

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ  
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ГЛАВНАЯ ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ им. А. И. ВОЕЙКОВА

ТРУДЫ

ВЫПУСК 197

ПРИМЕНЕНИЕ  
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ  
МЕТОДОВ  
В ПРОГНОЗЕ ПОГОДЫ

Под редакцией  
д-ра физ.-мат. наук  
М. И. ЮДИНА

БИБЛИОТЕКА  
Ленинского  
Гидрометеорологического  
Института



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД • 1968

УДК 532.5 : 551.509(061.6)

Даны новые схемы численного прогноза основных метеозлементов. Приведены результаты испытания схем, предложенных ранее.

Расчитан на аспирантов и научных работников, занимающихся исследованиями в области численных методов прогноза погоды.

## О ВЫБОРЕ И ПРИМЕНЕНИИ АНАЛОГОВ В ЦЕЛЯХ УТОЧНЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ ПРОГНОЗОВ ПОГОДЫ

1. Различные разновидности метода аналогов применяются в прогнозе погоды с весьма давних пор. Основная идея метода состоит в том, что аналогичность начальных и предшествующих состояний обуславливает аналогичность последующего хода атмосферных процессов. В принципе эта идея представляется правильной (если бы она была неверна, то любой метод прогноза по начальным данным был бы безуспешным). Тем не менее на протяжении многих лет методы прогноза по аналогии приводили лишь к сравнительно скромным успехам.

Дело здесь в том, что самое понятие аналогичности может быть достаточно строго определено лишь в том случае, когда факторы, обуславливающие изменения погоды, известны. Аналогичными могут считаться такие начальные состояния, которые характеризуются близкими значениями влияющих факторов. Подбор аналогов по признакам внешнего сходства полей, естественно, не может обеспечить должной точности прогноза. Но если установлено, какие факторы определяют изменения погоды, то естественным следующим шагом исследования является выяснение характера влияния этих факторов. Прогноз по аналогии будет целесообразен лишь до тех пор, пока не разработаны более совершенные методы прогноза, основанные на знании характера связей между влияющими факторами и последующей погодой и на использовании соответствующих схем развития атмосферных процессов в прогнозе погоды. Исходя из этого соображения, следует признать, что применение методов аналогов в их классической форме является показателем низкого уровня знаний об атмосферных процессах.

Представляется возможным развить иной способ применения аналогов в прогнозе погоды, который, по нашему мнению, может быть полезным на любом этапе развития физических методов предсказания погоды. Для этого способа характерно полноценное использование численного прогноза погоды, суммирующего накопленные знания о развитии атмосферных процессов. Источники ошибок численного прогноза можно схематически подразделить на три основные группы [9]: неполнота и неточность исходной информации, неточность физической модели, вызываемая различными упрощениями и пренебрежениями при решении задачи, неточности математического решения задачи.

Для всех этих источников погрешностей в той или иной мере справедливо, что вызываемые ими ошибки прогноза не являются полностью

случайными. Мы вправе ожидать, что в аналогичных ситуациях поля ошибок будут сходными между собой. Если это так, то метод аналогов может быть с успехом использован для корректировки численных прогнозов.

II. Предлагаемая постановка задачи обладает еще одним принципиальным преимуществом перед методом аналогов в его обычной форме. Из предыдущих рассуждений следует, что аналоги должны выбираться таким образом, чтобы сходство начальных состояний обеспечивало сходство в дальнейшем развитии процессов. Каким образом можно проверить, выполняется ли это условие? Так как наши знания о последующем изменении погоды выражаются численным прогнозом, то при выборе критерия аналогичности двух процессов следует сопоставить результаты выполненных в обоих случаях численных прогнозов. Это обстоятельство очень важно, так как суждения о сходстве начальных ситуаций, не подкрепленные анализом результатов численного прогноза, неизбежно носят несколько формальный характер. Таким образом, при сопоставлении двух ситуаций необходимо как минимум рассматривать два параметра, характеризующие аналогичность начальных ситуаций и аналогичность предсказанных процессов.

Для компактного представления наиболее значимой информации целесообразно использовать разложение полей по естественным ортогональным функциям.

Основы метода и ряд практических применений в целях прогноза погоды рассмотрены в работах [1, 5, 6, 12, 13, 14 и др.]. Использование естественных ортогональных функций при выборе аналогов было предложено в работе [3].

В дальнейшем изложении мы ограничиваемся рассмотрением численных прогнозов, выполненных на основе баротропной модели. При этом были учтены два соображения:

1. Относительная простота баротропной модели, в которой для прогноза высоты некоторой изобарической поверхности привлекаются начальные данные на той же самой поверхности. Это облегчает на первых порах выбор параметров аналогичности и поиски аналогов.

2. Возможность использовать достаточно большую статистическую совокупность. Такой материал испытаний схемы прогнозов  $H_{500}$  на двое суток, разработанной И. Г. Ситниковым [7, 8], был любезно предоставлен автором (156 случаев прогноза для зимнего сезона). Как будет показано ниже, объем совокупности оказался достаточным для получения статистически обоснованных выводов. Для представления полей  $H_{500}$  использованы естественные функции, рассчитанные в отделе динамической метеорологии ГГО по данным о высоте поверхности 500 мб в Атлантико-Европейском секторе (522 ситуации, относящиеся к январю—марту 1951—1964 гг.).

Разложение в ряд выполняется по формулам:

$$H_{500}(t_i, x_\alpha, y_\alpha) = \bar{H}_{500}(x_\alpha, y_\alpha) + \sum_{j=1}^n T_j(t_i) X_j(x_\alpha, y_\alpha) \quad (1)$$

и

$$T_j(t_i) = \sum_{\alpha=1}^n H_{500}(t_i, x_\alpha, y_\alpha) X_j(x_\alpha, y_\alpha). \quad (2)$$

Здесь  $t_i$  — момент времени,  $x_\alpha, y_\alpha$  — координаты  $\alpha$ -го пункта, в котором рассматриваются значения  $H_{500}$ ,  $n$  — число пунктов. В нашем случае  $n=26$  (см. рис. 1, сетка 1). Черта сверху означает осреднение по вре-

мени.  $X_j$  — система естественных ортогональных функций, определенных в пунктах  $(x_\alpha, y_\alpha)$ ;  $T_j(t_i)$  — коэффициенты разложения, обладающие свойством статистической ортогональности.

$$\overline{T_j T_l} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq l \\ \lambda_j & \text{при } j = l. \end{cases} \quad (3)$$

Определив значения  $\lambda_j$ , можно судить о точности представления поля  $H_{500}$  небольшим числом членов разложения (1). В частности, в работах [4, 11] показано, что основные черты барического поля в районе Европы и Северной Атлантики удовлетворительно описываются при ограничении четырьмя первыми членами разложения.

Исходя из этого, определим показатель аналогичности начальных состояний, относящихся к моментам  $t_k$  и  $t_l$ , как квадрат длины четырехмерного вектора в пространстве коэффициентов разложения

$$A_{kl} = \sum_{j=1}^4 [T_j(t_k) - T_j(t_l)]^2. \quad (4)$$

Ограничение числа слагаемых в выражении (4) основано на определенных физических соображениях. А именно, исключая из рассмотрения коэффициенты разложения с высокими номерами, мы осуществляем операцию, аналогичную фильтрации шумов при гидродинамическом прогнозе [10].

III. Покажем теперь, что ошибки численного прогноза  $H_{500}$  по схеме И. Г. Ситникова для случаев аналогичных состояний не являются независимыми, а обладают некоторыми общими свойствами. Для проверки этого была выделена выборка, состоящая из 80 дней. Далее на ЭВМ «Урал-4» были рассчитаны значения  $A_{kl}$  и коэффициенты корреляции между полями ошибок двухсуточных прогнозов  $r_{kl}$ . Таким путем получена

совокупность  $\frac{80 \times 79}{2} = 3160$  значений  $A_{kl}$  и столько же значений  $r_{kl}$ .

Имея в виду практическое применение результатов, в дальнейшем исключаем из рассмотрения  $A_{kl}$  и  $r_{kl}$ , если промежуток времени  $\tau_{kl}$  меньше задержки одновременности прогнозов. Ошибки прогнозов рассматривались для сети пунктов, представленной на рис. 1 (сетка 2).

Чтобы избавиться от неточностей статистических оценок, связанных с отклонением распределения коэффициента  $r$  от нормального, было применено  $z$ -преобразование Фишера

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \quad (5)$$

с учетом того, что для функции  $z$  можно с большим основанием применять стандартные тесты, связанные с проверкой статистических гипотез.

В табл. 1 приводятся значения  $\bar{z}$ ,  $\sigma_z = \sqrt{\frac{\sum (z_i - \bar{z})^2}{n(n-1)}}$  для разных градаций  $A_{kl}$ .

Таблица 1

Значения  $\bar{z}$  в зависимости от параметра  $A_{kl}$  дкм<sup>2</sup>

$A_{kl}$	Число случаев	$\bar{z}$	$\sigma_{\bar{z}}$	$t$	$P$
0—500	47	0,23	0,055	4,18	$< 0,0001$
500—1000	126	0,13	0,031	4,17	$< 0,0001$
1000—2000	282	0,06	0,022	2,7	0,004
2000—3000	298	0,03	0,009	3,3	0,0005
3000—5000	576	0,03			
5000—7000	562	0,03			
7000	1199	-0,03	0,009	3,3	0,0005

Для оценки степени достоверности гипотезы  $\bar{z} > 0$  определяем параметр  $t$  из соотношения

$$t = \frac{\bar{z}}{\sqrt{\frac{\sum_i (z_i - \bar{z})^2}{n(n-1)}}} \quad (6)$$

Затем по таблице  $t$ -распределения находим вероятность  $P$  того, что в случайной выборке объема  $n$  из генеральной совокупности  $z$ , математическое ожидание которого равно нулю, величина  $\bar{z}$  достигает или превосходит полученные значения для отдельных градаций  $A_{kl}$ . Значения  $t$  и  $P$  приводятся в пятой и шестой графах табл. 1, причем в последней

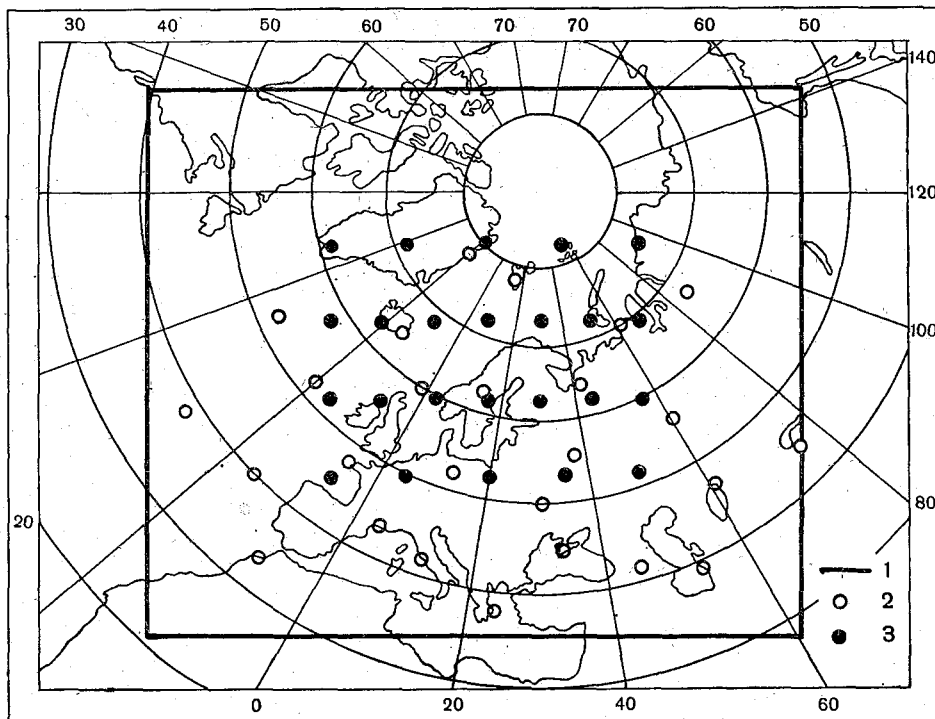


Рис. 1. Область прогноза и сетки точек.

1 — область задания исходных данных для прогноза; 2 — сетка 1; 3 — сетка 2.

тическое ожидание которого равно нулю, величина  $\bar{z}$  достигает или превосходит полученные значения для отдельных градаций  $A_{kl}$ . Значения  $t$  и  $P$  приводятся в пятой и шестой графах табл. 1, причем в последней

графе  $P$  — вероятность того, что  $\bar{z}$  равно или меньше полученного эмпирически. Поскольку в градациях  $2000 \text{ дкм}^2 < A_{hl} \leq 3000 \text{ дкм}^2$ ,  $3000 \text{ дкм}^2 < A_{hl} \leq 5000 \text{ дкм}^2$ ,  $5000 \text{ дкм}^2 < A_{hl} \leq 7000 \text{ дкм}^2$  значения  $\bar{z}$  совпадают, при вычислении  $t$  и  $P$  эти градации объединены.

Из таблицы можно сделать следующие выводы:

1) сходство ошибок численных прогнозов при аналогичных начальных состояниях является практически достоверным фактом;

2) указанное сходство прослеживается вплоть до значений параметра  $A_{hl} = 5000 - 7000 \text{ дкм}^2$ .

Однако уже для градации  $1000 \text{ дкм}^2 < A_{hl} \leq 2000 \text{ дкм}^2$  значения  $\bar{z}$  становятся настолько малыми, что учет аналогичности не может привести к заметному улучшению прогноза.

Отбор лучших аналогов (градация  $A_{hl} \leq 500 \text{ дкм}^2$ ) также не может дать многого для практики, поскольку их повторяемость весьма мала.

IV. Определим теперь второй параметр аналогичности, характеризующий аналогичность предвычисленных процессов. Для этого представим предвычисленное поле двухсуточных изменений высоты поверхности  $500 \text{ мб } \delta H_{500}$  в форме

$$\delta H_{500}(t_i, x_\beta, y_\beta) = \sum_{j=1}^m \delta T_j(t_i) X'_j(x_\beta, y_\beta). \quad (7)$$

Естественные ортогональные функции поля  $H_{500}$  были рассчитаны одним из авторов настоящей работы для сети пунктов  $(x_\beta, y_\beta)$ , показанной на рис. 1 (сетка 2).

Уменьшение района, в котором производится разложение поля, привело к улучшению сходимости разложения.

Поэтому для оценки аналогичности предсказанных изменений мы ограничились тремя членами разложения и определили параметр аналогичности формулой

$$A'_{hl} = \sum_{j=1}^3 [\delta T_j(t_k) - \delta T_j(t_l)]^2. \quad (8)$$

Величины  $A'_{hl}$  были рассчитаны для всех 3160 сочетаний, о которых говорилось выше. При этом выяснилось, что часто малым значениям параметра  $A_{hl}$  соответствуют большие значения  $A'_{hl}$ , так что параметр  $A_{hl}$  далеко не полностью характеризует аналогичность начальных состояний. Это и понятно, так как при прогнозе используется большая информация о начальном состоянии и существенно учитываются нелинейные взаимодействия между процессами разных масштабов.

Проверим теперь, что привлечение данных численных прогнозов уточняет понятие аналогичности. Для этого выделим из группы случаев  $A_{hl} \leq 1000 \text{ дкм}^2$  подгруппу, удовлетворяющую дополнительному условию  $A'_{hl} \leq 1000 \text{ дкм}^2$ , и применим критерий однородности средних совокупности и ее подгруппы.

Этот критерий основывается на том, что величина

$$t = \frac{\bar{z}_m - \bar{z}_n}{S_n} \frac{\sqrt{m(n-2)}}{\sqrt{n-m-m\left(\frac{\bar{z}_m - \bar{z}_n}{S_n}\right)^2}} \quad (9)$$

распределена по закону Стьюдента с  $k=n-2$  степенями свободы. Здесь  $n$  — число случаев в общей выборке,  $m$  — численность подгруппы,

$$S_n^2 = \frac{\sum_i (z_i - \bar{z}_n)^2}{n}. \quad (10)$$

Для рассматриваемой группы случаев имеем:  $n=173$ ;  $\bar{z}_n=0,16$ ;  $S_n=0,357$ ;  $m=67$ ;  $\bar{z}_m=0,28$ ,  $t=3,63$ .

Пользуясь таблицей  $q$ -процентных пределов  $t_{q,k}$  в зависимости от  $k$  и  $\frac{qt}{100}$  для распределения Стьюдента (см. например, [2]), получаем,

что средняя по подгруппе  $\bar{z}_m$  попадает в критическую область при любом практически используемом уровне значимости.

Таким образом, можно с большой уверенностью считать, что  $\bar{z}_m - \bar{z}_n > 0$ , т. е. ошибки прогнозов в аналогичных ситуациях значительно лучше коррелируют между собой, если аналоги отбираются с учетом численного прогноза.

V. Ограничиваясь при отборе аналогов двумя признаками, построим таблицу с двумя входами, описывающую значения  $\bar{z}$  для различных градаций  $A_{kl}$  и  $A'_{kl}$ . Сначала была построена таблица со сравнительно мелкими градациями, а затем было произведено укрупнение градаций. При этом использовался критерий неслучайности расхождения двух выборочных средних. А именно, вычислялась величина

$$t = \frac{\bar{z}_1 - \bar{z}_2}{\sqrt{\sum_i (z_{i,1} - \bar{z}_1)^2 + \sum_i (z_{i,2} - \bar{z}_2)^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}, \quad (11)$$

распределенная при принятии нулевой гипотезы по закону Стьюдента с числом степеней свободы  $n_1 + n_2 - 2$ . После этого проверялась гипотеза о равенстве средних.

Результаты представлены в табл. 2. Кроме  $\bar{z}$  и  $\sigma_z$ , в таблице приводится отношение численностей  $z > 0$  и  $z \leq 0$   $\left(\frac{n_+}{n_-}\right)$ .

Таблица 2

Значения  $\bar{z}$  в зависимости от параметров  $A_{kl}$  и  $A'_{kl}$

$A'_{kl}$	$A_{kl}$								
	0—500			500—1000			1000—3000		
	$\frac{n_+}{n_-}$	$\bar{z}$	$\pm \sigma_z$	$\frac{n_+}{n_-}$	$\bar{z}$	$\pm \sigma_z$	$\frac{n_+}{n_-}$	$\bar{z}$	$\pm \sigma_z$
> 10 000	$\frac{0}{3}$	-0,31	0,19	$\frac{3}{5}$	-0,13	0,14	$\frac{21}{39}$	-0,13	0,05
2000—10 000	$\frac{8}{5}$	0,09	0,10	$\frac{25}{21}$	0,04	0,05	$\frac{145}{150}$	0,02	0,02
0—2000	$\frac{27}{4}$	0,34	0,06	$\frac{53}{19}$	0,22	0,04	$\frac{154}{71}$	0,13	0,02



$A'_{kl}$	$A_{kl}$					
	3000—7000			> 7000		
	$\frac{n_+}{n_-}$	$\bar{z}$	$\pm \sigma_z$	$\frac{n_+}{n_-}$	$\bar{z}$	$\pm \sigma_z$
> 10 000	$\frac{27}{49}$	-0,13	0,04	$\frac{23}{53}$	-0,18	0,04
2000—10 000	$\frac{320}{273}$	0,03	0,01	$\frac{286}{428}$	-0,06	0,01
0—2000	$\frac{277}{192}$	0,07	0,02	$\frac{226}{183}$	0,04	0,01

Анализ табл. 2 подтверждает вывод о важности учета прогностических изменений при подборе аналогов.

Введение параметра  $A'_{kl}$  не только позволяет выделить группу лучших аналогов (31 случай, для которых  $\bar{z}=0,34$ ), но и обнаружить большую группу ситуаций с отрицательной корреляцией ошибок. Действительно, объединяя все случаи, когда  $A'_{kl} > 10\,000$  дкм<sup>2</sup> ( $n=224$ ), получаем  $\bar{z} = -0,15$ ,  $\sigma_z = 0,02$ .

Пары состояний, характеризующиеся отрицательной корреляцией ошибок, можно назвать антиподами, не отклоняясь существенно по смыслу от употребительных значений этого слова. Очевидно, что антиподы, так же как и аналоги, могут быть использованы для введения поправок в численный прогноз.

Для оценки эффективности примененного метода подбора аналогов представляется важным выяснить, насколько сильно повлияла на результаты инерционность атмосферных процессов. Отметим, что инерционная связь ошибок прогнозов уже применялась для коррекции численных прогнозов Уильямсом [15].

В упоминавшейся выше 80-дневной выборке были отобраны все случаи, для которых имелись исходные данные с 48-часовым интервалом. Таких случаев оказалось 70. Рассчитанное по ним значение  $\bar{z}=0,16$ . Напомним, что в конце предыдущего пункта статьи была выделена группа из 67 аналогов при значении  $\bar{z}=0,28$ . Это сопоставление убедительно показывает, что использование аналогов представляет собой более эффективный прием уточнения численных прогнозов, чем учет инерции атмосферных процессов.

Отметим теперь, что параметр  $A'_{kl}$  не во всех случаях может считаться достаточным показателем аналогичности предсказанных процессов.

Для пояснения удобно ввести следующую геометрическую интерпретацию. Построим векторы предсказанных изменений с составляющими  $\delta T_j(t_h)$  и  $\delta T_j(t_i)$ . Тогда введенный параметр  $A'_{kl}$  представляет собой квадрат расстояния между концами двух векторов. При достаточно больших длинах векторов этот параметр вполне характеризует аналогичность предсказанных процессов. Однако в случаях когда прогностические изменения малы, естественно ввести дополнительное требование: угол между векторами не должен превышать некоторого предельного значения.

Определяя угол  $\varphi$  из соотношения

$$\cos \varphi_{kl} = \frac{\sum_{j=1}^3 \delta T_j(t_k) \delta T_j(t_l)}{\left\{ \sum_{j=1}^3 [\delta T_j(t_k)]^2 \right\}^{1/2} \left\{ \sum_{j=1}^3 [\delta T_j(t_l)]^2 \right\}^{1/2}}, \quad (12)$$

потребуем, чтобы значение  $\varphi$  не превосходило 1 рад.

Для проверки существенности дополнительного условия аналогично-сти выделим из группы аналогов, для которых  $A_{kl} \leq 1000$  дкм<sup>2</sup>,  $A'_{kl} \leq 2000$  дкм<sup>2</sup>, подгруппу, удовлетворяющую условию  $\varphi_{kl} \leq 1$ .

Имея  $n=103$ ,  $\bar{z}_n=0,26$ ,  $S_n=0,332$ ,  $m=79$ ,  $\bar{z}_m=0,31$ , по формуле (9) находим  $t=2,8$ . Таким образом, доверительная вероятность гипотезы, что введение дополнительного условия  $\varphi_{kl} \leq 1$  увеличивает коэффициент корреляции между ошибками прогнозов, превосходит 0,995.

VI. Для нахождения эмпирической поправки к численному прогнозу построим уравнение множественной регрессии. Обозначив  $x_0$  ошибки прогноза, подлежащего корректировке,  $x_{il}$  ошибки  $i$ -того прогноза, относящегося к  $l$ -й группе аналогов (или антиподов), будем искать коэффициенты регрессии  $a_l$  из условия

$$\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\sigma_0^2} = \left( \frac{x_0}{\sigma_0} - \sum_{l=1}^p a_l \sum_{i=1}^{q_l} \frac{x_{il}}{\sigma_{il}} \right)^2 = \min. \quad (13)$$

Здесь  $\bar{\varepsilon}^2$  — средний квадрат ошибки исправленного прогноза,  $\sigma_0$  — средние квадратические ошибки некорректированных прогнозов, черта сверху — знак статистического осреднения. Отсюда получаем систему  $p$  линейных алгебраических уравнений для нахождения  $a_l$

$$\sum_{m=1}^p a_m \sum_{i=1}^{q_l} \sum_{j=1}^{q_m} \frac{x_{il} x_{jm}}{\sigma_{il} \sigma_{jm}} = \sum_{i=1}^{q_l} \frac{x_0 x_{il}}{\sigma_0 \sigma_{il}} \quad (14)$$

$(l=1, 2, \dots, p).$

Остановимся на вопросе о практической реализации статистического осреднения. Этот вопрос решается достаточно просто по отношению к коэффициентам  $x_{il} x_{jm}$  в левых частях уравнений (14). Так как речь идет об использовании аналогов и антиподов и некоторого конкретного прогноза, то выполнять осреднение по времени не представляется возможным и средние по необходимости должны быть пространственными. Установив путем предварительного анализа пространственные области, в пределах которых можно считать поля ошибок прогнозов статистически однородными, выполняем осреднение произведений  $x_{il} x_{jm}$  для каждой из таких областей<sup>1</sup> и составляем левые части уравнений (14). Иначе обстоит дело с правыми частями уравнений.

<sup>1</sup> Очевидно, что при этом поля ошибок для всех аналогов и антиподов должны быть известны к моменту составления поправок к прогнозу. Это налагает определенные ограничения на выбор таких ситуаций, о чем уже говорилось выше. А именно, для уточнения прогноза на некоторый срок не может быть использовано свойство аналогичности ситуаций, отстоящих от исходной на меньший интервал времени. То же относится к антиподам.

Поскольку к моменту корректировки прогноза значения  $x_0$  неизвестны, коэффициенты корреляции  $\frac{x_0 x_{jl}}{\sigma_0 \sigma_{jl}}$  должны быть оценены априорно, как функции параметров  $A, A', \varphi$ .

Таблица 2 содержит такие оценки для случая учета двух параметров. Как показано выше, достаточно надежные оценки величин  $\bar{z}$  (и однозначно связанных с ними коэффициентов корреляции) можно получить, лишь введя довольно крупные градации значений параметров.

Для всех прогнозов в пределах  $l$ -й градации априорная оценка коэффициента корреляции будет одинаковой

$$\frac{x_0 x_{jl}}{\sigma_0 \sigma_{jl}} = r_{0l}. \quad (15)$$

Таким образом, уравнения (14) принимают вид

$$\sum_{m=1}^p a_m \sum_{i=1}^{q_l} \sum_{j=1}^{q_m} r_{ilm} = q_l r_{0l}. \quad (16)$$

Отсюда определяются коэффициенты регрессии.

Однако, как видно из (13), для нахождения поправки к прогнозу необходимо еще оценить его среднюю квадратическую ошибку  $\sigma_0$ . Выполненные сопоставления с эмпирическим материалом показали, что для априорной оценки этой величины можно воспользоваться медианным значением  $\tilde{\sigma}$  из группы наилучших аналогов, удовлетворяющих условиям  $A_{0i} \leq 1000$  дкм<sup>2</sup>,  $A'_{0i} \leq 2000$  дкм<sup>2</sup>,  $\varphi_{0i} \leq 1$  рад.

VII. Из предыдущего изложения следует, что для корректировки прогнозов выгодно использовать не один лучший аналог, а несколько. Прежде всего при наличии лишь одного аналога априорные оценки коэффициента корреляции  $r_{0l}$  и средней квадратической ошибки прогноза  $\sigma_0$  могут весьма существенно отличаться от их истинных значений для рассматриваемой пары ситуаций. Второе важное обстоятельство состоит в том, что априорная оценка эффективности корректировки прогноза указывает на определенную зависимость результатов от числа аналогов  $q_l$ .

Рассмотрим для простоты случай, когда все отобранные аналоги относятся к одной группе ( $l=p=1$ ).

Тогда уравнение (16) принимает вид

$$a_1 q_1 [1 + (q_1 - 1) \bar{r}_{ij}] = q_1 r_{01} \quad (17)$$

$$(i \neq l).$$

Здесь  $\bar{r}_{ij}$  — средний коэффициент корреляции ошибок прогноза внутри группы аналогов при условии  $i \neq j$ . Таким образом,

$$a_1 = \frac{r_{01}}{1 + (q_1 - 1) \bar{r}_{ij}}. \quad (18)$$

Подставляя значение  $a_1$  в уравнение (13), получаем

$$\frac{\bar{\varepsilon}^2}{\sigma_0^2} = 1 - \frac{q_1}{1 + (q_1 - 1) \bar{r}_{ij}} r_{01}^2. \quad (19)$$

Расчет значений  $\bar{r}_{ij}$  по данным рассмотренной выборки в нескольких градациях параметров аналогичности показал, что  $\bar{r}_{ij} \approx r_{01}$ . Используя

это соотношение, можно оценить эффект учета  $q$  аналогов, если средний коэффициент корреляции ошибок прогнозов равен  $r_0$  (табл. 3).

Таблица 3

$r_0$	Значения $\frac{\overline{\varepsilon^2}}{\sigma_0^2}$					
	$q$					
	1	2	3	5	7	10
0,5	0,75	0,67	0,62	0,58	0,56	0,54
0,4	0,84	0,77	0,73	0,69	0,67	0,65
0,3	0,91	0,86	0,83	0,80	0,78	0,76
0,2	0,96	0,93	0,91	0,89	0,87	0,86
0,1	0,99	0,98	0,97	0,96	0,96	0,95

Из таблицы видно, что эффективность корректировки прогнозов возрастает при увеличении объема имеющейся выборки, что дает возможность подбора большего числа аналогов. Однако выигрыш, получающийся при привлечении сравнительно слабых аналогов, невелик. Так, например, использование 7—10 аналогов из группы  $r_0=0,2$  равноценно использованию всего двух аналогов из группы  $r_0=0,3$ .

VIII. Для выявления практической эффективности предлагаемого метода проведен численный эксперимент. На данном этапе мы брали лишь достаточно строгие аналоги  $A_4 \leq 1000$  дкм<sup>2</sup>,  $A_3 \leq 2000$  дкм<sup>2</sup>,  $\varphi_3 \leq 1$  рад. (здесь нижний индекс у параметров означает число учитываемых коэффициентов разложения полей). Для таких аналогов, которые объединялись в одну группу,  $r_0=0,30$ .

Испытания проведены на независимом материале из 76 оперативных прогнозов по схеме И. Г. Ситникова. Аналоги подбирались среди ситуаций 156-дневной выборки. Наибольший практический интерес представляло испытание метода при наличии нескольких аналогов. Поэтому вычисление поправок и сопоставление результатов проведено для случаев, к которым подобрано 2 или более аналогов. Даты таких исходных ситуаций, а также даты аналогов приведены в табл. 4. В этой же таблице даются оценки 48-часовых прогнозов до и после корректировки (коэффициенты корреляции прогностических и фактических изменений  $r$  и относительные ошибки  $\varepsilon$ ). При этом корректировка проводилась в 24 точках (рис. 1, сетка 2).

Из анализа табл. 4 следует, что применение статистической корректировки заметно уменьшает ошибки прогнозов. Так, относительная ошибка уменьшилась в среднем на 0,09. Это означает, что величина  $\frac{\overline{\varepsilon^2}}{\sigma_0^2}$  составляет 0,81 (см. табл. 3). Что касается коэффициента корреляции, то он в результате корректировки увеличился незначительно. Весьма существенно отметить, что улучшение прогнозов достигнуто в центральной части области прогноза, где влияние фиктивных граничных условий сравнительно мало. С приближением к границам эффективность эмпирического исправления может возрасти, что позволяет увеличить область приемлемого прогноза.

IX. Представляется целесообразным проводить статистическую корректировку численных прогнозов не автономно, а в процессе расчета. Достижимое при этом органическое слияние гидродинамики и стати-

Таблица 4

Оценки прогнозов  $H_{500}$  на 48 час. (по 24 точкам)

Дата исходного дня	Число аналогов	Даты аналогов						Без корректировки		С корректировкой	
		1	2	3	4	5	6	r	ε	r	ε
24 X 1963 г.	2	20 X 1963 г.	6 X 1962 г.					0,76	0,72	0,72	0,73
25 X 1963 г.	3	8 X 1962 г.	7 X 1962 г.	6 X 1962 г.				0,92	0,36	0,93	0,38
29 X 1963 г.	6	27 X 1963 г.	6 XII 1962 г.	5 XII 1962 г.	4 XII 1962 г.	3 XII 1962 г.	2 XII 1962 г.	0,43	1,11	0,42	1,02
4 XI 1963 г.	2	12 XI 1963 г.	9 XII 1962 г.					0,66	0,82	0,65	0,83
26 XI 1963 г.	2	21 XII 1962 г.	20 XII 1962 г.					0,44	0,85	0,41	0,88
6 XII 1963 г.	2	3 XII 1963 г.	28 XI 1962 г.					0,81	0,54	0,84	0,48
8 XII 1963 г.	5	6 XII 1963 г.	1 XII 1962 г.	30 XI 1962 г.	29 XI 1962 г.	28 XI 1962 г.		0,60	1,83	0,58	1,24
10 XII 1963 г.	4	8 XII 1963 г.	2 XII 1962 г.	29 XI 1962 г.	28 XI 1962 г.			0,41	1,27	0,48	1,06
12 XII 1963 г.	3	8 XII 1963 г.	28 XI 1962 г.	16 X 1962 г.				0,48	0,97	0,44	1,02
13 XII 1963 г.	3	8 XII 1963 г.	6 XII 1963 г.	28 XI 1962 г.				0,81	1,16	0,76	0,99
24 XII 1963 г.	6	10 XII 1963 г.	7 XII 1962 г.	6 XII 1962 г.	5 XII 1962 г.	4 XII 1962 г.	3 XII 1962 г.	0,84	0,58	0,79	0,68
29 XII 1963 г.	2	24 X 1962 г.	23 X 1962 г.					0,84	0,51	0,83	0,57
7 I 1964 г.	3	5 I 1964 г.	5 XII 1962 г.	2 XII 1962 г.				0,53	0,88	0,58	0,93
14 I 1964 г.	2	17 XII 1963 г.	15 XII 1963 г.					0,49	1,42	0,42	1,26
16 I 1964 г.	3	6 XII 1963 г.	5 XII 1963 г.	3 XII 1963 г.				0,65	0,81	0,69	0,77
17 I 1964 г.	2	29 X 1963 г.	27 X 1963 г.					0,80	0,55	0,83	0,49
9 II 1964 г.	2	6 XII 1963 г.	27 XI 1962 г.					0,66	0,69	0,73	0,64
11 II 1964 г.	2	28 XI 1962 г.	14 X 1962 г.					0,64	0,83	0,67	0,74
19 II 1964 г.	2	22 XII 1963 г.	12 XII 1963 г.					0,75	0,67	0,74	0,72
23 II 1964 г.	2	10 XI 1963 г.	5 XI 1963 г.					0,46	1,01	0,46	0,94
3 III 1964 г.	2	1 III 1964 г.	6 XII 1963 г.					0,71	0,81	0,73	0,74
5 III 1964 г.	6	3 III 1964 г.	16 I 1964 г.	6 XII 1963 г.	5 XII 1963 г.	3 XII 1963 г.	1 XI 1963 г.	0,38	0,85	0,60	0,72
8 III 1964 г.	4	15 XII 1963 г.	8 XII 1963 г.	6 XII 1963 г.	26 XII 1962 г.			0,61	1,25	0,68	0,92
10 III 1964 г.	4	8 III 1964 г.	15 XII 1963 г.	8 XII 1963 г.	6 XII 1963 г.			0,65	1,01	0,77	0,70
20 III 1964 г.	3	12 XI 1963 г.	10 XI 1963 г.	5 XI 1963 г.				0,49	1,26	0,42	1,11
Среднее								0,63	0,91	0,64	0,82

стики позволяет увеличить заблаговременность прогнозов. Такое предложение основывается на том, что численный прогноз по исправленному в промежуточный срок полю должен и в дальнейшем систематически превосходить обычный.

Предлагаемый алгоритм реализован нами на ЭВМ «Урал 4» (для схемы прогноза  $H_{500}$ , разработанной И. Г. Ситниковым [8]). Расчет проведен для 25 случаев, перечисленных в табл. 4. Корректировке подвергался двухсуточный прогноз, затем счет продолжался до 96 час.

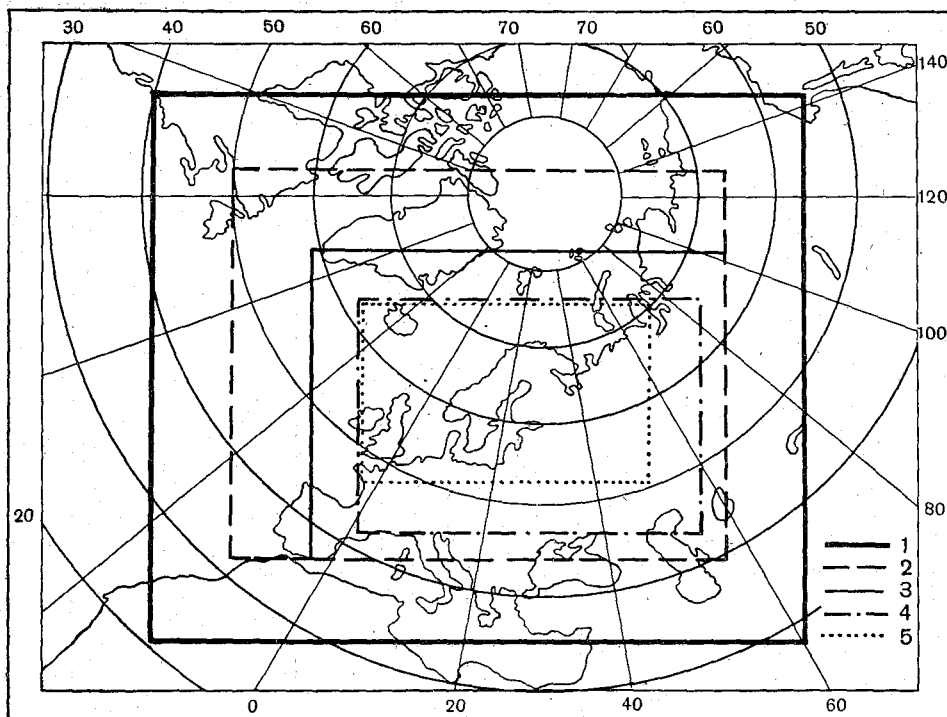


Рис. 2. Области прогноза и оценки.

1 — область задания исходных данных; 2 — территория, для которой выдается прогноз (320 узлов); 3 — область, в которой вводятся поправки (221 узел); 4 — оценка по 140 узлам; 5 — оценка по 88 узлам.

(параллельно рассчитывался прогноз без корректировки). Поправки рассчитывались в 221 узле на территории, показанной на рис. 2. Для исключения возможности возникновения вычислительной неустойчивости при дальнейшем счете поле поправок предварительно сглаживалось.

В табл. 5, 6, 7 приведены оценки прогнозов без корректировки и с ее применением по двум областям: 140 и 88 узлов (рис. 2). Общий вывод, который следует из рассмотрения табл. 5, 6, 7, состоит в том, что корректировка двухсуточных прогнозов не только улучшает эти прогнозы, но и заметно проявляется при прогнозе на 72 и 96 час. Так, уменьшение относительных ошибок прогнозов на 48, 72 и 96 час. соответственно составляет: по 140 узлам 0,08, 0,09, 0,07; по 88 узлам 0,10, 0,12, 0,08.

В результате даже при прогнозе по ограниченной территории удается получить приемлемый прогноз на срок до 4 суток.

Таблица 5

Оценки прогнозов  $H_{500}$  на 48 час.

Дата исходного дня (3 часа)	Число аналогов	По 140 точкам				По 88 точкам			
		без корректировки		с корректировкой		без корректировки		с корректировкой	
		$r$	$\varepsilon$	$r$	$\varepsilon$	$r$	$\varepsilon$	$r$	$\varepsilon$
24 X 1963 г.	2	0,73	0,81	0,75	0,78	0,56	0,90	0,61	0,84
25 X 1963 г.	3	0,92	0,46	0,90	0,51	0,95	0,34	0,94	0,41
29 X 1963 г.	6	0,53	0,93	0,55	0,82	0,72	0,95	0,76	0,65
24 XI 1963 г.	2	0,72	0,63	0,73	0,63	0,70	0,68	0,72	0,66
26 XI 1963 г.	2	0,61	0,75	0,58	0,79	0,68	0,66	0,60	0,70
6 XII 1963 г.	2	0,77	0,65	0,82	0,61	0,90	0,47	0,92	0,45
8 XII 1963 г.	5	0,85	0,83	0,84	0,56	0,92	0,78	0,87	0,50
10 XII 1963 г.	4	0,35	1,01	0,49	0,85	0,42	1,11	0,59	0,86
12 XII 1963 г.	3	0,88	0,47	0,86	0,54	0,94	0,40	0,93	0,46
13 XII 1963 г.	3	0,85	0,74	0,84	0,59	0,94	0,59	0,94	0,37
24 XII 1963 г.	6	0,84	0,56	0,79	0,64	0,86	0,59	0,79	0,67
29 XII 1963 г.	2	0,80	0,52	0,78	0,56	0,89	0,38	0,86	0,42
7 I 1964 г.	3	0,48	0,98	0,48	0,94	0,45	0,99	0,38	0,98
14 I 1964 г.	2	0,70	1,24	0,68	1,10	0,79	1,29	0,74	1,11
16 I 1964 г.	3	0,69	0,80	0,68	0,78	0,68	0,87	0,66	0,84
17 I 1964 г.	2	0,81	0,48	0,82	0,43	0,89	0,38	0,90	0,33
9 II 1964 г.	2	0,70	0,82	0,73	0,72	0,77	0,64	0,81	0,57
11 II 1964 г.	2	0,76	0,80	0,78	0,64	0,59	1,13	0,63	0,94
19 II 1964 г.	2	0,73	0,64	0,70	0,73	0,64	0,75	0,65	0,87
23 II 1964 г.	2	0,50	0,99	0,50	0,93	0,64	0,96	0,62	0,86
3 III 1964 г.	2	0,79	0,58	0,79	0,51	0,83	0,71	0,82	0,54
5 III 1964 г.	6	0,32	1,12	0,59	0,84	0,40	1,08	0,73	0,74
8 III 1964 г.	4	0,78	0,88	0,77	0,74	0,85	0,87	0,82	0,66
10 III 1964 г.	4	0,78	1,00	0,81	0,63	0,88	1,02	0,85	0,61
20 III 1964 г.	3	0,68	0,98	0,67	0,97	0,66	1,21	0,64	1,12
Среднее		0,71	0,79	0,72	0,71	0,74	0,79	0,75	0,69

Оценки прогнозов  $H_{500}$  на 72 часа

Дата исходного дни (3 часа)	Число аналогов	По 140 точкам				По 88 точкам			
		без корректи- ровки		с корректиров- кой		без корректи- ровки		с корректиров- кой	
		$r$	$\epsilon$	$r$	$\epsilon$	$r$	$\epsilon$	$r$	$\epsilon$
24 X 1963 г.	2	0,72	1,04	0,70	1,06	0,57	1,04	0,56	1,07
25 X 1963 г.	3	0,98	0,42	0,93	0,33	0,95	0,30	0,98	0,19
29 X 1963 г.	6	0,42	1,08	0,47	0,96	0,63	1,10	0,67	0,88
24 XI 1963 г.	2	0,51	0,88	0,51	0,87	0,49	0,90	0,45	0,89
26 XI 1963 г.	2	0,51	0,82	0,48	0,86	0,68	0,65	0,63	0,67
6 XII 1963 г.	2	0,61	0,89	0,69	0,80	0,76	0,89	0,82	0,81
8 XII 1963 г.	5	0,59	1,10	0,66	0,78	0,73	1,27	0,76	0,80
10 XII 1963 г.	4	0,29	1,05	0,39	0,93	0,31	1,13	0,43	0,94
12 XII 1963 г.	3	0,90	0,44	0,89	0,47	0,95	0,31	0,95	0,34
13 XII 1963 г.	3	0,78	1,08	0,76	0,93	0,89	0,88	0,88	0,65
24 XII 1963 г.	6	0,88	0,48	0,84	0,52	0,93	0,43	0,89	0,51
29 XII 1963 г.	2	0,73	0,80	0,74	0,82	0,82	0,67	0,85	0,71
7 I 1964 г.	3	0,48	1,00	0,40	1,00	0,52	0,95	0,46	0,92
14 I 1964 г.	2	0,47	1,46	0,41	1,35	0,76	1,45	0,69	1,33
16 I 1964 г.	3	0,59	0,81	0,63	0,75	0,58	0,84	0,58	0,79
17 I 1964 г.	2	0,64	0,86	0,65	0,81	0,57	0,96	0,56	0,92
9 II 1964 г.	2	0,61	0,78	0,69	0,66	0,70	0,68	0,75	0,60
11 II 1964 г.	2	0,78	0,72	0,80	0,63	0,70	0,98	0,73	0,85
19 II 1964 г.	2	0,74	0,65	0,77	0,64	0,73	0,66	0,77	0,63
23 II 1964 г.	2	0,57	1,08	0,62	0,99	0,60	1,12	0,62	1,00
3 III 1964 г.	2	0,48	1,01	0,48	0,96	0,49	1,32	0,49	1,17
5 III 1964 г.	6	0,41	1,10	0,64	0,84	0,48	0,96	0,76	0,86
8 III 1964 г.	4	0,79	0,94	0,83	0,60	0,84	1,04	0,85	0,61
10 III 1964 г.	4	0,72	1,04	0,77	0,77	0,79	1,03	0,77	0,73
20 III 1964 г.	3	0,57	1,14	0,56	1,07	0,55	1,40	0,54	1,26
Среднее		0,63	0,91	0,65	0,82	0,68	0,92	0,70	0,80



Оценки прогнозов  $H_{500}$  на 96 час.

Дата исходного дня (3 часа)	Число аналогов	По 140 точкам				По 88 точкам			
		без корректировки		с корректировкой		без корректировки		с корректировкой	
		$r$	$\varepsilon$	$r$	$\varepsilon$	$r$	$\varepsilon$	$r$	$\varepsilon$
24 X 1963 г.	2	0,71	1,07	0,70	1,09	0,60	1,00	0,57	1,04
25 X 1963 г.	3	0,90	0,44	0,93	0,31	0,95	0,30	0,98	0,18
29 X 1963 г.	6	0,59	0,90	0,62	0,81	0,77	0,86	0,78	0,73
24 XI 1963 г.	2	0,53	0,83	0,53	0,82	0,55	0,78	0,55	0,77
26 XI 1963 г.	2	0,18	1,03	0,27	0,95	0,43	0,79	0,42	0,78
6 XII 1963 г.	2	0,77	0,98	0,81	0,94	0,84	1,06	0,86	1,06
8 XII 1963 г.	5	0,36	1,12	0,44	0,97	0,47	1,21	0,51	1,00
10 XII 1963 г.	4	0,32	0,98	0,31	0,94	0,19	1,11	0,17	1,10
12 XII 1963 г.	3	0,81	0,67	0,82	0,60	0,89	0,53	0,89	0,42
13 XII 1963 г.	3	0,71	1,06	0,68	0,96	0,79	0,83	0,78	0,68
24 XII 1963 г.	6	0,59	1,03	0,54	1,04	0,76	1,04	0,73	1,03
29 XII 1963 г.	2	0,56	1,41	0,59	1,42	0,78	1,38	0,79	1,43
7 I 1964 г.	3	0,13	1,43	0,15	1,35	0,28	1,33	0,32	1,29
14 I 1964 г.	2	0,22	1,55	0,16	1,48	0,58	1,60	0,48	1,50
16 I 1964 г.	3	0,36	1,08	0,31	1,05	0,26	1,18	0,22	1,13
17 I 1964 г.	2	0,58	0,80	0,55	0,82	0,39	0,81	0,34	0,82
9 II 1964 г.	2	0,64	0,83	0,71	0,75	0,70	0,81	0,75	0,76
11 II 1964 г.	2	0,87	0,81	0,87	0,76	0,87	0,95	0,88	0,88
19 II 1964 г.	2	0,76	0,67	0,80	0,64	0,86	0,59	0,89	0,54
23 II 1964 г.	2	0,50	1,17	0,54	1,07	0,60	1,15	0,60	1,02
3 III 1964 г.	2	0,18	1,33	0,21	1,32	0,09	1,73	0,12	1,61
5 III 1964 г.	6	0,47	1,14	0,61	0,96	0,56	0,94	0,73	0,78
8 III 1964 г.	4	0,75	1,23	0,81	1,13	0,87	1,53	0,88	1,37
10 III 1964 г.	4	0,75	1,06	0,80	0,84	0,79	1,03	0,80	0,80
20 III 1964 г.	3	0,45	1,25	0,45	1,16	0,51	1,35	0,49	1,22
Среднее		0,54	1,03	0,57	0,96	0,61	1,04	0,62	0,96

## ЛИТЕРАТУРА

1. Багров Н. А. Аналитическое представление последовательности метеорологических полей посредством естественных ортогональных составляющих. Труды ЦИП, вып. 74, 1959.
2. Дунин-Барковский И. В. и Смирнов Н. В. Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть). ГИТТЛ, М., 1955.
3. Кудашкин Г. Д. Оценка аналогичности атмосферных состояний и процессов с помощью параметров разложения метеорологических полей по естественным ортогональным функциям. Труды ГГО, вып. 168, 1965.
4. Мещерская А. В., Яковлева Н. И. Уточнение естественных функций полей геопотенциала (давления) Атлантико-Европейского сектора. Труды ГГО, вып. 168, 1965.
5. Обухов А. М. О статистически ортогональных разложениях эмпирических функций. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 3, 1960.
6. Руховец Л. В. Многоуровневая модель прогноза геопотенциала, основанная на малом числе параметров. Труды ГГО, вып. 151, 1964.
7. Ситников И. Г. К вопросу о численном прогнозе геопотенциала на среднем уровне. Труды ЦИП, вып. 126, 1963.
8. Ситников И. Г. Результаты оперативного испытания схемы численного прогноза геопотенциала на среднем уровне тропосферы. Труды ММЦ, вып. 3, 1964.
9. Юдин М. И. Пространственная структура метеорологических полей и ее учет в численном прогнозе. Труды ВМС, т. II, Гидрометеоздат, Л., 1963.
10. Юдин М. И. Об изучении факторов, обуславливающих нестационарность общей циркуляции атмосферы. Доклад на междунар. симпоз. по динамике крупномасштабных процессов в атмосфере. Гидрометеоздат, М., 1965.
11. Яковлева Н. И., Мещерская А. В., Кудашкин Г. Д. Исследование полей давления (геопотенциала) методом разложения по естественным составляющим. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
12. Hotelling H. Analysis of complex of statistical variables into principal components. *J. Educat. Psychology*, 24, 1933.
13. Lorenz E. N. Empirical orthogonal functions and statistical weather prediction. *Sci. Rep.*, No. 1, *Statis. Fest. Proj. Contract*, No. AF, 19(604)—1566, MJT, 1956.
14. White R. M., Derby R. C., Cooley D. S. and Seaver F. A. Hemispherical prediction by statistical techniques. *J. Met.*, vol. 14, No. 5, 1957.
15. Williams S. An empirical correction to the barotropic forecast. *Tellus*, vol. 10, No. 2, 1958.

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ СКОРОСТЕЙ, ОСРЕДНЕННЫХ ВО ВРЕМЕНИ

Под термином вертикальные скорости, осредненные во времени, будем подразумевать вертикальные скорости, рассчитанные по исходным данным, осредненным за определенные промежутки времени.

В данной работе произведен расчет полей среднемесячных значений вертикальной скорости как по среднемноголетним данным, так и по данным определенного года.

Вертикальные скорости, рассчитанные таким образом, могут быть использованы при разработке гидродинамической теории климата и общей циркуляции атмосферы.

Поля среднемесячных значений вертикальной скорости, вычисленные по исходным данным определенного года, могут оказаться полезными при долгосрочном прогнозе погоды. Например, их можно использовать в качестве дополнительного предиктора при статистическом прогнозе погоды на месяц (предварительно разложив по ортогональным функциям давления и температуры), а также для выяснения их взаимосвязи с предсказанными полями давления и температуры. Кроме того, можно предсказать осадки и отдельно вертикальные скорости (по предсказанным коэффициентам разложения полей давления и температуры) и, сопоставив эти поля, сделать заключение о правильности предсказания осадков.

Поля вертикальной скорости, осредненной во времени, вычислялись по способу К. А. Решетниковой [1]. При этом для удобства реализации этого способа на электронной вычислительной машине в методику расчета, данную в работе [1], пришлось ввести несколько изменений.

I. Остановимся кратко на содержании работы [1].

Основное содержание этой работы сводится к следующему.

Сначала строится нестационарная модель распределения скорости ветра в пограничном слое атмосферы с учетом рельефа местности.

При построении этой модели исходными уравнениями являются уравнения движения в горизонтальной плоскости, в которых учитываются слагаемые, обусловленные вертикальным обменом. В качестве первого граничного условия берутся соотношения, вытекающие из условия постоянства турбулентного напряжения, при этом учитывается рельеф местности. В качестве второго граничного условия при  $z \rightarrow \infty$  вследствие малой величины сил турбулентной вязкости на больших высотах берутся известные соотношения для составляющих отклонений ветра от геострофического.

В результате решения уравнений движения из уравнения неразрывности определяется вертикальная скорость. Далее в полученной формуле для вертикальной скорости производится осреднение во времени. В результате вместо индивидуальной производной вертикальной составляющей вихря скорости появляются слагаемые, характеризующие не только средний перенос вихря скорости, но и адвекцию его за счет турбулентного перемешивания.

Формула для вычисления вертикальных скоростей, осредненных во времени, имеет вид

$$\begin{aligned} \bar{w}|_{z_1} = & \frac{\lambda(\lambda+2)}{2(\lambda^2+2\lambda+2)} \sqrt{\frac{k_h}{\omega_z}} \bar{\Omega}_g + \frac{1}{l} \int_{z_r+h}^{z_1} \left( \bar{u}_g \frac{\partial \bar{\Omega}_g}{\partial x} + \bar{v}_g \frac{\partial \bar{\Omega}_g}{\partial y} - \right. \\ & \left. - k_s \Delta \bar{\Omega}_g + \bar{u}_g \frac{\partial l}{\partial x} \right) dz + \frac{\lambda}{\lambda^2+2\lambda+2} [(\lambda+1)(\bar{u}_g m + \bar{v}_g n) + (\bar{v}_g m - \bar{u}_g n)] + \\ & + h \left( 1 - \frac{1}{\ln \frac{h}{z_0}} \right) \left\{ \frac{\lambda}{\lambda^2+2\lambda+2} \bar{\Omega}_g + \frac{1}{l} \left( \bar{u}_g \frac{\partial \bar{\Omega}_g}{\partial x} + \bar{v}_g \frac{\partial \bar{\Omega}_g}{\partial y} - k_s \Delta \bar{\Omega}_g + \right. \right. \\ & \left. \left. + \bar{u}_g \frac{\partial l}{\partial x} \right) + \frac{\lambda \sqrt{\frac{\omega_z}{k_h}}}{\lambda^2+2\lambda+2} [(\lambda+2)(\bar{u}_g m + \bar{v}_g n) - \lambda(\bar{v}_g m - \bar{u}_g n)] \right\}. \quad (1) \end{aligned}$$

Здесь  $u_g, v_g$  — составляющие геострофического ветра,  $l$  — параметр Кориолиса,  $\Delta \bar{\Omega}$  — лапласиан вихря,  $h$  — высота приземного слоя,  $z_0$  — шероховатость,  $\lambda$  — параметр, характеризующий стратификацию атмосферы,  $k_h$  — коэффициент вертикального обмена в основной толще пограничного слоя,  $k_s$  — коэффициент горизонтального обмена,

$$m = \frac{\partial z_r}{\partial x}, \quad n = \frac{\partial z_r}{\partial y},$$

$z_r$  — высота горы.

Ось  $x$  направлена по касательной к меридиану с севера на юг, ось  $y$  — по касательной к кругу широт с запада на восток.

Во втором слагаемом формулы (1) при вычислении адвекции вихря вводится поправка на термический ветер. Поправка на термический ветер вводится для того, чтобы при расчете вертикальных скоростей для высот порядка 1—1,5 км пользоваться исходными значениями метеоэлементов только одного наземного уровня. При этом для подынтегрального выражения получается линейная функция от высоты, а формула для вертикальной скорости принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{w}|_{z_1} = & A_1 \bar{\Omega}_g + A_2 \left( \bar{u}_g \frac{\partial \bar{\Omega}_g}{\partial x} + \bar{v}_g \frac{\partial \bar{\Omega}_g}{\partial y} - k_s \Delta \bar{\Omega}_g \right) + \\ & + A_3 \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \frac{\partial \bar{\Omega}_g}{\partial y} - \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \frac{\partial \bar{\Omega}_g}{\partial x} + \bar{u}_g \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial x} + \bar{v}_g \frac{\partial \Delta \bar{T}}{\partial y} \right) + \\ & + A_4 \bar{u}_g + A_5 (\bar{u}_g m + \bar{v}_g n) + A_6 (\bar{v}_g m - \bar{u}_g n), \quad (2) \end{aligned}$$

где  $\Delta T$  — лапласиан температуры.

Коэффициенты  $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$  имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{\lambda(\lambda+2)}{2(\lambda^2+2\lambda+2)} \sqrt{\frac{k_h}{\omega_z}} + h \left( 1 - \frac{1}{\ln \frac{h}{z_0}} \right) \frac{\lambda}{(\lambda^2+2\lambda+2)} \\ A_2 &= \frac{1}{l} \left[ (z_1 - z_r - h) + h \left( 1 - \frac{1}{\ln \frac{h}{z_0}} \right) \right] \\ A_3 &= \frac{g}{l^2 T_m} \frac{(z_1^2 - 2hz_r - h^2 - z_r^2)}{2} \\ A_4 &= -\frac{\text{ctg } \varphi}{r} \left[ (z_1 - z_r - h) + h \left( 1 - \frac{1}{\ln \frac{h}{z_0}} \right) \right] \\ A_5 &= \frac{\lambda}{\lambda^2+2\lambda+2} \left[ (\lambda+1) + (\lambda+2) \sqrt{\frac{\omega_z}{k_h}} h \left( 1 - \frac{1}{\ln \frac{h}{z_0}} \right) \right] \\ A_6 &= \frac{\lambda}{\lambda^2+2\lambda+2} \left[ 1 - \lambda \sqrt{\frac{\omega_z}{k_h}} h \left( 1 - \frac{1}{\ln \frac{h}{z_0}} \right) \right] \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Здесь  $T_m$  — средняя температура слоя от  $z_r+h$  до  $z_1$ .

В работе [1] установлено, что в случае равнинной местности первые четыре слагаемые формулы (2) играют наибольшую роль, а в случае горной местности вертикальные движения в основном определяются последними двумя слагаемыми. Поэтому при расчете вертикальных скоростей в первых четырех слагаемых ветер, температуру и вихрь скорости можно брать на высоте  $h$  или приближенно на наземном уровне.

II. Обратимся к формуле (2). В работе [1] слагаемые, характеризующие влияние неровностей рельефа, были приведены к виду, включающему в себя геометрические характеристики рельефа, например, тангенс угла наклона горы, угол между осью  $x$  и нормалью к хребту и др. Но для расчетов на электронной вычислительной машине этот способ вычисления вертикальных скоростей, возникающих за счет орографии, является неудобным. Поэтому для  $m, n$  оставим их прежние выражения через производные от высоты горы, не переходя к геометрическим характеристикам.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} (\bar{u}_g m + \bar{v}_g n) &= \frac{1}{l} \left( \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \frac{\partial z_r}{\partial y} - \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \frac{\partial z_r}{\partial x} \right), \\ (\bar{v}_g m - \bar{u}_g n) &= \frac{1}{l} \left( \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial x} \frac{\partial z_r}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y} \frac{\partial z_r}{\partial y} \right). \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Переходя к сферической системе координат и заменяя производные конечными разностями, получаем следующую рабочую формулу для расчета осредненных во времени вертикальных скоростей:

$$\left. \begin{aligned} \bar{w} &= B_1(p_4 + p_2 - 2p_0) + B_2(p_3 + p_1 - 2p_0) + \\ &+ B_3[(p_4 - p_2)(\Omega_3 - \Omega_1) - (p_3 - p_1)(\Omega_4 - \Omega_2)] - \\ &- B_4(\Omega_4 + \Omega_2 - 2\Omega_0) - B_5(\Omega_3 + \Omega_1 - 2\Omega_0) + \\ &+ B_6[(T_4 - T_2)(\Omega_3 - \Omega_1) - (T_3 - T_1)(\Omega_4 - \Omega_2)] + \\ &+ B_7(p_3 - p_1)[(\Delta T)_4 - (\Delta T)_2] + B_8(p_4 - p_2)[(\Delta T)_3 - \\ &- (\Delta T)_1] + B_9(p_3 - p_1) + B_{10}[(p_4 - p_2)(z_{r_3} - z_{r_1}) - \\ &- (p_3 - p_1)(z_{r_4} - z_{r_2})] + B_{11}[(p_4 - p_2)(z_{r_4} - z_{r_2}) + \\ &+ c_\varphi(p_3 - p_1)(z_{r_3} - z_{r_1})] \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Здесь  $p$  — наземное давление; индексы у  $p$ ,  $T$ ,  $z_r$  обозначают номера точек, изображенных на рис. 1.

Коэффициенты  $B_1, B_2, \dots, B_{11}$  имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \frac{1}{2\omega r^2 (\Delta\theta)^2 \sin \varphi} \left[ \frac{\lambda (\lambda + 2)}{2 (\lambda^2 + 2\lambda + 2)} \sqrt{\frac{k_h}{\omega z}} + \right. \\
 &\quad \left. + h \left( 1 - \frac{1}{\ln \frac{h}{z_0}} \right) \frac{\lambda}{(\lambda^2 + 2\lambda + 2)} \right] \\
 B_2 &= \frac{B_1 (\Delta\theta)^2}{(\Delta\lambda^*)^2 \cos^2 \varphi} \\
 B_3 &= \frac{1}{16\omega^2 r^2 \rho \Delta\theta \Delta\lambda^* \sin^2 \varphi \cos \varphi} \left[ (z_1 - z_r - h) + h \left( 1 - \frac{1}{\ln \frac{h}{z_0}} \right) \right] \\
 B_4 &= \frac{k_s}{2\omega r^2 (\Delta\theta)^2 \sin \varphi} \left[ (z_1 - z_r - h) + h \left( 1 - \frac{1}{\ln \frac{h}{z_0}} \right) \right] \\
 B_5 &= \frac{B_4 (\Delta\theta)^2}{(\Delta\lambda^*)^2 \cos^2 \varphi} \\
 B_6 &= \frac{g}{32\omega^2 r^2 \Delta\theta \Delta\lambda^* \sin^2 \varphi \cos \varphi} \frac{1}{T_m} (z_1^2 - 2z_r h - z_r^2 - h^2) \\
 B_7 &= \frac{g}{64\omega^3 r^2 \Delta\theta \Delta\lambda^* \sin^3 \varphi \cos \varphi} \frac{1}{T_m} (z_1^2 - 2z_r h - z_r^2 - h^2) \\
 B_8 &= B_7 \\
 B_9 &= \frac{1}{4\omega r^2 \Delta\lambda^* \sin^2 \varphi} \left[ (z_1 - z_r - h) + h \left( 1 - \frac{1}{\ln \frac{h}{z_0}} \right) \right] \\
 B_{10} &= \frac{1}{8\omega r^2 \Delta\theta \Delta\lambda^* \sin \varphi \cos \varphi} \frac{\lambda}{(\lambda^2 + 2\lambda + 2)} \left[ (\lambda + 1) + \right. \\
 &\quad \left. + (\lambda + 2) \sqrt{\frac{\omega z}{k_h}} h \left( 1 - \frac{1}{\ln \frac{h}{z_0}} \right) \right] \\
 B_{11} &= \frac{1}{8\omega r^2 (\Delta\theta)^2 \sin \varphi} \frac{1}{(\lambda^2 + 2\lambda + 2)} \left[ 1 - \lambda \sqrt{\frac{\omega z}{k_h}} h \left( 1 - \frac{1}{\ln \frac{h}{z_0}} \right) \right] \\
 c_\varphi &= \frac{(\Delta\theta)^2}{(\Delta\lambda^*)^2} \frac{1}{\cos \varphi}
 \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь  $\varphi$  — широта,  $\lambda^*$  — долгота местности,  $\theta$  — дополнение до широты.

Напишем формулы для расчета вихря скорости  $\Omega$  и лапласиана температуры  $\Delta T$ . Принимая ветер геострофическим и заменяя производные конечными разностями, получаем

$$\Omega = a_1 [p_4 + p_2 - 2p_0] + a_2 (p_3 + p_1 - 2p_0), \tag{7}$$

где

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= \frac{1}{2\omega r^2 (\Delta\theta)^2 \sin^2 \varphi} \\
 a_2 &= \frac{1}{2\omega r^2 (\Delta\lambda^*)^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi}
 \end{aligned} \right\} \tag{8}$$

Аналогично

$$\Delta T = a_3(T_4 + T_2 - 2T_0) + a_4(T_3 + T_1 - 2T_0), \quad (9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_3 &= \frac{1}{r^2 (\Delta\theta)^2} \\ a_4 &= \frac{1}{r^2 (\Delta\lambda^*)^2 \cos^2 \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

III. Рассмотрим физический смысл отдельных слагаемых формулы (5). В этой формуле первые два слагаемые представляют собой вертикальную скорость, появляющуюся вследствие приземного турбулентного трения. Третье слагаемое характеризует вертикальную скорость, возникающую за счет адвекции вихря скорости, четвертое и пятое слагаемые — скорость, возникающую за счет горизонтального обмена. Сумма шестого, седьмого и восьмого слагаемых представляет собой вертикальную скорость вследствие учета термического ветра при расчете адвекции вихря.

Девятое слагаемое характеризует вертикальную скорость за счет изменения параметра Кориолиса с широтой. Десятое, одиннадцатое слагаемые представляют собой вертикальную скорость вследствие наличия гор и возвышенностей. Здесь следует отметить, что если ветер образует достаточно большие углы с направлением хребта, то орографическая вертикальная скорость в основном определяется первым из указанных слагаемых. Таким образом, можно сказать, что десятое слагаемое характеризует скольжение воздушной массы по горному хребту, а одиннадцатое — боковое обтекание горного препятствия.

В дальнейшем сумму первых девяти слагаемых будем называть динамической вертикальной скоростью ( $w_{\text{дин}}$ ), последних двух — орографической вертикальной скоростью ( $w_{\text{г}}$ ), а их суммарную величину — общей вертикальной скоростью ( $w_{\text{общ}}$ ).

Таким образом, при расчете вертикальных скоростей, осредненных во времени, учитывается вертикальный и горизонтальный обмен воздушных масс, адвекция вихря скорости, изменение параметра Кориолиса с широтой и орография местности.

IV. Расчет полей вертикальной скорости производился при помощи электронной вычислительной машины «Урал-4».

Для расчетов по сравнению с работой [1] нами взят несколько другой шаг сетки, а именно  $\Delta\theta = 5^\circ$ ,  $\Delta\lambda^* = 10^\circ$ .

Программа составлена таким образом, что повторяя ее три раза, вертикальную скорость можно рассчитать для всего северного полушария.

В данной работе вертикальные скорости вычислялись для первого сектора, ограниченного  $25-75^\circ$  с. ш. и  $30^\circ$  з. д. —  $90^\circ$  в. д. (Вычисления производились для узлов прямоугольной сетки с расстояниями  $5^\circ$  по меридиану и  $10^\circ$  по кругу широт). Чтобы вычислить вертикальную скорость

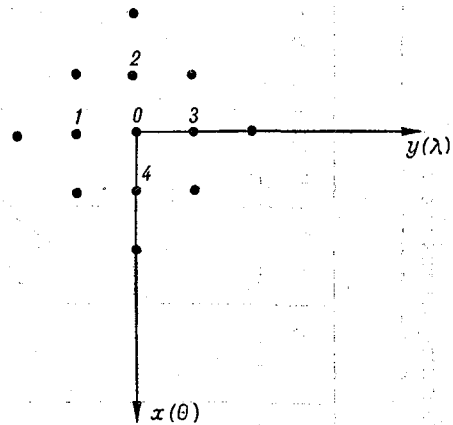


Рис. 1.

Значения гипсометрических высот  $Z_r$  км

$\varphi^\circ \text{ C}$	$\lambda^\circ$														
	40 З	30 З	20 З	10 З	0	10 В	20 В	30 В	40 В	50 В	60 В	70 В	80 В	90 В	100 В
80	1,95	0,98	0,34	0	0	0,06	0,18	0	0	0	0,06	0	0	0	0,06
75	2,80	2,26	0,40	0	0	0	0	0	0	0	0,09	0	0	-0,12	0,24
70	2,96	1,74	0,06	0	0	0	0,34	0,21	0	0	0,06	0	0	0,18	0,40
65	1,00	0	0,46	0	0	0,21	0,34	0,21	0,12	0,21	0,30	0	0	0,09	0,40
60	0	0	0	0	0	0,79	0,30	0,06	0,15	0,12	0,30	0	0	0,13	0,37
55	0	0	0	0,09	0,09	0,03	0,09	0,09	0,18	0,15	0,40	0,15	0,12	0,61	0,64
50	0	0	0	0,06	0,15	0,49	0,49	0,21	0,18	0,03	0,21	0,37	0,46	2,01	1,56
45	0	0	0	0	0,49	1,47	0,73	0,09	0,34	0	0	0,43	1,52	1,40	2,16
40	0	0,09	0	0,12	0,67	0,15	0,95	0,91	1,56	0,37	0,21	2,04	2,07	1,89	2,50
35	0	0	0	0	0,79	0,30	0,06	0,34	0,52	2,01	1,34	2,60	4,82	5,37	4,12
30	0	0	0	0,49	0,64	0,37	0,12	0,12	0,76	0,73	1,34	0,79	3,20	5,40	4,49
25	0	0	0	0,37	0,30	1,07	0,43	0,37	0,88	0,15	0,55	0,12	0,40	0,73	2,44
20	0	0	0	0,24	0,37	0,67	0,73	0,43	0,52	0,37	0,03	0,06	0,52	0,03	1,19



для указанного района, исходные значения давления и температуры необходимо снять в 255 пунктах сетки, т. е. для области, ограниченной 15—85° с. ш. и 50° з. д. — 110° в. д.; при этом вертикальная скорость получается для 143 пунктов сетки (рис. 2).

V. Остановимся кратко на параметрах, входящих в коэффициенты  $B_1, B_2, \dots, B_{11}$ , а также на значениях гипсометрических высот ( $z_T$ ).

Гипсометрические высоты брались из работы Берковского и Бертони [5], в которой даны средние топографические карты для всего земного шара. Кроме того, средние значения гипсометрических высот на пересечениях широт и долгот через каждые 5° даны в виде таблиц.

В табл. 1 представлены значения  $z_T$  для первого сектора нашей сетки, заимствованные из работы [5] и предварительно переведенные из футов в километры.

Значения коэффициента горизонтального обмена  $k_s$  нами взяты из работы К. А. Решетниковой [2], в которой  $k_s$  определялось при помощи осреднения адвекции вертикальной составляющей вихря скорости.

В работе [2] делается заключение, что при вычислении осредненной во времени адвекции вихря скорости для всего северного полушария величину коэффициента горизонтального обмена можно принять для января и июля соответственно равными  $6,0 \cdot 10^5$  м<sup>2</sup>/сек. и  $3,0 \cdot 10^5$  м<sup>2</sup>/сек. Эти значения  $k_s$  и были взяты для наших расчетов. Для промежуточных месяцев пришлось воспользоваться линейной интерполяцией между указанными значениями  $k_s$ , т. е. данными табл. 2.

Таблица 2

Значения коэффициента горизонтального обмена  $k_s$

Месяц . . . . .	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
$k_s \cdot 10^5$ м <sup>2</sup> /сек.	6,0	5,5	5,0	4,5	4,0	3,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5

Значение коэффициента вертикального обмена  $k_h$  в основной толще пограничного слоя, как и в работе [1], бралось равным 6 м<sup>2</sup>/сек.

Параметр  $\lambda$ , являющийся характеристикой профиля ветра в приземном подслое, принимался равным 1,5 (условие равновесной атмосферы).

Кроме того, для вычисления коэффициентов  $B_1, B_2, \dots, B_{11}$  использовались следующие значения постоянных:  $\omega = 7,29 \cdot 10^{-5}$  1/сек.,  $\rho = 1,26 \cdot 10^{-3}$  т/м<sup>3</sup>,  $h = 30$  м,  $\Delta\theta = 0,0873$ ,  $\Delta\lambda^* = 0,1745$ ,  $T_m = 276^\circ$ ,  $r = 6,37 \cdot 10^6$  м,  $z_1 = 1,5 \cdot 10^3$  м.

VI. Если значения давления брать в миллибарах и использовать указанные значения постоянных, то для коэффициентов  $a_1, a_2, a_3, a_4$  получаем

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 1,764 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\sin \varphi}, & a_3 &= 0,324 \cdot 10^{-11} \\ a_2 &= 0,441 \cdot 10^{-6} \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi}, & a_4 &= 0,081 \cdot 10^{-11} \frac{1}{\cos^2 \varphi} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

При этом величину вихря скорости получаем в 1/сек., а  $\Delta T$  — в град/м<sup>2</sup>.

Если вертикальную скорость вычислять в см/сек. и множитель  $10^{-6}$  у коэффициентов  $a_1, a_2$  отнести к коэффициентам  $B_3, B_4, B_5, B_6$ , а множитель  $10^{11}$  у  $a_3$  — к коэффициентам  $B_7, B_8$ , то для коэффициентов,

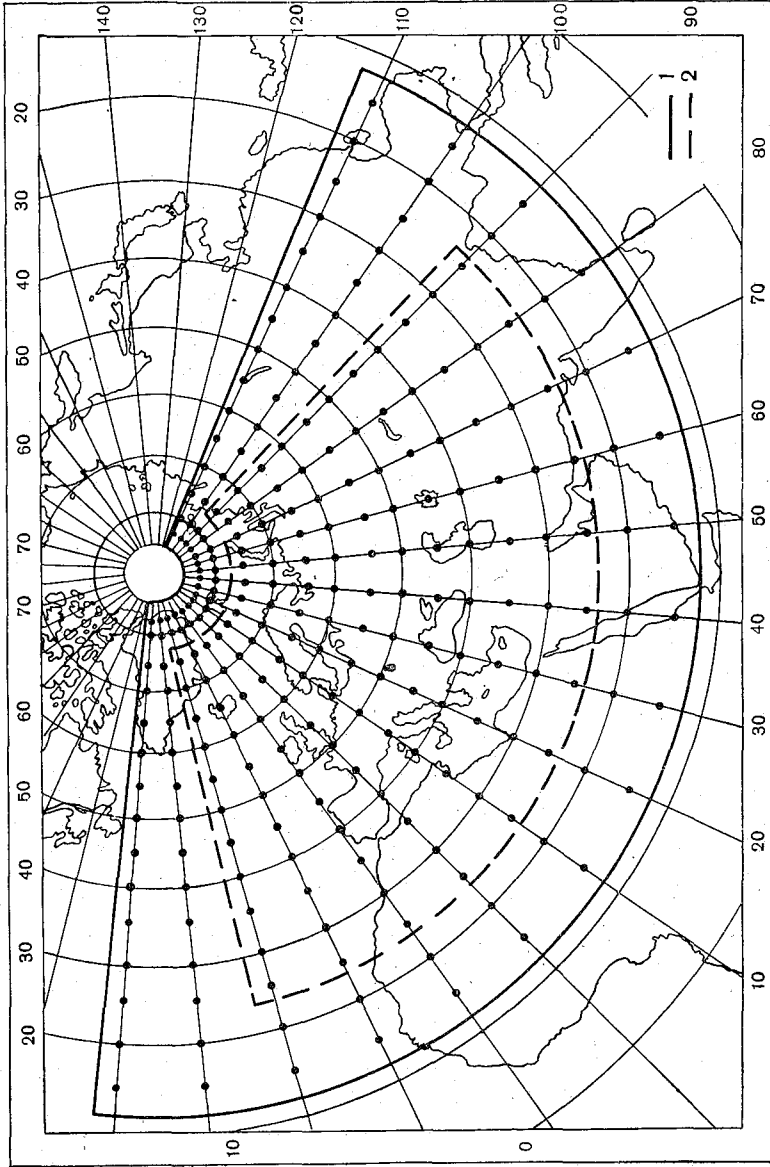


Рис. 2. Сетка точек.

1 — область исходных значений  $P$ ; 2 — область расчета вертикальной скорости  $w$ .

входящих в формулу (5), получаем следующую зависимость от широты  $\varphi$ :

$$\left. \begin{aligned}
 B_1 &= \left(1,832 \frac{1}{\sin^{1/2} \varphi} + 0,086\right) \frac{10^{-2}}{\sin \varphi} \\
 B_2 &= \left(0,460 \frac{1}{\sin^{1/2} \varphi} + 0,021\right) \frac{10^{-2}}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \\
 B_3 &= 2,260 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} \\
 B_4 &= 3,321 \cdot 10^{-4} \frac{a}{\sin \varphi} \\
 B_5 &= 0,830 \cdot 10^{-4} \frac{a}{\sin \varphi \cos^2 \varphi} \\
 B_6 &= 0,761 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\sin^2 \varphi \cos \varphi} \\
 B_7 = B_8 &= 4,142 \cdot 10^{-4} \frac{1}{\sin^3 \varphi \cos \varphi} \\
 B_9 &= 0,574 \cdot 10^{-2} \frac{1}{\sin^2 \varphi} \\
 B_{10} &= (1,141 + 0,130 \sin^{1/2} \varphi) \frac{10^{-2}}{\sin \varphi \cos \varphi} \\
 B_{11} &= (0,912 - 0,112 \sin^{1/2} \varphi) \frac{10^{-2}}{\sin \varphi} \\
 c_\varphi &= \frac{1}{4 \cos^2 \varphi}
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

При этом равенства (11) имеют вид

$$\left. \begin{aligned}
 a_1 &= 1,764 \frac{1}{\sin \varphi}, & a_3 &= 0,324 \\
 a_2 &= 0,441 \frac{1}{\sin \varphi \cos^2 \varphi}, & a_4 &= 0,081 \frac{1}{\cos^2 \varphi}
 \end{aligned} \right\} \quad (11')$$

Параметр  $a$  в коэффициентах  $B_4, B_5$  пропорционален коэффициенту горизонтального обмена, а именно  $a = k_s \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{сек.}$ , и меняется от одного месяца к другому (см. табл. 2).

VII. Поля вертикальной скорости нами вычислены по среднегодовым данным для каждого из 12 месяцев, а также для 10 месяцев январь—октябрь по средним данным определенного года. Последние расчеты проведены пока только для 7 лет (1932—1938 гг.).

Для расчетов по среднегодовым данным мы воспользовались данными давления и температуры, снятыми с карт, представленных в атласе, являющимся приложением к монографии [3], а для расчетов вертикальных скоростей, осредненных за месяц определенного года, также картами отклонений давления и отклонений температуры воздуха от среднегодовых, выполненных под руководством О. М. Челпановой и В. Я. Шаровой [4].

1. Проанализируем сначала вертикальную скорость, вычисленную по среднегодовым данным. Абсолютные значения вертикальных скоростей, осредненные по полю в 143 пункта, представлены табл. 3. В этой таблице введены следующие обозначения:  $\omega_{\text{тр}}$  — вертикальная скорость, обусловленная приземным трением;  $\omega_{\text{адв}}$  — вертикальная скорость вследствие адвекции вихря скорости;  $\omega_{\text{г.о}}$  — вертикальная скорость за счет

Средние абсолютные значения вертикальной скорости, вычисленной по среднемесячным данным (см/сек.)

Месяц	$\bar{w}_{гр}$	$\bar{w}_{алв}$	$\bar{w}_{г-0}$	$\bar{w}_l$	$\bar{w}_{дин}$	$\bar{w}_{г1}$	$\bar{w}_{г2}$	$\bar{w}_г$	$\bar{w}_{общ}$
Январь . . . . .	0,106	0,041	0,084	0,040	0,189	0,102	0,077	0,142	0,249
Февраль . . . . .	0,106	0,048	0,094	0,040	0,194	0,102	0,073	0,141	0,260
Март . . . . .	0,094	0,029	0,068	0,034	0,166	0,085	0,055	0,116	0,221
Апрель . . . . .	0,071	0,019	0,041	0,030	0,112	0,074	0,044	0,095	0,158
Май . . . . .	0,063	0,017	0,039	0,031	0,107	0,063	0,035	0,072	0,143
Июнь . . . . .	0,073	0,024	0,033	0,041	0,118	0,070	0,032	0,076	0,148
Июль . . . . .	0,077	0,032	0,031	0,043	0,128	0,066	0,032	0,076	0,160
Август . . . . .	0,074	0,024	0,031	0,036	0,116	0,059	0,035	0,073	0,153
Сентябрь . . . . .	0,077	0,021	0,038	0,030	0,115	0,066	0,045	0,087	0,162
Октябрь . . . . .	0,082	0,025	0,048	0,031	0,124	0,076	0,054	0,109	0,178
Ноябрь . . . . .	0,090	0,029	0,058	0,035	0,147	0,092	0,063	0,127	0,206
Декабрь . . . . .	0,102	0,040	0,080	0,042	0,185	0,103	0,070	0,138	0,243
Среднее . . . . .	0,085	0,029	0,054	0,036	0,142	0,080	0,051	0,104	0,190

горизонтального обмена;  $\overline{\omega}_l$  — вертикальная скорость, вызванная изменением параметра Кориолиса с широтой;  $\overline{\omega}_{\text{дин}} = \overline{\omega}_{\text{тр}} + \overline{\omega}_{\text{адв}} + \overline{\omega}_{\text{г.о}} + \overline{\omega}_l$  — динамическая вертикальная скорость;  $\overline{\omega}_{\text{г}_1}$  — вертикальная скорость, характеризующая скольжение воздушной массы по горному хребту;  $\overline{\omega}_{\text{г}_2}$  — вертикальная скорость, характеризующая боковое обтекание горного препятствия;  $\overline{\omega}_{\text{г}} = \overline{\omega}_{\text{г}_1} + \overline{\omega}_{\text{г}_2}$  — вертикальная скорость, возникающая благодаря наличию гор и возвышенностей;  $\overline{\omega}_{\text{общ}} = \overline{\omega}_{\text{дин}} + \overline{\omega}_{\text{г}}$  — общая вертикальная скорость.

В последней строке табл. 3 даны также абсолютные значения отдельных составляющих вертикальной скорости, осредненные за 12 месяцев.

Анализ табл. 3 показывает следующие результаты:

1) для всех месяцев общая вертикальная скорость ( $\overline{\omega}_{\text{общ}}$ ) в среднем больше любой из составляющих вертикальной скорости;

2) для рассматриваемой территории динамическая вертикальная скорость ( $\overline{\omega}_{\text{дин}}$ ) больше вертикальной скорости, обусловленной рельефом местности ( $\overline{\omega}_{\text{г}}$ );

3) в динамической вертикальной скорости наиболее значимой является вертикальная скорость, возникающая вследствие приземного турбулентного трения ( $\overline{\omega}_{\text{тр}}$ ), затем вертикальная скорость, обусловленная горизонтальным обменом ( $\overline{\omega}_{\text{г.о}}$ ).

Далее почти одинаковую роль играют вертикальная скорость, вызванная изменением параметра Кориолиса с широтой ( $\overline{\omega}_l$ ), и вертикальная скорость за счет адвекции вихря скорости ( $\overline{\omega}_{\text{адв}}$ ). Их роль в среднем почти одинакова, но в основном  $\overline{\omega}_l$  является более значимой величиной, чем  $\overline{\omega}_{\text{адв}}$ . Исключение представляют только два месяца (январь, февраль), для которых  $\overline{\omega}_{\text{адв}} > \overline{\omega}_l$ .

Кроме того, вертикальная скорость вследствие горизонтального обмена  $\overline{\omega}_{\text{г.о}}$  не всегда больше  $\overline{\omega}_l$  и  $\overline{\omega}_{\text{адв}}$ , а именно для июня—августа  $\overline{\omega}_{\text{г.о}} < \overline{\omega}_l$  и для июля  $\overline{\omega}_{\text{г.о}} < \overline{\omega}_{\text{адв}}$ . Это, очевидно, связано с тем, что для лета коэффициент горизонтального обмена имеет меньше значения, чем для зимы (см. табл. 2).

Годовой ход общей, динамической и орографической вертикальных скоростей, рассчитанных по среднегодовым данным, представлен на рис. 3.

Из этого рисунка видно, что общая вертикальная скорость и ее составляющие — динамическая и орографическая вертикальные скорости — имеют два максимума и два минимума. При этом первый, основной максимум приходится на февраль, а второй, небольшой — на июль. Минимумы общей и орографической вертикальных скоростей приходятся на май и август, а минимумы динамической — несколько смещены.

Годовые амплитуды как общей вертикальной скорости, так и ее составляющих достаточно велики.

На рис. 4 представлен годовой ход динамической вертикальной скорости и ее составляющих, рассчитанных также по среднегодовым данным.

Из этого рисунка видно, что максимумы и минимумы вертикальной скорости, вызванной турбулентным трением, падают на те же месяцы,

что и максимумы и минимумы динамической вертикальной скорости, но второй минимум слабо выражен.

Вертикальная скорость вследствие горизонтального обмена имеет несколько другой годовой ход: один зимний максимум (декабрь) и один летний минимум (июль—август).

Вертикальная скорость за счет изменения параметра Кориолиса с широтой имеет два максимума и два минимума. При этом летний максимум более выражен, чем зимний; весенний минимум совпадает с минимумом динамической вертикальной скорости, а осенний минимум смещен приблизительно на один месяц.

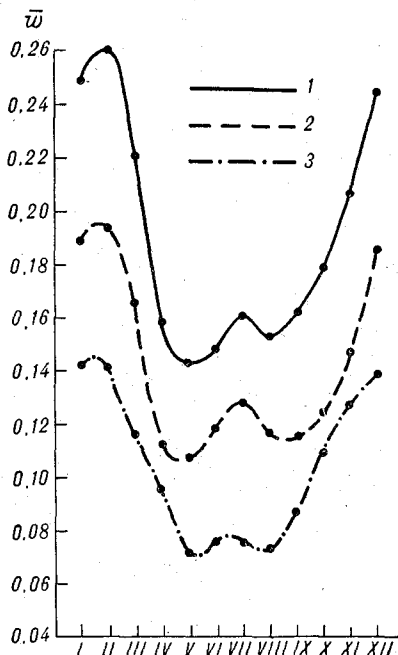


Рис. 3. Годовой ход вертикальной скорости  $\bar{\omega}_{\text{общ}}$  (1) и ее составляющих  $\bar{\omega}_{\text{дин}}$  (2) и  $\bar{\omega}_g$  (3).

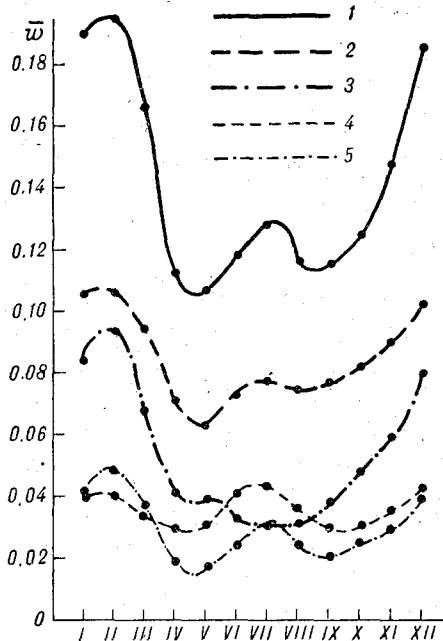


Рис. 4. Годовой ход вертикальной скорости  $\bar{\omega}_{\text{дин}}$  (1) и ее составляющих  $\bar{\omega}_{\text{тр}}$  (2),  $\bar{\omega}_g$  (3),  $\bar{\omega}_l$  (4),  $\bar{\omega}_{\text{adv}}$  (5).

Годовой ход вертикальной скорости, обусловленной адвекцией вихря скорости, подобен годовому ходу вертикальной скорости за счет изменения параметра Кориолиса с широтой, но зимний максимум, как и  $\bar{\omega}_{\text{дин}}$ , больше, чем летний.

Рис. 4 также показывает, что  $\bar{\omega}_{\text{дин}}$ ,  $\bar{\omega}_g$ ,  $\bar{\omega}_{\text{тр}}$  имеют большие амплитуды в годовом ходе, а  $\bar{\omega}_{\text{adv}}$  и  $\bar{\omega}_l$  — небольшие.

Анализ карт полей общей вертикальной скорости для отдельных месяцев года, вычисленной по среднесноголетним данным, показал, что наибольшие значения вертикальной скорости обычно отмечаются в районе Гималайских гор и Гренландии. В первом случае это связано в основном с рельефом местности, а во втором, кроме рельефа, существенную роль играют также большие градиенты поля давления, особенно в зимний период.

В табл. 4 даны максимальные значения вертикальных скоростей  $\bar{\omega}_{\text{общ}}$ ,  $\bar{\omega}_{\text{дин}}$ ,  $\bar{\omega}_g$  для отдельных полей.

## Максимальные значения вертикальных скоростей (по среднемноголетним данным)

Месяц . . .	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
$\overline{w}_{\text{общ}}$ . . .	2,6	2,6	1,3	1,3	1,2	1,6	1,4	1,1	1,2	1,7	1,9	1,9
$\overline{w}_{\text{дин}}$ . . .	1,6	1,5	1,0	0,7	0,7	0,5	0,9	0,6	0,7	0,8	1,1	1,1
$\overline{w}_{\Gamma}$ . . . .	1,6	1,9	1,7	1,4	0,8	1,2	1,0	0,8	1,0	1,2	1,3	1,9

Таким образом, для рассматриваемой территории максимальные значения общей вертикальной скорости достигают 1,2—2,6 м/сек., а динамической и орографической вертикальных скоростей соответственно 0,5—1,6 см/сек. и 0,8—1,9 см/сек.

В работе К. А. Решетниковой [1] вычислены поля вертикальных скоростей по среднемноголетним данным для двух месяцев (январь и июль).

Сопоставление показало, что значения динамической вертикальной скорости, полученные нами, близки к значениям, данным в работе [1].

Но значения орографической вертикальной скорости довольно сильно отличаются от значений, полученных в работе [1]. Это, очевидно, связано с тем, что в наших расчетах использовались осредненные значения гипсометрических высот, а методика вычисления орографической вертикальной скорости близка к методике вычисления динамической вертикальной скорости. В работе [1] орографическая вертикальная скорость вычислялась по другой методике, чем динамическая вертикальная скорость. Вычисление  $w_{\Gamma}$  производилось не для узлов сетки, а для системы пунктов, достаточно подробно характеризующей наклон возвышенностей и гор. Кроме того, вместо осредненных гипсометрических высот, как уже указывалось выше, вводились геометрические характеристики высот (тангенс угла наклона горы, угол между осью  $x$  и вектором скорости ветра, угол между осью  $x$  и нормалью к хребту), которые определялись вручную.

Таким образом, поля орографической вертикальной скорости, вычисленной нами, отражают явления бóльшего масштаба, чем в работе [1]. Поэтому естественно, что орографические вертикальные скорости, полученные в нашей работе, имеют меньшие значения. Так, например, для первого сектора максимальные значения в работе [1] достигают 5 см/сек.

2. Рассмотрим вертикальную скорость, вычисленную по среднемесячным данным определенного года. Значения составляющих вертикальной скорости, полученные осреднением по полю в 143 пункта сетки, представлены в приложении (соответственно для января—октября).

Таблица приложения показывает, что средние абсолютные значения вертикальной скорости и ее составляющих, рассчитанные по среднемесячным данным определенного года, больше средних абсолютных значений вертикальной скорости, вычисленной по среднемноголетним данным соответствующего месяца.

Если проследить годовой ход вертикальной скорости для определенного года, то можно установить, что основные максимумы и минимумы для общей, а также динамической и орографической вертикальных скоростей приходятся на те же месяцы, что и для вертикальных скоростей, рассчитанных по среднемноголетним данным. Но второстепенные экстремальные значения для некоторых лет получаются несколько смещенными в ту или иную сторону по сравнению с тем, что получается по среднемноголетним данным.

Анализ полей вертикальных скоростей, вычисленных по среднемесячным данным определенных лет, показал, что для 10 месяцев (1932—1938 гг.) максимальные значения общей, динамической и орографической

вертикальных скоростей составляют соответственно 3,8; 2,0 и 3,2 см/сек. Анализ таблицы приложения подтверждает закономерность в значимости составляющих общей вертикальной скорости, полученную по среднегодовым данным, а именно для рассматриваемой территории динамическая вертикальная скорость больше вертикальной скорости, обусловленной рельефом местности. Это справедливо для всех 10 месяцев 1932—1938 гг.

В динамической вертикальной скорости наиболее значимой, как и по среднегодовым данным, является вертикальная скорость, возникающая вследствие приземного турбулентного трения  $\omega_{тр}$ , затем для января—мая, сентября, октября—вертикальная скорость, обусловленная горизонтальным обменом  $\omega_{г.о.}$ , а для июня—августа—вертикальная скорость, возникающая вследствие изменения параметра Кориолиса с широтой. Здесь исключения представляют февраль 1934 г., для которого  $\omega_{adv} > \omega_{г.о.}$ , и август 1932, 1934, 1935 г., где  $\omega_l < \omega_{г.о.}$

Вертикальная скорость, вызванная адвекцией вихря скорости  $\omega_{adv}$ , является менее значимой, чем другие составляющие динамической вертикальной скорости. Исключение представляют, как и по среднегодовым данным, январь и февраль за все 7 лет и март 1932, 1933, 1935, 1937, 1938 г., для которых наименее значимой является вертикальная скорость  $\omega_l$  вследствие изменения параметра Кориолиса с широтой, а для июня 1938 г. и июля 1933—1938 гг.—вертикальная скорость  $\omega_{г.о.}$ , обусловленная горизонтальным обменом.

Таким образом, значимость отдельных составляющих динамической вертикальной скорости близка к значимости, полученной по среднегодовым данным.

VIII. Известно, что горизонтальный обмен имеет существенные различия в зависимости от характера подстилающей поверхности.

Как указано выше, расчет среднемесячных значений вертикальных скоростей как по среднегодовым данным, так и по данным определенного года произведен для постоянного коэффициента горизонтального обмена, рекомендованного К. А. Решетниковой [2] для всего северного полушария.

Вычисление коэффициента горизонтального обмена  $k_s$  в работе [2] производилось при помощи осреднения адвекции вертикальной составляющей вихря скорости и применения соотношения, полученного из полуэмпирической теории турбулентности. Коэффициент  $k_s$  вычислялся для 9 станций, относящихся к различным климатическим зонам. Полученные результаты были разделены на три группы, одна из которых характеризовала муссонный климат экваториального, субтропического и умеренного поясов, вторая—океанический климат субтропического и умеренного поясов, третья—континентальный климат умеренного пояса.

Но анализ значений  $k_s$ , полученных в работе [2], показал, что эти значения имеют наиболее резкие различия только для континентальных и морских станций.

Поэтому в настоящей работе расчет вертикальных скоростей, осредненных во времени, производился также для значений коэффициентов горизонтального обмена, различных для суши и моря, а именно принимались следующие значения  $k_s$  м<sup>2</sup>/сек.:

	Суша	Море
Январь . . . . .	7,0·10 <sup>5</sup>	5,5·10 <sup>5</sup>
Июль . . . . .	6,0·10 <sup>5</sup>	2,0·10 <sup>5</sup>



Расчеты  $k_s$  в работе [2] сделаны только для января и июля. Для остальных месяцев значения  $k_s$  определялись путем линейной интерполяции [табл. 5].

Таблица 5

Значения  $k_s \cdot 10^5$  м<sup>2</sup>/сек. для суши и моря

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Суша . . . . .	7,0	6,9	6,7	6,5	6,3	6,1	6,0	6,1	6,3	6,5	6,7	6,9
Море . . . . .	5,5	4,9	4,3	3,7	3,1	2,5	2,0	2,5	3,1	3,7	4,3	4,9

1. Для приведенных значений  $k_s$  расчет полей среднемесячных значений вертикальной скорости произведен для 12 месяцев по среднемноголетним данным.

На рис. 5 представлен район, для которого рассчитывались значения вертикальных скоростей. Буквой «с» помечены узлы сетки, в которых значения  $k_s$  брались для суши, а буквой «м» — для моря. Таким образом, для наших расчетов морских точек сетки оказалось 87, континентальных — 56.

Расчеты, проведенные при постоянном  $k_s$ , будем называть первым вариантом, а при значениях  $k_s$ , различных для суши и моря, — вторым вариантом.

В табл. 6 дано сопоставление результатов вычислений при постоянном и различных коэффициентах горизонтального обмена.

Таблица 6

Средние абсолютные значения вертикальных скоростей (см/сек.)

Месяц	Первый вариант ( $k_s$ —постоянное)			Второй вариант ( $k_s$ —переменное)		
	$\bar{w}_{г.о}$	$\bar{w}_{лин}$	$\bar{w}_{общ}$	$\bar{w}_{г.о}$	$\bar{w}_{лин}$	$\bar{w}_{общ}$
Январь . . . . .	0,084	0,189	0,249	0,086	0,190	0,251
Февраль . . . . .	0,094	0,194	0,260	0,095	0,194	0,256
Март . . . . .	0,068	0,166	0,221	0,069	0,166	0,220
Апрель . . . . .	0,041	0,112	0,158	0,043	0,112	0,157
Май . . . . .	0,039	0,107	0,143	0,044	0,111	0,146
Июнь . . . . .	0,033	0,118	0,148	0,038	0,121	0,149
Июль . . . . .	0,031	0,128	0,160	0,039	0,134	0,163
Август . . . . .	0,031	0,116	0,153	0,033	0,118	0,153
Сентябрь . . . . .	0,038	0,115	0,162	0,040	0,116	0,162
Октябрь . . . . .	0,048	0,124	0,178	0,053	0,129	0,181
Ноябрь . . . . .	0,058	0,147	0,206	0,059	0,149	0,208
Декабрь . . . . .	0,080	0,185	0,243	0,080	0,185	0,242
Среднее . . . . .	0,054	0,142	0,190	0,057	0,144	0,191

Анализ табл. 6 показывает следующие результаты.

Вертикальная скорость, вызванная горизонтальным турбулентным обменом  $\bar{w}_{г.о}$ , для второго варианта несколько больше, чем для первого. Наибольшие различия между первым и вторым вариантами в значениях

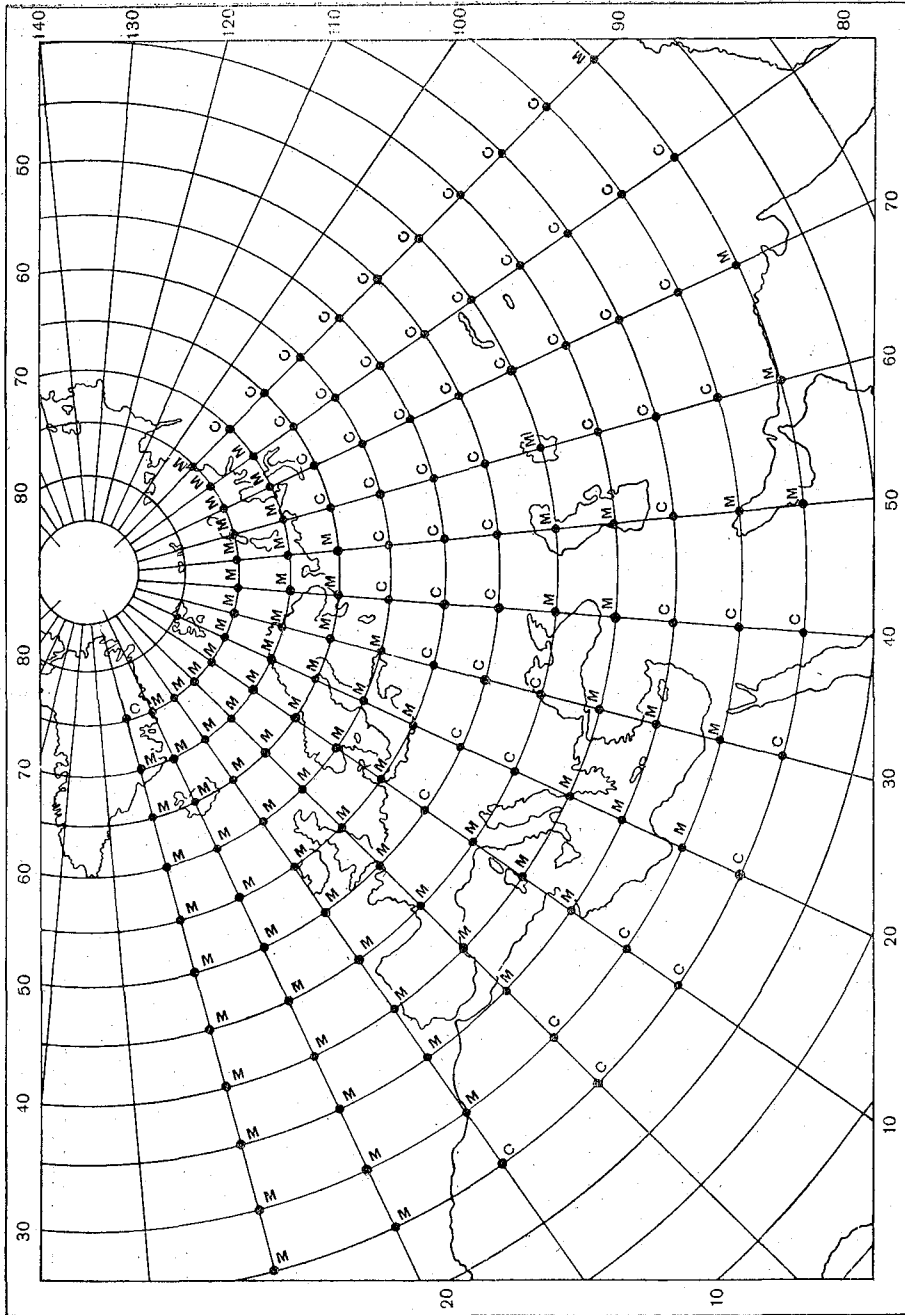


Рис. 5.

$\overline{\omega}_{г.о}$  отмечаются в летний период (особенно в июле). Зимой и весной эти различия значительно меньше. Различия в значениях  $\overline{\omega}_{дин}$  и  $\overline{\omega}_{общ}$  между первым и вторым вариантами достигают максимального значения также в июле месяце. Хотя эти различия по абсолютной величине и небольшие, но нужно учесть, что они являются средними по полю в 143 пункта. Так, анализ полей вертикальных скоростей  $\overline{\omega}_{г.о}$ ,  $\overline{\omega}_{дин}$ ,  $\overline{\omega}_{общ}$  для каждого месяца показал, что в отдельных пунктах сетки указанные различия оказываются более существенными.

Если проследить годовой ход значений  $\overline{\omega}_{г.о}$ ,  $\overline{\omega}_{дин}$  и  $\overline{\omega}_{общ}$ , то можно отметить, что различие коэффициентов горизонтального обмена для суши и моря не оказывает на него существенного влияния. Так, например, основные максимумы и минимумы вертикальных скоростей, вычисленных для первого и второго вариантов, приходятся на одни и те же месяцы.

В табл. 7 даны максимальные значения вертикальных скоростей для отдельных полей.

Таблица 7

Максимальные значения  $\overline{\omega}_{г.о}$  см/сек.

Месяц . . . . .	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
Первый вариант	1,0	1,2	0,4	0,4	0,4	0,2	0,3	0,2	0,2	0,3	0,6	0,6
Второй вариант	1,2	1,5	0,4	0,3	0,2	0,2	0,5	0,3	0,2	0,3	0,5	0,5

Как видно из таблицы, наибольшее значение  $\overline{\omega}_{г.о}$  отмечается в феврале; в первом варианте оно равно 1,2 см/сек., во втором 1,5 см/сек. Отмечено, что максимальные значения  $\overline{\omega}_{г.о}$  с октября по февраль наблюдаются в районе Гренландии, а с мая по сентябрь — на севере п-ова Индостана. В марте, апреле максимальные значения отмечаются у побережья Гренландии, на море.

2. Рассмотрим значения вертикальной скорости  $\overline{\omega}_{г.о}$  отдельно для суши и моря, вычисленной для первого и второго вариантов. Их средние абсолютные значения для четырех месяцев представлены табл. 8.

Таблица 8

Средние абсолютные значения  $\overline{\omega}_{г.о}$  см/сек.

Месяц	Суша		Море	
	первый вариант	второй вариант	первый вариант	второй вариант
Январь . . . . .	0,090	0,106	0,081	0,073
Апрель . . . . .	0,035	0,051	0,045	0,037
Июль . . . . .	0,034	0,079	0,030	0,020
Октябрь . . . . .	0,054	0,068	0,045	0,037

Из этой таблицы видно, что для рассматриваемой нами территории в обоих вариантах значения  $\overline{\omega}_{г.о}$  на море меньше, чем на суше. Исключение представляет апрель, для которого в первом варианте величина  $\overline{\omega}_{г.о}$  на море больше, чем на суше. Просмотр карт вертикальных скоростей

показал, что к такому же исключению можно отнести и март. Это связано с тем, что максимальные значения  $\omega_{г.о.}$  для этих месяцев приходится на морские пункты, в то время как для других месяцев — на континентальные. То, что для варианта с коэффициентом горизонтального обмена, различным для суши и моря, такого исключения нет, связано с тем, что в апреле  $k_s$  для моря меньше, чем для первого варианта.

Также следует отметить, что на суше значения  $\omega_{г.о.}$  для первого варианта меньше, чем для второго, а для моря — наоборот.

Таким образом, взяв значения  $k_s$ , различные для суши и моря, уточняем величину вертикальной скорости, а именно увеличиваем значения  $\omega_{г.о.}$  на суше и уменьшаем их на море.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Решетникова К. А. Определение вертикальных токов из уравнений динамики турбулентной атмосферы и анализ их среднемесячных значений. Труды ГГО, вып. 71, 1957.
2. Решетникова К. А. К вопросу о коэффициенте горизонтального обмена. Труды ГГО, вып. 55, 1955.
3. Сохрина Р. Ф., Челпанова О. М., Шарова В. Я. Давление воздуха, температура воздуха и атмосферные осадки северного полушария. Гидрометеоиздат, Л., 1959.
4. Карты отклонений температуры воздуха от многолетних средних северного полушария. Под ред. В. Я. Шаровой. ГГО, Л., 1961.
5. Verkofsky L. and Bertoni E. A. Mean topographic charts for the entire earth. Bull. Am. Met. Soc., vol. 36, No. 7, September 1955.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Средние абсолютные значения вертикальных скоростей (см/сек)

Годы	$\bar{w}_{тр}$	$\bar{w}_{адв}$	$\bar{w}_{г.о}$	$\bar{w}_l$	$\bar{w}_{дин}$	$\bar{w}_Г$	$\bar{w}_{общ}$
Январь							
1932	0,131	0,064	0,106	0,049	0,231	0,180	0,299
1933	0,134	0,069	0,110	0,054	0,242	0,175	0,325
1934	0,149	0,084	0,108	0,051	0,267	0,182	0,329
1935	0,131	0,062	0,101	0,047	0,236	0,150	0,285
1936	0,124	0,057	0,107	0,054	0,227	0,155	0,289
1937	0,132	0,066	0,113	0,051	0,247	0,169	0,316
1938	0,134	0,079	0,099	0,061	0,239	0,183	0,311
Февраль							
1932	0,130	0,097	0,112	0,055	0,267	0,138	0,312
1933	0,122	0,053	0,102	0,046	0,210	0,127	0,262
1934	0,135	0,106	0,102	0,054	0,244	0,153	0,294
1935	0,130	0,083	0,097	0,054	0,219	0,159	0,285
1936	0,117	0,048	0,105	0,043	0,218	0,148	0,289
1937	0,135	0,074	0,106	0,050	0,243	0,173	0,313
1938	0,122	0,074	0,105	0,049	0,228	0,128	0,282
Март							
1932	0,108	0,037	0,081	0,034	0,184	0,124	0,247
1933	0,119	0,043	0,077	0,039	0,199	0,130	0,261
1934	0,118	0,045	0,089	0,051	0,218	0,123	0,267
1935	0,106	0,042	0,078	0,040	0,183	0,108	0,238
1936	0,120	0,041	0,081	0,043	0,200	0,137	0,266
1937	0,116	0,046	0,080	0,042	0,200	0,126	0,247
1938	0,120	0,060	0,074	0,051	0,197	0,145	0,254
Апрель							
1932	0,113	0,041	0,071	0,047	0,187	0,111	0,210
1933	0,089	0,030	0,057	0,037	0,145	0,090	0,179
1934	0,099	0,034	0,054	0,040	0,157	0,108	0,199
1935	0,092	0,035	0,057	0,036	0,158	0,107	0,190
1936	0,075	0,026	0,050	0,039	0,129	0,085	0,166
1937	0,091	0,037	0,050	0,041	0,146	0,108	0,198
1938	0,099	0,039	0,053	0,039	0,156	0,106	0,200
Май							
1932	0,094	0,029	0,054	0,036	0,156	0,088	0,186
1933	0,080	0,023	0,045	0,036	0,127	0,078	0,168
1934	0,078	0,025	0,046	0,034	0,129	0,078	0,157
1935	0,081	0,030	0,047	0,042	0,133	0,083	0,170
1936	0,087	0,032	0,048	0,046	0,140	0,090	0,194
1937	0,081	0,025	0,042	0,037	0,125	0,078	0,163
1938	0,075	0,024	0,042	0,040	0,125	0,090	0,175
Июнь							
1932	0,089	0,029	0,041	0,046	0,145	0,094	0,176
1933	0,093	0,032	0,045	0,048	0,149	0,085	0,187
1934	0,084	0,027	0,041	0,043	0,136	0,074	0,165
1935	0,099	0,037	0,041	0,046	0,148	0,092	0,184
1936	0,084	0,034	0,044	0,046	0,141	0,083	0,176
1937	0,093	0,041	0,041	0,044	0,145	0,085	0,174
1938	0,099	0,047	0,044	0,047	0,163	0,114	0,204

Годы	$\bar{w}_{гр}$	$\bar{w}_{адв}$	$\bar{w}_{г. о}$	$\bar{w}_l$	$\bar{w}_{дин}$	$\bar{w}_г$	$\bar{w}_{общ}$
------	----------------	-----------------	------------------	-------------	-----------------	-------------	-----------------

И ю л ь

1932	0,099	0,039	0,042	0,055	0,158	0,097	0,195
1933	0,089	0,042	0,040	0,046	0,144	0,085	0,182
1934	0,096	0,039	0,038	0,052	0,154	0,087	0,193
1935	0,101	0,042	0,038	0,052	0,158	0,095	0,202
1936	0,098	0,040	0,039	0,048	0,156	0,084	0,185
1937	0,096	0,040	0,039	0,048	0,151	0,081	0,178
1938	0,098	0,046	0,040	0,055	0,157	0,080	0,182

А в г у с т

1932	0,093	0,038	0,043	0,040	0,146	0,088	0,186
1933	0,088	0,028	0,034	0,041	0,136	0,072	0,173
1934	0,092	0,033	0,044	0,043	0,149	0,098	0,199
1935	0,091	0,032	0,046	0,041	0,152	0,074	0,179
1936	0,097	0,032	0,042	0,045	0,149	0,081	0,183
1937	0,089	0,038	0,041	0,046	0,142	0,091	0,190
1938	0,087	0,035	0,036	0,043	0,135	0,082	0,177

С е н т я б р ь

1932	0,095	0,037	0,049	0,040	0,145	0,102	0,200
1933	0,100	0,032	0,049	0,038	0,149	0,100	0,203
1934	0,108	0,040	0,053	0,044	0,165	0,113	0,220
1935	0,104	0,033	0,048	0,036	0,149	0,094	0,187
1936	0,096	0,033	0,051	0,040	0,147	0,087	0,193
1937	0,088	0,032	0,047	0,036	0,138	0,102	0,191
1938	0,095	0,039	0,049	0,040	0,151	0,101	0,195

О к т я б р ь

1932	0,107	0,039	0,069	0,041	0,173	0,120	0,225
1933	0,099	0,037	0,060	0,034	0,159	0,111	0,209
1934	0,107	0,039	0,064	0,037	0,160	0,140	0,219
1935	0,098	0,036	0,060	0,042	0,158	0,114	0,212
1936	0,092	0,034	0,058	0,036	0,153	0,102	0,201
1937	0,100	0,036	0,066	0,037	0,160	0,118	0,207
1938	0,113	0,042	0,064	0,044	0,175	0,160	0,255

## О КЛИМАТОЛОГИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПРИТОКА ТЕПЛА

В современных работах по долгосрочным прогнозам погоды большое значение придается учету неадиабатических факторов. Это относится как к статистическим методам (см., например [1]), так и гидродинамическим. В работах по теории климата, связанных с интегрированием уравнений динамики атмосферы на длительные сроки [8, 9], одним из узловых вопросов проблемы является нахождение связи между притоками тепла и распределением средних значений метеозлементов. Одной из форм такой связи является, вообще говоря, уравнение притока тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_a \right) = \frac{\varepsilon}{c_p \rho}, \quad (1)$$

где  $T$  — температура,  $u$  и  $v$  зональная и меридиональная компоненты горизонтальной скорости ветра,  $w$  — вертикальная скорость,  $\varepsilon$  — приток тепла к единице объема,  $\rho$  — плотность воздуха,  $\gamma_a$  — сухоадиабатический градиент температуры,  $t$  — время,  $x$ ,  $y$ ,  $z$  — декартовы координаты, отсчитываемые к востоку, северу и по вертикали вверх.

Обычно это уравнение служит для определения либо  $\frac{\partial T}{\partial t}$ , либо  $w$ .

Тогда для нахождения  $\varepsilon$  необходимо привлекать какие-то новые соотношения. Но возможен и другой подход. Если мы хотим найти значения  $\varepsilon$ , осредненные за достаточно большой интервал времени, настолько большой, что можно положить  $\frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = 0$  (черта сверху означает осреднение),

и если  $w$  определено с помощью какого-то другого соотношения (например, уравнения вихря), то равенство (1) можно рассматривать как уравнение для нахождения  $\varepsilon$ . Естественно, найденные таким образом значения притока тепла нельзя использовать для нахождения  $\frac{\partial T}{\partial t}$  с помощью соотношения (1), поскольку при их нахождении предполагалось  $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ .

Полученные указанным выше способом значения  $\varepsilon$  являются нормами, климатологическими значениями, отклонения от которых могут служить предикторами в статистических прогнозах или могут быть введены в гидродинамические схемы.

Таким образом, после выполнения операции осреднения мы получим

$$\frac{1}{c_p \rho} \bar{\varepsilon} = u \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + v \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + w \left( \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} + \gamma_a \right). \quad (2)$$

Будем полагать, что множители осредненных произведений являются независимыми величинами. Предположение об отсутствии корреляции между горизонтальными компонентами скорости ветра и градиентом температуры не вызывает особых опасений. Погрешности, возникающие за счет пренебрежения этой корреляцией, много меньше суммарных погрешностей расчета. Исключение составляют лишь области фронтальных зон, где упомянутая корреляция может оказаться существенной.

Сложнее обстоит дело с осреднением члена, описывающего вертикальную адвекцию температуры.

Мы предполагаем провести все расчеты для уровня 850 мб, поэтому значения вертикальных скоростей  $w$  будут практически определяться процессами в пограничном слое. Как показали соответствующие исследования (см., например, [2]), формирование вертикальных скоростей на верхней границе пограничного слоя атмосферы в определенной степени зависит от перепада температур в этом слое. Поэтому, вообще говоря, пренебрежение корреляцией между  $w$  и  $\frac{\partial T}{\partial z}$  может привести к заметным ошибкам.

Такого рода корреляция будет особенно заметна, если необходимый для расчета вертикального градиента перепад температуры брать в слое 850—1000 мб. Заметим, что попытки использовать центральные разности при расчетах вертикального градиента температуры на уровне 850 мб (т. е. расчеты по данным о температуре на уровнях 700 и 1000 мб) привели к неудаче, особенно в холодное время года. Использование наземных значений температуры при наличии зимних инверсий приводило к значениям вертикальных градиентов, резко отличающихся от тех, которые наблюдались вблизи уровня 850 мб. Поэтому при расчетах потоков тепла за счет вертикальной адвекции использовались односторонние разности с «выходом» в свободную атмосферу, т. е. разности температур на уровнях 700 и 850 мб. Можно думать, что корреляция значений  $w$  с этими разностями будет уже совсем мала.

Для расчета полей горизонтальной скорости воспользуемся геострофическими соотношениями. Возможность такой стилизации обусловлена тем, что на уровне 850 мб (что примерно соответствует верхней границе пограничного слоя атмосферы) влияние сил вязкости делается пренебрежимо малым. Отклонения ветра от геострофического, обусловленные инерционными силами (ускорениями частиц), при осреднении за длительный интервал времени должны гасить друг друга.

Наибольшие сложности связаны с расчетами вертикальных скоростей. Мы воспользовались значениями  $w$ , рассчитанными К. В. Пятыгиной и Э. А. Федоровой [3] по схеме К. А. Решетниковой [4]. Основным достоинством этой схемы является учет влияния рельефа на формирование вертикальных движений на верхней границе пограничного слоя. Турбулентный обмен описывается при этом весьма приближенно. Для вычисления характеристик поля скорости, осредненных по вертикали, используются наземные данные о давлении и температуре, т. е. используется геострофическое приближение с учетом термического ветра. Осредненные значения высот подстилающей поверхности определялись по известным картам Берковского и Бертони [10]. В расчеты был также введен горизонтальный обмен ( $k_s = 0,45 \cdot 10^6 \text{ м}^2/\text{сек.}$ ).

Для определения конечных разностей метеоэлементов по горизонтали использовалась регулярная сетка с шагом  $5^\circ$  по широте и  $10^\circ$  по долготе. Эта сетка, а также территория, для которой велись расчеты, даны на рис. 2 работы [3].



Для определения среднемесячных значений давления, необходимых для расчетов компонент геострофического ветра и температуры на уровне 850 мб, были использованы данные за 1950—1956 гг., обработанные и проанализированные под руководством И. В. Ханевской.

Помимо суммарного притока тепла, рассчитанного по формуле (2), определялись также отдельные компоненты этого притока, обусловленные горизонтальным и вертикальным турбулентным обменом. Попытки рассчитать вторую из названных компонент окончились неудачей, что было связано с большими погрешностями определения  $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$  по данным о профиле температуры в трех точках: у земли и на уровнях 850 и 700 мб. Резкая неоднородность кривизны профиля температуры в слое 0—3 км (особенно большие значения кривизны наблюдаются вблизи подстилающей поверхности) обусловила бросающееся в глаза несоответствие между значениями  $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ , рассчитанными с помощью конечных разностей в указанном выше слое, и значениями  $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$ , определенными вблизи уровня 850 мб со значительно меньшим шагом по вертикали.

Поскольку на все это накладывались трудности, связанные с выбором значений коэффициента вертикального обмена и его зависимости от высоты, то от расчетов этой компоненты притока тепла пришлось отказаться.

Приток тепла за счет горизонтального обмена определялся по хорошо известной формуле

$$\frac{1}{c_p \rho} \bar{\varepsilon}_s = -k_s \nabla^2 T, \quad (3)$$

предполагающей изотропность обмена по осям  $x$  и  $y$ .

Значения коэффициента горизонтального обмена, полученные в исследованиях различных авторов, приведены в табл. 1. Как видно из этой таблицы, ряд исследователей отмечает различие обмена в широтном и горизонтальном направлениях. Принимая, однако, во внимание известную приближенность определения этого параметра (что, в частности, сказалось на большой дисперсии значений, приведенных в табл. 1), мы будем, как уже было сказано выше, этими различиями пренебрегать. Что касается абсолютной величины  $k_s$ , то она была принята равной  $0,4 \cdot 10^6$  м<sup>2</sup>/сек.

Это значение соответствовало величине  $k_s$ , принятой в работе Решетниковой, и является несколько заниженным по сравнению с результатами определения  $k_s$  другими авторами.

Результаты расчетов приведены в виде карт, на которые нанесены суммарные значения притоков тепла. Под суммарным значением подразумевается величина

$$\frac{1}{c_p \rho} \bar{\varepsilon} = \bar{u} \frac{\partial \bar{T}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{w} \left( -g \bar{\rho} \frac{\partial \bar{T}}{\partial p} + \gamma_a \right) + k_s \nabla^2 \bar{T}. \quad (4)$$

Эта величина в силу стационарности изучаемых осредненных величин равна сумме притоков тепла за счет радиации, конденсационных процессов и вертикального турбулентного обмена. Член, соответствующий горизонтальному турбулентному перемешиванию, перенесен в правую часть, поскольку влияние горизонтального обмена и горизонтальной адвекции часто анализируется совместно в силу одинаковости их физической

Таблица 1

Автор	Год публикации	Способ определения	$K_x \cdot 10^{-6}$ м <sup>2</sup> /сек.	$K_y \cdot 10^{-6}$ м <sup>2</sup> /сек.	Примечание
Дефант А. [14]	1921	По рассеянию геострофических траекторий	4,0	4,0	Территория Западной Европы, зима
Леттау Г. [13]	1933	Прямой метод определения коэффициента обмена	5,5	5,5	Средние по широтам в зоне 35—70° с. ш.
Решетникова К. А. [4]	1955	По адвекции вихря скорости	0,45	0,45	Средние из значений для января и июля
Григорьева А. С. [5]	1958	По рассеянию траекторий воздушных частиц	1,6	1,0	Европейская территория СССР, летнее время
Груза Г. В. [6]	1960	По отклонениям температуры и скорости ветра	—	2,9	Среднее из значений для различных широтных зон (от 30 до 70° с. ш.).
Го С. К. и Буллок В. С. [11]	1963	По дисперсии геострофических траекторий	5,9	2,3	
Юдин М. И. [7]	1963	Эксперименты со сглаживанием в численных прогнозах	0,9	0,3	
Го С. К. [12]	1965	По дисперсиям траекторий шаров-зондов	20,5	6,2	

природы. Как уже было сказано выше, рассчитать отдельно величину вертикального турбулентного обмена сколько-нибудь надежно не удалось.

Для сопоставления величин отдельных членов выражения (4) и их изменений в годовом ходе на рис. 1 приведены средние по модулю значения горизонтального турбулентного обмена, вертикальной и горизонтальной адвекции, а также суммарного притока тепла для различных месяцев года. Осреднение проводилось по всем точкам регулярной сетки, приведенной на рис. 2 упоминавшейся статьи К. В. Пятыгиной и Э. А. Федоровой. Значения притоков тепла даются в градусах за сутки. Для перехода к кал/см<sup>3</sup>сутки эти величины следует умножить на 1,08.

На этом рисунке обращает на себя внимание почти симметричный ход кривых относительно середины лета. Самым малым по величине, практически не меняющимся в течение года, оказался горизонтальный обмен. Следующей по величине является горизонтальная адвекция тепла, и, наконец, наибольшие значения, как правило, оказываются у вертикальной адвекции тепла. В течение почти всего года суммарные значения притоков тепла близки к значениям вертикальной адвекции. Это означает, что горизонтальная адвекция и горизонтальный турбулентный обмен в значительной степени (но, конечно, не полностью) компенсируют друг друга. И только в зимние месяцы с декабря по февраль ход суммарного притока тепла параллелен горизонтальной адвекции, но по величине резко от нее отличается. Уменьшение адвективных притоков тепла

в летнее время связано с общим ослаблением неоднородностей термобарического поля атмосферы, в частности с уменьшением скорости ветра и ослаблением фронтальной деятельности.

Если в расчеты ввести зависимость коэффициента горизонтального обмена от скорости ветра, т. е. учесть его годовой ход, то и значения притока тепла за счет горизонтального перемешивания не будут столь однородны.

Годовой ход вертикальной адвекции тепла обусловлен главным образом годовым ходом вертикальной скорости (сравни рис. 3 статьи К. В. Пятыгиной и Э. А. Федоровой [3]). Годовой ход градиента  $\frac{\partial T}{\partial z}$  в слое 700—850 мб сказывается весьма слабо.

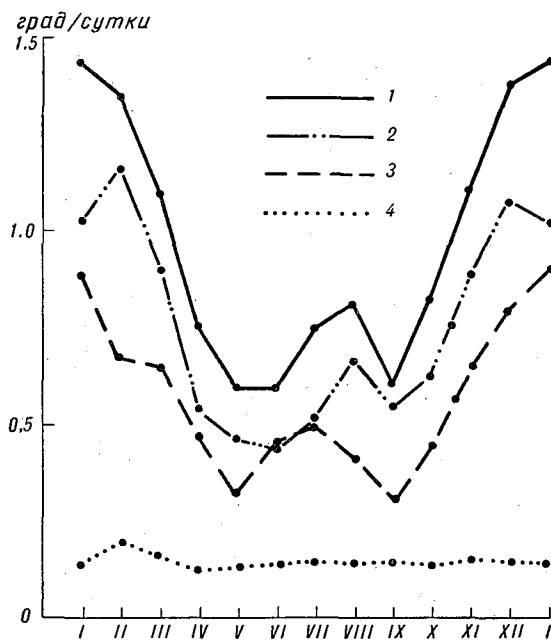


Рис. 1. Годовой ход средних по модулю значений отдельных компонент притоков тепла.

1 — суммарный приток; 2 — адвекция тепла в вертикальном направлении; 3 — горизонтальная адвекция; 4 — горизонтальный макрообмен.

Интересно отметить наличие двух минимумов (весной и осенью) в ходе горизонтальной адвекции.

На рис. 2 приведены суммарные притоки тепла, осредненные по океаническим и материковым районам. В отличие от рис. 1 здесь нанесены не модули рассматриваемых величин, а их осредненные значения с учетом знака. Обращает на себя внимание прежде всего разность фаз этих притоков. В те месяцы, когда над сушей приток тепла положителен, над океаном он отрицателен и наоборот. Исключение составляют май и сентябрь, когда происходит смена знаков этих притоков и их значения над сушей и океаном оказываются близкими.

Характерными чертами годового хода является также сравнительно малая амплитуда изменений притоков тепла над океаном по сравнению с изменчивостью притоков над материковыми территориями. Различаются также и средние за год значения: над океаном они небольшие

положительные, над материком — отрицательные и значительно больше по величине.

Иначе говоря, за счет процессов радиации, конденсации и вертикального турбулентного обмена над материками в среднем происходит выхолаживание, а над океанами — небольшое нагревание. В среднем многолетнем эти нагревания и охлаждения компенсируются адвективными факторами и горизонтальным обменом.

В заключение несколько слов о картах суммарного притока тепла за отдельные месяцы. На рис. 3 приведена карта для января месяца. Обра-

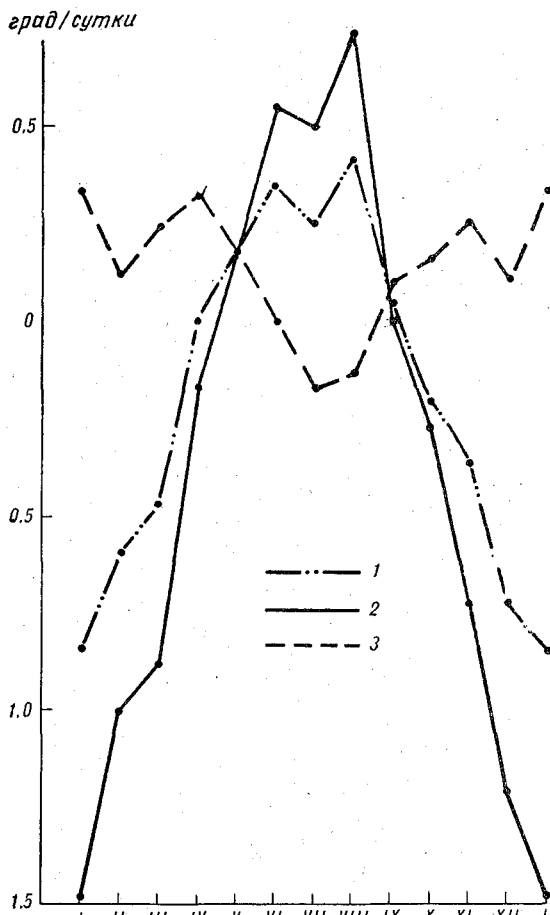


Рис. 2. Годовой ход средних значений притоков тепла над материком и океаном.

1 — среднее по всей территории; 2 — над материком; 3 — над океаном.

щает на себя внимание совпадение нулевой изолинии притока тепла с береговой линией на северо-западе Европы. Отчетливо выделяются области положительных значений притока тепла, связанные с Черным и Каспийским морями и с бассейном Средиземноморья (здесь она несколько размыта).

На июльской карте (рис. 4) знак притока тепла над большей частью материка изменился на обратный. Положительные притоки наблюдаются теперь и над большей частью водной поверхности. Отрицательные значения в районах Гималаев связаны с орографическими эффектами.

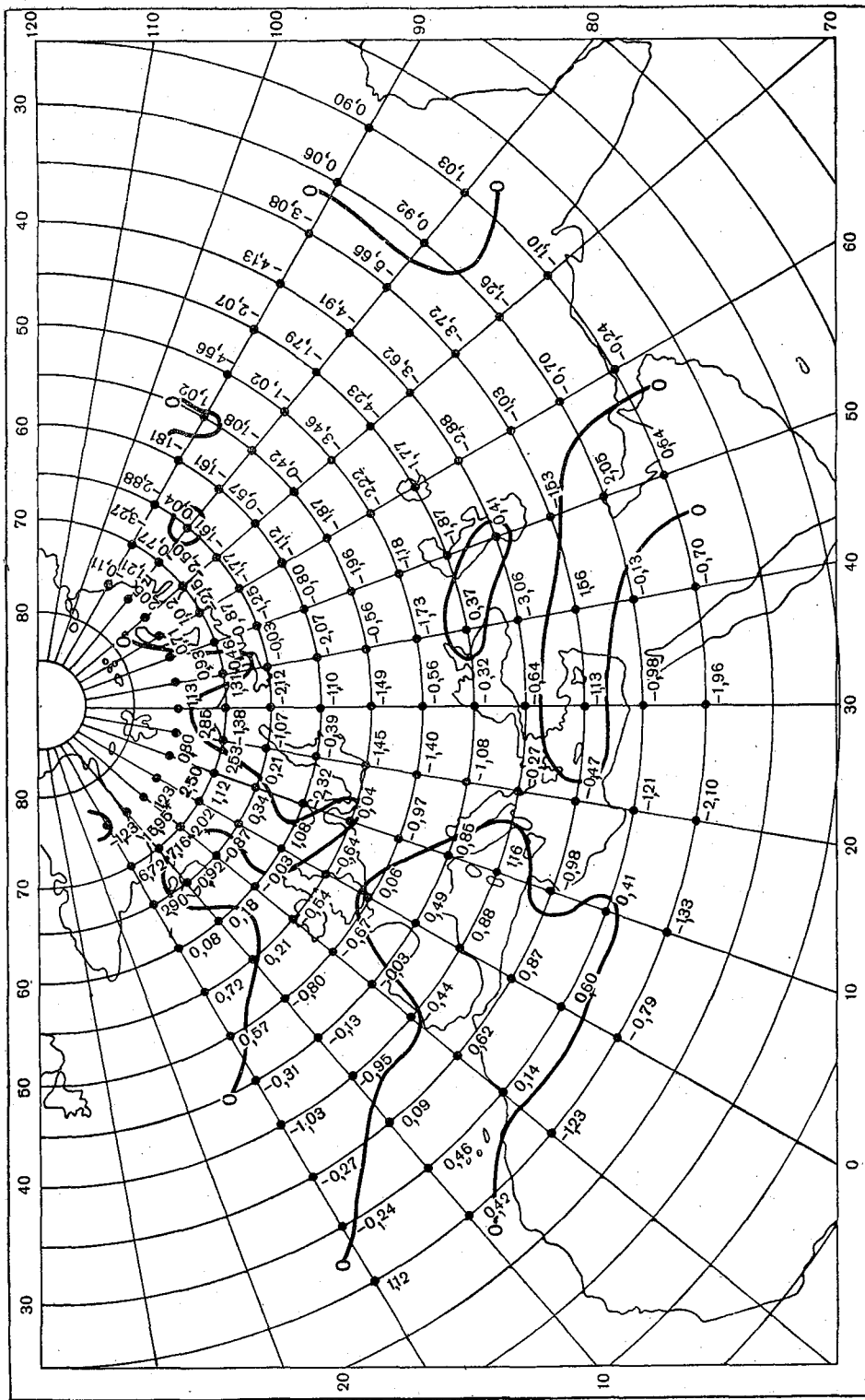


Рис. 3. Распределение суммарного притока тепла. Январь.

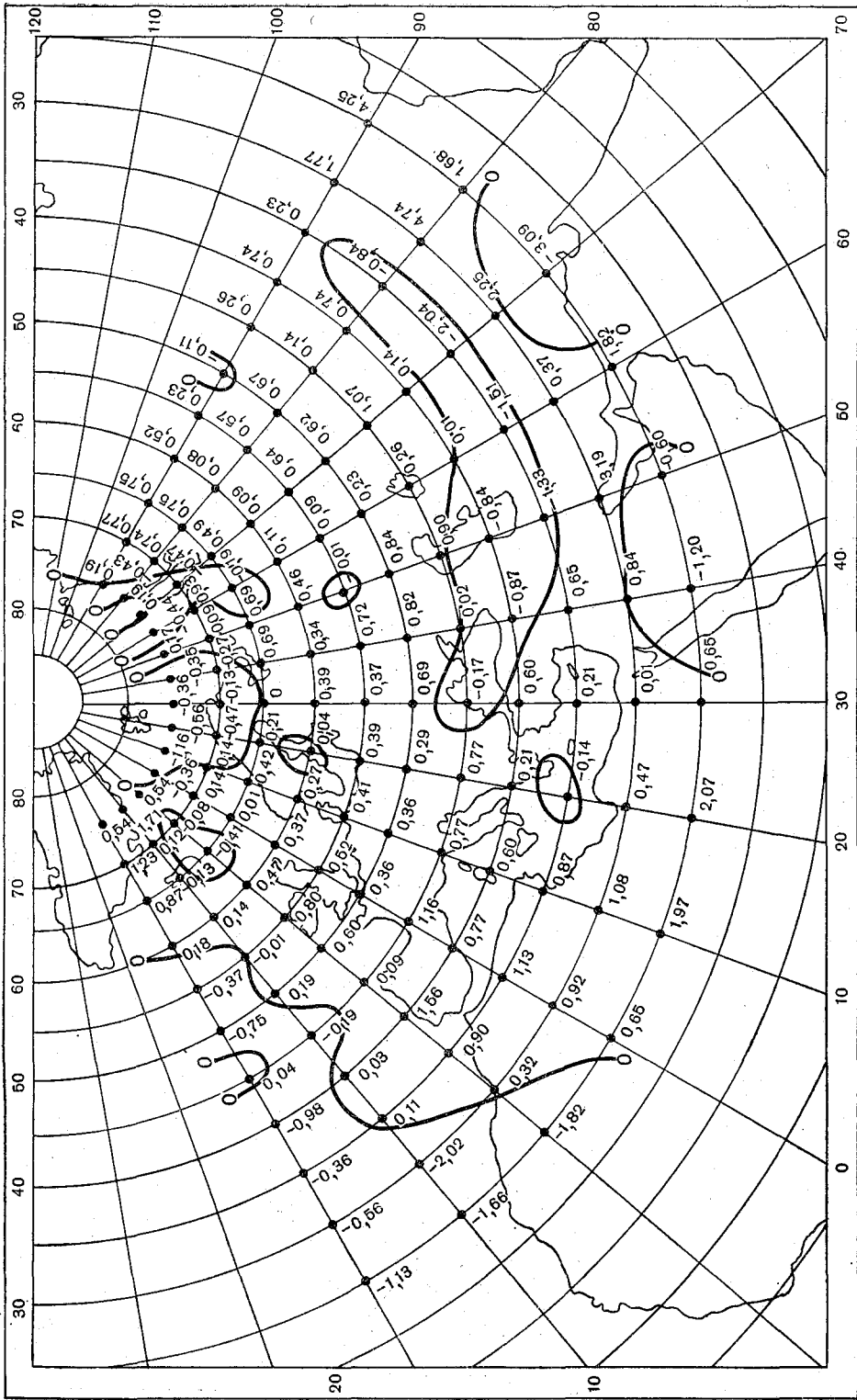


Рис. 4. Распределение суммарного притока тепла. Июль.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Есакова Н. П., Афанасьева В. Б. Статистические связи между аномалиями некоторых погодных характеристик. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
2. Ковалева Е. Д., Орленко Л. Р., Честная И. И. К расчету фрикционных вертикальных токов на верхней границе пограничного слоя. Труды ГГО, вып. 205, 1967.
3. Пятыгина К. В., Федорова Э. А. Вычисление вертикальных скоростей, осредненных по времени. См. наст. сб.
4. Решетникова К. А. Определение вертикальных токов из уравнений динамики турбулентной атмосферы и анализ их среднемесячных значений. Труды ГГО, вып. 71, 1957.
5. Григорьева А. С. К вопросу о горизонтальном обмене в атмосфере. Труды ГГО, вып. 84, 1958.
6. Груза Г. В. О межширотном теплообмене в северном полушарии. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2, 1960.
7. Юдин М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Гидрометеониздат, Л., 1963.
8. Manabe S., Smagorinsky J., Strickler R. F. Simulated climatology of a general circulation model with a hydrological cycle. Monthly Weather Review, Vol. 93, No. 12, 1965.
9. Mintz Y. On the incorporation of nonadiabatic effects in numerical integration models for the study in the general circulation. "Dynamic of Climate," Pergamon Press, 1960.
10. Berkofsky L. and Bertoni E. A. Mean topographic charts for the entire earth. Bull. Am. Met. Soc., Vol. 36, No. 7, 1955.
11. Kao S. K., Bullock W. S. Large-scale eddy diffusivity and energy spectra as determined by geostrophic trajectories. Bull. Am. Met. Soc., vol. 44, No. 6, 1963.
12. Kao S. K. Large-scale turbulence and diffusion. Q. J. Roy. Met. Soc., vol. 91, No. 387, 1965.
13. Lettau H. Note on horizontal diffusivity for large-scale atmospheric currents. J. Met., vol. 12, No. 4, 1955.
14. Defant A. Die Zirkulation der Atmosphäre in dem gemässigten Breiten der Erde. Geogr. Ann., No. 3, 1921.

К. В. ПЯТЫГИНА, Э. А. ФЕДОРОВА, Л. С. ОРЛОВА, Л. С. КУЧУМОВА

### ПРОГНОЗ ПОЛЕЙ ВЕТРА И ТЕМПЕРАТУРЫ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ УРОВНЕЙ АТМОСФЕРЫ НА ОСНОВЕ АГЕОСТРОФИЧЕСКОЙ СХЕМЫ

В 1965 г. в Отделе численных методов прогнозов Северо-Западного УГМС проводилось испытание агеострофической схемы прогноза полей ветра и температуры, разработанной в ГГО и опубликованной в работах [1—5]. Поэтому, не останавливаясь подробно на методике применения этой схемы, укажем только, что схема является четырехуровневой (850, 500, 300 и 200 мб), дающей прогноз составляющих ветра  $u$ ,  $v$  и температуры  $T$  на сутки. Кроме того, на каждом временном шаге рассчитываются составляющие агеострофического ветра  $u'$ ,  $v'$  и вертикальная скорость  $w$ . Задача решена для треугольной сетки шагами по времени. Временной шаг принимался равным 1 часу. Расчет изменений со временем ветра и температуры производился через индивидуальные производные, т. е. использовалась методика предвычисления по схеме в переменных Лагранжа [4, 5].

Испытание схемы проводилось в феврале—июле и в октябре. Всего рассчитан 41 случай, при этом в 30 случаях материал подготавливался оперативно, но из-за плохой работы электронной вычислительной машины оперативные расчеты состоялись только в 15 случаях. Остальные случаи рассчитывались в последующие дни. Следует отметить, что по результатам эти случаи можно рассматривать как оперативные, так как исходный материал оставался таким же, как при подготовке к оперативным прогнозам (в оперативные прогнозы обычно входит меньшее число телеграмм и большее число ошибочных данных).

Подготовительные работы для счета на машине по данным за 3 часа проводились в период от 6 час. 30 мин. до 9 час. Прогноз на машине М-20 занимает 30 мин., а с оценкой результатов прогноза 35 мин. Обработка прогностических карт заканчивалась в 11 час.

Если раньше испытание схемы, результаты которого представлены в работах [4, 5], проводилось без применения объективного анализа, то при настоящем испытании, кроме основной программы прогноза, применялся контроль и объективный анализ исходных данных.

1. Программа контроля исходных данных составлена И. Н. Пантелеевой. При ее составлении за основу принята работа [7].

Контроль данных геопотенциала и температуры в слое между двумя уровнями проводился с применением уравнения статики, при этом в каждом слое предполагалось линейное изменение температуры, а именно



для проверки данных каждой станции решались следующие уравнения:

$$\begin{aligned}H_{500} - H_{850} &= A_1 + B_1(T_{500} + T_{850}), \quad \Delta i = 5(7); \\H_{300} - H_{500} &= A_2 + B_2(T_{300} + T_{500}), \quad \Delta i = 5; \\H_{200} - H_{300} &= A_3 + B_3(T_{200} + T_{300}), \quad \Delta i = 10; \\H_{100} - H_{200} &= A_4 + B_4(T_{100} + T_{200}), \quad \Delta i = 12,\end{aligned}$$

где  $A_i, B_i$  — некоторые постоянные.

Если результаты левой и правой частей уравнений не превышали указанной величины допустимой невязки  $\Delta i$ , то данные считались правильными.

В случае ошибок на  $AT_{850}$  данные этого уровня отбраковывались.

Из табл. 1 приложения видно, что в среднем из 213 телеграмм отбраковывались примерно 1—2 телеграммы. Данные на нижнем уровне (850 мб) отбраковывались в среднем в 8 случаях.

Наиболее часто исправлялись значения геопотенциала на уровнях 300 и 200 мб (соответственно 7 и 6 исправлений). На уровне 500 мб температура и геопотенциал исправлялись в 2—3 случаях. Восстановление отсутствующих значений выполнялось редко, также сравнительно редко исправлялась температура на уровнях 300 и 200 мб.

С целью установления правильности исправления или восстановления данных с помощью программы контроля результаты сопоставлялись с данными карт барической топографии Северо-Западного УГМС, а также выполнялся статический контроль ручным способом с использованием большего числа уровней [6]. Как показало такое сопоставление, данные геопотенциала исправлялись и восстанавливались не всегда верно. Отбраковывание данных на уровне 850 мб часто было тоже неправильным.

С целью уменьшения количества неправильно исключаемых из расчета данных  $AT_{850}$  допустимая невязка на этом уровне была увеличена с 5 до 7 гп. дкм.

Общее число неправильно отбракованных данных при увеличении невязки значительно сократилось, примерно в пять раз. Поэтому дальнейшее испытание прогностической схемы проводилось с увеличенной невязкой. Из общего количества прогнозов (41) с увеличенной невязкой рассчитывалось 27.

Необходимо отметить, что при наличии ошибочных значений одновременно геопотенциала и температуры на одном и том же уровне программа контроля, как правило, исправляет геопотенциал; неправильные данные температуры не исправляются. В случаях больших ошибок температуры после анализа материалов контроля выполнялись повторные прогнозы. (Всего было сделано 3 повторных расчета.) Это является существенным недостатком программы статического контроля, так как в таких случаях пропускались грубые ошибки до 35—50°.

II. Объективный анализ полей геопотенциала и температуры проводился по схеме С. М. Машковича [8, 9]. В ГГО А. А. Кобяковой в полученную из ГМЦ программу были внесены изменения. Уменьшен словарь станций до 284 в связи с применением анализа для ограниченной территории. Программа была приспособлена для треугольной сетки и для выполнения одновременно анализа полей геопотенциала и температуры на четырех уровнях.

Сопоставление результатов объективного анализа с текущими картами барической топографии показало, что поля геопотенциала на всех

уровнях довольно хорошо согласуются между собой. Но в отдельных случаях небольшие по площади барические образования с малыми градиентами на картах объективного анализа оказались сглаженными.

Объективный анализ температуры получается хуже анализа геопотенциала. Поля температуры в результате объективного анализа сглаживаются несколько больше; в очагах тепла и холода различия часто достигают нескольких градусов. Были также случаи, когда некоторые очаги тепла и холода на картах объективного анализа совершенно не получались.

Сильное сглаживание исходных полей в результате объективного анализа, естественно, может привести к увеличению ошибок прогноза, а также к сглаживанию прогностических полей ветра и температуры.

III. Перейдем к рассмотрению результатов испытания агеострофической схемы прогноза полей метеоэлементов.

В отличие от других численных схем, где прогноз оценивается только по относительной ошибке прогноза геопотенциала, в данной схеме производится вычисление нескольких оценок оправдываемости. Это вызвано тем, что других численных схем по прогнозу полей ветра и температуры почти не имеется, что затрудняет сопоставление результатов.

Таблица 1

Средние оценки оправдываемости прогноза полей ветра и температуры

	Уровень (мб)			
	850	500	300	200
$V_{\phi}$	8,9	15,1	21,0	18,9
$\delta_V$	3,0	4,9	7,7	6,8
$\delta \vec{V}$	5,0	7,4	11,7	11,1
$\alpha$	0,65	0,57	0,65	0,68
$\alpha'$	0,56	0,49	0,56	0,59
$\delta_{\phi T}$	2,8	2,8	2,0	3,7
$\delta_T$	1,8	1,8	1,7	2,9
$\delta_T / \delta_{\phi T}$	0,64	0,64	0,84	0,80
$R_T$	0,80	0,76	0,67	0,66

1. Программой предусматривается вычисление оценок оправдываемости прогноза полей ветра и температуры для 97 узлов сетки (рис. 1).

В табл. 2 приложения даны оценки оправдываемости для 41 прогноза. Средние оценки оправдываемости представлены табл. 1. В этих таблицах введены следующие обозначения:

$V_{\phi}$  — фактическое значение модуля скорости геострофического ветра (м/сек.),  $\delta_V$  — средняя абсолютная ошибка прогноза модуля скорости ветра (м/сек.),

$$\alpha = \sqrt{\frac{(\delta u)^2 + (\delta v)^2}{V_{\phi}^2}}$$

— отношение средней квадратической векторной ошибки прогноза ветра к среднему квадратическому значению скорости,  $\delta_{\phi T}$  — среднее

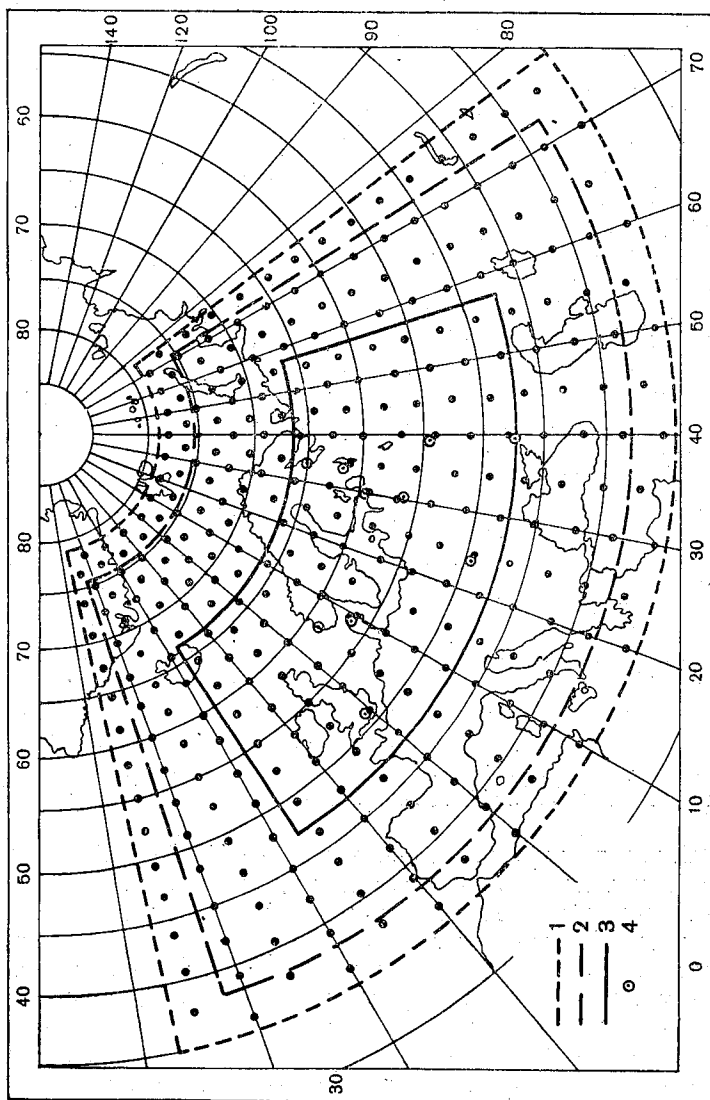


Рис. 1. Треугольная сетка точек.  
 1 — район исходных значений геопотенциала,  
 2 — район исходных значений температуры,  
 3 — район оценки прогнозов, 4 — метеостанции  
 для оценки прогнозов.

абсолютное значение фактического изменения температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ),  $\delta_T$  — средняя абсолютная ошибка прогноза температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ),  $R_T$  — коэффициент корреляции между прогностическими и фактическими изменениями температуры за сутки.

В табл. 1, кроме абсолютной ошибки прогноза модуля скорости ветра  $\delta_v$  и величины  $\alpha$ , даны также ошибка прогноза вектора скорости  $\delta\vec{V}$  м/сек. и относительная векторная ошибка

$$\alpha' = \frac{\delta\vec{V}}{V_{\phi}},$$

а для температуры — относительная ошибка  $\delta_T/\delta_{\phi}T$ .

Из табл. 1 видно, что величина  $\alpha$  имеет наименьшее значение для уровня 500 мб.

Ошибка прогноза вектора скорости  $\delta\vec{V}$  для уровней 850 и 500 мб значительно меньше, чем для уровней 300 и 200 мб. Для уровня 850 мб эта ошибка в среднем равна 5,0 м/сек., для 500 мб 7,4 м/сек., а для уровней 300 и 200 мб величина  $\delta\vec{V}$  в среднем составляет 11,4 м/сек. Но относительные векторные ошибки  $\alpha'$  на рассматриваемых уровнях имеют близкие значения, изменяясь в пределе 0,49—0,59.

Абсолютная ошибка прогноза температуры для тропосферы в среднем составляет  $1,8^{\circ}$ . Однако для уровня 200 мб эта ошибка значительно больше ( $2,9^{\circ}$ ).

Коэффициент корреляции между фактическими и прогностическими изменениями температуры наибольший для уровня 850 мб (0,80), наименьший для уровней 200 и 300 мб (соответственно 0,66 и 0,67).

Относительная ошибка прогноза температуры оказалась наибольшей на уровне 300 мб (0,84), наименьшей на уровнях 850 и 500 мб (0,64).

Оценки оправдываемости, представленные табл. 1, были сопоставлены с оценками, полученными нами ранее и приведенными в работе [5], которые в свою очередь сопоставлялись с результатами зарубежных работ [10]. Эти результаты не совсем сопоставимы, так как они основаны на разном фактическом материале и рассчитаны не для одинакового числа случаев. Но даже из такого сопоставления следует, что результаты, полученные в настоящей работе, являются удовлетворительными, а ошибки прогноза как для полей ветра, так и для полей температуры несколько меньше, чем в работе [5], где прогноз проводился без применения статического контроля и объективного анализа исходных данных.

2. Рассмотрим повторяемость величины  $\alpha$  — отношения средней квадратической векторной ошибки прогноза ветра к среднему квадратическому значению скорости, а также относительной ошибки прогноза полей температуры  $\delta_T/\delta_{\phi}T$ . Повторяемость величин  $\alpha$  и  $\delta_T/\delta_{\phi}T$  дана в табл. 2.

Наибольшая повторяемость величины  $\alpha=0,40 \div 0,80$  отмечается на всех рассматриваемых уровнях и только для одного прогноза на уровне 850 мб значение  $\alpha > 1$ . Просмотр карт объективного анализа показал, что в этом случае на всех четырех уровнях расхождения между данными объективного анализа и карт барической топографии являлись наибольшими из всех случаев (например, на уровне 500 мб расхождения в некоторых узлах сетки достигали 15 гп. дкм).

Повторяемость относительной ошибки прогноза температуры в указанных пределах несколько меньше. На уровнях 300 и 200 мб относительные ошибки больше, чем на нижних уровнях. Если на уровне 850 мб

Таблица 2

Повторяемость величин  $\alpha$  и  $\delta_T/\delta_{\Phi}T$ 

		$\alpha$ и $\delta_T/\delta_{\Phi}T$				
		0,39	0,40—0,59	0,60—0,79	0,80—0,99	$\geq 1,00$
850 мб						
$\alpha$	Число прогнозов	0	14	24	2	1
	Повторяемость (%) . . . . .	0	34	59	5	2
$\delta_T/\delta_{\Phi}T$	Число прогнозов	1	19	10	8	3
	Повторяемость (%) . . . . .	2	47	24	20	7
500 мб						
$\alpha$	Число прогнозов	1	25	13	2	0
	Повторяемость (%) . . . . .	2	61	32	5	0
$\delta_T/\delta_{\Phi}T$	Число прогнозов	1	14	18	8	0
	Повторяемость (%) . . . . .	2	34	44	20	0
300 мб						
$\alpha$	Число прогнозов	0	15	22	4	0
	Повторяемость (%) . . . . .	0	37	53	10	0
$\delta_T/\delta_{\Phi}T$	Число прогнозов	0	1	17	12	11
	Повторяемость (%) . . . . .	0	2	42	29	27
200 мб						
$\alpha$	Число прогнозов	0	10	25	6	0
	Повторяемость (%) . . . . .	0	24	61	15	0
$\delta_T/\delta_{\Phi}T$	Число прогнозов	0	6	16	11	8
	Повторяемость (%) . . . . .	0	15	38	27	20

$\delta_T/\delta_{\phi}T > 1$  только в 3 случаях, то на уровнях 300 и 200 мб  $\delta_T/\delta_{\phi}T > 1$  в 11 и 8 случаях соответственно.

Необходимо отметить, что в большинстве случаев относительные ошибки  $\delta_T/\delta_{\phi}T > 1$  обычно приходится на даты с малыми фактическими изменениями температуры, при этом абсолютные ошибки прогноза температуры не всегда большие. Так, например, при  $\delta_T/\delta_{\phi}T > 1$  для уровня 300 мб в 7 случаях  $\delta_T < 2^\circ$ , в 1 случае  $\delta_T = 2^\circ$  и только в 3 случаях  $3^\circ > \delta_T > 2^\circ$ ; для уровня 200 мб  $\delta_T$  в 4 случаях меньше средней ошибки ( $2,9^\circ$ ), вычисленной по 41 случаю.

IV. Кроме оценок, выполненных на электронной вычислительной машине, производились ручные оценки.

1. Для 97 пунктов сетки вычислена оценка оправдываемости прогноза знака изменений температуры за сутки.

По формуле

$$\rho = \frac{n_+ - n_-}{n_+ + n_- + n_0}$$

определялась величина  $\rho$ .

Здесь  $n_+$ ,  $n_-$  — число пунктов, в которых прогноз знака изменения температуры соответственно оправдался и не оправдался;  $n_0$  — число пунктов, в которых прогностические или фактические изменения равны нулю.

Вычисления показали, что в среднем наибольшая оправдываемость изменений температуры по знаку отмечается на уровне 500 мб (0,55) и наименьшая на уровне 300 мб (0,46). На уровнях 850 и 200 мб значения  $\rho$  близки между собой и равны соответственно 0,53 и 0,51.

2. Для температуры также были вычислены оценки оправдываемости прогнозов по данным метеостанций.

На карте в пределах оцениваемого района в 97 узлов сетки были выбраны станции, совпадающие с узлами сетки или удаленные от них на расстояние не больше 70 км. Таких станций оказалось 10 (см. рис. 1).

Сопоставление средних оценок прогноза температуры для 97 узлов сетки и по 10 станциям дано в табл. 3. В этой таблице представлены фактическая суточная изменчивость температуры  $\delta_{\phi}T$ , абсолютная  $\delta_T$  и относительная  $\delta_T/\delta_{\phi}T$  ошибки для всех прогнозов (41).

Таблица 3

Сопоставление средних оценок для 10 метеостанций и 97 узлов сетки, вычисленных по 41 случаю

Вид оценки	Уровень (мб)											
	850			500			300			200		
	$\delta_{\phi}T$	$\delta_T$	$\delta_T/\delta_{\phi}T$	$\delta_{\phi}T$	$\delta_T$	$\delta_T/\delta_{\phi}T$	$\delta_{\phi}T$	$\delta_T$	$\delta_T/\delta_{\phi}T$	$\delta_{\phi}T$	$\delta_T$	$\delta_T/\delta_{\phi}T$
Машинные оценки (97 узлов)	2,8	1,8	0,64	2,8	1,8	0,64	2,0	1,7	0,84	3,7	2,9	0,80
Ручные оценки (10 станций)	2,9	1,9	0,66	3,3	2,1	0,64	2,5	2,0	0,80	4,1	3,6	0,88

Из табл. 3 видно, что средние относительные ошибки прогноза температуры, рассчитанные по данным объективного анализа и фактических значений на станциях, имеют небольшие различия.

Сопоставление прогностических карт температуры с фактическими картами Северо-Западного УГМС на соответствующих уровнях показало, что прогностические карты наименее удачными оказались для уровня 300 мб. Предвычисленные поля температуры на этом уровне в большинстве случаев были сглаженными.

3. Прогностические поля ветра сопоставлялись с фактическими картами барической топографии.

Такое сопоставление показало, что прогностические поля ветра получаются несколько сглаженными. В поле ветра на прогностических картах не получают отражения ярко выраженные ложбины и гребни. Однако центры циркуляции на прогностических картах ветра получают достаточно отчетливо.

Для полученных замкнутых центров циркуляции произведено сопоставление с положением циклонов и антициклонов на картах соответствующих уровней. Результаты представлены в табл. 4 и 5.

Таблица 4

Повторяемость циклонической циркуляции по данным прогнозов полей ветра

Фактическое поле	Уровень (мб)	Общее количество случаев	Прогностическое поле					
			замкнутая, хорошо выраженная циркуляция		слабо выраженная циркуляция		однородный поток	
			<i>n</i>	%	<i>n</i>	%	<i>n</i>	%
Наличие замкнутой циркуляции	850	45	37	82	4	9	4	9
	500	37	27	73	4	11	6	16
	300	34	21	62	6	18	7	20
	200	16	16	100	0	0	0	0
	Итого	132	101	76	14	11	17	13

Таблица 5

Повторяемость антициклонической циркуляции по данным прогнозов полей ветра

Фактическое поле	Уровень (мб)	Общее количество случаев	Прогностическое поле					
			замкнутая, хорошо выраженная циркуляция		слабо выраженная циркуляция		однородный поток	
			<i>n</i>	%	<i>n</i>	%	<i>n</i>	%
Наличие замкнутой циркуляции	850	17	17	100	0	0	0	0
	500	14	11	79	2	14	1	7
	300	14	10	71	1	7	3	22
	200	5	3	60	1	20	1	20
	Итого	50	41	82	4	8	5	10

В большинстве случаев наличие барических образований подтверждалось соответствующей циркуляцией на прогностических картах.

Из рассмотренных 132 циклонических циркуляций на всех уровнях не получили отражения на прогностических картах 17 случаев. Это имеет место главным образом на уровнях 500 и 300 мб (соответственно 6 и 7 случаев).

Центров антициклонов наблюдалось значительно меньше. Из рассмотренных 50 антициклонов не были отражены на прогностических картах 5 случаев, три из них — на уровне 300 мб.

Анализ 22 случаев, для которых вместо замкнутых циркуляций на прогностических картах были получены однородные потоки, показал, что в 8 случаях не были получены барические образования, возникшие за время прогноза, т. е. новообразования. В 4 случаях циклонические образования были сглажены в результате объективного анализа исходных карт. На прогностических картах не были получены также разрушающиеся небольшие по площади барические образования (6 заполняющихся циклонов и 2 разрушающихся антициклона).

Кроме того, отмечены такие случаи, когда вместо однородного потока на фактических картах барической топографии имелась хорошо выраженная замкнутая циркуляция на картах прогностического ветра. Но таких случаев для 41 прогноза на четырех уровнях оказалось немного.

Так, на уровне 850 мб вместо однородного потока только в 1 случае имела место замкнутая антициклоническая циркуляция, на уровне 300 мб отмечалась в 1 случае циклоническая и в 1 случае антициклоническая циркуляция, а на уровне 200 мб — 2 случая циклонической циркуляции. Но на уровне 500 мб отсутствию циркуляции на фактических картах всегда соответствовал однородный поток на прогностических картах ветра.

На основании проведенных прогнозов и анализа полученных результатов можно сделать следующие основные выводы.

1. Агеострофическая схема прогноза полей ветра и температуры дает удовлетворительные результаты.

2. Оперативное применение этой схемы требует достаточно четкой работы всех устройств электронной вычислительной машины.

3. Программы контроля исходных данных и объективного анализа требуют дальнейшей доработки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Юдин М. И. Предвычисление поля ветра и связанных с ним метеорологических элементов. ДАН СССР, т. 112, № 1, 1957.
2. Юдин М. И. Решение уравнений динамики атмосферы при использовании закономерностей структуры метеорологических полей в целях краткосрочного прогноза погоды. Труды ГГО, вып. 143, 1963.
3. Пятыгина К. В. Расчетная схема предвычисления полей ветра и температуры в тропосфере и нижней стратосфере. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
4. Пятыгина К. В. Агеострофическая модель прогноза полей метеозагрязнения в большом количестве уровней. Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Гидрометеиздат, Л., 1964.
5. Пятыгина К. В., Блажевич В. Г., Федорова Э. А. Результаты испытания агеострофической модели прогноза полей ветра и температуры для нескольких уровней атмосферы. Труды ГГО, вып. 168, 1965.



6. Г ан д и н Л. С. О статическом контроле аэрологических телеграмм. Метеорология и гидрология, № 9, 1963.
7. П ан т е л е е в а И. Н. Статический контроль аэрологических телеграмм. Труды ГГО, вып. 168, 1965.
8. М а ш к о в и ч С. А. Об объективном анализе карт барической топографии северного полушария. Труды ММЦ, вып. 4, 1964.
9. М а ш к о в и ч С. А., Г у б а н о в а С. И. О реализации схемы объективного анализа карт барической топографии северного полушария на электронной вычислительной машине. Труды ММЦ, вып. 4, 1964.
10. Окончательный доклад по численным методам анализа и прогноза погоды (перев. с англ.). НИИАК, М., 1962.

Результаты контроля исходных данных геонотен

	Общее число телеграмм	Количество телеграмм, вошедших в прогноз	Отбракованные телеграммы	Геопотенциал				
				исправление			вос	
				500	300	200	500	
Среднее	8723	8661	62	116	269	251	8	
	212,8	211,2	1,5	2,8	6,6	6,1	0,2	

Оценки оправдываемости прогноза полей

Случай	Начальный срок	850 мб						500 мб			
		$V_{\Phi}$	$\delta_V$	$\alpha$	$\delta_{\Phi T}$	$\delta_T$	$R_T$	$V_{\Phi}$	$\delta_V$	$\alpha$	$\delta_{\Phi T}$
1	12—13 II	13,8	5,3	0,53	2,5	2,8	0,81	18,9	8,6	0,66	2,3
2	16—17 II	7,3	2,9	0,74	1,8	1,4	0,69	12,4	4,9	0,68	2,5
3	17—18 II	7,9	3,2	0,80	3,0	2,6	0,71	13,4	6,0	0,75	2,7
4	23—24 II	9,4	4,1	0,92	2,8	2,3	0,68	17,5	6,8	0,68	2,4
5	24—25 II	11,7	3,0	0,66	3,1	1,7	0,85	19,5	6,6	0,54	3,3
6	2—3 III	9,5	2,9	0,70	3,8	1,6	0,85	13,9	6,9	0,85	5,3
7	3—4 III	10,7	3,6	0,71	3,4	2,5	0,75	13,2	4,5	0,55	4,0
8	9—10 III	7,9	3,3	0,73	2,6	1,6	0,77	14,6	4,9	0,68	2,6
9	10—11 III	8,4	2,8	0,71	3,4	1,9	0,83	15,8	4,6	0,66	2,8
10	15—16 III	12,3	3,0	0,47	2,0	1,7	0,84	14,9	5,8	0,69	2,4
11	16—17 III	11,2	4,3	0,61	1,9	1,7	0,59	13,5	5,1	0,58	2,8
12	17—18 III	8,5	2,9	0,55	1,7	1,9	0,51	11,6	5,2	0,67	2,5
13	29—30 III	9,4	2,9	1,09	3,1	3,6	0,39	16,2	6,6	0,90	3,4
14	30—31 III	11,8	5,1	0,67	4,2	2,2	0,88	17,4	6,3	0,74	3,5
15	5—6 IV	6,6	2,7	0,73	3,2	1,9	0,78	12,7	4,8	0,62	2,9
16	6—7 IV	7,1	3,0	0,75	2,3	1,8	0,72	13,7	5,3	0,62	2,1
17	7—8 IV	8,0	3,4	0,72	2,9	1,3	0,90	14,8	5,7	0,61	2,4
18	17—18 V	9,4	2,4	0,45	4,4	1,6	0,95	17,5	5,2	0,46	3,8
19	18—19 V	9,5	3,4	0,55	3,9	1,8	0,93	18,4	4,3	0,41	3,4
20	19—20 V	9,3	3,1	0,55	3,3	1,9	0,88	18,8	4,5	0,42	4,1
21	20—21 V	9,3	2,6	0,66	3,8	1,6	0,89	19,2	5,8	0,52	4,1
22	21—22 V	7,5	2,0	0,63	3,3	1,4	0,93	16,4	3,8	0,38	3,9
23	22—23 V	6,7	2,2	0,67	3,0	1,6	0,95	13,6	4,1	0,52	3,5
24	23—24 V	7,4	2,3	0,55	2,1	1,4	0,86	13,9	4,6	0,47	2,5
25	24—25 V	6,3	2,1	0,63	1,9	1,6	0,79	12,7	3,1	0,45	2,0
26	1—2 VI	7,1	2,2	0,54	3,5	2,1	0,84	12,5	3,2	0,52	2,0
27	14—15 VI	6,2	2,4	0,69	1,4	1,2	0,66	11,3	3,9	0,53	1,3
28	15—16 VI	8,4	2,7	0,61	2,0	1,5	0,73	13,2	3,5	0,49	2,0
29	16—17 VI	8,3	2,8	0,63	2,2	1,2	0,82	11,9	3,2	0,52	1,7
30	21—22 VI	7,5	2,6	0,53	1,8	1,0	0,89	13,9	4,0	0,49	1,5
31	22—23 VI	8,0	2,6	0,67	2,2	1,2	0,91	13,6	4,0	0,62	2,5
32	5—6 VII	6,6	1,7	0,67	1,6	1,4	0,66	13,4	3,7	0,53	2,3
33	6—7 VII	8,2	3,0	0,61	2,3	1,5	0,87	14,6	4,2	0,50	2,1
34	7—8 VII	8,4	2,5	0,45	2,6	1,4	0,88	14,5	3,7	0,40	2,5
35	12—13 VII	6,1	2,0	0,73	2,0	1,6	0,76	10,0	2,8	0,56	2,0
36	11—12 X	10,1	3,9	0,77	2,5	1,8	0,72	19,1	7,5	0,58	2,3
37	12—13 X	9,9	3,5	0,69	3,3	2,4	0,69	17,3	6,2	0,58	3,0
38	13—14 X	11,0	2,3	0,57	3,4	2,0	0,89	16,7	4,0	0,52	3,2
39	14—15 X	10,0	2,9	0,48	3,2	1,4	0,91	17,4	4,1	0,48	3,4
40	15—16 X	10,6	3,0	0,51	2,7	1,5	0,83	16,7	3,6	0,42	3,1
41	16—17 X	11,8	3,1	0,56	3,4	1,6	0,91	18,8	4,3	0,55	3,5
Среднее	.....	8,9	3,0	0,65	2,8	1,8	0,80	15,1	4,9	0,57	2,8

ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 1

циала и температуры за 1965 г. (41 случай)

становление		Температура						Отбракованные данные на АТ <sub>850</sub>
		исправление			восстановление			
300	200	500	300	200	500	300	200	
14	17	93	49	9	6	1	0	341
0,3	0,4	2,3	1,2	0,2	0,1	0,0	0	8,3

Таблица 2

ветра и температуры за 1965 г.

		300 мб						200 мб					
$\delta_T$	$R_T$	$V_\Phi$	$\delta_V$	$\alpha$	$\delta_{\Phi T}$	$\delta_T$	$R_T$	$V_\Phi$	$\delta_V$	$\alpha$	$\delta_{\Phi T}$	$\delta_T$	$R_T$
2,0	0,72	23,1	8,7	0,56	2,5	1,7	0,64	23,1	5,8	0,40	3,4	3,7	0,52
2,0	0,54	18,1	8,3	0,77	1,8	1,2	0,75	17,4	7,2	0,73	2,3	4,0	0,05
1,4	0,86	18,7	8,4	0,74	1,6	1,8	0,52	18,6	7,8	0,74	2,4	2,5	0,58
1,5	0,79	23,6	9,6	0,76	1,3	1,7	0,73	22,9	8,2	0,76	4,2	3,3	0,71
1,9	0,87	26,0	10,5	0,60	1,9	1,2	0,73	25,5	8,8	0,62	4,0	3,1	0,78
3,0	0,62	21,0	10,6	0,91	2,8	2,0	0,77	22,5	11,6	0,85	4,3	3,8	0,50
2,4	0,84	19,0	7,7	0,68	2,3	1,5	0,77	20,1	6,1	0,72	4,1	3,1	0,77
1,7	0,80	20,8	7,5	0,76	1,4	1,5	0,57	21,5	6,9	0,75	3,5	2,7	0,76
2,0	0,84	21,6	6,3	0,73	1,5	1,8	0,79	22,0	6,6	0,67	3,2	4,6	0,63
2,0	0,60	18,1	9,9	0,96	1,6	1,6	0,62	17,5	8,3	0,80	4,1	3,9	0,57
2,0	0,63	16,7	5,4	0,61	1,8	1,4	0,69	15,9	4,4	0,56	4,7	3,2	0,70
1,8	0,77	15,5	7,4	0,68	2,4	1,8	0,80	14,5	7,3	0,67	4,4	2,9	0,74
2,9	0,71	21,8	8,9	0,84	1,9	2,4	0,31	20,3	7,5	0,86	4,1	4,3	0,46
2,5	0,72	22,0	9,1	0,82	1,7	1,5	0,59	19,5	9,4	0,89	4,4	4,1	0,62
1,4	0,87	16,8	7,4	0,74	1,5	1,8	0,50	15,4	6,8	0,88	3,6	1,7	0,91
1,6	0,71	18,1	8,7	0,73	1,5	1,9	0,34	14,0	5,8	0,67	3,0	2,8	0,67
1,9	0,75	19,3	7,8	0,72	1,8	2,0	0,49	15,7	6,1	0,67	2,3	2,5	0,48
2,1	0,87	23,5	7,7	0,52	2,1	1,9	0,60	18,4	7,2	0,59	3,2	2,9	0,56
2,4	0,73	25,0	6,0	0,54	2,7	1,6	0,84	21,0	6,0	0,52	3,2	1,8	0,79
2,5	0,83	26,1	7,8	0,55	2,8	1,7	0,77	22,0	7,1	0,57	5,3	3,4	0,74
2,6	0,82	26,9	10,6	0,69	2,4	3,0	0,70	21,9	9,5	0,65	5,0	3,8	0,77
1,4	0,94	23,6	8,0	0,46	1,9	1,2	0,75	19,3	6,2	0,47	4,9	3,1	0,80
1,7	0,89	20,3	7,4	0,59	1,6	1,4	0,58	16,7	6,1	0,58	4,2	3,8	0,56
1,6	0,80	21,0	8,4	0,55	1,5	1,1	0,71	16,5	6,1	0,64	2,4	2,7	0,53
1,3	0,79	18,7	5,6	0,52	1,6	1,3	0,61	14,5	5,1	0,64	2,5	1,6	0,78
1,4	0,65	17,0	5,3	0,63	1,8	1,2	0,74	13,7	5,4	0,73	3,9	2,6	0,77
0,9	0,74	17,3	6,2	0,58	1,3	1,2	0,62	15,2	6,9	0,76	3,0	2,2	0,68
1,2	0,88	19,2	5,5	0,56	1,6	1,1	0,76	15,8	4,1	0,60	3,2	2,3	0,79
1,4	0,69	17,4	5,9	0,60	2,4	1,9	0,60	15,0	6,4	0,74	3,8	3,0	0,66
1,4	0,48	21,7	7,2	0,60	1,6	1,5	0,52	17,7	7,1	0,69	2,4	2,4	0,50
1,4	0,81	19,5	6,2	0,71	2,4	1,8	0,72	17,4	5,4	0,75	3,8	2,4	0,76
2,0	0,44	21,0	8,5	0,62	2,0	1,6	0,65	18,3	8,3	0,70	3,4	1,9	0,83
1,8	0,65	21,1	7,4	0,58	2,3	2,3	0,40	18,8	5,9	0,59	3,2	2,8	0,61
1,3	0,87	21,7	6,9	0,52	2,0	1,6	0,68	18,6	7,6	0,71	3,3	3,1	0,58
1,1	0,78	15,3	5,3	0,57	1,8	1,5	0,76	14,4	5,4	0,66	2,1	2,2	0,39
1,7	0,74	26,5	11,3	0,62	2,3	1,6	0,83	24,4	9,7	0,64	2,7	2,2	0,60
1,7	0,76	23,5	8,7	0,65	2,0	2,0	0,75	22,3	7,6	0,65	2,9	2,5	0,63
2,1	0,88	21,7	7,1	0,68	2,9	1,7	0,85	21,1	5,9	0,96	3,2	2,5	0,70
1,7	0,94	22,9	5,9	0,54	3,2	2,1	0,90	20,5	5,6	0,55	5,1	2,5	0,88
1,5	0,86	23,1	5,7	0,53	1,9	1,4	0,76	21,1	5,3	0,50	5,8	2,8	0,88
2,1	0,86	26,0	7,6	0,62	2,2	1,9	0,85	23,5	6,1	0,60	5,8	3,4	0,79
1,8	0,76	21,0	7,7	0,65	2,0	1,7	0,67	18,9	6,8	0,68	3,7	2,9	0,66

**НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ПРОГНОЗОВ  
ПЕРЕМЕЩЕНИЙ ЦЕНТРОВ ТАЙФУНОВ  
ПО ТРЕХУРОВЕННОЙ БАРОКЛИННОЙ МОДЕЛИ**

I. Система уравнений для компонент скорости перемещения барических центров тропического циклона (тайфуна или урагана) при использовании концепции ведущего потока, согласно работе [5], записывается в виде:

$$C_{x0}|_{\zeta} = \bar{U}_0(\zeta) - P^*(\zeta)U_{0(\zeta=1)} + P_1^*(\zeta)m'^2\bar{\Omega}_{y0(\zeta=1)} - \\ - \int_0^1 m'^2\bar{\Omega}_{y0}(\eta)Q^*(\zeta, \eta)d\eta - m'^2\beta Q_{\beta}^*(\zeta) - \\ - \int_0^1 \eta \frac{\partial}{\partial \eta} U_0(\eta)R^*(\zeta, \eta)d\eta + \int_0^1 \eta \frac{\partial}{\partial \eta} m'^2\bar{\Omega}_{y0}(\eta)R_1^*(\zeta, \eta)d\eta, \quad (1)$$

$$C_{y0}|_{\zeta} = V_0(\zeta) - P^*(\zeta)\bar{V}_{0(\zeta=1)} - P_1^*(\zeta)m'^2\bar{\Omega}_{x0(\zeta=1)} + \\ + \int_0^1 m'^2\bar{\Omega}_{x0}(\eta)Q^*(\zeta, \eta)d\eta - \int_0^1 \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \bar{V}_0 R^*(\eta, \zeta)d\eta - \\ - \int_0^1 \eta \frac{\partial}{\partial \eta} m'^2\bar{\Omega}_{x0}(\eta)R_1^*(\eta, \zeta)d\eta, \quad (2)$$

где  $C_x, C_y$  — составляющие скорости перемещения барических центров вдоль оси  $x$ , направленной с запада на восток, и оси  $y$ , направленной с юга на север;  $\zeta = \frac{p}{p_0}$  — давление, отнесенное к давлению на уровне моря;  $\eta$  — переменная интегрирования;

$$m'^2 = km^2 = k \frac{R^2 T (\gamma_a - \gamma)}{g l_0^2};$$

$l_0$  — среднее значение параметра Кориолиса для области;  $\bar{\Omega} = \nabla^2 \bar{\Psi}$  — относительный вихрь ведущего потока;  $\bar{\Psi}$  — функция тока, соответствующая ведущему потоку в разложении  $\Psi = \bar{\Psi} + \Psi^*(r)$ ,  $\Psi^*(r)$  — функция тока локальной симметричной циркуляции тайфуна;  $k$  — эмпирическая константа в аппроксимации  $\Psi_{\zeta} \approx \frac{k}{l_0} \Phi_{\zeta}$  в уравнении

притока тепла;  $\Phi$  — геопотенциал;  $\bar{U} = -\bar{\Psi}_y$ ;  $V = \bar{\Psi}_x$  — компоненты соле-  
ноидальной скорости ведущего потока.

Индексы  $x, y, \zeta$  обозначают производные по  $x, y$  и  $\zeta$  соответственно,  
а индекс 0 означает ту или иную функцию в барическом центре тайфуна.

$P^*, P_1^*, Q^*, Q_\beta^*, R^*, R_1^*$  — функции влияния, которые зависят от  $\eta, \zeta$

и также от масштаба кругового возмущения тайфуна.

Члены правых частей уравнений (1) и (2), связанные с функциями  
влияния, имеют смысл поправок, учитывающих влияние циклонической  
циркуляции тайфуна на его перемещения.  $\Psi^*(\zeta, r)$  стилизуется некоторой  
аналитической функцией, например, экспоненциальной

$$\Psi^*(\zeta, r_1) = \Psi_0^*(\zeta) \exp[-\chi_1^2 r_1^2], \quad (3)$$

где  $\Psi_0^*$  — значение  $\Psi^*$  в барическом центре тайфуна;  $r_1 = r/m'$ ;  $\chi_1^2$  — без-  
размерный характерный горизонтальный масштаб барического возмуще-  
ния тайфуна, который определяется из начальных данных эмпирически,  
в частности методом наименьших квадратов. Тогда после выполнения  
ряда интегрирований вышеуказанные функции влияния принимают сле-  
дующий вид:

$$P^*(\chi_1, \zeta) = \frac{a}{V\zeta} \frac{\Psi_0^*(\zeta=1)}{\Psi_0^*(\zeta)} \left\{ e^{-\frac{1}{2}a} \frac{1}{\chi_1} \left( f(a, \chi_1) - \frac{5}{2} \left[ u - \frac{1}{2\chi_1} + 8\chi_1 \right] \right) + \right. \\ \left. + 2 \exp\left(-0,4a + \left[\frac{0,15}{\chi_1}\right]^2\right) \int_0^1 f_1(\chi_1, a, \xi) d\xi \right\}_{a=\ln \frac{1}{\zeta}}, \quad (4)$$

$$Q_\beta^*(\chi_1, \zeta) = \int_0^1 \frac{\Psi_0^*(\eta)}{\Psi_0^*(\zeta)} \frac{1}{2V\eta\zeta} \left\{ e^{-\frac{1}{2}a} \left( f(a, \chi_1) - \frac{1}{2} \left[ u - \frac{1}{2\chi_1} \right] \right)_{a=\left|\ln \frac{\eta}{\zeta}\right|} + \right. \\ \left. + \frac{e^{-\frac{1}{2}a}}{\chi_1} \left[ f(a, \chi_1) - \frac{9}{2} \left[ u - \frac{1}{2\chi_1} \right] - 40\chi_1 \right]_{a=\ln \frac{1}{\eta\zeta}} + \right. \\ \left. + 4 \exp\left(-0,4a + \left[\frac{0,15}{\chi_1}\right]^2\right) \int_0^1 f_1(\chi_1, a, \xi) d\xi \right\}_{a=\ln \frac{1}{\eta\zeta}} d\eta, \quad (5)$$

$$P^*(\chi_1, \eta, \xi) = -\frac{\Psi_0^*(\eta)}{\Psi_0^*(\zeta) V\eta\zeta} \left\{ e^{-\frac{1}{2}a} \left( f(a, \chi_1) \left[ \frac{1}{2\chi_1} + \delta \left( 2u - \frac{1}{2\chi_1} \right) + \right. \right. \right. \\ \left. \left. + \delta \left( 2a - \frac{1}{2\chi_1} \right) \left( u^2 - \frac{u}{2\chi_1} + \frac{1}{2} \right)^{-1} \right] + \frac{1}{4\chi_1} \left[ u - \frac{1}{2\chi_1} \right] [\delta - 1] - \right. \\ \left. - \delta \left[ u^2 - \frac{u}{2\chi_1} + 1 \right] \right)_{a=\left|\ln \frac{\eta}{\zeta}\right|} + e^{-\frac{1}{2}a} \left( f(a, \chi_1) \left[ \frac{-0,8}{\chi_1} + \right. \right. \\ \left. \left. + 2u + \left( 2u - \frac{1}{2\chi_1} \right) \left( u^2 - \frac{u}{2\chi_1} + \frac{1}{2} \right)^{-1} \right] - \left[ u^2 - \frac{u}{2\chi_1} + 5 \right] \right)_{a=\ln \frac{1}{\eta\zeta}} + \\ \left. + 0,4 \exp\left(-\frac{1}{2}a + \left[\frac{0,15}{\chi_1}\right]^2\right) \int_0^1 f_1(a, \chi, \xi) d\xi \right\}_{a=\ln \frac{1}{\eta\zeta}}, \quad (6)$$

$$P_1^*(\chi_1, \zeta) = \frac{\alpha}{8\sqrt{\zeta}} \frac{\Psi_0^*(\zeta=1)}{\Psi_0^*(\zeta)} \left\{ f_2(\chi_1, a) + 2f_3(\chi_1, a) - \right. \\ \left. - 2 \exp\left(-0,4a + \left[\frac{0,15}{\chi_1}\right]^2\right) \int_0^1 f_4(\chi_1, a, \xi) d\xi \right\}_{a=\ln \frac{1}{\zeta}}, \quad (7)$$

$$P_1^*(\chi_1, \eta, \zeta) = -\frac{\Psi_0^*(\eta)}{\Psi_0^*(\zeta)} \frac{1}{8\sqrt{\eta\zeta}} \left\{ [1 - \delta] \frac{1}{2} f_2\left(\left|\ln \frac{\eta}{\zeta}\right|, \chi_1\right) + \right. \\ \left. + \delta f_5\left(\left|\ln \frac{\eta}{\zeta}\right|, \chi_1\right) - 0,8 f_2\left(\ln \frac{1}{\eta\zeta}, \chi_1\right) + f_5\left(\ln \frac{1}{\eta\zeta}, \chi_1\right) + \right. \\ \left. + 0,4 f_3\left(\ln \frac{1}{\eta\zeta}, \chi_1\right) - 0,4 \exp\left(-0,4a + \left[\frac{0,15}{\chi_1}\right]^2\right) \int_0^1 f_4(\chi_1, a, \xi) d\xi \right\}_{a=\ln \frac{1}{\eta\zeta}}, \quad (8)$$

$$Q^*(\chi_1, \eta, \zeta) = \frac{\Psi_0^*(\eta)}{\Psi_0^*(\zeta)} \frac{1}{2\sqrt{\eta\zeta}} \left\{ \frac{e^{-\frac{1}{2}a}}{\chi_1} \left( f_6(a, \chi_1) + \frac{1}{2} \left[ -u^3 + \frac{1+u^2}{\chi_1} - \right. \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{u}{4\chi_1^2} - \frac{5}{2}u \right] \right)_{a=\left|\ln \frac{\eta}{\zeta}\right|} + e^{-\frac{1}{2}a} \frac{1}{\chi_1} \left( f_6(a, \chi_1) - 4,5u^3 + \right. \\ \left. + [4,5 - 120\chi_1^2] \frac{u^2}{\chi_1} + [70 - 2400\chi_1^2] [10\chi_1 + u] - \right. \\ \left. - \left[ \frac{5}{4} + \frac{9}{8\chi_1^2} \right] u - \frac{5,5}{\chi_1} \right)_{a=\ln \frac{1}{\eta\zeta}} + 4 \exp\left(-0,4a + \right. \\ \left. + \left[\frac{0,15}{\chi_1}\right]^2\right) \int_0^1 f_7(\chi_1, a, \xi) d\xi \right\}_{a=\ln \frac{1}{\eta\zeta}}, \quad (9)$$

где введены обозначения:

$$u = \chi_1 a + \frac{1}{4\chi_1},$$

$\xi$  — переменная интегрирования.

$$f = e^{u^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(u)] \left[ u^2 - \frac{u}{2\chi_1} + \frac{1}{2} \right], \quad (10)$$

$$f_1 = \exp \left[ -\left( \frac{1}{20\chi_1\xi} \right)^2 - \left( \frac{0,2}{\chi_1^2} + a \right) \frac{1}{10\xi} \right] \frac{1}{10\xi} \left[ \frac{0,5}{\chi_1^2} - \frac{1}{16\chi_1^4} + \right. \\ \left. + a^2 + 20a\xi + 2(10\xi)^2 \right], \quad (11)$$

$$f_2 = e^{-\frac{1}{2}a} \frac{1}{\chi_1^3} \left\{ -\frac{e^{u^2} \sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(u)] \left[ \left( u^2 - \frac{u}{2\chi_1} \right)^2 + \left( u - \frac{1}{4\chi_1} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{4\chi_1^2} \right) \right] + \frac{1}{2} \left[ u^3 - \frac{u^2}{\chi_1} + \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{1}{2\chi_1^2} \right) u \right] \right\}, \quad (12)$$

$$f_3 = \frac{e^{-\frac{1}{2}a}}{\chi_1^3} \left[ u^3 + \frac{30\chi_1^2 - 1}{\chi_1} u^2 + \left( 600\chi_1^2 - 19,5 + \frac{1}{4\chi_1^2} \right) (u + 10\chi_1) \right], \quad (13)$$

$$f_4 = \exp \left[ - \left( \frac{1}{20\xi\chi_1} \right)^2 - \left( \frac{0,2}{\chi_1^2} + a \right) \frac{1}{10\xi} \right] \frac{1}{10\xi} \left[ \frac{1}{16\chi_1^4} \left( \frac{1}{\chi_1^2} + \frac{1}{16\chi_1^4} - 4 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\chi_1^2} \left( 1 - \frac{1}{8\chi_1^2} \right) a^2 + a^4 + 2a \left( \frac{1}{\chi_1^2} - \frac{1}{8\chi_1^4} + 2a^2 \right) 10\xi + \right. \\ \left. + 2 \left( \frac{1}{\chi_1^2} - \frac{1}{8\chi_1^4} + 6a^2 \right) (10\xi)^2 + 24a(10\xi)^3 + 24(10\xi)^4 \right], \quad (14)$$

$$f_5 = \frac{e^{-\frac{1}{2}a}}{\chi_1^2} \left\{ \frac{e^{u^2} \sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(u)] \left[ -2u^3 \left( u - \frac{1}{2\chi_1} \right)^2 - 2u \left( u - \frac{1}{4\chi_1} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. + \frac{1}{2} u \left( 1 - \frac{1}{4\chi_1^2} \right) - 4u^2 \left( u - \frac{1}{2\chi_1} \right) + \frac{u}{\chi_1} \left( u - \frac{1}{2\chi_1} \right) - 2 \left( u - \frac{1}{4\chi_1} \right) \right] + \\ \left. + u^2 \left( u - \frac{1}{2\chi_1} \right)^2 + \left( u - \frac{1}{4\chi_1} \right)^2 - \frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{4\chi_1^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{u}{2} \left( 3u - \frac{2}{\chi_1} \right) + \frac{1}{4} \left( 1 + \frac{1}{2\chi_1^2} \right) \right\}, \quad (15)$$

$$f_6 = e^{u^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 - \Phi(u)] \left[ \left( 3\chi_1^2 - \frac{1}{8} \right) a^2 + \frac{3}{4} - \frac{1}{16\chi_1^2} \left( 1 - \frac{1}{16\chi_1^2} \right) + a^4 \chi_1^4 \right], \quad (16)$$

$$f_7 = \exp \left[ - \left( \frac{1}{20\chi_1\xi} \right)^2 - \left( \frac{0,2}{\chi_1^2} + a \right) \frac{0,1}{\xi} \right] \frac{1}{\chi_1^2 10\xi} \left[ \chi_1^4 a^4 + \left( 3\chi_1^2 - \frac{1}{8} \right) a^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{4} - \frac{1}{16\chi_1^2} \left( 1 - \frac{1}{16\chi_1^2} \right) + \left( 3\chi_1^2 - \frac{1}{8} + 2\chi_1^4 a^2 \right) 2a 10\xi + \right. \\ \left. + 2 \left( 6\chi_1^4 a^2 + 3\chi_1^2 - \frac{1}{8} \right) (10\xi)^2 + 24\chi_1^4 a (10\xi)^3 + 24\chi_1^4 (10\xi)^4 \right]. \quad (17)$$

Здесь  $\Phi(u)$  — функция Лапласа;  $\delta = -1$  при  $\eta > \xi$ ,  $\delta = 0$  при  $\xi = \eta$  и  $\delta = 1$  при  $\xi > \eta$ .

Согласно данным наблюдений, оси тропических циклонов обычно вертикальны. Тогда с точки зрения практического использования уравнений (1) и (2) для вычисления перемещений центров тайфунов представляется целесообразным проинтегрировать эти уравнения по высоте и ввести в рассмотрение некоторый интегральный ведущий поток. При этом верхний предел интегрирования считается соответствующим уровню 300 мб. Этот уровень, как показано в книге [2], является средним климатическим уровнем, до которого прослеживаются тропические циклоны. После интегрирования уравнений (1) и (2) по  $\xi$  от 1,0 до 0,3 производится вычисление функций влияния  $\tilde{P}^*(\chi_1^2)$ ,  $\tilde{P}_1^*(\chi_1^2)$ ,  $\tilde{Q}_\beta^*(\chi_1^2)$ ,  $\tilde{Q}^*(\chi_1^2, \eta)$ ,  $\tilde{R}^*(\chi_1^2, \eta)$ ,  $\tilde{R}_1^*(\chi_1^2, \eta)$ , где символ  $\sim$  означает осреднение по  $\xi$  от 1,0 до 0,3:

$$\tilde{f} = \frac{1}{0,7} \int_{0,3}^{1,0} f d\xi.$$

Результаты определения  $\chi_1^2$  для тайфунов в районе Вьетнама на фактическом материале показывают, что  $\chi_1^2$  изменяется в пределах от 10 до 100. Для этих значений  $\chi_1^2$  (с интервалом 10 единиц) вычислены

функции влияния на электронной машине «Урал-4». Результаты представлены на рис. 1—5. При выполнении численного интегрирования по  $\xi$  в пределах от 0 до 1 с шагом интегрирования, равным 0,1, используется формула квадратур Гаусса с шестью узлами, а при интегрировании по

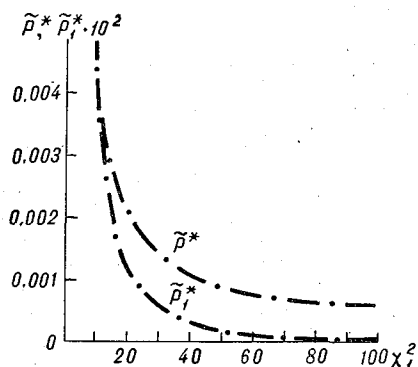


Рис. 1. Функции  $\tilde{P}^*(\chi_1^2)$   
и  $10^2 \cdot \tilde{P}_1^*(\chi_1^2)$

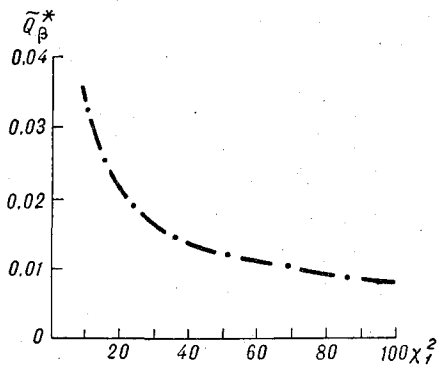


Рис. 2. Функция  $\tilde{Q}_\beta^*(\chi_1^2)$

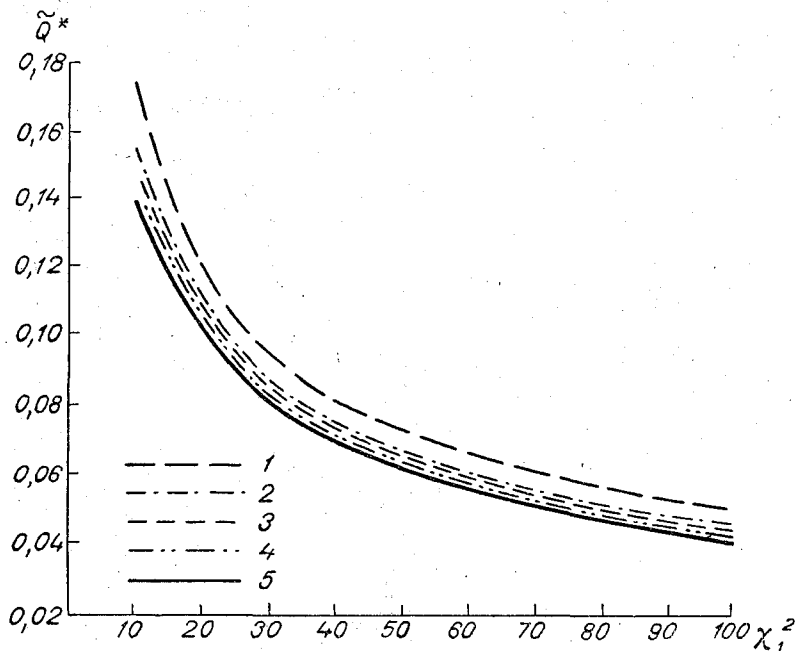


Рис. 3. Функция  $\tilde{Q}^*(\chi_1^2, \eta)$

1)  $\eta=1,0$ ; 2)  $\eta=0,85$ ; 3)  $\eta=0,70$ ; 4)  $\eta=0,50$ ; 5)  $\eta=0,30$ .

$\zeta$  — формула трапеций с узлами  $\zeta$ , равными 1,0, 0,85, 0,7, 0,5 и 0,3. Отношения  $\Psi_0^*(\eta)/\Psi_0^*(\zeta)$  заменяются средним климатическим отношением значений геопотенциалов  $\Phi_0^*(\eta)/\Phi_0^*(\zeta)$ .

Теперь с помощью рассчитанных функций влияния (рис. 1—5) можно предварительно оценить отдельные члены в уравнениях (1), (2) и затем их упростить. Пренебрегая малыми членами по сравнению со скоростями ведущего потока (порядка 10 м/сек.), можем записать:



$$\tilde{C}_{x0} = \tilde{U}_0 + \tilde{U}_{\beta 0}^* + \tilde{U}_{B0}^* + \tilde{U}_{T0}^*, \quad (18)$$

$$\tilde{C}_{y0} = \tilde{V}_0 + \tilde{V}_{\beta 0}^* + \tilde{V}_{B0}^* + \tilde{V}_{T0}^*, \quad (19)$$

$$\tilde{U}_0 = -\tilde{\Psi}_{y0}, \quad \tilde{V}_0 = \tilde{\Psi}_{x0}, \quad (20)$$

где

$$\tilde{U}_{\beta 0}^* = -m'^2 \beta \tilde{Q}_{\beta}^*(\chi_1), \quad \tilde{V}_{\beta 0}^* = m'^2 \frac{\partial l}{\partial x} \tilde{Q}_{\beta}^*(\chi_1), \quad (21)$$

$$\tilde{U}_{B0}^* = -m'^2 \int_0^1 \tilde{\Omega}_{y0}(\eta) \tilde{Q}^*(\chi_1, \eta) d\eta,$$

$$\tilde{V}_{B0}^* = m'^2 \int_0^1 \tilde{\Omega}_{x0}(\eta) \tilde{Q}^*(\chi_1, \eta) d\eta, \quad (22)$$

$$\tilde{U}_{T0}^* = - \int_0^1 \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{U}_0(\eta) \tilde{R}^*(\chi_1, \eta) d\eta,$$

$$\tilde{V}_{T0}^* = - \int_0^1 \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \tilde{V}_0(\eta) \tilde{R}^*(\chi_1, \eta) d\eta. \quad (23)$$

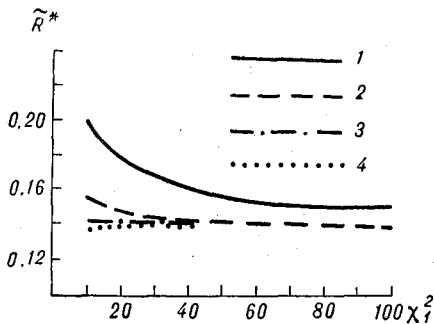


Рис. 4. Функция  $\tilde{R}^*(\chi_1^2, \eta)$   
1)  $\eta=0,85$ ; 2)  $\eta=0,70$ ; 3)  $\eta=0,50$ ;  
4)  $\eta=0,30$ .

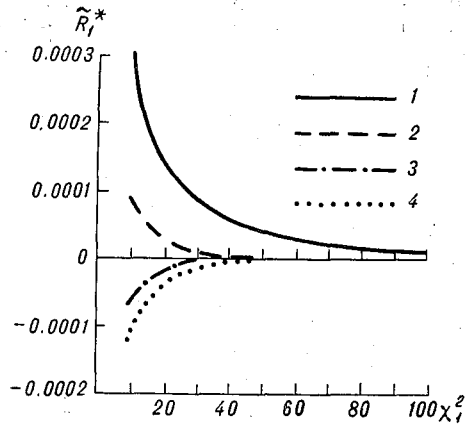


Рис. 5. Функция  $\tilde{R}_1^*(\chi_1^2, \eta)$   
Усл. обозначения см. рис. 4.

Оценка значений различных членов правой части уравнений (18) и (19) приведена в табл. 1 и 2. Схема вычисления этих членов будет изложена в части II. Значение  $m'^2 = km^2$  принимается равным  $2,963 \cdot 10^{12} \text{ м}^2$ , что соответствует  $k=3/4$ . Из табл. 1 и 2 легко видеть, что главным фактором, определяющим перемещения центров тайфунов являются скорости ведущего потока ( $\tilde{U}_0$  и  $\tilde{V}_0$ ). Другие члены правых частей уравнений (18) и (19), как правило, имеют значения некоторой поправки.

II. Поскольку начальными данными для расчетов перемещений тайфунов служат значения геопотенциала, то для получения функций тока полагается, что  $\Psi^*(r)$  выражается через  $\Phi^*(r)$  (геопотенциал

Таблица 1

Значения различных слагаемых скорости перемещения центра тайфуна по оси  $x$ 

Дата (7 час. 00 мин.) <sup>1</sup>	Тайфун	$\chi_1^2$	$\tilde{U}_0$ м/сек.	$\tilde{U}_{\beta 0}^*$ м/сек.	$\tilde{U}_{\beta 0}^*$ м/сек.	$\tilde{U}_{T0}^*$ м/сек.	$\tilde{C}_{x0}$ м/сек.
30 VI 1964 г.	Винни . . .	25,03	-6,91	-1,06	0,41	0,44	-7,12
01 VII	Винни . . .	23,19	-8,23	-1,15	1,30	0,59	-7,49
02 VII	Винни . . .	23,00	-6,64	-0,97	0,90	-0,02	-6,73
18 IX	Тильда . . .	91,20	0,64	-0,51	-1,25	0,50	-0,62
21 IX	Тильда . . .	61,98	-3,39	-0,63	0,54	0,27	-3,21
22 IX	Тильда . . .	60,83	-7,19	-0,60	0,69	0,37	-6,73

Таблица 2

Значения различных слагаемых скорости перемещения центра тайфуна по оси  $y$ 

Дата (7 час. 00 мин.) <sup>1</sup>	Тайфун	$\chi_1^2$	$\tilde{V}_0$ м/сек.	$\tilde{V}_{\beta 0}^*$ м/сек.	$\tilde{V}_{T0}^*$ м/сек.	$\tilde{C}_{y0}$ м/сек.
30 VI 1964 г.	Винни . . .	25,03	1,95	-0,24	0,25	1,96
01 VII	Винни . . .	23,19	2,24	-0,80	-0,24	1,20
02 VII	Винни . . .	23,00	1,85	-0,35	-0,20	1,30
18 IX	Тильда . . .	91,20	-1,54	0,83	-0,77	-1,48
21 IX	Тильда . . .	61,98	-1,66	0,60	0,24	-0,82
22 IX	Тильда . . .	60,83	-1,27	1,01	0,50	0,24

<sup>1</sup> По ханойскому времени.

циклонической циркуляции тайфуна) с помощью уравнения для градиентного ветра:

$$lV_{\theta}^* + \frac{V_{\theta}^{*2}}{r} = \frac{\partial \Phi^*}{\partial r}, \quad (24)$$

$$V_{\theta}^* = \frac{\partial \Psi^*}{\partial r},$$

откуда

$$\Psi^*(r) = - \int_r^{\infty} V_{\theta}^* dr,$$

а  $V_{\theta}^*$  является решением квадратного уравнения (24).

Функция тока  $\bar{\Psi}$  связывается со значением геопотенциала поля ведущего потока  $\bar{\Phi}$  уравнением баланса. Решение последнего относительно  $\bar{\Psi}$ , согласно работе [6], сводится к многократному решению уравнения Пуассона (которое может быть получено при помощи известного релаксационного метода Либмана)

$$\nabla^2 \Psi^{n+1} = -l + [l^2 + 2\nabla^2 \Phi + (\Psi_{xx}^n - \Psi_{yy}^n)^2 + (2\Psi_{xy}^n)^2 - 2(\Psi_{x^2}^n l_x + \beta \Psi_{yy}^n)]^{\frac{1}{2}}. \quad (25)$$

В качестве первого приближения используется соотношение

$$\bar{\Psi}^{(0)} = \frac{k}{l_0} \bar{\Phi}.$$

Здесь  $k$  — эмпирическая константа.  
Граничные условия задаются в виде

$$\bar{\Psi}_s = \frac{k}{l_0} \bar{\Phi}_s$$

на контуре, где  $s$  — касательная к контуру.

После решения уравнения баланса относительно  $\bar{\Psi}$  для изобарических поверхностей 850, 500 и 300 мб можно вычислить скорость перемещения центра тайфуна по выражениям (18) — (23). Для этого на каждой

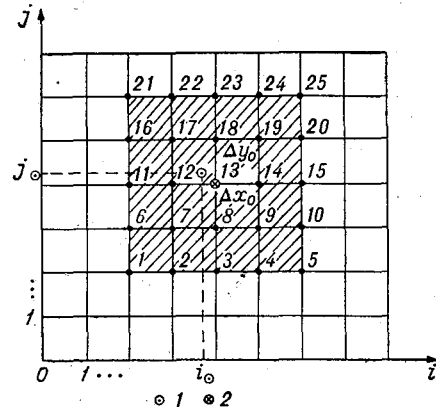


Рис. 6. 25 узлов, окружающих центр тайфуна, по которым определяются коэффициенты полинома разложения  $\bar{\Psi}$ .

1 — центр тайфуна, 2 — ближайшая к центру тайфуна точка.

изобарической поверхности функции тока  $\bar{\Psi}$  в области, близкой к барическому центру тайфуна, представляется в виде полинома

$$\bar{\Psi}(\eta) = \sum_{m+n=0}^{\leq 4} A_{mn}(\eta) x^{*m} y^{*n} \quad (26)$$

Здесь  $x^* = x - x_0$ ,  $y^* = y - y_0$ ;  $x_0$ ,  $y_0$  — координаты центра тайфуна.

Тогда

$$\left. \begin{aligned} \bar{U}_0(\eta) &= -\bar{\Psi}_{y_0}(\eta) = -A_{01}(\eta) \\ \bar{V}_0(\eta) &= \bar{\Psi}_{x_0}(\eta) = A_{10}(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Omega}_{y_0}(\eta) &= \nabla^2 \bar{\Psi}_{y_0} = 2 [A_{21}(\eta) + 3A_{03}(\eta)] \\ \bar{\Omega}_{x_0}(\eta) &= \nabla^2 \bar{\Psi}_{x_0} = 2 [A_{12}(\eta) + 3A_{30}(\eta)] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

15 коэффициентов разложения (26) определяются методом наименьших квадратов по данным значениям  $\bar{\Psi}$  в 25 узлах сетки, указанных на рис. 6. Для определения этих узлов, окружающих центр тайфуна, прежде всего нужно найти точку 13, отмеченную знаком  $\otimes$ , которая является ближайшей точкой относительно центра тайфуна. В программе вычисления это делается следующим образом. Значения координат центра тайфуна приведены к системе  $i$  и  $j$  ( $i = \frac{x}{\Delta x_0}$ ,  $j = \frac{y}{\Delta y_0}$ ;  $\Delta x_0$ ,  $\Delta y_0$  — длина шага сетки по оси  $x$  и по оси  $y$  вблизи центра тайфуна). Затем эти

координаты разделяются на целую и дробную части. Тогда координаты точки 13 находятся по правилам:

$$\begin{aligned} i_{13} &= E(i_{\odot}), \text{ если } \{i_{\odot}\} < \frac{1}{2}, \\ i_{13} &= E(i_{\odot}) + 1, \text{ если } \{i_{\odot}\} \geq \frac{1}{2}, \\ j_{13} &= E(j_{\odot}), \text{ если } \{j_{\odot}\} < \frac{1}{2}, \\ j_{13} &= E(j_{\odot}) + 1, \text{ если } \{j_{\odot}\} \geq \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

где  $E(i_{\odot})$ ,  $\{i_{\odot}\}$  обозначают целую и дробную части значения координаты центра тайфуна по оси  $i$ .

После нахождения координат точки 13 легко определить координаты других точек, входящих в заштрихованный квадрат (рис. 6). Например, точка 1 определяется координатами

$$i_1 = i_{13} - 2, \quad j_1 = j_{13} - 2,$$

а точка 2 — координатами

$$i_2 = i_1 + 1, \quad j_2 = j_1 \text{ и т. д.}$$

Однако, кроме координат  $i$  и  $j$  25 узлов заштрихованного квадрата, нас интересуют также их координаты относительно координат центра тайфуна, т. е. величины:

$$i_k^* = i_k - i_{\odot}, \quad j_k^* = j_k - j_{\odot} \quad (k = 1, 2, \dots, 25).$$

Вернемся к вопросу определения коэффициентов полинома (26). Перепишем этот полином в виде

$$\bar{\Psi}(\eta) = \sum_{m+n=0}^{\leq 4} A'_{mn}(\eta) i^{*m} j^{*n} = f(i^*, j^*, \eta), \quad (29)$$

где

$$A'_{mn}(\eta) = A_{mn}(\eta) (\Delta x_0)^m (\Delta y_0)^n.$$

Составим выражение

$$\sum_{k=1}^{25} [f - \bar{\Psi}_k]^2$$

и потребуем, чтобы оно было минимальным. Тогда получим

$$\sum_{k=1}^{25} [f - \bar{\Psi}_k] \frac{\partial f}{\partial A'_{mn}} = 0. \quad (30)$$

Подставляя  $f$  из (29) в уравнение (30), можно получить три системы линейных алгебраических уравнений 15-го порядка для изобарических поверхностей 850, 500 и 300 мб, которые в матричной записи имеют вид

$$\{L\} \{A'\}_s = \{B\}_s, \quad (31)$$

где

$$\{A'\}_S = \begin{Bmatrix} A'_{00} \\ A'_{10} \\ \cdot \\ \cdot \\ A'_{22} \end{Bmatrix}_S, \quad \{B\} = \begin{Bmatrix} \sum \bar{\varphi}_k \\ \sum \bar{\Psi}_k i_k^* \\ \cdot \\ \cdot \\ \sum \bar{\Psi}_k i_k^{*2} j_k^{*2} \end{Bmatrix}_S.$$

Индекс  $S$  означает ту или иную изобарическую поверхность (850, 500 или 300 мб),  $\{L\}$  — симметричная, квадратная матрица, зависящая от  $i_k^*$  и  $\alpha_k^*$  и не зависящая от  $\bar{\Psi}_k$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} 25; \sum i_k^*; \sum j_k^*; \sum i_k^{*2}; \sum j_k^{*2}; \sum i_k^* j_k^*; \dots; \sum i_k^{*2} j_k^{*2} \\ \sum i_k^*; \sum i_k^{*2}; \sum i_k^* j_k^*; \sum i_k^{*3}; \sum i_k^* j_k^{*2}; \sum i_k^{*2} j_k^*; \dots; \sum i_k^{*3} j_k^{*2} \\ \dots \\ \sum i_k^{*2} j_k^{*2}; \sum i_k^{*3} j_k^{*2}; \sum i_k^{*2} j_k^{*3}; \sum i_k^{*4} j_k^{*2}; \sum i_k^{*3} j_k^*; \sum i_k^{*3} j_k^{*3}; \dots; \sum i_k^{*4} j_k^{*4} \end{array} \right\}$$

Здесь  $\Sigma = \sum_{k=1}^{25}$ .

Для решения систем линейных уравнений (31) используется метод главных элементов, который нетрудно реализовать на электронной вычислительной машине.

После определения  $A'_{mn}$  значения  $A_{mn}$  находятся по формуле

$$A_{mn} = A'_{mn} \Delta x_0^{-m} \Delta y_0^{-n}$$

и из нее вычисляются значения  $\bar{U}_0, \bar{V}_0, \bar{\Omega}_{x0}, \bar{\Omega}_{y0}$  согласно выражениям (27) и (28). Теперь для вычисления слагаемых правой части уравнений (18) и (19) необходимо заменить интегралы по  $\eta$  в выражениях (22), (23) конечными суммами по формуле трапеции.

По найденному значению скорости перемещения центра тайфуна в момент времени  $t$  можно вычислить его новые координаты через шаг времени  $\Delta t$  (равный одному часу)

$$\left. \begin{array}{l} i_{\circ}(t + \Delta t) = i_{\circ}(t) + \frac{\bar{C}_{x0}(t)}{\Delta x_0} \Delta t \\ j_{\circ}(t + \Delta t) = j_{\circ}(t) + \frac{\bar{C}_{y0}(t)}{\Delta y_0} \Delta t \end{array} \right\} \quad (32)$$

Для определения скорости перемещения центра тайфуна в следующий момент времени необходимо выполнить прогноз полей функции тока на изобарических поверхностях 850, 500 и 300 мб. Численная схема прогноза полей ведущего потока  $\bar{\Psi}$  аналогична схеме, разработанной

П. К. Душкиным и Е. Г. Ломоносовым [1] на основе решения относительно тенденции функции тока  $\bar{\Psi}$  в виде

$$\bar{\Psi}_t^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_1} [m^2 A_R(r_1, \theta, \eta) M_1'(r_1, \eta, \zeta) + A_T(r_1, \theta, \eta) M_2'(r_1, \eta, \zeta)] \times \\ \times r_1 dr_1 d\theta d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \bar{\Psi}_t^{(0)}(R_1, \theta, \eta) M_3(R_1, \zeta, \eta) d\theta d\eta,$$

где

$$A_R = (\bar{\Psi}, \nabla^2 \bar{\Psi}) + \beta \bar{\Psi}_x,$$

$$A_T = \left( \bar{\Psi}, \eta \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \eta} \right),$$

$M_1'$ ,  $M_2'$ ,  $M_3$  — функции влияния, введенные в работе [3].

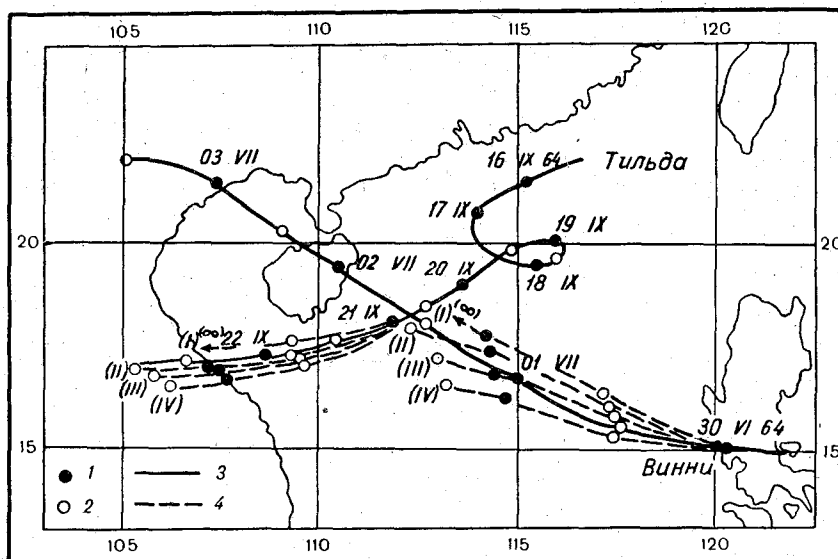


Рис. 7. Результаты прогнозов с различными значениями параметра  $k$ .  
1 — положение центра тайфуна за 07 час. 00 мин., 2 — положение центра тайфуна за 19 час. 00 мин., 3 — фактическое перемещение, 4 — прогнозируемое перемещение, (I) — прогноз по схеме  $k=1$ ; (II) —  $k=3/4$ ; (III) —  $k=2/3$ ; (IV) —  $k=1/2$ .

III. Опытные прогнозы выполнялись на электронной вычислительной машине «Урал-4» для сетки  $12 \times 16$  с шагами, равными  $3^\circ$  по широте и долготу. Шаг времени был равен 1 часу. Расчет 36-часового прогноза занимает около 1 часа: 12 мин. для решения уравнения баланса и 48 мин. для прогноза. Результаты представлены на рис. 7, 8 и 9. На рис. 7 показаны результаты прогнозов с различными значениями параметра  $k$  для двух случаев: 21 IX 1964 г. (тайфун Тильда) и 30 VI 1964 г. (тайфун Винни). На этом рисунке цифра (I) означает, что прогнозы реализовались при  $k=1$ ; цифра (II) —  $k=3/4$ , (III) —  $k=2/3$ , и, наконец, (IV) —  $k=1/2$ . Прогнозы выполнялись при прочих неизменных условиях, изменялся только параметр  $k$ . Знак  $\infty$  над стрелкой на рис. 7 означает, что в данном случае скорости перемещения центра тайфуна не были рассчитаны в связи с вычислительной неустойчивостью в прогнозе полей веду-

шего потока. Из этого рисунка видно, что при  $k=1$  обнаруживается вычислительная неустойчивость, скорости перемещения центра тайфуна при этом возрастают до бесконечно большой величины. При уменьшении  $k$  до  $3/4, 2/3, 1/2$  отмечается систематическое убывание скорости перемещения центра тайфуна. При уменьшении  $k$  от  $3/4$  до  $1/2$  также отмечается и систематическое смещение направления перемещения к югу. Результаты двух экспериментов показывают, что прогнозы при  $k=3/4$  являются наилучшими. Поэтому в дальнейшем при прогнозе перемещения центров тайфунов мы принимаем  $k=3/4$ .

На рис. 8 и 9 представлены два 36-часовых прогноза перемещения центра тайфуна Тильда и два 36-часовых прогноза перемещения центра тайфуна Винни. На этих рисунках буква  $A$  означает, что прогноз осуществляется по схеме, согласно которой скорости перемещения центра тайфуна Винни. На этих рисунках буква  $B$  означает, что прогноз них членов, т. е. они выражаются только через скорости ведущего потока  $\tilde{U}_0, \tilde{V}_0$  и скорость, обусловленную изменением параметра Кориолиса с широтой  $\tilde{U}_{\rho 0}^*$ . Опущенные малые члены учитываются в прогнозе, обозначенном буквой  $B$ . Мы разделяем опытные прогнозы на группы  $A$  и  $B$ , потому что скорость, обусловленная изменением параметра Кориолиса с широтой, как следует из равенства (21), не зависит от распределения потоков над центром тайфуна. Она зависит только от масштаба возмущения барического поля тайфуна  $\chi_1^2$ , от значений  $m'^2$  и  $\beta$ . Эта компонента скорости всегда способствует движению центра тайфуна к западу и имеет порядок 1 м/сек., или 90 км/сутки (см. табл. 1). Другой характер имеют скорости  $\tilde{U}_{\nu 0}^*, \tilde{V}_{\nu 0}^*, \tilde{U}_{T 0}^*, \tilde{V}_{T 0}^*$ . Они зависят от распределения потоков над центром тайфуна. Из рис. 8 и 9 легко заметить, что прогнозы по схеме  $A$  обычно дают завышенные значения скоростей перемещений центров тайфунов по сравнению с фактическими, в то время как прогнозы по схеме  $B$  — заниженные. Направления прогностических перемещений по схеме  $B$  отклоняются от направлений фактических перемещений больше, чем по схеме  $A$ .

Основные характеристики оправдываемости 36-часовых прогнозов для 6 случаев по схеме  $A$  (включены два случая на рис. 7 со значением параметра  $k=3/4$ ) и для 4 случаев по схеме  $B$  (рис. 8, 9) приведены в табл. 3, где приняты следующие обозначения:  $\vec{S}_\phi, \vec{S}_{\text{пр}}$  — векторы фактического и предсказанного перемещений центра тайфуна за 36 часов, а  $S_\phi, S_{\text{пр}}$  — их модули,

$$\Delta S = S_{\text{пр}} - S_\phi, \quad \Delta R = \left| \vec{S}_{\text{пр}} - \vec{S}_\phi \right|,$$

$\Delta\theta$  — угол между  $\vec{S}_{\text{пр}}$  и  $\vec{S}_\phi$ , причем если  $\Delta\theta > 0$ , то  $\vec{S}_{\text{пр}}$  отклоняется от  $\vec{S}_\phi$  в левую сторону, а если  $\Delta\theta < 0$ , то в правую.

Исходный срок прогноза — 7 час. 00 мин. по ханойскому времени.

Тире означают, что прогнозы за данный срок по схеме  $B$  не выполнялись из-за отсутствия машинного времени. Исключение представляет случай 18 IX 1964 г., когда прогнозы рассчитывались, но из-за недостаточного анализа начальных данных (случай петли) направления вычисленных перемещений в начальный момент времени уже отклонялись от фактических почти на  $180^\circ$ . Поэтому характеристики прогноза за этот срок при оценке  $\Delta\theta$  не использовались.

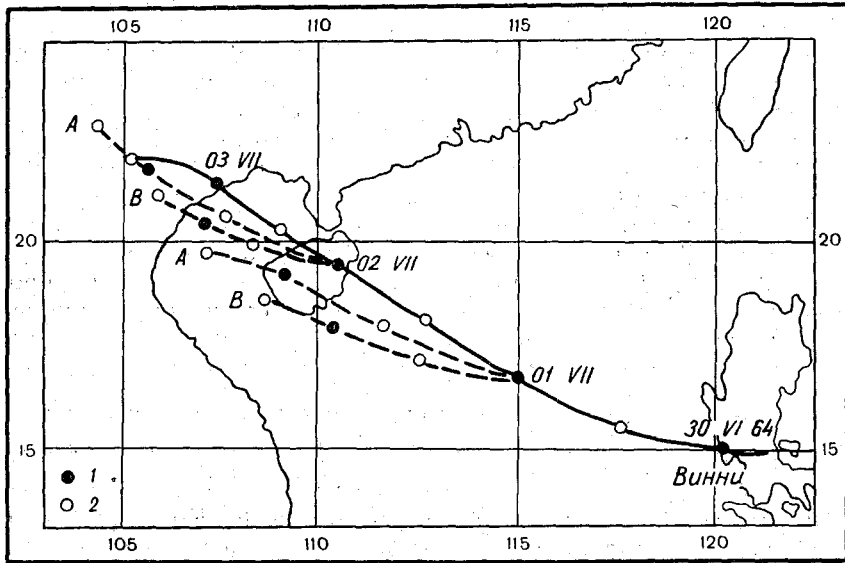


Рис. 8. Прогнозы перемещения центра тайфуна Винни.  
 1 — положение центра тайфуна за 07 час. 00 мин., 2 — положение центра тайфуна за 19 час. 00 мин., А — прогноз без учета  $\tilde{U}_{B0}^*$ ,  $\tilde{V}_{B0}^*$ ,  $\tilde{U}_{T0}^*$ ,  $\tilde{V}_{T0}^*$ , В — прогноз с учетом  $\tilde{U}_{B0}^*$ ,  $\tilde{V}_{B0}^*$ ,  $\tilde{U}_{T0}^*$ ,  $\tilde{V}_{T0}^*$ .

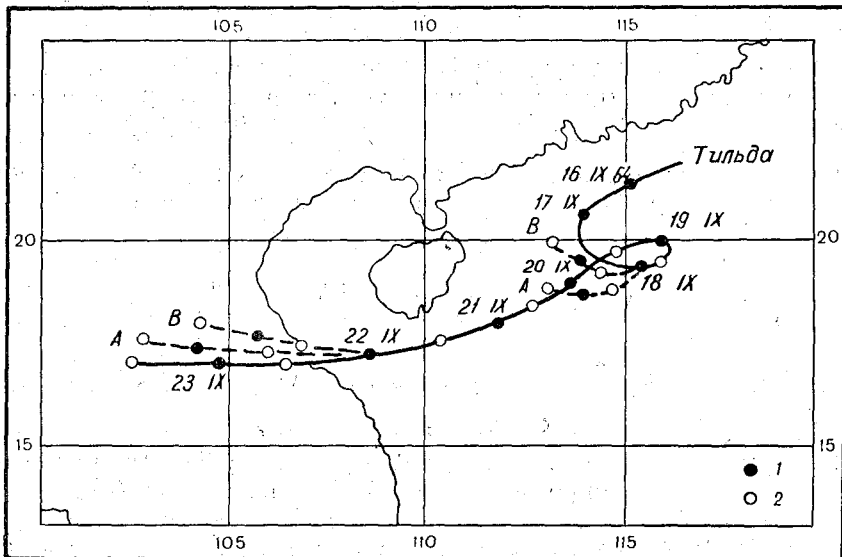


Рис. 9. Прогнозы перемещения центра тайфуна Тильда.  
 Усл. обозначения см. рис. 8.



Оправдываемость 36-часовых прогнозов перемещения центров тайфунов по схемам А и В

Исходная дата прогноза	$S_{\Phi}$ км	$S_{\text{пр}}$ км		$\Delta S$ км		$\Delta R$ км		$\Delta \vartheta^\circ$	
		по схеме							
		А	В	А	В	А	В	А	В
30 VI 1964 г.	880	912	—	32	—	40	—	3	—
01 VII	742	901	692	159	—50	210	200	10	15
02 VII	614	728	489	114	—125	130	140	—3	7
18 IX	80	260	250	180	170	210	180	—	—
21 IX	572	594	—	22	—	120	—	1	—
22 IX	636	615	583	—21	—53	60	190	—5	—11
Среднее по модулю	587	668	503	88	99	128	178	4,4	11

Средние характеристики  $|\overline{\Delta S}|$ ,  $\overline{\Delta R}$ ,  $|\overline{\Delta \vartheta}|$  (табл. 3) показывают, что прогнозы по схеме В не приводят к лучшим результатам по сравнению со схемой А. Это можно объяснить тем, что относительная погрешность вычисления двух последних членов правой части уравнений (18) и (19) велика из-за неопределенности начальных данных в области тайфуна и малых значений самих членов. Эта погрешность может накапливаться в процессе прогноза и сказаться на окончательном результате.

Приведенные характеристики оправдываемости позволяют считать, что результаты прогнозов перемещений центров тайфунов за 36 час. являются сравнимыми с результатами, полученными другими авторами, в частности в США [8] и в Японии [7], при наличии более точных начальных данных и использовании самых современных технических средств.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бельская Н. Н., Душкин П. К., Ломоносов Е. Г. Численный метод прогноза высотного барического поля. Материалы совещания координационной комиссии по численным методам прогноза. Гидрометеиздат, Л., 1961.
2. Риль Г. Тропическая метеорология. ИЛ, М., 1963.
3. Ломоносов Е. Г. К использованию функций влияния при гидродинамическом прогнозе барического поля. Материалы совещания координационной комиссии по численным методам прогноза. Гидрометеиздат, Л., 1961.
4. Ситников И. Г. Об анализе тропических циклонов и прогнозе их перемещения численными методами. Метеорология и гидрология, № 10, 1964.
5. Чинь Ван Тхы. Об одном варианте предвычисления перемещений тайфунов по трехмерной модели. Метеорология и гидрология, № 7, 1965.
6. Miyakoda K. On a method of solving the balance equation. J. Met. Soc. Japan, 34, 364—367, 1956.
7. Terauchi E. A treatment of the problems on the movement of the typhoon by making use of multi-parameter model. J. Met. Soc. Japan, Ser., II, 40, 202—212, 1962.
8. Vanderman L. W. Forecasting tropical cyclone paths by NWP methods. Proc. of the Interregional Seminar on Tropical Cyclones in Tokyo, 18—31 Jan. 1962, 233—235, Tokyo, 1963.

### СУТОЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДАВЛЕНИЯ ТЕРМИЧЕСКОГО И ГРАВИТАЦИОННОГО ПРОИСХОЖДЕНИЯ

В статье [1] приводится решение задачи о вынужденных периодических колебаниях давления. Эти колебания возбуждаются приливообразующим потенциалом солнца и термическим действием потоков тепла, имеющих хорошо выраженный суточный ход.

Учет приливообразующего потенциала солнца не представляет каких-либо существенных трудностей для численного решения задачи. Значительно более трудной проблемой является учет термических факторов возбуждения, имеющих место в любом пункте атмосферы. Для удовлетворительного решения этой задачи нужно знать законы распределения потоков тепла в атмосфере. Но поскольку в настоящее время балансовая климатология еще не располагает достаточным количеством данных по этому вопросу, то приходится обращаться к идеализированным атмосферным моделям.

Так, например, Сен и Уайт [2] при решении задачи о суточных колебаниях давления применяют упрощенную атмосферную модель. Они считают, что нагревание имеет место только у основания атмосферы, откуда оно распространяется вверх за счет вихревой проводимости.

Авторы приходят к выводу, что эта аппроксимационная модель является недостаточной, чтобы удовлетворительно описать наблюдаемые изменения давления.

Уайт [3] рассматривает более общий случай, когда нагревание может иметь место в любом слое атмосферы. Для этой цели он вводит функцию теплового источника произвольного вида.

Наша задача существенно облегчается тем обстоятельством, что в правые части полученных уравнений входят не потоки тепла, а интегралы потоков тепла. Поэтому вместо того чтобы рассматривать термические возмущения в отдельных пунктах атмосферы, нам достаточно знать тепловое возбуждение некоторого слоя атмосферы.

Интеграл, входящий в наши уравнения, имеет следующий вид:

$$\int_{\xi}^1 \frac{\partial Q}{\partial \xi} d\xi, \quad (1)$$

где  $Q(t, \theta, \lambda, \xi)$  — поток тепла,  $t$  — время,  $\theta, \lambda$  — географические координаты точки,  $\xi = \frac{p}{p_0}$  — безразмерное давление,  $p_1$  и  $p_0$  — давление соответственно на высоте  $z$  и на уровне моря.

Будем рассматривать только те тепловые потоки, которые имеют хорошо выраженный суточный ход. К таким потокам можно отнести турбулентный поток тепла  $P(t, \theta, \lambda, \zeta)$  и поток коротковолновой солнечной радиации  $S(t, \theta, \lambda, \zeta)$ . Следовательно, будем считать  $Q = P - S$ .

Перепишем интеграл (1) следующим образом:

$$\int_{\zeta}^1 \frac{\partial Q}{\partial \zeta} d\zeta = \int_{\zeta}^1 \frac{\partial (P - S)}{\partial \zeta} d\zeta = \int_{\zeta}^1 \frac{\partial P}{\partial \zeta} d\zeta + \int_1^{\zeta} \frac{\partial S}{\partial \zeta} d\zeta. \quad (2)$$

Интеграл

$$\int_{\zeta}^1 \frac{\partial P}{\partial \zeta} d\zeta = P(t, \theta, \lambda) \Big|_{\zeta=1} - P(t, \theta, \lambda, \zeta) \quad (3)$$

выражает турбулентный приток тепла к слою атмосферы, нижняя граница которого находится на уровне земли, а верхняя — на уровне  $\zeta$ . Для всех  $\zeta < 0,8$  можно считать, что

$$\int_{\zeta}^1 \frac{\partial P}{\partial \zeta} d\zeta \approx P(t, \theta, \lambda) \Big|_{\zeta=1},$$

так как на высоте 1,5—2,0 км турбулентный поток для средних условий составляет примерно  $1/10$  от своего значения на поверхности земли.

Второй интеграл

$$\int_{\zeta}^1 \frac{\partial S}{\partial \zeta} d\zeta = S(t, \theta, \lambda, \zeta) - S(t, \theta, \lambda) \Big|_{\zeta=1} \quad (4)$$

означает приток коротковолновой солнечной радиации к тому же слою атмосферы.

Известно, что основными поглотителями солнечной радиации в атмосфере являются водяной пар и пыль. Поглощение прямой солнечной радиации водяным паром в некотором слое атмосферы может быть рассчитано по формуле Меллера [4].

$$\Delta = 0,172 \left[ \left( \frac{W^1}{\sin h} \right)^{0,303} - \left( \frac{W^2}{\sin h} \right)^{0,303} \right] \sin h, \quad (5)$$

где  $W^1$  — содержание водяного пара во всей атмосфере выше нижней границы слоя,  $W^2$  — содержание водяного пара выше верхней границы слоя,  $h$  — высота солнца.

В формуле Меллера связь между поглощенной радиацией и временем выражается через высоту солнца.

Для того чтобы учесть поглощение солнечной радиации пылью, воспользуемся результатами, полученными В. Г. Кастровым [5]. Кастров выполнил расчеты радиационного нагревания воздуха, обусловленного поглощением солнечной радиации водяным паром, сравнил их с наблюдаемыми величинами радиационного нагревания и, осреднив данные наблюдений за 3 года, получил

$$\left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{набл}} / \left( \frac{\partial T}{\partial t} \right)_{\text{H}_2\text{O}} = 2,1. \quad (6)$$

Таким образом, наличие пыли в атмосфере увеличивает радиационное нагревание примерно в два раза.

Содержание пыли в атмосфере зависит от очень многих факторов и не поддается точному учету. Тем не менее, можно отметить наиболее существенные физические закономерности в распределении пыли. Например, существует прямая связь между количеством пыли в нижних слоях атмосферы над материками и интенсивностью турбулентного обмена. Турбулентность наиболее развита в дневные часы и в этот же период, примерно с 11 до 18 час., отмечается наибольшее содержание пыли в нижних слоях атмосферы. Выше 5 км заметных суточных вариаций в концентрации пыли не наблюдается. В атмосфере над океанами пыль материкового происхождения практически отсутствует.

Учитывая все изложенное выше, мы произвели расчеты поглощенной солнечной радиации по следующей схеме.

1. По формуле Меллера вычислялась солнечная радиация, непосредственно поглощенная водяным паром. Расчеты производились через каждые 2 часа, начиная с момента восхода солнца.

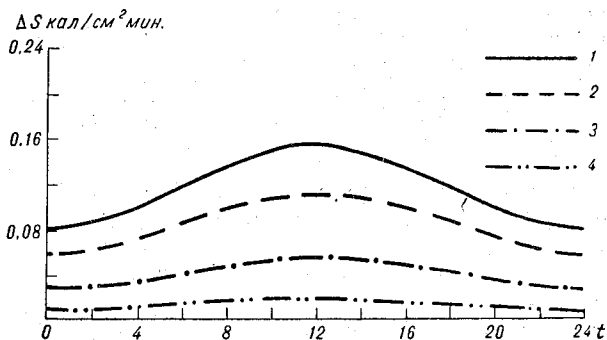


Рис. 1. Суточный ход поглощенной коротковолновой солнечной радиации над Северным Ледовитым океаном ( $\varphi=80^\circ$ ,  $\lambda=250^\circ$ ).

1 — во всем столбе атмосферы; 2 — в столбе атмосферы 1000 — 170 мб; 3 — в столбе атмосферы 1000 — 500 мб; 4 — в столбе атмосферы 1000 — 830 мб.

2. Для слоев атмосферы, расположенных над материками не выше 5 км, количество поглощенной радиации, приходящееся на период 11—18 час., умножалось на коэффициент, равный 2. Введя этот коэффициент, мы получили возможность учесть хотя бы в первом приближении поглощение солнечной радиации атмосферной пылью. Количество поглощенной радиации, приходящееся на более ранние или более поздние часы, принималось совпадающим с результатами вычислений по формуле Меллера за те же часы.

3. Для слоев атмосферы, расположенных над материками выше 5 км, где практически еще имеется водяной пар, количество поглощенной радиации принималось совпадающим с результатами вычислений по формуле Меллера для всех сроков между моментами восхода и захода солнца.

4. В слоях атмосферы, расположенных над океанами на любой высоте, солнечная радиация поглощается главным образом водяным паром. Поэтому с достаточной степенью точности можно считать, что суточный ход поглощенной радиации над океанами полностью совпадает с суточным ходом, полученным по формуле Меллера.

5. В слоях атмосферы, расположенных на высоте 20—25 км, солнечная радиация поглощается исключительно озоном. Мы приняли, согласно исследованиям Гущина [6], что в указанных слоях количество поглощен-

ной радиации составляет 4% всей солнечной энергии, поступающей на верхнюю границу атмосферы.

6. Мы не учитывали поглощение радиации облаками. В первом приближении этой величиной можно пренебречь, поскольку она не превышает 9—10% радиации, поглощенной водяным паром и пылью.

Согласно этой схеме, нами были произведены расчеты суточного хода поглощенной радиации для следующих слоев атмосферы: а) для нижнего слоя атмосферы, расположенного между изобарическими поверхностями 1000 и 830 мб; б) для слоя, расположенного между изобарическими поверхностями 1000 и 500 мб; в) для слоя, расположенного между поверхностями 1000 и 170 мб; г) для всего столба атмосферы.

Расчеты произведены для июня и охватывают значительную территорию земного шара от 80° с. ш. до 30° ю. ш.; шаг по кругу широты и кругу меридиана составляет 10°.

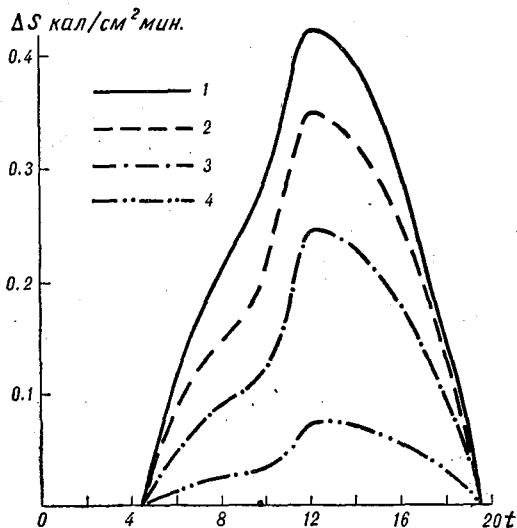


Рис. 3. Суточный ход поглощенной коротковолновой солнечной радиации над Среднеазиатской пустыней ( $\varphi=40^\circ$ ,  $\lambda=60^\circ$ ).

1 — во всем столбе атмосферы; 2 — в столбе атмосферы 1000—170 мб; 3 — в столбе атмосферы 1000—500 мб; 4 — в столбе атмосферы 1000—830 мб.

Притоки тепла, рассчитанные указанным выше способом, были использованы для численного решения задачи о суточных колебаниях давления.

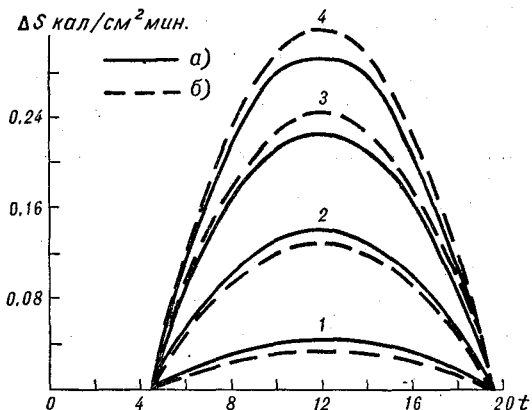


Рис. 2. Суточный ход поглощенной коротковолновой солнечной радиации.

а — над Атлантическим океаном ( $\varphi=40^\circ$ ,  $\lambda=330^\circ$ ); б — над Тихим океаном ( $\varphi=40^\circ$ ,  $\lambda=153^\circ$ ). 1—4 — см. усл. обозначения рис. 1.

На рис. 1, 2 и 3 приводятся кривые суточного хода поглощенной радиации над океанами и материками. Как видно из приведенных рисунков, кривые суточного хода поглощенной радиации над океанами имеют более правильный ход, чем над материками. Величины поглощенной радиации для фиксированной толщины слоя возрастают по направлению к экватору. Например, на 80° с. ш. количество поглощенной радиации в 12 час. в слое 1000—830 мб составляет 0,180 кал/см<sup>2</sup> мин. В тот же момент времени на 40° с. ш. поглощенная радиация равна 0,400 кал/см<sup>2</sup> мин. С другой стороны, среднесуточные значения поглощенной радиации будут возрастать с широтой, начиная примерно с 60° с. ш., что объясняется увеличением продолжительности дня по направлению к полюсу.

Мы получили отдельно термическую и гравитационную компоненту полусуточной волны давления. В табл. 1 приводятся амплитуды и фазы полусуточных колебаний давления термического и гравитационного происхождения.

Таблица 1

Амплитуды и фазы полусуточной волны давления у поверхности земли

φ° с. ш.	Термическая компонента полусуточной волны давления						Гравитационная компонента	
	A <sub>T</sub>	α <sub>T</sub>	A <sub>д</sub>	α <sub>д</sub>	A	α	A <sub>Г</sub>	α <sub>Г</sub>
1	2		3		4		5	
0	0,246	98°24'	2,081	168°41'	2,175	162°35'	0,676	270
10	0,229	98 45	1,942	168 48	2,032	162 43	0,630	270
20	0,185	99 54	1,568	169 09	1,643	163 07	0,505	270
30	0,126	102 12	1,074	169 55	1,127	163 59	0,340	270
40	0,070	109 38	0,592	171 35	0,624	165 52	0,181	270
50	0,028	121 49	0,232	176 06	0,245	170 49	0,063	270

Во второй графе табл. 1 помещены амплитуды и фазы полусуточной волны давления, вызванной действием турбулентного притока тепла. В третьей графе приводятся амплитуды и фазы полусуточного колебания давления, обусловленного лучистым притоком тепла, в четвертой графе — амплитуды и фазы результирующего колебания давления термического происхождения. И, наконец, в пятой графе записаны амплитуды и фазы гравитационной полусуточной волны давления.

Из табл. 1 следует:

1. Амплитуды всех рассматриваемых колебаний быстро убывают от экватора к полюсу. Например, на 50° с. ш. амплитуда составляет приблизительно  $\frac{1}{10}$  от соответствующего значения на экваторе.

2. Начальная фаза полусуточной волны давления термического происхождения возрастает с широтой. Для суммарной волны она заключена в пределах от 162 до 171°.

3. Начальная фаза гравитационной волны давления не зависит от широты и повсюду равна 270°. Для этой волны максимум наступает через 6 час. после кульминации солнца, что подтверждается теоретическими [7] и экспериментальными [8] данными.

4. Колебание давления, возбуждаемое действием лучистого притока тепла, является доминирующим. Амплитуда этой волны в 9—10 раз больше амплитуды волны, обусловленной турбулентным притоком тепла, и в 3—4 раза больше соответствующей амплитуды гравитационной волны давления.

Как показывают результаты наблюдений, полусуточная волна давления имеет в тропиках амплитуду порядка 1—2 мб, которая быстро убывает к северу, и начальную фазу 137—175° в среднем за год между 0 и 50° с. ш. (рис. 4).

Таким образом, для полусуточной волны давления нами получен требуемый порядок амплитуды и начальной фазы. Эти величины в дальнейшем могут быть уточнены путем более строгого учета притоков тепла, имеющих место в атмосфере.

В табл. 2 приводятся значения амплитуды и фазы полусуточной волны давления и геопотенциала в зависимости от высоты. Во второй и пятой

графах таблицы помещены амплитуды колебаний геопотенциала, которые возбуждаются тепловым и гравитационным действиями солнца, в третьей и шестой графах — амплитуды волн давления теплового и гравитационного происхождения.

Как видно из табл. 2, амплитуды очень медленно меняются с высотой. Фазы остаются почти постоянными примерно до высоты 20 км. Выше этого уровня, по-видимому, проходит узловая плоскость, на которой колебания обращаются в нуль. Выше этой плоскости колебания переходят

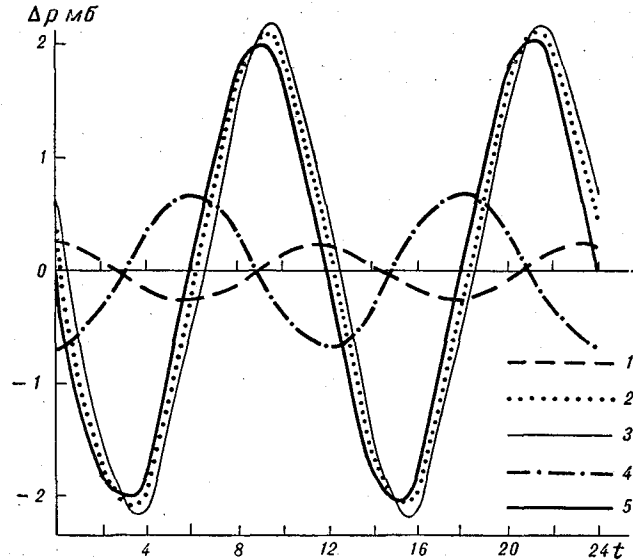


Рис. 4. Полусуточные волны давления.

1 — волна, возбужденная турбулентным притоком тепла; 2 — волна, вызванная лучистым притоком тепла; 3 — суммарная волна термического происхождения; 4 — волна гравитационного происхождения; 5 — результирующая волна.

в обратные. Эти результаты находятся в хорошем соответствии с теоретическими и экспериментальными результатами Уилкса [9] и Гаурвица [10].

Таблица 2

Амплитуды и фазы полусуточной волны давления на различных уровнях атмосферы ( $\varphi=0^\circ$ )

Уровень (мб)	Полусуточная волна термического происхождения			Гравитационная волна		
	$A$ м <sup>2</sup> /сек. <sup>2</sup>	$A$ мб	$\alpha$	$A$ м <sup>2</sup> /сек. <sup>2</sup>	$A$ мб	$\alpha^\circ$
1	2	3	4	5	6	7
830	177	1,773	162°25'	55	0,554	270
500	186	1,301	162 34	57	0,384	270
170	208	0,521	163 15	62	0,156	270
0	132	—	340 50	28	—	90

## ЛИТЕРАТУРА

1. Масалова С. П. Решение пространственной задачи о суточных колебаниях давления. Труды ГГО, вып. 114, 1960.
2. Sen and White M. J. Geophys. Res., vol. 60, 483, 1955.
3. White M. J. Geophys. Res., vol. 61, 3, 1956.
4. Mügge and Möller. Zeitschrift für Geophys., vol. 8, 1932.
5. Кастров В. Г. Измерение поглощения солнечной радиации в свободной атмосфере до 3—5 км. Труды ЦАО, вып. 8, 1952.
6. Гущин Г. П. Исследование атмосферного озона. Гидрометеониздат, Л., 1963.
7. Hough. Phil. Trans. Roy. Soc., A 189, 1897.
8. Зубов Н. Н. Динамическая океанология. Гидрометеониздат, 1947.
9. Wilkes M. V. Oscillations of the earth's atmosphere. Cambr. Univ. London and New York, 1949.
10. Haurwitz B. Bull. Am. Met. Soc., 28, 1947.



## РЕШЕНИЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА СФЕРЕ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Наиболее важной для приложений из основных групп механики является десятипараметрическая группа Галилея—Ньютона [1]. Одной из подгрупп данной группы является трехпараметрическая подгруппа поворотов пространства, которая носит название группы вращений.

Три закона движения Ньютона инвариантны относительно преобразований группы вращений. Если уравнения задачи инвариантны относительно группы  $G$ , то инвариантны относительно группы  $G$  и их решения. Это утверждение основывается на следующей гипотезе: «симметрия воздействия обуславливает симметрию эффекта» [1].

Выпишем уравнения динамики вязкой жидкости:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla) \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{V}, \quad (1)$$

$$\text{div } \vec{V} = 0. \quad (2)$$

Здесь  $\vec{V}$  — вектор скорости,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости.

Ввиду нелинейности уравнения Навье—Стокса нельзя свести задачу к поиску собственных функций. В уравнении Навье—Стокса существует нелинейность вида  $(\vec{V}, \nabla) \vec{V}$ . При вращении  $g$  величина  $\vec{V}$  переходит в величину  $\vec{V}' = T(g) \vec{V}$ , где  $T(g)$  — представление группы вращений. Подставив это в нелинейный член, получим

$$(T(g) \vec{V}, \nabla) T(g) \vec{V}.$$

Поскольку оператор  $\nabla \vec{V} = \text{div } \vec{V}$  инвариантен относительно вращений, то  $\nabla T(g) \vec{V} = T(g) \nabla \vec{V}$ . Здесь использовано свойство перестановочности инвариантного над группой  $G$  оператора с представлением группы  $G$ .

Следовательно, в нелинейных членах уравнения Навье—Стокса появляется тензорное произведение представлений. Если  $T(g)_1$  и  $T(g)_2$  неприводимые представления группы вращений, то их тензорное произведение, как правило, приводимо. Но такое приводимое представление для группы вращений может быть разложено на неприводимые. Пусть

$T(g)_1$  — представление веса  $l_1$ , а  $T(g)_2$  — представление веса  $l_2$ . Тогда тензорное произведение  $T(g)_1 \times T(g)_2$  разлагается на неприводимые представления с весами  $l_1 + l_2$ ;  $l_1 + l_2 - 1$ ; ...;  $|l_2 - l_1|$ ; т. е.

$$T(g)_1 \times T(g)_2 = \sum_{\nu=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} T(g)_\nu.$$

Известно, что функция  $f(u)$  на группе вращений может быть разложена в ряд по элементам матрицы

$$T(g)_l = \|T_{mn}^l(u)\|,$$

где  $l$  — вес представления  $T(g)$ ,  $m$  и  $n$  — номера строк и столбцов соответственно. Тогда вектор  $\vec{V}(u, r, t)$  может быть представлен в виде следующего ряда:

$$\vec{V} = \sum_l f_l(r, t) T(g)_l,$$

где  $r$  — вертикальная координата,  $t$  — время.

$$\begin{aligned} (\vec{V}, \nabla) \vec{V} &= \left( \sum_{l_1} f_{l_1}(r, t) T(g)_{l_1}, \nabla \right) \sum_{l_2} f_{l_2}(r, t) T(g)_{l_2} = \\ &= \sum_{l_1} \sum_{l_2} f_{l_1}(r, t) \nabla f_{l_2}(r, t) T(g)_{l_1} \times T(g)_{l_2} = \\ &= \sum_{l_1} \sum_{l_2} f_{l_1}(r, t) \nabla f_{l_2}(r, t) \sum_{\nu=|l_2-l_1|}^{l_1+l_2} T(g)_\nu. \end{aligned}$$

Таким образом, члены  $(\vec{V}, \nabla) \vec{V}$  тождественно преобразовали ряд по  $T(g)_l$  снова в ряде по  $T(g)_l$ , т. е. оператор  $(\vec{V}, \nabla) \vec{V}$  не изменяет ряд по  $T(g)_l$  при условии, что суммирование по  $l$  в ряде ведется до бесконечности. Если взято конечное число членов ряда, то оператор  $(\vec{V}, \nabla) \vec{V}$  переведет их в тот же ряд, но с большим числом членов. Чтобы компенсировать указанные члены в уравнении Навье—Стокса,  $\rho$  ищем тоже в виде ряда по  $T(g)_l$ , но суммирование здесь надо вести до максимального  $l$ , которое появляется в тензорном произведении.

Изложенный прием позволяет решать уравнения динамики вязкой жидкости методом разделения переменных.

Уравнения динамики вязкой жидкости в сферической системе координат могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{A} \|b_{ij}\| + \vec{C} = \frac{1}{\rho} \vec{D} + \nu L \vec{A} + \nu \vec{M}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{2v_r}{r} + b_{2,2} + b_{3,3} = 0, \quad (4)$$

где

$$\vec{A} = (v_r, V, U), \quad \vec{C} = \left( \frac{UV}{r}, 0, 0 \right),$$

$$\vec{D} = \left( -\frac{\partial p}{\partial r}; \frac{i}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi}; \frac{i}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \right),$$

$$\vec{M} = \left( -\frac{2}{r^2} v_r - \frac{2}{r} b_{2,2} - \frac{2}{r} b_{3,3}; \frac{2i \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{V}{\sin^2 \theta} - \frac{4}{r} b_{3,1} \right);$$

$$\frac{2i \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{U}{\sin^2 \theta} - \frac{4}{r} b_{2,1}),$$

$$L = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta},$$

$$b_{11} = \frac{\partial v_r}{\partial r}; \quad b_{12} = \frac{\partial V}{\partial r}; \quad b_{13} = \frac{\partial U}{\partial r}; \quad b_{21} = \frac{i}{2r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right);$$

$$b_{22} = \frac{i}{2r} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta V \right); \quad b_{23} = \frac{i}{2r} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \operatorname{ctg} \theta U \right);$$

$$b_{31} = \frac{i}{2r} \left( \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right); \quad b_{32} = \frac{i}{2r} \left( \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \operatorname{ctg} \theta V \right);$$

$$b_{33} = \frac{i}{2r} \left( \frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta U \right).$$

Здесь  $V = -v_\theta - iv_\varphi$ ,  $U = v_\theta - iv_\varphi$ ,  $v_r$ ,  $v_\theta$ ,  $v_\varphi$  — компоненты скорости по осям координат.

Группа вращений является трехпараметрической подгруппой группы Галилея—Ньютона. Параметрами в группе вращений будут углы Эйлера  $\varphi_1$ ,  $\theta$ ,  $\varphi_2$  [2].

Функция на поверхности сферы является функцией двух переменных  $\psi$  и  $\varphi$ . Вместо двух переменных переходим к функциям от трех переменных  $\varphi_1$ ,  $\theta$ ,  $\varphi_2$ , т. е. к функциям от вращения  $g$ . Сферические координаты  $\psi$  и  $\varphi$  некоторой точки, в которую при вращении  $g$  переходит северный полюс сферы, связаны с углами Эйлера следующими соотношениями:

$$\psi = \theta, \quad \varphi = \varphi_2 - \frac{\pi}{2}.$$

При разложении векторных функций в ряды по обобщенным сферическим функциям угол Эйлера  $\varphi_1$  можно фиксировать [2, 3]. Положим  $\varphi_1 = 0$ . Таким образом, рассматриваем функции на сфере от аргументов  $\theta$ ,  $\frac{\pi}{2} - \varphi$ ,  $0$ . Будем искать решение системы (3), (4) в виде рядов по обобщенным сферическим функциям:

$$p = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l p_{l,n}(r, t) T_{0n}^l \left( \frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right), \quad (5)$$

$$v_r = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l v_{l,n}(r, t) T_{0n}^l \left( \frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right), \quad (6)$$

$$V = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-l}^l V_{l,n}(r, t) T_{1n}^l \left( \frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right), \quad (7)$$

$$U = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-l}^l U_{l,n}(r, t) T_{-1n}^l \left( \frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right). \quad (8)$$

В рядах (5) — (8)

$$T_{mn}^l \left( \frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right) = e^{-in \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right)} P_{mn}^l (\cos \theta) \quad (9)$$

есть обобщенные сферические функции. Разложение каждого неизвестного в ряд производится по своему набору обобщенных сферических функций, на что указывает левый нижний индекс  $m$  [2].

Подставим ряды (5) — (8) в уравнения (3) и (4) и воспользуемся следующими рекуррентными формулами [2]:

$$\begin{aligned} \frac{dP_{mn}^l}{d\theta} - \frac{n - m \cos \theta}{\sin \theta} P_{mn}^l &= i\alpha_m P_{m-1, n}^l, \\ \frac{dP_{mn}^l}{d\theta} + \frac{n - m \cos \theta}{\sin \theta} P_{mn}^l &= -i\alpha_{m+1} P_{m+1, n}^l, \\ \alpha_m &= \sqrt{(l+m)(l-m+1)}, \\ \frac{d^2 P_{mn}^l}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{dP_{mn}^l}{d\theta} + \left[ l(l+1) - \frac{n^2 - 2mn \cos \theta + m^2}{\sin^2 \theta} \right] P_{mn}^l &= 0. \end{aligned}$$

В результате получаем:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-l}^l \left( \begin{array}{c} \frac{\partial v_{l,n}}{\partial t} T_{0n}^l \\ \frac{\partial V_{l,n}}{\partial t} T_{1n}^l \\ \frac{\partial U_{l,n}}{\partial t} T_{-1n}^l \end{array} \right) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-l}^l (v_{l,n} T_{0n}^l; V_{l,n} T_{1n}^l; U_{l,n} T_{-1n}^l) \times \\ & \times \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-l}^l \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial v_{l,n}}{\partial r} T_{0n}^l; & \frac{\partial V_{l,n}}{\partial r} T_{1n}^l; & \frac{\partial U_{l,n}}{\partial r} T_{-1n}^l \\ a_1 v_{l,n} T_{-1n}^l; & a_1 V_{l,n} T_{0n}^l; & a_2 U_{l,n} T_{-2n}^l \\ a_1 v_{l,n} T_{1n}^l; & a_2 V_{l,n} T_{2n}^l; & a_1 U_{l,n} T_{0n}^l \end{array} \right\| + \\ & + \left( \begin{array}{ccc} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-l}^l \frac{1}{r} U_{l,n} T_{-1n}^l & \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=-l}^l V_{l,n} T_{1n}^l & \\ & 0 & \\ & 0 & \end{array} \right) = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l \left( \begin{array}{c} \left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{l,n}}{\partial r} + \nu \left[ K(v_{l,n}) - \frac{2}{r^2} v_{l,n} - a_3 (V_{l,n} + U_{l,n}) \right] \right\} T_{0n}^l \\ \left\{ \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\rho r} p_{l,n} + \nu \left[ K(V_{l,n}) - a_4 v_{l,n} \right] \right\} T_{1n}^l \\ \left\{ \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\rho r} p_{l,n} + \nu \left[ K(U_{l,n}) - a_4 v_{l,n} \right] \right\} T_{-1n}^l \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=-l}^l \left[ \frac{\partial v_{l,n}}{\partial r} + \frac{2}{r} v_{l,n} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2r} (V_{l,n} + U_{l,n}) \right] T_{0n}^l = 0, \quad (10)$$

где

$$a_1 = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2r}; \quad a_2 = \frac{\sqrt{(l+2)(l-1)}}{2r}; \quad a_3 = \sqrt{l(l+1)};$$

$$a_4 = \frac{2\sqrt{l(l+1)}}{r^2};$$

$$K = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}.$$

Далее воспользуемся формулой умножения обобщенных сферических функций [3]:

$$T_{mn}^l(u) T_{ps}^k(u) =$$

$$= \sum_{v=|k-l|}^{k+l} c(l, k, v; m, p, m+p) c(l, k, v; n, s, n+s) T_{m+p, n+s}^v,$$

где  $c(l, k, v; m, p, m+p)$  и  $c(l, k, v; n, s, n+s)$  — коэффициенты Клебша—Гордана.

Приравнивая выражения, стоящие перед обобщенными сферическими функциями с одинаковыми индексами  $l$  и  $n$ , приходим к системе  $4N$  двухмерных дифференциальных уравнений, где  $N$  — число членов в ряде (5):

$$\frac{\partial v_{l,n}}{\partial t} + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s=-k}^k \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{j=-q}^q \sigma \left[ c(q, k, l; 0, 0, 0) v_{k,s} \frac{\partial v_{q,j}}{\partial r} + \right.$$

$$+ c(q, k, l; -1, 1, 0) \frac{\sqrt{q(q+1)}}{2r} U_{k,s} v_{q,j} + c(q, k, l; 1, -1, 0) \times$$

$$\left. \times \frac{\sqrt{q(q+1)}}{2r} V_{k,s} v_{q,j} + \frac{1}{r} c(q, k, l; -1, 1, 0) U_{k,s} V_{q,j} \right] =$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_{l,n}}{\partial r} + v \left[ \frac{\partial^2 v_{l,n}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial v_{l,n}}{\partial r} - \frac{1}{r^2} (2 + l(l+1)) v_{l,n} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{l(l+1)} (V_{l,n} + U_{l,n}) \right],$$

$$\frac{\partial V_{l,n}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=-k}^k \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=-q}^q \sigma \left[ c(q, k, l; 0, 1, 1) v_{k,s} \frac{\partial V_{q,j}}{\partial r} + \right.$$

$$+ c(q, k, l; 1, 0, 1) \frac{\sqrt{q(q+1)}}{2r} V_{k,s} V_{q,j} + c(q, k, l; -1, 2, 1) \times$$

$$\left. \times \frac{\sqrt{(q+2)(q-1)}}{2r} V_{k,s} V_{q,j} \right] = \frac{\sqrt{l(l+1)}}{\rho r} p_{l,n} +$$

$$+ v \left[ \frac{\partial^2 V_{l,n}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial V_{l,n}}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} V_{l,n} - \frac{2\sqrt{l(l+1)}}{r^2} v_{l,n} \right];$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U_{l,n}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=-k}^k \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=-q}^q \sigma \left[ c(q, k, l; 0, -1, -1) v_{k,s} \frac{\partial U_{q,j}}{\partial r} + \right. \\ & \quad + c(q, k, l; 1, -2, -1) \frac{V(q+2)(q-1)}{2r} V_{k,s} U_{q,j} + \\ & \quad \left. + c(q, k, l; -1, 0, -1) \frac{Vq(q+1)}{2r} U_{k,s} V_{q,j} \right] = \frac{Vl(l+1)}{pr} p_{l,n} + \\ & \quad + v \left[ \frac{\partial^2 U_{l,n}}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial U_{l,n}}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} U_{l,n} - \frac{2}{r^2} \sqrt{l(l+1)} v_{l,n} \right], \\ & \quad \frac{\partial v_{l,n}}{\partial r} + \frac{2}{r} v_{l,n} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2r} (V_{l,n} + U_{l,n}) = 0, \end{aligned}$$

где

$$\sigma = \begin{cases} c(q, k, l; s, j, s+j) & \text{при } s+j=n \\ 0 & \text{при } s+j \neq n. \end{cases}$$

Решение гидродинамических задач на сфере необходимо для геофизических моделей, особенно для задач моделирования атмосферной и океанической циркуляции. Но уравнения движения атмосферы усложнены введением силы Кориолиса. Тогда при преобразовании уравнения (3) к переменным  $V$  и  $U$  возникнут новые члены вида:

$$2\omega i \cos \theta V \quad \text{и} \quad 2\omega i \cos \theta U,$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения Земли. При подстановке рядов для  $V$  и  $U$  появляются произведения следующего вида:

$$\cos \theta T_{mn}^l \left( \frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right).$$

Для преобразования этих произведений к сумме обобщенных сферических функций пользуемся следующей рекуррентной формулой:

$$\begin{aligned} & \frac{V(l+n+1)(l-n+1)(l+m+1)(l-m+1)}{(2l+1)(l+1)} T_{mn}^{l+1} + \\ & + \frac{nm}{l(l+1)} T_{mn}^l + \frac{V(l+n)(l-n)(l+m)(l-m)}{l(2l+1)} T_{mn}^{l-1} = \cos \theta T_{mn}^l. \end{aligned}$$

Изложенный метод был применен к решению уравнений прогноза для среднего уровня в атмосфере.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_{\theta}}{\partial t} + \frac{v_{\theta}}{a} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \lambda} - \frac{v_{\lambda}^2 \operatorname{ctg} \theta}{a} - 2\omega \cos \theta v_{\lambda} - \\ & - \frac{v}{a^2} \left( \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_{\theta}}{\partial \lambda^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \theta} - \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \lambda} - \frac{v_{\theta}}{\sin^2 \theta} \right) = \\ & = - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial t} + \frac{v_{\theta}}{a} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \theta} + \frac{v_{\lambda}}{a \sin \theta} \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{v_{\theta} v_{\lambda} \operatorname{ctg} \theta}{a} + 2\omega \cos \theta v_{\theta} - \\ & - \frac{v}{a^2} \left( \frac{\partial^2 v_{\lambda}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_{\lambda}}{\partial \lambda^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_{\theta}}{\partial \lambda} - \frac{v_{\lambda}}{\sin^2 \theta} \right) = - \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + v_\theta \operatorname{ctg} \theta = 0. \quad (13)$$

Здесь  $v$  — коэффициент турбулентного перемешивания по горизонтали,  $\Phi$  — геопотенциал.

Воспользовавшись уравнением неразрывности (13) и исключив  $\Phi$  из уравнений движения (11) и (12), приходим к уравнению относительно функции  $V = -v_\lambda - iv_\theta$ .

После разделения переменных решение свелось к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{dV_{l,n}(t)}{dt} + \left[ \frac{\nu l(l+1)}{a^2} - \frac{2\omega i n}{l(l+1)} \right] V_{l,n}(t) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=-k}^k \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=-q}^q \sigma \left\{ V_{k,s}(t) V_{q,j}(t) \frac{1}{2} [1 - (-1)^{l-q-k}] \right\} \left[ \frac{V(q+2)(q-1)}{2a} \times \right. \\ & \quad \left. \times c(q, k, l; -1, 2, 1) + \frac{Vq(q+1)}{2a} c(q, k, l; 1, 0, 1) \right] = 0, \\ & \quad (l=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

Здесь было использовано свойство симметрии коэффициентов Клебша—Гордана

$$c(l_1, l_2, l; j, k, j+k) = (-1)^{l-l_1-l_2} c(l_1, l_2, l; -j, -k, -j-k).$$

Если начальное условие для  $V$  задать в виде ряда по обобщенным сферическим функциям с четными индексами  $l$ , то придем к линейному обыкновенному дифференциальному уравнению относительно  $V_{l,n}(t)$

$$\frac{dV_{l,n}(t)}{dt} + \left[ \frac{\nu l(l+1)}{a^2} - \frac{2\omega i n}{l(l+1)} \right] V_{l,n}(t) = 0.$$

Окончательное решение может быть записано в следующем виде:

$$V(t, \theta, \lambda) = \sum_{l=2k}^{\infty} \sum_{n=-l}^l \alpha_{l,n} \exp \left\{ \left[ \frac{2\omega i n}{l(l+1)} - \frac{\nu l(l+1)}{a^2} \right] t \right\} T_{ln}^l \left( \frac{\pi}{2} - \lambda, \theta, 0 \right),$$

где  $\alpha_{l,n}$  коэффициенты разложения начального условия в ряд Фурье по обобщенным сферическим функциям.

По изложенной схеме были проведены расчеты для прогноза волн для среднего уровня в атмосфере с учетом вязкости. В качестве начального условия задавались волны с волновыми числами 2—3. Расчет показал, что волны для таких волновых чисел смещаются с востока на запад. Амплитуда колебания за счет вязкости уменьшается примерно на  $2/3$  своей величины за срок около 60 суток при условии, что коэффициент горизонтального турбулентного перемешивания  $\nu$  равен  $10^6$  м<sup>2</sup>/сек.

Аналогичная картина получается и для южного полушария.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Биркгоф Г. Гидродинамика. ИЛ, 1963.
2. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. Физматгиз, М., 1958.
3. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. Физматгиз, М., 1965.

## РАСЧЕТ ПОТОКОВ И ПРИТОКОВ ДЛИННОВОЛНОВОЙ РАДИАЦИИ В ОБЛАЧНЫХ УСЛОВИЯХ

В настоящее время имеется большое количество схем гидродинамического прогноза метеорологических элементов, которые используются в оперативной практике или для численных экспериментов. Однако эти схемы построены в основном в адиабатическом приближении.

Работы советских [1, 2] и иностранных [3, 4] ученых показывают, что учет неадиабатичности атмосферных движений может оказаться существенным в прогнозе. В частности, японские ученые [4, 5] показали, что учет притоков тепла даже упрощенным способом, а именно учет влияния океана, скрытой теплоты конденсации и осредненных по площади радиационных притоков, дает существенное улучшение в краткосрочном прогнозе. Тем более можно ожидать существенного влияния неадиабатичности в прогнозе большой заблаговременности.

Среди притоков тепла к атмосфере наиболее существенными являются: 1) турбулентный приток тепла, 2) конденсационный приток тепла, 3) радиационный приток тепла.

Радиационный приток тепла складывается из поглощения атмосферой солнечной радиации и из поглощения длинноволнового излучения подстилающей поверхности, облаков и самой атмосферы. В теории переноса радиации получены формулы для расчета притоков тепла в безоблачной атмосфере [6].

Наибольшую трудность представляет расчет радиационного притока тепла в облачных условиях как ко всей атмосфере в целом, так и к отдельным слоям.

Включение радиационных притоков тепла в схему гидродинамического прогноза требует знания пространственного распределения температуры и влажности в атмосфере.

Кроме того, требуются сведения о высоте и количестве облачности, а также данные о толщине облачных слоев.

Гидродинамические схемы дают значения температуры и влажности на ограниченном числе уровней в атмосфере. Поэтому с помощью такой схемы в лучшем случае можно судить о том, есть ли облачность на данном уровне или нет, но никаких сведений о том, имеется ли облачность между уровнями и каковы границы облачных слоев, она не дает. Для этого требуются схемы с большим разрешением по вертикали. Кроме того, гидродинамические схемы не могут дать балл облачности. Поэтому, очевидно, наиболее правильный путь состоит в соединении гидродинами-



ческого и полуэмпирического подхода для всей задачи прогноза притоков тепла. В частности, для получения сведений о степени покрытости неба свода облаками можно воспользоваться графиком Смагоринского [7]. График Смагоринского связывает среднюю в слое относительную влажность с баллом облачности, лежащей в этом слое.

### Радиационные потоки и притоки тепла

I. Задача расчета радиационных потоков и притоков тепла в облачных условиях имеет несколько аспектов.

1. Необходимо разработать схему расчета притоков тепла к атмосфере в целом или к отдельным ее слоям. Основные трудности этой задачи состоят в недостаточности наших знаний о распределении температуры и влажности в атмосфере в конкретный момент, о пространственном распространении облачности, о поглощающих и рассеивающих свойствах атмосферы.

2. Расчет притока к слою в виде разности потоков на границах слоя связан с той трудностью, что в некоторых случаях эта разность может оказаться малой разностью двух больших величин. Однако такой способ расчета притока в настоящее время является общепринятым.

3. До сих пор не разработаны пределы точности, с которой нужно задавать параметры, входящие в расчет крупномасштабных притоков тепла (влажность, облачность, альbedo подстилающей поверхности и облаков, функция пропускания атмосферы и т.д.). Не определены параметры, которые являются наиболее важными в расчете потоков и притоков.

4. Способ расчета притоков тепла применительно к задаче прогноза погоды или к задаче общей циркуляции атмосферы имеет свои особенности. Это связано с тем, что в численных гидродинамических схемах имеется дискретный набор прогнозируемых метеоэлементов в пространстве в отличие от модельных задач, где задается непрерывное распределение основных метеоэлементов по высоте.

5. Ограниченные возможности электронных вычислительных машин заставляют выбирать небольшое число уровней по вертикали и большие шаги по горизонтали. Это вносит большое осреднение в рассчитываемые величины и известные ошибки.

6. В связи с этим схема расчета притока тепла не должна содержать излишней точности, которая может оказаться несовместимой с точностью всей гидродинамической схемы.

Все перечисленные обстоятельства указывают на сложность и неразработанность вопроса о расчете радиационных притоков тепла в атмосфере.

Существует значительное число работ, посвященных неадиабатическому прогнозу на короткий срок, например, [8, 9] и др. Однако все эти работы относятся к безоблачным условиям. При переходе к интегрированию на длительные сроки отбрасывать такой фактор, как облачность, нельзя даже в первом приближении.

Отдельные попытки учесть притоки тепла при численном интегрировании уравнений движения на длительный срок с учетом облачности были сделаны зарубежными учеными. В частности, в работе Минца [10] наряду с другими притоками учитывается радиационный приток тепла. Сложные процессы переноса радиации представлены в работе Минца чрезвычайно упрощенным способом. При этом в расчетах длинноволновой радиации, выполненных Такахаши, Катаяма и Асакура [11] использовалась модель атмосферы со средним распределением облачности.

В работе [12] по общей циркуляции атмосферы используется схема расчета притоков коротковолновой радиации, разработанная Манабе и Стриклером [13].

Манабе и Стриклер попытались учесть притоки тепла, основываясь на формулах для расчета потоков радиации, полученных из уравнений переноса. Такой способ расчета радиационных потоков тепла учитывает физику процесса переноса радиации. При этом влияние несплошной облачности учитывалось тем, что поток от верхней или нижней границы облаков входил составной частью в общий поток на данный уровень пропорционально баллу облачности соответствующего яруса. В этой работе облачность задается средним климатологическим распределением по Лондону [14]. Указанные исследования являются первым опытом учета радиационных притоков тепла в облачных условиях применительно к задаче интегрирования уравнений гидротермодинамики на большой срок. Однако в перечисленных работах облачность является заданным фактором, не меняющимся в процессе интегрирования по времени.

Поскольку известно, что облачность существенно меняет радиационный режим атмосферы [15], представляет интерес вводить изменение облачности в процессе интегрирования и учитывать влияние этого изменения на динамику атмосферных процессов.

#### Способ расчета потоков длинноволновой радиации в облачных и безоблачных условиях

Может быть несколько подходов к учету радиации в задаче интегрирования на длительный срок.

Два из них уже упоминались в предыдущем параграфе: способ грубого учета, как сделано в работе Минца, и способ, учитывающий физику переноса радиации и состояние атмосферы, примененный Манабе и Стриклером.

Мы остановились на втором из перечисленных способов, имея в виду, что гидродинамическая схема дает распределение метеорологических элементов на каждом шаге по времени. Это позволяет учитывать изменение влагосодержания, облачности, температуры в схеме расчета притоков тепла во времени.

Принятая нами схема учета облачности уже использовалась М. Е. Берляндом [16], Б. Е. Шнееровым [17], Манабе и Стриклером [13] и др. Суть ее состоит в следующем: поток на уровень  $z$  вычисляется как сумма потока, относящегося к безоблачным условиям, и потока от границы облаков с соответствующими весами. На рис. 1 представлена схема учета облачности. Для расчетов используются следующие формулы:

$$A_z^\downarrow = A_z^\infty \left( 1 - \sum_{n=1}^3 \hat{C}_n \right) + A_z^{i_1} \hat{C}_1 + A_z^{i_2} \hat{C}_2 + A_z^{i_3} \hat{C}_3, \quad (1)$$

$$B_z^\uparrow = B_z^s \left( 1 - \sum_{n=1}^3 \tilde{C}_n \right) + B_z^{k_1} \tilde{C}_1 + B_z^{k_2} \tilde{C}_2 + B_z^{k_3} \tilde{C}_3. \quad (2)$$

Здесь введены следующие обозначения:  $A_z^\downarrow$  — интегральный поток сверху на уровень  $z$ ;  $B_z^\uparrow$  — интегральный поток снизу на уровень  $z$ ;  $\hat{C}_n$  — количество облаков, видимое снизу с данного уровня (для расчета  $A^\downarrow$ );  $\tilde{C}_n$  — количество облаков, видимое сверху с данного уровня (для расчета  $B^\uparrow$ );  $A_z^\infty$  — интегральный поток сверху в безоблачных условиях;  $A_z^i$  —

интегральный поток сверху на уровень  $z$  от нижней границы облака соответствующего яруса;  $B_z^s$  — интегральный поток снизу от подстилающей поверхности на уровень  $z$  в безоблачных условиях;  $B_z^k$  — интегральный поток снизу на уровень  $z$  от верхней границы облаков.

Действительное количество облаков обозначим через  $C_n$ , где  $n = 1, 2, 3$ . Индекс 1 относится к облакам нижнего яруса, 2 — к облакам среднего яруса, 3 — верхнего яруса. Для установления связи между

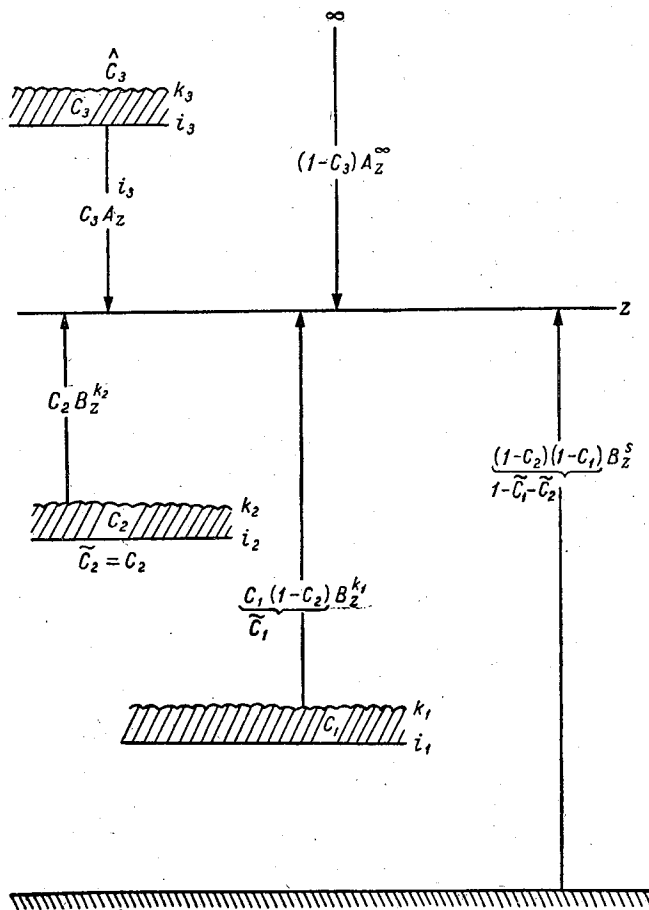


Рис. 1. Схема учета облачности.

облачностью, наблюдаемой снизу или сверху, и действительной облачностью применим довольно широко используемый, но весьма приближенный принцип пропорциональности [14, 17].

Из него следуют соотношения:

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \widehat{C}_1, \\
 C_2 &= \frac{\widehat{C}_2}{1 - \widehat{C}_1}, \\
 C_3 &= \frac{\widehat{C}_3}{1 - (\widehat{C}_2 + \widehat{C}_3)}; \quad (3)
 \end{aligned}$$

$$C_1 = \frac{\tilde{C}_1}{1 - (\tilde{C}_2 + \tilde{C}_3)},$$

$$C_2 = \frac{\tilde{C}_2}{1 - \tilde{C}_3},$$

$$C_3 = \tilde{C}_3. \quad (4)$$

Если пользоваться наблюдениями за облачностью, производимыми с земли, то для расчета потоков снизу  $B_z^\dagger$  следует использовать баллы облачности, пересчитанные с помощью (3) и (4).

Для расчета потоков радиации, входящих в (1), (2), в случае длинноволновой радиации воспользуемся известными формулами [17]:

$$A_z^\infty = - \int_m^M E [T(u)] dD [u - m], \quad (5)$$

$$A_z^i = E(T_i) D(m_i - m) - \int_m^{m_i} E [T(u)] dD (u - m), \quad (6)$$

$$B_z^s = \bar{a} E(T_s) D(m) + \int_0^m E [T(u)] dD (m - u) - (1 - \bar{a}) \int_0^M E [T(u)] dD (u + m), \quad (7)$$

$$B_z^k = \bar{a}_k E(T_k) D(m - m_k) + \int_{m_k}^m E [T(u)] dD (m - u) - (1 - \bar{a}_k) \int_{m_k}^M E [T(u)] dD (u + m - m_k), \quad (8)$$

где  $D$  — интегральная функция пропускания,  $E = \sigma T^4$  — излучение абсолютного черного тела,  $M$  — масса атмосферы в слое от земли до верхней границы,  $m$  — масса слоя атмосферы от земли до уровня, для которого производится расчет потока,  $m_k$  — масса атмосферы от земли до верхней границы облаков,  $\bar{a}$ ,  $\bar{a}_k$  — излучательная способность подстилающей поверхности и верхней границы облаков,  $m_i$  — масса атмосферы от земли до нижней границы облаков.

Так как дифференцирование функции пропускания в большинстве случаев достаточно сложно и вносит большие ошибки в расчет, перейдем в выражениях (5), (6), (7), (8) к интегрированию по  $E$ .

Возьмем интегралы, входящие в (5), (6), (7), (8) по частям, тогда получим следующие формулы для потоков радиации:

$$A_z^\infty = E [T(m)] + \int_{E(m)}^{E(M)} D(u - m) dE [T(u)], \quad (9)$$

$$B_z^s = E [T(m)] - \int_0^{E(m)} D(m - u) dE [T(u)] + (1 - \bar{a}) \int_0^{E(M)} D(u + m) dE, \quad (10)$$

$$A_z^i = E [T(m)] + \int_{E(m)}^{E(m_i)} D(u-m) dE [T(u)], \quad (11)$$

$$B_z^k = E [T(m)] - \int_{E(m_k)}^{E(m)} D(m-u) dE [T(u)] + \\ + (1 - \bar{a}_k) \int_{E(m_k)}^{E(M)} D(u+m-m_k) dE [T(u)]. \quad (12)$$

Входящие в (9)–(12) интегралы вычислялись по слоям с использованием формулы Симпсона. На основании формул (9)–(10) получены рабочие формулы для вычисления потоков на уровнях 1000, 850, 500, 300 мб в безоблачных условиях при  $\bar{a}=1$ :

восходящие потоки

$$A_{1000}^\infty = E(T_{1000}) + \frac{E_{850} - E_{1000}}{6} \left[ 1 + 4D \left( \frac{m_{850} - m_{1000}}{2} \right) + D(m_{850} - m_{1000}) \right] + \\ + \frac{E_{500} - E_{850}}{6} \left[ D(m_{850} - m_{1000}) + 4D \left( \frac{m_{850} - 2m_{1000} + m_{500}}{2} \right) + \right. \\ \left. + D(m_{500} - m_{1000}) \right] + \frac{E_{300} - E_{500}}{6} \left[ D(m_{500} - m_{1000}) + \right. \\ \left. + 4D \left( \frac{m_{500} - 2m_{1000} + m_{300}}{2} \right) + D(m_{300} - m_{1000}) \right] + \\ + \frac{E_M - E_{300}}{6} \left[ D(m_{300} - m_{1000}) + 4D \left( \frac{m_{300} - 2m_{1000} + M}{2} \right) + D(M - m_{1000}) \right], \quad (13)$$

$$A_{850}^\infty = E(T_{850}) + \frac{E(m_{500}) - E(m_{850})}{6} \left[ 1 + 4D \left( \frac{m_{500} - m_{850}}{2} \right) + \right. \\ \left. + D(m_{500} - m_{850}) \right] + \frac{E(m_{300}) - E(m_{500})}{6} \left[ D(m_{500} - m_{850}) + \right. \\ \left. + 4D \left( \frac{m_{500} + m_{300} - 2m_{850}}{2} \right) + D(m_{300} - m_{850}) \right] + \frac{E(M) - E(m_{300})}{6} \times \\ \times \left[ D(m_{300} - m_{850}) + 4D \left( \frac{m_{300} + M - 2m_{850}}{2} \right) + D(M - m_{850}) \right], \quad (14)$$

$$A_{500}^\infty = E(T_{500}) + \frac{E(m_{300}) - E(m_{500})}{6} \left[ 1 + 4D \left( \frac{m_{300} - m_{500}}{2} \right) + \right. \\ \left. + D(m_{300} - m_{500}) \right] + \frac{E(M) - E(m_{300})}{6} \times \\ \times \left[ D(m_{300} - m_{500}) + 4D \left( \frac{m_{300} + M - 2m_{500}}{2} \right) + D(M - m_{500}) \right], \quad (15)$$

$$A_{300}^\infty = E(T_{300}) + \frac{E(M) - E(m_{300})}{6} \left[ 1 + 4D \left( \frac{M - m_{300}}{2} \right) + D(M - m_{300}) \right]; \quad (16)$$

нисходящие потоки

$$B_{1000}^s = E(T_s), \quad (17)$$

$$B_{850}^s = E(T_{850}) - \frac{E(m_{850}) - E_s}{6} \left[ 1 + 4D \left( \frac{m_{850}}{2} \right) + D(m_{850}) \right], \quad (18)$$

$$B_{500}^s = E(T_{500}) - \frac{E(m_{850}) - E_s}{6} \left[ D(m_{500}) + 4D\left(\frac{2m_{500} - m_{850}}{2}\right) + \right. \\ \left. + D(m_{500} - m_{850}) \right] - \frac{E(m_{500}) - E(m_{850})}{6} \times \\ \times \left[ D(m_{500} - m_{850}) + 4D\left(\frac{m_{500} - m_{850}}{2}\right) + 1 \right], \quad (19)$$

$$B_{300}^s = E(T_{300}) - \frac{E(m_{850}) - E_s}{6} \left[ D(m_{300}) + 4D\left(\frac{2m_{300} - m_{850}}{2}\right) + \right. \\ \left. + D(m_{300} - m_{850}) \right] - \frac{E(m_{500}) - E(m_{850})}{6} \left[ D(m_{300} - m_{500}) + \right. \\ \left. + 4D\left(\frac{2m_{300} - m_{850} - m_{500}}{2}\right) + D(m_{300} - m_{850}) \right] - \\ - \frac{E(m_{300}) - E(m_{500})}{6} \left[ 1 + 4D\left(\frac{m_{300} - m_{500}}{2}\right) + D(m_{300} - m_{500}) \right]. \quad (20)$$

Формулы (13) — (20) могут быть упрощены за счет сокращения отдельных членов. Однако для расчетов их удобнее сохранить в неприведенном виде, который позволяет при вычислении интегралов по слоям в облачных и безоблачных условиях использовать частично результаты расчета одного случая для другого.

Аналогично формулам (13) — (20) на основании выражений (11) и (12) были написаны формулы для вычисления потоков от верхней и нижней границ облаков.

Расчеты по формулам (13) — (20), а также по формулам для облачных условий, которые здесь не приведены, производились при условии, что на верхней границе атмосферы нисходящая радиация равна нулю. Облака и земля были приняты за абсолютно черные тела.

Вычисление эффективных масс для водяного пара и углекислого газа производились по формулам, которые приспособлены Р. Л. Каганом для расчета по данным об упругости водяного пара и давлении на различных уровнях [19],

$$W_{H_2O} = \frac{1}{\sqrt{p_0}} \int_0^z \rho_m \sqrt{p} dz. \quad (21)$$

Пользуясь уравнением состояния и уравнением статики, преобразуем подынтегральное выражение в (21). Тогда уравнение (21) приводится к следующей формуле для  $W_{H_2O}$

$$W_i = - \frac{0,622}{g \sqrt{p_0}} \int_{p_i}^{p_1} \frac{e}{\sqrt{p}} dp, \quad (22)$$

или

$$W_i = \sum_{j=1}^{i-1} \Delta W_j, \quad (23)$$

где  $i=2, 3, 4 \dots$ ;  $j=1, 2, 3 \dots$ ,

$$\Delta W_j = 0,01 \left( \frac{e_j}{\sqrt{p_j}} + \frac{e_{j+1}}{\sqrt{p_{j+1}}} \right) (p_j - p_{j+1}). \quad (24)$$

Для расчета эффективной массы углекислого газа была использована формула [19]

$$u(p) = 146 \left[ \left( \frac{p_1}{p_0} \right)^{1,8} - \left( \frac{p}{p_0} \right)^{1,8} \right], \quad (25)$$

где  $p_1$  — давление на подстилающей поверхности.

Выражение (25) получено при условии постоянства содержания  $\text{CO}_2$  по объему в тропосфере, равного 0,00032.

Интегральная функция пропускания  $D$ , входящая в формулы для расчета потоков, характеризует поглощение длинноволновой радиации в атмосфере. В настоящее время построено несколько функций пропускания для длинноволновой радиации. Функция пропускания, построенная Ф. Н. Шехтер, учитывает зависимость поглощения от количества водяного пара и углекислого газа на пути луча [20].

В последнее время К. Я. Кондратьев и Х. Ю. Нийлиск [22] на основе использования результатов определения функции пропускания для различных участков спектра получили интегральную функцию пропускания для диффузного излучения, учитывающую зависимость поглощения от содержания  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}_2$  и  $\text{O}_3$ .

В 1966 г. Ф. Н. Шехтер [21] уточнила функцию пропускания, построенную ею ранее, путем привлечения новых экспериментальных данных. В наших расчетах мы использовали эту уточненную функцию пропускания.

Удобство использования этой функции состоит в том, что по заданному эффективному содержанию водяного пара автоматически учитывается содержание углекислого газа. Таким образом, функция пропускания Шехтер имеет один входной параметр — эффективную массу водяного пара.

### Цель расчетов

В начале параграфа «Радиационные потоки и притоки тепла» отмечалась сложность и неразработанность проблем учета притоков тепла. В предыдущем параграфе была изложена схема, с помощью которой можно исследовать различные стороны проблемы. Одним из результатов такого исследования может быть детализация или, наоборот, огрубление выбранной схемы.

В первую очередь рассмотрим вопрос об определении основных метеорологических характеристик, знание которых является наиболее важным для расчета радиационных потоков и притоков тепла. Известно, какую важную роль в тепловом режиме атмосферы играет облачность [15]. Однако проведенные Е. М. Фейгельсон расчеты в основном посвящены изучению случаев сплошной облачности. Представляет также интерес изучение влияния переменной облачности, перемещения облачных слоев на разные уровни, изменения их толщины на потоки и притоки радиации. Этот вопрос тесно связан с оценками точности, с которой нужно задавать облачность при расчете радиационных потоков и притоков.

Расчеты проводились при различных баллах облачности, при разных сочетаниях облаков различных ярусов, для конкретного случая распределения влажности с высотой. Обратное влияние облачности на распределение температуры и влажности не учитывалось. Расчеты имеют смысл численного эксперимента.

Исследовалось влияние облачности нижнего и среднего ярусов, а также среднего и верхнего. В первом случае облачность варьировалась следующим образом:

1) безоблачно;

$$2) \hat{C}_1 = 0,7; \hat{C}_2 = 0; \hat{C}_3 = 0;$$

$$3) \hat{C}_1 = 0,7; \hat{C}_2 = 0,2 (C_2 = 0,66); \hat{C}_3 = 0;$$

$$4) \hat{C}_1 = 0,4; \hat{C}_2 = 0,2 (C_2 = 0,33); \hat{C}_3 = 0.$$

В скобках указана действительная облачность среднего яруса, рассчитанная по формулам (3) и (4). Во втором случае облачность варьировалась следующим образом:

1) безоблачно;

$$2) \hat{C}_1 = 0; \hat{C}_2 = 0,8; \hat{C}_3 = 0,2 (1,0);$$

$$3) \hat{C}_1 = 0; \hat{C}_2 = 0,2; \hat{C}_3 = 0,8 (0,8).$$

Производились также изменения толщины облаков и перемещения облачного слоя заданной толщины на разные уровни в пределах данного слоя. Если обозначить высоту нижней границы облаков разных ярусов через  $i_1, i_2, i_3$ , а высоту верхней границы через  $k_1, k_2, k_3$ , то толщины облаков выражаются:

$$\Delta h_1 = k_1 - i_1,$$

$$\Delta h_2 = k_2 - i_2,$$

$$\Delta h_3 = k_3 - i_3.$$

При рассмотрении облачности нижнего и среднего ярусов были заданы следующие границы и толщины облачных слоев:

$$1) i_1 = 946 \text{ мб}, k_1 = 900 \text{ мб}, \Delta h_1 = 400 \text{ м};$$

$$2) i_1 = 992 \text{ мб}, k_1 = 900 \text{ мб}, \Delta h_1 = 800 \text{ м};$$

$$3) i_1 = 992 \text{ мб}, k_1 = 946 \text{ мб}, \Delta h_1 = 400 \text{ м};$$

$$\text{при } i_2 = 685 \text{ мб и } k_2 = 641 \text{ мб } \Delta h_2 = 500 \text{ м}.$$

Для облаков среднего и верхнего ярусов:

$$\text{I. } 1) i_2 = 685 \text{ мб}, k_2 = 597 \text{ мб}, \Delta h_2 = 1020 \text{ м};$$

$$2) i_2 = 726 \text{ мб}, k_2 = 641 \text{ мб}, \Delta h_2 = 1000 \text{ м};$$

$$3) i_2 = 781 \text{ мб}, k_2 = 685 \text{ мб}, \Delta h_2 = 1000 \text{ м};$$

$$\text{при } i_3 = 469 \text{ мб и } k_3 = 400 \text{ мб } \Delta h_3 = 900 \text{ м}.$$

$$\text{II. } 1) i_2 = 685 \text{ мб}, k_2 = 641 \text{ мб}, \Delta h_1 = 500 \text{ м};$$

$$2) i_2 = 685 \text{ мб}, k_2 = 597 \text{ мб}, \Delta h_2 = 1020 \text{ м};$$

$$3) i_2 = 685 \text{ мб}, k_2 = 550 \text{ мб}, \Delta h_3 = 1650 \text{ м};$$

$$\text{при } i_3 = 469 \text{ мб } k_3 = 400 \text{ мб}.$$

Расчет потоков длинноволновой радиации производился для уровней 1000, 850, 500, 300 мб.



## Влияние облачности нижнего и среднего ярусов

Результаты расчетов потоков длинноволновой радиации по формулам (13)—(20) при указанных исходных данных для облачности представлены графически.

На рис. 2 дано распределение эффективного потока  $F = B - A$  по высоте при различных условиях облачности, толщине и положении облаков нижнего яруса. По оси ординат отложено давление в миллибарах. Штриховкой отмечены облачные слои. Из качественного сопоставления кривых видно, что облачность уменьшает эффективные потоки, особенно в слое под облаком. Над облаками эффективные потоки по сравнению с безоблачными условиями меняются слабее. Из графиков видно, что добавление облачности среднего яруса к облакам нижнего яруса сильно увеличивает отклонение от безоблачной кривой.

Из графиков также следует, что влияние облачности зависит от степени покрытия неба облаками (балл облачности). Для количественной оценки влияния облачности приводится табл. 1, в которой дано отношение потоков в облачных и безоблачных условиях для рассмотренных случаев. Третья графа, относящаяся к случаю, когда имеется только нижняя облачность, показывает, что эффективный поток на уровне 1000 мб убывает в 5—8 раз.

Таблица 1

Влияние облачности на потоки

Толщина и высота нижней границы облаков	Уровень (мб)	$F_{\text{обл}}/F_{\text{безобл}}$		
		$\hat{C}_1=0,7$ $\hat{C}_2=0,0$ $\hat{C}_3=0,0$	$\hat{C}_1=0,7$ $\hat{C}_2=0,2$ $\hat{C}_3=0,0$	$\hat{C}_1=0,4$ $\hat{C}_2=0,2$ $\hat{C}_3=0,0$
I.	1000	0,19*	0,00*	0,65*
$i_1 = 946$ мб	850	0,94	0,42*	0,71*
$\Delta h_1 = 400$ м	500	0,98	0,93	0,96
$\Delta h_2 = 500$ м	300	0,98	0,92	0,94
II.	1000	0,12*	-0,07*	0,30*
$i_1 = 992$ мб	850	0,94	0,42*	0,71*
$\Delta h_1 = 800$ м	500	0,98	0,93	0,96
$\Delta h_2 = 500$ м	300	0,99	0,92	0,94
III.	1000	0,12*	-0,07*	0,30*
$i_1 = 992$ мб	850	0,97	0,45*	0,72*
$\Delta h_1 = 400$ м	500	0,99	0,93	0,96
$\Delta h_2 = 500$ м	300	0,99	0,90	0,94

Примечание. Звездочкой (\*) обозначены величины, относящиеся к уровням, над которыми имеется облачность.

Сопоставление случаев I, II, III в этой графе показывает, что влияние перемещения облака нижнего яруса внутри слоя на 400—500 м незначительно, влияние изменения толщины облачного слоя от 400 до 800 м также незначительно.

Эти выводы в некоторой степени связаны с гипотезой рассмотрения облака как абсолютно черного тела. Учет процессов внутри облака, изменения его оптических свойств может несколько изменить эти выводы для не слишком толстых или плотных облаков.

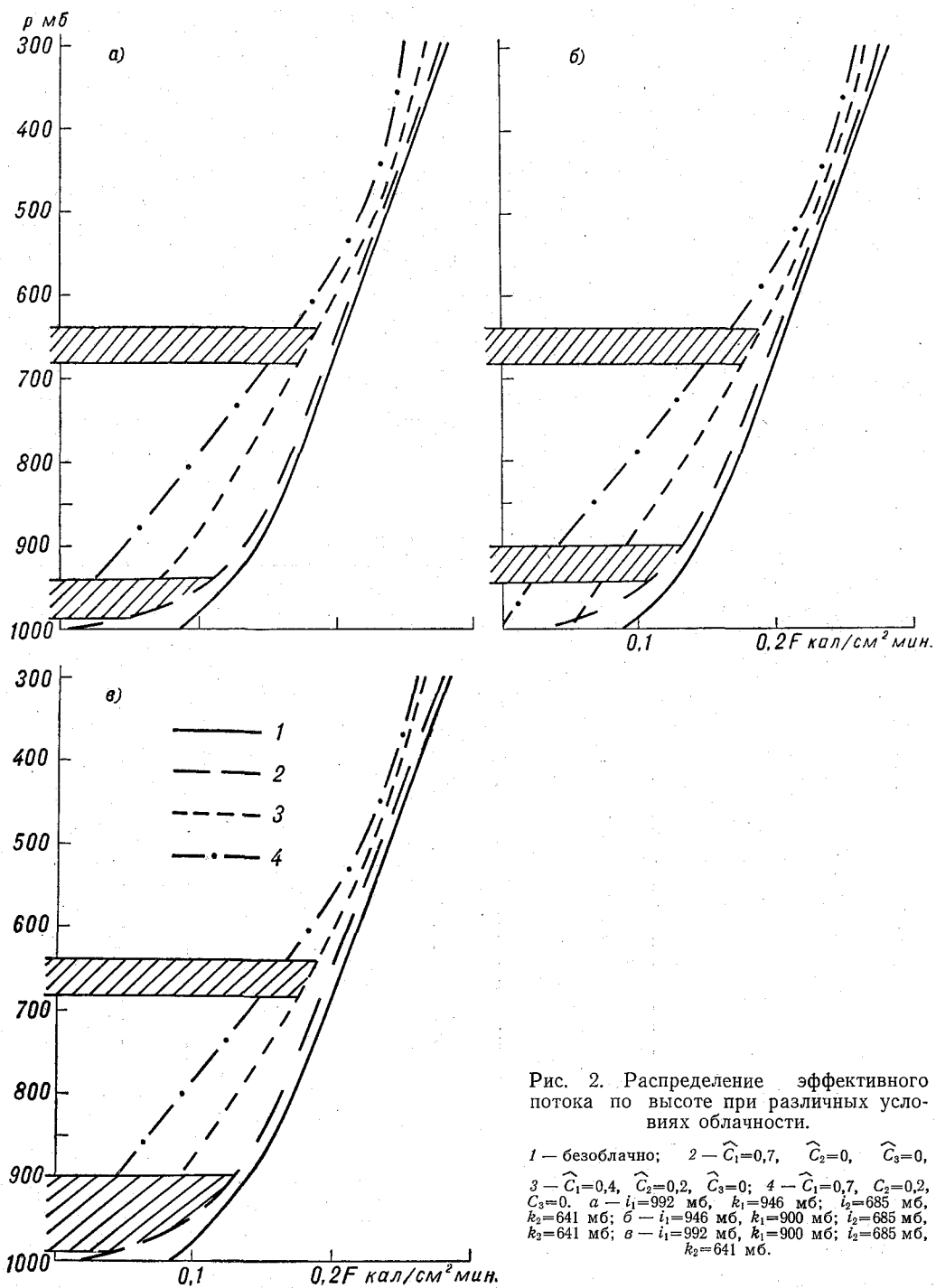


Рис. 2. Распределение эффективного потока по высоте при различных условиях облачности.

1 — безоблачно; 2 —  $\widehat{C}_1=0,7, \widehat{C}_2=0, \widehat{C}_3=0$ ,  
 3 —  $\widehat{C}_1=0,4, \widehat{C}_2=0,2, \widehat{C}_3=0$ ; 4 —  $\widehat{C}_1=0,7, C_2=0,2, C_3=0$ . а —  $i_1=992$  мб,  $k_1=946$  мб;  $i_2=685$  мб,  $k_2=641$  мб; б —  $i_1=946$  мб,  $k_1=900$  мб;  $i_2=685$  мб,  $k_2=641$  мб; в —  $i_1=992$  мб,  $k_1=900$  мб;  $i_2=685$  мб,  $k_2=641$  мб.

Таблица 2

## Пригогои длинноволновой радиации

Толщина и высота нижней границы облаков	Слой (мб)	Безоблачно		$\hat{C}_1 = 0,7 \hat{C}_2 = 0,2 (C_2 = 0,66)$		$\hat{C}_1 = 0,4 \hat{C}_2 = 0,2 (C_2 = 0,33)$	
		кал/см <sup>2</sup> мин.	град/сутки	кал/см <sup>2</sup> мин.	град/сутки	кал/см <sup>2</sup> мин.	град/сутки
I. $t_1 = 946$ мб $\Delta t_1 = 400$ м $\Delta t_2 = 500$ м	1000—850	-0,071	-2,80	-0,0673	-2,66*	-0,0621	-2,45*
	850—500	-0,080	-1,35	-0,1530	-2,58*	-0,1159	-1,95*
	500—300	-0,044	-1,30	-0,0388	-1,15	-0,0370	-1,10
II. $t_1 = 992$ мб $\Delta t_1 = 800$ м $\Delta t_2 = 500$ м	1000—850	-0,071	-2,80	-0,0733	-2,90*	-0,0855	-3,40*
	850—500	-0,080	-1,35	-0,1530	-2,58*	-0,1159	-1,95*
	500—300	-0,044	-1,30	-0,0388	-1,15	-0,0370	-1,10
III. $t_1 = 992$ мб $\Delta t_1 = 400$ м $\Delta t_2 = 500$ м	1000—850	-0,071	-2,80	-0,0770	-3,00*	-0,0874	-3,40*
	850—500	-0,080	-1,35	-0,1490	-2,50*	-0,1150	-1,94*
	500—300	-0,044	-1,30	-0,0296	-0,90	-0,0367	-1,10

Примечание. Звездочкой (\*) обозначены величины, относящиеся к слоям, внутри которых имеется облачность.

Однако для облаков достаточной толщины будем пользоваться полученными выводами.

Приток к слою определяется как разность потоков

$$\Delta F = F_1 - F_2.$$

На рис. 3 показано влияние облачности на величину притока к различным слоям. Кривые построены по трем точкам, отнесенным к середине слоя. Они наглядно показывают влияние переменной облачности на приток. Наличие облачности только нижнего яруса сильно изменяет приток к слою 1000—850 мб, т. е. к тому слою, внутри которого имеется облачность. Добавление облачности среднего яруса вызывает увеличение притока по сравнению с безоблачным случаем в слое 850—500 мб. Так как на этих графиках нанесены величины  $\Delta F$ , относящиеся к слоям различной толщины, то из рассмотрения кривых нельзя сделать вывода о росте притока с высотой в этом слое. Увеличение притока к слою объясняется большой толщиной слоя (350 мб). На рисунке толщина слоя показана стрелкой. В табл. 2 приведены притоки к слою в кал/см<sup>2</sup> мин., а также выхолаживание единичных слоев внутри данного слоя в град/сутки. Из табл. 2 видно, что выхолаживание по сравнению с безоблачным случаем увеличивается в тех слоях, где расположена более высокая облачность. Для оценок влияния облачности на притоки составлена табл. 3, в которой приведено отношение  $\Delta F_{\text{обл}}/\Delta F_{\text{безобл}}$  для рассматриваемых случаев задания облачности. Эта величина существенно возрастает в слоях, где наблюдается облачность. Возрастание притока связано с уменьшением эффективного потока на границах слоя (см. табл. 1, рис. 2), причем под облаком это уменьшение значительно сильнее. Поэтому приток возрастает. При рассмотрении притоков оказывается, что влияние перемещения облачного слоя на 0,4—0,5 км внутри данного слоя и изменения толщины слоя незначительны.

Поднятие облачного слоя на 400 м приводит к изменению притока на 10—15%. При этом выхолаживание колеблется в пределах всего 0,5 град./сутки.

Таблица 3

Влияние облачности на приток длинноволновой радиации

Толщина и высота нижней границы облаков	Слой (мб)	$\Delta F_{\text{обл}}/\Delta F_{\text{безобл}}; \left(\frac{dT}{dt}\right)_{\text{обл}}/\left(\frac{dT}{dt}\right)_{\text{безобл}}$		
		$\hat{C}_1=0,7$ $\hat{C}_2=0,0$ $\hat{C}_3=0,0$	$\hat{C}_1=0,7$ $\hat{C}_2=0,2$ $\hat{C}_3=0,0$	$\hat{C}_1=0,4$ $\hat{C}_2=0,2$ $\hat{C}_3=0,0$
$i_1=946$ мб	1000—850	1,86 *	0,95 *	0,88 *
$\Delta h_1=400$ м	850—500	1,05	1,91 *	1,45 *
$\Delta h_2=500$ м	500—300	0,99	0,88	0,84
$i_1=992$ мб	1000—850	1,94 *	1,03 *	1,20 *
$\Delta h_1=800$ м	850—500	1,05	1,91 *	1,45 *
$\Delta h_2=500$ м	500—300	0,99	0,88	0,84
$i_1=992$ мб	1000—850	2,0 *	1,08 *	1,23 *
$\Delta h_1=400$ м	850—500	1,03	1,86 *	1,44 *
$\Delta h_2=500$ м	500—300	0,99	0,67	0,83

Примечание. Звездочкой (\*) обозначены величины, относящиеся к слоям, внутри которых имеется облачность.

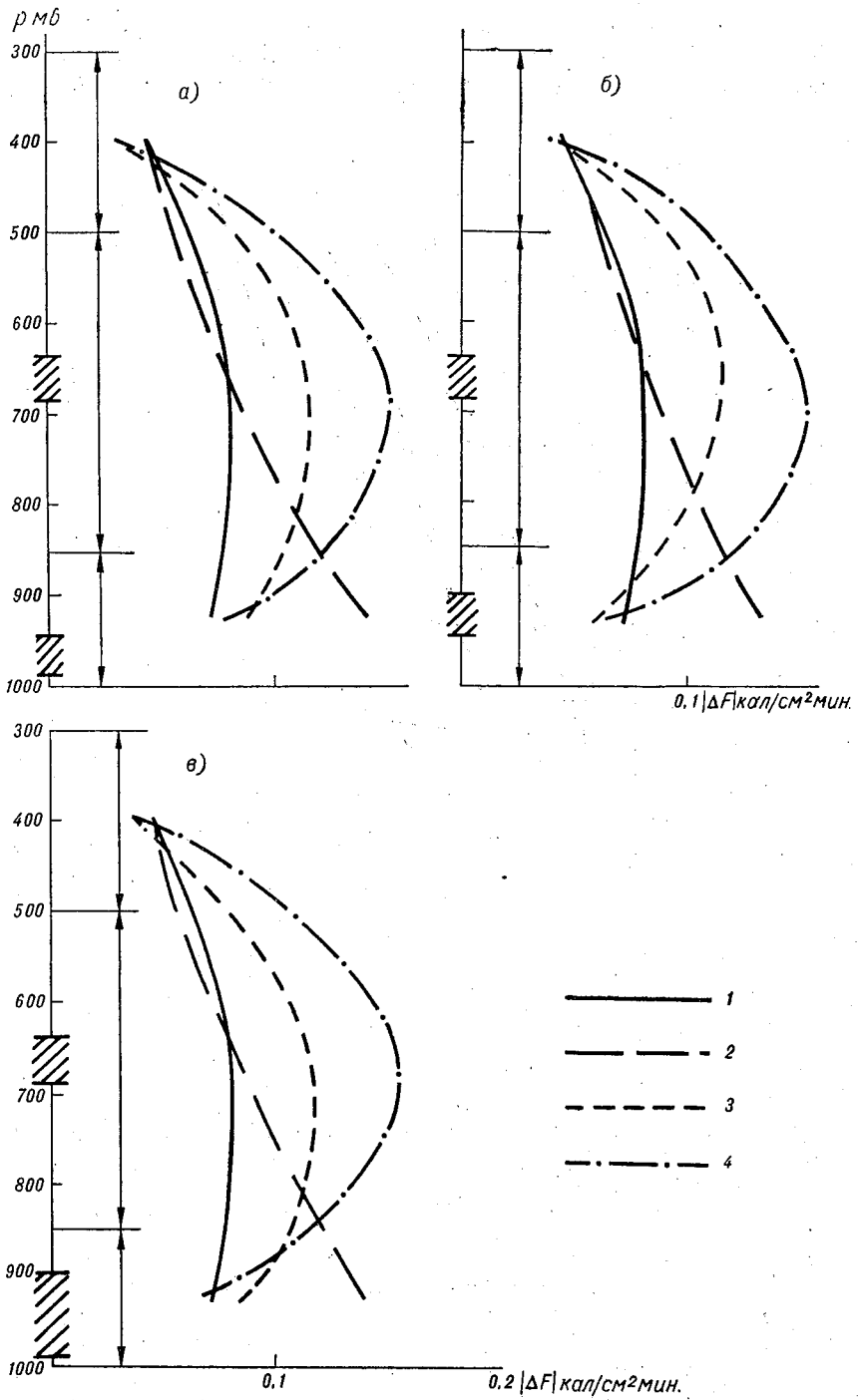


Рис. 3.  
 Усл. обозначения см. рис. 2.

## Влияние облачности среднего и верхнего ярусов

Расчеты при отсутствии облачности нижнего яруса представлены на рис. 4. Влияние облачности среднего и верхнего ярусов аналогично предыдущему случаю. Рисунок интересно рассмотреть с точки зрения

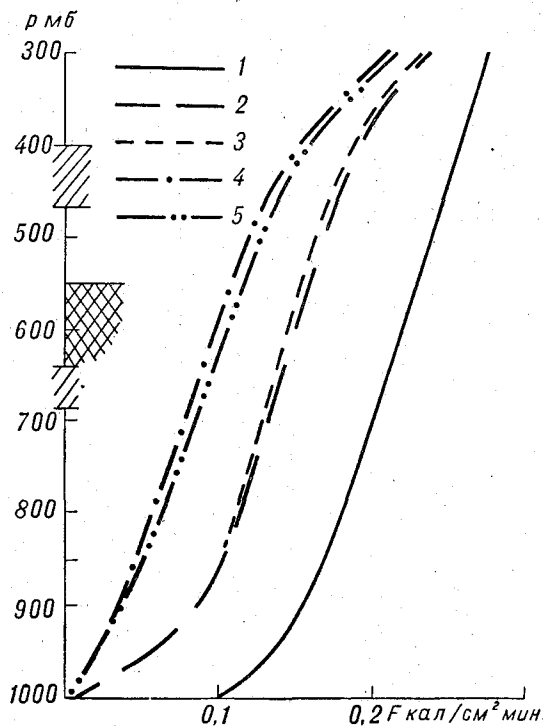


Рис. 4. Влияние облачности среднего и верхнего ярусов на потоки.

1 — безоблачно; 2 —  $\hat{C}_1=0$ ,  $\hat{C}_2=0,2$ ,  $\hat{C}_3=0,8$ ,  $\Delta h_2=500$  м;  
 3 —  $\hat{C}_1=0$ ,  $\hat{C}_2=0,2$ ,  $\hat{C}_3=0,8$ ,  $\Delta h_2=1650$  м; 4 —  $\hat{C}_1=0$ ,  $\hat{C}_2=0,8$ ,  $\hat{C}_3=0,2$ ,  
 $\Delta h_2=500$  м; 5 —  $\hat{C}_1=0$ ,  $\hat{C}_2=0,8$ ,  $\hat{C}_3=0,2$ ,  $\Delta h_2=1650$  м.

влияния изменения толщины облаков среднего яруса (или поднятия верхней границы). На потоки под облаком изменение толщины облака от 500 до 1650 м влияет мало. Над облаком влияние также мало как для облачности, характеризующейся  $\hat{C}_2=0,2$  и  $\hat{C}_3=0,8$ , так и для облачности, характеризующейся  $\hat{C}_2=0,8$   $\hat{C}_3=0,2$ .

Объяснение этому можно, очевидно, найти в том, что, с одной стороны, поднятие верхней границы облака ведет к уменьшению излучения, идущего вверх от этой границы, в связи с уменьшением температуры границы. С другой стороны, уменьшается толщина слоя между верхней границей облака и данным уровнем, в котором происходит поглощение радиации. Эти два фактора накладываются таким образом, что поток над облаком меняется незначительно.

Перемещение слоя облаков среднего яруса постоянной толщины с уровня 2000 м на уровень 3000 м влияет на приток радиации к слою

850—500 мб в пределах 10—15% при разных условиях облачности. На приток радиации к слою 500—300 мб это перемещение практически не влияет.

Таким образом, рассмотрение обоих примеров позволяет сделать следующие выводы.

1. Наиболее важным фактором, влияющим на величину длинноволнового потока и притока радиации, является степень покрытости небосвода облаками (балл облачности).

2. Основное влияние облачность оказывает на приток и потоки в слое, внутри которого расположена облачность.

3. Облачность может увеличить выхолаживание этого слоя атмосферы по сравнению с безоблачным случаем в 2—3 раза.

4. Для расчета потока и притока длинноволновой радиации к слою в первую очередь следует выяснить, имеется ли облачность между уровнями, для которых производятся гидродинамические расчеты.

5. Важно также знать, имеется ли один слой облачности или их несколько.

6. Требуемая точность задания границ облачности не представляется высокой. Колебания границ и толщины слоя в пределах 500 м для облаков нижнего яруса и в пределах 1—1,5 км для облаков среднего яруса не влияют существенно на величины потока и притока.

Этот вывод представляется нам важным.

Ранее уже упоминалось, что в настоящее время получать границы облачности из гидродинамической схемы нереально в случае малого вертикального разрешения. Приближенные же методы безусловно будут давать границы и толщину облака с большой ошибкой.

Однако полученные выводы позволяют использовать приближенные методы определения облачности для расчета притоков тепла.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Шве́д М. Е., Шнееров Б. Е., Колоскова Л. Ф. Об использовании результатов радиационных измерений со спутников в модели крупномасштабных атмосферных движений. Труды ГГО, вып. 166, 1964.
2. Мелешко В. П. Численный прогноз облачности и осадков с учетом притоков тепла и влаги. Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Гидрометеоиздат, Л., 1964.
3. Martin D. E. The relation between non-adiabatic heating and the errors of numerical forecasts. Proc. Int. Symp. on Numerical Weather Prediction in Tokyo, 1962.
4. Staff Members of Electronic Computation Center. 72-hr baroclinic forecast by adiabatic quasi-geostrophic model. J. Met. Soc. Japan, ser. II, vol. 43, No. 5, 1965.
5. Gamba K. The role of the sensible and latent heats in the baroclinic atmosphere. J. Met. Soc., Japan, ser. II, vol. 41, No. 4, 1963.
6. Винников К. Я. Уходящее излучение системы Земля—атмосфера. Труды ГГО, вып. 168, 1965.
7. Smagorinsky I. On the dynamical prediction of large-scale condensation by numerical methods. Monograph No. 5. American Geophysical Union No. 5, 1960. Physics of Precipitation.
8. Блинова Е. Н. Гидродинамические исследования нестационарных атмосферных процессов планетарного масштаба. ДАН СССР, т. 140, № 2, 1961.
9. Пурганский В. С. К учету влияния неадиабатических факторов при краткосрочном прогнозе полей геопотенциала на нижних уровнях атмосферы. Труды ЦИП, вып. 126, 1963.
10. Minz I. Very long-term global integration of primitive equations of atmosphere. Proceedings of the WMO/IUGG Symposium on the Research and Development Aspects of Long-Range Forecasting, Boulder, Colorado, June 29—July, 1964.
11. Takahasi K., Katayama A., Asakura T. A. numerical experiment of the atmospheric radiation. J. Met. Soc., Japan, vol. 38, No. 4, 1960.

12. Manabe S., Smagorinsky I., Strickler R. T. Simulated climatology of the general circulation model with hydrological cycle. *Monthly Weather Review*, No. 12, 1965.
13. Manabe S., Strickler R. T. Thermal equilibrium of the atmosphere with a convective adjustment. *J. Atm. Sci.*, vol. 21, No. 4, 1964.
14. London I. A. A study of the atmospheric heat balance. New York Univ. Final Rep., Contract NAV 19 (122—165), 1957.
15. Фейгельсон Е. М. Радиационные процессы в слоистообразных облаках. Изд. «Наука», 1964.
16. Берлянд М. Е., Берлянд Т. Г. Определение эффективного излучения земли с учетом влияния облачности. *Изв. АН СССР, сер. геофиз.*, № 1, 1952.
17. Шнейеров Б. Е. О расчете радиационного баланса Земля—атмосфера и его составляющих. *Метеорология и гидрология*, № 7, 1963.
18. Гандин Л. С. [и др.]. Основы динамической метеорологии. Гидрометеиздат, Л., 1955.
19. Каган Р. Л. О расчете потоков теплового излучения в безоблачной атмосфере. *Труды ГГО*, вып. 174, 1965.
20. Шехтер Ф. Н. К вычислению лучистых потоков тепла в атмосфере. *Труды ГГО*, вып. 22, 1950.
21. Шехтер Ф. Н. Спектральные и интегральные функции пропускания длинноволновой радиации. *Труды ГГО*, вып. 184, 1967.
22. Кондратьев К. Я., Нийлис Х. Ю. К вопросу о тепловом излучении в атмосфере. *Научн. сообщения*, т. 13, (Вильнюс), 1962.



### ЧЕТЫРЕХУРОВЕННАЯ НЕАДИАБАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОГНОЗА МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ НА ПОЛУШАРИИ

Интегрирование полной системы уравнений, в которой учитывалось бы большое число физических факторов, влияющих на формирование погоды, представляет собой довольно сложную задачу как с физической, так и математической точки зрения.

К настоящему времени в ряде работ Г. И. Марчука [4, 5] предложен алгоритм решения системы уравнений гидротермодинамики, в котором использована идея расщепления многомерных уравнений на более простые, одномерные. В данной работе метод расщепления применен для построения четырехуровневой неадиабатической модели атмосферы.

В качестве исходных уравнений задачи рассматриваются полные уравнения динамики и термодинамики атмосферных процессов в сферической системе координат:

$$\left. \begin{aligned}
 & \frac{\partial v_\lambda}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta}{a_0} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \widehat{\omega} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \zeta} + \frac{\text{ctg } \theta}{a_0} v_\lambda v_\theta + l v_\theta = \\
 & \quad = - \frac{g}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial H}{\partial \lambda} + \alpha_1 \frac{\partial \tau_\lambda}{\partial \zeta} + \mu \Delta v_\lambda \\
 & \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta}{a_0} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \widehat{\omega} \frac{\partial v_\theta}{\partial \zeta} - \frac{\text{ctg } \theta}{a_0} v_\lambda^2 - l v_\lambda = \\
 & \quad = - \frac{g}{a_0} \frac{\partial H}{\partial \theta} + \alpha_1 \frac{\partial \tau_\theta}{\partial \zeta} + \mu \Delta v_\theta \\
 & \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta}{a_0} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \widehat{\omega} \frac{\partial T}{\partial \zeta} - \frac{R\bar{T}}{g} (\gamma_a - \gamma) \frac{\widehat{\omega}}{\zeta} = \\
 & \quad = \alpha_2 \frac{\partial P_T}{\partial \zeta} + \mu \Delta T + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial \zeta} (S - F) + \frac{L}{c_p} r \\
 & \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{v_\lambda}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial q}{\partial \lambda} + \frac{v_\theta}{a_0} \frac{\partial q}{\partial \theta} + \widehat{\omega} \frac{\partial q}{\partial \zeta} + \widehat{\omega} \bar{\gamma}_q = \alpha_1 \frac{\partial E}{\partial \zeta} + \mu \Delta q - r \\
 & \frac{1}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{1}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta v_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial \zeta} = 0 \\
 & T = -\zeta \frac{g}{R} \frac{\partial H}{\partial \zeta}
 \end{aligned} \right\} (1)$$

Здесь  $v_\lambda, v_\theta, \hat{\omega}$  — составляющие скоростей в системе координат  $\lambda, \theta, \zeta$  ( $\zeta = \frac{p}{p_0}$ );  $T, q, H$  — отклонения температуры, удельной влажности и геопотенциала от их стандартных значений, зависящих лишь от  $\zeta$ ;  $a_0$  — радиус земли;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $r$  — количество сконденсированного водяного пара в единице массы за единицу времени;  $c_p$  — теплоемкость при  $p = \text{const}$ ;  $L$  — скрытая теплота конденсации;  $R$  — газовая постоянная;  $\bar{T}$  — среднее значение температуры в атмосфере;  $\gamma_a$  и  $\gamma$  — сухоадиабатический и стандартный вертикальные градиенты температуры;  $\bar{\gamma}_q$  — стандартный градиент удельной влажности,  $\tau_\lambda, \tau_\theta$  — составляющие турбулентного напряжения трения;  $P_\tau, E$  — турбулентные потоки тепла и влаги;  $S, F$  — коротковолновая радиация и эффективное излучение.

$$\alpha_1 = \frac{g}{RT}, \quad \alpha_2 = \frac{g}{c_p P_0}, \quad \hat{\omega} = \frac{1}{P_0} \frac{dp}{dt},$$

$$\Delta = \frac{1}{a_0^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{a_0^2 \partial \lambda^2} + \frac{\text{ctg } \theta}{a_0^2} \frac{\partial}{\partial \theta}.$$

В областях конденсации водяного пара температура воздуха связана с удельной влажностью соотношением Магнуса

$$q = 622 \frac{e_0}{p} \exp \frac{17,15 (T' - 273)}{T' - 38}, \quad (1')$$

где  $T'$  — температура ( $^{\circ}\text{K}$ ).

Остановимся на вопросе о граничных условиях для системы уравнений (1).

На верхней границе атмосферы при  $\zeta = 0$

$$\left. \begin{aligned} \tau_\theta = \tau_\lambda = P_\tau = E = 0 \\ \hat{\omega} = 0 \end{aligned} \right\}, \quad (2)$$

при  $\zeta = 1,0$

$$\left. \begin{aligned} \hat{\omega} = \alpha_1 \left( \frac{dH}{dt} + a\Delta H \right) \\ \tau_\lambda = \varphi_1(v_\lambda, v_\theta), \quad \tau_\theta = \varphi_2(v_\lambda, v_\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2')$$

Над сушей в качестве дополнительного соотношения используется уравнение теплового баланса, отнесенное к уравнению  $\zeta = 1,0$

$$P_\tau + LE + \Pi = S - F. \quad (2'')$$

Здесь  $\Pi$  — поток тепла в почву. Над океаном

$$\left. \begin{aligned} P_\tau = \varphi_3(T_S, T, v_\lambda, v_\theta) \\ E = \varphi_4(T_S, q, v_\lambda, v_\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2''')$$

Область интегрирования представляет собой полусферу с криволинейными координатами  $\lambda$  и  $\theta$ , а также  $\zeta$ . Введем в рассмотрение семейство точек по каждой переменной

$$\lambda_i = i\Delta\lambda; \quad \theta_k = \Delta\theta_k \quad (i, k = 0 \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots),$$

$$\zeta_m = \sum_{m=1}^M \Delta\zeta_m + \zeta_0 \quad (m = 0, 1, 2 \dots),$$

образующее пространственную сетку с шагами  $\Delta\lambda$ ,  $\Delta\theta$  и  $\zeta_m$  соответственно. В данном случае шаг по  $\zeta$  принимается переменным, хотя такое предположение не является обязательным.

Поскольку задача решается на полусфере, боковые граничные условия задаются на экваторе. Для всех моментов времени принимается

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0 \quad (2''''')$$

Система уравнений (1) с выписанными выше граничными условиями будет замкнутой, если притоки тепла, влаги и количества движения, входящие в уравнения, выражаются через основные функции системы (1).

Разделим весь промежуток интегрирования  $0 \leq t \leq T$  на равномерные шаги  $\Delta t$  так, что

$$t_j = \Delta t_j \quad (j=0, 1, 2, \dots, J),$$

где  $\Delta t = t_{j+1} - t_j$  — полный временной шаг. Далее разобьем каждый временной шаг на шесть дробных интервалов, причем для каждого из них определим одномерные уравнения из системы (1).

Введем в рассмотрение вектор-функцию

$$\varphi = \{ v_\lambda, v_\theta, T, q \}.$$

Тогда на первом дробном интервале из системы уравнений (1) выделим одномерные по  $\theta$  уравнения, которые в векторной форме принимают вид

$$\frac{\varphi^{j+1/6} - \varphi^j}{\Delta t} + \frac{v_\theta^j}{a_0} \frac{\partial \varphi^{j+1/6}}{\partial \theta} - \frac{\mu}{a_0^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi^{j+1/6}}{\partial \theta^2} + \text{ctg } \theta \frac{\partial \varphi^{j+1/6}}{\partial \theta} \right). \quad (3)$$

В дальнейшем уравнение (3) будем относить к некоторому уровню  $m$  по переменной  $\zeta$ . Вопрос о том, какие уровни выбраны за основные будет рассматриваться ниже.

Аппроксимируем производные по  $\theta$  центральными разностями, а третий член в левой части представим в виде односторонней разности, направленной против потока. Тогда дифференциальное уравнение (3) приводится к трехточечному виду

$$b_n \varphi_{n+1}^{j+1/6} - c_n \varphi_n^{j+1/6} + a_n \varphi_{n-1}^{j+1/6} = -\varphi_n^j. \quad (4)$$

Коэффициенты  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  определяются по формулам:

$$a_n = (1 - \delta) \frac{\Delta t |v_\theta|_n^j}{a_0 \Delta \theta} + \frac{\Delta t \mu}{a_0^2} \left( \frac{1}{\Delta \theta^2} - \frac{\text{ctg } \theta}{2\Delta \theta} \right),$$

$$b_n = \delta \frac{\Delta t |v_\theta|_n^j}{a_0 \Delta \theta} + \frac{\Delta t \mu}{a_0^2} \left( \frac{1}{\Delta \theta^2} + \frac{\text{ctg } \theta}{2\Delta \theta} \right),$$

$$c_n = 1 + \frac{\Delta t |v_\theta|_n^j}{a_0 \Delta \theta} + \frac{\Delta t \mu}{a_0^2} \left( \frac{2}{\Delta \theta^2} \right),$$

$$\delta = \begin{cases} 1 & v_{\theta n}^j \leq 0 \\ 0 & v_{\theta n}^j > 0. \end{cases}$$

Уравнение (4) решается методом прогонки. Прогоночные коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\alpha_n = \frac{a_{n+1}}{c_{n+1} - b_{n+1} \alpha_{n+1}}, \quad \beta_n = \frac{\varphi_{n+1}^j + \beta_{n+1} b_{n+1}}{c_{n+1} - b_{n+1} \alpha_{n+1}}, \quad (5)$$

для обратной прогонки имеем

$$\varphi_{n+1} = \alpha_n \varphi_n + \beta_n. \quad (6)$$

Из граничного условия (2''') следует, что на экваторе  $\alpha_n = 1$ ,  $\beta_n = 0$ .

Разностное уравнение (4) имеет первый порядок аппроксимации по переменным  $t$  и  $\theta$ . Чтобы повысить порядок аппроксимации этого уравнения до второго по обоим переменным, воспользуемся схемой корректора

$$\varphi_n^{j+2/6} = \varphi_n^j - \frac{v_{\theta n}^j \Delta t}{a_0 2 \Delta \theta} (\varphi_{n+1}^{j+1/6} - \varphi_{n-1}^{j+1/6}). \quad (7)$$

Г. И. Марчук предложил схему корректора для случая, когда турбулентный обмен отсутствует. Поскольку турбулентность вносит весьма малый вклад за время  $\Delta t$ , ее, по-видимому, можно включить в расчетную схему до корректировки функции  $\varphi^{j+1/6}$ .

При решении задачи на полусфере система уравнений (1), а следовательно, и векторное уравнение (3) имеют особенность в полюсе. Эту трудность можно обойти, вводя в окрестности полюса декартову систему координат. С помощью линейного преобразования

$$U = P_1 V$$

можно определить скорости в новой системе координат, где  $U = (u, v)$ ;  $V = (v_\lambda, v_\theta)$  — векторы-функции составляющих ветра в декартовых и сферических координатах соответственно. Матрица линейного преобразования  $P_1$  имеет вид

$$P_1 = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \lambda; & -\sin \theta \sin \lambda \\ \cos \theta \sin \lambda; & \sin \theta \cos \lambda \end{vmatrix}.$$

Предполагается, что преобразование является конформным относительно рассматриваемой линии  $\theta$  всегда.

В окрестности полюса имеем

$$\frac{\varphi^{j+1/6} - \varphi^j}{\Delta t} + v \frac{\partial \varphi^{j+1/6}}{\partial y} - \mu \frac{\partial^2 \varphi^{j+1/6}}{\partial y^2} = 0. \quad (8)$$

Если ввести единую систему отсчета для рассматриваемой линии  $\theta$ , то можно выполнить прогонку через полюс, используя граничные условия на экваторе.

На третьем дробном интервале рассматривается векторное уравнение вида

$$\frac{\varphi^{j+3/6} - \varphi^{j+2/6}}{\Delta t} + \frac{v_\lambda^j}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial \varphi^{j+3/6}}{\partial \lambda} - \frac{\mu}{a_0^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi^{j+3/6}}{\partial \lambda^2} = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) представляется в конечных разностях аналогично тому, как это сделано на первом дробном шаге. В результате имеем

$$a_i \varphi_{i-1}^{j+3/6} - c_i \varphi_i^{j+3/6} + b_i \varphi_{i+1}^{j+3/6} = -\varphi_i^{j+2/6}. \quad (10)$$

Коэффициенты  $a_i, b_i, c_i$  определяются по формулам:

$$a_i = (1 - \delta) \frac{\Delta t |v_\lambda|_i^j}{a_0 \Delta \lambda \sin \theta} + \frac{\mu \Delta t}{a_0^2 \Delta \lambda^2 \sin^2 \theta},$$

$$b_i = \delta \frac{\Delta t |v_\lambda|_i^j}{a_0 \Delta \lambda \sin \theta} + \frac{\mu \Delta t}{a_0^2 \Delta \lambda^2 \sin^2 \theta},$$

$$c_i = 1 + \frac{\Delta t |v_\lambda|_i^j}{a_0 \Delta \lambda \sin \theta} + \frac{2\Delta t \mu}{a_0^2 \Delta \lambda \sin^2 \theta}.$$

Как известно, по переменной  $\lambda$  (т. е. вдоль круга широты) решение уравнения (9) должно быть периодическим

$$\varphi_{i+l} \equiv \varphi_i,$$

а это значит, что матрица коэффициентов

$$A_n = \begin{vmatrix} -c_1 & a_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_l \\ b_2 & -c_2 & a_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_3 & -c_3 & a_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -c_{l-2} & a_{l-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{l-1} & -c_{l-1} & a_{l-1} \\ a_l & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_l & -c_l \end{vmatrix}$$

для системы уравнений (10), записанной в виде

$$A_l \vec{\varphi}_l = -\vec{\psi}_l, \quad (11)$$

где

$$\vec{\varphi}_l = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l\},$$

$$\vec{\psi}_l = \{\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_l\},$$

не является трехдиагональной и решение нельзя получить с помощью обычного метода прогонки. С другой стороны, решение системы уравнений (11) можно представить в виде [1]

$$\vec{\varphi}_{l-1} = \vec{P}_{l-1} + \varphi_l \vec{q}_{l-1},$$

где  $\vec{P}_{l-1} = A_{l-1}^{-1} \vec{\psi}_{l-1}$  — решение для усеченной системы, т. е. системы, которая получается, если выбросить нижнюю строку и крайний правый столбец в матрице  $A_l$ , а  $\vec{q}_{l-1} = A_{l-1}^{-1} \vec{U}_{l-1}$  — решение усеченной системы, в которой вместо правой части используется крайний правый столбец матрицы  $A_l$ .

Поскольку  $A_{l-1}$  является матрицей Якоби, решение систем для  $\vec{P}_{l-1}$  и  $\vec{q}_{l-1}$  можно получить методом прогонки, т. е.

$$\left. \begin{aligned} P_i &= \alpha_{i+1} P_{i+1} + \beta_{i+1} \\ q_i &= \alpha_{i+1} q_{i+1} + \gamma_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Коэффициенты  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\gamma_i$  находятся с помощью рекуррентных соотношений

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{i+1} &= \frac{a_i}{c_i + \alpha_i b_i}, & \beta_{i+1} &= \frac{\varphi_i^{j+2/6} + b_i \beta_i}{c_i - \alpha_i b_i} \\ \gamma_{i+1} &= \frac{b_i \gamma_i}{c_i - \alpha_i b_i} \quad (i=2, 3, \dots, I) \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

При этом

$$\alpha_2 = \frac{a_1}{c_1}, \quad \beta_2 = \frac{\varphi_1^{j+2/6}}{c_1}, \quad \gamma_2 = \frac{b_1}{c_1}.$$

Из условия периодичности решения имеем для обратной прогонки

$$P_I = 0, \quad q_I = 1$$

и, наконец,

$$\varphi_I = \frac{\beta_{I+1} + \alpha_{I+1} P_I}{1 - \alpha_{I+1} q_I - \gamma_{I+1}}. \quad (14)$$

Данный метод является устойчивым по переменной  $\lambda$ , поскольку для системы (10) выполняется условие

$$a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad c_i > a_i + b_i.$$

Схема корректора по  $\lambda$  имеет вид

$$\varphi_i^{j+4/6} = \varphi_i^{j+2/6} - \frac{v_{\lambda i}^j \Delta t}{a_0 2\Delta \lambda \sin \theta} (\varphi_{i+1}^{j+3/6} - \varphi_{i-1}^{j+3/6}). \quad (15)$$

На пятом дробном интервале интегрирование выполняется по вертикали. Исходное одномерное уравнение

$$\frac{\varphi^{j+5/6} - \varphi^{j+4/6}}{\Delta t} - \frac{\widehat{\omega}^j}{a_0} \frac{\partial \varphi^{j+5/6}}{\partial \zeta} + \frac{\partial B^j}{\partial \zeta} + Z^j = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned} B^j &= \{ \alpha_1 \tau_{\lambda}^j; \alpha_1 \tau_{\theta}^j; \alpha_1 P_1^j + \alpha_2 (S - F)^j; \alpha_1 E^j \}, \\ Z^j &= \left\{ -\frac{\text{ctg } \theta}{a_0} (v_{\lambda} \ v_{\theta})^j; \frac{\text{ctg } \theta}{a_0} (v_{\lambda}^2)^j; \frac{L}{c_p} r; -r - r \bar{\gamma}_q \omega_j \right\}, \end{aligned}$$

приведем к дивергентному виду. С этой целью используем уравнение неразрывности, записанное для момента времени  $\Delta t$ . Тогда имеем

$$\frac{\varphi^{j+5/6} - \varphi^{j+4/6}}{\Delta t} - \varphi^{j+5/6} D^j = -\frac{\widehat{\omega}_j \varphi^{j+5/6}}{\partial \zeta} + \frac{\partial B^j}{\partial \zeta} + Z^j. \quad (17)$$

Здесь  $D$  — плоская дивергенция.

$$D = \frac{1}{a_0 \sin \theta} \left( \frac{\partial v_{\lambda}}{\partial \lambda} + \frac{\partial (\sin \theta v_{\lambda})}{\partial \theta} \right).$$

Применим к уравнению (17) метод интегральных соотношений, предложенный А. А. Дородницыным [2] и использованный в задаче краткосрочного прогноза погоды В. М. Кадышниковым [3]. Этот метод позволяет избежать процедуры дифференцирования функции, заданной дискретно и, что особенно важно, перейти от притоков тепла, влаги и количества движения к их величинам, выраженным через потоки.

Разделим интервал изменения  $\zeta$  (от 0 до 1) на четыре промежутка точками  $\zeta_m$ , так что

$$\zeta_1=0; \zeta_2=0,3; \zeta_3=0,5; \zeta_4=0,7; \zeta_5=1,0.$$

Умножим уравнение (17) на  $\zeta$  и перепишем в виде

$$\frac{\partial \zeta \Lambda}{\partial \zeta} = \Lambda + \zeta M = f, \quad (18)$$

где

$$M = \frac{\varphi^{j+5/6} - \varphi^{j+4/6}}{\Delta t} - Z^j - \varphi^{j+5/6} D^j,$$

$$\Lambda = \widehat{\omega}^j \varphi^{j+5/6} + B^j.$$

Проинтегрируем (18) по  $\zeta$  от 0 до  $\zeta_m$  ( $m=2, 3, 4, 5$ )

$$\zeta_m \Lambda_m = \int_0^{\zeta_m} f d\zeta. \quad (19)$$

Здесь принято  $\zeta \Lambda = 0$  при  $\zeta = 0$ .

Представим правую часть уравнения (18) в виде полинома четвертой степени, принимающего значения  $f_m$  при  $\zeta = \zeta_m$

$$f = a_0 + a_1 \zeta + a_2 \zeta^2 + a_3 \zeta^3 + a_4 \zeta^4. \quad (20)$$

Значение  $a_r$  можно определить из системы уравнений, если записать выражения для  $f$  на всех уровнях ( $m=1, 2, 3, 4, 5$ ).

$$\vec{f} = (\zeta) \vec{a} \quad (21)$$

$$\vec{f} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5\},$$

$$\vec{a} = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\},$$

$$(\zeta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0,3 & 0,09 & 0,027 & 0,0081 \\ 1 & 0,5 & 0,25 & 0,125 & 0,0625 \\ 1 & 0,7 & 0,49 & 0,343 & 0,2401 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножим слева систему (21) на матрицу  $(\zeta)^{-1}$ , тогда имеем

$$\vec{a} = (\zeta)^{-1} \vec{f}, \quad (22)$$

$$(\zeta)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7,7619 & 20,8333 & -21,0 & 8,9286 & -1,0 \\ 21,0476 & -92,2619 & 121,0 & -56,5476 & 6,7619 \\ -23,8096 & 130,9524 & -200,0 & 107,1429 & -14,2857 \\ 9,5238 & -59,5238 & 100,0 & -59,5238 & 9,5238 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, проинтегрируем по  $\zeta$  выражение для  $f$  в (20) четыре раза от 0 до  $\zeta_m$

$$\int_0^{\zeta_m} f d\zeta = a_0 \zeta_m + a_1 \frac{\zeta_m^2}{2} + a_2 \frac{\zeta_m^3}{3} + a_3 \frac{\zeta_m^4}{4} + a_4 \frac{\zeta_m^5}{5}; \quad (23)$$

принимая во внимание (22), имеем

$$\vec{\zeta}\bar{\Lambda} - (k_1) f_1 = (k_2) \vec{f}^* \quad (24)$$

Здесь введены следующие обозначения

$$\begin{aligned} \vec{\zeta}\bar{\Lambda} &= \{ \zeta_2 \Lambda_2; \zeta_3 \Lambda_3; \zeta_4 \Lambda_4; \zeta_5 \Lambda_5 \}, \\ k_1 &= \{ 0,0966; 0,0942; 0,0957; 0,0873 \}, \\ \vec{f}^* &= \{ f_2, f_3, f_4, f_5 \}, \end{aligned}$$

$$(k_2) = \begin{vmatrix} 0,3434 & -0,2124 & 0,0809 & -0,0084 \\ 0,4340 & -0,0833 & 0,0620 & -0,0069 \\ 0,4151 & 0,0457 & 0,1526 & -0,0093 \\ 0,4960 & -0,6167 & 0,4960 & 0,0873 \end{vmatrix}$$

Умножая слева соотношение (24) на матрицу  $(k_2)^{-1}$  и переходя к первоначальным обозначениям, получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно функции  $\varphi$

$$\left[ E + \Delta t (k_3) \vec{\omega} \right] \vec{\varphi} = \vec{\psi} + \Delta t \left[ (k_3) \vec{B} + Z - (k_4) f_1 \right], \quad (25)$$

где  $E$  — единичная матрица,  $\psi = \varphi^{j+5/6}$ ,

$$(k_3) = \begin{vmatrix} -5,5951 & 8,3998 & -2,5 & 0,2286 \\ -2,9762 & 0 & 2,9762 & -0,1905 \\ 2,50 & -8,40 & 5,5952 & 0,5333 \\ -8,9281 & 21,0 & -20,8333 & 7,7619 \end{vmatrix},$$

$$(k_4) = \{ 0,03148, -0,01931, 0,03224, -0,20036 \}.$$

Согласно граничным условиям  $\xi = 0$ ,

$$f_1 = \alpha_2 (S - F), \quad (26)$$

т. е.  $f_1$  представляет собой баланс лучистой энергии на верхней границе атмосферы.

Система уравнений (25) решается методом Гаусса.

На шестом дробном интервале рассматривается следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_\lambda^{j+1} - v_\lambda^{j+5/6}}{\Delta t} &= - \frac{g}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial H^{j+1}}{\partial \lambda} - l v_\theta^{j+1} \\ \frac{v_\theta^{j+1} - v_\theta^{j+5/6}}{\Delta t} &= - \frac{g}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial H^{j+1}}{\partial \theta} + l v_\lambda^{j+1} \\ \frac{T^{j+1} - T^{j+5/6}}{\Delta t} &= \frac{R\bar{T}}{g} (\gamma_a - \gamma) \frac{\widehat{\omega}^{j+1}}{\zeta} \\ \frac{1}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta v_\lambda^{j+1}}{\partial \lambda} + \frac{1}{a_0} \frac{\partial v_\theta^{j+1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \widehat{\omega}^{j+1}}{\partial \zeta} &= 0 \\ T^{j+1} &= - \frac{g}{R} \zeta \frac{\partial H^{j+1}}{\partial \zeta} \end{aligned} \right\} \quad (27)$$



Из первых двух уравнений находятся составляющие скорости  $v_\lambda, v_\theta$

$$\left. \begin{aligned} v_\lambda^{j+1} &= \frac{1}{1 + (\Delta t l)^2} \left[ -\frac{\Delta t g}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial H^{j+1}}{\partial \lambda} + l (\Delta t)^2 \frac{g}{a_0} \frac{\partial H^{j+1}}{\partial \theta} + \right. \\ &\quad \left. + v_\lambda^{j+5/6} - \Delta t l v_\theta^{j+5/6} \right] \\ v_\theta^{j+1} &= \frac{1}{1 + (\Delta t l)^2} \left[ -\frac{(\Delta t)^2 g l}{a_0 \sin \theta} \frac{\partial H^{j+1}}{\partial \lambda} - \frac{\Delta t g}{a_0} \frac{\partial H^{j+1}}{\partial \theta} + \right. \\ &\quad \left. + \Delta t l v_\lambda^{j+5/6} + v_\theta^{j+5/6} \right] \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Подставляя в уравнение неразрывности соответствующие выражения для  $v_\lambda^{j+1}$ ,  $v_\theta^{j+1}$  и  $\dot{\omega}^{j+1}$  и используя уравнение статики, получаем

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\zeta^2}{m} \frac{\partial H}{\partial \xi} + LH = -\frac{\partial}{\partial \xi} G + Q. \quad (29)$$

Здесь  $LH$  — плоский оператор, равный

$$\left. \begin{aligned} LH &= P_1 \frac{\partial^2 H^{j+1}}{\partial \lambda^2} + P_2 \frac{\partial^2 H^{j+1}}{\partial \theta^2} + P_3 \frac{\partial H^{j+1}}{\partial \lambda} + P_4 \frac{\partial H^{j+1}}{\partial \theta} \\ Q &= -P_5 \frac{\partial v_\theta^{j+5/6}}{\partial \lambda} + P_6 \frac{\partial v_\lambda^{j+5/6}}{\partial \lambda} + P_7 \frac{\partial v_\lambda^{j+5/6}}{\partial \theta} + \\ &\quad + P_8 \frac{\partial v_\theta^{j+5/6}}{\partial \theta} + P_9 v_\lambda^{j+5/6} + P_{10} v_\theta^{j+5/6} \\ G &= \frac{R \zeta}{g m} T^{j+5/6}, \quad m = \frac{\bar{T}_5}{T_m} \left( 1 - \frac{R}{g} \frac{x}{x-1} \gamma \right) \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

$P_i$  — коэффициенты, зависящие от  $\theta$  и  $\Delta t$ , имеют следующие выражения:

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{1}{a_0^2 \sin^2 \theta [1 + (2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta]}, \\ P_2 &= \frac{1}{a_0^2 [1 + (2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta]}, \\ P_3 &= \frac{2\omega \Delta t [(2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta - 1]}{a_0^2 [1 + (2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta]^2}, \\ P_4 &= \frac{\cos \theta [1 + (2\omega \Delta t)^2 (2 - \cos^2 \theta)]}{a_0^2 [1 + (2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta]^2 \sin \theta}, \\ P_5 &= \frac{2\omega \cos \theta}{g a_0 [1 + (2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta] \sin \theta}, \\ P_6 &= \frac{1}{g \Delta t a_0 [1 + (2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta] \sin \theta}, \\ P_7 &= \frac{2\omega \cos \theta}{g a_0 [1 + (2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta]}, \\ P_8 &= \frac{1}{\Delta t g a_0 [1 + (2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta]}, \end{aligned}$$

$$P_9 = \frac{2\omega}{ga_0} \left\{ \frac{\cos \theta \operatorname{ctg} \theta}{[1 + (2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta]} + \frac{2(2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta \sin \theta}{[1 + (2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta]^2} - \frac{\sin \theta}{[1 + (2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta]} \right\},$$

$$P_{10} = \frac{1}{\Delta t g a_0} \left\{ \frac{(2\omega \Delta t)^2 \sin 2\theta}{[1 + (2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta]^2} + \frac{\operatorname{ctg} \theta}{[1 + (2\omega \Delta t)^2 \cos^2 \theta]} \right\}.$$

Граничное условие (2<sup>1</sup>) с помощью уравнения притока тепла, записанного на уровне  $\zeta = 1,0$ , приводится к виду

$$\frac{\partial H^{j+1}}{\partial \zeta} - m \frac{x-1}{x} H^{j+1} = -F. \quad (31)$$

Здесь

$$F = G_5 - m \frac{x-1}{x} [H_5^j - \Delta t (V_5^j \cdot \nabla H_5^j)].$$

Как и на третьем дробном шаге к уравнению (25) удобно применить метод интегральных соотношений по вертикальной координате. Для этого умножим его на  $\zeta$  и перейдем к новой функции  $\psi = \zeta H^{j+1}$ .

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \frac{\zeta^2}{m} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - \frac{\zeta}{m} \psi + \zeta G \right) = \frac{\zeta}{m} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - \frac{\psi}{m} + G - L\psi + \zeta Q. \quad (32)$$

Граничное условие при  $\zeta = 0$  переписывается в форме

$$\frac{\partial \psi}{\partial \zeta} + \left( \frac{x-1}{x} m - 1 \right) \psi = -F. \quad (33)$$

При этом следует иметь в виду, что к уравнению (32) метод интегральных соотношений можно применить только один раз. В качестве вспомогательного соотношения рассматривается уравнение статики, проинтегрированное по вертикальной координате  $\zeta$ . При интегрировании используется очевидное допущение  $\zeta_0 H = 0$ , поскольку

$$\lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta H = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \zeta T = 0,$$

если  $T$  ограничено.

После выполненных преобразований уравнение (32), записанное относительно первоначальной функции  $H$ , образует систему

$$\vec{L}\vec{H} + \alpha_{11}(k_6)\vec{H} = \alpha_{11}(k_7)\vec{T} + \alpha_{11}(k_8)F + \vec{Q}. \quad (34)$$

Здесь

$$\vec{a} = \{a_2, a_3, a_4, a_5\}, \quad \alpha_{11} = \frac{x}{\Delta t^2 R \bar{T}_5 (x-1)};$$

$$(k_6) = \begin{vmatrix} 6,0034 & -34,5230 & 48,0901 & -20,3252 \\ 11,9394 & -34,6463 & 16,7048 & 6,3037 \\ 2,1884 & 6,8971 & -27,6808 & 18,9193 \\ -2,9386 & -6,0352 & 66,7672 & -62,8440 \end{vmatrix},$$

$$(k_7) = \begin{vmatrix} 12,4877 & -27,719 & 11,0245 & -1,3715 \\ 9,3417 & 0 & -18,4587 & 1,6075 \\ -4,3222 & 21,4714 & -19,1123 & -2,4784 \\ 14,5146 & -50,4751 & 66,9161 & -33,9200 \end{vmatrix},$$

$$(k_8) = \begin{vmatrix} 2,6604 \\ -1,0381 \\ -1,1340 \\ 17,679 \end{vmatrix}.$$

С помощью метода канонизации приведем эту систему из четырех уравнений к нормальному виду. С этой целью умножим каждое уравнение на некоторый множитель  $\beta_2^{(k)}$  и полученные результаты сложим.

$$\sum_{i=1}^4 \beta_i^{(k)} L H_{i+1} + \alpha_{11} [(6,0034\beta_1^{(k)} + 11,9394\beta_2^{(k)} + 2,1884\beta_3^{(k)} - 2,9386\beta_4^{(k)}) H_2 +$$

$$+ (-34,5230\beta_1^{(k)} - 34,6463\beta_2^{(k)} + 6,8971\beta_3^{(k)} - 6,0352\beta_4^{(k)}) H_3 +$$

$$+ (48,0901\beta_1^{(k)} + 16,7048\beta_2^{(k)} - 27,6808\beta_3^{(k)} + 66,7672\beta_4^{(k)}) H_4 +$$

$$+ (-20,3252\beta_1^{(k)} + 6,3037\beta_2^{(k)} + 18,9193\beta_3^{(k)} - 62,8440\beta_4^{(k)}) H_5] =$$

$$= \alpha_{11} (12,4877\beta_1^{(k)} + 9,3417\beta_2^{(k)} - 4,3222\beta_3^{(k)} + 14,5146\beta_4^{(k)}) T_2 +$$

$$+ (-27,719\beta_1^{(k)} + 0\beta_2^{(k)} + 21,4714\beta_3^{(k)} - 50,4751\beta_4^{(k)}) T_3 +$$

$$+ (11,0245\beta_1^{(k)} + 18,458\beta_2^{(k)} - 19,1123\beta_3^{(k)} + 66,9161\beta_4^{(k)}) T_4 +$$

$$+ (-1,3715\beta_1^{(k)} + 1,6075\beta_2^{(k)} - 2,4784\beta_3^{(k)} - 33,92\beta_4^{(k)}) T_5] +$$

$$+ \alpha_{11} (2,6604\beta_1^{(k)} - 1,0381\beta_2^{(k)} - 1,1340\beta_3^{(k)} + 17,679\beta_4^{(k)}) F + \sum_{i=1}^4 \beta_i^{(k)} Q_{i+1}. \quad (35)$$

Потребуем, чтобы

$$\left. \begin{aligned} 6,0034\beta_1^{(k)} + 11,9394\beta_2^{(k)} + 2,1884\beta_3^{(k)} - 2,9386\beta_4^{(k)} &= \lambda_k \beta_1^{(k)} \\ -34,5230\beta_1^{(k)} - 34,6463\beta_2^{(k)} + 6,8971\beta_3^{(k)} - 6,0352\beta_4^{(k)} &= \lambda_k \beta_2^{(k)} \\ 48,0901\beta_1^{(k)} + 16,7048\beta_2^{(k)} - 27,6808\beta_3^{(k)} + 66,7672\beta_4^{(k)} &= \lambda_k \beta_3^{(k)} \\ -20,3252\beta_1^{(k)} + 6,3037\beta_2^{(k)} + 18,9193\beta_3^{(k)} - 62,840\beta_4^{(k)} &= \lambda_k \beta_4^{(k)} \end{aligned} \right\}. \quad (36)$$

Система однородных уравнений (36) имеет решение, отличное от нулевого при условии, что ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} 6,0034 - \lambda_k & 11,9394 & 2,1884 & 2,9386 \\ -34,5230 & -34,6463 - \lambda_k & 6,8971 & -6,0352 \\ 48,0901 & 16,7048 & -27,6808 - \lambda_k & 66,7672 \\ -20,3252 & 6,3037 & 18,9193 & -62,840 - \lambda_k \end{vmatrix} = 0. \quad (37)$$

Из матрицы коэффициентов (37), транспонированной по отношению к матрице  $(k_6)$ , определяются четыре собственных числа  $\lambda_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ )

$$\lambda_1 = -0,2881; \quad \lambda_2 = 4,6190; \quad \lambda_3 = -28,9425; \quad \lambda_4 = -85,3179.$$

Чтобы сопоставить полученные значения  $\lambda_k$  с результатами других авторов, необходимо  $\alpha_{11}\lambda_k$  умножить на  $\Delta t^2/2$ , т. е.

$$\lambda'_k = \Delta t^2 \alpha_{11} \lambda_k.$$

В табл. 1 приводятся значения  $\lambda'_k$  и четыре первых собственных числа из работы Л. В. Руховца [7] и С. В. Немчинова [6].

Таблица 1

$k$	$\lambda'_k$	$\lambda'_k$ из [7]	$\lambda'_k$ из [6]
1	$-0,14 \cdot 10^{-12}$	$-0,16 \cdot 10^{-12}$	$-0,12 \cdot 10^{-12}$
2	$-2,28 \cdot 10^{-12}$	$-0,86 \cdot 10^{-12}$	$-4,35 \cdot 10^{-12}$
3	$-14,32 \cdot 10^{-12}$	$-5,25 \cdot 10^{-12}$	—
4	$-42,3 \cdot 10^{-12}$	$-16,22 \cdot 10^{-12}$	—

Из сравнения следует, что  $\lambda'_1$  мало отличается от значений, полученных в других работах, и лишний раз подтверждает тот факт, что уравнение с  $\lambda'_1$ , характеризующее осредненные по высоте движения, играет важную роль в описании атмосферных процессов независимо от количества рассматриваемых уровней.

Для каждого значения  $\lambda_k$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ) с точностью до постоянного множителя из системы уравнений (36) находятся составляющие собственного вектора.

Положим  $\beta_1^{(k)}=1,0$ , тогда остальные  $\beta_i^{(k)}$  легко определяются (табл. 2).

Таблица 2

$k$	$\beta_1^{(k)}$	$\beta_2^{(k)}$	$\beta_3^{(k)}$	$\beta_4^{(k)}$
1	1,0	-0,7567	1,2034	-0,0372
2	1,0	-1,0239	0,2032	-0,3939
3	1,0	-3,3332	2,3104	0,0700
4	1,0	13,6794	-56,4678	44,6033

Введем обозначения

$$\begin{aligned} 12,4877\beta_1^{(k)} + 9,3417\beta_2^{(k)} - 4,3222\beta_3^{(k)} + 14,5146\beta_4^{(k)} &= \sigma_1^{(k)}, \\ -27,719\beta_1^{(k)} + 0\beta_2^{(k)} + 21,4714\beta_3^{(k)} - 50,4751\beta_4^{(k)} &= \sigma_2^{(k)}, \\ 11,0245\beta_1^{(k)} + 18,4587\beta_2^{(k)} - 19,1123\beta_3^{(k)} + 66,9161\beta_4^{(k)} &= \sigma_3^{(k)}, \\ -1,3715\beta_1^{(k)} + 1,6075\beta_2^{(k)} - 2,4784\beta_3^{(k)} - 33,9200\beta_4^{(k)} &= \sigma_4^{(k)}, \\ 2,6604\beta_1^{(k)} - 1,0381\beta_2^{(k)} - 1,1340\beta_3^{(k)} + 17,6790\beta_4^{(k)} &= c^{(k)}. \end{aligned}$$

Значения  $\sigma_i^{(k)}$  и  $c^{(k)}$  приведены в табл. 3 и 4

Таблица 3

$k$	$\sigma_1^{(k)}$	$\sigma_2^{(k)}$	$\sigma_3^{(k)}$	$\sigma_4^{(k)}$
1	-0,3226	-0,0213	0,4976	-4,3085
2	-3,6728	-3,4737	-0,3180	9,8404
3	-27,6194	18,3529	33,0804	-14,8310
4	1031,7413	-3491,4922	3822,4083	-1352,3760

Таблица 4

$c^{(1)}$	$c^{(2)}$	$c^{(3)}$	$c^{(4)}$
1,4235	-3,4710	4,7387	841,0340

Положим

$$Y^{(k)} = \sum_{m=1}^4 \beta_m^{(k)} H_{m+1}^{j+1},$$

$$\Phi^{(k)} = \sum_{m=1}^4 (\alpha_{11}\sigma_m^{(k)} T_{m+1} + \beta_m^{(k)} Q_{m+1}) + \alpha_{11}c^{(k)} F,$$

тогда уравнение (34) переписывается в виде

$$P_1 \frac{\partial^2 Y^{(k)}}{\partial \lambda^2} + P_2 \frac{\partial^2 Y^{(k)}}{\partial \theta^2} + P_3 \frac{\partial Y^{(k)}}{\partial \lambda} + P_4 \frac{\partial Y^{(k)}}{\partial \theta} + \alpha_{11} \lambda_k Y^{(k)} = \Phi^{(k)}. \quad (38)$$

Таким образом, трехмерное уравнение для расчета поля геопотенциала оказалось в результате выполненных преобразований двумерным уравнением типа Гельмгольца относительно функций  $Y^{(k)}$  ( $k=1, 2, 3, 4$ ).

Известно [8], что величина  $\sqrt{-\lambda_k}$  определяет характерный масштаб  $L_k$  области влияния правой части уравнения (38), т. е.

$$L_k = \frac{1}{\sqrt{-\lambda_k}}.$$

Вычисления показывают, что области влияния правых частей для приведенных в табл. 1 значений собственных чисел соответственно равны:

$$L_1 \approx 2650 \text{ км}, L_2 \approx 663 \text{ км}, L_3 \approx 265 \text{ км}, L_4 \approx 167 \text{ км}.$$

Аппроксимируем производные по  $\lambda$  и  $\theta$  центральными разностями. Собирая подобные члены, получим разностный аналог дифференциального уравнения (38)

$$a_1^{(k)} Y_{i+1n}^{(k)} + a_2^{(k)} Y_{i-1n}^{(k)} + a_3^{(k)} Y_{in+1}^{(k)} + a_4^{(k)} Y_{in-1}^{(k)} - a_5^{(k)} Y_{in}^{(k)} - a_6^{(k)} \Phi_{in}^{(k)} = 0. \quad (39)$$

Коэффициенты  $a_r^{(k)}$  ( $r=1, 2, \dots, 6$ ) находятся по формулам

$$a_{1,2}^{(k)} = (\lambda_k \alpha_{11})^{-1} \left( \frac{P_1}{\Delta \lambda^2} \pm \frac{P_3}{\Delta \lambda} \right), \quad a_5^{(k)} = 2(\lambda_k \alpha_{11})^{-1} \left( \frac{P_1}{\Delta \lambda^2} + \frac{P_2}{\Delta \theta^2} - \frac{\lambda_k \alpha_{11}}{2} \right),$$

$$a_{3,4}^{(k)} = (\lambda_k \alpha_{11})^{-1} \left( \frac{P_2}{\Delta \theta^2} \pm \frac{P_4}{\Delta \theta} \right), \quad a_6^{(k)} = (\lambda_k \alpha_{11})^{-1}.$$

Уравнение (35) интегрируется методом Либмана. Чтобы обеспечить наибольшую скорость сходимости итерационного процесса, параметры релаксации для каждого уравнения (39) были разными.

После того как  $Y^{(k)}$  определены, значения геопотенциала на каждом уровне рассчитывались из соотношения

$$\vec{H} = (k_9) \vec{Y}^{(k)}, \quad (40)$$

$$(k_9) = \begin{vmatrix} 0,7880 & 0,5218 & -0,3155 & 0,0058 \\ 0,6775 & -0,3110 & -0,3649 & -0,0016 \\ 0,6195 & -0,6521 & 0,0379 & -0,0053 \\ 0,5588 & -0,7419 & 0,1669 & -0,0161 \end{vmatrix}.$$

Температура на уровне  $\zeta_5 = 1,0$  находится из соотношения

$$T_5^{j+1} = \frac{g}{R} \left( F + m \frac{x-1}{x} H^{j+1} \right); \quad (41)$$

на остальных уровнях температура определяется из уравнения статики, проинтегрированного по  $\zeta$

$$T = (k_{10}) T_5 + (k_{11}) \vec{H},$$

$$T = \{ T_2, T_3, T_4 \}.$$

где

$$(k_{10}) = \{-0,1605; 0,0956; -0,1597\},$$

$$(k_{11}) = \begin{vmatrix} -0,4473; & 1,3945; & -2,0081; & 1,0611 \\ 0,2848; & -1,1858; & 0,6830; & 0,2178 \\ -0,5517; & 0,1992; & 0,8606; & -0,1097 \end{vmatrix}.$$

Вертикальные токи  $\omega^{j+1}$  вычисляются из уравнения притока тепла, записанного соответственно для уровней  $\zeta_2=0,3$ ;  $\zeta_3=0,5$ ;  $\zeta_4=0,7$ ;  $\zeta_5=1,0$ ,

$$\hat{\omega}_m^{j+1} = \frac{\alpha \zeta_m}{(\alpha - 1) \Delta t T_{5m}^j} (T_m^{j+1} - T_m^{j+5/6}), \quad (m=2, 3, 4, 5). \quad (42)$$

Наконец, на четвертом дробном шаге производится согласование температуры и влажности в областях конденсации, исходя из того факта, что в атмосфере пересыщение не имеет места.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Если } q_{\max}^{j+1}(T) - q^{j+5/6} > 0, \quad \text{то } q^{j+1} \equiv q^{j+5/6}, \\ \text{если } q_{\max}^{j+1}(T) - q^{j+5/6} \leq 0, \quad \text{то } q^{j+1} \equiv q_{\max}^{j+1} \end{array} \right\}. \quad (43)$$

$q_{\max}$  вычисляется с помощью соотношения Магнуса (1').

В начальный момент времени по данным о температуре и геопотенциале на разных уровнях с использованием граничных условий (2)

и (2') строятся поля  $\hat{\omega}$ ,  $v_\lambda$ ,  $v_\theta$  в геострофическом приближении. На полушарии геострофический ветер вычисляется до  $20^\circ$  с. ш. На экваторе и на широте  $5^\circ$  С  $v_\lambda$  и  $v_\theta$  полагаются равными нулю. На широтах  $10$  и  $15^\circ$  С составляющие скорости находились в результате линейной интерполяции.

В настоящей работе изложена динамическая часть модели атмосферы. Методы расчета притоков тепла (лучистых, турбулентных и конденсационных) исследовались Л. Р. Дмитриевой и будут изложены в другой работе.

Чтобы более четко представить последовательность расчета притоков тепла и влаги, коротко опишем предлагаемый алгоритм счета.

В начальный момент времени на основании эмпирических соотношений между  $T$ ,  $q$  и  $\hat{\omega}$ , с одной стороны, и облачностью, с другой, строятся поля облачности на разных уровнях. Эти поля используются при расчете лучистых потоков тепла. Турбулентные потоки тепла  $P_T$  и влаги  $E$  над океаном определяются по известной температуре поверхности океанов и значениям  $T$  и  $q$  на уровне  $\zeta_5=1,0$ . Над сушей  $P_T$  вычисляется из уравнения теплового баланса, в котором в качестве  $\Pi$  и  $LE$  используются климатические значения. Если  $q_{\max}(T) - q \leq 0$ , вычисляется приток тепла за счет конденсации.

Горизонтальные составляющие турбулентного напряжения трения  $\tau_\lambda$  и  $\tau_\theta$  на уровне  $\zeta_5=1,0$  определяются по данным о ветре на этом же уровне. На вышележащих уровнях ( $\zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ ) полагается, что

$$P_T = E = \tau_\lambda = \tau_\theta = 0.$$

Вычисленные значения  $S - F$ ,  $P_T$ ,  $E$ ,  $r$ ,  $\tau_\lambda$ ,  $\tau_\theta$  включаются в основные уравнения на третьем дробном шаге.

Описанная процедура счета притоков тепла и влаги повторяется в начале каждого временного шага. Предлагаемый здесь алгоритм был реализован на электронной вычислительной машине.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамов А. А., Андреев В. Б. О применении метода прогонки к нахождению периодических решений дифференциальных и разностных уравнений. Ж. вычислит. мат. и мат. физ., т. 3, № 2, 1963.
2. Дородницын А. А. Об одном методе численного решения некоторых задач аэрогидродинамики. Труды Всесоюзного математического съезда, т. 2, 1956.
3. Кадышников В. М. О краткосрочном прогнозе метеорологических элементов по полным уравнениям гидротермодинамики. Труды Вычислительного Метеорологического Центра, вып. 1, 1963.
4. Марчук Г. И. Численный алгоритм решения уравнений прогноза погоды. ДАН СССР, т. 156, № 2, 1964.
5. Марчук Г. И. Численный прогноз погоды на сфере. ДАН СССР, т. 156, № 4, 1964.
6. Немчинов С. В. О решении уравнения для прогноза поля атмосферного давления. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 12, 1959.
7. Руховец Л. В. Оптимальная малопараметрическая модель прогноза поля геопотенциала на большом числе уровней. Труды симпозиума по численным методам прогноза погоды. Гидрометеоздат, Л., 1964.
8. Юдиц М. И. Новые методы и проблемы краткосрочного прогноза погоды. Гидрометеоздат, Л., 1963.

## СОДЕРЖАНИЕ

Г. Д. Кудашкин, М. И. Юдин. О выборе и применении аналогов в целях уточнения численных прогнозов погоды . . . . .	3
К. В. Пятыгина, Э. Л. Федорова. Вычисление вертикальных скоростей, осредненных во времени . . . . .	19
А. С. Дубов. О климатологических значениях притока тепла . . . . .	39
К. В. Пятыгина, Э. А. Федорова, Л. С. Орлова, Л. С. Кучумова. Прогноз полей ветра и температуры для нескольких уровней атмосферы на основе агеострофической схемы . . . . .	48
Чинь Ван Тхы. Некоторые результаты прогнозов перемещений центров тайфунов по трехуровневой бароклинной модели . . . . .	60
С. П. Буличева. Суточные колебания давления термического и гравитационного происхождения . . . . .	74
В. А. Ефимов. Решение гидродинамических задач на сфере методом разделения переменных . . . . .	81
Л. Р. Дмитриева-Арраго. Расчет потоков и притоков длинноволновой радиации в облачных условиях . . . . .	88
В. П. Мелешко. Четырехуровневая неадиабатическая модель прогноза метеорологических элементов на полушарии . . . . .	105

### Труды ГГО, вып. 197

#### Применение гидродинамических методов в прогнозе погоды

Редактор *Л. К. Сурыгина* Техн. редактор *Г. В. Ивкова*  
Корректоры: *Т. В. Алексеева* и *Е. И. Бородина*

---

Сдано в набор 12/X 1967 г. Подписано к печати 24/IV 1968 г.  
Бум. тип. № 1 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бум. л. 3,875. Печ. л. 10,85. Уч.-изд. л. 9,98.  
Тираж 670 экз. М-12385. Индекс МЛ-146.  
Гидрометеорологическое издательство. Ленинград. В-53, 2-я линия, д. № 23.  
Заказ № 670 Цена 70 коп.

---

Ленинградская типография № 8 Главполиграфпрома  
Комитета по печати при Совете Министров СССР  
Ленинград, Прачечный пер., д. 6