера зон внешней или промежуточной памяти (в нашем случае накопителя на перфоленте), в которых размещаются списки индексов станций iii и их координаты.

После того как в списке возможных номеров будет найден номер большого района JJ обрабатываемой телеграммы, производится переписывание

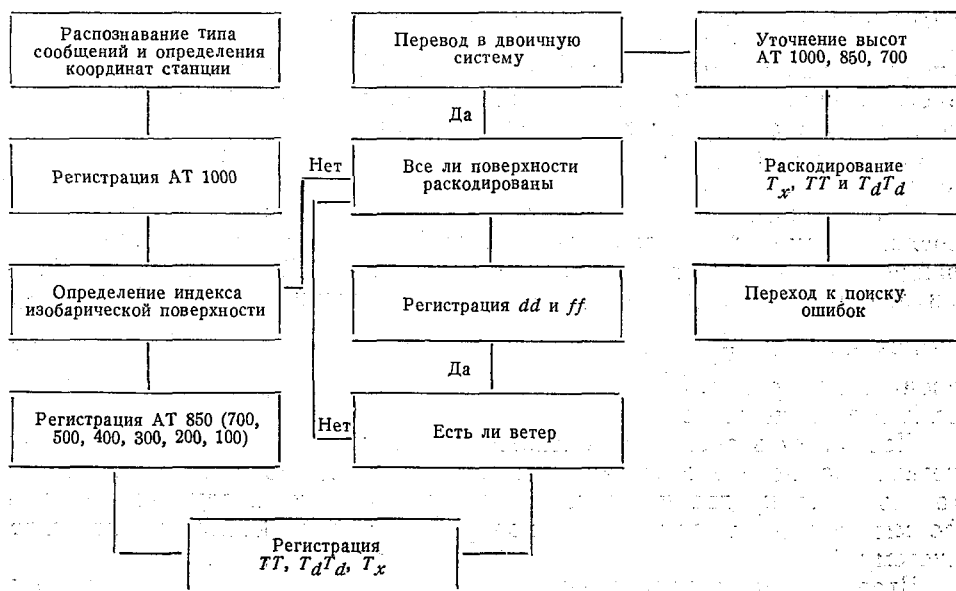


Рис. 2. Блок раскодирования.

сывание в оперативную память соответствующей зоны внешнего накопителя, где записаны индексы iii и координаты станций опознанного района JJ. Затем осуществляется опознавание индекса станции iii путем сравнения индекса iii из очередной телеграммы с каждым из возможных в пределах данного большого района. При положительном результате координаты станций в градусах широты и долготы с указанием десятых долей записываются в специально отведенных ячейках оперативной памяти.

Раскодирование элементов в каждой телеграмме производится вычислительной машиной в два этапа. Схематически они изображены на рис. 2.

Первый этап состоит в переводе закодированных кодом телетайпа и аэрологическим кодом значений элементов в двоично-десятичную систему и записи результата в соответствующие специально отведенные ячейки оперативной памяти. В случае отсутствия каких-либо сведений в телеграмме на их место записывается специальный признак «—0» (минус ноль). Этот этап, как и поиск аэрологических телеграмм, выполняется машиной с помощью чисто логических операций над числовыми кодами.

Вначале производится формирование кода высоты AT_{1000} и перевод его в двоично-десятичную систему. Данные всех других изобарических поверхностей формируются при помощи циклически повторяющихся операций, в которых предусмотрено опознавание индекса очередной поверхности, формирование и регистрация двоично-десятичных кодов высот изобарических поверхностей, температуры и точки росы. Коды десятых долей температуры и точки росы регистрируются без предварительного перевода в двоично-десятичную систему.

В каждом из упоминавшихся циклов после предварительного раскодирования групп высоты и температуры производится уточнение формы аэрологического кода: есть или нет в телеграмме группа ветра. Это достигается путем сравнения первого знака очередной группы с кодом «нуля». Если в телеграмме имеются данные о ветре, то двоично-десятичные коды направления и скорости регистрируются в соответствующих ячейках памяти, если нет, то в этих ячейках, как указано выше, записывается специальный признак «-0». После выполнения этого этапа в ответных ячейках, куда записывается результат раскодирования, будут записаны двоично-десятичные выражения значений всех элементов в таком виде, как они были представлены в телеграмме.

Затем производится подготовка промежуточного результата к непосредственному раскодированию. Эта подготовка заключается в выравнивании порядков высот изобарических поверхностей. В ее процессе сформированные ранее двоично-десятичные выражения AT_{1000} , AT_{850} , AT_{700} умножаются на $\frac{1}{10}$ (сдвигаются вправо на один десятичный или четыре двоичных разряда). Это вызвано тем, что высоты указанных поверхностей, в отличие от остальных, передаются не в декаметрах, а в метрах.

Поскольку второй этап раскодирования предусматривает не только логические, но и арифметические операции над числовым материалом, то результат предварительного раскодирования из двоично-десятичной формы записи по стандартной подпрограмме переводится в двоичную систему.

Второй этап раскодирования начинается с уточнения тысяч метров высот H_{850} и H_{700} . К H_{850} при этом прибавляется 1000 м, а к H_{700} — 2000 или 3000 м в зависимости от числа, выражающего сотни метров этой высоты. При уточнении H_{700} соблюдается следующее правило: если число, выражающее H_{700} , больше 500, то к нему прибавляется 2000, если меньше — 3000 м.

Уточнение H_{1000} достигается путем контроля знака разности $H_{1000} - 500$. Если разность положительна, то она со знаком минус записывается в ответ как высота H_{1000} . Минус указывает на то, что поверхность AT_{1000} лежит ниже уровня моря. Если разность отрицательна, то содержимое ячейки со значением H_{1000} оставляется без изменения. Заметим, что этот способ непригоден для горных станций.

После указанных операций производится окончательное раскодирование групп температуры. На этом этапе расшифровываются знаки и десятые доли значений температуры и точки росы на каждой изобарической поверхности. При раскодировании десятых долей предварительно уточняется наличие сведений о точке росы в группе температуры. Если данные о точке росы в группе имеются, раскодирование десятых долей производится по одной схеме (согласно аэрологическому коду), если нет — по другой.

Соответствующее значение десятых долей градуса вначале прибавляется к температуре, после чего уточняется ее знак, затем — к точке росы с последующим уточнением ее знака.

Раскодирование температуры (точки росы) базируется на том, что если число, выражающее код температуры (точки росы), больше 50, то для изобарических поверхностей 850—700 мб действительная температура равна разности $TT - 50$ со знаком минус, а для изобарических поверхностей 500 мб и выше — самому коду температуры со знаком минус. Если же разность $TT - 50$ отрицательна, то для поверхностей 850 и 700 мб истинная температура равна ее коду, полученному в процессе предварительного раскодирования, а для AT_{500} и выше — сумме $TT + 50$ со знаком минус.

При этом предполагалось, что положительная температура на изобарических поверхностях AT_{500} и выше крайне маловероятна, что вполне справедливо для всей территории, за исключением некоторых ограниченных районов. После расшифровки групп температуры процесс раскодирования заканчивается. Окончательный результат раскодирования записывается в те же ячейки оперативной памяти.

Контроль ошибок основан на проверке выполнимости барометрической формулы

$$\Delta H_n^{n+1} = 67,4 \lg \frac{P_n}{P_{n+1}} \bar{T}, \quad (1)$$

где ΔH_n^{n+1} — толщина слоя между стандартными изобарическими поверхностями. Другие обозначения общеприняты.

Методикой предусмотрено вычисление толщины каждого слоя ΔH_n по формуле (1) и фактической толщины $\Delta H_{ср}$ как разности высот вышележащей и нижележащей изобарических поверхностей.

Если при сравнении ΔH_n и $\Delta H_{ср}$ окажется, что абсолютная величина их разности Δ_i превышает некоторый критерий k_i , то в соответствующий разряд специальной ячейки памяти («шкалы ошибок») записывается единица.

По взаимному расположению единиц в шкале ошибок машина уточняет характер ошибок. В случае когда отклонение $|\Delta_i| > k_i$ наблюдается только в одном слое, что свидетельствует об ошибке при вычислении толщины этого слоя, машина исправляет верхний уровень слоя и все вышележащие уровни на величину Δ_i . В другом случае, когда $|\Delta_i| > k_i$ наблюдается в двух смежных слоях, что может явиться следствием искажения либо высоты, либо температуры промежуточной поверхности, разделяющей эти слои, поверхность отмечается знаком минус перед ее высотой.

При любом другом расположении $|\Delta_i| > k_i$ сомнительными считаются все сведения данной станции и перед ее широтой ставится знак минус. В этом случае, как и в предыдущем, проверку сомнительных данных предполагается производить в процессе объективного анализа, который в числе других операций должен предусматривать и контроль ошибок.

На основании изложенной методики нами была составлена для машины «Урал-1» программа автоматической подготовки исходных данных.

Как при отладке программы, так и в процессе автоматической обработки исходная информация вводилась в запоминающее устройство машины непосредственно с бумажной перфоленты телетайпа путем автоматического преобразования ее в перфоленту внешнего накопителя «Урал-1». Это преобразование осуществлялось при помощи контрольно-считывающего устройства машины «Урал-1» и специальной приставки к нему, сконструированной А. П. Кутенко. При использовании других машин, например «IBM-704», этот ввод может быть осуществлен непосредственно с бумажной ленты.

В нашем эксперименте при помощи машины «Урал-1» была обработана одна зона с исходной информацией, содержащей восемь телеграмм. В непрерывном режиме эта информация была обработана за 48 мин.

Таблица 1
 Результат раскодирования аэрологической телеграммы, полученной машиной «Урал-1». Пункт Волгоград ($\varphi = 48,4^\circ$, $\lambda = 44,3^\circ$).

№ пп.	Результат счета	Фактические данные
1	048 798 426	$\varphi = 48,4^\circ$
2	044 395 448	$\lambda = 44,3^\circ$
3	021 392 822	$H_{1000} = 214$
4	153 495 788	$H_{850} = 1335$ гп. м
5	-011 993 408	$T = -1,2^\circ$
6	-184 989 928	$T_d = -18,5^\circ$
7	129 997 254	$d = 130^\circ$
8	159 996 032	$F = 16$ м/сек.
9	307 090 760	$H_{700} = 3071$ гп. м.
10	-067 993 164	$T = -6,8^\circ$
11	-271 995 546	$T_d = -27,2^\circ$
12	129 997 254	$d = 130^\circ$
13	169 998 168	$F = 17$ м/сек.
14	563 995 362	$H_{500} = 5640$ гп. м.
15	-209 999 086	$T = -21^\circ$
16	-000 000 000	T_d отсутствует
17	119 995 118	$d = 120^\circ$
18	189 994 812	$F = 19$ м/сек.
19	723 999 024	$H_{400} = 7240$ гп. м.
20	-329 002 380	$T = -32,9^\circ$
21	-000 000 000	T_d отсутствует
22	119 995 118	$d = 120^\circ$
23	149 993 898	$F = 15$ м/сек.
24	920 997 620	$H_{300} = 921$ гп. м.
25	-467 994 690	$T = -46,8^\circ$
26	-587 989 808	$T_d = -58,8^\circ$
27	239 997 864	$d = 240^\circ$
28	119 995 118	$F = 12,0$ м/сек.
29	176 994 324	$H_{200} = 11 770$ гп. м.
30	-663 993 836	$T = -66,4^\circ$
31	-000 000 000	T_d отсутствует
32	209 999 086	$d = 210^\circ$
33	149 993 890	$F = 15$ м/сек.
34	160 396 276	$H_{100} = 16 040$ гп. м.
35	-591 995 238	$T = -59,2^\circ$
36	-000 000 000	T_d отсутствует
37	259 994 508	$d = 250^\circ$
38	079 994 202	$F = 8$ м/сек.
39	000 000 000	
40	000 000 000	Ошибок в телеграмме нет

В табл. 1 для примера приведен результат одной раскодированной и проверенной телеграммы, специально выведенный на печать. Подлинный текст ее также приводится ниже. Читая результаты и сравнивая их с действительными значениями, следует мысленно фиксировать запятую после третьего знака у широты φ , долготы λ и направления ветра d , после четвертого знака у высот изобарических поверхностей H , после второго знака у температуры T , точки росы T_d и скорости ветра F .

Анализ результатов автоматической подготовки исходных данных показывает, что такая задача в оперативном порядке может решаться на более совершенных вычислительных машинах, чем машина «Урал-1».

Приведем текст телеграммы, раскодированной машиной «Урал-1».
БЮЛ 111/112/2 0915
34560 15214 85535 51682 01316 70071 56777
01317 50564 71/ /0 01219 40724 82/ /9 01215 30921 96089
02412 20177 16/ /4 02115 10604 09/ /2 02608 55555...

Развитие вычислительной техники в нашей стране позволяет уже сейчас использовать для целей прогноза и анализа вычислительные машины большого быстродействия.

Разработанная методика автоматической подготовки, как и логическая схема составленной для «Урал-1» программы, применима для любой универсальной вычислительной машины, в том числе и для скоростных.

Пересчет затрат машинного времени на обработку с учетом использования таких машин показывает, что восемь телеграмм, обработанных машиной «Урал-1» за 48 мин., машиной большого быстродействия будут обработаны за 7—10 сек., а обработка информации для всего полушария заняла бы не более 10 мин., тогда как для обработки на машине «Урал-1» потребовалось бы около 60 час.

Остановимся вкратце на тех принципиальных трудностях, которые встретились при решении поставленной задачи.

Во-первых, необходимо отметить тот факт, что при набивке метеорологических сводок на ленту в процессе их передачи различные операторы по-разному передают один и тот же текст. Это, в частности, выражается в отсутствии определенной системы при подаче так называемых управляющих и вспомогательных сигналов, формирующих печатный текст. Так, например, часто не выдерживается количество сигналов «пробел печати» между словами и группами в телеграммах и особенно в заголовке между сочетанием БЮЛ и номером бюллетеня. Часто после окончания строки в телеграмме передается совершенно ненужный сигнал «пробел печати», вместо того чтобы сразу передавался сигнал «возврат каретки». Кроме того, перед началом каждой новой строки с цифровым текстом передаются также излишние сигналы «цифры» и «пробел печати», хотя вполне достаточно одного знака «цифры», передаваемого перед номером бюллетеня в заголовке.

Количество групп в строке, как правило, не выдерживается, а вместо рядом расположенных сигналов «перевод строки» для разделения телеграмм друг от друга передаются попарные сочетания сигналов: «перевод строки» и «возврат каретки».

Все эти и многие другие особенности в передаче сводок обусловили громоздкость составленной программы. Поскольку все отклонения от определенного стандарта невозможно было учесть при составлении программы (хотя многое из указанного и было учтено), то по этой причине в качестве исходной использовалась специально набитая оператором Северо-Западного УГМС лента, в тексте которой, в частности, нет сигналов «пробел печати» в конце и сигналов «цифры» и «пробел» в начале строк.

Вполне очевидно также, что нет необходимости в таком многообразии различных «заголовков», какое имеет место в настоящее время и которое лишь усложняет распознавание типа сообщений.

Другой очень важной причиной, обусловившей громоздкость блока раскодирования текста телеграмм, является недостаток системы кодирования элементов в телеграммах. Эта система кодирования разрабатывалась давно и, естественно, не учитывает применения электронных вычислительных машин для раскодирования телеграмм.

На основании всего изложенного можно сделать вывод о том, что для практического осуществления автоматической подготовки исходных данных необходимо на основании уже полученных результатов составить программу, например, для машины «Стрела» или «Урал-2».

Для упрощения программы следует упорядочить систему кодирования метеорологических элементов, а также систему передачи сводок по телетайпу.

Не останавливаясь пока на вопросах, связанных с кодированием элементов, поскольку они требуют специального изучения, дадим некоторые рекомендации по передаче метеорологических сводок, которые стали очевидны из анализа метеорологических сводок.

1. Заголовки бюллетеней следует передавать в какой-либо определенной редакции, например, так: «БЮЛ 46», изменяя только номера в зависимости от характера сообщений.

2. Двойная нумерация бюллетеней в зависимости от срока, на наш взгляд, также нерациональна.

3. В заголовке между «БЮЛ» и номером крайне желательно передавать только один сигнал «пробела печати» или вообще не передавать его.

4. Количество групп в каждой строке, как и количество строк в телеграмме данного типа, должно быть постоянным.

Каждая группа должна занимать при этом вполне определенное положение. Это может быть достигнуто в том случае, когда вместо отсутствующих групп (например, групп ветра или других) будут передаваться либо сигналы пробела печати в количестве, равном числу цифр в опущенных группах, либо знаки «/», как это делается сейчас при отсутствии сведений о точке росы.

5. Крайне нежелательна передача ненужных управляющих сигналов в конце и начале каждой строки. А если какие-либо из них необходимы, исходя из принципов передачи, то при передаче их должен соблюдаться строго определенный стандарт, обязательный для каждого оператора.

6. Телеграммы одну от другой желательно разделять, например, сочетанием двух рядом расположенных сигналов «перевод строки».

Реализация этих рекомендаций существенно упростит программу автоматической подготовки исходных данных.

В заключение можно указать, что внедрение автоматической подготовки исходных данных в метеорологическую практику позволит резко повысить оперативность анализа и прогноза погоды. Это, например, даст возможность практически реализовать проблему анализа и построения карт с помощью электронных вычислительных машин и тем самым сократить разрыв времени между моментами наблюдения и составления карт погоды. Несомненно также, что внедрение автоматической подготовки исходных данных будет способствовать более широкому использованию электронных вычислительных машин в научных исследованиях. Сейчас этому нередко препятствует именно трудоемкость ручной подготовки исходных данных, вводимых в вычислительные машины.

Считаю своим долгом выразить глубокую благодарность доценту Л. С. Гандину, под руководством которого была выполнена работа, а также сотруднику ГГО В. П. Мелешко за помощь в проверке и отладке программы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. Расчетные методы анализа карт. Труды ГГО, вып. 99, 1959.
2. Биркган А. Ю., Любимов А. Н. Предвычисление карты АТ₇₀₀ на электронной цифровой машине «Стрела». Изв. АН СССР, сер. геофиз. № 1, 1958.

ВЛИЯНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НА ПРОЦЕССЫ ИЗМЕНЕНИЯ ДАВЛЕНИЯ И ПРОГНОСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НИЖНЕЙ СТРАТОСФЕРЫ

В статье выводятся приближенные прогностические уравнения для слоев с большой статической устойчивостью, в частности для нижней стратосферы. Для этих условий трехмерные задачи с достаточной для практических расчетов точностью сводятся к двумерным.

Характер полученных соотношений сопоставляется с видом приближенных уравнений для случаев малой устойчивости (облака, слои с вертикальным градиентом, близким к адиабатическому).

1. В настоящее время основным уравнением, описывающим изменение высоты изобарической поверхности во времени, служит известное соотношение [1]

$$\left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + m^2 \Delta \right] \frac{\partial z}{\partial t} = -m^2 \left[\frac{g}{l} (z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] - \frac{R}{g} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{Q}{c_p} \right], \quad (1)$$

где z — высота изобарической поверхности, t — время, x, y — декартовы координаты, отсчитываемые по изобарическим поверхностям (ось x направлена с запада на восток, ось y — с юга на север), ζ — вертикальная координата, равная отношению давления на данном уровне к стандартному наземному давлению, Q — приток тепла, c_p — теплоемкость при постоянном давлении, R — газовая постоянная, g — ускорение силы тяжести, $l = 2\omega \sin \varphi$ — параметр Кориолиса (ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта места), $\beta = \frac{\partial l}{\partial y} = \frac{2\omega}{a} \cos \varphi$, a — радиус

Земли. Символы Δ и $()$ означают операторы Лапласа и Якоби соответственно. Функции, заключенные в квадратные скобки в правой части уравнения (1), означают адвекцию абсолютного вихря и адвекцию температуры плюс притоки тепла за счет возможной неадиабатичности процесса.

Параметр $m^2 = \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g l^2}$ (T — температура, γ_a и γ — адиабатический и реальный градиенты температур) принимается обычно постоянной величиной.

Если теперь лапласиан заменить конечно-разностным отношением, как это обычно делают при расчетах по численным методам прогноза полей давления, $\Delta z = \frac{4(\bar{z} - z)}{h^2}$, где \bar{z} — среднее значение величины z

по окружности радиуса h , то уравнение (1) переписывается в виде

$$\left[\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + m_1^2 \Delta_p \right] \frac{\partial z}{\partial t} = - m_1^2 \left[\frac{g}{l}(z, \Delta_p z) + \beta h^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right] - \frac{R}{g} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \left[\frac{g}{l}(T, z) + \frac{Q}{c_p} \right]. \quad (2)$$

Здесь символ $\Delta_p f$ означает $4(\bar{f} - f)$, а m_1^2 — безразмерный параметр, равный отношению m^2 к h^2 . Эта безразмерная величина является основным параметром задачи, и от ее значения, т. е. будет ли она велика или мала, зависит характер изменения геопотенциала с точки зрения факторов, определяющих эти изменения.

Совершенно очевидно, что при очень больших значениях этого параметра ($m_1^2 \rightarrow 0$) соотношение (1) превращается в известное двумерное уравнение

$$\Delta \frac{\partial z}{\partial t} = - \frac{g}{l}(z, \Delta z) - \beta \frac{\partial z}{\partial x}, \quad (3)$$

описывающее изменение давления в баротропной атмосфере.

В реальных атмосферных условиях величина m_1^2 никогда, естественно, не достигает таких значений, но тем не менее может быть высказано утверждение, что в слоях с большой устойчивостью влияние бароклинности будет заметно ослабляться.

Для условий, когда m_1^2 достаточно велико, но остается конечной величиной, в уравнении (3) появятся дополнительные члены, учет которых при решении задачи может быть выполнен приближенным способом.

С этой целью перепишем уравнение (2) в виде

$$\Delta_p \frac{\partial z}{\partial t} = - \left[\frac{g}{l}(z, \Delta_p z) + \beta h^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right] - \varepsilon \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial z}{\partial t} - \frac{R}{g} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \left[\frac{g}{l}(T, z) + \frac{Q}{c_p} \right] \right\}, \quad (4)$$

где $\varepsilon = \frac{1}{m_1^2} = \frac{g l h^2}{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}$ — малый безразмерный параметр, а выражения, стоящие в квадратных и фигурных скобках правой части равенства, имеют примерно одинаковый порядок величины.

Будем искать решение уравнения (4) относительно $\frac{\partial z}{\partial t}$ в виде разложения по ε

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \frac{\partial z_n}{\partial t}. \quad (5)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_p \frac{\partial z_0}{\partial t} &= - \frac{g}{l}(z, \Delta_p z) - \beta h^2 \frac{\partial z}{\partial x}, \\ \Delta_p \frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial z_0}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{R}{g} \left[\frac{g}{l}(T, z) + \frac{Q}{c_p} \right] \\ \Delta_p \frac{\partial z_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial z_1}{\partial t} &= 0 \\ \dots &\dots \\ \Delta_p \frac{\partial z_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial z_{n-1}}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Таким образом, первый член разложения (5) находится из решения баротропного уравнения вихря скорости. Подставляя это решение во второе уравнение системы (6), получим уравнение для $\frac{\partial z}{\partial t}$, также двумерное относительно искомой функции, но содержащее производные по вертикали от адвекции вихря и температуры.

Если обозначить оператор $\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}$ через L , а результат интегрирования уравнения Пуассона через Δ^{-1} , то решение уравнения (4) может быть записано в виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\Delta^{-1} \left[\frac{g}{l}(z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \frac{(-L)^n}{\Delta_p^{n+1}} \left[\frac{g}{l}(z, \Delta_p z) + \beta h^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right] - \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \frac{(-L)^{n-1}}{\Delta_p^n} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{R}{g} \left[\frac{g}{l}(T, z) + \frac{Q}{c_p} \right]. \quad (7)$$

Существенно отметить, что адвекция температуры входит только в члены, содержащие малый параметр ϵ , и не содержится в первом основном члене.

В качестве граничных условий для уравнения Пуассона можно принять либо стремление искомой функции на бесконечности к нулю (как это делается, например, в работе [1]), либо условие равенства нулю искомой функции, осредненной по окружности достаточно большого радиуса [5].

2. Применим равенство (7) к стратосфере, где устойчивость максимальна, параметр ϵ достаточно мал и можно, следовательно, ограничиться только первыми членами разложения. Оценим прежде всего величину ϵ . Для тропосферы среднее значение m составляет примерно 750 км [1]. Величина h принимается при обычных расчетах немногим больше 500 км. Таким образом, безразмерный параметр m_1^2 составит величину $\left(\frac{750}{500}\right)^2 = 2,25$. При расчете m^2 величина среднего температурного градиента в тропосфере принята равной 6 град/км, т. е. $\gamma_a - \gamma = 4$ град/км. В стратосфере, где градиент температуры в среднем равен нулю, величина $\gamma_a - \gamma$ составляет 10 град/км и значение m_1^2 увеличивается в 2,5 раза, т. е. достигает величины 5,62. Параметр ϵ будет равен для этих условий 0,18. Таким образом, если мы ограничимся только первым членом разложения (7), то ошибка не будет превышать 20%.

Такое упрощение для условий тропосферы связано с гораздо большими ошибками, поскольку для ϵ , близких к единице, последовательность (7) сходится крайне медленно. Наличие эквивалентного баротропного уровня в средней атмосфере обусловлено факторами, связанными не с увеличением параметра устойчивости, а с особенностями поля вертикальной скорости в этой части атмосферы ($\frac{\partial \tau}{\partial \zeta} = 0$, где τ — аналог вертикальной скорости в изобарической системе координат).

Для условий нижней стратосферы процесс можно считать адиабатическим. Соответствующие оценки, выполненные в работах [4], [8], показывают, что радиационными эффектами в нижней стратосфере при изучении движений большого масштаба можно пренебречь. Конденсационные притоки тепла в этой части атмосферы практически отсутствуют. Турбулентный теплообмен в стратосфере изучен настолько мало, что вводить его в расчеты с достаточной степенью надежности практически

еще невозможно. Оценки, сделанные в [8], свидетельствуют, что этот эффект также незначителен.

Быстрота сходимости ряда (7) для условий стратосферы обуславливается не только малостью параметра ε , но также специфическими особенностями операторов L и Δ_p^{-1} на этих уровнях.

В силу сравнительной однородности вертикальной структуры стратосферы можно символически записать, что произведение операторов $L\Delta_p^{-1} < 1$. Физический смысл приведенного неравенства сводится к тому, что если некую функцию осреднить определенным образом по горизонтали (решение разностного аналога уравнения Пуассона) и затем дважды продифференцировать по безразмерной координате ζ в соответствии с определением оператора L , то результат такой операции будет меньше значения исходной функции. Так, в частности, если принять, что стратосфера представляет собой изотермическую среду, то при условии адиабатичности ($Q = 0$) последовательность (5) оборвется на третьем члене.

Действительно, используя условие, что $-RT = g\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta}$ и $\frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0$, получим:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_p \frac{\partial z_0}{\partial t} &= -\frac{g}{l}(z, \Delta_p z) - \beta \frac{\partial z}{\partial x} h^2 \\ \Delta_p \frac{\partial z_1}{\partial t} &= -\frac{R}{l}(T, z) - \frac{R}{l} \Delta_p^{-1} \left[(T, \Delta_p z) + (z, \Delta_p T) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2R}{g}(T, \Delta_p T) + \frac{l\beta}{g} \frac{\partial T}{\partial x} h^2 \right] \\ \Delta_p \frac{\partial z_2}{\partial x} &= 2 \frac{R^2}{gl} \Delta_p^{-2} (T, \Delta_p T) \\ \Delta_p \frac{\partial z_3}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Учитывать при практических расчетах член с $\frac{\partial z_2}{\partial t}$ не имеет смысла, так как, согласно (7), он входит в решение с множителем ε^2 , т. е. составляет величину порядка 4% основного члена.

Проведем дальнейшие упрощения решения. Ограничиваясь двумя членами разложения, запишем выражение для $\Delta_p \frac{\partial z}{\partial t}$ в виде

$$\Delta_p \frac{\partial z}{\partial t} = - \left(1 - \varepsilon \Delta_p^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \left[\frac{g}{l}(z, \Delta_p z) + \beta h^2 \frac{\partial z}{\partial x} \right] - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta \frac{R}{l}(T, z). \quad (9)$$

Как уже было сказано выше, произведение операторов $\Delta^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta}$ можно рассматривать как величину, меньшую единицы. Таким образом, второе слагаемое в круглых скобках является величиной второго порядка малости по сравнению с единицей и им вследствие этого можно пренебречь. В члене первого порядка малости [последнее слагаемое в правой части (9)] дифференцирование по вертикали можно выполнять, полагая стратосферу изотермичной. Это не вызовет значительных погрешностей, поскольку указанный член содержит множителем малый параметр ε .

Подставляя значение ε , получим окончательно

$$\Delta \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{g}{l}(z, \Delta z) - \beta \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{gl}{RT\gamma_a}(T, z). \quad (10)$$

Равенство (10) совпадает с уравнением для производной от высоты изобарической поверхности по времени в нижней стратосфере, получен-

ным в работе [2] на основании упрощений, вытекающих из оценок отдельных членов в уравнении притока тепла по материалам наблюдений [9].

Если проанализировать уравнение (10), то обращает на себя внимание тот факт, что, согласно этому уравнению, адвекция тепла на данном уровне приводит к падению вихря геострофической скорости ветра, т. е. к росту давления на этом же уровне. Существенно отметить, что, согласно общей теории (см., например, [5]), адвекция тепла в нижней тропосфере приводит к падению давления на том же уровне. В верхней же и средней тропосфере наблюдается обратная картина — там адвекция тепла приводит к росту давления. Таким образом, приближенное уравнение (10) правильно отражает и эту особенность изменения давления.

3. В работе [2] уравнение (10) было проинтегрировано по времени графоаналитическим методом. Поскольку ведущий поток при таком интегрировании считается квазистационарным, для решения задачи суточного прогноза геопотенциала достаточно знать значения этого потока, который является функцией высоты и температуры данной изобарической поверхности, только в начальный момент времени. При интегрировании же уравнения (10) методом Эйлера поля геопотенциала и температуры надо восстановить на каждом шаге.

Применительно к геопотенциалу эта процедура может быть выполнена с помощью уравнения (10). Построим аналогичное уравнение для температуры. С этой целью воспользуемся общим трехмерным уравнением для производной от температуры по времени [1]

$$\left(\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} + m^2 \Delta \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{Q}{c_p} \right] - m^2 \left[\frac{g}{l} (T, \Delta z) + \frac{g}{l} (z, \Delta T) + \beta \frac{\partial T}{\partial x} \right]. \quad (11)$$

Прибегая здесь также к представлению решения в виде разложения по малому параметру, получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_p \frac{\partial T_0}{\partial t} &= - \frac{g}{l} \left[(T, \Delta_p z) + (z, \Delta_p T) + \frac{l\beta}{g} h^2 \frac{\partial T}{\partial x} \right] \\ \Delta_p \frac{\partial T_1}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial T_0}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{Q}{c_p} \right] \\ \Delta_p \frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial T_1}{\partial t} &= 0 \\ \dots &\dots \\ \Delta_p \frac{\partial T_n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial T_{n-1}}{\partial t} &= 0 \\ \dots &\dots \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Ограничиваясь двумя членами разложения, получим следующее равенство:

$$\Delta_p \frac{\partial T}{\partial t} = - \left(1 - \varepsilon \Delta_p^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) \frac{g}{l} \left[(T, \Delta_p z) + (z, \Delta_p T) + \frac{l\beta}{g} h^2 \frac{\partial T}{\partial x} \right] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{Q}{c_p} \right]. \quad (13)$$

Считая задачу адиабатической и выполняя все те упрощения, которые использовались при переходе от соотношения (9) к равенству (10), получим

$$\Delta \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{g}{l} \left[(T, \Delta z) + (z, \Delta T) + \frac{l\beta}{g} \frac{\partial T}{\partial x} \right]. \quad (14)$$

С помощью этого соотношения можно восстановить поле температур в последующие моменты времени, что дает возможность интегрировать равенство (10) не только графоаналитическим методом, но и методом Эйлера (шагами по времени).

К равенству (13) можно прийти и более простым путем, а именно применением операции $-\frac{g}{R} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}$ к уравнению (10).

4. Для общности осталось рассмотреть способ приближенного расчета вертикальных скоростей для условий нижней стратосферы. Представляя решение общего уравнения

$$\zeta^2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial \zeta^2} + m^2 \Delta \tau = -\zeta \frac{pR}{l^2} \left\{ \frac{g}{l} \Delta(T, z) + \frac{\Delta Q}{c_p} - \frac{g}{R} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g}{l} (z, \Delta z) + \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] \right\} \quad (15)$$

в виде разложения по малому параметру, так же как это делалось для $\frac{\partial z}{\partial t}$ и $\frac{\partial T}{\partial t}$ в параграфах 1 и 3, получим следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \Delta_p \tau_0 &= 0 \\ \Delta_p \tau_1 + \zeta^2 \frac{\partial^2 \tau_0}{\partial \zeta^2} &= -\zeta \frac{pR}{l^2} \Delta_p \left[\frac{g}{l} (T, z) + \frac{Q}{c_p} \right] + \\ &+ \frac{gp}{l^2} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\frac{g}{l} (z, \Delta_p z) + h^2 \beta \frac{\partial z}{\partial x} \right] \\ \Delta_p \tau_2 + \zeta^2 \frac{\partial^2 \tau_1}{\partial \zeta^2} &= 0 \\ \dots \dots \dots \\ \Delta_p \tau_n + \zeta^2 \frac{\partial^2 \tau_{n-1}}{\partial \zeta^2} &= 0 \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

В отличие от систем (6) и (12), здесь разложение будет начинаться с члена τ_1 ($\tau_0 = 0$). В силу сравнительной вертикальной однородности нижней стратосферы также можно символически записать, что $\Delta_p^{-1} \zeta^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} < 1$, вследствие чего последовательность τ_n будет быстро сходиться.

Остановимся на упрощениях, которые можно выполнить в правой части уравнения для τ_1 . Принимая во внимание, что $\tau_0 = 0$ и на основании соотношения $RT = -g\zeta \frac{\partial z}{\partial \zeta}$, получим, считая процесс адиабатическим,

$$\Delta \left[\tau_1 + \zeta \frac{pR_g}{m^2 l^3} (T, z) \right] = -\zeta \frac{pR_g}{m^2 l^2} \left[(T, \Delta z) + (z, \Delta T) + \frac{l\beta}{g} \frac{\partial T}{\partial x} \right]. \quad (17)$$

Используя равенство (14), легко увидеть, что соотношение (17) есть не что иное, как уравнение притока тепла, к которому применен оператор Лапласа. Если теперь, следуя результатам обработки материалов наблюдений Эпштейна [9], пренебречь локальной производной от температуры по сравнению с адвекцией, то получим соотношение, приведенное в работе [2],

$$\tau = -\zeta \frac{g^2 p}{RT \gamma_a} (T, z). \quad (18)$$

содержащих множителем параметр ε , $\frac{\partial T}{\partial \zeta} = 0$, получим следующее двумерное уравнение для нахождения u' :

$$\Delta u' = \frac{2g^2}{l^3} \left[\frac{\partial}{\partial y} (z_x, z_y) + \frac{\beta l}{2g} z_{xx} \right] - \frac{2g^2}{RT\gamma_a l} \left(z_x - \frac{R}{g} T_x, T \right). \quad (22)$$

Аналогично получается уравнение для v'

$$\Delta v' = \frac{2g^2}{l^3} \left[\frac{\partial}{\partial x} (z_x, z_y) - \frac{\beta l}{2g} z_{yy} \right] - \frac{2g^2}{RT\gamma_a l} \left(z_y - \frac{R}{g} T_y, T \right). \quad (23)$$

Таким образом, на каждом шаге, решая двумерное уравнение Пуассона, можно находить пять величин: $\frac{\partial z}{\partial t}$, $\frac{\partial T}{\partial t}$, w , u' и v' .

6. Остановимся теперь кратко на случае малых значений параметра устойчивости, что наблюдается либо в облаках [3], либо в слоях, где вертикальный температурный градиент близок к адиабатическому. Для этих случаев разложение надо проводить по малому параметру $\frac{m^2}{h^2}$. Уравнения для членов, не содержащих малого параметра, будут иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} \frac{\partial z_0}{\partial t} &= - \frac{R}{l} (T, z) \\ \frac{\partial T_0}{\partial t} &= \frac{g}{l} (T, z) \\ \zeta^2 \frac{\partial^2 z_0}{\partial \zeta^2} &= - \zeta \frac{pRg}{l^3} \left[\Delta (T, z) + (T, \Delta z) + (z, \Delta T) + \frac{l\beta}{g} \frac{\partial T}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} u_0' &= - \frac{2Rg}{l^3} \left[(z_x, T) + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} (z_x, T) \right] \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} v_0' &= - \frac{2Rg}{l^3} \left[(z_y, T) + \zeta \frac{\partial}{\partial \zeta} (z_y, T) \right] \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Таким образом, если при рассмотрении процессов переходить от слоев с большой устойчивостью к слоям с малой устойчивостью, обращают на себя внимание следующие особенности. Основным фактором, определяющим изменение давления, оказывается адвекция тепла (для среды с большой устойчивостью адвекция вихря), т. е. роль бароклинических факторов становится определяющей. Этим, в частности, можно объяснить относительную успешность первого приближения И. А. Кибеля, содержащего учет одних бароклинических эффектов, в самых нижних слоях тропосферы, где устойчивость минимальна.

Изменения температуры определяются в основном адвекцией, что тоже в противоположность высоким слоям хорошо выполняется в нижней тропосфере. Правая часть уравнения для вертикальной скорости осталась без изменения, но для решения существенным оказывается распределение этой функции не в горизонтальной плоскости, как в случае большой устойчивости, а по вертикали. Аналогичные изменения претерпели уравнения для u' и v' .

Следует отметить также, что сходимость разложений для случая малой устойчивости (нижняя тропосфера) будет значительно более замедлена в силу того, что величина $\frac{1}{f} \Delta_p^{-1} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} f$ в нижней части тропосферы может не быть малой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Булеев Н. И. и Марчук Г. И. О динамике крупномасштабных процессов. Труды Института физики атмосферы АН СССР, № 2, 1958.
2. Дубов А. С. О прогнозе поля геопотенциала в нижней стратосфере. Материалы совещания координационной комиссии по численным методам прогноза. Под ред. М. И. Юдина. Гидрометеиздат, Л., 1961 (ГГО).
3. Каган Р. Л. К учету влияния конденсационных притоков тепла и стратосферы на изменение поля давления. Труды ГГО, вып. 99, 1959.
4. Кондратьев К. Я., Филипович О. П. Тепловой режим верхних слоев атмосферы. Гидрометеиздат, Л., 1960.
5. Юдин М. И. О прогнозе поля давления численными методами. Труды ГГО, вып. 71, 1957.
6. Юдин М. И. Предвычисление поля ветра и связанных с ним метеорологических элементов. ДАН СССР, т. 112, № 1, 1957.
7. Angell T. K. Some statistics of the magnitude of the ageostrophic wind obtained from constant level balloon data. Monthly Weather Review, vol. 87, № 5, 1959.
8. Chin Wan-cheng and Greenfield R. S. The relative importance of different heat-exchange processes in the lower stratosphere Journal of Meteorology, vol. 16, № 3, 1959.
9. Epstein E. S. An empirical study of vertical velocities in the lower stratosphere. Monthly Weather Review, vol. 87, № 3, 1959.

Б. Е. ШНЕЕРОВ

СХЕМА РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ КРАТКОСРОЧНОГО ПРОГНОЗА ГЕОПОТЕНЦИАЛА И ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКОРОСТИ

Рассматривается схема решения замкнутой системы уравнений термогидродинамики с учетом влияния рельефа местности. Приведены формулы для вычисления геопотенциала и вертикальной скорости.

I

Задача краткосрочного численного прогноза при помощи уравнений термогидродинамики сводится к определению пяти функций: геопотенциала Φ , горизонтальных составляющих скорости ветра u и v , величины $\omega = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dt}$ — аналога вертикальной составляющей скорости ветра и дефицита точки росы s . Если не учитывать притоки тепла от конденсации, то первые четыре функции находятся независимо от s .

Для определения этих функций служат следующие уравнения:

$$\frac{du}{dt} - lv + \frac{\partial \Phi}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dv}{dt} + lu + \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\zeta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + c^2 \omega = 0. \quad (4)$$

Здесь x и y — горизонтальные координаты, $\zeta = \frac{p}{p_0}$ — приведенное давление (p — давление, p_0 — стандартное давление на уровне моря), t — время, l — параметр Кориолиса, $c^2 = \frac{(\gamma_a - \gamma) R^2 T_1}{g}$ (T_1 — средняя температура, g — ускорение силы тяжести, γ — средний вертикальный градиент температуры, γ_a — адиабатический градиент), $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$ — индивидуальная производная по времени.

Вертикальная скорость ω определяется из соотношения

$$-g\omega = \frac{RT_1}{\zeta} \omega - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (5)$$

Граничные условия с учетом рельефа местности запишем следующим образом:

$$\zeta\omega = 0 \quad \text{при } \zeta = 0, \quad (6)$$

$$\omega = u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} \quad \text{при } \zeta = 1. \quad (7)$$

Здесь h — высота рельефа земной поверхности.

Используя уравнения (4) и (5) и учитывая очевидное равенство $\frac{\partial h}{\partial t} = 0$, приведем граничное условие (7) к следующему виду:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + \frac{c^2}{RT_1} (\Phi - gh) \right] = 0 \quad \text{при } \zeta = 1. \quad (8)$$

Введем обозначения:

$$f(x, y, \zeta, t + \delta t) = f, \\ f[x - u(x, y, \zeta, t)\delta t, y - v(x, y, \zeta, t)\delta t, \zeta, t] = f_0,$$

тогда

$$\frac{df}{dt} \approx \frac{f - f_0}{\delta t}.$$

Исходную систему уравнений (1) — (4) заменим следующей конечно-разностной схемой:

$$u - u_0 - lv\delta t + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta t = 0, \quad (9)$$

$$v - v_0 + lu\delta t + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta t = 0, \quad (10)$$

$$\zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Phi - \Phi_0) + c^2 \omega \delta t = 0. \quad (11)$$

Продифференцировав уравнение (11) по ζ и исключив $\frac{\partial \omega}{\partial \zeta}$ с помощью уравнения (3), получим

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left[\zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Phi - \Phi_0) \right] - c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \delta t = 0. \quad (12)$$

Граничное условие запишется в следующем виде:

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} (\Phi - \Phi_0) + \frac{c^2}{RT_1} (\Phi - \Phi_0) = \frac{c^2 g}{RT_1} (h - h_0) \quad \text{при } \zeta = 1. \quad (13)$$

Обозначим $l\delta t = \delta$. Тогда из (9) и (10) находим:

$$u = \frac{1}{1 + \delta^2} \left[u_0 + \delta v_0 - \frac{\delta}{l} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \delta \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) \right], \quad (14)$$

$$v = \frac{1}{1 + \delta^2} \left[v_0 - \delta u_0 - \frac{\delta}{l} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \delta \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right) \right]. \quad (15)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = & \frac{1}{1 + \delta^2} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) + \frac{\delta}{1 + \delta^2} \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) - \\ & - \frac{\delta}{l(1 + \delta^2)} \Delta \Phi + \frac{(1 - \delta^2)\delta^2}{(1 + \delta^2)^2 l^2} \frac{dl}{dy} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{2\delta^3}{(1 + \delta^2)^2 l^2} \frac{dl}{dy} \frac{\partial \Phi}{\partial y} - \\ & - \frac{(1 - \delta^2)\delta}{(1 + \delta^2)^2 l} \frac{dl}{dy} u_0 - \frac{2\delta^2}{(1 + \delta^2)^2 l} \frac{dl}{dy} v_0. \end{aligned}$$

Подставляя найденное выражение в (12), получим следующее уравнение для определения геопотенциала:

$$L(\Phi - \Phi_0) = b\delta \frac{\partial \Phi_0}{\partial x} - \Delta \Phi_0 + b' \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + blu_0 + \\ + l \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) + \frac{l}{\delta} \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - b'v_0 \right). \quad (16)$$

Здесь введены операторы:

$$L = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\zeta^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right) + \Delta + b\delta \frac{\partial}{\partial x} - b' \frac{\partial}{\partial y}, \\ \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

и параметры:

$$A = \left(\frac{c}{l} \right)^2 \frac{\delta^2}{1 + \delta^2}, \\ b = \frac{1}{l} \frac{dl}{dy} \frac{\delta^2 - 1}{\delta^2 + 1}, \\ b' = 2 \left(\frac{1}{l} \frac{dl}{dy} \right) \frac{\delta^2}{\delta^2 + 1}.$$

Заметим, что для $\delta \gg 1$ b и b' имеют один и тот же порядок величин. Следуя И. А. Кибелю [1], ищем решение уравнения (16) в виде суммы трех решений

$$\Phi = \delta \Phi_I + \Phi_{II} + \frac{1}{\delta} \Phi_{III}. \quad (17)$$

Функции Φ_I , Φ_{II} и Φ_{III} должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$L(\Phi_I) = -b \frac{\partial \Phi_0}{\partial x}, \quad (18)$$

$$L(\Phi_{II} - \Phi_0) = -\Delta \Phi_0 + b' \frac{\partial \Phi_0}{\partial y} + blu_0 + l \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} - \frac{\partial u_0}{\partial y} \right), \quad (19)$$

$$L(\Phi_{III}) = l \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} - b'v_0 \right) \quad (20)$$

и граничным условиям при $\zeta = 1$:

$$\frac{\partial \Phi_I}{\partial \zeta} + \alpha \Phi_I = 0, \quad (18')$$

$$\frac{\partial (\Phi_{II} - \Phi_0)}{\partial \zeta} + \alpha (\Phi_{II} - \Phi_0) = \alpha g (h - h_0), \quad (19')$$

$$\frac{\partial \Phi_{III}}{\partial \zeta} + \alpha \Phi_{III} = 0. \quad (20')$$

Тогда решением поставленной задачи (18) — (20) с граничными условиями (18') — (20') и условием (6) будут следующие функции:

$$\Phi_I = \frac{b}{2\pi} \int_0^1 \iint_{-\infty}^{\infty} G \frac{\partial \Phi_0}{\partial x'} dx' dy' d\zeta', \quad (21)$$

$$\Phi_{II} = \Phi_0 + \frac{1}{2\pi} \left\{ \frac{\alpha g}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (G)_{\zeta' = 1} (h - h_0) dx' dy' - \right. \\ \left. - \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} G \left[-\Delta \Phi_0 + b' \frac{\partial \Phi_0}{\partial y'} + blu_0 + l \left(\frac{\partial v_0}{\partial x'} - \frac{\partial u_0}{\partial y'} \right) \right] dx' dy' d\zeta', \quad (22)$$

$$\Phi_{III} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} Gl \left(\frac{\partial u_0}{\partial x'} + \frac{\partial v_0}{\partial y'} - b' v_0 \right) dx' dy' d\zeta', \quad (23)$$

Здесь

$$G = \frac{1}{2\sqrt{\zeta\zeta'}} \left\{ S \left(\ln \frac{\zeta}{\zeta'}, r \right) + S \left(\ln \frac{1}{\zeta\zeta'}, r \right) + (1 - 2\alpha) (\zeta\zeta')^{\frac{1}{2} - \alpha} \times \right. \\ \times \int_{\ln \frac{1}{\zeta\zeta'}}^{\infty} S(\xi, r) e^{\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\xi} d\xi \left. \right\} e^{\frac{b\delta}{2}(x' - x) - \frac{b'}{2}(y' - y)}, \\ S(\xi, r) = \left(\xi^2 + \frac{r^2}{A} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{\sqrt{1+a^2}}{2} \sqrt{\xi^2 + \frac{r^2}{A}}}, \quad (24)$$

$$r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2, \\ a^2 = \left(\frac{c}{l} \right)^2 \left(\frac{1}{l} \frac{dl}{dy} \right)^2 \frac{\delta^4}{1 + \delta^2}, \\ \alpha = \frac{(\gamma_a - \gamma) R}{g}.$$

Введем безразмерную величину

$$r_1 = \frac{r}{\sqrt{A}} \quad (25)$$

и положим

$$\left. \begin{aligned} x' - x &= r_1 \sqrt{A} \cos \Theta \\ y' - y &= r_1 \sqrt{A} \sin \Theta \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Тогда произведя в (21) — (23) замену переменных и проинтегрировав их по частям, придем к следующим выражениям:

$$\Phi_I = \frac{b\sqrt{A}}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \sin \Theta \frac{\partial G}{\partial \Theta} - \cos \Theta r_1 \frac{\partial G}{\partial r_1} \right\} \Phi_0 dr_1 d\Theta d\zeta', \quad (27)$$

$$\Phi_{II} = \Phi_0 + \frac{1}{2\pi} \left\{ \alpha g \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} (G)_{\zeta' = 1} (h - h_0) dr_1 d\Theta - \right. \\ \left. - \sqrt{A} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \left[\left[-\frac{r_1}{A} \Delta G + b' \left(r_1 \frac{\partial G}{\partial r_1} \sin \Theta + \frac{\partial G}{\partial \Theta} \cos \Theta \right) \right] \Phi_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(r_1 \sqrt{A} bG + \sin \Theta r_1 \frac{\partial G}{\partial r_1} + \cos \Theta \frac{\partial G}{\partial \Theta} \right) lu_0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sin \Theta \frac{\partial G}{\partial \Theta} - \cos \Theta r_1 \frac{\partial G}{\partial r_1} \right) tv_0 \right] dr_1 d\Theta d\zeta', \quad (28)$$

$$\Phi_{III} = -\frac{\sqrt{A}}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left\{ \left(\sin \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} - \cos \theta r_1 \frac{\partial G}{\partial r_1} \right) l u_0 - \right. \\ \left. - \left(\cos \theta \frac{\partial G}{\partial \theta} + \sin \theta r_1 \frac{\partial G}{\partial r_1} + r_1 \sqrt{A} b' G \right) l v_0 \right\} dr_1 d\theta d\zeta'. \quad (29)$$

Если выбрать шаг по времени $\delta t \ll 5$ час., то при $\alpha \approx 0,1$ и широте $\varphi \geq 45^\circ$ $a^2 \leq 0,08$ и поэтому величиной a^2 можно пренебречь по сравнению с единицей. Тогда полученные выражения можно упростить, используя функцию $M_1(\zeta, r_1, \zeta')$, введенную Н. И. Булеевым и Г. И. Марчуком [2],

$$G(\zeta, r_1, \theta, \zeta') = M_1(\zeta, r_1, \zeta') e^{(m \cos \theta - n \sin \theta) r_1},$$

где

$$M_1(\zeta, r_1, \zeta') = \frac{1}{2\sqrt{\zeta\zeta'}} \left[S\left(\ln \frac{\zeta}{\zeta'}, r_1\right) + S\left(\ln \frac{1}{\zeta\zeta'}, r_1\right) + \right. \\ \left. + (1 - 2\alpha) (\zeta\zeta')^{\frac{1}{2} - \alpha} \int_{\ln \frac{1}{\zeta\zeta'}}^\infty S(\xi, r_1) e^{\left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \xi} d\xi \right], \quad (30)$$

$$m = \frac{b\delta\sqrt{A}}{2},$$

$$n = \frac{b'\sqrt{A}}{2}.$$

Подставляя (30) в выражения (27) — (29) и произведя несложные преобразования, получим:

$$\Phi_I = \frac{m}{\pi\delta} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty G_1 \Phi_0 dr_1 d\theta d\zeta', \quad (31)$$

$$\Phi_{II} = \Phi_0 + \frac{1}{2\pi} \left\{ \alpha g \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (M_1)_{\zeta'=1} e^{(m \cos \theta - n \sin \theta) r_1} (h - h_0) r_1 dr_1 d\theta - \right. \\ \left. - \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (G_2 \Phi_0 + G_3 l \sqrt{A} u_0 + \right. \\ \left. + G_4 l \sqrt{A} v_0) dr_1 d\theta d\zeta' \right\}, \quad (32)$$

$$\Phi_{III} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (G_1 l \sqrt{A} u_0 - G_4 l \sqrt{A} v_0) dr_1 d\theta d\zeta'. \quad (33)$$

Здесь

$$G_1 = -\left(m M_1 + \cos \theta \frac{\partial M_1}{\partial r_1} \right) r_1 e^{(m \cos \theta - n \sin \theta) r_1}, \quad (34)$$

$$G_2 = \left\{ -\frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial M_1}{\partial r_1} \right) - 2m \cos \Theta r_1 \frac{\partial M_1}{\partial r_1} + \right. \\ \left. + M_1 [m \cos \Theta - n \sin \Theta + (n^2 - m^2) r_1] \right\} e^{(m \cos \Theta - n \sin \Theta) r_1}, \quad (35)$$

$$G_3 = \left[\sin \Theta r_1 \frac{\partial M_1}{\partial r_1} + M_1 \left(-n + \frac{2m}{\delta} \right) r_1 \right] e^{(m \cos \Theta - n \sin \Theta) r_1}, \quad (36)$$

$$G_4 = - \left(\sin \Theta r_1 \frac{\partial M_1}{\partial r_1} + n r_1 M_1 \right) e^{(m \cos \Theta - n \sin \Theta) r_1}. \quad (37)$$

Функции G_1, G_2, G_3, G_4 имеют особенность при $\xi = \xi'$ и $r_1 = 0$, однако, как показано в [3], интегралы от этих функций ограничены.

После того, как определены значения $\Phi_I, \Phi_{II}, \Phi_{III}$, скорости u и v находятся по следующим формулам:

$$u = \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} \left(\delta u_I + u_{II} + \frac{1}{\delta} u_{III} + \frac{1}{\delta^2} u_{IV} \right), \quad (38)$$

$$v = \frac{\delta^2}{1 + \delta^2} \left(\delta v_I + v_{II} + \frac{1}{\delta} v_{III} + \frac{1}{\delta^2} v_{IV} \right), \quad (39)$$

где

$$\left. \begin{aligned} u_I &= -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi_I}{\partial y}, & v_I &= \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \\ u_{II} &= -\frac{1}{l} \left(\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_I}{\partial x} \right), & v_{II} &= \frac{1}{l} \left(\frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_I}{\partial y} \right) \\ u_{III} &= -\frac{1}{l} \left(\frac{\partial \Phi_{III}}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial x} \right) + v_0, & v_{III} &= \frac{1}{l} \left(\frac{\partial \Phi_{III}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_{II}}{\partial y} \right) - u_0 \\ u_{IV} &= -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial x} + u_0, & v_{IV} &= -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial y} + v_0 \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

II

Расчет значений геопотенциала и горизонтальных составляющих скорости ветра по предложенной схеме производится следующим образом.

1) Находятся координаты точки \bar{x}, \bar{y} по формулам:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x_{ij} - u_{ij} \delta t, \\ \bar{y} &= y_{ij} - v_{ij} \delta t, \end{aligned}$$

где x_{ij} и y_{ij} — координаты узла сетки, а u_{ij} и v_{ij} — значения горизонтальных составляющих скорости ветра в этом узле.

2) В точке (\bar{x}, \bar{y}) путем интерполяции с соседних узлов сетки находятся значения u_0, v_0 и Φ_0 . Для интерполяции данных метеорологических элементов можно применить способ, использованный В. П. Мелешко [4]. В этой же точке определяется высота рельефа земной поверхности h_0 .

Начальные значения u и v необходимо вычислить отдельно. Можно в качестве начальных данных взять значения составляющих геострофического ветра u_g и v_g , вычисленных по заданному полю геопотенциала в узлах сетки. Однако для уровня земной поверхности лучше использовать действительные значения скорости ветра, которые можно найти путем интерполяции данных непосредственно с сети метеостанций.

3) По формулам (31) — (33) вычисляются значения Φ_I , Φ_{II} , Φ_{III} и по формуле (17) находится значение геопотенциала Φ в узле сетки. При этом за h принимается высота рельефа земной поверхности в точке, соответствующей узлу сетки.

4) Находим горизонтальные составляющие скорости ветра по формулам (40), записанным в форме конечных разностей:

$$u_I = -\frac{1}{l\Delta y} (\Phi_I^{j,j-1} - \Phi_I^{j,j}),$$

$$v_I = \frac{1}{l\Delta x} (\Phi_I^{i+1,j} - \Phi_I^{i,j}) \text{ и т. д.,}$$

а затем по формулам (38) и (39) находим значения u и v .

III

Величина ω определяется из уравнения

$$\omega = -\frac{1}{\delta} \frac{l\zeta^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Phi - \Phi_0). \quad (41)$$

Если положить

$$\omega = \omega_{II} + \frac{1}{\delta} \omega_{III} + \frac{1}{\delta^2} \omega_{IV}, \quad (42)$$

то

$$\left. \begin{aligned} \omega_{II} &= -\frac{l\zeta^2}{c^2} \frac{\partial \Phi_I}{\partial \zeta} \\ \omega_{III} &= -\frac{l\zeta^2}{c^2} \frac{\partial}{\partial \zeta} (\Phi_{II} - \Phi_0) \\ \omega_{IV} &= -\frac{l\zeta^2}{c^2} \frac{\partial \Phi_{III}}{\partial \zeta} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Подставляя вместо Φ_I , Φ_{II} и Φ_{III} выражения (31) — (33), производя дифференцирование по ζ и введя обозначения:

$$M_2 = -\zeta' \frac{\partial M_1}{\partial \zeta'},$$

$$I(\xi, r_1) = -\frac{1}{\sqrt{\xi}} \frac{\partial S(\xi, r_1)}{\partial \xi},$$

получим следующие формулы для определения аналога вертикальной скорости ω :

$$\omega_{II} = -\frac{lm}{\pi \delta c^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \bar{G}_1 \Phi_0 dr_1 d\theta d\zeta', \quad (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{III} &= -\frac{l}{2\pi c^2} \left\{ ag \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \left[-(M_2)_{\zeta'} \zeta + \delta_2 \zeta I(\ln \zeta, r_1) - \delta_1 I\left(\ln \frac{1}{\zeta}, r_1\right) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \bar{G}_2 \Phi_0 + \bar{G}_3 l \sqrt{A} u_0 + \bar{G}_1 l \sqrt{A} v_0 \right\} dr_1 d\theta d\zeta', \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

$$\omega_{IV} = -\frac{l}{2\pi e^2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^\infty (\bar{G}_1 l V \bar{A} u_0 - \bar{G}_4 l V \bar{A} v_0) dr_1 d\theta d\zeta', \quad (46)$$

где

$$\bar{G}_1 = \zeta^2 \frac{\partial G}{\partial \zeta} = -\left(m\bar{M} + \cos \theta \frac{\partial \bar{M}}{\partial r_1}\right) r_1 e^{(m \cos \theta - n \sin \theta) r_1}, \quad (47)$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_2 = \zeta^2 \frac{\partial G}{\partial \zeta} = & \left\{ -\frac{\partial}{\partial r_1} \left(r_1 \frac{\partial \bar{M}}{\partial r_1} \right) - 2m \cos \theta r_1 \frac{\partial \bar{M}}{\partial r_1} + \right. \\ & \left. + [m \cos \theta - n \sin \theta + (n^2 - m^2) r_1] \bar{M} \right\} e^{(m \cos \theta - n \sin \theta) r_1}, \quad (48) \end{aligned}$$

$$\bar{G}_3 = \left[\sin \theta r_1 \frac{\partial \bar{M}}{\partial r_1} + \left(n + \frac{2m}{\delta} \right) \bar{M} \right] e^{(m \cos \theta - n \sin \theta) r_1}, \quad (49)$$

$$\bar{G}_4 = -\left(\sin \theta r_1 \frac{\partial \bar{M}}{\partial r_1} + n r_1 \bar{M} \right) e^{(m \cos \theta - n \sin \theta) r_1}, \quad (50)$$

$$\bar{M} = -\zeta M_2 + \delta_2 \frac{\zeta}{\zeta'} I \left(\ln \frac{\zeta}{\zeta'}, r_1 \right) - \delta_1 I \left(\ln \frac{\zeta'}{\zeta}, r_1 \right)$$

$$\delta_1 = \begin{cases} 1 & \text{при } \zeta' \leq \zeta \\ 0 & \text{при } \zeta' > \zeta \end{cases} \quad \delta_2 = \begin{cases} 0 & \text{при } \zeta' \leq \zeta \\ 1 & \text{при } \zeta' > \zeta \end{cases} \quad (51)$$

Графики функций M_1 , M_2 и I , входящих в решение задачи, имеются в работе [2].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кибель И. А. Конечно-разностная схема решения полной системы уравнений краткосрочного прогноза погоды и соотношения квазигеострофичности. ДАН СССР, 132, № 2, 1960.
2. Булеев Н. И., Марчук Г. И. О динамике крупномасштабных атмосферных процессов. Труды ИФА АН СССР, № 2, 1958.
3. Кибель И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. ГИТТЛ, М., 1957.
4. Мелешко В. П. Численный прогноз дефицита точки росы (см. настоящий сб.).

РАСЧЕТЫ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЦИКЛОНОВ В ГОРНЫХ РАЙОНАХ

Приводятся результаты расчетов перемещений циклонов в районе Скандинавии для сроков от 12 до 36 час. Ошибки сопоставляются с результатами расчетов по схемам, не учитывающим характеристики рельефа. Приводятся данные аналогичной проверки, выполненной другими авторами для Уральских гор.

Одной из причин, затрудняющих прогнозирование погодных процессов на территории Северо-Западного УГМС, является близость Скандинавских гор, которые весьма заметным образом влияют на воздушные течения, особенно при западных потоках. Характер влияния рельефа на погодные процессы весьма сложен и многообразен; этому вопросу посвящены десятки статей как в СССР, так и за рубежом. Цель настоящей работы заключалась в проверке на фактическом материале выводов, полученных одним из авторов [1], о влиянии рельефа на перемещения барических центров. Эти выводы сводились к следующему. Барические центры при движении в поле изогипс рельефа приобретают дополнительную скорость, которая связана с градиентом этих изогипс (соответственным образом осредненных, естественно) таким же образом, как связана скорость геострофического ветра с градиентом поля изогипс изобарической поверхности. Поскольку горные хребты являются аналогами барических гребней, то барические центры стремятся обогнуть их «антициклоническим» образом, т. е. по часовой стрелке. Такое огибание, естественно, не всегда имеет место, поскольку речь идет о дополнительно возникающих скоростях перемещения барических центров, которые накладываются на основную скорость переноса, обусловленную общим термобарическим полем атмосферы.

Проверка этих положений была выполнена на сравнительно небольшом материале (10 случаев для Скандинавских гор и 10 случаев для Уральских гор) Б. Д. Ременсоном для прогнозов с заблаговременностью 18 час. Проверка производилась следующим образом. Сначала прогнозы перемещений циклонов выполнялись по схемам, не учитывающим влияние гор, а затем расчеты проводились с учетом орографических воздействий. В качестве основных прогностических схем были взяты метод ведущего потока и метод, использующий отклонения ветра от геострофического, предложенные М. И. Юдиным и тщательно испытанные для равнинных местностей К. В. Пятыгиной совместно с сотрудниками Северо-Западного УГМС М. Н. Захаровой и М. З. Емельяновой [2], [3] и Л. С. Орловой [4]. Результаты проверки Б. Д. Ременсона приведены в табл. 1.

Использование различных методов для предвычисления перемещений барических центров в районах Скандинавии и Урала было обусловлено тем, что в районе Сибири преобладали высокие заполняющиеся циклоны, для которых, как показано в работе [4], метод ведущего потока практи-

чески не применим. Для таких циклонов сначала определялась скорость смещения центра в данный момент времени по отклонениям ветра от геострофического, полученным в свою очередь расчетным путем. Дальнейшее перемещение циклона в течение 18 час. находилось из условия неизменности скорости смещения, найденной в исходный момент времени.

Таблица 1

Район	Основной метод предвычисления	Число случаев	Влияние гор	Средние абсолютные ошибки		
				угол отклонения (градусы)	скорость смещения (км/18 час.)	векторная ошибка (км)
Скандинавские горы	Ведущий поток	10	Не учитывалось	14	200	290
			Учитывалось	6	100	150
Уральские горы	Линейная экстраполяция скорости смещения	10	Не учитывалось	19	160	220
			Учитывалось	13	100	130

Как видно из табл. 1, результаты проверки оказались очень обнадеживающими. Так, угловая ошибка смещения после введения поправок на орографию уменьшилась в среднем на 7°, что составляет 42% первоначальной ошибки; ошибка в величине смещения уменьшилась на 80 км (44%), векторная ошибка снизилась на 115 км (45%).

В работе Б. Д. Ременсона число циклонов, переваливающих через Скандинавские горы, т. е. процессов, наиболее интересных для Северо-Западного УГМС, было весьма невелико. В связи с этим представлялось необходимым проверить правильность упоминавшейся ранее схемы на большем материале. Кроме того, методика расчетов Б. Д. Ременсона была слишком громоздка. Она заметно упростилась после введения характеристик рельефа непосредственно в ведущий поток.

Для испытания были взяты все случаи переваливания циклонов через Скандинавские горы за четыре года (1957—1960 гг.). При этом, естественно, из рассмотрения исключались те случаи, когда циклоны либо заполнялись перед горами и их дальнейшее существование проследить было невозможно, либо возникали уже на подветренных склонах. Часть перемещений не вошла в расчеты по чисто методическим причинам. Поскольку ведущий поток строился по данным карт барической топографии за 3 или 15 час., к расчетам привлекались только те случаи, в которых барические центры располагались у западных берегов Скандинавии именно в эти сроки. Если бы задача ставилась чисто диагностически, то можно было бы привлекать данные барической топографии за последующие сроки, заново перестраивать ведущий поток и рассчитывать перемещение центров на сутки и больше при подходе циклонов к горам в любой срок. Поскольку же задача решалась в прогностическом плане, т. е. предполагалось, что имеется информация о барических полях только в данный момент, естественно было во избежание дополнительных ошибок за счет нестационарности ведущего потока ограничиться указанными случаями.

Перемещения барических центров без учета гор определялись с помощью ведущего потока, согласно М. И. Юдину [4],

$$M = 0,72 \sum_{r=660}^6 H_{850} - 0,30 \sum_{r=330}^6 H_{850} - 1,3H_{850} + H_{500} + 2,8H_{700} + n(\varphi). \quad (1)$$

Здесь H_{850} , H_{700} и H_{500} — высоты изобарических поверхностей 850, 700 и 500 мб соответственно в дкм. Индексы у сумм означают суммирование по шести точкам, расположенным по окружностям с радиусами 660 и 330 км. Первые три члена являются результатом конечно-разностного представления лапласиана. Слагаемыми H_{500} и $2,8 H_{700}$ учитывается адвекция температуры. Функция $n(\varphi)$ (ее значения приведены в табл. 2) характеризует изменение параметра Кориолиса с широтой.

Таблица 2

Широта (φ)	75	72	69	66	63	60	57	54	51	48	45	42
$n(\varphi)$	13	11	9	7	5	3	1	-1	-3	-6	-9	-11

Для определения скоростей переноса по ведущему потоку по формуле (1) составлены специальные таблицы. Если воспользоваться обычной формой связи между ведущим потоком и скоростями перемещения:

$$u = -\frac{10g}{l} \frac{\partial M'}{\partial y}, \quad v = \frac{10g}{l} \frac{\partial M'}{\partial x}, \quad (2)$$

где g — ускорение силы тяжести, l — параметр Кориолиса, то M' (в дкм) может быть выражено через M с помощью соотношения

$$M = 5M'. \quad (3)$$

Дополнительные скорости за счет влияния рельефа выражаются, согласно [1], следующим образом:

$$u_r = -\beta_0 \frac{10g}{l} \frac{\partial H_r}{\partial y}, \quad v_r = \beta_0 \frac{10g}{l} \frac{\partial H_r}{\partial x}, \quad (4)$$

где H_r — высота рельефа в дкм, β_0 — безразмерный постоянный множитель, равный 0,062.

Суммируя равенства (2) и (4), получим выражение для ведущего потока, определяющего общую скорость перемещения барических центров в горных условиях

$$M_r' = M' + \beta_0 H_r.$$

Если суммарный ведущий поток записать в форме (1), то поправка за счет рельефа запишется, согласно (3), в виде

$$M = 0,72 \sum_{r=660}^6 H_{850} - 0,30 \sum_{r=330}^6 H_{850} - 1,3H_{850} + H_{500} + 2,8H_{700} + n(\varphi) + 0,31H_r. \quad (5)$$

Здесь H_r — высота рельефа, осредненная определенным образом.

Как проводить это осреднение, четких представлений нет, поэтому вопрос об оптимальном осреднении решался эмпирически: расчеты перемещений циклонов выполнялись на одном и том же исходном материале с различной степенью сглаженности рельефа. В качестве исходной карты рельефа Скандинавского полуострова была взята карта, построенная

Б. Д. Ременсоном, который применил осреднение по кругу радиусом 200 км. Широко известные карты Берковского и Бертана [7] не были использованы в силу их крайней схематичности (они строились для полушарий).

Следует отметить, что неопределенность коэффициента перед членом, характеризующим влияние рельефа, в выражении для ведущего потока обусловлена не только отсутствием четкого представления о масштабе осреднения орографии, но также и влиянием трения. В работе [1] расчетные формулы, которые положены в основу настоящей статьи, получены для случая идеальной жидкости. Решая задачу об обтекании гор с учетом турбулентного трения в пограничном слое, К. А. Решетникова [5] пришла к заключению, что значения вертикальных скоростей, возникающих при переваливании воздушного потока через горный хребет, должны быть уменьшены примерно в 0,6 раза по сравнению с их значениями для идеальной жидкости. Поскольку характеристики турбулентного обмена в горных условиях практически совсем не изучены, эту цифру следует считать только ориентировочной. Таким образом, оптимальное значение коэффициента, учитывающего как эффект необходимого осреднения рельефа, так и эффект трения, может быть определено в настоящее время только из анализа материалов опытных расчетов. В связи с этим расчеты перемещений барических центров проводились для двух значений коэффициента перед величиной H_r в равенстве (5), а именно 0,10 и 0,05. Дальнейшее уменьшение коэффициента приводило к тому, что введение поправки за счет рельефа практически не сказывалось на ведущем потоке, построенном без учета рельефа.

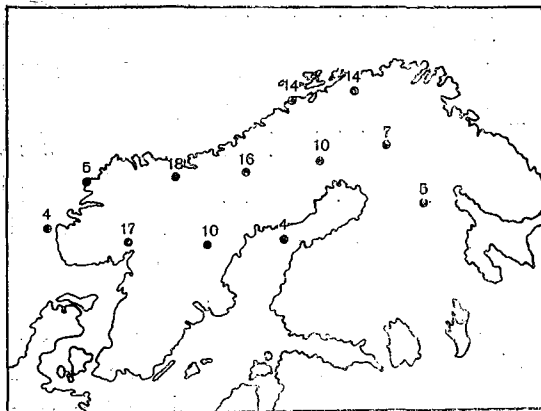


Рис. 1. Значения поправок на орографию к ведущему потоку $M=5M'$ для регулярной сети точек.

Результаты этих испытаний приведены в табл. 3. В качестве характеристик оправдываемости приняты средние по модулю ошибки в определении скорости и направления смещения, а также средняя векторная ошибка. Приводятся также значения относительных ошибок (отношение ошибки к длине пути смещения и векторной ошибки к фактическому смещению барического центра за срок прогноза). Все оценки проведены для заблаговременности прогноза 12, 18, 24 и 36 час.

Из этой таблицы прежде всего следует, что учет рельефа при расчетах перемещений циклонов заметным образом улучшает результаты прогноза. Наиболее удачные результаты дает расчетная схема, в которой высоты гор, снятые с карты Б. Д. Ременсона, учитываются введением коэффициента 0,05.

Значения поправки к ведущему потоку, определяемому по формуле (1), в регулярной сетке точек (в дкм) для рассматриваемого случая даны на рис. 1. Эти значения никак не связаны с заданием структуры основного потока и могут быть использованы в любых других схемах, использующих для прогноза смещений барических центров идею ведущего потока (например, в работе Н. П. Лужной [6] и др.). Пример

фактического и рассчитанных смещений циклона (с учетом и без учета орографии) дан на рис. 2.

Таблица 3

Ошибки расчетов перемещений циклонов по ведущему потоку без учета и с учетом влияния орографии

	Значение коэффициента перед H_r											
	0			0,10			0,05			0		
	0	0,10	0,05	0	0,10	0,05	0	0,10	0,05	0	0,10	0,05
	За 12 час.			За 18 час.			За 24 часа			За 36 час.		
Число случаев	30	30	30	29	29	29	28	28	28	17	17	17
Среднее фактическое перемещение (км)	588	588	588	846	846	846	1055	1055	1055	1423	1423	1423
Средняя (по модулю) ошибка величины перемещения (км)	221	176	152	272	230	178	312	273	235	395	385	331
Средняя (по модулю) ошибка в направлении перемещения (град.)	24	20	19	22	15	16	17	16	15	19	19	20
Векторная ошибка (км)	303	300	242	382	346	287	432	409	360	617	622	612
Относительная векторная ошибка	0,52	0,51	0,41	0,45	0,41	0,34	0,41	0,39	0,34	0,43	0,45	0,44
Относительная ошибка величины перемещения	0,38	0,30	0,26	0,32	0,27	0,21	0,30	0,26	0,22	0,28	0,28	0,24

Эффективность учета рельефа довольно отчетливо зависит от заблаговременности прогноза. На рис. 3 нанесены характеристики ошибок в зависимости от интервала времени, для которого рассчитывалось перемещение, или, иначе говоря, от расстояния конечного положения циклона от горного хребта, поскольку в качестве исходных ситуаций брались положения циклонов вблизи западных берегов Скандинавского полуострова. Оказалось, что наиболее эффективным является срок около 18 час. Весьма близкими являются ошибки за срок 12 час. Для суточных прогнозов эффективность введения поправок заметно уменьшается, а для 36 час. она практически делается равной нулю. Для прогнозов на сроки, превышающие сутки, большая часть перемещения циклонов происходит по равнинной местности и корректировка сравнительно небольшого участка, проходимого в условиях горного рельефа, не может заметным образом компенсировать ошибки, связанные с неточным описанием влияния общего термобарического поля атмосферы на перемещения циклонов.

Для заблаговременности 18 час. учет рельефа уменьшает угловые ошибки смещений в среднем на 5° , что составляет 20% общей величины ошибки в направлении перемещений, рассчитанных без учета гор. Относительная векторная ошибка уменьшается на 0,11, или на 25%, относительная ошибка определения скорости — на 0,11, или на 34%. По сравнению с данными Б. Д. Ременсона эффект введения поправок оказался несколько меньшим. Это явилось следствием того, что испытания Б. Д. Ременсона проводились на отдельных, специально выбранных случаях, а в данной работе использовался уже сравнительно массовый материал.

Была сделана попытка классифицировать ошибки по направлению движения циклонов (запад, восток) и по месту переваливания через хребет (северная, средняя и северная части). К сожалению, недостаточность материала не позволила провести такую классификацию сколько-нибудь

надежно. Так, из 30 циклонов 17 оказались перемещающимися с запада по северной части хребта, по пять циклонов прошло с запада через сред-

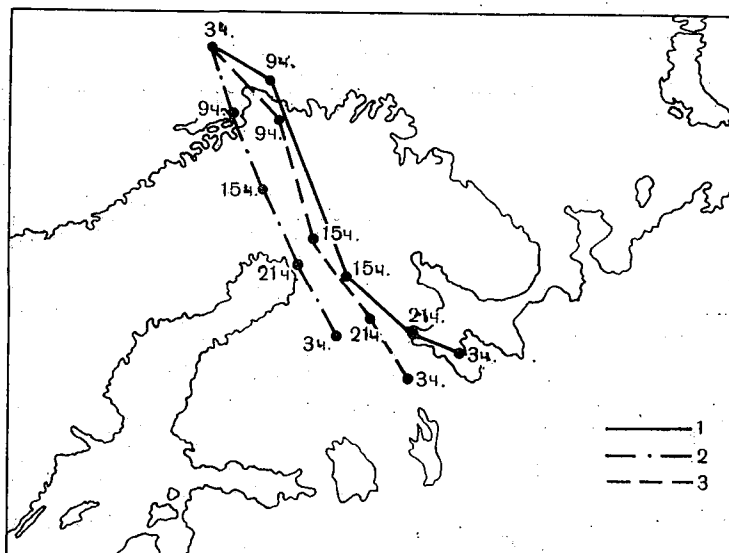


Рис. 2. Пример фактического и рассчитанных (по картам за 3 часа 4/VI 1958 г.) перемещений циклона.
1 — фактическое перемещение, 2 — рассчитанное (без поправок на орографию), 3 — рассчитанное (с учетом влияния рельефа).

нюю и южную части Скандинавского полуострова и только три прошли по южной части хребта с востока. Введение поправки на орографию наи-

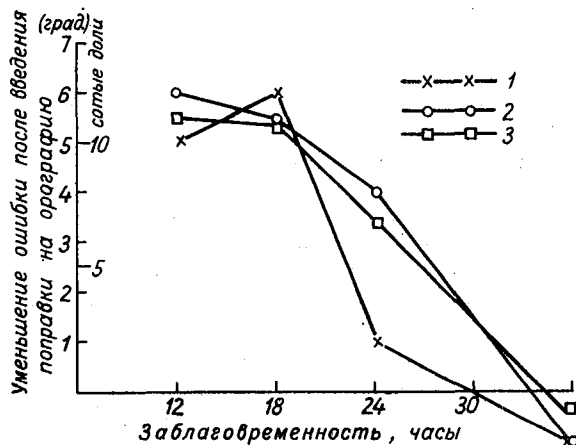


Рис. 3. Уменьшение ошибок расчетов после введения поправок на орографию.
1 — средней (по модулю) ошибки в направлении перемещения, 2 — средней (по модулю) относительной ошибки в величине перемещения, 3 — средней относительной векторной ошибки.

более сильно уменьшило угловую ошибку для циклонов, пересекающих среднюю часть хребта (24 и 18° для 12- и 18-часовых перемещений соответственно). Уменьшение ошибок в длине пути и векторных ошибок

оказалось наиболее ярко выраженным для циклонов, движущихся по северной части хребта (125 км). Для циклонов, движущихся с востока, заметного улучшения расчетов после введения поправок обнаружено не было. Все эти данные носят весьма условный характер в силу недостаточности числа случаев для такой систематизации. В целом же данные испытаний, приведенные в настоящей работе, свидетельствуют о целесообразности введения поправок на топографию при расчете перемещений циклонов по изложенному выше способу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубов А. С. Влияние рельефа на перемещение барических центров. *Метеорология и гидрология*, № 7, 1960.
2. Пятыгина К. В., Захарова М. Н. Предвычисление перемещений центров циклонов. *Труды ГГО*, вып. 71, 1957.
3. Пятыгина К. В., Емельянова М. З. Результаты предвычисления перемещений барических центров. *Труды ГГО*, вып. 81, 1959.
4. Орлова Л. С. Опыт работы расчетной группы Ленинградского бюро погоды по предвычислению полей давления и перемещений циклонов. *Труды ЦИП*, вып. 106, 1960.
5. Решетникова К. А. Определение вертикальных токов из уравнений динамики турбулентной атмосферы и анализ их осредненных значений. *Труды ГГО*, вып. 71, 1957.
6. Лужная Н. П. К вопросу о перемещении антициклонов. *Метеорология и гидрология*, № 7, 1959.
7. Verkofsky L. and Bertoni E. A. Mean topographic charts for the entire Earth. *Bulletin of the American Meteorological Society*, vol. 36, № 7, 1955.

О ВЛИЯНИИ НАКЛОНА ТРОПОПАУЗЫ НА ИЗМЕНЕНИЕ ПОЛЯ ДАВЛЕНИЯ

В настоящей работе изучается вопрос о влиянии наклона тропопаузы на изменение поля давления. Формулируются условия склейки, которые должны иметь место на тропопаузе при решении двухслойной задачи: тропосфера — стратосфера. Показывается, что влияние наклона тропопаузы на изменение поля давления мало и может не учитываться при прогнозе.

1. В работе [3] было показано, что влияние повышенной устойчивости стратосферы на изменение полей метеоэлементов в нижней и средней тропосфере достаточно мало и может не приниматься во внимание.

С другой стороны, ясно, что при решении задачи прогноза в верхней тропосфере и нижней стратосфере эффект повышенной устойчивости стратосферы должен учитываться. Учет повышенной устойчивости стратосферы тем или иным способом производился в ряде работ (например, [3, 4, 6, 7, 8]). Решению трехмерной задачи с учетом стратосферы посвящены работы [3, 4, 7].

В этих работах атмосфера разбивается на два слоя: тропосферу и стратосферу, в каждом из которых параметр статической устойчивости

$$d^2 = \frac{(\gamma_a - \gamma) R^2 T}{g l^2}$$

(где γ_a — адиабатический градиент температуры, γ — истинный вертикальный градиент температуры, T — абсолютная температура, R — удельная газовая постоянная воздуха, l — параметр Кориолиса, g — ускорение силы тяжести) считается величиной постоянной, но испытывает разрыв на тропопаузе.

При решении двухслойной задачи с учетом стратосферы возникает ряд вопросов как физического, так и математического характера. Часть из них связана с поведением тропопаузы как поверхности раздела двух слоев атмосферы.

В работах [3, 4] предполагалось, что тропопауза совпадает с некоторой фиксированной изобарической поверхностью. (В этих работах использовалась изобарическая система координат x, y, p, t .) Такое предположение плохо соответствует действительности. Известно, что над барическими образованиями тропопауза может иметь значительный наклон по отношению к изобарическим поверхностям. Амплитуды «волн» тропопаузы могут достигать нескольких километров.

Представляет интерес оценить влияние этого фактора в задаче прогноза полей метеоэлементов.

Точное решение двухслойной задачи с границей раздела, не совпадающей с плоскостью $p = \text{const}$ в изобарической системе координат (или с плоскостью $z = \text{const}$ в геометрической системе), наталкивается на большие математические трудности. В связи с этим в дальнейшем будет применен следующий приближенный способ решения. Для изобарической тропопаузы будет оценено влияние изменения ее высоты на изменение поля давления. Оказывается, что даже при значительном изменении высоты тропопаузы (до 100 мб или 3—4 км) влияние этого изменения очень мало.

Далее будет оценено влияние наклона тропопаузы, при этом перепад высот по горизонтали уже не будет приниматься во внимание, т. е. условия на тропопаузе, учитывающие ее наклон, будут записаны при постоянном значении вертикальной координаты.

Заметим, что аналогичный приближенный прием используется при решении задачи об учете орографии в численном прогнозе: граничное условие записывается не на уровне горы, а на уровне моря, при этом учитывается лишь эффект наклона горы, приводящий к возникновению вертикальных токов.

2. Рассмотрим уравнения вихря скорости и притока тепла, используя изобарическую систему координат:

$$\frac{\partial \Delta \Phi}{\partial t} + \frac{1}{l} \left(\Phi, \Delta \Phi + \frac{l^2}{2} \right) = l^2 \frac{\partial \tilde{w}}{\partial \zeta}, \quad (1)$$

$$\zeta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \zeta} + \frac{1}{l} \left(\Phi, \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) + \frac{(\gamma_a - \gamma) R^2 T}{g \zeta} \tilde{w} = 0. \quad (2)$$

Здесь Φ — геопотенциал изобарической поверхности, t — время, $\zeta = \frac{p}{p_0}$ (p — давление, p_0 — стандартное давление на уровне моря), $\tilde{w} = \frac{1}{p_0} \frac{dp}{dt}$ — аналог вертикальной скорости в изобарической системе координат, Δ — оператор Лапласа,

$$(A, B) = \frac{\partial A}{\partial x} \frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial A}{\partial y} \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Исключая \tilde{w} и считая

$$d^2 = \frac{(\gamma_a - \gamma) R^2 T}{g l^2}$$

величиной постоянной, получим

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} + d^2 \Delta \Phi = - \psi. \quad (3)$$

Здесь

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \varphi,$$

$$\psi = d^2 l A_{\varphi} + R \frac{\partial}{\partial \zeta} (\zeta A_T),$$

$$A_{\varphi} = \frac{1}{l^2} \left(\Phi, \Delta \Phi + \frac{l^2}{2} \right) - \text{адвекция вихря,}$$

$$A_T = - \frac{1}{l} (\Phi, T) = \frac{1}{R l} \left(\Phi, \zeta \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right) - \text{адвекция тепла.}$$

Решая двухслойную задачу (тропосфера — стратосфера), будем рассматривать два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial \varphi_I}{\partial \zeta} + d_I^2 \Delta \varphi_I &= -\psi_I \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial \zeta} + d_{II}^2 \Delta \varphi_{II} &= -\psi_{II} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Отнесем величины с индексом I к тропосфере, а с индексом II к стратосфере. Граничные условия примем в обычном виде (см., например, [2]):

$$\zeta \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial \zeta} \text{ ограничено при } \zeta = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial \varphi_I}{\partial \zeta} + \alpha \varphi_I = -RA_T \text{ при } \zeta = 1, \quad (6)$$

$$\alpha = \frac{R}{g} (\gamma_a - \gamma) \approx 0,1.$$

3. Решения для тропосферы и стратосферы должны быть склеены на тропопаузе. Для получения условий склейки будем считать, что на тропопаузе давление и температура непрерывны.

Пусть уравнение тропопаузы в изобарической системе координат

$$\bar{\zeta} = \pi(x, y, t). \quad (7)$$

На тропопаузе имеем условие

$$[\Phi] = 0. \quad (8)$$

Здесь $[f]$ означает скачок функции f при переходе через тропопаузу. Дифференцируя (8) по s ($s = x, y, t$) вдоль тропопаузы, получим

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] + \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right] \frac{\partial \pi}{\partial s} = 0. \quad (9)$$

Используя уравнение статики

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} = -\frac{R}{\zeta} T \quad (10)$$

и условие на тропопаузе

$$[T] = 0, \quad (11)$$

получим

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right] = 0, \quad (12)$$

а следовательно, из (9)

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right] = 0. \quad (13)$$

В частности, при $s = t$

$$\left[\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right] = 0. \quad (14)$$

Условие (14) будем использовать в качестве первого условия склейки. Отметим, что условие непрерывности тенденции геопотенциала на тропопаузе использовалось в работах [3, 4].

Продифференцируем теперь (11) по s вдоль тропопаузы

$$\left[\frac{\partial T}{\partial s} \right] + \left[\frac{\partial T}{\partial s} \right] \frac{\partial \pi}{\partial s} = 0. \quad (15)$$

Получим второе условие склейки.

При наличии поверхности разрыва уравнение неразрывности может быть записано в виде (см., например, [1])

$$\rho_I (N - V_{nI}) = \rho_{II} (N - V_{nII}). \quad (16)$$

Здесь ρ — плотность воздуха, N — скорость перемещения поверхности разрыва, V_n — нормальная к поверхности разрыва составляющая скорости.

Для тропопаузы

$$\rho_I = \rho_{II}. \quad \{ \rho \} = 0$$

Тогда

$$V_{nI} = V_{nII}, \quad (17)$$

т. е. нормальные составляющие скорости разрыва не претерпевают. Условие (17) дает

$$[\tilde{w}] = [u] \frac{\partial \pi}{\partial x} + [v] \frac{\partial \pi}{\partial y}. \quad (18)$$

Если в (18) заменить ветер геострофическим, то с учетом (14) получим, что

$$[\tilde{w}] = 0. \quad (19)$$

Это означает, что при такой постановке задачи учет наклона тропопаузы невозможен¹. Для учета наклона необходимо ввести отклонения ветра от геострофического. Раскладывая составляющие скорости ветра на геострофическую и агеострофическую части, будем иметь:

$$\begin{aligned} [u] &= [u_g] + [u'], \\ [v] &= [v_g] + [v']. \end{aligned}$$

Однако из (13) вытекает, что $[u_g] = [v_g] = 0$. Таким образом, разрыв ветра на тропопаузе обуславливается агеострофическими составляющими.

Возвращаясь к условию (18), заметим, что для случая изобарической тропопаузы это условие также переходит в условие (19), которое и было использовано в качестве условия склейки Р. Л. Каганом в работе [31]².

¹ Если заменить в (19) \tilde{w} из (2), то условие склейки будет содержать член $\left[\frac{A_T}{a^2} \right]$. Но $\left[A_T \right] = -\frac{1}{l} \left[(\Phi, T) \right] = -\frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial x} \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right] + \frac{1}{l} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]$. Используя (15),

получим $\left[A_T \right] = \frac{1}{l} \left[\frac{\partial T}{\partial \zeta} \right] (\Phi, \pi)$, т. е. разрыв адвекции тепла пропорционален адвекции тропопаузы. Далее, однако, будет показано, что члены, содержащие разрывы адвекции тепла, в окончательном решении не содержатся.

² В работе [3] это условие в явном виде не формулировалось, хотя фактически использовалось при получении прогностического уравнения.

Преобразуем условие (18), для чего используем известные представления для отклонений ветра от геострофического и соотношение (2):

$$u' = -\frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} - \frac{1}{l^3} \left(\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial x} \right), \quad (20)$$

$$v' = -\frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial y} - \frac{1}{l^3} \left(\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right), \quad (21)$$

$$\tilde{w} = -\frac{\zeta^2}{l^2 a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \zeta} - \frac{\zeta^2}{l^3 a^2} \left(\Phi, \frac{\partial \Phi}{\partial \zeta} \right). \quad (22)$$

При подставке (20) — (22) в (18) появятся разрывы вторых производных:

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} \right], \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial y} \right], \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right], \\ \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right], \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right].$$

Преобразуем эти величины. Дифференцируя условие (14) по x вдоль тропопазузы, получим

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial x} \right] = - \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \zeta} \right] \frac{\partial \pi}{\partial x}.$$

Аналогично:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial y} \right] &= - \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t \partial \zeta} \right] \frac{\partial \pi}{\partial y} \\ \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right] &= - \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \zeta} \right] \frac{\partial \pi}{\partial x} \\ \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] &= - \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial \zeta} \right] \frac{\partial \pi}{\partial y} = - \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial \zeta} \right] \frac{\partial \pi}{\partial x} \\ \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right] &= - \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial \zeta} \right] \frac{\partial \pi}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Используя (15), (20) — (22), после несложных преобразований вместо (18) получим

$$\left(r^2 + \frac{\zeta^2}{a_1^2} \right) \frac{\partial \varphi_1}{\partial \zeta} - \left(r^2 + \frac{\zeta^2}{a_{II}^2} \right) \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial \zeta} = Q \quad \text{при} \quad \zeta = \pi. \quad (24)$$

Здесь

$$r^2 = \left(\frac{\partial \pi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \pi}{\partial y} \right)^2,$$

$$Q = -\zeta R \left[\frac{A_T}{a^2} \right] - r^2 \frac{R}{\zeta} [A_T].$$

Условие (24) и является вторым условием склейки. Отметим, что полученные условия склейки «квазигеострофичны» в той же самой мере, что и используемые уравнения движения, т. е. содержат одинаковые степени разложения по малому параметру И. А. Кибеля [2]. В этом смысле условия склейки приведены в соответствие с уравнениями движения.

4. Систему уравнений (4) решаем методом полупрямых. В дальнейшем используется методика, разработанная М. И. Юдиным в работе [5]. Следуя М. И. Юдину, используя треугольную сетку с шагом h , вместо (4) получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial \varphi_j^0}{\partial \zeta} - 6a_j^2 \varphi_j^0 + 6a_j^2 \varphi_j^1 &= -\psi_j^0 \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \zeta^2 \frac{\partial \varphi_j^1}{\partial \zeta} + a_j^2 \varphi_j^0 - 3a_j^2 \varphi_j^1 &= -\psi_j^1 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

ψ_j^0 — значение φ_j в точке сетки, ψ_j^1 — среднее значение φ_j в шести ближайших точках сетки (j -I, II),

$$a^2 = \frac{2}{3} \frac{d^2}{h^2}.$$

Решение однородной системы будем искать в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_j^0 &= A_j^0 \zeta^{\lambda_j - \frac{1}{2}} \\ \varphi_j^1 &= A_j^1 \zeta^{\lambda_j - \frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

Это дает

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_j^2 - \frac{1}{4} - 6a_j^2) A_j^0 + 6a_j^2 A_j^1 &= 0 \\ a_j^2 A_j^0 + (\lambda_j^2 - \frac{1}{4} - 3a_j^2) A_j^1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

Приравнивая определитель системы (27) нулю, получим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_j^2 &= \frac{1}{4} + \frac{a_j^2}{2} (9 \pm \sqrt{33}) \\ \lambda_{j1} &= \sqrt{\frac{a_j^2}{2} (9 - \sqrt{33}) + \frac{1}{4}} \\ \lambda_{j2} &= \sqrt{\frac{a_j^2}{2} (9 + \sqrt{33}) + \frac{1}{4}} \\ \lambda_{j3} &= -\lambda_{j1} \\ \lambda_{j4} &= -\lambda_{j2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Ищем общее решение системы (25) в виде:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_j^0 &= \sum_{i=1}^4 B_{ji}(\zeta) \zeta^{\lambda_{ji} - \frac{1}{2}} \\ \varphi_j^1 &= \sum_{i=1}^4 \left(1 - \frac{\lambda_{ji}^2 - \frac{1}{4}}{6a_j^2} \right) B_{ji} \zeta^{\lambda_{ji} - \frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Тогда для нахождения функций B_{ji} получим систему:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^4 B'_{ji} \zeta^{\lambda_{ji} - \frac{1}{2}} &= 0 \\ \sum_{i=1}^4 \lambda_{ji} B'_{ji} \zeta^{\lambda_{ji} - \frac{1}{2}} &= -\frac{1}{\zeta} \psi_j^0 \\ \sum_{i=1}^4 \left(1 - \frac{\lambda_{ji}^2 - \frac{1}{4}}{6a_j^2}\right) B'_{ji} \zeta^{\lambda_{ji} - \frac{1}{2}} &= 0 \\ \sum_{i=1}^4 \lambda_{ji} \left(1 - \frac{\lambda_{ji}^2 - \frac{1}{4}}{6a_j^2}\right) B'_{ji} \zeta^{\lambda_{ji} - \frac{1}{2}} &= -\frac{1}{\zeta} \psi_j^1 \\ B'_{ji} &= \frac{dB_{ji}}{d\zeta} \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

Введем в рассмотрение операторы:

$$\left. \begin{aligned} F_1(A) &= \left(0,50 - \frac{1,5}{\sqrt{33}}\right) A^0 + \frac{6}{\sqrt{33}} A^1 \\ F_2(A) &= \left(0,50 + \frac{1,5}{\sqrt{33}}\right) A^0 - \frac{6}{\sqrt{33}} A^1 \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Решая (30) относительно B_{ji} и используя (28) и (31), получим:

$$\left. \begin{aligned} B_{I1} &= C_{I1} - \frac{1}{2\lambda_{I1}} \int_1^{\zeta} F_1(\psi_I) \eta^{-\lambda_{I1} - \frac{1}{2}} d\eta \\ B_{I2} &= C_{I2} - \frac{1}{2\lambda_{I2}} \int_1^{\zeta} F_2(\psi_I) \eta^{-\lambda_{I2} - \frac{1}{2}} d\eta \\ B_{I3} &= C_{I3} + \frac{1}{2\lambda_{I1}} \int_{\zeta_0}^{\zeta} F_1(\psi_I) \eta^{\lambda_{I1} - \frac{1}{2}} d\eta \\ B_{I4} &= C_{I4} + \frac{1}{2\lambda_{I2}} \int_{\zeta_0}^{\zeta} F_2(\psi_I) \eta^{\lambda_{I2} - \frac{1}{2}} d\eta \\ B_{II1} &= C_{II1} - \frac{1}{2\lambda_{II1}} \int_{\zeta_0}^{\zeta} F_1(\psi_{II}) \eta^{-\lambda_{II1} - \frac{1}{2}} d\eta \\ B_{II2} &= C_{II2} - \frac{1}{2\lambda_{II2}} \int_{\zeta_0}^{\zeta} F_2(\psi_{II}) \eta^{-\lambda_{II2} - \frac{1}{2}} d\eta \\ B_{II3} &= C_{II3} + \frac{1}{2\lambda_{II1}} \int_0^{\zeta} F_1(\psi_{II}) \eta^{\lambda_{II1} - \frac{1}{2}} d\eta \\ B_{II4} &= C_{II4} + \frac{1}{2\lambda_{II2}} \int_0^{\zeta} F_2(\psi_{II}) \eta^{\lambda_{II2} - \frac{1}{2}} d\eta \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Условие (5) дает

$$C_{113} = C_{114} = 0.$$

Найдем $\frac{\partial \varphi_j^0}{\partial \zeta}$ и $\frac{\partial \varphi_j^1}{\partial \zeta}$. Учитывая (30), получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi_j^0}{\partial \zeta} &= \sum_{i=1}^4 \left(\lambda_{ji} - \frac{1}{2} \right) B_{ji} \zeta^{\lambda_{ji} - \frac{3}{2}} \\ \frac{\partial \varphi_j^1}{\partial \zeta} &= \sum_{i=1}^4 \left(1 - \frac{\lambda_{ji}^2 - \frac{1}{4}}{6a_j^2} \left(\lambda_{ji} - \frac{1}{2} \right) \right) B_{ji} \zeta^{\lambda_{ji} - \frac{3}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Используя (6), получим:

$$\sum_{i=1}^4 \left(\lambda_{1i} - \frac{1}{2} + \alpha \right) B_{1i}(1) = -RA_T^0(1), \quad (34)$$

$$\sum_{i=1}^4 \left(1 - \frac{\lambda_{1i}^2 - \frac{1}{4}}{6a_1^2} \right) \left(\lambda_{1i} - \frac{1}{2} + \alpha \right) B_{1i}(1) = -RA_T^1(1). \quad (35)$$

Будем считать, что высота и наклон тропопаузы в точке сетки и в шести ее окружающих точках одинаковы. Тогда условия (14) и (24) примут вид:

$$\sum_{i=1}^4 B_{1i}(\zeta_0) \zeta_0^{\lambda_{1i} - \frac{1}{2}} = \sum_{i=1}^4 B_{11i}(\zeta_0) \zeta_0^{\lambda_{11i} - \frac{1}{2}}, \quad (36)$$

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^4 \left(1 - \frac{\lambda_{1i}^2 - \frac{1}{4}}{6a_1^2} \right) B_{1i}(\zeta_0) \zeta_0^{\lambda_{1i} - \frac{1}{2}} = \\ &= \sum_{i=1}^4 \left(1 - \frac{\lambda_{11i}^2 - \frac{1}{4}}{6a_{11}^2} \right) B_{11i}(\zeta_0) \zeta_0^{\lambda_{11i} - \frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} &\left(r^2 + \frac{\zeta_0^2}{d_1^2} \right) \sum_{j=1}^4 \left(\lambda_{1j} - \frac{1}{2} \right) \zeta_0^{\lambda_{1j} - \frac{3}{2}} B_{1j}(\zeta_0) - \\ &- \left(r^2 + \frac{\zeta_0^2}{d_{11}^2} \right) \sum_{i=1}^4 \left(\lambda_{11i} - \frac{1}{2} \right) \zeta_0^{\lambda_{11i} - \frac{3}{2}} B_{11i}(\zeta_0) = Q^0(\zeta_0), \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} &\left(r^2 + \frac{\zeta_0^2}{d_1^2} \right) \sum_{i=1}^4 \left(1 - \frac{\lambda_{1i}^2 - \frac{1}{4}}{6a_1^2} \right) \left(\lambda_{1i} - \frac{1}{2} \right) \zeta_0^{\lambda_{1i} - \frac{3}{2}} B_{1i}(\zeta_0) - \\ &- \left(r^2 + \frac{\zeta_0^2}{d_{11}^2} \right) \sum_{i=1}^4 \left(1 - \frac{\lambda_{11i}^2 - \frac{1}{4}}{6a_{11}^2} \right) \left(\lambda_{11i} - \frac{1}{2} \right) \zeta_0^{\lambda_{11i} - \frac{3}{2}} B_{11i}(\zeta_0) = Q^1(\zeta_0). \end{aligned} \quad (39)$$

Система (34) — (39) распадается на две независимые системы. Эти системы с учетом (32) будут иметь вид:

$$\left(\lambda_{1i} - \frac{1}{2} + \alpha\right) C_{1i} + \left(-\lambda_{1i} - \frac{1}{2} + \alpha\right) \left(C_{1i+2} + \frac{1}{2\lambda_{1i}} \int_{\zeta_0}^1 F_i(\psi_{1i}) \eta^{\lambda_{1i} - \frac{1}{2}} d\eta\right) = F_i(-RA_T(1)), \quad (40)$$

$$\left(C_{1i} - \frac{1}{2\lambda_{1i}} \int_1^{\zeta_0} F_i(\psi_{1i}) \eta^{-\lambda_{1i} - \frac{1}{2}} d\eta\right) + C_{1i+2} \zeta_0^{-\lambda_{1i} - \frac{1}{2}} = C_{1i} \zeta_0^{\lambda_{1i} - \frac{1}{2}} + \zeta_0^{-\lambda_{1i} - \frac{1}{2}} \frac{1}{2\lambda_{1i}} \int_0^{\zeta_0} F_i(\psi_{1i}) \eta^{\lambda_{1i} - \frac{1}{2}} d\eta, \quad (41)$$

$$\left(r^2 + \frac{\zeta_0^2}{d_1^2}\right) \left[\left(\lambda_{1i} - \frac{1}{2}\right) \zeta_0^{\lambda_{1i} - \frac{3}{2}} \left(C_{1i} - \frac{1}{2\lambda_{1i}} \int_1^{\zeta_0} F_i(\psi_{1i}) \eta^{-\lambda_{1i} - \frac{1}{2}} d\eta\right) + \left(-\lambda_{1i} - \frac{1}{2}\right) \zeta_0^{-\lambda_{1i} - \frac{3}{2}} C_{1i+2} \right] - \left(r^2 + \frac{\zeta_0^2}{d_{11}^2}\right) \left[\left(\lambda_{11i} - \frac{1}{2}\right) \zeta_0^{\lambda_{11i} - \frac{3}{2}} C_{11i} + \left(-\lambda_{11i} - \frac{1}{2}\right) \zeta_0^{-\lambda_{11i} - \frac{3}{2}} \frac{1}{2\lambda_{11i}} \int_0^{\zeta_0} F_i(\psi_{11i}) \eta^{\lambda_{11i} - \frac{1}{2}} d\eta \right] = F_i(Q(\zeta_0)), \quad (i=1, 2) \quad (42)$$

Перенося известные в одну часть, а неизвестные в другую, получим:

$$\left. \begin{aligned} \left(\lambda_{1i} - \frac{1}{2} + \alpha\right) C_{1i} + \left(-\lambda_{1i} - \frac{1}{2} + \alpha\right) C_{1i+2} &= L_{i1} \\ \zeta_0^{\lambda_{1i}} C_{1i} + \zeta_0^{-\lambda_{1i}} C_{1i+2} - \zeta_0^{\lambda_{11i}} C_{11i} &= L_{i2} \\ p_1 \left(\lambda_{1i} - \frac{1}{2}\right) \zeta_0^{\lambda_{1i}} C_{1i} - p_1 \left(\lambda_{1i} + \frac{1}{2}\right) \zeta_0^{-\lambda_{1i}} C_{1i+2} - \\ - p_{11} \left(\lambda_{11i} - \frac{1}{2}\right) \zeta_0^{\lambda_{11i}} C_{11i} &= L_{i3} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned}
 p_I &= r^2 + \frac{\zeta_0^2}{d_I^2}, & p_{II} &= r^2 + \frac{\zeta_0^2}{d_{II}^2} \\
 L_{i1} &= \frac{\lambda_{1i} + \frac{1}{2} - \alpha}{2\lambda_{1i}} \int_{\zeta_0}^1 F_i(\psi_I) \eta^{\lambda_{1i} - \frac{1}{2}} d\eta + F_i(-RA_T(1)) \\
 L_{i2} &= -\frac{\zeta_0^{\lambda_{1i}}}{2\lambda_{1i}} \int_{\zeta_0}^1 F_i(\psi_I) \eta^{-\lambda_{1i} - \frac{1}{2}} d\eta + \frac{\zeta_0^{-\lambda_{IIi}}}{2\lambda_{IIi}} \int_0^{\zeta_0} F_i(\psi_{II}) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta \\
 L_{i3} &= -p_I \left(\lambda_{1i} - \frac{1}{2} \right) \frac{\zeta_0^{\lambda_{1i}}}{2\lambda_{1i}} \int_{\zeta_0}^1 F_i(\psi_I) \eta^{-\lambda_{1i} - \frac{1}{2}} d\eta - \\
 &\quad - p_{II} \left(\lambda_{IIi} + \frac{1}{2} \right) \frac{\zeta_0^{-\lambda_{IIi}}}{2\lambda_{IIi}} \int_0^{\zeta_0} F_i(\psi_{II}) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta + \zeta_0^{\frac{3}{2}} F_i(Q(\zeta_0))
 \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

Обозначим основной определитель системы (43):

$$\Delta_i = \begin{vmatrix}
 b_i, & -c_i, & 0 \\
 \zeta_0^{\lambda_{1i}}, & \zeta_0^{-\lambda_{1i}}, & -\zeta_0^{\lambda_{IIi}} \\
 p_I \left(\lambda_{1i} - \frac{1}{2} \right) \zeta_0^{\lambda_{1i}}, & -p_I \left(\lambda_{1i} + \frac{1}{2} \right) \zeta_0^{-\lambda_{1i}}, & -p_{II} \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right) \zeta_0^{\lambda_{IIi}}
 \end{vmatrix} = \\
 = -(\alpha_i b_i \zeta_0^{-\lambda_{1i}} + \beta_i c_i \zeta_0^{\lambda_{1i}}) \zeta_0^{\lambda_{IIi}},$$

где $b_i = \lambda_{1i} - \frac{1}{2} + \alpha,$

$$c_i = \lambda_{1i} + \frac{1}{2} - \alpha,$$

$$\alpha_i = p_I \left(\lambda_{1i} + \frac{1}{2} \right) + p_{II} \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right),$$

$$\beta_i = p_{II} \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right) - p_I \left(\lambda_{1i} - \frac{1}{2} \right).$$

Найдем теперь постоянные:

$$C_{1i} = \frac{\zeta_0^{\lambda_{IIi}}}{\Delta_i} \left[-\alpha_i L_{i1} \zeta_0^{-\lambda_{1i}} - c_i p_{II} \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right) L_{i2} + c_i L_{i3} \right], \quad (45)$$

$$C_{1i+2} = \frac{\zeta_0^{\lambda_{IIi}}}{\Delta_i} \left[\beta_i L_{i1} \zeta_0^{\lambda_{1i}} - b_i p_{II} \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right) L_{i2} + b_i L_{i3} \right], \quad (46)$$

$$C_{IIi} = \frac{1}{\Delta_i} \left\{ -2\lambda_{1i} p_I L_{i1} + \left[b_i \left(\lambda_{1i} + \frac{1}{2} \right) \zeta_0^{-\lambda_{1i}} - c_i \left(\lambda_{1i} - \frac{1}{2} \right) \zeta_0^{\lambda_{1i}} \right] \times \right. \\
 \left. \times p_I L_{i2} + (b_i \zeta_0^{-\lambda_{1i}} + c_i \zeta_0^{\lambda_{1i}}) L_{i3} \right\}. \quad (47)$$

Преобразуем L_{i1} , L_{i2} , L_{i3} , для чего в (44) подставим выражения для ψ_I , ψ_{II} и проинтегрируем по частям члены, содержащие производную по ζ от адвекции тепла. Тогда получим:

$$\begin{aligned}
L_{i1} &= \frac{b_i}{2\lambda_{Ii}} \left[d_1^2 l \int_{\zeta_0}^1 F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta + F_i(RA_T(1)) - \right. \\
&\quad \left. - \left(\lambda_{Ii} - \frac{1}{2} \right) \int_{\zeta_0}^1 F_i(RA_T) \eta^{\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta - \zeta_0^{\lambda_{Ii} + \frac{1}{2}} F_i(RA_{T1}(\zeta_0)) \right] - \\
&\quad - \frac{b_i}{2\lambda_{Ii}} F_i(RA_T(1)) \\
L_{i2} &= - \frac{\zeta_0^{\lambda_{Ii}}}{2\lambda_{Ii}} d_1^2 l \int_{\zeta_0}^1 F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta + \\
&\quad + \frac{\zeta_0^{-\lambda_{IIi}}}{2\lambda_{IIi}} d_{II}^2 l \int_0^{\zeta_0} F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta - \frac{\zeta_0^{\lambda_{Ii}}}{2\lambda_{Ii}} F_i(RA_T(1)) + \\
&\quad + \frac{\zeta_0^{\frac{1}{2}}}{2\lambda_{Ii}} F_i(RA_{T1}(\zeta_0)) - \\
&\quad - \frac{\zeta_0^{\lambda_{Ii}}}{2\lambda_{Ii}} \left(\lambda_{Ii} + \frac{1}{2} \right) \int_{\zeta_0}^1 F_i(RA_T) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta + \\
&\quad + \frac{\zeta_0^{\frac{1}{2}}}{2\lambda_{IIi}} F_i(RA_{TII}(\zeta_0)) - \\
&\quad - \frac{\zeta_0^{-\lambda_{IIi}}}{2\lambda_{IIi}} \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right) \int_0^{\zeta_0} F_i(RA_T) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta \\
L_{i3} &= - p_I \left(\lambda_{Ii} - \frac{1}{2} \right) \frac{\zeta_0^{\lambda_{Ii}}}{2\lambda_{Ii}} d_1^2 l \int_{\zeta_0}^1 F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta - \\
&\quad - p_{II} \left(\lambda_{IIi} + \frac{1}{2} \right) \frac{\zeta_0^{-\lambda_{IIi}}}{2\lambda_{IIi}} d_{II}^2 l \int_0^{\zeta_0} F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta - \\
&\quad - p_I \left(\lambda_{Ii} - \frac{1}{2} \right) \frac{\zeta_0^{\lambda_{Ii}}}{2\lambda_{Ii}} F_i(RA_T(1)) + \\
&\quad + p_I \left(\lambda_{Ii} - \frac{1}{2} \right) \frac{\zeta_0^{\frac{1}{2}}}{2\lambda_{Ii}} F_i(RA_{T1}(\zeta_0)) - \\
&\quad - p_I \left(\lambda_{Ii}^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\zeta_0^{\lambda_{Ii}}}{2\lambda_{Ii}} \int_{\zeta_0}^1 F_i(RA_T) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta - \\
&\quad - p_{II} \left(\lambda_{IIi} + \frac{1}{2} \right) \frac{\zeta_0^{\frac{1}{2}}}{2\lambda_{IIi}} F_i(RA_{TII}(\zeta_0)) + \\
&\quad + p_{II} \left(\lambda_{IIi}^2 - \frac{1}{4} \right) \frac{\zeta_0^{-\lambda_{IIi}}}{2\lambda_{IIi}} \int_0^{\zeta_0} F_i(RA_T) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta + \zeta_0^{\frac{3}{2}} F_i(Q(\zeta_0))
\end{aligned} \tag{48}$$

В (48) входят величины $F_i(RA_T(1))$. Покажем, что в окончательном выражении для φ эти величины не содержатся. Предварительно преобразуем выражение для B_{Ii} :

$$\begin{aligned} B_{Ii} &= C_{Ii} - \frac{1}{2\lambda_{Ii}} \int_1^{\zeta} F_i(\psi_I) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta = \\ &= C_{Ii} - \frac{1}{2\lambda_{Ii}} \zeta^{-\lambda_{Ii} + \frac{1}{2}} F_i(RA_T(\zeta)) + \frac{1}{2\lambda_{Ii}} F_i(RA_T(1)) - \\ &- \frac{\lambda_{Ii} + \frac{1}{2}}{2\lambda_{Ii}} \int_1^{\zeta} F_i(RA_T) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta - \frac{d_{Ii}^2 l}{2\lambda_{Ii}} \int_1^{\zeta} F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta. \end{aligned}$$

Соберем все члены в B_{Ii} , содержащие $F_i(RA_T(1))$:

$$\begin{aligned} &\frac{\zeta_0^{\lambda_{IIi}}}{2\lambda_{Ii} \Delta_i} F_i(RA_T(1)) \left[\alpha_i b_i \zeta_0^{-\lambda_{Ii}} + c_i p_{II} \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right) \zeta_0^{\lambda_{Ii}} - \right. \\ &\quad \left. - c_i p_I \left(\lambda_{Ii} - \frac{1}{2} \right) \zeta_0^{\lambda_{Ii}} \right] + \frac{F_i(RA_T(1))}{2\lambda_{Ii}} = \\ &= \frac{\zeta_0^{\lambda_{IIi}}}{2\lambda_{Ii} \Delta_i} F_i(RA_T(1)) \left[\alpha_i b_i \zeta_0^{-\lambda_{Ii}} + c_i p_{II} \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right) \zeta_0^{\lambda_{Ii}} - \right. \\ &\quad \left. - c_i p_I \left(\lambda_{Ii} - \frac{1}{2} \right) \zeta_0^{\lambda_{Ii}} - c_i \beta_i \zeta_0^{\lambda_{Ii}} - \alpha_i \beta_i \zeta_0^{-\lambda_{Ii}} \right] = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что B_{Ii+2} и B_{IIi} не содержат членов вида $F_i(RA_T(1))$. Покажем, что в решении отсутствуют также члены вида $F_i(RA_{TI}(\zeta_0))$ и $F_i(RA_{TII}(\zeta_0))$. Соберем члены указанного в выражении для B_{II}

$$\begin{aligned} &\frac{\zeta_0^{\lambda_{IIi} + \frac{1}{2}}}{\Delta_i} \left\{ \frac{\alpha_i c_i}{2\lambda_{Ii}} F_i(RA_{TI}(\zeta_0)) - c_i p_{II} \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right) \left[\frac{F_i(RA_{TII}(\zeta_0))}{2\lambda_{IIi}} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{F_i(RA_{TI}(\zeta_0))}{2\lambda_{Ii}} \right] + \frac{c_i p_I \left(\lambda_{Ii} - \frac{1}{2} \right)}{2\lambda_{Ii}} F_i(RA_{TI}(\zeta_0)) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{c_i p_{II} \left(\lambda_{IIi} + \frac{1}{2} \right)}{2\lambda_{IIi}} F_i(RA_{TII}(\zeta_0)) + c_i \zeta_0^2 \left[- \frac{F_i(RA_{TI}(\zeta_0))}{d_I^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{F_i(RA_{TII}(\zeta_0))}{d_{II}^2} - \frac{r^2}{\zeta_0^2} F_i(RA_{TI}(\zeta_0)) + \frac{r^2}{\zeta_0^2} F_i(RA_{TII}(\zeta_0)) \right] \right\} = \\ &= \frac{c_i \zeta_0^{\lambda_{IIi} + \frac{1}{2}}}{\Delta_i} \left\{ \left[\alpha_i - p_{II} \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right) + p_I \left(\lambda_{Ii} - \frac{1}{2} \right) - 2\lambda_{Ii} p_I \right] \times \right. \\ &\quad \times \frac{F_i(RA_{TI}(\zeta_0))}{2\lambda_{Ii}} - \left[p_{II} \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right) + p_{II} \left(\lambda_{IIi} + \frac{1}{2} \right) - 2\lambda_{IIi} p_{II} \right] \times \\ &\quad \left. \times \frac{F_i(RA_{TII}(\zeta_0))}{2\lambda_{IIi}} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Аналогично можно показать, что B_{Ii+2} и B_{III} не содержат членов вида $F_i(RA_T(\xi_0))$. Учитывая эти результаты, после несложных преобразований получаем решение в окончательном виде:

$$\begin{aligned}
 \varphi_I^0(\zeta) = & \sum_{i=1}^2 \zeta^{\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\Delta_i} \left[-\zeta_0^{-\lambda_{Ii} + \lambda_{IIi}} \frac{\alpha_i c_i}{2\lambda_{Ii}} d_1^2 l \int_{\zeta_0}^1 F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta + \right. \right. \\
 & + \zeta_0^{\lambda_{Ii} + \lambda_{IIi}} \frac{\beta_i c_i}{2\lambda_{Ii}} d_1^2 l \int_{\zeta_0}^1 F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta - \\
 & \left. \left. - c_i p_{II} d_{II}^2 l \int_0^{\zeta_0} F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta \right] + \frac{d_1^2 l}{2\lambda_{Ii}} \int_{\xi}^1 F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta \right\} + \\
 & + \zeta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\Delta_i} \left[\zeta_0^{\lambda_{Ii} + \lambda_{IIi}} \frac{\beta_i c_i}{2\lambda_{Ii}} d_1^2 l \int_{\zeta_0}^1 F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta + \right. \right. \\
 & + \zeta_0^{\lambda_{Ii} + \lambda_{IIi}} \frac{\beta_i b_i}{2\lambda_{Ii}} d_1^2 l \int_{\zeta_0}^1 F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta - \\
 & \left. \left. - b_i p_{II} d_{II}^2 l \int_0^{\zeta_0} F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta \right] + \frac{d_1^2 l}{2\lambda_{Ii}} \int_{\zeta_0}^{\xi} F_i(A_{\mathcal{Q}}) \eta^{\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta \right\} + \\
 & + \zeta^{\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\Delta_i} \left[\zeta_0^{-\lambda_{Ii} + \lambda_{IIi}} \frac{\alpha_i c_i}{2\lambda_{Ii}} \left(\lambda_{Ii} - \frac{1}{2} \right) \int_{\zeta_0}^1 F_i(RA_T) \eta^{\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta + \right. \right. \\
 & + \zeta_0^{\lambda_{Ii} + \lambda_{IIi}} \frac{\beta_i c_i}{2\lambda_{Ii}} \left(\lambda_{Ii} + \frac{1}{2} \right) \int_{\zeta_0}^1 F_i(RA_T) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta + \\
 & \left. \left. + c_i p_{II} \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right) \int_0^{\zeta_0} F_i(RA_T) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta \right] + \right. \\
 & \left. + \frac{\lambda_{Ii} + \frac{1}{2}}{2\lambda_{Ii}} \int_{\xi}^1 F_i(RA_T) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta \right\} + \\
 & + \zeta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\Delta_i} \left[-\zeta_0^{\lambda_{Ii} + \lambda_{IIi}} \frac{\beta_i c_i}{2\lambda_{Ii}} \left(\lambda_{Ii} - \frac{1}{2} \right) \int_{\zeta_0}^1 F_i(RA_T) \eta^{\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta + \right. \right. \\
 & + \zeta_0^{\lambda_{Ii} + \lambda_{IIi}} \frac{\beta_i b_i}{2\lambda_{Ii}} \left(\lambda_{Ii} + \frac{1}{2} \right) \int_{\zeta_0}^1 F_i(RA_T) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta + \\
 & \left. \left. + b_i p_{II} \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right) \int_0^{\zeta_0} F_i(RA_T) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta \right] - \right. \\
 & \left. - \frac{\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}}{2\lambda_{Ii}} \int_{\zeta_0}^{\xi} F_i(RA_T) \eta^{\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta \right\}, \tag{49}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_{II}^0(\zeta) = & \sum_{i=1}^2 \zeta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\Delta_i} \left[-c_i p_I d_{II}^2 l \int_{\zeta_0}^1 F_i(A_{\Omega}) \eta^{\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta - \right. \right. \\
& - b_i p_I d_{II}^2 l \int_{\zeta_0}^1 F_i(A_{\Omega}) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta - \zeta_0^{-\lambda_{IIi}} \frac{\delta_i}{2\lambda_{IIi}} d_{II}^2 l \int_0^{\zeta_0} F_i(A_{\Omega}) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta \left. \right] + \\
& + \frac{d_{II}^2 l}{2\lambda_{IIi}} \int_{\zeta}^{\zeta_0} F_i(A_{\Omega}) \eta^{-\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta \left. \right\} - \\
& - \zeta^{-\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} \frac{d_{II}^2 l}{2\lambda_{IIi}} \int_0^{\zeta} F_i(A_{\Omega}) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta + \\
& + \zeta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\Delta_i} \left[c_i p_I \left(\lambda_{Ii} - \frac{1}{2} \right) \int_{\zeta_0}^1 F_i(RA_T) \eta^{\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta - \right. \right. \\
& - b_i p_I \left(\lambda_{Ii} + \frac{1}{2} \right) \int_{\zeta_0}^1 F_i(RA_T) \eta^{-\lambda_{Ii} - \frac{1}{2}} d\eta + \\
& + \zeta_0^{-\lambda_{IIi}} \frac{\delta_i \left(\lambda_{IIi} - \frac{1}{2} \right)}{2\lambda_{IIi}} \int_0^{\zeta_0} F_i(RA_T) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta \left. \right] + \\
& + \frac{\lambda_{IIi} + \frac{1}{2}}{2\lambda_{IIi}} \int_{\zeta}^{\zeta_0} F_i(RA_T) \eta^{-\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta \left. \right\} - \\
& - \zeta^{-\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} \frac{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}}{2\lambda_{IIi}} \int_0^{\zeta} F_i(RA_T) \eta^{\lambda_{IIi} - \frac{1}{2}} d\eta. \tag{50}
\end{aligned}$$

Здесь введено обозначение

$$\begin{aligned}
\delta_i = & \zeta_0^{\lambda_{Ii}} c_i \left[\left(\lambda_{Ii} - \frac{1}{2} \right) p_I + \left(\lambda_{IIi} + \frac{1}{2} \right) p_{II} \right] + \\
& + \zeta_0^{-\lambda_{Ii}} b_i \left[\left(\lambda_{IIi} + \frac{1}{2} \right) p_{II} - \left(\lambda_{Ii} + \frac{1}{2} \right) p_I \right].
\end{aligned}$$

Таким образом, как это следует из (49), (50), тенденция геопотенциала есть функция, определяемая распределением в пространстве адвекций вихря и тепла, т. е. тех же самых метеорологических факторов, от распределения которых зависит решение однослойной задачи. Отличие полученного решения состоит в том, что функции влияния адвекции вихря и тепла в рассматриваемой задаче зависят от наклона тропопauses. [Кoeffициенты p_j , α_i , β_i , δ_i , Δ_i есть функции от $r^2 = \left(\frac{\partial \pi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \pi}{\partial y} \right)^2$.]

Решение двухслойной задачи без учета наклона тропопauses дается формулами (49), (50), если в них положить $r^2 = 0$, т. е. считать $p_I = \frac{\zeta_0^2}{a_I^2}$,

$p_{II} = \frac{\zeta_0^2}{d_{II}^2}$. Легко также проверить, что решение (49), (50) переходит

при $d_I^2 = d_{II}^2 = d^2$, $\lambda_{II} = \lambda_{III} = \lambda_i$ в решение однослойной задачи, которое имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi^0(\zeta) = & \sum_{i=1}^2 \zeta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} \left[\frac{c_i d^{2l}}{2\lambda_i b_i} \int_0^1 F_i(A_\alpha) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta + \right. \\ & \left. + \frac{d^{2l}}{2\lambda_i} \int_\zeta^1 F_i(A_\alpha) \eta^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta \right] + \zeta^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} \frac{d^{2l}}{2\lambda_i} \int_0^\zeta F_i(A_\alpha) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta + \\ & + \zeta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} \left[- \frac{c_i \left(\lambda_i - \frac{1}{2}\right)}{2\lambda_i b_i} \int_0^1 F_i(RA_T) \eta^{\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta + \right. \\ & \left. + \frac{\lambda_i + \frac{1}{2}}{2\lambda_i} \int_\zeta^1 F_i(RA_T) \eta^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta \right] - \\ & - \zeta^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} \frac{\lambda_i - \frac{1}{2}}{2\lambda_i} \int_0^\zeta F_i(RA_T) \eta^{-\lambda_i - \frac{1}{2}} d\eta. \end{aligned} \quad (51)$$

При $\alpha = 0$ решение (51) переходит в решение однослойной задачи, полученное М. И. Юдиным в [5].

5. В приложении I приводятся функции влияния адвекции тепла и адвекции вихря на разных уровнях ($\zeta = 0,2; 0,3; 0,5$) для однослойной и двухслойной задач при различном положении тропопаузы ($\zeta = 0,100; 0,225; 0,350$) без учета ее наклона. Приняты следующие обозначения: m_0 и n_0 — функции влияния соответственно адвекции тепла и вихря в самой рассматриваемой точке сетки, m_1 и n_1 — аналогичные функции, осредненные по шести окружающим точкам сетки, $m_0^c, m_1^c, n_0^c, n_1^c$ — функции влияния для однослойной задачи, $m_0^c, m_1^c, n_0^c, n_1^c$ ($\zeta_0 = 0,100; 0,225; 0,350$) — функции влияния двухслойной задачи при различном положении тропопаузы.

Данные приложения показывают, что изменение высоты тропопаузы в пределах примерно 100 мб сравнительно мало меняет функции влияния. Это обстоятельство позволяет в случае наклонной тропопаузы записывать условия склейки при постоянном значении ζ_0 , не учитывая перепада высот по горизонтали в окружающих точках.

С другой стороны, колебания высоты тропопаузы при переходе от одной точки сетки к другим, а также при различных синоптических ситуациях могут достигать 100 мб и более. Запись условий склейки при одном и том же значении ζ_0 , постоянном для всех точек сетки и для различных синоптических ситуаций, будет приводить к определенным ошибкам.

Однако нецелесообразно рассчитывать функции влияния, соответствующие положению тропопаузы в каждой точке. Вероятно, оптимальным вариантом будет следующий.

В машине запоминаются функции влияния для нескольких положений тропопаузы (например, для трех положений: $\zeta_0 = 0,100, 0,225$ и $0,350$). При вычислениях выбирается то положение, которое является

η	$\zeta = 0,200$				$\zeta = 0,300$			
	m_0	$m_0^{0,100}$	$m_0^{0,225}$	$m_0^{0,350}$	m_0	$m_0^{0,100}$	$m_0^{0,225}$	$m_0^{0,350}$
0,100	-0,207	-0,171	-0,078	-0,086	-0,049	-0,040	-0,016	-0,014
0,200	-0,182	-2,179	-2,157	-2,275	-0,231	-0,333	-0,227	-0,174
0,225	2,818	2,821	2,843	2,724	-0,500	-0,499	-0,413	-0,306
0,300	1,617	1,619	1,486	1,265	-1,456	-1,454	-1,430	-1,464
0,500	0,454	0,455	0,426	0,243	1,876	1,878	1,897	1,868
0,700	0,052	0,065	0,062	0,036	0,193	0,193	0,197	0,172
0,850	0,016	0,019	0,018	0,011	0,048	0,048	0,050	0,044
1,000	0,006	0,007	0,007	0,004	0,017	0,018	0,018	0,016
1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,001	0,001	0,001

η	$\zeta = 0,200$				$\zeta = 0,300$			
	n_0	$n_0^{0,100}$	$n_0^{0,225}$	$n_0^{0,350}$	n_0	$n_0^{0,100}$	$n_0^{0,225}$	$n_0^{0,350}$
0,100	0,086	0,097	0,050	0,055	0,024	0,026	0,011	0,010
0,200	0,636	0,637	0,877	0,915	0,121	0,121	0,115	0,094
0,225	0,382	0,382	0,364	0,452	0,169	0,170	0,191	0,151
0,300	0,121	0,121	0,119	0,094	0,425	0,424	0,432	0,583
0,500	0,022	0,022	0,022	0,013	0,057	0,055	0,058	0,064
0,700	0,009	0,009	0,009	0,006	0,022	0,021	0,022	0,020
0,850	0,007	0,007	0,007	0,004	0,016	0,015	0,015	0,015
1,000	0,006	0,006	0,006	0,004	0,014	0,014	0,014	0,013

η	$\zeta = 0,100$								$\zeta =$		
	m'_0	m_0	m'_1	m_1	n'_0	n_0	n'_1	n_1	m'_0	m_0	m'_1
0,100	-4,557	-4,557	0,410	0,410	1,831	1,834	1,677	1,677	-0,042	-0,039	-0,147
0,200	5,443	5,443	0,403	0,406	0,051	0,049	0,190	0,186	-0,872	-0,819	-0,319
0,225	0,189	0,181	0,277	0,286	0,027	0,026	0,109	0,102	-1,701	-1,598	0,206
0,300	0,076	0,078	0,277	0,286	0,025	0,026	0,099	0,102	2,744	2,846	0,206
0,500	0,031	0,032	0,124	0,128	0,010	0,011	0,044	0,045	0,729	0,755	0,734
0,700	0,007	0,007	0,028	0,029	0,002	0,003	0,011	0,011	0,094	0,097	0,259
0,850	0,002	0,002	0,009	0,009	0,001	0,001	0,005	0,005	0,026	0,027	0,091
1,000	0,001	0,001	0,003	0,003	0,000	0,000	0,004	0,004	0,010	0,011	0,037
1,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,003	0,003	0,001	0,001	0,003

ПРИЛОЖЕНИЕ I

$\zeta = 0,200$				$\zeta = 0,300$			
m_1	$m_1^{0,100}$	$m_1^{0,225}$	$m_1^{0,350}$	m_1	$m_1^{0,100}$	$m_1^{0,225}$	$m_1^{0,350}$
-0,457	-0,379	-0,245	-0,274	-0,165	-0,137	-0,062	-0,056
0,287	0,301	0,347	0,213	-0,390	-0,383	-0,312	-0,316
0,742	0,752	0,890	0,776	-0,372	-0,366	-0,310	-0,360
0,670	0,675	0,695	0,527	0,185	0,191	0,231	0,217
0,200	0,202	0,200	0,132	0,350	0,352	0,364	0,350
0,068	0,069	0,067	0,044	0,133	0,136	0,140	0,129
0,026	0,028	0,026	0,017	0,052	0,056	0,058	0,050
0,003	0,003	0,003	0,002	0,005	0,005	0,006	0,005

$\zeta = 0,200$				$\zeta = 0,300$			
n_1	$n_1^{0,100}$	$n_1^{0,225}$	$n_1^{0,350}$	n_1	$n_1^{0,100}$	$n_1^{0,225}$	$n_1^{0,350}$
0,278	0,308	0,189	0,207	0,092	0,102	0,045	0,041
0,576	0,580	0,761	0,831	0,288	0,288	0,290	0,270
0,593	0,513	0,566	0,691	0,334	0,334	0,368	0,353
0,288	0,290	0,306	0,270	0,387	0,386	0,405	0,485
0,081	0,080	0,084	0,052	0,158	0,150	0,160	0,206
0,038	0,038	0,039	0,024	0,079	0,078	0,080	0,076
0,030	0,028	0,030	0,019	0,062	0,060	0,061	0,059
0,028	0,026	0,028	0,017	0,058	0,055	0,057	0,055

ПРИЛОЖЕНИЕ II

0,225					$\zeta = 0,300$							
m_1	n'_0	n_0	n'_1	n_1	m'_0	m_0	m'_1	m_1	n'_0	n_0	n'_1	n_1
-0,138	0,027	0,026	0,109	0,102	-0,017	-0,016	-0,067	-0,062	0,012	0,011	0,048	0,045
-0,295	0,379	0,356	0,568	0,531	-0,242	-0,227	-0,334	-0,312	0,123	0,115	0,309	0,290
0,197	0,681	0,639	0,594	0,554	-0,439	-0,413	-0,333	-0,310	0,203	0,191	0,393	0,368
	0,617		0,541						0,184		0,356	
0,756	0,184	0,191	0,365	0,368	-1,439	-1,430	0,215	0,231	0,429	0,432	0,399	0,405
					1,893	1,897						
0,268	0,030	0,032	0,106	0,109	0,196	0,197	0,360	0,364	0,057	0,058	0,160	0,016
0,094	0,012	0,013	0,048	0,052	0,049	0,050	0,138	0,140	0,022	0,022	0,079	0,080
0,039	0,009	0,009	0,038	0,039	0,019	0,018	0,058	0,058	0,015	0,015	0,061	0,061
0,004	0,008	0,008	0,035	0,036	0,001	0,001	0,006	0,006	0,014	0,014	0,056	0,057

ближайшим к действительному положению тропопаузы в данной точке сетки.

Для оценки влияния наклона тропопаузы сравнивались функции влияния, полученные для изобарической тропопаузы и тропопаузы с наклоном. Наклон тропопаузы был выбран достаточно большим (1 км : 300 км).

В приложении II приводятся функции влияния для наклонной (m'_0, m'_1, n'_0, n'_2) и изобарической тропопаузы (m_0, m_1, n_0, n_1). Функции влияния приведены для уровней $\xi=0,100, 0,225, 0,350$. Высота тропопаузы $\xi_0=0,225$. Как видно из приводимой таблицы, изменения функций влияния, вызванные наклоном тропопаузы, пренебрежимо малы.

Выводы

Влияние наклона тропопаузы на изменение поля давления мало и может не учитываться при прогнозе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Г ан д и н Л. С., Л а й х т м а н Д. Л., М а т в е е в Л. Т., Ю д и н М. И. Основы динамической метеорологии. Гидрометеиздат, Л., 1955.
2. К и б е л ь И. А. Введение в гидродинамические методы краткосрочного прогноза погоды. ГИТТЛ, М., 1957.
3. К а г а н Р. Л. К учету влияния конденсационных притоков тепла и стратосферы на изменение поля давления. Труды ГГО, вып. 99, 1957.
4. Л о м о н о с о в Е. Г. Влияние стратосферы на изменение давления в атмосфере и учет этого влияния в прогнозе барического поля. Автореферат диссертации. Л., 1959.
5. Ю д и н М. И. О прогнозе поля давления численными методами. Труды ГГО, вып. 71, 1957.
6. G a t e s W. L. A dynamical model for large scale stratospheric motions. Quart. Journ. Roy. Meteorol. Soc. V83, № 356, 1957.
7. H i n k e l m a n n K. Zur numerischen Wettervorhersage mittels Relaxationsmethode unter Einbeziehung barokliner Effecte. Tellus, v. 5, № 3, 4, 1953.
(Русский перевод в сборнике «Численные методы прогноза погоды» под ред. Л. С. Гандина и А. С. Дубова).
8. K n i g h t i n g E. An atmospheric model including the tropopause effect. Berichte des Deutsche Wetterdienstes. B. 5, № 38, 1957.

Д. В. РУХОВЕЦ

О ПРИЧИНАХ ИЗМЕНЕНИЯ ВЫСОТЫ ТРОПОПАУЗЫ

Исследуется вопрос о причинах изменения высоты тропопаузы, которая стилизуется в виде поверхности разрыва вертикального градиента температуры, а также о выполнении условия субстанциональности тропопаузы. Показывается, что нарушение субстанциональности вызывается различием в притоках тепла к нижней стратосфере и верхней тропосфере или разрывом скорости ветра на тропопаузе. Этот вывод используется для объяснения опускания тропопаузы над циклонами.

1. Вопрос о причинах изменения высоты тропопаузы рассматривался рядом исследователей. Первые крупные работы в этом направлении принадлежат Я. Бьеркнесу и Э. Пальмену [8, 12, 13]. Изменения высоты тропопаузы, по Бьеркнесу, объясняются ее чисто адвективным переносом. Э. Пальмен, развивая теорию Я. Бьеркнеса, пришел к выводу, что, кроме адвекции тропопаузы, на изменение ее высоты большое влияние оказывают вертикальные движения, вызывающие «всасывание» тропопаузы над циклонами и ее «выпучивание» над антициклонами.

Теория Я. Бьеркнеса и теория Э. Пальмена основывались на гипотезе субстанциональности тропопаузы, т. е. на предположении, что тропопауза перемещается вместе с образующими ее частицами воздуха.

В дальнейшем гипотеза субстанциональности была использована в ряде работ. Для примера укажем работу И. А. Кибеля [2], в которой гипотеза субстанциональности тропопаузы использовалась для решения задачи краткосрочного гидродинамического прогноза погоды.

В работе Гейтса [10] эта же гипотеза использовалась для объяснения причин колебаний высоты тропопаузы и для прогноза положения тропопаузы.

В ряде теоретических работ тропопауза представляется в виде поверхности, на которой вертикальный градиент температуры претерпевает разрыв, в то время как сама температура и давление непрерывны. Относительно поведения ветра не существует единого мнения: в одних работах ветер на тропопаузе считается непрерывным, в других — испытывающим разрыв.

Следуя принятой терминологии, будем называть поверхностью слабого разрыва такую поверхность, на которой непрерывны скорость ветра, давление и температура, а претерпевают разрыв их производные.

И. А. Кибелем [3], а затем Ловеллом [11] было показано, что в идеальной жидкости при отсутствии притоков тепла поверхность слабого разрыва может перемещаться либо вместе с образующими ее частицами (с их скоростью), либо со скоростью звука.

Если можно считать тропопаузу поверхностью слабого разрыва, процессы адиабатическими, то мы приходим к выводу о субстанциональности тропопаузы. Выполняется ли указанное предположение? Очевидно,

что окончательное решение по этому вопросу может быть принято только с учетом анализа экспериментальных данных.

Интересно отметить, что еще Э. Пальмен, анализируя аэрологический материал, показал, что смещения тропопаузы могут превосходить смещения воздушных масс в районе тропопаузы примерно в два раза и что может происходить обмен воздуха через поверхность раздела.

К отказу от субстанциональности тропопаузы пришел Эртель [9] и ряд других авторов.

В последние годы выполнимость гипотезы субстанциональности тропопаузы была проверена на массовом материале Ю. Н. Волконским [1], который пришел к выводу, что субстанциональный перенос является не единственной и даже не главной причиной изменения высоты тропопаузы. (Впрочем, метод расчета, принятый Ю. Н. Волконским, может вызвать серьезные возражения.)

В монографии О. Г. Кричака [4] приведена теоретическая схема опускания тропопаузы над циклонами. По этой схеме опускание тропопаузы происходит благодаря адиабатическому подъему воздушных масс и растеканию их под задерживающим слоем тропопаузы. (Изменение стратификации здесь происходит аналогично тому, как это имеет место при антициклональном сжатии у Земли.) Таким образом, схема Кричака также противоречит гипотезе субстанциональности тропопаузы.

2. Попытаемся получить некоторые выводы по вопросу о причинах изменения высоты тропопаузы на основании очень простых соображений.

Пусть уравнение тропопаузы в системе координат x, y, z, t есть

$$Z = Z(x, y, t). \quad (1)$$

Будем считать, что на тропопаузе температура и давление непрерывны, а вертикальный градиент температуры терпит разрыв. Обозначим символом $[f]$ разрыв функции f при переходе через тропопаузу. Тогда

$$[T] = 0 \quad (2)$$

(T — температура).

Дифференцируя (2) по s ($s = x, y, t$) вдоль тропопаузы, получим

$$\left[\frac{\partial T}{\partial s} \right] + \left[\frac{\partial T}{\partial z} \right] \frac{\partial Z}{\partial s} = 0. \quad (3)$$

В частности, при $s = t$

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = - \frac{\left[\frac{\partial T}{\partial t} \right]}{\left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]}. \quad (4)$$

Формула (4) дает изменение высоты тропопаузы. Скорость ее перемещения N может быть получена по формуле

$$N = - \frac{\frac{\partial Z}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 + 1}}. \quad (5)$$

Таким образом, изменение высоты тропопаузы вызывается различием в изменении температуры верхней тропосферы и нижней стратосферы. Кроме того, это изменение зависит от вертикальных градиентов температуры верхней тропосферы и нижней стратосферы. Так как изменения температуры определяются в основном горизонтальной и вертикальной

адвекцией температуры и неадиабатическими притоками тепла, то, как следует из [4], изменение высоты тропопаузы вызывается различием в притоках тепла и адвекции температуры в верхних слоях тропосферы и нижних слоях стратосферы.

Отметим, что к аналогичным выводам относительно влияния горизонтальной адвекции температуры и вертикальных токов на изменение высоты тропопаузы пришла на основе анализа данных наблюдений Е. М. Орлова [5].

Формула (4) позволяет сделать некоторые выводы о влиянии неадиабатических притоков тепла на изменение высоты тропопаузы. Так, в частности, из (4) вытекает, что притоки тепла к нижней стратосфере способствуют понижению тропопаузы, притоки тепла к верхней тропосфере — ее повышению. Эти выводы в какой-то мере могут быть использованы для объяснения наблюдаемого широтного хода высоты тропопаузы (ее понижение от экватора к полюсу): более сильное прогревание тропосферы в низких широтах, с одной стороны, а также связанное с повышением содержания озона более сильное прогревание стратосферы в высоких широтах, с другой, вероятно, оказывают определенное влияние на широтный ход высоты тропопаузы.

Согласно формулам (4) и (5), изменение высоты тропопаузы может происходить, вообще говоря, с произвольной скоростью. Находится ли это в противоречии с выводами Кибеля и Ловелла?

Покажем, что если ветер на тропопаузе непрерывен и отсутствуют неадиабатические притоки тепла, то формула (4) переходит в условие субстанциональности.

Уравнение притока тепла запишем в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y} - w \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{A}{c_p \rho} \frac{dp}{dt}. \quad (6)$$

Здесь u, v, w — составляющие скорости ветра, p — давление, A — тепловой эквивалент работы, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, ρ — плотность.

На тропопаузе имеем условие

$$[p] = 0. \quad (7)$$

Дифференцируя (7) по s ($s = x, y, t$) вдоль тропопаузы, получим

$$\left[\frac{\partial p}{\partial s} \right] + \left[\frac{\partial p}{\partial z} \right] \frac{\partial z}{\partial s} = 0. \quad (8)$$

Но

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho,$$

следовательно,

$$\left[\frac{\partial p}{\partial z} \right] = 0.$$

Тогда из (8) получаем

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right] = \left[\frac{\partial p}{\partial y} \right] = 0.$$

Если

$$[u] = [v] = [w] = 0, \quad (9)$$

то

$$\left[\frac{dp}{dt} \right] = 0. \quad (10)$$

Подставим в (4) $\frac{\partial T}{\partial t}$ из (6) и используем (9) и (10)

$$\frac{\partial Z}{\partial t} = u \frac{\left[\frac{\partial T}{\partial x} \right]}{\left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]} + v \frac{\left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]}{\left[\frac{\partial T}{\partial z} \right]} + w.$$

Используя (3), получим

$$\sqrt{\frac{\partial Z}{\partial t} + u \frac{\partial Z}{\partial x} + v \frac{\partial Z}{\partial y}} = w. \quad (11)$$

Условие (11) есть условие субстанциональности. Этот вывод можно несколько обобщить. А именно, если неадиабатические притоки тепла имеют место, но одинаковы в верхней тропосфере и нижней стратосфере, то приведенный вывод сохраняет силу.

В работе [1] Ю. Н. Волконский, также рассматривая тропопаузу как поверхность разрыва вертикального градиента температуры, пришел к выводу об адекватности условий адиабатичности и субстанциональности. Используя сделанное замечание, можно несколько уточнить вывод Ю. Н. Волконского. Если считать ветер на тропопаузе непрерывным, то условие субстанциональности эквивалентно условию отсутствия разрыва неадиабатических притоков тепла по обеим сторонам тропопаузы. (Условие адиабатичности есть, очевидно, частный случай последнего условия.)

3. В каких случаях условие субстанциональности не будет выполняться? Очевидно, это будет иметь место в тех случаях, когда неадиабатические притоки тепла к верхней тропосфере и нижней стратосфере различны или скорость ветра испытывает разрыв при переходе через тропопаузу (в реальной атмосфере это, разумеется, соответствует большой изменчивости скорости ветра с высотой).

В целом ряде работ [6, 13, 15 и др.] было показано, что крупномасштабные вертикальные движения в стратосфере часто имеют противоположный знак по сравнению с движениями в тропосфере. Не останавливаясь на причинах, вызывающих указанные движения, покажем лишь, как такие движения могут приводить к понижению тропопаузы над циклонами.

Отвлечемся пока от неадиабатических притоков тепла. В циклонах вертикальные движения направлены вверх в тропосфере, в стратосфере они сменяются движениями, имеющими противоположное направление.

Таким образом, под тропопаузой наблюдается понижение температуры, вызванное адиабатическим подъемом воздушных масс, над тропопаузой, наоборот, отмечается повышение температуры.

Из (4) видно, что такой процесс должен приводить к опусканию тропопаузы. Даже при отсутствии в стратосфере направленных вниз движений опускание тропопаузы может иметь место, так как стратосфера представляет собой задерживающий слой для вертикальных движений, возникших в тропосфере. Именно такой случай был рассмотрен О. Г. Кричаком [4] для объяснения опускания тропопаузы над циклоном.

Если же вертикальные скорости в верхней тропосфере и нижней стратосфере одинаковы, то, несмотря на адиабатическое охлаждение тропосферы, происходит более интенсивное охлаждение стратосферы (из-за различия вертикальных градиентов температуры) и, как было показано выше, тропопауза субстанционально поднимается.

Неадиабатические притоки тепла также могут оказывать влияние на изменение высоты тропопаузы. Имеется ряд данных, показывающих, что количество озона над циклонами значительно выше средних значений (см., например, [6]). Возможно, что в этом определенную роль играют направленные вниз вертикальные движения в стратосфере над циклонами, вызывающие увеличение в нижней стратосфере концентрации озона и других веществ, поглощающих радиацию. Это в свою очередь также приводит к опусканию тропопаузы над циклонами.

4. Представляет интерес сопоставить изменения высоты тропопаузы, получаемые по формуле (4), с фактическими ее изменениями. Для этого воспользуемся данными, имеющимися в работе Е. Н. Орловой [5] (табл. 1). В последней графе табл. 1 приведены вычисленные нами по формуле (4) полусуточные изменения высоты тропопаузы. При этих вычислениях полагалось, что в тропосфере $\frac{\partial T}{\partial z} = -6^\circ/1 \text{ км}$, в стратосфере $\frac{\partial T}{\partial z} = 0^\circ/1 \text{ км}$. Коэффициент корреляции между фактическими и вычисленными изменениями высоты тропопаузы оказался равным 0,97.

5. В работе Б. Я. Слободова [7] была сделана попытка исследовать факторы, вызывающие изменение высоты тропопаузы. Для этого Б. Я. Слободов, дифференцируя по z уравнение притока тепла для адиабатического случая, получает уравнение для локального изменения вертикального градиента температуры (тропопауза не рассматривается как поверхность разрыва)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = (\vec{V}, \text{grad } \gamma) - \frac{\gamma_a}{T} (\vec{V}, \text{grad } T) - \frac{AR}{c_p} \frac{\gamma_a - \gamma}{p} \frac{dp}{dt} + \frac{\gamma_a^2 w}{T} + (\gamma_a - \gamma) \frac{\partial w}{\partial z}, \quad (12)$$

где \vec{V} — трехмерный вектор скорости,

$$\gamma = -\frac{\partial T}{\partial z}, \quad \gamma_a = \frac{Ag}{c_p}.$$

Далее, Б. Я. Слободов утверждает, что локальное изменение вертикального градиента температуры определяет изменение высоты тропопаузы. Отсюда, анализируя факторы, вызывающие локальное изменение вертикального температурного градиента, Б. Я. Слободов отождествляет их с факторами, вызывающими изменение высоты тропопаузы. Такая точка зрения представляется ошибочной. Действительно, изменение высоты тропопаузы зависит от изменения вертикального градиента температуры, но не в точке, а в некотором слое, примыкающем к тропопаузе (т. е. зависимость интегральная). Поясним это еще на таком примере. Пусть в точке, через которую проходит тропопауза, $\frac{\partial \gamma}{\partial t} = 0$. По Слободову, высота тропопаузы не должна меняться. На самом деле в этом случае тропопауза может понизиться, если в некотором слое под тропопаузой вертикальный температурный градиент уменьшится до нуля. Далее, при одном и том же значении $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ может иметь место различное изменение высоты тропопаузы.

Аналогично представляется ошибочным утверждение Б. Я. Слободова о том, что $\frac{d\gamma}{dt} = 0$ выражает условие субстанциональности. ✓

Рассматривая каждый член в правой части (12) как фактор, вызывающий изменение высоты тропопаузы, Б. Я. Слободов приходит к

Таблица 1

Пункт, дата	Фактические локальные полусуточные изменения температуры на уровнях (мб)				Положение тропопазы в мб (числитель — в начальный момент, знаменатель — в конечный)	Фактические полусуточные изменения высоты тропопазы (км/12 час.)	Полусуточные изменения высоты тропопазы, вычисленные по формуле (4)
	500	300	200	100			
1. Воронеж, 6—18 час. 21/IX 1955 г.	3,0	1,0	1,0	1,0	$\frac{285}{300}$	0,3	0,0
2. Копенгаген, 6—18 час. 21/IX	0,0	-2,0	0,0	-1,0	$\frac{200}{200}$	0,0	0,0
3. Москва, 6—18 час. 21/IX	-2,0	-2,0	-2,0	1,0	$\frac{282}{300}$	0,5	0,0
4. Москва, 18 час. 15/I— 6 час. 16/I	$\frac{-12,0}{-12,0}$	$\frac{10,0}{-1,0}$	6,0	1,0	$\frac{240}{400}$	-3,6	-3,7
5. Саратов, 18 час. 8/IX— 6 час. 9/IX	$\frac{-11,0}{-11,0}$	$\frac{10,0}{4,0}$	3,0	2,0	$\frac{240}{470}$	-4,8	-3,5
6. Москва, 18 час. 21/IX— 6 час. 22/IX	$\frac{-4,0}{-2,0}$	5,0	2,0	-1,0	$\frac{300}{380}$	-1,4	-1,5
7. Москва, 18 час. 13/I— 6 час. 14/I	$\frac{-5,0}{-4,0}$	$\frac{-4,0}{-4,0}$	6,0	2,0	$\frac{210}{288}$	-2,2	-1,7
8. Ростов-на-Дону, 18 час. 20/IX—6 час. 21/IX	$\frac{-4,0}{-7,0}$	$\frac{-9,0}{-3,0}$	$\frac{-3,0}{-3,0}$	-2,0	$\frac{220}{258}$	-1,2	-1,0
9. Минск, 6—18 час. 15/I	$\frac{-6,0}{-10,0}$	$\frac{12,0}{2,0}$	8,0	—	$\frac{230}{350}$	-2,7	-3,0
10. Ростов-на-Дону, 6—18 час. 15/I	14,0	$\frac{14,0}{14,0}$	-2,0	3,0	$\frac{280}{200}$	2,3	2,7
11. Саратов, 6—18 час. 9/II	$\frac{8,0}{7,0}$	$\frac{-9,0}{-3,0}$	-4,0	—	$\frac{465}{260}$	4,2	3,0
12. Казань, 6—18 час. 9/IX	2,0	5,0	-3,0	-2,0	$\frac{300}{200}$	2,8	1,3
13. Киров, 18 час. 8/IX— 6 час. 9/IX	0,0	$\frac{6,0}{5,0}$	$\frac{-3,0}{-3,0}$	-2,0	$\frac{268}{212}$	1,4	1,5
14. Вологда, 18 час. 21/IX— 6 час. 22/IX	$\frac{-1,0}{0,0}$	$\frac{-7,0}{-4,0}$	-3,0	-2,0	$\frac{318}{275}$	1,0	1,2
15. Рига, 18 час. 21/IX— 6 час. 22/X	0,0	0,0	$\frac{-7,0}{-1,0}$	—	$\frac{260}{225}$	0,8	1,0
16. Казань, 18 час. 20/IX— 6 час. 21/IX.	0,0	$\frac{1,0}{-1,0}$	$\frac{-5,0}{-2,0}$	2,0	$\frac{218}{185}$	0,9	1,0

Примечание. В тех случаях, когда тропопауза в начальный или конечный моменты времени находилась на промежуточных уровнях, фактические локальные изменения температуры даны дробью: знаменатель — изменения температуры на основном уровне, числитель — на выше лежащем или (со стрелкой) на ниже лежащем промежуточных уровнях.

неправильному выводу, что субстанциональность есть одна из пяти причин колебания тропопаузы при адиабатичности процессов. Выше было показано, что условие субстанциональности является более широким, чем условие адиабатичности¹.

В связи с вышеизложенным нам представляется, что формула (4) позволяет более точно исследовать причины, вызывающие изменения высоты тропопаузы, чем это сделано в работе Б. Я. Слободова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Волконский Ю. Н. О причинах изменений положения тропопаузы. *Метеорология и гидрология*, № 12, 1957.
2. Кибель И. А. Приложение к метеорологии уравнений механики бароклинной жидкости. *Изв. АН СССР, сер. геогр. и геофиз.* 5, 1940.
3. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. *Теоретическая гидромеханика*. Гостехиздат, Л., 1948.
4. Кричак О. Г. *Синоптическая метеорология*. Гидрометиздат, Л., 1956.
5. Орлова Е. М. Исследование неперидических колебаний высоты тропопаузы. *Труды ЦИП*, вып. 70, 1958.
6. Ракилова Л. Р. Тепловой режим атмосферы. Гидрометиздат, Л., 1957.
7. Слободов Б. Я. Изменения вертикальных градиентов температуры и колебания высоты тропопаузы. *Метеорология и гидрология*, № 3, 1959.
8. Bjerknes J., Palmén E. *Aerologische Analyse einer Zyklone*. Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre, 21, 1933.
9. Erfel H. Die Arten der Unstetigkeiten des Windfeldes an der Tröpopause. *Meteorologische Zeitschrift*, 1936.
10. Gates W. L. A dynamical model for large-scale tropospheric and stratospheric motions. *Quarterly Journal of the R. M. S.* v=83, № 356, 1957.
11. Lowell S. C. The boundary conditions at the tropopause. *Tellus*, v. 3, № 3, 1951.
12. Palmén E. Die Beziehung zwischen troposphärischen und Stratosphärischen Temperatur- und Luftdruckschwankungen. *Beitrage zur Physik der freien Atmosphäre*, 17, 1931.
13. Palmén E. *Aerologische Untersuchungen der atmosphärischen störungen mit besonderer Berücksichtigung der stratosphärischen Vorgänge*. Societas Scientiarum Fennica, Commentationes Physico-Mathematical, VII, 6, Helsingfors, 1933.
14. Palmén E. Über die Temperaturverteilung in der Stratosphäre und ihren Einfluss auf die Dynamik des Wetters. *Meteorologische Zeitschrift*, 1937. *Soc.*, v. 77, № 333, 1951.
15. Sawyer J. S. The dynamical systems of the lower stratosphere. *Quart. J. R. Met.*

¹ Отметим ошибку, допущенную Б. Я. Слободовым при попытке опровергнуть доказательство Ю. Н. Волконского об адекватности условий субстанциональности и адиабатичности. Приведем выдержку из статьи Б. Я. Слободова [7]: «Исходным положением в доказательстве Волконского является утверждение о том, что на тропопаузе $\theta_T = \theta_C$, т. е. потенциальная температура разрыва не претерпевает. Записывая это в форме $\theta_T - \theta_C = 0$, он приходит к

$$d'(\theta_T - \theta_C) = 0. \quad (6)$$

Уравнение (6) может выполняться только при условии консервативности потенциальной температуры, что возможно при адиабатичности процессов вблизи тропопаузы. Но условие адиабатичности в дальнейшем Волконский записывает в виде уравнения

$$\frac{d}{dt} (\theta_T - \theta_C) = 0, \quad (7)$$

которое ничем не отличается от (6) и выражает тоже самое, что и (6).

Ошибка приведенного рассуждения очевидна. Уравнение (6) выполняется независимо от условия адиабатичности в силу непрерывности потенциальной температуры и используется Ю. Н. Волконским для записи условия субстанциональности.

К ВОПРОСУ ОБ ЭВОЛЮЦИИ ОБЛАЧНОСТИ

В статье анализируется роль различных факторов в распределении дефицита абсолютной влажности. Основное внимание уделяется влиянию характера распределения коэффициента турбулентного обмена. Анализ проводится на основе численного решения уравнения переноса дефицита абсолютной влажности:

В статье [1] изложен метод решения уравнения переноса дефицита влажности

$$\frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} - \psi \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{1}{D} \frac{\partial \Delta}{\partial t} = \beta_1 a_m (\gamma_a \psi + \beta_1 \gamma^2) + \frac{A}{D} = S, \quad (1)$$

где $\Delta = a_m - a$ — дефицит абсолютной влажности,

$$\psi = \frac{1}{D} \left(\omega - \frac{dD}{dz} \right), \quad \beta_1 = \frac{1}{a_m} \frac{da_m}{dT},$$

T — температура, D — коэффициент турбулентного обмена, ω — вертикальная скорость, $A = \bar{V} \text{ grad } \Delta$ — адвекция дефицита абсолютной влажности, γ — вертикальный градиент температуры.

Неявная разностная схема, которая была использована при этом, обладает существенным преимуществом перед явной схемой. Явные схемы характеризуются тем, что разностное уравнение содержит только один член со старшим временным индексом. Этот член вычисляется по значениям функций в предыдущий момент времени. Для уравнения

$$D \frac{\partial^2 \Delta}{\partial z^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial t} + F(z, t)$$

все устойчивые разностные схемы должны удовлетворять условию

$$\Delta t \leq \frac{\Delta z^2}{2D_{\max}}$$

Если принять шаг по высоте $\Delta z = 10$ м, а $D_{\max} = 5 \text{ м}^2/\text{сек.}$, то Δt оказывается равным или меньшим 10 сек. Для метеорологических задач такой малый шаг по времени не дает реальной возможности для счета, так как обычно интервалы времени, которые представляют интерес в метеорологии, исчисляются часами или сутками. От этого жесткого условия свободны неявные схемы, при которых разностный оператор содержит несколько старших по временному индексу членов.

Неявный метод устойчив без всяких ограничений, налагаемых на шаги Δt и Δz .

Для целей разработки методов прогноза дефицита влажности нами была выработана схема решения уравнения переноса дефицита абсолютной влажности применительно к электронно-вычислительной машине «Урал I», на которой производились все расчеты.

Представляло интерес произвести сравнение приближенного решения уравнения (1), полученного на основании этой схемы, с точным решением задачи на конкретном примере. В качестве такого примера был выбран случай, когда правая часть уравнения (1) имеет следующий вид:

$$S = \sin \frac{(z-2)\pi}{H} \left\{ -0,3 \left[1 + 5 \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right] \frac{\pi^2}{H^2} - \frac{3}{D} \frac{t}{T^2} \right\} - 0,3\psi \left[1 - 5 \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right] \frac{\pi}{H} \cos \frac{(z-2)\pi}{H} + \frac{\psi}{H}. \quad (2)$$

Здесь $T = 24$ часа, $H = 5000$ м

$$\Delta \Big|_{t=0} = \left(1 - \frac{z-2}{H} \right) + 0,3 \sin \left(\frac{z-2}{H} \right) \pi.$$

При этом вертикальная скорость была задана в виде некоторой аналитической функции, переменной по высоте. Коэффициент турбулентного обмена, также переменный по высоте, задавался таблично.

Точное решение уравнения (1)

$$\Delta = \left[1 - \frac{z-2}{H} \right] + 0,3 \left[1 + 0,5 \left(\frac{t}{T} \right)^2 \right] \sin \left(\frac{z-2}{H} \right) \pi \quad (3)$$

удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$z = 2 \text{ м} \quad \text{при} \quad \Delta = 1,$$

$$z = H + 2 \text{ м} \quad \text{при} \quad \Delta = 0.$$

Сравнение значений Δ производилось для разных уровней в различные моменты времени. На рис. 1 представлены решения, точное и приближенное, рассчитанные с шагом $\Delta t = 3$ час. для $t = 12$ час. Из графика видно, что расхождения не превышают 4%.

Изучение эволюции облачности производилось применительно к зимнему времени года. Поэтому в качестве нижнего граничного условия для решения уравнения (1) можно было задать [см. 1]

$$\frac{\partial \Delta}{\partial z} \Big|_{z=z_0} = -\frac{R}{D_0} \frac{\beta_1 S_m}{c_p}, \quad \text{где} \quad S_m = \frac{a_m}{\rho}. \quad (4)$$

На верхней границе рассматриваемого слоя было принято

$$\Delta \Big|_{z=H} = 0. \quad (5)$$

В условии (4) R представляет собой разность между радиационным балансом подстилающей поверхности и потоком тепла в почву.

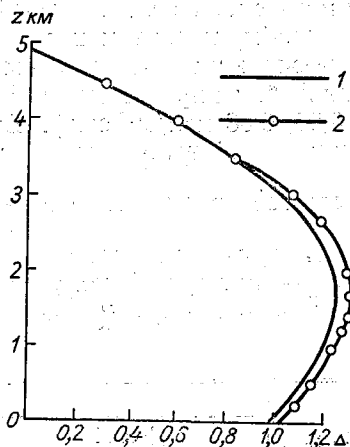


Рис. 1.
1 — точное решение, 2 — приближенное решение.

Известно [2], что среднемесячное значение радиационного баланса в зимние месяцы в северных районах Европейской территории СССР в среднем колеблется в пределах от $-0,01$ до $-0,03$ кал/см² мин. в период с октября по февраль. В суточном ходе эти колебания более резки; по наблюдениям в Колтушах в ноябре и феврале они составляют от $+0,03$ до $-0,04$, а в декабре и январе — от $0,00$ до $-0,03$ кал/см² мин. Теплообмен в почве достигает максимальных значений весной и осенью, составляя 4—12% радиационного баланса. В зимние месяцы роль теплообмена в почве еще меньше [3].

Чтобы оценить, какова область влияния нижнего граничного условия, а также, какое значение имеют неточности в задании R для распределения Δ , были произведены расчеты при различных значениях R ($0,04$, $0,00$, $-0,04$, $0,08$ кал/см² сек.). Выбранные R соответствуют реальным значениям этой величины. Затем для различных высот и моментов времени было составлено отношение $\delta = \frac{\Delta_R}{\Delta_{R=0}}$, где Δ_R — значение дефицита влажности при R , равном одному из трех значений ($+0,04$, $-0,04$, $-0,08$), $\Delta_{R=0}$ — значения Δ , полученные при $R = 0$.

Отношения δ в % через 3, 6 и 9 час. представлены в табл. 1.

Таблица 1

Высота (м)	R кал/см ² мин.								
	$+0,04$			$-0,04$			$-0,08$		
	3	6	9	3	6	9	3	6	9
400	6,0	8,8	12,5	6,5	7,5	15,5	13,5	24,0	32,0
1000	0,5	5,8	6,5	2,5	5,5	7,8	5,0	10,7	16,0
2000	0,0	0,5	0,0	2,0	3,0	0,0	2,0	1,5	2,5

Анализ таблицы показывает, что неточности, допущенные в выборе величины R , не влияют существенно на значение дефицита влажности выше 500—600 м при расчете на 9—12 час. Понятно, что при изучении эволюции облачности ниже этого уровня требуется по возможности точное знание величин, входящих в граничное условие, и в том числе величины R .

Из анализа таблицы также следует, что выше уровня 1000 м процессы можно считать адиабатическими при прогнозе на 12 час.

Выбранное нами граничное условие (5) не всегда отвечает существующим реальным условиям. На больших высотах дефицит влажности чаще всего бывает отличным от нуля. В связи с этим возникает вопрос о том, до какого уровня распространяется влияние верхнего нулевого граничного условия.

Ниже приводится таблица, составленная на основании сравнения результатов вычислений при двух граничных условиях: $\Delta_{z=H} = 0$ и $\Delta_{z=H} = a$, где a — некоторое значение дефицита влажности, вычисленное по известным начальным значениям температуры и относительной влажности на уровне $z = H$. В табл. 2 дано отношение $\frac{\Delta_a - \Delta_0}{\Delta_a}$, где Δ_a — значение Δ , рассчитанное при условии $\Delta_{z=H} = a$, а Δ_0 — значение Δ , рассчитанное при условии $\Delta_{z=H} = 0$.

Расчеты производились при восходящих и нисходящих вертикальных токах, а в таблице приведены величины, соответствующие наиболее не-

благоприятному случаю, когда во всем рассматриваемом слое действовали нисходящие вертикальные движения, достигавшие 2,8 см/сек. на уровне 5 км. Как видно из таблицы, влияние верхнего граничного условия в этом случае распространяется на 1—1,5 км вниз от верхней границы. За верхнюю границу принимался уровень $z = 5,2$ км.

Таблица 2

М	t час.				М	t час.			
	3	6	9	12		3	6	9	12
200			0	0	2800	0,24	0,69	1,22	1,78
400			0,01	0,02	3000	0,40	1,03	1,74	2,36
600		0,01	0,02	0,05	3200	0,65	1,52	2,41	3,11
800		0,01	0,04	0,06	3400	1,03	2,20	3,28	4,16
1000		0,02	0,06	0,12	3600	1,56	3,12	4,50	5,42
1200		0,02	0,08	0,15	3800	2,38	4,45	6,02	7,10
1400	0,01	0,03	0,11	0,23	4000	3,64	6,40	8,25	9,10
1600	0,01	0,05	0,16	0,30	4200	5,24	9,33	11,50	12,55
1800	0,03	0,08	0,23	0,40	4400	9,25	14,00	16,40	17,35
2000	0,03	0,13	0,32	0,52	4600	15,60	22,20	24,20	25,00
2200	0,04	0,20	0,44	0,71	4800	28,20	38,20	39,80	39,60
2400	0,08	0,29	0,62	0,97	5000	65,00	79,40	79,60	77,70
2600	0,14	0,50	0,85	1,32					

2. Для выяснения роли и количественного влияния трех основных факторов, имеющих значение для облакообразования, которые учитываются уравнением (1), а именно вертикальных скоростей, коэффициента турбулентности и адвекции, были рассчитаны примеры при различных значениях этих величин.

Исходными величинами для решения задачи являются:

а) распределение температуры T в начальный момент времени и в последующие моменты, необходимые для вычисления величины a_m , входящей в правую часть уравнения (1);

б) распределение по высоте относительной влажности в начальный момент;

в) распределение по высоте коэффициента турбулентного обмена в различные моменты времени;

г) распределение вертикальной скорости в различные моменты времени;

д) данные об адвекции на изобарических поверхностях в различные моменты времени.

В расчетах использовались данные самолетного зондирования в Ленинграде.

3. Особое внимание при постановке расчетов и анализе результатов было обращено на роль профиля коэффициента турбулентного обмена.

Из анализа уравнения (1) и расчетных формул [1] видно, что вертикальная скорость входит в формулы в сочетании с вертикальным градиентом коэффициента турбулентного обмена в виде некоторой функции Ψ . Поэтому можно было предполагать, что $\frac{\partial D}{\partial z}$ в зависимости от своего знака усиливает или ослабляет скорость вертикальных движений.

Для количественной проверки этого обстоятельства было выбрано несколько профилей D , характеризующихся различными градиентами.

Значения D были взяты исходя из известных средних значений. Выбор распределения D , отличного от общепринятой в теоретических расчетах схемы с изломом, был вызван стремлением наиболее отчетливо выявить влияние градиента D .

На рис. 2 представлены использованные в расчетах профили коэффициента турбулентного обмена.

Подтверждением вывода о существенном влиянии профиля D могут служить следующие примеры расчетов.

На рис. 3 представлены две серии графиков, полученных через 3, 6, 9, 12 час. от начального момента при одинаковых исходных величинах, за исключением профиля D : a — при постоянном во времени D , b — при переменном во времени D .

Из сравнения видно, что в случае, приведенном на рис. 3 б, характеризующемся увеличивающимся во времени градиентом D , произошло размывание облачного слоя, обусловленное отрицательными значениями функции Ψ при положительной вертикальной скорости.

Заметим, что под «слоем облачности» нужно понимать слой, в котором происходит конденсация ($\Delta = 0$). Таким образом, изменение границ облачности может определяться не только вертикальной скоростью, но и характером распределения по высоте профиля коэффициента турбулентности.

В случаях когда вертикальные скорости невелики и адвекция мала, образование облачности зависит от профиля коэффициента турбулентного обмена. Это прежде всего относится к процессам, протекающим в пограничном слое, где наблюдается наиболее интенсивный турбулентный обмен.

Образование подынверсионной облачности также связано с убыванием коэффициента турбулентности в слое инверсии. Отрицательные значения $\frac{\partial D}{\partial z}$, получающиеся при этом, действуя как восходящие вертикальные движения, способствуют образованию облаков.

Особенностями в распределении коэффициента турбулентного обмена (убывание D с высотой) можно также объяснить возможность появления и существования в некоторых случаях облачности при нисходящих вертикальных движениях [4]. Важная роль этого фактора подтверждается работами К. Г. Абрамович, которая, используя материалы наблюдений, показала, что в условиях малых значений вертикальных скоростей и адвекции облачный слой образуется на уровне максимальных значений числа Ri . Эти максимальные значения характеризуют ослабление интенсивности турбулентного обмена на данном уровне.

4. Вертикальные скорости, влияние которых изучалось с количественной точки зрения, были заданы следующей функцией:

$$w = a(t)z - b(t)z^2,$$

где коэффициенты a и b определяются из условия, что скорости, вычисленные по этой формуле, имеют порядок 1 см/сек. на уровне 1 км и изменяют знак с положительного на отрицательный на 3-м и 4-м шагах.

На рис. 4 представлены результаты расчетов, проведенных при постоянных во времени значениях коэффициента турбулентного обмена и адвекции при постоянной вертикальной скорости (a) и при изменяющейся во времени вертикальной скорости (b).

Из анализа графиков следует, что при среднем значении вертикальной скорости в слое от 0 до 5 км, равном примерно 1,5 см/сек., сплошной слой облачности образуется через 3 часа после начала действия вертикальных токов. При убывании вертикальной скорости до — 1,0 см/сек.

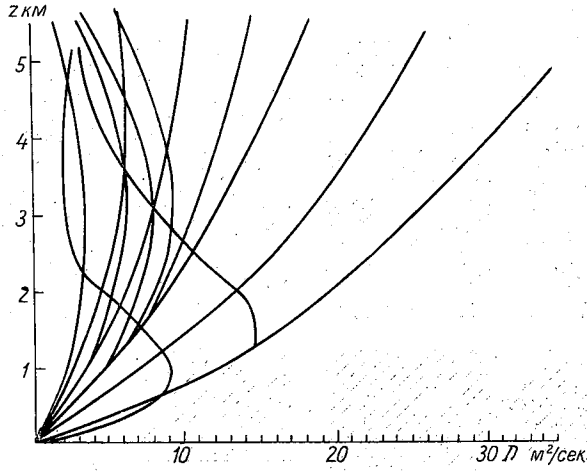


Рис. 2.

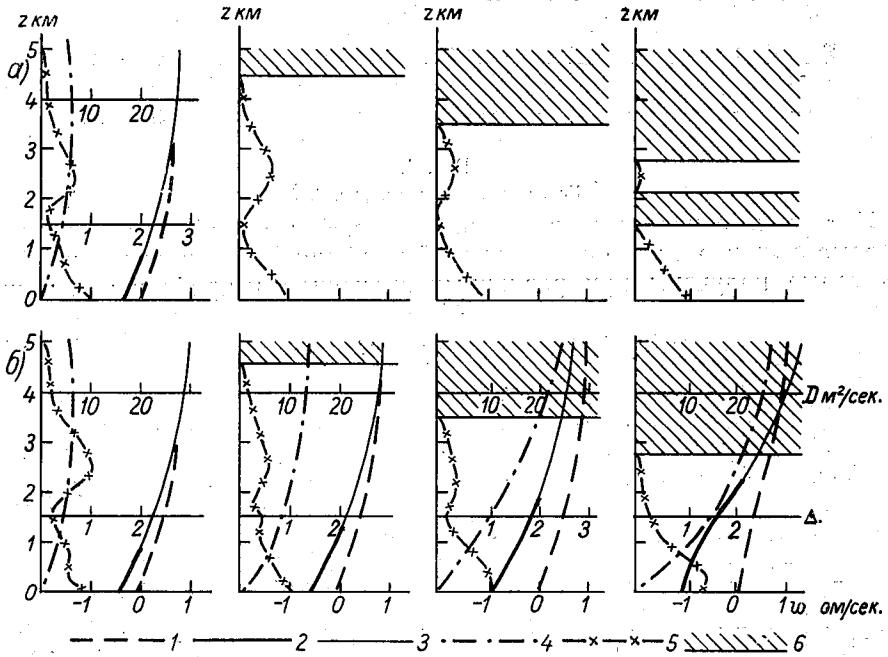


Рис. 3.

1 — вертикальная скорость, 2 — отрицательные значения $\left(w - \frac{Dd}{dz}\right)$, 3 — положительные значения $\left(w - \frac{dD}{dz}\right)$, 4 — коэффициент турбулентного обмена, 5 — дефицит абсолютной влажности, 6 — слой, в котором $\Delta = 0$.

В слое от 0 до 4 км облачность размывается. Существование на графике облаков выше 4 км может быть объяснено влиянием нулевого граничного условия на верхней границе рассматриваемого слоя (5 км).

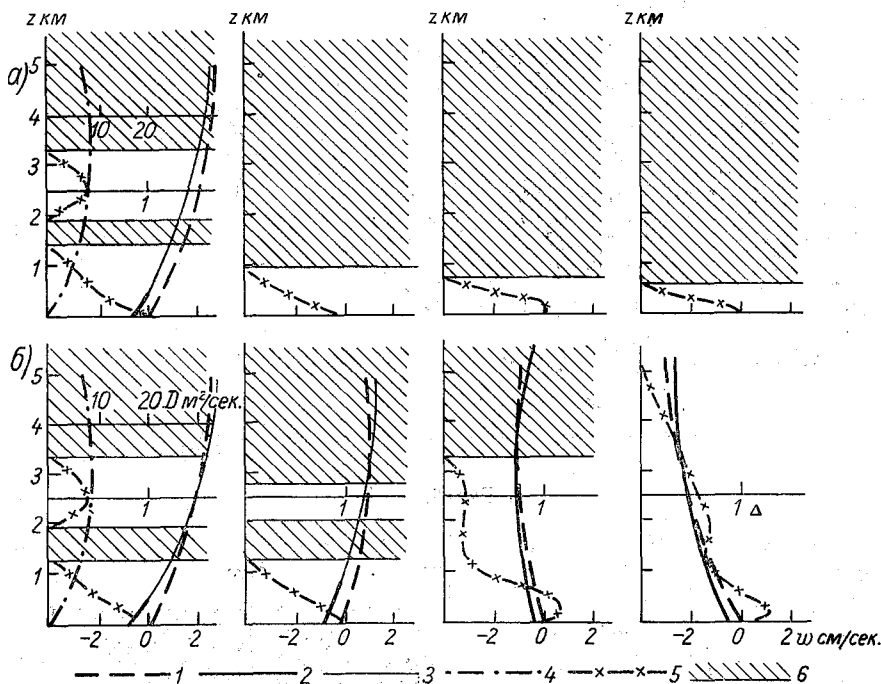


Рис. 4.

Усл. обозначения см. рис. 3.

Интересно сопоставить графики на рис. 4 а с графиками на рис. 5, которые отличаются только кривизной профиля D . Сравнивая рис. 4 а и 5, которые получены при различных значениях и профилях D , можно

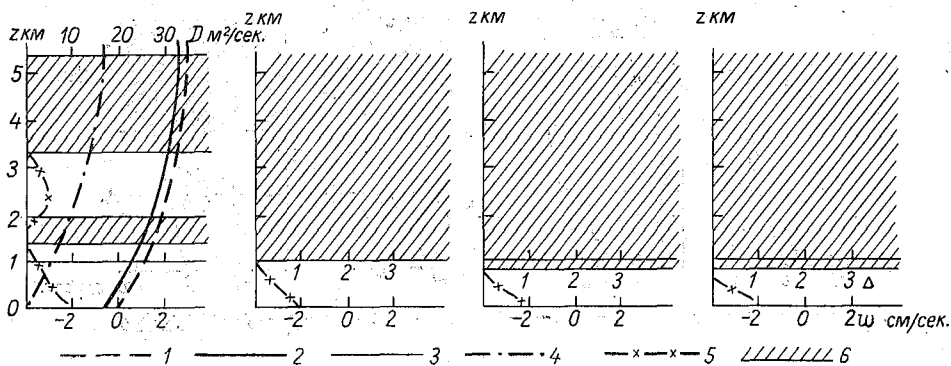


Рис. 5.

Усл. обозначения см. рис. 3.

видеть, что при больших вертикальных скоростях (1—3 см/сек.) профиль коэффициента турбулентного обмена не влияет на образование облачности.

Пример расчета, показывающий, как быстро влияет адвекция дефицита абсолютной влажности на развитие облачности, представлен на

рис. 6. Из графиков видно, что при резкой смене знака адвекции размывание облачности может произойти в течение 3 час.¹

Принципиально возможно использование разработанной схемы для расчетов на конкретном материале наблюдений с целью диагноза и прогноза облачности.

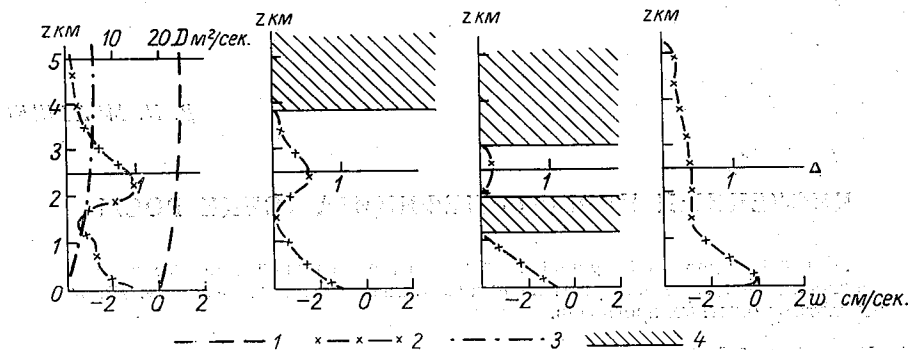


Рис. 6.

1 — вертикальная скорость, 2 — коэффициент турбулентного обмена, 3 — дефицит абсолютной влажности, 4 — слой, в котором $\Delta = 0$.

В настоящее время разработаны достаточно удовлетворительные методы расчета вертикальных скоростей и адвекции на основных изобарических поверхностях. Основная трудность заключается в задании профиля коэффициента турбулентного обмена до больших высот, поскольку до сих пор не имеется надежных методов количественного определения коэффициента турбулентности как в пограничном слое, так и в свободной атмосфере.

ЛИТЕРАТУРА

1. Арраго Л. Р., Швец М. Е. К теории образования и эволюции неконвективной облачности. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
2. Огнева Т. А. Некоторые особенности теплового баланса деятельной поверхности. Гидрометеонздат, Л., 1955.
3. Тверской П. Н. Курс метеорологии. Гидрометеонздат, Л., 1951.
4. Матвеев Л. Т. Общий курс метеорологии (Основы физики метеорологии). Изд. ЛКВВИА им. А. Ф. Можайского, 1958.

¹ Знак адвекции меняется при переходе от 3-го к 4-му шагу.

ЧИСЛЕННЫЙ ПРОГНОЗ ДЕФИЦИТА ТОЧКИ РОСЫ

В статье приводится рабочая схема численного решения уравнения переноса дефицита точки росы на вычислительной машине «Урал-1». Даны результаты опытных прогнозов.

1. В работе [1] был изложен метод численного прогноза дефицита точки росы с помощью электронной вычислительной машины. В данной работе, являющейся продолжением работы [1], изложены рабочая схема и результаты опытных прогнозов дефицита точки росы.

Как показано в работе [1], уравнение переноса дефицита точки росы имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{k}{p} \omega, \quad (1)$$

где S — дефицит точки росы, u и v — горизонтальные составляющие скорости ветра, p — давление, $\omega = \frac{dp}{dt} \approx -g\rho w$ (w — вертикальная скорость), k — функция, слабо зависящая от температуры, с достаточной точностью ее можно считать постоянной, равной 64° .

В уравнении (1) учтено лишь влияние вертикальных скоростей на изменение дефицита точки росы; турбулентные притоки тепла и влаги в данной схеме не рассматриваются. Учет этих факторов в настоящее время представляет значительные трудности и требует специальных исследований.

2. Мы рассматриваем изменения влажности, обусловленные крупномасштабными атмосферными процессами (перемещением циклонов, ложбин и т. д.). Поэтому чтобы исключить мелкомасштабные возмущения, необходимо выполнить соответствующее сглаживание над полем влажности. Известно также, что влажность в атмосфере определяется недостаточно точно, и поэтому одним из важных вопросов является исключение несистематических ошибок наблюдений.

Так как объективные методы анализа полей метеоэлементов находятся еще в настоящее время в стадии разработки, то с целью получения наиболее вероятных значений влажности в узлах регулярной сетки применялась линейная интерполяция. В качестве характеристики влажности бралась температура точки росы.

Допустим, что распределение температуры точки росы в окрестности некоторой точки подчиняется линейному закону

$$\tau_i = \tau_0 + ax_i + by_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n), \quad (2)$$

где τ_0 — значение температуры точки росы в искомой точке, τ_i — значения в окружающих точках.

Применяя метод наименьших квадратов, получаем систему нормальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} n\tau_0 + a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n y_i &= \sum_{i=1}^n \tau_i \\ \tau_0 \sum_{i=1}^n x_i + a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i y_i &= \sum_{i=1}^n \tau_i x_i \\ \tau_0 \sum_{i=1}^n y_i + a \sum_{i=1}^n x_i y_i + b \sum_{i=1}^n y_i^2 &= \sum_{i=1}^n \tau_i y_i \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Решая эту систему относительно τ_0 , находим значение температуры точки росы в искомой точке.

Задача линейной интерполяции была запрограммирована и решалась на электронной вычислительной машине «Урал-1». Значения τ задавались на 163 станциях на поверхности 850 мб и интерполировались на 204 узловых точки прямоугольной сетки с шагом, равным примерно 300 км.

На рис. 1 показана сеть станций, с помощью которой находились значения τ_0 в узлах регулярной сетки.

Так как от срока к сроку количество станций, дающих информацию о влажности, изменяется, программа была составлена таким образом, чтобы можно было выполнять интерполяцию при наличии сведений о влажности при любом количестве станций, но не больше 163.

Весь процесс интерполяции выполнялся в два этапа. Первоначально значения τ_0 вычислялись с помощью станций, расположенных в радиусе 600 км от искомого узла сетки. Из выражения (2) видно, что для решения системы нормальных уравнений (3) необходимы сведения о влажности не менее чем на трех станциях. В том случае, когда количество станций было меньше трех, узловая точка, для которой вычислялось τ_0 , пропусклась.

На втором этапе расчет выполнялся для пропущенных узловых точек, причем в качестве дополнительной информации служили значения в ближайших узловых точках.

Температура на поверхности 850 мб определялась по относительной топографии как средняя температура в слое между поверхностями 700 и 1000 мб

$$\bar{T} = mH,$$

где $m = 0,957 \cdot 10^{-1}$ град/м, H — толщина слоя между поверхностями 700 и 1000 мб в метрах.

Дефицит точки росы находился как разность между температурой воздуха и температурой точки росы.

3. В работе [1] приводится уравнение (1), записанное в конечноразностном виде. Из этого уравнения следует, что значение дефицита точки росы в точке (ij) в момент $t + \delta t$ равно

$$S_{ij}^{t+\delta t} = \frac{1}{1 + \alpha_{ij} + \beta_{ij}} \left(F_{ij}^{t+\frac{\delta t}{2}} + \alpha_{ij} S_{i-ij}^{t+\delta t} + \beta_{ij} S_{ij-1}^{t+\delta t} \right), \quad (4)$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 F_{ij}^{t+\frac{\delta t}{2}} &= \frac{k}{p} \omega_{ij}^{t+\frac{\delta t}{2}} \delta t - [a_{ij}(S_{ij} - S_{i-1j}) + \\
 &+ \beta_{ij}(S_{ij} - S_{ij-1})]^t + S_{ij}^t \\
 a_{ij} &= \frac{\frac{t+\frac{\delta t}{2}}{\delta t} u_{ij}}{2\delta x} \\
 \beta_{ij} &= \frac{\frac{t+\frac{\delta t}{2}}{\delta t} v_{ij}}{2\delta y}
 \end{aligned} \right\} (5)$$

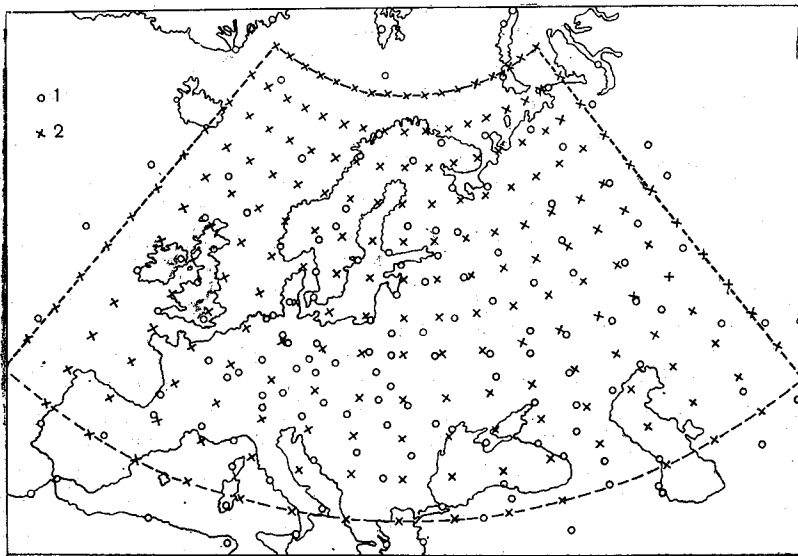


Рис. 1.

1 — пункты зондирования, 2 — узловые точки сетки.

Так как в этой схеме используется стандартная система координат (которая отличается от декартовой системы тем, что с перемещением точки на плоскости изменяется направление ее осей), возникает необходимость во введении поправочных множителей при вычислении производных вдоль кругов широты. Как известно, элементарные приращения координат x и y выражаются через элементарные приращения θ и ψ следующими соотношениями:

$$\delta y = R \sin \theta \delta \psi,$$

$$\delta x = R \delta \theta.$$

Здесь ось y направлена с запада на восток, ось x — с севера на юг; R — радиус земли, $\theta = 90 - \varphi$, φ — широта.

Составляющие горизонтального ветра u и v , входящие в параметры α и β выражения (5), находились из геострофических соотношений для поверхности 850 мб. Вертикальные скорости вычислялись по формуле

$$w = a_1 \frac{d\Omega}{d\sigma} + b_1 \Omega, \quad (6)$$

где Ω — вихрь скорости, a_1 и b_1 — постоянные, равные соответственно $1,215 \cdot 10^8$ м сек. и $1,77 \cdot 10^2$ м.

Первый член в правой (6) характеризует влияние нестационарности движения, второй — влияние турбулентного трения.

Перепишем выражение для вихря скорости Ω и параметров α и β в конечных разностях [значения Ω в каждой точке сетки определялись по восьми окружающим точкам (рис. 2)]

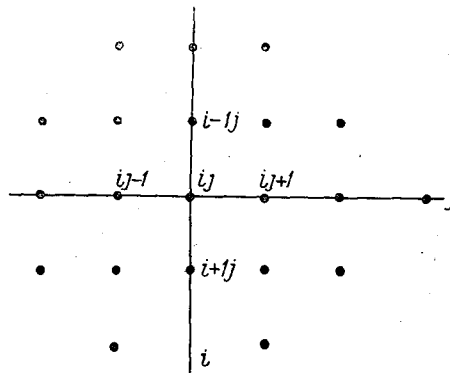


Рис. 2.

$$\begin{aligned} \Omega_{ij} = & M_i^{(1)} (2p_{ij+1} + 2p_{ij-1} - p_{i-1j} - p_{i+1j} - 4p_{ij}) + \\ & + M_i^{(2)} (2p_{i-1j} + 2p_{i+1j} - p_{ij+1} - p_{ij-1} - 4p_{ij}) + \\ & + 0,5 (M_i^{(1)} + M_i^{(2)}) (p_{i+1j+1} + p_{i+1j-1} + p_{i-1j-1} + p_{i-1j+1}). \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты $M_i^{(1)}$, $M_i^{(2)}$ и N_i даны в табл. 1. При вычислениях Ω , α и β учитывалось изменение параметра Кориолиса с широтой.

Таблица 1

Коэффициенты	φ									
	43	46	49	52	55	58	61	64	67	70
$M_i^{(1)} \cdot 10^5$	0,21	0,22	0,23	0,25	0,28	0,31	0,36	0,44	0,53	0,70
$M_i^{(2)} \cdot 10^5$	0,31	0,29	0,28	0,27	0,26	0,25	0,24	0,23	0,23	0,23
$N_i \cdot 10^2$	1,36	1,36	1,38	1,41	1,44	1,52	1,62	1,74	1,90	2,12

Как следует из (4), неявная конечноразностная схема приводит к полубесконечной системе уравнений. Однако расчеты показывают, что ее можно оборвать и ограничиться системой из восьми уравнений.

Решение такой системы возможно лишь в том случае, если узловая точка, для которой ищется $S_{ij}^{t+\delta t}$, отстоит от границы области на расстоянии $2 \delta x$, $2 \delta y$ и более или если в окрестности узловой точки поток направлен из внутренней части области к ее границам. Так, например, если точка, для которой ищется $S_{ij}^{t+\delta t}$, удовлетворяет указанным выше условиям, то при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ получается следующая система:

$$\begin{aligned}
S_{ij}^{t+\delta t} &= \frac{1}{1 + \alpha_{ij} + \beta_{ij}} \left(F_{ij}^{t+\frac{\delta t}{2}} + \alpha_{ij} S_{i-1j}^{t+\delta t} + \beta_{ij} S_{ij-1}^{t+\delta t} \right) \\
S_{i-1j}^{t+\delta t} &= \frac{1}{1 + \alpha_{i-1j} + \beta_{i-1j}} \left(F_{i-1j}^{t+\frac{\delta t}{2}} + \alpha_{i-1j} S_{i-2j}^{t+\delta t} + \beta_{i-1j} S_{i-1j-1}^{t+\delta t} \right) \\
S_{ij-1}^{t+\delta t} &= \frac{1}{1 + \alpha_{ij-1} + \beta_{ij-1}} \left(F_{ij-1}^{t+\frac{\delta t}{2}} + \alpha_{ij-1} S_{ij-1}^{t+\delta t} + \beta_{ij-1} S_{ij-2}^{t+\delta t} \right) \\
S_{i-1j-1}^{t+\delta t} &= \frac{1}{1 + \alpha_{i-1j-1} + \beta_{i-1j-1}} \left(F_{i-1j-1}^{t+\frac{\delta t}{2}} + \alpha_{i-1j-1} S_{i-2j-1}^{t+\delta t} + \right. \\
&\quad \left. + \beta_{i-1j-1} S_{i-1j-2}^{t+\delta t} \right) \\
S_{i-2j}^{t+\delta t} &= \frac{F_{i-2j}^{t+\frac{\delta t}{2}}}{1 + \alpha_{i-2j} + \beta_{i-2j}} \\
S_{i-2j-1}^{t+\delta t} &= \frac{F_{i-2j-1}^{t+\frac{\delta t}{2}}}{1 + \alpha_{i-2j-1} + \beta_{i-2j-1}} \\
S_{i-1j-2}^{t+\delta t} &= \frac{F_{i-1j-2}^{t+\frac{\delta t}{2}}}{1 + \alpha_{i-1j-2} + \beta_{i-1j-2}} \\
S_{ij-2}^{t+\delta t} &= \frac{F_{ij-2}^{t+\frac{\delta t}{2}}}{1 + \alpha_{ij-2} + \beta_{ij-2}}
\end{aligned} \tag{8}$$

В том случае, когда узловая точка отстоит от границы области на расстоянии δx , δy и поток направлен внутрь области, решается система из трех уравнений. Так, например, при $\alpha > 0$, $\beta > 0$ имеем

$$\left. \begin{aligned}
S_{ij}^{t-\delta t} &= \frac{1}{1 + \alpha_{ij} + \beta_{ij}} \left(F_{ij}^{t+\frac{\delta t}{2}} + \alpha_{ij} S_{i-1j}^{t+\delta t} + \beta_{ij} S_{ij-1}^{t+\delta t} \right) \\
S_{i-1j}^{t+\delta t} &= \frac{F_{i-1j}^{t+\frac{\delta t}{2}}}{1 + \alpha_{i-1j} + \beta_{i-1j}} \\
S_{ij-1}^{t+\delta t} &= \frac{F_{ij-1}^{t+\frac{\delta t}{2}}}{1 + \alpha_{ij-1} + \beta_{ij-1}}
\end{aligned} \right\} \tag{9}$$

Последовательно решая систему уравнений в каждой точке сетки, находим значение S во всех внутренних точках области для момента времени $t + \delta t$. Чтобы избежать сокращения района прогноза, значения дефицита точки росы экстраполировались на границу по формуле

$$S_{i-1j} = 0,33 (S_{i-1j} + S_{ij} + S_{ij+1}).$$

Эта формула соответствует экстраполяции на верхнюю границу области прогноза. Изменяя соответствующим образом индексы, можно написать аналогичные выражения и для других границ области.

4. Мы ставили перед собой задачу разработки метода прогноза дефицита точки росы, поэтому поля давления и геопотенциала считались

заданными в течение срока прогноза. В этой схеме был выбран временной шаг, равный 2 час. Дефицит точки росы предвычислялся на 12 и 24 часа для поверхности 850 мб. Схема интегрирования уравнения переноса дефицита точки росы была также реализована на электронной вычислительной машине «Урал-1» и выполнялась в следующей последовательности.

а) Значения вихря, которые вычислялись по формуле (7) для начального момента и через 12 час., сглаживались и экстраполировались на края области. Сглаживание выполнялось по формуле

$$\bar{\omega}_{ij} = \frac{5}{8} \omega_{ij} + \frac{1}{16} (\omega_{ij+1} + \omega_{i-1j} + \omega_{i+1j} + \omega_{ij-1}) + \\ + \frac{1}{32} (\omega_{i+1j+1} + \omega_{i-1j+1} + \omega_{i-1j-1} + \omega_{i+1j-1}).$$

б) По известным полям геопотенциала в начальный момент и через 12 час. путем линейной интерполяции находились параметры α и β в момент времени $t + \frac{\delta t}{2}$.

в) По формуле (6) вычислялись вертикальные скорости для $t + \frac{\delta t}{2}$.

г) С учетом знака параметров α и β вычислялось поле $\frac{F_{ij} t + \frac{\delta t}{2}}{1 + \alpha_{ij} + \beta_{ij}}$.

д) Путем решения системы уравнений (8) или (9) в зависимости от изложенных ранее условий во всех внутренних точках области находилось поле дефицита точки росы в момент $t + \delta t$ и экстраполировалось на края области. Если в процессе вычислений S_{ij} оказывалось отрицательным, то дефицит принимался равным нулю. Нами было выполнено 19 прогнозов, из них 10 на 12 час. и 9 на 24 часа.

Для характеристики успешности прогнозов дефицита точки росы были вычислены коэффициенты корреляции между фактическими и прогнозными значениями дефицита. Область, для которой производилась корреляция, приведена на рис. 3. Результаты оценки показали, что среднее значение коэффициента корреляции на 12 час. равно 0,61, на 24 часа — 0,64. Более высокий коэффициент корреляции при прогнозе на 24 часа, вероятно, обусловлен недостаточным количеством случаев.

На рис. 4—6 показан пример прогноза дефицита точки росы на 24 часа, а на рис. 7 и 8 даны поля геопотенциала на поверхности 850 мб в начальный и конечный моменты времени. При прогнозе влажности приходится сталкиваться с рядом трудностей и в первую очередь эти трудности связаны с анализом начальных полей. Сравнительно редкая сеть станций, главным образом над Атлантикой и арктическими морями, а также неполнота данных в значительной мере затрудняют анализ начальных полей и приводят к большим погрешностям. Применяемая здесь линейная интерполяция не устраняет до конца все погрешности, в особенности на краях области. В связи с этим возникает настоятельная необходимость в использовании эффективных методов объективного анализа полей влажности.

Использование демаркационного графика, предложенного Люисом [2], позволяет на основании прогностических значений дефицита точки росы и вертикальных скоростей определить характер погоды (облачность, осадки). Однако необходимо заметить, что график требует уточнения и в первую очередь это относится к введению еще одного параметра, характеризующего температуру, так как при более низких температурах,

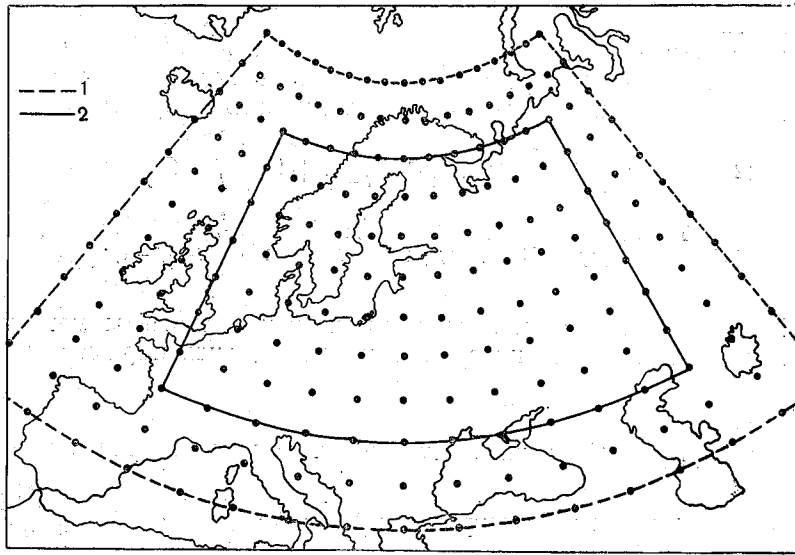


Рис. 3.

1 — область, в которой задавались исходные данные, 2 — область, для которой вычислялись коэффициенты корреляции.

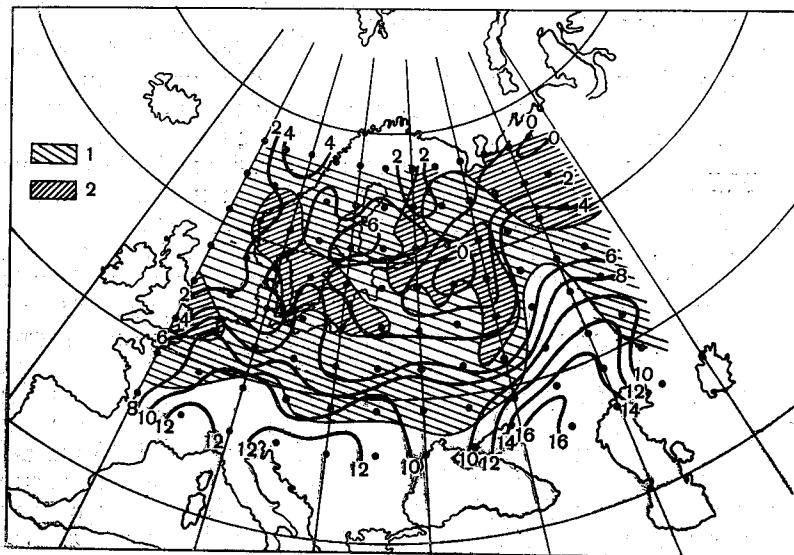


Рис. 4. Начальное поле дефицита точки росы, 15 час. 18/X 1957 г.

1 — облачность, 2 — осадки.

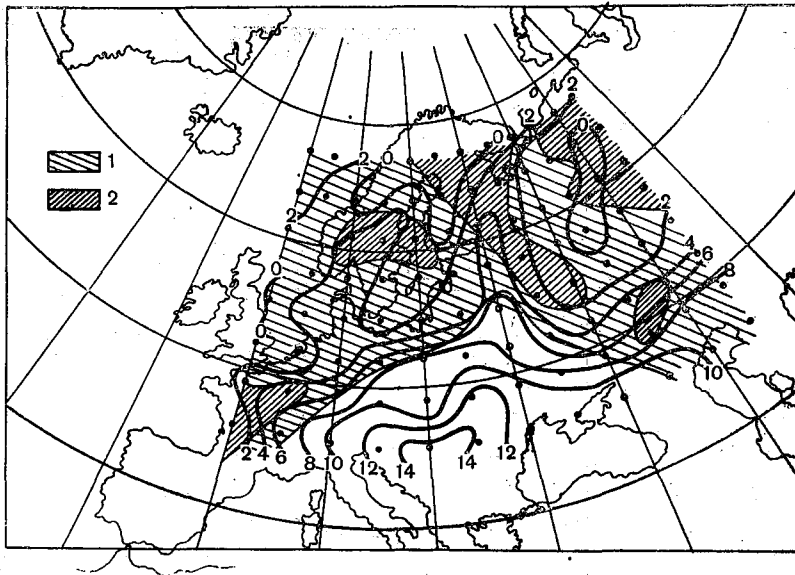


Рис. 5. Фактическое поле дефицита точки росы, 15 час. 19/X 1957 г.
1 — облачность, 2 — осадки.

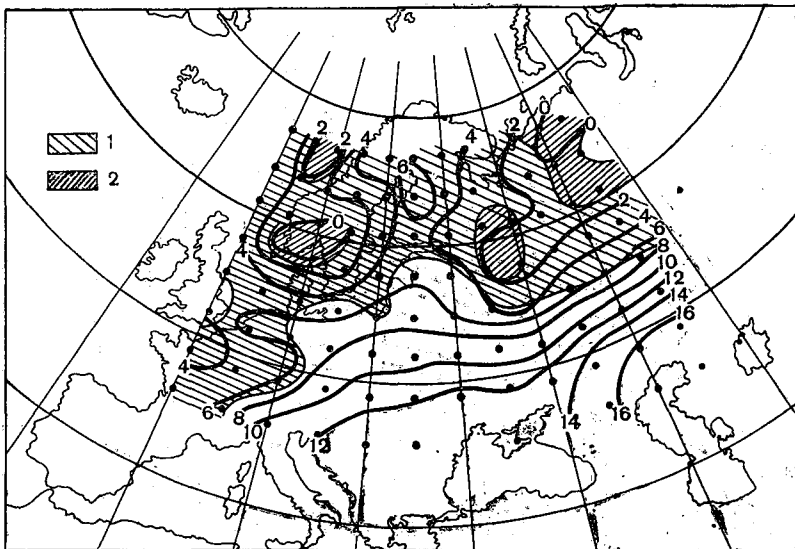


Рис. 6. Прогностическое поле дефицита точки росы на 24 часа с 15 час.
18/X 1957 г.
1 — облачность, 2 — осадки.

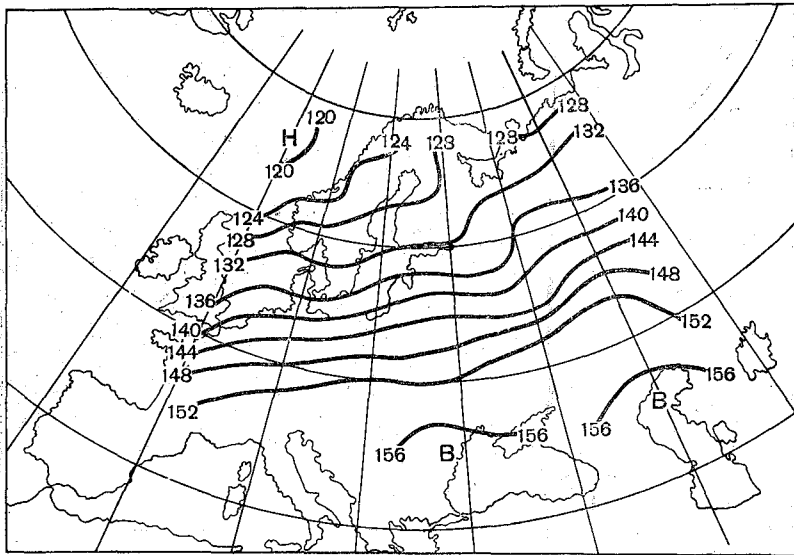


Рис. 7. Поле AT_{850} , 15 час. 18/X-1957 г.

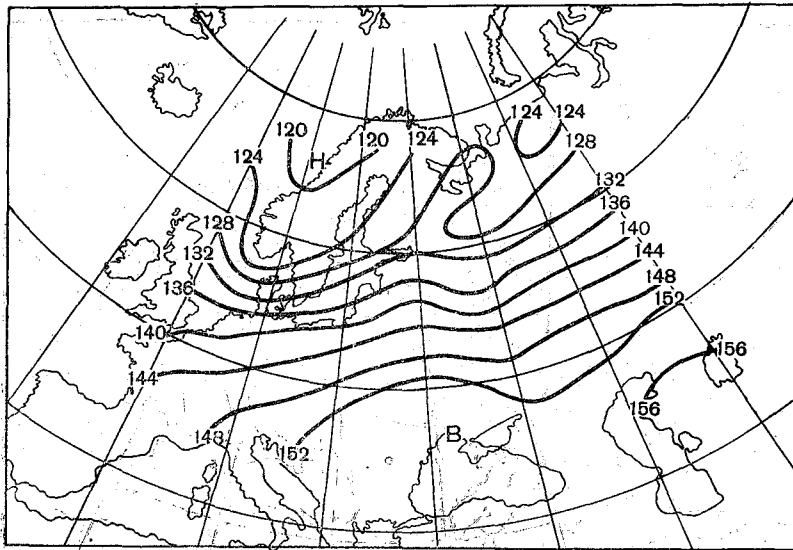


Рис. 8. Поле AT_{850} , 15 час. 19/X-1957 г.

но при одном и том же значении дефицита точки росы, влагосодержание воздуха мало. Поэтому для значений дефицита, близких к насыщению, вероятность образования облачности при низких температурах уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мелешко В. П., Швеиц М. Е. К вопросу о прогнозе дефицита влажности. Труды ГГО, вып. 114, 1960.
2. Lewis W. Forecasting 700mb. Dewpoint Depression by a 3-Dimensional Trajectory Technique. Monthly Weather Review. Vol. 85, № 9, September, 1957.
3. Carlstead E. Forecasting Middle Cloudness and Precipitation Areas by Numerical Methods. Monthly Weather Review. Vol. 87, № 10, October, 1959.

В. Б. АФАНАСЬЕВА

О СВЯЗИ МЕРИДИОНАЛЬНОГО ИНДЕКСА С ТИПАМИ СИНОПТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Статья посвящена вопросу подсчета меридионального индекса циркуляции (среднедекадного) и увязки с типами синоптических процессов в целях прогноза форм циркуляции.

1. За последнее время выполнено большое количество работ в области изучения общей циркуляции атмосферы. Много исследований посвящено вопросу количественной оценки характера циркуляции при помощи определенных индексов [1, 2, 4, 6, 7, 9, 10]. Недостатком более ранних работ следует считать то обстоятельство, что индексы циркуляции, которые являлись характеристиками ее состояния, носили качественный характер.

Характеризовать деятельность атмосферы можно путем учета изменений западно-восточного или меридионального переносов воздушных масс, что и делается введением соответствующих индексов.

Большинство исследователей учитывает зональный индекс циркуляции.

Поскольку неоднородность подстилающей поверхности нарушает западно-восточный перенос (главным образом вследствие тепловых различий между океанами и материками), М. И. Юдиным было предложено наряду с зональным индексом ввести другой индекс, характеризующий тепловые различия между океанами и материками. Такой индекс был назван меридиональным.

А. А. Рождественским были проведены исследования меридионального индекса по следующей методике [10].

Поскольку состояние подстилающей поверхности непосредственно отражается на интенсивности барических образований, то для суждения о тепловых различиях между океанами и материками необходимо и достаточно было определить разность между средним давлением на площади, занятой материками и океанами в отдельности.

Практически это производилось следующим образом. С наземных карт северного полушария снималось давление вдоль меридианов через каждые 10° в зоне от 70° до 40° с. ш.

Меридианы отсчитывались через 30° и были подобраны таким образом, чтобы по возможности исключить прибрежные области. Затем вычислялось среднее давление в отдельности для материков и океанов и разность между ними. Исследования производились по ежедневным данным.

А. А. Рождественским были вычислены также средние нормальные значения меридионального индекса на основании карт среднемесячного давления в северном полушарии.

Годовой ход значений меридионального индекса приведен в табл. 1

Таблица 1

Годовой ход средних нормальных значений меридионального индекса

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
МИ ¹	12,2	12,0	7,3	2,6	-2,2	-5,3	-7,4	-5,8	-0,4	5,6	8,5	13,3

Как видно из таблицы, МИ плавно изменяется в течение года, достигая наибольших значений в декабре, а наименьших в июле. Годовая амплитуда изменений МИ оказалась равной 20,7.

2. В настоящей работе, помимо ежедневных значений, были подсчитаны и среднедекадные значения меридионального индекса. Все подсчеты проводились по методике А. А. Рождественского, причем был использован более длинный ряд наблюдений, а именно с 1949 по 1956 г. Данные снимались как отклонение от значения давления, равного 1013 мб. В качестве примера в табл. 2 приведен расчет меридионального индекса за 21/I 1954 г.

Таблица 2

Расчет меридионального индекса за 21/I 1954 г.

φ	ψ							
	100	70	-20	-50	-80	-110	-140	-170
70	17	3	5	5	12	12	10	7
60	27	-2	-4	-2	47	30	14	-4
50	30	0	-10	-1	40	32	14	4
40	22	0	0	0	11	29	6	2
	96	1	-9	2	110	103	44	9

Суша

Море

100	96	-140	44
70	1	-170	9
-80	110	-20	-9
-110	103	-50	2
Среднее	19,3	Среднее	2,8

$$\text{МИ} = 19,3 - 2,8 = 16,5$$

Вычисленные вышеуказанным способом ежедневные значения меридионального индекса были занесены в таблицы по месяцам и на их основании вычислены среднедекадные значения индекса. На основании таких таблиц за все исследованные годы были построены графики. Один из таких графиков приведен на рис. 1.

Из графика видно, что среднедекадный меридиональный индекс имеет достаточно хорошо выраженный годовой ход, причем минимум наблюдается летом (в июне), максимум — зимой (в феврале). В разные годы максимум и минимум могут несколько смещаться, что показано в табл. 3, где приведены сроки наступления максимумов и минимумов в каждом из исследованных лет.

Из табл. 3, составленной на основании среднедекадных значений меридионального индекса видно, что время наступления наибольших и

¹ МИ означает меридиональный индекс.

наименьших значений меридионального индекса колеблется в довольно узких пределах. Минимум в преобладающем большинстве случаев (в 6 случаях из 8) наблюдается в июле, и лишь в двух случаях он смещен

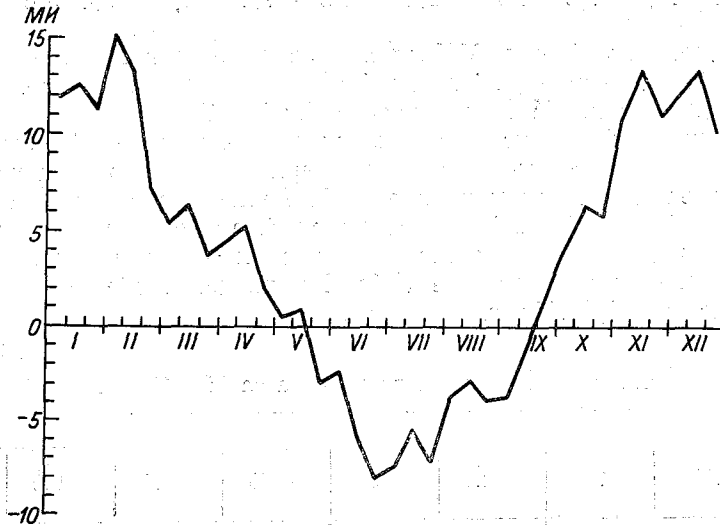


Рис. 1. Годовой ход среднедекадного меридионального индекса за 1953 г.

на смежные месяцы (июнь и август). Максимум в трех случаях наблюдался в феврале, в двух — в декабре, а в январе и ноябре наблюдалось по одному случаю.

Таблица 3

Время наступления максимума (+) и минимума (—) значений МИ

Год	Месяц											
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
1949							—					+
1950		+					—					
1951	+						—					
1952							—					
1953		+				—						
1954							—				+	
1955		+						—				
1956						—						+

На основании вышесказанного можно сделать вывод, что минимум значений меридионального индекса имеет место в летние месяцы (июнь — август) с явным преобладанием в июле, максимум — в зимние месяцы (ноябрь — февраль).

Подобное распределение значений меридионального индекса в течение года хорошо согласуется с приведенным в статье А. А. Рождествен-

ского [10], где максимум средних значений меридионального индекса падает на декабрь, минимум — на июль.

3. Нами была сделана попытка увязать изменение значений меридионального индекса со сменой типов циркуляции. Для этой цели была использована типизация синоптических процессов Г. Я. Вангенгейма. В каждой декаде определялся преобладающий тип процесса и отмечалось, в какую сторону происходит изменение индекса: в сторону уменьшения или увеличения. Такая работа была проделана на материале, охватывающем период времени шесть лет, а именно с 1949 по 1954 г. Затем для каждого типа синоптических процессов был произведен подсчет числа случаев с увеличением и уменьшением значений меридионального индекса.

В типизации Г. Я. Вангенгейма мы ограничились разбивкой всех процессов на три основные формы циркуляции: западную (W), меридиональную (С) и восточную (Е). Результаты подсчета представлены в табл. 4.

На основании табл. 4 можно сделать следующие выводы.

Тип Е в 76% исследованных случаев сопровождается увеличением меридионального индекса и лишь в 24% случаев наблюдается его уменьшение.

При типе W в 65% всех случаев имеет место уменьшение меридионального индекса и в 35% увеличение.

Тип С сопровождается в 72% случаев уменьшением меридионального индекса и в 28% увеличением.

Таким образом, обобщая вышесказанное, можно заключить, что в преобладающем большинстве случаев тип Е сопровождается увеличением меридионального индекса, а типам W и С соответствует его уменьшение.

Таблица 4

Увеличение и уменьшение значений МИ при различных типах циркуляции (число случаев и процент), по Г. Я. Вангенгейму

Общее число случаев	%	Увеличение МИ		Уменьшение МИ		Тип
		число случаев	%	число случаев	%	
90	100	68	76	22	24	Восточный (Е)
60	100	17	28	43	72	Меридиональный (С)
60	100	21	35	39	65	Западный (W)

4. Проведенное сопоставление типов циркуляции с ходом меридионального индекса можно, как нам представляется, использовать для прогноза типа циркуляции, имея значение индекса.

Для расчета меридионального индекса мы воспользовались теорией экстраполяции стационарных случайных функций, разработанной А. И. Яглом [11]. Идея рассматриваемого метода заключается в линейном экстраполировании ряда среднедекадных величин МИ.

Приведем формулу для экстраполирования

$$x(t+m) = Ax(t) - (\alpha A - B_1) \sum e^{-\alpha k} x(t-k), \quad (1)$$

где m — заблаговременность прогноза, $x(t)$, $\sum x(t-k)$ — известные функции, $x(t+m)$ — прогнозируемая функция, α определяется корреляционной функцией.

Формулы для вычисления коэффициентов A и B имеют вид:

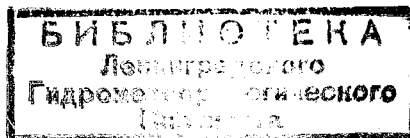
$$A = e^{\frac{-\alpha m}{\sqrt{2}}} \left[\cos \frac{\alpha m}{\sqrt{2}} + (\sqrt{2} - 1) \sin \frac{\alpha m}{\sqrt{2}} \right], \quad (2)$$

$$B = \alpha e^{-\alpha m} \left[\cos \frac{\alpha m}{\sqrt{2}} - (\sqrt{2} - 1) \sin \frac{\alpha m}{\sqrt{2}} \right]. \quad (3)$$

Формула [1] была использована нами для прогноза среднедекадных значений МИ на одну декаду вперед при $\alpha = 0,2$. Были вычислены значения МИ по данным 1953 и 1954 гг. и сделан расчет коэффициента корреляции между вычисленными и прогнозируемыми значениями индекса. Коэффициент корреляции оказался равным 0,7.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белинский Н. А. Опыт установления индекса циркуляции атмосферы. Труды НИУ ГУГМС, сер. 5, вып. 14, 1946.
2. Блинова Е. Н. Гидродинамическая теория волн давления, температурных волн и центров действия атмосферы. Докл. АН СССР, т. 39, № 7, 1943.
3. Вангенгейм Г. Я. Опыт применения синоптических методов к изучению и характеристике климата. Изд. ЦУЕГМС, 1936.
4. Вительс Л. А. Об определении индекса циркуляции по данным синоптического каталога. Метеорология и гидрология, № 5, 1947.
5. Дзердзеевский Б. Л. и Монин А. С. Типовые схемы общей циркуляции атмосферы в северном полушарии и индекс циркуляции. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 6, 1954.
6. Кац А. Л. Об изучении и оценке общей циркуляции атмосферы. Метеорология и гидрология, № 6, 1954.
7. Кац А. Л. Общий индекс циркуляции как показатель зональных и меридиональных синоптических процессов. Метеорология и гидрология, № 5, 1959.
8. Мультиановский Б. П. Основы синоптического метода долгосрочных прогнозов погоды. Изд. ЦУЕГМС, М., 1933.
9. Погосян Х. П. и Савченкова Е. И. О числовом выражении вида атмосферной циркуляции. Метеорология и гидрология, № 3, 1950.
10. Рождественский А. А. Исследование синоптических процессов, связанных с осуществлением карских воздействий на основе изучения индексов циркуляции. Труды ГГО, вып. 58 (117), 1955.
11. Яглом А. М. Введение в теорию стационарных случайных функций. Успехи математич. наук, т. VII, вып. 5, 1952.



СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Л. С. Г а н д и н. Об оптимальном согласовании метеорологических полей . . .	3
Л. С. Г а н д и н. Об оперативной методике расчетного анализа метеорологических полей	18
И. В. Р у б ц о в. Автоматическая подготовка исходных данных для численного анализа и прогноза погоды	30
А. С. Д у б о в. Влияние статической устойчивости на процессы изменения давления и прогностические уравнения для нижней стратосферы	39
Б. Е. Ш н е е р о в. Схема решения системы уравнений для краткосрочного прогноза геопотенциала и вертикальной скорости	48
А. С. Д у б о в, Л. С. О р л о в а. Расчеты перемещений циклонов в горных районах	56
Л. В. Р у х о в е ц. О влиянии наклона тропопаузы на изменение поля давления	63
Л. В. Р у х о в е ц. О причинах изменения высоты тропопаузы	81
Л. Р. А р р а г о. К вопросу об эволюции облачности	88
В. П. М е л е ш к о. Численный прогноз дефицита точки росы	96
В. Б. А ф а н а с ь е в а. О связи меридионального индекса с типами синоптических процессов	106

Редактор *Ю. В. Власова*
Техн. редактор *А. Н. Сергеев*
Корректор *Б. А. Минц*

Сдано в набор 26/IX 1961 г. Подписано к печати 22/II 1962 г.
Бумага 70×108^{1/16}. Бум. л. 3,5. Печ. л. 9,59. Уч.-изд. л. 9,39
Тираж 550 экз. М-06092 Индекс МЛ-131
Гидрометеорологическое издательство.
Ленинград, В-53, 2-я линия, д. № 23.
Заказ 501 Цена 66 коп.

Типография № 8 Управления полиграфической
промышленности Ленсовнархоза
Ленинград, Прачечный пер., д. № 6.