

ПРОЗЕРЕНО
1961 г.

ПРОЗЕРЕНО
1930 г.

ТРУДЫ ГЛАВНОЙ ГЕОФИЗИЧЕСКОЙ ОБСЕРВАТОРИИ

Выпуск 13

Под общей редакцией проф. Н. В. РОЗЕ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТЕОРОЛОГИЯ

(3)

Под редакцией проф. И. А. КИБЕЛЯ



11063

GENERAL OFFICE OF THE HYDRO-METEOROLOGICAL
SERVICE OF USSR

TRANSACTIONS
OF THE CENTRAL GEOPHYSICAL OBSERVATORY

F A S C. 13

Editor in chief prof. *N. W. Rose*

THEORETICAL METEOROLOGY

(3)

Editor prof. *I. A. Kiebel*

О ДВИЖЕНИИ ВИХРЕЙ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Р. Э. Соловейчик

В настоящей работе мы ставим себе задачу исследовать законы движения вихрей на сферической поверхности и дать теоретический подход к изучению движения циклонов и антициклонов на земной поверхности. Конечно, ни циклоны ни антициклоны не являются вихрями в полном смысле слова, но эмпирически наблюдаемые законы их движений указывают на довольно тесную связь их с вихревыми образованиями.

Эта работа близка по теме работе Zermelo [1], но в то время как его интересуют главным образом возможные вихревые движения на сфере и общие теоремы, мы будем заниматься почти исключительно движением самих вихревых особенностей. При этом мы будем рассматривать землю как шар и атмосферу — как несжимаемую жидкость.

§ 1. Для того чтобы возможно упростить вычисления, мы будем пользоваться стереографической проекцией сферы на плоскость [2]. При этой проекции устанавливается однозначное соответствие между точками плоскости (за исключением бесконечно-далекой) и точками сферы, так как

$$\rho = 2R \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}$$

$$\psi_c = \psi_n.$$

Кроме того при таком отображении сферы на плоскость мы получаем конформное отображение (рис. 1).

Мы будем рассматривать движение жидкости между двумя бесконечно-близкими сферами (практически за такие сферы можно принять поверхность земли и поверхность тропопаузы). Для осуществления такого движения представим себе, что мы имеем радиально идущие вихревые нити; тогда скорость, индуцируемая ими, будет лежать в касательной плоскости, и мы получим „плоское“ движение на сфере. Пересечение вихревой нити с поверхностью сферы будет давать нам точечный вихрь на сфере.

§ 2. Посмотрим, что будет происходить с вихревой особенностью при переходе от сферы S к плоскости P . Как известно, вихревая особен-

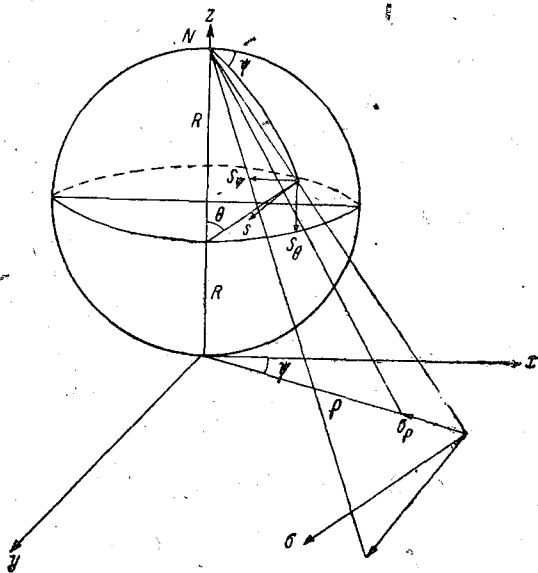


Рис. 1.

ность характеризуется циркуляцией скорости по некоторому бесконечно малому контуру, окружающему эту особенность.

В сферических координатах имеем:

$$\Gamma = \int (v_R dR + v_\theta R d\theta + v_\psi R \sin \theta d\psi),$$

где R — расстояние от центра земли, θ — дополнение до широты, ψ — долгота, v_R, v_θ, v_ψ — проекции скорости соответственно на направление радиуса, меридиана и круга широты. Γ считается положительной, если обход контура совершается против часовой стрелки.

Так как в нашем случае $v_R = 0$, то:

$$\Gamma = \int (v_\theta R d\theta + v_\psi R \sin \theta d\psi).$$

Найдем зависимость между малым перемещением ds на сфере S и соответствующим перемещением $d\sigma$ в плоскости P . Для этого разложим перемещение ds на перемещения $Rd\theta$ и $R \sin \theta d\psi$, а $d\sigma$ на $d\rho$ и $\rho d\psi_n$ так как

$$\rho = 2R \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} \quad \text{и} \quad \psi_n = \psi_c,$$

то

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt} = -\frac{R}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{v_\theta}{\sin^2 \frac{\theta}{2}},$$

$$v_{\psi_n} = \rho \frac{d\psi_n}{dt} = \rho \frac{d\psi_c}{dt} = \frac{\rho}{R \sin \theta} \cdot R \sin \theta \frac{d\psi_c}{dt} = \frac{\rho}{R \sin \theta} v_{\psi_c},$$

а так как

$$\sin \theta = \frac{4R\rho}{\rho^2 + 4R^2},$$

то отсюда находим:

$$v_\theta = -\frac{4R^2}{\rho^2 + 4R^2} v_\rho,$$

$$v_{\psi_c} = \frac{4R^2}{\rho^2 + 4R^2} v_{\psi_n}.$$

Теперь подставим только что найденные значения в выражение для циркуляции

$$\Gamma = \int (v_\theta R d\theta + v_\psi R \sin \theta d\psi) = \int \frac{16R^4}{(\rho^2 + 4R^2)^2} (v_\rho d\rho + \rho v_\psi d\psi)$$

и преобразуем этот интеграл по формуле Гаусса:

$$\Gamma = \int \frac{16R^4}{(\rho^2 + 4R^2)^2} (v_\rho d\rho + \rho v_\psi d\psi) = \iint \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{16R^4 \rho v_\psi}{(\rho^2 + 4R^2)^2} - \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{16R^4 v_\rho}{(\rho^2 + 4R^2)^2} \right] d\rho d\psi,$$

отсюда получаем условие для существования безвихревого движения на сфере; так как в этом случае должна равняться нулю циркуляция по любому замкнутому контуру, то должно равняться нулю подинтегральное выражение, и мы получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \frac{16R^4 v_\rho}{(\rho^2 + 4R^2)^2} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{16R^4 v_\psi}{(\rho^2 + 4R^2)^2}.$$

§ 3. Напишем теперь уравнение неразрывности для движения несжимаемой жидкости по сфере, т. е. при условии $v_R = 0$. Для этого приравняем улю поток жидкости через произвольный замкнутый контур на сфере, налогично выводу Кочина и Розе [3]. В сферических координатах олучим:

$$\int (-v_\psi R d\theta + v_\theta R \sin \theta d\psi) = 0,$$

используя формулы второго параграфа, мы получаем:

$$\int (-v_\psi R d\theta + v_\theta R \sin \theta d\psi) = \int \frac{16R^4}{(\rho^2 + 4R^2)^2} (v_\psi d\rho - \rho v_\rho d\psi) = 0$$

снова применяя формулу Гаусса,

$$\int \frac{16R^4}{(\rho^2 + 4R^2)^2} (v_\psi d\rho - \rho v_\rho d\psi) = \iiint \left[-\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{16R^4 \rho v_\rho}{(\rho^2 + 4R^2)^2} - \frac{\partial}{\partial \psi} \frac{16R^4 v_\psi}{(\rho^2 + 4R^2)^2} \right],$$

так как это должно иметь место для любого замкнутого контура, то олно равняться нулю подынтегральное выражение, и таким образом:

$$\frac{\partial}{\partial \psi} \frac{16R^4 v_\psi}{(\rho^2 + 4R^2)^2} = -\frac{\partial}{\partial \rho} \frac{16R^4 \rho v_\rho}{(\rho^2 + 4R^2)^2}.$$

§ 4. Собирая вместе результаты второго и третьего параграфов и поагая для простоты вычислений $R = \frac{1}{2}$, мы получаем следующую систему дифференциальных уравнений первого порядка для функций v_ρ и v_ψ :

$$\frac{1}{(\rho^2 + 1)^2} \frac{\partial v_\rho}{\partial \psi} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho v_\psi}{(\rho^2 + 1)^2}; \quad -\frac{1}{(\rho^2 + 1)^2} \frac{\partial v_\psi}{\partial \rho} = \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{\rho v_\rho}{(\rho^2 + 1)^2}.$$

Эта система является как бы аналогом уравнения Коши-Римана для лучая плоского безвихревого движения.

Вводя в качестве искоемых функций

$$U = \frac{\rho v_\rho}{(\rho^2 + 1)^2} \quad \text{и} \quad V = \frac{\rho v_\psi}{(\rho^2 + 1)^2}$$

и беря в качестве независимых переменных $\ln \rho$ и ψ , получаем для U и V условия Коши-Римана.

Таким образом, мы видим, что искоемые величины v_θ и v_ψ связаны конечными соотношениями с v_ρ и v_ψ , а эти последние в свою очередь выражаются с помощью функций U и V , которые (по известному свойству армонических функций) являются действительной и мнимой частями функции комплексного переменного $\zeta = \ln \rho + i\psi$.

§ 5. Переходим к рассмотрению вихревых особенностей на сфере. Мы будем заниматься, как уже указывалось выше, прямолинейными радиальными вихревыми нитями.

Вычислим компоненты скорости, индуцируемые полунитью, направленной по оси x и интенсивности Γ , в точке $M(x, 0, z)$ сферы. Из рис. 2 видно, что $r = \sqrt{(\xi - x)^2 + z^2}$. Компоненты скорости мы вычисляем по обычным формулам [4] и в нашем случае получим:

$$v_x = 0, \quad v_y = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^\infty \frac{z}{r^3} d\xi, \quad v_z = 0.$$

Для вычисления интеграла применяем подстановку:

$$\xi - x = z \operatorname{tg} \alpha$$

и получаем

$$v_y = \frac{\Gamma}{4\pi z} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + z^2}} \right),$$

а так как $x = R \cos \chi$ и $z = R \sin \chi$, то окончательно:

$$v_y = |v| = \frac{\Gamma}{4\pi R \sin \chi} (1 + \cos \chi).$$

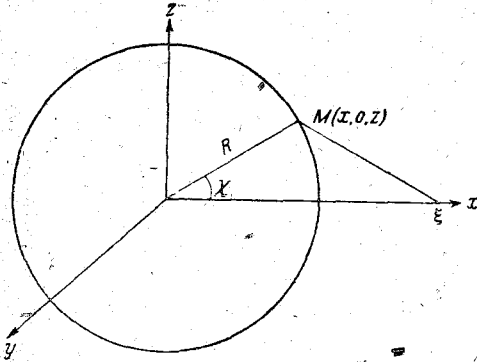


Рис. 2.

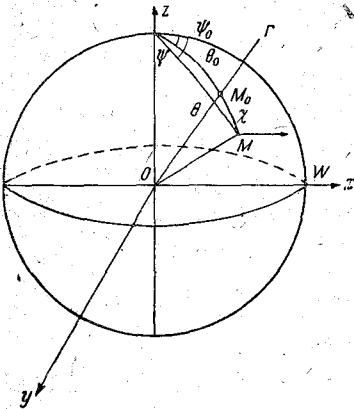


Рис. 3.

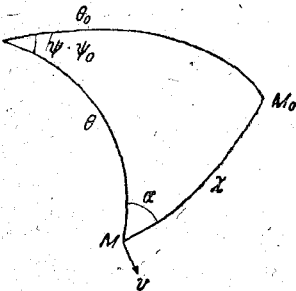


Рис. 4.

Это выражение является одновременно и величиной полной скорости, так как $v_x = v_z = 0$. Найденное таким образом выражение для величины и направления (по оси y в ту или другую сторону в зависимости от знака Γ) индуцируемой скорости имеет место только при сделанных вышепредположениях; поэтому мы переходим теперь к вычислению компонентов скорости, индуцируемых вихревой полунитью, проходящей через точку $M_0(R, \theta_0, \psi_0)$ в произвольной точке $M(R, \theta, \psi)$ сферы.

Введем следующие обозначения углов на сфере:

$$\begin{aligned} \angle MOz &= \theta_0, & \angle M_0z\omega &= \psi_0, \\ \angle MOz &= \theta, & \angle Mz\omega &= \psi. \end{aligned}$$

Центральный угол дуги большого круга M_0M обозначим через χ . Тогда скорости индуцируемая в точке M , по величине определится предыдущей формулой. Для определения направления вектора скорости воспользуемся следующим.

Известно, что вихревая нить индуцирует скорость, лежащую в плоскости, перпендикулярной нити, и таким образом в нашем случае вектор скорости будет лежать в касательной плоскости в точке M перпендикулярно дуге большого круга, соединяющего M с M_0 . Направление вектора в ту или другую сторону зависит от знака Γ . В нашем случае мы получаем таким образом только v_θ и v_ψ . Для их вычисления обозначим угол сферического треугольника в точке M через α , и тогда

$$v_\theta = v \cos(90 - \alpha) = v \sin \alpha,$$

$$v_\psi = -v \sin(90 - \alpha) = -v \cos \alpha.$$

Так как непосредственное решение сферических треугольников приводит к очень громоздким выкладкам, то мы пойдем в дальнейшем другим путем.

§ 6. В § 2 мы установили, что вихревая особенность на сфере переходит в вихревую же особенность в плоскости $(\ln \rho, \psi)$. Примем эту плоскость за плоскость комплексного переменного $\zeta = \ln \rho + i\psi$ и попытаемся остроить функцию, дающую нам поле скоростей для вихревой нити, дущей из бесконечности по продолжению радиуса до центра сферы, ерпящей здесь излом и отражающейся в точку $M(0, 0, 2R)$ или, так как мы приняли $R = \frac{1}{2}$, то $M(0, 0, 1)$. Причины, заставившие нас выбрать такую искусственную схему, заключаются в следующем: 1) мы получаем „плоское“ видение по сфере; 2) мы не имеем обрывов вихревых нитей.

Для определения вида искомой функции применим следующие соображения. Если вихрь находится в точке $\zeta_0 = \ln \rho_0 + i\psi_0$, то вблизи этой точки должно быть:

$$f(\zeta) = U - iV = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - \zeta_0} + \text{члены регулярные вблизи } \zeta_0.$$

Заметим далее, что при переходе от плоскости полярных координат ρ и ψ к плоскости декартовых координат $\ln \rho$ и ψ , всей плоскости ρ и ψ соответствует полоса плоскости $\ln \rho$ и ψ , параллельная оси $\ln \rho$ и шириною в 2π . Таким образом наша функция должна иметь особенность указанного типа во всех точках вида $\zeta_0 + 2k\pi i$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Значит, можно положить:

$$f(\zeta) = U - iV = \frac{\Gamma}{4\pi i} \operatorname{ctg} h \frac{\zeta - \zeta_0}{2} + \text{члены регулярные вблизи } \zeta_0 + 2k\pi i.$$

Кроме этих точек, наша функция должна еще иметь особенность в точке $\zeta = \infty$, следовательно, функция

$$F(\zeta) = f(\zeta) - \frac{\Gamma}{4\pi i} \operatorname{cth} \frac{\zeta - \zeta_0}{2}$$

есть целая функция. Пусть теперь $\zeta \rightarrow \infty$, тогда точка на сфере стремится к точке $M(0, 0, 1)$, т. е. к северному полюсу, вблизи которого мы имеем:

$$v_\theta = 0 + \bar{v}_\theta, \\ v_{\psi c} = \frac{\Gamma}{4\pi R \sin \theta} (1 + \cos \theta) + \bar{v}_{\psi c} = \frac{\Gamma \rho}{2\pi} + \bar{v}_{\psi c},$$

где \bar{v}_θ и $\bar{v}_{\psi c}$ происходят от нити, проходящей в точке $M_0\left(\frac{1}{2}, \theta_0, \psi_0\right)$.

Для этой же точки получим теперь:

$$U = -\frac{\rho}{\rho^2 + 1} v_\theta = -\frac{\rho}{\rho^2 + 1} \bar{v}_\theta \rightarrow 0 \text{ при } \rho \rightarrow \infty, \\ V = \frac{\rho}{\rho^2 + 1} \bar{v}_{\psi c} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{\rho^2}{\rho^2 + 1} + \frac{\rho}{\rho^2 + 1} \tilde{v}_{\psi c} \rightarrow \frac{\Gamma}{2\pi} \text{ при } \rho \rightarrow \infty,$$

а тогда по теореме Лиувилля [5] $F(\zeta)$ есть постоянная, равная

$$-i \frac{\Gamma}{2\pi} - \frac{\Gamma}{4\pi i} = \frac{\Gamma}{4\pi i}.$$

Итак, окончательно получаем:

$$F(\zeta) = \frac{\Gamma}{4\pi i} \left[\operatorname{cth} \frac{\zeta - \zeta_0}{2} + 1 \right] = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{1 - e^{-(\zeta - \zeta_0)}}.$$

В заключение настоящего параграфа заметим, что вид функции $f(\zeta)$ можно получить также, и непосредственно рассматривая нить, проходящую через северный полюс, при использовании положения „вихрь сам на себе не действует“.

Проверка того, что построенная нами функция $f(\zeta)$ действительно дает нам поле скоростей на сфере, может быть проведена путем отделения вещественной и мнимой части в $f(\zeta)$ и перехода к сфере по формулам:

$$U = \frac{\rho v_\rho}{(\rho^2 + 1)^2} = -\frac{1}{2} \sin \theta v_\theta$$

$$V = \frac{\rho v_{\psi_n}}{(\rho^2 + 1)^2} = \frac{1}{2} \sin \theta v_{\psi_c}$$

Для краткости мы эту проверку опускаем.

§ 7. Переходя к изучению движения вихревых особенностей, мы должны обратить внимание на результат Вилля [6], показавшего, что хотя при конформном отображении вихревая особенность переходит в вихревую, но скорости перемещения вихрей при этом не сохраняются. В своей работе Вилля дает выражение для скорости перемещения вихрей при конформном отображении одной плоскости на другую. Так как мы имеем дело с отображением сферы на плоскость, то не можем воспользоваться результатом Вилля и пойдем другим путем.

Напомним, что в случае плоского движения вихрей в выражении комплексного потенциала просто опускался член, соответствующий тому вихрю, движение которого изучалось, но в нашем случае поступит таким образом мы не можем, так как каждый член представляет собой пару вихрей на поверхности сферы.

Кроме того, мы должны иметь в виду, что при изучении вихревых особенностей на сфере сумма всех циркуляций должна равняться нулю что необходимо из чисто кинематических соображений.

Мы получили функцию, соответствующую „изломанной“ нити, в виде

$$f(\zeta) = \frac{\Gamma}{4\pi i} \left[\operatorname{cth} \frac{\zeta - \zeta_0}{2} + 1 \right],$$

и если исключить вихревую особенность в точке ζ_0 , то мы получаем:

$$f(\zeta_0) = U_0 - iV_0 = \frac{\Gamma}{4\pi i} \left[\operatorname{cth} \frac{\zeta - \zeta_0}{2} - \frac{2}{\zeta - \zeta_0} + 1 \right] = \frac{\Gamma}{4\pi i},$$

и значит:

$$U_0 = 0, \quad V_0 = \frac{\Gamma}{4\pi}.$$

Если теперь перейти на сферу по формулам предыдущего параграфа, то

$$(v_\theta)_0 = 0 \quad \text{и} \quad (v_{\psi_c})_0 = \frac{\Gamma}{2\pi \sin \theta}.$$

Здесь значок 0 указывает на то, что мы имеем дело с вихревой точкой. Из этих формул мы видим, что вместо полной скорости

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta}$$

происходящей от полунити, отраженной в северный полюс) мы получили только первое ее слагаемое, и таким образом нам нужно ввести в v_ϕ еще дополнительно член $\frac{\Gamma \cos \theta}{2\pi \sin \theta}$, что даст для V_0 выражение:

$$V_0 = \frac{\Gamma}{4\pi} \left(1 + \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} \right),$$

если обозначить ρ и θ , относящиеся к вихревой точке через ρ_0 и θ_0 , то получим:

$$U_0 - iV_0 = \frac{\Gamma}{4\pi i} \left(1 + \frac{\rho_0^2 - 1}{\rho_0^2 + 1} \right).$$

Таким образом получается, что для изучения движения вихревой особенности на сфере мы должны опустить соответствующий этой особенности член в выражении $f(\zeta)$ и ввести „поправочный“ член вышеуказанного вида.

Прежде чем переходить к применению установленных выше формул, заметим, что искусственное построение с „изломом“ вихревой нити в центре и отражением в северный полюс не налагает ограничения на общность результатов, так как в силу условия для вихрей $\sum \Gamma_i = 0$ циркуляция вокруг северного полюса отсутствует, и мы оказываемся обязанными исключить из рассмотрения только случай одной вихревой нити. Но и это ограничение фактически ничего не ограничивает, так как случай одной нити дает нам два вихря и случай двух нитей тоже дает два вихря, так что и это ограничение отпадает.

§ 8. Так как в дальнейшем нам неоднократно придется находить U и V по выражению $f(\zeta)$, то отделим вещественную и мнимую части в выражении

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma}{4\pi i} \operatorname{cth} \frac{\zeta - \zeta_0}{2} = \\ & = -\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2\rho\rho_0 \sin(\psi - \psi_0)}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\psi - \psi_0)} - i \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho^2 - \rho_0^2}{\rho^2 + \rho_0^2 - 2\rho\rho_0 \cos(\psi - \psi_0)} \end{aligned}$$

(единицу в выражении $f(\zeta)$ для „изломанной“ нити можно не принимать во внимание, так как $\sum \Gamma_i = 0$).

В качестве примера рассмотрим случай двух вихрей.

Пусть имеется вихрь интенсивности Γ в точке $M_1\left(\frac{1}{2}, \theta_1, \psi_1\right)$ и вихрь интенсивности $-\Gamma$ в точке $M_2\left(\frac{1}{2}, \theta_2, \psi_2\right)$, тогда в любой невихревой точке мы имеем:

$$\begin{aligned} U - iV &= \frac{\Gamma}{4\pi i} \left[\operatorname{cth} \frac{\zeta - \zeta_1}{2} + 1 \right] - \frac{\Gamma}{4\pi i} \left[\operatorname{cth} \frac{\zeta - \zeta_2}{2} + 1 \right] = \\ &= \frac{\Gamma}{4\pi i} \left[\operatorname{cth} \frac{\zeta - \zeta_1}{2} - \operatorname{cth} \frac{\zeta - \zeta_2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Чтобы найти движение какого-либо вихря, мы отбрасываем член, соответствующий этому вихрю, и вводим соответствующий поправочный член. Таким образом мы получаем:

$$U_1 - iV_1 = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2\rho_1\rho_2 \sin(\psi_1 - \psi_2)}{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)} +$$

$$+ i \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)} - i \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho_1^2 - 1}{\rho_1^2 + 1};$$

$$U_2 - iV_2 = - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2\rho_2\rho_1 \sin(\psi_2 - \psi_1)}{\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_2\rho_1 \cos(\psi_2 - \psi_1)} -$$

$$- i \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_2\rho_1 \cos(\psi_2 - \psi_1)} + i \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho_2^2 - 1}{\rho_2^2 + 1},$$

где значки 1 и 2 относятся соответственно к первому и второму вихрю

Установим теперь, как связаны между собой U, V и $\frac{d \ln \rho}{dt}, \frac{d\psi}{dt}$ для чего используем формулы § 2 и получим:

$$U = - \frac{\sin \theta}{2} v_0 = - \frac{\rho}{\rho^2 + 1} v_0 = - \frac{\rho}{\rho^2 + 1} \left(- \frac{1}{\rho^2 + 1} \frac{d\rho_0^2}{dt} \right) = \frac{\rho^2}{(\rho^2 + 1)^2} \frac{d \ln \rho}{dt}$$

$$V = \frac{\sin \theta}{2} v_{\psi_0} = \frac{\rho}{\rho^2 + 1} v_{\psi_0} = \frac{\rho}{\rho^2 + 1} \left(\frac{\rho}{\rho^2 + 1} \frac{d\psi}{dt} \right) = \frac{\rho^2}{(\rho^2 + 1)^2} \frac{d\psi}{dt}$$

и значит:

$$\frac{d \ln \rho}{dt} = U \frac{(\rho^2 + 1)^2}{\rho^2}, \quad \frac{d\psi}{dt} = V \frac{(\rho^2 + 1)^2}{\rho^2}.$$

Используя эти соотношения, мы приходим к следующей системе уравнений

$$\frac{d \ln \rho_1}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2\rho_1\rho_2 \sin(\psi_1 - \psi_2)}{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)} \frac{(\rho_1^2 + 1)^2}{\rho_1^2},$$

$$\frac{d \ln \rho_2}{dt} = - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2\rho_2\rho_1 \sin(\psi_2 - \psi_1)}{\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_2\rho_1 \cos(\psi_2 - \psi_1)} \frac{(\rho_2^2 + 1)^2}{\rho_2^2},$$

$$\frac{d\psi_1}{dt} = - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho_1^2 - \rho_2^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\psi_1 - \psi_2)} \frac{(\rho_1^2 + 1)^2}{\rho_1^2} + \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho_1^2 - 1}{\rho_1^2 + 1} \frac{(\rho_1^2 + 1)}{\rho_1^2}$$

$$\frac{d\psi_2}{dt} = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho_2^2 - \rho_1^2}{\rho_2^2 + \rho_1^2 - 2\rho_2\rho_1 \cos(\psi_2 - \psi_1)} \frac{(\rho_2^2 + 1)^2}{\rho_2^2} - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho_2^2 - 1}{\rho_2^2 + 1} \frac{(\rho_2^2 + 1)}{\rho_2^2}.$$

Для интегрирования этой системы поступим следующим образом. Пусть в начальный момент $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, $\psi_1 = \psi$ и $\psi_2 = -\psi$; этого всегда можно достигнуть, подходящим образом, вращая сферу вокруг некоторой оси, и таким образом принятие этих начальных условий не ограничивает общности последующих выводов.

Разделим первое уравнение на второе и получим:

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d\rho_1}{dt} \rho_2 \frac{dt}{d\rho_2} = \frac{(\rho_1^2 + 1)^2}{\rho_1^2} \frac{\rho_2^2}{(\rho_1^2 + 1)^2}$$

или

$$\frac{\rho_1 d\rho_1}{(\rho_1^2 + 1)^2} = \frac{\rho_2 d\rho_2}{(\rho_2^2 + 1)^2};$$

интегрируя, получаем

$$-\frac{1}{\rho_1^2 + 1} = -\frac{1}{\rho_2^2 + 1} + c,$$

так как при $t=0$ мы имеем $\rho_1 = \rho_2$, то значит, что и во все время движения $c=0$ (так как $c=0$ при $t=0$) и $\rho_1 = \rho_2$. Сложим теперь третье и четвертое уравнения (полагая одновременно $\rho_1 = \rho_2$), тогда

$$\frac{d\psi_1}{dt} + \frac{d\psi_2}{dt} = 0,$$

, интегрируя, получаем $\psi_1 + \psi_2 = c$, а так как при $t=0$ мы имеем $\psi_1 = -\psi_2$, т. е. $c=0$, то и во все время движения $c=0$ и $\psi_1 = -\psi_2$.

Используя эти интегралы, найдем траекторию, например, первого вихря; для этого разделим первое уравнение на третье и получим

$$\frac{d \ln \rho_1}{d\psi_1} = \frac{\rho_1^2 + 1}{\rho_1^2 - 1} \frac{\sin 2\psi_1}{1 - \cos 2\psi_1}$$

ли после очевидных преобразований:

$$\frac{\rho_1^2 - 1}{\rho_1(\rho_1^2 + 1)} d\rho_1 = \operatorname{ctg} \psi_1 d\psi_1$$

после интегрирования:

$$\frac{\rho_1^2 + 1}{\rho_1} = c \sin \psi_1,$$

о так как

$$\rho_1 = \operatorname{ctg} \frac{\theta_1}{2},$$

о окончательно:

$$\sin \theta_1 \sin \psi_1 = c,$$

это не что иное, как уравнение линии $x = \operatorname{const}$ на сфере, т. е. окружность. Совершенно такую же траекторию мы получим и для второго вихря, и таким образом мы видим, что два вихря будут вращаться по параллелям относительно большого круга, проведенного через середину дуги большого же круга, соединяющего вихревые точки.

Случай трех вихрей представляет большие трудности: он очень напоминает задачу „трех тел“ и, повидимому, не интегрируется в конечном виде.

Не останавливаясь на примерах движения отдельных вихрей, перейдем к изучению вихревых цепочек.

§ 9. Мы должны сразу же обратить внимание, что в то время как на плоскости рассматриваются вихревые цепочки с бесконечным числом вихрей, на сфере мы будем рассматривать только конечные цепочки. Это различие вызвано в основном отсутствием на сфере бесконечно удаленной точки.

Чтобы облегчить дальнейшее изложение, вычислим сейчас две суммы которые в дальнейшем будут нам неоднократно встречаться.

$$\sum_{k=1}^n \frac{2r\rho \sin\left(\alpha - \frac{2\pi}{n}k\right)}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{n}k\right)} = S_1; \quad (a)$$

обозначим $e^{\frac{2\pi i}{n}} = \zeta$, тогда

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{i} \sum_{k=1}^n \frac{e^{ik\zeta} - e^{-ik\zeta}}{\frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{r} - e^{ik\zeta} - e^{-ik\zeta}} = \\ &= \frac{1}{i} \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{1 - \frac{\rho}{r} e^{ik\zeta}} - \frac{1}{1 - \frac{\rho}{r} e^{-ik\zeta}} \right]. \end{aligned}$$

Далее, не умаляя общности, можно положить, что $\frac{\rho}{r} = x < 1$ (так как если $\frac{\rho}{r} > 1$, то это приводит только к перемене местами сумм, входящих в S_1), а тогда справа мы имеем сумму двух бесконечно убывающих прогрессий, и

$$S_1 = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^n [1 + x e^{ik} \zeta^{-k} + x^2 e^{2i\alpha} \zeta^{-2k} + \dots] - \\ - \frac{1}{i} \sum_{k=1}^n [1 + x e^{-i\alpha} \zeta^k + x^2 e^{-2i\alpha} \zeta^{2k} + \dots].$$

Заметим теперь, что

$$\sum_{k=1}^n \zeta^{\pm kt} = \sum_{k=1}^n e^{\frac{2\pi i}{n} kt} = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq n, \\ n & \text{при } t = ln, \end{cases} \quad (*)$$

где l — целое число, и тогда:

$$S_1 = \frac{1}{i} n (1 + x^n e^{i\alpha n} + x^{2n} e^{2i\alpha n} + \dots) - \\ - \frac{1}{i} n (1 + x^n e^{-i\alpha n} + x^{2n} e^{-2i\alpha n} + \dots).$$

Если положить в частности $\alpha = \frac{\pi}{n}, \dots, \frac{k\pi}{n}$, то, как нетрудно видеть, $S_1 = 0$. В дальнейшем мы будем пользоваться полученными здесь значениями, уже не приводя выводов в каждом отдельном случае.

$$\sum_{k=1}^n \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{n} k\right)} = S_2. \quad (6)$$

Снова введем обозначение $e^{\frac{2\pi i}{n}} = \zeta$, тогда

$$S_2 = \sum_{k=1}^n \frac{\frac{r}{\rho} - \frac{\rho}{r}}{\frac{r}{\rho} + \frac{\rho}{r} - e^{i\alpha} \zeta^{-k} - e^{-i\alpha} \zeta^k} = \\ = \sum_{k=1}^n \left[\frac{1}{1 - \frac{\rho}{r} e^{i\alpha} \zeta^{-k}} + \frac{1}{1 - \frac{\rho}{r} e^{-i\alpha} \zeta^k} - 1 \right];$$

на том же основании, что и выше, полагаем $\frac{\rho}{r} = x < 1$ и аналогично предыдущему получаем справа сумму двух бесконечно убывающих прогрессий:

$$S_2 = \sum_{k=1}^n [1 + x e^{i\alpha} \zeta^{-k} + x^2 e^{2i\alpha} \zeta^{-2k} + \dots] + \\ + \sum_{k=1}^n [1 + x e^{-i\alpha} \zeta^k + x^2 e^{-2i\alpha} \zeta^{2k} + \dots] + \sum_{k=1}^n (-1),$$

используя (*) получаем:

$$S_2 = n(1 + x^n e^{i\alpha n} + x^{2n} e^{2i\alpha n} + \dots) + n(1 + x^n e^{-i\alpha n} + x^{2n} e^{-2i\alpha n} + \dots) - n.$$

нетрудно видеть, что при:

$$\alpha = (2k - 1) \frac{\pi}{n} \quad S_2 = n \frac{1 - x^n}{1 + x^n},$$

$$\alpha = 2k \frac{\pi}{n} \quad S_2 = n \frac{1 + x^n}{1 - x^n}.$$

заметим, что все сделанные нами перемены порядка суммирования законны, так как мы имеем дело с абсолютно сходящимися рядами.

§ 10. Рассмотрим вопрос о возможности существования на сферических вихревых цепочках. Допустим, что мы имеем на сфере две цепочки вихрей по n вихрей в каждой и что вихри первой будут интенсивности Γ и расположены в точках $M_i \left[\rho', \psi_1 + \frac{2\pi}{n} (k-1) \right]$, а вихри второй интенсивности $-\Gamma$ и расположены в точках $M_i \left[r', \psi_2 + \frac{2\pi}{n} (k-1) \right]$.

Силу симметричности расположения радиусы-векторы для каждой цепочки будут оставаться одинаковыми для каждого из входящих в нее вихрей, но величина этого радиуса-вектора может меняться со временем. Мы будем называть „твердыми“ такие вихревые цепочки, которые перемещаются по параллелям с одинаковой угловой скоростью, т. е. не меняя взаимного расположения вихрей. Таким образом условия „твердости“ заключаются в том, что

$$\frac{d \ln \rho}{dt} = \frac{d \ln r}{dt} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d \psi_1}{dt} = \frac{d \psi_2}{dt}.$$

Заметим, что в силу симметрии взаимного расположения вихрей нам достаточно исследовать только по одному вихрю из каждой цепочки; кроме того заметим, что можно считать

$$\psi_1 < \frac{2\pi}{n}, \quad \psi_2 < \frac{2\pi}{n} \quad \text{и} \quad |\psi_1 - \psi_2| < \frac{2\pi}{n}.$$

Если написать теперь $f(\zeta)$ для нашего случая и отделить вещественную и мнимую части, то мы можем написать и $f(\zeta)$ для вихревой точки, вводя соответствующий поправочный член. Так, например, для первых вихрей мы получаем:

$$\begin{aligned} J_1^1 - iV_1^1 = & \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2\rho\rho' \sin \left[-\frac{2\pi}{n} (k-1) \right]}{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \left[-\frac{2\pi}{n} (k-1) \right]} - \\ & - i \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho^2 - \rho'^2}{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \left[-\frac{2\pi}{n} (k-1) \right]} - i \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} - \\ & - \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2\rho r \sin \left[\psi_1 - \psi_2 - \frac{2\pi}{n} (k-1) \right]}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \left[\psi_1 - \psi_2 - \frac{2\pi}{n} (k-1) \right]} + \\ & + i \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \left[\psi_1 - \psi_2 - \frac{2\pi}{n} (k-1) \right]}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_1^2 - iV_1^2 = & \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2r\rho \sin \left[\psi_2 - \psi_1 - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right]}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \left[\psi_2 - \psi_1 - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right]} - \\
 & - i \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \left[\psi_2 - \psi_1 - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right]} - \\
 & - \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2rr \sin \left[-\frac{2\pi}{n}(k-1) \right]}{r^2 + r^2 - 2rr \cos \left[-\frac{2\pi}{n}(k-1) \right]} + \\
 & + i \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{r^2 - r^2}{r^2 + r^2 - 2rr \cos \left[-\frac{2\pi}{n}(k-1) \right]} + i \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

Здесь значки у U и V указывают: нижний — на номер вихревой точки, а верхний — на номер цепочки. Произведя упрощение, мы получаем:

$$\begin{aligned}
 U_1^1 = & \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \left[-\frac{2\pi}{n}(k-1) \right]}{1 - \cos \left[-\frac{2\pi}{n}(k-1) \right]} - \\
 & - \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2\rho r \sin \left[\psi_1 - \psi_2 - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right]}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \left[\psi_1 - \psi_2 - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right]}; \\
 V_1^1 = & \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} - \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos \left[\psi_1 - \psi_2 - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right]}; \\
 U_1^2 = & \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{2r\rho \sin \left[\psi_1 - \psi_2 - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right]}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \left[\psi_2 - \psi_1 - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right]} - \\
 & - \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\sin \left[-\frac{2\pi}{n}(k-1) \right]}{1 - \cos \left[-\frac{2\pi}{n}(k-1) \right]}; \\
 V_1^2 = & \sum_{k=1}^n \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \left[\psi_2 - \psi_1 - \frac{2\pi}{n}(k-1) \right]} - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1}.
 \end{aligned}$$

Значок Σ' означает, что суммирование производится по всем k за исключением $k=1$. Первая сумма, входящая в U_1^1 , и вторая сумма, входящая в U_1^2 , как нетрудно видеть, равны нулю, а две остающиеся суммы суть суммы S_1 из § 9, и они равны нулю при $|\psi_1 - \psi_2| = 0$ или $|\psi_1 - \psi_2| = \frac{\pi}{n}$, т. е. или при симметричном или при шахматном расположении цепочек (другие значения модуля $\psi_1 - \psi_2$ можно не учитывать как большие $\frac{2\pi}{n}$ и не дающие ничего нового).

Так как:

$$\frac{d \ln \rho}{dt} = U_1^1 \frac{(\rho^2 + 1)^2}{\rho^2} \quad \text{и} \quad \frac{d \ln r}{dt} = U_1^2 \frac{(r^2 + 1)^2}{r^2},$$

о первое условие „твердости“ вихревых цепочек будет выполняться только для симметричного и шахматного расположения цепочек.

Итак, если на сфере возможны „твердые“ вихревые цепочки, то они должны быть или симметричными или шахматными.

§ 11. Займемся сперва возможностью существования на сфере „твердых“ вихревых цепочек симметричного расположения. Пусть мы опять имеем две цепочки по n вихрей в каждой, первая из вихрей интенсивности Γ в точках $M_i \left[\rho, \frac{2\pi}{n}(k-1) \right]$ и вторая из вихрей интенсивности $-\Gamma$ в точках $M_i \left[r, \frac{2\pi}{n}(k-1) \right]$. Как мы только-что видели, первое условие твердости будет в этом случае выполняться само собой, не налагая каких-либо связей на ρ и r . Напишем теперь $\frac{d\psi'}{dt}$ и $\frac{d\psi^2}{dt}$, причем, опять-таки пользуясь симметрией, мы будем рассматривать эти выражения для первых вихрей. Так как

$$\frac{d\psi'}{dt} = V_1^2 \frac{(\rho^2 + 1)^2}{\rho^2} \quad \text{и} \quad \frac{d\psi^2}{dt} = V_1^2 \frac{(r^2 + 1)^2}{r^2},$$

$$\frac{d\psi'}{dt} = \left[\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} - \frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\left(-\frac{2\pi}{n}(k-1)\right)} \right] \frac{(\rho^2 + 1)^2}{\rho^2},$$

$$\frac{d\psi^2}{dt} = \left[\frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos\left(-\frac{2\pi}{n}(k-1)\right)} - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \right] \frac{(r^2 + 1)^2}{r^2}.$$

ходящая сюда сумма есть сумма S_2 из § 9, и таким образом второе условие твердости дает:

$$\left[\frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} - n \frac{\rho^n + r^n}{\rho^n - r^n} \right] \frac{(\rho^2 + 1)^2}{\rho^2} = \left[-n \frac{\rho^n + r^n}{\rho^n - r^n} - \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \right] \frac{(r^2 + 1)^2}{r^2}$$

ли после простых преобразований получаем:

$$n \frac{\rho^n + r^n}{\rho^n - r^n} (\rho^2 - r^2) \left(1 - \frac{1}{\rho^2 r^2} \right) = (\rho^2 + r^2) \left(1 - \frac{1}{\rho^2 r^2} \right). \\ 1 - \frac{1}{\rho^2 r^2} = 0. \quad (a)$$

В этом случае мы получаем, что $r = \frac{1}{\rho}$ (так как и $\rho > 0$ и $r > 0$) или цепочки расположены на параллелях θ и $\pi - \theta$, т. е. симметрично относительно экватора.

$$n \frac{\rho^n + r^n}{\rho^n - r^n} (\rho^2 - r^2) = (\rho^2 + r^2). \quad (б)$$

Заметим, что $r = \rho$ приводит к отсутствию вихрей на сфере, поэтому мы считаем $r \neq \rho$, тогда, полагая $\frac{r}{\rho} = x$, имеем

$$n \frac{1 + x^n}{1 - x^n} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2}$$

и, вводя подстановку $x = e^{2\zeta}$ и перевернув предыдущее равенство, получаем:

$$\operatorname{th} n\zeta = n \operatorname{th} 2\zeta.$$

Образуя теперь $F(\zeta) = \operatorname{th} n\zeta - n \operatorname{th} 2\zeta$, легко увидеть, что

$$\begin{aligned} 1) F(0) &= 0, \\ 2) F'(\zeta) &< 0 \quad \text{при } n \geq 2, \end{aligned}$$

так как $\operatorname{ch}^2 2\zeta < 2 \operatorname{ch}^2 n\zeta$ при $n \geq 2$ и значит при $n \geq 2$

$$F(\zeta) > 0 \quad \text{при } \zeta < 0,$$

$$F(\zeta) < 0 \quad \text{при } \zeta > 0$$

или

$$F(\zeta) \neq 0 \quad \text{при } \zeta \neq 0,$$

и таким образом наше уравнение не имеет положительных корней, кроме $x=1$, а это дает $r=\rho$ и значит отсутствие вихрей. Если же $n=1$, то непосредственно из условия твердости находим единственный корень $x=0$, а это приводит нас к случаю одной вихревой нити, и, как нам было оговорено, он исключается из рассмотрения.

Итак, „твердые“ симметрично расположенные цепочки вихрей на сфере могут существовать только в том случае, если они лежат на параллелях θ и $\pi - \theta$, т. е. симметрично относительно экватора.

§ 12. Переходим к рассмотрению шахматного расположения вихрей. Пусть мы имеем две цепочки вихрей по n штук в каждой; первая из вихрей интенсивности Γ в точках $M_i \left[\rho, \frac{2\pi}{n}(k-1) \right]$ и вторая из вихрей интенсивности $-\Gamma$ в точках $M_i \left[r, \frac{2\pi}{2n} + \frac{2\pi}{n}(k-1) \right]$. И в этом случае как мы видели в § 10, первое условие твердости выполняется само собой не налагая каких-либо связей на ρ и r . Напишем теперь $\frac{d\psi'}{dt}$ и $\frac{d\psi^2}{dt}$ снова из соображений симметрии будем рассматривать только первые вихри. Аналогично случаю симметричного расположения имеем:

$$\frac{d\psi'}{dt} = \left[\frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} - \frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r \cos\left(-\frac{2\pi}{2n} - \frac{2\pi}{n}(k-1)\right)} \right] \frac{(\rho^2 + 1)}{\rho^2}$$

$$\frac{d\psi^2}{dt} = \left[\frac{\Gamma}{4\pi} \sum_{k=1}^n \frac{r^2 - \rho^2}{r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos\left(\frac{2\pi}{2n} - \frac{2\pi}{n}(k-1)\right)} - \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \right] \frac{(r^2 + 1)}{r^2}$$

Входящие сюда суммы представляют собой сумму S_2 из § 9, и таким образом второе условие твердости дает

$$\left[\frac{\rho^2 - 1}{\rho^2 + 1} - n \frac{\rho^n - r^n}{\rho^n + r^n} \right] \frac{(\rho^2 + 1)^2}{\rho^2} = \left[-n \frac{\rho^n - r^n}{\rho^n + r^n} - \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1} \right] \frac{(r^2 + 1)^2}{r^2},$$

или после простых преобразований получаем:

$$n \frac{\rho^n - r^n}{\rho^n + r^n} (\rho^2 - r^2) \left(1 - \frac{1}{\rho^2 r^2} \right) = (\rho^2 + r^2) \left(1 - \frac{1}{\rho^2 r^2} \right).$$

$$1 - \frac{1}{\rho^2 r^2} = 0. \quad (a)$$

этом случае $r = \frac{1}{\rho}$ (так как $\rho > 0$ и $r > 0$), и значит цепочки лежат параллели θ и $\pi - \theta$, т. е. симметрично относительно экватора. Если частности $\rho = r$ (т. е. $\theta = 90^\circ$), то мы получаем одну знакопеременную цепочку из $2n$ вихрей, расположенную на экваторе и, как легко видеть из вышенаписанных формул, неподвижную.

$$n \frac{\rho^n - r^n}{\rho^n + r^n} (\rho^2 - r) = (\rho^2 + r^2). \quad (6)$$

положим $\frac{r}{\rho} = x$ (это можно сделать, так как $\rho = r$ не удовлетворяет нашему условию) и получаем

$$n \frac{1 - x^n}{1 + x^n} = \frac{1 + x^2}{1 - x^2};$$

вводя подстановку $x = e^{2\zeta}$ и перевернув предыдущее равенство, получаем:

$$\operatorname{cth} n\zeta = n \operatorname{th} 2\zeta.$$

Мы будем рассматривать $n \geq 2$, так как при $n = 1$ мы получаем непосредственно из условия твердости единственный корень $x = 0$ или одну ихревую нить, а ее мы исключили из непосредственного рассмотрения. Это уравнение имеет действительные положительные корни, и таким образом мы получаем возможность существования „твердых“ шахматных эпочек, не лежащих симметрично относительно экватора.

Заметим, что возможность „твердых“ вихревых расположений на плоскости для конечного числа вихрей была установлена Васильевым [7].

Опуская вычисления, укажем, что

при $n = 2$ имеем $x = \sqrt{2} \pm 1$ и значит $r = \rho(\sqrt{2} \pm 1)$;

при $n = 3$ имеем $x = \frac{1}{2}(3 \pm \sqrt{5})$ и значит $r = \frac{\rho}{2}(3 \pm \sqrt{5})$;

другие случаи не дают ничего принципиально нового, но точное решение уравнения представляет большие трудности.

Я имею в виду в следующей работе вернуться к полученным мною результатам перемещения отдельных вихрей и вихревых цепочек применительно к исследованию гиперболических точек и цепочек циклонов и антициклонов, бегущих по поверхности земли.

В заключение считаю необходимым отметить, что данная статья появилась в результате работы семинара по теории вихрей, проведенного в 1934 г. в Институте теоретической метеорологии под руководством А. Кибеля. Тема предложена Н. Е. Кочиним, многочисленными указаниями которого я неоднократно пользовался.



11063

THE MOTION OF VORTICES ON THE SPHERICAL SURFACE

R. Solowetchik

Summary

In this article the author considers the motion of vortices on sphere. For the sake of simplifying the transformations the author uses stereographic projection of the sphere S on plane P the radius of the sphere being assumed to be equal to $1/2$.

Further the two-dimensional motion of incompressible fluid is considered. For getting two-dimensional motion on sphere S the author considers vortical filament extending in radial direction from infinity to the centre of the sphere subjected to a break there and reflected to point N („North Pole“).

As shown in the article, this artificial construction does not limit the generality of the conclusions, as, owing to the condition $\Sigma \Gamma_i = 0$ necessary for satisfying the cinemathical conditions on the sphere, there is no circulation round the North Pole.

Having taken the polar coordinates (ρ, ψ) in plane P , the author goes on to consider rectangle coordinates $(\ln \rho, \psi)$ and, introducing the complex variable $\zeta = \ln \rho + i\psi$ he builds up a function, the real and the imagined parts of which give the possibility of finding the field of velocities caused by the broken vortex filament:

$$f(\zeta) = \frac{\Gamma}{4\pi i} \left[\operatorname{cth} \frac{\zeta - \zeta_0}{2} + 1 \right] = U - iV,$$

where

$$U = \frac{\rho v_\rho}{(1 + \rho^2)^2}$$

and

$$V = \frac{\rho v_\psi}{(1 + \rho^2)^2}.$$

Here ρ — the radius vector in the plane, ψ — the polar angle, v_ρ and v_ψ — the components of velocity in the movement on plane P of a point representing the stereographic projection of a point moving on sphere S .

This function would seem to be the analogue of the function of flow for a flat current of fluid. Further the author establishes, in accordance with the results of Villat, that for investigating the motion of the vortical point itself it is necessary to omit in the function $F(\zeta)$ the member answering this point and to introduce the „corrective“ member.

$$U_0 - iV_0 = \frac{\Gamma}{4\pi i} \left(1 + \frac{\rho_0^2 - 1}{\rho_0^2 + 1} \right).$$

As an application of this theory the author has investigated the case of motion of two vortices and the motion of „fixed“ vortical streets of opposite intensities. He has proved the possibility of existence of a symmetrical and checked position of vortices, both types of vortex position being possible in the case of symmetrical position relative to a large circle. Besides, the checked position is possible in the absence of symmetry relative to a large circle, the mutual position of the chains in this case depending upon the number of vortices.

ЛИТЕРАТУРА

1. Zermelo. Hydrodynamische Untersuchungen über die Wirbelbewegung in einer Kugelch. Zeitschrift für Mathematik und Physik, Bd. 47, 1902.
2. Haurwitz. Allgemeine Funktionentheorie und elliptische Funktionen. Berlin 1929 (есть русское издание ГТИ).
3. Кочин и Розе. Введение в теоретическую гидромеханику. Москва—Ленинград 32.
4. Саткевич. Аэродинамика как теоретическая основа авиации. Петроград 1923.
5. Привалов. Теория функций комплексного переменного. Москва—Ленинград 1932.
6. Villat. Théorie de tourbillons. Paris 1930.
7. Васильев. О движении вихрей с прямолинейными осями.

О ДВИЖЕНИЯХ АТМОСФЕРЫ, ПРИ КОТОРЫХ ФРОНТАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ, ОТДЕЛЯЮЩИЕ ДВЕ РАЗЛИЧНЫХ МАССЫ ВОЗДУХА, ИСПЫТЫВАЮТ КОНЕЧНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ И ПЕРЕМЕЩЕНИЯ

И. А. Кибель

ГЛАВА II

В предыдущей главе мы рассмотрели такие движения атмосферы, при которых фронтальная поверхность остается всегда цилиндром, с образующими, параллельными некоторой неподвижной оси x , и хотя существуют все три составляющие скорости, ни один из гидродинамических элементов не зависит от x .

В этой главе обратимся к изучению движений, обладающих осевой симметрией по отношению к неподвижной вертикальной оси. Поверхность земли попрежнему будем считать плоской и ось симметрии примем за ось z . Обозначим через r расстояние от оси симметрии, а через λ полярный угол в цилиндрической системе координат (λ, r, z) . Предположение об осевой симметрии равносильно условию, что ни один из гидродинамических элементов не зависит от λ и, в частности, что поверхность фронта есть поверхность, получающаяся от вращения кривой вокруг оси z . Обозначим проекцию v_z скорости на ось z через w , проекцию v_r скорости на радиус-вектор через v , проекцию v_λ на касательную к окружности $r = \text{const}$ — через u . Тогда уравнения Эйлера дадут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial u_i}{\partial r} + w_i \frac{\partial u_i}{\partial z} &= 2\omega_z v_i - 2\omega_r w_i - \frac{u_i v_i}{r}; \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial r} + w_i \frac{\partial v_i}{\partial z} &= 2\omega_\lambda w_i - 2\omega_z u_i + \frac{u_i^2}{r} - \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial r}; \quad (i=1, 2) \\ \frac{dw_i}{dt} &= 2\omega_r u_i - 2\omega_\lambda v_i - g - \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

($\omega_\lambda, \omega_r, \omega_z$ — проекции угловой скорости вращения земли). Уравнение неразрывности будет писаться так:

$$\frac{\partial r v_i}{\partial r} + \frac{\partial r w_i}{\partial z} = 0 \quad (i=1, 2)$$

Уравнение поверхности фронта напишем в виде

$$z = \zeta(r, t),$$

¹ Главу I см. Труды ГГО, вып. 10, Теоретическая метеорология (2).

ричем условия на поверхности разрыва примут вид:

$$\left. \begin{aligned} p_1(r, z, t) &= p_2(r, z, t) \\ \frac{\partial z}{\partial t} &= -(v_1)_{z=z} = \frac{\partial z}{\partial y} + (w_1)_{z=z} = -(v_2)_{z=z} = \frac{\partial z}{\partial y} + (w_2)_{z=z} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Как и в предыдущей главе, предположим, что атмосфера ограничена не только снизу, но и сверху горизонтальной твердой стенкой. Если при этом нижняя среда обозначаемая значком

I) уходит на бесконечность, мы получим две области I и II (рис. 1), занимаемые нижней (ρ_1) и верхней (ρ_2) средой соответственно ($\rho_1 > \rho_2$); если нижняя среда занимает конечный объем, получим области I (нижняя среда), II и III (верхняя среда) (рис. 2). Во втором случае нам придется, так же как мы это делали в прошлой главе, сопрягать движения в частях II и III. При этом в области I на горизонтальной поверхности $z=0$ следует положить

$$(w_1)_{z=0} = 0,$$

в области же II то же условие надо написать для верхней твердой стенки:

$$(w_2)_{z=h} = 0,$$

наконец в области III, если таковая существует, надо будет просто принять

$$w_2 = 0.$$

Уравнение неразрывности даст теперь (мы считаем что v_2 и v_1 не зависят от z) для первой среды:

$$w_1 = -\frac{z}{r} \frac{\partial r v_1}{\partial r},$$

а для второй:

$$w_2 = -\frac{z-h}{r} \frac{\partial r v_2}{\partial r}.$$

Уравнение Эйлера мы подвергнем тем же упрощениям, что и в предыдущей главе:

а) отбросим члены $-2\omega_r w_i$, $2\omega_i w_r$ в первых двух уравнениях;

б) отбросим члены с вертикальным ускорением и с ускорением Кориолиса в третьем уравнении;

в) будем считать, что

$$\frac{\partial u_i}{\partial z} = \frac{\partial v_i}{\partial z} = 0. \quad (i=1, 2)$$

Третье уравнение Эйлера даст теперь

$$\frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial z} = -g, \quad (i=1, 2)$$

так что

$$p_i(r, z, t) = -g \rho_i z + p_i'(r, t). \quad (i=1, 2)$$

Первые два уравнения Эйлера дадут соответственно:

$$\frac{dr u_i}{dt} + v_i \left(\frac{\partial r u_i}{\partial r} - 2r \omega_z \right) = 0 \quad (i=1, 2) \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial r} = -2\omega_z u_i + \frac{u_i^2}{r} - \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i'}{\partial r} \quad (2)$$

Остается написать условия на поверхности фронта. Равенство давлений даст

$$-g \rho_1 \zeta(r, t) + p_1'(r, t) = -g \rho_2 \zeta(r, t) + p_2'(r, t),$$

откуда

$$\zeta(r, t) = \frac{1}{g(\rho_1 - \rho_2)} [p_1'(r, t) - p_2'(r, t)].$$

Условия (1) запишутся, если вставить в них найденные уже для v_i и ω_z выражения после простых преобразований в виде:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_1 \zeta) = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} [(\zeta - h) r v_2].$$

Отсюда прежде всего заключаем, что:

$$v_1 \zeta = v_2 (\zeta - h), \quad (3)$$

что совпадает с соотношением (30) из главы I, в котором $v_0 = 0$.

С другой стороны, можем вновь ввести такую функцию $\Psi = \Psi(r, t)$ что

$$r \zeta = \frac{\partial \Psi}{\partial r}; \quad r v_1 \zeta = -\frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad (4)$$

Но тогда по (4) и (5):

$$v_1 = -\frac{\frac{\partial \Psi}{\partial t}}{\frac{\partial \Psi}{\partial r}}; \quad v_2 = -\frac{\frac{\partial (\Psi - \frac{hr^2}{2})}{\partial t}}{\frac{\partial (\Psi - \frac{hr^2}{2})}{\partial r}},$$

и уравнения (2) интегрируются и дают:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \omega_z r + \frac{1}{r} F_1(\Psi), \\ u_2 &= \omega_z r + \frac{1}{r} F_2\left(\Psi - \frac{hr^2}{2}\right), \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

где F_1 и F_2 — произвольные функции своих аргументов (вид их определится из начальных условий задачи). Умножая теперь уравнение (3) на r и вычитая одно из другого, мы получим возможность, заменив $p_1' - p_2'$ через посредство ζ и вставляя ζ , u_i , v_i из (4), (5) и (6), получить одно уравнение 2-го порядка в частных производных для определения функции Ψ .

Вид F_1 и F_2 может быть установлен совершенно так же, как это было в плоском случае. Заметим для этого, что в то время как в плоском случае значение $\Psi(y, 0) = \Psi_0(y)$ давало некоторую площадь (см. рис. 4 главы I), здесь $\Psi(r, 0) = \Psi_0(r)$ представляет, с точностью до множителя 2π некоторый объем. Действительно, так как

$$r \zeta(r, 0) = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \right)_{t=0} = \frac{d \Psi_0}{dr},$$

$$2\pi\Psi_0 = 2\pi \int_0^r r\zeta(r, 0) dr + \text{const.}$$

о в последнем выражении справа стоит с точностью до постоянного лагаемого объем, вырезаемый из среды I цилиндром радиуса r с осью вдоль оси z . Если нам задана форма фронта в начальный момент, мы можем таким образом найти $\Psi_0(r)$, а затем, задавши u_1 и u_2 в начальный момент, определить вид функций F_1 и F_2 . Действительно, обозначим обобщение функции $\Psi_0 = \Psi_0(r)$ через $R(\Psi_0)$: $r = R(\Psi_0)$; если $u_1(r, 0) = U_1(r)$; $u_2(r, 0) = U_2(r)$, то должно быть

$$U_1(r) = \omega_2 r + \frac{1}{r} F_1(\Psi_0)$$

ли

$$U_1[R(\Psi_0)] = \omega_2 R(\Psi_0) + \frac{1}{R(\Psi_0)} F_1(\Psi_0),$$

ак что

$$F_1(\Psi) = R(\Psi) U_1(R(\Psi)) - \omega_2 R^2(\Psi).$$

аналогичным путем найдется функция $F_2\left(\Psi - \frac{hr^2}{2}\right)$.

Так же как и в плоском случае, мы и здесь, однако, не будем строить единственное уравнение для определения функции Ψ , а обратимся к системе уравнений. Именно, введем новую величину

$$V = v_1 - v_2$$

и обозначим через Z отношение $\frac{\zeta}{h}$:

$$Z = \frac{\zeta}{h}.$$

Когда в силу (4)

$$v_1 = (1-Z)V; \quad v_2 = -ZV,$$

и уравнение, послужившее нам для определения функции Ψ , примет вид:

$$\frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial[Z(1-Z)V]}{\partial r} = -\frac{Z(1-Z)V}{r}. \quad (7)$$

Комбинируя затем (3) и вставляя значения ζ , v_1 , v_2 , получим еще одно уравнение, связывающее Z и V :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V[\rho_1(1-Z) + \rho_2 Z] + \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\rho_1(1-Z)^2 - \rho_2 Z^2}{2} V^2 \right\} + hg(\rho_1 - \rho_2) \frac{\partial Z}{\partial r} = \\ = -2\omega_2(\rho_1 u_1 - \rho_2 u_2) + \frac{\rho_1 u_1^2 - \rho_2 u_2^2}{r}. \end{aligned} \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что формула (7) в точности будет совпадать с формулой (65) главы I и формула (8) будет тем же, что и формула (66) главы I, если положить $v_0 = 0$ в уравнениях плоской задачи и отбросить члены с $\frac{1}{r}$ в правых частях уравнений (7) и (8).

То обстоятельство, что члены, содержащие r , входят лишь в правые части уравнений (7) и (8), не содержащие производных от искомым функ-

ций, позволяет строить уравнение для характеристик совершенно аналогично тому, как это было в главе I.

Пусть вдоль характеристики в плоскости (r, t) :

$$r = r(t).$$

Повторяя рассуждения из главы I, приходим к уравнению

$$\frac{dr}{dt} = r' = \frac{1}{\rho_1(1-Z) + \rho_2 Z} \left\{ [\rho_1(1-Z)^2 - \rho_2 Z^2] V \pm \sqrt{Z(1-Z) \{hg(\rho_1 - \rho_2) [\rho_1(1-Z) + \rho_2 Z] - \rho_1 \rho_2 V^2\}} \right\}.$$

Мы видим, что есть снова два семейства характеристик; назовем τ из них, которое отвечает знаку „+“ перед корнем, — первым семейством, а то, которое отвечает знаку „-“, вторым семейством.

Присоединяя сюда вторые комбинации характеристик типа (72) и главы I, получим окончательно:¹ вдоль характеристик первого семейства:

$$a(Z)dr = A_1(V, Z)dt, \quad (8)$$

$$B_1(Z, V)dZ - C(Z)dV = D(Z, r, u_1, u_2)dt, \quad (10)$$

вдоль характеристик второго семейства:

$$a(Z)dr = A_2(V, Z)dt, \quad (11)$$

$$B_2(Z, V)dZ - C(Z)dV = D(Z, r, u_1, u_2)dt, \quad (12)$$

причем

$$a(Z) = \beta(1-Z) + Z; \quad \beta = \frac{\rho_1}{\rho_2}.$$

$$A_1 = [\beta(1-Z)^2 - Z^2]V + \sqrt{Z(1-Z) \{hg(\beta-1) [\beta(1-Z) + Z] - \beta V^2\}};$$

$$A_2 = [\beta(1-Z)^2 - Z^2]V - \sqrt{Z(1-Z) \{hg(\beta-1) [\beta(1-Z) + Z] - \beta V^2\}};$$

$$B_1 = (\beta-1)Z(1-Z)V - \sqrt{Z(1-Z) \{hg(\beta-1) [\beta(1-Z) + Z] - \beta V^2\}};$$

$$B_2 = (\beta-1)Z(1-Z)V + \sqrt{Z(1-Z) \{hg(\beta-1) [\beta(1-Z) + Z] - \beta V^2\}};$$

$$C(Z) = Z(1-Z) [\beta(1-Z) + Z];$$

$$D(Z, r, u_1, u_2) =$$

$$= Z(1-Z) \left\{ 2\omega_z(\beta u_1 - u_2) - \frac{\beta u_1^2 - u_2^2}{r} - \frac{V^2}{r} [\beta(1-Z)^2 - Z^2] \right\}.$$

Видим таким образом, что линии, на которых уравнения наши становятся параболическими (слияние обоих семейств характеристик), находятся здесь, так же как в плоском случае, заменой буквы u буквой r .

Построение характеристик и решение задачи может быть проведено совершенно так же, как это сделано было в предыдущей главе.

Заметим, что члены, содержащие r в знаменателе и не имеющие себе аналогов в плоской задаче, входят только в D ; при этом, хотя на оси z будет $r=0$, все же D остается всегда конечным, так как $\frac{u_1^2}{r}$, $\frac{u_2^2}{r}$, $\frac{V^2}{r}$ остаются конечными в силу обращения в нуль скоростей u_1 , u_2 , V на оси

¹ В формулах (78) и (80) главы I пропущены множители $a(Z)$.

имметрии. Практически нам придется при вычислениях с $r=0$ отойти несколько от оси и взять значения u_1, u_2, V при малых, отличных от нуля значениях r .

Остается только провести сопряжение нашего движения с движением области III, если таковая существует.

Здесь $w_2=0, \frac{\partial v_2}{\partial r}=0$, т. е. $v_2=v_2(t)$; чтобы не было разрыва в скоростях v на месте сопряжения II и III, положим просто $v_2(t)=0$; тогда $\frac{du_2}{dt}=0$, т. е. $u_2=u_2(r)$ и $\frac{dp_2'}{dr}=\rho_1\left(\frac{u_2^2}{r}-2\omega_2 u_2\right)$,
 е.

$$p_2'=\rho_1\int\left(\frac{u_2^2}{r}-2\omega_2 u_2\right)dr+f_2(t),$$

где $f_2(t)$ — произвольная функция времени. Эту последнюю функцию надлежит выбрать затем так, чтобы давления в среде II и среде III совпали вдоль общей границы этих сред.

Разбор конкретного примера оставляем до главы IV.

ГЛАВА III

До сих пор мы предполагали, что поверхность земли плоская. В этой главе мы постараемся прежде всего снять это ограничение и рассмотреть лучай сферической поверхности земли. При этом мы ограничимся вновь лучаем осевой симметрии. Выбирая ось симметрии в качестве оси, от которой производится отсчет углов θ сферической системы координат, вводя координаты r (расстояние от центра земли), выше названную θ если ось симметрии совпадает с осью земли, то под θ придется разуметь (дополнение до широты в северном полушарии) и угол λ (если ось симметрии проходит через полюс — λ будет долготой места), предположим, что ни один из элементов движения не зависит от λ . Обозначим затем проекцию v_λ скорости на круг, вдоль которого меняется λ , через u , проекцию v_θ скорости на „меридиан“ — через v и проекцию v_r скорости на радиус земли — через w (u положительно, когда движение происходит „востока“ на „запад“, $v > 0$, если движение происходит от оси симметрии, $w > 0$, если движение происходит от центра земли). Уравнения гидромеханики примут следующий вид:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{v_i}{r} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} + w_i \frac{\partial u_i}{\partial r} + \frac{u_i w_i}{r} + \text{ctg } \theta \frac{u_i v_i}{r} = 2(\omega_r v_i - \omega_\theta w_i); \quad (13)$$

($i=1, 2$)

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{v_i}{r} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} + w_i \frac{\partial v_i}{\partial r} + \frac{v_i w_i}{r} - \frac{\text{ctg } \theta u_i^2}{r} = 2(\omega_\lambda w_i - \omega_z u_i) - \frac{1}{r\rho} \frac{\partial p_i}{\partial \theta}; \quad (14)$$

$$\frac{dw_i}{dt} - \frac{v_i^2}{r} - \frac{u_i^2}{r} = 2(\omega_\theta u_i - \omega_\lambda v_i) - g - \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial r}. \quad (15)$$

Уравнение неразрывности напишется так:

$$\frac{\partial r^2 w_i}{\partial r} + \frac{r}{\sin \theta} \frac{\partial v_i \sin \theta}{\partial \theta} = 0. \quad (i=1, 2) \quad (16)$$

Предположим, что движение происходит между двумя твердыми концентрическими сферами радиуса $r=a$ (a — радиус земли) и $r=a+h$ (h — малая по сравнению с a величина). Фронтальная поверхность, отде-

ляющая „холодную“ массу от „теплой“, имеет вид поверхности вращения около оси симметрии, так что уравнение ее

$$r = a + z = a + \zeta(\theta, t)$$

не содержит λ . Отметим снова области I, II и III (рис. 3). Сделаем вновь упрощения, отбрасывая члены $\omega_1 \omega_i$, $\omega_2 \omega_i$, и ускорение в третьем уравнении Эйлера. В уравнения Эйлера входят члены, содержащие $\frac{1}{r}$, и дифференцирование по r . Член $\frac{1}{r}$ всюду можно с большой степенью точности заменить величиной $\frac{1}{a}$. Действительно,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a+z} = \frac{1}{a} \left\{ 1 - \frac{z}{a} + \left(\frac{z}{a}\right)^2 \dots \right\},$$

где z — расстояние от поверхности земли, рассчитанное вдоль земного радиуса. Если $z < 10$ км, то $\frac{z}{a} < 2 \cdot 10^{-6}$, и с большой точностью можно считать $\frac{1}{r} = \frac{1}{a}$. Что же касается дифференцирования по r , то, коль скоро ему подвержены u_i и v_i , и мы будем, как всегда, считать, что

$$\frac{du_i}{dr} = \frac{dv_i}{dr} = 0. \quad (i=1, 2)$$

Уравнение непрерывности (16) нам даст теперь (если вспомнить про краевые условия):

$$\omega_1 = -\frac{1}{2 \sin \theta} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \frac{\partial v_1 \sin \theta}{\partial \theta}; \quad (17)$$

$$\omega_2 = -\frac{1}{2 \sin \theta} \left[1 - \left(\frac{a+h}{r} \right)^2 \right] \frac{\partial v_2 \sin \theta}{\partial \theta}. \quad (18)$$

С другой стороны,

$$1 - \left(\frac{a}{r} \right)^2 = 2 \frac{z}{a} \left\{ 1 + \frac{z}{2a} \right\} \left(1 + \frac{z}{a} \right)^{-2} \approx 2 \frac{z}{a},$$

и мы видим, что порядок ω_1 будет, вообще говоря, совпадать с порядком $\frac{z}{a} \frac{\partial v_1}{\partial \theta}$. Но в таком случае член $\frac{v_1 \omega_1}{r}$ в уравнении (14) может быть отброшен по сравнению с членом $\frac{v_1}{r} \frac{\partial v_1}{\partial \theta}$. Аналогично

$$1 - \left(\frac{a+h}{r} \right)^2 \approx -2 \frac{h-z}{h+a},$$

и член $v_2 \omega_2$ в (14) может быть отброшен по сравнению с $\frac{v_2}{r} \frac{\partial v_2}{\partial \theta}$.

То же самое можно сказать про члены $\frac{u_i \omega_i}{r}$ в уравнениях (13).

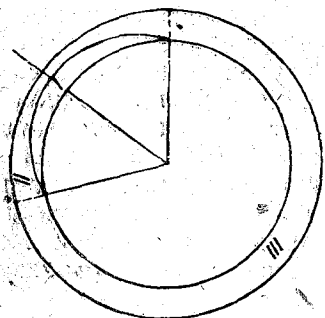


Рис. 3.

Производя все эти упрощения, мы получим следующую систему уравнений, заменяющих уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{v_i}{a} \frac{\partial u_i}{\partial \theta} &= 2\omega_z v_i - \operatorname{ctg} \theta \frac{u_i v_i}{a}; \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{v_i}{a} \frac{\partial v_i}{\partial \theta} &= \frac{\operatorname{ctg} \theta u_i^2}{a} - 2\omega_r \dot{u}_i - \frac{1}{a\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial \theta}; \\ 0 &= -g - \frac{1}{\rho_i} \frac{\partial p_i}{\partial r},\end{aligned}$$

ак что

$$p_i = -g\rho_i r + f(\theta, t) = -g\rho_i z + p_i'(\theta, t).$$

На фронтальной поверхности мы имеем

$$-g\rho_1 \zeta(\theta, t) + p_1'(\theta, t) = -g\rho_2 \zeta(\theta, t) + p_2'(\theta, t),$$

ак что

$$\zeta(\theta, t) = \frac{1}{g(\rho_1 - \rho_2)} [p_1'(\theta, t) - p_2'(\theta, t)].$$

роме того,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} v_1 + (w_1)_{x=\zeta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} v_2 + (w_2)_{x=\zeta}.$$

ак что, если использовать (17), (18),

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{1}{2r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} v_1 \sin \theta (r^2 - a^2) = \frac{1}{2r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} v_2 \sin \theta [r^2 - (a+h)^2].$$

аким образом при $\theta=0$, $v_1=v_2=0$, с одной стороны,

$$v_1(r^2 - a^2) = v_2[r^2 - (a+h)^2],$$

то приближенно запишется в виде

$$v_1 \zeta = (\zeta - h)v_2;$$

другой стороны, можно ввести, если угодно, как в предыдущих главах, функцию Ψ .

Дальнейшее решение задачи принципиально ничем не отличается от того, что было сделано в главе II. Снова на оси $\theta=0$ придется считать $u_i=v_i=0$, так что члены $(u_i^2 \operatorname{ctg} \theta)_{\theta=0}$ и $(u_i v_i \operatorname{ctg} \theta)_{\theta=0}$ будут конечны. Построение характеристик и сопряжение с движением в области III совершается точно так же, как раньше, — лишь название одного из независимых переменных и правые части уравнений будут иными.

Прежде чем переходить к конкретным примерам на вычисление движений, сделаем еще несколько замечаний по поводу плоской задачи.

Заметим прежде всего, что мы можем учесть торможение трения путем введения по Гульдбергу и Мону новых сил $(-ku, -kv, 0)$. Несмотря на всю неточность, с точки зрения современных представлений, такого описания сил трения, мы принуждены на первых порах использовать именно его. Правда, можно дать и более точное описание турбулентных процессов, происходящих в приземном слое (нижний километр) солодной массы при продвижении последней. Методы Прандтля¹ здесь могут быть с успехом использованы и может быть изучена задача о нестационарном, меняющемся по толщине и перемещающемся вместе

¹ См. например, доклад Прандтля на IV всемирном конгрессе по прикладной механике в Кембридже в 1934 г.

с холодной массой турбулентном слое. Мы надеемся посвятить этому вопросу отдельное исследование; что же касается поправки Гюльдбергу и Мону, то она подкупает своей простотой и может быть здесь сделана непосредственно. Уравнение (17) главы I приобретет при этом в правой части член $-ku_i$, а уравнение (18) главы I член $-kv_i$. Все рассуждения о характеристиках останутся в силе, и надо будет только прибавить в формуле (87) справа член $2k(\beta v_1 - v_2)$.

Несколько иначе придется теперь определять u_i ; введение функции теперь не имеет смысла [впрочем, мы им фактически пользовались только для построения u_i , решая предварительно систему уравнений (65), (66)] так как вхождение члена $-ku_i$ в правую часть (17) не позволяет проинтегрировать это уравнение. Обратимся, однако, непосредственно к функциям u_i и рассчитаем изменение, претерпеваемое этими функциями при перемещении вдоль характеристик. Очевидно,

$$\left(\frac{du_i}{dt}\right)_1 = \frac{\partial u_i}{\partial t} + y_1' \frac{\partial u_i}{\partial y},$$

$$\left(\frac{du_i}{dt}\right)_2 = \frac{\partial u_i}{\partial t} + y_2' \frac{\partial u_i}{\partial y},$$

где $\left(\frac{du_i}{dt}\right)_1$ и $\left(\frac{du_i}{dt}\right)_2$ — производные, рассчитываемые вдоль характеристик 1-го и 2-го семейства соответственно. Мы можем тогда написать



Рис. 4.

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{y_2' \left(\frac{du_i}{dt}\right)_1 - y_1' \left(\frac{du_i}{dt}\right)_2}{y_2' - y_1'}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial y} = - \frac{\left(\frac{du_i}{dt}\right)_1 - \left(\frac{du_i}{dt}\right)_2}{y_2' - y_1'}$$

и вставить это в уравнение (17) с измененной правой частью; после простых преобразований мы приходим тогда к уравнению

$$\left(\frac{du_i}{dt}\right)_1 (y_2' - v_i) - \left(\frac{du_i}{dt}\right)_2 (y_1' - v_i) = (y_2' - y_1') (2\omega_2 v_i - ku_i). \quad (19)$$

Чтобы использовать это равенство для определения функции u_i , представим себе, что в двух соседних точках M_1 и M_2 плоскости (y, t) известны величины y_1', y_2', v_i, u_i , и постараемся найти значения u_i в точке M пересечения характеристик разных семейств, идущих из M_1 и M_2 соответственно. Мы можем поступить, например, следующим образом:

заменить $\left(\frac{du_i}{dt}\right)_1$ на $\frac{(u_i)_M - (u_i)_{M_1}}{t_M - t_{M_1}}$ (предполагаем, что линия $\overline{M_1M}$ — характеристика 1-го семейства), а вместо $\left(\frac{du_i}{dt}\right)_2$ написать $\frac{(u_i)_M - (u_i)_{M_2}}{t_M - t_{M_2}}$

если в уравнении (19) взять значения $y_2' - v_i, y_1' - v_i$ и правые части равными средним арифметическим от этих величин, вычисленных в M_1 и M_2 соответственно, или же просто их значения в точке M_1 или M_2 , то мы приходим к одному алгебраическому уравнению 1-й степени, служащем для определения неизвестной нам величины $(u_i)_M$ ($i = 1, 2$).

Второе замечание касается устранения того ограничения, что поверхность земли есть горизонтальная плоскость. Предположим теперь, что как поверхность земли, так и поверхность верхней стенки (рис. 4), имеют

произвольный вид (так как ни один из наших элементов попережнему зависит от x , то, разумеется, и уравнение поверхности земли не содержит x) и уравнение ее напишем в виде

$$z = \varphi_1(y),$$

уравнение же верхней стенки пусть будет

$$z = \varphi_2(y).$$

В попережнему мы будем производить упрощение уравнений плоской задачи, считая, что u_i и v_i не зависят от z . Но теперь уравнение

$$w_i = -z \frac{\partial v_i}{\partial y} + f_i(y, t)$$

приведет к условию

$$-\frac{d\varphi_i}{dy} v_i + (w_i)_{z=\varphi_i} = 0 = -\frac{\partial}{\partial y} \varphi_i(y) v_i(y, t) + f_i(y, t),$$

так что

$$f_i = \frac{\partial}{\partial y} \varphi_i(y) v_i(y, t)$$

т.е., значит,

$$w_i = -z \frac{\partial v_i}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \varphi_i(y) v_i(y, t).$$

Теперь условия на поверхности фронта $z = \zeta(y, t)$ напишутся в виде:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -v_1 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \zeta \frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \varphi_1 v_1 = -v_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \zeta \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \varphi_2 v_2,$$

что даст

$$v_1(\zeta - \varphi_1) = v_2(\zeta - \varphi_2) + hv_0(t),$$

где h — постоянная, $v_0(t)$ — функция одного t . Если вновь ввести

$$V = v_1 - v_2,$$

получим

$$v_1 = \frac{hv_0 - V(\zeta - \varphi_2)}{\varphi_2 - \varphi_1}; \quad v_2 = \frac{hv_0 - V(\zeta - \varphi_1)}{\varphi_2 - \varphi_1}.$$

Эти значения v_1 и v_2 вставим в уравнения (58) главы I, причем вместо уравнения (65) придется добавить уравнение

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} \left\{ (\zeta - \varphi_1) \frac{hv_0 - V(\zeta - \varphi_2)}{\varphi_2 - \varphi_1} \right\}.$$

Не представит дальше никакого труда построить соотношения вдоль характеристики и развить метод приближенного решения системы типа системы (65), (66) из главы I. Что же касается определения u_i , то мы можем воспользоваться методом, изложенным в этой главе, или же ввести функцию Ψ из условия

$$\zeta - \varphi_1 = \frac{\partial \Psi}{\partial y}; \quad (\zeta - \varphi_1) v_1 = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

При этом вновь окажется, что

$$u_1 = 2\omega_2 y + F_1(\Psi)$$

а u_2 будет:

$$u_2 = 2\omega_2 y + F_2 \left[\Psi - \int (\varphi_2 - \varphi_1) dy + h \int v_0(t) dt \right].$$

Несколько слов относительно случая, когда сверху нельзя брать твердую стенку, а надо рассматривать свободную поверхность (рис. 5). Ра суждения, аналогичные тем, которые были уже нами приведены, може применить и здесь. При этом на свободной поверхности должно быть $p_2(y, z, t) = \text{const}$, например $p_2 = 0$. Это означает, что на свободной поверхности, если уравнение ее будет

$$z = \xi(y, t)$$

должно быть

$$\xi = \frac{1}{\rho_2 g} p_2'(y, t).$$

Далее, для определения w_2 (вернее, функции f_2 из (19) главы I) нам придется теперь воспользоваться условием, что свободная поверхность есть линия тока:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -v_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + (w_2)_{z=\xi} = -v_2 \frac{\partial \xi}{\partial y} - \xi \frac{\partial v_2}{\partial y} + f_2(y, t),$$

так что

$$w_2 = -z \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2 \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

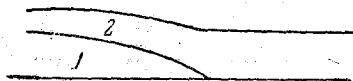


Рис. 5.



Рис. 6.

Мы получим теперь на фронтальной поверхности [$z = \xi(y, t)$]:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -v_1 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \zeta \frac{\partial v_1}{\partial y} = -v_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \zeta \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2 \xi}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial t}.$$

Мы не можем благодаря наличию члена $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ понизить порядок нашей системы, выводя конечное соотношение между v_1 и v_2 , и задача сведется к системе уравнений не 2-го, а 3-го порядка.

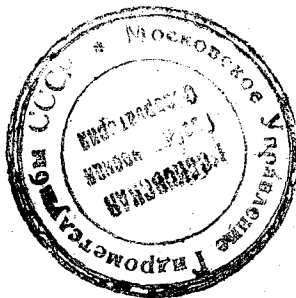
Аналогичным образом придется строить уравнения для случая, когда количество сред больше двух (модели окклюзий и подобных явлений). Можно показать, что если изучаются три среды при наличии твердых стенок сверху и снизу (рис. 6), задача сводится к системе уравнений 4-го порядка. Мы не останавливаемся здесь подробнее на этих вопросах, оставляя разбор этих и подобных случаев для более детального и общего исследования, посвященного движению уже сжимаемых сред. Здесь задача даже в простейшем случае двух сред сведется к системе уравнений 4-го порядка. Методы, которые удастся применить к решению этой системы, можно будет легко приложить также к упомянутым здесь задачам о несжимаемой жидкости. Мы надеемся изложить этот вопрос в одной из ближайших работ, а в следующей главе перейдем к разбору отдельных конкретных случаев движений фронтальных поверхностей в несжимаемой жидкости.

SUR LES MOUVEMENTS DE L'ATMOSPHÈRE, DANS LESQUELS LES SURFACES FRONTALES, QUI SÉPARENT DEUX MASSES AÉRIENNES DISTINCTES, PEUVENT ÊTRE SOUMISES AUX DÉFORMATIONS et DÉPLACEMENTS FINIS II ¹

I. Kiebel

Résumé

Cette partie contient le deuxième et le troisième chapitres. Nous montrons comment la méthode développée dans le premier chapitre peut être appliquée aux cas des mouvements symétriques par rapport à un axe. La surface de la terre est supposée plane (chap. II) ou sphérique (chap. III), ou encore dans le cas des mouvements „plans“ de forme arbitraire (chap. III). L'effet des forces dissipatives peut être calculé (chap. III) grâce à une modification légère de la méthode. Le cas du mouvement des trois masses aussi bien que le cas de la surface supérieure libre sont mentionnés.



¹ Trans. of the Central Geophysical Observatory. Fasc. 10, Leningrad 1936.

СОДЕРЖАНИЕ

Р. Э. Соловейчик. О движении вихрей на сферической поверхности	Ст
И. А. Кибель. О движениях атмосферы, при которых фронтальные поверхности, отделяющие две различные массы воздуха, испытывают конечные деформации и перемещения II	2

TABLE DES MATIÈRES

R. Soloweitchic. The Motion of Vortices on the Spherical Surface	1
J. Kiebel. Sur les mouvements de l'atmosphère, dans lesquels les surfaces frontales, qui séparent deux masses aériennes distinctes, peuvent être soumises aux déformations et déplacements finis II	3

СПЕЦИАЛЬНАЯ
БИБЛИОТЕКА
11063
СОЛНЦЕ КОП

Ответств. редактор *И. А. Кибель*. Технич. редакторы *Ф. Б. Риммер* и *П. В. Дворников*.
Корректор *Г. М. Митрофанов*.

Леноблгорлит № 1092. Издание № 130. Сдано в набор 16/XII 1936 г. Подписано к печати 19/II 1937 г. Колич. учетно-авт. листов 3. Печ. л. 2. Колич. бум. лист. 1. Колич. экз. на бум. листе 122 000. Ст. форм. бум. 72 × 108¹/₁₆. Заказ № 2843. Тираж 500 экз.

Типо-литография Гидрометеоиздата, Ленинград, набережная 9 Января, 32.