

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЙ СЛУЖБЫ
ПРИ СОВЕТЕ МИНИСТРОВ СССР

06
778

ГЛАВНАЯ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ГЕОФИЗИЧЕСКАЯ ОБСЕРВАТОРИЯ ИМ. А. И. ВОЕЙКОВА

ТРУДЫ

ВЫПУСК 208

ПРИМЕНЕНИЕ
СТАТИСТИЧЕСКИХ
МЕТОДОВ
В МЕТЕОРОЛОГИИ

Под редакцией
д-ра физ-мат. наук
Л. С. ГАНДИНА

БИБЛИОТЕКА
Ленинградского
Гидрометеорологического
Института



ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО

ЛЕНИНГРАД • 1967

551.5.3 + 537.5.203.82

УДК 551.5 : 311.17(061.6)

В сборнике рассматриваются вопросы применения данных по статистической структуре метеорологических полей к прикладным задачам метеорологии.
Сборник рассчитан на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов метеорологических специальностей, интересующихся применением статистических методов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый сборник является третьим сборником Трудов ГГО, посвященным изучению и использованию характеристик крупномасштабной статистической структуры метеорологических полей (см. Труды ГГО вып. 165, 1964 г., Труды ГГО вып. 191, 1966 г.). Наряду со статьями сотрудников ГГО в сборник включены работы других авторов, так или иначе связанные с исследованиями ГГО, а именно статьи аспирантки-заочницы ГГО К. М. Лугиной, аспиранта Института математики и механики им. В. И. Романовского (Ташкент) Г. Х. Хатамкулова, аспирантки Гидрометеорологического Центра (Москва) М. О. Кричак и преподавателя Одесского гидрометеорологического института В. А. Шнайдмана.

Первые две статьи сборника посвящены новому для метеорологических приложений методу канонических корреляций. Статья Л. С. Гандина содержит элементарное изложение этого метода. Особое внимание в ней обращено на построение численного алгоритма определения канонических корреляций с помощью электронных вычислительных машин. Более детально вопрос об использовании метода канонических корреляций рассмотрен в статье К. М. Лугиной применительно к анализу статистических связей значений геопотенциала над различными участками некоторой территории.

В статьях М. О. Кричак и В. А. Шнайдмана приведены результаты исследования статистической структуры поля ветра. М. О. Кричак, обработав массовый материал наблюдений, получила данные о пространственной структуре поля ветра на изобарических поверхностях тропосферы. В. А. Шнайдман рассчитал по сравнительно небольшому материалу различные характеристики структуры ветра вблизи уровня максимального ветра. Данные, полученные в этих работах, имеют большое значение для объективного анализа поля ветра.

Следующие три статьи сборника посвящены применению сведений по статистической структуре к интерпретации осадкомерных данных и представляют собой, по существу, продолжение исследований тех же авторов, представленных в Трудах ГГО, вып. 191. Статья М. В. Гущиной, Р. Л. Кагана, А. И. Полищук содержит весьма детальный материал по статистической структуре сумм осадков за различные периоды в различных физико-географических районах СССР. Полученные сведения используются для анализа точности, с какой могут быть получены осредненные по площади суммы осадков. Более детально вопрос об определении площадных сумм осадков рассмотрен в статьях Р. Л. Кагана и А. И. Полищук. В этих работах показано преимущество использования для указанной цели метода, аналогичного оптимальной интерполяции, преимущество тем большее, чем более неравномерна осадкомерная сеть.

Оценены потери точности вследствие неравномерности сети. Кроме того, в статье А. И. Полищук получены новые данные о корреляции площадных сумм, а в статье Р. Л. Кагана показана целесообразность преобразования шкал осадков.

К тому же кругу идей примыкает работа К. Я. Винникова, в которой исследуются методы оценки площадных характеристик лучистых потоков тепла. Полученные результаты существенны, в частности, для интерпретации спутниковой актинометрической информации.

Статья Г. Х. Хатамкулова посвящена применению наземной информации для уточнения аэрологических полей. Приведены взаимные корреляционные функции, которые могут быть использованы для этой цели, а также результаты численных экспериментов, подтверждающих целесообразность использования наземной информации в районах с редкой сетью аэрологических наблюдений.

В работе А. А. Кобяковой и Л. В. Руховца описана схема объективного анализа, составленная авторами применительно к возможностям вычислительной машины «Урал-4».

Попытка экономического подхода к проблеме рационального размещения сети станций содержится в работе Л. С. Гандина и Р. Л. Кагана. Предлагаемый подход применяется к оценке экономической эффективности аэрологической сети станций.

В статье В. А. Ефимова предложен новый подход к решению системы уравнений, описывающих движения планетарного масштаба.

В сборник включена также статья А. Г. Бройдо, посвященная памяти одного из родоначальников применения статистических методов в метеорологии — М. А. Омшанского.

Л. С. ГАНДИН

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА КАНОНИЧЕСКИХ КОРРЕЛЯЦИЙ В МЕТЕОРОЛОГИИ

Рассматриваются вопросы применения метода канонических корреляций к решению задач метеорологии, в частности к построению методов статистического прогноза характеристик метеорологических полей. Излагается теория метода и алгоритм его применения.

1. В современной метеорологии для определения эмпирических закономерностей широко применяется классический метод множественной регрессии. Особенно широкое применение получил этот метод при построении схем статистического прогноза различных явлений. Большая часть схем статистического или, как его иначе называют, объективного прогноза базируется на применении метода множественной регрессии, иногда именуемого также методом эмпирических функций влияния.

Суть этого метода состоит вкратце в следующем. Интересующая нас величина — предиктант — заранее ставится в зависимость от ряда величин, которые могут быть известны при прогнозе — предикторов. Путем обработки массового материала наблюдений находят средние значения и дисперсии предиктанта и всех предикторов, а также коэффициенты корреляции (или ковариации) между каждой парой предикторов и между предиктантом и каждым из предикторов. Этих данных достаточно, чтобы вывести уравнение множественной регрессии, выражающее предиктант в виде линейной комбинации предикторов, и оценить тесноту этой связи путем вычисления коэффициента множественной корреляции или среднего квадратического отклонения вычисленных значений предиктанта от истинных.

Ввиду сложного характера метеорологических связей метод множественной регрессии часто дает недостаточно надежные результаты. Это обстоятельство может проявляться двояко:

1) Вычисленные коэффициенты множественной корреляции оказываются малы, а средние квадратические отклонения — соответственно велики.

2) Связи существенно ухудшаются при переходе от проверки их на том материале, из которого они получены, к применению их на ином, независимом материале.

Такие осложнения особенно часто возникают в задачах статистического долгосрочного прогноза, поскольку имеющиеся физические соображения о процессах планетарного масштаба не дают достаточных оснований для оптимального выбора предикторов.

В статистике разработан метод, позволяющий ценой некоторой модификации задачи уменьшить влияние первого из упомянутых осложнений. Этот метод известен под названием метода канонических корреляций. Он был предложен почти одновременно и независимо А. М. Обуховым и Г. Хотеллингом [2]. В настоящее время этот метод нашел применение в задачах биологии, социологии и экономики. В метеорологии метод канонических корреляций пока не применялся.

В прогностических терминах идея метода канонических корреляций может быть изложена следующим образом. Практически мы крайне редко встречаемся с такой ситуацией, что имеется единственный предиктант — значение некоторого метеорологического элемента в некоторой точке. Обычно нас интересует прогноз метеорологического элемента не в одной, а в нескольких точках, т. е. мы имеем дело с несколькими предиктантами. Поэтому задачу классического метода регрессии — найти линейную комбинацию предикторов, наиболее тесно статистически связанную с предиктантом, — эту задачу мы можем заменить более общей задачей — найти линейную комбинацию предикторов и линейную комбинацию предиктантов, такие, чтобы они обладали наиболее тесной статистической связью друг с другом. Это и есть задача канонической корреляции. Очевидно, что в частном случае одного предиктанта (или одного предиктора) мы вернемся к задаче множественной регрессии.

Разумеется, применяя метод канонических корреляций (точнее говоря, используя одну пару канонических корреляций), мы тем самым лишаем себя возможности устанавливать заранее, какая именно комбинация предиктантов будет прогнозироваться. Например, если предиктантами являются значения осадков в пяти точках, то с помощью метода канонической корреляции мы получим возможность предсказывать лишь ту комбинацию значений осадков, которая лучше всего поддается прогнозу, а не осадки в каждой из пяти точек. Однако, если, как это часто бывает, степень связи недостаточна для прогноза значений осадков в каждой точке, то полезно иметь возможность прогнозировать хотя бы некоторую комбинацию этих значений.

2. Пусть имеется два набора случайных величин:

$$x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$y_k \quad (k = 1, 2, \dots, m),$$

каждую из которых будем ради простоты отсчитывать от ее среднего значения, так что

$$\bar{x}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

$$\bar{y}_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (2)$$

Черта сверху здесь и ниже обозначает осреднение, понимаемое в статистическом смысле.

Будем считать известными все ковариации (моменты связи) рассматриваемых случайных величин, а именно матрицу автоковариаций величин x_i

$$\psi_{ij} = \overline{x_i x_j}, \quad (3)$$

матрицу автоковариаций величин y_k

$$\gamma_{kl} = \overline{y_k y_l} \quad (4)$$

и матрицу кроссковиариаций

$$\rho_{ik} = \overline{x_i y_k}. \quad (5)$$

Матрицы величин (3) и (4), очевидно, квадратные и симметричные, матрица величин (5), вообще говоря, прямоугольная.

Требуется найти такую линейную комбинацию случайных величин x_i

$$U' = \sum_{i=1}^n a'_i x_i \quad (6)$$

и такую линейную комбинацию величин y_k

$$V' = \sum_{k=1}^m b'_k y_k \quad (7)$$

или, точнее говоря, такие векторы с компонентами

$$a'_i \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (8)$$

$$b'_k \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (9)$$

чтобы коэффициент корреляции между комбинациями U' и V'

$$R = \frac{\overline{U'V'}}{(\overline{U'^2} \overline{V'^2})^{1/2}} \quad (10)$$

был бы максимальным (по модулю) по сравнению с любым другим выбором указанных векторов.

Как видно из (10), коэффициент R не изменится, если заменить U' на $\alpha U'$ и V' на $\beta V'$, где α и β — любые отличные от нуля константы, обе положительные или обе отрицательные. Отсюда следует, что векторы величин a'_i и b'_k могут быть из условия максимума R определены только с точностью до числовых множителей. Действительно, если U' и V' удовлетворяют указанному условию, то ему будут удовлетворять и величины

$$U = \alpha U' = \alpha \sum_{i=1}^n a'_i x_i,$$

$$V = \beta V' = \beta \sum_{k=1}^m b'_k y_k$$

при любых отличных от нуля и одинаковых по знаку α и β . Поэтому можно без умаления общности задать α и β произвольно. Удобно использовать это обстоятельство для нормировки дисперсий $\overline{U'^2}$ и $\overline{V'^2}$ на единицу. Именно, определим α и β из условий

$$\begin{aligned} \overline{U^2} &= \alpha^2 \overline{U'^2} = 1, \\ \overline{V^2} &= \beta^2 \overline{V'^2} = 1, \end{aligned} \quad (11)$$

откуда

$$\alpha = (\overline{U'^2})^{-\frac{1}{2}}, \quad \beta = (\overline{V'^2})^{-\frac{1}{2}},$$

так что вместо величин a'_i и b'_k будем иметь дело с компонентами

$$a_i = (\overline{U'^2})^{-\frac{1}{2}} a'_i, \quad b_k = (\overline{V'^2})^{-\frac{1}{2}} b'_k, \quad (12)$$

которые являются весами для линейных комбинаций

$$\begin{aligned} U &= \sum_{i=1}^n a_i x_i, \\ V &= \sum_{k=1}^m b_k y_k. \end{aligned} \quad (13)$$

В этом случае формула (10) приобретает в силу (4) более простой вид

$$R = \overline{UV}, \quad (14)$$

причем следует разыскивать максимум R по отношению к a_i и b_k не абсолютный, а относительный — при соблюдении условий (11). На основании (3), (4), (5) и (13) эти условия примут вид:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \psi_{ij} = 1, \quad (15)$$

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l \gamma_{kl} = 1, \quad (16)$$

а выражение (14) обратится в

$$R = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_i b_k \rho_{ik}. \quad (17)$$

Таким образом для отыскания упомянутого условного экстремума необходимо приравнять нулю производные по всем a_i и b_k от величины

$$\begin{aligned} F &= R - \frac{\kappa}{2} (\overline{U^2} - 1) - \frac{\lambda}{2} (\overline{V^2} - 1) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_i b_k \rho_{ik} - \\ &- \frac{\kappa}{2} \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \psi_{ij} - 1 \right) - \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_k b_l \gamma_{kl} - 1 \right), \end{aligned} \quad (18)$$

где $-\frac{\kappa}{2}$ и $-\frac{\lambda}{2}$ — неопределенные множители метода Лагранжа. Это приводит к $n+m$ уравнениям

$$\sum_{k=1}^m b_k \rho_{ik} = \kappa \sum_{j=1}^n a_j \psi_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \rho_{ik} = \lambda \sum_{l=1}^m b_l \gamma_{kl} \quad (k=1, 2, \dots, m), \quad (20)$$

которых вместе с двумя соотношениями (15) и (16) достаточно для определения $n+m+2$ неизвестных: a_i ($i=1, 2, \dots, n$), b_k ($k=1, 2, \dots, m$), κ и λ .

3. Умножим каждое из уравнений (19) на a_i и просуммируем получающиеся равенства по i от 1 до n . Тогда получим

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_i b_k \rho_{ik} = \kappa \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \psi_{ij},$$

т.е. согласно (15) и (17)

$$\kappa = R. \quad (21)$$

Аналогичным образом, умножая каждое из уравнений (20) на b_k и суммируя по k от 1 до m , получим

$$\lambda = R. \quad (22)$$

Из (21) и (22) следует, что $\kappa = \lambda$, так что вместо (19) и (20) можно написать систему

$$\sum_{k=1}^m b_k \rho_{ik} = \lambda \sum_{j=1}^n a_j \mu_{ij} \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (23)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \rho_{ik} = \lambda \sum_{l=1}^m b_l \nu_{kl} \quad (k=1, 2, \dots, m). \quad (24)$$

При этом, разумеется, из двух равенств (15) и (16) мы теперь можем использовать для замыкания системы (23), (24) лишь одно, а другое будет тогда выполняться автоматически.

Уравнения (23) и (24) образуют систему порядка $m+n$, линейную и однородную относительно искомых величин a_i и b_k . Поэтому, чтобы не все эти величины были нулями, должен равняться нулю определитель системы (23), (24)

$$\begin{vmatrix} -\lambda \mu_{11}, & -\lambda \mu_{12}, & \dots, & -\lambda \mu_{1n}, & \rho_{11}, & \dots, & \rho_{1m} \\ -\lambda \mu_{21}, & -\lambda \mu_{22}, & \dots, & -\lambda \mu_{2n}, & \rho_{21}, & \dots, & \rho_{2m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ -\lambda \mu_{n1}, & -\lambda \mu_{n2}, & \dots, & -\lambda \mu_{nn}, & \rho_{n1}, & \dots, & \rho_{nm} \\ \rho_{11}, & \rho_{21}, & \dots, & \rho_{n1}, & -\lambda \nu_{11}, & \dots, & \lambda \nu_{1m} \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \rho_{1m}, & \rho_{2m}, & \dots, & \rho_{nm}, & -\lambda \nu_{m1}, & \dots, & -\lambda \nu_{mm} \end{vmatrix} = 0 \quad (25)$$

Это равенство представляет собой алгебраическое уравнение относительно λ , причем степень этого уравнения, очевидно, не выше, чем $m+n$. Легко видеть, что степень этого уравнения и не ниже, чем $m+n$, т. е. она равна $m+n$. В самом деле коэффициентом при $(-\lambda)^{m+n}$ в левой части (25) является произведение определителей

$$\begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \dots & \mu_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nn} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \nu_{11} & \dots & \nu_{1m} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \nu_{m1} & \dots & \nu_{mm} \end{vmatrix}$$

Но каждый из этих определителей отличен от нуля в силу положительной определенности автоковариационных матриц. Следовательно, отличен от нуля и коэффициент при λ^{m+n} в уравнении (25).

Пусть теперь λ_1 есть некоторый вещественный отличный от нуля корень уравнения (25), а a_{i1} , b_{k1} — соответствующие этому корню значения величин a_i и b_k , т. е. значения, удовлетворяющие уравнениям (23), (24), (15) и (16) при $\lambda = \lambda_1$. Тогда очевидно, во-первых, что значения $-a_{i1}$, $-b_{k1}$ тоже удовлетворяют перечисленным уравнениям при том же

$\lambda = \lambda_1$. Это вполне естественно, так как при перемене знака у обеих линейных комбинаций коэффициент корреляции между ними не меняется. Легко видеть далее, что указанным уравнениям будут удовлетворять также значения $\lambda_2 = -\lambda_1$, $a_{i2} = a_{i1}$, $b_{k2} = -b_{k1}$, что также естественно, поскольку при перемене знака лишь у одной из двух линейных комбинаций коэффициент корреляции между ними меняет знак. Но это означает, что $\lambda_2 = -\lambda_1$ есть также корень уравнения (25).

Примем далее для определенности, что $m \leq n$. Тогда разлагая, согласно теореме Лапласа, определитель (25) на сумму произведений определителей, составленных из элементов первых n строк (25), на соответствующие миноры, составленные из элементов последних m строк, убедимся, что каждое такое произведение содержит λ^{n-m} . Отсюда следует, что $\lambda = 0$ является корнем кратности $n - m$ уравнения (25). Таким образом, среди корней уравнения (25) лишь $n + m - (n - m) = 2m$ корней, не равных нулю. Если все они вещественны и различны, то отличающихся друг от друга по модулю будет только m корней, в противном случае — меньше чем m .

Итак, существует не одна, а несколько (не более m) пар линейных комбинаций, удовлетворяющих поставленному условию максимума модуля коэффициента корреляции. Будем обозначать эти пары линейных комбинаций

$$U_p = \sum_{i=1}^n a_{ip} x_i, \quad (26)$$

$$V_p = \sum_{k=1}^m b_{kp} y_k, \quad (27)$$

а соответствующие значения коэффициентов корреляции λ_p и их квадратов $\Lambda_p = \lambda_p^2$. Условимся нумеровать все эти величины в порядке убывания Λ_p так, что, например, λ_1 представляет собой наибольший по модулю из корней уравнения (25), λ_2 — следующий за ним и т. д.

4. Пусть теперь $\tilde{\mu}_{ij}$ представляют собой элементы матрицы, обратной автоковариационной матрице $\{\mu_{ij}\}$, т. е. если

$$\sum_{j=1}^n \tilde{\mu}_{ij} z_j = t_i, \quad (28)$$

то

$$z_j = \sum_{i=1}^n \tilde{\mu}_{ji} t_i.$$

Так как матрица $\{\mu_{ij}\}$ симметрична, то симметрична и матрица $\{\tilde{\mu}_{ij}\}$. Из (28) и (23) следует, что

$$\lambda a_i = \sum_{j=1}^n \tilde{\mu}_{ij} \sum_{k=1}^m b_k \rho_{jk} = \sum_{k=1}^m b_k \sum_{j=1}^n \tilde{\mu}_{ij} \rho_{jk} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (29)$$

Подставляя это в уравнения (24), получим

$$\sum_{i=1}^n \rho_{il} \sum_{k=1}^m b_k \sum_{j=1}^n \tilde{\mu}_{ij} \rho_{jk} = \Lambda \sum_{k=1}^m b_k \gamma_{kl}$$

или

$$\sum_{k=1}^m b_k (f_{kl} - \Lambda \gamma_{kl}) = 0 \quad (l = 1, 2, \dots, m), \quad (30)$$

где

$$f_{kl} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{\mu}_{ij} \rho_{jk} \rho_{il} \quad (k, l = 1, 2, \dots, m). \quad (31)$$

Так как матрица $\{\tilde{\mu}_{ij}\}$ симметрична, то из (31) следует, что матрица $\{f_{kl}\}$ также симметрична.

Запишем теперь равенства (30) для двух разных Λ , скажем Λ_p и Λ_q

$$\Lambda_p \sum_{k=1}^m b_{kp} \gamma_{kl} = \sum_{k=1}^m b_{kp} f_{kl}, \quad (32)$$

$$\Lambda_q \sum_{k=1}^m b_{kq} \gamma_{kl} = \sum_{k=1}^m b_{kq} f_{kl}. \quad (33)$$

В равенстве (33) изменим обозначения, а именно заменим k на l и l на k

$$\Lambda_q \sum_{l=1}^m b_{lq} \gamma_{lk} = \sum_{l=1}^m b_{lq} f_{lk}$$

или в силу симметрий матриц $\{\gamma_{kl}\}$ и $\{f_{kl}\}$

$$\Lambda_q \sum_{l=1}^m b_{lq} \gamma_{kl} = \sum_{l=1}^m b_{lq} f_{kl}. \quad (34)$$

Умножим теперь каждое из равенств (32) на b_{lq} и просуммируем результаты по l

$$\Lambda_p \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{kp} b_{lq} \gamma_{kl} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{kp} b_{lq} f_{kl}. \quad (35)$$

Каждое из равенств (34) умножим на b_{kp} и результаты просуммируем по k

$$\Lambda_q \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{lq} b_{kp} \gamma_{kl} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{lq} b_{kp} f_{kl}. \quad (36)$$

Вычитая (36) из (35) и замечая, что согласно (27) и (4),

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{kp} b_{lq} \gamma_{kl} = \overline{V_p V_q} \quad (37)$$

получим

$$(\Lambda_p - \Lambda_q) \overline{V_p V_q} = 0$$

и так как Λ_p и Λ_q различны, то

$$\overline{V_p V_q} = 0 \quad (p \neq q), \quad (38)$$

т. е. линейные комбинации V_p , соответствующие различным значениям Λ , попарно некоррелированы.

Далее из (37) и (38) с помощью уравнений (23) и (24) получаем

$$\begin{aligned} 0 = \overline{V_p V_q} &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^m b_{kp} b_{lq} \gamma_{kl} = \frac{1}{\lambda_q} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m a_{iq} b_{kp} \rho_{ik} = \frac{\overline{V_p U_q}}{\lambda_q} = \\ &= \frac{\lambda_p}{\lambda_q} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{iq} a_{jp} \mu_{ij} = \frac{\lambda_p}{\lambda_q} \overline{U_p U_q}, \end{aligned}$$

так что наряду с (38) имеют место также равенства

$$\begin{aligned} \overline{U_p U_q} &= 0 \quad (p \neq q), \\ \overline{U_p V_q} &= 0 \quad (p \neq q). \end{aligned}$$

Таким образом, искомые линейные комбинации обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \overline{U_p U_q} &= \begin{cases} 1 & \text{при } p=q \\ 0 & \text{при } p \neq q \end{cases} \\ \overline{V_p V_q} &= \begin{cases} 1 & \text{при } p=q \\ 0 & \text{при } p \neq q \end{cases} \\ \overline{U_p V_q} &= \begin{cases} \lambda_q & \text{при } p=q \\ 0 & \text{при } p \neq q \end{cases} \end{aligned} \quad (39)$$

Иначе говоря, линейные комбинации U и V , соответствующие разным значениям Λ , все попарно некоррелированы. Отсюда вытекает следующее. После того как найдены комбинации U_1 и V_1 , наиболее тесно коррелирующие друг с другом, т. е. обладающие наибольшим по модулю коэффициентом корреляции λ_1 , мы можем снова поставить перед собой исходную задачу, но в несколько иной формулировке: найти максимально коррелированные между собой линейные комбинации из числа всех линейных комбинаций, не коррелированных ни с U_1 , ни с V_1 . Как явствует из (39) и из принятой нумерации Λ_p в порядке их убывания, решением этой задачи явятся линейные комбинации U_2 и V_2 , а коэффициент корреляции между ними будет равен λ_2 . Вообще, U_p и V_p представляют собой линейные комбинации вида (13), максимально коррелированные между собой из числа комбинаций, не коррелированных с $U_1, V_1, U_2, V_2, \dots, U_{p-1}, V_{p-1}$.

Таким образом, по сравнению с первоначально поставленной задачей мы получили несколько более общий результат. Действительно, требовалось получить пару линейных комбинаций, наиболее тесно коррелированных между собой, а оказалось возможным получить несколько пар таких линейных комбинаций, соответствующих нескольким значениям Λ . Каждая из таких комбинаций статистически ортогональна по отношению ко всем остальным линейным комбинациям тех же случайных переменных, а также по отношению к линейным комбинациям из второго набора случайных переменных, за исключением одной.

Общее число таких пар не превышает меньшего из чисел n и m . Практически, переходя от одной такой пары линейных комбинаций к другой, мы будем иметь дело с постепенным убыванием корреляции просто потому, что мы условились нумеровать эти пары в порядке убывания чисел Λ_p . Однако может оказаться полезным использовать не одну, а несколько первых пар, те из них, связь между которыми характеризуется еще приемлемыми с точки зрения интересующей нас задачи коэффициентами корреляции.

5. Как видно из системы (30), чтобы не все b_k равнялись нулю, необходимо равенство нулю определителя этой системы

$$\begin{vmatrix} f_{11} - \Lambda \gamma_{11}, & f_{12} - \Lambda \gamma_{12}, & \dots, & f_{1m} - \Lambda \gamma_{1m} \\ f_{21} - \Lambda \gamma_{21}, & f_{22} - \Lambda \gamma_{22}, & \dots, & f_{2m} - \Lambda \gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{m1} - \Lambda \gamma_{m1}, & f_{m2} - \Lambda \gamma_{m2}, & \dots, & f_{mm} - \Lambda \gamma_{mm} \end{vmatrix} = 0 \quad (40)$$

Это равенство представляет собой уравнение степени m для определения величины Λ . Если Λ_p — одно из его решений, то из системы (30) могут быть найдены с точностью до произвольного множителя m величины b_{kp} . Этот множитель затем определится из условия нормировки (16). Наконец с помощью формул (29) по известным b_{kp} и $\lambda_p = \sqrt{\Lambda_p}$ можно найти величины a_{ip} . При этом если в качестве λ_p взять положительное значение $\sqrt{\Lambda_p}$, то полученные комбинации U_p и V_p (13) будут коррелированы положительно, в противном случае — отрицательно. Как уже указывалось, второе условие нормировки (15) в этом случае должно выполняться автоматически. Проверка этого условия может служить контролем правильности вычислений.

Описанный алгоритм более удобен, нежели решение уравнения (25), поскольку степень уравнения (40) относительно Λ в два или более раз ниже, чем степень уравнения (25) относительно λ , и при решении уравнения (40) не получается лишних нулевых корней. Практически, однако, еще удобнее свести задачу к решению классической проблемы линейной алгебры — проблемы собственных чисел и собственных векторов. В этом случае вместо специальной разработки метода решения уравнения (40) можно воспользоваться хорошо известными численными методами решения проблемы собственных векторов.

Запишем с этой целью систему (30) в виде

$$\sum_{k=1}^m b_k f_{kl} = \Lambda \sum_{k=1}^m b_k \gamma_{kl} \quad (41)$$

и обозначим через \tilde{v}_{kl} элементы матрицы, обратной автоковариационной матрице $\{\gamma_{kl}\}$, т. е. такой, что если

$$\sum_{k=1}^m \gamma_{kl} z_k = t_l \quad (42)$$

то

$$z_k = \sum_{l=1}^m \tilde{v}_{lk} t_l. \quad (43)$$

Матрица $\{\tilde{v}_{kl}\}$, разумеется, также симметрична. Из (42), (43) и (41) следует, что

$$\Lambda b_k = \sum_{h=1}^m \tilde{v}_{lk} \sum_{h=1}^m b_h f_{hl}$$

или

$$\sum_{h=1}^m g_{kh} b_h - \Lambda b_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m), \quad (44)$$

где

$$g_{kh} = \sum_{l=1}^m \tilde{v}_{lk} f_{hl}, \quad (45)$$

или на основании (31)

$$g_{kh} = \sum_{l=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \tilde{v}_{lj} \tilde{v}_{lk} \rho_{jk} \rho_{li}. \quad (46)$$

Легко проверить, что матрица $\{g_{kl}\}$, в отличие от матриц $\{\mu_{ij}\}$, $\{\gamma_{kl}\}$ и $\{f_{kl}\}$, не является, вообще говоря, симметричной. Как видно из системы

(44) задача определения величин Λ_p и b_{kp} свелась к задаче определения собственных чисел и собственных векторов этой несимметричной матрицы $\{g_{hh}\}$.

Для получения элементов матрицы $\{g_{hh}\}$, как видно из формулы (46), необходимо выполнить ряд операций с исходными матрицами $\{\mu_{ij}\}$, $\{v_{kl}\}$ и $\{\rho_{ik}\}$, а именно обращение матриц и их перемножение. Эти операции также являются классическими в линейной алгебре и алгоритмы для их реализации хорошо разработаны.

Дальнейшие этапы вычислений не отличаются от тех, которые были упомянуты ранее: нормировка величин b_{kp} производится с помощью соотношения (16), после чего по формулам (29) определяются величины a_{ip} , а условие (15) используется для контроля правильности счета. Другим средством контроля является непосредственное вычисление всевозможных парных ковариаций для величин U_p и V_p и проверка выполнения соотношений (39).

Следует подчеркнуть, что описанный только что алгоритм заведомо не проще непосредственного определения Λ_p из уравнения (40). Но практически он значительно удобнее, поскольку применение его сводится к комбинации хорошо изученных алгоритмов линейной алгебры.

6. Как явствует из изложенного, процедура отыскания векторов $\{a_i\}$ и $\{b_k\}$ является сравнительно громоздкой. Для ее реализации необходимо осуществить два обращения матриц, три перемножения матриц, одно решение полной задачи о собственных числах и собственных векторах и, наконец, решение системы линейных уравнений. В связи с этим следует заметить, что указанная процедура может быть существенно упрощена за счет предварительной обработки ковариационных матриц $\{\mu_{ij}\}$, $\{v_{kl}\}$ и $\{\rho_{ik}\}$, а именно за счет канонизации первых двух из этих матриц. Эта задача, которую иногда называют задачей построения главных компонент векторов $\{x_i\}$ (и соответственно $\{y_k\}$), в известной мере аналогична задаче канонической корреляции и представляет также самостоятельный интерес. Рассмотрим эту задачу.

Пусть имеется вектор (набор) случайных величин

$$x_i (i = 1, 2, \dots, n),$$

каждая из которых отсчитывается от своего среднего значения, так что $\overline{x_i} = 0$.

Найдем такую линейную комбинацию ξ величин x_i

$$\xi = \sum_{i=1}^n C_i x_i \quad (47)$$

с весами C_i , нормированными (в смысле суммы квадратов) на единицу

$$\sum_{i=1}^n C_i^2 = 1, \quad (48)$$

чтобы дисперсия величины ξ

$$\xi^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_i C_j \overline{x_i x_j} \quad (49)$$

была максимальной по сравнению с любым другим выбором весов C_i , удовлетворяющих условию нормировки (48). При этом автоковариационная матрица величин x_i

$$\mu_{ij} = \overline{x_i x_j}$$

считается известной.

Требование максимума $\overline{\xi^2}$ при дополнительном условии (48) сводится к равенству нулю частных производных по C_i от величины

$$G = \overline{\xi^2} - \gamma \left(\sum_{i=1}^n C_i^2 - 1 \right), \quad (50)$$

где γ — неопределенный множитель метода Лагранжа. Это приводит к системе n линейных однородных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n C_j \mu_{ij} - \gamma C_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (51)$$

которых вместе с соотношением (48) достаточно для определения n весов C_i и множителя γ . Последний имеет весьма простой смысл. В самом деле, умножая i -тое уравнение (51) на C_i и суммируя по i , получим

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_i C_j \mu_{ij} - \gamma \sum_{i=1}^n C_i^2 = 0,$$

или в силу (48) и (49)

$$\gamma = \overline{\xi^2}. \quad (52)$$

Иначе говоря, множитель γ равен дисперсии искомой линейной комбинации.

Поскольку система уравнений (51) линейна и однородна относительно C_i , для того чтобы не все C_i были равны нулю, необходимо чтобы главный определитель системы (51) равнялся нулю

$$\begin{vmatrix} \mu_{11} - \gamma & \mu_{12} & \dots & \mu_{1n} \\ \mu_{21} & \mu_{22} - \gamma & \dots & \mu_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \mu_{n1} & \mu_{n2} & \dots & \mu_{nn} - \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (53)$$

т. е. чтобы γ было собственным числом матрицы $\{\mu_{ij}\}$. Эта матрица, как ковариационная, является положительно определенной, поэтому все n ее собственных чисел вещественны и положительны. Обозначим их через γ_s и расположим в порядке убывания

$$\gamma_1 > \gamma_2 > \dots > \gamma_s > \dots > \gamma_n.$$

Тогда поставленной задаче отвечает первое собственное число γ_1 . Зная γ_1 , можно найти компоненты вектора $\{C_{i1}\}$ из системы (51) и условия нормировки (48). Этот вектор представляет собой, очевидно, собственный вектор матрицы $\{\mu_{ij}\}$, соответствующий собственному числу γ_1 . Тем самым поставленная задача полностью решена — она свелась к нахождению наибольшего собственного числа автоковариационной матрицы и соответствующего ему собственному вектору ее.

Как и в случае канонической корреляции, мы получаем в данном случае возможность решить более общую задачу, а именно найти не один собственный вектор $\{C_{i1}\}$, а все n собственных векторов $\{C_{is}\}$ ($s = 1, 2, \dots, n$), соответствующих всем собственным числам γ_s . В результате мы получим не одну линейную комбинацию $\xi_1 = \sum_{i=1}^n C_{i1} x_i$, а n таких комбинаций

$$\xi_s = \sum_{i=1}^n C_{is} x_i \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (54)$$

которые и называются главными компонентами случайного вектора $\{x_i\}$. Легко показать, что эти линейные комбинации попарно не коррелированы. В самом деле, умножим i -тое уравнение (51), соответствующее собственному числу γ_s ,

$$\sum_{j=1}^n C_{js}y_{ij} - \gamma_s C_{is} = 0$$

на C_{it} и просуммируем по i . Тогда получим

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{it} C_{js} y_{ij} = \gamma_s \sum_{i=1}^n C_{it} C_{is}. \quad (55)$$

Аналогичным образом, умножая i -тое уравнение (51) из системы, соответствующей собственному числу γ_t ,

$$\sum_{j=1}^n C_{jt} y_{ij} - \gamma_t C_{it} = 0$$

на C_{is} и суммируя по i , найдем

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{is} C_{jt} y_{ij} = \gamma_t \sum_{i=1}^n C_{is} C_{it}. \quad (56)$$

Если $t=s$, то равенства (55) и (56) совпадают друг с другом и, согласно (48) и (49), получаем

$$\overline{\xi_s^2} = \gamma_s, \quad (57)$$

что обобщает формулу (52). Пусть теперь $t \neq s$. Тогда

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{it} C_{js} y_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{is} C_{jt} y_{ij} = \overline{\xi_s \xi_t} \quad (58)$$

и левые части соотношений (55) и (56) равны друг другу и равны ковариации линейных комбинаций ξ_s и ξ_t . Коэффициенты при γ_s и γ_t в равенствах (55) и (56) тоже одинаковы, а сами величины γ_s и γ_t различны. Поэтому оба равенства (55) и (56) могут выполняться лишь в случае, если

$$\overline{\xi_s \xi_t} = 0 \quad (59)$$

и

$$\sum_{i=1}^n C_{is} C_{it} = 0. \quad (60)$$

Равенство (59) доказывает, что линейные комбинации ξ_s попарно не коррелированы, т. е. статистически ортогональны. Равенство (60) показывает, что векторы $\{C_{is}\}$ также ортогональны, но, разумеется, не в статистическом, а в обычном смысле.

7. Представим себе теперь, что мы перешли от случайных переменных x_i к главным компонентам ξ_s и аналогичным образом от второго набора случайных переменных y_h к соответствующим главным компонентам η_j и нас интересует каноническая корреляция между этими наборами случайных переменных. В силу равенств (57) и (59) автоковариационная матрица для ξ_s значительно проще, чем для x_i , а именно она является диагональной — элементы главной диагонали равны γ_s , а остальные элементы равны нулю.

Аналогичным образом автоковариационная матрица для η_f будет состоять из диагональных элементов

$$\overline{\eta_f^2} = \delta_f$$

и остальных элементов, равных нулю.

Для того чтобы находить канонические корреляции, нужно знать еще кроссковариации

$$r_{sf} = \overline{\xi_s \eta_f}. \quad (61)$$

Для этого необходимо выполнить соответствующий пересчет. Именно, используя формулу

$$\xi_s = \sum_{i=1}^n C_{is} x_i \quad (54)$$

и аналогичную формулу

$$\eta_f = \sum_{k=1}^m D_{kf} y_k, \quad (54')$$

получим, согласно (61) и (5),

$$r_{sf} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m C_{is} D_{kf} \rho_{ik}. \quad (62)$$

Обозначим теперь снова ξ_s через x_i , η_f через y_k и r_{sf} через ρ_{ik} и рассмотрим, как упростится вычисление канонических корреляций в случае, если x_i и y_k представляют собой главные компоненты соответствующих случайных векторов, т. е. если

$$\mu_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq i \\ \gamma_i & \text{при } j = i \end{cases} \quad (63)$$

$$\nu_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq k \\ \delta_k & \text{при } l = k \end{cases} \quad (64)$$

Вследствие свойств (63) и (64) существенно упростятся условия нормировки (15) и (16), они примут вид

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 \gamma_i = 1, \quad (15')$$

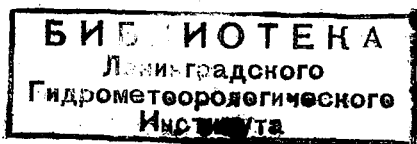
$$\sum_{k=1}^m b_k^2 \delta_k = 1. \quad (16')$$

Соответственно этому более простой вид примет система уравнений (23), (24):

$$\sum_{k=1}^m b_k \rho_{ik} = \lambda a_i \gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (23')$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \rho_{ik} = \lambda b_k \delta_k \quad (k = 1, 2, \dots, m). \quad (24')$$

Упростится и определитель (25), в частности его коэффициент при λ^{m+n} будет равен просто $\prod_{i=1}^n \gamma_i \prod_{k=1}^m \delta_k$.



Далее вместо соотношений (28) будем иметь просто

$$\gamma_i z_i = t_i, \quad (28')$$

откуда

$$z_i = \frac{1}{\gamma_i} t_i, \quad (29')$$

так что

$$\tilde{\mu}_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq i \\ \frac{1}{\gamma_i} & \text{при } j = i \end{cases} \quad (65)$$

что, разумеется, сразу следует из (63). Поэтому получим

$$f_{kl} = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_{ik} \rho_{il}}{\gamma_i}. \quad (31')$$

Аналогичным образом будем иметь

$$\tilde{\nu}_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq k \\ \frac{1}{\delta_k} & \text{при } l = k \end{cases} \quad (66)$$

и формула (45) примет вид

$$g_{kh} = \frac{f_{kh}}{\delta_k} \quad (45')$$

или, согласно (31'),

$$g_{kh} = \sum_{i=1}^n \frac{\rho_{ik} \rho_{ih}}{\gamma_i \delta_k}. \quad (46')$$

Таким образом для главных компонент получение матрицы $\{g_{hh}\}$ весьма существенно упрощается: для ее нахождения теперь не нужно обращать матрицы и вместо трехкратного умножения матриц необходимо произвести лишь однократное. Дальнейшие действия — нахождение собственных чисел и собственных векторов матрицы $\{g_{hh}\}$ остаются неизменными, за тем исключением, что упрощается нормировка собственных векторов $\{b_{kp}\}$, поскольку условие нормировки (16) приняло более простой вид (16'). Наконец, из уравнения (23') сразу следуют формулы для нахождения компонент векторов $\{a_{ip}\}$

$$a_{ip} = \frac{1}{\lambda_p \gamma_i} \sum_{k=1}^m b_{kp} \rho_{ik}.$$

Сказанное не следует понимать в том смысле, что переход к главным компонентам исходных векторов с последующей канонической корреляцией проще, чем непосредственная каноническая корреляция исходных векторов. Скорее верно обратное. Для того чтобы перейти к главным компонентам двух случайных векторов, нужно дважды решать полную задачу о собственных числах и собственных векторах, что едва ли проще, чем несколько обращений и умножений матриц. Речь шла лишь о том, что если уже имеются главные компоненты обоих случайных векторов, то каноническая корреляция их значительно упрощается.

Кроме того, может оказаться полезным для контроля выполнить оба варианта канонической корреляции — с предварительным определением главных компонент и без него. В обоих случаях должна получиться одна

и та же совокупность коэффициентов корреляции (а векторы $\{a_i\}$ и $\{b_k\}$ будут, разумеется, разные), что и может быть использовано для проверки правильности счета.

Заметим, что легко еще несколько упростить алгоритм канонической корреляции, если пользоваться главными компонентами немного модифицированными, а именно не с единичными нормами, а с единичными дисперсиями. В этом случае все $\gamma_i \equiv 1$ и $\delta_k \equiv 1$, так что $\{\mu_{ij}\}$ и $\{\nu_{kl}\}$ представляют собой матрицы не только диагональные, но и единичные. Тогда соответственно упрощается и матрица $\{g_{kk}\}$ (46') и, в частности, она оказывается симметричной. Соответствующая модификация сводится к переходу от главных компонент ξ_s (54) и η_f (54') к компонентам ξ'_s и η'_f , нормированным на дисперсии

$$\xi'_s = \frac{\xi_s}{\sqrt{\xi_s^2}}, \quad \eta'_f = \frac{\eta_f}{\sqrt{\eta_f^2}}. \quad (67)$$

Аналогичной заменой

$$x'_i = \frac{x_i}{\sqrt{\mu_{ii}}}, \quad y'_k = \frac{y_k}{\sqrt{\nu_{kk}}} \quad (68)$$

можно пользоваться и применительно к исходным, не ортогональным случайным векторам. Такая замена приведет лишь к тому, что вместо ковариационных матриц будут фигурировать корреляционные.

8. Ковариационные или корреляционные матрицы, по данным о которых ведется расчет канонических корреляций, никогда не бывают известны с абсолютной точностью. В метеорологических задачах, особенно прогностических, элементы этих матриц часто получают с весьма малой точностью. Это обуславливается недостаточным объемом и малой точностью наблюдений, которые удается привлечь для построения таких матриц.

Вместе с тем, как показывает опыт, и величины оптимально коррелирующих векторов, и значения коэффициентов корреляции между ними могут существенно меняться при сравнительно небольших изменениях компонент ковариационных матриц.

Едва ли есть возможность учесть в явном виде при получении канонических корреляций тот факт, что исходные матрицы плохо известны. Однако существуют два косвенных пути для уменьшения влияния этого факта.

Первый путь состоит в предварительном построении ковариационных (или корреляционных) функций — автоковариационной для переменных x и y и кроссковиариационной, связывающей эти переменные. Относительно этих функций заранее постулируется, что они зависят от сравнительно небольшого числа параметров. Чаще всего с этой целью применяют гипотезы однородности и изотропии, согласно которым каждая из ковариационных функций принимается зависящей только от расстояния между точками. После этого в качестве элементов ковариационных матриц используются значения соответствующих ковариационных функций.

Поступая таким образом, мы используем меньше исходной информации, чем могли бы иметь исходя из эмпирических ковариационных матриц. Однако, поскольку ковариационные функции получаются путем осреднения значений ковариаций для отдельных пар пунктов, сведения о них получаются, при прочих равных условиях, более надежными. Поэтому такой путь приводит к более устойчивым, в меньшей степени меняющимся от одной выборки к другой значениям канонических корреляций.

Другой путь, который можно применять с той же целью, состоит

в учете наличия случайных ошибок измерений переменных x_i и y_k . Как известно (например, [1]), этот учет приводит лишь к тому, что к диагональным элементам автоковариационных матриц добавляются средние квадраты случайных ошибок измерения соответствующих величин.

Применительно к оптимальной интерполяции в [1] показано, что введение этих добавок сглаживает распределение интерполяционных весов и увеличивает среднюю квадратическую ошибку интерполяции (т. е. уменьшает сводный коэффициент корреляции). То же имеет место по отношению к каноническим корреляциям. Добавление положительных величин к диагональным элементам автоковариационных матриц приводит к уменьшению коэффициентов канонической корреляции λ_p и к сглаживанию векторов $\{a_{ip}\}$ и $\{b_{kp}\}$. При этом, чем больше указанные добавки, тем меньше меняются векторы $\{a_{ip}\}$ и $\{b_{kp}\}$ при дальнейшем увеличении этих добавок.

Понятно, что такие сглаженные весовые векторы заслуживают большего доверия, чем «капризные» распределения весов, полученные без введения указанных добавок.

Следует оговориться, что если автоковариационные матрицы получены непосредственной обработкой данных наблюдений (а не из ковариационных функций), то при их вычислении автоматически учтено влияние ошибок наблюдений. Иначе говоря, диагональные элементы таких матриц сами собой получаются завышенными на средние квадраты ошибок наблюдений (по сравнению с истинными, нам неизвестными значениями диагональных элементов). Однако и в таком случае может быть полезным введение дополнительных добавок к диагональным элементам. В этом случае введение добавок следует рассматривать не как учет реально существующих ошибок наблюдений, а как некоторый искусственный прием, направленный на повышение надежности результатов вычислений. Аналогичные приемы хорошо известны в статистике (в теории интерполяции и фильтрации случайных функций) и в вычислительной алгебре (где они применяются для увеличения обусловленности систем уравнений).

Разумеется, применяя любой из описанных путей, мы наряду с уменьшением вредных, фиктивных влияний теряем некоторое количество реальной информации. В результате связи получаются не только более надежными, но и менее тесными. Поэтому такие приемы следует применять весьма осторожно. Впрочем, эта проблема присуща всем статистическим исследованиям, и здесь нецелесообразно вдаваться в подробное обсуждение ее.

9. В заключение приведем конкретный пример применения метода канонических корреляций к отысканию прогностических зависимостей. Этот пример относится к связям между средней месячной температурой воды на поверхности Северной Атлантики в ноябре и средней месячной температурой воздуха над ЕТС в декабре. В качестве исходных данных использовались месячные аномалии температуры воды, осредненные по десяти квадратам океанической поверхности и вычисленные Смедом [3], а также аномалии температуры воздуха над восьмью пунктами ЕТС, данные по которым были любезно предоставлены нам О. М. Челпановой и В. Я. Шаровой. Расположение квадратов и пунктов приведено на рис. 1.

Вычисления велись применительно к безразмерным величинам (68), так что использовались не ковариационные, а корреляционные матрицы.

Эти матрицы приведены в табл. 1. Первая половина таблицы содержит автокорреляционные матрицы для температуры воды (ниже главной диагонали) и для температуры над сушей (выше главной диагонали), во второй части таблицы приведена взаимная корреляционная матрица.

По данным табл. 1 выполнен расчет канонических корреляций. Вычисления велись на машине «Урал-4» по программе, составленной В. А. Ефимовым. В расчетах участвовали также В. Б. Усов и Г. В. Волоховская. Расчеты производились при различных значениях добавок к диагональным элементам автокорреляционных матриц. В табл. 2 приведены компоненты весовых векторов a_{ip} , b_{kp} и соответствующие коэффициенты канонической корреляции λ_p для двух первых пар в случае, когда добавки ко всем диагональным элементам составили 0,1.

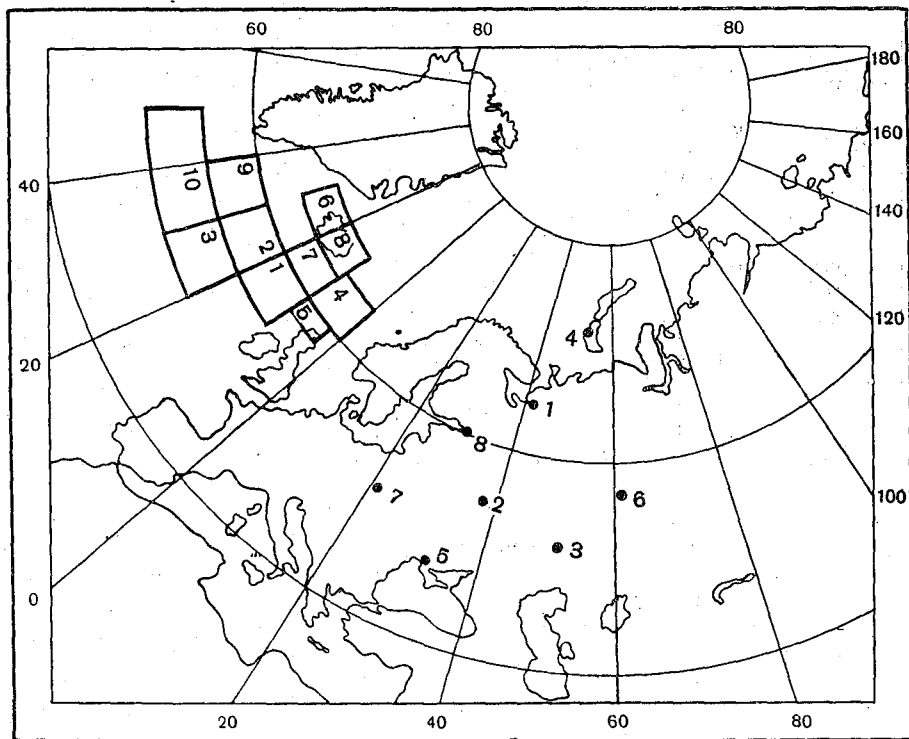


Рис. 1.

Не вдаваясь в детальный анализ этих результатов, заметим следующее. Коэффициент корреляции не только для первой, но и для второй пары комбинаций существенно превосходит максимальный элемент исходной кросскорреляционной матрицы (0,388), несмотря на то, что при расчетах диагональные члены были увеличены на 10%. Это свидетельствует о значительном повышении связи после перехода к каноническим корреляциям. В то же время распределение весов сравнительно сглаженное. В частности, лишь один вес превышает по модулю единицу и притом незначительно.

Впрочем, окончательные выводы о ценности таких связей можно будет сделать только после проверки их на независимом материале.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. Об оптимальной интерполяции и экстраполяции метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 114, 1960.
2. Hotelling H. The most predictable criterion. The Journal of Educational Psychology, Vol. 26, No. 2, 1935.
3. Smed I. Monthly anomalies of the Northern North Atlantic. Annales biologiques du conseil permanent international pour l'exploration de la mer, vol. 2-7, 1947-1951.

Таблица 1

Матрицы, использованные при расчете канонических корреляций

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
Автокорреляционные матрицы										
1		0,483	0,012	0,390	-0,066	0,497	0,131	0,816		
2	0,647		0,566	0,076	0,645	0,701	0,690	0,752		
3	0,287	0,791		-0,212	0,545	0,518	0,490	0,159		
4	0,379	-0,027	-0,134		-0,012	0,028	0,148	0,312		
5	0,752	0,262	-0,093	0,749		0,469	0,698	0,214		
6	0,451	0,405	0,175	0,515	0,514		0,371	0,544		
7	0,559	0,467	0,274	0,593	0,569	0,723		0,398		
8	0,368	0,186	-0,067	0,631	0,545	0,682	0,641			
9	0,379	0,595	0,488	-0,183	0,023	0,322	0,334	0,000		
10	0,051	0,531	0,575	-0,454	-0,238	-0,185	-0,183	-0,145	0,438	
Кросскорреляционная матрица										
1	-0,052	-0,210	-0,087	0,388	0,159	0,077	0,068	0,306	-0,132	-0,203
2	-0,244	-0,252	-0,028	0,111	-0,085	0,032	-0,091	0,168	-0,124	-0,020
3	-0,080	0,005	-0,003	-0,045	-0,034	-0,005	-0,149	0,038	0,004	-0,032
4	0,025	-0,109	-0,004	0,082	0,208	0,145	0,052	0,326	-0,021	0,005
5	-0,324	-0,314	-0,185	-0,095	-0,112	-0,116	-0,281	-0,032	-0,122	0,037
6	-0,243	-0,318	-0,170	0,006	-0,120	-0,183	-0,297	-0,114	-0,141	-0,105
7	-0,352	-0,292	-0,038	0,038	-0,184	0,001	-0,128	0,087	-0,183	0,007
8	-0,170	-0,280	-0,018	0,230	0,001	0,036	-0,003	0,210	-0,094	-0,103

Таблица 2

Канонические корреляции при диагональных членах 1,1

λ_p i или k	$p=1$ 0,637		$p=2$ 0,540	
	a_{i1}	b_{k1}	a_{i2}	b_{k2}
1	-0,358	0,263	-0,104	-0,058
2	-1,075	0,292	0,489	0,057
3	0,828	0,008	0,693	0,802
4	-0,274	0,540	-0,949	0,690
5	0,624	0,309	0,978	0,163
6	0,103	-0,357	-0,174	-0,379
7	-0,284	0,115	-0,398	-0,844
8	0,859	0,163	0,579	-0,172
9	0,090		0,223	
10	0,139		-0,478	

К. М. ЛУГИНА

О СТАТИСТИЧЕСКОЙ СВЯЗИ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ УЧАСТКОВ ТЕРРИТОРИИ

С использованием метода канонических корреляций исследуется вопрос о статистической связи метеорологических полей температуры и геопотенциала на AT_{500} для двух различных участков территории.

Рассматривается зависимость коэффициента канонической корреляции и компонент весовых векторов от средней квадратической ошибки наблюдений.

В ряде метеорологических задач, например при объективном анализе метеорологических полей статистическим методом, в районах с редкой сетью станций приходится использовать информацию на станциях, удаленных от интересующих нас узлов сетки на большое расстояние (до 1000 км и более), т. е. степень статистической связи исходных станций с узлами сетки недостаточна для сколько-нибудь точного анализа поля. В этих случаях представляется целесообразным определять не значения элемента в каждой точке, а такие комбинации значений метеоэлемента на сети станций и такие комбинации значений метеоэлемента в узлах сетки, чтобы они обладали наиболее тесной статистической связью друг с другом. Решение этой задачи со сдвигом во времени может быть использовано для статистического прогноза.

В данной работе сделана попытка найти такие линейные комбинации значений метеорологических элементов для двух участков территории, чтобы они обладали наиболее тесной связью между собой и были бы некоррелированы внутри каждого из этих участков. На данном этапе работы отыскивались синхронные связи.

Для этой цели был использован метод канонических корреляций, основы которого применительно к метеорологии изложены в статье Л. С. Гандина [1].

Задача решалась на ЭЦВМ М-20, для которой был реализован следующий алгоритм [1]:

Пусть имеется два набора случайных величин

$$x_i \quad (i=1, 2, \dots, p_1),$$

$$y_j \quad (j=1, 2, \dots, p_2),$$

при этом для простоты предполагается, что

$$\bar{x}_i = 0 \quad (i=1, 2, \dots, p_1), \quad (1)$$

$$\bar{y}_j = 0 \quad (j=1, 2, \dots, p_2). \quad (2)$$

Черта сверху здесь и далее обозначает осреднение, понимаемое в статистическом смысле.

Будем считать известными все корреляционные (ковариационные) матрицы:

$$\Sigma_{11} = \overline{x_i x_k}, \quad (3)$$

$$\Sigma_{22} = \overline{y_j y_l}, \quad (4)$$

$$\Sigma_{12} = \overline{x_i y_j}. \quad (5)$$

Таким образом, исходная матрица будет иметь вид

$$\Sigma = \begin{vmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{vmatrix} \quad (6)$$

Матрицы Σ_{11} и Σ_{22} квадратные, симметричные, имеющие порядок соответственно P_1 и P_2 , при этом $P_1 \geq P_2$.

Нужно найти такую линейную комбинацию случайных величин x_i

$$u' = \sum_{i=1}^{P_1} a_i x_i \quad (7)$$

и такую линейную комбинацию y_k

$$v' = \sum_{j=1}^{P_2} b_j y_j, \quad (8)$$

чтобы коэффициент корреляции между комбинациями u' и v'

$$R = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2} \overline{v'^2}}} \quad (9)$$

был максимальным.

Расчет сводится к решению системы

$$(\Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12} - \lambda^2 \Sigma_{22}) b_j = 0, \quad (10)$$

$$a_i = (\lambda \Sigma_{11})^{-1} \Sigma_{12} b_j = 0, \quad (11)$$

где λ — коэффициент корреляции между парой канонических величин.

Умножая систему (10) на матрицу Σ_{22}^{-1} , сведем ее решение к решению проблемы собственных значений и собственных векторов для матрицы

$$\Sigma_{22}^{-1} \Sigma_{21} \Sigma_{11}^{-1} \Sigma_{12}. \quad (12)$$

Собственные значения матрицы (12) дают величины квадратов коэффициентов канонической корреляции λ^2 , собственные векторы представляют собой значения векторов b_j для соответствующих канонических корреляций λ . Из решения системы (11) получаем векторы a_i . Перед входом в систему (11) векторы b_j нормируются на дисперсию

$$b'_j \Sigma_{22} b_j = 1, \quad (13)$$

где b'_j — матрица-строка, b_j — матрица-столбец.

Далее для контроля правильности счета находим коэффициенты корреляции для линейных комбинаций a_i и b_j , которые рассчитываются по формуле

$$R = \frac{b'_j \Sigma_{12} a_i}{\sqrt{b'_j \Sigma_{22} b_j a'_i \Sigma_{11} a_i}} \quad (14)$$

В программе использованы следующие стандартные подпрограммы:

1. Перевод из десятичной в двоичную систему счисления.
2. Перевод из двоичной в десятичную систему с печатью десятичного материала.
3. Обращение матриц.
4. Умножение матриц.
5. Решение полной проблемы собственных чисел и собственных векторов несимметричной матрицы.

Исходные данные по корреляционным (ковариационным) матрицам вводятся в МОЗУ машины не целиком, а в виде треугольной матрицы; в программе предусмотрено преобразование треугольных матриц Σ_{11} и Σ_{22} в симметричные квадратные и транспонирование прямоугольной матрицы Σ_{12} в матрицу Σ_{21} . Кроме МОЗУ, в программе используются три магнитных барабана, два из которых заняты стандартными подпрограммами, а на третий записываются исходные данные и сама программа. Предусмотрен расчет любого числа матриц с одним вводом программы. Программа позволяет учитывать наличие случайных ошибок измерения переменных x_i и y_i , удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) среднее арифметическое значение каждой ошибки равно нулю,
- 2) ошибки не коррелируют с истинным значением элемента, 3) ошибки в различных точках не коррелируют друг с другом.

Этот учет, как показано в [2], приводит лишь к тому, что к диагональным элементам автокорреляционных матриц добавляется средняя квадратическая ошибка наблюдения, отнесенная к дисперсии, — мера ошибки наблюдения. Мера ошибки наблюдения задается командной картой и автоматически вводится в диагональный член корреляционных матриц Σ_{11} и Σ_{22} .

Программа рассчитана на порядок матриц Σ_{11} и Σ_{22} не более чем 16×16 каждая.

Использование для расчетов корреляционных матриц приземного давления и геопотенциала AT_{500} , полученных непосредственным расчетом, оказалось затруднительным, так как эти матрицы не положительно определены.

Причиной невыполнения условия положительной определенности корреляционных матриц является малый объем выборок, точнее, недостаточность объема выборок и одновременно несовпадение выборок, по которым рассчитывались коэффициенты корреляции для разных пар станций.

Введение в диагональные члены ошибок наблюдений, равных 0,02, 0,05 и 0,10, не привело к положительной определенности корреляционных матриц. Поэтому для анализа были использованы корреляционные функции геопотенциала и температуры для изобарической поверхности 500 мб, аппроксимированные функциями с существенно положительными спектрами. Корреляционная функция геопотенциала AT_{500} заимствована из работы [2], она аппроксимирована формулой

$$\mu_n(r) = J_0(1,065r) e^{-0,19r^{1,5}}, \quad (15)$$

где $\mu_n(r)$ — нормированная корреляционная функция геопотенциала AT_{500} , J_0 — функция Бесселя, r — расстояние в тысячах километров.

Корреляционная функция температуры AT_{500} рассчитана В. П. Болтенковым. Ю. М. Либерман аппроксимировал эту корреляционную функцию формулой

$$\mu_T(r) = J_0(1,16r) l^{-0,35r^{1,02}}, \quad (16)$$

где $\mu_T(r)$ — нормированная корреляционная функция температуры AT_{500} , остальные обозначения те же, что и в (15).

По данным, снятым с графика корреляционной функции, построены корреляционные матрицы для интересующих нас пунктов.

Расчеты производились для матрицы 16×16 точек, из них 9 точек (с 1-й по 9-ю) принадлежало к одному участку территории, составляя матрицу Σ_{11} , и 7 точек (с 10-й по 16-ю) — ко второму участку территории.

На рис. 1 представлена схема точек, а также значения компонент весовых векторов.

Анализ полученных результатов показал, что коэффициент канонической корреляции существенно выше самого большого коэффициента кросскорреляции (0,892 и 0,648 соответственно). Однако распределение

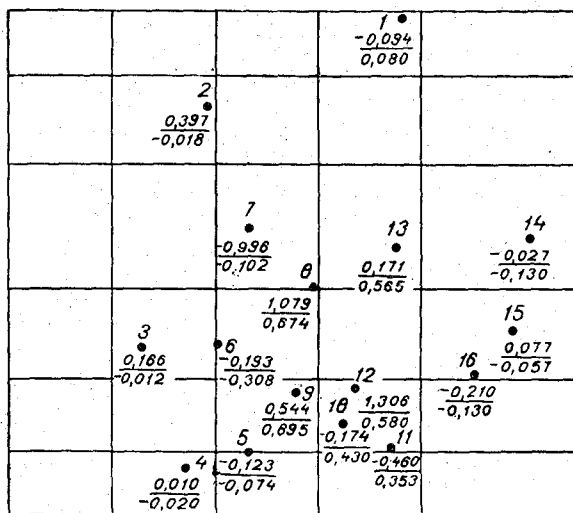


Рис. 1. Схема расположения точек и значения компонент весовых векторов для первой канонической корреляции (в числителе дроби дано значение геопотенциала, а в знаменателе — температуры на уровне 500 мб).

компонент весовых векторов a и b таково, что большую часть информации несут ближайшие к границам полей точки, а на удаленные точки падают очень малые значения весов. Если же ближайшие точки исключить из расчета, коэффициент канонической корреляции существенно уменьшается, оставаясь, однако, больше любого из коэффициентов соответствующей кросскорреляционной матрицы, а значения весов в более удаленных точках возрастают. Предварительные исследования на матрицах малых порядков (5×5) показали, что при небольших изменениях в исходных матрицах весовые векторы a и b варьируют весьма значительно. Добавление к диагональным членам автокорреляционных матриц средних квадратов случайных ошибок наблюдений соответствующих величин, отнесенных к дисперсии, приводило к сглаживанию весовых векторов a и b и к уменьшению коэффициентов канонической корреляции. В табл. 1 представлено изменение коэффициентов первой и второй канонической корреляции в зависимости от значения диагональных членов.

Табл. 1 показывает, что увеличение добавки к диагональному члену уменьшает коэффициент как первой, так и второй канонической корреляций, однако до значения диагонального члена 1,10 он остается больше, чем самый большой член исходной кросскорреляционной матрицы,

Коэффициент канонической корреляции для геопотенциала значительно выше, чем для температуры, что объясняется более резким затуханием с расстоянием корреляционной функции температуры по сравнению с геопотенциалом. Как уже указывалось выше, с введением в диагональный член корреляционных матриц меры ошибки наблюдений распределение компонент весовых векторов приобретает более сложный характер.

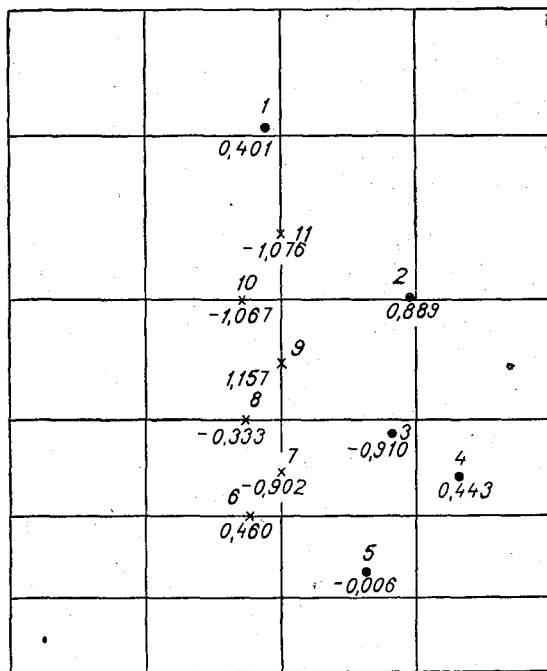


Рис. 2. Схема расположения точек и значения компонент весовых векторов для первой канонической корреляции (геопотенциала AT_{500} .)

Таблица 1

Значения коэффициентов канонических корреляций в зависимости от значений диагонального члена автокорреляционных матриц

Значение диагонального члена	Геопотенциал AT_{500}		Температура AT_{500}	
	коэффициент первой канонической корреляции	коэффициент второй канонической корреляции	коэффициент первой канонической корреляции	коэффициент второй канонической корреляции
1,00	0,893	0,798	0,676	0,636
1,02	0,856	0,773	0,663	0,621
1,05	0,816	0,743	0,644	0,600
1,10	0,765	0,695	0,615	0,569
1,20	—	—	0,567	0,518

В данном и в последующем случаях приводятся характеристики только для двух первых векторов, так как проведенные расчеты показали, что роль следующих векторов мала. Коэффициенты третьей канонической корреляции равны 0,626 и 0,307 для геопотенциала и температуры соответственно, т. е. меньше, чем наибольшие значения в кросскорреляционной матрице (0,648 и 0,550).

В качестве примера в табл. 2—5 приведены подробные результаты расчета для случая 11×11 точек, из них первые пять точек — станции, в которых производятся наблюдения, последние шесть точек — узлы регулярной географической сетки через 5° широты и 5° долготы (рис. 2). Полученные для них автокорреляционные и кросскорреляционные матрицы геопотенциала и температуры на AT_{500} представлены в табл. 2 и 3. По данным этих таблиц выполнен расчет канонических корреляций с добавлением к диагональному элементу автокорреляционных матриц значений 0,02, 0,05 и 0,10 для геопотенциала и 0,02, 0,05, 0,10 и 0,20 для температуры.

В табл. 4 и 5 даны весовые векторы a и b и соответствующие коэффициенты канонических корреляций для двух первых пар с различными значениями диагональных элементов.

Как видно из приведенных в табл. 4 и 5 результатов расчета, коэффициенты канонической корреляции для первой и второй пары комбинаций существенно превышают максимальный элемент кросскорреляционной матрицы (для H и T на уровне 500 мб он равен соответственно 0,597 и 0,49). Причем, как и следовало ожидать из анализа кросскорреляционных матриц, коэффициенты канонической корреляции для температуры несколько меньше, чем для геопотенциала.

Увеличение диагонального члена автокорреляционных матриц, как и ранее, уменьшает коэффициент канонической корреляции, одновременно несколько сглаживая весовые векторы. Так, например, для геопотенциала AT_{500} с диагональным элементом 1,00 три из шести компонентов векторов a по модулю больше единицы, а с диагональным членом 1,02 только один компонент вектора больше единицы. Сглаживание заметно также при анализе норм весовых векторов a и b , которые с увеличением диагонального элемента уменьшаются (см. табл. 4—5).

Выводы

1. Коэффициенты канонической корреляции не только для первой, но и для второй пары комбинаций существенно превосходят максимальные элементы исходной кросскорреляционной матрицы.
2. Коэффициенты канонической корреляции для геопотенциала AT_{500} несколько выше, чем для температуры на поверхности 500 мб.
3. Учет средней квадратической ошибки наблюдений, отнесенной к дисперсии, приводит к некоторому сглаживанию векторов a_i и b_i с одновременным уменьшением коэффициента канонической корреляции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. О применении метода канонических корреляций в метеорологии. См. наст. сб.
2. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеоздат. Л., 1963.

Таблица 2

Автокорреляционная и кросскорреляционная матрица для геопотенциала АТ₅₀₀

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2	0,083	1									
3	0,405	0,405	1								
4	0,648	0,648	0,648	1							
5	0,117	0,110	0,191	0,255	1						
6	0,096	0,112	0,066	0,097	0,082	1					
7	0,118	0,015	0,428	0,135	0,045	0,720	1				
8	0,090	0,120	0,274	0,054	0,070	0,477	0,742	1			
9	0,052	0,446	0,216	0,002	0,100	0,148	0,496	0,766	1		
10	0,288	0,428	0,126	0,099	0,117	0,026	0,189	0,522	0,796	1	
11	0,597	0,546	0,048	0,110	0,095	0,111	0,004	0,212	0,533	0,816	1

Таблица 3

Автокорреляционная и кросскорреляционная матрица для температуры АТ₅₀₀

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1										
2	0,13	1									
3	0,29	0,29	1								
4	0,05	0,53	0,53	1							
5	0,13	0,05	0,11	0,17	1						
6	0,08	0,13	0,00	0,12	0,02	1					
7	0,12	0,03	0,31	0,07	0,061	0,61	1				
8	0,01	0,30	0,18	0,10	0,11	0,36	0,64	1			
9	0,19	0,31	0,30	0,05	0,12	0,08	0,67	0,69	1		
10	0,49	0,44	0,06	0,12	0,11	0,07	0,42	0,69	0,43	1	
11			0,01	0,13	0,09	0,13	0,06	0,12	0,43	0,72	1

Значения компонент весовых векторов a_i и b_i и коэффициентов канонических корреляций λ для геопотенциала AT_{500} при различных значениях диагональных членов

λ	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	Σb^2	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	Σa^2
Диагональный член 1,00													
0,899	0,401	0,889	-0,910	0,443	-0,006	1,975	0,460	-0,902	-0,333	1,157	-1,067	1,076	4,770
0,744	0,672	-0,108	1,100	-0,678	0,094	2,142	-0,656	1,310	0,217	-1,056	0,151	0,946	4,226
Диагональный член 1,02													
0,849	0,497	0,839	-0,718	0,313	-0,002	1,564	0,332	-0,662	-0,303	0,843	-0,806	1,093	3,195
0,698	0,581	-0,197	1,187	-0,703	0,100	2,288	-0,647	1,354	0,217	-1,051	0,248	0,752	4,033
Диагональный член 1,05													
0,801	0,572	0,776	-0,519	0,183	-0,001	1,231	0,213	-0,436	-0,272	0,558	-0,547	1,074	2,073
0,637	0,468	-0,257	1,228	-0,692	0,106	2,282	-0,603	1,339	0,209	-0,952	0,278	0,561	3,500
Диагональный член 1,10													
0,747	0,611	0,711	-0,348	0,075	-0,006	1,006	0,123	-0,266	-0,242	0,341	-0,308	1,008	1,384
0,559	0,341	-0,256	1,206	-0,637	0,111	2,056	-0,519	1,254	0,189	-0,744	0,239	0,394	2,644

Значения компонент весовых векторов a_i и b_j и коэффициентов канонических корреляций λ для температуры AT_{500} при различных значениях диагональных членов

λ	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	Σb^2	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	Σa^2
Диагональный член 1,0													
0,657	0,713	0,608	-0,152	-0,036	-0,004	0,903	0,013	-0,085	-0,109	0,074	-0,366	1,191	1,577
0,516	-0,111	0,168	1,079	-0,478	0,008	1,435	-0,365	0,818	-0,408	0,999	-0,340	0,001	2,082
Диагональный член 1,02													
0,641	0,705	0,604	-0,151	-0,039	-0,007	0,886	0,014	-0,086	-0,119	0,063	-0,308	1,147	1,436
0,499	-0,117	0,177	1,056	-0,466	-0,001	1,377	-0,355	0,781	-0,358	0,962	-0,309	-0,006	1,884
Диагональный член 1,05													
0,620	0,692	0,598	-0,146	-0,045	-0,011	0,861	0,127	-0,086	0,129	0,054	-0,239	1,091	1,291
0,476	-0,128	0,188	1,024	-0,448	-0,016	1,302	-0,336	0,732	-0,294	0,915	-0,269	-0,017	1,644
Диагональный член 1,10													
0,590	0,673	0,589	-0,136	-0,054	-0,018	0,822	0,092	-0,088	-0,014	0,048	-0,154	1,018	1,097
0,445	-0,144	0,200	0,978	-0,422	-0,033	1,196	-0,308	0,665	-0,210	0,852	0,216	-0,035	1,356
Диагональный член 1,20													
0,540	0,638	0,573	-0,114	-0,069	-0,031	0,754	-0,001	-0,090	-0,144	0,052	-0,050	0,913	0,867
0,397	-0,173	0,211	0,912	-0,377	-0,058	1,152	0,264	0,572	-0,096	0,764	-0,143	-0,066	1,014

НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИССЛЕДОВАНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЯ ВЕТРА

Приводятся результаты расчета корреляционных функций поля ветра на уровне 500 мб.

В настоящее время в связи с широким применением метода оптимальной интерполяции к задаче объективного анализа метеорологических полей появилась потребность в надежных данных об их статистической структуре. Для оптимальной интерполяции необходимо, в частности, знание пространственной корреляционной функции данного поля. Цель настоящей статьи — изучение корреляционных функций составляющих скорости ветра u и v на уровне 500 мб для дальнейшего их использования в объективном анализе полей этих величин. На основании фундаментальных теоретических работ А. Н. Колмогорова, А. Н. Обухова, М. И. Юдина известно, что структурная (и корреляционная) функция

скорости ветра изменяется пропорционально $r^{\frac{2}{3}}$ при малых значениях расстояния r . С увеличением расстояния закон «двух третей» переходит в закон «первой степени», т. е. функция $b_c(r)$ в интервале приблизительно $0,5 < r < 1,4$ (r в 10^3 км) изменяется линейно, пропорционально r . Эти законы подтверждаются на эмпирическом материале в работах М. В. Завариной [7], М. И. Юдина [10], Л. С. Гандина и Т. И. Кузнецовой [5]. Полученная в работе [5] структурная функция b_c на уровне 500 мб подсчитана по данным семилетних наблюдений на 11 станциях, сосредоточенных на побережье и над акваторией Северной Атлантики. Все расчеты в этой работе производились вручную, что, собственно, и обусловило ограниченность выборки в пространстве и во времени. Поэтому представляло интерес с помощью современной вычислительной техники произвести расчеты корреляционной и структурной функций ветра на большем фактическом материале. Это и было выполнено в настоящей работе.

Исходным материалом послужили данные о скорости и направлении ветра, выписанные из аэрологических телеграмм для 60 станций за 60 сроков в течение двух летних сезонов (июнь—сентябрь 1960—1961 гг.) и двух зимних (декабрь—март 1959—1960 гг.). Чтобы выборки могли считаться статистически независимыми, данные выбирались с интервалом в три дня. Станции располагались в двух областях — на Европейской территории Союза и в Западной Европе таким образом, чтобы иметь достаточное количество пар станций на большом расстоянии друг от друга (рис. 1). С помощью специальной небольшой программы на ЭВМ по

модулю и направлению ветра на каждой станции были вычислены составляющие ветра u и v по осям прогностической сетки, прямоугольной на картах равноугольной конической проекции. Затем на той же машине по программе, составленной В. П. Болтенковым и любезно предоставленной нам, были вычислены корреляционные и структурные функции полей u и v для летнего и зимнего сезонов, получены дисперсии полей u и v и средние квадратические ошибки σ_m и σ_b вычисления функций $m(\rho)$ и $b(\rho)$.

Методика расчетов в используемой программе подробно изложена в статьях Л. С. Гандина и В. П. Болтенкова [3] и В. П. Болтенкова [2].

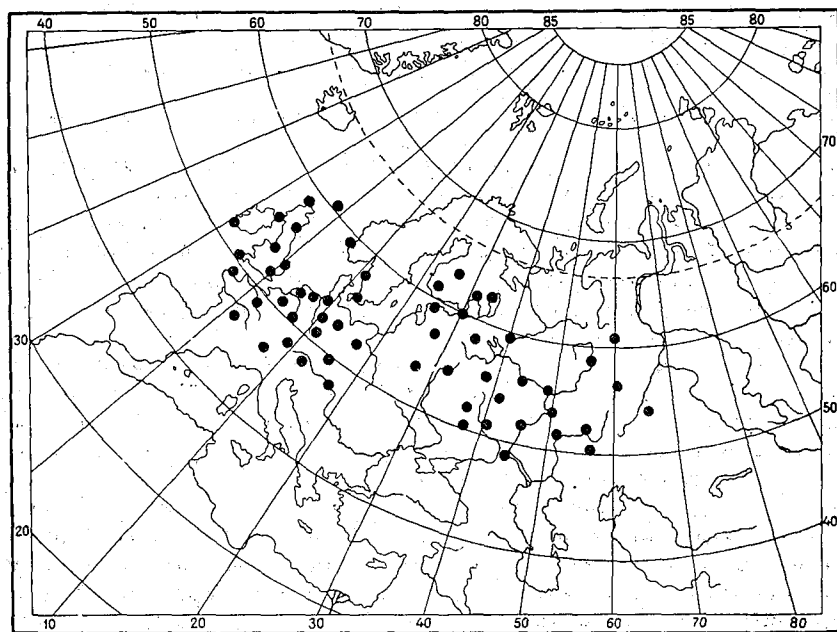


Рис. 1. Расположение исходных станций.

Напомним, что все расчеты ведутся для отклонений значений u и v от их норм, вычисленных по тому же исходному материалу.

Вообще говоря, полученные таким путем нормы могут значительно отличаться от их средних многолетних значений (или средние многолетние оказываются нерепрезентативными для данной выборки), чем и вызвана невозможность использования последних при расчетах различных статистических характеристик. В нашем случае средние по летней и зимней выборке в основном хорошо согласуются с многолетними нормами, опубликованными в Аэроклиматическом атласе характеристик ветра северного полушария под редакцией Гутермана [1].

Поля отклонений u и v от их норм можно приближенно считать однородными и изотропными относительно корреляционной функции, т. е. последняя должна зависеть только от длины отрезка между двумя точками и не зависеть от его расположения; кроме того должна отсутствовать корреляция между продольными и поперечными составляющими вектора ветра в разных точках.

Применительно к полю дисперсий однородность и изотропность означают, что дисперсии $m_u(0)$ и $m_v(0)$ постоянны для всего поля и равны между собой в каждой точке, т. е. выполняется закон кругового распределения. В работах М. И. Юдина [12] и Л. С. Гандина [4] было

Полученные таким образом средние векторные ошибки $\epsilon_c = \sqrt{\epsilon_u^2 + \epsilon_v^2}$ составили 5—6 м/сек. Они превышают реальные ошибки измерения ветра, так как включают в себя также погрешности примененной методики расчета нормированных корреляционных функций, предполагающей однородность поля дисперсий.

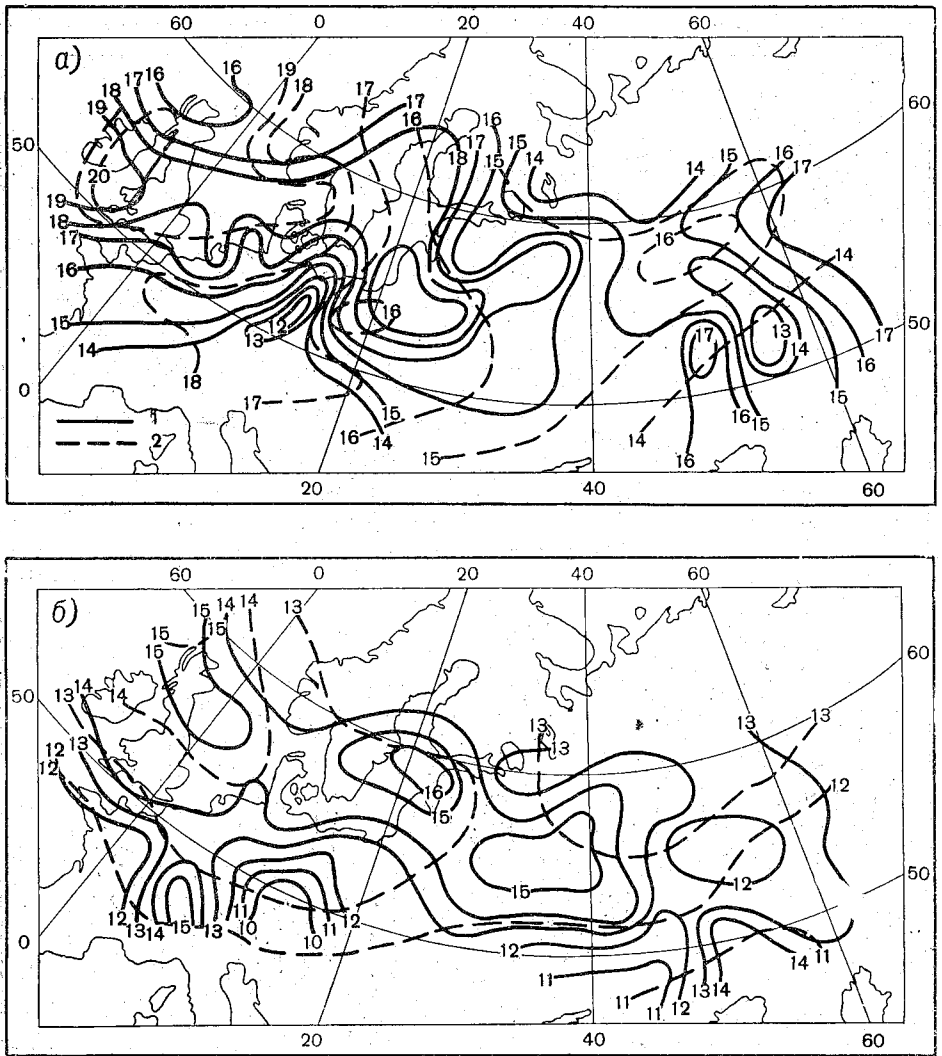


Рис. 3. Карты средних векторных квадратических отклонений $\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$; а — зима, б — лето;

1 — по нашим данным, 2 — по данным Кратчера [12].

Корреляционные и структурные функции после исключения ошибок наблюдений нормировались на $b(\infty)$ и $m(0)$ соответственно и в таком виде наносились на графики. На рис. 4, 5 представлены кривые $\mu(\rho) = \frac{m(\rho)}{m(0)}$, кривые $\beta(\rho) = \frac{b(\rho)}{2m(0)}$ нет необходимости демонстрировать, так как графики функций $\mu(\rho)$ и $\beta(\rho)$ являются зеркальным отражением друг друга. Надежность вычисленных функций $\mu(\rho)$

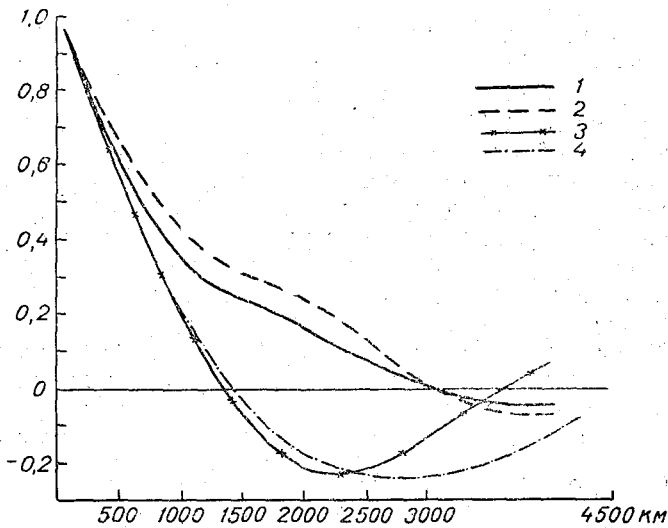


Рис. 4. Нормированные автокорреляционные функции составляющих вектора ветра u и v на уровне 500 мб. Зима.
 1 — $\mu_u(\rho)$; 2 — $\mu_{u_g}(\rho)$; 3 — $\mu_v(\rho)$; 4 — $\mu_{v_g}(\rho)$.

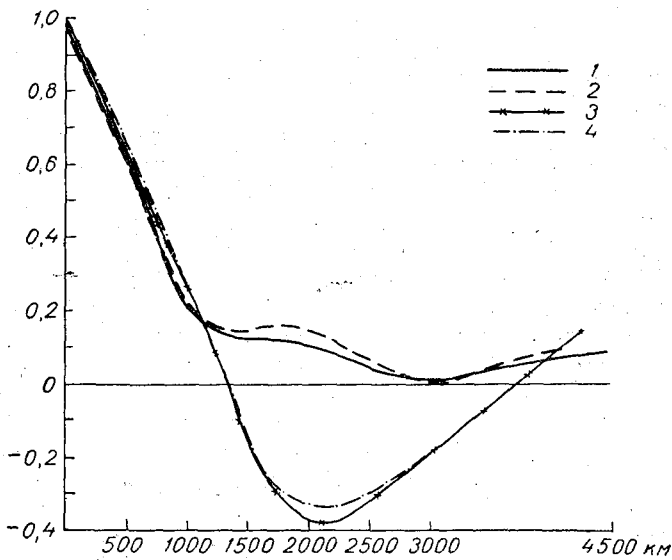


Рис. 5. Нормированные автокорреляционные функции составляющих вектора ветра u и v на уровне 500 мб. Лето.
 Усл. обозн. см. на рис. 4.

оценивалась по их доверительным интервалам $I_\beta = (\bar{m} - \varepsilon_\beta; \bar{m} + \varepsilon_\beta)$, подсчитанным для вероятности $\beta = 0,95$. Здесь $\varepsilon_\beta = \frac{\sigma_j}{\sqrt{n_j}} t_\beta$; σ_j — среднее

квадратичное отклонение значения функции в градации; n_j — число случаев в градации; $t_\beta = \sqrt{2} \Phi^{-1}(\beta)$; $\Phi^{-1}(\beta)$ — функция, обратная интегралу вероятности; β — вероятность попадания случайной величины в интервал.

Значения ε_β получились для всех кривых в интервале $200 \leq r < 3000$ км — порядка 0,02—0,03, что свидетельствует о достаточной надежности вычислений для этих расстояний. Для расстояний $r < 200$ км и $r > 3000$ км данных было значительно меньше и поэтому доверительные интервалы наших функций увеличиваются до 0,1—0,2.

На графиках представлены также корреляционные функции геострофического ветра, данные для которых вычислялись за те же сроки и для той же сети станций, по которой имелись сведения о реальном ветре. Для расчета геострофического ветра на каждой станции использовалась методика М. И. Юдина и Р. Э. Соловейчика [9]. Суть ее состоит в том, что по известным значениям геопотенциала на данной станции и на нескольких окружающих станциях вычисляются методом наименьших квадратов составляющие градиента поля геопотенциала в данной точке (станции)

$\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial H}{\partial y}$ и, следовательно, u_g и v_g . Все необходимые расчеты были выполнены дипломанткой Т. С. Кузнецовой. Полученные на этом материале корреляционные функции μ_{u_g} и μ_{v_g} , как видно из графиков, почти

совпадают с функциями μ_u и μ_v реального ветра, но несколько превышают их по абсолютной величине. С одной стороны, это понятно, так как корреляционные зависимости в более гладком геострофическом поле должны быть выше. С другой стороны, так как для определения u_g и v_g в разных пунктах могут быть использованы одни и те же окружающие станции, ошибки полученных геострофических значений должны коррелировать между собой, а это в свою очередь может служить источником завышения геострофических корреляционных функций. Обратимся теперь к виду наших кривых.

Функции $\mu_u(\rho)$ и $\mu_v(\rho)$ оказались различными, $\mu_v(\rho)$ имеет отрицательную корреляцию в радиусе расстояний от 1500 до 3500 км с минимумом на расстоянии около 2000 км. Функция $\mu_u(\rho)$ постепенно затухает до нуля на расстоянии примерно 3000 км, правда, на 1500 км она убывает уже до 0,1 летом и до 0,2 зимой. Приблизительно до 800 км обе функции ведут себя одинаково. Различный ход на больших расстояниях можно объяснить следующим образом.

Поскольку ветер — величина векторная, мы можем для каждой пары станции рассматривать его составляющие вдоль отрезка, соединяющего станции, и перпендикулярно к нему. Соответственно для этих составляющих мы можем изучать продольные и поперечные корреляционные функции. В теории однородной и изотропной турбулентности при условии однородности и изотропии поля скоростей были выведены соотношения, показывающие, что продольные корреляционные функции больше поперечных.

Справедливость этого положения для геострофического ветра показана в работах М. И. Юдина [11] и Л. С. Гандина [4]. Отправным пунктом этого вывода является однородность и изотропность поля геопотенциала, на основании чего доказывается однородность дисперсий геострофического ветра. Продольная корреляционная функция $m_g(\rho)$ оказывается пропорциональной первой производной от $m_H(\rho)$ — корреля-

ционной функции геопотенциала, а поперечная функция $n_g(\rho)$ — второй производной. Если описывать $m_H(\rho)$ формулой М. И. Юдина

$$m_H(\rho) = m_H(0) e^{-\lambda\rho} (1 + \lambda\rho),$$

то

$$m_g(\rho) = m_u(0) e^{-\lambda\rho},$$

$$n_g(\rho) = m_u(0) e^{-\lambda\rho} (1 - \lambda\rho)$$

В силу этого корреляции полей u (или v) оказываются различными для разных направлений. Например, для составляющей ветра u корреляция будет наибольшей, когда ось x совпадает по направлению с отрезком, соединяющим станции, и наименьшей, когда ось x перпендикулярна этому отрезку. Иллюстрация этого факта с помощью графика изолиний корреляционных функций геострофического ветра имеется в работе Л. С. Гандина [4]. Если бы во всех направлениях корреляция была одинаковой, изолинии были бы окружностями, на самом же деле они имеют вид эллипсов, вытянутых вдоль продольной оси.

В наших расчетах не ставилась задача вычисления продольных и поперечных корреляционных функций. Нам нужно было иметь функцию, осредненную по всем направлениям, соответственно используемой методике объективного анализа полей u и v [8]. Такая корреляционная функция, очевидно, одинакова для обеих составляющих, полученные же различия объясняются просто расположением станций. При их выборке преследовалась цель иметь как можно больше пар пунктов, отстоящих друг от друга на больших расстояниях; имеющаяся информация позволила выбрать область, вытянутую по широте и состоящую из двух групп станций.

В результате для небольших расстояний пары станций принадлежали к какой-либо одной группе, и направления между ними были разнообразными. В этом случае осредненные по направлению корреляционные функции $m_u(\rho)$ и $m_v(\rho)$ одинаковы.

Для больших расстояний станции каждой пары принадлежат в основном разным группам, и составляющая u становится продольной, а v — поперечной. Отсюда и различие их корреляционных функций. Если бы область станций была круглой или квадратной, то такого различия бы не получилось. Для целей же объективного анализа (в пределах применяемой методики) следует пользоваться одной корреляционной функцией для обеих составляющих, полученной как средняя из наших кривых.

Эта корреляционная функция оказалась очень похожей на осредненную векторную корреляционную функцию, полученную ранее в работе [5].

Следует отметить также, что в поведении функции $m_u(\rho)$ обнаруживается некоторый сезонный ход, а именно: зимой корреляционные связи затухают медленнее, чем летом.

Располагая данными о реальном и геострофическом ветре в одних и тех же пунктах, мы имели возможность вычислить поля агеострофических отклонений $u' = u - u_g$ и $v' = v - v_g$ и затем их корреляционную функцию. Результаты показывают, что поля агеострофических отклонений являются мелкомасштабными по сравнению с самим ветром; их корреляционные функции затухают почти до нуля уже к 100 км.

Полученные нами средние значения дисперсий изучаемых полей приводятся в табл. 1.

Если воспользоваться очевидными соотношениями между дисперсиями реального σ_p^2 , геострофического σ_g^2 и ветра и агеострофических полей σ_a^2

$$\begin{aligned}\sigma_p^2 &= \overline{(u_g + u_a)^2} = \sigma_g^2 + \sigma_a^2 + 2\sigma_g\sigma_a r_{g,a}, \\ \sigma_g^2 &= \overline{(u_p - u_a)^2} = \sigma_p^2 + \sigma_a^2 - 2\sigma_p\sigma_a r_{p,a}, \\ \sigma_a^2 &= \overline{(u_g - u_p)^2} = \sigma_g^2 + \sigma_p^2 - 2\sigma_g\sigma_p r_{g,p}\end{aligned}$$

и подставить в них значения полученных средних дисперсий, можно оценить коэффициент корреляции между указанными полями. Величины $r_{g,a}$, $r_{p,a}$ малы, порядка 0,3—0,4, причем по данным о дисперсиях они определяются с малой степенью точности; коэффициент корреляции между реальным и геострофическим ветром довольно высок, порядка 0,7.

Таблица 1
Дисперсия составляющих реального, геострофического и агеострофического ветра ($\text{м}^2/\text{сек.}^2$)

Сезон	u	u_g	u'	v	v_g	v'
Зима	115	117	51	114	117	46
Лето	78	76	48	80	87	48

ЛИТЕРАТУРА

1. Аэроклиматический атлас характеристик ветра северного полушария. Под ред. И. Г. Гутермана. НИИАК, 1963.
2. Болтенков В. П. Исследование между статистической макроструктуры температуры воздуха. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
3. Гандин Л. С., Болтенков В. П. К методике исследования трехмерной макроструктуры метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
4. Гандин Л. С. Об оптимальной интерполяции векторных полей. Труды ГГО, вып. 165, 1964.
5. Гандин Л. С., Кузнецова Т. И. О структуре полей давления и ветра в средней тропосфере при различных формах циркуляции. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
6. Гутерман И. Г. Распределение ветра над северным полушарием. Гидрометеориздат, Л., 1965.
7. Заварина М. В. Исследование изменчивости ветра в свободной атмосфере. Труды НИУ ГУГМС, сер. 1, вып. 21, 1946.
8. Кричак М. О. Опыт объективного анализа поля ветра методом оптимальной интерполяции. Труды ММЦ, вып. 4, 1964.
9. Соловейчик Р. Э., Юдин М. И. Метод практического вычисления градиентов. Труды ГГО, вып. 31, 1940.
10. Юдин М. И. Вопросы теории турбулентности и структуры ветра с приложением к задаче о колебаниях самолета. Вестн. ЛГУ, вып. 1, 1946.
11. Юдин М. И. Некоторые закономерности структуры поля геопотенциала. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
12. Crutcher H. L. Upper wind statistics charts of the Northern Hemisphere, Vol. 1, 2. Issued by the Office of the Chief of Naval Operations, 1959.
13. Фортус М. И. Трехмерная пространственная структура поля геопотенциала. Труды ГГО, вып. 165, 1964.

В. А. ШНАЙДМАН

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ ВЕТРА В ВЕРХНЕЙ ТРОПОСФЕРЕ

Исследуется пространственная и временная структура поля ветра в верхней тропосфере. Получены параметры вертикального профиля ветра в области максимума. Приводятся результаты расчетов на ЭВМ временных и пространственных структурных и автокорреляционных функций. Показано, что нормированные автокорреляционные функции компонент скорости максимального ветра и вектора ветра на AT_{300} близки между собой. Исследуется возможность экстраполяции компонент скорости ветра на вышележащие уровни по данным нижележащих.

Исследование пространственной и временной структуры поля ветра представляет большой интерес для объективного анализа, статистического прогноза и решения других прикладных задач. В данной работе исследуется вопрос о пространственной и временной изменчивости поля максимального ветра и составляющих вектора ветра на изобарической поверхности 300 мб.

Известно, что скорость ветра, как правило, в свободной атмосфере растет с высотой, на некоторой высоте достигает максимума, а затем убывает. При этом уровень, на котором достигается максимум, находится на различной высоте. Часто наблюдается несколько экстремумов в вертикальном профиле скорости ветра. Однако чаще всего максимум скорости ветра приходится на слой 8—12 км [1, 2]. Так как в настоящее время на этих высотах проходят трассы современных турбовинтовых самолетов, то характеристики вертикального профиля в этих слоях весьма важны с точки зрения обслуживания авиации. В работе Н. З. Пинуса [3] было показано, что в области максимума профиль ветра описывается экспонентой и были получены осредненные характеристики экспоненты выше и ниже уровня максимума. Мы попытались исследовать подобие профилей скорости ветра в области максимума при различных значениях максимальной скорости. С этой целью нами была произведена выборка случаев с максимальной скоростью ветра в градациях 20—30, 31—40, 41—50 м/сек. и построены профили скорости ветра для нескольких станций юга ЕТС (Одесса, Черновцы, Львов). Расстояние по вертикали отсчитывалось от уровня максимума. Оказалось, что среднее квадратическое отклонение σ на каждом уровне примерно одинаково (в слое толщиной порядка 1,5—2 км) и равно половине ширины градации, т. е. приблизительно 5 м/сек. Следовательно, безразмерную скорость ветра $\frac{C(z)}{C_m}$ можно представить универсальной функцией от z , где z —

расстояние, отсчитываемое от уровня максимума $\frac{C(z)}{C_m} = f(z)$. В этом случае оказывается, что градиент скорости ветра в прилегающем к уровню максимума слое пропорционален максимальной скорости. Этот вывод был нами получен ранее [4] при обработке вертикальных профилей скорости ветра для случаев болтанки самолетов. Анализ многих вертикальных профилей с хорошо выраженным максимумом на уровнях 8—12 км показал, что на некотором расстоянии от максимума (в различных случаях на различном) наблюдается слой, где скорость ветра

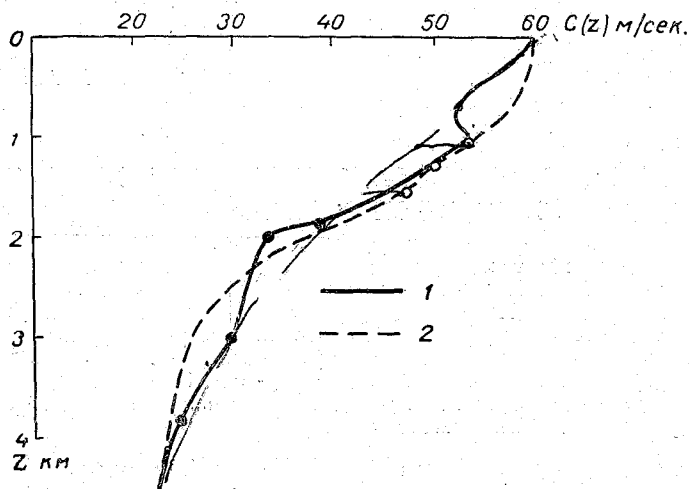


Рис. 1. Вертикальный профиль скорости ветра (ниже уровня максимума), Киев, 21 час. 3 января 1964 г.
1 — наблюдаемый профиль, 2 — аппроксимированный профиль.

мало меняется с высотой. Следовательно, функция $f(z)$ должна убывать от 1 до некоторой величины $v < 1$ и затем оставаться близкой к этой величине. Поэтому для аппроксимации профиля ветра мы воспользовались зависимостью вида

$$C(z) = (C_m - C_H) e^{-\alpha |z|^\beta} + C_H, \quad (1)$$

где H — высота в километрах, начиная с которой ветер мало меняется, H лежит обычно в пределах 3—4 км. Величины параметров α и β колеблются в довольно широких пределах: β — от 0,5 до 2,5; α — от 0,1 до 0,7.

Полученная зависимость дает возможность вычислить величины градиентов скорости ветра на различном удалении от уровня максимума для слоев любой толщины. По данным наблюдений это можно сделать только для слоев достаточно большой толщины. Наличие тонких слоев с большими градиентами весьма существенно при анализе турбулентности в свободной атмосфере, которая, как известно, имеет слоистую структуру.

На рис. 1 приводится зависимость $C(z)$ ($\alpha = 0,183 \frac{1}{\text{км}^{2,5}}$, $\beta = 2,5$).

Средний градиент в слое от 0,5 до 1,5 км от уровня максимума равен 13 м/сек. км и в то время, как в этом же слое встречаются градиенты от 12 до 16 м/сек. км. Для вычисления градиентов необходимо знать максимальную скорость ветра. Нам представляется, что одним из возможных путей расчета максимальной скорости ветра является вычисление ее по данным о ветре на основных изобарических поверхностях. При этом, так

как чаще всего в достаточном количестве данные имеются ниже уровня максимума, мы сталкиваемся с задачей экстраполяции. Имеющийся в нашем распоряжении материал позволил нам произвести необходимые расчеты для уровней 300 и 200 мб.

Для экстраполяции на вышележащие уровни по данным нижележащих мы воспользовались методикой, детально разработанной Л. С. Гандиным [5]. Следуя Гандину, мы представили отклонения компонент скорости ветра от нормы на вышележащем уровне как линейную комбинацию отклонений на нижележащих уровнях

$$f'_0 = \sum_{i=1}^n p_i f'_i; \quad f' = \begin{cases} u - \bar{u} \\ v - \bar{v} \end{cases} \quad (2)$$

где u — зональная, v — меридиональная компоненты скорости ветра. Индекс 0 относится к уровню, на который производится экстраполяция, т. е. к вышележащему уровню, а $i=1, 2, \dots, n$ к нижележащим. По условию минимума ошибки аппроксимации весовые множители p_i определяются из следующей системы уравнений:

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} p_j + \delta_i^2 p_i = m_{0i} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Здесь $m_{ij} = \overline{f'_i f'_j}$ — соответствующие автоковариации компонент скорости ветра, δ^2 — средняя квадратическая ошибка, учитывающая как ошибки измерений, так и мелкомасштабные особенности поля ветра над тем или иным пунктом. Уравнение (3) отличается от соответствующего уравнения в работе [5] тем, что здесь вместо нормированных автокорреляционных функций входят автоковариации. Это обусловлено различием дисперсий компонент ветра на разных уровнях. Мы воспользовались результатами работы [6] при получении весовых множителей для расчета компонент скорости ветра на АТ₂₀₀ по данным на изобарических поверхностях 300, 500 и 700 мб. Так как в цитируемой работе [6] имеются данные о межуровневых коэффициентах корреляции и средних квадратических отклонениях для каждой изобарической поверхности, после несложных преобразований система уравнений (3) была приведена к виду:

$$\sum_{j=1}^3 r_{ij} \chi_j p_j + \eta_i \chi_i p_i = r_{0i} \quad (i=1, 2, 3). \quad (4)$$

Здесь r_{ij} — коэффициенты межуровневой корреляции, χ — отношение среднего квадратического отклонения на i -том уровне к среднему квадратическому отклонению на нулевом уровне, η_i — отношение квадрата ошибки к квадрату среднего квадратического отклонения на каждом уровне. Величина η была принята равной 0,10, ниже будет показано, каким образом она вычислена. Решив систему уравнений (4), мы получили необходимые весовые множители. Все расчеты были проведены для зимнего периода и для широтного круга 50—60°. Для других сезонов и других широтных кругов величины p будут несколько иными в связи с различиями дисперсий и коэффициентов корреляции. Полученные экстраполяционные соотношения имеют вид:

для зональной компоненты

$$u'_{200} = 0,422u'_{300} + 0,19u'_{500} + 0,162u'_{700}, \quad (5)$$

для меридиональной компоненты

$$v'_{200} = 0,4v'_{300} + 0,261v'_{500} + 0,26v'_{700}. \quad (6)$$

Средняя квадратическая ошибка экстраполяции, оцененная по независимым данным, получилась порядка 5—6 м/сек. Экстраполяция может быть существенно улучшена, если привлечь данные за предшествующие сроки. Для этой цели нами были получены корреляционные функции для компонент максимальной скорости ветра и скорости ветра на AT_{300} в зависимости от промежутка времени τ (τ изменялось от 0 до 72 час.). Расчеты производились для семи станций (Мурманск, Киев, Минск, Львов, Саратов, Горький, Свердловск) по данным наблюдений за зимние периоды 1954—1957 гг. с помощью ЭВМ «Урал-2». Результаты расчетов приведены в табл. 1. Как видно из таблицы, величины μ (τ) могут суще-

Таблица 1

Пункт	Значение	τ час.											
		12		24		36		48		60		72	
		Компоненты ветра											
		u	v	u	v	u	v	u	v	u	v	u	v
Киев	μ (max)	0,85	0,69	0,70	0,45	0,55	0,35	0,44	0,24	0,39	0,19	0,44	0,25
	μ (AT_{300})	0,86	0,59	0,72	0,35	0,60	0,25	0,43	0,19	0,38	0,08	0,29	0,14
Львов	μ (max)	0,68	0,67	0,54	0,43	0,37	0,29	0,36	0,25	0,28	0,25	0,17	0,25
	μ (AT_{300})	0,73	0,61	0,48	0,26	0,28	0,23	0,22	0,22	0,08	0,23	0,21	0,25
Минск	μ (max)	0,71	0,71	0,62	0,53	0,43	0,49	0,41	0,41	0,33	0,36	0,25	0,34
	μ (AT_{300})	0,82	0,74	0,66	0,51	0,58	0,41	0,44	0,34	0,35	0,33	0,32	0,27
Саратов	μ (max)	0,77	0,63	0,55	0,60	0,37	0,39	0,35	0,32	0,19	0,17	0,15	0,19
	μ (AT_{300})	0,78	0,76	0,61	0,53	0,47	0,41	0,36	0,20	0,26	0,15	0,14	0,14
Горький	μ (max)	0,61	0,75	0,52	0,55	0,40	0,47	0,39	0,43	0,37	0,40	0,21	0,38
	μ (AT_{300})	0,77	0,74	0,56	0,50	0,47	0,40	0,34	0,35	0,38	0,31	0,35	0,34
Свердловск	μ (max)	0,74	0,78	0,51	0,50	0,51	0,27	0,47	0,24	0,26	0,12	0,31	0,07
	μ (AT_{300})	0,72	0,70	0,43	0,38	0,46	0,25	0,44	0,16	0,25	0,16	0,22	0,09
Мурманск	μ (max)	0,80	0,78	0,68	0,61	0,63	0,48	0,61	0,44	0,31	0,34	0,40	0,22
	μ (AT_{300})	0,67	0,78	0,41	0,62	0,38	0,48	0,30	0,50	0,26	0,31	0,13	0,28

ственно отличаться друг от друга на различных станциях. Однако в среднем величина коэффициента корреляции становится меньше 0,5 примерно при $\tau=24-36$ час. Таким образом, данные за более ранние сроки заключают в себе малую информацию по отношению к текущему сроку. Тем не менее вплоть до $\tau=72$ час. величины коэффициентов остаются положительными в пределах 0,20—0,30 (за исключением ст. Свердловск, где для меридиональной компоненты при $\tau=72$ час. он достигает значения 0,07). Представляет интерес сравнение полученных временных закономерностей для максимального ветра с аналогичными величинами на поверхности 300 мб. Полученные величины для AT_{300} также представлены в табл. 1. Анализ полученных данных показывает, что нормированная автокорреляционная функция становится меньше 0,5 в основном при $\tau < 24$ часа, однако до $\tau=72$ часа автокорреляционная функция остается положительной в пределах значений 0,14—0,30 (за исключением меридиональной составляющей на ст. Свердловск). Для большей статистической надежности сравнения характеристик скоростей максималь-

ного ветра и ветра на AT_{300} мы построили среднюю взвешенную автокорреляционную функцию для широтного круга $50-60^\circ$ с. ш. Полученные значения автокорреляционных функций приведены в табл. 2.

Как видно из табл. 2, зависимости нормированной автокорреляционной функции от времени на уровне максимума скорости ветра и на уровне 300 мб практически совпадают. Следовательно, в среднем временной ход составляющих скорости ветра на AT_{300} позволяет в первом приближении судить о временном ходе скорости ветра на уровне максимума. Так как при подсчете корреляционных функций данные центрировались средними за сезон, то возникает опасение, не завышены ли эти данные за счет годового хода. Для оценки возможной ошибки за счет годового хода мы прежде всего по аэроклиматическим данным построили сезонный ход скорости ветра на уровне 300 мб, осредненный для рассматриваемой территории. Как видно из рис. 2, в зимний период средние месячные величины скорости ветра меняются мало, следовательно,

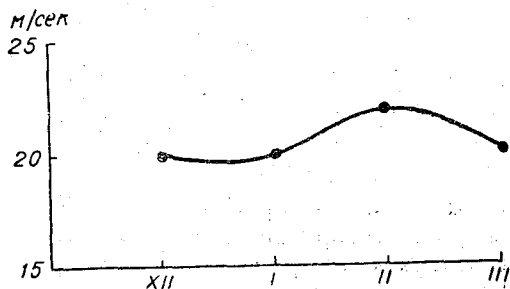


Рис. 2. Сезонный ход скорости ветра.

завышение корреляционных функций, по-видимому, тоже мало. На этот факт указывает и Л. С. Гандин [5]. Он полагает, что если осреднение производится на экстремальный сезон или месяц, то соответствующим завышением дисперсии можно пренебречь. Величины σ_μ оценивались по

Таблица 2

	τ час.						
	0	12	24	36	48	60	72
$\mu_u (AT_{300})$	1,0	0,79	0,60	0,45	0,38	0,30	0,27
$\mu_u (\max)$	1,0	0,72	0,57	0,44	0,40	0,31	0,25
n	2924	2253	2170	2096	2123	2092	2106
σ_{μ_u}		0,02	0,03	0,03	0,04	0,04	0,04
$\mu_v (AT_{300})$	1,0	0,70	0,44	0,35	0,29	0,24	0,23
$\mu_v (\max)$	1,0	0,70	0,52	0,40	0,33	0,32	0,28
σ_{μ_v}		0,03	0,04	0,04	0,04	0,04	0,05

формуле $\sigma_\mu = \frac{1 - \mu^2}{\sqrt{N} - 1}$, где N — эффективное число случаев, учиты-

вающее временную связность коррелируемых рядов.

Поскольку в нашем распоряжении имелись величины дисперсий, полученные по данным наблюдений, и вычисленные значения их путем

экстраполяции на нуль, то мы могли оценить величину $\eta = \frac{\overline{f'^2} - \overline{f^2}}{\overline{f^2}}$,

где $\overline{f'^2}$ — вычисленное значение дисперсии, $\overline{f'^2}$ — экстраполированное значение ее. Величина η колеблется от 0,14 до 0,25, что, по-видимому, связано с большими ошибками при измерении сильных ветров, которые наблюдаются на этих уровнях. Для АТ₅₀₀, по данным М. О. Кричак, величина η лежит в пределах 0,13—0,21. Ниже приводятся средние величины $\delta^2 = \overline{f'^2} - \overline{f'^2}$ для АТ₃₀₀ и уровня максимума:

	Уровень	
	300 мб	max
$\delta^2 (u)$	43	45
$\delta^2 (v)$	40	41

Для оценки пространственного распределения поля максимальной скорости в горизонтальной плоскости мы попытались оценить пространственную нормированную автокорреляционную функцию скорости ветра. Были рассчитаны структурные и корреляционные функции по данным трех зим 1954—1957 гг. для семи пунктов ЕТС. Полученные данные были исправлены с учетом ошибки измерений. Кроме того, для получения достаточно репрезентативных величин структурные и корреляционные функции были согласованы между собой. Известно, что исправленная с учетом ошибки δ_f^2 величина структурной функции равна $b_f = b_f - 2\delta_f^2$, где b_f — структурная функция, рассчитанная по исходным данным, b_f — величина структурной функции с учетом ошибки. Случайные ошибки влияют только на величину дисперсии, а на автокорреляционную функцию (при $\rho > 0$) влияния не оказывают. Тогда $m_f(0) = m_f(0) - \delta_f^2$, где $m_f(0)$ — средняя дисперсия с учетом ошибок, $m_f(0)$ — вычисленная по исходным данным средняя дисперсия. Для согласования структурных и корреляционных функций использовалась методика, предложенная в работе [7]. Согласно этой методике, величины ошибок вычисления $b_f(\rho)$ и $m_f(\rho)$ предполагаются пропорциональными по величине расхождений между результатами вычислений по всему материалу [$b_f(\rho)$ и $m_f(\rho)$] и по половине его ($b_f'(\rho)$ и $m_f'(\rho)$). Тогда исправленные значения этих функций b_f и m_f равны:

$$b_f = b_f + \frac{|b_f - b_f'|}{|b_f - b_f'| + 2|m_f - m_f'|} [b_f(\infty) - b_f - 2m_f], \quad (7)$$

$$m_f = m_f + \frac{|m_f - m_f'|}{|b_f - b_f'| + 2|m_f - m_f'|} [b_f(\infty) - b_f - 2m_f]. \quad (8)$$

В табл. 3 приводятся значения структурных и автокорреляционных функций для компонент скорости максимального ветра, а в табл. 4 — их значения для АТ₃₀₀.

Прежде всего мы сравнили полученные нами результаты с данными М. О. Кричак [8]. Как и следовало ожидать, величины структурных и автокорреляционных функций для АТ₃₀₀ примерно в 1,5—2,0 раза больше, чем для АТ₅₀₀. Однако общие закономерности изменений остаются примерно одинаковыми. Так, по нашим результатам для меридиональной

составляющей переход через нуль осуществляется при $\rho=1300$ км, а по данным М. О. Кричак — при $\rho=1400$ км. В то же время для компоненты u этот переход через нуль автокорреляционной функции нам получить не удалось, что подтверждается данными работы [8], где этот переход получен для $\rho=3400$ км.

Таблица 3

ρ	$b_u(\rho)$	$m_u(\rho)$	$b_v(\rho)$	$m_v(\rho)$
0	0	271	0	288
500	232	155	218	179
1000	312	115	434	71
1400	426	58	478	49
1800	498	22	508	34
2100	518	15	567	4
2600	520	10	576	0
∞	542	0	576	0

Таблица 4

ρ	$b_u(\rho)$	$m_u(\rho)$	$b_v(\rho)$	$m_v(\rho)$
0	0	171	0	183
500	146	98	134	116
1000	198	72	298	34
1400	258	42	386	-10
1800	322	10	390	-12
2100	334	4	392	-13
2600	330	6	366	0
∞	342	0	366	0

Для уровня максимума скорости ветра величина дисперсии превышает аналогичные величины для AT_{500} и AT_{300} . Сравнив этот вывод с данными работы Чарльза [6], мы приходим к выводу, что на уровне максимума величина дисперсии компонент скорости ветра достигает наибольшего значения. Что касается зависимости структурной и корреляционной функций от расстояния, то, по нашим данным, для меридиональной составляющей насыщение происходит на расстояниях, несколько превышающих 2000 км, а для зональной для рассмотренных расстояний переход через нуль не осуществляется. По-видимому, закономерности здесь остаются теми же, что и для AT_{300} . По значениям автокорреляционных функций и дисперсий нами была рассчитана нормированная автокорреляционная функция для компонент скорости ветра (табл. 5).

Таблица 5

Расстояние, км	$\mu_u(AT_{300})$	$\mu_u(\max)$	$\mu_v(AT_{300})$	$\mu_v(\max)$
500	0,57	0,57	0,63	0,60
1000	0,42	0,42	0,19	0,24
1400	0,25	0,22	-0,05	0,16
1800	0,09	0,08	-0,08	0,11
2100	0,02	0,05	-0,06	0,02
2600	0,04	0,04	0	0

Полученные значения согласуются с данными, приведенными в работе [8]. Интересен тот факт, что для зональной составляющей скорости ветра нормированные автокорреляционные функции практически совпадают. Для меридиональной составляющей существенные различия наблюдаются только для расстояний, превышающих 1000 км.

Таким образом, как пространственные, так и временные крупномасштабные характеристики поля ветра на изобарической поверхности 300 мб и на уровне, где скорость ветра достигает максимума, близки между собой и, следовательно, поле ветра на уровне 300 мб включает в себе большую информацию о максимальном ветре.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутерман И. Г. Распределение ветра над северным полушарием. Гидрометеоздат. 1965.
2. Пинус Н. З. Тропопауза и уровень с максимальной скоростью ветра. Метеорология и гидрология, № 3, 1961.
3. Пинус Н. З. Структура поля ветра в верхней тропосфере и нижней стратосфере. Метеорология и гидрология, № 4, 1962.
4. Шнайрман В. А. О применении методики пограничного слоя к определению параметров турбулентности в свободной атмосфере. Труды ЦАО, вып. 54, 1964.
5. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеоздат, Л., 1963.
6. Charles B. N. Lag correlations of upper winds. Journal of meteorology, Vol. 16, No. 1, 1959.
7. Гандин Л. С., Мелешко В. П., Мещерская А. В. О применении универсальных цифровых машин для исследования статистической структуры метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 165, 1965.
8. Кричак М. О. Некоторые результаты исследования статистических характеристик поля ветра. См. наст. сб.

М. В. ГУЩИНА, Р. Л. КАГАН, А. И. ПОЛИЩУК

О ТОЧНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНЕГО СЛОЯ ОСАДКОВ НА ПЛОЩАДИ

Исследуется статистическая структура сумм жидких осадков для различных физико-географических условий.

По данным о статистической структуре оценивается средняя квадратическая ошибка определения среднего слоя жидких осадков на площади по данным измерений в отдельных пунктах.

Для практических целей важно знать, с какой точностью может быть получена средняя сумма осадков на площади различных размеров в зависимости от густоты осадкомерной сети. Располагая такими сведениями, можно решать вопрос о том, насколько пригодны имеющиеся осадкомерные данные для решения тех или иных прикладных задач. В равной мере эти сведения могут быть использованы и при рационализации осадкомерной сети.

Естественно поэтому, что вопросу о точности определения среднего слоя осадков на площади уделяется большое внимание и имеется ряд работ, например [1, 7], где он затрагивается.

Однако до самого последнего времени вся необходимая для получения таких данных статистическая обработка производилась вручную. Это весьма ограничивало объем материала, который мог быть обработан. В результате данные разных авторов о точности средних по площади являются разрозненными и сравнительно малонадежными.

В настоящее время создалась возможность, используя электронные вычислительные машины (ЭВМ), произвести необходимые оценки путем обработки большого объема исходных данных. Такого рода расчеты выполнялись в Главной геофизической обсерватории им. А. И. Воейкова в 1964—1965 гг. При этом использовалась разработанная ранее в [5] методика оценки точности определения среднего слоя осадков на площади. Эта методика исходит из наличия однозначной связи между корреляционной функцией поля осадков и средней квадратической погрешностью определения слоя осадков на площади. Большое внимание уделялось изучению корреляционной структуры поля осадков, которое являлось наиболее трудоемким этапом работы. Некоторые предварительные итоги расчетов по данным сети станций УГМС Центральных областей были приведены в [2]. Расчеты по этому району были продолжены, исследовались также осадкомерные данные по другим районам. Результаты этой работы приведены в настоящей статье.

1. Статистическая структура поля осадков

Рассматривались осадки за теплый сезон (май—сентябрь), т. е. исследование ограничивалось рассмотрением жидких осадков. Были рассмотрены данные трех районов: УГМС Центральных областей (УГМС ЦО), Валдайской возвышенности и Приморья. По каждому из районов исследовались суммы осадков за шесть периодов суммирования: ночь (19—7 час.), день (7—19 час.), сутки, декада, месяц и сезон.

а) По району УГМС Центральных областей в качестве исходного материала были взяты данные регулярных наблюдений над осадками на сети станций и постов северо-восточной части УГМС Центральных областей.

Территория, на которой располагались рассматриваемые станции, представляет собой квадрат со сторонами 200 км. Рельеф ее сравнительно однороден. Значительные повышения имели место только на северо-западе рассматриваемой территории, где она соприкасается с Валдайской возвышенностью. Наибольшие перепады высот не превышают 200 м. Всего на указанной территории было выбрано 48 осадкомерных пунктов (15 станций и 33 поста).

Для расчета корреляционных функций сумм за полусутки и сутки использовались данные за 1960—1961 гг. (всего 306 дней). Суммы осадков за декаду, месяц и сезон исследовались по данным за 1951—1960 гг.

Так как расстояния между станциями регулярной осадкомерной сети, как правило, более 10 км, то не могли быть получены сведения о корреляционной структуре сумм осадков на малых расстояниях (до 10 км), которые очень важны для оценок точности. В связи с этим в дальнейшем исследовались районы, в которых имела более густая осадкомерная сеть.

б) Одним из таких районов являлся район Валдайской возвышенности, где были использованы данные наблюдений 47 пунктов ливнемерного куста ВНИГЛ. Ливнемерный куст расположен в средней части Валдайской возвышенности и занимает площадь радиусом около 50 км вокруг г. Валдая, являющегося центром куста. Ввиду сравнительно небольшой территории ливнемерного куста было привлечено дополнительно 15 станций стандартной осадкомерной сети. Они расположены в северо-восточном и юго-юго-восточном секторах Валдайской возвышенности.

Общий характер рельефа в районе ливнемерного куста и на дополнительно выбранной территории холмисто-озерный. Наибольшая разность высот достигает порядка 200 м. Большая часть территории занята лесами.

Для исследования декадных, месячных и сезонных сумм осадков использовались данные за 10-летний период, с 1951 по 1960 г. Срочные и суточные суммы осадков рассматривались за три сезона, один из которых (1953 г.) был наиболее дождливым, другой (1951 г.) — наиболее сухим, а третий (1956 г.) — наиболее близким к норме.

в) По Приморью использовались данные ливнемерного куста Приморского УГМС, имеющего в своем составе 21 пункт наблюдений. Кроме того, были дополнительно привлечены данные наблюдений еще 11 станций стандартной сети.

Территория, на которой расположены станции ливнемерного куста, весьма разнообразна по рельефу. Часть осадкомерных пунктов находится среди низменных равнин, а часть — среди холмов различной высоты и пологости. Еще более разнообразным оказался рельеф рассматриваемой территории при привлечении дополнительных станций, часть из ко-

торых расположена на Приханкинской низменности, а часть среди крупнохолмистого и даже горного рельефа Сихотэ-Алиньского хребта. Некоторые из выбранных станций находились даже на восточных склонах хребта, на побережье Японского моря.

Рассматривались данные за восьмилетний период (1957—1964 гг.) для сумм за декаду, месяц и сезон. Для сумм за полусутки и сутки рассматривались данные трех сезонов: 1957, 1964 и 1962 гг., из которых первый был наиболее дождливым, второй — наиболее сухим, а третий — близким к норме.

По каждому из районов за каждый период суммирования в отдельности вычислялись коэффициенты корреляции между суммами осадков всех пунктов данного куста. Всего для каждого периода суммирования было вычислено по данным УГМС ЦО примерно 1100, по Валдаю 1200 и по Приморью 500 коэффициентов корреляции. При расчете коэффициентов корреляции для полусуточных и суточных сумм учитывались лишь те дни, когда осадки выпадали одновременно на обеих станциях [2].

Расчеты выполнялись на ЭВМ «Урал-4».

Пространственные корреляционные функции сумм осадков находились путем осреднения коэффициентов корреляции для всех пар станций, расстояния между которыми попадали в заданную градацию расстояний. Средний коэффициент корреляции относился к среднему для данной градации расстоянию.

Полученные таким образом корреляционные функции представлены в табл. 1. Там же приводятся средние значения сумм осадков \bar{f} и средние квадратические отклонения σ . Эти величины получены путем осреднения индивидуальных значений \bar{f} и σ по всем пунктам рассматриваемого района.

В табл. 1 приводятся также значения $r'(0)$, полученные путем экстраполяции эмпирической корреляционной функции $r'(l)$ до расстояния $l=0$. Отличие величины $r'(0)$ от единицы характеризует случайные ошибки измерений и различия за счет микроклиматических особенностей пунктов установки осадкомеров.

Из табл. 1 видно, что корреляция сумм осадков прослеживается до значительных расстояний. Даже для наименее связанных полусуточных сумм она прослеживается до расстояний, больших 200 км. Скорость убывания корреляции с увеличением расстояния зависит от периода суммирования. Как правило, затухание происходит тем быстрее, чем меньше период суммирования. Некоторое исключение представляет район Приморья, где максимальная корреляция наблюдается для декадных сумм.

В интервале расстояний от 10 до 150 км все корреляционные функции удовлетворительно аппроксимируются экспоненциальной зависимостью вида

$$r'(l) = r'(0) e^{-\frac{l}{l_0}}, \quad (1)$$

где l_0 — радиус корреляции (расстояние, на котором корреляция убывает в e раз).

Для расстояний, больших 150 км, корреляционная функция убывает с расстоянием медленнее, чем по формуле (1), и превышает полученные по ней значения.

Зависимостью (1) описываются эмпирические корреляционные функции для всех периодов суммирования по УГМС ЦО и для большинства периодов суммирования по Приморью. В табл. 1 приводятся также значения соответствующих радиусов корреляции.

Корреляционные функции сумм осадков

Т а б л и ц а 1

Градации расстояния, км	Среднее расстоя- ние, км	Число случаев	Период суммирования					
			19—7 час.	7—19 час.	сутки	декада	месяц	сезон
УГМС ЦО								
0—10	10	1	0,804	0,743	—	—	0,857	—
11—20	17,6	14	740	460	0,676	0,806	0,809	0,878
21—30	25,6	30	715	527	661	788	787	753
31—40	36,3	28	627	505	641	732	568	797
41—50	46,4	47	579	434	608	718	748	761
51—60	56,0	41	565	402	596	710	725	746
61—70	65,5	57	547	355	581	675	709	664
71—80	75,0	55	488	349	552	664	706	699
81—90	86,0	62	440	385	516	630	668	629
91—100	95,5	50	472	359	494	637	670	642
101—110	105,6	60	401	276	462	620	661	627
111—120	115,2	53	372	301	456	602	658	625
121—130	125,2	50	367	281	440	588	638	622
131—140	135,8	54	338	253	423	545	622	534
141—150	145,2	43	448	192	413	543	613	582
151—160	156,0	61	280	257	399	545	593	560
161—170	165,9	49	268	160	398	571	564	589
171—180	175,7	40	143	196	378	533	552	444
181—190	185,1	34	270	148	430	580	548	505
191—200	195,2	24	202	120	360	509	527	443
201—220	208,4	43	193	195	365	542	498	447
221—240	230,7	18	220	204	367	542	490	446
241—260	246,2	8	190	198	338	547	399	020
261—280	262,7	3	—	—	277	504	404	236
\bar{f} мм			3,58	3,47	4,79	24,4	70,2	352,9
σ' мм			5,49	4,95	6,87	19,6	37,7	78,1
$r'(0)$			0,859	0,602	0,726	0,838	0,863	0,933
l_0 км			113	154	258	333	374	290
$r_1'(0)$			0,964	0,988	0,986	0,995	0,997	0,998
Балдайская возвышенность								
0,0—0,2	0,2	2	0,906	0,977	0,971	0,994	0,996	0,996
0,3—0,4	0,33	3	927	964	956	993	994	992
0,5—0,6	0,5	1	979	987	992	995	987	982
0,9—1,0	1,0	1	986	963	974	973	975	984
3—4	3,7	10	899	857	892	941	938	969
5—6	5,4	14	891	839	886	932	937	938
7—8	7,4	16	858	818	852	917	931	954
9—10	9,4	28	824	722	784	902	912	936
11—20	16,4	141	766	710	760	874	897	938
21—30	25,4	163	678	692	721	840	872	914
31—40	35,2	189	612	661	684	806	840	902
41—50	45,8	155	554	594	640	767	808	898
51—60	55,7	149	532	583	630	743	792	877
61—70	65,5	88	455	559	575	734	788	871
71—80	74,7	69	391	582	540	726	774	854
81—90	84,9	48	385	500	540	717	791	875
91—100	95,2	15	333	466	516	726	800	884
101—110	104,6	14	339	420	470	661	788	862
111—120	115,5	15	393	345	462	670	712	822
121—130	125,1	8	245	209	364	571	683	806
131—140	135,7	3	309	271	341	517	655	742
141—150	147,8	4	313	288	229	445	575	586

Градация расстояния, км	Среднее расстоя- ние, км	Число случаев	Период суммирования					
			19—7 час.	7—19 час.	сутки	декада	месяц	сезон
151—160	154,8	4	298	285	378	458	628	725
161—170	162,0	1	329	337	341	513	321	250
171—180	176,0	8	297	248	351	456	584	574
181—190	190,0	1	262	184	361	356	696	844
191—200	194,7	3	292	385	423	418	640	762
201—220	210,0	10	238	214	267	384	556	576
221—240	229,2	8	179	195	250	347	511	619
241—260	248,2	4	416	190	382	365	542	691
261—280	268,4	6	276	210	309	333	401	567
281—300	289,5	4	310	200	308	256	526	600
301—330	321,2	5	344	102	276	302	392	443
331—360	340,9	4	183	158	260	232	405	610
361—390	388,0	2	350	182	262	192	451	647
\bar{f} мм			3,34	3,32	4,74	24,9	74,3	372,9
σ мм			5,19	5,37	6,91	20,8	41,5	106,0
$r'(0)$			0,964	0,988	0,986	0,995	0,997	0,998

Приморье

0—5	4,2	8	0,924	0,940	0,937	0,968	0,957	0,885
6—10	7,9	10	904	911	937	956	948	930
11—20	15,7	22	846	844	892	888	894	780
21—30	25,4	23	780	802	820	877	834	638
31—40	34,6	17	759	779	804	828	794	721
41—50	47,1	15	684	733	745	801	780	697
51—60	56,6	17	635	671	682	752	716	591
61—70	66,1	25	565	698	669	756	729	631
71—80	76,2	18	559	641	632	717	686	642
81—90	86,1	25	525	571	617	696	644	589
91—100	95,3	26	489	503	497	642	594	456
101—110	105,2	17	438	494	543	630	586	649
111—120	114,9	25	404	486	536	630	588	626
121—130	124,0	20	420	512	530	624	567	693
131—140	135,3	26	394	457	478	614	568	641
141—150	145,9	30	299	409	436	543	532	588
151—160	155,5	21	384	424	520	588	538	695
161—170	166,3	19	380	392	433	555	491	483
171—180	178,4	20	372	400	501	557	502	516
181—190	186,1	16	270	344	409	514	470	440
191—200	195,1	19	361	397	439	578	471	348
201—220	210,0	34	260	331	369	464	418	470
221—240	229,5	23	306	287	355	463	400	531
241—260	250,6	11	240	264	233	400	330	238
261—280	268,0	3	286	350	260	432	404	—
281—300	294,8	5	356	321	212	373	253	—
\bar{f} мм			4,59	4,50	6,23	32,9	97,6	484,9
σ мм			8,18	7,98	10,60	30,3	50,3	97,4
$r'(0)$			0,948	0,980	0,966	0,980	0,973	0,993
l_0 км			146	175	182	244	216	—

Данные о значениях коэффициентов корреляции для малых расстояний по Валдайской возвышенности показывают, что фактические коэффициенты корреляции существенно превышают значения, получаемые путем экстраполяции корреляционной функции по экспоненте от сравнительно больших расстояний. Следовательно, для правильного представления статистической структуры сумм осадков на малых расстояниях необходима обработка данных по густой сети. Это отчетливо видно из сопоставления полученных значений $r'(0)$ для Валдая и УГМС ЦО. В табл. 1 приведены значения $r'(0)$ для УГМС ЦО, полученные путем

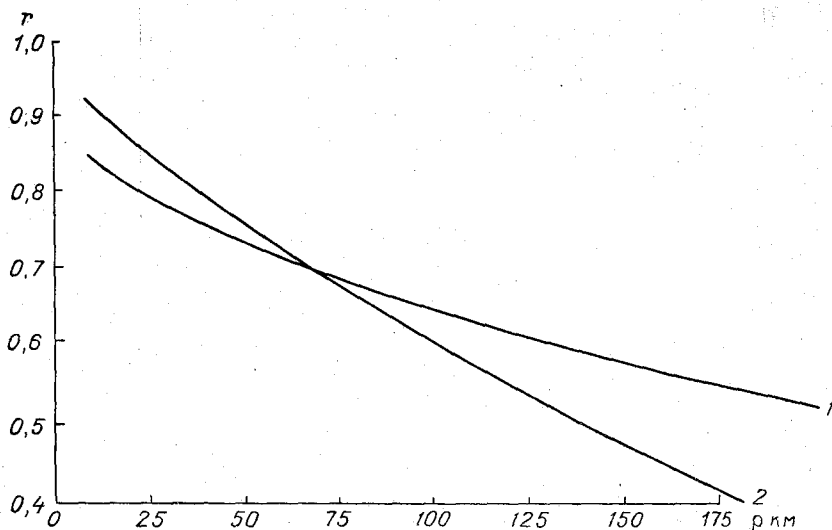


Рис. 1. Корреляционные функции месячных сумм осадков для УГМС ЦО, вычисленные по всему материалу за весь теплый сезон (1) и по части материала за май и июнь (2).

экстраполяции эмпирической корреляционной функции, известной начиная с расстояния 10 км. Эти значения гораздо больше соответствующих значений $r'(0)$ для Валдая. На этом основании можно было бы думать, что в выбранном районе УГМС ЦО микроклиматические различия в расположении осадкомерной станции гораздо больше, чем на Валдае. В действительности дело обстоит не так. Известно, что рельеф на Валдае является более пересеченным и микроклиматические различия должны быть не меньше, чем для выбранного района УГМС ЦО. Следовательно, значения $r'(0)$ для УГМС ЦО должны быть не меньше, чем для Валдая; заниженные значения, полученные нами, объясняются отсутствием сведений об эмпирической корреляционной функции для малых расстояний. Поэтому, используя значения $r'(0)$, полученные для Валдая, мы можем ожидать более точных результатов. Именно эти величины и использовались для практических расчетов. В табл. 1 они обозначены $r'_1(0)$.

Заметим, что некоторые данные о корреляционных функциях сумм осадков для УГМС ЦО были опубликованы нами ранее [2]. Приведенные в [2] корреляционные функции полусуточных сумм практически совпадают с приведенными в табл. 1. Различие лишь в том, что в табл. 1 осреднение производилось по большему числу градаций. Кроме того, в [2] приводились также корреляционные функции месячных сумм осадков. Эти корреляционные функции были вычислены по малому объему материала, рассматривались только суммы осадков за май и июнь

Неудивительно поэтому, что расчет по всему объему материала по данным за весь теплый сезон дал существенно другие корреляционные функции. Для иллюстрации сказанного обе корреляционные функции для месячных сумм осадков на территории УГМС ЦО приводятся на рис. 1.

Сравнение корреляционной функции сумм осадков для различных районов показывает, что для больших расстояний наибольшие корреляции сумм осадков за период до декады включительно отмечаются в Приморье. Для сумм осадков за месяц и сезон корреляционная функция по Приморью оказывается меньше, чем для двух других районов. Эта интересная особенность тесно связана с уже упоминавшимся ранее фактом более быстрого затухания корреляционных функций месячных и сезонных сумм по сравнению с таковой для декадных сумм. Она, по-видимому, обусловлена климатическими особенностями района Приморья. В связи с этим было бы интересно сопоставить полученные данные со сведениями о временной цикличности синоптических процессов в этом районе. В настоящее время мы не располагаем такими сведениями. Однако некоторое представление о характере корреляции сумм осадков за разные периоды времени можно получить косвенным образом по данным о временной изменчивости сумм осадков.

Эту изменчивость можно характеризовать коэффициентом временной вариации $c_v = \frac{\sigma}{\bar{f}}$. Соответствующие величины для периодов суммирования τ будем обозначать $c_v(\tau)$, число таких периодов в сезоне обозначим m . Известно, что

$$c_v(\tau_1) = k c_v(\tau_2) \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}, \quad (2)$$

где τ — означает меньший период суммирования, $k=1$ для случая независимости сумм осадков в разные периоды времени.

При положительной корреляции $k > 1$ и при отрицательной корреляции $k < 1$.

В табл. 2 приведены коэффициенты вариации c_v и среднее число периодов суммирования m в сезоне, в течение которых имели место осадки, для Валдая и Приморья.

Таблица 2

Зависимость коэффициента временной вариации от периода суммирования

Период суммирования	Полусутки	Сутки	Декада	Месяц	Сезон
Валдай					
c_v	1,58	1,45	0,84	0,56	0,28
m	11,8	82	15	5	1
k	1,10	1,37	1,15	1,12	—
Приморье					
c_v	1,78	1,70	0,92	0,52	0,20
m	107	77	15	5	1
k	1,12	1,22	0,98	0,86	—

В табл. 2 значения k вычислены для соседних периодов суммирования. Так, значение $k=1,37$ для Валдая характеризует связь между сутками с выпадением дождя внутри периода. Поскольку оно больше единицы,

корреляция между смежными суточными суммами является положительной. Аналогичным образом из табл. 2 следует, что для района Валдая положительная корреляция имеет место и для смежных декад и месяцев.

В отличие от этого, для Приморья корреляция сумм осадков положительна лишь для полусуточных и суточных интервалов. Уже декадные суммы характеризуются небольшой отрицательной корреляцией, для месячных сумм она становится значительной.

Для всех периодов суммирования корреляции сумм осадков на малых расстояниях для Приморья меньше, чем для Валдая. Это следует приписать главным образом большей изрезанности рельефа района Приморья, вследствие чего микроклиматические различия очень велики.

Корреляционные функции для Валдая и УГМС ЦО для больших периодов суммирования (декада, месяц, сезон) оказываются очень близкими. Некоторые различия отмечаются для сумм за сутки и за полусутки. Наиболее существенны они для сумм за период 7—19 час.

Учитывая, что оба района очень близки друг к другу и даже частично перекрываются, представляется, что это различие вызвано тем, что для малых интервалов суммирования использовались данные за разные годы. С этой точки зрения различия корреляционных функций для Валдая и УГМС ЦО характеризуют их статистическую обеспеченность.

2. Погрешности определения среднего слоя осадков на площади

По данным о корреляционной структуре поля осадков может быть оценена точность определения среднего слоя осадков на площади.

Как показано в [4], средняя квадратическая ошибка определения слоя осадков на площади s по данным наблюдений в одном пункте определяется по формуле

$$p(1, s) = \sigma \sqrt{[1 - r'(0)] + p_1^2(s)}. \quad (3)$$

Первая часть подкоренного выражения характеризует погрешность в определении среднего за счет случайных ошибок наблюдений и микроклиматических различий, а вторая часть — величина $p_1^2(s)$ — погрешность за счет естественной изменчивости сумм осадков на площади. Для данной территории она зависит от размеров площади s , приходящейся на одну станцию, и может быть определена следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} p_1^2(s) &= 1 + \mu(s) - 2\omega(s), \\ \mu(s) &= \frac{1}{s^2} \int_s \int_s \int_s r [V(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] dx dy d\xi d\eta, \\ \omega(s) &= \frac{1}{s} \int_s \int_s r [Vx^2 + y^2] dx dy. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Начало координат при расчетах помещается в пункт, где расположен осадкомер. Выбор пункта сказывается на значении величины $\omega(s)$. Практически расчеты производились для площади, имеющей форму квадрата, причем считалось, что осадкомер находится в центре квадрата. Расчеты производились на ЭВМ «Урал-4».

В случае, когда корреляционная функция имеет вид (1), выражение (3) может быть заменено следующей приближенной формулой:

$$p_1^2(s) = 0,23\sigma^2 \frac{r'(0)}{l_0} \sqrt{s}. \quad (5)$$

В табл. 3 приводятся результаты для рассмотренных районов,

Приведенные в табл. 3 величины характеризуют репрезентативность данных осадкомера по отношению к площадям различного размера. Однако абсолютные значения погрешностей являются не очень показательными. Более наглядными являются их относительные значения, получаемые по формуле

$$E(1, s) = \frac{P_1(s_1)}{f} \quad (6)$$

Таблица 3

Средняя квадратическая погрешность определения слоя осадков на площади s по данным одной станции

Период суммирования	s км ²							
	1	10	50	100	500	1000	2000	5000
УГМС ЦО								
19—7 час.	1,2	1,2	1,4	1,6	2,0	2,2	2,4	2,7
7—19 час.	0,8	1,1	1,5	1,7	2,2	2,5	2,8	3,2
Сутки	0,9	1,1	1,5	1,8	2,5	2,9	3,2	3,6
Декада	1,6	2,1	3,7	4,6	6,5	7,2	7,8	8,5
Месяц	3,2	4,1	5,5	8,5	9,3	12,0	14,0	16,1
Сезон	5,0	7,4	9,9	12,3	17,6	21,1	24,7	28,2
Валдай								
19—7 час.	1,1	1,2	1,4	1,5	18,0	2,0	2,2	2,7
7—19 час.	0,8	1,1	1,5	1,8	2,3	2,5	2,7	2,9
Сутки	1,0	1,2	1,6	1,9	2,6	2,9	3,2	3,4
Декада	2,0	3,0	4,0	4,5	5,7	6,2	6,7	7,7
Месяц	3,7	5,2	7,9	8,9	10,4	11,5	12,3	14,3
Сезон	8,2	11,5	15,6	16,7	21,2	23,0	25,6	30,5
Приморье								
19—7 час.	1,9	2,0	2,0	2,1	2,4	2,6	2,8	3,2
7—19 час.	1,2	1,2	1,4	1,4	1,8	2,0	2,2	2,7
Сутки	2,0	2,1	2,2	2,3	2,6	2,8	3,2	3,5
Декада	4,4	4,6	4,9	5,2	6,2	6,6	7,6	8,9
Месяц	8,4	8,7	9,2	9,7	11,1	12,2	13,4	15,8
Сезон	9,7	12,6	17,5	21,0	30,0	33,8	38,7	44,2

Величина $E(1, s)$ есть относительная средняя квадратическая погрешность определения слоя осадков по площади по данным одной станции.

Заметим, что при эмпирических оценках погрешностей часто используются несколько иной величиной, которую можно условно назвать средней квадратической относительной погрешностью. Она получается путем вычисления относительной погрешности для каждого индивидуального

отсчета, т. е. величины $\frac{\tilde{f}_i - \bar{f}_i}{\bar{f}_i}$, где \bar{f}_i — средняя сумма осадков на пло-

щади для периода i ; эта величина и подвергается осреднению. При таких расчетах для малых сумм осадков индивидуальные значения относительной погрешности могут быть очень большими, до нескольких тысяч процентов. В результате средняя относительная погрешность будет очень высокой за счет периодов с очень малыми суммами осадков, вносящих

в сезонные суммы малый вклад. В этом смысле относительная погрешность, вычисляемая по формуле (6), является более характерной.

Полученные по этой формуле значения относительных погрешностей представлены на рис. 2.

Из приведенных данных видно, что с увеличением размера площади погрешность определения среднего слоя осадков на ней возрастает и, следовательно, репрезентативность данных единичного осадкомера уменьшается.

Для сумм за значительные периоды времени (месяц, сезон) погрешности оказываются сравнительно малыми. Например, для месячных сумм осадков даже для площади 2000 км² относительная погрешность составляет около 16%, а для сезонных сумм — около 7%. Следовательно, данные о суммах осадков за такие периоды времени при не слишком редкой сети могут быть репрезентативными даже без осреднения по площади.

Для сумм осадков за малые периоды времени (полусутки, сутки) погрешности оказываются большими даже при густой сети. Даже в том случае, когда один осадкомер приходится на площадь 1 км², погрешность за ночной срок превышает 30%, для суммы за день она еще больше. Следовательно, данные о суммах осадков за полусутки и сутки, полученные по отдельным осадкомерам, не являются репрезентативными даже для малых площадей.

На рис. 2 приводятся данные лишь для районов Валдая и Приморья. Относительные погрешности для района УГМС ЦО практически совпадают с таковыми для района Валдая и потому не приводятся. Волею того, сопоставление данных для районов Валдая и Приморья показывает, что для редкой сети (большие s) относительная погрешность для обоих районов примерно одинакова. При большой плотности осадкомерной сети (малые s) погрешности для района Приморья значительно выше. Это объясняется большой изрезанностью рельефа этого района, вследствие чего микроклиматические различия велики даже в пределах малых площадей.

Во многих случаях приходится оценивать средний слой осадков на площади, на которой находится некоторое число осадкомерных пунктов. В случае равномерного размещения их оценка среднего слоя осадков по площади получается как среднее арифметическое из данных в отдельных пунктах.

Как показано в [4], ошибка, которая при этом допускается, может быть оценена по формуле

$$E(n, s) = \frac{E(1, s)}{\sqrt{n}} = \frac{E(1, S)}{\sqrt{n^{s/2}}}, \quad (7)$$

где n — число осадкомерных пунктов на площади S ; $s = \frac{S}{n}$ — площадь, приходящаяся на одну станцию.

В табл. 4 приводятся в качестве примера значения $E(n, s)$ для сумм осадков за сутки и месяц.

Из табл. 4 видно, что с увеличением числа станций при той же густоте сети погрешность определения средней по площади быстро уменьшается. Так, для суточных сумм осадков при рассмотрении площадей порядка 10 000 км² и густоте сети одна станция на 500 км² (т. е. при $n=20$) средняя квадратическая погрешность не превышает 13%. Следовательно, даже за малые периоды времени можно получать надежные суммы осадков, если производить осреднение по территориям, содержащим достаточно большое количество станций.

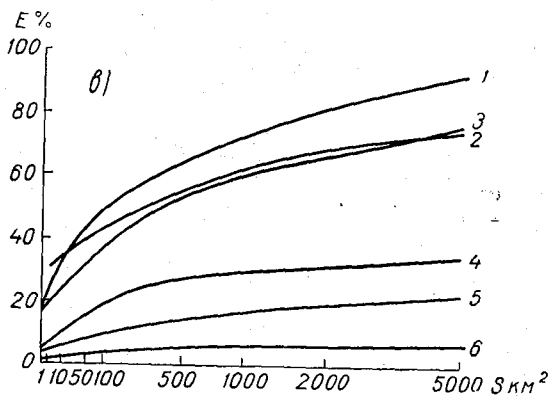
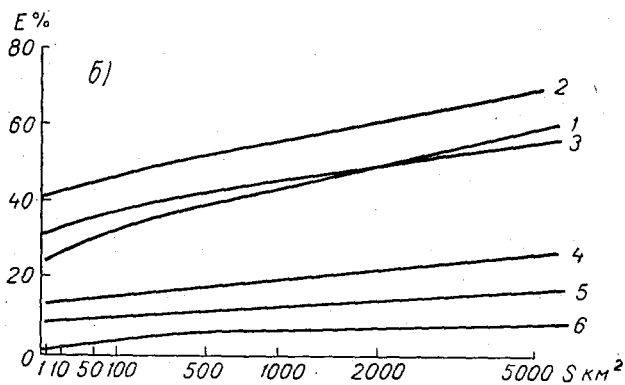
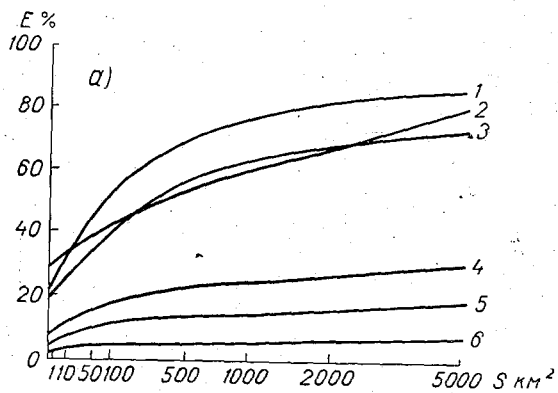


Рис. 2. Средняя квадратическая погрешность $E\%$ определения слоя осадков на площади S по данным одной станции.
 а — Валдай, б — Приморье, в — район УГМС ЦО; 1) 7—19 час., 2) 19—7 час., 3) сутки, 4) декада, 5) месяц, 6) сезон.

Таблица 4

Средняя квадратическая погрешность определения слоя осадков на площади
(в процентах к средней сумме)

Число станций	Площадь, приходящаяся на одну станцию (км ²)							
	1	10	50	100	500	1000	2000	5000
Сумма осадков за сутки								
УГМС ЦО								
1	19	22	32	38	52	61	66	75
2	13	16	22	27	36	43	47	53
5	8	10	14	17	23	27	29	33
10	6	7	10	12	16	19	21	24
20	4	5	7	8	12	14	15	17
50	3	3	4	5	7	9	9	11
100	2	2	3	4	5	6	7	8
Валдай								
1	21	26	34	40	56	62	67	73
2	15	18	24	28	40	44	48	52
5	9	12	16	18	25	28	30	33
10	7	8	11	13	18	20	21	23
20	5	6	8	9	13	14	15	16
50	3	4	5	6	8	9	10	10
100	2	3	3	4	6	6	7	7
Приморье								
1	32	33	35	37	42	46	51	56
2	23	23	25	26	30	32	36	40
5	14	15	16	16	19	21	23	25
10	10	10	11	12	13	14	16	18
20	7	7	8	8	9	10	11	13
50	4	5	5	5	6	6	7	8
100	3	3	4	4	4	5	5	6
Сумма осадков за месяц								
УГМС ЦО								
1	5	6	8	9	13	17	20	23
2	3	4	6	7	11	12	14	16
5	2	3	4	4	7	8	9	10
10	1	2	2	3	5	5	6	7
20	1	1	2	2	3	4	4	5
50	1	1	1	1	2	2	3	3
100	0	1	1	1	2	2	2	2
Валдай								
1	5	7	11	12	14	16	17	19
2	4	5	8	8	10	11	12	14
5	2	3	5	5	6	7	7	9
10	1	2	3	4	4	5	5	6
20	1	2	2	3	3	4	4	4
50	1	1	2	2	2	2	2	3
100	1	1	1	1	1	2	2	2
Приморье								
1	9	9	10	10	11	13	14	16
2	6	6	7	7	8	9	10	11
5	4	4	4	4	5	6	6	7
10	3	3	3	3	3	4	4	5
20	2	2	2	2	3	3	3	4
50	1	1	1	1	2	2	2	2
100	1	1	1	1	1	1	1	2

Приведенные выше данные позволяют решать вопрос о густоте осадкомерной сети, необходимой для обеспечения той или иной точности осреднения среднего слоя осадков на водосборе. При заданной густоте сети может быть определена целесообразная степень осреднения.

Так, для получения среднего слоя осадков на площади 2000 км² со средней квадратической ошибкой не более 10% достаточно иметь для суточных сумм 20, а для месячных три осадкомера. При густоте сети один осадкомер на 500 км². Точность 10% достигается при осреднении данных на площади 20 000 км² для суточных сумм и на площади 1000 км² для месячных сумм.

Нами приведены средние квадратические значения погрешностей. На практике может потребоваться знание их обеспеченности, а также погрешности той или иной обеспеченности. Дать точный ответ на этот вопрос можно только после исследования распределения ошибок средних арифметических сумм осадков. В случае нормального распределения ошибок получить соответствующие оценки не представляет труда. В этом случае значения E имеют обеспеченность 68%. Ошибки обеспеченностью 50% составляют $\frac{2}{3}E$, ошибки обеспеченностью 99% составляют $2,58E$ и т. д. Можно ожидать, что нормальное распределение ошибок имеет место не только для сезонных и месячных сумм осадков, но даже для сумм осадков за полусутки и сутки, если число станций n на площади не слишком мало. При малом числе станций на площади в случае осадков за малые периоды времени нормальный закон распределения ошибок не должен выполняться. В этом случае значения погрешностей заданной обеспеченности, полученные исходя из нормального закона, будут завышены.

Полученные нами оценки характеризуют репрезентативность осадкомерных данных по отношению к средним по площади. Такие оценки удобны для использования при балансовых расчетах. Для некоторых задач, таких, как задача о картировании осадков, недостаточно знать средние суммы по площади. Необходимо также иметь представление о значениях сумм осадков в отдельных пунктах территории. С этой точки зрения репрезентативность осадкомерных данных должна характеризоваться точностью пространственной интерполяции сумм осадков.

Такого рода оценки были впервые выполнены О. А. Дроздовым и А. А. Шепелевским [3]. В этом случае средняя квадратическая погрешность также определяется однозначно, если задана корреляционная функция сумм осадков. Дроздов и Шепелевский рассматривали среднюю квадратическую погрешность одномерной линейной интерполяции по двум точкам на середине. Если обозначить ее p'_1 , а расстояние между осадкомерными пунктами l , формула Дроздова—Шепелевского примет вид

$$p_1'^2 = \sigma^2 \left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2} r(l) - 2r\left(\frac{l}{2}\right) \right]. \quad (4')$$

Здесь, как и в формулах (4), оценивается лишь та часть погрешности, которая определяется пространственной изменчивостью поля осадков.

Интересно сопоставить значения погрешностей интерполяции p'_1 с погрешностями определения среднего p_1 .

В случае экспоненциальной корреляционной функции сумм осадков (1) можно получить

$$p_1'^2 = 0,5\sigma^2 \frac{l}{l_0} \left[1 - \frac{1}{12} \left(\frac{l}{l_0}\right)^2 + \frac{1}{32} \left(\frac{l}{l_0}\right)^3 + \dots \right]. \quad (8)$$

Сопоставляя это выражение с формулой (5), имеем

$$p_1'^2 \approx 2p_1^2 \quad (9)$$

или

$$p_1'(l) \approx p_1(2l); \quad p_1'(s) \approx p_1(4s). \quad (10)$$

В случае степенного закона

$$r(l) = 1 - \left(\frac{l}{l_0}\right)^\alpha \quad (11)$$

нетрудно получить

$$p_1'^2 = c'(\alpha) \sigma^2 \left(\frac{l}{l_0}\right)^\alpha, \\ p_1^2 = c(\alpha) \sigma^2 \left(\frac{l}{l_0}\right)^\alpha. \quad (12)$$

Значения множителей c и c' для некоторых значений структурного параметра α приводятся в табл. 5

Таблица 5

Зависимость коэффициентов c и c' от структурного параметра α

α	0	0,5	1,0	1,5	2,0
c	1,00	0,51	0,24	0,09	0
c'	1,50	0,92	0,50	0,21	0

Из таблицы видно, что и в этом случае выполняется примерно то же соотношение между ошибками p_1' и p_1 .

Таким образом, в большинстве практически важных случаев точность интерполяции значительно меньше точности определения средней по площади.

Для того чтобы точность интерполяции была равна точности определения среднего слоя осадков, необходимо расстояние между пунктами уменьшить в два раза, т. е. в четыре раза увеличить число станций на территории.

Следует отметить, что использованная в данной статье формула (7) и табл. 4 дают значения ошибок для случая равномерного размещения станций на водосборе, когда метод среднего арифметического является наиболее точным.

В случае неравномерного их размещения этот метод может приводить к большим ошибкам и необходимо применять метод среднего взвешенного. Этот вопрос рассматривается в [6].

Приведенные выше оценки получены для районов Валдая, УГМС ЦО и Приморья. Они могут использоваться для грубых оценок и в других районах впрямь до получения более детальных оценок точности по данным этих районов. Исключение составляют, по-видимому, горные районы и районы с недостаточным увлажнением, где закономерности распределения осадков существенно иные. Именно по таким районам необходимо произвести исследование в первую очередь.

ЛИТЕРАТУРА

1. Голубев В. С., Зотимов Н. В., Зыков Н. А. Некоторые результаты исследований жидких осадков в районе Валдайской возвышенности. Труды ГГИ, вып. 123, 1965.

2. Гушина М. В., Каган Р. Л. О статистической структуре поля осадков. Труды ГГО, вып. 191, 1966.
3. Дроздов О. А., Шепелевский А. А. Теория интерполяции в стохастическом поле метеорологических элементов и ее применение к вопросам метеорологических карт и рационализации сети. Труды НИУ ГУГМС, сер. I, вып. 13, 1946.
4. Каган Р. Л. К оценке репрезентативности осадкомерных данных. Труды ГГО, вып. 191, 1966.
5. Каган Р. Л. О точности определения средней по площади по данным точечных измерений. Труды ГГО, вып. 175, 1965.
6. Каган Р. Л. Некоторые вопросы интерпретации осадкомерных данных. См. наст. сб.
7. Линслей Р. К., Колер М. А., Паулюс Д. Л. Х. Прикладная гидрология, глава VI. Гидрометеиздат, Л., 1962.

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИНТЕРПРЕТАЦИИ ОСАДКОМЕРНЫХ ДАННЫХ

Рассматривается вопрос о точности среднего слоя осадков на площади, полученного по данным наблюдений неравномерно расположенной на ней сети осадкомерных пунктов.

Предлагается способ нахождения оптимальных весов для каждой станции с помощью пространственной корреляционной функции поля осадков. Рассматривается вопрос о возможности пересчета корреляционных функций с помощью преобразования шкалы осадков.

При различного рода климатических и гидротехнических расчетах необходимы сведения о суммах осадков, приходящихся на ту или иную территорию. Эти сведения получаются путем осреднения данных наблюдений в различных пунктах территории. В силу большой пространственной изменчивости поля осадков, а также большого влияния микроклиматических различий полученные по данным измерений в отдельных пунктах средние величины могут существенно отличаться от истинной средней. Для правильного использования осадкомерных данных важно уметь оценивать возникающую за счет этого осреднения погрешность.

Разумеется, эта погрешность будет зависеть от способа осреднения данных в отдельных пунктах территории. Автором был предложен ранее [6] способ оценки погрешности, возникающей при замене истинной средней по площади средним арифметическим из данных наблюдений в равномерно расположенной на ней сети пунктов. Средние квадратические значения этой погрешности оказалось возможным вычислять по пространственной корреляционной функции осредняемой величины. Применительно к суммам осадков методика подобных расчетов изложена в [7]. Некоторые оценки точности осадкомерных данных, выполненные этим способом, содержатся в статье [4].

В силу различных причин осадкомерная сеть далеко не всегда может считаться равномерно размещенной. Как правило, она тяготеет к населенным пунктам и к долинам рек. Поэтому даже в центральных районах ЕТС приходится в некоторых случаях считаться с необходимостью учета неравномерности размещения осадкомерных пунктов. Еще в большей степени это относится к малообжитым районам Сибири и Дальнего Востока. В связи с этим возникает вопрос об оценке средней по площади, полученной в таких условиях.

Ниже делается попытка решения этого вопроса. В первом разделе рассматривается ошибка замены средней по площади средним арифметическим из данных наблюдений неравномерно размещенной по площади сети пунктов.

Во втором разделе оценивается ошибка, которая допускается при использовании средней взвешенной суммы осадков. Предлагается способ выбора наиболее выгодных, в смысле метода наименьших квадратов, весов для каждого пункта. Для этой цели достаточно иметь сведения о корреляционной структуре осредняемых величин.

Полученные результаты наиболее удобны для использования в случае нормального закона распределения осредняемой величины. Суммы же осадков, особенно за малые периоды времени, отнюдь не подчиняются этому закону. Поэтому было бы полезно найти такое преобразование шкалы осадков, которое приводило бы к нормальному закону распределения. Некоторые соображения на этот счет излагаются в третьем разделе статьи.

1. Точность средней арифметической при неравномерном размещении пунктов по территории

Полученные в [6] оценки относятся к случаю равномерного размещения пунктов на площади. Именно, считается, что площадь разбита на некоторое число равных квадратов и наблюдения производятся в центре каждого квадрата. При этом ошибки определения средней по различным индивидуальным квадратам оказываются некоррелированными.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть на площади S расположено произвольным образом n точек, в которых производится измерение величины f . Из данных измерения определяется среднее арифметическое

$$\bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i). \quad (1)$$

Заменяем этой величиной не известное нам истинное среднее значение величины f на площади S

$$f_s = \frac{1}{S} \iint_S f(x, y) dx dy. \quad (2)$$

При этом совершается некоторая ошибка, среднее квадратическое значение которой P определяется по формуле

$$P^2 = \overline{[\bar{f} - f_s]^2} = \left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) - \frac{1}{S} \iint_S f(x, y) dx dy \right]^2. \quad (3)$$

Черта сверху означает осреднение по статистическому ансамблю.

Введем нормированную пространственную автокорреляционную функцию величины f

$$r_{ij} = \frac{f(x_i, y_i) f(x_j, y_j) - (\bar{f})^2}{\sigma^2}, \quad (4)$$

где σ^2 — дисперсия величины f .

Полагаем при этом поле величины f однородным и изотропным, так что корреляционная функция зависит только от расстояния между точками, данные в которых коррелируются. Тогда из (3) следует

$$\varepsilon^2 = \frac{P^2}{\sigma^2} = R - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \omega_{Si} + \nu_s. \quad (5)$$

Здесь введены обозначения:

$$R = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n r_{ij};$$

$$\omega_{Si} = \frac{1}{S} \int_S \int_S r [\sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}] dx dy,$$

$$\mu_S = \frac{1}{S^2} \int_S \int_S \int_S \int_S r [\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}] dx dy d\xi d\eta. \quad (6)$$

Отдельные члены, стоящие в правой части формулы (5), имеют ясный физический смысл. Первый член R представляет собой (с точностью до постоянного множителя σ^2) дисперсию средней арифметической \bar{f} из наблюдений в отдельных точках. Этот член не зависит от формы и размеров территории S , а лишь от взаимного расположения пунктов наблюдения. Вычисление его несложно. Третий член μ_S представляет собой дисперсию средней по площади f_S . Для заданной площади S он не зависит от размещения пунктов наблюдения и может быть вычислен раз навсегда. Второй член в формуле (5) характеризует взаим-

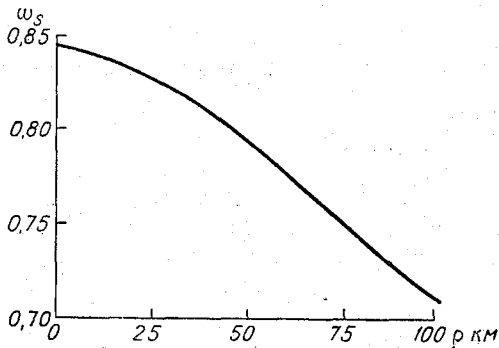


Рис. 1. Зависимость от расстояния взаимной корреляционной функции ω_S месячных сумм осадков. Валдай ($S=10\,000$ км²).

ную корреляцию величин \bar{f} и f_S . Входящие в него величины ω_{Si} пропорциональны коэффициенту корреляции между истинной средней по площади f_S и значениями величины f в i -той точке. Вычисление второго члена наиболее трудоемко, так как он существенно зависит как от выбора площади, так и от расположения пунктов наблюдений.

Практически расчеты по формулам (6) могут осуществляться численно с использованием электронных вычислительных машин. Для важного частного случая, когда площадь S имеет форму квадрата, программа расчета величин ω_S и μ_S на ЭВМ «Урал-4» составлена А. И. Полицук [10].

На рис. 1 приводится в качестве примера функция $\omega_S(\rho)$, вычисленная по корреляционной функции месячных сумм жидких осадков для района Валдая. (см. [4]). В этом примере осреднение производится по площади квадрата со стороной 100 км, т. е. $S=10\,000$ км²; ρ — расстояние от центра квадрата до интересующего нас пункта. Для рассматриваемой площади $\mu_S=0,8120$.

При расчетах по формулам (5) и (6) следует иметь в виду, что при подстановке в них значений коэффициентов корреляции r_{ik} диагональные члены корреляционной матрицы r_{ii} могут задаваться двумя способами.

Если нас интересует та доля погрешности определения среднего, которая определяется естественной изменчивостью измеряемой величины на территории, следует задавать $r_{ii}=1$.

При расчете полной случайной погрешности с учетом микроклиматических различий и ошибок измерения необходимо задавать

$$r_{ii} = 1 + \eta = \frac{1}{r'(0)}, \quad (7)$$

где $\eta = \frac{1 - r'(0)}{r'(0)}$ есть мера погрешностей за счет микроклиматических различий и ошибок измерения, $r'(0)$ — величина, получаемая путем экстраполяции эмпирической корреляционной функции на нулевое расстояние.

В частности, для упоминавшегося выше случая месячных сумм осадков по Валдаю $r'(0) = 0,997$; $\eta = 0,003$; $r_{ii} = 1,003$.

В табл. 1 приводятся для иллюстрации результаты расчетов, выполненных для этого случая. При этом считается, что на квадрате 100×100 км имеется 10 станций. Схема расположения их дана на рис. 2. В табл. 1 для наглядности приводятся не значения ε^2 , а величины

$$E = \frac{P}{f} = \varepsilon \frac{\sigma}{f},$$

представляющие собой среднюю квадратическую погрешность определения слоя осадков на площади, отнесенную к среднему значению слоя осадков в отдельном пункте.

В таблице приводятся, кроме погрешностей E , вычисленных с учетом фактической неравномерности размещения станций, погрешности E' , рассчитанные для той же площади и при том же числе станций, равномерно размещенных на ней (в этом случае площадь не обязательно имеет форму квадрата). Значения E' получены в [4].

В первом столбце табл. 1 даны погрешности, получающиеся при наличии на площади всех 10 станций ($n=10$), далее погрешности, полученные при отсутствии станции 1, отсутствии станций 1, 2 и т. д. Последний столбец соответствует одной станции на площади $10\,000$ км².

Из табл. 1 видно, что в случае неравномерного размещения станций на площади ошибки определения слоя осадков на площади по средней арифметической из сумм на станциях существенно выше, чем при равномерном размещении. Величина этого превышения может быть различной в зависимости от расположения станций. В нашем примере оно может достигать 100%.

Интересно, что метод среднего арифметического не всегда дает увеличение точности при введении дополнительных станций. Так, при наличии на территории лишь одной станции 10 относительная средняя квадратическая погрешность составляет 24%. Добавление станции 9, расположенной близко от станции 10, немного уменьшает погрешность

до 21%. Привлечение данных станции 8 на другом краю квадрата приводит к существенному увеличению точности ($E < 14\%$). Последующее привлечение станций 7 и 6, расположенных близко к станциям 9 и 10, не только не повышает точности, с которой средняя арифметическая представляет слой на всей площади, а даже понижает ее. Это естественно,

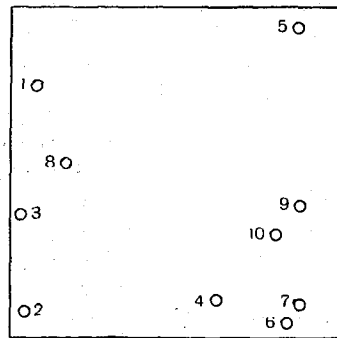


Рис. 2. Схема размещения осадкомерных пунктов на территории.

Таблица 1

Средняя квадратическая погрешность (%) при неравномерном и равномерном размещении станций (Валдай, месячные суммы, $S = 10\,000$ км²)

n	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
E	8,8	10,0	10,6	12,4	12,8	14,8	14,0	13,6	21,1	24,3
E'	5,0	5,3	5,6	5,8	6,4	7,3	8,3	9,8	13,2	20,5

(до 21%). Привлечение данных станции 8 на другом краю квадрата приводит к существенному увеличению точности ($E < 14\%$). Последующее привлечение станций 7 и 6, расположенных близко к станциям 9 и 10, не только не повышает точности, с которой средняя арифметическая представляет слой на всей площади, а даже понижает ее. Это естественно,

так как в этом случае мы практически получаем среднее не по всей интересующей нас площади, а лишь по одному из углов ее. Дальнейшее уменьшение погрешности происходит лишь при использовании данных из других частей территории.

Таким образом, с точки зрения точности определения среднего слоя осадков на площади наиболее выгодным является равномерное размещение осадкомерных пунктов на ней. При неравномерном размещении способ среднего арифметического может оказаться непригодным вследствие больших погрешностей. В таких случаях при определении среднего слоя осадков на площади целесообразно пользоваться способом среднего взвешенного. Этот вопрос рассматривается ниже.

2. Определение оптимальных весов при осреднении по площади

Утверждая необходимость использования метода среднего взвешенного при неравномерно размещенной сети, мы констатируем давно известный из практики факт. При различного рода расчетах метод среднего взвешенного используется давно, причем имеются различные его варианты. Если отвлечься от деталей, то сущность его заключается в том, что весь водосбор разбивается на элементарные площади таким образом, чтобы каждая станция по возможности располагалась в центре элементарной площади. При нахождении средней по водосбору данным каждой станции приписывается вес, равный отношению соответствующей элементарной площади к площади всего водосбора.

Различные варианты метода отличаются способами разбивки водосбора на элементарные квадраты. Все эти способы содержат элемент субъективности и трудно отдать предпочтение какому-либо из них. Коль скоро площадь, относящаяся к данной станции, определена, вес ее будет строго зафиксирован, независимо от того, какая величина подвергается осреднению и на какой части территории находится станция.

Описанный метод расчета среднего взвешенного, который назовем взвешиванием по площадям, удобен своей простотой. Однако с физической точки зрения ясно, что можно добиться большей точности определения средней по площади, если при нахождении весов учитывать статистические свойства осредняемых полей.

Способ расчета оптимальных в смысле метода наименьших квадратов весов для нахождения средней величины был предложен Л. С. Гандиным и Р. Э. Соловейчиком [3]. При этом рассматривался одномерный случай, когда осреднение производится по отрезку прямой и точки расположены на этом же отрезке. Нетрудно обобщить предложенную Гандиным и Соловейчиком схему на интересующий нас двумерный случай.

Пусть мы заменяем истинную среднюю на площади f_s средней взвешенной¹ из данных n станций

$$\tilde{f}_1 = \sum_{i=1}^n p_i f(x_i, y_i), \quad (8)$$

(p_i — вес, с которым входят данные i -той станции).

Средняя квадратическая ошибка, которая при этом допускается, составляет

$$P_1^2 = \overline{[\tilde{f}_1 - f_s]^2} = \left[\sum_{i=1}^n p_i f(x_i, y_i) - \frac{1}{S} \iint_S f(x, y) dx dy \right]^2. \quad (9)$$

¹ Строго говоря, величина \tilde{f}_1 может быть названа средней взвешенной лишь при $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Однако для краткости сохраним за ней это название и в общем случае.

Аналогично (5) получаем

$$\varepsilon_1^2 = \frac{P_1^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j r_{ij} - 2 \sum_{i=1}^n p_i \omega_{Si} + \nu_S. \quad (10)$$

Формула (10) является обобщением формулы (5) и совпадает с ней при $p_i \equiv \frac{1}{n}$. Величина погрешности зависит от выбора весов p_i . Выберем их таким образом, чтобы погрешность оказалась минимальной. При таком выборе производная от величины ε_1^2 по всем p_i должна обратиться в нуль. Это дает систему n линейных алгебраических уравнений относительно весов p_i

$$\sum_{j=1}^n p_j r_{ij} = \omega_{Si} \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (11)$$

Матрица системы является корреляционной матрицей и, следовательно, положительно определена. Определитель ее отличен от нуля. Таким образом, решение системы (11) однозначно определяет n оптимальных весов p_i . Из (10) и (11) следует, что при таком выборе весов

$$\varepsilon_1^2 = \nu_S - \sum_{i=1}^n p_i \omega_{Si}. \quad (12)$$

Заметим, что при определении оптимальных весов на них не налагалось никаких дополнительных ограничений. Не требовалось, в частности, равенства единице суммы весов. Как известно [2], это допустимо в том случае, если мы имеем дело не с абсолютными значениями измеряемой величины, а с их отклонениями от нормы. В противном случае норма величины \tilde{f}_1 не совпадает с нормой f_S , что, конечно, нежелательно. Будем поэтому считать, что осредняемая величина представляет собой отклонение от нормы, так что $\tilde{f} = 0$. Практика климатологической обработки показывает [5], что для поля осадков более целесообразно рас-

сматривать не абсолютное, а относительное отклонение $f_i = \frac{f'_i - \bar{f}'_i}{\bar{f}'_i}$.

Здесь f'_i означает измеренное в точке i значение, а \bar{f}'_i — значение, подвергаемое осреднению. Очень важно, что величины f_i являются более однородными, чем исходные величины f'_i . Поэтому условия однородности и изотропности поля f могут приближенно выполняться и в том случае, когда само поле осадков является заведомо неоднородным. Существенно, что нормированные автокорреляционные функции для полей f и f' совпадают, так что пересчета их не требуется.

Приведем данные расчета по формулам (11) и (12) для использованного уже выше примера размещения 10 пунктов на площади 10 000 км². Они сведены в табл. 2. Решение системы типа (11) было выполнено А. И. Полищук по программе Г. Х. Хатамкулова [11]. Здесь, как и раньше, величина $E_1 = \frac{\varepsilon_1}{\tilde{f}}$ представляет собой среднюю квадратическую

Таблица 2

Средняя квадратическая ошибка (%) определения среднего слоя на квадрате 100×100 км² методом среднего взвешенного по данным n станций (Валдай, месячные суммы осадков)

Номер точки	ω_{Si}	n													
		10	9	8	7	6	5	4	3	2	1				
1	0,796	0,130	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
2	0,776	0,081	0,087	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
3	0,796	0,067	0,099	0,144	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
4	0,812	0,121	0,124	0,140	0,165	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
5	0,783	0,161	0,185	0,184	0,187	0,188	—	—	—	—	—	—	—	—	—
6	0,784	0,025	0,022	0,027	0,034	0,092	0,091	—	—	—	—	—	—	—	—
7	0,788	0,035	0,032	0,036	0,033	0,058	0,072	0,136	—	—	—	—	—	—	—
8	0,821	0,154	0,212	0,225	0,322	0,355	0,410	0,416	0,433	—	—	—	—	—	—
9	0,813	0,115	0,117	0,114	0,117	0,125	0,196	0,203	0,244	0,395	—	—	—	—	—
10	0,818	0,101	0,107	0,110	0,112	0,149	0,177	0,189	0,257	0,454	0,816	—	—	—	—
$\sum_{i=1}^n p_i$	—	0,990	0,984	0,979	0,970	0,967	0,946	0,944	0,934	0,849	0,816	—	—	—	—
$\sum_{i=1}^n p_i \omega_{Si}$	—	0,794	0,791	0,788	0,785	0,780	0,769	0,768	0,764	0,693	0,667	—	—	—	—
ε_1^2	—	0,018	0,021	0,023	0,027	0,032	0,043	0,044	0,048	0,119	0,145	—	—	—	—
$E_1 \%$	—	7,5	8,2	8,5	8,7	10,0	11,6	11,7	12,2	19,3	21,5	—	—	—	—

ошибку определения слоя на площади по отношению к средней из сумм в отдельном пункте.

Уже из приведенного примера можно видеть наиболее характерные черты данного метода расчетов.

Из оптимальных весов, полученных для осреднения по 10 точкам, максимальным является вес 5-й точки, а минимальными являются веса 6-й и 7-й точек. Правомерность такого результата следует из рис. 2, где видно, что 5-я точка характеризует весь северо-восточный угол квадрата, а 6-я и 7-я точки расположены очень близко друг к другу в юго-восточном углу квадрата, который и так неплохо освещен. Сумма всех весов отлична от единицы.

При исключении из рассмотрения данных в какой-либо точке ее вес частично перераспределяется по остальным станциям, веса которых, как правило, увеличиваются. В некоторых случаях, однако, возможно и уменьшение веса той или иной станции при уменьшении их общего числа. Так, при исключении станции 1, расположенной в северо-западном углу, веса для станций 6 и 7, расположенных в противоположном углу, несколько уменьшаются. Аналогично этому после исключения станции 2 несколько уменьшаются веса станций 5 и 9. Физический смысл такого уменьшения очевиден. Следует подчеркнуть, однако, что этот эффект никогда не проявился бы при обычном взвешивании по площадям.

При уменьшении числа станций, данные которых подвергаются осреднению, сумма всех весов уменьшается; погрешность определения среднего слоя на площади монотонно увеличивается. Сооставление погрешностей E_1 с приведенными в табл. 1 погрешностями средней арифметической показывает, что точность среднего взвешенного больше, чем точность среднего арифметического при том же размещении станций. В то же время погрешность E_1 больше погрешности средней арифметической E' при равномерном размещении станций. Это естественно, так как

в этом случае оптимальные веса оказались бы близкими к значению $\frac{1}{n}$,

принимаемому для средней арифметической.

Выигрыш в точности сравнительно невелик и на первый взгляд не оправдывает усложнения расчетов. Стоит, однако, обратить внимание, что средняя взвешенная по семи точкам обеспечивает ту же точность, что средняя арифметическая по всем точкам, а средняя взвешенная по трем точкам — ту же точность, что и средняя арифметическая из семи точек, и т. д. Это значит, что переход от среднего арифметического к среднему взвешенному эквивалентен организации на данной площади нескольких осадкомерных пунктов.

Заметим, что и в случае, когда на площади остается только одна станция, наиболее точную оценку средней по площади мы получаем не при простой замене ее суммой осадков в этой точке, а при использовании ее с каким-то весом. Это равносильно приведению данных в точке к средней по площади. Такого рода одноточечное приведение для частного случая, когда точка расположена в центре площади, подробно рассмотрено автором в [8]. Очевидно, что приведенная в [8] схема является частным случаем рассмотренной выше схемы оптимального взвешивания.

Данный способ определения оптимальных весов, как уже указывалось, применим для отклонений от норм. Следовательно, он наиболее удобен для сумм осадков за такие периоды, за которые известны нормы. Такими периодами являются сезоны и месяцы. Для сумм осадков за меньшие интервалы времени нормы отсутствуют. Поэтому для таких периодов времени необходимо рассматривать абсолютные значения сумм

осадков. В этом случае для устранения систематических ошибок при осреднении необходимо введение условия нормировки

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1. \quad (13)$$

Аналогично тому, как это делается при оптимальной интерполяции (2), можно показать, что в этом случае оптимальные веса определяются по формуле

$$p_i = p'_i + \lambda p''_i, \quad (14)$$

где p'_i — веса, получаемые путем решения системы (11), p''_i — веса, получаемые решением той же системы при замене всех величин ω_{Si} в системе (11) единицами.

$$\lambda = \frac{1 - \sum_{i=1}^n p'_i}{\sum_{i=1}^n p''_i}. \quad (15)$$

Погрешность при этом определится формулой

$$\varepsilon^2 = \varepsilon'^2 + \lambda \left(1 - \sum_{i=1}^n p'_i \right), \quad (16)$$

где ε' — погрешность, получающаяся по формуле (12) при выборе весов p'_i без условия нормировки.

Следует еще раз подчеркнуть, что предложенная методика осреднения может быть применима лишь для таких величин, которые характеризуются сравнительной однородностью и изотропностью на рассматриваемой территории. Это ограничение является принципиальным. Использование данной методики для районов, где заведомо неоднородны даже отклонения от норм, является неприемлемым. Так, для сумм осадков, по-видимому, безнадежно пытаться производить осреднение по площади в горных условиях без предварительной группировки станций, находящихся в однородных условиях.

Менее стеснительной является необходимость иметь сведения о корреляционной структуре осредненных величин. Некоторые данные по корреляционной структуре за последние годы уже собраны, как для сумм осадков, так и для других метеорологических элементов. Последующее изучение, несомненно, приведет к их дальнейшей детализации. По данным о статистической структуре могут быть рассчитаны функции μ_S и ω_S . В настоящее время такие расчеты выполнены лишь для площадей, имеющих форму квадрата. Однако и для площадей другой формы выполнение численного интегрирования по формулам (6) трудностей не представляет.

3. Схема расчета корреляционных функций по грациям сумм осадков

При выводе формул для оценки точности средней по площади, а также для определения оптимальных весов не делалось никаких допущений о законе распределения осредняемых величин. Они справедливы для метеорологических элементов с любым законом распределения, лишь бы была известна пространственная корреляционная функция.

Производившиеся до сих пор как в данной статье, так и в [4] оценки являются осредненными по всем дождям, выпадающим на данную тер-

риторию. Не производилось детализации ни по типам осадков, ни по интенсивности их. В некоторых случаях такая детализация желательна. Скажем, с точки зрения гидрологических расчетов наибольший интерес представляет не точность осреднения осадков вообще, а точность осреднения при суммах осадков 10 мм и более за дождь. Могут оказаться полезными оценки и для других градаций сумм осадков.

Такие оценки легко получить по рекомендованным выше формулам в случае наличия данных о корреляционной функции сумм осадков соответствующей градации. При этом следует иметь в виду, что распределение сумм осадков отличается от нормального. Это приводит к тому, что корреляционные функции для различных градаций оказываются различными.

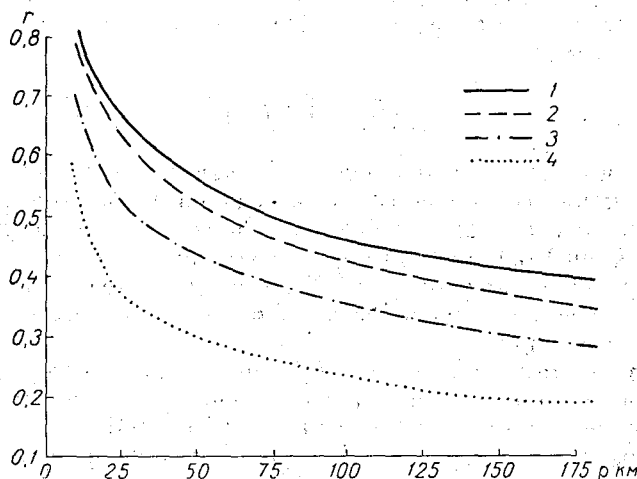


Рис. 3. Корреляционные функции суточных сумм осадков. Валдай. (Хотя бы по одному из пунктов сумма больше a мм.)

1) $a=0,1$ мм; 2) $a=1,0$ мм; 3) $a=5,0$ мм; 4) $a=10,0$ мм.

На рис. 3 приводятся корреляционные функции суточных сумм осадков различной интенсивности по данным УГМС ЦО. Эти корреляционные функции выполнены на сравнительно небольшом материале и даются здесь лишь для иллюстрации.

Из рис. 3 видно, что, чем большие суммы осадков мы рассматриваем, тем быстрее затухает корреляция их с увеличением расстояния. Ясно, что точность средних по площади при больших суммах осадков окажется меньшей.

Учитывая большую трудоемкость вычисления корреляционных функций, не представляется практически целесообразным раздельное вычисление их для каждой градации сумм осадков. Было бы желательно найти пути пересчета их по заданной интегральной корреляционной функции.

Одним из возможных путей решения этой задачи является использование идеи о преобразовании шкалы осадков. Идея эта состоит в том, что предполагается существовать некоторая функция от изучаемой величины, такая, что распределение ее для произвольного числа n точек на данной территории является n -мерным нормальным распределением.

Применительно к одному пункту идея эта была выдвинута Б. И. Срезневским [12] и с тех пор неоднократно использовалась, например, в работах М. А. Омшанского [9] и Н. А. Багрова [1].

Сопоставим фактические значения сумм осадков, измеренных в миллиметрах, которые мы по-прежнему будем обозначать f , и некоторую нормально распределенную величину φ . При этом для простоты потребуем, чтобы дисперсия величины φ была равна единице. Тогда плотность распределения и функция распределения (обеспеченность) величины φ описываются формулами:

$$y(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varphi^2}{2}}; Y(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\varphi} e^{-\frac{\varphi'^2}{2}} d\varphi'. \quad (17)$$

Для определения зависимости φ от f воспользуемся разработанным Б. И. Срезневским методом равных повторяемостей. Этот метод состоит в том, что каждое возможное значение величины f сопоставляется со значением φ , обеспеченность которого равна обеспеченности f .

Таким образом,

$$Y[\varphi(f)] = \int_0^f F(f') df', \quad (18)$$

где $F(f')$ — плотность распределения осадков в отдельном пункте. Данные о повторяемостях различных сумм осадков приводятся в климатических справочниках; расчет их для тех или иных пунктов также несложен. Таблица функции $Y(\varphi)$ приводится в любом руководстве по статистике, так что нахождение значений φ по Y не представляет труда. Точность такого преобразования определяется точностью задания исходного распределения сумм осадков.

В качестве примера рассмотрим преобразование шкалы для суточных сумм осадков. В табл. 3 приводятся полученные по данным наблюдений 51 осадкомерного пункта УГМС ЦО за 1960—1961 гг. значения интегральной вероятности Y различных суточных сумм и соответствующие значения φ .

Таблица 3

Преобразование шкалы суточных сумм осадков							
f мм 0	0,10	0,50	1,0	5,0	10	20	30
Y 0,505	0,557	0,631	0,686	0,853	0,928	0,977	0,992
φ 0,01	0,14	0,34	0,48	1,05	1,46	1,99	2,40

Заметим, что в данном случае преобразование шкалы удовлетворительно описывается формулой

$$\varphi = 0,47 \sqrt{f}. \quad (19)$$

Разумеется, в других районах, а также для сумм за другие периоды распределение может оказаться другим, соответственно другой вид будет иметь и функция преобразования $\varphi(f)$. Для наших целей достаточно знать, что при любом распределении сумм осадков можно однозначно преобразовать шкалу осадков к некоторой нормально распределенной величине φ .

Нормальность распределения величины φ в отдельных точках территории не обязательно означает, что многомерное распределение этой величины в разных точках территории также является нормальным. Однако в качестве первого приближения естественно использовать это допущение.

В этом случае для двух произвольных точек двумерная плотность распределения величины φ опишется формулой

$$y(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-R^2}} \exp \left\{ -\frac{\varphi_1^2 - 2R\varphi_1\varphi_2 + \varphi_2^2}{2(1-R^2)} \right\}, \quad (20)$$

где R — коэффициент корреляции между φ_1 и φ_2 , представляющими собой значения величины φ в первой и второй точках соответственно.

Зная R , нетрудно перейти к значениям коэффициента корреляции самих сумм осадков.

Пусть нас интересует корреляция сумм осадков в двух точках при условии, что хотя бы в одной из них сумма осадков превышает величину a . В этом случае можно получить:

$$\left. \begin{aligned} r(a) &= \frac{A(a)}{\sigma(a)\sigma(0)} \\ A(0) &= \int_{\varphi_1=\varphi(a)}^{\infty} \int_{\varphi_2=\varphi(0)}^{\infty} [y(\varphi_1, \varphi_2) - y(\varphi_1)y(\varphi_2)] f(\varphi_1)f(\varphi_2) d\varphi_1 d\varphi_2 \\ \sigma^2(a) &= \int_{\varphi(a)}^{\infty} f^2(\varphi)y(\varphi) d\varphi - \left[\int_{\varphi(a)}^{\infty} f(\varphi)y(\varphi) d\varphi \right]^2 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

В частности, при $a=0$ формулы (21) однозначно связывают коэффициент корреляции преобразованных величин R с интегральным коэффициентом корреляции сумм осадков $r(0)$, который обычно и вычисляется. Затабулировав эту зависимость, можно в дальнейшем определить по заданному $r(0)$ соответствующее значение R , после чего по формулам (21) можно найти коэффициенты корреляции для сумм осадков при любых значениях a . При соблюдении условий однородности и изотропности это дает возможность пересчета корреляционных функций для сумм осадков любой интенсивности.

Предлагаемая схема пересчета корреляционных функций должна быть проверена на экспериментальном материале. В случае, если она окажется пригодной, откроется возможность более детального теоретического исследования закономерностей пространственного распределения поля осадков.

ЛИТЕРАТУРА

1. Багров Н. А. О распределении месячных сумм осадков. Труды ЦИП, вып. 139, 1965.
2. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеоздат, Л., 1963.
3. Гандин Л. С., Соловейчик Р. Э. Об оптимальных формулах численных квадратур для стационарных случайных функций. Зап. Ленинградского горного ин-та, т. 43, вып. 3, 1964.
4. Гушина М. В., Каган Р. Л., Полищук А. И. О точности определения среднего слоя осадков на площади. См. наст. сб.
5. Дроздов О. А. Основы климатологической обработки метеорологических наблюдений. Изд. ЛГУ, 1956.
6. Каган Р. Л. О точности определения средней по площади по данным точечных измерений. Труды ГГО, вып. 175, 1965.
7. Каган Р. Л. К оценке репрезентативности осадкомерных данных. Труды ГГО, вып. 191, 1966.
8. Каган Р. Л. О редукции метеорологических элементов на площади. Труды ГГО, вып. 191, 1966.
9. Омшанский М. А. Деформация шкал метеорологических элементов и ее практическое значение. Труды ГГО, вып. 4, 1936.
10. Полищук А. И. К вопросу об осреднении осадкомерных данных. См. наст. сб.
11. Хатамкулов Г. Х. Об использовании наземной информации при объективном анализе аэрологических полей. См. наст. сб.
12. Slesnewski В. Eine Lösung des Problems der Korrelation zwischen zwei Veränderlichen und über die Methode der gleichen Häufigkeiten. Meteorol. Zs. Bd 31 (49), H. 10, 1914.

К ВОПРОСУ ОБ ОСРЕДНЕНИИ ОСАДКОМЕРНЫХ ДАННЫХ

Рассматривается вопрос о корреляции средних по площади сумм жидких осадков для районов Валдая и Приморья.

Приводятся примеры вычисления оптимальных весов при определении среднего взвешенного.

Метеорологические измерения дают сведения о значениях измеряемых элементов в отдельных точках. Для многих практических задач необходимо знать средние характеристики метеорологических элементов. В особенности это касается осадков, средние величины которых требуются для гидрологических прогнозов и других целей.

Существует несколько способов вычисления средних по площади сумм осадков. Наиболее простым из них является способ среднего арифметического, в некоторых случаях используется среднее взвешенное, когда вес каждого измерения определяется частью площади, приходящейся на данный пункт.

При любом методе осреднения полученная средняя величина может отличаться от истинной средней для данной площади. Р. Л. Каган [1] предложил способ оценки погрешностей средней по площади величины по данным о статистической структуре ее. При этом статистическая структура осредненных по площади величин характеризуется функциями:

$$\begin{aligned}\bar{\omega}(S) &= \frac{1}{S} \iint_S r [\sqrt{x^2 + y^2}] dx dy, \\ \mu(S) &= \frac{1}{S^2} \iiint_S \iint_S r [\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}] dx dy d\xi d\eta,\end{aligned}\quad (1)$$

где r — нормированная автокорреляционная функция самих значений f в отдельных точках, $\mu(S)$ — автокорреляционная функция осредненных по площади значений, а $\bar{\omega}(S)$ — взаимная корреляционная функция осредненных и точечных значений величины f . Функции $\mu(S)$ и $\bar{\omega}(S)$ нормированы на дисперсию величины f .

Нормированная автокорреляционная функция $r(l)$ может быть аппроксимирована каким-либо аналитическим выражением. Для случая, когда корреляция убывает с расстоянием по степенному закону, функции $\mu(S)$ и $\bar{\omega}(S)$ затабулированы в [2]. Там же приведены значения этих функций для тех случаев, когда корреляционная функция $r(l)$ описывается экспоненциальной зависимостью вида

$$r_1(l) = e^{-\frac{l}{l_0}}, \quad (2)$$

где l_0 — радиус корреляции, т. е. расстояние, на котором $r(0)$ убывает в e раз.

Во многих важных практических задачах корреляционную функцию точечных значений не удается описать такими зависимостями. В этих случаях можно корреляционную функцию разложить в степенной ряд и пользоваться таблицами для степенного закона. Однако более удобным является непосредственный численный расчет корреляционных функций по формулам (1). При этом вовсе не обязательно аналитическое задание корреляционной функции r . Она может быть задана таблицей, а интегрирование в формулах (1) может производиться численно.

Соответствующая программа была реализована на ЭВМ «Урал-4». Интегрирование в ней осуществлялось по кубатурным формулам типа формул Симпсона. Эта программа позволяла осуществить расчет функций $\mu(S)$ и $\omega(S)$ для сумм жидких осадков в тех случаях, когда корреляционная структура их отклонялась от зависимости (2).

Расчет функций $\mu(S)$ и $\omega(S)$ для сумм жидких осадков в районе Валдая выполнен по данным, приведенным в работе [3].

В этой работе представлены эмпирические корреляционные функции $r'(l)$ для различных периодов суммирования. Для вычисления функций $\mu(S)$ и $\omega(S)$ произведено графическое сглаживание функций $r'(l)$ и получены значения теоретических корреляционных функций

$$r(l) = \frac{r'(l)}{r'(0)}, \quad (3)$$

где $r'(0)$ — корреляция при $l=0$, полученная путем графической экстраполяции $r(l)$.

Эмпирические корреляционные функции по району Приморья удовлетворительно описываются зависимостью (2), что позволило непосредственно использовать таблицы, приведенные в [2], для определения функций $\mu(S)$ и $\omega(S)$.

Следует подчеркнуть, что все расчеты проведены нами в предположении, что площади осреднения представляют собой равные квадраты. При другой форме площадей осреднения результаты могут отличаться.

Функции $\mu(S)$ и $\omega(S)$ для районов Валдая и Приморья для различных периодов суммирования приводятся в приложении I.

Здесь безразмерный параметр $k = \frac{L}{l}$, где L — расстояние между центрами квадратов для функции μ или между центром квадрата осреднения и рассматриваемой точкой для функции ω , $l = \sqrt{S}$ — сторона квадрата.

В таблицах представлены функции до расстояний $k=1$. Для $k > 1$ корреляционные функции осредненных величин практически совпадают с корреляционной функцией точечных величин. В качестве примера в табл. 1 приведены значения $r(l)$, $\mu(S)$ и $\omega(S)$ по району Валдая для ночного срока при площади осреднения 400 км^2 . При $k < 1$ функция $\omega(S)$ всегда больше функции $\mu(S)$ и меньше $r(l)$, при соответствующих значениях k и l .

Приведенные в приложении I значения функций $\mu(S)$ и $\omega(S)$ используются в статье [3] для оценки репрезентативности осадкомерных данных. Там же рассматривается вопрос о точности, с которой средняя арифметическая из сумм осадков в различных пунктах описывает средний слой осадков на площади.

Функции $\mu(S)$ и $\omega(S)$ могут быть также использованы при осреднении по методу среднего взвешенного.

Как показано в [4], оптимальные в смысле наименьших квадратов веса можно получить при решении системы уравнений

$$\sum_{i=1}^n r_{ij} p_j + \eta p_i = \omega_i(S) \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (4)$$

где n — число точек, участвующих в осреднении, $\omega_i(S)$ — корреляция между осредненными по площади S значениями сумм осадков в точке i , r_{ij} — коэффициент корреляции между значениями сумм осадков в точках i и j , а η — мера ошибки измерения

$$\eta = \frac{1 - r'(0)}{r'(0)}. \quad (5)$$

Таблица 1

Корреляционные функции $r(l)$, $\mu(S)$ и $\omega(S)$ для площади $S=400$ км².
Валдай, 19—7 час.

k	0,0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
L км	0	4	8	12	16	20	30	40	60	80	100
$r(l)$	1,000	0,934	0,872	0,830	0,789	0,750	0,660	0,586	0,493	0,423	0,370
$\mu(S)$	0,855	0,848	0,831	0,804	0,772	0,737	0,655	0,588	0,492	0,420	0,378
$\omega(S)$	0,885	0,878	0,855	0,820	0,781	0,744	0,656	0,588	0,492	0,420	0,378

Средний квадрат ошибки, которая получается при замене истинного среднего по площади средним взвешенным, оценивается по формуле

$$\varepsilon^2 = \mu(S) - \sum_{i=1}^n p_i \omega_i(S). \quad (6)$$

Выражения (4) и (6) обычно применяются, когда речь идет об отклонениях от норм элемента f . Если же нормы неизвестны, то придется производить вычисления, пользуясь самими значениями f . При этом необходимо выполнение условия нормировки весов. В результате

$$p_i = p'_i + p''_i \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^n p'_i\right)}{\sum_{i=1}^n p''_i}, \quad (7)$$

$$\varepsilon'^2 = \mu(S) - \sum_{i=1}^n p_i \omega_i(S) + \frac{\left(1 - \sum_{i=1}^n p'_i\right)^2}{\sum_{i=1}^n p''_i}, \quad (8)$$

где p'_i — веса, удовлетворяющие системе (4), а p''_i — веса, которые определяются из системы

$$\sum_{i=1}^n r_{ij} p''_j + \eta p''_i = 1 \quad (i=1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

По изложенной выше методике произведены некоторые расчеты оптимальных весов для получения среднего слоя жидких осадков за месяц для района Валдая. Решение систем (4) и (9) осуществлялось на ЭВМ «Урал-4» по программе, предоставленной автору Г. Х. Хатамкуловым.

Рассматривался квадрат площадью 10 000 км², в котором находятся 16 станций. Расчеты были выполнены для трех вариантов расположения

осадкомерных пунктов. В первом варианте (рис. 1 а) пункты измерений размещены на площади неравномерно, соответственно реально существующим на Валдае пунктам. Во втором варианте (рис. 1 б) пункты измерения размещены равномерно по всему квадрату. Наконец, в третьем варианте (рис. 1 в) осадкомерные пункты также дислоцированы равномерно, но не по всему квадрату, а лишь в центральной части его, имитируя осадкомерный куст.

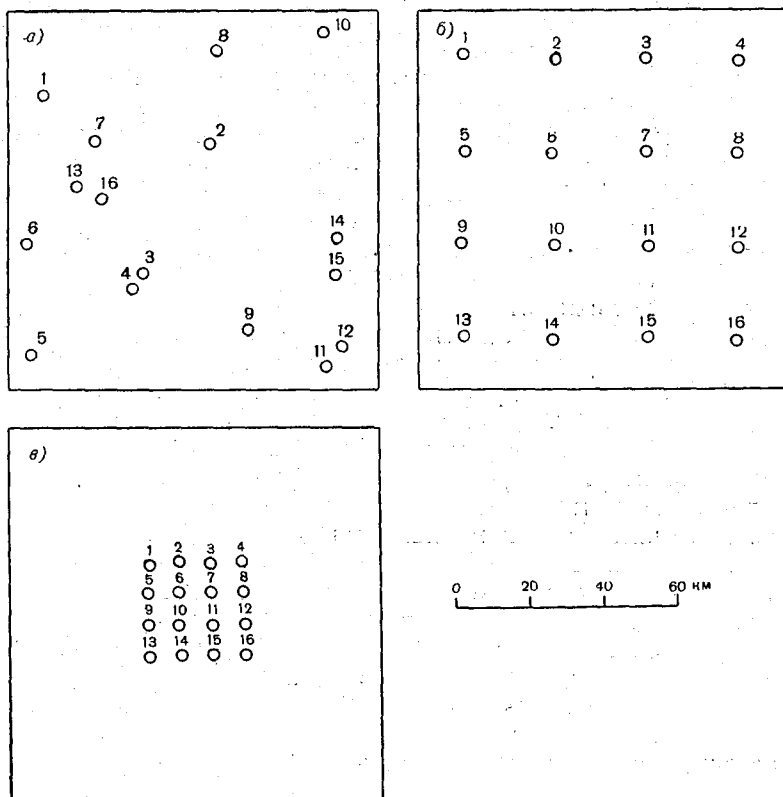


Рис. 1. Схема расположения осадкомерных пунктов.
 а — нерегулярное размещение пунктов, б — регулярное размещение пунктов на всем квадрате, в — регулярное размещение пунктов в центральной части квадрата.

Результаты расчетов приведены в таблицах приложения II. В этих таблицах по вертикали расположены веса, с которыми входят суммы осадков по данному пункту при вычислении средней суммы по всей территории. При этом в первом столбце даны веса для случая, когда используются данные всех 16 пунктов, во втором — когда первый пункт исключается, и т. д. Таким образом, в последнем столбце указан вес для случая, когда средняя по площади определяется по сумме осадков, измеренных в одном пункте 16.

В этих же таблицах приводятся значения дисперсий ошибки определения среднего слоя осадков по площади:

ϵ^2 — дисперсия ошибки, которая определяется по формуле (6) (осреднение отклонений от нормы);

ϵ'^2 — дисперсия ошибки при выполнении требования нормировки весов (осреднение самих месячных сумм);

ϵ_1^2 — дисперсия ошибки средней арифметической при равномерном размещении n станций на площади 10 000 км².

Рассмотрение таблиц приложения II позволяет заметить характерные особенности в распределении оптимальных весов. Наиболее существенным является то, что эти веса существенно отличаются друг от друга. В общем, максимальные веса получаются для станций, расположенных обособленно, минимальные веса — в пунктах сгущения сети (см., например, веса пунктов I и II в табл. I приложения II). С исключением станции ее веса перераспределяются между остальными станциями, так что веса их, как правило, увеличиваются.

Из табл. 2 видно, что в случае равномерного размещения пунктов измерения по всему квадрату оптимальные веса всех пунктов оказываются близкими. Практически в этом случае оптимальная средняя взвешенная совпадает со средней арифметической. Этот естественный результат неприменим к третьему варианту (осадкомерный куст), хотя расположение пунктов здесь тоже регулярное. Для этого варианта максимальный вес (0,110) получается для сумм в угловых точках, осадки в центральных точках практически на значения средней не влияют (они входят с весом 0,002).

Рассмотрение ошибки оптимального среднего взвешенного позволяет прийти к выводу, что в случае равномерного размещения пунктов по всей территории она практически совпадает с ошибкой среднего арифметического суммы.

Размещение станций кустом неэффективно с точки зрения средней по большой территории. Из табл. 3 приложения II видно, что дисперсия ошибки при этом во много раз больше, чем при равномерном расположении того же числа осадкомерных пунктов на площади. В частности, четыре пункта, равномерно размещенных на площади, обеспечивают ту же точность средней, что и все 16 пунктов куста.

Осреднение самих данных осадкомерных измерений (с выполнением условия нормировки) производится с меньшей точностью, чем осреднение аномалий. Это видно из сравнения ϵ^2 и ϵ'^2 . Однако различия оказываются заметными лишь при редкой сети. При густой сети различиями практически можно пренебречь.

В настоящей статье приведен лишь один пример применения корреляционных функций $\mu(S)$ и $\omega(S)$. Они могут быть также использованы для решения ряда других практических задач, например в задаче о согласовании данных об осадках по осадкомерной сети и по радиолокатору.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каган Р. Л. О точности определения средней по площади по данным точечных измерений. Труды ГГО, вып. 175, 1965.
2. Полищук А. И., Каган Р. Л. О статистической структуре осредненных значений метеорологических элементов. Труды ГГО, вып. 191, 1966.
3. Гущина М. В., Каган Р. Л., Полищук А. И. О точности определения среднего слоя осадков на площади. См. наст. сб.
4. Каган Р. Л. Некоторые вопросы интерпретации осадкомерных данных. См. наст. сб.

ПРИЛОЖЕНИЕ I
КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ

Таблица 1

Автокорреляционная функция осредненных значений $\mu_s(k)$. Валдай

Период суммирования	k	S км ²							
		1	10	100	500	1000	10 000	20 000	40 000
19—7 час.	0,0	0,990	0,971	0,918	0,841	0,791	0,556	0,484	0,417
	0,2	0,990	0,970	0,914	0,834	0,782	0,544	0,474	0,408
	0,4	0,988	0,966	0,903	0,815	0,758	0,514	0,447	0,387
	0,6	0,986	0,960	0,887	0,786	0,722	0,474	0,411	0,360
	0,8	0,983	0,952	0,868	0,751	0,681	0,430	0,374	0,356
	1,0	0,980	0,944	0,848	0,714	0,689	0,390	0,341	0,325
7—19 час.	0,0	0,979	0,938	0,852	0,774	0,742	0,601	0,529	0,438
	0,2	0,978	0,935	0,847	0,769	0,737	0,590	0,515	0,423
	0,4	0,975	0,927	0,834	0,756	0,724	0,562	0,487	0,389
	0,6	0,970	0,915	0,815	0,738	0,705	0,519	0,431	0,342
	0,8	0,964	0,900	0,794	0,718	0,683	0,468	0,375	0,294
	1,0	0,957	0,885	0,773	0,699	0,661	0,415	0,322	0,259
Сутки	0,0	0,988	0,963	0,894	0,818	0,785	0,637	0,572	0,492
	0,2	0,987	0,961	0,889	0,813	0,779	0,628	0,560	0,480
	0,4	0,986	0,955	0,876	0,800	0,764	0,602	0,530	0,451
	0,6	0,983	0,946	0,858	0,781	0,744	0,563	0,486	0,412
	0,8	0,979	0,936	0,838	0,759	0,720	0,517	0,438	0,376
	1,0	0,975	0,925	0,819	0,737	0,695	0,470	0,393	0,354
Декада	0,0	0,991	0,974	0,937	0,900	0,879	0,766	0,714	0,642
	0,2	0,990	0,972	0,935	0,897	0,876	0,758	0,704	0,629
	0,4	0,989	0,969	0,929	0,889	0,866	0,737	0,677	0,593
	0,6	0,987	0,964	0,921	0,877	0,851	0,706	0,638	0,541
	0,8	0,985	0,958	0,911	0,863	0,833	0,669	0,589	0,482
	1,0	0,982	0,952	0,901	0,848	0,814	0,629	0,536	0,428
Месяц	0,0	0,991	0,974	0,942	0,916	0,901	0,812	0,771	0,716
	0,2	0,990	0,972	0,941	0,914	0,898	0,806	0,763	0,707
	0,4	0,989	0,969	0,937	0,908	0,890	0,789	0,743	0,685
	0,6	0,987	0,964	0,931	0,899	0,879	0,765	0,713	0,650
	0,8	0,984	0,959	0,924	0,888	0,865	0,736	0,678	0,618
	1,0	0,982	0,953	0,917	0,877	0,850	0,705	0,641	0,600
Сезон	0,0	0,994	0,984	0,965	0,946	0,935	0,877	0,837	0,778
	0,2	0,994	0,983	0,964	0,945	0,933	0,871	0,829	0,769
	0,4	0,993	0,981	0,961	0,940	0,929	0,856	0,807	0,745
	0,6	0,992	0,979	0,957	0,934	0,922	0,832	0,775	0,713
	0,8	0,990	0,976	0,952	0,927	0,914	0,802	0,738	0,684
	1,0	0,988	0,972	0,947	0,920	0,906	0,768	0,701	0,635

Таблица 2

Взаимная корреляционная функция осредненных и точечных значений $\omega_S(k)$. Валдай

Период суммирования	k	$S \text{ км}^2$							
		1	10	100	500	1000	10 000	20 000	40 000
19—7 час.	0,0	0,993	0,978	0,938	0,875	0,836	0,616	0,539	0,459
	0,2	0,992	0,977	0,933	0,866	0,824	0,601	0,524	0,450
	0,4	0,990	0,971	0,918	0,842	0,791	0,555	0,484	0,416
	0,6	0,988	0,964	0,896	0,803	0,742	0,487	0,421	0,361
	0,8	0,984	0,955	0,874	0,761	0,690	0,429	0,368	0,323
	1,0	0,981	0,946	0,852	0,721	0,642	0,386	0,334	0,304
7—19 час.	0,0	0,984	0,953	0,876	0,799	0,764	0,648	0,596	0,516
	0,2	0,983	0,949	0,870	0,792	0,759	0,636	0,578	0,492
	0,4	0,979	0,938	0,852	0,774	0,742	0,602	0,529	0,436
	0,6	0,973	0,922	0,824	0,744	0,712	0,545	0,456	0,360
	0,8	0,966	0,904	0,797	0,719	0,686	0,483	0,384	0,290
	1,0	0,959	0,887	0,774	0,699	0,664	0,422	0,321	0,239
Сутки	0,0	0,991	0,973	0,917	0,843	0,810	0,681	0,630	0,559
	0,2	0,990	0,970	0,911	0,837	0,804	0,670	0,605	0,539
	0,4	0,989	0,963	0,893	0,818	0,784	0,638	0,572	0,491
	0,6	0,985	0,951	0,867	0,788	0,753	0,585	0,506	0,424
	0,8	0,981	0,940	0,842	0,761	0,723	0,529	0,443	0,367
	1,0	0,976	0,927	0,819	0,739	0,698	0,476	0,390	0,329
Декада	0,0	0,993	0,980	0,948	0,914	0,896	0,803	0,760	0,703
	0,2	0,993	0,978	0,945	0,910	0,892	0,793	0,748	0,687
	0,4	0,991	0,974	0,937	0,900	0,880	0,766	0,714	0,643
	0,6	0,988	0,967	0,925	0,883	0,859	0,724	0,661	0,573
	0,8	0,985	0,959	0,913	0,867	0,838	0,680	0,604	0,496
	1,0	0,982	0,952	0,902	0,851	0,818	0,636	0,548	0,418
Месяц	0,0	0,993	0,980	0,950	0,928	0,914	0,841	0,807	0,762
	0,2	0,993	0,978	0,948	0,923	0,910	0,834	0,798	0,750
	0,4	0,991	0,974	0,942	0,916	0,901	0,812	0,771	0,718
	0,6	0,988	0,967	0,933	0,904	0,885	0,779	0,729	0,666
	0,8	0,985	0,960	0,925	0,891	0,869	0,744	0,686	0,616
	1,0	0,982	0,954	0,918	0,879	0,853	0,710	0,646	0,573
Сезон	0,0	0,996	0,987	0,971	0,954	0,945	0,902	0,877	0,830
	0,2	0,995	0,986	0,969	0,952	0,942	0,896	0,866	0,817
	0,4	0,994	0,984	0,965	0,946	0,935	0,878	0,858	0,777
	0,6	0,992	0,980	0,959	0,937	0,925	0,848	0,796	0,726
	0,8	0,990	0,976	0,953	0,928	0,915	0,815	0,747	0,678
	1,0	0,989	0,973	0,948	0,920	0,907	0,777	0,701	0,640

Таблица 3

Автокорреляционная функция осредненных значений $\mu_S(k)$. Приморье

Период суммирования	k	S км ²							
		1	10	100	500	1000	10 000	20 000	40 000
19—7 час.	0,0	0,995	0,987	0,965	0,922	0,894	0,707	0,614	0,517
	0,2	0,993	0,987	0,965	0,921	0,893	0,697	0,602	0,502
	0,4	0,990	0,984	0,962	0,907	0,872	0,661	0,556	0,463
	0,6	0,986	0,980	0,951	0,888	0,849	0,611	0,497	0,395
	0,8	0,982	0,977	0,940	0,871	0,822	0,552	0,433	0,324
	1,0	0,981	0,975	0,934	0,852	0,797	0,490	0,367	0,260
7—19 час.	0,0	0,994	0,991	0,968	0,936	0,909	0,748	0,672	0,572
	0,2	0,994	0,991	0,968	0,935	0,908	0,737	0,658	0,559
	0,4	0,993	0,991	0,963	0,925	0,891	0,705	0,620	0,513
	0,6	0,992	0,991	0,957	0,909	0,871	0,660	0,566	0,452
	0,8	0,991	0,990	0,951	0,892	0,847	0,607	0,503	0,385
	1,0	0,990	0,980	0,940	0,876	0,826	0,550	0,439	0,321
Сутки	0,0	0,994	0,992	0,970	0,938	0,913	0,756	0,682	0,584
	0,2	0,994	0,992	0,970	0,938	0,912	0,746	0,669	0,576
	0,4	0,993	0,991	0,965	0,926	0,892	0,713	0,630	0,526
	0,6	0,992	0,991	0,959	0,910	0,873	0,671	0,577	0,466
	0,8	0,991	0,990	0,953	0,893	0,849	0,617	0,515	0,399
	1,0	0,990	0,980	0,942	0,877	0,831	0,563	0,450	0,334
Декада	0,0	0,997	0,994	0,977	0,950	0,935	0,810	0,747	0,666
	0,2	0,997	0,994	0,977	0,950	0,934	0,803	0,736	0,654
	0,4	0,995	0,992	0,970	0,943	0,923	0,778	0,704	0,613
	0,6	0,993	0,991	0,965	0,930	0,907	0,739	0,659	0,557
	0,8	0,992	0,990	0,960	0,916	0,890	0,692	0,606	0,496
	1,0	0,990	0,988	0,957	0,903	0,873	0,653	0,549	0,431
Месяц	0,0	0,996	0,993	0,974	0,946	0,927	0,789	0,720	0,633
	0,2	0,996	0,993	0,974	0,946	0,926	0,781	0,712	0,623
	0,4	0,993	0,991	0,967	0,937	0,913	0,752	0,674	0,575
	0,6	0,992	0,990	0,963	0,920	0,894	0,712	0,627	0,522
	0,8	0,991	0,989	0,957	0,904	0,876	0,663	0,570	0,456
	1,0	0,990	0,987	0,954	0,893	0,860	0,617	0,509	0,364

Таблица 4

Взаимная корреляционная функция осредненных и точечных значений $\omega_S(k)$. Приморье

Период суммирования	k	S км ²							
		1	10	100	500	1000	10 000	20 000	40 000
19—7 час.	0,0	0,998	0,991	0,974	0,953	0,924	0,775	0,691	0,602
	0,2	0,997	0,989	0,970	0,945	0,914	0,758	0,623	0,578
	0,4	0,995	0,987	0,965	0,932	0,894	0,707	0,612	0,517
	0,6	0,994	0,983	0,961	0,926	0,865	0,641	0,529	0,422
	0,8	0,994	0,980	0,950	0,893	0,837	0,571	0,446	0,331
	1,0	0,993	0,976	0,934	0,864	0,799	0,502	0,370	0,258
7—19 час.	0,0	0,998	0,994	0,978	0,953	0,932	0,807	0,741	0,651
	0,2	0,996	0,993	0,974	0,947	0,924	0,793	0,723	0,633
	0,4	0,994	0,991	0,968	0,935	0,909	0,748	0,672	0,572
	0,6	0,994	0,989	0,965	0,922	0,885	0,687	0,595	0,485
	0,8	0,993	0,987	0,954	0,900	0,862	0,620	0,517	0,396
	1,0	0,993	0,984	0,947	0,877	0,826	0,564	0,445	0,320
Сутки	0,0	0,998	0,995	0,980	0,955	0,937	0,813	0,752	0,665
	0,2	0,996	0,994	0,976	0,949	0,926	0,799	0,733	0,644
	0,4	0,994	0,992	0,970	0,937	0,913	0,756	0,682	0,585
	0,6	0,994	0,990	0,967	0,924	0,887	0,699	0,606	0,498
	0,8	0,993	0,988	0,956	0,902	0,864	0,632	0,531	0,413
	1,0	0,993	0,985	0,949	0,879	0,831	0,576	0,462	0,335
Декада	0,0	0,999	0,996	0,979	0,966	0,952	0,852	0,806	0,739
	0,2	0,998	0,995	0,978	0,960	0,946	0,844	0,792	0,718
	0,4	0,997	0,994	0,977	0,950	0,935	0,810	0,747	0,666
	0,6	0,997	0,991	0,976	0,943	0,921	0,761	0,686	0,591
	0,8	0,996	0,989	0,971	0,926	0,899	0,705	0,619	0,510
	1,0	0,996	0,986	0,959	0,909	0,876	0,656	0,563	0,441
Месяц	0,0	0,999	0,995	0,978	0,958	0,948	0,837	0,786	0,713
	0,2	0,998	0,994	0,975	0,952	0,940	0,825	0,771	0,692
	0,4	0,996	0,993	0,974	0,946	0,927	0,789	0,720	0,633
	0,6	0,996	0,991	0,970	0,935	0,921	0,738	0,658	0,552
	0,8	0,995	0,988	0,966	0,918	0,888	0,776	0,587	0,469
	1,0	0,995	0,986	0,956	0,901	0,859	0,624	0,521	0,396

ПРИЛОЖЕНИЕ II
ОПТИМАЛЬНЫЕ ВЕСА И ОШИБКИ ВЫЧИСЛЕНИЯ СРЕДНЕЙ ПО КВАДРАТУ ПЛОЩАДЬЮ 10 000 КМ²
(ВАЛДАИ, МЕСЯЧНЫЕ СУММЫ)

Таблица I
Нерегулярное расположение осадкомерных пунктов

Номер пункта	n															
	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	0,062															
2	0,105	0,106														
3	0,052	0,050	0,061													
4	0,058	0,057	0,060	0,095												
5	0,056	0,059	0,059	0,062	0,081											
6	0,034	0,045	0,042	0,044	0,055	0,095										
7	0,060	0,085	0,101	0,102	0,105	0,104	0,117									
8	0,110	0,119	0,149	0,151	0,152	0,152	0,154	0,178								
9	0,078	0,079	0,081	0,086	0,109	0,124	0,137	0,141	0,148							
10	0,081	0,084	0,094	0,094	0,094	0,092	0,090	0,094	0,176	0,176						
11	0,024	0,023	0,024	0,025	0,026	0,030	0,034	0,034	0,028	0,079	0,076					
12	0,034	0,032	0,030	0,029	0,030	0,034	0,033	0,033	0,035	0,058	0,070	0,123				
13	0,036	0,046	0,048	0,049	0,055	0,062	0,098	0,147	0,182	0,198	0,231	0,232	0,239			
14	0,083	0,082	0,094	0,095	0,096	0,093	0,094	0,093	0,110	0,116	0,181	0,187	0,223	0,236		
15	0,070	0,071	0,082	0,084	0,091	0,094	0,093	0,095	0,103	0,136	0,160	0,170	0,231	0,248	0,436	
16	0,049	0,052	0,066	0,075	0,097	0,105	0,131	0,165	0,191	0,209	0,233	0,238	0,248	0,447	0,482	0,826
ϵ^2	0,008	0,008	0,010	0,010	0,011	0,013	0,015	0,017	0,023	0,026	0,036	0,037	0,040	0,048	0,056	0,128
ϵ'^2	0,008	0,008	0,010	0,010	0,012	0,013	0,015	0,017	0,023	0,027	0,038	0,039	0,043	0,052	0,062	0,166

Регулярное расположение осадкомерных пунктов по всему квадрату

Номер пункта	r															1
	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	
1	0,063															
2	0,063	0,066														
3	0,063	0,066	0,096													
4	0,063	0,066	0,072	0,107												
5	0,063	0,066	0,107	0,116	0,125											
6	0,059	0,066	0,088	0,107	0,118	0,164										
7	0,059	0,058	0,066	0,091	0,018	0,124	0,182									
8	0,063	0,063	0,062	0,073	0,125	0,130	0,141	0,208								
9	0,063	0,066	0,067	0,068	0,066	0,113	0,153	0,169	0,187							
10	0,059	0,058	0,057	0,055	0,054	0,067	0,109	0,146	0,165	0,236						
11	0,059	0,060	0,058	0,058	0,054	0,051	0,068	0,114	0,165	0,176	0,258					
12	0,063	0,062	0,061	0,060	0,066	0,067	0,065	0,084	0,187	0,193	0,208	0,303				
13	0,063	0,060	0,068	0,037	0,065	0,074	0,076	0,078	0,072	0,149	0,206	0,227	0,250			
14	0,063	0,063	0,063	0,064	0,062	0,060	0,058	0,054	0,052	0,073	0,133	0,182	0,207	0,375		
15	0,063	0,062	0,062	0,061	0,062	0,062	0,059	0,057	0,052	0,048	0,070	0,134	0,212	0,248	0,511	
16	0,063	0,062	0,060	0,060	0,065	0,061	0,060	0,056	0,072	0,072	0,065	0,090	0,249	0,271	0,345	0,791
ε^2	0,005	0,006	0,007	0,008	0,011	0,013	0,017	0,023	0,032	0,038	0,047	0,057	0,076	0,090	0,123	0,185
ε'^2	0,005	0,006	0,007	0,008	0,011	0,014	0,018	0,024	0,033	0,041	0,049	0,061	0,082	0,100	0,142	0,229

Регулярное расположение осадкомерных пунктов в центральной части квадрата

Номер пункта	n															
	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1	0,110															
2	0,062	0,097														
3	0,062	0,072	0,100													
4	0,110	0,114	0,123	0,156												
5	0,062	0,097	0,119	0,130	0,142											
6	0,002	0,015	0,037	0,055	0,072	0,118										
7	0,002	0,002	0,013	0,035	0,072	0,085	0,119									
8	0,062	0,062	0,063	0,076	0,142	0,148	0,159	0,199								
9	0,062	0,072	0,076	0,079	0,073	0,119	0,146	0,158	0,175							
10	0,002	0,002	0,004	0,005	0,004	0,021	0,047	0,069	0,090	0,147						
11	0,002	0,000	0,000	0,002	0,004	0,004	0,017	0,043	0,090	0,106	0,149					
12	0,062	0,057	0,056	0,057	0,073	0,074	0,075	0,091	0,175	0,181	0,195	0,245				
13	0,110	0,114	0,115	0,111	0,121	0,136	0,141	0,142	0,139	0,204	0,240	0,257	0,278			
14	0,062	0,062	0,061	0,062	0,054	0,056	0,058	0,058	0,056	0,082	0,117	0,148	0,174	0,344		
15	0,062	0,057	0,057	0,056	0,054	0,053	0,052	0,054	0,056	0,058	0,074	0,107	0,174	0,235	0,457	
16	0,110	0,117	0,115	0,114	0,121	0,117	0,115	0,115	0,139	0,138	0,139	0,159	0,278	0,310	0,411	0,830
ε^2	0,025	0,027	0,028	0,029	0,032	0,034	0,036	0,037	0,042	0,046	0,048	0,050	0,058	0,069	0,087	0,121
ε'^2	0,028	0,029	0,031	0,032	0,036	0,039	0,041	0,042	0,048	0,052	0,054	0,057	0,066	0,081	0,104	0,157
ε''^2	0,005	0,005	0,005	0,006	0,006	0,007	0,008	0,009	0,010	0,012	0,014	0,017	0,023	0,032	0,056	0,133

К ВОПРОСУ ОБ ОБЪЕКТИВНОМ АНАЛИЗЕ ПОЛЕЙ АКТИНОМЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Рассмотрены возможности применения предложенного Р. Л. Каганом метода оптимального осреднения полей случайных величин к объективному анализу данных актинометрических измерений. Выполнены методические численные эксперименты по анализу суточных сумм суммарной радиации.

Одним из этапов обработки результатов актинометрических измерений на метеорологических спутниках или на наземной сети станций является объективный анализ полей радиации. Действительно, в большинстве современных схем численного гидродинамического прогноза погоды в качестве исходных данных используется информация, предварительно проинтерполированная в узлы регулярной сетки.

В отличие от таких метеорологических элементов, как геопотенциал, температура, давление, ветер, для которых в результате интерполяции должны быть получены в узлах регулярной сетки локальные значения самих элементов или их дифференциальные характеристики, для актинометрических величин имеет смысл получение главным образом интегральных характеристик. А именно, целесообразно производить интерполяцию таким образом, чтобы получать средние по площадям элементарных квадратов регулярной сетки значения элементов. Интегральные характеристики актинометрических величин оказываются также наиболее удобными с точки зрения исследования энергетического баланса планеты.

Основы методики получения интегральных характеристик метеоэлементов по данным измерений в отдельных точках были разработаны в ГГО Р. Л. Каганом [4, 5] в связи с работами по рационализации сети осадкомерных станций. Однако основы этой методики с успехом могут быть приложены практически к любому метеорологическому элементу.

Ниже мы рассмотрим возможности применения метода оптимального осреднения к полям актинометрических величин.

Основное требование к полям элементов, оптимальную интерполяцию или осреднение которых необходимо производить, — это однородность и изотропность по отношению к корреляционной функции.

Основные факторы, не позволяющие считать поля актинометрических величин однородными и изотропными, следующие.

1. Неоднородность поля норм. Влияние ее исключается тем, что обычно производят интерполяцию не самих значений элемента, а его отклонений от норм [1].

2. Наличие суточного хода, который должен существенно сказываться, если анализируется поле по большой территории. Влияние его можно исключить, если произвести интерполяцию суточных или «условных суточных» сумм радиации. Условными суточными суммами будем называть суточные суммы, полученные по одному измерению в предположении, что только высота Солнца, но не параметры атмосферы и ее поверхности, имеет суточный ход. Рассматривать такие суммы потоков радиации предложил М. И. Юдин.

3. Неоднородность поля дисперсии элемента. Этот фактор можно исключить, производя интерполяцию нормированных отклонений, т. е. отклонений, деленных на стандартные отклонения. Такой способ учета неоднородности поля дисперсии интерполируемого элемента подробно рассмотрен в работе Л. С. Гандина [2].

Итак, если имеются суточные или условные суточные суммы элемента Q_i , то на каждой i -той станции нужно вычислить интерполируемые величины

$$q'_i = \frac{Q_i - \bar{Q}_i}{\sqrt{(Q_i - \bar{Q}_i)^2}}. \quad (1)$$

Обратный переход от величины q' к значениям элемента Q не представляет трудности и может быть выполнен по той же формуле (1).

Предположим, что поле величин q' однородно и изотропно по отношению к корреляционной функции

$$\overline{q'(0)q'(\rho)} = r(\rho). \quad (2)$$

Необходимо заметить, что $r(\rho)$ — нормированная автокорреляционная функция; дисперсия элемента q' в каждой точке или равна единице

$$\overline{(q')^2} = r(0) = 1 \quad (3)$$

при отсутствии случайных ошибок измерений, или превышает единицу на величину, равную мере случайной ошибки измерений.

Пусть имеются величины q'_i на n станциях ($i=1, 2, 3, \dots, n$). Нужно получить в узле (обозначим его индексом 0) величину q_0 , равную среднему значению величины q' по площади квадрата со стороной l .

$$q_0 = \frac{1}{l^2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} q'(x, y) dx dy. \quad (4)$$

Будем искать величину q_0 в виде линейной комбинации значений q'_i на n станциях

$$q_0 \approx \tilde{q}_0 = \sum_{i=1}^n p_i q'_i. \quad (5)$$

Коэффициенты p_i определим методом наименьших квадратов из условия минимума среднего квадрата ошибки представления (5). Для этого проделаем обычные выкладки

$$\begin{aligned} \delta^2 &= \overline{(q_0 - \tilde{q}_0)^2} = \overline{\left(q_0 - \sum_{i=1}^n p_i q'_i \right)^2} = \\ &= \overline{q_0^2} - 2 \sum_{i=1}^n p_i \overline{q_0 q'_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j \overline{q'_i q'_j}. \end{aligned} \quad (6)$$

Введем обозначения:

$\overline{q'_i q'_j} = r_{ij}$ — корреляционная функция локальных значений,

$\overline{q_0 q_i} = \omega_{0i}$ — взаимная корреляционная функция локальных и осредненных (по площади квадрата со стороной l) значений элемента,

$\overline{q_0^2} = \mu_{00}$ — дисперсия осредненных значений элемента.

$$\delta^2 = \mu_{00} - 2 \sum_{i=1}^n p_i \omega_{0i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j r_{ij}. \quad (7)$$

Составим условие минимума среднего квадрата ошибки интерполяции

$$\frac{d\delta^2}{dp_i} = 0, \quad (8)$$

откуда и получим систему линейных алгебраических уравнений для определения интерполяционных весов

$$\sum_{i=1}^n p_j r_{ij} = \omega_{0i}. \quad (9)$$

Из (6) и (9) получаем более простую формулу для среднего квадрата теоретической ошибки оптимальной интерполяции

$$\delta^2 = \mu_{00} - \sum_{i=1}^n p_i \omega_{0i}. \quad (10)$$

Мера ошибки оптимальной интерполяции соответственно равна

$$\epsilon^2 = \frac{\delta^2}{\mu_{00}} = 1 - \sum_{i=1}^n p_i \frac{\omega_{0i}}{\mu_{00}}. \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что для производства оптимальной интерполяции нужно иметь корреляционную функцию элемента $r(\rho)$, взаимную корреляционную функцию точечных и осредненных значений $\omega(\rho)$, а также дисперсию осредненных значений элемента μ_{00} .

Первая из них, $r(\rho)$, может быть рассчитана по данным наблюдений, а взаимная корреляционная функция $\omega(\rho)$ и величина μ_{00} могут быть получены из нее теоретическим путем.

Применение вышеизложенной методики целесообразно как к спутниковым данным, так и к данным наземных актинометрических измерений. Не располагая достаточным объемом спутниковой информации, рассмотрим применение этой методики к объективному анализу суточных сумм суммарной радиации.

Дело в том, что уже сейчас число работающих на территории СССР актинометрических станций, производящих измерения суммарной радиации, соизмеримо с количеством аэрологических станций, данные которых используются в оперативном численном гидродинамическом прогнозе погоды. Решению вопроса о том, насколько полно данные существующей сети актинометрических станций характеризуют приход солнечной радиации к различным частям планеты и какова оптимальная густота сети действующих станций, должны предшествовать методические численные эксперименты по оптимальной интерполяции рассматриваемого элемента.

Для расчета корреляционной функции $r(\rho)$ использовались данные о суточных суммах суммарной радиации, полученные с помощью само-

пишущих приборов на 27 станциях Советского Союза за июнь 1961 и 1962 гг., опубликованные в актинометрических ежемесячниках. Из них были выбраны измерения только за нечетные дни месяца, поскольку данные за соседние сутки могли оказаться тесно коррелированными. Вычисленные значения нормированной пространственной автокорреляционной функции, осредненные по 200-километровым грациям, нанесены на рис. 1 светлыми кружками. Несмотря на весьма ограниченный объем выборки, результаты расчета оказались вполне разумными. Оценка доверительных интервалов показывает, что с вероятностью 95%

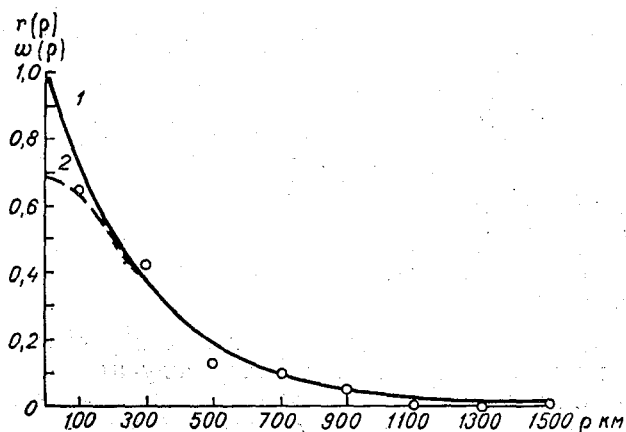


Рис. 1. Корреляционные функции суточных сумм суммарной радиации.

1) $r(\rho)$, 2) $\omega(\rho)$.

можно считать, что функция определена с ошибкой не более чем $\pm 0,1$. В предположении, что данные, полученные с помощью самопишущих приборов, дают значения суточных сумм суммарной радиации, не содержащие случайных ошибок, результаты расчета корреляционной функции удовлетворительно аппроксимируются экспонентой с радиусом корреляции, равным 300 км (см. рис. 1). Как известно, для экспоненциальной корреляционной функции под радиусом корреляции подразумевается расстояние, на котором значение функции убывает в e раз.

Таким образом,

$$r(\rho) = \frac{q'(0)q'(\rho)}{q'(0)^2} = e^{-\frac{\rho}{\rho_0}}, \quad \text{где } \rho_0 = 300 \text{ км.} \quad (12)$$

Вид полученной корреляционной функции говорит о том, что возмущения поля суммарной радиации являются мелкомасштабными по сравнению с возмущениями полей основных метеорологических элементов. Всякая корреляционная связь аномалий суточных сумм суммарной радиации затухает уже на расстоянии 1000 км. В то же время корреляционные функции температуры воздуха, точки росы, ветра, геопотенциала, длинноволнового уходящего излучения и ряда других элементов приближаются к нулю только на расстояниях порядка 2000—3000 км. По-видимому, для условных суточных сумм суммарной радиации пространственная корреляция окажется еще более слабой.

Вопрос о вычислении взаимных корреляционных функций осредненных по площадям квадратов и точечных значений метеорологических элементов подробно рассмотрен в работе А. И. Полищук и Р. Л. Кагана

[5]. В случае, когда сторона квадрата параллельна вектору, соединяющему центр его с точкой, находящейся на расстоянии ρ , можно записать:

$$\begin{aligned} \omega(\rho) &= \overline{q'(0, 0) q_0(\rho, 0)} = q'(0, 0) \frac{1}{l^2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{\rho - \frac{l}{2}}^{\rho + \frac{l}{2}} q(x, y) dx dy = \\ &= \frac{1}{l^2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{\rho - \frac{l}{2}}^{\rho + \frac{l}{2}} r(\sqrt{x^2 + y^2}) dx dy, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \mu_{00} &= \overline{[q_0]^2} = \left[\frac{1}{l^2} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} q'(x, y) dx dy \right]^2 = \\ &= \frac{1}{l^4} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r(\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2}) dx dy dx' dy'. \end{aligned} \quad (14)$$

Р. Л. Каган и А. И. Полищук [5] выполнили расчеты и составили таблицы, с помощью которых можно сразу получить зависимость $\omega(\rho)$ и значение μ_{00} , если функция $r(\rho)$ является экспоненциальной. В случае экспоненты единственными входными параметрами являются радиус корреляции ρ_{00} и длина стороны квадрата l . В работе [5] было показано, что корреляционные функции $\omega(\rho)$ в направлении диагонали практически не отличаются от рассчитанных в направлении средней линии квадрата. Следовательно, корреляционные функции, полученные по формуле (13), могут считаться изотропными, несмотря на то, что в качестве элемента осреднения выбран квадрат.

Взаимная корреляционная функция точечных и осредненных по площади квадрата со стороной 300 км нормированных суточных сумм суммарной радиации представлена на рис. 1. (Регулярная прогностическая сетка, принятая в СССР, имеет в своей основе элементарные квадраты 300×300 км.) Из рисунка видно, что уже на расстояниях ρ порядка 200 км значение $\omega(\rho)$ мало отличается от $r(\rho)$. Происходит это из-за того, что взаимная корреляционная функция $\omega(\rho)$ не нормирована, если

же разделить ее значения на $\sqrt{\mu_{00}}$, то, за исключением области очень небольших расстояний (ρ — не более 50 км), нормированная кросскорреляционная функция $\frac{\omega(\rho)}{\sqrt{\mu_{00}}}$ на графике будет идти выше, чем $r(\rho)$. Значение

μ_{00} в рассматриваемом случае оказалось равным 0,611. Это означает, что дисперсия осредненных по квадрату площадью 300×300 км² значений суточных сумм суммарной радиации составляет только 0,611 дисперсии ее локальных значений.

Чтобы определить теоретические ошибки интерполяции при различном размещении станций, была выбрана стилизованная сеть из 16 станций, изображенная на рис. 2. В центре ее находится квадрат со стороной 300 км. Первая станция находится на расстоянии 100 км от центра квадрата, на который производится интерполяция, а каждая последующая на 100 км дальше от центра квадрата, чем предыдущая. Причем все станции располагаются под разными азимутами таким образом,

чтобы каждая из последующих находилась по возможности на максимальном угловом расстоянии от всех предыдущих.

Результаты экспериментов по интерполяции значений суточных сумм суммарной радиации с этой стилизованной сети станций на площадь квадрата представлены на рис. 3 и 4.

На рис. 3 (сплошные линии) представлена зависимость меры ошибки оптимальной интерполяции от числа станций n , с которых производится интерполяция при разных расстояниях от центра квадрата до ближайшей станции (ρ_{01}). При этом каждая следующая добавляемая станция находится на 100 км дальше от центра, чем предыдущая.

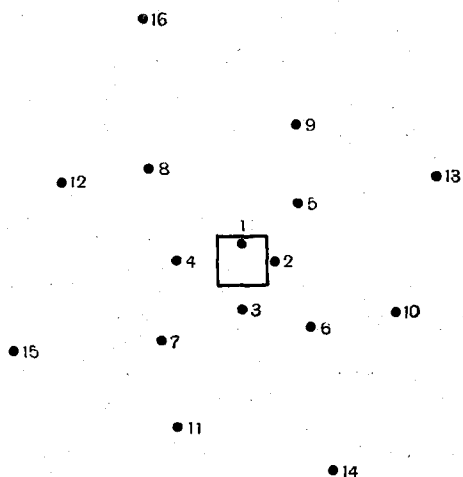


Рис. 2. Стилизованная сеть из 16 актинометрических станций.

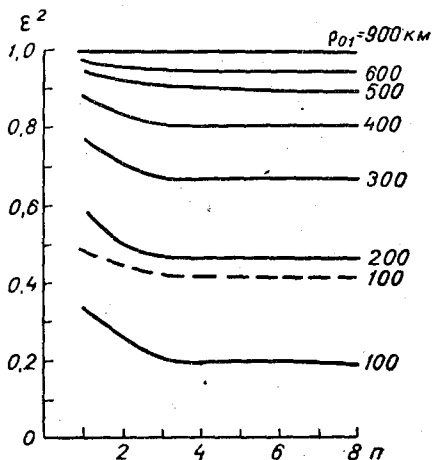


Рис. 3. Зависимость меры ошибки оптимальной интерполяции от числа станций n , участвующих в анализе, при различных расстояниях от центра квадрата до ближайшей станции (ρ_{01}).

Анализируя рис. 3, можно сделать следующие выводы, которые относятся только к выбранному расположению станций.

1. Использование для интерполяции данных более чем трех станций бессмысленно, поскольку это не уменьшает ошибки интерполяции.

2. Если полагать, что интерполяция с мерой ошибки больше чем 0,5 не имеет практического значения, то не имеет практического значения интерполяция, если ближайшая станция отстоит от центра квадрата дальше чем на 200 км.

3. На рис. 3 приведена также аналогичная зависимость (пунктирная линия) меры ошибки оптимальной интерполяции в центр квадрата (интерполяции в точку) при $\rho_{01} = 100$ км. Сравнивая эту зависимость с кривой меры ошибки определения средней по площади квадрата суммарной радиации (самая нижняя кривая на рис. 3), обнаруживаем, что средние по площади квадрата величины в результате оптимальной интерполяции определяются с меньшей ошибкой, чем локальные (исключение может составить случай, когда хотя бы одна из станций расположена очень близко от центра квадрата).

В рассмотренном случае (при $\rho_{01} = 100$ км) мера ошибки интерполяции в центр квадрата более чем в два раза превышает меру ошибки определения средней по площади квадрата величины суммарной радиации.

Аналогичную картину мы наблюдаем на рис. 4, на котором изображены зависимости меры ошибки оптимальной интерполяции в центр квадрата и на площадь его от расстояния ρ_{01} ближайшей станции до центра квадрата. Причем при увеличении ρ_{01} на каждые 100 км количество станций n , участвующих в анализе, уменьшается на единицу. Из рис. 4 видно, что независимо от расстояния до ближайшей станции (ρ_{01} не меньше 100 км) ошибка интерполяции на площадь квадрата меньше, чем ошибка интерполяции в его центр. Однако следует обратить внимание на одно важное обстоятельство. При расстоянии ρ_{01} , большем

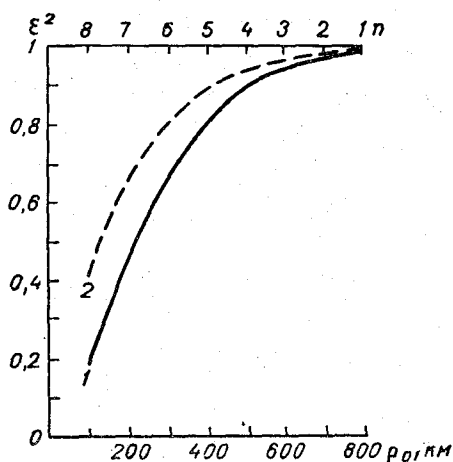


Рис. 4. Зависимость меры ошибки оптимальной интерполяции в центр квадрата (2) и на площадь его (1) от ρ_{01} (n — число участвующих в анализе станций).

чем 200 км, интерполяционные веса обеих разновидностей оптимальной интерполяции совпадают, поскольку при $\rho > 200$ км $\omega(\rho) \approx r(\rho)$, а веса p_i при интерполяции в центр квадрата определяются из системы уравнений (см. [1])

$$\sum_{i=1}^n p_i r_{ij} = r_{0i}, \quad (15)$$

которая не отличается от (9); тем не менее меры ошибок интерполяции существенно различны. Происходит это из-за того, что даже оптимальная интерполяция в точку, независимо от нашего желания, осуществляет некоторое пространственное осреднение интерполируемого элемента. Оценка теоретических ошибок по сути является процессом интерпретации полученных в результате интерполяции величин. Естественно, что интегральные характеристики полей метеорологических элементов нужно воспринимать и оценивать как интегральные, а не как локальные характеристики.

Возвращаясь к полю суточных сумм суммарной радиации, можно сделать вывод, что поле суммарной радиации является исключительно мелкомасштабным, вследствие чего для получения средних по площадям элементарных квадратов основной прогностической сетки сумм радиации необходимо иметь очень густую сеть актинометрических станций.

Согласно численным оценкам, чтобы получать осредненные по квадратам значения с относительной ошибкой ϵ не более 0,5, число станций должно быть близко к числу элементарных квадратов сетки и расположены они должны быть равномерно по всей интересующей нас территории.

В дальнейшем одновременно с работами по рационализации существующей сети актинометрических станций необходимо рассмотреть вопрос о привлечении дополнительных метеорологических элементов при объективном анализе актинометрической информации, причем в первую очередь элементов, наблюдения за которыми производятся на более густой сети станций. При анализе суточных сумм суммарной радиации такими дополнительными метеорологическими элементами могут быть, например, облачность и продолжительность солнечного сияния.

Представляет также большой интерес совместный анализ результатов наземных и спутниковых актинометрических измерений [3].

В свою очередь в процессе обработки данных актинометрических измерений метеорологических спутников Земли также целесообразно получение средних по площадям элементарных прогностических квадратов значений составляющих радиационного баланса системы земля—атмосфера. Основной методикой объективного анализа этих величин может явиться методика, описанная в настоящей статье. Применение этой методики позволяет сжать объем поступающей в результате измерений информации за счет отфильтровывания случайных флуктуаций полей радиации, не имеющих прогностического или диагностического значения. Интегральные характеристики полей радиации являются более удобными по сравнению с локальными при исследовании крупномасштабных процессов в атмосфере, энергетического баланса атмосферы и системы земля—атмосфера, а также для климатологических обобщений.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеоздат, Л., 1963.
2. Гандин Л. С. Общая задача об оптимальной интерполяции и экстраполяции метеорологических полей. Труды ГГО, вып. 168, 1965.
3. Гандин Л. С., Болтенков В. П. К методике объективного анализа актинометрической информации с метеорологических спутников Земли. Труды ГГО, вып. 166, 1964.
4. Каган Р. Л. Некоторые вопросы интерпретации осадкомерных данных. См. наст. сб.
5. Полищук А. И., Каган Р. Л. О статистической структуре осредненных значений метеорологических элементов. Труды ГГО, вып. 191, 1966.

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ НАЗЕМНОЙ ИНФОРМАЦИИ ПРИ ОБЪЕКТИВНОМ АНАЛИЗЕ АЭРОЛОГИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ

Приведены автокорреляционные и взаимные корреляционные функции полей давления и температуры на уровне моря и геопотенциалов уровней 850, 500 мб и H_{1000}^{500} . Они применены при численных опытах оптимального согласования высотных полей для уточнения результатов объективного анализа.

1. Известно, что практически ощущается острый недостаток аэрологических данных над обширными океаническими районами. Число же наблюдений на уровне моря, которые выполняются всеми судами, значительно больше. Естественно попытаться использовать эту дополнительную информацию для уточнения сведений о высоте изобарических поверхностей. В связи с этим Б. Р. Деес и М. А. Итон [12] и А. А. Петров [9] предложили использовать сведения о метеорологических параметрах на уровне моря и нижележащих уровнях для экстраполяции температуры и геопотенциала на вышележащие уровни с помощью сведений о вертикальном температурном градиенте.

Для уточнения высотных полей над океанами можно воспользоваться рекомендациями, полученными в работах [7], [11].

Мы попытались использовать для указанной цели метод оптимального согласования метеорологических полей, разработанный Л. С. Гандиным [3], [4].

Ввиду малости аэрологических данных над океанами качество анализа не отвечает требованиям, которые предъявляет проблема прогноза. Чтобы улучшить качество анализа, можно привлечь сведения о давлении p_0 и температуре T_0 на уровне моря: а) поле абсолютного геопотенциала H_p некоторой поверхности p мб согласуется с полем p_0 ; б) поле относительного геопотенциала H_{1000}^p поверхности p мб над поверхностью 1000 мб согласуется с полем T_0 . Между H_{1000}^p и температурой этого слоя имеется прямая функциональная связь, следовательно, должна быть какая-то связь между H_{1000}^p и T_0 . Необходимая на практике информация об абсолютном геопотенциале H_p может быть получена по соотношению

$$H_p = H_{1000} + H_{1000}^p, \quad (1)$$

поскольку H_{1000} известна.

Кратко изложим основные положения метода оптимального согласования. Значение некоторого метеорологического элемента в точке O (узел сетки) представляется в виде

$$\varphi_0 = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i + \sum_{k=1}^m b_k \psi_k, \quad (2)^1$$

где φ_i — значения в окружающих точках (станциях наблюдения) согласуемого элемента (в нашем случае либо H_p , либо H_{1000}^p); ψ_k — значения в окружающих точках (станциях наблюдения) элемента (либо p_0 , либо T_0), с которым согласуются φ и $m \geq n$; a_i и b_k — веса, определяемые из условия минимума среднего квадрата ошибки представления

$$E = \left[\varphi_0 - \left(\sum_{i=1}^n a_i \varphi_i + \sum_{k=1}^m b_k \psi_k \right) \right]^2 = \min. \quad (3)$$

Условие (3) приводит к системе $n+m$ линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \mu_{ij} a_j + \eta_i a_i + \lambda \sum_{k=1}^m \rho_{ik} b_k &= \nu_{0i} \quad (i=1, 2, \dots, n) \\ \sum_{i=1}^n \rho_{ik} a_i + \lambda \sum_{l=1}^m \nu_{kl} b_l + \lambda \zeta_k b_k &= \rho_{0k} \quad (k=1, 2, \dots, m) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где использованы следующие обозначения: μ_{ij} и ν_{kl} — значения нормированных автокорреляционных функций элементов φ и ψ соответственно; ρ_{ik} — значения нормированной взаимной корреляционной функции тех же элементов; $\eta_i = \frac{\sigma^2}{\varphi^2}$ — отношение среднего квадрата ошибки наблюдения

$\sigma^2 = \overline{\delta_{\varphi_i}^2}$ элемента φ в i -той точке к его дисперсии — так называемая мера ошибки наблюдения. Ошибки наблюдений считаются случайными [3].

$\zeta_k = \frac{\tau^2}{\psi^2}$ — мера ошибки наблюдения ψ в k -той точке; $\lambda^2 = \frac{\overline{\psi^2}}{\varphi^2}$ — отношение дисперсий ψ и φ .

Мера ошибки согласования $\varepsilon = \frac{E}{\varphi^2}$ находится с помощью следующего простого соотношения:

$$\varepsilon = 1 - \sum_{i=1}^n \nu_{0i} a_i - \lambda \sum_{k=1}^m \rho_{0k} b_k. \quad (5)$$

Если известны автокорреляционные функции μ и ν и взаимная корреляционная ρ , из (4) определятся веса a_i и b_k . Подставляя их в (2), можно производить согласование. Отметим, что подставляя эти веса в (5), можно вычислить меру ошибки согласования ε , не выполняя самого согласования, и отсюда средний квадрат ошибки согласования

$$E = \varepsilon \varphi^2.$$

Для оценки возможностей применения этого метода нами были проведены численные опыты по оптимальному согласованию поля H_{1000}^{500} с полем T_0 и полей H_{850} и H_{500} с полем p_0 . Выбор поверхности 850 м объясняется тем, что поле геопотенциала H_{850} должно быть наиболее тесно связано с полем p_0 . Поверхность 500 мб выбрана для того, чтобы посмотреть, какие результаты дает согласование для более верхнего уровня. Согласно этому и был взят H_{1000}^{500} .

Суть методики численных опытов состояла в том, что выбиралась

¹ В (2) и далее φ и ψ есть отклонения от норм.

одна точка (точка O), где определялось согласованное значение метеорологического элемента по данным восьми фиксированных окружающих точек (станций). Из (4) определяли веса a_i и b_k и по (5) вычисляли меры ошибок согласования e , а затем средний квадрат ошибки согласования E . Казалось бы, можно ограничиться этим. Но корреляционные функции всегда известны с определенной погрешностью и поэтому полученные значения E будут отличаться от истинных средних квадратов ошибок. Вследствие этого необходимо провести численные

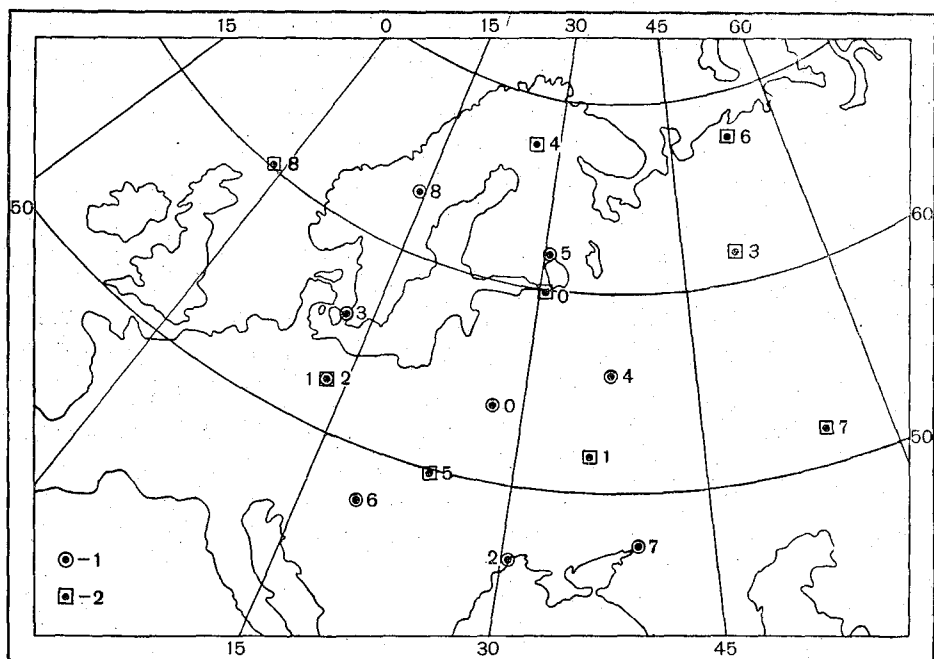


Рис. 1. Расположение станций, данные которых использованы при численных опытах оптимального согласования полей.

1 — группа станций I; 2 — группа станций II.

Сравнение наблюдаемых и интерполированных значений выполнялось для станций с номером 0.

опыты на большом фактическом материале. Поэтому за точку O нужно взять станцию, где имелись бы фактические значения согласуемого метеорологического элемента для сравнения. Согласно этому требованию и из-за невозможности набора нужного количества ситуаций для фиксированно расположенных точек (станций) над океанами, эти точки выбраны над сушей, а именно, на территории Европы (рис. 1). Тем не менее результаты этих численных опытов можно отнести к океаническим областям, так как поля метеорологических элементов там более однородны.

2. Для осуществления этих численных опытов необходимо знать автокорреляционные функции H_{1000}^{500} , T_0 , H_{850} , H_{500} , ρ_0 и взаимные корреляционные функции между H_{1000}^{500} и T_0 и между H_{850} , H_{500} и ρ_0 . Некоторые из них были известны из работ [1], [5], [6], [8], [10]. Структура поля H_{1000}^{500} и его корреляционная связь с полем T_0 никем не исследовались. При вычислении этой связи попутно была вычислена и автокорреляционная функция T_0 . Что касается корреляционных связей H_{850} , H_{500} с ρ_0 , то такая связь исследовалась только в работе [10], поэтому было целесообразно исследовать эту связь еще раз на другом материале.

Для вычисления корреляционных связей на ЭВМ использована программа, любезно предоставленная нам В. П. Болтенковым [2].

Вычисления проводились для 60 ситуаций зимнего сезона с интервалом в трое суток по наблюдениям за 3 часа для 60 европейских станций (рис. 2). Опять из-за малой плотности сети аэрологических станций над океанами выбор станций осуществлен над сушей, хотя результаты предполагается использовать для акватории океанов. Но переход к океаническим областям не должен ухудшить результаты. Что касается поля

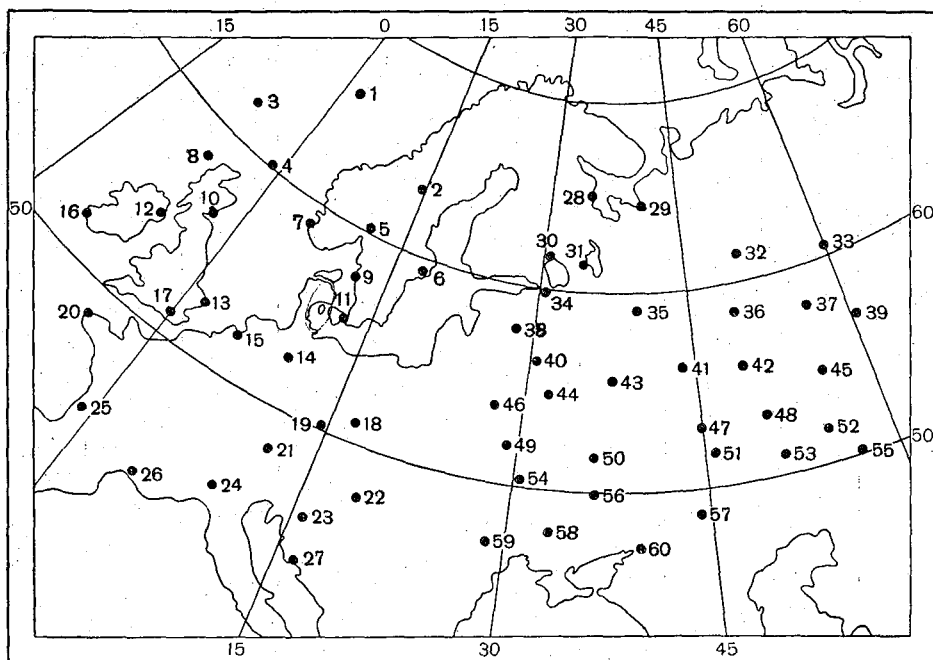


Рис. 2. Расположение станций, данные которых использовались для вычисления корреляционных связей.

T_0 , то над океанами оно более однородно, чем над сушей, так как оно не подвержено влиянию микрорельефа. Это обстоятельство дает возможность предположить, что следует ожидать даже некоторого улучшения результатов при переходе к океанам.

Результаты вычислений корреляционных связей приведены в табл. 1.

По нашим данным, дисперсия температуры у земли равна 41 град.^2 , а по данным работы [8] — $29,2 \text{ град.}^2$. Указанное расхождение, по-видимому, объясняется тем, что вычисления выполнены по данным за различные годы (1961—1963 гг. и 1959—1961 гг. соответственно), а также отличиями в расположении станций. Как по нашим данным, так и по данным работы [8], корреляционная функция не переходит через нуль.

Существенно, что связь H_{1000}^{500} с T_0 оказывается весьма тесной: коэффициент корреляции при нулевом горизонтальном расстоянии равен 0,72.

Интересно сопоставить характеристики полученных корреляционных функций ρ_0 , H_{850} , H_{500} с данными других авторов (табл. 2).

В работе [10] исследовался геопотенциал уровня 1000 мб, но он отличается от ρ_0 постоянным коэффициентом, и поэтому здесь приведены соответствующие значения для ρ_0 . Как видно из табл. 2, полученное нами значение дисперсии давления на уровне моря близко к данным

Таблица 1

Значения корреляционных функций $t(p_h, p_l, r)$

$r \cdot 10^3$ км	$(H_{1000}^{500}, H_{1000}^{500})$	(T_0, T_0)	(H_{1000}^{500}, T_0)	(H_{850}, H_{850})	(H_{500}, H_{500})	(p_0, p_0)	(H_{850}, p_0)	(H_{500}, p_0)	(H_{850}, H_{500})
0,0	99	41	46,0	101	203	181	131,7	135,8	122,7
0,1	97,4	40,2	45,9	99,3	198,5	179,1	127,5	124,1	114,5
0,3	92,5	37,1	41,7	96,5	192,2	173,2	124,3	127,3	115,2
0,5	82,7	31,9	36,9	89,6	176,2	160,9	115,7	117,6	106,0
0,7	71,8	27,8	33,8	81,6	157,1	146,6	105,8	109,7	97,7
0,9	58,8	21,9	27,3	70,6	132,0	129,0	92,2	96,2	83,6
1,1	48,4	18,6	23,9	61,6	108,8	113,8	81,1	81,4	70,7
1,3	38,3	15,3	20,4	50,0	81,4	95,0	67,0	63,7	54,6
1,5	27,2	13,0	16,6	39,2	57,0	78,5	54,0	48,2	40,0
1,7	18,8	9,8	12,2	32,3	39,0	67,1	45,3	38,0	30,7
1,9	10,9	10,0	10,3	24,9	19,2	56,5	37,0	27,5	20,0
2,1	7,5	11,2	11,1	20,0	5,3	51,2	31,6	17,8	11,4
2,3	4,6	11,4	10,3	13,4	-6,2	38,3	22,8	8,0	3,6
2,5	1,4	9,2	8,3	8,3	-17,9	32,0	16,8	6,9	-3,6
2,7	-1,7	7,9	7,4	3,4	-25,0	23,6	10,6	-5,6	-8,8
2,9	-2,5	8,1	7,0	1,9	-27,7	20,3	8,3	-9,1	-10,9
3,1	-2,7	7,6	6,8	-0,4	-30,7	18,4	6,5	-9,5	-13,2
3,3	-3,3	8,7	7,6	-2,8	-34,8	11,1	2,2	-14,0	-16,3
3,5	-3,0	6,2	5,9	-1,3	-29,7	10,0	2,2	-13,4	-12,7
3,7	-2,4	5,2	6,1	-4,3	-29,4	6,4	-0,7	-14,6	-14,4
3,9	0,6	4,0	7,2	-1,9	-19,9	9,2	0,7	-8,7	-8,5
4,1	1,5	4,7	7,7	-6,4	-21,5	8,0	-1,8	-14,7	-13,3
4,3	2,2	3,4	4,4	-6,1	-20,6	13,4	-0,2	-12,6	-18,4
4,5	-10,2	10,9	2,9	-9,4	4,7	10,3	-4,1	-3,1	0,4

Таблица 2

Некоторые характеристики корреляционных функций

Уровень		Значение при нулевом расстоянии			Коэффициент межуровневой корреляции		
p_1	p_2	А	Б	В	А	Б	В
p_0	p_0	181	220 ¹	184			
p_0	850	132		131	0,97		0,94
p_0	500	136		144	0,71		0,69
850	850	101	99	105			
850	500	123	121	140	0,86	0,84	0,89
500	500	203	206	235			

Примечание. А — по данным автора, Б — по Л. С. Гандину и Т. И. Кузнецовой [5], В — по М. И. Фортус [10].

¹ Из работы [6], так как в [5] давление на уровне моря не исследовалось.

работы [10]. Значение $t(p_0, H_{850}, 0)$ получилось почти одинаковым в настоящей работе и в работе [10]. Значение же $t(p_0, H_{500}, 0)$ по нашим данным заметно меньше, коэффициент межуровневой корреляции несколько выше. Но значения t , относящиеся к H_{850} и H_{500} при нулевом расстоянии, близки к полученным в работе [5].

Полученные корреляционные функции были нормированы и аппроксимированы положительно определенными функциями. Автокорреляционные функции H_{1000}^{500} и T_0 аппроксимированы следующими выражениями:

$$\left. \begin{aligned} \mu(H_{1000}^{500}, H_{1000}^{500}, r) &= e^{-0,374r^{1,49}} J_0(0,94r) \\ \nu(T_0, T_0, r) &= e^{-0,667r^{1,38}} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

а соответствующая взаимная корреляционная функция — выражением

$$\rho(H_{1000}^{500}, T_0, r) = e^{-0,552r^{1,47}} \quad (7)$$

Эти функции приведены на рис. 3.

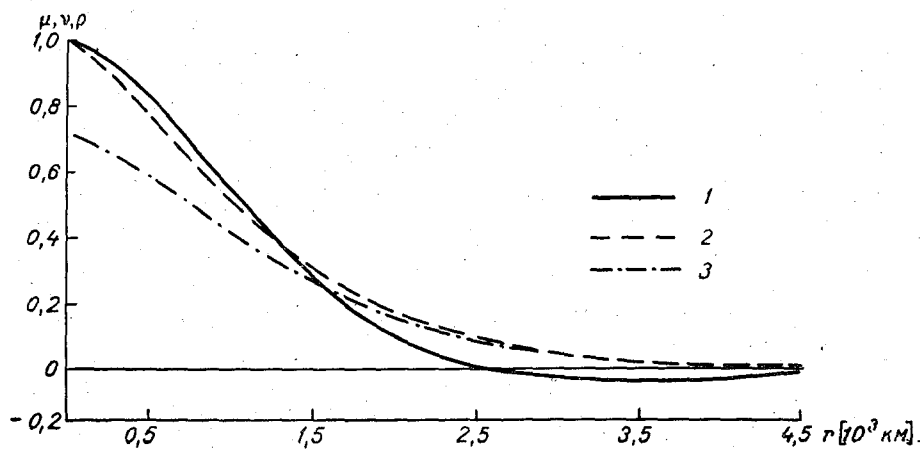


Рис. 3. Корреляционные функции относительного геопотенциала H_{1000}^{500} и температуры T_0 на уровне моря.

1 — автокорреляционная функция H_{1000}^{500} , 2 — автокорреляционная функция T_0 , 3 — взаимная корреляционная функция H_{1000}^{500} и T_0 .

Автокорреляционные функции p_0 , H_{850} , H_{500} и соответствующие взаимные корреляционные функции первоначально аппроксимировались различными выражениями. В этом случае при выполнении оптимального согласования система уравнений вида (3) оказалась плохо обусловленной. Как показано в работах [4], [5], [10], эта трудность может быть преодолена, если использовать единую аппроксимацию. Так, мы аппроксимировали автокорреляционные функции $\mu(p_0, p_0, r)$, $\nu(H_{850}, H_{850}, r)$ и взаимную корреляционную функцию $\rho(p_0, H_{850}, r)$ единой функцией

$$\mu_1(p_k, p_l, r) = e^{-0,210r^{1,37}} \quad (8)$$

и функции $\mu(p_0, p_0, r)$, $\nu(H_{500}, H_{500}, r)$ и $\rho(p_0, H_{500}, r)$ — единой функцией

$$\mu_2(p_k, p_l, r) = e^{-0,811r^{1,59}} J_0(0,65r) \quad (9)$$

Функции (8), (9) представлены на рис. 4.

3. Перейдем к рассмотрению результатов численных экспериментов по оптимальному согласованию полей.

а) Поле относительного геопотенциала H_{1000}^{500} согласовывалось с полем приземной температуры T_0 .

Расчеты выполнены для двух групп станций; каждая группа состоит

из девяти станций. На рис. 1 показана лишь первая из этих групп станций (группа I), вторая группа по расположению станций аналогична. Удаление станций каждой группы от контрольной станции составляет от 500 до 1400 км. Рассчитаны три варианта: в первом варианте использовались данные о T_0 на всех девяти станциях группы, включая контрольную; во втором — на всех станциях, кроме контрольной; в третьем варианте данные о T_0 отсутствовали, т. е. производилась оптимальная интерполяция без согласования. В каждом из трех вариантов число станций, дающих сведения об относительном геопотенциале H_{1000}^{500} , последовательно уменьшалось от восьми до нуля.

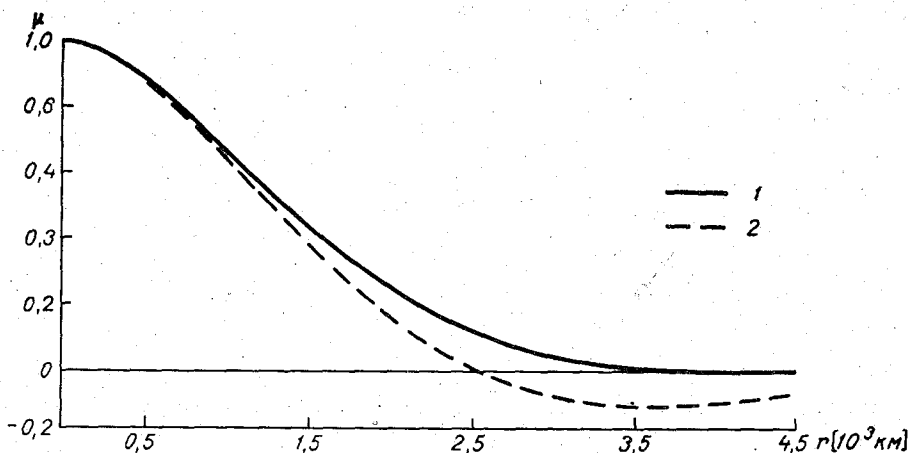


Рис. 4. Корреляционные функции давления на уровне моря ρ_0 , геопотенциалов H_{850} , H_{500} .

1 — автокорреляционные и взаимная корреляционная функции полей ρ_0 и H_{850} ; 2 — автокорреляционные и взаимная корреляционная функции ρ_0 и H_{500} .

Таблица 3

Средние квадраты ошибок E оптимального согласования поля H_{1000}^{500} с полем T_0

Число станций с H_{1000}^{500}	E_T						E_Φ					
	группа I			группа II			группа I			группа II		
	число станций с T_0											
	9	8	0	9	8	0	9	8	0	9	8	0
8	16	23	23	12	17	17	22	26	26	16	17	17
7	17	25	25	14	19	19	24	28	28	19	20	20
6	22	30	32	20	26	29	28	34	36	29	32	31
5	23	30	33	20	26	29	28	34	37	29	31	30
4	29	38	44	20	26	29	35	41	48	29	32	30
3	32	41	48	27	33	40	36	43	50	34	38	44
2	34	42	51	36	43	59	38	44	52	48	51	70
1	44	53	77	40	47	68	53	61	93	51	54	79
0	49	59	99	49	56	99	55	62	110	53	55	99

Предварительно для обеих групп вычислены средние квадраты теоретических ошибок $E_T = \epsilon m(\rho_h, \rho_h, 0)$. Значения E_T приведены в табл. 3. Из этой таблицы видно, что оптимальное согласование улучшает результаты анализа во всех рассмотренных случаях. Указанный эффект тем сильнее, чем меньше станций сообщают сведения о H_{1000}^{500} . Он осо-

бенно заметен, когда число таких станций равно трем и менее. Например, при единственной станции с данными о H_{1000}^{500} значение E_T уменьшается с 68 (гп. дкм)² при экстраполяции до $47-40$ (гп. дкм)² при согласовании.

Закономерности, выявленные при анализе теоретических ошибок, подтверждаются на фактическом материале. Значения фактических ошибок E_Φ , приведенные в табл. 3, вычислены для 220 случаев зимнего сезона с интервалом одни сутки. При этом использовалось соотношение

$$E_\Phi = \overline{(H_\Phi - H_c)^2}, \quad (10)$$

где H_Φ — фактическое значение на контрольной станции, H_c — согласованное (интерполированное) значение на той же станции.

б) Поля абсолютного геопотенциала уровней 850 и 500 мб согласовывались с полем давления на уровне моря p_0 . Предварительно были выполнены теоретические оценки успешности согласования H_{500} с полем H_{850} , причем использовалась корреляционная функция из работы [5]. Эти предварительные оценки дали вполне обнадеживающие результаты (табл. 4).

Таблица 4

Средние квадраты теоретических ошибок E_T оптимального согласования поля H_{500} с полем H_{850}

Число станций с H_{500}	Группа I			Группа II		
	число станций с H_{850}					
	9	8	0	9	8	0
8	12,7	26,9	27,3	8,9	18,7	19,0
7	13,3	28,1	31,0	9,8	19,8	21,5
6	16,8	31,7	39,6	13,0	24,3	34,7
5	17,1	32,1	40,6	13,3	24,5	35,6
4	22,0	38,7	63,9	13,6	24,7	35,7
3	25,2	41,9	72,1	20,9	32,1	59,1
2	28,0	44,5	79,9	33,6	44,8	104,5
1	46,1	62,6	147,5	40,0	51,0	126,4
0	61,2	77,7	206,0	60,0	71,3	206,0

При согласовании полей H_{850} и H_{500} с полем p_0 применялась описанная выше методика. Выборка состояла из 90 случаев для зимнего сезона, интервал между случаями был увеличен до двух суток. Первая группа станций такая же, как и в случае согласования H_{1000}^{500} с T_0 (группа I на рис. 1). Вторая группа изменена — она имитирует редкую сеть станций, что более близко к реальному положению станций над океанами (группа II на рис. 1). В первую очередь исключались станции, ближайšie к контрольной, а затем более удаленные. Результаты приведены в табл. 5 и 6.

Из таблиц видно, что теоретические и фактические ошибки хорошо согласуются.

4. Приведенные результаты показывают, что оптимальное согласование полей геопотенциала с полями давления и температуры на уровне моря обеспечивает заметный эффект повышения точности анализа высотных полей. Этот эффект в наибольшей степени характерен для плохо освещенных районов и, должно быть, особенно для океанических районов. Поэтому желательно дальнейшее исследование и внедрение такого

согласования в оперативную практику вместе с другими видами согласования (например, с прогностической информацией [3]) и уточнения информации.

Автор выражает благодарность Л. С. Гандину за руководство и помощь при выполнении настоящей работы.

Таблица 5

Средние квадраты ошибок E оптимального согласования поля H_{850} с полем p_0

Число станций с H_{850}	E_T						E_Φ					
	группа I			группа II			группа I			группа II		
	число станций с p_0											
	9	8	0	9	8	0	9	8	0	9	8	0
8	3,8	14,7	14,9	4,1	12,6	13,5	10,9	16,3	16,6	4,0	15,6	18,2
7	3,9	14,7	14,9	4,7	14,2	25,6	11,2	17,0	16,7	4,8	16,7	20,5
6	3,9	15,0	16,2	5,0	14,7	26,4	11,4	17,5	19,0	6,5	19,8	20,6
5	4,2	15,4	18,4	5,5	16,5	30,4	12,5	18,7	19,9	6,8	19,9	25,1
4	4,5	16,1	22,4	6,0	17,9	47,3	12,7	19,0	22,4	7,2	24,2	42,5
3	5,1	17,0	31,0	6,5	18,2	66,6	14,2	21,2	26,5	13,5	29,6	74,2
2	6,0	18,0	45,4	6,9	18,4	79,5	21,7	27,5	42,3	13,7	30,4	77,2
1	6,6	18,7	72,5	7,2	18,5	89,8	29,4	34,8	67,9	15,9	31,4	82,6
0	7,2	19,2	101,0	7,5	18,7	101,0	39,3	43,4	96,8	18,6	33,9	91,6

Таблица 6

Средние квадраты ошибок E оптимального согласования поля H_{500} с полем p_0

Число станций с H_{500}	E_T						E_Φ					
	группа I			группа II			группа I			группа II		
	число станций с p_0											
	9	8	0	9	8	0	9	8	0	9	8	0
8	17,8	29,0	30,1	13,3	17,3	17,9	16,0	24,3	25,0	33,2	44,3	55,9
7	18,1	29,7	30,1	28,5	35,3	49,6	16,5	25,1	25,1	33,4	45,4	56,6
6	19,7	31,6	32,8	29,5	36,4	51,0	21,1	31,2	31,8	33,9	47,8	57,0
5	21,5	33,3	35,7	33,9	42,8	59,4	23,0	32,9	34,1	37,1	53,6	65,8
4	25,1	37,8	43,2	53,3	63,7	97,8	35,7	44,5	46,9	67,7	90,3	120,7
3	34,4	47,1	61,6	75,8	85,8	144,5	49,5	59,1	60,3	116,0	135,1	222,9
2	50,9	63,8	93,6	89,7	98,9	172,4	64,8	74,3	97,0	127,2	144,5	227,8
1	79,4	92,2	153,2	97,0	106,1	189,1	113,6	124,5	177,5	136,4	150,8	236,6
0	103,3	116,2	203,0	103,3	112,5	203,0	145,0	156,4	234,5	145,9	159,5	246,2

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтенков В. П. Исследование статистической макроструктуры температуры воздуха. Тр. ГГО, вып. 165, 1964.
2. Гандин Л. С., Болтенков В. П. К методике исследования трехмерной структуры метеорологических полей. Тр. ГГО, вып. 165, 1964.
3. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеиздат, Л., 1963.
4. Гандин Л. С. Общая задача об оптимальной интерполяции и экстраполяции метеорологических полей. Тр. ГГО, вып. 168, 1965.
5. Гандин Л. С., Кузнецова Т. И. О пространственной статистической структуре поля геопотенциала. Тр. ГГО, вып. 168, 1965.

6. Г андин Л. С., Мелешко В. П., Мещерская А. В. О применении универсальных цифровых машин для исследования статистической структуры метеорологических полей. Тр. ГГО, вып. 143, 1963.
7. Машкович С. А. О повышении качества объективного анализа барического поля над районами с редкой сетью аэрологических станций. Тр. ММЦ, вып. 10, 1965.
8. Мелешко В. П., Гусева И. П. Расчет некоторых статистических характеристик для полей температуры и влажности. Тр. ГГО, вып. 165, 1964.
9. Петров А. А. Опыт экстраполяции аэрологических данных на верхние уровни с помощью ЭВМ. Тр. ММЦ, вып. 10, 1965.
10. Фортус М. И. Трехмерная пространственная структура поля геопотенциала. Тр. ГГО, вып. 165, 1964.
11. Фукс-Рабинович М. С. О повышении качества анализа поля геопотенциала над районами, мало освещенными исходной информацией. Метеорология и гидрология, № 5, 1964.
12. D ö s V. R., Eaton M. A. Upper-air analysis over ocean areas. Tellus, vol. 9, No. 2, 1957.

А. А. КОБЯКОВА, Л. В. РУХОВЕЦ

СХЕМА ОБЪЕКТИВНОГО АНАЛИЗА ПОЛЕЙ МЕТЕОЭЛЕМЕНТОВ НА ПОЛУШАРИИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СЕТКИ

Излагается алгоритм объективного анализа полей метеоэлементов для узлов произвольной регулярной сетки, основанный на применении метода оптимальной интерполяции.

Развитие схем объективного анализа в настоящее время идет как по пути увеличения точности самих методов, так и по пути увеличения объема анализируемой информации. Эти усовершенствования диктуются не только развитием работ в области краткосрочного прогноза погоды, но и разработкой численных моделей общей циркуляции атмосферы и долгосрочного гидродинамического прогноза погоды.

Указанные задачи требуют разработок схем объективного анализа, охватывающих территорию, по меньшей мере, всего северного полушария, позволяющих анализировать поля метеоэлементов на всех (или на большей части) стандартных уровнях в тропосфере и нижней стратосфере.

Для возможности использования схем анализа в сочетании с различными прогностическими моделями желательно, чтобы разрабатываемые схемы анализа обладали определенной универсальностью по отношению к выбору размеров области, для которой производится анализ, числа анализируемых уровней и расположения узлов сетки.

Наконец, при разработке схемы анализа необходимо учитывать и требование экономичности счета во времени.

Ясно, что требования универсальности и экономичности в известной степени противоречивы, однако выбор определенного компромиссного решения желателен, так как, по-видимому, нецелесообразно для каждой вновь разрабатываемой прогностической модели создавать специальную схему объективного анализа.

В излагаемой ниже схеме объективного анализа сделана попытка учесть указанные требования.

В основу схемы был положен метод оптимальной интерполяции, разработанный Л. С. Гандиным [1].

Практическая реализация этого метода была осуществлена С. Л. Белоусовым, И. А. Четвериковым [2], С. А. Машковичем [3]. Соответствующие программы нашли широкое применение как в исследовательской работе, так и в оперативной практике. Накопленный в настоящее время большой практический опыт по использованию этих программ позволил установить не только достоинства метода и соответствующих конкрет-

ных алгоритмов, его реализующих, но и выявить возможности упрощения этих алгоритмов в целях их экономизации.

В излагаемой схеме были реализованы следующие упрощения, которые привели к значительной экономии времени счета.

1. В схемах объективного анализа, основанных на методе оптимальной интерполяции, для каждого узла сетки осуществляется обычно поиск восьми влияющих станций.

Практическая проверка показала, что качество анализа не ухудшается, если число влияющих станций сократить до шести. Такая процедура уменьшает время поиска влияющих станций, в особенности над районами с редкой сетью, где станции 7 и 8, как правило, оказываются за пределами «радиуса корреляции». В районах же с густой сетью учет этих станций, по существу, не нужен и приводит лишь к излишнему сглаживанию.

Более того, если одна или несколько станций расположены очень близко к узлу, то нет необходимости в поиске даже остальных станций, дополняющих до шести.

В частности, в излагаемой схеме было принято, что если в квадрате размером 400×400 км², в котором расположен анализируемый узел, найдены три станции, то дальнейший поиск прекращается.

2. В программах объективного анализа поиск фиксированного числа станций осуществляется обычно независимо от того, на каком расстоянии от узла эти станции находятся. Между тем ясно, что поиск станций, отстоящих от узла на расстояниях, близких к радиусу корреляции и тем более превосходящих его, совершенно бессмыслен и только увеличивает время счета.

В излагаемой схеме поиск станций осуществляется лишь на расстояниях, не превосходящих 1800 км.

Следует отметить, что при существующей плотности сети аэрологических станций для некоторых точек, приходящихся, например, на акватории океанов, в пределах 1800 км не оказывается даже одной влияющей станции. В этом случае значение в узле принимается равным норме.

Разумеется, поиск влияющих станций за пределами 1800 км ничего не изменил бы, так как веса для этих станций были бы практически нулевыми.

3. В излагаемой схеме принят экономный способ хранения сведений об имеющейся за данный срок информации, предложенный Я. М. Хейфецом [4].

4. В связи с уменьшением числа влияющих станций до шести (а для части узлов это число оказывается еще меньшим) сокращается время счета не только из-за сокращения процедуры поиска, но и за счет решения при отыскании весов систем алгебраических уравнений более низкого порядка. (Кстати, некоторый выигрыш достигается за счет применения экономичного во времени метода решения систем алгебраических уравнений — метода квадратного корня. Этот метод требует меньшего числа операций, чем обычно применяемый метод Ершова.)

5. Поиск влияющих станций производится обычно с помощью квадратов, к которым «приписываются» станции. Время поиска существенно зависит от размеров этих квадратов. При использовании мелких квадратов время поиска увеличивается, но зато удается окружить анализируемый узел влияющими станциями более равномерно со всех сторон.

При использовании крупных квадратов для исключения возможного одностороннего окружения узла станциями приходится отыскивать

иногда большее число станций, чем это нужно для интерполяции, а затем дополнительно отбирать необходимое число станций, ближайших к узлу.

Известно [2], что для квадратов размером 300×300 км² максимальное количество станций, попадающих в квадрат, как правило, не больше двух. Для анализа на полушарии такие квадраты слишком мелки. Для квадратов же размером 600×600 км² максимальное число станций в одном квадрате возрастает до восьми [3]. Такие квадраты требуют применения дополнительной процедуры отбора, упомянутой выше.

Можно полагать, что размер квадрата 400×400 км² близок к оптимальному. Максимальное число станций, попадающих в такой квадрат, равно трем. (Для нескольких квадратов, в которых число станций оказалось равным четырем, ближайшие к границам станции были приспаяны к соседним квадратам.)

6. В предлагаемой схеме увеличено максимальное число полей, для которых производится одновременный анализ. Это число равно семи, что позволяет одновременно анализировать данные на всех стандартных уровнях от 1000 до 100 мб.

Перейдем теперь к описанию алгоритма, посредством которого производится интерполяция на узлы произвольной регулярной сетки.

В ряде схем объективного анализа [2], [3] процедура интерполяции начинается с выбора некоторого узла. Далее осуществляется поиск влияющих станций для этого узла, определение весов и непосредственно сама интерполяция. После этого аналогичная процедура повторяется для всех узлов, выбираемых в определенном порядке.

Такой способ удобен для реализации в том случае, когда вся информация со станций находится в оперативной памяти машины, так как для каждого узла приходится выбирать свою совокупность станций. Если же вся информация не размещается в оперативной памяти (в нашем случае нужно хранить информацию примерно о 700 станциях аэрологического зондирования с данными на семи уровнях в каждой из них), то возникает вопрос о способе поочередной выборки этой информации из неоперативной памяти в оперативную, который можно было бы использовать для произвольной сетки.

Для организации такой выборки пришлось отказаться от способа интерполяции «от узла к узлу».

Карта полушария покрывается квадратной сеткой со стороны около 400 км на 60° с. ш. Всего на карте полушария оказывается $60 \times 60 = 3600$ квадратов, причем часть из них выходит за обрез карты (см. рис. 1).

Информация, хранящаяся в неоперативной памяти, считывается в оперативную по полосам. Интерполяция производится по способу «от квадрата к квадрату». Это означает, что вначале выбирается первый квадрат, определяется, попал ли в него хотя бы один узел сетки. Если узлов в квадрате нет, то осуществляется переход к следующему квадрату, и т. д. Для первого из квадратов, в который попадает один или несколько узлов сетки, производится поиск влияющих станций. Для этой цели в оперативной памяти машины должна находиться информация, соответствующая некоторому количеству полос. Если учесть, что радиус корреляции для ряда метеорологических элементов близок к 2000 км, то в памяти машины достаточно хранить информацию для девяти полос.

После того, как произведена интерполяция для квадратов средней из девяти полос (т. е. пятой), информация первой полосы становится

ненужной, и возникает необходимость в считывании информации следующей, десятой полосы из неоперативной памяти и т. д.

Естественно, в начале программы вся информация, поступившая за данный срок, располагается в порядке следования квадратов и записывается на МБ по полосам. Для организации этой работы, а также последующего пополосного считывания информации и поиска влияющих станций удобным оказалось применение информационной таблицы, предложенной Я. М. Хейфецом [4].

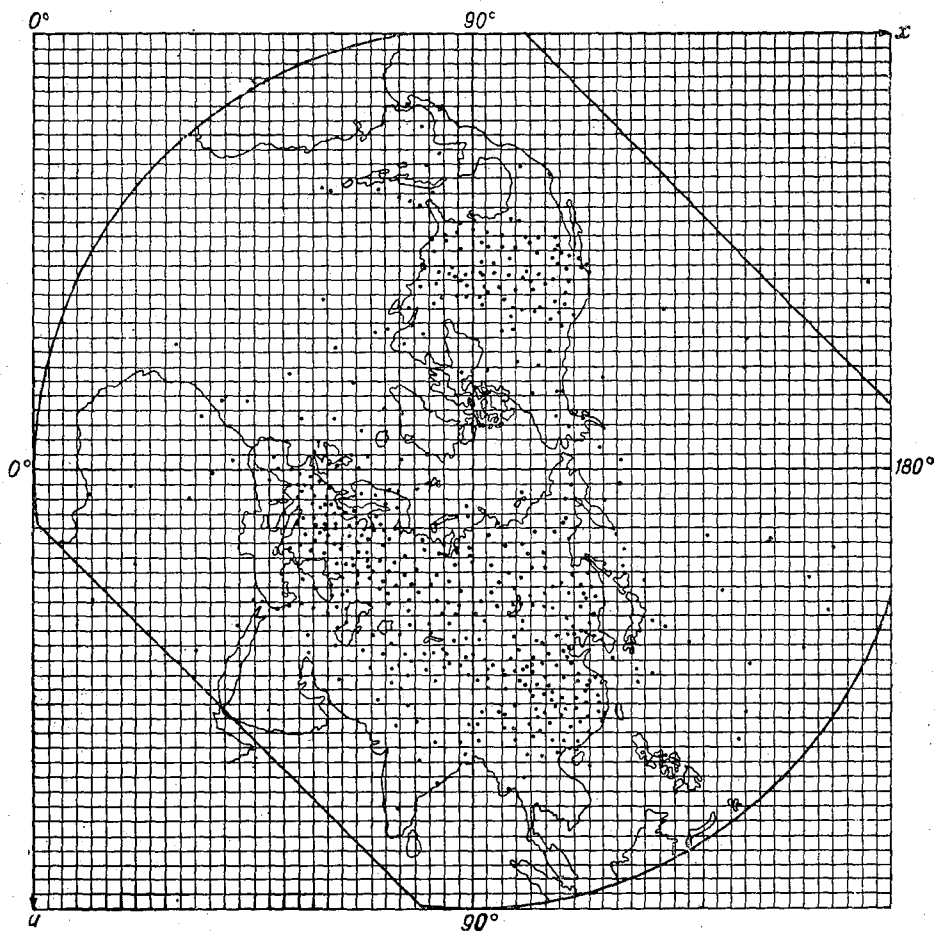


Рис. 1.

Эта таблица содержит в компактном виде сведения о числе станций в каждом квадрате и в каждой полосе. Так как квадрат содержит не более трех станций, то сведения о числе станций в квадрате можно выразить двумя двоичными разрядами. Таким образом информационная таблица для одной полосы содержит $60 \times 2 = 120$ двоичных разрядов. Вся информационная таблица требует $120 \times 60 = 7200$ двоичных разрядов. Число ячеек, занимаемое этой таблицей, зависит от разрядности сетки машины. Если разрядность сетки составляет 40 двоичных разрядов (ЭВМ «Урал-4»), то для записи информационной таблицы необходимо 180 ячеек.

Для проведения интерполяции в узлы произвольной регулярной сетки на полушарии вводится декартова система координат (x, y)

с началом координат, совпадающим с левым верхним углом квадратной сетки, и осями, идущими вдоль границ сетки (см. рис. 1).

Регулярность сетки означает, что переход от одного узла сетки к другому происходит в некоторой системе координат (p, q) с постоянными шагами δp и δq .

Предполагается, что известно, взаимно однозначное соответствие между координатами (p, q) и (x, y) :

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(p, q) \\ y &= f_2(p, q) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \varphi_1(x, y) \\ q &= \varphi_2(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

В частности, для широтно-долготной сетки, которая является регулярной в системе координат (λ, φ) (где φ — широта, λ — долгота), имеют место соотношения [5]:

$$\left. \begin{aligned} x &= x_0 - R \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2} \right) \cos \lambda \\ y &= y_0 + R \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} \right) \sin \lambda \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= -\operatorname{arctg} \frac{y - y_0}{x - x_0} \\ \varphi &= \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{R \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где (x_0, y_0) — координаты полюса, R — радиус Земли.

Как уже отмечалось выше, процесс интерполяции начинается с поиска первого квадрата, содержащего хотя бы один узел. Такая проверка производится при переходе к каждому следующему квадрату. Так как координаты узлов отыскиваются с помощью формул (1), то целесообразно в целях сокращения времени счета для конкретно выбранной сетки специально заранее указать те квадраты, которые содержат узлы.

Для этой цели в машину вводится бинарная последовательность, число двоичных разрядов которой равно числу квадратов. Наличие хотя бы одного узла в квадрате отмечается единицей в соответствующем разряде бинарной последовательности, отсутствие узлов — нулем. Просмотр такой последовательности позволяет сразу исключать из рассмотрения квадраты, не содержащие узлов.

Для записи бинарной последовательности, соответствующей $60 \times 60 = 3600$ квадратам, необходимо в случае 40-разрядной сетки иметь 90 ячеек.

Бинарная последовательность позволяет сократить время счета в случае анализа по ограниченной территории.

Разумеется, при переходе от одной сетки к другой бинарная последовательность должна быть изменена. В случае, если узел располагается очень близко к границе квадрата, так что трудно установить, в какой из двух квадратов он попадает, то в бинарную последовательность можно ввести две единицы, соответствующие этим квадратам. В процессе вычислений будет выбран нужный квадрат.

Укажем дальнейшие этапы процесса интерполяции.

а) После нахождения с помощью бинарной последовательности первого квадрата, заключающего один или несколько узлов сетки, определяются координаты этих узлов в декартовой системе (x, y) .

Для этой цели вычисляются прежде всего координаты центра квадрата (x_c, y_c) . Если принять длину стороны квадрата за единицу масштаба в системе (x, y) и пронумеровать квадраты подряд (слева направо и далее сверху вниз), то координаты центра квадрата легко определяются по его номеру.

б) С помощью (2) вычисляются координаты центра квадрата в системе (p, q) :

$$\begin{aligned} p_c &= \varphi_1(x_c, y_c), \\ q_c &= \varphi_2(x_c, y_c). \end{aligned}$$

в) Производится округление p_c и q_c до ближайших целых значений, кратных соответственно δp и δq , что позволяет определить ближайший к центру квадрата узел с координатами $(k\delta p, n\delta q)$. Однако найденный узел может, вообще говоря, и не лежать в выбранном квадрате, как это видно из рис. 2. На этом рисунке точка A — ближайший к центру квадрата (точка C) узел, не лежащий в этом квадрате; точка B — другой узел, попадающий в квадрат.

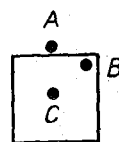


Рис. 2.

г) Чтобы установить, попал ли узел $(k\delta p, n\delta q)$ в выбранный квадрат, вычисляются координаты узла в системе (x, y) :

$$\left. \begin{aligned} x_{00} &= f_1(k\delta p, n\delta q) \\ y_{00} &= f_2(k\delta p, n\delta q) \end{aligned} \right\}$$

д) Проверяются неравенства:

$$\left. \begin{aligned} x_c - \frac{\Delta}{2} < x_{00} \leq x_c + \frac{\Delta}{2} \\ y_c - \frac{\Delta}{2} < y_{00} \leq y_c + \frac{\Delta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где Δ — длина стороны квадрата (в выбранном масштабе равная единице).

Если хотя бы одно из четырех записанных неравенств не выполняется, узел не принадлежит рассматриваемому квадрату. В этом или противном случае возникает необходимость найти другие узлы, принадлежащие выбранному квадрату (или убедиться, что таких узлов нет).

е) Для этой цели определяются:

$$\left. \begin{aligned} x_{ij} &= f_1[(k \pm i)\delta p, (n \pm j)\delta q] \\ y_{ij} &= f_2[(k \pm i)\delta p, (n \pm j)\delta q] \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где i и j выбираются в зависимости от максимального числа узлов, попадающих в один квадрат.

Для всех x_{ij} и y_{ij} проверяются неравенства (5). Если учесть, что в большинстве сеток координатные линии $p = \text{const}$, $q = \text{const}$ не обладают большой «извилистостью» в системе (x, y) , то поиск по формулам (6) и (5) всех узлов, попадающих в данный квадрат, может быть сокращен.

Действительно, пусть координатные линии удовлетворяют условию: если при движении вдоль любой из них в каком-либо направлении два крайних из трех последовательных узлов попадают в один квадрат, то тогда и средний узел попадает в тот же квадрат.

В этом случае увеличение i или j в (6) можно производить лишь до тех пор, пока выполняются неравенства (5). Если же одно из неравенств (5) нарушилось (т. е. найденный узел не попал в квадрат), дальнейший поиск узлов, расположенных вдоль выбранной координатной линии, в выбранном направлении прекращается.

ж) После определения координат всех узлов, расположенных в выбранном квадрате, производится поиск влияющих станций. Таким образом, поиск ведется одновременно для всех узлов, попадающих в выбранный квадрат. Для поиска используется методика, предложенная в [2], с теми изменениями, о которых шла речь выше, в пунктах 1, 2 и 4.

Далее, для каждого узла отдельно определяются веса станций [1] и производится интерполяция семи значений.

После этого программа циклически повторяется для последующих квадратов.

Интерполяция со станций на узлы сетки в большинстве схем производится, как известно, не для самих значений метеорологических элементов, а для их отклонений от норм. Для этой цели в памяти машины должны храниться значения норм, заданных, например, в центре квадратов.

Однако такое задание норм для семи метеорологических полей потребовало бы большой загрузки памяти. Поэтому было решено ограничиться заданием среднеширотных норм.

Перейдем к описанию блок-схемы программы (см. рис. 3а и 3б). Программа условно может быть разделена на две части.

Первая часть — вспомогательная, она производит предварительную обработку информации, введенной в машину.

Обработка состоит в перераспределении информации в соответствии со «словарем», находящимся в памяти машины. Словарь содержит индексы 691 станции аэрологического зондирования и их координаты в декартовой системе. Станции в словаре расположены в порядке следования квадратов. Первая часть программы производит также уплотнение информации и строит информационную таблицу.

Вторая часть программы — основная. С ее помощью осуществляется процесс поиска влияющих станций, нахождение весов, интерполяция и перераспределение результатов в том порядке, как это нужно для дальнейшего использования.

Этот последний блок меняется в зависимости от конкретного выбора сетки. Кроме того, для каждой сетки должны быть составлены бинарная последовательность и подпрограмма вычисления координат по формулам (1) и (2).

Изложенная схема была реализована на ЭВМ «Урал-4» для анализа метеорологических полей над северным полушарием с использованием широтно-долготной сетки, в которой узлы образуются пересечением меридианов и широт. Шаг сетки по широте и долготе был принят равным 5° .

На рис. 4 приводятся результаты объективного анализа по изложенной схеме. Для сравнения на рис. 5 представлены соответственно результаты синоптического анализа. (Следует отметить, что при построении этих карт было использовано сравнительно малое количество данных, приблизительно 300 телеграмм, что связано с ограниченным объемом информации, поступающей в СЗУГМС.)

Для выдачи результатов расчетов в комплект ЭВМ «Урал-4» входит алфавитно-цифровое печатающее устройство (АЦПУ), позволяющее выводить на печать 128 символов в строке. Это устройство было использовано для выдачи результатов анализа на полушарии, которое

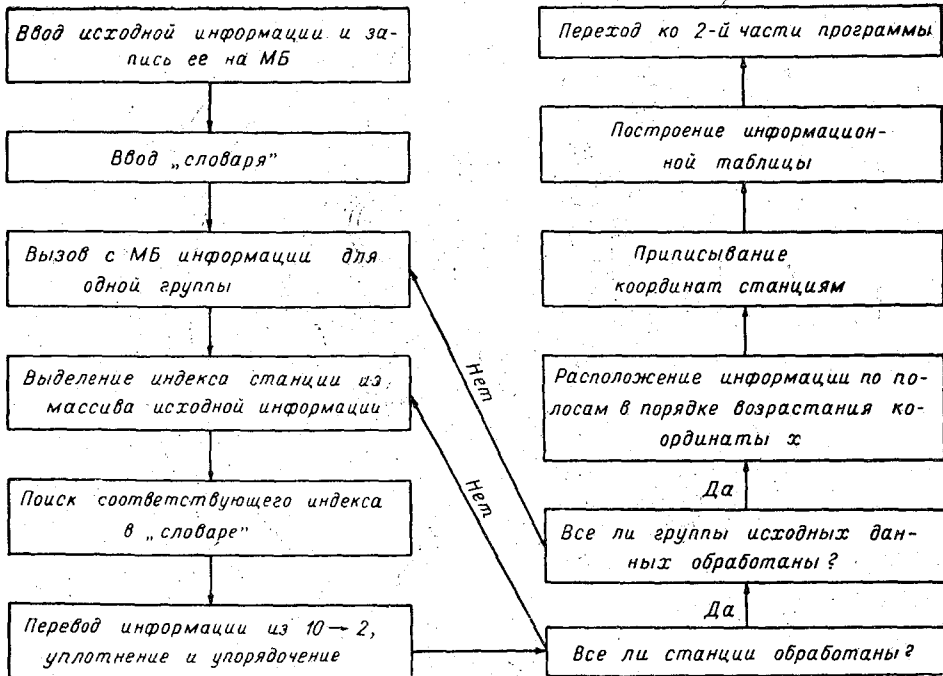


Рис. 3а. Блок-схема 1-й части программы. Формирование упорядоченного массива исходных данных и построение информационной таблицы.

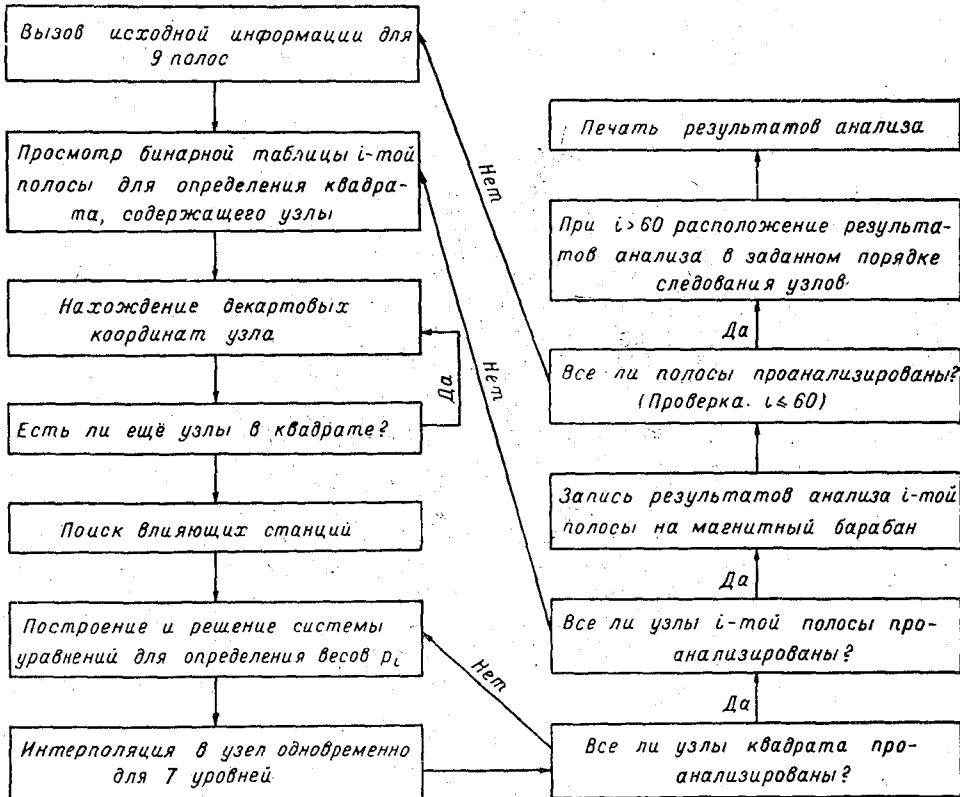


Рис. 3б. Блок-схема 2-й части программы. Основная программа.

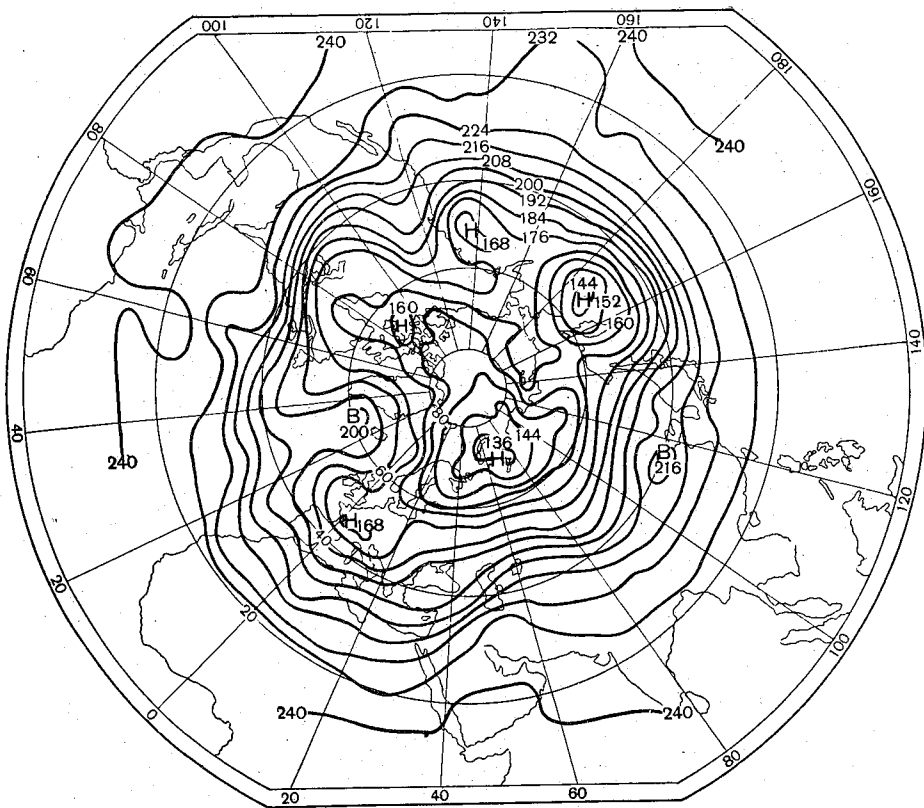


Рис. 4в. Объективный анализ поля AT_{200} , 3 часа 29 мая 1965 г.

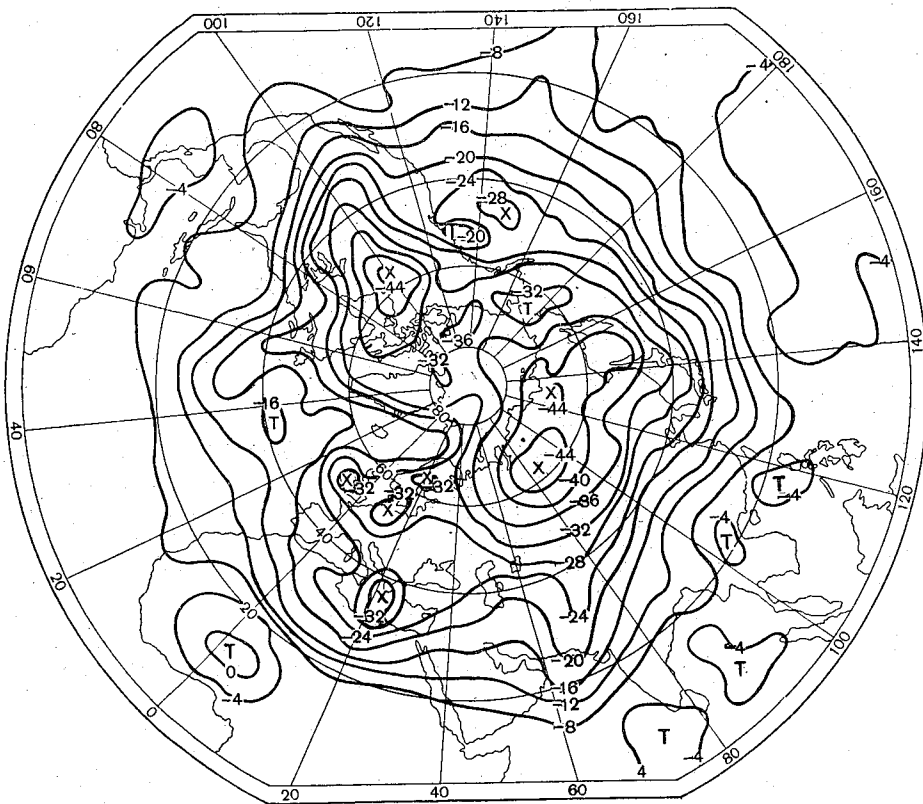


Рис. 4г. Объективный анализ поля температуры на поверхности 500 мб, 3 часа 27 января 1965 г.

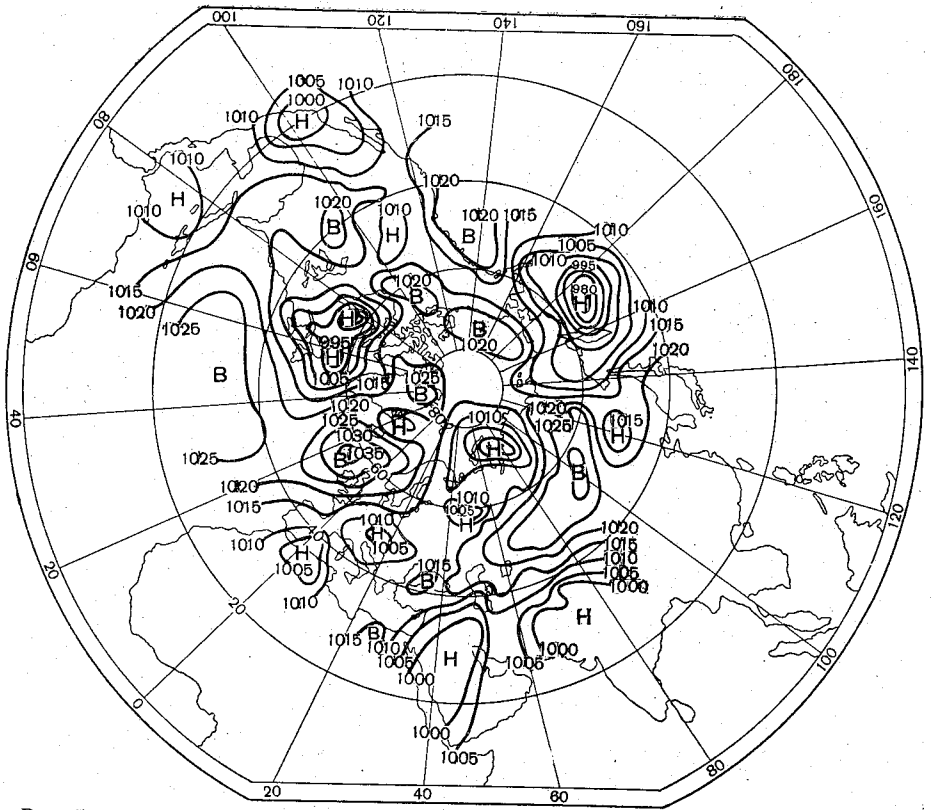


Рис. 5а. Синоптический анализ наземного поля давления, 3 часа 29 мая 1965 г.

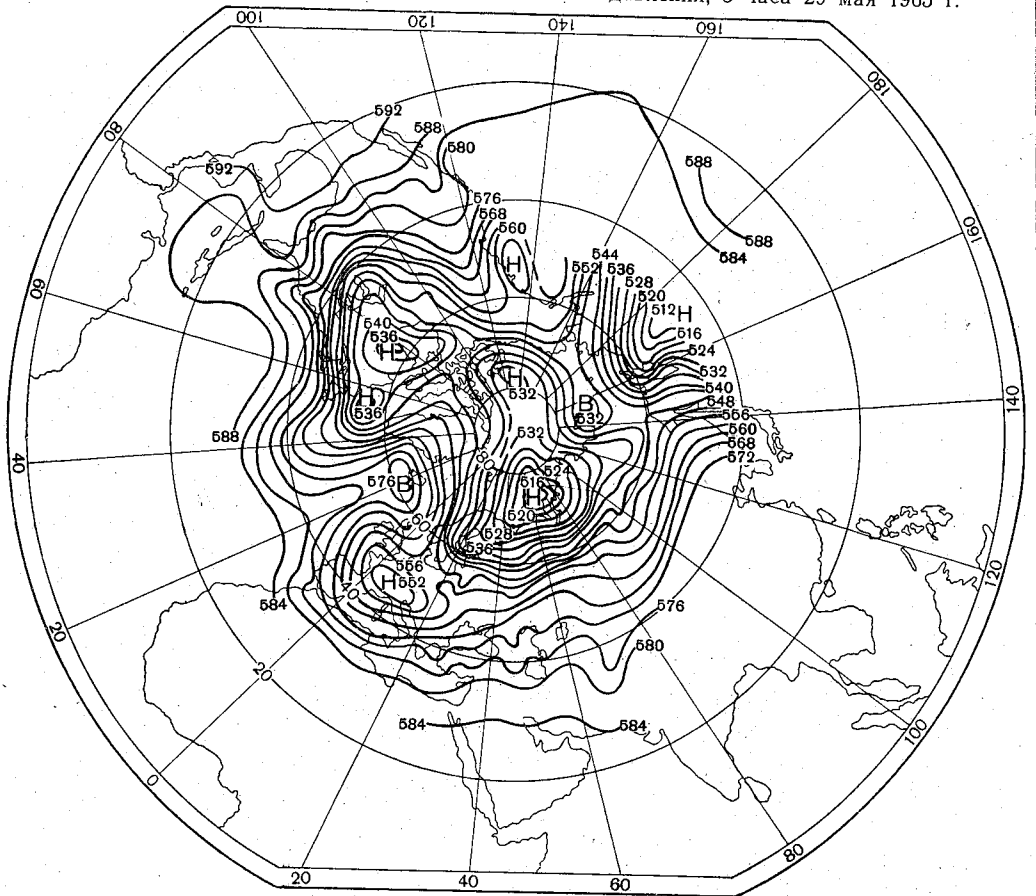


Рис. 5б. Синоптический анализ поля A_{T500} , 3 часа 29 мая 1965 г.

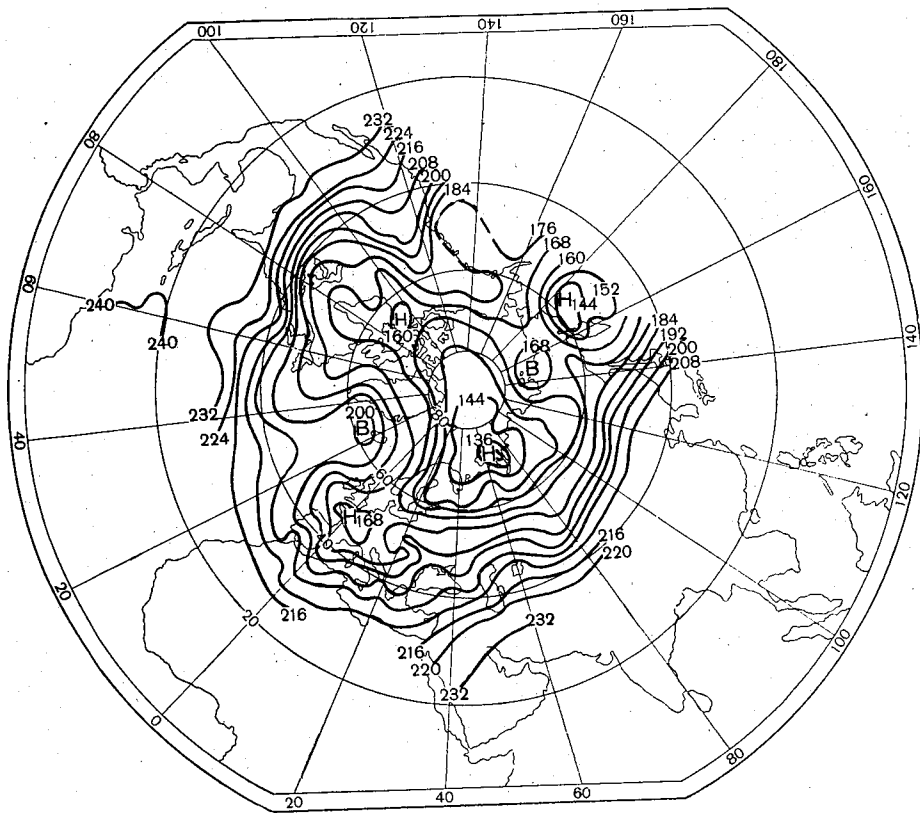


Рис. 5в. Синоптический анализ поля AT_{200} , 3 часа 29 мая 1965 г.

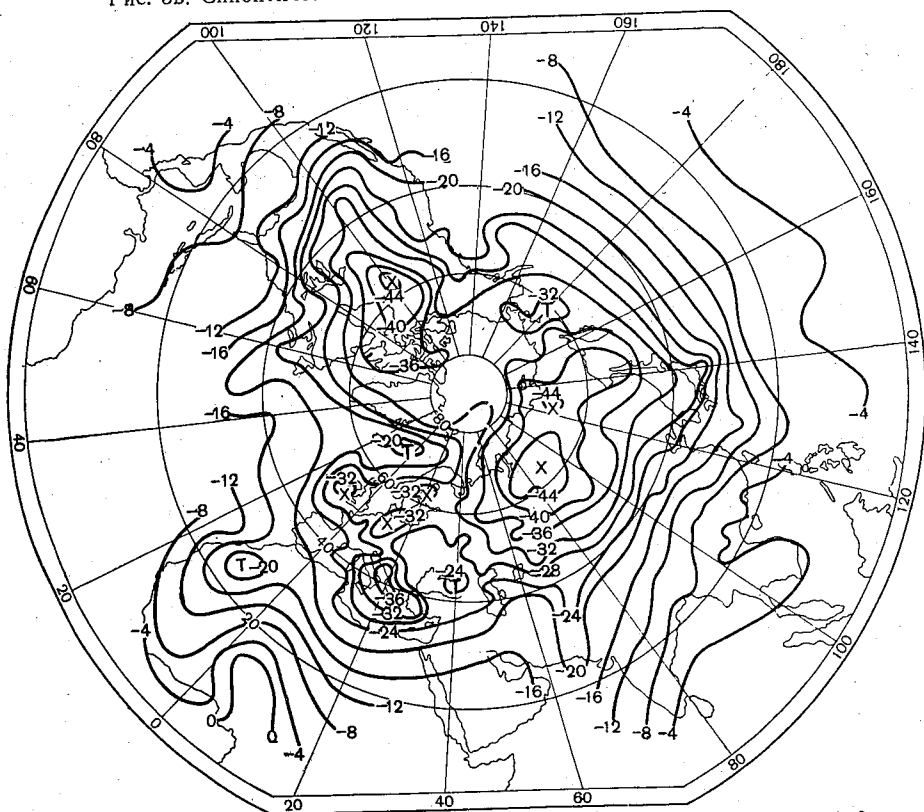


Рис. 5г. Синоптический анализ поля температуры на поверхности 500 мб, 3 часа 27 января 1965 г.

было разделено на три сектора, ограниченных меридианами: сектор I: 60° з. д. — 55° в. д. (Атлантика, Европа, Африка), сектор II: 60° в. д. — 175° в. д. (Азия, западная часть Тихого океана), сектор III: 180° в. д. — 65° з. д. (восточная часть Тихого океана, Северная Америка).

На рис. 6 представлена форма выдачи результатов анализа для одного из секторов, полученного с помощью АЦПУ.

В заключение рассмотрим вопрос о возможности использования изложенной программы в целях интерполяции со станций на узлы нерегулярной сетки. Такая задача возникает, например, при горизонтальном контроле данных методом оптимальной интерполяции [1], [6].

В этом случае должен быть задан список координат узлов выбранной нерегулярной сетки в системе (x, y) . (Поскольку в этом случае подпрограммы вычислений по формулам (1) и (2) не используются, список координат узлов может быть размещен в ячейках памяти, занятых указанными подпрограммами. Если список велик, то он может считываться по частям из неоперативного накопителя.) Список координат узлов составляется в порядке следования квадратов.

Интерполяция в этом случае также начинается с определения координат первого квадрата (x_c, y_c) , в котором, по сведениям бинарной таблицы, имеется хотя бы один узел, т. е. выполняется пункт а).

Так как координаты узлов расположены в порядке следования квадратов, то необходимость в выполнении пунктов б), в) и г) отпадает. Выполнения пункта д) [проверка неравенств (5)] не требуется только для самого первого узла. Для всех остальных узлов такая проверка необходима. Вместо выполнения пункта е) просто выбираются координаты следующего узла и проверяется по формулам (5), попадает ли этот узел в выбранный квадрат. Таким образом, путем последовательного перебора находят все узлы, попавшие в выбранный квадрат. Фиксируется также номер последнего в этой последовательности узла, чтобы при переходе к следующему квадрату выбор узлов начать со следующего узла после фиксированного.

Поиск влияющих станций и интерполяция производятся так же, как и для регулярной сетки, если узлы и станции не совпадают. Случай совпадения имеет место в упомянутой выше задаче горизонтального контроля. Единственное изменение в этом случае сводится к тому, что в процессе поиска для каждого узла выбрасывается та станция, координаты которой совпадают с координатами узла.

Способ задания координат узлов мог бы, вообще говоря, использоваться и для случая регулярной сетки. Это сократило бы время счета, так как не пришлось бы производить вычисления по формулам (1) и (2). Однако при большом числе узлов такой способ потребовал бы большой загрузки памяти машины.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеоздат, Л., 1963.
2. Четвериков И. А. Схема объективного анализа карт барической топографии методом оптимальной интерполяции. Труды ЦИП, вып. 102, 1962.
3. Машкович С. А. Об объективном анализе карт барической топографии северного полушария. Труды ММЦ, вып. 4, 1964.
4. Хейфец Я. М. Организация аэрологической информации для анализа. Труды ММЦ, вып. 7, 1965.
5. Гаур А. В. Математическая картография. Изд. ЛГУ, 1956.
6. Машкович С. А., Губанова С. И. Опыт применения методики объективного анализа карт барической топографии северного полушария. Труды ММЦ, вып. 10, 1965.

Л. С. ГАНДИН, Р. Л. КАГАН

ОБ ЭКОНОМИЧЕСКОМ ПОДХОДЕ К ПЛАНИРОВАНИЮ СЕТИ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ СТАНЦИЙ

Излагается способ выбора оптимальной густоты сети метеорологических станций, обеспечивающей максимальную экономическую эффективность сети. Предложенный способ используется для оценок применительно к сети агрологических станций.

1. Введение

Хорошо известно, что задача о наиболее рациональном размещении сети станций представляет собой, по существу, задачу экономики. При планировании сети необходимо стремиться к минимуму суммы затрат на содержание станций и убытков вследствие недостаточного знания метеорологических процессов при данной сети станций.

Весь опыт метеорологии показывает, что предельный, с указанной точки зрения, случай полного отсутствия метеорологических станций экономически невыгоден — убытки получаются слишком большими. Менее общеизвестно, но столь же несомненно, что экономически невыгоден и противоположный предельный случай — когда станции расположены бесконечно близко одна к другой и каждая из них производит свои наблюдения с абсолютной точностью. Стоимость такой идеализированной сети станций была бы чрезмерно велика и не оправдывалась бы уменьшением убытков, обусловленных метеорологическими причинами. Из сказанного следует, что в принципе существует оптимальная в экономическом смысле метеорологическая сеть, т. е. такая, для которой разность между экономическим эффектом ее деятельности и затратами на ее содержание максимальна.

Однако экономические эффекты использования метеорологической информации изучены еще чрезвычайно слабо. Поэтому до настоящего времени исследования по рациональной густоте сети станций производились на чисто метеорологической основе. Именно, постулировалось заранее, с какой минимальной точностью необходимо знать тот или иной метеорологический элемент всюду на некоторой площади, и на основании этого требования определялось максимальное допустимое расстояние между станциями, наблюдающими этот элемент. При такой постановке задача о рациональной сети станций теряет значительную часть реально присущего ей содержания. В частности, задача перестает быть экстремальной — любое увеличение густоты сети представляется при такой постановке полезным, хотя в действительности это не так.

Представляется поэтому целесообразным наметить хотя бы весьма грубую постановку задачи о рациональной с экономической точки зрения сети станций, постановку, которая, несомненно, будет уточняться по мере накопления сведений, так сказать, экономико-метеорологического характера.

Оценка стоимости станций не вызывает каких-либо принципиальных трудностей. Стоимость станции зависит как от выполняемой ею программы наблюдений и аппаратуры, с помощью которой эти наблюдения производятся, так и от местоположения станции (в хорошо или плохо обжитых районах суши, движущаяся станция на метеорологическом корабле, корабль погоды). Стоимость станции складывается из двух частей — стоимости ее организации и стоимости ее эксплуатации. Удобно не рассматривать эти два компонента отдельно, а распределить сумму, затрачиваемую на организацию станции, среди амортизационных средств. Поступая таким образом, мы будем в дальнейшем иметь дело только с одной характеристикой для станции данного типа — стоимостью c ее эксплуатации в течение единицы времени (например, года).

Вторая часть экономического баланса — уменьшение убытков благодаря наличию заданной сети станций — чрезвычайно трудна для оценки. При такой оценке необходимо иметь в виду использование метеорологической информации самыми различными потребителями; выгода, получаемая ими, определяется разными свойствами этой информации. Необходимо учитывать использование не только диагностической информации, но и данных прогноза, точность которых в свою очередь зависит от точности диагностической информации (но не только от нее). Необходимо, далее, обращать специальное внимание на погодные явления, особенно опасные для народного хозяйства, такие, как тайфуны, ураганы, засухи, заморозки и т. п. Необходимо, наконец, принимать во внимание научные исследования, экономический эффект которых в конечном счете отнюдь не мал, а успешность существенно зависит от использованной в них метеорологической информации.

Все эти вопросы весьма сложны и в настоящее время почти не изучены, а экономическая эффективность сети определяется не каким-либо одним из перечисленных аспектов, а всей их совокупностью. Поэтому ясно, что в настоящее время количественная постановка задачи о рациональной сети станций в экономическом плане возможна лишь при введении ряда более или менее произвольных допущений. Мы попытаемся сначала наметить общую постановку такой задачи при минимальном числе упрощающих предположений.

2. Общая постановка задачи

Будем рассматривать некоторую область, имеющую площадь S . Пусть в этой области расположено k станций. Для простоты будем считать, хотя это и не обязательно, что стоимость содержания каждой станции c одинакова, так что общая стоимость содержания станций на рассматриваемой площади равна

$$C = ck. \quad (1)$$

Введем теперь в рассмотрение критерий M неточности метеорологической информации в рассматриваемой области при наличии k станций на основании следующих трех требований.

1) Величина M равна нулю в указанном выше случае «идеальной» сети, т. е. когда все точки области являются станциями,

$$M|_{k=\infty} = 0. \quad (2)$$

2) Величина M зависит только от плотности сети станций k/S и от точности наблюдений на них. В дальнейшем будем временно считать точность наблюдений фиксированной, тогда M будет зависеть только от плотности сети. При этом имеется в виду, что взаимное расположение станций задано, меняется только среднее расстояние между ними. Проще всего с этой целью принимать, что станции образуют регулярную, например, квадратную или треугольную сетку точек. Такое предположение обычно вводится и при чисто метеорологическом подходе к задаче о рациональной густоте сети станций. Впрочем, это предположение также не является обязательным для дальнейших рассуждений.

3) Сумма B метеорологических убытков за единицу времени связана с критерием неточности M линейным соотношением

$$B = a'M + b, \quad (3)$$

где a' и b — константы. Подчеркнем, что это требование относится именно к выбору критерия M , а не к величине B , относительно которой, разумеется, никаких свойств постулировать нельзя.

Так как очевидно, что с ростом неточности информации увеличиваются и убытки, то константа a' положительна. Положительна и константа b , поскольку даже при идеальном качестве текущей информации существовали бы убытки, обусловленные, в частности, погрешностями прогнозов.

С уменьшением густоты сети до нуля критерий неточности информации M не растет до бесконечности, а стремится к некоторому предельному значению M_{\max} , обусловленному естественной изменчивостью метеорологических элементов. В этом случае максимальны и убытки B

$$B|_{k=0} = B_{\max} = a'M_{\max} + b. \quad (4)$$

Удобно вместо величины B рассматривать разность

$$U = B_{\max} - B, \quad (5)$$

представляющую собой уменьшение убытков вследствие наличия k станций. Согласно (3) — (5)

$$U = a'(M_{\max} - M), \quad (6)$$

так что константа b при этом выпадает из рассмотрения.

Очевидно, что при отсутствии станций $U=0$, а при идеальной сети

$$U = U_{\max} = a'M_{\max}.$$

Если зависимость M от числа станций k известна и если известен параметр a' , то мы можем представить, согласно (6), зависимость U от k . Для этого достаточно рассчитать зависимость $M_{\max} - M$ от k , а затем линейно преобразовать шкалу функции, перейдя тем самым по ней от $M_{\max} - M$ к U . При этом удобно линейно преобразовать и шкалу аргумента, перейдя по формуле (1) от k к суммарной стоимости C содержания станций.

Схематический вид такого графика представлен на рис. 1. На нем проведена также биссектриса координатного угла $U=C$.

Если бы при малых значениях аргумента C кривая $U(C)$ проходила ниже биссектрисы (рис. 1 a), то это означало бы, что наиболее

выгодно вообще не иметь станций — вывод, противоречащий, как уже упоминалось, всей метеорологической практике. Поэтому принимаем (рис. 1 б), что

$$\left. \frac{dU}{dC} \right|_{c=0} > 1. \quad (7)$$

Заметим, что при заданной зависимости M от k и заданной стоимости содержания каждой станции c условие (7) дает нижнюю границу возможных значений параметра a' . Это означает, что для того, чтобы было целесообразно иметь хотя бы одну станцию, необходимо, чтобы соответствующее уменьшение убытков превышало стоимость содержания станции. Практически это требование, разумеется, всегда выполняется применительно к основным метеорологическим элементам.

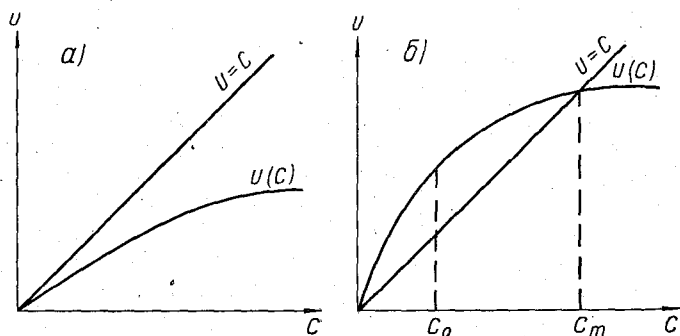


Рис. 1. Зависимость уменьшения убытков U от стоимости содержания сети C .

$$a) \left. \frac{dU}{dC} \right|_{c=0} < 1, \quad б) \left. \frac{dU}{dC} \right|_{c=0} > 1.$$

Но оно может служить существенным критерием при организации наблюдений над каким-либо «новым» элементом метеорологического режима.

Как уже отмечалось, с безграничным ростом k (а следовательно, и C) величина U стремится к конечному пределу U_{\max} . Поэтому в силу условия (7) при некотором значении $C=C_m$ кривая $U(C)$ пересечется с биссектрисой $U=C$. При такой густоте сети выигрыш за счет наличия информации в точности равен затратам на содержание сети, т. е. ситуация такова же, как в случае полного отсутствия сети. При $C > C_m$ затраты на сеть превосходят выигрыш за счет наличия информации. Поэтому экономически целесообразны только такие значения густоты сети, при которых $C < C_m$. При таких значениях C разность $U - C$ положительна. Наиболее целесообразна густота сети, соответствующая значению $C=C_0$, при котором разность $U - C$ максимальна. Сказанное и представляет собой путь оценки густоты сети станций, наиболее целесообразной с экономической точки зрения. Для практической реализации этого пути необходимо знать функцию $M(k)$, удовлетворяющую перечисленным требованиям, а также параметры a' и c .

3. Способ оценки аэрологической сети станций

Как уже отмечалось, экономическая выгода от наличия сети станций определяется совокупностью всех видов использования метеорологической информации. В этом смысле задача о рациональной сети

станций в экономической постановке является как бы нелинейной. Мы лишены, строго говоря, возможности рассматривать эту задачу отдельно применительно к какому-то одному виду наблюдений и одному виду использования этих наблюдений. Тем не менее на первых порах целесообразно поступать именно так.

Мы будем рассматривать только сеть аэрологических станций и интересоваться только наблюдениями над высотой (геопотенциалом) некоторой изобарической поверхности. При этом основной областью приложения будем считать использование информации о геопотенциале в численном прогнозе.

Следует сразу же подчеркнуть, что по сравнению с наземными наблюдениями аэрологические измерения стоят дороже и обладают меньшей областью использования. Однако подход к оценке аэрологической сети, по-видимому, проще именно в силу сравнительной ограниченности области приложения аэрологических данных.

Выбор критерия M , введенного ранее, по существу тесно связан с выбором параметра, оценивающего успешность численного прогноза и объективного анализа. В последнем случае многие авторы исходят из точности и описания реального поля самого геопотенциала. Нам представляется более правильным отправляться от точности, с какой получаются горизонтальные градиенты геопотенциала, или, что то же самое, от точности описания поля геострофического ветра. Действительно, успешность численного прогноза зависит в первую очередь от точности дифференциальных характеристик исходного поля, а не абсолютных значений. При использовании данных о геопотенциале для других целей основной интерес представляют также выводы относительно ветра.

Точность геострофического ветра использовалась во многих работах как критерий успешности численных прогнозов геопотенциала [3, 5]. Ф. Томпсон применил эту величину при теоретических оценках точности динамического анализа и для исследования предсказуемости атмосферных процессов [6], [7]. В работе Ю. М. Либермана [2] точность описания градиента геопотенциала применялась к задаче о рациональном размещении сети аэрологических станций, при чисто метеорологической постановке этой задачи. В этой работе рассматривалась точность, с которой определяется конечно-разностный эквивалент производной. Дальнейшие исследования показали, однако, что точность представления полей производных можно улучшить, если пользоваться так называемыми формулами оптимального численного дифференцирования, дающими наилучший в статистическом смысле результат. Поэтому естественно отправляться от точности не конечных разностей, а производных.

Именно, примем в качестве критерия M , введенного выше, средний квадрат ошибки определения первой производной от геопотенциала. Под словом «средний» здесь имеется в виду результат двойного осреднения — статистического и по площади S рассматриваемой области. Подчеркнем, что осреднению по площади подвергается не средняя квадратическая ошибка, а ее квадрат. Точно так же формула (3) предполагается выполняющейся для среднего квадрата ошибки и, следовательно, не выполняющейся для корня квадратного из него. Основания для такого предположения являются общими для метода наименьших квадратов и, грубо говоря, сводятся к тому, что увеличение средней ошибки на некоторую величину по сравнению с каким-либо ее значением должно входить с большим весом, чем уменьшение ее на такую же величину.

Независимо от всего сказанного, предположение, что введенная указанным путем величина M удовлетворяет условию (3), является, разумеется, более или менее произвольной гипотезой. Строго говоря, мы можем утверждать лишь следующее. Во-первых, мы не видим веских оснований, заставляющих с самого начала отвергнуть указанную гипотезу. Во-вторых, мы не можем указать иного пути определения величины M , при котором соотношение (3) представлялось бы более обоснованным.

Опишем методику расчетов.

Пусть в n точках известны значения отклонений H'_i геопотенциала H_i от средних климатических значений \bar{H}_i , измеренные с некоторыми ошибками δ_i ,

$$\tilde{H}'_i = H'_i + \delta_i. \quad (8)$$

Производную $\frac{\partial H'}{\partial x}$ от H' по некоторой координате x в некоторой точке O будем разыскивать в виде линейной комбинации наблюдаемых величин (8)

$$\left(\frac{\partial H'}{\partial x}\right)_0 \approx \sum_{i=1}^n p_i \tilde{H}'_i, \quad (9)$$

где весовые множители p_i определим из требования, чтобы средний квадрат ошибки приближенного равенства (9)

$$E = \left[\left(\frac{\partial H'}{\partial x}\right)_0 - \sum_{i=1}^n p_i \tilde{H}'_i \right]^2 \quad (10)$$

был минимален. Ошибки δ_i будем считать случайными в том смысле, что ошибки в различных точках не коррелируют ни между собой

$$\overline{\delta_i \delta_j} = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ \overline{\delta_i^2} & j = i \end{cases} \quad (11)$$

ни с истинными значениями геопотенциала и его производной

$$\overline{H_i \delta_j} = 0, \quad \overline{\left(\frac{\partial H'}{\partial x}\right)_0 \delta_j} = 0. \quad (12)$$

Подставив (9) и (8) в (10) и учитывая (11) и (12), найдем

$$E = \left(\frac{\partial H'}{\partial x}\right)_0^2 - 2 \sum_{i=1}^n p_i \overline{\left(\frac{\partial H'_i}{\partial x}\right)_0 H'_i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_i p_j \overline{H'_i H'_j} + \sum_{i=1}^n p_i^2 \overline{\delta_i^2}. \quad (13)$$

Будем, простоты ради, считать дисперсию геопотенциала \bar{H}' одинаковой во всех пунктах наблюдения

$$\overline{H_i'^2} = \overline{H'^2}, \quad (14)$$

и разделим на нее все члены равенства (13). Вводя обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta_i^2}{H'^2} &= \eta_i; & \frac{H'_i H'_j}{H'^2} &= \rho_{ij} \\ \frac{1}{H'^2} \left(\frac{\partial H'}{\partial x} \right)_0 H'_i &= \omega_{0i} \\ \frac{1}{H'^2} \left[\left(\frac{\partial H'}{\partial x} \right)_0 \right]^2 &= D_0 \\ \frac{E}{H'^2} &= \varepsilon \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

получим

$$\varepsilon = D_0 - 2 \sum_{i=1}^n \rho_i \omega_{0i} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \rho_i \rho_j \rho_{ij} + \sum_{i=1}^n \rho_i^2 \eta_i. \quad (16)$$

Необходимым и достаточным условием минимума ε по всем ρ_i является равенство нулю частных производных $\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho_i}$, что на основании (16) приводит к системе n линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n \rho_{ij} \rho_j + \eta_i \rho_i = \omega_{0i} \quad (17)$$

для определения n величин ρ_i . Заметим, что матрица системы (17) не отличается от соответствующей матрицы для обычной оптимальной интерполяции [1]. Используя равенство (17), можно записать формулу (16) в весьма простом виде

$$\varepsilon = D_0 - \sum_{i=1}^n \rho_i \omega_{0i}. \quad (18)$$

Величины ρ_{ij} (15) представляют собой коэффициенты корреляции между истинными значениями геопотенциала в соответствующих точках. Известно, что корреляционную функцию геопотенциала можно для не очень больших расстояний с большой точностью принять однородной и изотропной. Это означает, что величины ρ_{ij} можно считать зависящими только от расстояния между точками с номерами i и j .

При этом условии величины ω_{0i} и D_0 весьма просто выражаются через корреляционную функцию геопотенциала $\mu(r)$. В самом деле, имеем (см. рис. 2):

$$\begin{aligned} \omega_{0i} &= \frac{1}{H'^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} H'_i \frac{H'_A - H'_0}{\alpha} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left(\frac{H'_i H'_A}{H'^2} - \frac{H'_i H'_0}{H'^2} \right) = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha} \left[\mu \left(\sqrt{r_{0i}^2 + \alpha^2} - 2r_{0i}\alpha \cos \theta_i \right) - \mu(r_{0i}) \right] = -\mu'(r_{0i}) \cos \theta_i; \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} D_0 &= \frac{1}{H'^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{H'_A - H'_0}{\alpha} \right)^2 = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\alpha^2} [2 - 2\mu(\alpha)] = -\mu''(0). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь через $\mu'(r)$ и $\mu''(r)$ обозначены производные от корреляционной функции μ и учтено, что $\mu'(0) = 0$. Равенства (19) и (20) позволяют определить все величины, входящие в соотношения (17) и (18). После

этого из системы (17) находятся весовые множители p_i , а затем по формуле (18) квадрат ε относительной ошибки определения производной.

4. Некоторые количественные оценки

Для выполнения конкретных расчетов необходимо задание корреляционной функции геопотенциала $\mu(r)$. Существуют различные аппроксимации ее. Некоторые из них, давая разумные результаты при r порядка сотен километров, при $r=0$ не обеспечивают существования второй производной $\mu''(0)$ и не удовлетворяют условию $\mu'(0)=0$. Ясно, что для наших целей такие аппроксимации непригодны. Мы воспользовались формулой, предложенной М. И. Юдиным [4].

$$\mu(r) = (1 + qr)e^{-qr} \quad (21)$$

и удовлетворяющей указанным условиям. Заметим, что реальные автокорреляционные функции геопотенциала различных изобарических поверхностей имеют области отрицательных значений при расстояниях, превышающих 2000 км, в то время как аппроксимация (21) дает всюду положительные значения μ . Практически формула (21) плохо описывает поведение реальных корреляционных функций начиная с расстояния около 1500 км. Но столь большие расстояния не представляют существенного интереса для задачи о рациональном размещении сети станций, что и оправдывает применение аппроксимации (21) в наших оценках.

По данным М. И. Юдина, для геопотенциала поверхностей 500 и 300 мб $q=0,98$, если измерять r в тысячах километров. В наших расчетах для

простоты принято $q=1,00$. Впрочем, результаты расчетов применимы при любых q , если полагать, что в качестве единицы расстояния r берется q^{-1} .

При расчетах предполагалось, что станции образуют регулярную квадратную сетку; шаг этой сетки мы будем обозначать d . Вычислялось среднее значение ε величины ε в квадрате Q , образованном соседними станциями (см. рис. 3).

В небольшой серии предварительных вычислений варьировалось количество станций n , данные которых учитывались при вычислении ε .

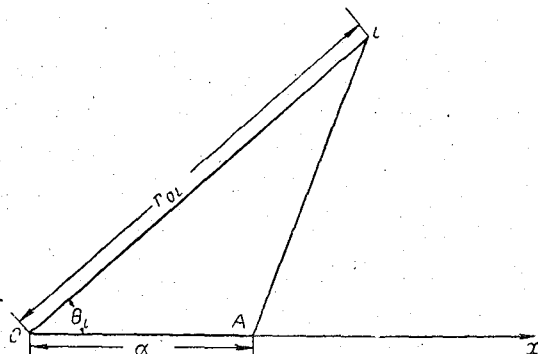


Рис. 2. К выводу формул (19) и (20).

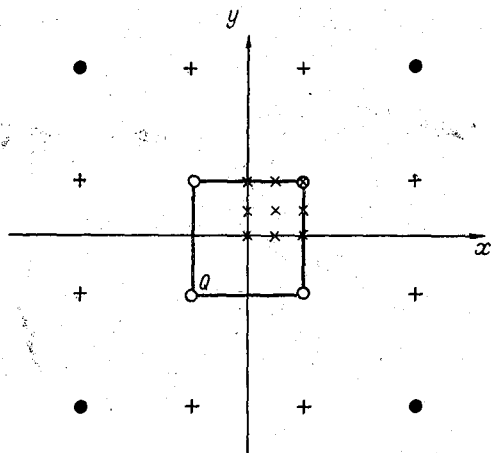


Рис. 3. Схема размещения пунктов для вычисления производной.

Именно, принималось $n=4$ (только угловые точки квадрата Q , светлые кружки на рис. 3), $n=12$ (включались станции, помеченные на рис. 3 прямыми крестиками) и $n=16$ (включались еще четыре станции, помеченные темными кружками). Эти вычисления показали, что при переходе от $n=4$ к $n=12$ величина ε несколько уменьшается, в то время как дальнейшее увеличение n до 16 практически не меняет величины ε . Поэтому во всех последующих расчетах количество влияющих станций было фиксировано и равно 12.

Оценке подвергалась величина ε применительно к производной $\frac{\partial H}{\partial x}$ (см. рис. 3). Из соображений симметрии очевидно, что эта же оценка верна и для производной по перпендикулярному направлению. По той же причине достаточно осреднять ε не по всей площади Q , а по одному квадранту. Количество точек внутри квадранта, для которых проводились вычисления, варьировалось в другой серии предварительных расчетов. Результаты их показали, что распределение ε является достаточно гладким, что позволяет ограничиться вычислениями для небольшого числа точек внутри квадранта. Практически оказывается безразличным, каким образом производить осреднение ε по квадранту — результаты являются очень близкими и мало отличаются от значения ε в центральной точке квадранта. Поэтому во всех дальнейших расчетах величина ε вычислялась для девяти точек, указанных косыми крестиками на рис. 3, и в качестве ε принималось среднее арифметическое из этих девяти значений.

Мера ошибки наблюдений η_i принималась одинаковой на всех станциях ($\eta_i = \eta$). Расчеты производились для четырех значений η ; 0, 0,01; 0,02 и 0,05. Применительно к геопотенциалу поверхности 500 мб это со-

Таблица 1

Зависимость средней меры ошибки первой производной ε от расстояния между станциями d и от меры ошибок измерения η

$d \cdot 10^{-3}$ км	η			
	0,00	0,01	0,02	0,05
0	0,000	1,000	1,000	1,000
0,05	0,048	0,190	0,266	0,424
0,10	0,096	0,192	0,228	0,305
0,15	0,143	0,223	0,255	0,312
0,20	0,169	0,274	0,285	0,338
0,25	0,224	0,285	0,315	0,367
0,30	0,277	0,317	0,344	0,395
0,35	0,320	0,351	0,375	0,422
0,40	0,360	0,386	0,406	0,435
0,50	0,437	0,454	0,468	0,504
0,60	0,506	0,519	0,530	0,557
0,70	0,570	0,578	0,587	0,608
0,80	0,625	0,632	0,638	0,656
0,90	0,673	0,679	0,685	0,699
1,00	0,718	0,722	0,726	0,737
1,10	0,755	0,758	0,761	0,770
1,20	0,787	0,790	0,792	0,800
1,30	0,814	0,816	0,819	0,825
1,40	0,837	0,839	0,841	0,847
1,50	0,857	0,859	0,860	0,865

ответствует примерно значениям средней квадратической ошибки наблюдений: 0; 1,5; 2,0 и 3,5 дкм. В широких пределах варьировалось расстояние d между соседними станциями.

В табл. 1 приводятся вычисленные таким образом значения средней меры ошибок расчета производной ε . Вычисления были выполнены Г. Х. Хатамкуловым на электронной вычислительной машине «Урал-4» по специально составленной им программе.

Из табл. 1 видно, что монотонное убывание погрешности определения производных со сгущением сети станций (убыванием d) происходит лишь при $\eta=0$, т. е. при отсутствии ошибок измерения. В реальных случаях, когда ошибки имеют место, существует такое оптимальное расстояние между станциями, которое обеспечивает минимум погрешности. Величина оптимального расстояния и соответствующее значения погрешности зависят от меры ошибок измерения, увеличиваясь при росте ее.

Так, оптимальное расстояние составляет около 70 км при $\eta=0,01$, около 100 км при $\eta=0,02$ и около 120 км при $\eta=0,05$. Исходя даже из этих соображений, независимо от затрат на организацию и содержание станций, очевидна невыгодность большого сгущения сети станций. Учитывая же эти затраты, мы можем получить более четкие количественные характеристики эффективности сети.

Примем, согласно сказанному выше, для площади S $M=\bar{\varepsilon}$. Тогда $M_{\max}=1$. Заметим, что это справедливо в том случае, когда используются оптимальные конечно-разностные формулы, получаемые путем решения системы (17). При использовании обычных конечно-разностных формул погрешности при малых шагах сетки d могут быть существенно больше единицы.

Таким образом, имеем

$$U = a'(1 - \bar{\varepsilon}) = aS(1 - \bar{\varepsilon}). \quad (6')$$

Напомним, что $a' = aS$ представляет собой сумму ежегодной экономии, которая может быть достигнута за счет использования численного прогноза для территории S .

Так как число станций k связано с расстоянием между ними d по формуле $k = \frac{S}{d^2}$, экономическая эффективность определится разностью

$$F(d) = U - C = aS [1 - \varepsilon(d)] - \frac{cS}{d^2}. \quad (22)$$

Величина c по-прежнему представляет собой стоимость годового содержания станции с учетом амортизации основных средств.

При практических расчетах удобно ввести относительные величины $c' = \frac{c}{a}$ и $F' = \frac{F}{Sa}$.

В результате имеем

$$F'(d) = 1 - \varepsilon(d) - \frac{c'}{d^2}. \quad (23)$$

Задаваясь конкретными значениями c' , нетрудно определить зависимость экономической эффективности сети $F'(d)$ от густоты сети. Такие расчеты были выполнены для различных значений относительной стоимости аэрологических станций c' .

В качестве примера на рис. 4 приводится зависимость $F'(d)$ для случая, когда $c' = 0,03$ и $\eta = 0$. Из рис. 4 видно, что при большой

густоте сети (малых d) величина F' является отрицательной. Это значит, что содержание сети не окупает себя.

Обозначим d_m расстояние, при котором $F'=0$. В данном случае $d_m \approx 190$ км. При увеличении d величина F' становится положительной и растет по абсолютной величине до некоторого оптимального значения d , которое обозначим d_0 . В нашем случае $d_0 \approx 430$ км. Размещение станций на таких расстояниях обеспечивает наилучшее соотношение между стоимостью содержания сети и экономией за счет повышения точности информации об аэрологических полетах. При $d > d_0$ экономическая эффективность аэрологической сети уменьшается.

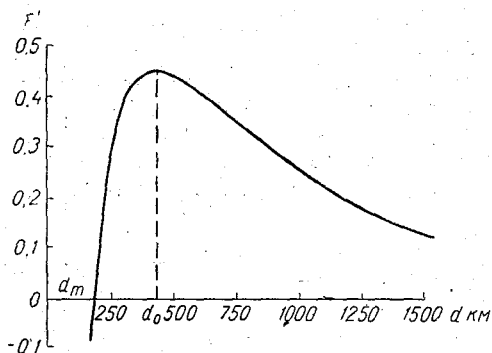


Рис. 4. Зависимость экономической эффективности аэрологической сети от расстояния между станциями ($\eta=0$, $c'=0,03$).

так и d_0 . Экономическая эффективность аэрологической сети при этом повышается. Заметим, что убывание c' не обязательно связано с уменьшением затрат на содержание станции. Оно может быть связано и с увеличением величины a , например, за счет усовершенствования численных методов прогноза. При возрастании относительной стоимости станции c' величина d_0 также возрастает.

Данные типа приведенных в табл. 2 могут использоваться для различного рода оценок. Так, зная оптимальную густоту сети при одном значении величины c' , можно оценить, какова должна быть оптимальная густота при другом значении c' . Пусть, например, оптимальное расстояние между станциями в обжитых районах составляет около 500 км. Из табл. 2 следует, что такой густоте соответствует величина $c' \approx 0,045$. Учитывая, что стоимость содержания аэрологических станций в труднодоступных арктических районах, а также корабельных аэрологических станций примерно в 2—2,5 раза больше, получаем для таких районов $c' \approx 0,100$. Этому соответствует оптимальное расстояние между станциями порядка 700 км.

Сравнение данных, относящихся к различной точности измерений на отдельных пунктах аэрологического зондирования, показывает, что значительное повышение точности измерения давления сравнительно немного повышает точность определения градиентов давления, а следовательно, и экономической эффективности сети.

Так, уменьшение меры ошибок в 5 раз, от $\eta=0,05$ до $\eta=0,01$, обеспечивает повышение экономической эффективности приблизительно на 15% в предположении, что стоимость содержания станции остается прежней. В действительности же, при прочих равных условиях, такое повышение точности может быть достигнуто лишь путем резкого повышения точности, а значит, и стоимости оборудования зондирования. Это приведет

Обращает на себя внимание то обстоятельство, что даже при оптимальном размещении сети величина F' не достигает 0,5, т. е. составляет менее половины от теоретически максимально возможной экономии.

В табл. 2 приводятся величины d_m и d_0 , а также величины $F'_0 = F'(d_0)$ для различных значений параметров c' и η .

Из данных табл. 2 следует, что с уменьшением относительной стоимости содержания станции c' уменьшается как d_m ,

Таблица 2

Характеристики экономической эффективности аэрологической сети

	γ	c'						
		0,010	0,015	0,020	0,030	0,045	0,060	0,100
$d_m \cdot 10^3$ км	0,00	0,10	0,13	0,15	0,19	0,23	0,29	0,39
	0,01	0,11	0,14	0,16	0,20	0,25	0,30	0,40
	0,02	0,12	0,14	0,17	0,21	0,25	0,30	0,41
	0,05	0,12	0,15	0,17	0,22	0,26	0,31	0,43
$d_0 \cdot 10^3$ км	0,00	0,27	0,33	0,37	0,43	0,48	0,56	0,70
	0,01	0,31	0,36	0,39	0,45	0,50	0,58	0,71
	0,02	0,32	0,37	0,40	0,46	0,52	0,59	0,72
	0,05	0,34	0,39	0,42	0,47	0,55	0,61	0,73
F_0'	0,00	0,62	0,56	0,52	0,46	0,39	0,33	0,23
	0,01	0,57	0,53	0,49	0,43	0,38	0,31	0,22
	0,02	0,55	0,50	0,47	0,42	0,36	0,30	0,21
	0,05	0,50	0,46	0,43	0,38	0,33	0,28	0,19

к увеличению величины c' . В результате такое повышение точности зондирования может оказаться связанным с уменьшением экономической эффективности сети. Отсюда следует, что в настоящее время важнейшим направлением рационализации аэрологической сети с точки зрения численных методов прогноза погоды является не повышение точности аэрологического зондирования, а организация аэрологических станций в районах с редкой сетью.

Следует еще раз подчеркнуть, что изложенные выше соображения являются в значительной мере ограниченными хотя бы из-за того, что вопрос об экономической эффективности аэрологической сети рассматривался лишь с точки зрения потребностей численного прогноза погоды, вне связи с другими ограничениями аэрологических данных. Приведенные количественные результаты получены путем использования некоторых допущений, правильность которых нельзя считать доказанной. Поэтому они представляют главным образом методический интерес.

Не вызывает однако сомнения, что планирование рациональной сети станций должно экономически обосновываться. Разработка вопроса об экономической эффективности мероприятий по метеорологическому обслуживанию народного хозяйства является важной стороной деятельности гидрометеорологической службы и ей должно уделяться значительно большее внимание.

ЛИТЕРАТУРА

- Гандин Л. С. Объективный анализ метеорологических полей. Гидрометеиздат, Л., 1963.
- Либерман Ю. М. О точности определения конечных разностей при анализе поля геопотенциала по данным существующей аэрологической сети. Изв. АН СССР, сер. физ. атм. и океана, т. 1, № 11, 1965.
- Ситников И. Г. К вопросу о численном прогнозе геопотенциала на среднем уровне. Труды ЦИП, вып. 126, 1963.
- Юдин М. И. Некоторые закономерности структуры поля геопотенциала. Труды ГГО, вып. 121, 1961.
- Staff members. Joint Numerical Weather Prediction Unit. One year of operational numerical weather prediction. Bull. Am. Met. Soc., Vol. 38, No. 6, 1957.
- Thompson Ph. D. Uncertainty of initial state as a factor in the predictability of large scale atmospheric flow patterns. Tellus, Vol. 9, No. 3, 1957.
- Thompson Ph. D. A dynamical method of analysing meteorological data. Tellus, Vol. 13, No. 3, 1961.

К СТАЦИОНАРНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОБЩЕЙ ЦИРКУЛЯЦИИ АТМОСФЕРЫ

Изложена постановка решения системы уравнений гидротермодинамики атмосферы на всей сфере земного шара. Для решения задачи применяется инвариантный способ решения дифференциальных уравнений, который основывается на инвариантности уравнений относительно вращений. В связи с этим в решении применяется аппарат обобщенных сферических функций, основанный на теории представлений группы вращений трехмерного пространства. Полученное решение может быть использовано для получения стационарной картины циркуляции при заданном притоке тепла.

Математическое изучение общей циркуляции атмосферы позволит выявить основные физические закономерности движения атмосферы. Кроме того, разработка математических моделей общей циркуляции является одним из этапов построения общей теории долгосрочного прогноза погоды гидродинамическими методами.

При моделировании атмосферной циркуляции возникают трудности из-за необходимости учета притоков тепла от излучения и фазовых переходов воды в атмосфере, которые надо вводить в уравнение и в краевые условия задачи. В данной работе приток тепла от фазовых превращений воды в атмосфере рассматриваться не будет. Будем считать лучистый приток тепла заданным во всей толще атмосферы по всему земному шару. Тогда атмосферная циркуляция может быть описана с помощью уравнений гидротермодинамики, при решении которых возникают математические трудности, связанные с нелинейностью дифференциальных уравнений и трехмерностью задачи. Для того чтобы по возможности точно описать атмосферную циркуляцию, надо как можно точнее ввести в задачу приток тепла. Поэтому возникает необходимость создания метода решения задачи, который позволили бы при минимально возможных затратах машинного времени провести расчет циркуляции атмосферы по всей сфере земного шара при достаточно детальном учете притока тепла.

Для процессов планетарного масштаба нелинейные члены в уравнениях движения на порядок меньше членов для составляющих геострофического ветра. В связи с этим нелинейный перенос в уравнениях движения может быть отброшен. Так как мы рассматриваем стационарную задачу, то в уравнениях отбрасываем производные по времени. В связи с тем, что влияние макротурбулентности в процессах планетарного масштаба может быть большим, оставляем во всех уравнениях члены, выражающие турбулентный перенос в атмосфере. Также оставляем члены,

описывающие вертикальный турбулентный перенос, который особенно важен в пограничном слое атмосферы. В данной работе решение проводится для постоянного коэффициента турбулентного перемешивания по вертикали, но обобщение на случай переменного по высоте коэффициента турбулентности не представляет существенных затруднений. В уравнении притока тепла оставляем члены нелинейного переноса.

В последние годы наметилась тесная связь математических теорий гидромеханики с теорией непрерывных групп и их представлений. Теория групп позволяет найти методы интегрирования уравнений гидродинамики, которые было бы практически невозможно разработать другим путем. Решение задачи математической физики, уравнения которой инвариантны относительно некоторой группы, может быть существенно упрощено, так как в таких уравнениях можно разделить переменные. Теория представлений групп позволяет учитывать свойство инвариантности уравнений математической физики. Это существенно облегчает процесс разыскания собственных функций операторов.

Выразим температуру через геопотенциал с помощью уравнения статики, записанного в изобарической системе координат, и запишем уравнения гидротермодинамики атмосферы в изобарическо-сферической системе координат:

$$rp^2 \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial p^2} + rp \frac{\partial v_\theta}{\partial p} + b \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + b \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{b}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \varphi^2} - \frac{2b \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - b \frac{v_\theta}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -2v_\varphi \omega \cos \theta; \quad (1)$$

$$rp^2 \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial p^2} + rp \frac{\partial v_\varphi}{\partial p} + b \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \theta^2} + b \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial v_\varphi}{\partial \theta} + \frac{b}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{2b \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \varphi} - b \frac{v_\varphi}{\sin^2 \theta} - \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = 2v_\theta \omega \cos \theta; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial p} + \frac{1}{a} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{a \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg} \theta}{a} = 0; \quad (3)$$

$$\eta p \left(p^2 \frac{\partial^3 \Phi}{\partial p^3} + 3p \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) + \mu p \left(\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta^2 \partial p} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial p} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2 \partial p} \right) - \delta p \left(v_\theta \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta \partial p} + \frac{v_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi \partial p} \right) + \tau \left[(\sigma - \nu) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \nu p \frac{\partial^2 \Phi}{\partial p^2} \right] = \frac{R\bar{T}}{pe_p} \varepsilon. \quad (4)$$

Здесь $r = \frac{g^2 k_z}{R^2 \bar{T}^2}$; $b = \frac{k_s}{a^2}$; $\eta = \frac{g^2 k_z}{R^2 \bar{T}^2}$; $\mu = \frac{k_s}{a^2 R}$; $\sigma = \frac{A}{c_p}$; $\delta = \frac{1}{aR}$; $\nu = \frac{1}{R}$; $v_\theta, v_\varphi,$

τ — компоненты скорости по осям координат θ, φ, p ; Φ — геопотенциал, \bar{T} — средняя температура, a — радиус земного шара, ω — угловая скорость вращения Земли, k_z — коэффициент турбулентного перемешивания по вертикали, k_s — коэффициент турбулентного перемешивания по горизонтали, R — газовая постоянная для сухого воздуха, c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении, A — термический эквивалент работы, ε — приток тепла.

Для $v_\theta, v_\varphi, \tau$ и Φ на поверхности Земли можно задать однородные краевые условия, т. е.

$$v_\theta|_{p=P} = v_\varphi|_{p=P} = \tau|_{p=P} = 0; \quad \Phi|_{p=P} = 0, \quad (5)$$

где P — давление на уровне моря.

Обобщение на случай неоднородных краевых условий тривиально. Неоднородные краевые условия могут быть сведены к однородным, если перевести краевые условия в свободный член уравнения, заменив искомую функцию на другую искомую функцию плюс некоторая известная функция, удовлетворяющая заданным неоднородным краевым условиям.

На верхней границе атмосферы просто считаем v_θ , v_φ , τ и Φ ограниченными при $p=0$.

Таким образом, модель сведена к задаче Дирихле для уравнений (1)–(4) при однородных краевых условиях (5).

«Двигателем» в модели будет приток тепла ϵ , а влияние подстилающей поверхности должно быть включено в ϵ , так как краевое условие для температуры отсутствует.

Будем проводить интегрирование уравнений (1)–(4) по всей толще атмосферы от $p=P$ до $p=0$ и по всей сфере земного шара. Это позволяет исключить из рассмотрения боковые граничные условия.

Решение задачи разбиваем на две части: 1) выражение v_θ , v_φ , τ через Φ ; 2) решение уравнения (4) относительно Φ .

Для решения первой части задачи применим инвариантный способ решения дифференциальных уравнений. Так как решение уравнений ведется на сфере, то следует искать решение задачи в виде выражения, инвариантного относительно вращений.

Пусть g — произвольное вращение, T_g — представление группы вращений. Уравнения называются инвариантными относительно вращений, если при преобразовании $x' = gx$ независимых переменных и при соответствующем преобразовании $\psi' = T_g \psi$ искомых функций система не меняется [2].

Можно показать, что если в уравнениях (1)–(2) отбросить члены, выражающие силу Кориолиса, то уравнения (1)–(3) будут инвариантны относительно вращений. Уравнения (1)–(2) будут инвариантны относительно вращений также при постоянном параметре Кориолиса. Но учет переменного параметра Кориолиса необходим для физической корректности задачи. Поэтому необходимо члены, выражающие силу Кориолиса, заменить рядом по функциям, инвариантным относительно вращений.

Ищем решение задачи в виде рядов по обобщенным сферическим функциям, которые инвариантны относительно вращений [2]. Введем комбинации компонент скорости ветра, разлагающиеся по обобщенным сферическим функциям:

$$V = -v_\varphi - iv_\theta; \quad U = v_\varphi - iv_\theta. \quad (6)$$

Тогда, преобразуя уравнения (1) и (2), получим следующие два уравнения относительно V и U :

$$rp^2 \frac{\partial^2 V}{\partial p^2} + rp \frac{\partial V}{\partial p} + b \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{b}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + b \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{2ib \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{b}{\sin^2 \theta} V + \frac{i}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = -2\omega i \cos \theta V; \quad (7)$$

$$rp^2 \frac{\partial^2 U}{\partial p^2} + rp \frac{\partial U}{\partial p} + b \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{b}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + b \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{2ib \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{b}{\sin^2 \theta} U + \frac{i}{a} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) = 2\omega i \cos \theta U. \quad (8)$$

Из уравнения неразрывности (3) получим

$$\frac{\partial \tau}{\partial p} + \frac{i}{2a} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta V \right) + \frac{i}{2a} \left(\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta U \right) = 0. \quad (9)$$

Решения уравнений (4), (7)–(9) ищем в виде рядов по обобщенным сферическим функциям:

$$V(p, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^{(V)}(p) \sum_{n=-l}^l \beta_{l,n} T_{1n}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right); \quad (10)$$

$$U(p, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^{(U)}(p) \sum_{n=-l}^l \alpha_{l,n} T_{-1n}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right); \quad (11)$$

$$\tau(p, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^{(\tau)}(p) \sum_{n=-l}^l \zeta_{l,n} T_{0n}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right); \quad (12)$$

$$\Phi(p, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l^{(\Phi)}(p) \sum_{n=-l}^l \chi_{l,n} T_{0n}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right). \quad (13)$$

Здесь T_{mn}^l — обобщенные сферические функции.

Так как функции $f_l^{(V)}(p)$, $f_l^{(U)}(p)$ и $f_l^{(\tau)}(p)$ удовлетворяют одним и тем же однородным краевым условиям, то можно взять их одного вида. Произвольность подбора этих функций допускается произвольностью подбора функций, инвариантных относительно вращений. Найдем эти функции такими, чтобы они удовлетворяли следующему уравнению:

$$p^2 \frac{d^2 y(p)}{dp^2} + p \frac{dy(p)}{dp} + \lambda^2 p^2 y(p) = 0. \quad (14)$$

Уравнение (14) есть уравнение Бесселя. Общий интеграл уравнения Бесселя имеет вид

$$y(p) = c_1 J_0(\lambda p) + c_2 Y_0(\lambda p).$$

$Y_0(\lambda p)$ не ограничена вблизи значения $p=0$, поэтому $c_2=0$. Чтобы решение было не тривиальным, нужно считать $c_1 \neq 0$. Тогда из граничного условия $y(p)=0$ следует, что $J_0(\lambda p)=0$, т. е. λp есть корень функции $J_0(\lambda p)$.

$$\lambda_n p = \mu_n,$$

где μ_n — n -й положительный корень функции $J_0(\mu)$. Тогда

$$f_l^{(V)}(p) = J_0 \left(\frac{\mu_n}{p} p \right); \quad f_l^{(U)}(p) = J_0 \left(\frac{\mu_n}{p} p \right); \quad f_l^{(\Phi)}(p) = c_{\Phi} J_0 \left(\frac{\mu_n}{p} p \right); \quad (15)$$

c — значение геопотенциала при $p=0$.

Пусть

$$\frac{df_l^{(\tau)}(p)}{dp} = J_0 \left(\frac{\mu_n}{p} p \right),$$

тогда

$$f_l^{(\tau)}(p) = \int_p^p J_0 \left(\frac{\mu_n}{p'} p' \right) dp'. \quad (16)$$

Записав правые части уравнений (7) и (8) следующим образом:

$$\begin{aligned} -2r\omega i \cos \theta V &= -r\lambda^2 p^2 V + (r\lambda^2 p^2 V - 2r\omega i \cos \theta V); \\ 2\omega i \cos \theta U &= -r\lambda^2 p^2 U + (r\lambda^2 p^2 U + 2r\omega i \cos \theta U), \end{aligned}$$

разложим выражения, стоящие в скобках, в ряды по функциям рядов (10) и (11) соответственно, учтя соотношение (15). Системы функций в рядах (10) и (11) являются полными и ортогональными в области $(0 \leq p \leq P; 0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$. Это следует из того, что обобщенные сферические функции представляют собой полную ортогональную систему в области $(0 \leq \theta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$, а функции Бесселя составляют полную ортогональную систему в промежутке $(0 \leq p \leq P)$. В связи с этим для разложения в ряд по системам функций рядов (10) и (11) будут справедливы формулы для коэффициентов Фурье. Если функцию $F(p, \theta, \varphi)$ разлагаем в ряд по функциям рядов (10) и (11), то коэффициенты Фурье для ряда

$$F = \sum_{k=1}^n J_0(\lambda_k p) \sum_{n=-k}^k a_{k,n} T_{mn}^k \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right)$$

будут:

$$a_{k,n} = \frac{\int_0^P \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F J_0(\lambda_k p) \overline{T_{mn}^k} p \sin \theta d\theta d\varphi dp}{\int_0^P \int_0^{2\pi} \int_0^\pi J_0^2(\lambda_k p) T_{mn}^k \overline{T_{mn}^k} p \sin \theta d\theta d\varphi dp},$$

где $\overline{T_{mn}^k}$ есть величина комплексно-сопряженная с T_{mn}^k .

В связи с вышесказанным получаем:

$$\begin{aligned} r\lambda^2 p^2 V - 2\omega i \cos \theta V &= \sum_{l=0}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_l}{P} p\right) \sum_{n=-l}^l \Omega_{l,n} T_{1n}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right); \\ r\lambda^2 p^2 U + 2\omega i \cos \theta U &= \sum_{l=0}^{\infty} J_0\left(\frac{\mu_l}{P} p\right) \sum_{n=-l}^l \gamma_{l,n} T_{-1n}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{l,n} &= \lambda_l^2 \beta_{l,n} \frac{r \int_0^P J_0^2\left(\frac{\mu_l}{P} p\right) p^3 dp}{\int_0^P J_0^2\left(\frac{\mu_l}{P} p\right) p dp} - \\ &- 2\omega i \beta_{l,n} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_{1n}^l \overline{T_{1n}^l} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_{1n}^l \overline{T_{1n}^l} \sin \theta d\theta d\varphi}, \\ \gamma_{l,n} &= \lambda_l^2 \alpha_{l,n} \frac{r \int_0^P J_0^2\left(\frac{\mu_l}{P} p\right) p^3 dp}{\int_0^P J_0^2\left(\frac{\mu_l}{P} p\right) p dp} + \\ &+ 2\omega i \alpha_{l,n} \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_{-1n}^l \overline{T_{-1n}^l} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_{-1n}^l \overline{T_{-1n}^l} \sin \theta d\theta d\varphi}. \end{aligned}$$

Ввиду того, что уравнения (1) — (3) линейны, подставляем в них по одному члену рядов (10) — (13):

$$\begin{aligned} & \beta_{l,n} \left[r p^2 \frac{d^2 f_l^{(V)}(p)}{dp^2} + r p \frac{d f_l^{(V)}(p)}{dp} \right] T_{1n}^l + \\ & + b \beta_{l,n} f_l^{(V)}(p) \left[\frac{\partial^2 T_{1n}^l}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T_{1n}^l}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T_{1n}^l}{\partial \varphi^2} - \frac{2i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial T_{1n}^l}{\partial \varphi} - \right. \\ & \left. - \frac{T_{1n}^l}{\sin^2 \theta} \right] + \alpha_{l,n} \frac{i}{a} f_l^{(\Phi)}(p) \left[\frac{\partial T_{0n}^l}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial T_{0n}^l}{\partial \varphi} \right] = \\ & = -\lambda_l^2 \beta_{l,n} p^2 f_l^{(V)}(p) T_{1n}^l + \Omega_{l,n} f_l^{(V)}(p) T_{1n}^l; \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & \alpha_{l,n} \left[r p^2 \frac{d^2 f_l^{(U)}(p)}{dp^2} + r p \frac{d f_l^{(U)}(p)}{dp} \right] T_{-1n}^l + \\ & + b \alpha_{l,n} f_l^{(U)}(p) \left[\frac{\partial^2 T_{-1n}^l}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T_{-1n}^l}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T_{-1n}^l}{\partial \varphi^2} + \right. \\ & \left. + \frac{2i \cos \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial T_{-1n}^l}{\partial \varphi} - \frac{T_{-1n}^l}{\sin^2 \theta} \right] + \alpha_{l,n} \frac{i}{a} f_l^{(\Phi)}(p) \left[\frac{\partial T_{0n}^l}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial T_{0n}^l}{\partial \varphi} \right] = \\ & = -\lambda_l^2 \alpha_{l,n} p^2 f_l^{(U)}(p) T_{-1n}^l + \gamma_{l,n} f_l^{(U)}(p) T_{-1n}^l; \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} & \zeta_{l,n} \frac{d f_l^{(V)}(p)}{dp} T_{0n}^l + \frac{i}{2a} f_l^{(V)}(p) \left[\frac{\partial T_{1n}^l}{\partial \theta} + \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial T_{1n}^l}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta T_{1n}^l \right] \beta_{l,n} + \\ & + \frac{i}{2a} f_l^{(U)}(p) \left[\frac{\partial T_{-1n}^l}{\partial \theta} - \frac{i}{\sin \theta} \frac{\partial T_{-1n}^l}{\partial \varphi} + \operatorname{ctg} \theta T_{-1n}^l \right] \alpha_{l,n} = 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Воспользуемся следующими рекуррентными формулами для обобщенных сферических функций [2]:

$$T_{mn}^l \left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0 \right) = e^{-in \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right)} u_{mn}(\theta); \quad (20)$$

$$\frac{d^2 u_{mn}}{d\theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{d u_{mn}}{d\theta} + \left[l(l+1) - \frac{n^2 - 2mn \cos \theta + m^2}{\sin^2 \theta} \right] u_{mn} = 0; \quad (21)$$

$$\frac{d u_{mn}}{d\theta} - \frac{n - m \cos \theta}{\sin \theta} u_{mn} = -i \alpha_m u_{m-1, n}; \quad (22)$$

$$\frac{d u_{mn}}{d\theta} + \frac{n - m \cos \theta}{\sin \theta} u_{mn} = -i \alpha_{m+1} u_{m+1, n}. \quad (23)$$

$$\alpha_m = \sqrt{(l+m)(l-m+1)};$$

$$g_l = \lambda_l^2 \frac{r \int_0^0 J_0^2 \left(\frac{\mu_l}{P} p \right) p^3 dp}{\int_P J_0^2 \left(\frac{\mu_l}{P} p \right) p dp};$$

$$d_{l,n} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_{1n}^l \overline{T_{1n}^l} \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_{1n}^l \overline{T_{1n}^l} \sin \theta d\theta d\varphi};$$

Обозначим:

$$b_{l,n} = \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_{-1,n}^l \overline{T_{-1,n}^l} \cos \theta \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}{\int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_{-1,n}^l \overline{T_{-1,n}^l} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi}. \quad (24)$$

Подставив (15), (16) и (20) в уравнения (17)–(19) и воспользовавшись формулами (14), (21)–(24), получим:

$$-\beta_{l,n} b l(l+1) + \alpha_{l,n} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{a} c_\Phi = \beta_{l,n} g_l - \beta_{l,n} d_{l,n} 2\omega l; \quad (25)$$

$$-\alpha_{l,n} b l(l+1) + \alpha_{l,n} \frac{\sqrt{l(l+1)}}{a} c_\Phi = \alpha_{l,n} g_l + \alpha_{l,n} b_{l,n} 2\omega l; \quad (26)$$

$$\zeta_{l,n} + \frac{\sqrt{l(l+1)}}{2a} (\beta_{l,n} + \alpha_{l,n}) = 0. \quad (27)$$

Получив из выражений (25)–(27) выражения коэффициентов $\beta_{l,n}$; $\alpha_{l,n}$; $\zeta_{l,n}$ через коэффициенты $\kappa_{l,n}$, подставим их в ряды (10) и (12). Разделив в ряде (10) вещественную и мнимую части, получим выражения для v_θ и v_φ .

Для решения уравнения (4) в левую часть его подставляем ряды для v_θ , v_φ и τ , выраженные через неизвестные коэффициенты $\kappa_{l,n}$, а также выражение для Φ в виде ряда (13). Взяв конечное число членов в рядах для Φ , v_θ , v_φ , τ слева, получим следующее выражение:

$$\sum_{k=1}^n x_k \varphi_k(\theta, \varphi, \rho) + \sum_{k=1}^n \sum_{m=k}^n x_k x_m f_{k,m}(\theta, \varphi, \rho), \quad (28)$$

где x_k ($k=1, 2, \dots, n$) — неизвестные коэффициенты; φ_k и $f_{k,m}$ — известные функции.

Для нахождения коэффициентов x_k необходимо правую часть уравнения (4) представить в том же виде, но уже с известными коэффициентами при функциях φ_k и $f_{k,m}$. Кроме того, коэффициенты при $f_{k,m}$ должны представлять собой соответствующие произведения коэффициентов при функциях φ_k , т. е.

$$\frac{R\bar{T}}{\rho c_p} \varepsilon = \psi = \sum_{k=1}^n s_k \varphi_k + \sum_{k=1}^n \sum_{m=k}^n s_k s_m f_{k,m}. \quad (29)$$

Тогда $x_k = s_k$. Для нахождения коэффициентов s_k можно, например, применить метод точечного квадратичного аппроксимирования. Пусть

$$F = \sum_{i=0}^r \left(\sum_{l=1}^n s_l \varphi_l^i + \sum_{l=1}^n \sum_{m=l}^n s_l s_m f_{l,m}^i - \psi^i \right)^2.$$

Частные производные от функции F по всем величинам s_l приравняем нулю

$$\frac{1}{2} \frac{\partial F}{\partial s_l} = \sum_{i=0}^r \left[\left(\sum_{l=1}^n s_l \varphi_l^i + \sum_{l=1}^n \sum_{m=l}^n s_l s_m f_{l,m}^i - \psi^i \right) \times \left(\varphi_l^i + \sum_{m=l}^n s_m f_{l,m}^i \right) \right] \quad (l=1, 2, \dots, n), \quad (30)$$

т. е. пришли к системе n нелинейных алгебраических уравнений (30) относительно неизвестных коэффициентов s_k . Для расчета функций $T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0\right)$ следует пользоваться следующими формулами из [1]:

$$T_{mn}^l\left(\frac{\pi}{2} - \varphi, \theta, 0\right) = e^{-in\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)} P_{mn}^l(\cos \theta);$$

$$P_{mn}^l(\cos \theta) = \frac{\sqrt{(l-m)!(l+m)!}}{2\pi \sqrt{(l-n)!(l+n)!}} \int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} + i \sin \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right)^{l-n} \times \\ \times \left(i \sin \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\varphi}{2}} + \cos \frac{\theta}{2} e^{-\frac{i\varphi}{2}}\right)^{l+n} e^{im\varphi} d\varphi.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. Физматгиз, 1965.
2. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. Физматгиз, 1958.

ПАМЯТИ МИХАИЛА АЛЕКСЕЕВИЧА ОМШАНСКОГО

В 1965 г. исполнилось 20 лет со дня смерти видного советского ученого-метеоролога, крупного организатора, блестящего педагога, кандидата физико-математических наук, доцента Михаила Алексеевича Омшанского (1902—1945 гг.). До настоящего времени его жизнь и научное творчество не получили достаточного освещения, а многие из его научных идей еще ожидают доработки и завершения. В небольшой статье тоже невозможно подробно рассказать ни о насыщенной творческим горением биографии ученого-энтузиаста, ни о его обширном и далеко еще не исчерпанном научном наследии, в том числе и о многочисленных заделах, оставшихся незавершенными. Но, следуя провозглашенному народом принципу «никто не забыт», относящемуся ко всем советским людям, вырванным из наших рядов войной, мы считаем своим долгом, выполняемым, к сожалению, с большим запозданием, остановить внимание современного читателя на том большом вкладе, который за свою короткую жизнь успел внести в советскую метеорологию М. А. Омшанский. Мы рассматриваем настоящую статью как первую попытку в этом направлении и надеемся, что те, кому довелось более длительно и тесно сотрудничать с М. А. Омшанским, чем автору данной статьи, продолжат это начинание.

Михаил Алексеевич Омшанский родился 28 октября 1902 г. в селе Григоровке под Киевом в семье учителя сельской школы. В 1920 г. окончил гимназию в Киеве и в 1926 г. физическое отделение Киевского института народного образования, как назывался в те годы Киевский университет. В течение 20 лет, с 1925 г. и до конца жизни, М. А. Омшанский работал в системе Гидрометслужбы: сначала в Укрмете в Киеве, затем в Главной геофизической обсерватории в Ленинграде и, наконец, в созданном им Центральном научно-исследовательском гидрометеорологическом архиве (ЦНИГМА, ныне НИИАК) в Москве. В Киеве М. А. Омшанский совмещал службу в Укрмете с преподаванием математики в техникуме, а в Ленинграде параллельно с работой в ГГО он вел разностороннюю педагогическую деятельность в университете.

В самом начале войны М. А. Омшанский был мобилизован в армию, переведен в Москву и поставлен во главе ЦНИГМА. 10 апреля 1945 г., за месяц до окончания Великой Отечественной войны, М. А. Омшанский, находясь в командировке, погиб при исполнении служебных обязанностей.

Таким образом, жизнь и деятельность М. А. Омшанского можно подразделить на три периода: киевский, ленинградский и московский.

Многочисленные материалы, любезно предоставленные в наше распоряжение И. П. Сунцовой, относятся целиком к первым двум периодам, а личные воспоминания автора — ко второму из них. Эти два периода главным образом и освещаются в данной статье. Было бы желательно, чтобы московский период деятельности М. А. Омшанского был более полно описан кем-либо из товарищей, сотрудничавших с Омшанским в этот период и, в частности, работавших тогда в ЦНИГМА.

В 1925 г. М. А. Омшанский, будучи еще студентом последнего курса института, начал работу в отделе проверки метеорологических приборов Управления Гидрометслужбы Украинской ССР (Укрмет). В первые годы работы в Укрмете внимание Омшанского было в основном сосредоточено на исследовании источников ошибок ряда стандартных метеорологических приборов и на разработке мер по усовершенствованию метеонаблюдений. В первую очередь Михаил Алексеевич исследовал гелиографы разных конструкций, а также почвенные термометры. В результате этих исследований появилось шесть статей [1—5, 7], являющихся, по-видимому, первыми из опубликованных научных работ М. А. Омшанского. Эти статьи показывают, что уже в первые годы научное творчество М. А. Омшанского отличалось двумя основными особенностями, которые и в дальнейшем характеризовали всю его научную деятельность: глубоким физическим подходом к рассматриваемым явлениям и умением выражать свои мысли в предельно лаконичной форме. Эта последняя особенность работ М. А. Омшанского иногда даже казалась недостаточно подготовленному читателю признаком некоторой сухости и излишней академичности изложения. В действительности же она являлась следствием настойчивого стремления к тому, чтобы отбросить в своем изложении все второстепенное и этим выделить и помочь читателю уяснить главное и основное. Эта особенность стиля работ Михаила Алексеевича впоследствии нашла еще более полное и блестящее выражение как в педагогической, так и в учебно-методической работе его в Ленинградском университете.

К вопросам методики метеорологических наблюдений, а затем и к вопросам их обработки и особенно к проблемам использования в метеорологии методов математической статистики М. А. Омшанский многократно возвращался как в киевский, так и в последующие периоды своей работы [10—13, 22—24, 28].

С 1928 по 1930 г. М. А. Омшанский прошел в Укрмете курс аспирантской подготовки, после чего был зачислен синоптиком в отдел службы погоды. В эти годы Михаил Алексеевич поддерживал научный контакт с академиком Б. И. Срезневским, которого считал своим учителем. С осени 1929 г. М. А. Омшанский работал также ассистентом Геофизической комиссии Академии наук УССР (тогда ВУАН). В 1927 г. Омшанский участвовал в редактировании, а в 1928 и 1929 гг. официально входил в состав редколлегии издававшегося Укрметом журнала «Погода и жизнь» (на украинском языке). В этом журнале был напечатан ряд его рефератов [8, 9] и переводов [34, 35]. М. А. Омшанский сотрудничал в этом журнале и позднее, опубликовав в нем еще несколько рефератов [16, 17] и две оригинальные статьи [15, 18].

Работа в отделе службы погоды привела к зарождению у М. А. Омшанского интереса к той области метеорологии, которая вскоре стала для него главной, а именно, к прогнозам погоды. В этой области его внимание было привлечено к двум проблемам: сначала к оценке оправданности прогнозов, контролю их качества и эффективности, а позднее к разработке нового метода прогнозов, названного им методом физической аналогии.

Уже для киевских работ М. А. Омшанского по контролю прогнозов погоды [11, 12, 15, 18] и особенно для наиболее фундаментальной из них работы [19] характерен принципиально новый подход, заключающийся в стремлении к разработке такой методики оценки прогнозов, которая позволяла бы судить о них не только с точки зрения синоптика-прогнозиста, но и характеризовать их в плане удовлетворения запросов потребителя. В этих работах подчеркивалось, что оценка прогнозов погоды должна служить как средством выявления достоинств и недостатков применяемого метода прогнозирования, так и критерием для суждения о практической полезности и экономической эффективности применения данного прогноза в конкретных отраслях народного хозяйства. Именно в связи с этим Н. А. Багров («Метеорология и гидрология», № 2, 1966), сам много занимавшийся проблемой контроля прогнозов, справедливо отмечает, что в работах М. А. Омшанского можно найти «начальную постановку вопроса о полезности прогнозов» и что М. А. Омшанский «для альтернативных прогнозов ввел систему весов, аналогичную платежной матрице».

С сентября 1932 г. М. А. Омшанский приступил к работе в Институте теоретической метеорологии, как назывался в то время один из отделов Главной геофизической обсерватории в Ленинграде. С кругом проблем, разрабатывавшихся в ГГО, его связывал, в частности, давний интерес к вопросам теории климата, причинам климатических колебаний, связям климата с солнечной активностью и т. п. К этим вопросам М. А. Омшанский неоднократно обращался как в самый ранний период своей деятельности [6, 14], так и в последующие годы [20]. Хотя в это время он занимался многими вопросами, однако основной проблемой в ленинградский период становится для него прогноз погоды. Здесь был завершен цикл исследований по контролю прогнозов. Следует отметить, что в Ленинграде эти исследования активно поддержал выдающийся советский метеоролог П. А. Молчанов. По его рекомендации М. А. Омшанский написал еще одну из принципиальных и основополагающих работ этого цикла [21]. Написанная более 30 лет тому назад, эта работа еще и теперь остается настолько актуальной, что мы считаем необходимым привести здесь с некоторыми сокращениями последний ее абзац: «... в будущем нельзя будет обойтись без страховки прогнозов, так как в отдельных областях или районах и в отдельные периоды применение прогнозов может быть нерентабельным, а за большой промежуток времени на большой территории оно должно всегда себя оправдать. При этом наперед можно учитывать порядок пользы от применения прогнозов. За счет этой страховки можно было бы поставить на надлежащую почву хозрасчет Службы погоды...». Трудно было бы с большей четкостью сформулировать остающийся и сейчас еще острым вопрос о повышении экономической эффективности работы Службы погоды и о практическом использовании даваемых ею прогнозов.

После окончания фундаментальной по своему значению работы [21] М. А. Омшанский еще не раз возвращался к вопросам контроля прогнозов [25, 27, 29] и, в частности, детально разработал теорию и методику контроля альтернативных прогнозов [26]. Завершением этого обширного цикла работ явилась предназначенная для практического использования в Службе погоды Инструкция по элементарному статистическому контролю. В связи с началом войны эта Инструкция не была издана, а рукопись ее, по-видимому, утерялась. Тем не менее ряд идей М. А. Омшанского по контролю прогнозов не был забыт и получил дальнейшее развитие в работах А. М. Обухова, А. С. Моница, Н. А. Багрова и других авторов.

Однако постепенно все большее внимание М. А. Омшанского привлекает другая сторона проблемы прогноза, а именно, разработка нового метода прогнозов. К сожалению, он успел опубликовать только некоторые принципиальные основы этого метода [30], а также большую работу [31], являющуюся примером применения нового метода к предсказанию температуры воздуха. В последние годы ленинградского периода М. А. Омшанский вел чрезвычайно интенсивную, очень трудоемкую, а часто и весьма кропотливую работу по этой проблеме. Однако, насколько нам известно, после опубликования работ [30, 31] он избегал дальнейшей (по его мнению, преждевременной) публикации предварительных или промежуточных результатов до полного завершения всего исследования, рассчитанного на ряд лет. Отчасти это объяснялось также условиями военного времени. Вместе с тем, так же как и при выполнении других своих работ, М. А. Омшанский и в данном случае не проводил резкой грани между самим исследованием и его оформлением. Поэтому уже в 1939—1941 гг. параллельно с разработкой метода под его руководством на кафедре физики атмосферы ЛГУ шла напряженная работа по подготовке монографии «Прогноз погоды по методу физической аналогии». Омшанский написал подробную аннотацию к этой монографии.

Работа над такой большой и сложной проблемой метеорологии, как создание принципиально нового метода прогноза погоды с использованием физической аналогии, и, в частности, огромная трудоемкость операций подбора физических аналогов привели М. А. Омшанского к заключению о необходимости механизации как этих операций, так и вообще обработки результатов метеорологических наблюдений. Однако практическая реализация этого заключения требовала создания специального научно-исследовательского учреждения, способного решать подобные задачи и оснащенного для этого обширным парком различных счетных машин. М. А. Омшанский подробно обосновал и детально разработал соответствующий проект, который был активно поддержан начальником ГУГМС академиком Е. К. Федоровым. В связи с этим вскоре после начала войны М. А. Омшанский возглавил вновь организованный научный институт в системе ГУГМС — Центральный научно-исследовательский гидрометеорологический архив (ЦНИГМА), позднее реорганизованный в НИИАК. С этого времени начался последний — московский — период деятельности М. А. Омшанского, когда он продолжал интенсивную разработку метода физической аналогии, развитие способов механизированной обработки и распространения результатов метеорологических наблюдений, а также напряженную организационную работу по формированию и укреплению ЦНИГМА в трудных условиях военного времени.

К большому сожалению, в связи с безвременной гибелью М. А. Омшанского разработка метода физической аналогии и составление посвященной этому методу монографии остались незавершенными и, насколько нам известно, никем не продолжались в той форме, в какой их начал Омшанский. В то же время некоторые из его основных идей не были забыты, а прямо или косвенно, сознательно или бессознательно были использованы некоторыми учеными. Так, например, можно отметить, что один из методов, развитых в ГГО Л. А. Вительсом, сколь ни далек он в своих деталях от метода М. А. Омшанского, все же опирается на использование множественной нелинейной корреляции, что характерно и для работ М. А. Омшанского.

Важную сторону деятельности М. А. Омшанского составляла его педагогическая работа, в частности в Ленинградском университете, где

он с осени 1933 г. до мобилизации в августе 1941 г. работал в должности ассистента, а затем доцента на физическом и геолого-почвенно-географическом факультетах. Здесь ему в 1938 г. была без защиты диссертации присуждена ученая степень кандидата физико-математических наук. В ЛГУ М. А. Омшанский читал курсы физики атмосферы и применения статистических методов в метеорологии, вел по этим курсам практические занятия, курсовые работы, занятия с аспирантами и т. д. Лекции и занятия М. А. Омшанского, как и его научные статьи, отличались чрезвычайной глубиной, высоким научным уровнем, удивительной лаконичностью, подчеркнутой четкостью изложения основного и главного, отсутствием всякой витиеватости и словесной шелухи.

Большое внимание М. А. Омшанский уделял методической работе и, в частности, созданию учебных пособий. Им были полностью переработаны обширные главы XII и XIII по физике атмосферы для 3-го издания «Курса геофизики» проф. П. Н. Тверского [32], а затем заново написан весь раздел физики атмосферы для 4-го издания этой книги [33]. Михаил Алексеевич также почти полностью подготовил к печати учебники для вузов «Физика атмосферы» (объемом около 20 рукописных тетрадей) и «Методы математической обработки наблюдений применительно к геофизике». Сохранилась записка проф. О. А. Дроздова, отмечающая своевременность и необходимость издания второго из этих учебников. Но, к сожалению, по обстоятельствам военного времени эти книги не увидели света, а местонахождение рукописи неизвестно. М. А. Омшанский готовил еще материалы для курса синоптической метеорологии.

М. А. Омшанский хорошо знал ряд языков, которые он изучил в основном самостоятельно, посвящая этому свои немногие свободные часы. Работая со свойственной ему огромной настойчивостью, Михаил Алексеевич добился того, что мог свободно читать специальную литературу на английском и немецком языках. Совместно с И. П. Сунцовой он перевел с английского и немецкого языков на русский и украинский ряд статей. Часть переводов опубликована [34, 35]. Совместно с О. А. Костаревой им переведена с английского языка в свое время широко распространенная книга В. Гемфриса «Физика воздуха» объемом около 30 печатных листов [36].

В заключение остается сказать, что М. А. Омшанский отличался исключительной принципиальностью в научных и житейских вопросах, строгой требовательностью к подчиненным ему сотрудникам, предельной четкостью и точностью всех даваемых им указаний, феноменальной организованностью и аккуратностью в работе, огромной трудоспособностью.

Работа была не только главным, но, пожалуй, почти единственным содержанием его жизни, особенно в годы разработки метода физической аналогии и способов механизации обработки наблюдений. Эти задачи почти целиком поглощали все его внимание и время. Михаил Алексеевич совершенно пренебрегал так называемыми жизненными благами и удобствами. Однако он всегда умел находить время для терпеливой и кропотливой работы со своими учениками, с которыми занимался множеством дополнительных вопросов, далеко выходящих за рамки обязательных программ. При этом М. А. Омшанский всегда проявлял к своим ученикам много внимания и заботливости.

В памяти всех знавших его товарищей и учеников М. А. Омшанский остался большим человеком и крупным ученым, пламенным и бескорыстным рыцарем науки. Нам кажется, что пришло время собрать воедино разрозненные, а частично и неопубликованные работы М. А. Ом-

шанского, до сих пор не потерявшие своего значения, и издать их в виде сборника, сопроводив воспоминаниями лиц, близко его знавших.

Автор горячо благодарит И. П. Сунцову, которая собрала, сохранила, терпеливо скопировала и любезно предоставила в его распоряжение большое число материалов к биографии М. А. Омшанского. Ею же почти целиком составлен и прилагаемый список трудов М. А. Омшанского. Автор весьма признателен также Т. В. Покровской и О. А. Дроздову, внимательно просмотревшим настоящую статью в рукописи и сделавшим к ней ряд очень ценных указаний.

СПИСОК

ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ М. А. ОМШАНСКОГО

1. Характеристика гелиографа Величка. Декадный бюлетень Укрмету, № 2 (140), 1927 (Характеристика гелиографа Величко).
2. Добовий хід сонячного сяйва. Декадний бюлетень Укрмету, № 15 (153), 1927 (Суточный ход солнечного сияния).
3. До питання про точність визначення протяжності сонячного сяйва гелиографом Кемпбеля—Стокса. Декадний бюлетень Укрмету, № 3 (177), 1928 (К вопросу о точности определения продолжительности солнечного сияния гелиографом Кемпбеля—Стокса).
4. Конструктивне спрощення системи гелиографа Величка. Декадний бюлетень Укрмету, № 27 (200), 1928 (Упрощение конструкции гелиографа Величко).
5. Додаткова поправка до ґрунтових безоправних термометрів на температуру шару в ґрунті між резервуаром и поверхнею. Вісник метеорології та гідрології, вып. 1—2, 1929 (Добавочная поправка безоправных почвенных термометров на температуру слоев почвы, лежащих между резервуаром термометра и поверхностью).
6. Про причини коливань кліматичних елементів. Декадний бюлетень Укрмету, № 34, 1929 (О причинах колебаний элементов климата).
7. Конструктивное упрощение системы гелиографа Величко. Ж. геофиз. и метеорол., т. VI, вып. 3, 1929.
8. Авто, як засіб метеорологічних досліджень. Погода й життя, № 10, 1929 (Автомобиль как средство метеорологических исследований).
9. Дослідження коливань загальної атмосферної циркуляції. Погода й життя, № 11—12, 1929 (Исследование колебаний общей циркуляции атмосферы).
10. Сонячне сяйво. Історія і сучасний стан міряння. Гідрометеорологічний календар на 1930 рік. Київ, 1930 (Продолжительность солнечного сияния. История и современное состояние ее измерений).
11. Довготермінові завбачання погоди. Гідрометеорологічний календар на 1930 рік. Київ, 1930 (Долгосрочные прогнозы погоды).
12. Як треба розуміти прогнози погоди. Гідрометеорологічний календар на 1931 рік. Київ, 1931 (Как следует понимать прогнозы погоды).
13. Про середні величини та обчислення повторностей в метеорології. Гідрометеорологічний календар на 1931 рік. Київ, 1931 (О средних значениях и вычислении повторяемости в метеорологии).
14. Über die Relativzahlen der Sonnenflecken. Gerl. Beitr. z. Geoph., Bd. 33. (Körper—Band II), 1931 (Об относительном числе солнечных пятен).
15. Про застосування прогнозів погоди до потреб практики. Погода й життя, № 4 (82), 1931 (О применении прогнозов погоды для нужд практики).
16. Світова карта погоди. Погода й життя, № 7 (85), 1931 (Мировая карта погоды).
17. До пізнання зв'язку між врожаєм, погодами та астрофізичними явищами. Погода й життя, № 8 (86), 1931 (К изучению связи между урожаем, погодой и астрофизическими явлениями).
18. Завдання контролю прогноз погоди. Погода й життя, № 10—11, 1931 (Задачи контроля прогнозов погоды).
19. Основні принципи контролю и використання завбачань погоди. Журн. геол. геогр. циклу ВУАН, № 1—2, 1932 (Основные принципы контроля и использования прогнозов погоды).
20. Про ритмічні відміни клімату та їх можливі причини. Журн. геол. геогр. циклу ВУАН, № 1 (5), 1933 (О ритмах в изменениях климата и возможных их причинах).

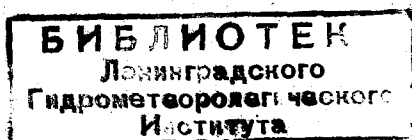
21. Об учете точности прогнозов погоды и их применении. Журн. геофизики, т. III, вып. 4, 1933.
22. Деформация шкал метеорологических элементов и ее практическое значение. Труды ГГО, вып. 4, 1935.
23. О дисперсии особенностей случайного бессвязного ряда. Труды ГГО, вып. 10, 1936.
24. Точность показаний барометра на сети и структура сети барометрических станций. Труды ГГО, вып. 10, 1936.
25. Задачи контроля прогнозов погоды. Метеорология и гидрология, № 11, 1936.
26. Контроль альтернативных прогнозов. Труды ГГО, вып. 14, 1936.
27. Установление успешности прогнозов погоды. Климат и погода, № 3, 1936.
28. Обработка наблюдений над ветром. Труды ГГО, вып. 18, 1937.
29. Опыт контроля прогнозов температуры отдела долгосрочных предсказаний погоды ГГО на естественный синоптический период. Журн. геофиз., т. VII, вып. 4, 1937.
30. Принципы построения объективного прогноза погоды. Труды ГГО, вып. 26, 1939.
31. Прогноз температуры на несколько дней. Труды ГГО, вып. 26, 1939.

Учебные пособия

32. Главы XII и XIII в кн. П. Н. Тверского «Курс геофизики». Изд. 3-е. ОНТИ, Л.—М., 1936.
33. Главы VIII, IX, X и XI в кн. П. Н. Тверского «Курс геофизики». Изд. 4-е. ОНТИ, Л.—М., 1939.

Переводы

34. З практики повітряної служби погоди в Німеччині. (Перев. с немецкого статьи В. Мальша). Погода й життя, № 7—8, 1928 (Из практики авиационной Службы погоды в Германии).
35. Мікрокліматологія. (Перев. с немецкого статьи Р. Гейгера). Погода й життя, № 9—10, 1928 (Микроклиматология).
36. Фізика воздуха (Перев. совместно с О. А. Костаревой с английского книги В. Гемфриса). ОНТИ, Л.—М., 1936.



СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	3
Л. С. Г ан д и н. О применении метода канонических корреляций в метеорологии	5
К. М. Л у г и н а. О статистической связи метеорологических полей для различных участков территории	23
✓ М. О. К р и ч а к. Некоторые результаты исследования статистических характеристик поля ветра	32
В. А. Ш н а й д м а н. Статистические характеристики поля ветра в верхней тропосфере	41
М. В. Г у ш и н а, Р. Л. К а г а н, А. И. П о л и щ у к. О точности определения среднего слоя осадков на площади	49
Р. Л. К а г а н. Некоторые вопросы интерпретации осадкомерных данных	64
А. И. П о л и щ у к. К вопросу об осреднении осадкомерных данных	76
К. Я. В и н н и к о в. К вопросу об объективном анализе полей актинометрических величин	88
Г. Х. Х а т а м к у л о в. Об использовании наземной информации при объективном анализе аэрологических полей	96
А. А. К о б я к о в а, Л. В. Р у х о в е ц. Схема объективного анализа полей метеоэлементов на полушарии для произвольной сетки	106
✓ Л. С. Г ан д и н, Р. Л. К а г а н. Об экономическом подходе к планированию сети метеорологических станций	120
В. А. Е ф и м о в. К стационарной нелинейной модели общей циркуляции атмосферы	132
А. Г. Б р о й д о. Памяти Михаила Алексеевича Омшанского	140

Труды ГГО, вып. 208

ПРИМЕНЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В МЕТЕОРОЛОГИИ

Отв. редактор *Л. С. Г ан д и н*. Редактор *Е. И. Ильиных*

Техн. редактор *Л. А. Липатова* Корректоры: *Б. А. Минц, В. С. Игнатова*

Сдано в набор 20/III 1967 г. Подписано к печати 12/XII 1967 г. Бумага 70×108¹/₁₆. № 1: Бум. л. 4,625. Печ. л. 12,95. Уч.-изд. л. 12,04. Тираж 900 экз. М-22325. Индекс МЛ-337. Гидрометеорологическое издательство. Ленинград. В-53, 2-я линия, д. № 23. Заказ № 255. Цена 84 коп.

Ленинградская типография № 8 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Ленинград. Прачечный пер., д. 6