

ПРОВЕРЕНО
1951 г.

ПРОВЕРЕНО
1950 г.

ТРУДЫ ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

Выпуск 14

Под общей редакцией проф. Н. В. РОЗЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

(4)

Под редакцией проф. И. А. КИБЕЛЯ



GENERAL OFFICE OF THE HYDROMETEOROLOGICAL
SERVICE OF USSR

TRANSACTIONS
OF THE CENTRAL GEOPHYSICAL OBSERVATORY

FASC. 14

Editor in chief prof. *N. V. Rose*

THEORETICAL METEOROLOGY

(4)

Editor prof. *I. A. Kiebel*

МЕХАНИЗМ ПРОСТЕЙШИХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В АТМОСФЕРЕ

Л. В. Келлер

§ 1. Введение

В настоящей статье мы ставим себе задачей изучение механизмов простейших волновых процессов в атмосфере; а именно — здесь мы рассматриваем модель перманентных адиабатических волновых движений, происходящих в вертикальной плоскости (или, если угодно однообразно в системе параллельных вертикальных плоскостей).

Изучение системы перманентных волн, перемещающихся равномерно очевидно, сводится к изучению некоторого стационарного движения по отношению к подвижной системе координат, перемещающейся вместе с профилем волн.

Таким образом волновое движение должно рассматриваться в системе прямоугольных координат x, y , причем начало координат перемещается вместе с профилем волн, ось x направляется по горизонтали в направлении перемещения волн, а ось y — по вертикали вверх.

Обозначая, как обычно, через ρ плотность воздуха в точке x, y , через p — давление, через u и v — соответственно горизонтальную и вертикальную составляющую движения, пишем прежде всего уравнения движения в эйлеровой форме:

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - g.$$

Система дополняется „уравнением неразрывности“:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0.$$

§ 2. О линиях тока и функции тока

Когда u и v рассматриваются как заданные функции от x, y, t , т. е. когда уже разрешены уравнения Эйлера, то для определения лагранжевых переменных x и y , т. е. для координат какой-либо фиксируемой на частицы, остается проинтегрировать систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = dt.$$

Из системы (1) выделяем одно уравнение:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}.$$

В общем случае, когда выражения u и v зависят от t , представляя данные функции $u(x, y, t)$, $v(x, y, t)$, уравнение (1') может быть проинтегрировано в таком предположении, что t рассматривается как постоянный параметр. Общий интеграл этого уравнения представляет общее уравнение семейства линий тока. В том частном случае, когда u и v от t не зависят, т. е. движение стационарно, интеграл уравнения (1') представляет один из интегралов системы (1), семейство линий тока совпадает с семейством траекторий; иначе говоря, линии тока в данном случае называются постоянными во времени, т. е. неподвижными.

Если жидкость несжимаема, то функции u и v удовлетворяют уравнению неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (\alpha)$$

то уравнение можно рассматривать как условие интегрируемости дифференциала

$$d\psi = vdx - udy;$$

таким образом общий интеграл уравнения (1) может быть представлен в таком виде:

$$\psi = \int (vdx - udy) = \text{const}. \quad (2)$$

Другими словами, произведение uv является интегрирующим множителем для уравнения (1'). Функция ψ носит название „функции тока“.

Приведенные до сих пор рассуждения не зависят от предположения стационарности движения.

Переходим к более общему случаю сжимаемой жидкости.

Здесь уравнение неразрывности (α) заменяется следующим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0. \quad (\beta)$$

Мы можем распространить теорему о существовании функции тока на случай сжимаемой жидкости, если ограничимся при этом случаем стационарного движения. Для этого случая уравнение (β) принимает вид:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} = 0, \quad (\beta')$$

которого вытекает интегрируемость дифференциала

$$d\Psi = \rho(vdx - udy).$$

таким образом получаем интеграл уравнения (1) в следующем виде:

$$\Psi = \int \rho(vdx - udy) = \text{const}. \quad (3)$$

В данном случае, значит, функция $\rho(x, y)$ является интегрирующим множителем для дифференциала

$$vdx - udy,$$

и, другими словами, произведение ρuv — множителем для уравнения (1').

Функция Ψ представляет обобщенную функцию тока для случая стационарного движения сжимаемой жидкости. Уравнение

$$\Psi = \text{const}$$

представляет и здесь общее семейство линий тока (которое в данном случае неподвижно и совпадает с семейством траекторий). Поэтому функцию Ψ мы и в этом случае будем называть функцией тока.

На основании определения функции Ψ имеем таким образом:

$$\left. \begin{aligned} \rho u &= - \frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \rho v &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \right\}$$

§ 3. Введение функции тока в уравнения движения

Для любой функции, характеризующей состояние частицы при стационарном движении ($\frac{\partial F}{\partial t} = 0$), мы на основании формул (4) § 2 можем написать:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} u + \frac{\partial F}{\partial y} v = - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial \Psi}{\partial y} - \frac{\partial F}{\partial y} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right),$$

или, пользуясь сокращенным обозначением якобиана:

$$[f, g] = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x},$$

пишем:

$$\frac{dF}{dt} = - \frac{1}{\rho} [F, \Psi].$$

Применив эту формулу к лагранжевым координатам частицы x и y мы находим:

$$\frac{dx}{dt} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y},$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x},$$

т. е. воспроизводим формулы (4) § 2.

Применяя ту же формулу к проекциям скорости u и v , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= - \frac{1}{\rho} [u, \Psi] \\ \frac{dv}{dt} &= - \frac{1}{\rho} [v, \Psi] \end{aligned} \right\}$$

или, заменяя здесь u и v их выражениями через Ψ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \Psi \right] \\ \frac{dv}{dt} &= - \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \Psi \right] \end{aligned} \right\}$$

Полученные выражения для проекций ускорения мы можем ввести теперь эйлеровы уравнения движения [§ 1, формулы (1) и (2)]. Таким образом находим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \Psi \right] &= 0 \\ \frac{\partial p}{\partial y} + g\rho - \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \Psi \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Таким образом, введя в рассмотрение функцию тока Ψ , мы свели две скалярные функции u и v к одной функции Ψ .

Что касается уравнения неразрывности [§ 1, формула (3)], то в нем уже падает надобность, так как оно непосредственно вытекает из выражения составляющих скорости через функцию тока [уравнения (4) § 2].

4. Связь между динамическими элементами при адиабатическом движении и преобразование Гельмгольца

Динамические элементы — давление p , плотность ρ и абсолютная температура T — связаны между собою в самом общем случае так называемым уравнением состояния:

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho T}{\rho_0 T_0} \quad (1)$$

Наряду с этим для частного случая адиабатического процесса имеет место уравнение Пуассона:

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\alpha, \quad (2)$$

где согласно общеупотребительному обозначению:

$$\alpha = \frac{c_p}{c_v} = 1,405,$$

т. е. отношению теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме.

В более симметричном виде соотношения (1) и (2) могут быть изображены еще таким образом:

$$\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{1}{c_p}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{c_v}} = \left(\frac{T}{T_0} \right)^{\frac{1}{c_p - c_v}}$$

Таким образом, при адиабатическом движении для любой частицы остается постоянной величина

$$p^{\frac{1}{c_p}} \cdot \rho^{-\frac{1}{c_v}}$$

т. е. любая функция этой величины, например

$$\varphi = \frac{1}{\rho} p^{\frac{1}{\alpha}},$$

или еще несколько общее

$$\varphi = \frac{1}{\rho} \left(\frac{p}{P} \right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

где P — некоторое постоянное давление, принимаемое за исходную норму.

φ отличается от „потенциальной температуры“:

$$\theta = T \left(\frac{p}{P} \right)^{-\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

лишь постоянным множителем. Эту величину можно назвать „потенциальным объемом“, в виду того что такой именно объем будет занят единицей массы газа, если она будет приведена адиабатическим процессом к давлению, равному 1, или в более общем случае к „нормальному давлению P “.

Наряду с величиною φ мы, по примеру Гельмгольца, * введем еще другую характеристику S , выбранную таким образом, чтобы тождественно имелось

$$\frac{1}{\rho} \delta p = \varphi \delta S.$$

На основании формул (2) и (3) находим:

$$\delta S = \frac{\delta p}{\varphi \rho} = \left(\frac{p}{P} \right)^{-\frac{1}{\kappa}} \delta p = \frac{\kappa}{\kappa-1} P \delta \left(\frac{p}{P} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

Итак, мы можем принять

$$S = \frac{\kappa P}{\kappa-1} \left(\frac{p}{P} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}.$$

Для упрощения полученных формул мы соответственно распорядим произвольной величиной P , а именно положим:

$$P = \frac{\kappa-1}{\kappa},$$

и введем еще обозначение:

$$q = \frac{\kappa}{\kappa-1} = \frac{c_p}{c_p - c_v} \approx 3,467.$$

Таким образом новые, гельмгольцевы, характеристики φ и S выражаются через p и ρ соответственно формулами:

$$S = (qp)^{\frac{1}{q}},$$

$$\varphi = \frac{1}{\rho} S^{q-1}.$$

Обратно, p и ρ выражаются через φ и S следующим образом:

$$p = \frac{1}{q} S^q,$$

$$\rho = \frac{1}{\varphi} S^{q-1}.$$

* H. v. Helmholtz. Über atmosphärische Bewegungen. Sitz. der Akademie der W. zu Berlin, 1888, S. 647--663.

Так как в дальнейших формулах нам из различных комбинаций чисел c_p и c_v придется иметь дело лишь с одним числом $q-1$, то ради сокращения письма для этого числа введем специальное обозначение:

$$m = q - 1 = \frac{1}{\kappa - 1} = \frac{c_v}{c_p - c_v} \approx 2,467.$$

Развивая в дальнейшем уравнения адиабатического движения сжимаемой жидкости, заметим, что уравнения, относящиеся к несжимаемой жидкости, мы получим как частный или предельный случай наших уравнений, оложив в них $c_v = 0$, или, что то же, $m = 0$. Гельмгольцевы характеристики S и φ при этом сведутся соответственно к p и $\frac{1}{\rho}$.

§ 5. Введение гельмгольцевых переменных φ и S

При рассмотрении адиабатических движений по предложению Гельмгольца переменные ρ и p заменяются переменными φ и S . Существенное реимущество φ перед p состоит в том, что при адиабатическом движении первая из них остается постоянной для частицы и, значит, в стационарном случае не меняется вдоль линии тока, так что

$$\varphi = \varphi(\Psi). \quad (1)$$

Введение при этом S вместо p не существенно, но дает некоторые упрощения в начертании формул.

Прежде всего произведем замену в формулах, связывающих u и v с Ψ формулы (4) § 2]. Таким образом получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\varphi} S^m u &= -\frac{\partial \Psi}{\partial y} \\ \frac{1}{\varphi} S^m v &= \frac{\partial \Psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Пользуясь тем обстоятельством, что характеристика φ остается неизменной вдоль линии тока, мы с некоторым удобством можем заменить функцию Ψ еще видоизмененной функцией тока:

$$\psi = \int \varphi(\Psi) d\Psi. \quad (3)$$

Таким образом уравнения (2) заменяются такими:

$$\left. \begin{aligned} S^m u &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ S^m v &= \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Пользуясь видоизмененной функцией тока, преобразуем еще выражение для индивидуальной производной, данное в формуле (2) § 3, а именно:

$$\frac{dF}{dt} = -S^{-m} [F, \psi]. \quad (5)$$

Выше (в § 3) мы выразили уравнения движения в характеристиках p и функции тока Ψ . Введя теперь гельмгольцевы характеристики φ и видоизмененную функцию тока ψ , мы получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi \frac{\partial S}{\partial x} + S^{-m} \left[S^{-m} \frac{\partial \psi}{\partial y}, \psi \right] &= 0 \\ \varphi \frac{\partial S}{\partial y} + g - S^{-m} \left[S^{-m} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \psi \right] &= 0 \end{aligned} \right\}$$

§ 6. Некоторые свойства якобианов

Выше, в § 3 [формула (1)], мы ввели сокращенное обозначение $[f, g]$ для специального вида якобиана:

$$\frac{\partial (f, g)}{\partial (x, y)} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$$

Прежде чем идти дальше в анализе наших уравнений движения, перечислим вкратце важнейшие свойства введенного символа:

- 1) $[f, x] = -\frac{\partial f}{\partial y}$; $[f, y] = \frac{\partial f}{\partial x}$;
- 2) $\frac{\partial (f_1, f_2)}{\partial (\varphi_1, \varphi_2)} = \frac{[f_1, f_2]}{[\varphi_1, \varphi_2]}$;
- 3) $[F(\varphi, \psi), f] = \frac{\partial F}{\partial \varphi} [\varphi, f] + \frac{\partial F}{\partial \psi} [\psi, f]$;
- 4) $F(f_1) [f_1, f_2] = [f_1, F(f_1) f_2]$.

Тождество 4 получается как частный случай 3, если положить в последнем:

$$\varphi = f_1, \quad \psi = f_2, \quad F(\varphi, \psi) = F(f_1) f_2, \quad f = f_1$$

$$5) F(f_1) [f_1, f_2] = \left[\int F(f_1) df_1, f_2 \right].$$

Это тоже частный случай 3:

$$\varphi = f_1, \quad \psi = f_2, \quad F(\varphi, \psi) = \int F(\varphi) d\varphi + C(\psi), \quad f = f_2.$$

$$6) [\varphi(f_1), f_2] = [f_1, \varphi'(f_1) f_2].$$

Это тождество вытекает из сравнения правых частей 4 и 5.

7) Если $[f_1, f_2] = 0$, то $f_2 = \Phi(f_1)$, где Φ — произвольная функция.

8) Если $[f_1, f_2] = f(x, y)$, то

$$f_2 = \Phi(f_1) - \left(\int \frac{f}{\frac{\partial f_1}{\partial y}} dx \right)_{f_1 = \text{const}}$$

Если $f(x, y)$ и $f_1(x, y)$ рассматривать как заданные функции, то $f_2(x, y)$ определяется как общий интеграл линейного уравнения с частными производными.

Предложение 7 вытекает из 8 как частный случай.

§ 7. Уравнение Бернулли

Возвращаемся к нашим уравнениям движения [§ 5, уравнения (6)].

Первое из этих уравнений умножим почленно на $\frac{\partial \psi}{\partial y}$, второе на $-\frac{\partial \psi}{\partial x}$ полученные результаты сложим. При этом воспользуемся перечисленными выше свойствами якобианов (см. § 6, правила 1, 4 и 5). Таким образом получаем уравнение:

$$\left[\varphi S + gy + \frac{1}{2} S^{-2m} \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right\}, \psi \right] = 0.$$

Последнее, согласно правилу 7, непосредственно интегрируется, при этом получается уравнение, выражающее теорему Бернулли:

$$\varphi S + gy + \frac{1}{2} S^{-2m} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] = \varepsilon(\psi). \quad (1)$$

$\varepsilon(\psi)$ представляет здесь произвольную функцию своего аргумента.

Некоторое упрощение двух уравнений движения и их интеграла (1) получим, если введем вместо функции тока ψ другую водоизмененную функцию Ω , положив

$$\Omega = \int \frac{d\psi}{V\varphi} = \int V\varphi d\Psi. \quad (2)$$

Сопоставляя выражения u и v через три различные функции тока: ψ и Ω , имеем [ср. формулы (2) и (4) § 5]:

$$\left. \begin{aligned} S^m u &= -\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -V\varphi \frac{\partial \Omega}{\partial y} \\ S^m v &= \varphi \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} = V\varphi \frac{\partial \Omega}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Пользуясь новым водоизменением функции тока и положив еще для краткости письма

$$G(\varphi) = \frac{g}{\varphi}, \quad (4)$$

репишем наши уравнения движения в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial x} + S^{-m} \left[S^{-m} \frac{\partial \Omega}{\partial y}, \Omega \right] &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial y} + G + S^{-m} \left[S^{-m} \frac{\partial \Omega}{\partial x}, \Omega \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Подобным же образом переписываем уравнение Бернулли:

$$S + Gy + \frac{1}{2} S^{-2m} \left\{ \left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \right\} = E(\Omega). \quad (6)$$

метим, что уравнение (6) нами получено как следствие системы двух уравнений (5). Каждое из этих двух уравнений в свою очередь является следствием другого, взятого в совокупности с (6). Поэтому полную систему уравнений, решающую поставленную задачу, мы получим, взяв уравнение

Бернулли и присоединив к нему любое из уравнений (5) (или же какую либо комбинацию из этих двух уравнений).

Задача наша свелась, таким образом, к отысканию двух неизвестных функций $\Omega(x, y)$ и $S(x, y)$, для определения которых мы имеем указанную выше систему из двух уравнений. Заметим при этом, что уравнение (6) содержит искомую функцию S , но не содержит ее производных. Поэтому решив его (алгебраически) относительно S и введя решение в котороенибудь из (5), получаем одно уравнение с частными производными второго порядка для определения единственной неизвестной функции Ω .

§ 8. Алгебраическое исследование уравнения Бернулли как уравнения в S .

Введем обозначения:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \Omega}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Omega}{\partial y} \right)^2 \right] \\ B &= E(\Omega) - Gy \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Тогда формула Бернулли [§ 7, формула (6)] может быть представлена таким образом:

$$S + AS^{-2m} = B \quad (2)$$

или еще:

$$S^{2m+1} - BS^{2m} + A = 0. \quad (2')$$

Так как величина S по физическому своему значению существенно положительна, то нас интересуют исключительно положительные корни нашего уравнения.

Трехчленное уравнение (2) по теореме Декарта может иметь не более двух положительных корней. Что касается коэффициентов уравнения A и B , то первый представляет собою тоже существенно положительную величину, а затем — для существования положительных корней — коэффициент должен быть также > 0 .

В левой части равенства (2), при постоянном A , первый член монотонно и притом равномерно возрастает вместе с S от 0 до ∞ , а второй монотонно замедленно убывает от $+\infty$ до 0.

Следовательно для B получается определенный минимум, соответствующий значению $S = S_0$, определяемому из уравнения:

$$\frac{dB}{dS} = 1 - 2mAS_0^{-2m-1} = 0,$$

откуда

$$S_0 = (2mA)^{\frac{1}{2m+1}}.$$

Этому значению S соответствует значение:

$$\begin{aligned} B_0 &= S_0 + AS_0^{-2m} = S_0(1 + AS_0^{-(2m+1)}) = S_0 \left(1 + \frac{1}{2m} \right) = \\ &= \frac{2m+1}{2m} (2mA)^{\frac{1}{2m+1}}. \end{aligned}$$

Итак, уравнение (2) имеет вещественные положительные корни лишь при условии $B \geq B_0$, а именно, при $B = B_0$ имеется один двойной корень $S = S_0$, а при $B > B_0$ — два корня, из которых один в интервале $(0, S_0)$, а другой $> S_0$.

Необходимым и достаточным условием для существования вещественных и положительных решений является, таким образом, неравенство:

$$\frac{2m+1}{2m} (2mA)^{\frac{1}{2m+1}} \leq B,$$

или, что то же,

$$A \leq (2m)^{2m} \left(\frac{B}{2m+1} \right)^{2m+1}.$$

Введем теперь обозначения*:

$$\frac{B^{2m+1}}{A} = \Gamma; \quad \frac{(2m+1)^{2m+1}}{(2m)^{2m}} = \Gamma_0. \quad (5)$$

Тогда указанное критическое неравенство может быть изображено еще так:

$$\Gamma \geq \Gamma_0. \quad (6)$$

Для $\Gamma = \Gamma_0$ оба корня уравнения в S совпадают.

Чтобы ориентироваться в системе значений, которые получает S в зависимости от значений коэффициентов A и B , построим график в прямоугольных декартовых координатах A и B .

Тогда указанная нами граница изобразится параболой:

$$\frac{B^{2m+1}}{A} = \Gamma_0.$$

Каждая точка P графика, лежащая выше указанной границы, т. е. каждая пара значений A, B , удовлетворяющая критическому неравенству (6), определяет, в качестве корней уравнения (2), два значения S_1 и S_2 . Лишь

а самой границе области числа S_1 и S_2 совпадают. Область вещественных положительных корней, таким образом, заполняется двумя семействами изоплет S , а именно $S_1 < S_0$ и $S_2 > S_0$, причем S_0 определяется по формуле (3).

Построение корней S_1 и S_2 , а также изоплет этих корней в нашей диаграмме (рис. 1) дадим в следующем параграфе.

9. Графическое построение корней уравнения в S и изоплеты этих корней

По заданным A и B корни S_1 и S_2 могут быть построены графически следующим образом (рис. 2).

В системе прямоугольных прямолинейных координат (S, y) раз навсегда черчиваем кривую:

$$y = S^{-2m}. \quad (I)$$

При этом раз навсегда выбираем масштаб, который может быть произвольным в горизонтальном и вертикальном направлениях.

Замечаем, что точка $(1,1)$ лежит на кривой (I).

* Исходя из значения $m = 2,467$, указанного в § 4, находим: $\Gamma_0 \approx 14,75$.

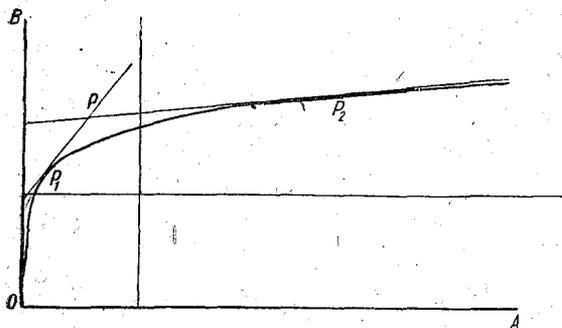


Рис. 1.

В уравнении (2) § 8 преобразуем коэффициенты, положив:

$$\frac{1}{A} = \alpha, \quad \frac{B}{A} = \beta, \quad (1)$$

так что рассматриваемое уравнение заменится следующим:

$$\alpha S + S^{-2m} = \beta. \quad (2)$$

Проводим прямую:

$$y_1 = \beta - \alpha S \quad (II)$$

и отмечаем точки пересечения кривой линии (I) с прямой (II). Абсциссы этих двух точек изобразят, таким образом, корни уравнения (2) или эквивалентного ему уравнения § 8, ординаты же изобразят соответствующие значения S^{-2m} .

Указанное построение может быть описано еще таким образом.

По оси S откладываем отрезки $\overline{OA} = A$ и $\overline{OB} = B$, а по оси OY — отрезок $\overline{OK} = 1$. Проводим затем прямую AK и параллельно ей прямую BL ; которая, как легко видеть, представляет вышеупомянутую линию (II).

Указанным здесь графическим методом для каждой пары параметров A, B могут быть построены корни S_1 и S_2 , поскольку наше уравнение вообще имеет вещественные корни.

Перенеся эти корни на нашу диаграмму в прямоугольных декартовых координатах A, B (рис. 1), мы могли бы проследить распределение значений S_1 и S_2 в поле этой диаграммы. Но проще обратиться непосредственно к этой диаграмме.

Прежде всего легко указать значения, которые принимает S на границе области вещественных корней, а именно:

- 1) по оси OB , т. е. при $A = 0$, имеем $S = B$;
- 2) по демаркационной параболы ($\Gamma = \Gamma_0$) формула (4) § 8 дает:

$$S = \frac{2m}{2m+1} B.$$

Затем эта демаркационная линия, как мы видели, должна представлять собою огибающую изоплет, на которой сходятся изоплеты двух семейств S_1 и S_2 .

Наконец, не трудно убедиться, что самые изоплеты значений S являются прямыми линиями. В самом деле, если в исследуемом уравнении:

$$S + AS^{-2m} = B$$

будем считать S постоянным параметром, то числа A и B следует рассматривать как переменные координаты точек соответствующей изоплет

Из сказанного вытекает, что все искомые изоплеты — прямые линии и притом прямые, касательные к демаркационной параболы.

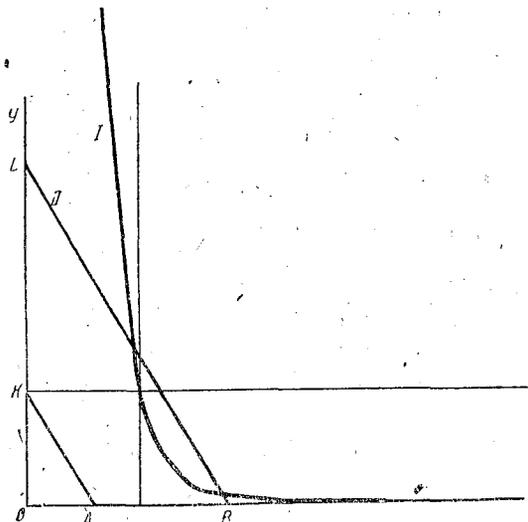


Рис. 2.

Если теперь, обратно, закрепим значения чисел A и B , то, отметив на нашей диаграмме точку P по координатам A и B , проводим из нее касательные к демаркационной кривой. Определившись таким образом точкам касания P_1 и P_2 соответствуют определенные ординаты B_1 и B_2 , а отсюда соответственно:

$$S_1 = \frac{2m}{2m+1} B_1 \quad \text{и} \quad S_2 = \frac{2m}{2m+1} B_2.$$

Еще проще определим величины S_1 и S_2 , продлив обе касательные влево, до пересечения с осью ординат. Ординаты этих точек пересечения непосредственно изображают числа S_1 и S_2 .

Таким образом приходим к новому простому и наглядному способу построения корней уравнения в S .

§ 10. Уравнение неразрывности в лагранжевой форме

После того как найдена функция $\Omega(x, y)$, окончательное разыскание искомого движения приведет к трем дополнительным операциям:

1) к отысканию $S(x, y)$ из уравнений (6) § 7 (задача алгебраическая);
 2) к определению составляющих скорости u и v из уравнений (3) § 7, где эти составляющие выражены как явные функции от частных производных функции Ω ;

3) к интегрированию дополнительной системы, служащей для перехода от Эйлеровых к лагранжевым переменным и выражению последних через t [см. уравнения (1) § 2].

Поскольку на рассматриваемом заключительном этапе решения u и v должны считаться уже известными функциями от координат, указанное дополнительное интегрирование сводится к двум квадратурам:

$$\left. \begin{aligned} t - t_0 &= \int_{x_0}^x \frac{dx}{u(x, y)} \\ t - t_0 &= \int_{y_0}^y \frac{dy}{v(x, y)} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

при выполнении которых x и y должны считаться связанными между обоими уравнениями линий тока:

$$\Omega(x, y) = \Omega(x_0, y_0), \quad (2)$$

ли эквивалентными им:

$$\Psi(x, y) = \Psi(x_0, y_0). \quad (3)$$

Заметим, впрочем, что для завершения задачи в лагранжевых переменных нам необходима лишь одна из квадратур (1). Обе же квадратуры совместно лишь воспроизвели бы — в параметрической форме — уже известные нам линии тока.

Равным образом и уравнение неразрывности в лагранжевой форме существо не дало бы, нам уже ничего нового для определения искомого движения. Однако форма, в которой представляется это уравнение, очень интересна.

Введем прежде всего обозначение для функционального определителя:

$$\Delta = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_0, y_0)}. \quad (4)$$

Для любой частицы, как известно, величина Δ остается пропорциональной удельному объему, так что

$$\frac{d}{dt}(\rho\Delta) = 0. \quad (5)$$

Выражая теперь плотность ρ через гельмгольцевы характеристики ψ и S [см. формулу (3) § 4] и заметив, что при адиабатическом движении ψ остается постоянным для частицы, находим:

$$S^m \Delta = F(\Psi), \quad (6)$$

где $F(\Psi)$ — некоторая функция линии тока, которую мы здесь, однако же не можем располагать по произволу, так как она уже вполне определяется семейством линий тока.

§ 11. Упрощение настоящей задачи: волновое движение в несжимаемой жидкости

Как мы видели выше (в конце § 4), волновое движение однородно-несжимаемой жидкости может рассматриваться как частный случай такового же адиабатического движения сжимаемой жидкости. Для этого стоит лишь в подлежащих уравнениях положить $c_v = 0$, или, что то же, $m = 0$. В этом случае гельмгольцевы характеристики ψ и S сводятся соответственно к $\frac{1}{\rho}$ и к p [ср. уравнения (7) и (8) указанного параграфа].

Выражения составляющих скорости u и v через функции тока в данном случае могут быть представлены таким образом:

$$\left. \begin{aligned} u &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

[ср. уравнения (3) § 7].

Здесь, таким образом, мы можем безразлично применять как обычную функцию тока ψ , применяемую в теории несжимаемой жидкости, так и видоизмененную Ψ , связанную с ψ уравнением:

$$\delta\psi = \frac{1}{\rho} \varepsilon\Psi \quad (2)$$

[ср. формулу (3) § 5].

Эта возможность связана, очевидно, с тем обстоятельством, что, имея дело со стационарным движением неоднородной несжимаемой жидкости, мы должны рассматривать плотность ρ как функцию линии тока.

Уравнения (6) § 5 в рассматриваемом случае примут более простой вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \left[\frac{\partial \psi}{\partial y}, \psi \right] &= 0 \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + g - \left[\frac{\partial \psi}{\partial x}, \psi \right] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

а уравнение Бернулли [см. формулу (1) § 7] дает:

$$\frac{p}{\rho} + gy + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] = \varepsilon(\psi). \quad (4)$$

Рассматривая общий случай адиабатического движения сжимаемой жидкости, мы получили для определения искомой функции тока дифференциальное уравнение с частными производными второго порядка. Но там это уравнение нам пришлось представить в параметрической форме через функцию S). Здесь же в уравнение (4) функция p входит линейно. Определив отсюда p и вставив в любое из уравнений (3), например в первое из них, получаем в качестве единственного уравнения, служащего для определения ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right] + \left[gy + \frac{\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2}{2} \right] \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho \varepsilon}{\partial x}. \quad (5)$$

Рассматриваемая здесь задача является, как легко видеть, обобщением рассмотренной Рэлеем (Rayleigh) задачи о волновых движениях, происходящих на горизонтальной поверхности разрыва, разделяющей две несжимаемые жидкости различной плотности, перемещающиеся с различными скоростями.*

Характер возникающих волновых движений и, в частности, их устойчивость здесь существенно зависят от двух основных физических характеристик: скачка плотности и скачка скорости. В нашем случае поверхность разрыва заменяется слоем конечной (или даже бесконечно большой) толщины, и вместо двух характеристических чисел (скачка плотности и скачка скорости) мы имеем дело уже с двумя характеристическими функциями, выражающими распределение по высоте: с одной стороны — плотности и с другой стороны — скорости. Таково физическое значение наших функций ρ и ψ .

§ 12. Заключительное замечание

Рассматриваемая нами задача представляет простейший тип волновых движений в атмосфере; однако лишь после дальнейшего двойного упрощения — 1) после замены воздуха несжимаемой жидкостью и 2) после перехода к предельному случаю, а именно волнам на поверхности раздела двух жидкостей — мы приходим к ряду задач, поддающихся уже в настоящее время отчасти точному, отчасти хотя бы приближенному решению. Тем более замечательно, что при всей трудности поставленной общей задачи мы располагаем точным частным решением в виде известной модели волновых движений Герстнера.**

Модель Герстнера получается как решение, и притом единственное, системы дифференциальных уравнений § 7 при добавочном условии постоянства давления вдоль линии тока, причем это требование может быть выражено уравнением:

$$[S, \Omega] = 0.$$

Здесь мы не будем останавливаться на доказательстве высказанного утверждения, каковое доказательство очень четко и элементарно выполнено в статье Н. Е. Кочина.

Характернейшая особенность герстнеровой зыби состоит, таким образом, в неизменяемости давления для каждой частицы. Так, как в то же время для каждой частицы неизменяема и потенциальная температура, то тот специальный вид волн является „несжимаемым движением сжимаемой жидкости“, по терминологии А. А. Фридмана.

* См. Лэмб, Гидродинамика, § 232—234, а также в учебнике Н. Е. Кочина Н. В. Розе, § 114.

** См. статьи И. А. Кибеля и Н. Е. Кочина в журнале „Прикладная математика механика“ за 1933 г.

Изучение адиабатических волновых процессов в атмосфере живо интересует метеорологов со времени Гельмгольца,* который привлек такие процессы к объяснению столь часто наблюдаемых параллельных облачных рядов. В данном случае волновое движение должно коренным образом отличаться от волн Герстнера, так как последние, очевидно, не могут сопровождаться конденсацией.

В чем же мы должны видеть это коренное отличие? Наряду с указанной характерной особенностью мы можем указать на другую, из нее вытекающую: отсутствие систематического относительного переноса масс в лежащих друг над другом последовательных слоях. Условие это для существования герстнеровых волн необходимо, хотя само по себе недостаточно. Очевидно, что волновое движение, возникшее на почве ламинарного поля скоростей и, следовательно, обладающее заметным взаимным перемещением воздушных слоев, уже не может походить на волны Герстнера и не может уже обладать их основным свойством — сохранять давление по линиям тока.

ZUR MECHANIK DER EINFACHSTEN WELLENBEWEGUNGEN IN DER ATMOSPÄRE

Leo Keller

Zusammenfassung

Hier wird die Mechanik permanenter adiabatischer Wellenbewegungen in einer vertikalen Ebene untersucht. Wird der Vorgang auf ein bewegliche Koordinatensystem bezogen, welches mit dem Wellenprofil fortschreitet, so kommt die Aufgabe auf die Betrachtung eines stationären Vorganges hinaus.

In § 1 werden zunächst die Bewegungsgleichungen nebst der zugehörigen Kontinuitätsgleichung in Euler'scher Form angesetzt. Für den stationären Fall nimmt letztere die vereinfachte Gestalt (β') in § 2 an, woraufhin eine „Stromfunktion“ angesetzt wird [s. die Formeln (3) und (4) des § 2]. Im § 3 wird nun diese Stromfunktion an Stelle der Geschwindigkeitskomponenten in die Bewegungsgleichungen eingeführt, worauf die letzteren die Gestalt (5) annehmen. Hier bedienen wir uns zur abgekürzten Bezeichnung von Funktionaldeterminanten eines Klammerausdrucks, welcher in (1) erklärt wird.

Bei der Betrachtung adiabatischer Prozesse erscheint es zweckmässig nach dem Vorgange von H. v. Helmholtz anstatt der dynamischen Elemente ρ und p neue Charakteristiken φ und S einzuführen, welche mit p und ρ durch die Gleichungen (3) — (8) des § 4 zusammenhängen. Der hierbei erreichte Vorteil besteht wesentlich darin, dass die erste der genannten Grössen bei einem adiabatischen Vorgange für jedes Luftteilchen konstant verbleibt.

In § 5 werden nun diese neuen Charakteristiken in die Bewegungsgleichungen eingeführt, welche hierauf die Gestalt (6) erhalten.

Durch Integration des letztgenannten Gleichungssystems erhalten wir in § 7 die Bernoullische Gleichung (1). Ferner wird hier durch Einführung einer neuen Stromfunktion (2) eine Vereinfachung der Bewegungsgleichungen und deren Integrals erreicht [s. ibid. die Formeln (5) und (6)].

Es wird bemerkt, dass die Bernoullische Gleichung wohl die Funktion $S(x, y)$, nicht aber deren Ableitungen enthält. Wird nun diese Gleichung (algebraisch) nach S aufgelöst und das Resultat in eine beliebige der Gleichungen (5), eingesetzt, so ergibt sich eine Gleichung mit partiellen Ableitungen

* H. v. Helmholtz. Über atmosphärische Bewegungen (Zweite Mitteilung). Zur Theorie von Wind und Wellen. (1889). Wissenschaftliche Abhandlungen, III Band, S. 309.

gen zweiter Ordnung, welche zur Bestimmung der einzigen verbleibenden unbekannteten Funktion Ω dient (φ hat hier als bekannte Funktion zu gelten).

Die algebraische Auflösung der Bernoulli'schen Gleichung nach S ist Gegenstand der nächsten §§ 8—9. Nach Einführung der Bezeichnungen (1) wird die Gleichung in der Gestalt (2) dargestellt. Nach dem Kartesischen Satze besitzt die Gleichung entweder 2 reelle positive Wurzeln, oder keine; im Grenzfall existiert eine Doppelwurzel. Es wird zunächst das Kriterium der Existenz von reellen Wurzeln aufgestellt [s. die Formeln (5) und (6)] und durch ein Diagramm (Fig. 1) erläutert. Hier wird zunächst in Kartesischen Koordinaten (A, B) die kritische Kurve (6) dargestellt, welche von unten das Gebiet der reellen Wurzeln begrenzt. Hieran schließt sich in § 9) in zwei verschiedenen Formen die graphische Konstruktion der Wurzeln unserer Gleichung (2) an, sowie eine Untersuchung über die Verteilung der Wurzelwerte im Felde des oben erwähnten Diagramms. Hier sind folgende Resultate hervorzuheben: 1) längs der Ordinatenachse (also für $A=0$) erhalten wir die Werte $S=B$; 2) sämtliche Isoplethen der Werte von S im Felde (A, B) sind die geraden Linien, welche die kritische Parabel (6) als deren Tangenten einhüllen.

Die letzten drei Paragraphen enthalten ergänzende Bemerkungen und zwar: § 10—die Kontinuitätsgleichung in der Lagrange'schen Form; § 11—die Anwendung der oben entwickelten Differentialgleichungen auf eine inkompressible Flüssigkeit, in welchem Falle bloss $m=0$ zu setzen ist; endlich § 12—die Gerstner'schen Wellen als Spezialfall unserer Aufgabe.

Das Gerstner'sche Modell ergibt sich nämlich als Lösung des in § 7 aufgestellten Systems von Differentialgleichungen, und zwar als einzige Lösung, welche der ergänzenden Forderung genügt, nach welcher der Druck p für jedes Luftteilchen (also auch längs jeder Stromlinie) konstant verbleiben soll.

Diese spezielle Bewegungsform war kürzlich Gegenstand zweier bemerkenswerten Mitteilungen von I. A. Kiebel und N. E. Kotschin in der russischen Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik (Applied Mathematics and Mechanics, 1933, Band 1, S. 51 und 251).

Wenn es nun höchst wahrscheinlich erscheint, dass die allbekannteten Helmholtz'schen Wogenwolken ihre Entstehung einer der in der gegenwärtigen Arbeit betrachteten Bewegungsformen verdanken, so muss andererseits hervorgehoben werden, dass diese Wellenbewegung jedenfalls von der Gerstner'schen wesentlich verschieden sein muss, da diese letztere — eben infolge ihrer oben erwähnten charakteristischen Eigenschaft — nie von Kondensation begleitet werden kann.

О ВЛИЯНИИ РЕЛЬЕФА ЗЕМЛИ НА ВОЛНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ МАСС ЖИДКОСТИ РАЗНОЙ ПЛОТНОСТИ

Н. Е. Кочин

§ 1. В настоящей статье мы рассматриваем для нескольких простейших случаев влияние рельефа земли на волны, образующиеся на поверхности раздела двух масс жидкости разной плотности. Мы делаем при этом ряд предположений, сильно упрощающих задачу. Так например, движение предполагаем плоским, а волны, образующиеся на поверхности раздела считаем очень малыми.

Сначала мы строим волны, происходящие от наличия в жидкости вихря или, общее, какой-либо особенности. Затем мы находим два примера волн, происходящих от неровного характера дна нижней жидкости. Во всех примерах мы получаем один и тот же общий характер движения. А именно, если поток нижней жидкости набегаёт на какое-либо препятствие, то перед препятствием волны на поверхности раздела двух жидкостей почти незаметны; напротив, за препятствием поверхность раздела принимает резко выраженный волнистый характер, причём на очень больших расстояниях за препятствием поверхность раздела имеет правильную синусоидальную форму.

Рассматриваемая задача имеет применение в динамической метеорологии для объяснения влияния гор на облачные гряды Гельмгольца. В книге Вегенера „Термодинамика атмосферы“ указан целый ряд примеров воздействия гор на такие облачные системы. Как указывает Вегенер воздействие гор сводится, при надлежащих условиях распределения влажности в атмосфере, к образованию стационарно расположенных облаков на подветренной стороне горы. Как мы видим, этот результат получает качественное объяснение в даваемом нами решении рассматриваемой гидродинамической задачи.

§ 2. Сформулируем теперь точно рассматриваемую нами гидродинамическую задачу. Мы рассматриваем плоскую задачу. Имеем две залегающие жидкости. Нижняя жидкость имеет постоянную плотность ρ_1 , верхняя — постоянную плотность ρ_2 . Обе жидкости считаются идеальными, а течения их предполагаются безвихревыми. На обе жидкости действует сила тяжести, ускорение которой g постоянно и направлено по отрицательной оси OY .

Мы будем считать далее, что в нижней жидкости в точке α имеется вихрь интенсивности Γ или, общее, какая-либо особенность. Мы предполагаем далее, что нижняя жидкость имеет при $y \rightarrow -\infty$ постоянную скорость c_1 , отличную от нуля и направленную по положительной оси OY . Верхняя жидкость имеет при $y \rightarrow +\infty$ постоянную скорость c_2 , направленную по оси OY , причём c_2 может быть положительно, отрицательно или равно нулю. Мы считаем далее скорости частиц как верхней, так и нижней жидкости ограниченными при $\sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty$.

Если бы особенность в точке α отсутствовала, то линия раздела между обеими жидкостями была бы прямой, параллельной оси OY . Наличи

особенности деформирует эту линию. Мы предполагаем, что деформация эта столь мала, что на линии раздела можно применять обычные упрощения, которые делаются в теории бесконечно малых волн. Очевидно, это предположение сводится к условию малости величины циркуляции вихря или же к предположению достаточного удаления точки вихря от оси OX .

Наконец мы поставим еще одно условие, а именно мы будем рассматривать только стационарные течения.

§ 3. Переходим теперь к установлению основных уравнений задачи.

При отсутствии особенности комплексный потенциал скорости имел бы значение $c_1 z$ для нижней жидкости и значение $c_2 z$ для верхней, где $z = x + iy$. Обозначая добавочные потенциалы, вызываемые особенностью, соответственно через $w_1(z)$ и $w_2(z)$, будем окончательно иметь для комплексных потенциалов выражения:

$$w_k + c_k z \quad (k = 1, 2).$$

Как всегда, пусть

$$w_k(z) = \varphi_k(x, y) + i\psi_k(x, y) \quad (k = 1, 2),$$

тогда составляющие скорости будут:

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + c_k \\ v_k &= \frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Обозначим еще через ζ возвышение точки линии раздела над осью OX . Иско, что ζ есть функция одного только x . Но линия раздела есть линия тока, следовательно частицы, находящиеся на линии раздела, движутся вдоль этой линии. Вертикальная скорость $v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$ такой частицы, находящейся с нижней стороны линии раздела, равна, очевидно, горизонтальной скорости $u_1 = c_1 + \frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$, умноженной на тангенс угла наклона линии раздела, т. е. на $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$. Так как $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$ считаются на линии раздела малыми величинами, то, пренебрегая малыми второго порядка, получаем условие:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = c_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (2)$$

аналогично

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} = c_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (3)$$

Эти условия должны, собственно говоря, выполняться на линии раздела L , но ввиду малости ζ мы можем потребовать выполнения условий (2) и (3) на оси OX , т. е. при $y = 0$.

Составим теперь условия непрерывности давления по линии раздела L при переходе из одной жидкости в другую. По формуле Бернулли мы имеем:

$$\begin{aligned} p_k &= C_k - \frac{\rho_k}{2} (u_k^2 + v_k^2) - g \rho_k y = \\ &= C_k - \frac{\rho_k}{2} \left[c_k^2 + 2c_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_k}{\partial y} \right)^2 \right] - g \rho_k y, \end{aligned}$$

где C_k — постоянные. Но на линии раздела L величины $\frac{\partial \varphi_k}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi_k}{\partial y}$ малы, поэтому по линии раздела L мы можем с достаточной точностью написать, что

$$p_k = C_k' - \rho_k c_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} - g \rho_k \zeta;$$

приравнивая эти выражения и выбирая надлежащим образом положения оси Ox , мы получаем условие, которое опять будем считать выполняющимся на оси Ox :

$$g \zeta (\rho_1 - \rho_2) = \rho_2 c_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} - \rho_1 c_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad \text{при } y = 0. \quad (4)$$

§ 4. Функция $w_1(z)$ голоморфна во всей нижней полуплоскости, кроме точки α , в которой эта функция имеет особенность. А именно, если в точке α находится вихрь интенсивности Γ , то должно быть

$$w_1(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - \alpha) + W_1(z);$$

где $W_1(z)$ — голоморфная в нижней полуплоскости функция. Точно также если в точке α находится источник мощности Q , то должно быть

$$w_1(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln(z - \alpha) + W_1(z);$$

если особенность есть диполь, то

$$w_1(z) = \frac{B}{z - \alpha} + W_1(z),$$

где B — комплексное число, и т. д.

Чтобы сразу разобрать все эти случаи, мы обозначим через $\omega(z) = \varphi + i\psi$ комплексный потенциал, происходящий от рассматриваемой особенности, так что, например, в случае вихря

$$\omega(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - \alpha).$$

Мы будем тогда иметь

$$w_1(z) = \omega(z) + W_1(z), \quad (5)$$

где $W_1(z)$ — голоморфная функция в нижней полуплоскости.

Имея в виду вытекающее из (2) и (3) условие:

$$\frac{c_2}{c_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial y} \quad \text{при } y = 0, \quad (6)$$

мы положим

$$w_2(z) = \frac{c_2}{c_1} \omega(z) + \frac{c_2}{c_1} W_1(z). \quad (7)$$

Но $w_2(z)$ должно быть голоморфной функцией в верхней полуплоскости с другой стороны, ясно, что $\omega(z)$ тоже есть голоморфная функция в верхней полуплоскости. Следовательно $W_2(z)$ голоморфна в верхней полуплоскости.

Если мы ведем обозначения:

$$W_k(z) = \Phi_k(x, y) + i\Psi_k(x, y) \quad (k = 1, 2),$$

то в силу условия (6) будем иметь:

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial y} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial y} \quad \text{при } y = 0.$$

Мы удовлетворим этому последнему условию, если примем за значение функции $\frac{\partial \Phi_2}{\partial y}$ в точке (x, y) значения функции $\frac{\partial \Phi_1}{\partial y}$ в точке $(x, -y)$, а также если положим:

$$\Phi_2(x, y) = -\Phi_1(x, -y). \quad (8)$$

Дифференцируя обе части равенства (4) по x и подставляя слева вместо $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ его выражение $\frac{1}{c_1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}$, получаемое по формуле (2), находим:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{c_1}{g(\rho_1 - \rho_2)} \left[\rho_2 c_2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} - \rho_1 c_1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \right] \quad \text{при } y = 0, \quad (9)$$

но в силу (8)

$$\frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} \quad \text{при } y = 0,$$

поэтому из (5) и (7) легко находим, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} &= \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} = \\ &= 2 \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{c_2}{c_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \quad \text{при } y = 0. \end{aligned}$$

Поэтому условие (9) после простого преобразования принимает вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{2 \rho_2 c_2^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad \text{при } y = 0. \quad (10)$$

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$\omega_1(z) = \overline{\omega(\bar{z})}, \quad (11)$$

являющуюся, очевидно, голоморфной функцией в нижней полуплоскости, и положим:

$$\tilde{\omega}(z) = \omega(z) + \omega_1(z). \quad (12)$$

Если

$$\tilde{\omega}(z) = \tilde{\varphi}(x, y) + i \tilde{\psi}(x, y),$$

то ясно, что при $y = 0$

$$\tilde{\varphi} = 2\varphi; \quad \tilde{\psi} = 0$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial x} = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial x} = 0 \quad \text{при } y = 0.$$

Поэтому если мы положим:

$$\omega_1(z) = \frac{\rho_2 c_2^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} \tilde{\omega}(z) + \omega_3(z) \quad (13)$$

и введем для краткости обозначение:

$$\nu = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2}, \quad (14)$$

то, как видно из (10), функция $\varphi_3(x, y)$ будет удовлетворять уже одному условию:

$$\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial \varphi_3}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (15)$$

§ 5. Для нахождения функций $\varphi_3(x, y)$ применим метод, принадлежащий М. В. Келдышу.

В комплексной форме последнее условие может быть записано так

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{d^2 w_3}{dz^2} + i \nu \frac{dw_3}{dz} \right\} = 0 \quad \text{при } y = 0. \quad (16)$$

Функция комплексного переменного z :

$$f(z) = \frac{d^2 w_3}{dz^2} + i \nu \frac{dw_3}{dz}$$

есть функция однозначная и голоморфная во всей нижней полуплоскости за исключением особой точки $z = \alpha$. Так как и $w_1(z)$ и $\tilde{\omega}(z)$ имеют в точке $z = \alpha$ особенность $\omega(z)$, то из (13) ясно, что $w_3(z)$ имеет в этой точке особенность:

$$\omega(z) = \frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2},$$

а следовательно функция $f(z)$ имеет особенность:

$$F(z) = \frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} \left[\frac{d^2 \omega}{dz^2} + i \nu \frac{d\omega}{dz} \right]. \quad (17)$$

Но условие (16) показывает, что функция $f(z)$ аналитически продолжает в верхнюю полуплоскость следующей формулой:

$$f(z) = -\overline{f(\bar{z})}.$$

Следовательно функция $f(z)$ есть однозначная аналитическая функция во всей плоскости комплексного переменного, имеющая особенность в двух точках; в точке α особенность (17) и в точке $\bar{\alpha}$ особенность $-\overline{F(\bar{z})}$. Считая $f(z)$ обращаемой в нуль в бесконечно далекой точке будем иметь:

$$f(z) = \frac{d^2 w_3}{dz^2} + i \nu \frac{dw_3}{dz} = F(z) - \overline{F(\bar{z})}. \quad (18)$$

Проинтегрировав полученное уравнение, мы определим функцию w_3 с точностью до функции

$$ae^{-i\nu z} + b, \quad (19)$$

содержащей две произвольных постоянных, причем постоянная b , очевидно, не оказывает никакого влияния на движение жидкости. Постоянную a можно определить, если поставить еще добавочное требование, что при $x = -\infty$ никакого возмущения жидкости нет или, общепринято, что при $x = -\infty$ мы имеем волны длины $\frac{2\pi}{\lambda}$, имеющие заданную амплитуду и заданную фазу.

Определив функцию $w_1(z)$ по формуле (13) и имея в виду, что

$$W_2(z) = -\overline{W_1(z)},$$

$$W_1(z) = w_1(z) - \omega(z) = \overline{\omega(z)} \frac{\rho_2 c_2^2}{\rho_2 c_2^2 + \rho_1 c_1^2} - \omega(z) \frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} + w_3(z),$$

осле простых вычислений найдем, что

$$w_2(z) = \frac{c_2}{c_1} \left[\frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} \tilde{\omega}(z) - \overline{w_3(z)} \right]. \quad (20)$$

Определим еще профиль волны.

Из формулы (2) в силу

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = -\frac{\partial \psi_1}{\partial x}$$

легко найдем, что

$$\zeta = -\frac{1}{c_1} \psi_1(x, 0), \quad (21)$$

читая надлежащим образом выбранной постоянной, входящую в ψ_1 .

§.6. Остановимся ещё на вопросе об единственности полученного нами решения.

Допустим, что кроме найденного нами решения задачи есть еще какое-то решение ее. Образует разность между этим вторым решением нашим решением. В силу линейности всех наших уравнений (2), (3) и (4), упомянутая разность тоже будет решением нашей задачи, но только уже никакой особенности в точке α не будет.

Итак, вопрос сводится к следующему: существуют ли такие функции $w_1(z)$ и $w_2(z)$, голоморфные первая в нижней, а вторая в верхней полу-

плоскости, причем $\left| \frac{dw_1}{dz} \right|$ ограничен в нижней полуплоскости при $|z| \rightarrow \infty$,

$\left| \frac{dw_2}{dz} \right|$ ограничен в верхней полуплоскости при $|z| \rightarrow \infty$ и, кроме того,

исполняются условия (2), (3) и (4)?

Это ясно тогда, что

$$a(z) = w_2(z) + \frac{c_2}{c_1} \overline{w_1(z)}$$

является голоморфной в верхней полуплоскости функцией, и в силу условия (6) производная $a'(z)$ будет вещественной при $y=0$, а следовательно, в силу принципа симметрии Шварца может быть продолжена на всю плоскость комплексного переменного z , причем в симметричных относительно вещественной оси точках $a'(z)$ должно принимать комплексно сопряженные значения.

В силу предположения об ограниченности $\left| \frac{dw_1}{dz} \right|$ и $\left| \frac{dw_2}{dz} \right|$ функция $a'(z)$ должна быть ограниченной по модулю при $|z| \rightarrow \infty$ и, следовательно, должна приводиться к постоянной, которая должна обращаться в нуль, так как $\frac{dw_1}{dz}$ при $y \rightarrow -\infty$, а $\frac{dw_2}{dz}$ при $y \rightarrow +\infty$ должны стремиться к нулю. Итак, $a'(z) = 0$ и, следовательно, $a(z) = \text{const}$. Но эту постоянную, очевидно, можно принять равной нулю; итак,

$$w_2(z) = -\frac{c_2}{c_1} \overline{w_1(z)}.$$

Но тогда

$$\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} = -\frac{c_2}{c_1} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} \quad \text{при } y=0.$$

Поэтому условие (9) принимает вид:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } y=0$$

или в комплексной форме:

$$\operatorname{Re} \left\{ \frac{d^2 w_1}{dz^2} + i\nu \frac{dw_1}{dz} \right\} = 0 \quad \text{при } y=0. \quad (22)$$

Функция

$$b(z) = \frac{d^2 w_1}{dz^2} + i\nu \frac{dw_1}{dz},$$

голоморфная в нижней полуплоскости, может быть продолжена в силу условия (22) в верхнюю полуплоскость по принципу симметрии Шварца.

Функция

$$\int_0^z b(z) dz = w_1'(z) - w_1'(0) + i\nu \int_0^z \frac{dw_1}{dz} dz$$

тоже удовлетворяет условию

$$\operatorname{Re} \int_0^z b(z) dz = 0,$$

но тогда ясно, в силу предположения об ограниченности $\left| \frac{dw_1}{dz} \right|$ в нижней полуплоскости, что $\int_0^z b(z) dz$ при $|z| \rightarrow \infty$ не может расти по модулю

сильнее, чем $k|z|$, где k — постоянная. А значит $\int_0^z b(z) dz$ может иметь при $z = \infty$ разве лишь полюс первого порядка; поэтому функция $b(z)$ будет регулярна в точке $z = \infty$, значит будет приводиться к постоянно величине A . Но эта постоянная может равняться только нулю; в самом деле, из равенства

$$\frac{d^2 w_1}{dz^2} + i\nu \frac{dw_1}{dz} = A$$

следует, что

$$\frac{dw_1}{dz} = \frac{A}{i\nu} + Be^{-i\nu z},$$

т. е.

$$\frac{dw_1}{dz} \rightarrow \frac{A}{i\nu} \quad \text{при } y \rightarrow -\infty,$$

а по условию при $y \rightarrow -\infty$ функция $\frac{dw_1}{dz}$ должна стремиться к нулю. Итак $A=0$ и

$$\frac{d^2 w_1}{dz^2} + i\nu \frac{dw_1}{dz} = 0.$$

Общим решением этого уравнения является:

$$w_1 = k_1 e^{-ivz} + k_2,$$

то выше мы уже отмечали, что найденное нами решение $w_3(z)$ содержит выражение (19). Это показывает, что никакого другого решения задачи, кроме полученного выше, не существует.

§ 7. Переходим теперь к построению частных примеров.

Рассмотрим прежде всего действие на поверхность разрыва вихря циркуляцией Γ (рис. 1). В этом случае

$$\left. \begin{aligned} \omega(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z-a) \\ \overline{\omega(z)} &= -\frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z-\bar{a}) \\ F(z) &= \frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[-\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{iv}{z-a} \right] \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Поэтому уравнение (18) принимает вид:

$$\frac{d^2 w_3}{dz^2} + iv \frac{dw_3}{dz} = \frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[-\frac{1}{(z-a)^2} + \frac{iv}{z-a} - \frac{1}{(z-\bar{a})^2} - \frac{iv}{z-\bar{a}} \right].$$

Общий интеграл этого уравнения имеет следующий вид:

$$w_3(z) = \frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\ln(z-a) - \ln(z-\bar{a}) + 2e^{-ivz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{ivz}}{z-a} dz \right] + C_1 e^{-ivz} + C_2.$$

Следовательно движение определяется формулами:

$$\left. \begin{aligned} y_1(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\ln(z-a) - \ln(z-\bar{a}) + \frac{2\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} e^{-ivz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{ivz}}{z-a} dz \right] + C_1 e^{-ivz} \\ y_2(z) &= \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{c_2}{c_1} \left[\frac{2\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} e^{ivz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{-ivz}}{z-a} dz \right] - \overline{C_1} \frac{c_2}{c_1} e^{ivz} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Пологая $C_1 = A_1 + iB$, $\alpha = -ih$, отделяя в w_1 мнимую часть и пользуясь формулой (21), находим профиль волны:

$$\zeta = \frac{\Gamma}{\pi} \frac{\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} \int_{-\infty}^x \frac{t \cos v(x-t) + h \sin v(x-t)}{t^2 + h^2} dt + \frac{1}{c_1} (A \sin vx - B \cos vx). \quad (25)$$

При $x \rightarrow -\infty$ интеграл стремится к нулю. Если поставить требование, то при $x \rightarrow -\infty$ никакого возмущения жидкости нет, то необходимо принять $A = B = 0$. Таким образом волновой профиль составляется из двух частей: одна часть имеет периодический характер на всем протяжении

поверхности разрыва — это свободные волны с длиной волны $\frac{2\pi}{\lambda}$; другая же часть имеет несимметричный характер. Если ее определять по первому числу предыдущего равенства, то при $x \rightarrow -\infty$ эта часть дает стремящиеся к нулю значения для ординаты волнового профиля, в то время как при очень большом x получаются значения, мало отличающиеся от $a \sin \nu x$, где a — амплитуда волн, вызываемых вихрем.

В дальнейшем мы будем рассматривать только несимметричную часть профиля, причем будем требовать, чтобы волны затухали при $x \rightarrow -\infty$ и в соответствии с этим будем отбрасывать в формулах для w_1 и ζ члены

$$C_1 e^{-i\nu z} \quad \text{и} \quad \frac{1}{c_1} (A \sin \nu x - B \cos \nu x).$$

Чтобы определить амплитуду a получающихся волн, заметим, что

$$\zeta = -\frac{1}{c_1} \operatorname{Im} [w_1(x)]. \quad (9)$$

Но из формулы:

$$w_1(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \left[\ln \left(\frac{z+ih}{z-ih} \right) + \frac{2\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} e^{-i\nu z} \int_{-\infty}^z \frac{e^{i\nu z}}{z-ih} dz \right] \quad (10)$$

ясно, что

$$\zeta(x) = \frac{\Gamma \rho_1 c_1}{\pi (\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2)} \operatorname{Re} \left(e^{-i\nu x} \int_{-\infty}^x \frac{e^{i\nu t}}{t-ih} dt \right). \quad (11)$$

При очень больших положительных x мы имеем приближенно

$$\zeta(x) \approx \frac{\Gamma \rho_1 c_1}{\pi (\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2)} \operatorname{Re} \left(e^{-i\nu x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\nu t}}{t-ih} dt \right).$$

Если мы дополним интеграл равным нулю интегралом, взятым на бесконечно большой окружности, лежащей в верхней полуплоскости, и применим затем теорему о вычетах, то легко получим, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\nu t}}{t-ih} dt = 2\pi i e^{-\nu h};$$

поэтому при больших положительных x

$$\zeta(x) \approx \frac{2\Gamma \rho_1 c_1}{\pi (\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2)} e^{-\nu h} \sin \nu x,$$

так что амплитуда образующихся волн равна:

$$a = \frac{2\Gamma \rho_1 c_1}{\pi (\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2)} e^{-\nu h}.$$

случае источника с интенсивностью Q все вычисления протекают совершенно аналогично. Окончательные результаты таковы:

$$\left. \begin{aligned}
 \psi_1(z) &= \frac{Q}{2\pi} \left[\ln(z-\alpha) + \ln(z-\bar{\alpha}) - \frac{2\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} e^{-ivz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{ivz}}{z-\alpha} dz \right] \\
 \psi_2(z) &= \frac{Q}{2\pi} \frac{c_2}{c_1} 2 \frac{\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} e^{ivz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{-ivz}}{z-\alpha} dz \\
 \zeta(x) &= \frac{Q\rho_1 c_1}{\pi(\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2)} \operatorname{Im} \left(e^{-ivx} \int_{-\infty}^x \frac{e^{ivz}}{z-\alpha} dz \right) \\
 a &= \frac{2Q\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} e^{-vh}
 \end{aligned} \right\} (31)$$

совершенно аналогично для диполя мы получаем формулы:

$$\left. \begin{aligned}
 \psi(z) &= \frac{B}{z-\alpha} + \frac{\rho_2 c_2^2 - \rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} \frac{\bar{B}}{z-\bar{\alpha}} + \frac{2i\nu\bar{B}\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} e^{-ivz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{ivz}}{z-\alpha} dz \\
 \psi_2(z) &= \frac{c_2}{c_1} \left[\frac{2\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} B \left(\frac{1}{z-\alpha} + i\nu e^{ivz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{-ivz}}{z-\alpha} dz \right) \right] \\
 a &= \frac{4\nu\rho_1 c_1 \pi}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} |B| e^{-vh}
 \end{aligned} \right\} (32)$$

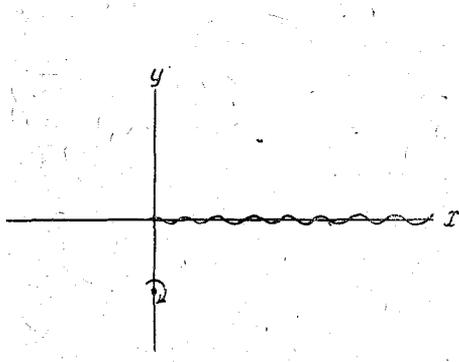


Рис. 1.

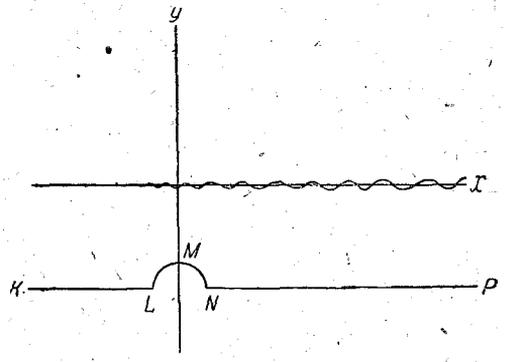


Рис. 2.

Как известно, путем наложения течения, вызываемого диполем, на номерный поток, имеющий направление оси диполя, мы получаем течение цилиндра. Если взять центр цилиндра в точке $z = -ih$, радиус цилиндра принять равным b , а момент диполя принять равным $B = b^2 c_1$, мы в безграничном потоке получили бы в качестве одной из линий а линию $KLMNP$ (рис. 2).

Осуществим такое положение течений в нашем случае. Тогда мы получаем для нижней жидкости комплексный потенциал $c_1 z + \omega_1(z)$, где

$$\omega_1(z) = \frac{c_1 b^2}{z + ih} + \frac{\rho_2 c_2^2 - \rho_1 c_1^2}{\rho_2 c_2^2 + \rho_1 c_1^2} \frac{c_1 b^2}{z - hi} + 2i \frac{\nu c_1 b^2 \rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} e^{-ivz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{+ivz}}{z - ih} dz. \quad (3)$$

Рельеф для нижней жидкости, соответствующий этому течению, определяется формулой:

$$y + h - \frac{b^2(y + h)}{x^2 + (y + h)^2} + \frac{\rho_2 c_2^2 - \rho_1 c_1^2}{\rho_2 c_2^2 + \rho_1 c_1^2} \frac{b^2(h - y)}{x^2 + (y - h)^2} + \frac{2\nu c_1 b^2 \rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} \operatorname{Re} \left(e^{-ivz} \int_{-\infty}^z \frac{e^{+ivz}}{z - ih} dz \right) = 0. \quad (3)$$

Эта кривая тем меньше отличается от кривой $KLMNP$, чем больше и чем меньше b .

Профиль образующихся волн определяется формулой:

$$\zeta(x) = \frac{2\rho_1 c_1^2}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} \left(\frac{b^2 h}{x^2 + h^2} - \nu b^2 \operatorname{Re} e^{-ivx} \int_{-\infty}^x \frac{e^{+ivz}}{z - ih} dz \right). \quad (3)$$

Амплитуда этих волн равна

$$a = \frac{4\pi\rho_1 c_1^2 \nu b^2 e^{-\nu h}}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2}. \quad (3)$$

Более вытянутый профиль горы мы получим, если поместим на линии L два источника, а именно положительный источник Q в точке $-q$ и отрицательный источник $-Q$ в точке $q - ih$. Приближенная форма получающегося профиля есть

$$c_1(y + h) + \frac{Q}{2\pi} \left[\operatorname{arctg} \frac{y + h}{x + q} - \operatorname{arctg} \frac{y - h}{x - q} \right] = 0. \quad (3)$$

Для профиля волны мы получаем, согласно (26), выражение:

$$\zeta(x) = \frac{Q\rho_1 c_1}{\pi(\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2)} \operatorname{Im} \left\{ e^{-ivx} \int_{-\infty}^x e^{ivz} \left(\frac{1}{z + q - hi} - \frac{1}{z - q - hi} \right) dz \right\}. \quad (3)$$

Амплитуда образующихся при $x \rightarrow +\infty$ волн равна

$$a = \frac{4Q\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} e^{-\nu h} \sin(\nu q). \quad (3)$$

Как видно, наибольшая амплитуда получается при удалении источников друг от друга на расстояние $2q = \frac{\pi}{\nu}$, т. е. на расстояние, равное половине длины образующихся волн. Если же расстояние между источниками взять равным длине волны, то вдали от горы волны не образуются вообще.

Мы ограничимся этими немногими примерами, имея в виду подробно рассмотреть вопрос о влиянии на волны произвольного рельефа дна в другой статье.

ÜBER DEN EINFLUSS DES BODENPROFILS AUF DIE WELLEN AN DER GRENZFLÄCHE VON ZWEI FLÜSSIGKEITEN VERSCHIEDENER DICHTIGKEIT

N. E. Kotschin

Zusammenfassung

Wir untersuchen einige Beispiele des Einflusses des Bodenprofils auf die Wellen an der Grenzfläche von zwei Flüssigkeiten verschiedener Dichtigkeit. Dieses Problem findet seine Anwendung in der Meteorologie, nämlich in der Frage des Einflusses von Gebirgen auf einige Wolkentypen.

Wir gehen von den folgenden Voraussetzungen aus. Zwei Flüssigkeiten von konstanten Dichtigkeiten ρ_1 und ρ_2 liegen übereinander. Wir untersuchen die stationäre, wirbelfreie Bewegung dieser Flüssigkeiten parallel der vertikalen Ebene. Die Schwerkraft wirkt parallel der Y -Achse. Die untere Flüssigkeit ist unbegrenzt in der Richtung der negativen Y -Achse und hat dort die konstante Geschwindigkeit $c_1 > 0$ parallel der positiven X -Achse; die obere Flüssigkeit ist unbegrenzt in der Richtung der positiven Y -Achse und hat dort die konstante Geschwindigkeit c_2 parallel der X -Achse.

In einem Punkte der unteren Flüssigkeit findet sich ein Wirbel, oder, allgemein eine Singularität der Bewegung, welche die Störung der Bewegung, bestimmt. Wir setzen die Störung der Bewegung an der Grenzlinie so klein voraus, dass die üblichen Voraussetzungen der Theorie der unendlich kleinen Wellen annehmbar sind.

Wir finden allgemeine Formeln und wenden sie auf einige Sonderfälle an.

Die gefundene Bewegung setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Der erste Teil stellt die freien Wellen dar, deren Länge gleich $\lambda = \frac{2\pi}{\nu}$ ist, wo

$$\nu = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2}$$

und die Amplitude willkürlich ist.

Der zweite Teil stellt die erzwungenen Wellen dar; das entsprechende Wellenprofil trägt einen unsymmetrischen Charakter. Indem wir annehmen, dass bei $x \rightarrow -\infty$ keine Störung der Bewegung vorhanden ist, finden wir bei $x \rightarrow +\infty$ die regelmässige sinusoidale Form des Wellenprofils mit ganz bestimmter Amplitude a .

Für den Fall eines Wirbels, der in der unteren Flüssigkeit im Abstände h von der Grenzlinie liegt und die Zirkulation Γ besitzt, finden wir

$$a = \frac{2\Gamma\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} e^{-\nu h}$$

Für den Fall einer Quelle, deren Ergiebigkeit Q ist, finden wir in analoger Weise

$$a = \frac{2Q\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2} e^{-\nu h}$$

Zum Schluss untersuchen wir in einigen Fällen den Einfluss des Bodenprofils der unteren Flüssigkeit. Zum Beispiel, wenn wir eine Unebenheit des Bodenprofils in der Form eines Halbzylinders vom Radius b haben und wenn die Tiefe der unteren Flüssigkeit gleich h ist, so ist

$$a = \frac{4\pi\rho_1 c_1^2 b^2 \nu e^{-\nu h}}{\rho_1 c_1^2 + \rho_2 c_2^2}$$

ДВИЖЕНИЕ ФРОНТАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ В БАРОТРОПНОЙ ИЛИ БАРОКЛИННОЙ АТМОСФЕРЕ

И. Кибель

Поверхности разрыва метеорологических элементов, а в частности фронтальные поверхности (поверхности скольжения) играют исключительную роль в жизни атмосферы. Специфика атмосферных движений, однако такова, что лишь очень редко мы имеем право рассматривать неподвижные поверхности разрыва, — реальная атмосфера пронизана поверхностями разрыва перемещающимися и деформирующимися. Математическое изучение таких поверхностей и связанных с ними движений воздуха представляет значительные трудности. Здесь речь идет об отыскании тех или иных величин, зависящих от четырех независимых переменных (две горизонтальные координаты, вертикальная координата, время), причем искомыми величинами (скорости, давление, плотность, форма поверхности раздела) входят в задачу, как говорят математики, нелинейно, т. е. удовлетворяя нелинейным дифференциальным уравнениям. Многочисленные авторы линиаризировали эту задачу применительно к изучению условий устойчивости или неустойчивости неподвижной фронтальной поверхности (схема Маргулеса, циклогенез): малые колебания, наложенные на такую поверхность изучались, например, в замечательной работе Н. Е. Кочина, * им посвящена большая часть известной книги „Physikalische Hydrodynamik“ V. Bjerknes и др., их исследовали Haurwitz и многие другие авторы. Однако здесь, как повидимому во всех построениях, пользующихся методом малых колебаний, решается лишь вопрос о том, когда будет потеряна устойчивость фронтальной поверхности, но остается совершенно неизвестным, что будет происходить после потери устойчивости. **

В предыдущей статье *** мною был дан эффективный метод решения нелинейной задачи о движении поверхностей разрыва и отделяемых их масс воздуха; это решение мне удалось получить ценою ряда тяжелых ограничений. Самых сильных ограничений было три:

а) я рассматривал лишь такие движения, в которых все метеорологические элементы не зависят от одной из горизонтальных координат („плоская“ задача, осесимметрическая задача); таким образом я с самого начала сводил число независимых переменных с четырех к трем (одна горизонтальная координата, вертикальная координата, время);

* N. Kotschin. Über die Stabilität von Margulësschen Diskontinuitätsflächen. *Beiz. Physik d. fr. Atm.*, B. 19, 1932.

** Исключение составляет статья Rosenhead (*Proc. Roy. Soc. (A)*, Vol. 134, London 1932) относящаяся к потере устойчивости поверхностей разрыва, но в этой работе рассмотрено к сожалению, схемы, очень далекие от того, что происходит в атмосферной действительности, а потому она позволяет сделать применительно к атмосфере лишь те или иные качественные заключения.

*** И. Кибель. О движениях атмосферы, при которых фронтальные поверхности, отделяющие две различные массы воздуха, испытывают конечные деформации и перемещены. *Труды ГГО*, вып. 10, ч. I и вып. 13, ч. II.

б) я считал, что горизонтальные компоненты скоростей движения воздуха не зависят от вертикальной координаты (высоты), меняясь при переходе через фронтальную поверхность скачком и непрерывно меняясь при изменении горизонтальной координаты и времени; это ограничение позволило мне выделить зависимость всех остальных элементов от высоты, оставив лишь две независимых переменных, что дало возможность извить эффективные (даже графические) методы вычислений решения;

в) я считал, что каждая масса воздуха имеет свою постоянную плотность, т. е. является „несжимаемой жидкостью“, и это позволило мне вести задачу к решению одного дифференциального уравнения 2-го порядка (или к системе двух дифференциальных уравнений 1-го порядка).

Последнее из перечисленных ограничений кажется мне наиболее тяжелым; именно его мне захотелось устранить в первую очередь. В настоящей заметке я показываю, как мне удалось сделать это, не накладывая никаких новых ограничений на картину движения.

§ 1. Рассмотрим воздух, обладающий переменной плотностью и движущийся под действием силы тяжести. Пусть всегда существует одна поверхность, при переходе через которую метеорологические элементы эрпят разрыв непрерывности. Поверхность эту будем предполагать поверхностью скольжения, т. е. будем считать, что давление и нормальная этой поверхности составляющая скорости воздуха разрыва не терпят. Пусть в некоторый „начальный“ момент времени состояние масс воздуха, вид поверхности раздела известны. Постараемся решить задачу о том, как начнет перемещаться и деформироваться эта поверхность, а также какое движение воздушных масс, отделенных этой поверхностью, возникнет.

Поверхность земли будем считать горизонтальной плоскостью. Никаких принципиальных затруднений не встретится при обобщении полученных здесь результатов на случай земли сферической или на случай налия гор.* Мы будем решать лишь „плоскую“ задачу — именно предположим, что как в той, так и в другой массе ни один из метеорологических элементов не зависит от одной из горизонтальных координат, например x . В частности, уравнение поверхности раздела будем писать в виде

$$z = \zeta(y, t)$$

— вертикальная координата, y — горизонтальная, t — время, $\zeta(y, t)$ — функция, известная в начальный момент и подлежащая определению для всех других моментов t . Начало координат поместим на поверхности земли. Все полученные нами результаты могут быть без труда обобщены на случай осевой симметрии.

Фронтальная поверхность (поверхность раздела) отделяет друг от друга две массы воздуха; назовем эти массы „первой“ и „второй“ (в несредственных приложениях будем первую массу считать „холодной“, вторую „теплой“ и все метеорологические элементы наших масс будем обозначать значками 1 или 2. Уравнения движения в обеих массах могут быть записаны в виде:

$$0 = 2\omega_y w_i - 2\omega_z v_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y} + w_i \frac{\partial u_i}{\partial z},$$

$$-\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial y} = 2\omega_z u_i - 2\omega_x w_i + \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} + w_i \frac{\partial v_i}{\partial z},$$

($i = 1, 2$)

$$-\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial z} = g + 2\omega_x v_i - 2\omega_y u_i + \frac{dw_i}{dt}, \quad \frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i v_i}{\partial y} + \frac{\partial \rho_i w_i}{\partial z} = 0.$$

* Loc. cit. И. Кибель, ч. II, гл. 3.

Здесь u_i, v_i, w_i — компоненты скоростей по осям x, y, z соответственно $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ — проекции угловой скорости вращения земли, p_i — давление ρ_i — плотность, g — ускорение силы тяжести. Система координат выбрана правая.

На фронтальной поверхности должны быть выполнены условия: *

$$(p_1)_{z=\zeta(y,t)} = (p_2)_{z=\zeta(y,t)},$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -(v_1)_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (w_1)_{z=\zeta} = -(v_2)_{z=\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (w_2)_{z=\zeta}.$$

Мы должны рассмотреть отдельно случай, когда фронтальная поверхность нигде не пересекает поверхность земли (случай „инверсии“), и случай, когда имеется перемещающийся по поверхности земли „фронт“.

Обращаясь к первому случаю, заметим прежде всего, что в первой среде (прилегающей к земле) здесь должно быть

$$(w_1)_{z=0} = 0,$$

во второй среде краевые условия будут различные в зависимости от того какую границу у второй среды мы выберем. Можно рассмотреть отдельно два случая:

1) граница второй среды есть горизонтальная твердая стенка ** $z=H$, и тогда придется написать:

$$(w_2)_{z=H} = 0;$$

2) граница второй среды есть „свободная поверхность“ (рис. 1):

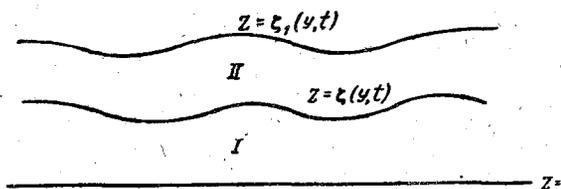


Рис. 1.

$$z = \zeta_1(y, t),$$

тогда

$$(p_2)_{z=\zeta_1(y,t)} = \text{const} = \alpha$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = -(v_2)_{z=\zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + (w_2)_{z=\zeta_1}.$$

Если же мы желаем решить задачу о собственно фронте, а не об инверсии, нам придется считать, что фронтальная поверхность где-то пересекает землю и на земле будет

$$(w_1)_{z=0} = (w_2)_{z=0} = 0,$$

а наверху — либо

$$(w_1)_{z=H} = (w_2)_{z=H} = 0$$

(случай твердой стенки $z=H$), либо

$$(p_1)_{z=\zeta_2(y,t)} = (p_2)_{z=\zeta_2(y,t)} = \alpha,$$

$$\frac{\partial \zeta_2}{\partial t} = -(v_2)_{z=\zeta_2} \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} + (w_2)_{z=\zeta_2}; \quad \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} = -(v_1)_{z=\zeta_1} \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + (w_1)_{z=\zeta_1},$$

где $z = \zeta_1(y, t)$ и $z = \zeta_2(y, t)$ — уравнения свободной поверхности для первой и второй среды соответственно (рис. 2).

* Лос. cit., Кибель, ч. I, гл. I, формулы (8).

** Это близко описывает положение вещей даже в случае несжимаемой жидкости.

Наконец, может так случиться, что первая среда вся лежит между поверхностью разрыва и твердой стенкой (рис. 3).

Таковы краевые условия задачи.

Не будем уточнять начальных условий, а обратимся сперва к упрощению наших уравнений.

§ 2. Как это делается обычно в метеорологии, отбросим члены $2\omega_y w_i$, $2\omega_x w_i$, малые по сравнению с членами $2\omega_z v_i$, $2\omega_z u_i$ соответственно; отбросим также члены $\frac{dw_i}{dt} = 2\omega_y u_i + 2\omega_x v_i$, малые по сравнению с g .*

Наложим теперь на нашу задачу последнее ограничение — будем считать, что горизонтальные составляющие u_i и v_i скоростей не зависят от z , так что

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} = \frac{\partial v_i}{\partial z} = 0.**$$

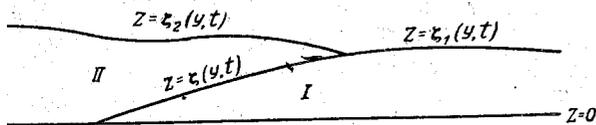


Рис. 2.

Это ограничение совпадает с ограничением, сделанным нами в цитированной работе; оно основано на том, что изменения u_i и v_i при горизонтальном перемещении здесь более существенны, чем изменения u_i и v_i по высоте (мы рассматриваем идеальную, без наличия турбулентности, жидкость), причем последнее изменение достаточно хорошо описывается наличием поверхности разрыва, на которой, естественно, u_i и v_i герпят скачок.

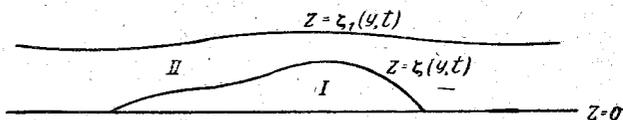


Рис. 3.

Уравнения Эйлера примут теперь следующий вид:

$$0 = -2\omega v_i + \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial y}, \quad (1)$$

$$-\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial y} = 2\omega u_i + \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y}, \quad (2)$$

$$-\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial z} = g, \quad (3)$$

где $\omega = \omega_z$. Обозначим правую часть уравнения (2), зависящую только от y и t , через $-\frac{\partial q_i}{\partial y}$, где $q_i = q_i(y, t)$ — неизвестная функция от y и t . Тогда

$$2\omega u_i + \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial y} = -\frac{\partial q_i}{\partial y}, \quad (4)$$

* Это упрощение может быть признано тем более законным, что здесь речь идет о движениях сильно протяженных в горизонтальном направлении и мало протяженных по вертикали — о движениях типа длинных волн.

** Как легко убедиться из дальнейшего, здесь речь идет по существу о начальном условии. Именно, наши построения таковы, что если u_i и v_i в начальный момент не зависят от z , то и всегда будет

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} = \frac{\partial v_i}{\partial z} = 0.$$

так что

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial y} = \frac{\partial q_i}{\partial y}. \quad (5)$$

Исключая ρ_i из (5) и (3), мы приходим к уравнению в частных производных первого порядка для определения p_i :

$$\frac{\partial q_i}{\partial y} \frac{\partial p_i}{\partial z} + g \frac{\partial p_i}{\partial y} = 0.$$

Следовательно

$$p_i = \Pi_i [q_i(y, t) - gz, t], \quad (6)$$

где Π_i — произвольная функция своих двух аргументов. Но тогда уравнение (3) нам даст для ρ_i :

$$\rho_i = \frac{\partial \Pi_i(q_i - gz; t)}{\partial q_i}. \quad (7)$$

Мы видим, таким образом, что и плотность и давление могут быть выражены через посредство q_i и z , если мы будем знать одну функцию: $\Pi_i(q_i - gz; t)$ — от двух аргументов. Мы не имеем, однако, никаких дополнительных уравнений для определения функции $\Pi_i(q_i - gz; t)$.

Не желая делать какие-либо предположения о виде притока тепла извне (мы могли бы попытаться определить Π_i из упрощенного уравнения притока тепла), мы оставим вид нашей функции произвольным. Заметим здесь же, что случай несжимаемой жидкости дал бы нам $\rho_i = \text{const}$, т. е. по (7) $\Pi_i(q_i - gz; t) = (q_i - gz) \rho_i + f(t)$, т. е. мы пришли бы к полученному нами в предыдущей работе давлению.*

После того как давление и плотность найдены, температура T_i определится из уравнения Клапейрона:

$$T_i = \frac{p_i}{R \rho_i} = \frac{\Pi_i(q_i - gz; t)}{R \frac{\partial \Pi_i(q_i - gz; t)}{\partial q_i}}. \quad (8)$$

Формулы (6) и (7) описывают движения как баротропной, так и бароклинической атмосферы. В случае баротропной среды можно считать:

$$p_i = \Pi_i(q_i - gz), \quad (9)$$

$$\rho_i = \frac{d \Pi_i}{d q_i} = \Pi_i' \quad (10)$$

(Π_i' означает дифференцирование Π_i по аргументу), причем вид функции Π_i определится при помощи уравнения состояния:

$$\rho_i = f_i(p_i). \quad (11)$$

Так например, для случая изотермии ($T_i = \text{const}$)

$$\rho_i = \frac{1}{RT_i} p_i \quad \text{и} \quad \Pi_i' = \frac{1}{RT_i} \Pi_i,$$

и, если обозначить

$$q_i - gz = \xi_i,$$

$$\Pi_i(\xi_i) = \text{const} e^{\frac{1}{RT_i} \xi_i}.$$

* Loc. cit., ч. I., стр. 32.

Для случая всегда линейного падения температуры с высотой

$$T_i = A_i(y, t) - \gamma_i z$$

($\gamma_i = \text{const}$), так как T_i , так же как p_i и ρ_i , зависит лишь от ξ_i , мы должны иметь

$$A_i = \frac{\gamma_i}{g} q_i,$$

так что

$$T_i = \frac{\gamma_i}{g} \xi_i,$$

и, в силу соотношения (8)

$$\frac{d\Pi_i}{d\xi} = \frac{\Pi_i}{R \frac{\gamma_i}{g} \xi},$$

получим:

$$p_i(\xi) = \Pi_i(\xi) = \text{const } \xi^{\frac{g}{R\gamma_i}},$$

$$\rho_i(\xi) = \text{const } \frac{g}{R\gamma_i} \xi^{\frac{g}{R\gamma_i} - 1}.$$

Если среда бароклинна, то в выражения для p или ρ обязательно будет входить кроме ξ еще и время. Так например, считая попережнему

$$T_i = \frac{\gamma_i}{g} \xi,$$

имеем по (8)

$$\frac{\partial \Pi_i(\xi, t)}{\partial \xi} = \frac{\Pi_i(\xi, t) g}{\gamma_i R \xi},$$

так что

$$p_i(\xi, t) = \Pi_i(\xi, t) = \varphi_i(t) \xi^{\frac{g}{R\gamma_i}},$$

$$\rho_i(\xi, t) = \varphi_i(t) \xi^{\frac{g}{R\gamma_i} - 1} \frac{g}{R\gamma_i},$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция времени.

В общем случае, когда функция Π_i есть функция от двух аргументов: $q_i - gz$ и t , будем обозначать дифференцирование по первому из этих аргументов значком $'$, а дифференцирование по второму точкой сверху. Таким образом

$$\rho_i = \frac{\partial \Pi_i(q_i - gz; t)}{\partial q_i} = \Pi_i',$$

а

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial t} = \Pi_i' \frac{\partial q_i}{\partial t} + \dot{\Pi}_i; \quad \frac{\partial \Pi_i}{\partial y} = \Pi_i' \frac{\partial q_i}{\partial y}; \quad \frac{\partial \Pi_i}{\partial z} = -g \Pi_i'.$$

Как Π_i , так и Π_i' и $\dot{\Pi}_i$ должны нами считаться известными функциями от двух своих аргументов.

§ 3. Обратимся теперь к уравнению неразрывности и проинтегрируем обе его части по z , помня, что v_i от z не зависят; мы придем к соотношению

$$-\rho_i w_i = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho_i dz + \frac{\partial}{\partial y} v_i \int \rho_i dz + \frac{1}{g} F_i(y, t);$$

но

$$\int \rho_i dz = -\frac{1}{g} \int \frac{\partial \Pi_i}{\partial z} dz = -\frac{1}{g} \Pi_i(q_i - gz; t),$$

поэтому

$$g \rho_i(q_i - gz; t) w_i(y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Pi_i(q_i - gz; t) + \frac{\partial}{\partial y} \left[v_i(y, t) \Pi_i(q_i - gz; t) \right] - F_i(y, t) \quad (12)$$

или еще:

$$g \rho_i(q_i - gz; t) w_i(y, z, t) = \Pi_i'(q_i - gz; t) \left(\frac{\partial q_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial q_i}{\partial y} \right) + \ddot{\Pi}_i(q_i - gz; t) + \Pi_i(q_i - gz; t) \frac{\partial v_i}{\partial y} - F_i(y, t). \quad (13)$$

Чтобы определить вид функций $F_i(y, t)$, обратимся к крайевым условиям задачи.

Мы рассмотрим детально случай фронта и свободной поверхности (рис. 2) и опишем отдельно движения, происходящие в областях I, III (первая среда), II и IV (вторая среда) (рис. 4).

Начнем с областей I и II , представляющих наибольший интерес. В области I мы имеем условие $(w_1)_{z=0} = 0$, и поэтому в силу (12)

$$F_1(y, t) = \frac{\partial \Pi_1(q_1; t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} v_1(y, t) \Pi_1(q_1; t),$$

так что

$$g \rho_1(q_1 - gz; t) w_1(y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\Pi_1(q_1 - gz; t) - \Pi_1(q_1; t) \right] + \frac{\partial}{\partial y} v_1(y, t) \left[\Pi_1(q_1 - gz; t) - \Pi_1(q_1; t) \right]. \quad (14)$$

В области II мы должны написать:

$$\Pi_2(q_2 - g\zeta_1; t) = \alpha = \text{const} \quad (15)$$

и

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -v_2 \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + (w_2)_{z=\zeta}. \quad (16)$$

Беря в (13) $z = \zeta_1$ и подставляя $(w_2)_{z=\zeta_1}$ из (16), получим для $F_2(y, t)$:

$$F_2(y, t) = \rho_2(q_2 - g\zeta_1; t) \left(\frac{\partial q_2}{\partial t} + v_2 \frac{\partial q_2}{\partial y} - g \frac{\partial \zeta_1}{\partial t} - v_2 g \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} \right) + \ddot{\Pi}_2(q_2 - g\zeta_1; t) + \Pi_2(q_2 - g\zeta_1; t) \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\partial \Pi_2(q_2 - g\zeta_1; t)}{\partial t} + v_2(y, t) \frac{\partial \Pi_2(q_2 - g\zeta_1; t)}{\partial y} + \Pi_2(q_2 - g\zeta_1; t) \frac{\partial v_2}{\partial y},$$

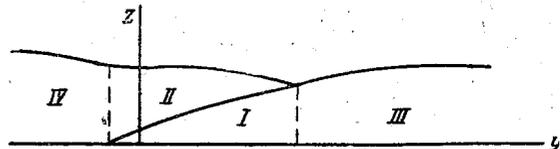


Рис. 4.

а в силу (15) просто:

$$F_2(y, t) = \alpha \frac{\partial v_2}{\partial y}.$$

Так как не нарушая общности можно положить $\alpha = 0$, получим:

$$g \rho_2(q_2 - gz; t) \omega_2(y, z, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Pi_2(q_2 - gz; t) + \frac{\partial}{\partial y} v_2(y, t) \Pi_2(q_2 - gz; t). \quad (17)$$

Формулы (17) и (14) позволяют нам найти $\omega_2(y, z, t)$ и $\omega_1(y, z, t)$ в любой точке и в любой момент времени, если известны функции $q_i(y, t)$, $v_i(y, t)$. Заметим, что вид свободной поверхности определяется уравнением (15) (в области II),

Обратимся теперь к условиям на поверхности фронта. Здесь прежде всего

$$\Pi_1(q_1 - g\zeta; t) = \Pi_2(q_2 - g\zeta; t) \quad (18)$$

(конечное соотношение, связывающее три неизвестных функции q_1 , q_2 , ζ и время); далее имеем два условия:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -v_1 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (\omega_1)_{z=\zeta} = -v_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + (\omega_2)_{z=\zeta}.$$

Вставляя сюда ω_1 и ω_2 из (14) и (17), получим после простых преобразований два следующих соотношения:

$$\frac{\partial}{\partial t} [\Pi_1(q_1 - g\zeta; t) - \Pi_1(q_1, t)] = -\frac{\partial}{\partial y} v_1(y, t) [\Pi_1(q_1 - g\zeta; t) - \Pi_1(q_1, t)], \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Pi_2(q_2 - g\zeta; t) = -\frac{\partial}{\partial y} v_2(y, t) \Pi_2(q_2 - g\zeta; t). \quad (20)$$

Итак, для описания движения в областях I и II нам следует обратиться к совместному решению системы семи уравнений: (1), (4), (18), (19), (20), содержащих семь неизвестных функций q_1 , q_2 , u_1 , u_2 , v_1 , v_2 , ζ от двух независимых переменных y и t каждая. Прежде чем заняться решением этой системы, посмотрим, что будет происходить в областях III и IV.

Движение, происходящее в области III, может быть описано значительно проще, чем движение в области I. Выписывая уравнение свободной поверхности над областью III в виде:

$$z = \zeta_3(y, t),$$

мы должны прежде всего определить ζ_3 из равенства ($\alpha = 0$):

$$\Pi_1(q_3 - g\zeta_3; t) = 0; \quad (21)$$

далее, вставляя ω из (14) в условие:

$$\frac{\partial \zeta_3}{\partial t} = -v_3 \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} + (\omega_3)_{z=\zeta_3},$$

придем, приняв в расчет (21), к уравнению:

$$\frac{\partial \Pi_1(q_3; t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} [v_3(y, t) \Pi_1(q_3; t)] \quad (22)$$

u_3 , v_3 , q_3 — функции, отвечающие области III). Присоединив сюда уравнения (1) и (4), в которых поставлено $i = 3$, получим систему трех уравне-

ний для определения трех функций q_3, v_3, u_3 . При решении этой системы нам надо будет лишь позаботиться, чтобы $v_3(y, t)$ и $q_3(y, t)$, а следовательно, и $p_3(y, z, t)$ совпадали с $v_1(y, t)$ и $q_1(y, t)$ соответственно в точках перехода области I в область III . Аналогичным образом мы сможем описать движение в области IV , — стоит только заменить в формулах (21), (22) значок 1 на 2, а значок 3 — на 4 и положить в (1) и (4) $i=4$.

§ 4. Обратимся к областям I и II и постараемся дать метод нахождения q_i, v_i, u_i, ζ для этих областей.

Уравнения (19) и (20) позволяют заключить о существовании двух функций $\psi_1(y, t)$ и $\psi_2(y, t)$ таких, что

$$\Pi_1(q_1; t) - \Pi_1(q_1 - g\zeta; t) = \frac{\partial \psi_1}{\partial y}; \quad v_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial y} = - \frac{\partial \psi_1}{\partial t}, \quad (23)$$

$$\Pi_2(q_2 - g\zeta; t) = \frac{\partial \psi_2}{\partial y}; \quad v_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial y} = - \frac{\partial \psi_2}{\partial t}. \quad (24)$$

Так как поэтому

$$v_i = - \frac{\partial \psi_i}{\partial t} / \frac{\partial \psi_i}{\partial y},$$

то уравнение (1) может быть написано в виде:

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial (u_i - 2\omega y)}{\partial t} - \frac{\partial \psi_i}{\partial t} \frac{\partial (u_i - 2\omega y)}{\partial y} = 0,$$

так что

$$u_i = 2\omega y + \Phi_i(\psi_i), \quad (25)$$

где Φ_i — произвольная функция своего аргумента. Вид функции Φ_i может быть вполне определен из начальных данных.*

Π_1 и Π_2 мы считаем известными функциями своих двух аргументов, а потому можно считать, что уравнения (18), (23), (24), разрешенные относительно $q_1, q_2, \zeta, v_1, v_2$, позволят нам выразить перечисленные пять функций через первые производные от функций ψ_1 и ψ_2 и через t . Нам останется только вставить полученные таким образом выражения q_i, ζ, v_i , а также i из (25) в уравнения (4) и мы придем к двум дифференциальным уравнениям второго порядка каждое, содержащим только две неизвестных функции ψ_1 и ψ_2 . Определив ψ_1 и ψ_2 из этих уравнений, мы решим нашу задачу, ибо, как мы видели, все метеорологические элементы выражаются через или производные от ψ_i и через y и t .

Прежде чем переходить к исследованию полученной нами систем четвертого порядка, решающей задачу, скажем несколько слов о начальных условиях.

Мы можем задать в начальный момент следующие четыре функции

$$u_{i0}(y) = u_i(y, 0); \quad v_{i0}(y) = v_i(y, 0)$$

и две какие-нибудь из трех:

$$q_{i0}(y) = q_i(y, 0), \quad \zeta_0(y) = \zeta(y, 0).$$

Практически интересно, например, задать распределение давления на поверхности земли и вид поверхности фронта, т. е. задать $\Pi_1(q_1(y, 0); 0) = \Pi_{10}$ (что равносильно заданию $q_1(y, 0)$ и $\zeta_0(y)$; при этом $q_2(y, 0)$ найдется уравнения:

$$\Pi_1(q_{10} - g\zeta_0; 0) = \Pi_2(q_2(y, 0) - g\zeta_0; 0).$$

* Задав q_i и ζ в начальный момент, мы можем из (23) и (24) найти вид функций ψ_i при $t=0$: $\psi_i(y, 0)$, и, задав $u_i(y, 0)$ и используя (25), мы найдем вид функций $\Phi_i(\psi_i)$.

Практически удобно бывает, однако, задать давление на поверхности земли:

$$p_1(y, 0, 0) = \Pi_1(q_1(y, 0); 0)$$

и давление на поверхности фронта (в функциях от y только):

$$p_1(y, \zeta(y, 0), 0) = \Pi_1(q_1(y, 0) - \zeta(y, 0); 0).$$

Как только известны эти две функции, мы можем определить q_1 , ζ и q_2 через них, прибавляя еще равенство (18). Заметим, что вообще удобнее искать вместо функций q_1 , q_2 , ζ непосредственно значения давления на поверхности земли (мы назовем их p_0):

$$p_0 = p_0(y, t) = p_1(y, 0, t) = \Pi_1(q_1(y, t); t) \quad (26)$$

и значения давления p вдоль фронтальной поверхности:

$$\begin{aligned} p = p(y, t) &= p_1(y, \zeta(y, t); t) = \Pi_1(q_1(y, t) - g\zeta(y, t); t) = \\ &= \Pi_2(q_2(y, t) - g\zeta; t). \end{aligned} \quad (27)$$

В дальнейшем мы введем эти обозначения, причем значения плотности в земле будем обозначать через ρ_0 :

$$\rho_0 = \rho_0(y, t) = \frac{\partial \Pi_1(q_1(y, t); t)}{\partial q_1};$$

значения плотности в первой среде на фронтальной поверхности назовем ρ_1 :

$$\rho_1 = \rho_1(y, t) = \frac{\partial}{\partial q_1} \Pi_1(q_1(y, t) - g\zeta_1(y, t); t).$$

значения плотности во второй среде вдоль фронтальной поверхности назовем ρ_2 :

$$\rho_2 = \rho_2(y, t) = \frac{\partial}{\partial q_2} \Pi_2(q_2(y, t) - g\zeta_2(y, t); t),$$

наконец, введем температуры T_0 , T_1 , T_2 из соотношений:

$$T_0 = \frac{p_0}{R\rho_0}; \quad T_1 = \frac{p_1}{R\rho_1}; \quad T_2 = \frac{p_2}{R\rho_2}.$$

§ 5. Обратимся к анализу нашей системы четвертого порядка. Уравнение (18) даст нам, если продифференцировать обе его части по y :

$$\rho_1 \left(\frac{\partial q_1}{\partial y} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = \rho_2 \left(\frac{\partial q_2}{\partial y} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right). \quad (28)$$

налогичным образом получим из уравнений (23) и (24):

$$\rho_0 \frac{\partial q_1}{\partial y} - \rho_1 \left(\frac{\partial q_1}{\partial y} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}; \quad \rho_2 \left(\frac{\partial q_2}{\partial y} - g \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}.$$

Эти три алгебраических соотношения позволяют найти три производных:

$$\frac{\partial q_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial q_2}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

в частности получим:

$$\frac{\partial q_1}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}; \quad \frac{\partial q_2}{\partial y} = \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \left(\frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}. \quad (29)$$

Вставляя эти значения $\frac{\partial q_i}{\partial y}$ в уравнения (4) и заменяя в них v_i на

$$v_i = -\frac{\partial \psi_i}{\partial t} / \frac{\partial \psi_i}{\partial y}, \quad (30)$$

получим после простых вычислений два уравнения:

$$\left[-RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) + v_1^2 \right] \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} - RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + 2v_1 \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial t^2} = 2\omega u_1 p_0 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right); \quad (31)$$

$$-RT_0 \frac{p}{p_0} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \left[-R \left(T_0 \frac{p}{p_0} + T_2 - T_1 \right) + v_2^2 \right] \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} + 2v_2 \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial t^2} = 2\omega u_2 p. \quad (32)$$

Вообще говоря, в условиях атмосферной действительности систем этих двух уравнений есть система гиперболического типа, т. е. эта система обладает действительными характеристиками, и через каждую точку плоскости (y, t) можно, вообще говоря, провести четыре различных характеристики.

Пусть на линии, имеющей уравнение:

$$y = y(t)$$

в плоскости (y, t) , заданы значения функций ψ_1 и ψ_2 и их первых производных. Постараемся найти вторые производные от обеих наших функций в точках линии $y = y(t)$.

Заметим сперва, что вдоль линии

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y \partial t} \frac{dy}{dt}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y \partial t} + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \frac{dy}{dt}, \quad (i = 1, 2)$$

так что

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y \partial t} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \frac{dy}{dt};$$

$$\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial t} \right) - \frac{dy}{dt} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt} \right)^2.$$

Вставляя эти значения производных в уравнения (31) и (32), мы получим, собрав члены, два уравнения для определения производных $\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}$ по известным вдоль линии значениям $\frac{dy}{dt}$, $\frac{\partial \psi_i}{\partial y}$ и $\frac{\partial \psi_i}{\partial t}$:

$$\left[RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) - \left(\frac{dy}{dt} - v_1 \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} =$$

$$= 2\omega u_1 p_0 \left(1 - \frac{p}{p_0} \right) + \frac{d}{dt} [v_1(p_0 - p)] + \left(\frac{dy}{dt} - 2v_1 \right) \frac{d}{dt} (p_0 - p),$$

$$RT_0 \frac{p}{p_0} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} + \left[R \left(T_0 \frac{p}{p_0} + T_2 - T_1 \right) - \left(\frac{dy}{dt} - v_2 \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} =$$

$$= 2\omega u_2 p + \frac{d}{dt} v_2 p + \left(\frac{dy}{dt} - 2v_2 \right) \frac{dp}{dt}.$$

Если линия $y = y(t)$ есть характеристика, это значит, что производные $\frac{\partial \psi_1}{\partial y^2}$ и $\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2}$ не могут быть найдены единственным путем из написанной системы алгебраических уравнений. Алгебраическая наша система может, однако, лишь тогда допускать неопределенные решения, когда два следующих определителя равны нулю:

$$\begin{vmatrix} -RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) + \left(\frac{dy}{dt} - v_1\right)^2; & -RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \\ -RT_0 \frac{p}{p_0}; & -R \left(T_0 \frac{p}{p_0} + T_2 - T_1\right) + \left(\frac{dy}{dt} - v_2\right)^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ -RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) - \left(\frac{dy}{dt} - v_1\right)^2 \right\} \left\{ 2\omega u_2 p + \frac{d}{dt}(v_2 p) + \left(\frac{dy}{dt} - 2v_2\right) \frac{dp}{dt} \right\} + \\ & + RT_0 \frac{p}{p_0} \left\{ 2\omega u_1 p_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) - \frac{d}{dt}[v_1(p_0 - p)] - \left(\frac{dy}{dt} - 2v_1\right) \frac{d}{dt}(p_0 - p) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

Предположим, что линия $y = y(t)$ и заданные на ней функции p_0, p, v_1, v_2 таковы, что выполняются равенства (33) и (34). Равенство (33) показывает, что тогда $\frac{dy}{dt}$ должно удовлетворять уравнению четвертой степени:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dy}{dt} - v_1\right)^2 \left(\frac{dy}{dt} - v_2\right)^2 - R \left[\left(\frac{dy}{dt} - v_1\right)^2 \left(T_0 \frac{p}{p_0} + T_2 - T_1\right) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{dy}{dt} - v_2\right)^2 T_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \right] + R^2 T_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) (T_2 - T_1) = 0; \end{aligned} \quad (35)$$

Мы предполагаем, что первая среда „холоднее“ второй, так что

$$T_2 > T_1.$$

Можно показать, что в метеорологических условиях, когда скорости v_1, v_2 малы и $\frac{p}{p_0} < 1$, существуют четыре действительных корня уравнения (35). Эти корни будут, кроме того, различны везде, кроме точек (y, t) , отвечающих местам пересечения поверхности фронта с поверхностью земли ($p = p_0; T_0 = T_1$) и со свободной поверхностью ($p = T_1 = T_2 = 0$). Именно, на поверхности земли мы получим:

$$\left(\frac{dy}{dt} - v_1\right)^2 \left[\left(\frac{dy}{dt} - v_2\right)^2 - R(T_0 + T_2 - T_1) \right] = 0$$

два слившихся корня: $\frac{dy}{dt} = v_1$, а на свободной поверхности:

$$\left(\frac{dy}{dt} - v_2\right)^2 \left[\left(\frac{dy}{dt} - v_1\right)^2 - RT_0 \right] = 0$$

два слившихся корня: $\frac{dy}{dt} = v_2$. Чтобы сразу представить себе характер корней уравнения (35), рассмотрим частный случай, когда $v_1 = v_2 = 0$ [пред-

положим, например, что в начальный момент $v_1 = v_2 = 0$, и найдем в плоскости (y, t) направления характеристик, отвечающих этому моменту, т. е. проходящих через ось Y . Тогда

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^4 - R(T_0 + T_2 - T_1) \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + R^2 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) T_0 (T_2 - T_1) = 0,$$

и мы имеем четыре корня:

$$\frac{dy}{dt} = \pm \sqrt{R \frac{T_0 + T_2 - T_1}{2} \pm R \sqrt{\frac{(T_0 + T_2 - T_1)^2}{4} - T_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) (T_2 - T_1)}}.$$

Все эти корни будут различны (если, конечно, $T_2 - T_1 \neq 0$ и $p \neq p_0$) и действительны в условиях метеорологически интересных, так как здесь $\frac{1}{4} (T_0 + T_2 - T_1)^2 > 10^4$, в то время как $T_0 (T_2 - T_1) \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) < 6 \cdot 10^3$.

Рассмотрим тут же численный пример. Предположим, что $T_0 = 26$, $T_2 - T_1 = 5^\circ$, а $\frac{p}{p_0} = 0,75$ и $0,5$ соответственно. В первом случае будем иметь

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{1,4} = \pm 275,15 \text{ м/сек.}; \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{2,3} = \pm 18,89 \text{ м/сек.},$$

во втором:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{1,4} = \pm 274,51 \text{ м/сек.}; \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{2,3} = \pm 26,68 \text{ м/сек.}$$

Мы видим, что два корня дают скорости порядка Ньютоновской скорости звука, два же другие имеют порядок 20 м/сек., т. е. пример в 10 раз меньше первых. Это последнее обстоятельство позволяет дать хороший приближенный способ расчета корней нашего уравнения четвертой степени. Здесь же отметим еще, что удобно пользоваться формулой

$$\frac{dy}{dt} = \pm \sqrt{R \frac{T_0 + T_2 - T_1}{2}} \sqrt{1 \pm \left[1 - \frac{4 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) T_0 (T_2 - T_1)}{(T_0 + T_2 - T_1)^2}\right]^{\frac{1}{2}}},$$

которая сразу даст:

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{1,4} \approx \sqrt{R(T_0 + T_2 - T_1)}; \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{2,3} \approx \sqrt{R \frac{\left(1 - \frac{p}{p_0}\right) T_0 (T_2 - T_1)}{T_0 + T_2 - T_1}}.$$

Обращаясь к общему случаю, когда $v_1 \neq 0$ и $v_2 \neq 0$, введем разности

$$v_2 - v_1 = 2v$$

скоростей и суммы их:

$$v_1 + v_2 = 2\varepsilon.$$

Получим тогда вместо (35):

$$\begin{aligned} & \left(\frac{dy}{dt} - \varepsilon\right)^4 - \left(\frac{dy}{dt} - \varepsilon\right)^2 [R(T_0 + T_2 - T_1) + 2v^2] + \\ & + 2v \left[T_0 \left(1 - 2 \frac{p}{p_0}\right) - T_2 + T_1\right] \left(\frac{dy}{dt} - \varepsilon\right) + v^4 - 2Rv^2 (T_0 + T_2 - T_1) + \\ & + R^2 T_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) (T_2 - T_1) = 0. \end{aligned}$$

равнение это удобно тем, что по отношению к $\frac{dy}{dt}$ — оно не содержит t с кубом.

Мы воспользуемся теперь наличием действительных и различных характеристик, чтобы построить эффективный метод численного решения этой задачи.

Через каждую точку плоскости (y, t) проходят, вообще говоря, четыре характеристики, направление которых определяется, как четыре корня уравнения (38). Мы можем представить себе, что вся интересующая

часть плоскости покрыта четырьмя семействами характеристик. Мы выберем следующую систему обозначений (нумерацию) этих семейств. Пусть λ_1 и μ_1 — линии, несущей начальные данные (на оси Y), в каждой точке мы

имеем четыре различных направления $\frac{dy}{dt}$ (исключение составляют только

случаи, отвечающие местам, где фронт достигает в начальный момент свободной поверхности: там два семейства сливаются, остальные же два различны). Перенумеруем же их, двигаясь, например, против часовой стрелки и начиная от положительной оси Y , в том порядке, каком они нам будут попадаться, и назовем соответствующие характеристики через $\lambda_1, \mu_1, \mu_2, \lambda_2$ соответственно. Так, в первом нашем численном

случае λ_1 имеет наклон $\frac{dy}{dt} = +275,15$, μ_1 имеет $\frac{dy}{dt} = +18,87$, наклон μ_2 бу-

дет $\frac{dy}{dt} = -18,87$, наконец наклон λ_2 будет $\frac{dy}{dt} = -275,15$. Если начальные

данные непрерывны и если, разумеется, нигде на оси Y (кроме крайних точек) корни (38) не будут совпадать, то такая нумерация определит вполне однозначно все семейства во всей той части плоскости (y, t) , которой уравнение (38) не будет иметь сливающихся корней.*

Идея численного решения основана, как и в случае несжимаемой жидкости, на переходе к новой криволинейной системе координат, в которой ординатными линиями были бы не линии $y = \text{const}$, $t = \text{const}$, а характеристики. Однако в то время как в несжимаемой жидкости было два семейства характеристик, здесь мы их имеем четыре; поэтому нам надлежит брать какие-либо два из этих семейств. Мы выберем в качестве новых ординатных линий характеристики λ и μ , причем полные производные $\frac{d}{dt}$, вычисленные следуя вдоль λ или μ , будем обозначать

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_\lambda \quad \text{и} \quad \left(\frac{d}{dt}\right)_\mu \quad (39)$$

соответственно. Так как дифференцирование по любому направлению можно развить через дифференцирование по каким-либо двум направлениям, то

полные производные $\left(\frac{d}{dt}\right)_\lambda$ и $\left(\frac{d}{dt}\right)_\mu$, вычисленные вдоль кривых λ_1 и μ_1 , мы можем

развить соответственно через производные (39).

Именно, получим:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dt}\right)_\lambda &= \frac{y_{\lambda_1}' - y_{\mu_1}'}{y_{\lambda_1}' - y_{\mu_1}'} \left(\frac{d}{dt}\right)_{\lambda_1} - \frac{y_{\lambda_2}' - y_{\lambda_1}'}{y_{\lambda_1}' - y_{\mu_1}'} \left(\frac{d}{dt}\right)_{\mu_1}, \\ \left(\frac{d}{dt}\right)_\mu &= \frac{y_{\mu_2}' - y_{\mu_1}'}{y_{\lambda_1}' - y_{\mu_1}'} \left(\frac{d}{dt}\right)_{\lambda_1} - \frac{y_{\mu_2}' - y_{\lambda_2}'}{y_{\lambda_1}' - y_{\mu_1}'} \left(\frac{d}{dt}\right)_{\mu_1}, \end{aligned} \quad (40)$$

* См., например, Friedrichs u. Lewy. Das Anfangswertproblem einer beliebigen linearen hyperbolischen Differentialgleichung beliebigen Ordnung in zwei Variablen. Math. Ann., Bd. 99, 1928.

где y_{λ}' , y_{λ} , y_{μ}' , y_{μ} — четыре корня уравнения (38):

$$y_{\lambda_1}' = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{\lambda_1}; \quad y_{\lambda_2}' = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{\lambda_2}; \quad y_{\mu_1}' = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{\mu_1}; \quad y_{\mu_2}' = \left(\frac{dy}{dt}\right)_{\mu_2}.$$

Обратимся теперь к уравнению (34), которое можно в раскрытом виде переписать после простых преобразований и введения v и ε так:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{dy}{dt} - \varepsilon + v\right)^2 \left(\frac{dy}{dt} - \varepsilon - v\right) - RT_0 \left(\frac{dy}{dt} - \varepsilon\right) + RT_0 \left(1 - 2\frac{p}{p_0}\right) v \right] \frac{1}{p} \frac{dp}{dt} + \\ & + RT_0 \frac{1}{p_0} \left(\frac{dy}{dt} - \varepsilon + v\right) \frac{dp_0}{dt} + \left(\frac{dy}{dt} - \varepsilon + v\right)^2 \frac{d\varepsilon}{dt} + \\ & + \left[\left(\frac{dy}{dt} - \varepsilon + v\right)^2 - 2RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \right] \frac{dv}{dt} = \\ & = 2\omega \left[(u_2 - u_1) RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) - u_2 \left(\frac{du}{dt} - \varepsilon + v\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Вместо того чтобы изучать систему (31), (32), мы и возьмем соотношение (41), причем переписем его четыре раза, беря каждый раз производные вдоль характеристик разных семейств; при этом производные $\left(\frac{d}{dt}\right)_{\lambda_1}$ и $\left(\frac{d}{dt}\right)_{\mu_1}$ заменим по формулам (40).*

Обозначив

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)_{\lambda} - \varepsilon + v = \xi; \quad \left(\frac{dy}{dt}\right)_{\mu} - \varepsilon + v = \eta,$$

получим после некоторых преобразований вместо системы (41) следующую систему:

$$\begin{aligned} & \left[\xi^3 - 2v\xi^2 - RT_0\xi + 2RT_0v \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \right] \frac{1}{p} \left(\frac{dp}{dt}\right)_{\lambda} + RT_0\xi \frac{1}{p_0} \left(\frac{dp_0}{dt}\right)_{\lambda} + \\ & + \xi^2 \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\lambda} + \left[\xi^2 - 2RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \right] \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\lambda} = \\ & = 2\omega \left[(u_2 - u_1) RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) - u_2 \xi^2 \right]; \\ & \left[\eta^3 - 2v\eta^2 - RT_0\eta + 2RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) v \right] \frac{1}{p} \left(\frac{dp}{dt}\right)_{\mu} + \\ & + RT_0\eta \frac{1}{p_0} \left(\frac{dp_0}{dt}\right)_{\mu} + \eta^2 \left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{\mu} + \left[\eta^2 - 2RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) \right] \left(\frac{dv}{dt}\right)_{\mu} = \\ & = 2\omega \left[(u_2 - u_1) RT_0 \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) - u_2 \eta^2 \right]; \end{aligned}$$

* Эквивалентность этой системы уравнений, в новых независимых переменных, описывающих движения вдоль λ и μ , старой системе доказывается простым путем, аналогичным тому, который был употреблен в цитированной выше работе Fridrichs и Lewy.

$$\begin{aligned}
 & (2v - \eta) \frac{1}{p} \left(\frac{dp}{dt} \right)_\lambda + \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_\lambda + \left(\frac{dv}{dt} \right)_\lambda = \\
 & = (2v - \xi) \frac{1}{p} \left(\frac{dp}{dt} \right)_\mu + \left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_\mu + \left(\frac{dv}{dt} \right)_\mu ; \\
 & [R(T_2 - T_1) - \xi(\xi + \eta) + 2v(\eta + 2\xi) - 4v^2] \frac{1}{p} \left(\frac{dp}{dt} \right)_\mu + \\
 & + R \frac{p}{p_0} \left(\frac{dp_0}{dt} \right)_\mu + \xi \left[\left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_\mu + \left(\frac{dv}{dt} \right)_{\mu^2} \right] + 2\omega u_2 \xi = \\
 & = [R(T_2 - T_1) - \eta(\xi + \eta) + 2v(\xi + 2\eta) - 4v^2] \frac{1}{p} \left(\frac{dp}{dt} \right)_\lambda + \\
 & + R \frac{p}{p_0} \left(\frac{dp_0}{dt} \right)_\lambda + \eta \left[\left(\frac{d\varepsilon}{dt} \right)_\lambda + \left(\frac{dv}{dt} \right)_\lambda \right] + 2\omega u_2 \eta.
 \end{aligned} \tag{42}$$

уравнения (42) мы и используем для решения задачи.

Предположим, что на некоторой линии L в плоскости (y, t) (например, на оси $y=0$) нам известны функции p_0, p, v и ε , а также u_1, u_2 . Рассмотрим густой ряд точек $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, \dots$ линии L и, рассчитав коэффициенты уравнения (38) в этих точках, найдем для каждой из них [решив уравнение (38)] значения $\left(\frac{dy}{dt} \right)_\lambda$ и $\left(\frac{dy}{dt} \right)_\mu$.

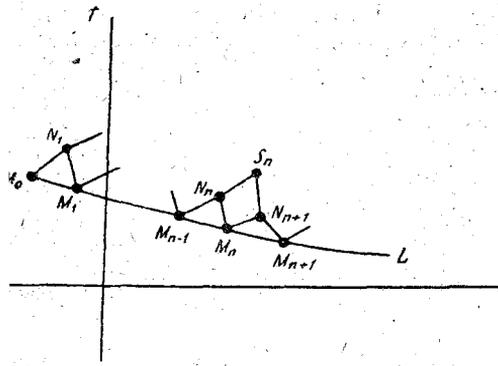


Рис. 5.

Из каждой из точек M_0, M_1, \dots проведем затем два элемента прямых с тангенсами наклона $\left(\frac{dy}{dt} \right)_\lambda$ и $\left(\frac{dy}{dt} \right)_\mu$, вычисленными в этих точках (рис. 5). Эти элементы прямых изобразят элементы характеристик λ и μ . Отметим точки пересечения $N_1, N_2, \dots, N_{n-1}, N_n, \dots$ этих элементов друг с другом и попробуем найти значения p_0, p, ε, v , а также u_1 и u_2 в точках N_1, N_2, \dots точка N_n находится на пересечении характеристики семейства λ , идущей из M_{n-1} , и характеристики семейства μ , идущей из точки M_n . Мы можем считать поэтому, что направление характеристик λ и μ , выходящих из N_n , приближенно совпадает с направлением отрезков $\overline{N_n M_{n-1}}$ и $\overline{N_n M_n}$. Примем, однако, к точке N_n равенство (42), заменяя всюду производные по $\left(\frac{dp}{dt} \right)_\lambda$ на выражения $\frac{(p)_{N_n} - (p)_{M_{n-1}}}{(t)_{N_n} - (t)_{M_{n-1}}}$, а производные типа $\left(\frac{dp}{dt} \right)_\mu$ на $\frac{(p)_{N_n} - (p)_{M_n}}{(t)_{N_n} - (t)_{M_n}}$ [(p) $_{N_n}$ означает значение p в точках N_n и т. д.]. Возьмем, наконец, в качестве коэффициентов при производных в уравнениях (42) значения их коэффициентов в какой-либо точке, близкой к M_{n-1}, M_n, N_n , например в точке M_{n-1} . Так как в M_{n-1} все функции $p_0, p, \varepsilon, v, u_1, u_2$ известны, и η могут быть вычислены, поскольку известны y'_λ и y'_μ , так как последние значения $(p)_{M_{n-1}}, (p)_{M_n}, \dots$, а также $(t)_{N_n}, (t)_{M_n}, (t)_{M_{n-1}}$ тоже либо за-

даны, либо могут быть сразу найдены (координаты точек M_n известны, координаты точек N_n находятся), мы получим из (42) систему четырех алгебраических линейных уравнений для определения четырех неизвестных величин $(p)_{N_n}$, $(p_0)_{N_n}$, $(v)_{N_n}$, $(\varepsilon)_{N_n}$, представляющих искомые функции в точке N_n . Повторяя это рассуждение для других точек кривой L , падем искомые функции во всех точках: $N_1, N_2, \dots, N_{n-1}, N_n$; остается определить только u_1 и u_2 в этих точках. Для нахождения u_1 и u_2 мы могли бы обратиться к конечным соотношениям, выражающим u_1 и u_2 через посредство ψ_1 и ψ_2 , но мы не будем этого делать (нам пришлось бы определять функции ψ_1 и ψ_2 , не представляющие физического интереса), а непосредственно обратимся к дифференциальным уравнениям (1). Именно, так как например,

$$\frac{du_i}{dt} = \frac{v_i}{v_i - \frac{dy}{dt}} \left[\frac{du_i}{dt} - 2\omega \frac{dy}{dt} \right],$$

где $\frac{d}{dt}$ означает дифференцирование вдоль характеристики, мы получаем соотношения:

$$\left[v_i - \left(\frac{dy}{dt} \right)_\mu \right] \left(\frac{du_i}{dt} \right)_\lambda - \left[v_i - \left(\frac{dy}{dt} \right)_\lambda \right] \left(\frac{du_i}{dt} \right)_\mu = 2\omega \left[\left(\frac{dy}{dt} \right)_\lambda - \left(\frac{dy}{dt} \right)_\mu \right]$$

или

$$\left. \begin{aligned} \xi \left(\frac{du_1}{dt} \right)_\mu - \eta \left(\frac{du_1}{dt} \right)_\lambda &= 2\omega (\xi - \eta) \\ (2v - \xi) \left(\frac{du_2}{dt} \right)_\mu - (2v - \eta) \left(\frac{du_2}{dt} \right)_\lambda &= 2\omega (\xi - \eta) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Из системы (43) и могут быть найдены u_1 и u_2 в точках N_n аналогично тому, как найдены были p_0, p, v, ε из системы (42).

Зная значение всех искомым функций в точках N_1, \dots, N_n , мы можем построить теперь коэффициенты уравнения (38) для всех этих точек и найти направления характеристик λ и μ , выходящих из этих точек; на пересечении этих последних характеристик мы получим новый ряд точек S_1, S_2 , в котором мы можем найти значения функций p_0, \dots, u_2 из систем (42) и (43) производя вычисления, аналогичные проделанным раньше при определении искомым функций в точках N_1, \dots, N_n .

За исходную линию L мы можем взять ось $Y=0$, так как мы считаем что в начальный момент ($t=0$) величины всех метеорологических элементов, а следовательно, и p_0 , и p, \dots, u_2 нам известны как функции y .

Нам остается затем только произвести сопряжение движения в областях I и II с движением в областях III и IV.

В одной из следующих заметок мы дадим конкретный пример подобного численного расчета движения фронтальной поверхности и масс воздуха, ею отделяемых.

LE MOUVEMENT DE LA SURFACE FRONTALE DANS L'ATMOSPHERE BAROCLINE OU BAROTROPE

I. Kiebel

Résumé

Dans cette note nous considérons les mouvements des masses aériennes (en présence de la surface terrestre) suivis par les déplacements et les déformations „non linéaires“ de la surface frontale qui sépare les masses con-

érées. Les mouvements sont supposés „zonales“, c. à d. nous supposons que tous les éléments météorologiques, aussi bien que l'équation de la surface frontale, ne dépendent que de deux coordonnées (y, z) et du temps (t). L'accélération verticale $\left(\frac{dw}{dt}\right)$ est négligée par rapport à l'accélération de gravité (g) et les composants horizontaux du vent (u_i, v_i) sont assujettis à la condition (8). Les équations du mouvement prennent la forme (1), (3), (4) (p_i —pression, ρ_i —densité, $q_i = q_i(y, t)$ —fonction inconnue, $i=1$ pour masse froide“, $i=2$ pour masse „chaude“); p_i, ρ_i peuvent être déterminées alors par les relations (6), (7) avec Π_i —fonction arbitraire qui caractérise l'état de l'air et doit être connue en avance. L'équation de continuité permet alors de trouver w_1 (14) et w_2 (17) à l'aide des conditions „aux frontières“ (surface terrestre, tropopause). La présence de la surface frontale mène aux conditions (8), (19), (20) [$z = \zeta(y, t)$ —équation inconnue de la surface frontale] ce qui permet d'introduire deux fonctions $\psi_1(y, t)$ et $\psi_2(y, t)$ [les relations (23), (24)]; les u_i peuvent être déterminées par (25) avec Φ_i —fonction qui ne dépend que des conditions initiales.

Le problème se réduit donc à l'intégration des équations (31), (32) $p_0(y, t), \theta_0(y, t)$ —pression et température à la surface terrestre, $p = p(y, t)$ —pression sur la surface frontale, $T_1(y, t)$ et $T_2(y, t)$ —les températures sur la surface frontale]. C'est un système du type hyperbolique, ayant quatre familles des caractéristiques réelles. Dans le plan (y, t) les directions $\frac{dy}{dt}$ des „caractéristiques“ (les vitesses des „ondes“) doivent être déterminées comme quatre racines de l'équation (35). Deux de ces racines ont l'ordre de grandeur 10^2 m/sec., les deux autres—1—10 m/sec. Les caractéristiques de ces dernières familles sont prises comme nouvelles lignes des coordonnées (λ, μ). Les dérivées des quatre fonctions $p_0, p, v = \frac{v_2 - v_1}{2}, \varepsilon = \frac{v_2 + v_1}{2}$, prises suivant λ et μ , sont liées par quatre relations (42); grâce à ces relations une méthode effective de la résolution numérique du problème de Cauchy, c. à d. du problème aux conditions initiales, est donnée. La forme de la surface frontale, les vitesses v_1, v_2, u_1, u_2 et la pression p_0 , étant données pour un moment initial, on peut donc déterminer le mouvement des masses aériennes et de la surface frontale pour tous les moments suivants.

КОНТРОЛЬ АЛЬТЕРНАТИВНЫХ ПРОГНОЗОВ

М. А. Омшанский

§ 1. Постановка вопроса и обозначения

Альтернативными можно назвать прогнозы взаимно, исключаящи состояний погоды, т. е. прогнозы типа: „явление наступит“, „явление не наступит“. Альтернативные прогнозы представляют собой простейший тип прогнозов, и поэтому на примере их проще всего выяснить своеобразии проблемы контроля. В этой статье рассматриваются только две, правд, основные задачи статистического контроля: установление обоснованности метода предсказаний, сравнение успешности двух методов предсказания.

Будем обозначать наличие признака латинской буквой, а отсутствие признака — соответствующей греческой буквой. Число объектов, обладающих данным признаком или данной комбинацией признаков, будем обозначать при помощи простых скобок, внутри которых стоят соответствующие буквы: например, число объектов, обладающих признаком A и B — (AB) , число объектов, обладающих признаком A и β — $(A\beta)$. Прогноз явления будем считать признаком A , фактическое осуществление явления — признаком B .

§ 2. Установление обоснованности метода предсказаний

Очевидно, что необоснованные прогнозы не должны зависеть от фактически наблюдающихся состояний погоды. Следовательно для установления обоснованности прогнозов нужно показать, что признаки A и B связаны стохастической зависимостью. Конечно, это не решает вопроса о том, чем обусловлена эта зависимость.

Для установления обоснованности прогнозов пригодны различные статистические коэффициенты: коэффициент регрессии прогнозов относительно погоды — $r_{A(B)}$, коэффициент регрессии погоды относительно прогнозов — $r_{B(A)}$, коэффициент корреляции между прогнозами и погодой — R_{AB} . Эмпирическое значение этих коэффициентов определяется формулами:

$$r_{A(B)} = \frac{(AB)n - (A)(B)}{(B)(\beta)},$$

$$r_{B(A)} = \frac{(AB)n - (A)(B)}{(A)(\alpha)},$$

$$R_{AB} = \frac{(AB)n - (A)(B)}{\sqrt{(A)(B)(\alpha)(\beta)}},$$

где n — общее число прогнозов. В качестве критерия обоснованности можно принять отношение полученного эмпирического значения соответствующим

его коэффициента к его стандартному отклонению при отсутствии зависимости между признаками A и B . Обоснованными можно считать те прогнозы, для которых это отношение больше трех-четырех.

Для вычисления отношения может служить формула:

$$\frac{\rho_{A(B)}}{\sigma_{A(B)}} = \frac{\rho_{B(A)}}{\sigma_{B(A)}} = \frac{R_{AB}}{\sigma_R} = R_{AB} \sqrt{n}, \quad (4)$$

где $\sigma_{A(B)}$, $\sigma_{B(A)}$, σ_R — стандартные отклонения соответствующих коэффициентов. Из формулы (4) видно, что для установления обоснованности прогнозов удобнее всего воспользоваться коэффициентом корреляции.

При вычислении процента успешности часто не требуют точного осуществления предсказанного по определенной терминологии состояния погоды, а считают правильными прогнозы даже при наличии некоторых отклонений. Допуски возможны как в отношении момента осуществления явления, так и в отношении интенсивности. При контроле прогнозов, данных без фиксированной терминологии, также приходится решать вопрос том, какие предсказания считать правильными, причем возможны критерии различной строгости. Однако для обоснования метода предсказаний вопрос о строгости терминологии не имеет существенного значения.

останавливаюсь на нем только потому, что с этим вопросом связаны шибочные переоценки успешности метода в тех случаях, когда основным критерием является процент правильных предсказаний.

Рассмотрим прогнозы температуры типа „температура без изменений“ киевского бюро погоды для Киева. На протяжении 1928 и 1929 гг. было

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7
± 0,5	75	126	22	18	0,10	1,9	
± 0,1	176	283	49	40	0,18	3,4	
± 1,5	208	329	58	47	0,23	4,4	
± 2,0	266	428	74	61	0,27	5,1	
± 2,5	296	481	82	68	0,30	5,7	
± 3,0	321	548	89	78	0,30	5,7	
± 3,5	325	568	90	81	0,24	4,6	
± 4,0	337	604	93	86	0,22	4,2	

сделано 361 предсказание этого типа. По терминологии прогноз „температура без изменений“ означал, что изменение средней суточной температуры от предыдущего дня к последующему будет лежать в пределах $2^{\circ},0$. Допустим, однако, на минуту, что нам неизвестна терминология, и попытаемся установить обоснованность метода предсказаний при различных предположениях относительно смысла

прогнозов. В табл. 1 для этого приведены следующие величины: 1) смысл прогнозов; 2) число оправданий в пределах соответствующей терминологии; 3) число явлений данного типа за испытываемый период; 4) процент оправданий прогнозов данного типа; 5) процент случайных оправданий прогнозов данного типа при необоснованности метода предсказаний; 6) коэффициент корреляции между „прогнозами“ и „подой“; 7) отношение коэффициента корреляции к его стандартному отклонению.

При всех гипотезах о терминологии, за исключением первой, можно сделать несомненный вывод об обоснованности прогнозов, а между тем процент оправданий меняется при этом в пределах от 49 до 93%.

Мы рассмотрели лишь один частный пример, однако не будет ошибочным и общее утверждение, что без ущерба для правильности вывода можно несколько вариировать смысл прогнозов. Это положение, очень существенное для контроля прогнозов, данных без фиксированной терминологии, вытекает из того, что соседние интервалы шкалы элемента обычно одинаковым образом (в смысле знака) связаны с прогнозами.

Только в одной или двух точках шкалы можно ждать перемены знака связи. Поэтому неточное совпадение границ терминологии с границами одной ковой связи при суммировании случаев, для разных интервалов шкалы в большинстве случаев не должно отразиться на правильности вывода. Аналогичное положение бывает и в отношении момента наступления предсказываемого явления. И здесь некоторые вариации в строгости контроля не должны отражаться на результате.

§ 3. Невозможность общего сравнения успешности двух методов предсказаний

При сравнении успешности двух методов предсказаний основывают обычно на различных эмпирических коэффициентах, достигающих максимального значения при полной успешности предсказаний в пределах терминологии, принимающих минимальное значение при отсутствии зависимости и, наконец, имеющих промежуточное значение между упомянутыми границами при наличии промежуточной степени зависимости. Однако при этом часто забывают, что даже в простейшем случае для альтернативных прогнозов один коэффициент не может характеризовать все особенности рассматриваемой совокупности прогнозов, и поэтому большие значения коэффициента не всегда свидетельствуют о большей успешности. Например, из формулы (1) находим, что коэффициент $\rho_{A(B)}$ растет, если

$$\frac{d(AB)}{d(A)} > \frac{(B)}{n},$$

а из (2) находим, что $\rho_{B(A)}$ растет, если

$$\frac{d(AB)}{d(A)} > \frac{(B)}{n} + \left[1 - \frac{2(A)}{n}\right] \rho_{B(A)}.$$

$\rho_{B(A)}$ по смыслу задачи положительно, поэтому при

$$\frac{(B)}{n} + \left[1 - \frac{2(A)}{n}\right] \rho_{B(A)} > \frac{d(AB)}{d(A)} > \frac{(B)}{n}$$

выводы об успешности, основанные на коэффициентах регрессии, противоречат друг другу. Очевидно, что и для других комбинаций коэффициентов при определенных условиях должно существовать подобное противоречие. Но у нас нет общих оснований предпочесть один коэффициент другому, поэтому невозможно общее сравнение успешности двух методов предсказаний без задания конкретной области применения прогнозов.

§ 4. Сравнение успешности двух методов предсказаний в заданной области применения

Совокупность альтернативных прогнозов распадается на четыре группы. При практическом применении прогнозов каждая из групп будет иметь различное значение: например, при пользовании прогнозами в целях борьбы с вредными явлениями (заморозки, заносы, паводки и т. п.) принадлежность к группе $A\beta$ связана с затратами на борьбу с ожидаемым вредным явлением; принадлежность же к группе αB связана с убытками от наступившего явления. Применение прогнозов для производственных целей связано с получением прибыли от производственных операций. Условимся называть в дальнейшем числа, характеризующие полезность каждой из групп, весами. Если прогнозы полезны, веса будут положительными, если прогнозы вредны, веса будут отрицательными.

Обозначим веса основных групп альтернативной совокупности через W_{AB} , $W_{A\beta}$, $W_{\alpha B}$, $W_{\alpha\beta}$. В таком случае эффект от погоды за время применения всей совокупности прогнозов выразится следующим образом:

$$R = W_{AB}(AB) + W_{A\beta}(A\beta) + W_{\alpha B}(\alpha B) + W_{\alpha\beta}(\alpha\beta). \quad (8)$$

Последнее уравнение можно представить также в виде:

$$R = (AB)(W_{AB} - W_{A\beta} - W_{\alpha B} + W_{\alpha\beta}) + (A)(W_{A\beta} - W_{\alpha\beta}) + (B)(W_{\alpha B} - W_{\alpha\beta}) + nW_{\alpha\beta}. \quad (9)$$

Если бы прогнозы не применялись, то непосредственный эффект от погоды получил бы значение R_0 , определяемое формулой:

$$R_0 = (B)(W_{\alpha B} - W_{\alpha\beta}) + nW_{\alpha\beta}. \quad (10)$$

Максимально возможная польза от применения совокупности прогнозов определяется выражением:

$$R - R_0 = (AB)(W_{AB} - W_{A\beta} - W_{\alpha B} + W_{\alpha\beta}) + (A)(W_{A\beta} - W_{\alpha\beta}). \quad (11)$$

Наибольшая польза от прогнозов будет иметь место при $(A) = (B) = (AB)$. Она равна:

$$R_{\max} - R_0 = (B_0)(W_{AB} - W_{\alpha B}), \quad (12)$$

где R_{\max} соответствует эффекту от погоды при безупречных в пределах терминологии прогнозах.

Назовем коэффициентом эффективности прогнозов величину G , определяемую формулой:

$$G = \frac{R - R_0}{R_{\max} - R_0} = \frac{(AB) - (A)\eta}{(B)(1 - \eta)}, \quad (13)$$

где η определяется формулой:

$$\eta = \frac{W_{A\beta} - W_{\alpha\beta}}{W_{AB} - W_{A\beta} - W_{\alpha B} + W_{\alpha\beta}}. \quad (14)$$

Коэффициент эффективности прогнозов показывает, какую часть от максимально возможной при данных условиях пользы приносят прогнозы. Очевидно, что из двух сравниваемых методов предсказаний лучше тот метод, для которого коэффициент G имеет большее значение.

Установим условия, при которых целесообразно пользоваться прогнозами. Очевидно, это имеет место, когда $G > 0$. Кроме того, мы в праве требовать, чтобы G было больше G' , где

$$G' = \frac{(B) - n\eta}{(B)(1 - \eta)} \quad (15)$$

соответствует постоянному прогнозу „явление наступит“, который может быть эффективен в тех случаях, когда климатологическая частота явления относительно велика.

Из этих двух условий вытекает, что применение прогнозов целесообразно, если удовлетворено неравенство:

$$\frac{(AB)}{(A)} > \eta > \frac{(B) - (AB)}{n - (A)}. \quad (16)$$

Мы видим, что коэффициент η , определяемый формулой (14), является удобным критерием применимости прогнозов, в виду этого условимся его называть коэффициентом применимости прогнозов.

Обратимся теперь к вопросу о том, какой из двух методов предсказания является более успешным в данной области применения. Будем обозначать величины, относящиеся к первому методу, индексом 1, а величины, относящиеся ко второму методу, индексом 2. Для определенности допустим, что $(A)_1 > (A)_2$. В таком случае первый метод успешнее второго, если $G_1 > G_2$ или если

$$\mu = \frac{(AB)_1 - (AB)_2}{(A)_1 - (A)_2} > \eta, \quad (17)$$

при условии, что оба метода применены к одному и тому же объекту. Формула (17) является решающей для установления сравнительной успешности двух методов предсказания, поэтому величину μ будем называть коэффициентом сравнения успешности. Очевидно, что при $\mu \geq 1$ первый метод всегда лучше второго, при $\mu \leq 0$ второй метод всегда лучше первого, так как по смыслу задачи η может меняться лишь в пределах от 0 до 1.

§ 5. Смысл коэффициентов регрессии как измерителей успешности прогнозов

В известных пределах задача о сравнительной успешности может быть решена и вне зависимости от области применения прогнозов. В особенности удобно воспользоваться для этой цели коэффициентом регрессии прогнозов относительно погоды.

Сравним значения этого коэффициента для двух методов предсказаний, примененных к одному и тому же объекту. Если

$$\rho_{A(B)}^{(1)} > \rho_{A(B)}^{(2)}, \quad (18)$$

то

$$\mu > \frac{(B)}{n}.$$

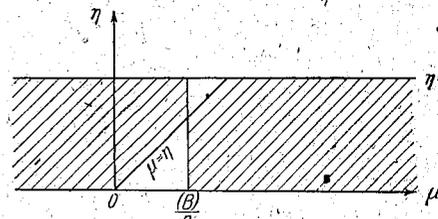


Рис. 1.

Сравнивая условия (17) с (18), убеждаемся, что левые части тождественны. Это дает возможность легко установить пределы применимости коэффициента $\rho_{A(B)}$. Воспользуемся для этой цели графической интерпретацией. Будем откладывать на оси x значения коэффициента сравнения успешности μ , а по оси y — значения коэффициента применимости прогнозов η . В таком случае между осью x и прямой $\eta = 1$ заключены все возможные на практике сочетания коэффициентов μ и η . Из условия (1) находим, что первый метод лучше второго для всех точек, расположенных вправо от прямой $\mu = \eta$. Основываясь на коэффициенте регрессии $\rho_{A(B)}$ (18) мы будем считать первый метод лучше второго в области вправо от прямой $\mu = \frac{(B)}{n}$. Области, в которых суждение по коэффициенту $\rho_{A(B)}$ правильно, обозначены штриховкой на рис. 1.

Необходимо еще принять во внимание условие применимости прогнозов (16). Сравнивая данный метод предсказаний с другим методом, необходимо исключить точки с координатой η , не удовлетворяющей этому условию. В таком случае области неправильного суждения о методе и коэффициенту $\rho_{A(B)}$ несколько сократятся (рис. 2).

Области, в которых применять данные прогнозы не рационально, залиты тушью.

Произведенный анализ показывает, что коэффициент регрессии прогнозов относительно погоды может быть весьма полезен в тех случаях, когда область применения прогнозов не задана.

Дадим теперь интерпретацию коэффициента $\rho_{A(B)}$ как измерителя успешности прогнозов.

Заменим рассматриваемую совокупность другой совокупностью, эквивалентной данной по характеру связи между признаками, но состоящей из двух групп прогнозов. Будем считать, что в пределах терминологии предсказаний про-

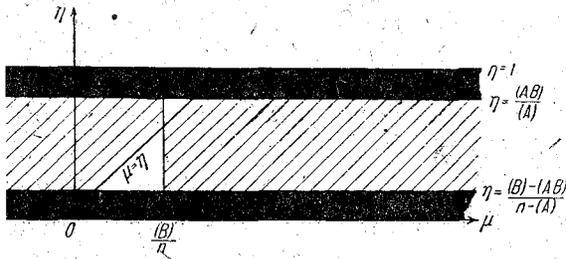


Рис. 2.

гнозы первой группы полноценны, т. е. обладают максимальной успешностью, а прогнозы второй группы не зависят от фактической погоды. Вычислим, какую часть от общего числа прогнозов составляет группа полноценных прогнозов. Будем обозначать полноценные прогнозы одним штрихом вверху соответствующей буквы, не связанные с погодой прогнозы — двумя штрихами. Неизвестные величины (A') , (α') , (A'') , (α'') связаны соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} (A'B) + \frac{(A'')(B)}{n} &= (AB) \\ (\alpha'\beta) + \frac{(\alpha'')(\beta)}{n} &= (\alpha\beta) \\ (A') + (A'') &= (A) \\ (\alpha') + (\alpha'') &= (\alpha) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Решая уравнения и принимая во внимание, что $(A'B) = (A')$; $(\alpha'\beta) = (\alpha')$, находим, что

$$\frac{(A') + (\alpha')}{n} = \frac{n(AB) - (A)(B)}{(B)(\beta)} = \rho_{A(B)}. \quad (20)$$

Таким образом коэффициент регрессии прогнозов относительно погоды оказывает долю полноценных в пределах терминологии прогнозов среди всех сделанных прогнозов.

Аналогичным рассуждением можно убедиться в том, что коэффициент регрессии погоды относительно прогнозов показывает долю полноценно предсказываемых явлений, т. е.

$$\frac{(B') + (\beta')}{n} = \rho_{B(A)}. \quad (21)$$

Коэффициенту $\rho_{A(B)}$ можно дать в другую интерпретацию. Выше было оказано, что прогнозы целесообразно применять лишь в интервале значений η , удовлетворяющих неравенству (16). Вычислим разность пределов:

$$\frac{(AB)}{(A)} - \frac{(B) - (AB)}{n - (A)} = \frac{n(AB) - (A)(B)}{[n - (A)](A)} = \rho_{A(B)}. \quad (22)$$

Следовательно коэффициент регрессии погоды относительно прогнозов оказывает, сколь широк интервал значений η , для которых применение прогнозов имеет смысл.

В виду важности коэффициентов регрессии для контроля альтернативных прогнозов приведем эмпирические значения стандартных их отклонений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{A(B)} &= \sqrt{\frac{(AB)(\alpha B)}{(B)^3} + \frac{(A\beta)(\alpha\beta)}{(\beta)^3}} \\ \sigma_{B(A)} &= \sqrt{\frac{(AB)(A\beta)}{(A)^3} + \frac{(\alpha B)(\alpha\beta)}{(\alpha)^3}} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь через $\sigma_{A(B)}$ обозначено стандартное отклонение $\rho_{A(B)}$, через $\sigma_{B(A)}$ — стандартное отклонение $\rho_{B(A)}$.

§ 6. Область применения схемы контроля альтернативных прогнозов

Область применения схемы альтернативных прогнозов шире, чем может показаться на первый взгляд.

Очень часто шкала значений предсказываемого элемента может быть разбита на две-три части в зависимости от практического эффекта, связанного с осуществлением элемента в данных пределах. Например, для сельского хозяйства влияние температуры часто определяется тем, выше ли она или ниже 0° ; возможны и другие критические пределы температуры. В авиации можно указать критические значения силы и порывистости ветра, прозрачности воздуха и т. п. Из прогноза значения элемента можно сделать вывод о вероятности осуществления элемента в данных пределах шкалы, а следовательно, может быть применена альтернативная схема контроля.

В тех случаях, когда прогноз элемента дается в форме условных указаний степени интенсивности (например, большое потепление, небольшое потепление и т. п., или же выше нормы, норма, ниже нормы), можно с успехом применить альтернативную схему по отношению к каждому типу прогнозов в отдельности. При этом данное состояние элемента (например, малое потепление) необходимо рассматривать как явление, а все остальные как отсутствие явления.

Вообще до тех пор, пока практическое значение осуществления элемента в различных частях шкалы не изучено, нет необходимости разрабатывать и применять более сложные схемы контроля.

§ 7. Пример контроля альтернативных прогнозов

Приложим изложенные в этой статье приемы к прогнозам температуры для Ленинграда, дававшимся Северо-западным бюро погоды на сутки вперед, а именно сравним успешность прогнозов за 1928—1929, 1935—1936 гг. Учитывая характер изменчивости температуры, здесь рассматривались прогнозы только за период с апреля по ноябрь.

В 1928—1929 гг. Северо-западное бюро погоды давало прогнозы температуры путем указания максимальной и минимальной температуры в градусах с точностью до 1° . В 1935—1936 гг. эти прогнозы давались обычно с точностью до 3° , хотя в отдельных случаях бывали и более и менее точные прогнозы. Для определенности суждения из указываемых границ (для максимальной и минимальной температуры в отдельности) вычислялись средние значения. Чтобы применить альтернативную схему пришлось вычислить:

а) предсказанное изменение температуры, т. е. разность между предсказанной температурой и фактической в день составления прогноза. За явление A были приняты случаи, когда это изменение было равно или больше $0,6$. За отсутствие явления α — те случаи, когда это изменени

было равно или меньше $-0^{\circ},5$; все остальные прогнозы не рассматривались;

б) фактическое изменение температуры за сутки. За явление B были приняты изменения, равные или большие $0^{\circ},1$, за отсутствие явления β — изменения, равные или меньшие $-0^{\circ},1$; случаи постоянной температуры изменение $0^{\circ},0$ условно рассматривались наполовину как B , наполовину как β .

В результате были получены численности различных групп, приведенные в табл. 2.

Таблица 2

Годы	(AB)	(A)	(B)	n
1928—1929 минимум t . .	134,5	161	197,5	395
1928—1929 максимум t . .	141	181	190	387
1935—1936 минимум t . .	87,5	119	161,5	367
1935—1936 максимум t . .	98,5	137	188,5	376

Величины, определяющие условия применимости рассматриваемых прогнозов, приведены в табл. 3.

Таблица 3

Годы	$\frac{(B)}{n}$	$\frac{(AB)}{(A)}$	$\frac{(B)-(AB)}{n-(A)}$	$\rho_{A(B)}$	$\rho_{B(A)}$	R_{AB}	$RV\sqrt{n}$
1928—1929 минимум . .	0,50	0,83	0,16	0,57	0,67	0,62	24,4
1928—1929 максимум . .	0,49	0,78	0,24	0,55	0,54	0,54	20,8
1935—1936 минимум . .	0,44	0,73	0,30	0,41	0,43	0,42	15,4
1935—1936 максимум . .	0,50	0,72	0,38	0,36	0,34	0,35	13,2

Частота повышений минимальной температуры в 1935—1936 гг. заметно ниже, чем в 1928—1929 гг. Однако это различие можно рассматривать как случайное, так как даже при несвязанности рядов прогнозов стандартное отклонение разности сравниваемых величин имеет порядок 0,04. Ввиду этого можно применить для сравнения успешности вышеприведенные критерии.

Из последнего столбца табл. 3 делаем вывод об обоснованности всех рассматриваемых прогнозов. Сравнение коэффициентов регрессии прогнозов относительно погоды ($\rho_{A(B)}$) показывает, что в 1928—1929 гг. прогнозы, очевидно, были успешнее, чем в 1935—1936 гг. Ошибка разности коэффициентов имеет порядок 0,05 при наблюдаемых разностях 0,16 и 0,19. Ширина интервала применимости прогнозов и процент полноценных предсказаний для первого периода также заметно больше, чем для второго. Для более точного решения вопроса вычислим коэффициенты сравнения успешности прогнозов, считая прогнозы за 1928—1929 гг. первой системой, а прогнозы за 1935—1936 гг. второй системой.

Для минимальных температур $\mu = 0,81$, т. е. первая система лучше второй, пока $\eta < 0,81$. Но так как вторая система вообще применима лишь при значениях меньших 0,81, то очевидно, что во всех возможных случаях применения прогнозов первая система лучше второй. Для максимальных температур $\mu = 1,01$. Здесь непосредственно видно, что первая система всегда лучше второй.

Произведенное сравнение показывает, что прогнозы температуры, сделанные Северо-западным бюро погоды в 1928—1929 гг., успешнее прогнозов 1935—1936 гг. Этот вывод является неожиданным, так как мето-

дика составления прогнозов и информация о погоде за последнее время значительно улучшились. Возможно, что снижение успешности вызвано изменением наличного состава Бюро погоды, в смысле увеличения числа синоптиков с малым стажем работы. Не исключена также возможность что при изменении смысла прогнозов успешность их стала бы выше. Еще в 1931 г. я отмечал тенденцию синоптиков Северо-западного бюро погоды давать приниженные значения температуры. В 1935—1936 гг. эта тенденция выявлена еще сильнее. Во всяком случае, приведенный пример лишней раз подчеркивает, сколь важное значение может иметь правильный поставленный контроль прогнозов даже при самой простой схеме контроля.

KONTROLLE DER ALTERNATIVEN WETTERPROGNOSEN

M. Omschansky

Zusammenfassung

Die alternativen Wetterprognosen (der einfachste Typus der Wetterprognose) haben zwei Ausdrucksformeln: entweder sagt man: „Die Erscheinung wird stattfinden“ oder man bestätigt: „die Erscheinung wird nicht stattfinden“. Im vorliegenden Artikel betrachtet der Verfasser die Lösung zweier grundlegenden Fragen der statistischen Kontrolle:

- a) die Feststellung der Begründung der Prognosemethode und
- b) den Vergleich der Erfolge zweier Methoden.

Es wird hier gezeigt, dass zur Lösung der ersten Aufgabe der qualitative Koeffizient der Korrelation (3) am bequemsten ist; zur allgemeinen Lösung der zweiten Aufgabe ist unbedingt nötig die Umstände der Anwendung der Wetterprognosen zu kennen. Für die alternativen Prognosen werden die Bedingungen durch einen Koeffizienten (14) charakterisiert, der „Koeffizient der Anwendbarkeit der Prognosen“ genannt wird. Solange der Koeffizient der Anwendbarkeit unbekannt bleibt, ist die vollständige Lösung der Frage vom Vergleich der Erfolge zweier Methoden unmöglich; die partikuläre Lösung gewinnt man durch den Koeffizient der Regression der Prognosen bezüglich des Wetters (1).

In diesem Artikel ist die Interpretation beider Regressionskoeffizienten als Mass des Erfolges der alternativen Prognosen gegeben. Ausserdem werden die Erfolge der Prognosen des Wetterbureaus (Leningrad) verglichen, die nach der alten (1928—1929) und neuen (1935—1936) synoptischen Methode gegeben wurden.



ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
В. Келлер Механизм простейших волновых процессов в атмосфере	3
Е. Кочин О влиянии рельефа земли на волны на поверхности раздела двух масс жидкости разной плотности	19
А. Кибель Движение фронтальной поверхности в баротропной или бароклинной атмосфере	31
А. Омшанский Контроль альтернативных прогнозов	49

TABLE DES MATIÈRES

Keller. Zur Mechanik der einfachsten wellenbewegungen in de Atmosphäre	17
Kotschin. Über den Einfluss des Bodenprofils auf die Welle an der Grenzfläche von zwei Flüssigkeiten verschiedener Dichtigkeiten	29
Kiebel. Le mouvement de la surface frontale dans l'atmosphère barocline ou barotrope	47
Omschansky. Kontrolle der alternativen Wetterprognosen	57

БИБЛИОТЕКА
ГЕОГРАФИЧЕСКОГО
ИНСТИТУТА
11067

ветств. редактор *И. А. Кибель.* Техн. редактор *П. В. Дворников.*
 Корректор *Г. М. Ривлина.*

ноблгорлит № 2570. Издание № 3. Слано в набор 8/1 1937 г. Подписано к печати
 V 1937 г. Колич. учетно-авт. листов 5¹/₂. Печ. л. 3⁵/₈. Колич. бум. лист. 11¹³/₁₆. Колич. зн.
 на бум. листе 122 500. Ст. форм. бум. 70 × 108¹/₁₆. Заказ № 55. Тираж 600 экз.

Типо-литография Гидрометеоиздата, Ленинград, набережная 9 Января, 32.