

Министерство образования
и федеральное агентство по образованию

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Беликова Г. И, Витковская Л.В.

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для иностранных студентов,
обучающихся по программе
предвузовской подготовки
Часть 2

Санкт-Петербург
2011 г

УДК [808.2:800.7:51] (073.8)

Беликова Г.И., Витковская Л.В., Математика. Учебное пособие для иностранных студентов, обучающихся по программе предвузовской подготовки. Часть 2. – СПб.: РГГМУ, 2011. – 130 с.

Рецензент: Матвеев Ю.Л., д. физ-мат.н., проф., зав. кафедрой высшей математики и информатики Государственной полярной академии.

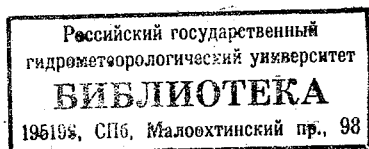
Ответственные редакторы: Егоров А.Д. – д. физ-мат. н., зав. кафедрой высшей математики и теоретической механики РГГМУ, Николаева Е.К. – к. филол. н., зав. кафедрой русского языка РГГМУ.

Учебное пособие «Математика» (часть 2) предназначено для иностранных студентов, обучающихся по программе предвузовской подготовки. Вторая часть пособия посвящена геометрии. В пособие включены следующие разделы геометрии: планиметрия, стереометрия, аналитическая геометрия на плоскости и очерки по истории геометрии. Кроме этого пособие знакомит иностранных студентов с историей Петербургской математической школы.

Основная цель пособия: подготовить иностранных студентов к успешному восприятию лекций и практических занятий по математике на 1-ом курсе университетов и воспитать математическую культуру устного и письменного изложения материала в рамках традиций Русской математической школы.

© Беликова Г.И., Витковская Л.В., 2011

© Российский государственный гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2011



Предисловие

Вашему вниманию предлагается книга, которая является 2-ой частью учебного пособия для иностранных студентов, обучающихся по программе предвузовской подготовки.

Эта часть пособия посвящена геометрии. В первых двух главах достаточно широко представлен справочный материал по планиметрии и стереометрии, разобраны задачи по различным разделам евклидовой геометрии, даны упражнения по соответствующим разделам.

Нам хотелось помочь студентам вспомнить элементарную геометрию, привыкнуть к ее изложению на русском языке и научиться излагать на нем свои мысли и идеи, связанные с математикой.

Кроме того, мы полагаем, что некоторые простые разделы аналитической геометрии полезно изучить (разобрать) иностранным студентам до прослушивания соответствующих лекций первого курса. Поэтому третья глава посвящена кривым первого и второго порядка. Даны примеры решения простейших задач.

При подготовке этой работы мы учитывали, что иностранные студенты имеют различную школьную подготовку по математике. Есть студенты, у которых отсутствуют системные знания по элементарной математике. Некоторые студенты приехали к нам после окончания первых курсов университетов или изучали отдельные разделы высшей математики в двенадцатилетних школах. Одни из них выберут технические специальности или естественнаучные, другие студенты будут специалистами в гуманитарных областях.

У студентов - гуманитариев обычно нет необходимых знаний по математике и интереса к ней. Поэтому на занятиях математикой с такими студентами делается акцент на гуманитарность самой математики. Такой взгляд на математику отражен во второй части методического пособия.

Математика проникла даже в те науки, которые традиционно считаются гуманитарными. Математик и гуманитарий имеют различные способы мышления, но строгость мышления и воображение математиков будут очень полезны и гуманитариям.

Математика как искусство – это особый способ познания, а математические образы или модели – это просто математическая форма отражения действительности. Кроме того, математика

является одним из основных средств интеллектуального развития человека.

Занятие математикой способствует нравственному воспитанию, поскольку математическое знание абсолютно истинно и независимо, но всегда неполно и бесконечно развивается.

Важно отметить, что математика по своей природе наука демократическая, поэтому систематические занятия математикой прививают демократизм.

Во второй части пособия мы продолжаем рассказывать о преемственности и объединении математиков разных эпох и разных государств, о связи математики с историей развития мировой культуры, важной частью которой является сама математика.

Надеемся, что все студенты оценят, насколько глубоко математика объединяет культуру, традиции и языки различных народов мира. Именно с этой целью написана четвертая, пятая главы, небольшой толковый словарь, который включает историю происхождения некоторых математических терминов и понятий и русско-английский словарь геометрических терминов. Кроме того, жирным шрифтом в приложении дан перевод на английский язык слов, выделенных жирным шрифтом в 4-ой и 5-ой главах.

В четвертую главу включены небольшие очерки по истории геометрии. Пятая глава знакомит с историей возникновения и развития Санкт-Петербургской математической школы и с жизнью и творчеством некоторых всемирно известных математиков нашего города, имена которых встречаются в каждом учебнике классического курса высшей математики в любом университете мира.

Пособие будет полезно и интересно всем иностранным студентам подготовительного отделения.

Методическое пособие написано благодаря поддержке заведующей кафедрой русского языка Елены Каировны Николаевой и заведующего кафедрой высшей математики и теоретической механики Александра Дмитриевича Егорова.

Благодарим профессора кафедры высшей математики и теоретической механики Шнейерсона Ефима Семеновича и доцента этой же кафедры Герасименко Николая Ивановича за внимание к этой работе и ценные замечания. Особая благодарность Олегу Шевчуку за компьютерное преобразование всех рисунков пособия.

Глава 1

Планиметрия

§1. Прямые и углы на плоскости

Определение 1. Прямые называются **пересекающимися прямыми**, если они имеют одну общую точку.

Две пересекающиеся прямые образуют четыре угла.

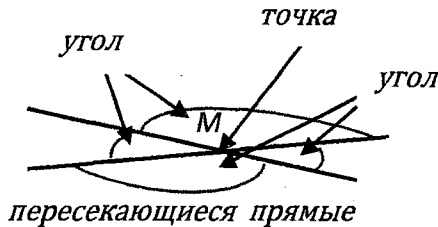


Рис. 1

Определение 2. Прямые называются **параллельными прямыми**, если они лежат в одной плоскости и не имеют общих точек.

(Параллельными прямыми плоскости называются прямые, которые не пересекаются.)



Рис.2

Аксиома параллельности

Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.

Свойства параллельных прямых

1. **Теорема Фалеса.** Если параллельные прямые пересекают стороны угла и отсекают на одной стороне этого угла равные отрезки, то они отсекают равные отрезки на другой стороне этого угла.

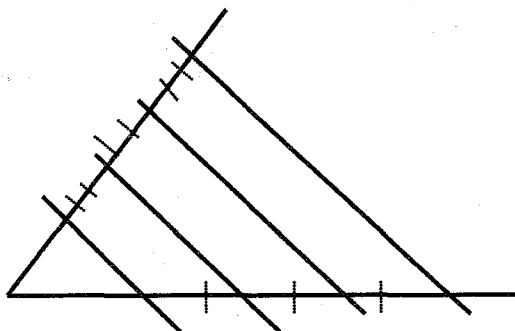


Рис. 3

2. Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на сторонах этого угла **пропорциональные отрезки**:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}.$$

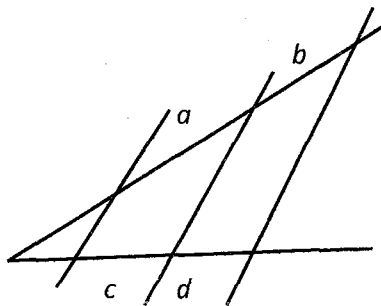


Рис. 4

Классификация углов

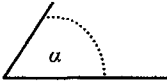
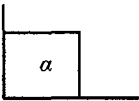
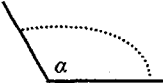
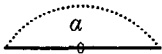
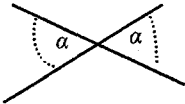
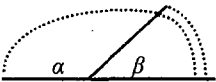
<i>Изображение</i>	<i>Название углов</i>	<i>Величины</i>
	<i>острый угол</i>	$0^\circ < \alpha < 90^\circ$
	<i>прямой угол</i>	$\alpha = 90^\circ$
	<i>тупой угол</i>	$90^\circ < \alpha < 180^\circ$
	<i>развёрнутый угол</i>	$\alpha = 180^\circ$
	<i>вертикальные углы</i>	-----
	<i>смежные углы</i>	$\alpha + \beta = 180^\circ$

Рис. 5

Названия углов, которые образуются при пересечении двух прямых третьей прямой

	<i>накрест лежащие</i>		<i>односторонние</i>	
<i>внутренние</i>				
<i>внешние</i>				
<i>соответственные углы</i>				

Рис. 6

Признаки параллельности двух прямых

1. Если при пересечении двух прямых третьей внутренние накрест лежащие углы или внешние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.
2. Если при пересечении двух прямых третьей соответственные углы равны, то прямые параллельны.
3. Если при пересечении двух прямых третьей сумма внутренних или внешних односторонних углов равна 180° , прямые параллельны.
4. Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны. Этот признак параллельности называется свойством **транзитивности**:

$$a \parallel c, b \parallel c \Rightarrow a \parallel b.$$

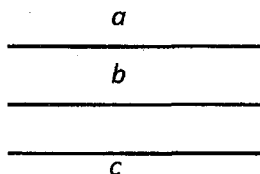


Рис. 7

5. Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны:

$$a \perp c, b \perp c \Rightarrow a \parallel b.$$

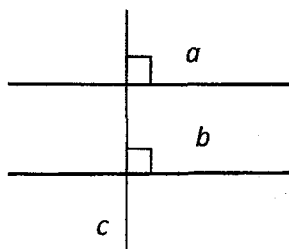


Рис. 8

Перпендикуляр и наклонные

Перпендикуляр к заданной прямой – отрезок, который соединяет точку плоскости с этой прямой и образует с ней угол 90° .

Наклонная к заданной прямой – отрезок, который соединяет точку плоскости с этой прямой и не совпадает с перпендикуляром.

Проекция наклонной – отрезок прямой, заключенный между перпендикуляром и наклонной к этой прямой (рис. 9).

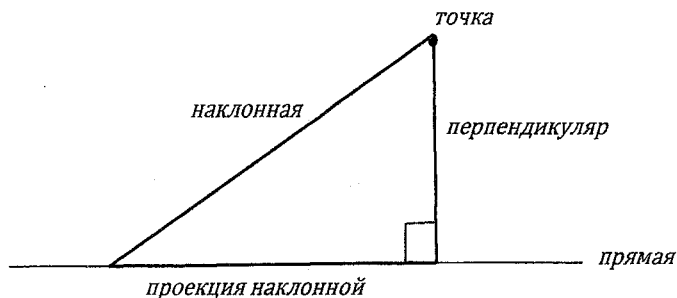


Рис. 9

С помощью углов и отрезков можно построить на плоскости различные геометрические фигуры: треугольники, четырехугольники, многоугольники. Простейшей числовой характеристикой таких фигур является **периметр**.

Периметр — это сумма всех сторон любого многоугольника. Периметр обозначается большой буквой P . Половину периметра обычно называют полупериметром. **Полупериметр** обозначается малой буквой p : $p = P/2$,

$P = a + b + c + d + e$ — периметр многоугольника.

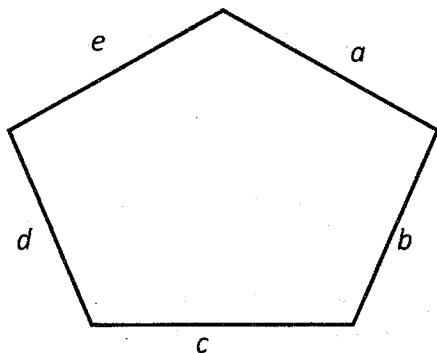


Рис. 10

§2. Треугольники

Рассмотрим **произвольный** (любой) треугольник ABC . Точки A, B, C называют (называются) **вершинами** треугольника. Отрезки AB, BC, AC – **стороны** треугольника.

Углы α, β, γ – **внутренние углы** треугольника, углы α и β – углы, **прилежащие к стороне AB** , углы β и γ – углы, **прилежащие к стороне BC** , углы α и γ – **прилежащие к стороне AC** .

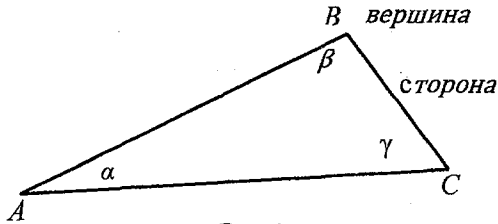


Рис.1

Классификация треугольников

Треугольник называется **остроугольным**, если все внутренние углы треугольника меньше 90° (**острые углы**).

треугольники	разносторонний	равнобедренный	равносторонний
остроугольный			
тупоугольный			—
прямоугольный			—

Рис. 2

Треугольник называется **тупоугольным**, если есть внутренний угол треугольника больше 90° (**тупой угол**).

Треугольник называется **прямоугольным**, если у него есть угол, равный 90° (**прямой угол**).

Треугольник называется **разносторонним**, если все его стороны имеют разную длину.

Треугольник называется **равнобедренным**, если у него есть две равные (одинаковые) стороны.

Треугольник называется **равносторонним (правильным)**, если все его стороны равны.

Продолжим любую сторону треугольника в любую сторону. Это **продолжение** образует с **соседней** стороной угол, **смежный** с соответствующим внутренним углом треугольника.

На рис. 3 углы δ и α – смежные, углы μ и γ – смежные. Углы, смежные с внутренними углами треугольника, называются **внешними углами треугольника**.

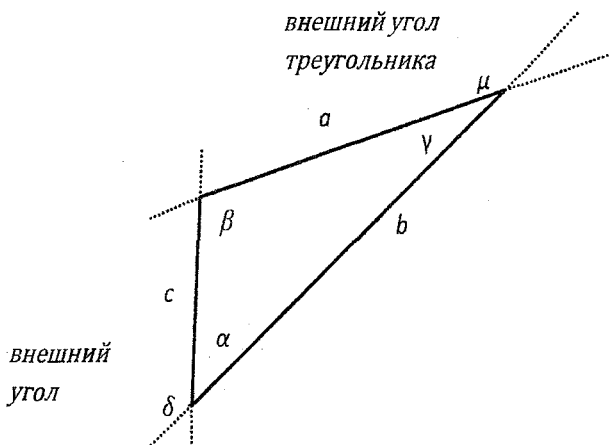


Рис. 3

Соотношения между сторонами и углами

Неравенство треугольника. Любая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон, но больше модуля их разности:

$$|a - b| < c < a + b.$$

Сумма углов треугольника равна 180° . Против большей стороны в треугольнике лежит больший угол:

$$b > a \Rightarrow \beta > \alpha.$$

Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним:

$$\delta = \gamma + \beta.$$

Теорема косинусов. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов других сторон минус удвоенное произведение этих сторон, умноженное на косинус угла между ними:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Около каждого треугольника можно описать окружность и только одну. Ее центром является точка пересечения перпендикуляров, проведенных через середины сторон треугольника (серединные перпендикуляры).

Теорема синусов. Стороны треугольника пропорциональны синусам противолежащих углов. Коэффициент этой пропорциональности равен диаметру описанной окружности:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R, R - \text{радиус описанной окружности.}$$

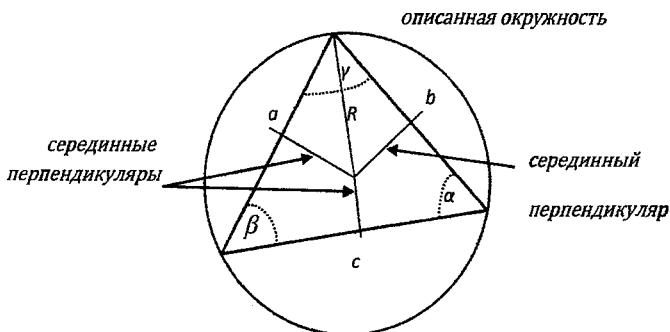


Рис. 4

Признаки равенства треугольников

1. По двум сторонам и углу между ними.
2. По одной стороне и двум **прилежащим к ней** углам.

Углы α и β – углы, прилежащие к стороне c , углы α и γ – углы, прилежащие к стороне b , углы γ и β – углы, прилежащие к стороне a (рис. 4).

3. По трем сторонам.

Подобные треугольники

Два треугольника называются подобными ($\triangle ABC \sim \triangle DEF$), если у них все углы равны (рис. 5):

$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F.$$

Стороны подобных треугольников, лежащие против одинаковых (равных) углов, называют **сходственными** сторонами. Сходственные стороны пропорциональны:

$$\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE} = k, \text{ где } k - \text{коэффициент подобия}$$

(коэффициент пропорциональности).

Отношение площадей S и S_1 подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия этих треугольников:

$$\frac{S}{S_1} = k^2.$$

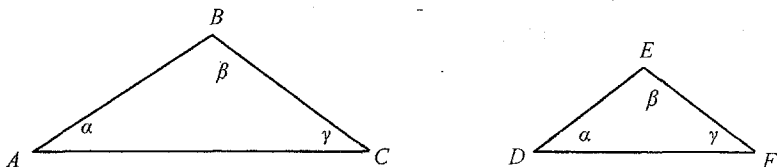


Рис. 5

Признаки подобия двух треугольников

1. По двум пропорциональным сторонам и углу между ними.
2. По двум равным углам.
3. По трем пропорциональным сторонам.

Замечательные линии в треугольнике

Медиана – отрезок, соединяющий любую вершину треугольника с серединой противоположащей стороны:

$AM=MC$, BM – медиана.

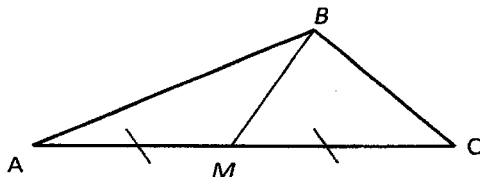


Рис. 6

Биссектриса – отрезок, который соединяет любую вершину треугольника с противоположащей стороной и делит пополам внутренний угол при этой вершине:

BG – биссектриса, $\alpha = \beta$

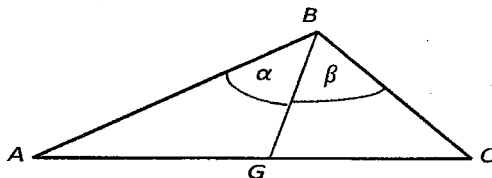


Рис. 7

Высота – отрезок, который соединяет любую вершину треугольника с противоположной стороной или ее продолжением и перпендикулярен (ортогонален) этой стороне:

$$BH \perp AC.$$

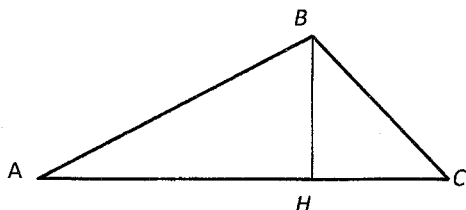


Рис. 8

В любом треугольнике биссектриса лежит внутри угла, образованного высотой и медианой, проведенными из той же вершины:

BM – медиана, BG – биссектриса, BH – высота.

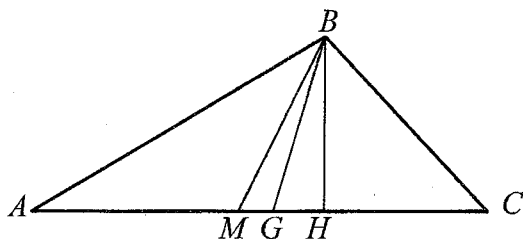


Рис. 9

Срединный перпендикуляр LM – прямая, перпендикулярная (ортогональная) стороне треугольника и делящая ее пополам:

$$AM=MC, LM \perp AC.$$

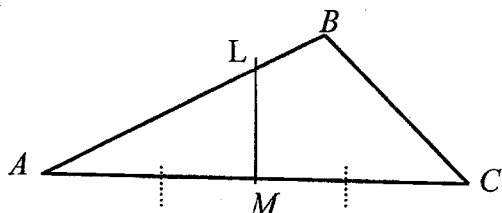


Рис.10

Средняя линия – отрезок, соединяющий середины любых двух сторон треугольника:

$AM = MB$, $BN = NC$, NM – средняя линия.

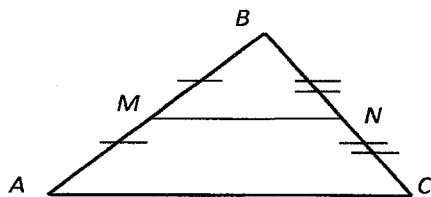


Рис. 11

Свойства медиан

1. Три медианы пересекаются в одной точке M , которая всегда находится внутри треугольника (центр тяжести треугольника). Точка M – центр тяжести.

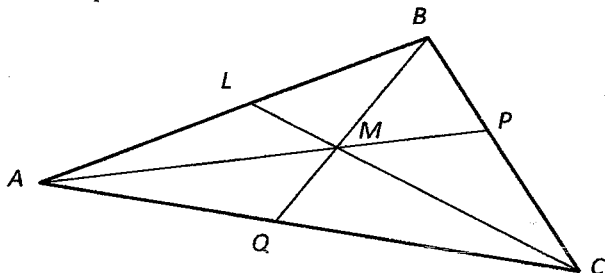


Рис. 12

Уг.к. 1469

2. Точка пересечения медиан делит каждую медиану в отношении $2:1$ (два к одному), считая от вершины:

$$\frac{AM}{MP} = \frac{CM}{ML} = \frac{BM}{MQ} = \frac{2}{1}.$$

3. Каждая медиана (BM) делит треугольник на два равновеликих треугольника (два треугольника одинаковой площади):

$$S_1 = S_2.$$

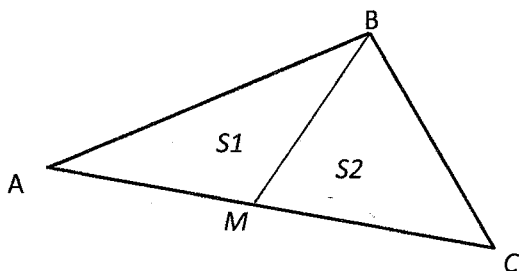
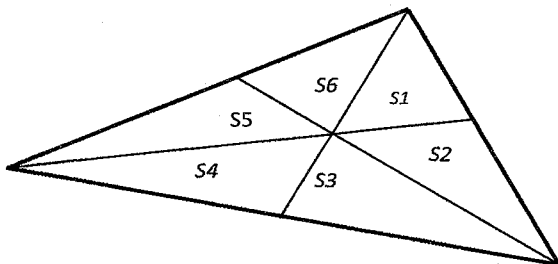


Рис. 13

4. Три медианы делят треугольник на 6 равновеликих треугольников (6 треугольников одинаковой площади):



$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4 = S_5 = S_6.$$

Рис. 14

5. Длина медианы может быть вычислена с помощью длин сторон по формуле

$$m_a = \frac{1}{2} \sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2},$$

где a, b, c – длины сторон треугольника.

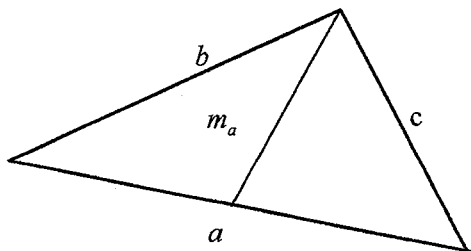


Рис. 15

Свойства биссектрис

1. Три биссектрисы пересекаются в одной точке, которая всегда лежит внутри треугольника.

Эта точка пересечения – центр вписанной окружности.



Рис. 16

2. Любая биссектриса делит противоположную сторону на отрезки, пропорциональные соответствующим сторонам:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b}{c}.$$

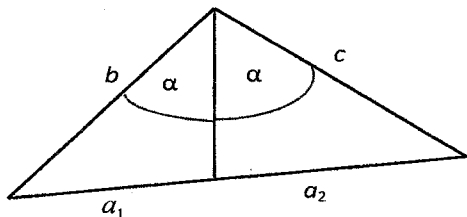


Рис. 17

3. Длину биссектрисы можно вычислить по формуле

$$L = \sqrt{bc - a_1 a_2}.$$

4. Биссектрисы внутреннего и внешнего углов перпендикулярны (ортогональны):

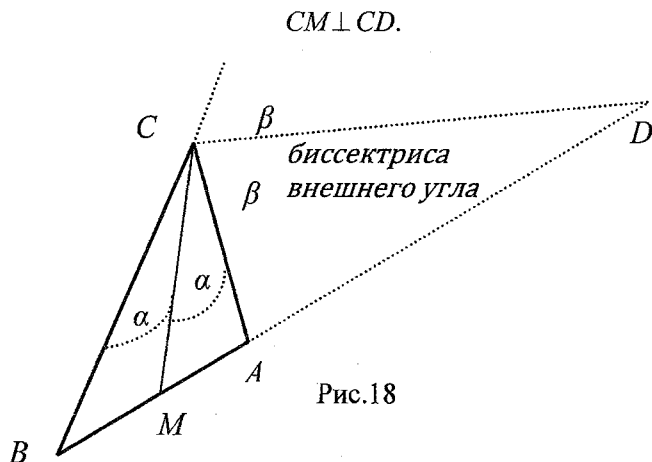


Рис.18

Свойства высот

1. Высоты треугольника **пересекаются** в одной точке. Эта точка называется **ортоцентром**. Ортоцентр **остроугольного** треугольника лежит **внутри** треугольника.

Ортоцентр прямоугольного треугольника **совпадает с вершиной** прямого угла. Ортоцентр тупоугольного треугольника **лежит вне треугольника**.

2. Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам:

$$\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}, \quad \frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}.$$

3. Длина высоты может быть вычислена с помощью формул:

$$h_a = b \sin \gamma = c \sin \beta; \quad h_a = \frac{2S}{a},$$

S – площадь треугольника.

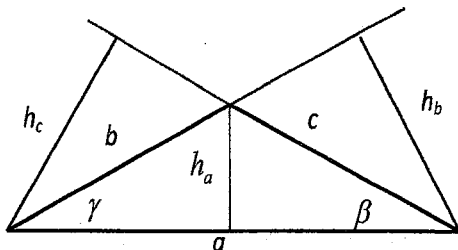


Рис. 19

Свойства серединных перпендикуляров

1. Три серединных перпендикуляра пересекаются в одной точке. Эта точка является центром описанной окружности.

2. Если треугольник остроугольный, то точка пересечения серединных перпендикуляров лежит внутри треугольника.

3. В случае прямоугольного треугольника точка пересечения серединных перпендикуляров совпадает с серединой гипотенузы.

4. Если треугольник тупоугольный, то точка пересечения серединных перпендикуляров лежит вне треугольника.

Свойства средней линии

1. Средняя линия параллельна одной из сторон треугольника и равна ее половине:

$$MN \parallel AC; \quad MN = \frac{1}{2} AC.$$

2. Средняя линия отсекает треугольник, подобный данному треугольнику, с коэффициентом подобия $1/2$.

3. Три средние линии треугольника делят его на 4 равных треугольника, подобных данному (исходному) треугольнику, с коэффициентом подобия $1/2$: $S_1 = S_2 = S_3 = S_4$.

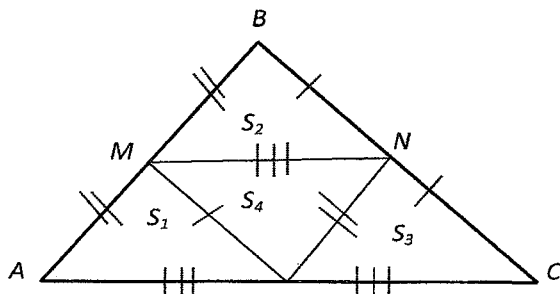


Рис. 20

Вписанная и описанная окружности

1. В любой треугольник можно вписать окружность. Центр вписанной окружности – точка пересечения биссектрис.

Радиус вписанной окружности можно вычислить по формуле

$$r = \frac{S}{p}, \text{ где } S - \text{площадь треугольника, } p - \text{полупериметр треугольника,}$$

$$p = \frac{a + b + c}{2}.$$

2. Около любого треугольника можно описать окружность. Центром описанной окружности является точка пересечения серединных перпендикуляров.

Радиус описанной окружности можно вычислить по формуле

$$R = \frac{abc}{4S}, \text{ где } a, b, c - \text{стороны треугольника, } S - \text{площадь треугольника.}$$

Площадь треугольника

Площадь S треугольника может быть вычислена с помощью пяти различных формул:

1. $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$, где a – сторона, h_a – высота, проведенная к ней (к стороне a).

2. $S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \sin \gamma$, где a, b – стороны, γ – угол между этими сторонами.

3. Формула Герона: $S = \sqrt{p \cdot (p - a) \cdot (p - b) \cdot (p - c)}$, где

$$p = \frac{a + b + c}{2} \quad \text{– полупериметр треугольника.}$$

4. $S = p \cdot r$, где r – радиус вписанной окружности,

p – полупериметр треугольника.

5. $S = \frac{abc}{4R}$, где a, b, c – стороны треугольника,

R – радиус описанной окружности.

Равнобедренный треугольник

У равнобедренного треугольника есть три характерных свойства:

1. Углы, прилежащие к одной из сторон, равны. Такая сторона называется основанием треугольника. Угол, лежащий напротив основания, называется углом при вершине равнобедренного треугольника.

2. Медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию треугольника, совпадают.

3. Высота, проведенная к основанию равнобедренного треугольника, является его осью симметрии.



Рис. 21

Равносторонний треугольник (правильный треугольник)

У равностороннего треугольника есть шесть характерных свойств.

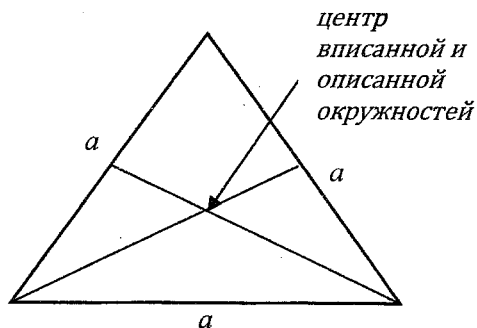


Рис. 22

1. Все углы равны 60° градусам.
2. Любая (каждая) медиана совпадает с биссектрисой и высотой, проведенными из той же вершины.
3. Центры вписанной и описанной окружностей совпадают. Радиусы этих окружностей можно вычислить по формулам:

$$r = \frac{a}{2\sqrt{3}}; \quad R = \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad R = 2r,$$

где a – сторона треугольника, r – радиус вписанной окружности, R – радиус описанной окружности.

4. Треугольник имеет поворотную симметрию. Это означает, что треугольник не изменится при повороте на 120° .

5. Высоту равностороннего треугольника можно вычислить по формуле $h = \frac{\sqrt{3}a}{2}$.

6. Площадь можно вычислить по одной из трех формул:

$$S = \frac{\sqrt{3}a^2}{4}; \quad S = 3\sqrt{3}r^2; \quad S = \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2.$$

Прямоугольный треугольник

Стороны, **прилежащие** к прямому углу, называются катетами. Сторона, **противолежащая** прямому углу, называется гипотенузой.

Перечислим свойства, характерные для прямоугольных треугольников.

1. **Теорема Пифагора.** Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы.

2. Между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике **справедливы** следующие соотношения:

$$\frac{a}{c} = \sin \alpha = \cos(90^\circ - \alpha); \quad \frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha);$$

$$\frac{b}{c} = \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha); \quad \frac{b}{a} = \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha).$$

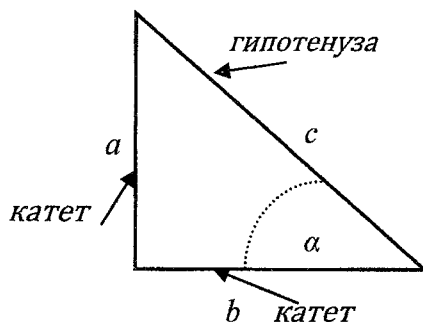


Рис. 23

3. Высота, опущенная на гипотенузу, является **средним пропорциональным** между проекциями катетов на гипотенузу:

$$\frac{a_c}{h} = \frac{h}{b_c} \Rightarrow h^2 = a_c \cdot b_c.$$

4. Высоту (рис.24) можно выразить через все стороны треугольника:

$$h = \frac{a \cdot b}{c}.$$

5. Каждый катет является **средним пропорциональным** между гипотенузой и проекцией этого катета на гипотенузу:

$$\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c} \Rightarrow a^2 = a_c \cdot c;$$

$$\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c} \Rightarrow b^2 = b_c \cdot c.$$

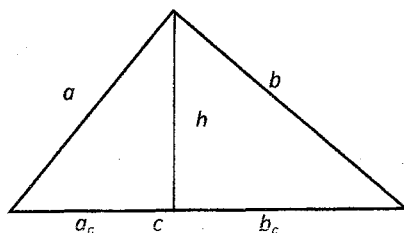


Рис. 24

6. Радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, выражается через стороны этого треугольника по формуле

$$r = \frac{ab}{a+b+c}, \quad r - \text{радиус вписанной окружности.}$$

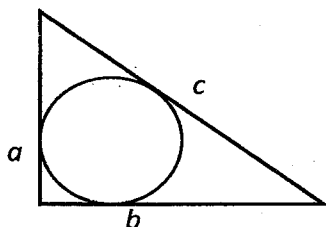


Рис. 25

7. Радиус R окружности, описанной около прямоугольного треугольника, равен половине гипотенузы BC . Центр этой окружности совпадает с серединой гипотенузы:

$BC=2R$, $BO=OC=R$, R – радиус описанной окружности.

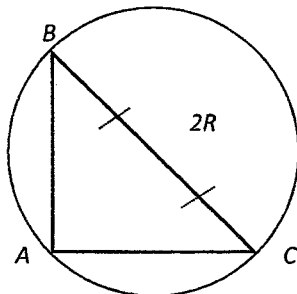


Рис. 26

8. Площадь прямоугольного треугольника S может быть вычислена с помощью следующих формул:

$$S = \frac{1}{2} a \cdot b, \quad \text{где } a, b - \text{катеты;}$$

$$S = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{ctg} \alpha, \quad \text{где}$$

α, β – острые углы треугольника;

$$S = \frac{1}{4}c^2 \cdot \sin 2\alpha = \frac{1}{4}c^2 \cdot \sin 2\beta, \text{ где } c - \text{гипотенуза.}$$

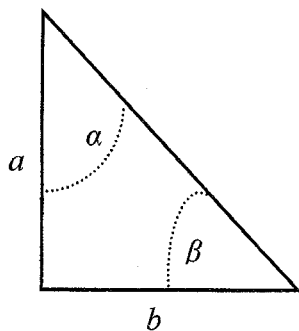


Рис. 27

§3. Четырёхугольники

Все четырёхугольники можно разбить на 8 групп. На рис. 1 представлены эти группы и даны их названия.

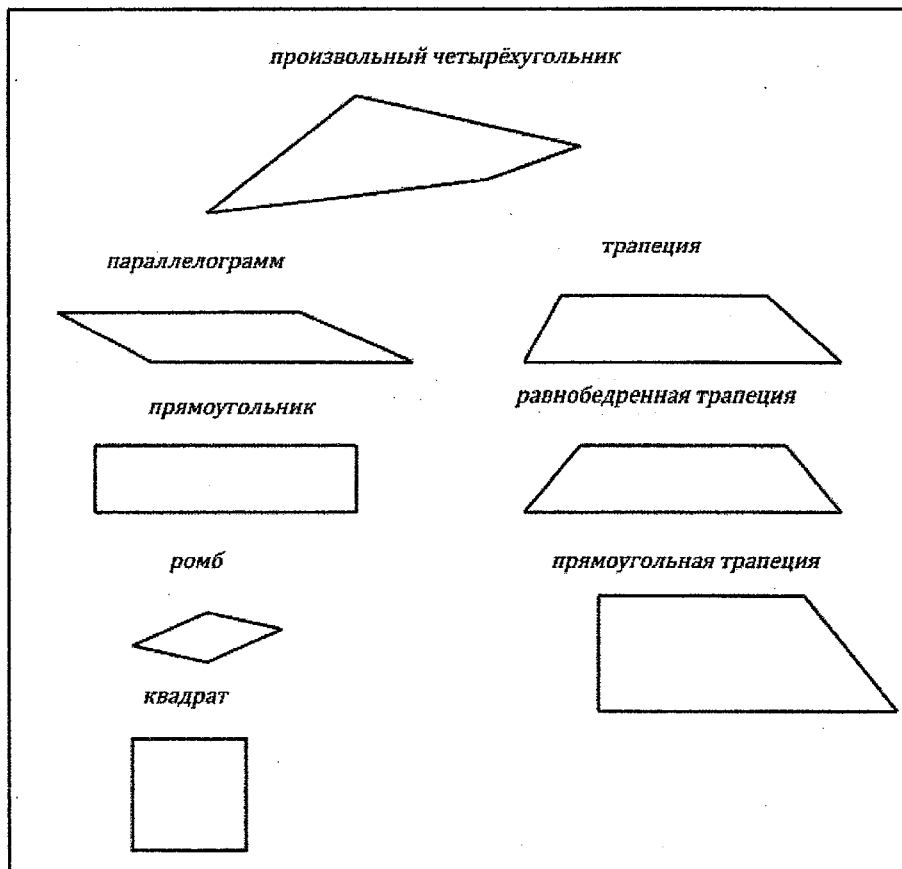


Рис.1

Свойства произвольного четырехугольника.

1. Сумма внутренних углов равна 360° :

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ.$$

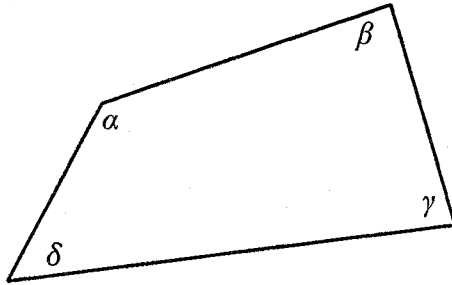


Рис. 2

2. Площадь четырехугольника равна полупроизведению диагоналей на синус угла между ними:

$$S = \frac{d_1 \cdot d_2 \sin \varphi}{2}.$$

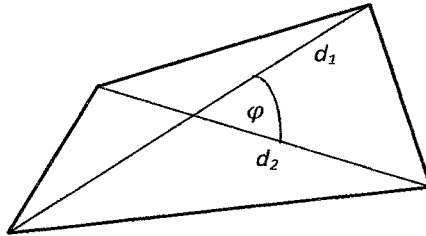


Рис. 3

3. В четырехугольник можно вписать окружность, если суммы его противоположных сторон равны:

$$a + c = b + d.$$

Площадь такого четырехугольника можно вычислить по формуле, $S = pr$, где p – полупериметр четырехугольника, r – радиус вписанной окружности.

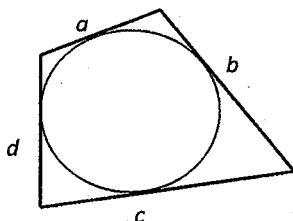


Рис. 4

4. Четырехугольник можно вписать в окружность, если сумма противоположных углов равна 180° (рис.2):

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ.$$

5. **Теорема Птолемея.** Если четырехугольник можно вписать в окружность, то сумма произведений противоположных сторон равна произведению диагоналей:

$$ac + bd = d_1 d_2.$$

6. Площадь вписанного в окружность четырехугольника можно вычислить по формуле

$$S = \sqrt{(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c) \cdot (p-d)}, \text{ где } p - \text{полупериметр четырехугольника.}$$

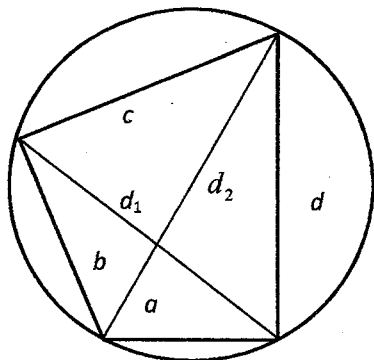


Рис. 5

Параллелограмм

Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные (противоположные) стороны параллельны.

Свойства параллелограмма

1. Противоположные стороны попарно равны.
2. Диагонали в **точке пересечения** делятся пополам.
3. Противоположные углы попарно **равны**.
4. Сумма углов α и β , прилежащих к любой стороне, равна 180° : $\alpha + \beta = 180^\circ$.
5. Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех

сторон: $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

6. Каждая диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.

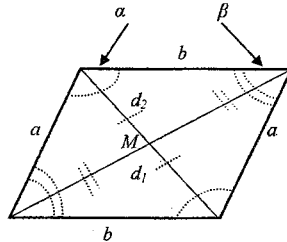


Рис. 6

7. Обе диагонали делят параллелограмм на четыре **равновеликих** треугольника (треугольники одинаковой площади)

$$S_1 = S_2 = S_3 = S_4.$$

8. Точка пересечения диагоналей является центром симметрии.

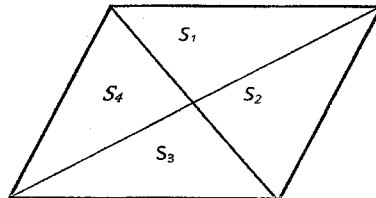


Рис. 7

9. Если соединить отрезками середины соседних сторон любого четырехугольника, то получится параллелограмм:

$$\begin{aligned} KB &= BC, CD = DE, \\ EF &= FG, GA = AK \Rightarrow \\ BD &\parallel AF, AB \parallel FD. \end{aligned}$$

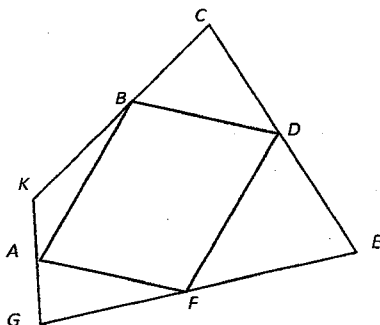


Рис. 8

Признаки параллелограмма

1. Если в четырехугольнике две противоположные стороны равны и параллельны, то это параллелограмм.
2. Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны, то это параллелограмм.
3. Если в четырехугольнике диагонали в точке пересечения делятся пополам, то это параллелограмм.

Площадь параллелограмма

Площадь параллелограмма S может быть вычислена с помощью любой из трех формул:

1. $S = a \cdot h_a = b \cdot h_b$, где a, b – стороны параллелограмма, h_a, h_b – высоты параллелограмма, опущенные на стороны a и b .
2. $S = a \cdot b \cdot \sin \alpha$, где a, b – стороны параллелограмма, α – угол между сторонами a, b .

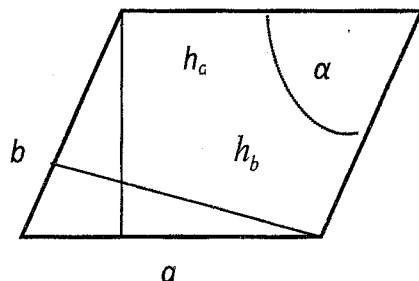


Рис. 9

3. $S = \frac{d_1 \cdot d_2 \sin \beta}{2}$, где d_1, d_2 – диагонали параллелограмма,

β – угол между диагоналями.

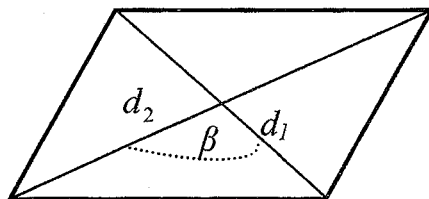


Рис.10

Ромб

Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны. Ромб обладает всеми свойствами параллелограмма и имеет свои характерные свойства.

Свойства ромба

1. Диагонали d_1, d_2 ромба перпендикулярны.
2. Обе диагонали являются биссектрисами внутренних углов ромба.
3. Высоты ромба равны.
4. В любой ромб можно вписать окружность, радиус которой равен $r = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \sin \alpha$, где a – сторона ромба, α – угол между сторонами ромба.

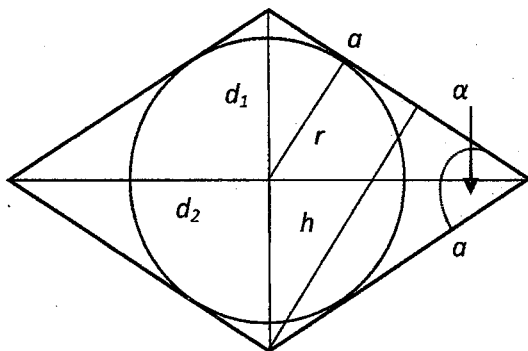


Рис.11

Площадь ромба

Площадь ромба может быть вычислена с помощью любой из четырех формул:

1. $S = a \cdot h$, где a – сторона ромба, h – его высота;
2. $S = 2ar$, где a – сторона ромба, r – радиус вписанной окружности;
3. $S = a^2 \cdot \sin \alpha$, где a – сторона ромба, α – внутренний угол ромба;
4. $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$, где d_1 , d_2 – диагонали ромба.

Прямоугольник

Прямоугольник – это параллелограмм, у которого все углы прямые (равны $\frac{\pi}{2}$).

Свойства прямоугольника

1. Диагонали прямоугольника равны и могут быть вычислены через стороны прямоугольника $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.
2. Около любого прямоугольника можно описать окружность.

Радиус описанной окружности равен $R = \frac{d}{2}$, где d – диагональ прямоугольника.

3. Если соединить отрезками середины соседних сторон любого прямоугольника, получится ромб.

4. Если соединить отрезками середины соседних сторон любого ромба, получится прямоугольник.

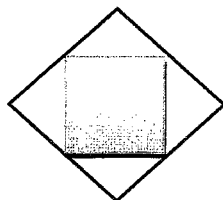
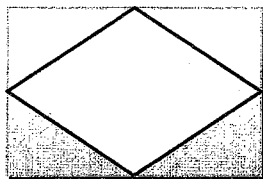


Рис.12

Площадь прямоугольника

Площадь прямоугольника может быть вычислена с помощью любой из двух формул:

1. $S = a \cdot b$, где a, b – стороны квадрата;

2. $S = \frac{d^2 \cdot \sin \gamma}{2}$, где

d – диагональ квадрата, γ – угол между диагоналями.

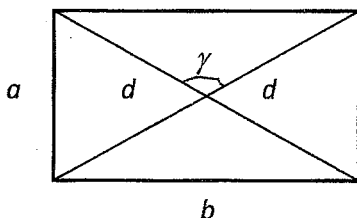


Рис. 13

Квадрат

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны. Можно сказать, что квадрат – ромб с прямыми углами. Квадрат является правильным четырехугольником.

Свойства квадрата

1. Около квадрата всегда можно описать окружность. Радиус описанной окружности R выражается через сторону квадрата или его диагональ следующим образом:

$$R = \frac{a}{\sqrt{2}}, \text{ где } a - \text{сторона квадрата;}$$

$$R = \frac{d}{2}, \text{ где } d - \text{диагональ квадрата.}$$

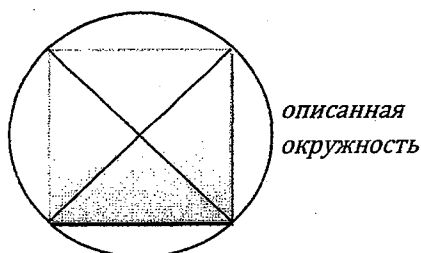


Рис. 14

2. В квадрат всегда можно вписать окружность. Радиус вписанной окружности r равен половине стороны квадрата:

$$r = \frac{a}{2}$$



Рис. 15

Площадь квадрата

Площадь квадрата может быть вычислена с помощью любой из двух формул:

1. $S = a^2$, где a – сторона квадрата;

2. $S = \frac{d^2 \cdot \sin \gamma}{2}$, где d – диагональ квадрата.

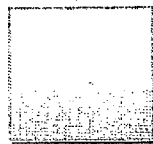


Рис. 16

Трапеция

Трапеция – это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие – не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются **основаниями**. Остальные две стороны называются **боковыми** сторонами. Трапеция с равными (одинаковыми) боковыми сторонами называется **равнобедренной** (равнобокой, равнобочной) трапецией.

Элементы трапеции

Средняя линия трапеции – отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции.

Высота трапеции – отрезок, соединяющий основания трапеции и перпендикулярный (ортогональный) им:

a, b – основания $a \parallel b$,
 m, n – боковые стороны,
 d_1, d_2 – диагонали,
 h – высота,
 MN – средняя линия трапеции.

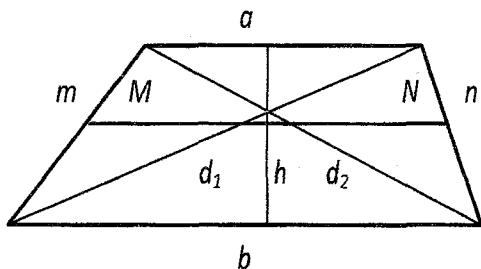


Рис. 17

Свойства трапеции

1. Средняя линия параллельна основаниям и равна их полусумме:

$$MN \parallel a, \quad MN \parallel b, \quad MN = \frac{a+b}{2}.$$

2. Средняя линия делит пополам любой отрезок, соединяющий основания трапеции.

3. Сумма углов, **прилежащих** к любой стороне равна 180° :

$$\alpha + \beta = 180^\circ,$$

$$\gamma + \delta = 180^\circ.$$

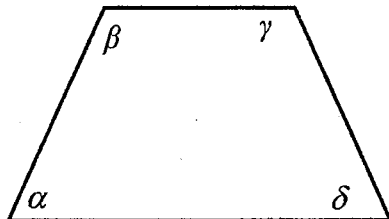


Рис.18

4. Треугольники AOB и DOC , образованные боковыми сторонами и отрезками диагоналей, имеют одинаковые площади:

$$S_{AOB} = S_{DOC}.$$

5. Треугольники AOD и COB , образованные основаниями и диагоналями трапеции являются подобными треугольниками:

$$\Delta AOD \sim \Delta BOC.$$

Коэффициент подобия k равен отношению оснований трапеции: $k = \frac{AD}{BC}$.

Отношение площадей этих треугольников равно квадрату коэффициента подобия:

$$\frac{S_{AOD}}{S_{BOC}} = k^2.$$

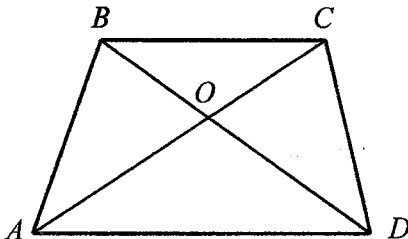


Рис. 19

6. В трапецию можно вписать окружность, только когда сумма оснований этой трапеции равна сумме ее боковых сторон:

$$AD + BC = AB + CD.$$

7. Если трапеция описана около окружности, то треугольники AOB и DOC являются прямоугольными треугольниками.

Точка O – центр вписанной окружности.

Высоты этих треугольников, опущенные на гипотенузы, равны радиусу r вписанной окружности:

$$OK=OH=r.$$

Высота ML трапеции равна диаметру вписанной окружности:

$$OM=OL=r.$$

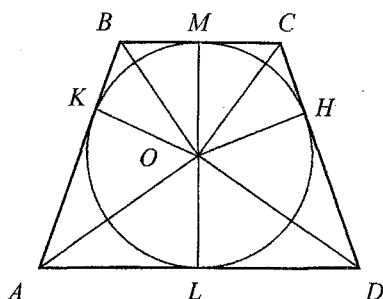


Рис. 20

Площадь трапеции

Площадь трапеции может быть вычислена с помощью одной из трех формул:

1. $S = \frac{a+b}{2}h$, где a, b – основания трапеции, h – высота трапеции;
2. $S = MN \cdot h$, где MN – средняя линия трапеции;
3. $S = \frac{d_1 \cdot d_2 \sin \varphi}{2}$, d_1, d_2 – диагонали трапеции, φ – угол между диагоналями трапеции

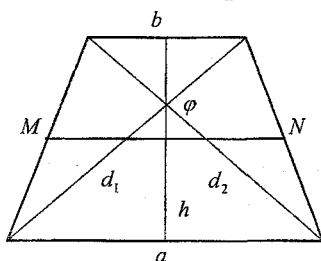


Рис.21.

§4. Многоугольники

Многоугольник называется **выпуклым**, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, **содержащей любую сторону**.

Многоугольник является геометрической фигурой, поэтому для определения выпуклости многоугольника можно использовать более общее определение выпуклой фигуры.

Геометрическая фигура называется **выпуклой**, если отрезок прямой, соединяющий любые две точки этой фигуры, целиком **принадлежит** этой же фигуре.

Выпуклый многоугольник называется **правильным**, если у него все стороны равны и все углы равны.

Рассмотренные выше треугольники и четырехугольники являются выпуклыми фигурами.

Рассмотрим произвольный выпуклый многоугольник и перечислим некоторые его свойства.

1. Сумма внутренних углов n -угольника может быть вычислена по формуле:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i = \pi \cdot (n - 2), \text{ где } \alpha_i - \text{внутренние углы многоугольника.}$$

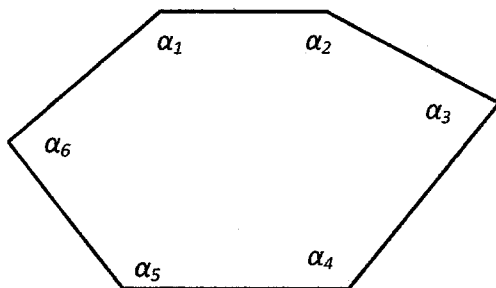


Рис.1

2. Сумма всех внешних углов многоугольника не зависит от количества его углов и всегда равна 2π :

$$\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 = 2\pi.$$

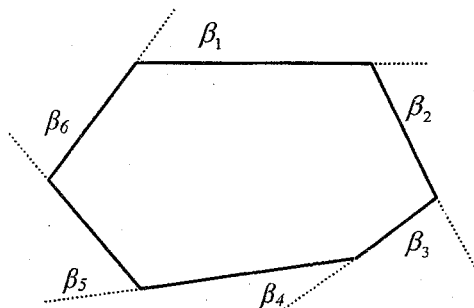


Рис. 2

3. Число всех диагоналей n -угольника вычисляется по формуле

$$N = \frac{n \cdot (n-3)}{2}.$$

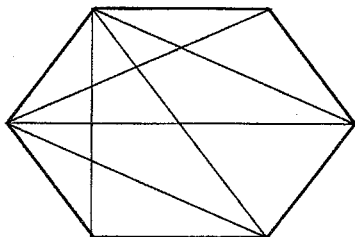


Рис. 3

4. Число K треугольников, на которые делится треугольник диагоналями, **выходящими** из одной вершины, можно вычислить по формуле

$$K = n - 2.$$

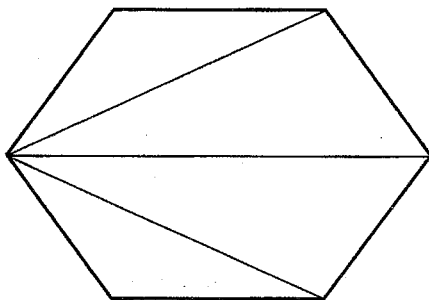


Рис. 4

§5. Окружность и круг

Окружность можно определить как геометрическое место точек (множество точек) плоскости, одинаково удаленных (равноудаленных) от одной фиксированной точки, которая называется **центром окружности**.

Кругом называется часть плоскости, ограниченная окружностью. Часть окружности, заключенная между двумя точками этой окружности, называется **дугой окружности**.

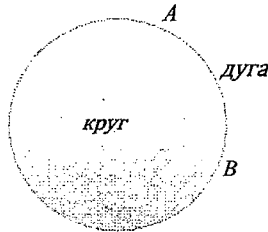


Рис.1

Прямые и отрезки, связанные с окружностью

Отрезок, который соединяет любую точку окружности с центром этой окружности, называется **радиусом** окружности.

Отрезок прямой, соединяющий любые две точки окружности, называется **хордой**. Самая большая хорда называется **диаметром** этой окружности. Диаметр равен двум радиусам.

Прямая, которая пересекает окружность в двух точках, называется **секущей**.

Прямая, которая имеет с окружностью только одну общую точку, называется **касательной** к окружности, а общая точка называется **точкой касания**.

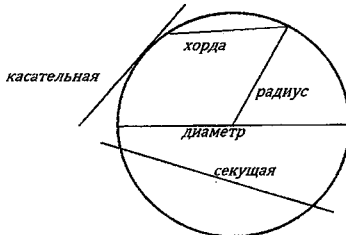


Рис.2

Углы, связанные с окружностью, и угловая мера дуги окружности

Центральным углом окружности называется угол, образованный двумя радиусами. Градусная мера центрального угла равна градусной мере дуги, на которую он опирается (измеряется дугой, на которую угол опирается):

$\angle AOB = \alpha$ – центральный угол,

$\angle AOB = \cup APB$ – дуга.

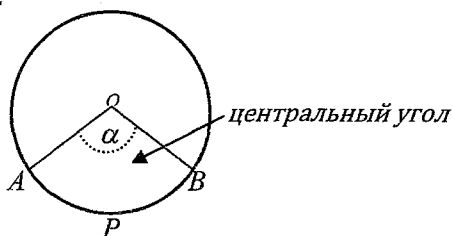


Рис.3

Угол в один радиан равен центральному углу, который опирается на дугу, равную по длине радиусу этой окружности:

1 радиан $\approx 57^{\circ} 17' 45''$, $1^{\circ} = 1/180$ радиан.

Вписанным углом окружности называется угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны – хорды этой окружности:

$\angle ACB = \alpha$ – вписанный угол.

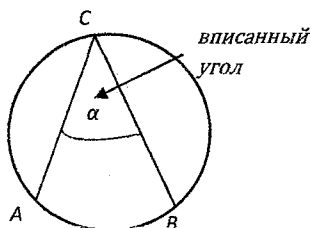


Рис.4

Свойства вписанных углов

1. Вписанный угол $\angle ACB = \beta$ равен половине центрального угла, который опирается на ту же дугу:

$$\beta = \frac{\alpha}{2}.$$

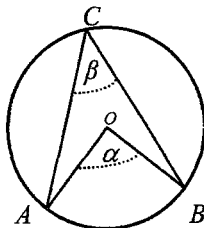


Рис.5

2. Все вписанные углы, которые опираются на одну и ту же дугу, равны (одинаковы):

$$\alpha = \beta.$$

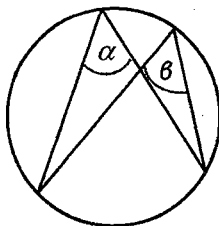


Рис. 6

3. Все вписанные углы, которые опираются на диаметр — прямые (равны $\pi/2$):

$$AD = 2R = D \Rightarrow \angle ABD = \angle ACD = 90^\circ.$$

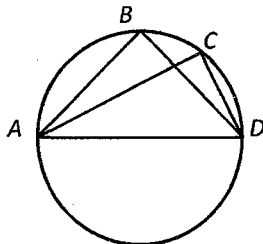


Рис.7

Углы между хордами, касательными и секущими

1. Угол между пересекающимися хордами:

$$\gamma = (\alpha + \beta) / 2,$$

где $\alpha = \angle A D$, $\beta = \angle C B$.

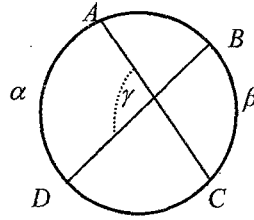


Рис. 8

2. Угол между секущими, которые пересекаются вне окружности:

$$\gamma = (\beta - \alpha) / 2.$$

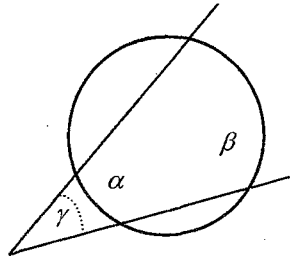


Рис. 9

3. Угол между касательной и секущей, которые выходят из одной точки окружности:

$$\gamma = (\beta - \alpha) / 2.$$

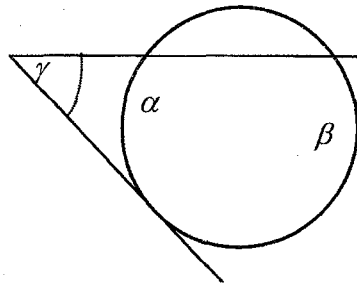


Рис. 10

4. Угол между касательными, выходящими из одной точки:

$$\gamma = \frac{\beta - \alpha}{2} = \pi - \alpha.$$

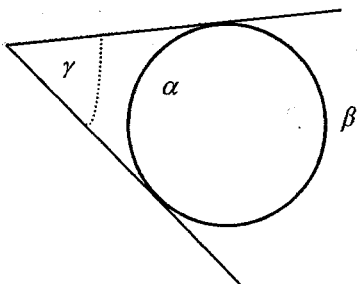


Рис.11

5. Угол между касательной и хордой:

$$\gamma = \alpha/2, \text{ где } \alpha = \angle BС.$$

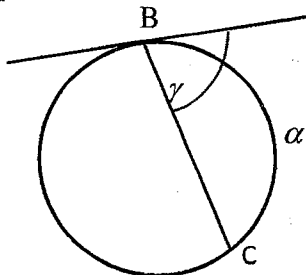


Рис. 12

Свойства хорд

1. Хорды, равноудаленные от центра окружности, равны. Справедливо и обратное утверждение. Если хорды равны, то они равноудалены от центра окружности:

$$AB = AC, h_1 \perp AB, h_2 \perp AC \Rightarrow h_1 = h_2.$$

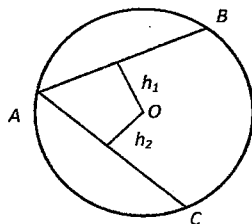


Рис.13

2. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам. Справедливо и обратное утверждение.

Если диаметр делит хорду пополам, то он перпендикулярен этой хорде:

$$D \perp BA.$$

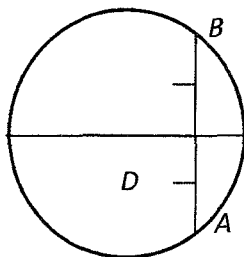


Рис.14

3. Длину хорды L можно вычислить по формуле

$$L = 2R \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ где } R - \text{ радиус окружности,}$$

α – центральный угол, который опирается на хорду L .

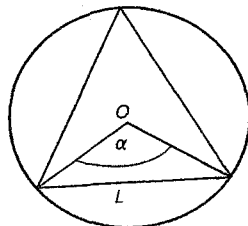


Рис.15

Соотношения между длинами хорд, отрезками касательных и секущих

1. Отрезки пересекающихся хорд связаны соотношением:

$$a \cdot b = c \cdot d$$

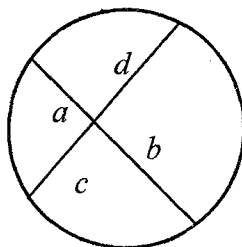


Рис.16

2. Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны:

$$AB=AC.$$

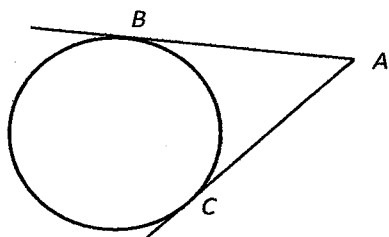


Рис. 17

3. Квадрат отрезка касательной, проведенной из произвольной точки A , равен произведению отрезков секущей, проведенной из той же точки A :

$$AB^2 = AC \cdot AD.$$

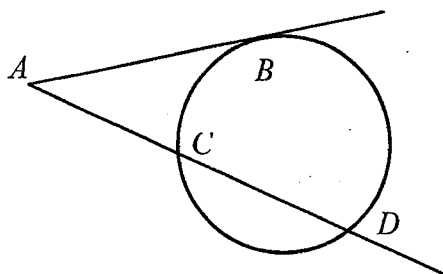


Рис. 18

4. Произведения отрезков секущих, проведенных из одной точки, равны:

$$AB \cdot AD = AC \cdot AE.$$

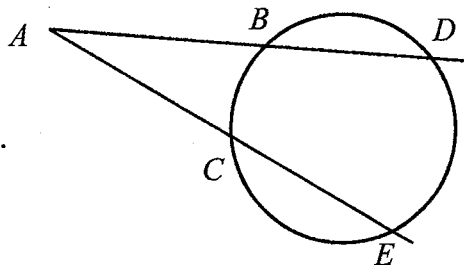


Рис. 19

Свойства дуг и хорд

1. Равные дуги стягиваются равными хордами:

$$AB(\text{дуга}) = BC(\text{дуга}) \Rightarrow AB(\text{хорда}) = BC(\text{хорда}).$$

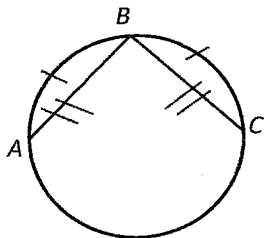


Рис. 20

2. Дуги, заключенные между параллельными хордами, равны:

$$AB(\text{хорда}) \parallel CD(\text{хорда}) \Rightarrow AC(\text{дуга}) = BD(\text{дуга}).$$

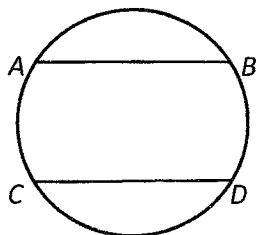


Рис. 21

Длина дуги и окружности

1. Длина дуги окружности равна $l = \alpha \cdot r$,
где r – радиус окружности, α – угол, измеренный в радианах.
2. Длина окружности равна $L = 2\pi \cdot r$.

Площадь круга и его частей

1. Площадь круга равна $S = \pi \cdot r^2$.
2. Площадь сектора круга равна $S = \frac{1}{2} \alpha r^2$,
 α – угол сектора, измеренный в радианах.

3. Площадь сегмента круга равна

$$S = \frac{1}{2}(\beta - \sin \beta) \cdot r^2,$$

β – угол сегмента,
измеренный в радианах.

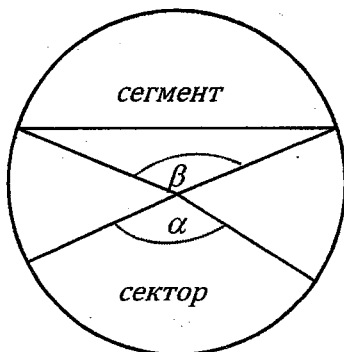


Рис. 22

§6. Примеры

Пример 1. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60° , а сумма гипотенузы и меньшего катета равна 26,4.

Найдите гипотенузу треугольника.

Решение. Пусть $x = AC$ – гипотенуза, тогда меньший катет AB лежит против угла в 30° и равен $x/2$.

По условию $x + x/2 = 26,4 \Rightarrow x = 26,4 \cdot 2/3 = 17,6$.

Ответ. Гипотенуза катета
равна 17,6.

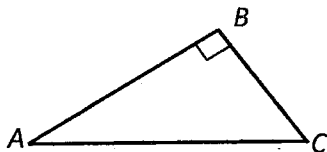


Рис. 1

Пример 2. Стороны параллелограмма равны 10 и 4. Биссектрисы углов, прилежащих к большей стороне, делят противоположную сторону на три отрезка.

Найдите эти отрезки.

Решение. $\angle EAD = \angle EAB$ по условию, $\angle EAD = \angle AEB$, как внутренние накрест лежащие углы, образованные параллельными сторонами BC , AD и секущей AE :

$\angle EAB = \angle AEB$. Треугольник ABE – равнобедренный треугольник: $AB = BE = 4$.

Аналогичные рассуждения приводят к равенствам:

$$\angle ADF = \angle FDC = \angle DFC \Rightarrow FC = CD = 4.$$

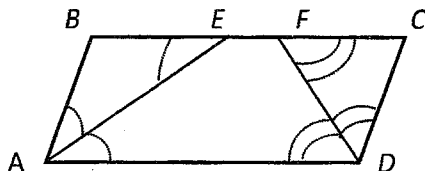


Рис. 2

Длина отрезка EF вычисляется элементарно:

$$EF = BC - BE - FC = 10 - 4 - 4 = 2.$$

Ответ. $BE = FC = 4$, $EF = 2$.

Пример 3. В трапеции $ABCD$ с большим основанием AD диагональ AC перпендикулярна CD , угол BAC равен углу CAD .

Найти большее основание AD , если периметр трапеции равен 20, а угол D равен 60° .

Решение. Введем для большего основания новое обозначение. Пусть $AD = x$. Треугольник ACD – прямоугольный по условию. Дано, что угол D равен 60° , поэтому угол CAD равен 30° .

Угол BAC равен углу CAD , поэтому

$$\angle BAC = 30^\circ \Rightarrow \angle BAD = 2 \cdot 30^\circ = 60^\circ = \angle D.$$

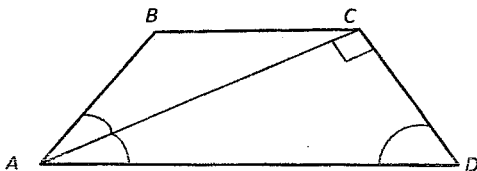


Рис. 3

Из последних равенств следует, что трапеция – равнобедренная:

$$AB=CD.$$

В прямоугольном треугольнике ACD катет CD лежит против угла в 30° , поэтому он равен половине гипотенузы:

$$CD=x/2 \Rightarrow AB=x/2.$$

Углы CAD и ACB равны как внутренние накрест лежащие углы при параллельных основаниях AD и BC и секущей AC , поэтому треугольник ABC – равнобедренный треугольник:

$$AB=BC=x/2.$$

Выразим периметр трапеции через ее стороны:

$$P_{\text{трап.}} = AB + BC + CD + AD = x + 3 \cdot x/2 = 20 \Rightarrow x = 20 \cdot 2/5 = 8.$$

Ответ. $AD=8$ – длина большего основания трапеции равна восьми.

Пример 4. Найдите площадь прямоугольной трапеции, у которой две меньшие стороны равны 6, а больший угол равен 135° .

Решение. Опустим высоту из вершины C на большее основание трапеции. В результате образуется квадрат $ABCE$ со стороной 6. Вычислим угол ECD :

$$\angle ECD = \angle BCD - \angle BCE = 135^\circ - 90^\circ = 45^\circ.$$

Угол ECD равен 45° , поэтому прямоугольный треугольник ECD является равнобедренным. Легко вычисляется большее основание трапеции:

$$AD=AE+ED=6+6=12.$$

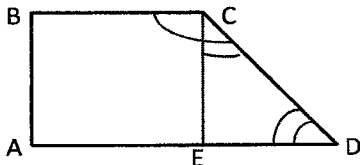


Рис. 4

Теперь все известно для вычисления площади трапеции:

$$S_{\text{трап}} = (BC + AD) / 2 \cdot AB = (12 + 6) / 2 \cdot 6 = 54.$$

Ответ. Площадь трапеции равна 54.

Пример 5. Основание равнобедренного треугольника относится к боковой стороне как 4: 3 (четыре к трем), а высота, проведенная к основанию, равна 30.

Найдите отрезки, на которые эту высоту делит биссектриса угла при основании.

Решение. По условию треугольник равнобедренный, поэтому высота BK является и биссектрисой, и медианой угла B . По условию AO тоже биссектриса. Рассмотрим треугольник ABC . По свойству биссектрис

$$AK/AB = OK/OB.$$

По условию
 $AC:AB = 4:3$, поэтому

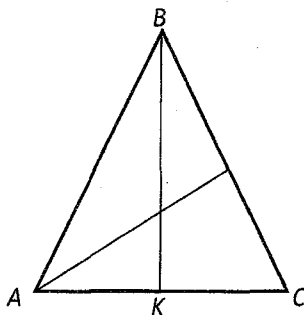


Рис.5

$$\frac{2AK}{AB} = \frac{4}{3} \Rightarrow AK = \frac{2}{3} AB \Rightarrow \frac{2AB}{3AB} = \frac{OK}{OB} \Rightarrow \frac{OK}{OB} = \frac{2}{3} \Rightarrow OK = \frac{2}{3} OB.$$

По условию высота BK равна 30, поэтому

$$OB + OK = 30 \Rightarrow OB + 2/3 OB = 30 \Rightarrow 5/3 OB = 30 \Rightarrow$$

$$OB = 18 \Rightarrow OK = 12.$$

Ответ. Высота заданного равнобедренного треугольника делится боковой биссектрисой на отрезки, равные 12 и 18.

Пример 6. В трапецию с основаниями $EC = a$ и $DB = b$ можно вписать окружность и около нее можно описать окружность.

Найдите радиус вписанной окружности.

Решение. Поскольку трапеция вписана в некоторую окружность, то сумма ее внутренних противоположных углов равна π :

$$\angle E + \angle B = \angle D + \angle C = 180^\circ.$$

По свойству трапеций:

$$\angle E + \angle D = 180^\circ \Rightarrow \angle D = \angle B.$$

Из последнего равенства следует, что эта трапеция равнобедренная.

В трапецию можно вписать окружность, только когда сумма оснований этой трапеции равна сумме ее боковых сторон (свойство № 6). По этому свойству

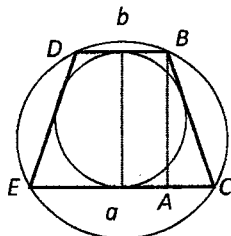


Рис. 6

$$a+b = 2BC \Rightarrow BC = (a+b)/2.$$

Выразим отрезок AC через заданные основания трапеции: $AC = (a-b)/2$. Диаметр вписанной окружности равен высоте трапеции. Найдем высоту трапеции из прямоугольного треугольника ABC :

$$\begin{aligned} BC^2 &= AB^2 + AC^2 \Rightarrow AB^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4} = \\ &= \frac{4ab}{4} \Rightarrow AB = \sqrt{ab} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{ab}}{2}. \end{aligned}$$

Отвст. Радиус окружности, вписанной в трапецию, равен

$$\frac{\sqrt{ab}}{2}.$$

§7. Упражнения

1. Найдите периметр прямоугольника площади $S=2$, диагональ которого $d=2\sqrt{2}$.

2. Найдите длину основания равнобедренного треугольника, у которого высота, опущенная на боковую сторону $h=2$, а угол при вершине $\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

3. В равнобедренном треугольнике основание $a=2\sqrt{2}$, а медиана, опущенная на боковую сторону, $m=3$. Найдите площадь треугольника.

4. Найдите высоту, проведенную к основанию равнобедренного треугольника, если эта высота вдвое больше своей проекции на боковую сторону, а площадь треугольника $S=\sqrt{3}$.

5. В прямоугольный треугольник с катетами $a=1, b=8$ вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна из его вершин совпадает с вершиной прямого угла треугольника.

Найдите площадь этого прямоугольника.

6. Пусть точка O — точка пересечения биссектрис углов прямоугольного треугольника ABC , катеты которого $BC=5, AC=12$.

Найдите площадь треугольника ABO .

7. Найдите радиус круга, если две его параллельные хорды имеют длину 4 и 6, а расстояние между ними равно 1.

8. Окружность радиуса $R=1$ разбита точками A, B, C на три дуги, длины которых соотносятся как $6:2:1$.

Найдите длину наибольшей из хорд, стягивающих эти дуги.

9. На стороне AB квадрата $ABCD$ площади $S=36$ взята такая точка P , что площадь трапеции $APCD$ в два раза больше площади треугольника BSP .

Найти длину отрезка AP .

10. В прямоугольном треугольнике длина катета $a=2\operatorname{tg}\alpha$, где α – противолежащий этому катету угол.

Найдите длину его гипотенузы, если площадь треугольника $S=4$.

11. В треугольнике известна сторона $a=3$ и противолежащий ей угол $\alpha = \pi/3$.

Найдите площадь треугольника, если его периметр равен 8.

12. В круг радиуса $R=2$ вписан треугольник ABC со сторонами $AB=2$ и $BC=2\sqrt{3}$.

Найдите длину третьей стороны AC .

13. В равнобедренном треугольнике угол φ при основании удовлетворяет условию $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}$.

Найдите отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности в виде рационального числа.

14. Найдите площадь круга, если две его перпендикулярные хорды равной длины $l=3$ в точке пересечения делятся в отношении $2:1$.

15. Основания трапеции равны 2 и 1. Найдите отношение площадей двух частей трапеции, на которые средняя линия делит эту трапецию (отношение большей площади к меньшей).

16. Боковые стороны трапеции с высотой $h=8$ образуют с большим основанием внутренние углы $\alpha=45^\circ$ и $\beta=\arctg 2$.

Найдите расстояние между серединами диагоналей трапеции.

Глава 2 Стереометрия

§1. Прямые и плоскости в пространстве

Основные аксиомы стереометрии

1. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая лежит в этой плоскости.

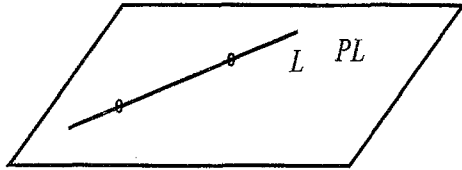


Рис. 1

2. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

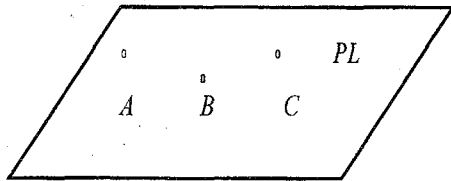


Рис. 2

3. Через прямую и точку вне этой прямой можно провести единственную плоскость.

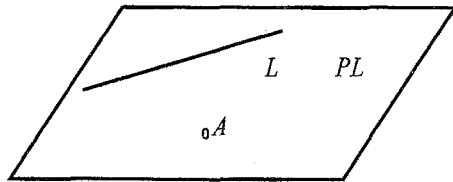


Рис. 3

4. Через две пересекающиеся прямые можно провести единственную плоскость.

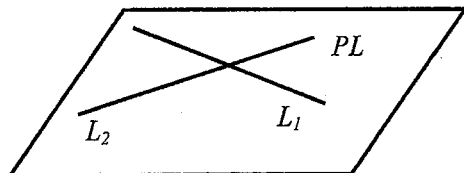


Рис. 4

5. Через две параллельные прямые можно провести единственную плоскость.

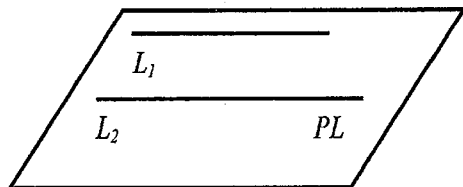


Рис. 5

6. Если две плоскости имеют общую точку, то они **пересекаются по прямой**, проходящей через эту точку.

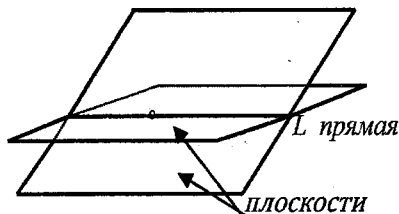


Рис. 6

Способы задания прямой

1. Прямая в пространстве **однозначно** определяется по двум точкам, которые лежат на этой прямой (рис.1).
2. Прямая однозначно определяется двумя **пересекающимися плоскостями** (рис. 6).

Способы задания плоскости

1. Плоскость однозначно определяется по любым трем точкам, которые не лежат на одной прямой (рис. 2).
2. Плоскость можно определить единственным образом по двум пересекающимся прямым (рис. 4).
3. Плоскость определяется единственным образом по двум параллельным прямым (рис. 5).
4. Плоскость единственным образом определяется с помощью прямой и точки, не лежащей на этой прямой (рис. 3).

Основные определения

1. Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости. Прямые l_1 и l_2 — **скрещивающиеся прямые** (рис. 7).

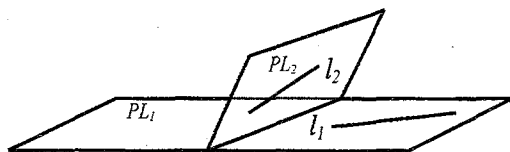


Рис. 7

2. Прямая, все точки которой принадлежат плоскости, называется прямой, **лежащей** в этой плоскости.

Прямая l_1 **лежит в плоскости** PL_1 , прямая l_2 **лежит в плоскости** PL_2 (рис. 7).

3. Говорят, что **прямая пересекает плоскость**, если у нее есть только одна общая точка с этой плоскостью.

Прямая l **пересекает плоскость** pl .

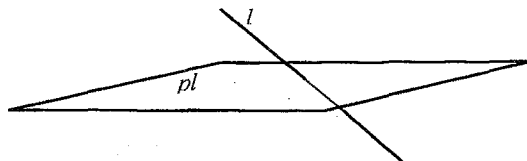


Рис. 8

4. Прямая, пересекающая плоскость, называется **перпендикулярной (ортогональной)** плоскости, если она перпендикулярна любой прямой этой плоскости, проходящей через точку пересечения.

Прямая l перпендикулярна плоскости pl .

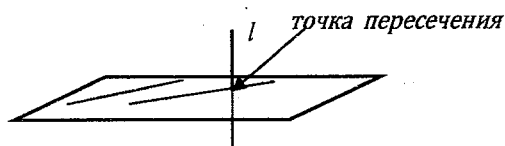


Рис. 9

5. Две плоскости, не имеющие общих точек, называются **параллельными**.

Плоскость pl_1 параллельна плоскости pl_2 .

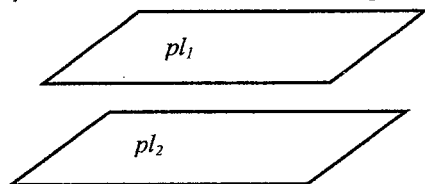


Рис. 10

6. Пересекающиеся плоскости называются **перпендикулярными**, если третья плоскость, ортогональная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным лучам.

Плоскость pl_1 перпендикулярна плоскости pl_2 .

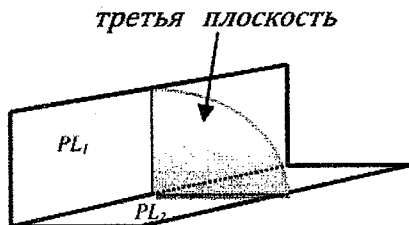


Рис. 11

Перпендикуляр, наклонные и их свойства

1. Перпендикуляр **короче любой наклонной**, проведенной к плоскости из той же точки.

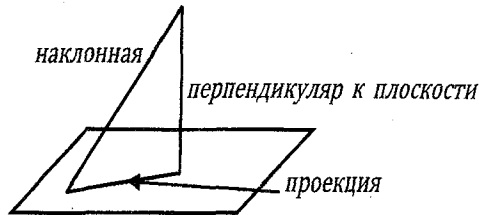


Рис. 12

2. У равных наклонных, проведенных к плоскости из одной точки, проекции равны.

3. Из двух наклонных, проведенных из одной точки, больше та, у которой проекция больше.

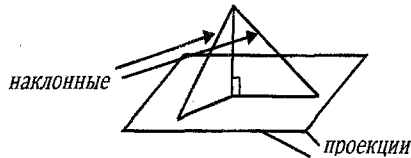


Рис. 13

4. Теорема о трех перпендикулярах.

Если прямая, лежащая в плоскости, проходит через основание наклонной и ортогональна проекции этой наклонной, то она ортогональна и **самой наклонной**:

$$\angle \alpha = \angle \gamma = \pi/2.$$

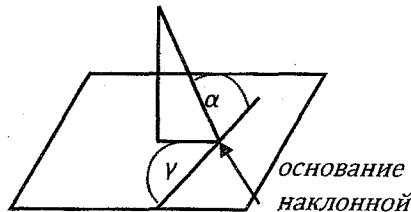


Рис. 14

Углы в пространстве

1. **Угол между прямой и плоскостью.** Так называется угол между прямой и ее проекцией на плоскость.

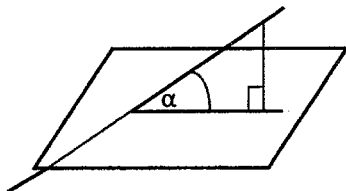


Рис. 15

2. **Двугранный угол.** Так называется угол, образованный двумя пересекающимися полуплоскостями и общей прямой, которая их ограничивает. Эта прямая называется ребром двугранного угла.

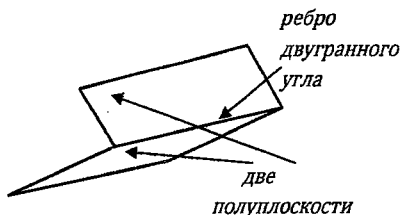


Рис. 16

3. **Линейный угол двугранного угла.** Это угол между двумя лучами, которые образуются при пересечении двугранного угла плоскостью, перпендикулярной ребру двугранного угла.

Мерой двугранного угла является мера соответствующего ему линейного угла α

$$0^\circ < \alpha < 180^\circ.$$

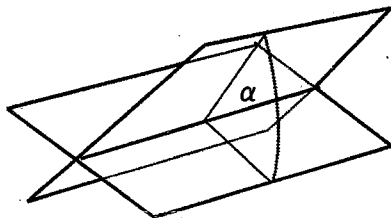


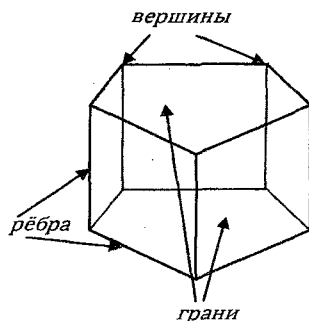
Рис. 17

4. **Угол между плоскостями.** Две пересекающиеся плоскости определяют четыре двугранных угла. Углом α между плоскостями называют меньший из этих углов:

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ.$$

§2. Многогранники

Элементы любого многогранника: **грани, ребра, вершины**.
Основные числовые характеристики трехмерной фигуры:
площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}}$,
площадь всей поверхности фигуры $S_{\text{полн}}$,
объем фигуры V .



Прямая призма
Рис.1

Рассмотрим простейшие виды многогранников и их числовые характеристики.

Призма

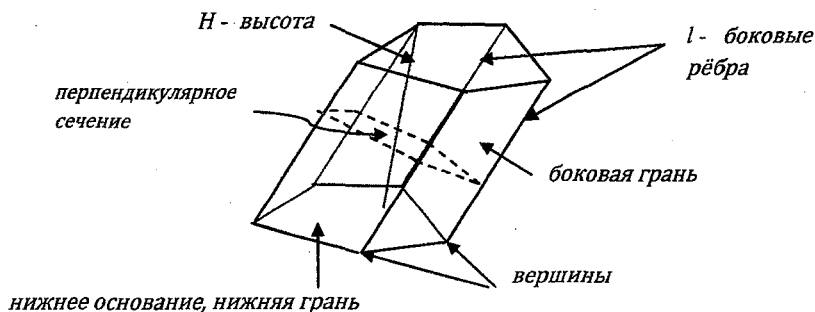
Призма – многогранник, две грани которого – одинаковые многоугольники, лежащие в параллельных плоскостях. Такие две грани называются основаниями призмы. Остальные грани называются боковыми и являются параллелограммами.

Высота призмы – это расстояние между основаниями призмы. Призмы делятся на наклонные и прямые.

Наклонная призма – призма, боковые ребра которой не параллельны ее высоте. Боковые грани наклонной призмы не перпендикулярны ее основаниям.

Прямая призма – призма, боковые ребра которой равны ее высоте. Боковые грани прямой призмы перпендикулярны ее основаниям (рис.1).

Правильная призма – это прямая призма, у которой основания являются правильными многоугольниками.



Наклонная призма

Рис. 2

Площадь поверхности и объем призмы

	Наклонная призма	Прямая призма
Боковая поверхность	$S_{бок} = P_{сеч} \cdot l,$ где $P_{сеч}$ – периметр перпендикулярного сечения, l – длина бокового ребра	$S_{бок} = P_{осн} \cdot H,$ где $P_{осн}$ – периметр основания, H – высота
Полная поверхность	$S_{полн} = S_{бок} + 2 \cdot S_{осн}$	$S_{полн} = S_{бок} + 2 \cdot S_{осн}$
Объем	$V = S_{сеч} \cdot l,$ где $S_{сеч}$ – площадь перпендикулярного сечения, l – боковое ребро	$V = S_{осн} \cdot H,$ где $S_{осн}$ – площадь основания призмы, H – высота

Таб.1

Параллелепипед

Так называется призма, все грани которой – параллелограммы. Противоположные грани параллельны и равны. Все четыре диагонали (d_1, d_2, d_3, d_4) пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам. Точка пересечения диагоналей – центр симметрии. Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его ребер:

$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2.$$

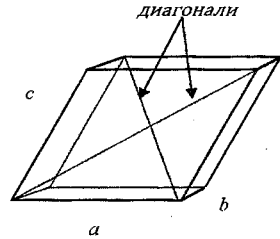


Рис. 3

Прямой параллелепипед – это параллелепипед, у которого боковые ребра перпендикулярны основаниям. Боковые грани – прямоугольники, основания – параллелограммы.

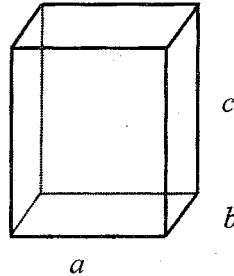


Рис. 4

Прямоугольный параллелепипед – это прямой параллелепипед, основания которого – прямоугольники. Диагонали такого параллелепипеда равны, поэтому квадрат диагонали равен сумме квадратов ребер, исходящих из одной вершины:

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

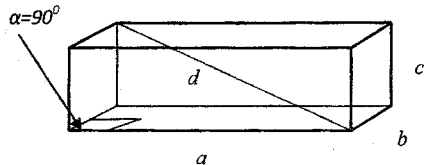


Рис. 5

Площадь полной поверхности и объем можно вычислить по простым формулам:

$$S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac), V = abc.$$

Куб – это прямоугольный параллелепипед, все грани которого – квадраты. Все ребра равны и все грани равны:

$$d = \sqrt{3}a, S_{\text{полн}} = 6a^2, V = a^3.$$

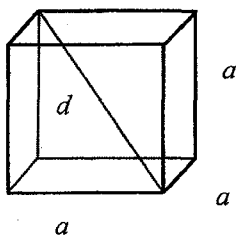


Рис. 6

Пирамида

Пирамида – это многогранник, одна грань которого (основание) является многоугольником, а остальные грани (боковые) – треугольники. Эти треугольники имеют одну общую вершину, которая называется вершиной пирамиды.

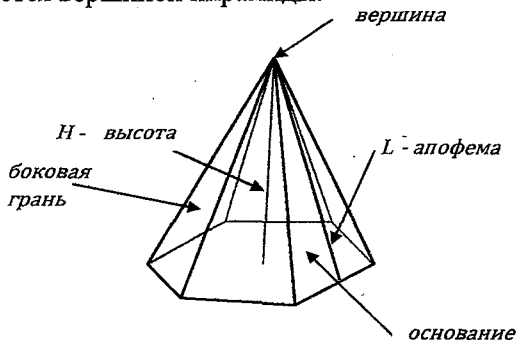


Рис. 7

Правильная пирамида – это пирамида, у которой основание является правильным многоугольником, а вершина пирамиды проецируется в центр основания. Боковые грани правильной пирамиды – равнобедренные треугольники. Боковые ребра равны.

Высоты боковых сторон равны. Такие высоты называют **апотемой**.

Усеченная пирамида – часть полной пирамиды, которая заключена между основанием пирамиды и параллельным ему сечением. Боковые грани усеченной пирамиды – трапеции. Расстояние между основаниями усеченной пирамиды является ее высотой. Боковые грани правильной усеченной пирамиды – одинаковые равнобедренные трапеции. Боковые ребра равны. Апотемы равны.

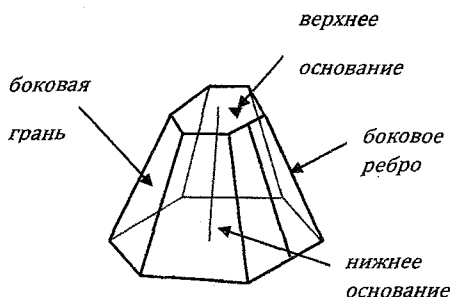


Рис. 8

Площадь поверхности и объем произвольной пирамиды

	Пирамида	Усечённая пирамида
Боковая поверхность	$S_{\text{бок}} = \sum_{i=1}^n S_i,$ где S_i – площадь одной боковой грани	$S_{\text{бок}} = \sum_{i=1}^n S_i,$ где S_i – площадь одной боковой грани
Полная поверхность	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$	$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S + s,$ где S – площадь нижнего основания, s – площадь верхнего основания
Объём	$V = \frac{1}{3} H \cdot S_{\text{осн}}$	$V = \frac{1}{3} H \cdot (S + s + \sqrt{S \cdot s})$

Таб. 2

§3. Тела вращения

Цилиндр

Цилиндр (прямой, круговой) – это фигура, полученная при вращении прямоугольника вокруг одной из своих сторон. Отрезки AB и DC (рис. 1) называются образующими цилиндра. Прямоугольник $ABCD$ называется осевым сечением цилиндра. Два круга с радиусом R называются основаниями цилиндра. **Ось симметрии цилиндра** – отрезок, который соединяет центры этих кругов.

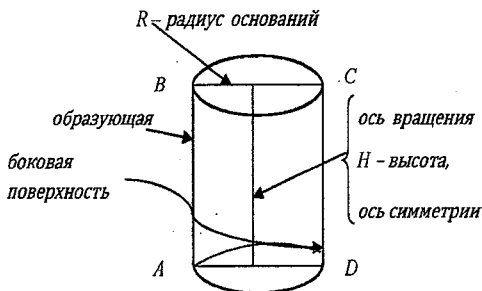


Рис. 1

Конус

Конус (прямой, круговой) – это фигура, которая образуется при вращении прямоугольного треугольника вокруг одного из своих катетов. Поверхность конуса состоит из боковой поверхности, круга, который называется основанием конуса и вершины (точка B). Отрезки AB и BC (рис. 2) называются образующими. Треугольник ABC , содержащий ось симметрии, называется осевым сечением конуса.

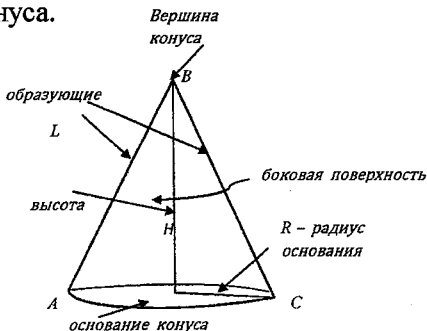


Рис. 2

Усеченный конус – это фигура, заключенная между основанием конуса и сечением, параллельным основанию конуса. Поверхность усеченного конуса образована двумя основаниями и боковой поверхностью. Осевым сечением усеченного конуса является трапеция.



Рис. 3

Площадь поверхности и объем тел вращения

	Цилиндр	Конус	Усеченный конус
Боковая поверхность	$S_{бок} = 2\pi RH$	$S_{бок} = \pi RL$	$S_{бок} = \pi(R+r)L$
Полная поверхность	$S_{полн} = 2\pi R(R+H)$	$S_{полн} = \pi R(R+L)$	$S_{полн} = \pi(R+r)L + \pi R^2 + \pi r^2$
Объем	$V = \pi R^2 H$	$V = 1/3 \pi R^2 H$	$V = 1/3 \pi H(R^2 + Rr + r^2)$

Таб. 1

Сфера и шар

Сфера – это множество всех точек пространства, удаленных от данной точки на данное расстояние R . Фиксированная точка O называется центром сферы. Расстояние R называется радиусом сферы.

Представим различные определения шара.

1. **Шар** – это множество всех точек пространства, которые находятся от данной точки O на расстоянии, не превосходящем заданного расстояния R .
2. **Шар** – часть пространства, ограниченная сферой.
3. **Шар** – это фигура вращения полукруга вокруг его диаметра.

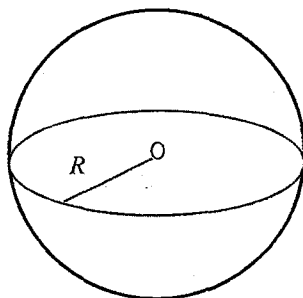
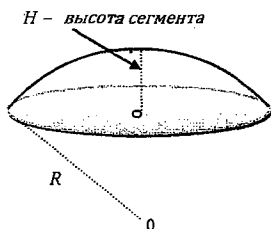


Рис. 5

Части шара

шаровой сегмент



шаровой сектор

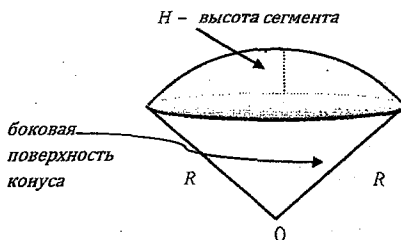


Рис. 6

Площади и объемы

	Шар	Шаровой сегмент	Шаровой сектор
Площадь	$S=4\pi R^2$	$S_{\text{сфер}}=2\pi RH$	$S_{\text{полн}}=\pi R(2H+\sqrt{(2R)^2-H^2})$
Объем	$V=4/3 \pi R^3$	$V=\pi H^2(R-1/3 H)$	$V=2/3 \pi R^2 H$

Таб. 2

§4. Примеры

Пример1. Площади граней прямоугольного параллелепипеда равны 1, 2, 3. Найдите длину его диагонали.

Решение. Введем обозначения для сторон пирамиды:

$AB=a, AD=b, AA_1=c.$

Нам дано, что
$$\begin{cases} ac=1 \\ bc=2 \\ ab=3 \end{cases} \quad (*)$$

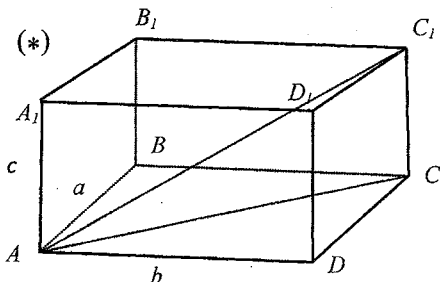


Рис. 1

Требуется найти длину диагонали AC_1 .

1) Рассмотрим треугольник ADC . Угол D равен 90° , так как (т.к.) любая грань параллелепипеда – прямоугольник. По теореме Пифагора $AC = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Треугольник ACC_1 прямоугольный, поэтому

$$d = AC_1 = \sqrt{AC^2 + CC_1^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

3) Перемножим попарно между собой все равенства (*) и получим другие равенства:

$$abc^2 = 2 \Rightarrow c^2 = \frac{2}{ab} = \frac{2}{3},$$

$$a^2cb = 3 \Rightarrow a^2 = \frac{3}{cb} = \frac{3}{2},$$

$$b^2ac = 6 \Rightarrow b^2 = \frac{6}{ac} = 6.$$

4) Теперь можно вычислить искомую диагональ:

$$d = \sqrt{\frac{3}{2} + 6 + \frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{6}.$$

Ответ. Длина диагонали равна $\frac{\sqrt{7}}{6}$.

Пример 2. В прямую призму, в основании которой лежит ромб со стороной основания $a=6$, вписан шар радиуса $r=1$. Найдите объем призмы.

Решение. Шар вписан в призму (рис.2), поэтому он касается всех граней призмы и высота призмы $h = 2r = 2$. Объем призмы вычисляется по формуле $V = S_{\text{осн}} \cdot h$.

1) Для нахождения площади основания призмы рассмотрим рис. 3. Ромб $ABCD$ – основание призмы. Вписанная в него окружность – проекция вписанного в призму шара. Радиус этой окружности равен радиусу вписанного шара. Площадь ромба равна удвоенному произведению длины стороны ромба на радиус вписанной окружности:

$$S = 2ar = 2 \cdot 6 \cdot 1 = 12.$$

2) Вычисляем объем призмы:

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h = Sh = 12 \cdot 2 = 24.$$

Ответ. Объем призмы равен 24.

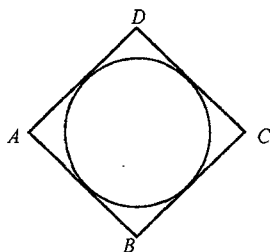


Рис. 3

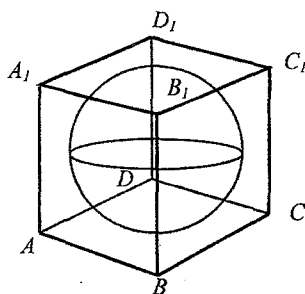


Рис. 2

Пример 3. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высотой $h=2$, если ее боковое ребро имеет длину $l=4$.

Решение. Объем пирамиды вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot h.$$

1) Для нахождения площади основания рассмотрим прямоугольный треугольник AOH .

По теореме Пифагора

$$AO = \sqrt{AH^2 - OH^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}.$$

AO — половина диагонали, поэтому диагональ квадрата AC равна $2\sqrt{12}$.

2) Площадь квадрата равна половине квадрата его диагонали:

$$S = 1/2 \cdot d^2 = 24.$$

3) Теперь можно вычислить объем пирамиды:

$$V = 2/3 \cdot 24 = 16.$$

Ответ. Объем пирамиды равен 16.

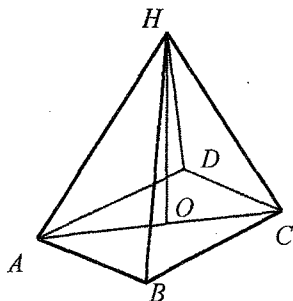


Рис. 4

Пример 4. В правильной усеченной треугольной пирамиде сумма периметров оснований равна 46, длина бокового ребра равна 10, синус угла между боковым ребром и прилежащей к нему стороной основания равен 0,3. Найдите площадь боковой грани пирамиды.

Решение. Боковая грань пирамиды является равнобедренной трапецией. Площадь трапеции равна $S = (A_1B_1 + AB) \cdot h/2$, где h — высота трапеции.

1) Рассмотрим треугольник BHB_1 . По условию примера

$$\angle H = 90^\circ, BB_1 = 10, \sin \hat{B} = 0.3.$$

Вычислим высоту трапеции из прямоугольного треугольника BHB_1 :

$$h = BB_1 \cdot \sin \hat{A} = 10 \cdot 0.3 = 3.$$

2) По условию мы знаем сумму периметров оснований усеченного конуса:

$$P_{ABC} + P_{A_1B_1C_1} = 46 \Rightarrow 3AB + 3A_1B_1 = 46 \Rightarrow AB + A_1B_1 = 46/3.$$

В результате мы вычислили сумму оснований боковой грани (трапеции). Теперь можно вычислить площадь боковых граней:

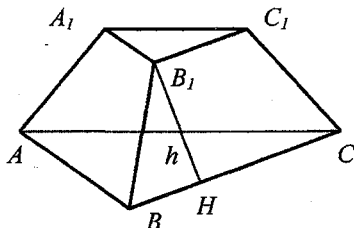


Рис. 5

$$S = (A_1B_1 + AB) \cdot h/2 = \frac{46}{2 \cdot 3} \cdot 3 = 23.$$

Ответ. Площадь боковых граней пирамиды равна 23.

§5. Упражнения

1. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами $a = 1, b = 2$.

Найдите радиус сферы, описанной около призмы, если ее высота $h = 2$.

2. В прямую призму, в основании которой лежит ромб с углом $\alpha = 30^\circ$, вписан шар радиуса $r = 1$. Найдите объем призмы.

3. В основании прямой призмы лежит ромб со сторонами $a = 2$ и острым углом $\alpha = 60^\circ$. Большая диагональ призмы равна $d = \sqrt{15}$.

Найдите объем призмы.

4. Косинус угла α между боковым ребром и основанием правильной четырехугольной пирамиды равен $\cos \alpha = 1/\sqrt{3}$. Найдите тангенс двугранного угла между боковой гранью и основанием пирамиды.

5. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, площадь боковой поверхности которой равна $S_{бок} = 10$, а радиус описанной около основания окружности $R = 2$.

6. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высотой $h = 3$, если её боковые грани наклонены к плоскости основания под углом $\alpha = 45^\circ$.

7. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды с высотой $h = 2$, если её боковое ребро имеет длину $l = 4$.

8. Из центра основания правильной четырехугольной пирамиды высоты $h = 1$ опущен на боковое ребро перпендикуляр длины $b = \sqrt{2}/2$. Найдите площадь основания пирамиды.

9. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна $h = 3$, а косинус угла между основанием и боковой гранью равен $\cos \varphi = 1/2$. Найдите объем пирамиды.

10. В основании треугольной пирамиды лежит прямоугольный треугольник с катетом $a = 2$ и противолежащим углом $\alpha = \arctg(2/3)$. Найдите объем пирамиды, если все боковые ребра имеют одинаковую длину $l = 2$.

11. Двугранный угол между боковой гранью и основанием правильной шестиугольной пирамиды равен $\pi/3$. Найдите тангенс угла между боковым ребром и основанием пирамиды.

12. Найдите объем правильной шестиугольной призмы, если ее высота $h = \sqrt{2}/3$, а диагонали смежных боковых граней, выходящие из одной вершины, образуют угол $\alpha = 60^\circ$.

13. В шар радиуса $R = 3$ вписан конус наибольшего объема. Найдите площадь основания такого конуса.

Глава 3

Аналитическая геометрия

Основным объектом изучения аналитической геометрии на плоскости являются линии (кривые), уравнения которых – алгебраические уравнения вида

$$Ax + By + C = 0 \text{ – уравнение первой степени,} \quad (1)$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \text{ – уравнение второй степени.} \quad (2)$$

Линия, уравнением которой является уравнение (1), называется линией (кривой) первого порядка. Такая линия называется прямой линией или просто прямой.

Линия, уравнением которой является уравнение (2), называется линией (кривой) второго порядка.

Переменные x и y в уравнении линии называются *текущими координатами* точек этой линии. Точка кривой с переменными координатами называется *текущей точкой*.

В аналитической геометрии такие линии обычно изучаются с помощью различных систем координат.

§ 1. Системы координат на плоскости

Декартовы системы координат

Системы координат на плоскости дают возможность устанавливать **взаимно однозначное соответствие** между точками плоскости и парами вещественных чисел (x, y) .

Наиболее часто используются декартовы системы координат. Существует несколько видов таких систем координат: **прямоугольные и косоугольные, правосторонние и левосторонние.**

Система координат называется прямоугольной, если угол между координатными осями равен $\frac{\pi}{2}$.

Система координат называется косоугольной, если угол между координатными осями не равен $\frac{\pi}{2}$.

Углы принято отсчитывать от положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки.

Система координат называется правосторонней, если минимальный угол между положительным направлением оси абсцисс и осью ординат положителен и левосторонней в **противном случае**.

На рисунке 1 представлены примеры правосторонних систем координат, а на рисунке 2 – примеры левосторонних систем координат.

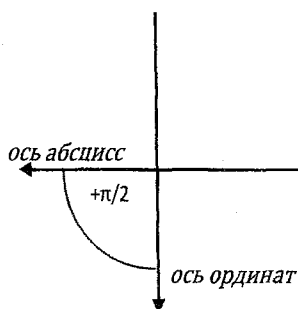
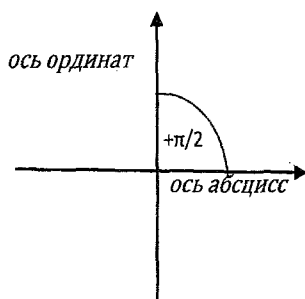


Рис.1

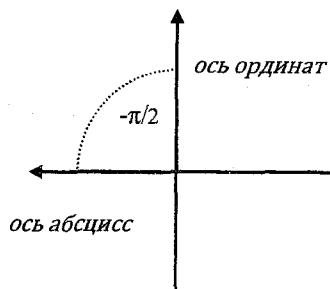
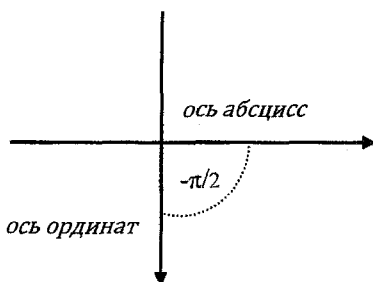


Рис. 2

Преобразование системы координат

1. Поворот системы координат

Построим две правосторонние, прямоугольные декартовы системы координат с общим началом координат (рис. 3). Пусть одна система координат $X'OY'$ будет новой системой координат, а вторая система координат XOY будет старой системой координат. Предположим, что новая система координат повернута на угол α относительно старой.

Выведем формулы перехода от новой системы координат к старой системе. Для этого возьмём произвольную точку M плоскости с координатами (x, y) в старой системе координат и с координатами (x', y') в новой системе координат. Пусть r — радиус-вектор точки M . Угол φ — угол между радиус-вектором и осью X' .

Выразим координаты точки в старой системе координат через параметры α, r, φ :

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos(\alpha + \varphi) \\ y = r \cdot \sin(\alpha + \varphi). \end{cases} \quad (1)$$

Преобразуем систему (1), пользуясь элементарными формулами тригонометрии:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cdot \cos \alpha - r \sin \varphi \cdot \sin \alpha \\ y = r \cos \varphi \cdot \sin \alpha + r \sin \varphi \cdot \cos \alpha. \end{cases}$$

Введем в правые части этой системы новые координаты этой же точки M :

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (2)$$

Полученная система является формулами перехода от новой системы координат к старой. С помощью этой системы можно легко вывести формулы обратного перехода от старой системы координат к новой системе:

$$\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \sin \alpha \\ y' = -x \sin \alpha + y \cos \alpha. \end{cases} \quad (3)$$

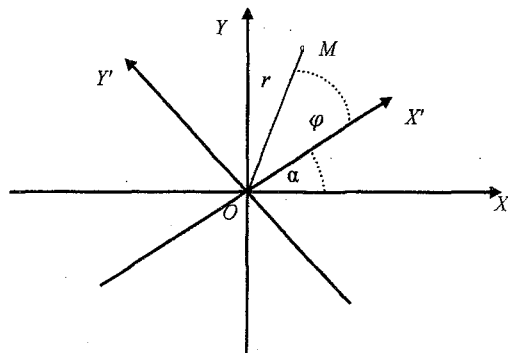


Рис. 3

2. Параллельный перенос системы координат

Вновь рассмотрим две системы координат — новую $X'O'Y'$ и старую XOY . Предположим, что у этих систем параллельны и одинаково направлены одноименные координатные оси, а начала координат **не совпадают**. Координаты начала O' новой системы координат относительно старой системы заданы и равны $(x_0; y_0)$.

Выведем формулы перехода из одной системы координат в другую (рис. 4). Для этого рассмотрим произвольную точку M . В старой системе координат ее координаты $(x; y)$, а в новой $(x'; y')$. Построим три вектора $\overrightarrow{OO'}$, $\overrightarrow{O'M}$, $\overrightarrow{OM}$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ по построению равен сумме векторов $\overrightarrow{OO'}$ и $\overrightarrow{O'M}$:

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} \quad (4)$$

Каждый из трех векторов разложим по ортам $\vec{i}$, $\vec{j}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= x\vec{i} + y\vec{j} \\ \overrightarrow{OO'} &= x_0\vec{i} + y_0\vec{j} \\ \overrightarrow{O'M} &= x'\vec{i} + y'\vec{j}. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляем равенства (5) в равенство (4) и приходим к соотношению

$$x\vec{i} + y\vec{j} = (x_0 + x')\vec{i} + (y_0 + y')\vec{j}.$$

В силу единственности разложения вектора по ортам $\vec{i}$ и $\vec{j}$ приходим к системе равенств

$$\begin{cases} x = x_0 + x' \\ y = y_0 + y' \end{cases} \quad (6)$$

Формулы (6) являются формулами перехода от новой системы координат к старой.

$$\begin{cases} x_0 = x - x' \\ y_0 = y - y' \end{cases} \quad (7)$$

Система (7) является системой обратного перехода от старой системы координат к новой.

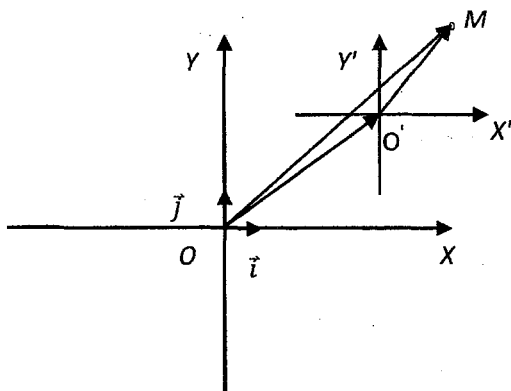


Рис. 4

Приведем три примера использования прямоугольной декартовой системы координат для решения простейших геометрических задач.

Пример 1. Расстояние между точками.

Найти расстояние между точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$.

Решение. Построим вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Расстояние ρ между заданными точками можно рассматривать как длину вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$, поэтому

$$\rho = \left| \overrightarrow{M_1M_2} \right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

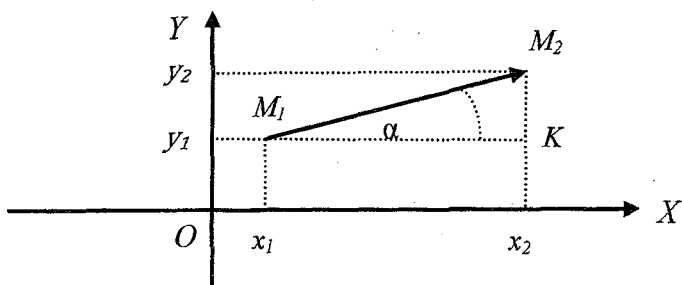


Рис. 5

Пример 2. Деление отрезка в данном отношении

Разделить отрезок $\overrightarrow{M_1M_2}$ прямой в данном отношении $\lambda > 0$.

Решение. Условие этой задачи означает, что надо найти внутри заданного отрезка такую точку $M(x, y)$, что **отношение расстояния** от точки $M_1(x_1, y_1)$ до точки M к расстоянию от точки M до $M_2(x_2, y_2)$ будет равняться **заданному числу** λ :

$$\frac{\rho(M_1, M)}{\rho(M, M_2)} = \lambda. \quad (8)$$

Построим векторы $\overrightarrow{M_1M} = \vec{r}_1$ и $\overrightarrow{MM_2} = \vec{r}_2$.

Эти векторы лежат на одной прямой и по условию коллинеарные:

$$\vec{r}_1 = \lambda \cdot \vec{r}_2. \quad (9)$$

Выразим координаты этих векторов через координаты их концов:

$$\vec{r}_1 = (x - x_1; y - y_1), \quad \vec{r}_2 = (x_2 - x; y_2 - y).$$

Из векторной алгебры известно, что координаты этих векторов связаны таким же соотношением (9), что и векторы:

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),$$

$$y - y_1 = \lambda(y_2 - y).$$

Выразим из последних двух уравнений координаты точки M :

$$\begin{aligned} x &= \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \\ y &= \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \end{aligned} \quad (10)$$

В результате мы вывели (нашли) формулы (10) для вычисления координат точки M , которая делит отрезок M_1M_2 в данном отношении $\lambda > 0$.

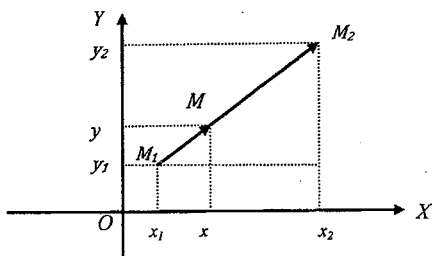


Рис. 6

Пример 3. Вычисление площади треугольника

Вывести формулу для вычисления площади треугольника с заданными вершинами $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$.

Пусть треугольник расположен на плоскости так, как показано на рисунке 7. Введем обозначения: $CB=a$, $CA=b$, $\angle BCA=\varphi$, α_2 — угол наклона стороны a к оси X , α_1 — угол наклона

стороны b к оси X . Очевидно, что $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Площадь треугольника можно вычислить по формуле $S = \frac{1}{2} |a \cdot b \cdot \sin \varphi|$. Выразим эту формулу через координаты вершин треугольника:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} |ab \sin \varphi| &= \frac{1}{2} |ab \sin(\alpha_2 - \alpha_1)| = \frac{1}{2} |ab(\sin \alpha_2 \cdot \cos \alpha_1 - \cos \alpha_2 \cdot \sin \alpha_1)| = \\ &= \frac{1}{2} |b \cos \alpha_1 \cdot a \sin \alpha_2 - a \cos \alpha_2 \cdot b \sin \alpha_1| = \frac{1}{2} |((x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3))|. \end{aligned}$$

Полученную формулу удобно записывать и запоминать с помощью определителя (детерминанта) 2-го порядка:

$$S = \left| \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix} \right|.$$

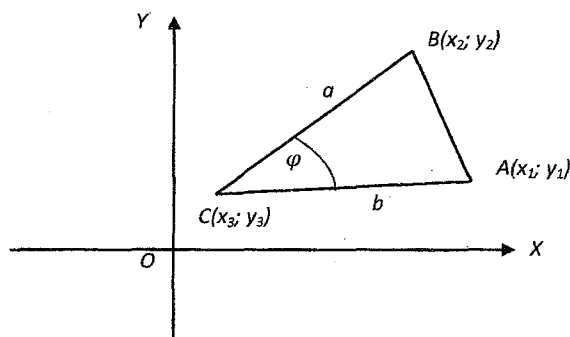


Рис. 7

Полярная система координат

Положение точки на плоскости можно задать с помощью полярной системы координат, которая определяется **следующим образом**.

На плоскости выбираем некоторую точку O и проводим из этой точки луч (полупрямую).

Точка O называется **полюсом**, а луч называют **полярной осью**. Положение любой точки M на плоскости можно задать двумя числами. Первое число – расстояние от точки M до полюса. Это расстояние называется **полярным радиусом** и обозначается обычно буквой ρ . Полярный радиус всегда неотрицателен ($\rho \geq 0$). Второе число – угол φ , образованный полярным радиусом и полярной осью. Угол φ отсчитывается от полярной оси до полярного радиуса и называется полярным углом. Угол φ будет положительным, если он отсчитывается против часовой стрелки и отрицательным, если отсчитывается по часовой стрелке. Полярный угол можно рассматривать в промежутке (**полуинтервале**) $\varphi \in [0; 2\pi[$ или в промежутке $\varphi \in]-\pi; \pi]$.

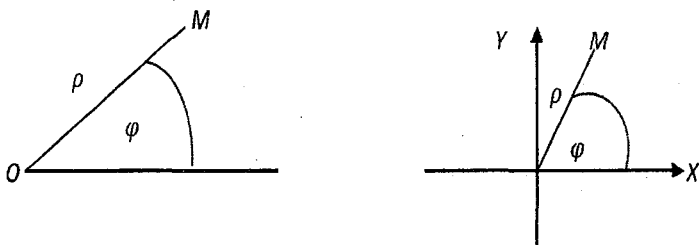


Рис. 8

Установим связь между полярной системой координат и прямоугольной декартовой системой координат. Пусть начало прямоугольной системы координат совпадает с полюсом, а положительное направление оси X совпадает с полярной осью (рис. 8). Рассмотрим произвольную точку M с декартовыми координатами $(x; y)$ и полярными координатами $(\rho; \varphi)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} x &= \rho \cdot \cos \varphi, \\ y &= \rho \cdot \sin \varphi. \end{aligned} \tag{11}$$

Справедливы и обратные соотношения:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \operatorname{tg} \varphi &= \frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{12}$$

Значению $\operatorname{tg} \varphi$ соответствуют два значения угла φ . Из них выбирается то, которое удовлетворяет равенствам (11). Для этого достаточно посмотреть, в какой координатной четверти находится точка.

Пример. На плоскости с прямоугольной декартовой системой координат взята точка M с координатами $(-2; 2)$. Найти полярные координаты этой точки.

Решение. По формулам (12) имеем

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2} = 2\sqrt{2},$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2}{-2} = -1.$$

Из последнего уравнения следует, что $\varphi = \frac{3}{4}\pi$ или $\varphi = -\frac{\pi}{4}$.

По декартовым координатам точки определяем, что точка M находится во второй четверти, поэтому выбираем полярный

угол $\varphi = \frac{3}{4}\pi$.

§2. Вывод канонических уравнений прямой

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Рассмотрим некоторую прямую L на плоскости с заданной декартовой прямоугольной системой координат. Обозначим буквой α угол, который отсчитывается против часовой стрелки от положительного направления оси абсцисс до прямой L . Этот угол **обычно** называют **углом наклона прямой** к оси абсцисс. Тангенс этого угла называется угловым коэффициентом прямой и обозначается буквой k : $\operatorname{tg} \alpha = k$.

Угловой коэффициент прямой всегда можно вычислить, если заданы координаты любых двух точек $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ этой прямой (рис. 5, § 1). В прямоугольном треугольнике M_1M_2K отрезки $M_1K = x_2 - x_1$ и $M_2K = y_2 - y_1$ являются катетами, поэтому

(1)

$$\operatorname{tg} \alpha = k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

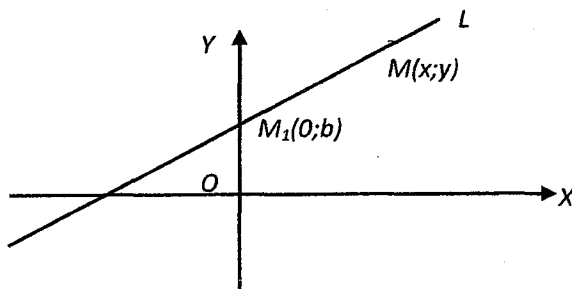


Рис. 1

Возьмем в качестве двух точек на некоторой прямой L (рис. 1) точку пересечения этой прямой с осью ординат: $M_1(0; b)$ и точку $M(x, y)$, где x, y – текущие координаты точки. В этом случае равенство (1) становится уравнением и принимает вид

$$k = \frac{y - b}{x}.$$

Предположим, что параметры k и b заданы (известны). Выразим переменную y через x и в результате получим уравнение:

$$y = kx + b. \quad (2)$$

Уравнение (2) называется **уравнением прямой с угловым коэффициентом**. Для любой прямой, не параллельной оси ординат, существует уравнение с угловым коэффициентом.

Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки
Можно вывести другое уравнение прямой, если заданы координаты любых двух точек, лежащих на этой прямой (рис. 6, § 1). Для этого достаточно выразить угловой коэффициент прямой через любую заданную точку $M_1(x_1, y_1)$ и текущую точку $M(x, y)$ прямой:

$$k = \frac{y - y_1}{x - x_1}. \quad (3)$$

Этот же угловой коэффициент можно вычислить с помощью формулы (1). Приравняв правые части равенств (1) и (3), приходим к уравнению

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}. \quad (4)$$

Умножим последнее уравнение на дробное выражение $\frac{x - x_1}{y_2 - y_1}$. В результате получим

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (5)$$

Уравнение (5) называется **уравнением прямой, проходящей через две заданные точки**.

Уравнение прямой в отрезках

Предположим, что известны координаты точек пересечения прямой с координатными осями (рис. 2). Пусть это точки $M_1(a; 0)$ и $M_2(0; b)$. В этом случае уравнение (5) запишется в виде

$$\frac{x - a}{0 - a} = \frac{y - 0}{b - 0} \Rightarrow \frac{x}{-a} + 1 = \frac{y}{b} \Rightarrow 1 = \frac{x}{a} + \frac{y}{b}. \quad (6)$$

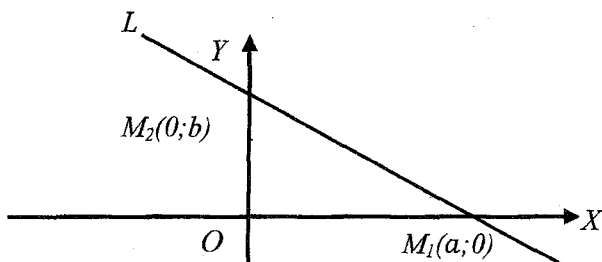


Рис. 2

Последнее уравнение обычно записывается в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (7)$$

Геометрический смысл параметров a и b в последнем уравнении очевиден. Это отрезки, которые отсекает прямая от координатных осей. Поэтому уравнение (7) называется **уравнением прямой в отрезках**.

Параметрические уравнения прямой

Рассмотрим прямую L в декартовой прямоугольной системе координат и вектор $\vec{a}(l; m)$, параллельный этой прямой. Пусть задана (известна) некоторая точка $M_0(x_0, y_0)$ этой прямой (лежащая на этой прямой).

Возьмём на прямой L текущую точку $M(x, y)$ и построим вектор $\overrightarrow{M_0M}$.

Этот вектор коллинеарен вектору $\vec{a}$, поэтому

$$\overrightarrow{M_0M} = t \cdot \vec{a}, \text{ где } t \in R. \quad (8)$$

Построим радиус-векторы точек M_0 и M :

$$\vec{r} = \overrightarrow{OM} = (x; y), \quad \vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0} = (x_0; y_0). \quad (9)$$

Очевидно векторное равенство (рис. 3).

$$\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0.$$

С помощью этого соотношения равенство (8) превращается в уравнение

$$\vec{r} - \vec{r}_0 = t\vec{a}, \quad t \in R. \quad (10)$$

Уравнение (10) называется **векторно-параметрическим уравнением прямой**.

Переходя от векторов к соответствующим координатам, приходим к системе уравнений:

$$\begin{cases} x - x_0 = lt \\ y - y_0 = mt \end{cases}, \forall t \in R. \quad (11)$$

Эту систему обычно записывают в виде:

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \end{cases}. \quad (12)$$

Уравнения этой системы называют **параметрическими уравнениями прямой**.

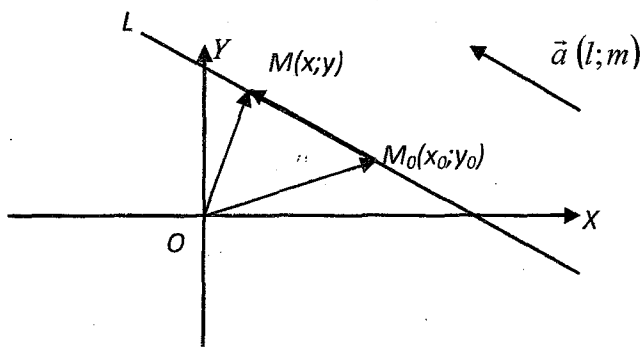


Рис. 3

Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, параллельно заданному вектору

В каждом уравнении системы (11) выразим явно параметр t и приравняем полученные выражения. В результате получим уравнение

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}. \quad (13)$$

Уравнение (13) называется **уравнением прямой, проходящей через заданную точку, параллельно заданному вектору**.

Общее уравнение прямой

Определение. Любой ненулевой вектор, перпендикулярный некоторой прямой, называется **нормальным вектором** к этой прямой (**нормалью к прямой**).

Рассмотрим прямую L , которая проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеет нормаль $\vec{n} = (A; B)$.

Пусть точка $M(x, y)$ – текущая точка на прямой L .

Вектор $\overrightarrow{M_0M}$ лежит на прямой L и ортогонален нормали $\vec{n}$, поэтому скалярное произведение этих векторов равно нулю:

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$$

или

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0, \quad (14)$$

где $\vec{r}, \vec{r}_0$ – радиус-векторы точек M, M_0 .

Уравнение (14) называется **векторным уравнением прямой, проходящей через заданную точку и заданной нормалью**.

Поскольку скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноимённых координат этих векторов, то в координатной форме уравнение (14) записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) можно записать в виде

$$Ax + By + C = 0, \quad (16)$$

где $C = -Ax_0 - By_0$.

Уравнение (16) называется **общим уравнением прямой**. Коэффициенты A и B – координаты нормали прямой L .

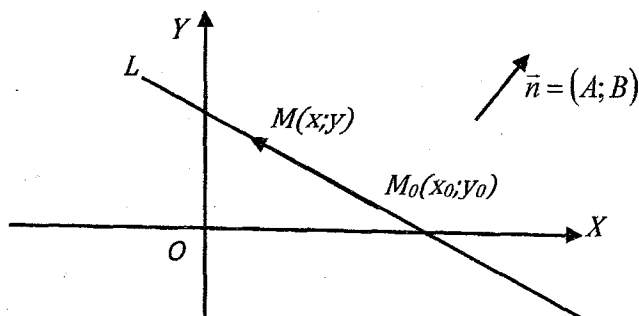


Рис. 4

Нормальное уравнение прямой

Выведем еще одно интересное каноническое уравнение прямой, которое называется **нормальным уравнением**. Этим уравнением удобно пользоваться для вычисления расстояния от точки до прямой или вычисления расстояния между параллельными прямыми.

Возьмем прямую L в декартовой прямоугольной системе координат (рис. 5). Проведем через начало координат прямую n , перпендикулярную (ортогональную) прямой L . Точка P – точка пересечения прямой n и прямой L . Отрезок OP – ортогонален прямой L . Обозначим длину этого отрезка буквой p ($|OP| = p$), и буквой α угол между положительным направлением оси X и нормалью OP . Предположим, что нам известны (заданы) параметры p и α .

Пусть точка $M(x; y)$ – текущая точка прямой L . Очевидно, что проекция радиус-вектора этой точки на прямую n равна длине нормали OP :

$$np_n \overrightarrow{OM} = p. \quad (17)$$

Теперь выразим эту же проекцию через координаты текущей точки M . Для этого введем еще два вспомогательных угла.

Угол φ – угол наклона $\overrightarrow{OM}$ к прямой n и угол θ – угол наклона

$\overrightarrow{OM}$ к оси X . Обозначим буквой ρ длину радиус-вектора $\overrightarrow{OM}$. Проведем простейшие преобразования, используя тригонометрическую формулу косинуса разности двух углов:

$$\begin{aligned} np_n \overrightarrow{OM} &= \rho \cdot \cos \varphi = \rho \cdot \cos(\alpha - \theta) = \rho \cdot (\cos \alpha \cdot \cos \theta + \sin \alpha \cdot \sin \theta), \\ np_n \overrightarrow{OM} &= (\rho \cdot \cos \theta) \cos \alpha + (\rho \cdot \sin \theta) \sin \alpha. \end{aligned} \quad (18)$$

Левые части двух равенств (17) и (18) равны, значит и правые части тоже равны:

$$\begin{aligned} p &= x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha && \text{или} \\ x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - p &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Полученное уравнение (19) называется **нормальным уравнением прямой**.

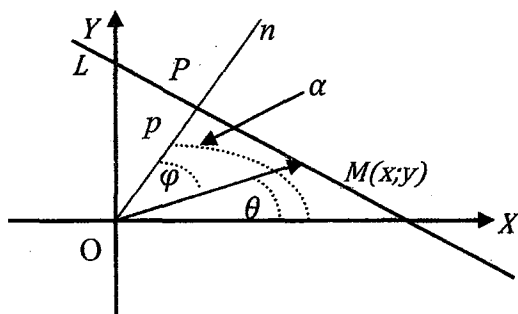


Рис. 5

В итоге мы вывели группу уравнений прямой, которые обычно называют каноническими уравнениями.

Канонические уравнения прямой

№	Аналитический вид	Название уравнения
1	$y = kx + b$	Уравнение прямой с угловым коэффициентом
2	$y - y_0 = k \cdot (x - x_0)$	Уравнение прямой с угловым коэффициентом и проходящей через заданную точку
3	$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m}$	Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, параллельно заданному вектору $\vec{a} (l, m)$
4	$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$	Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки
5	$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$	Уравнение прямой в отрезках
6	$Ax + By + C = 0$	Общее уравнение прямой
7	$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - p = 0$	Нормальное уравнение прямой
8	$\begin{cases} x = x_1 + lt \\ y = y_1 + mt \end{cases}$	Параметрические уравнения прямой

Таб. 1

Выбор канонического вида уравнения зависит от задачи.
Рассмотрим некоторые примеры использования уравнений, представленных в таблице.

Пример 1. Найти тангенс угла между двумя прямыми.

Решение. В этом примере лучше рассматривать уравнения прямых с заданными угловыми коэффициентами. Пусть $y=k_1x+b_1$ — уравнение прямой l_1 , $y=k_2x+b_2$ — уравнение прямой l_2 . Рассмотрим угловые коэффициенты $k_1=\operatorname{tg}\alpha_1$ и $k_2=\operatorname{tg}\alpha_2$ где α_1 и α_2 углы наклона прямых l_1 и l_2 к положительному направлению оси X (рис. 6). Угол φ равен разности этих углов: $\varphi = \alpha_1 - \alpha_2$. Для нахождения тангенса угла φ используем формулу тангенса разности двух углов:

$$\operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2},$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}. \quad (21)$$

Из полученной формулы (21) легко следует условие перпендикулярности двух прямых. Если прямые перпендикулярны, то тангенс угла между ними равен бесконечности. Из формулы (21) видно, что это возможно, если знаменатель равен нулю: $1 + k_1 k_2 = 0$. Следовательно, прямые перпендикулярны (ортогональны) только в том случае, когда произведение их угловых коэффициентов равно минус единице:

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \quad (22)$$

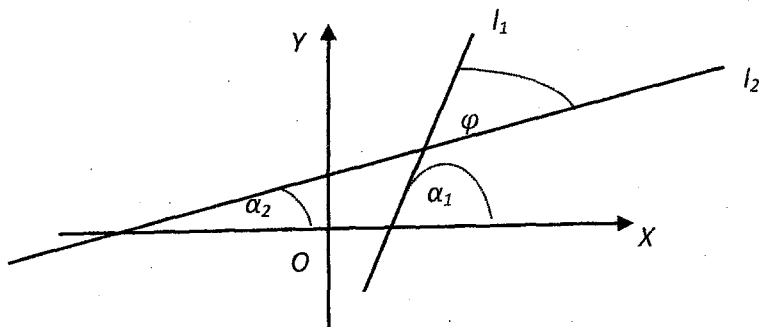


Рис. 6

Пример 2. Построить линейную функцию $\varphi(x)$, которая принимает заданные значения γ_1 и γ_2 в заданных точках a и b .

Решение. Рассмотрим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (23)$$

В этом уравнении поменяем обозначения исходя из условия нашего примера:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad y_1 = \gamma_1, \quad y_2 = \gamma_2, \quad y = \varphi(x).$$

В новых обозначениях уравнение (23) преобразуется к виду

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{\varphi(x) - \gamma_1}{\gamma_2 - \gamma_1}.$$

Выразим явно функцию $\varphi(x)$ из полученного уравнения:

$$\varphi(x) = \gamma_1 + \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{b - a} \cdot (x - a). \quad (24)$$

Построенная линейная функция (24) является решением примера 2.

Пример 3. Найти расстояние от точки, не лежащей на прямой L , до этой прямой. Прямая L задана общим уравнением $Ax + By + C = 0$.

Решение. Пусть d – расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой L , а $\overrightarrow{M_1}(x_1, y_1)$ – произвольная точка прямой L . Построим вектор $\overrightarrow{M_1M_0}$ (рис.7). Расстояние d можно рассматривать как модуль проекции вектора на направление нормали к заданной прямой: $\vec{n} = (A; B)$. Направление этой нормали задается **единичным вектором** $\vec{e} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$, поэтому расстояние d можно записать с помощью скалярного произведения.

$$d = \left| np_{\vec{n}} \overrightarrow{M_1 M_0} \right| = \left| \frac{\overrightarrow{M_1 M_0} \cdot \vec{n}}{|\vec{n}|} \right|. \quad (25)$$

Координаты векторов в равенстве (25) очевидны:

$$\overrightarrow{M_1 M_0} = (x_0 - x_1; y_0 - y_1), \quad \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \left(\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right).$$

Выразим скалярное произведение векторов через их координаты:

$$d = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Точка $M_1(x_1, y_1)$ принадлежит прямой L , поэтому $Ax_1 + By_1 + C = 0$. Из этого равенства следует, что $C = -Ax_1 - By_1$.

В результате сделанных преобразований мы приходим к простой формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (26)$$

для вычисления расстояния от точки до прямой, если прямая задана общим уравнением.

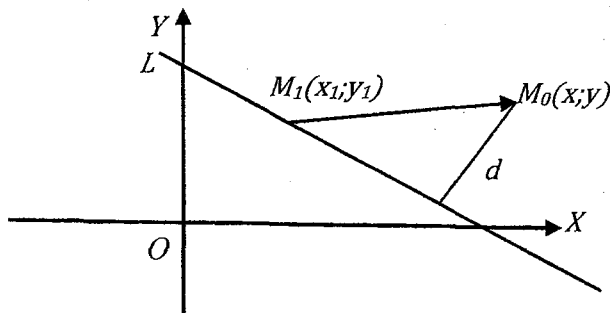


Рис. 7

§3. Кривые второго порядка

Уравнение вида $Ax^2+Bxу+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ называется уравнением второй степени.

Линия, уравнением которой является данное уравнение, называется линией (кривой) второго порядка.

Докажем, что окружность, эллипс, гипербола и парабола являются кривыми второго порядка. Для этого выведем сначала простейшие уравнения этих линий.

Окружность

Определение 1. Множество точек плоскости, равноудаленных от заданной точки этой же плоскости, называется окружностью.

Заданная точка называется центром окружности, а расстояние от любой точки на окружности до центра называется радиусом (рис. 1).

Вывод уравнения окружности.

Рассмотрим в заданной системе координат точку $C(a;b)$ – центр окружности, r – радиус окружности, переменную точку (текущую точку) $M(x;y)$, которая лежит на данной окружности.

Расстояние между центром окружности и текущей точкой на окружности равно

$$CM = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}.$$

Это расстояние равно радиусу окружности:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \quad (1)$$

Возводим в квадрат уравнение (1) и приходим к каноническому уравнению окружности

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2. \quad (2)$$

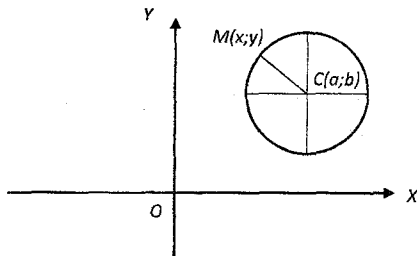


Рис.1

Если центр окружности совпадает с началом координат, то уравнение (2) принимает вид

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

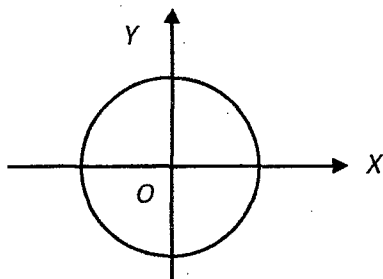


Рис. 2

Эллипс

Определение 2. Эллипсом называется множество точек плоскости, сумма расстояний от которых до двух других фиксированных (заданных) точек плоскости — постоянная величина.

Эти фиксированные точки F_1 и F_2 называются фокусами эллипса (рис. 3). Если фокусы совпадают, эллипс превращается в окружность.

Рассмотрим на плоскости две точки F_1 и F_2 . Пусть расстояние между этими точками равно $2c$: $|F_1F_2| = 2c$. Выберём число a так, чтобы $a > c$.

Множество точек M плоскости, для которых выполняется равенство

$$|MF_1| + |MF_2| = 2a \quad (3)$$

по определению является эллипсом.

Прямая, проходящая через точки F_1 , F_2 , называется фокальной осью эллипса. Отрезки F_1M и F_2M (и их длины) называются фокальными радиусами точки M .

Эллипс представляет собой выпуклую замкнутую линию (овал), симметричную относительно фокальной оси и относительно прямой, ортогональной фокальной оси и проходящей через середину отрезка F_1F_2 (рис.3).

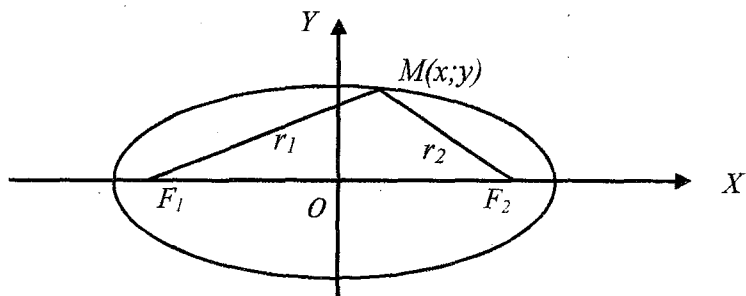


Рис. 3

Вывод уравнения эллипса

Построим декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало совпадало с серединой отрезка $F_1 F_2$, а ось абсцисс совпала с фокальной осью. Возьмем на эллипсе произвольную (текущую) точку $M(x; y)$. Обозначим через r_1 и r_2 фокальные радиусы точки M . Точка M принадлежит эллипсу, поэтому справедливо равенство

$$r_1 + r_2 = 2a. \quad (4)$$

Выразим фокальные радиусы через координаты точки M :

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (5)$$

и подставим их в уравнение (4):

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \quad (6)$$

Перенесем один из корней в правую часть уравнения (**уединим корень**), затем возведем уравнение в квадрат и приведем подобные члены. В результате получим уравнение

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \quad (7)$$

Возведем уравнение (7) в квадрат и приведем подобные одночлены:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \quad (8)$$

Для эллипса всегда справедливо неравенство $a > c$, поэтому можно упростить полученное уравнение. Введем новый параметр b . Пусть $b^2 = a^2 - c^2$; тогда уравнение преобразуется к виду

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

Последнее уравнение делим на a^2b^2 и приходим к уравнению:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (9)$$

Полученное уравнение называется **простейшим каноническим уравнением эллипса**. Оно содержит переменные только с четными степенями. Этому алгебраическому свойству геометрически соответствует симметрия эллипса относительно оси X и оси Y (рис. 4).

Отрезки $AA_1 = 2a$ и $BB_1 = 2b$ называются осями эллипса, поэтому параметры a и b — полуоси эллипса. Точка пересечения осей эллипса называется **центром эллипса**. Точки пересечения эллипса с ее осями называются **вершинами эллипса**.

Если фокусы эллипса расположены на оси X , то $a > b$. Отрезок a называется в этом случае **большой полуосью**. Если фокусы эллипса расположены на оси Y , то $b > a$; отрезок b называется **большой полуосью** (рис. 4).

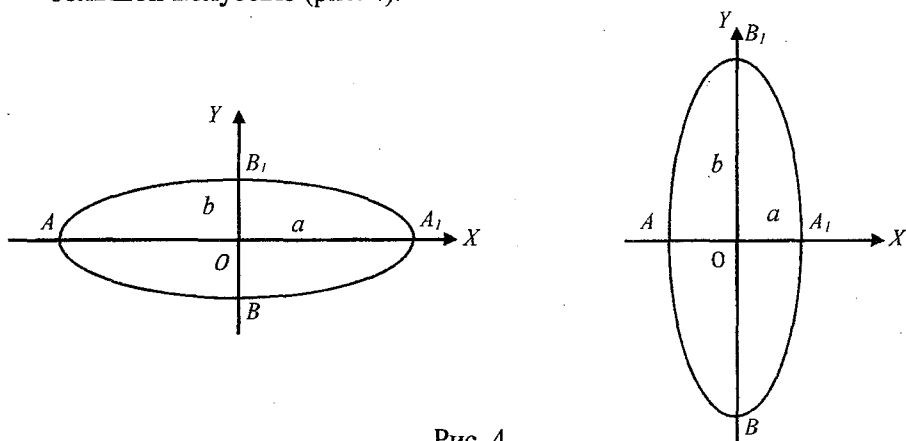


Рис. 4

Гипербола

Определение 3. Гиперболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых модуль разности расстояний до двух других фиксированных точек плоскости – постоянная величина.

Фиксированные точки называются фокусами гиперболы.

Рассмотрим на плоскости две точки F_1 и F_2 . Пусть расстояние между этими точками равно $2c$: $|F_1F_2| = 2c$. Выберем число так, чтобы $a < c$.

Множество точек M плоскости, для которых выполняется равенство

$$\left| MF_1 \right| - \left| MF_2 \right| = 2a \quad (10)$$

по определению является гиперболой.

Прямая, проходящая через точки F_1, F_2 , называется фокальной осью гиперболы. Отрезки F_1M и F_2M (и их длины) называются фокальными радиусами точки M .

Вывод уравнения гиперболы.

Построим декартову прямоугольную систему координат так, чтобы ее начало совпало с серединой отрезка F_1F_2 , ось абсцисс совпадала с фокальной осью. Возьмем на гиперболе произвольную (текущую) точку $M(x,y)$ (рис. 5). Обозначим через r_1 и r_2 фокальные радиусы точки M . Точка M принадлежит гиперболе, поэтому справедливо равенство (10).

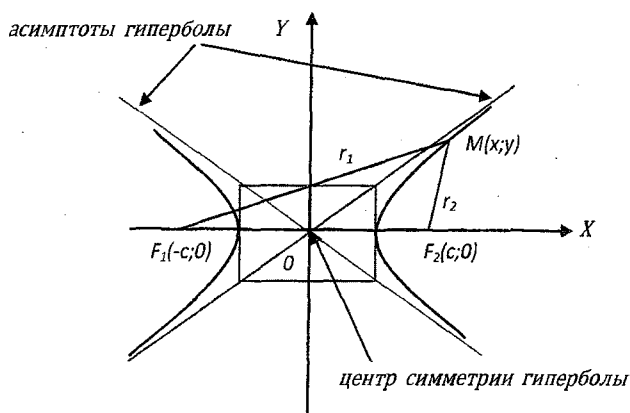


Рис. 5

Подставим выражения фокальных радиусов (5) в равенство (10):

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \right| = 2a. \quad (11)$$

Запишем уравнение (11) в виде:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \pm 2a. \quad (12)$$

После возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых приходим к уравнению

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - xc.$$

Возведем еще раз в квадрат последнее уравнение и преобразуем его к виду

$$(c^2 - a^2) \cdot x^2 - a^2 y^2 = a^2 (c^2 - a^2). \quad (13)$$

Для гиперболы всегда справедливо неравенство $a < c$, поэтому можно упростить полученное уравнение. Введем параметр b . Пусть $b^2 = c^2 - a^2$. Тогда уравнение (13) имеет вид:

$$b^2 x^2 - a^2 y^2 = a^2 b^2.$$

После деления последнего уравнения на $a^2 b^2$, оно преобразуется к виду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (14)$$

Уравнение (14) называется **простейшим каноническим уравнением гиперболы**.

Параметры a и b называются полуосями гиперболы. Если $a=b$, гипербола называется **равносторонней**.

Рассмотрим некоторые свойства гиперболы, уравнением которой является уравнение (14).

1. Гипербола пересекает ось X в точках $A(-a; 0)$ и $A_1(a; 0)$ которые называются вершинами гиперболы. Ось Y не пересекает гиперболу. Координатные оси являются осями симметрии гиперболы. Одна ось симметрии, на которой находятся фокусы, называется действительной осью, другая ось называется мнимой осью. Начало системы координат является центром симметрии гиперболы и называется **центром гиперболы**.

2. Перепишем уравнение гиперболы (14) в виде $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} + 1$.

Из этого уравнения следует, что $x^2 \geq a^2$, то есть либо $x \leq -a$, либо $x \geq a$ ($|x| \geq a$). Геометрически эти неравенства означают, что между прямыми $x = -a$ и $x = a$ нет точек гиперболы.

3. Рассмотрим совместно гиперболу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и прямую $y = kx$.

Поставим вопрос о пересечении гиперболы с прямыми вида $y = kx$.

Для этого составим систему

$$\begin{cases} y = kx \\ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему методом подстановки, приходим к равенству

$$x^2 = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2 k^2}.$$

Из этого равенства следует, что прямая $y = kx$ пересекает гиперболу только в том случае, когда $b^2 - a^2 k^2 > 0$. Это неравенство эквивалентно (равносильно) неравенству

$$-\frac{b}{a} < k < \frac{b}{a} \Rightarrow -\frac{b}{a} < \operatorname{tg} \alpha < \frac{b}{a},$$

где α — угол наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс.

Геометрически эти неравенства означают, что все точки гиперболы расположены внутри пары вертикальных углов, образованных прямыми $y = \pm \frac{b}{a} x$. Фокусы гиперболы расположены

внутри этой пары вертикальных углов (рис. 6).

4. Из третьего свойства вытекает, что гипербола состоит из двух ветвей. Очевидно, что эти ветви симметричны относительно центра симметрии и осей симметрии гиперболы. Прямые

$y = -\frac{b}{a} x$ и $y = \frac{b}{a} x$ называются **асимптотами гиперболы**.

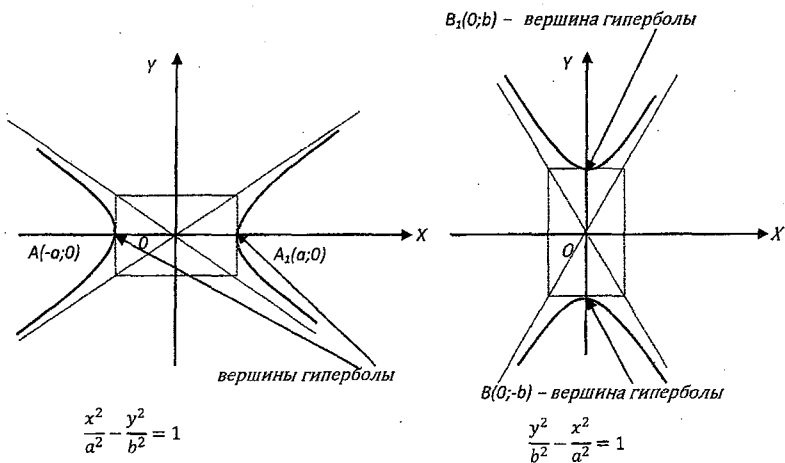


Рис. 6

Парабола.

Определение 4. Параболой называется геометрическое место точек плоскости, для которых расстояние до некоторой фиксированной точки этой же плоскости равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой плоскости. Фиксированная точка называется **фокусом**, а фиксированная прямая называется **директрисой**. Предполагается, что директриса не проходит через фокус.

Расстояние от произвольной точки параболы до фокуса называется **фокальным радиусом** этой точки. Расстояние от фокуса до директрисы называется **параметром параболы** и обозначается буквой p .

Вывод уравнения параболы

Пусть F – фокус параболы, точка A – проекция фокуса на директрису d , тогда параметр параболы $p = |AF|$. Прямая AF является осью симметрии параболы. Построим прямоугольную декартову систему координат (рис. 7). Начало координат (точка O) проходит через середину отрезка AF . В этой системе координат уравнение

директрисы: $x + \frac{p}{2} = 0$. Координаты фокуса: $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, координаты проекции фокуса на директрису: $A\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$. Возьмем произ-

вольную точку $M(x; y)$ (текущую точку) на параболе и выразим ее фокальный радиус через координаты этой точки:

$$|MF| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}.$$

Расстояние между точкой M и директрисой равно $\left|x + \frac{p}{2}\right|$. По определению параболы

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \quad (15)$$

После возведения в квадрат и приведения подобных слагаемых уравнение (15) преобразуется к виду

$$y^2 = 2px. \quad (16)$$

Полученное уравнение называется **простейшим каноническим уравнением параболы**.

Перечислим свойства параболы, уравнением которой является уравнение (16).

1. Все точки параболы принадлежат полуплоскости $x \geq 0$.
2. Если точка принадлежит параболе, то и точка $M_1(x; -y)$ тоже принадлежит параболе. Из этого свойства следует, что ось абсцисс – ось симметрии параболы. Точка пересечения этой оси с параболой называется **вершиной параболы**.
3. Любая прямая, отличная от оси симметрии и проходящая через вершину параболы (точка O), пересекает параболу в двух точках.

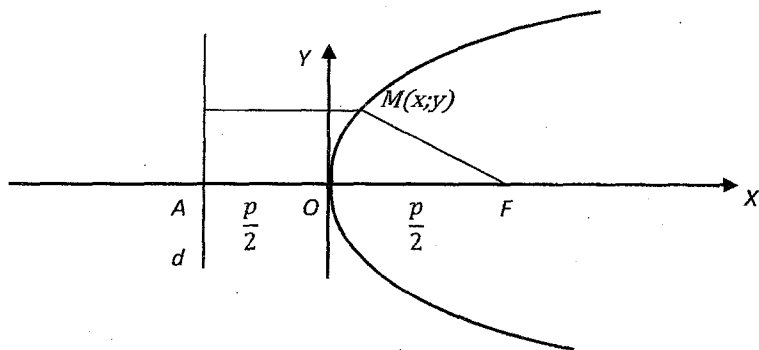


Рис. 7

§4. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Рассмотрим два частных случая уравнения второй степени.

1. Предположим, что уравнение второй степени имеет вид:

$$(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0. \quad (1)$$

Разложим левую часть уравнения (1) на множители. После этого приходим к двум уравнениям прямых:

$$\begin{aligned} y &= x - x_0 + y_0, \\ y &= -x + x_0 + y_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Из аналитического вида уравнений (2) очевидно, что прямые взаимно перпендикулярны, а точка $M(x_0; y_0)$ является точкой пересечения этих прямых.

2. Рассмотрим второй частный вид уравнения второй степени

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0. \quad (3)$$

Этому уравнению удовлетворяет только одна точка плоскости — эта точка N с координатами $(x_0; y_0)$.

Если на плоскости с заданной системой координат рассматривать окружность с центром в точке с координатами $(x_0; y_0)$ и радиусом R (рис. 1), то уравнение такой окружности имеет вид

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (4)$$

Уравнение эллипса с координатами центра $(x_0; y_0)$, с осями параллельными координатным осям, с заданными длинами полуосей a и b (рис. 1) имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \quad (5)$$

Уравнение гиперболы с координатами центра $(x_0; y_0)$, с осями параллельными координатным осям, с заданными длинами полуосей a и b (рис. 1) имеет вид

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad (7)$$

либо

$$\frac{(y - y_0)^2}{b^2} - \frac{(x - x_0)^2}{a^2} = 1. \quad (8)$$

Уравнение параболы с координатами вершины (x_0, y_0) , с осью параллельной оси абсцисс (рис. 1) имеет вид

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0) \quad (9)$$

или

$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0), \quad (10)$$

ось параболы в этом случае параллельна оси ординат.

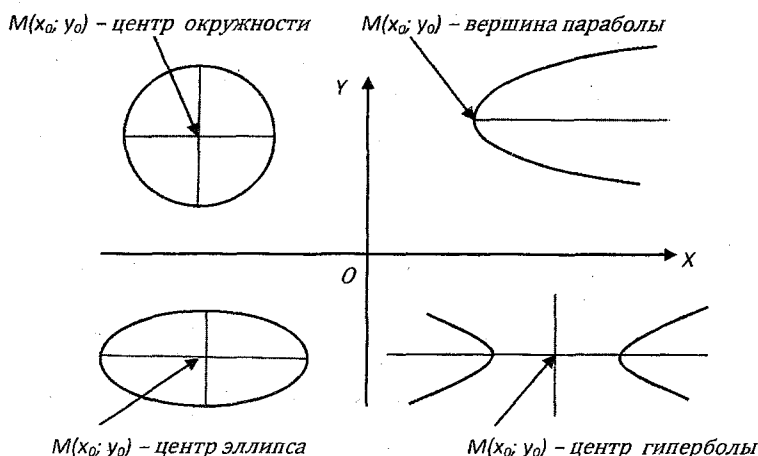


Рис. 1

Рассмотрим теперь общее уравнение линии второго порядка в некоторой декартовой прямоугольной правосторонней системе координат. Обычно в аналитической геометрии такие уравнения удобнее записывать в виде

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0. \quad (11)$$

Можно доказать, что всегда существует угол α , с помощью которого строится новая система координат, в которой уравнение (11) преобразуется к одному из канонических уравнений второй степени (таб.1).

Канонические уравнения кривых второго порядка

№	Аналитический вид уравнения	Название уравнения
1	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$	Уравнение окружности
2	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	Уравнение эллипса
3	$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$	Уравнение гиперболы
4	$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$	Уравнение параболы
5	$(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 = 0$	Уравнение двух прямых
6	$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = 0$	Уравнение точки

Таб. 1

Процесс построения новой декартовой системы координат, в которой уравнение (11) превращается в одно из шести канонических уравнений, называется **приведением уравнения второго порядка к каноническому виду**.

Пример. Приведем к каноническому виду уравнение

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 - 46x - 28y + 17 = 0. \quad (12)$$

Будем искать новую систему координат $X'Y'$, которая отличается от старой только поворотом на некоторый угол. Для этого используем известные формулы из §1:

$$\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases} \quad (13)$$

Для перехода к новой системе координат заменим переменные в уравнении (12) на правые части системы (13) и приведем подобные члены относительно новых переменных. В результате получим уравнение

$$(x')^2 \cdot (8 + 6 \sin 2\alpha + 9 \cos^2 \alpha) + (y')^2 \cdot (9 \sin^2 \alpha - 6 \sin 2\alpha + 8) + x'y'(12 \cos 2\alpha - 9 \sin 2\alpha) + x'(-46 \cos \alpha - 28 \sin \alpha) + y'(46 \sin \alpha - 28 \cos \alpha) + 17 = 0. \quad (14)$$

В канонических уравнениях (таб. 1) нет слагаемых с произведением двух **различных** переменных, поэтому будем искать угол α , при котором коэффициент при $x'y'$ равен нулю, то есть выполняется равенство

$$12 \cos 2\alpha - 9 \sin 2\alpha = 0. \quad (15)$$

Полученное равенство является достаточно простым тригонометрическим уравнением.

Решим это уравнение:

$$12 \cos^2 \alpha - 12 \sin^2 \alpha - 18 \sin \alpha \cos \alpha = 0,$$

$$2 \operatorname{tg}^2 \alpha + 3 \operatorname{tg} \alpha - 2 = 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \text{ или } \operatorname{tg} \alpha = -2.$$

Возьмем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2}$, так как это решение соответствует повороту координатных осей на острый угол α . Вычислим $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$:

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{5}}. \quad (16)$$

Используем равенства (16) для вычисления коэффициентов при новых переменных. В результате приходим к уравнению

$$(x')^2 \cdot 20 + (y')^2 \cdot 5 - \frac{120}{\sqrt{5}} x' - \frac{10}{\sqrt{5}} y' + 17 = 0. \quad (17)$$

Далее выделим полный квадрат для каждой из переменных:

$$20 \cdot \left((x')^2 - \frac{120}{20\sqrt{5}} x' \right) = 20 \left((x')^2 - 2x' \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{9}{5} - \frac{9}{5} \right) = 20 \left(x' - \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2 - 36,$$

$$5 \cdot \left((y')^2 - \frac{2}{\sqrt{5}} y' \right) = 5 \left((y')^2 - 2y' \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \right) = 5 \left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 - 1.$$

Используем полученные двучлены для упрощения уравнения (17):

$$20 \left(x' - \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2 + 5 \left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 = 20.$$

Делим последнее уравнение на 20 и приходим к каноническому уравнению эллипса:

$$\frac{\left(x' - \frac{3}{\sqrt{5}} \right)^2}{1^2} + \frac{\left(y' - \frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2}{2^2} = 1.$$

Координаты центра эллипса в новой системе координат $X'Y'$ равны $\left(\frac{3}{\sqrt{5}}; \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$, полуось $a=1$, полуось $b=2$.

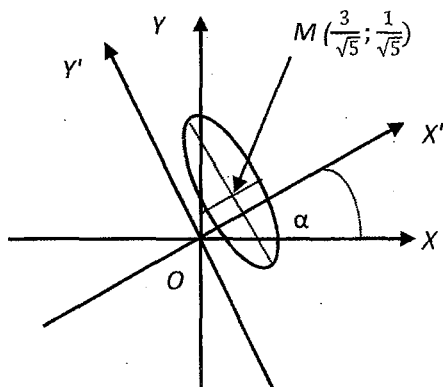


Рис. 2

§ 5. Инварианты уравнения второй степени

При переходе от одной системы прямоугольных координат к другой уравнение второго порядка

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$$

преобразуется в уравнение

$$A'x'^2 + 2B'x'y' + C'y'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0.$$

В общем случае одноименные коэффициенты в этих уравнениях могут быть не равны друг другу: $A \neq A'$, $B \neq B'$, $C \neq C'$, $D \neq D'$, $E \neq E'$, $F \neq F'$. Однако для каждого уравнения второго порядка существуют несколько **инвариантов** – выражений, которые не изменяются в процессе преобразования координат.

Первый инвариант это сумма коэффициентов $A+C$.

Второй инвариант $\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$

При любом преобразовании координат (§ 1)

$$A + C = A' + C';$$

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & C' \end{vmatrix}.$$

Можно доказать, что для эллипса инвариант $\delta > 0$, для гиперболы $\delta < 0$, для параболы $\delta = 0$. Поэтому алгебраические уравнения второго порядка можно разбить на три типа (вида) в зависимости от знака δ .

1. Эллиптический тип, если $\delta > 0$.
2. Гиперболический тип, если $\delta < 0$.
3. Параболический тип, если $\delta = 0$.

§6. Примеры

Пример 1. Построить в декартовой прямоугольной системе координат эллипс

$$4x^2 + 5y^2 = 20.$$

Решение. Приведем исходное уравнение к каноническому виду:

$$\frac{4x^2}{20} + \frac{5y^2}{20} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Из аналитического вида последнего уравнения следует, что

$a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$ — большая полуось эллипса;

$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2$ — малая полуось эллипса.

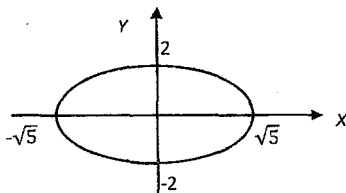


Рис. 1

Пример 2. Какую линию определяет уравнение $x^2 - 4x + y = 5$?

Решение. Выделим полный квадрат в левой части уравнения:

$$x^2 - 4x + 4 - 4 + y = 5 \Rightarrow (x - 2)^2 + y - 9 = 0 \Rightarrow y - 9 = -(x - 2)^2.$$

Последнее уравнение является каноническим уравнением параболы с вершиной в точке $V(2; 9)$. Знак перед квадратом отрицательный, поэтому ветви параболы направлены вниз.

Пример 3. Установите вид кривой второго порядка, заданной уравнением:

$$x^2 - y^2 + 2x - 4y - 3 = 0.$$

Решение. Выделяем полные квадраты в левой части уравнения:

$$x^2 + 2x + 1 - 1 - (y^2 + 4y + 4) + 4 - 3 = 0,$$

$$(x + 1)^2 - (y + 2)^2 = 0 \Rightarrow (x + 1 - y - 2) \cdot (x + 1 + y + 2) = 0.$$

Приравняем к нулю каждый из множителей последнего уравнения:

$$x - y - 1 = 0,$$

$$x + y + 3 = 0.$$

В результате мы получаем линейные уравнения двух пересекающихся и взаимно перпендикулярных прямых, следовательно, исходное уравнение второго порядка определяет эту же пару взаимно перпендикулярных, пересекающихся прямых.

§7. Упражнения

1. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку $A(-2; -3)$.

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2; 5)$ и отсекающей на оси ординат отрезок $b=7$.

3. Составить уравнения прямых, проходящих через точку $M(-3; -4)$ и параллельных осям координат.

4. Определить острый угол между прямыми $y = -3x + 7$ и $y = 2x + 1$.

5. Показать, что прямые $4x - 6y + 7 = 0$ и $20x - 30y - 11 = 0$ параллельны.

6. Показать, что прямые $3x - 5y + 7 = 0$ и $10x + 6y - 3 = 0$ перпендикулярны.

7. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M(-1; 3)$ и $N(2; 5)$.

8. Показать, что прямые $3x - 2y + 1 = 0$ и $2x + 5y - 12 = 0$ пересекаются, и найти координаты точки пересечения.

9. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(2; 5)$ и параллельной прямой $3x + 4y + 2 = 0$.

Привести следующие уравнения второго порядка к каноническому виду, установить вид кривых и построить их графики:

10. $x^2 + 4y^2 + 8y + 3 = 0$;

11. $x^2 - 4y^2 + 8y + 5 = 0$;

12. $x^2 - y^2 - 6x + 10 = 0$;

13. $x^2 - 9y^2 + 2x + 36y = 0$;

14. $2x^2 - 4x + 2y - 3 = 0$.

Глава 4

Очерки по истории геометрии

§1. Геометрия, культура и традиции

Геометрия возникла из практических и духовных потребностей человека. В древней Греции уделялось большое внимание геометрии. Философ и математик Платон говорил, что геометрия есть познание всего сущего.

Геометрия – в переводе с греческого языка означает «землемерие».

Великий мыслитель древности Геродот считал, что началом египетской геометрии были измерения земельных участков, которые египтяне должны были делать из-за постоянных разливов реки Нил. Однако Аристотель называл методы измерения земли другим словом: «геодезия».

Фалес Милетский посетил Египет в VI веке до н. э. Он изучил там геометрию и передал свои знания Греции. На этой основе геометрия постепенно сформировалась как самостоятельная ветвь математики со стройной структурой доказательств.

Геометрия стала в те времена самой популярной математической наукой благодаря широчайшей области ее практических **приложений**.

Первый систематический курс геометрии, основанный на определениях и аксиомах, был составлен Гиппократом Хиосским (450 г. до н. э.). Этот курс назывался *Στοιχεῖον* (стихии, элементы).

В III веке до н. э. была издана знаменитая книга Евклида с тем же названием, которая постепенно вытеснила геометрию Гиппократа. На латинском языке работа Евклида называлась «Elementa», поэтому в русском переводе появился **устойчивый термин** «Элементарная геометрия».

Первой страной, в которой отошли от Евклидовых традиций изложения геометрии, стала Франция. С середины XVI века появилась серия учебников различных авторов. Немецкий художник Альберт Дюрер – автор первой «Геометрии» на немецком языке.

Великий итальянец Галилео Галилей считал, что сама природа говорит на языке математики, а пишет геометрическими фигурами.

В качестве примеров теснейшей связи между геометрией и природой можно рассмотреть симметрию и золотое сечение.

Симметрия

С глубокой древности человек замечал, что в природе существуют некоторые пространственные **закономерности** в расположении объектов. Рисунки, орнаменты, барельефы и постройки древнего мира показывают большой интерес человека к различным видам симметрии.

Термин «симметрия» произошел от греческого слова, которое означает соразмерность, гармонию. Понятие симметрии часто использовали философы Древней Греции.

Древним философам мы **обязаны** не только развитием понятия «симметрия» как пространственной закономерности, но и **перенесением** этого понятия в другие области. Например, у великого Аристотеля симметрия означала «среднюю меру», к которой должен стремиться в своих действиях **добродетельный человек**. Римский врач Гален (II век) в трактате «**Темперамент**» под симметрией понимал **состояние духа**, одинаково далекое от обеих **крайностей**, от **горя и радости** или **апатии и возбуждения**. Дюрер считал, что **прекрасное** всегда пропорционально и симметрично.

К началу XVII века в науке и искусстве слово симметрия означало **простоту, совершенство и гармонию**.

К началу нашей эры слово симметрия стало выражать вид **согласованности** отдельных частей, которые объединяются в **единое целое**.

Золотое сечение

Среди различных геометрических средних **уникальными** свойствами обладает одно, делящее данный отрезок a на две части x и $a - x$ в геометрической пропорции. Это означает, что отношение целого отрезка a к его большей части равняется отношению большей части x к меньшей $a - x$:

$$a : x = x : (a - x). \quad (1)$$

Эта геометрическая пропорция приводит к уравнению:

$$x^2 + ax - a^2 = 0. \quad (2)$$

Полученное уравнение имеет один положительный корень:

$$x = a \cdot \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

Если рассматривать отрезок единичной длины, то уравнение

(2) будет иметь вид

$$x^2+x-1=0.$$

Положительный корень этого уравнения равен

$$x = \Phi = (\sqrt{5}+1)/2=1.6180339... \quad (3)$$

Такая пропорция была известна еще пифагорейцам. В эпоху Возрождения Леонардо да Винчи назвал её золотым сечением. Золотое сечение встречается не только в геометрии, но и в природе и в искусстве. Его широко используют в архитектуре, скульптуре, живописи, музыке.

Греческие вазы имеют обычно очень красивую форму. Анализ их размеров привел к интересной закономерности. Большинство таких ваз вписываются в прямоугольник с отношением сторон, равным золотому сечению, где $x = \Phi$ или $x = 2\Phi - 1$.

Золотое сечение присутствует в геометрических фигурах, имеющих ось симметрии пятого порядка – пятиконечной звезде и пятиугольнике, в формах цветов, морских звезд, ежей и в формах многих других живых объектов. Эту интересную геометрическую закономерность описал Лука Пачоли в своей книге «О божественной пропорции», вышедшей в 1509 г. Книгу иллюстрировал его друг Леонардо да Винчи.

В 1855 году немецкий ученый Цейзинг в работе «**Эстетические исследования**» показал, что золотое сечение близко к отношению высоты человека к расстоянию между его **пупком** и **подошвами** ног. Сразу после рождения человека, это отношение равно двум. С **возрастом** оно уменьшается и примерно к 21 году становится равным 1,625. Эта величина очень близка числу Φ .

Опыты известного немецкого психолога Фехнера доказали, что среди различных отношений человек обычно выбирает золотое сечение. В 1876 году он показал множеству людей различные прямоугольники и просил выбрать из них тот, который больше всего нравится своей формой. Большинство выбрало прямоугольник с отношением сторон, равным отношению золотого сечения.

Удивительна связь между золотым сечением и законами расположения листьев растений, геометрией живых организмов и пропорцией тела человека. Эта связь не случайна.

Однако **причины** таких связей пока неизвестны.

Некоторые геометрические фигуры играли символическую роль в культурных традициях разных народов.

Треугольник.

В христианстве треугольник – символ всевидящего ока Бога (глаз Бога, который все видит).

В Индии треугольник считался первой космической фигурой, возникающей из **хаоса**.

В традициях народов западной Европы тройка в треугольнике – символ Абсолюта, пифагорейский знак здоровья.

Треугольник вершиной вниз – вода, женский принцип, а также Луна в египетском иероглифе.

Треугольник вершиной вверх – мужской принцип, огонь, небесные силы.

Треугольник в квадрате – Божественное и человеческое, духовное и телесное.

Треугольник в круге – троичность в едином (триединство).

В современном мире треугольник стал обозначать опасные места, такие, как Бермудский треугольник, где **бесследно** исчезают корабли и самолеты.

Круг

Символ единства и бесконечности. Знак абсолюта и совершенства.

Круг – противоположность квадрату. Круг представляет небо, а квадрат – землю. Движение по кругу означает постоянное возвращение к самому себе. Во всех культурах символизирует солнечный диск. Например, у славян блины во время масленицы олицетворяют Солнце.

В Египте круг с точкой в центре был символом человека.

Окружность как бесконечная линия символизирует время в вечности.

§2. Школа Пифагора

Правильные фигуры и тела

В школе Пифагора геометрия оформилась в самостоятельную научную дисциплину. Пифагор и его ученики первыми стали изучать геометрию систематически — как теоретическое учение о свойствах абстрактных геометрических фигур, а не как сборник прикладных **рецептов** по земледелию. Размеры геометрических фигур устанавливались не путем измерений, а с помощью логических доказательств.

Пифагорейцы объясняют источник широкого распространения геометрии некоторой случайностью. Один из пифагорейцев потерял деньги **общины**. После этого несчастья община позволила ему зарабатывать деньги геометрией. В то время были популярны софисты — странствующие учителя **мудрости**. Вполне возможно, что пифагорейцы пополняли свою казну преподаванием.

До нашего времени не дошло содержание первого греческого учебника геометрии, который назывался «Предания Пифагора». Сохранились только фрагменты из математических сочинений о геометрии греческого математика середины V века до н. э. Гиппократы с ионийского острова Хиос. Благодаря Гиппократу Хиоскому известно, что пифагорейцы изучили свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов, трапеций. Результаты пифагорейской геометрии составили основу 10-ой книги «Начал» Евклида, которая завершается теоремой Пифагора.

Пифагорейцы очень интересовались правильными фигурами и телами. Правильные геометрические формы благодаря их зеркальной и поворотной симметрии соответствовали пифагорейской философии о гармоничном устройстве окружающего мира (мироздания). Им удалось доказать, что плоскость можно полностью (без дырок и наложений) **покрыть** правильными многоугольниками только трех видов: треугольниками, квадратами, шестиугольниками (рис.1).

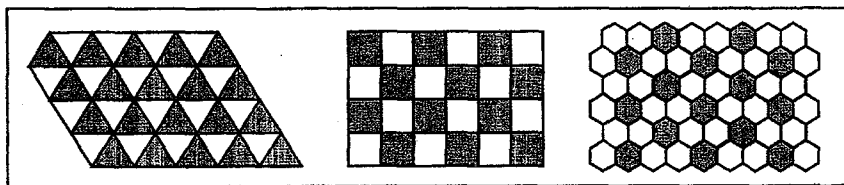


Рис.1.

Особый интерес представляет построение правильного пятиугольника – главного символа пифагорейцев. Известно, что пифагорейцы образовывали его из трех равнобедренных треугольников.

Решением задачи построения правильного пятиугольника с помощью циркуля и линейки занимался древнегреческий математик Птолемей (150 г.). Через полтора тысячелетия в 1525 году Альбрехт Дюрер (1471 – 1528) в книге «Руководство к измерению при помощи циркуля и линейки» показал способ построения правильного пятиугольника по заданной стороне с помощью циркуля. Этот способ, к сожалению, оказался приближенным.

Лишь в 1796 году молодой немецкий математик Карл Фридрих Гаусс в 19 лет решил общую задачу построения правильного n -угольника с помощью циркуля и линейки. Он доказал, что эта задача **равносильна** задаче деления окружности на n равных частей и связана с нахождением корней уравнения $x^n = 1$.

Гаусс доказал, что правильный n -угольник может быть построен с помощью циркуля и линейки **только в том случае**, когда показатель n в уравнении – число вида

$$n = n_0^{\delta_1} \cdot n_1^{\delta_2} \cdot \dots \cdot n_k^{\delta_k} \cdot 2^m \quad (\delta_i = 0 \text{ или } 1; m = 0, 1, 2, \dots), \text{ где}$$

$$n_k = 2^{2^k} + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Итак, правильный многоугольник можно построить циркулем и линейкой, если

$$n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, \dots;$$

нельзя, когда

$$n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, \dots$$

В **круг** интересов пифагорейцев входили правильные тела – правильные многогранники. Их всего пять (таб. 1)

<i>Правильный многогранник</i>	<i>Число граней</i>	<i>Число вершин</i>	<i>Число рёбер</i>	<i>Вид грани</i>	<i>Число граней при вершине</i>
<i>Тетраэдр</i>	4 (<i>тетра</i>)	4	6		3
<i>Октаэдр</i>	8 (<i>окто</i>)	6	12		4
<i>Икосаэдр</i>	20 (<i>икоси</i>)	12	30		5
<i>Гексаэдр</i>	6 (<i>гекса</i>)	8	12		3
<i>Додекаэдр</i>	12 (<i>додека</i>)	20	30		3

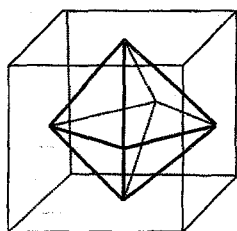
Таб. 1

В природе можно встретить фигуры правильной формы. Например, кристаллы поваренной соли имеют форму куба, кристаллы квасцов — октаэдра, а кристаллы пирита — додекаэдра. Пифагорейцы заметили много интересного в правильных фигурах.

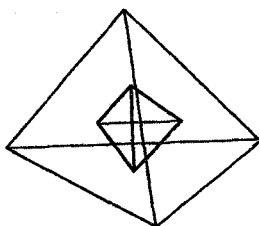
Например, они считали куб (гексаэдр) гармоническим телом, поскольку (так как) число его вершин есть среднее гармоническое числа граней и числа рёбер. Кроме того, куб — единственный из правильных тел, которым можно полностью заполнить трехмерное пространство.

Во времена Евклида было замечено, что куб и октаэдр, додекаэдр и икосаэдр дуальны (двойственны). Это означает, что число граней одного тела равно числу вершин другого и наоборот.

В этом случае одно тело может быть получено из другого, если **центры тяжести** граней одного принять (взять) за вершины другого (рис. 2).



Октаэдр в кубе



Тетраэдр в тетраэдре

Рис. 2

Важнейшее свойство многогранников было установлено лишь в середине XVIII века Эйлером. Он доказал, что в любом выпуклом многограннике сумма числа вершин L и числа граней M минус число его ребер N является постоянной величиной, равной двум:

$$L + M - N = 2.$$

Существует всего пять правильных тел. Доказательство этого удивительного факта представлено в XIII книге «Начал» Евклида.

Пентаграмма

Главным пифагорейским символом была пентаграмма, или пифагорейская звезда, — звездчатый пятиугольник, образованный диагоналями правильного пятиугольника. Нарисованная пентаграмма была тайным знаком, по которому пифагорейцы узнавали друг друга.

Пентаграмма обладает замечательными свойствами. Она содержит все пропорции, известные пифагорейцам: арифметическую ($a - b = c - d$), геометрическую ($a : b = c : d$), гармоническую

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) \text{ и золотую } (a : x = x : (a - x)).$$

Пентаграмма пропорциональна и, значит, красива (рис. 3).

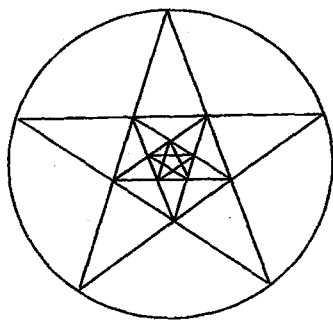


Рис. 3

Звездчатый пятиугольник обладает поворотной симметрией пятого порядка. Именно такой вид симметрии наиболее распространен в живой природе (цветы незабудки, гвоздики, колокольчика, вишни, яблони, малины, рябины и т. д.). Поворотная симметрия пятого порядка невозможна в кристаллических решетках неживой природы. Поэтому симметрию пятого порядка называют симметрией жизни. К геометрической красоте пятиконечной звезды добавилась числовая мистика. Число $5=2+3$ было для пифагорейцев числом любви как сумма первого женского (2) и первого мужского (3) чисел. Благодаря таким свойствам пентаграмма и была выбрана пифагорейцами в качестве символа жизни и здоровья. Поэтому **не случайно**, что и в наше время пятиконечная звезда есть на флагах очень многих государств. Но первыми превратили пятиконечную звезду в символ именно пифагорейцы.

Открытие несоизмеримости

Открытие несоизмеримости является самым большим достижением пифагорейской школы и важнейшим этапом в развитии всей математики. Это открытие можно сравнить с открытием дифференциального и интегрального исчисления или с созданием теории относительности.

Проблема несоизмеримости была широко известна с античных времен. Представим здесь, в качестве примера, доказательство несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной.

Теорема. Сторона AB и диагональ AC квадрата несоизмеримы, т. е. их отношение $AC:AB$ не выражается отношением целых чисел.

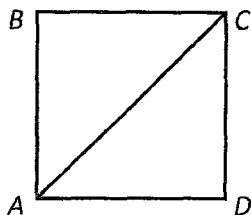


Рис. 4

Доказательство. Допустим **противное**. Пусть AC и AB соизмеримы, т.е. их отношение равно отношению целых чисел:

$$AC : AB = m:n, \quad (1)$$

причем числа m и n одновременно не являются четными, иначе дробь можно было бы сократить на 2. Возведем в квадрат равенство (1):

$$AC^2 : AB^2 = m^2:n^2.$$

По теореме Пифагора

$$AC^2 = 2AB^2 \Rightarrow AC^2/AB^2 = 2 \Rightarrow m^2/n^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2.$$

Из последнего равенства следует, что число m^2 четно. Поскольку произведение двух четных чисел четно, а произведение двух нечетных чисел нечетно, то мы приходим к выводу, что число m четно: $m^2 = 2k$, следовательно

$$m^2 = 4k^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2.$$

Из последнего равенства следует, что число n четное число. Итак, m и n четные числа, что **противоречит** допущению о несократимости дроби на число 2. Следовательно, отношение длины диагонали квадрата к длине его стороны не может быть выражено отношением целых чисел. **Теорема доказана.**

По легенде несоизмеримость открыл сам Пифагор, и открытие долго держалось в тайне, так как оно противоречило философской системе пифагорейцев. Они знали только целые числа и их отношения, поэтому были уверены, что весь окружающий мир можно описать с помощью таких чисел. Пифагорейцы пытались преодолеть **кризис**, связанный с открытием несоизмеримости. Они стали изучать эти «неразумные» величины, которые теперь называют иррациональными числами (от латинского слова *irrationalis* – неразумный).

Открытие несоизмеримости стало первым теоретическим результатом, который невозможно получить с помощью опыта. Это открытие противоречило практике. В жизни все величины соизмеримы в пределах точности измерительного инструмента.

Пифагорейцы пришли к выводу, что геометрические объекты имеют более общую природу, чем рациональные числа. В итоге они попытались построить всю математику на основе только геометрии. Для этого числа представлялись отрезками и площадями. Алгебраические операции **интерпретировались** геометрически. Геометрически решались даже уравнения. Таким образом, в пифагорейской математической школе на первое место вышла геометрия.

Открытие несоизмеримости стало первым **камнем в фундаменте** современного математического анализа.

Доказательство в геометрии

Пифагор первый ввел систематические доказательства в математику, и **прежде всего** в геометрию. Он первым пришел к мысли, что в геометрии должны рассматриваться идеальные объекты: точки – «то, что не имеет частей», линии – «длина без ширины», поверхности – «то, что имеет только длину и ширину». Свойства этих идеальных объектов должны изучаться с помощью рассуждений, справедливых для бесконечного числа объектов одинакового вида. Цепь рассуждений, которая приводит **неочевидные** утверждения к **очевидным** истинам, рассматривалась как математическое доказательство.

Пифагор превратил математику из собрания эмпирических рецептов в самостоятельную **дедуктивную** науку.

К методу доказательства относится аксиоматический метод. Его сущность состоит в выделении конечного набора

недоказуемых первоначальных истин — аксиом, из которых с помощью доказательств выводятся все остальные математические истины — теоремы. Идея аксиоматического метода родилась в школе Пифагора, а затем была развита в «Началах» Евклида, а еще через два тысячелетия — в «Математических началах натуральной философии» Ньютона.

Теорема Пифагора и пифагоровы тройки

Теорема Пифагора. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

Эта теорема широко применяется в геометрии с давних времен. Результат теоремы прост, но сама теорема не очевидна. Существует около 500 (пятисот) различных доказательств этой теоремы, среди которых есть древнекитайское, древнеиндийское, доказательство Евклида.

Результат этой теоремы был обнаружен в древних папирусах (около 2000 лет до н. э.) и в древнейших китайских трактатах (XII век д. н. э.). Теорема Пифагора была **начертана** на глиняных вавилонских табличках более чем за 1000 лет до рождения Пифагора.

Открытие теоремы Пифагором **окружено легендами**. По одной из них Пифагор в честь доказательства **принес в жертву быка**. По другой легенде — 100 быков. Эти легенды сохранились, несмотря на то, что по своему уставу пифагорейцы не должны были приносить такие жертвы.

Вопреки тому, что доказательство самого Пифагора не сохранилось, а содержание теоремы было известно **задолго до** рождения самого Пифагора, предложение «квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов», во всем мире и давно называют теоремой Пифагора.

Изучение свойств натуральных чисел привело пифагорейцев к интересной задаче: найти натуральные числа x , y , z , для которых справедливо (выполняется соотношение)

$$x^2 + y^2 = z^2. \quad (2)$$

В наше время эта задача называется задачей Пифагора, а ее решения называются пифагорейскими тройками. Этой зада-

че можно дать геометрическую **формулировку**: найти все прямоугольные треугольники с **целочисленными** (длина равна целому числу) катетами и целочисленной гипотенузой.

В древнем Египте существовала особая профессия «**натягивателей веревок**». Во время **торжественных церемоний закладки храмов** и пирамид люди этой профессии размечали прямые углы с помощью веревки, имеющей **12** ($12=3+4+5$) **равноотстоящих узлов**. Поэтому прямоугольный треугольник с отношением сторон 3: 4: 5 называется египетским треугольником.

Отдельные **частные решения** этой задачи были известны еще в древнем Вавилоне до Пифагора. Общая постановка и первые решения уравнения (2) были сделаны Пифагором и Платоном. Пифагор доказал, что решением уравнения (2) являются числа вида

$$\begin{cases} x = 2m + 1, \\ y = 2m^2 + 2m, \\ z = 2m^2 + 2m + 1, \quad m = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Платон – автор другого решения уравнения (2):

$$\begin{cases} x = 2n, \\ y = n^2 - 1, \\ z = n^2 + 1, \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{cases}$$

Искать следует только примитивные пифагоровы тройки (x, y, z) , для которых

$$\text{НОД}(x, y, z) = 1,$$

поскольку для любого натурального числа $k > 1$ тройка чисел (kx, ky, kz) также будет пифагоровой тройкой.

Справедливо утверждение общего вида.

Теорема. Если p и q – взаимно простые числа разной четности ($p > q$), то все примитивные пифагоровы тройки находятся по формулам

$$\begin{cases} x = 2pq, \\ y = p^2 - q^2, \\ z = p^2 + q^2. \end{cases}$$

Эта теорема была доказана и хорошо известна еще в античную эпоху. Она есть в «Началах» Евклида.

§3. Три классические задачи древности

В V веке д. н. э. появились задачи, которые никак не удавалось решить с помощью циркуля и линейки. Это три знаменитые классические задачи древности, которые сыграли огромную роль в истории математики и были полностью решены только через два с половиной тысячелетия в XIX веке. Названия и постановки этих задач таковы:

1. Удвоение куба. Построить с помощью циркуля и линейки куб, объем которого в два раза больше объема данного куба.

2. Трисекция угла. Разделить с помощью циркуля и линейки угол на три равные части.

3. Квадратура круга. Построить с помощью циркуля и линейки квадрат, равновеликий (равный по площади) данному кругу.

Поток «решений» этих задач рос с такой быстротой, что с 1775 г. Парижская Академия наук, а затем и другие академии стали отказываться от рассмотрения этих «решений».

Задачу об удвоении куба называют еще делосской проблемой. С ней связана такая легенда. Однажды на острове Делос вспыхнула **эпидемия чумы**. Испуганные жители острова **обратились за советом** к Дельфийскому **оракулу (жрецу)**, который сказал, что нужно **удвоить** золотой **жертвенник**, который имел форму куба. Жители Делоса отлили еще один куб и поставили его на первый. Однако чума не унималась (не прекращалась). Они опять спросили жреца. Жрец ответил, что люди не решили поставленной задачи. Новый жертвенник имел вдвое больший объем, но не имел формы куба.

Жители Делоса не нашли нужного решения и обратились к Платону, но великий философ ответил: «Боги недовольны вами за то, что вы мало занимаетесь геометрией». Платон сам не знал решения задачи, которую позже **приблизительно решил** его друг Архит

Архит (около 428–365 до н.э.) – яркая личность в античной истории: математик, механик, философ, музыкант, полководец, политический деятель. Он был последним пифагорейцем.

Однажды он с помощью дипломатии освободил из плена великого философа Платона. Самой яркой страницей в научной биографии Архита является решение делосской проблемы. Это решение было громоздко, сложно и приближенно.

Если ребро данного куба равно a , а ребро искомого куба – x , то задача об удвоении куба приводит к уравнению

$$x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = a \cdot \sqrt[3]{2}.$$

Сегодня такую задачу решит школьник, но школьник не сможет построить с помощью циркуля и линейки куб со стороной

$$a\sqrt[3]{2}.$$

Французский математик Ванцель в 1837 г. доказал, что невозможно точно разделить с помощью циркуля и линейки произвольный угол на три равные части.

Решение задачи о квадратуре круга связано с числом π . Первая попытка точно определить число π была сделана в X веке до н.э. Анаксагором. Интересно отметить, что этой математической проблемой Анаксагор занимался в тюрьме, где он сидел за то, что считал Солнце раскаленным шаром.

В течение многих столетий одни математики пытались решить эту задачу, другие считали, что эта задача не может быть решена, например, Леонардо да Винчи, Ньютон, Эйлер.

Только в XIX веке было установлено, что число π является **трансцендентным числом**. Этот факт доказывал невозможность точного построения квадрата равного по площади заданному кругу.

§4. Неевклидова геометрия

Геометрия, разработанная древними греками – геометрия Евклида. Она основывалась на пяти аксиомах (**постулатах**):

1. Между любыми двумя точками можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно неограниченно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра любым раствором может быть описан круг.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где сумма меньше двух прямых.

Пятый постулат отличается сложной **формулировкой и неочевидностью**. Поэтому многие математики рассматривали ее как теорему и пытались доказать.

Янош Бояи

Доказательством пятого постулата занимался венгерский математик Фархаш Бояи. Когда в 1820 г. его сын Янош Бояи стал работать над этой же проблемой, отец написал сыну: «Ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий. Я знаю этот путь. Прошу тебя, оставь в покое учение о параллельных линиях; оно лишит тебя здоровья, лишит радости не только в геометрии, но и во всей земной жизни». Однако сын продолжал заниматься теорией параллельных прямых.

В 1832 г. отец опубликовал работу сына в приложении к своему учебнику. Поэтому эта работа вошла в историю математики под названием *«Appendix»*. Янош послал *«Appendix»* на отзыв великому Гауссу – старому другу отца. Гаусс ответил, что ничего нового для себя он не нашел, и результаты Яноша совпадают с результатами, которые получил сам Гаусс еще тридцать лет тому

назад. Просто Гаусс решил при жизни не публиковать такие **парадоксальные** результаты.

Ответ Гаусса стал **страшным ударом** для Яноша. Он больше не публиковал никаких работ по неевклидовой геометрии.

В 1829 г. русский математик Николай Иванович Лобачевский опубликовал работу, в которой древняя проблема пятого постулата получила новое решение. Лобачевский **утверждал**, что пятый постулат доказать нельзя, и если принять, что сумма углов треугольника меньше двух прямых углов, то можно построить новую геометрию, **отличную от** геометрии Евклида. Лобачевский построил такую геометрию. Аксиомы новой геометрии необычны. Вот некоторые из них:

1. В пространстве существует абсолютная единица длины, равная k .

2. Существует треугольник наибольшей площади, его площадь равна πk^2 .

3. Не существует подобных фигур, в частности — подобных треугольников.

4. Если разные треугольники с тремя равными сторонами не равны между собой, то их углы не равны.

5. Чем больше треугольник, тем меньше сумма его углов.

6. Для прямоугольных треугольников не справедлива теорема Пифагора.

Различие между геометрией Лобачевского и Евклида обнаруживается лишь на расстояниях, больших по сравнению с абсолютной единицей длины k .

С помощью астрономических наблюдений Лобачевский доказал, что постоянная k , если она существует, очень велика. Она не может быть меньше, чем сто тысяч диаметров земной **орбиты**. **Таким образом**, для практических целей можно пользоваться и геометрией Евклида и геометрией Лобачевского.

Николай Иванович Лобачевский

Основатель новой геометрии Николай Иванович Лобачевский родился в 1792 г. в Нижнем Новгороде в семье землемера. Он рано остался без отца, поэтому в семье было тяжелое материальное положение. Но благодаря своим блестящим способностям Лобачевский учился за государственный счет, окончил с отличием Казанский университет, а через пять лет стал его профессором. В 1827 г. его избрали ректором университета. На этом посту он проработал до 1846 г.

В 1829 г. в «Казанском вестнике» была опубликована работа Лобачевского «О началах геометрии». В 1832 г. Лобачевский **послал** свою работу на **отзыв** знаменитому русскому математику М.В.Остроградскому и получил отрицательный отзыв. Несмотря на это, Лобачевский упорно **пропагандировал и защищал** новую геометрию. В 1837 г. во Франции публикуется его работа «Воображаемая геометрия», в Германии выходит его книга «Геометрические исследования».

В 1855 г. больной и ослепший Лобачевский диктует свой последний труд – «Пангеометрия». В следующем году эта работа вышла во Франции.

Янош Бояи познакомился с работами Лобачевского в 1848 г. Сохранились записи, из которых видно, что Бояи изучил их, но Лобачевскому он ничего не написал. Лобачевский, скорее всего, не знал «Appendix». К сожалению, пути этих двух творцов неевклидовой геометрии не пересеклись.

Карл Фридрих Гаусс

Удивительно драматическую роль в открытии неевклидовой геометрии сыграл великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс (1777 – 1855).

Гаусс родился в семье мастера-водопроводчика в маленьком немецком герцогстве Брауншвейг. Блестящие математические способности он проявил с раннего детства. Гаусс учился в Геттингенском университете и первое выдающееся открытие опубликовал в студенческие годы. Он доказал, что циркулем и линейкой можно построить правильный семнадцатиугольник.

Это открытие оставалось всю жизнь любимой работой Гаусса. Он завещал изобразить на надгробном памятнике вписанный в круг правильный семнадцатиугольник.

Всемирную славу Гауссу принесла работа по определению орбиты планеты по малому числу **наблюдений**. Эта работа появилась благодаря **астрономии**.

Первого января 1801 года итальянский астроном Пиацци случайно открыл новую планету. Из-за плохой погоды ему удалось наблюдать ее только девятнадцать раз, а потом планету найти не удалось. Астроном сделал слишком мало наблюдений для того, чтобы правильно рассчитать орбиту новой планеты, а без знания орбиты невозможно вновь увидеть ее на **небосклоне**. Ряд математиков и астрономов **безуспешно** пытались вычислить эту орбиту.

Успех пришел только к Гауссу. Для этого он разработал новый способ вычисления орбиты, а затем предсказал положение новой планеты, которую потом называли Церерой. Эта планета вновь появилась 31 декабря 1801 г. на том месте, которое предсказал Гаусс.

С юных лет Гаусс интересовался пятым постулатом Евклида, пытался его доказать. Обсуждал свои идеи в письмах к друзьям. Из писем ясно, что Гаусс сам открыл основные идеи неевклидовой геометрии. Но он ничего не публиковал и письма просил никому не показывать. Почему Гаусс не опубликовал своих работ по неевклидовой геометрии? Точного ответа на этот вопрос нет.

Известно, что Гаусс читал работы Лобачевского. Он даже изучал русский язык, чтобы читать Лобачевского в **оригинале**. В письмах к друзьям Гаусс хвалил Лобачевского, собирался написать ему в Россию письмо, но так и не написал.

Бернгард Риман

Большой вклад в развитие неевклидовой геометрии внес немецкий математик Бернгард Риман (1826 – 1866).

Риман родился в Ганновере, в бедной пасторской семье, учился в Геттингенском и Берлинском университетах. Риман хотел стать преподавателем университета. Для этого он должен был прочитать пробную лекцию перед профессорами университета, среди которых был Гаусс. Тема лекции: «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии». Эта знаменитая лекция состоялась 10 июня 1854 г., а опубликована только через двенадцать лет. Из **содержания** лекции видно, что Риман не знал работ Лобачевского, Бояи и Гаусса и **самостоятельно пришел к мысли** о построении неевклидовых геометрий. Он предложил пятый постулат Евклида

заменить допущением: «сумма углов треугольника больше двух прямых». Эту геометрию в наше время называют геометрией Римана.

Геометрия Римана отвергает не только пятый постулат Евклида. Первый постулат Евклида заменяется на новый: «существуют точки, между которыми можно провести **бесчисленное множество** прямых, **не совпадающих** между собой».

На основе новых постулатов в геометрии Римана можно доказать ряд удивительных теорем. Перечислим некоторые из них:

1. Параллельных прямых не существует. Любые две прямые пересекаются в двух точках, расстояние между которыми конечно.

2. Не существует подобных фигур. Если у двух треугольников не равны стороны, то не равны и углы.

3. Теорема Пифагора не справедлива. Квадрат гипотенузы меньше суммы квадратов катетов.

4. Сумма углов треугольника равна $\pi + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$; сумма углов тем больше, чем больше площадь треугольника.

5. Существует треугольник наибольшей площади.

Риман доказал, что если в пространстве существует постоянная отрицательная кривизна, то в таком пространстве справедлива геометрия Лобачевского. Если кривизна равна нулю – справедлива геометрия Евклида. При постоянной положительной кривизне в пространстве справедлива геометрия Римана.

Неевклидовы геометрии долго считались **невероятным вымыслом**. Такое отношение связано со свойствами евклидовой геометрии. Она прекрасно подходит для описания твердых тел и объяснения простейших оптических явлений. В ее основе лежит опыт многих поколений.

Аксиомы Евклида – изложение знаний о пространстве, полученных с помощью зрения и **осознания**.

Но в XX веке общая теория относительности подтвердила идеи Римана в области неевклидовой геометрии.

Заключение

Из всех математических наук именно геометрия теснейшим образом связана с пространством. Проблемы пространства связывают между собой геометрию, естественные науки и философию. Давно известно, что свойства макромира — от молекул до галактик и вселенной связаны с геометрией.

Краткие очерки по истории геометрии хочется закончить словами Сократа: «То, что я понял, прекрасно, из этого я заключаю, что остальное, чего я пока не понял, тоже прекрасно».

*Процветание и совершенствование
математики тесно связано
с благосостоянием государства.
Наполеон.*

Глава 5

Петербургская математическая школа

§ 1. Петр I и математика

До Петра I специального математического образования и науки в России фактически не было. Именно благодаря Петру в России началось систематическое математическое образование, а затем и наука. При его участии в России были организованы первые государственные школы, математика в которых была на первом месте.

Для широкого просвещения России Петр пытался использовать научно-образовательные достижения стран Западной Европы. При Петре поощрялась учеба за границей, **не редко** юношей даже **заставляли** уезжать на учебу. Но в те времена немногие русские юноши хотели получить образование за границей.

Петр I провел большую работу по организации выпуска учебников, в которых были представлены различные разделы математики. Сначала такие книги начали печатать в Амстердаме. Но в России эти книги плохо покупали.

К концу XVII века Петр I организует государственное руководство профессиональными школами. В начале XVIII века создаются математико-навигационная, инженерная, артиллерийская школы, горное училище. В основу образования в этих учебных заведениях было заложено математическое образование.

Есть две причины такого большого внимания к математике со стороны Петра. Прежде всего, сам Петр с юности **увлекался** математикой и постепенно освоил ее в достаточно хорошем объеме. Он хорошо знал те разделы математики, которыми пользовались инженеры высокой квалификации, архитекторы и навигаторы, принимал участие в издании математических книг.

Второй причиной, благодаря которой Петр понял важнейшую роль математики, было личное знакомство Петра со знаменитым немецким математиком Котфридом Вильгельмом Лейбницем. Петр вел постоянную переписку с Лейбницем. Великий математик предлагал царю системную организацию народного образования. Лейбниц был уверен, что именно с помощью школьного образования можно преобразовать мир к лучшему.

В 1714 г. по указу Петра во многих городах были образованы «цифирные» школы. Цифирью в те времена называли то, что мы сейчас называем элементарной математикой. В этих школах преподавали выпускники математико-навигационной школы. Математика с тех пор стала основным предметом во всех школах России первой четверти XVIII в.

Значительный вклад в математическое образование внесли представители «ученой дружины» Петра: А.Д. Фарварсон, Феофан Прокопович, Яков Брюс, Л.Ф. Магницкий.

В 1698 году Петр I познакомился в Англии с английским математиком Фарварсоном, который в это время преподавал математику в одном из университетов Англии. Он принял приглашение Петра и стал работать в математико-навигационной школе. Под его редакцией были переведены и изданы некоторые книги «Начал» Евклида.

Феофан Прокопович – выдающийся деятель просвещения и культуры России и Украины: математик, педагог, писатель, государственный деятель. На собственные средства он учредил одну из первых в России частных школ. Математика в этой школе была основным предметом.

Курс лекций по математике Феофана Прокоповича отличался высоким теоретическим уровнем, поэтому его можно считать первым преподавателем математики Российской высшей школы.

Яков Брюс – ближайший сподвижник Петра I в деле образования и культуры. Благодаря обширным математическим познаниям он перевел на русский язык учебные руководства по геометрии. В 1708 году был издан учебник по геометрии, автором которого был Я. Брюс. Текст этого учебника редактировал сам Петр I.

Первая русская математическая школа зародилась в математико-навигационной школе. Сначала учителями в ней были только иностранцы, которые проводили занятия по математике

на английском языке, русского языка они не знали. Ученики ничего не понимали, так как не знали английского. Тогда руководство школы пригласило преподавать математику **талантливого** педагога, математика Леонтия Филипповича Магницкого, которого хорошо знал Петр I.

Леонтий Филиппович Магницкий получил образование в Московской славяно-греко-латинской академии. Там он изучил латинский и греческий языки и самостоятельно голландский, немецкий и итальянский, а затем математику по европейской учебной литературе. Он хорошо знал достижения западноевропейских математиков.

В 1702 г. Л.Ф. Магницкий в кратчайший срок написал уникальный по своим качествам учебник по математике под названием «Арифметика». Этот учебник издавался и переиздавался с января 1703 г. в течение 50-ти лет. Книга была очень популярна и не имела конкурентов.

Михаил Васильевич Ломоносов высоко ценил эту книгу, знал наизусть и называл ее «вратами учёности».

В книге представлена арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, сведения о метеорологии, астрономии, навигации. Этот учебник был в те времена энциклопедией математических знаний, имел прикладную направленность. Изложение материала носило гуманитарный характер. В ней уделено внимание истории, философии, даны советы читателю. Часто различные разделы учебника изложены в стихотворной форме.

Книга прекрасно оформлена, содержит много красочных картинок. Этот учебник стал выдающимся литературным памятником петровской эпохи и сыграл важную роль в математическом образовании России.

§ 2. Создание Петербургской Академии наук

Первая четверть XVIII века – время развития математического образования в России, которое стало базой для начала развития математической науки в России.

Г.В. Лейбниц и другие видные ученые Западной Европы советовали Петру заняться организацией Академии наук. История организации Академии наук связана с перепиской Петра со знаменитым немецким профессором математики Христианом Воль-

фом, будущим учителем М.В. Ломоносова.

В 20-х годах XVIII века в немецких газетах появилось сообщение, что изобретателю Орфиреусу удалось построить вечный двигатель. Петр I очень захотел приобрести двигатель и написал об этом Вольфу. На вопросы о вечном двигателе Вольф ответил, что это изобретение в руки математиков не попало, поэтому уверенности в его вечности нет.

Царь **пригласил** Вольфа приехать в Россию на любых условиях, лишь бы он взялся за изучение изобретенного вечного двигателя. Но Вольф ответил, что для России важнее заняться распространением научных знаний. Для этого не нужны знаменитые ученые, достаточно пригласить из Европы молодых начинающих ученых.

В итоге Петр решил организовать не только Академию, но и университет с гимназией при Академии. 22 января 1724 г. в Зимнем дворце состоялось заседание Сената, на котором обсуждался проект основания Академии, а 28 января Сенат издал указ о создании Академии.

Академия состояла из трех классов, одним из которых был математический. Математический класс делился на четыре кафедры: одна кафедра математики, вторая астрономии, географии, навигации, две кафедры механики.

Петр I, к сожалению, не дожил до торжественного открытия Академии наук, университета и гимназии.

Образование Российской Академии наук совпало с периодом расцвета математики в Европе. **При участии** Вольфа в Россию приехали семь математиков. Это были представители самой знаменитой в то время европейской математической школы братьев Бернулли: Я. Герман, Николай и Даниил Бернулли – сыновья Иоганна Бернулли и Христиан Гольдбах.

В 1727 по совету братьев Бернулли и по приглашению Академии наук в Петербург приехал молодой швейцарский математик Леонард Эйлер.

Приглашенные профессора должны были следить за научной литературой, давать справки о новых открытиях, каждую неделю участвовать в заседаниях, разрабатывать учебные курсы на латинском языке для академического университета и читать ежедневно одну часовую публичную лекцию. Однако слушателей в университете не было.

Пришлось пригласить из Западной Европы восемь слушателей (студентов). Профессора тоже ходили друг к другу на лекции. Россия еще была далека от науки. Не было в русском языке слов «студент» и «наука». Для гимназии набирали детей солдат, крепостных и мастеровых. Но гимназия давала очень мало хорошо подготовленных выпускников для учебы в университете. Поэтому студентов брали из славяно-греко-латинской Академии. Таким образом в Петербургский университет попал М. Ломоносов.

В 1783 году Академический университет пришлось временно **закрыть**, так как в университете было только два студента.

§ 3. Леонард Эйлер

XVIII век в науке часто называют веком Эйлера (1707 – 1783), настолько велик вклад этого ученого в развитие математики и механики.

Леонард Эйлер родился в швейцарском городе Базеле в семье пастора. Отец мечтал, чтобы сын стал священником, но с раннего детства любил заниматься с сыном математикой, превращая эти занятия в игру. В 13 лет Эйлер стал студентом философского факультета университета в Базеле, а в 17 лет ему присвоили степень магистра искусств за доклад о сравнении философских взглядов Ньютона и Декарта. Большую роль в судьбе Эйлера сыграло знакомство с семьей математиков Бернулли.

Эйлер приехал в Петербург в 1727 г. в день смерти Екатерины I. Без ее покровительства Академия быстро пришла в **упадок**, поэтому многие академики уезжали на родину. Этот **негативный** процесс **способствовал** быстрому профессиональному росту Эйлера. В 1729 г. он занял **освободившееся** место профессора. Через год возглавил кафедру математики, а когда в 1733 году Даниил Бернулли возвратился в Швейцарию, Эйлер в возрасте двадцати шести лет стал ведущим математиком Академии.

У Эйлера была прекрасная память, и в первый же год он научился хорошо говорить, а затем и писать на русском языке. Эйлер отличался **феноменальной (уникальной) трудоспособностью** и постоянным стремлением к математическому творчеству. Он внес существенный вклад в такие математические дисциплины как вариационное исчисление, обыкновенные дифференциальные уравнения, степенные ряды, специальные функции,

дифференциальная геометрия, теория чисел. Ввел двойные интегралы, уделял большое внимание прикладным вопросам математики, заложил основы математической физики. Эйлер написал учебники для университетов по высшей математике «Введение в вычисление бесконечно малых», двухтомник «Дифференциальное исчисление» и трехтомник «Интегральное исчисление».

За 13 лет в академических изданиях было напечатано около 70 его научных работ. Благодаря Эйлеру Петербургская Академия стала одним из крупнейших научных математических центров Европы.

В 1741 году Эйлер уехал из России в Германию, так как после кончины императрицы Анны материальное положение Академии стало совсем плохим. В Германии он стал руководителем Берлинской Академии.

Тем временем в России начинает **править** Екатерина II. Она очень высоко ценила Эйлера и настойчиво приглашала его вернуться в Петербургскую Академию наук, обещала выполнить все требования ученого.

Материальное положение Эйлера в Германии не было **устойчивым**, так как начиналась семилетняя война. В 1766 году Эйлер **окончательно** вернулся в Россию.

В одном из писем Екатерина пишет: «Я уверена, что моя Академия **возродится из пепла** от такого важного **приобретения**, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека».

Эйлер прожил в России 31 год. Из 26 томов, выпущенных Академией за это время, более половины написаны Эйлером. Список трудов Эйлера содержит около 850 **наименований**. При жизни Эйлера было опубликовано около 550. Петербургская Академия наук в течение 47 лет публиковала рукописи Эйлера.

С 1909 г. и до настоящего времени в Швейцарии издается полное собрание его сочинений, рассчитанное на 72 тома. Частично опубликована его научная переписка.

Огромное **разнообразие** больших проблем было поставлено математической науке в XVII-XVIII веках. Эти проблемы невозможно было решить в рамках математики прежних веков. Поэтому появились понятия функции, производной, интеграла. Благодаря Ньютону и Лейбницу был создан математический аппарат для изучения технических и природных явлений.

Оказалось, что законы движения тел могут быть с высокой степенью точности записаны в виде дифференциальных уравнений, уравнений, которые связывают искомые функции с их производными. Механика, физика и другие науки требовали от математики нахождения способов решения таких уравнений. Эйлер сделал очень многое для развития теории дифференциальных уравнений. Приемы и методы решения уравнений, предложенные Эйлером, до сих пор излагаются во всех учебниках по теории дифференциальных уравнений.

Много интересных результатов получил Эйлер в теории чисел. Известно более 100 его научных работ, посвященных этому разделу математики. Рассмотрим один из них.

С давних времен математиков волновал вопрос о расположении простых чисел в множестве натуральных чисел. Ученые пытались найти формулы, которые давали бы только простые числа. Эйлер вывел большое количество формул в виде многочленов, которые в определенном диапазоне решали эту проблему.

Приведем три примера.

1. Многочлен $2x^2 + 29$ дает 29 простых чисел, если вместо x подставлять числа

0, 1, 2, ..., 28.

2. Многочлен $x^2 + x + 41$ дает 40 простых чисел, если вместо x подставлять числа

0, 1, 2, ..., 39.

3. Многочлен $x^2 - 79 + 1001$ дает 80 простых чисел, если вместо x подставлять числа

0, 1, 2, ..., 79.

Эйлер доказал, что ни один многочлен относительно x с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

не может для всех целых значений x равняться некоторым простым числам.

Интересы Эйлера были обширны и разнообразны. Кроме науки его увлекала техника, религия, музыка. Он был прекрасным педагогом. Сразу после 1-го приезда в Россию стал одним из первых преподавателей математики в академической гимназии.

Эйлер первым в Российском школьном образовании стал давать логические обоснования различным математическим правилам. Он уделял большое внимание проблемам математического образования в России. Эйлер высоко ценил французскую школу учебной математической литературы и считал, что преподавать математику надо, сочетая научность изложения с простотой. Благодаря Эйлеру математическое образование в России очень быстро (по историческим меркам) приблизилось к европейскому уровню.

Эйлер написал учебник алгебры, который стал прообразом всех последующих учебников до начала XX века. Двухтомное «Полное введение в алгебру» Эйлер написал на немецком языке. Русский перевод этой книги вышел под названием «Универсальная арифметика». Интересный отбор (подбор) материала и доступный язык изложения сделали это пособие одним из самых популярных для своего времени.

Эйлер задумал «Универсальную арифметику» как книгу, по которой читатель мог бы самостоятельно изучить основы алгебры.

Существует легенда-быль, что сделать это ему удалось в процессе написания книги. **Ослепший** Эйлер диктовал эту книгу мальчику-слуге, который до этого был портным и **не имел понятия о математике**. В процессе работы над книгой мальчик не только понял все, что диктовал ему великий слепой, но в скором времени сам сделал все самые трудные вычисления и решил все задачи из этой книги.

«Полное введение в алгебру» несколько раз переиздавалось на немецком языке, в русском, французском, английском и голландском переводах.

До Эйлера понятие логарифма трактовалось (излагалось) совершенно неудовлетворительно (плохо) даже такими учеными, как Лейбниц, Иоганн Бернулли, Даламбер. Поэтому учение о логарифмах Эйлер изложил в своей книге **заново**. Логарифм он определяет как показатель степени выбранного основания. Большое внимание Эйлер уделил процессу логарифмирования. **Общепризнанно (бесспорно)**, что учение о логарифмах – одна из лучших частей этой книги.

По поручению Петербургской Академии наук Эйлер написал интересную методическую работу «Руководство к арифметике». Эта книга сыграла большую роль в создании более поздних русских учебников по математике.

Эйлер создал современную теорию тригонометрии. Разработал не только те разделы, которые относятся к высшей математике, но и те, которые изучаются в школе. До Эйлера тригонометрические функции не рассматривались как функции числового аргумента. Не было ясности в знаках тригонометрических величин, не было единых обозначений. Большинство теорем доказывалось на основе наглядных соображений.

Эйлер впервые вводит круг единичного радиуса, что упрощает все формулы; решает вопрос о знаках тригонометрических функций; выводит формулы приведения; упрощает все записи, вводя **единообразные** обозначения; вводит понятие тригонометрических функций; систематизирует формульную тригонометрию.

В течение почти трёх столетий школьная математика в России строилась по идеям Эйлера.

Известный русский математик Б.И. Делоне писал, что нет ученого, имя которого упоминалось бы в учебной математической литературе так же часто, как имя Эйлера. Несколько десятков формул, уравнений и интегралов носят имя Эйлера. Много доказанных им теорем и разработанных методов решения различных задач давно используют, не связывая с именем Эйлера.

Эйлер оказал огромное влияние на дальнейшее развитие различных математических наук. Выдающийся французский ученый Лаплас говорил молодым математикам: «Читайте Эйлера, он наш общий учитель».

Интересную роль сыграла Россия в жизни другого западноевропейского ученого, короля математики, Гаусса.

Не смотря на все его великие открытия в математике, Гаусс работал только приват-доцентом Геттингенского университета. Петербургская Академия наук очень высоко ценила труды Гаусса, поэтому пригласила его в Россию. Только тогда герцог Брауншвейгский испугался потерять Гаусса и назначил ему достаточно высокое **жалованье**. Он стал профессором и директором астрономической обсерватории. После этого Гаусс **отказался от** переезда в Россию.

§ 4. Пафнутий Львович Чебышев

Пафнутий Львович Чебышев оставил глубокий след в истории математики. Многочисленные научные труды почти во всех областях математики создали П. Л. Чебышеву славу одного из величайших представителей математической науки 19 века. Чебышев был **основателем** российских научных школ по теории вероятностей, теории чисел, теории приближения функций, которые с успехом продолжают работу в наши дни.

Родился П.Л.Чебышев 26 мая 1821 г. в маленьком селе Окаатово Калужской губернии. Получил домашнее образование. В 1832 г. семья Чебышевых переехала в Москву для подготовки своих детей к поступлению в университет.

В 16 лет Чебышев стал студентом Московского университета и уже через год был награжден медалью за математическое сочинение, тему которого предложил университет. После окончания университета он переехал в Петербург для работы в Петербургском университете.

Чебышев много времени отдавал педагогической и научной работе. Постепенно он создал свою научную школу. Основная черта этой школы – связь проблем математики с **принципиальными** вопросами естествознания и техники.

На своих лекциях Чебышев обычно рассказывал историю и научное значение изучаемого математического открытия, факта или положения. Он объяснял цель и ход нужных в лекции математических преобразований, а затем делал их молча и настолько подробно, что **следить** за преобразованиями на доске было очень легко.

Первые выдающиеся работы Чебышева относились к наиболее абстрактному разделу математики – теории чисел. Этой теме была посвящена его докторская диссертация, которую он защитил в 28 лет. В течение 50-ти лет студенты пользовались книгой Чебышева «Теория сравнений» как одним из самых лучших учебников по теории чисел.

Постепенно научные интересы Чебышева перешли в область механики. В 1852 году он уехал в заграничную командировку во Францию. Там он изучил конструкцию паровой машины, которая в те времена была основой передовой французской промышленности.

В паровых машинах тогда использовали шарнирные механизмы. Эти механизмы должны были обеспечить движение поршня, которое бы наименьшим образом отличалось от прямолинейного движения. Изучение поведения таких шарнирных механизмов привело Чебышева к созданию знаменитых полиномов, наименее уклоняющихся от нуля. Эти полиномы в тригонометрическом виде записываются в виде

$$T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos x); \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Эти полиномы потом называли полиномами Чебышева. В математическом мире они обозначаются всегда символом $T_n(x)$, поскольку фамилия Чебышев на французском языке пишется в виде *Tschebicheff*.

Полиномы Чебышева имеют много замечательных свойств. Отметим лишь некоторые из них.

1. Все корни любого многочлена Чебышева ненулевой степени действительны, различны и лежат на интервале $(-1, 1)$. Эти корни называют абсциссами (узлами) Чебышева и вычисляются по формуле

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \text{ для } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

2. Полином Чебышева на отрезке $[-1, 1]$, $(n > 0)$ имеет $n+1$ экстремальное значение. Модули всех этих экстремальных значений равны единице.

3. Очевидно, что $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$. Все полиномы Чебышева, начиная с третьего $T_3(x)$ легко построить по **рекуррентной формуле**

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad (1)$$

которую можно легко получить с помощью двух элементарных (школьных) формул:

$$\begin{aligned} \cos(n+1)x &= \cos nx \cos x - \sin nx \sin x, \\ \cos(n-1)x &= \cos nx \cos x + \sin nx \sin x. \end{aligned}$$

После сложения этих формул приходим к равенству:

$$\begin{aligned} \cos(n+1)x + \cos(n-1)x &= 2 \cos x \cos nx \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos(n+1)x &= 2 \cos x \cos nx - \cos(n-1)x. \end{aligned}$$

Переходя в последнем равенстве к классическим обозначениям полиномов Чебышева, получим рекуррентную формулу (1).

4. Многочлены с чётными номерами содержат только чётные степени, а многочлены с нечётными номерами содержат только нечетные степени. Из этого свойства следует, что многочлены Чебышева обладают свойством симметрии. Когда $k=2m$, $T_{2m}(x)$ – чётная функция, когда $k=2m+1$, $T_{2m+1}(x)$ – нечётная функция.

Для истории математики особенно интересно, что теория конструирования механизмов стала основой для создания нового раздела математики – теории наилучшего приближения функций многочленами.

Вопрос о вычислении значений функций для заданных значений аргумента встает при изучении различных процессов, связанных либо с изучением природных явлений, либо явлений, связанных с деятельностью человека. Точное вычисление значений функции может быть выполнено лишь для многочленов и отношений многочленов (дробно-рациональных функций). Поэтому в математике давно ставилась задача о замене вычисляемой функции близким к ней многочленом или отношением многочленов.

Большой интерес был к задаче построения **интерполяционных** многочленов, то есть к задаче нахождения многочлена n -ой степени, значения которого совпадают с известными значениями исходной функции. До Чебышева такие **интерполяционные** многочлены были созданы Ньютоном, Лагранжем, Гауссом и Бесселем. Построенные ими многочлены имеют два **существенных недостатка**.

1. Добавление одного или нескольких новых значений функции приводит к полному пересчету (надо считать все с начала).

2. Увеличение порядка интерполяционного многочлена **не гарантирует** увеличение точности в расчетах.

Аппроксимация (приближение) функций с помощью многочленов Чебышева не имеет таких **недостатков**.

Многие математические **открытия** П.Л.Чебышева связаны с **прикладными** работами. Чебышев считал, что большая часть вопросов практики сводится к задачам о нахождении наибольших и наименьших величин: «Как располагать своими средствами для достижения большей выгоды». Так, например, в работе «О построении географических карт» он определил (нашел) проекцию

карты Европейской части России, для которой **искажение масштаба** было минимальным.

Заслуги П.Л. Чебышева в области математики были **признаны** всем научным миром ещё при его жизни. Чебышев был избран иностранным членом Парижской Академии наук, Итальянской королевской Академии, Лондонского королевского общества, Шведской Академии наук.

П.Л. Чебышев оставил после себя много учеников, среди которых были такие известные математики как А. М. Ляпунов и А.А. Марков. Он является основателем российских научных школ по теории вероятностей, теории чисел, приближения функций. Эти научные школы с успехом продолжают работу в наше время.

§5. Андрей Андреевич Марков

Развитие классических работ П.Л.Чебышева по теории вероятностей продолжил его ученик А.А. Марков. Вся современная теория вероятностей связана с его именем.

А.А. Марков родился 14 июня 1856 г. в Рязанской губернии. Его отец сначала был диаконом, потом переехал в Петербург, получил юридическое образование и стал адвокатом.

Среднее образование Марков получил в гимназии. Все предметы, кроме математики, ему давались с большим трудом. Математика его увлекала настолько, что он уже в гимназии самостоятельно изучал высшую математику. В 18 лет Марков поступил в Петербургский университет, где в это время работал П.Л.Чебышев. Влияние Чебышева было решающим. Университет Марков окончил в 1878 г. с золотой медалью. После защиты магистерской диссертации остался преподавать в университете. В 1886 г. получил звание профессора.

Учебники, автором которых был Марков, написаны на таком высоком математическом и литературном уровне, что после их выпуска на русском языке книги были переведены и изданы в других странах. Его книги интересно читать и сегодня.

За первые восемь лет своей научной работы заслуги Маркова были настолько велики, что по предложению П.Л. Чебышева он стал членом Академии наук, а еще через 6 лет был избран академиком.

Научное творчество Маркова разнообразно. Первые годы он интересовался теорией чисел, дифференциальными уравнениями, теорией функций, позднее занялся целиком теорией вероятностей. Труды Маркова по теории вероятностей привели к коренному преобразованию этой науки и принесли ему всемирную известность не только среди математиков, но и среди физиков, техников, естествоиспытателей.

Первые работы Маркова по теории вероятностей были продолжением и завершением работ П.Л.Чебышева. Они связаны с доказательством закона больших чисел и с доказательством центральной предельной теоремы теории вероятностей.

Закон больших чисел состоит в следующем: среднее арифметическое очень большого числа случайных величин, которые принимают свои значения независимо друг от друга, с практической **достоверностью** равно постоянной величине.

Для понимания смысла этого закона приведем два примера.

1. Известно, что любое измерение всегда содержит погрешность. Поэтому при очень большом количестве **однотипных** измерений получается множество близких между собой, но не равных величин. Возникает вопрос: «Какое измерение считать истинным?». Закон больших чисел утверждает, что среднее арифметическое большого числа независимых измерений практически не будет отличаться от истинного значения измеренной величины.

2. Рассмотрим давление газа на стенки сосуда. Это давление — результат ударов о стенки отдельных молекул газа, которые движутся со случайными скоростями. Таким образом, давление на стенки сосуда должно колебаться, поскольку количество ударов и скорость ударов случайны. Но из опыта известно, что давление на стенки сосуда распределено равномерно. Возникает противоречие, которое устраняется законом больших чисел. Давление складывается из огромного количества ударов отдельных частиц, поэтому среднее арифметическое отдельных давлений, а значит и результирующее давление, с практической достоверностью является постоянной величиной.

Марков определил, при каких условиях справедлив закон больших чисел. Благодаря этому в естествознании и технике появилась возможность использовать этот фундаментальный закон.

Результаты отдельных измерений могут сильно отличаться от среднего значения.

Поэтому часто возникает вопрос: как часто случайная величина, которую мы измеряем, будет иметь некоторое определенное значение? Например, какая часть молекул газа, заключенного в сосуд, обладает данной скоростью?

Ответ на поставленный вопрос дает центральная предельная теорема теории вероятностей. Благодаря доказательству этой теоремы появились правильные прогнозы при изучении независимых случайных величин произвольной природы.

Второй период работы Маркова в области теории вероятностей связан с зависимыми случайными величинами. Такие случайные величины встречаются часто. Например, численности некоторых колоний бактерий за два близких момента времени являются зависимыми случайными величинами. Численность колонии в начальный момент влияет на ее дальнейшее развитие.

А.А. Марков создал новую математическую теорию для изучения таких случайных величин. Он исследовал с помощью теории вероятностей системы, в которых предыдущие состояния системы влияют на состояние системы в последующие моменты. Если вероятность перехода системы из одного произвольного состояния в другое зависит только от этих двух состояний и не зависит от предыдущей истории развития системы, то такие переходы Марков назвал простыми **цепями**. Если эти вероятности зависят от предыдущих состояний, то такие переходы он назвал сложными цепями.

Марков обнаружил, что основные теоремы, полученные для **системы** независимых случайных величин, могут быть доказаны и для сложных цепей. Во всем математическом мире такие цепи называют цепями Маркова. В качестве примера использования цепей, он исследовал зависимость в чередовании гласных и согласных в первых главах «Евгения Онегина».

Прошли годы, и цепи Маркова стали использовать во многих разделах физики, а в математике на этой основе создали новый раздел в теории вероятностей – теорию случайных процессов.

§6. Александр Михайлович Ляпунов

А.М. Ляпунов родился 25 мая 1857 году в городе Ярославле. Начальное образование он получил дома и в гимназию пошел сразу в третий класс. Гимназию окончил с золотой медалью и поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. В 1880 г. был награжден золотой медалью за сочинение, тема которого была предложена университетом.

В студенческие годы Ляпунов находился под большим влиянием Чебышева, слушал его лекции, пользовался его советами. Решал задачи, которые ставил перед ним Чебышев.

В 1884 г. Ляпунов защитил магистерскую диссертацию, после этого уехал работать в Харьковский университет. Первые два года ушли только на подготовку лекций. Но с 1888 года Ляпунов публикует серию научных работ, посвященных проблемам устойчивости движения.

Исследования Ляпунова фактически являлись готовой докторской диссертацией, но Ляпунов был очень **строг к себе**, отказался от защиты диссертации и продолжал свои исследования. Только в 1892 г. Ляпунов представил на защиту свою диссертацию «Общая задача устойчивости движения». Эта работа принесла Ляпунову всемирную известность. В 1901 г. он становится действительным членом Академии наук, возвращается в Петербург и занимается только научной работой.

Удивительно, но в области теории устойчивости движения у Ляпунова почти не было **предшественников**. Были только попытки у английских ученых Томсона и Тэта, у французского математика А. Пуанкаре и русского механика Жуковского. Общей теории не существовало. В настоящее время общую теорию устойчивости Ляпунова используют в авиации, в кораблестроении, космонавтике, теории механизмов и пр.

Вопрос о фигурах равновесия жидкой однородной вращающейся массы связан с вопросом образования планет солнечной системы. Многие математики занимались этой задачей до Ляпунова. Маклорен, Лаплас, Лагранж, Якоби и др. исследовали только отдельные частные случаи этой задачи. Было, например, известно, что возможной фигурой равновесия является эллипсоид вращения (эллипсоид Маклорена).

П.Л.Чебышев так сформулировал задачу о фигурах равновесия: предположим, что при некоторой скорости ϖ эллипсоид является возможной фигурой равновесия для вращающейся однородной жидкости. Какие фигуры равновесия возможны при скорости $\varpi + \delta$, где δ невелико? Ляпунов не только решил задачу своего учителя, но и за 8 лет создал общую теорию фигур равновесия.

Заслуги Ляпунова были высоко оценены математическим миром. Он был избран членом Римской Академии наук и членом-корреспондентом Парижской Академии наук.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава 1

1. Периметр треугольника равен двум корням из трех ($2\sqrt{3}$).
2. Длина основания треугольника равна четырем (4).
3. Площадь треугольника равна шести (6).
4. Высота равнобедренного треугольника равна единице (одному) (1).
5. Площадь прямоугольника равна двум (2).
6. Площадь треугольника равна тринадцати (13).
7. Радиус круга равен корню из тринадцати ($\sqrt{13}$).
8. Длина наибольшей хорды равна двум целым и двум третьим ($2\frac{2}{3}$).
9. Длина отрезка равна двум (2).
10. Длина гипотенузы равна двум корням из пяти ($2\sqrt{5}$).
11. Площадь треугольника равна четырем третьим корня из трех ($4/3\sqrt{3}$).
12. Длина третьей стороны треугольника равна либо двум, либо четырем {2,4}.
13. Отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной окружности равно двенадцати двадцать пятих ($12/25$).
14. Площадь круга равна двум целым пяти десятым π ($2,5\pi$).
15. Отношение площадей равно одной целой четырем десятым (1,4).
16. Расстояние между серединами диагоналей равно шести (6).

Глава 2

1. Радиус сферы равен одной целой и пяти десятым (1,5).
2. Объём призмы равен шестнадцати (16).
3. Объём призмы равен шести (6).
4. Тангенс двугранного угла равен двум (2).
5. Объём пирамиды равен двум корням из двух ($2\sqrt{2}$).
6. Объём пирамиды равен тридцати шести (36).
7. Объём пирамиды равен шестнадцати (16).
8. Площадь основания пирамиды равна двум (2).
9. Объём пирамиды равен двенадцати (12).
10. Объём пирамиды равен корню из трёх, делённому
на два (половине корня из трёх) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
11. Тангенс угла равен трём вторым $\left(\frac{3}{2}\right)$.
12. Объём призмы равен корню их двух пополам
(половине корня их двух) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
13. Площадь основания равна восемь π квадрат ($8\pi^2$).

Глава 3

1. $\sqrt{3}x + y - 1 = 0.$
2. $x + y - 4 = 0.$
3. $3x - 2y = 0.$
4. $x + y - 7 = 0.$
5. $x + 3 = 0; y + 4 = 0.$
6. Острый угол между прямыми равен 45^0 .
7. Угловые коэффициенты прямых равны,
следовательно, прямые параллельны.
8. Произведение угловых коэффициентов прямых равно
минус единице (-1) , поэтому прямые перпендикулярны.
9. $2x - 3y + 11 = 0.$
10. Точка $M(1; 2)$ — точка пересечения прямых.
11. $3x + 4y + 26 = 0.$
12. $\frac{x^2}{1^2} + \frac{(y+1)^2}{(1/2)^2} = 1.$
13. $\frac{(y-1)^2}{(3/2)^2} - \frac{x^2}{3^2} = 1.$
14. $y^2 - (x - 3)^2 = 1.$
15. $\frac{(x+1)^2}{(\sqrt{5})^2} + \frac{(y+2)^2}{(\sqrt{5})^2} = 1.$
16. $(x - 1)^2 = -\left(y + \frac{1}{2}\right).$

Литература

1. Александрова Н.В. История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. – М.: Издательство ЛКИ, 2008. – 248 с.
2. Битнер В.А. Краткий курс школьной математики. – СПб.: Питер, 2007. – 416с.
3. Волошинов А.В. Пифагор: Союз истины, добра и красоты. – М.: ЛКИ, 2007. – 224 с.
4. Звавич Л.И., Рязановский Л.И. Геометрия в таблицах. М.: Дрофа, 2008. – 124с.
5. Гнеденко Б.В. Очерки по истории математики в России. – М.: ЛКИ, 2007. – 296 с.
6. Данилов Ю.А. Многочлены Чебышева. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 160 с.
7. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I – М.: Высш. шк., 1999. – 304с.
8. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии. – М.: Наука, 1965. – 227с.
9. Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии. – М.: ЛКИ, 2007. – 224 с.
10. Левитин К. Геометрическая рапсодия. – М.: Знание, 1984. – 176 с.
11. Микишина А.М. и Орлов В.Б. Толковый математический словарь. Основные термины. – М.: Знание, 1987. – 208 с.
12. Полякова Г.С. Леонард Эйлер и математическое образование в России. – М.: Комкнига, 2007. – 184 с.
13. Сонин А.С. Постигание совершенства: (Симметрия, асимметрия, диссимметрия, антисимметрия). – М.: Знание, 1987. – 208 с.
14. Филинова О.Е. Математика в истории мировой культуры: учебное пособие для студентов вузов, обучающихся по специальностям в области информационной безопасности. – М.: Гелиос АРВ, 2006. – 224 с.
15. Шарыгин И.Ф. 2200 задач по геометрии для школьников и поступающих в вузы. – М.: Дрофа, 1999г. – 304 с.
16. Шуйнина Е.Я. Энциклопедия символов. – М.: АСТ, 2003. – 591 с.
17. Штейнгауз Г. Математика – посредник между духом и материей. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. – 351 с.
18. Глухова В.В. Справочное пособие для абитуриентов. – СПб.: СПбГУ, 2000. – 548с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Этимологический и толковый словарь математических терминов и понятий

А

аксиома

Предложение, достойное уважения, бесспорное предложение.

алгебраическое число

Числа, которые являются корнями алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами.

аналитический (анализ)

Это слово ввел в математику Виет, так как он отвергал слово «алгебра», считая его варварским.

апофема

Нечто, отложенное в сторону.

аппроксимация

Термин происходит от латинского слова *approximare* — «приближаться». Приближенное выражение функций через более простые функции. Теория аппроксимации функций была основана Вейерштрассом и Чебышевым.

арк

Сокращение латинского слова *arcus* — «лук, дуга».

асимптота

Термин ввел греческий ученый Аполлоний при изучении свойств гиперболы. Первая буква слова соответствует греческой букве α , которая имеет смысл отрицания, если стоит в начале слова. Остальная часть слова означает «совпадающий». Асимптота — это такая прямая, расстояние от которой до данной кривой стремится к нулю при неограниченном удалении точки по бесконечной ветви кривой.

аргумент

От латинского слова *argumentum* — «знак, признак, содержание». Впервые появилось в математической литературе в 1862 г.

Б

базис

Основа.

бесконечность

Это слово в математическом смысле стало употребляться по предложению немецкого художника Дюрера (1525 г.). Знак ∞ был введен математиком Валлисом (1655 г.). Это римский символ, который означал 1000. Знак бесконечности стал широко использоваться в XVIII веке.

В

вертикаль

От латинского слова vertex (вершина).

великая теорема Ферма

Один скромный юрист из французского города Тулузы Пьер Ферма (1601–1665) любил заниматься в свободное от работы время математическими упражнениями. Во время чтения книги Диофанта «Арифметика» он сделал запись на полях книги против того места, где было представлено доказательство этой теоремы. Ферма написал: «... никакую степень выше второй нельзя разложить на сумму двух степеней с теми же показателями. Я открыл это поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки».

Так, на полях Диофантовой «Арифметики» Ферма сформулировал утверждение, которое вошло в историю математики как великая теорема Ферма: для любого натурального числа $n > 2$ уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

не имеет решений в целых положительных числах x, y, z .

Общее доказательство теоремы, о котором писал Ферма, никто не видел. В его работах было найдено только доказательство для случая $n=4$.

Удивительна история доказательства этой теоремы.

Прошло более 350 лет, в течение которых многие математики

разных стран пытались доказать эту теорему. В 1770 г. Л. Эйлер доказал теорему для $n=3$, в 1825 г. П. Дирихле и А. Лежандр – для $n=5$, в 1839 г. Г. Ламе – для $n=7$. Затем теорема Ферма была доказана для всех простых чисел n из промежутка $[3, 100]$. Страсти вокруг теоремы Ферма накалялись. В 1907 г. за ее доказательство была объявлена международная премия в 100 000 немецких марок.

Новый поворот в деле доказательства теоремы Ферма произошел в 1955 году. Молодой японский математик Танияма сформулировал некоторую гипотезу о свойствах кривых, которые описываются уравнением

$$y^2 = x^3 + ax + b$$

где a и b – целые числа.

Через 20 лет об этой гипотезе вспомнил немецкий математик Г. Фрей и предположил, что теорема Ферма вытекает из этой гипотезы как следствие. В 1985 году американский математик Кеннет Рибет доказал предположение Фрея. Теперь оставалось сделать последний шаг – доказать гипотезу Таниямы. В 1993 году американский математик Э. Уайлс нашел доказательство гипотезы Таниямы и доложил его на конференции в Институте математических наук имени Исаака Ньютона в Кембридже. Доказательство занимало 150 страниц. Его достаточно долго изучали и обнаружили ошибку. Уайлсу совместно с другим математиком Тейлором удалось исправить ошибку. Теорема Ферма доказана, и в 1995 году исправленное доказательство было опубликовано.

В 1998 году на Всемирном математическом конгрессе в Берлине Уайлс доложил свое доказательство. На докладе присутствовало 2000 математиков.

величина

Величиной называют параметр, функцию, коэффициент или другие математические объекты, если они принимают какие-либо числовые значения (если они равны каким-то числам).

вывод

Процесс получения какого-либо результата и результат этого процесса.

выражение

Формула или ее часть.

вычисление

Получение численного результата по исходным данным с помощью заданного алгоритма.

Г

геометрия

Часть математики, которая изучает пространственные отношения и формы тел.

Аналитическая геометрия

Раздел геометрии, в котором геометрические объекты изучаются с помощью алгебры на основе метода координат.

Гиперболическая геометрия

Геометрия Лобачевского.

Дифференциальная геометрия

Раздел геометрии, в котором свойства геометрических объектов изучаются методами математического анализа.

Евклидова геометрия

Древнейшая геометрическая система. Впервые систематически изложена в «Началах» Евклида.

Геометрия Римана

Неевклидова геометрия, в которой любые две прямые пересекаются.

гипотеза

Научное предположение, с помощью которого можно объяснить определенное явление. Гипотеза проверяется либо опытным путем, либо должна быть доказана теоретически.

градус

Латинское слово *gradus* означает «шаг». Вавилонские жрецы заметили, что солнечный диск укладывается на небосклоне (дневной путь Солнца) 180 раз, т.е. «Солнце делает 180 шагов». Путь Солнца за сутки – «360 шагов». В результате этого любой круг стали делить на 360 частей.

график

Множество точек координатной плоскости с координатами $(x, f(x))$, где $f(x)$ – заданная функция.

Д

двучлен

Бином – сумма или разность двух одночленов.

дедукция

Латинское слово *deduction* означает «выведение».

Способ рассуждения, при котором новое положение выводится чисто логическим путем из некоторых исходных утверждений.

деление

В математике древности не было деления. Вместо деления пользовались вычитанием. Современный способ деления встречается впервые в итальянской рукописи неизвестного автора (1460г.). Термины деление, делимое, делитель появились только в X веке в работах Герберта, который был сначала центральной фигурой среди ученых того времени, а потом стал папой Сильвестром II. Из современных знаков деления старейший – горизонтальная черточка. Знак деления в виде двоеточия появился в XVI в. Двоеточие как знак деления употреблял Лейбниц. Знак деления $\div$ был введен в Швейцарии и широко использовался в Англии.

диагональ

Отрезок прямой, соединяющий две вершины многоугольника (или многогранника), которые не лежат на одной стороне (или на одной грани).

дуга

Часть кривой, заключенная между двумя любыми ее точками.

И

изоморфизм

Взаимно однозначное соответствие между алгебраическими системами, сохраняющее операции и отношения между их элементами.

инвариант

В переводе с латинского языка – неизменный.

интерполяция

Термин произошел от латинского слова *interpolare* – подделывать, подновлять.

Приближенное восстановление значений функции в заданной области с помощью известных значений этой же функции внутри заданной области.

Интерполяционные многочлены – многочлены, численные значения которых совпадают со значениями интерполируемой функции при одинаковых значений аргумента. С помощью таких многочленов восстанавливаются значения функции в любой внутренней точке заданной области.

искомая величина

Величина, значение которой находится в данной задаче.

К

координаты

Слово образовано от латинского «*co*» – совместно и «*ordinatus*» – упорядоченный, определенный.

Координаты появились в географии, астрономии, математике в различных формах в Вавилоне и Греции. Современные термины абсцисса, ордината, аппликата появились в Греции в учении о конических сечениях. Для обозначения начала координат французский математик Лагир (1679) употребил слово *origine* – начало. Первой буквой этого слова отмечается начало координат. Координаты полярные – название появилось только в XIX веке у французских математиков.

конус

Сосновая шишка, остроконечный предмет.

куб

Термин произошел от греческого слова *κυβος* (игральная кость). Название перешло на любое тело той же формы. Название введено пифагорейцами, а затем его использовал Евклид.

Л

линия

Слово происходит от латинского слова *línea, línium* (лен, льняная нить).

логарифм

Логарифмы были изобретены в 1594 г. шотландским бароном Непером и Бюрги, другом Кеплера.

Название, данное Непером, происходит от греческого слова *λογος* — оно означает «числа отношений». Смысл этого лежит в истории изобретения логарифмов. Они возникли при сопоставлении членов двух числовых последовательностей. Коши первый предложил ввести различные знаки для десятичных и натуральных логарифмов. Обозначения, близкие к современным, ввел американский математик Стрингхэм (1803). В учебную математическую литературу логарифмы впервые включил Эйлер, который дал определение логарифмической функции как обратной показательной.

М

математика

Слово происходит от греческого глагола *μαθαινω*, значение которого — «учусь через размышление».

медиана

Термин образован от латинского слова *medius* (средний).

метод

Образовано от греческого слова *μεθοδος*, смысл которого «дорога, ведущая за чем-либо». Платон и Аристотель стали использовать это слово как название совокупности математических действий, необходимых для получения правильного результата.

О

овал

Французское *oval* произошло от латинского слова *ovum* — яйцо.

орт

Термин ввел математик Хевисайд (1892 г.) как сокращение слова «ориентация».

П

параллельность

Это слово греческого происхождения, которое означает «рядом идущая». Слово стали использовать как математический термин 2500 лет назад в школе Пифагора.

периметр

Греческое слово *περιμετρος* означает «измерять около». Это слово встречается еще у Архимеда.

перпендикуляр

Термин был образован в Средние века от латинского слова *perpendicularum* (отвес).

пирамида

Средневековые ученые считали, что этот термин произошел от греческого слова *πυρ* (огонь); в некоторых учебниках геометрии XVI в. пирамиду называли «тело огненной формы».

планиметрия

Термин образован в Средние века по образцу древнегреческого слова «стереометрия», поэтому в нем соединены латинское и греческое слова: *planum* и *μετροω*.

поверхность

Множество точек в трехмерном евклидовом пространстве, координаты которых удовлетворяют уравнению $\Phi(x,y,z) = 0$ (неявное задание функции) или уравнению $z=f(x,y)$ (явное задание функции).

постулат – (латынь) требование.

промежуток

Обобщенное название множества чисел, лежащих между двумя числами a и b , с включением или без включения одного или обоих чисел a и b .

пропорция

Ввел в употребление в I в. до н. э. Цицерон, переведя на латынь греческий термин «аналогия», который означает на рус-

ском языке «отношение». С тех пор уже 2000 лет пропорцией в математике называют равенство между двумя отношениями четырех величин: $a : b = c : d$. Числа b, c называют средними, a, d — крайними. Пифагорейцы рассматривали три вида пропорций:

арифметическая $a - b = c - d$;

геометрическая $a : b = c : d$;

гармоническая $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{1}{c} - \frac{1}{d}$.

Если в этих пропорциях рассматривать одинаковые средние величины $b=c$, то приходим к известным соотношения для средних:

среднее арифметическое $b = \frac{a+d}{2}$;

среднее геометрическое $b = \sqrt{ad}$;

среднее гармоническое $b = \frac{2ad}{a+d}$.

О важности пропорций Леонардо да Винчи написал: «Пропорция — мать и королева искусства». Он говорил, что геометрическая пропорция не только позволяет изобразить предмет, но и передать его эстетическое содержание. В результате пропорциональности получается гармония.

плоскость

Процесс математического определения плоскости был очень долгим. Лейбниц удачно предложил определить плоскость как геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек.

призма

Термин произошел от греческого слова *πρίσμα* (отпиленный кусок). Это слово встречается у Евклида и Архимеда.

проекция

Термин происходит от латинского слова *projection* (бросание вперед). Первая ортогональная проекция встречается в книге Дюрера «Наставления об измерении циркулем и линейкой» (1525г). Это был первый немецкий учебник геометрии.

Р

равенство

До появления специального знака слово «равенство» писали на разных языках. В 1557г. английский математик и врач Рекорд предложил знак $=$, «ибо, — писал он, — ничего нет более равного, чем две параллельные прямые». Этот знак равенства широко распространился только к концу XVIII века. К сожалению, изобретатель знака, который наиболее часто встречается в математике, умер в Лондонской долговой тюрьме.

радиус

Латинское слово *radius* означает «палочка». В древности этого термина не было. Евклид и другие математики тех времен говорили: прямая из центра. Слово радиус впервые встречается в 1569 г. у французского ученого Рамуса, затем у Виета. Становится общепринятым термином только в конце XVII в.

рекуррентность

Латинское слово *гесигго* означает «бегу назад, возвращаюсь». Свойство последовательности, при котором любой член последовательности может быть вычислен через предыдущие члены последовательности. Формулы, с помощью которых делаются такие вычисления, называются рекуррентными формулами.

ромб

Происхождение этого термина связано с греческим словом *ραμβος* (бубен). Ромб похож на четырехугольный бубен. В «Началах» Евклида дано определение ромба, но его свойства не представлены.

радикал

Радикалами в математике называют знак $\sqrt[n]{}$ извлечения корня произвольной степени $n > 2$. Знак квадратного корня с чертой над подкоренным выражением ввел Декарт в книге «Геометрия». Древние греки вместо слов «извлечь корень» говорили: «найти сторону по данной площади квадрата», а квадратный корень называли стороной. На латинском языке слова «сторона», «бок», «корень» переводятся одним и тем же словом *radix*. Математические термины «корень» и «радикал» произошли благодаря первым переводчикам «Начал» Евклида с греческого на арабский, а затем на латынь.

Ньютон распространил обозначение Декарта на корни любой степени в своей книге «Всеобщая арифметика».

С

сегмент

Знаменитый греческий астроном Птолемей делил окружность круга на 360 частей. Для этих частей Птолемей употреблял (использовал) греческое слово (отрезок), которое было буквально переведено латинским словом *segments*.

симметрия

Греческое слово *συμμετρία* означает «соразмерность, правильное отношение». Свойство геометрического объекта совмещаться с собой при некоторых преобразованиях.

Существует несколько видов геометрической симметрии.

Осевая симметрия (симметрия относительно прямой)

Отображение точек плоскости или пространства, при котором каждая точка A переходит в точку A' , симметричную относительно фиксированной прямой (оси симметрии), то есть точки A и A' лежат на одном перпендикуляре к оси симметрии, расположены по разные стороны от оси и на одинаковом расстоянии от нее. Точки оси симметрии отображаются сами на себя.

Симметрия относительно плоскости (зеркальная симметрия)

Отображение точек пространства, при котором каждая точка переходит в точку, которая лежит на том же перпендикуляре к плоскости и на том же расстоянии от плоскости, но с другой

стороны от нее.

Центральная симметрия (симметрия относительно точки)

Отображение точек плоскости или пространства, при котором каждая точка A переходит в точку A' , эти точки лежат на прямой, проходящей через фиксированную точку (центр симметрии), расположены по разные стороны от этого центра симметрии и на одинаковом расстоянии от него.

среднее

Среднее арифметическое

Числовая характеристика совокупности чисел $\{a_i\}_{i=1}^n$, которая определяется по формуле

$$\bar{a} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

Среднее взвешенное

Числовая характеристика совокупности чисел $\{a_i\}_{i=1}^n$, равная дроби $\frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$, где числа p_i называются весами чисел.

Среднее гармоническое

Числовая характеристика совокупности чисел $\{a_i\}_{i=1}^n$, равная дроби $\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}$.

Среднее геометрическое

Числовая характеристика совокупности чисел $\{a_i\}_{i=1}^n$, равная квадратному корню из произведения этих чисел, т.е. $\sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i}$.

Среднее квадратичное

Числовая характеристика совокупности чисел $\{a_i\}_{i=1}^n$, равная квадратному корню из суммы квадратов этих чисел, деленному на количество этих чисел, т.е. $\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}}$.

стереометрия

Термин составлен из греческих слов *στερεος* и *μετροω*.

Значение термина – «измерение объемов». Этот термин использовал Аристотель.

сфера

Термин происходит от греческого слова *σφαира* (шар, мяч). Термин использовался еще до Евклида.

Т

таблица

Латинское слово *tabula* означает «доска, стол».

теорема

Зрелище, представление, которое у Пифагора стало означать умозаключение, т.е. математическую теорему.

теория

Наблюдение, созерцание.

точка

Лобачевский говорил, что это слово происходит от прикосновения отточенного пера, поэтому «точка» означает острие гусиного пера, которым писали во времена Лобачевского, следовательно, слово образовано от глагола «точить».

траектория

Непрерывная кривая, которую описывает материальная точка при своем движении.

трансцендентное число

Числа, которые не являются алгебраическими, называются трансцендентными числами. Например, числа π и e – трансцендентные числа.

Ф

фигура

Латинское слово *figura* «образ, внешний вид, начертание».

Геометрическая фигура

Множество точек на плоскости или в пространстве.

фокус

Латинское слово *focus* означает «очаг, огонь». Термин ввел в науку Кеплер. Слово *focus* появилось как буквальный перевод арабского термина «место зажигания» для фокуса параболы, а параболу арабы называли «зажигательным зеркалом».

Х

хорда

Термин происходит от греческого слова *χορδή* (струна, тетива).

Отрезок, соединяющий любые две точки кривой.

Ц

центр

Слово греческого происхождения. Слово *κεντρον* обозначало палку с заостренным концом, которой подгоняли быков, а позднее — ножку циркуля, помещенную в центр описываемой окружности.

Ч

числа Фибоначчи

Числа числовой последовательности, составленной по рекуррентной формуле: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ при $a_0 = a_1 = 1$, т.е. числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,

Русско-английский словарь геометрических терминов

А

аксиома – axiom
асимптота – asymptote
апофема – apothem

Б

биссектриса – bisector
боковой – side
боковая сторона – flank
боковая грань – lateral face

В

вертикаль – vertical line
вершина – peak
вершина угла – vertex
вершина треугольника – apex
вписанная окружность – inscribed circle
вывод – conclusion
высота – height
вычисление – calculation

Г

геометрия – geometry
гипербола – hyperbola
гипотенуза – hypotenuse
грань – side

Д

диагональ – diagonal
длина – length
дуга – arc

Е

единственным образом – uniquely

З

замечательный – wonderful

Л

линия – line

К

канонический – canonical

касательная – tangent

катет – cathetus

квадрат – square

кривая – curve

куб – cube

конус – cone

коэффициент – coefficient

М

медиана – median

многоугольник – polygon

модуль – module

Н

наклонная прямая – slope

накрест лежащие углы – alternative angles

нормаль – normal

О

образовать – form

объем – volume

общий – common, general

односторонние углы – unilateral angles

окружность – circle

описанная окружность – circumscribed circle

определение – definition

опустить перпендикуляр – drop a perpendicular on

основание треугольника – base of triangle

основание перпендикуляра – foot of perpendicular

ось симметрии – axis of a curve

координатная ось – coordinate axis

острый угол – acute angle
отношение – relation

П

парабола – parabola
параллелограмм – parallelogram
параллелепипед – parallelepiped
параллельный перенос – translation
параметр – parameter
пересекать – cross
периметр – perimeter
перпендикуляр – perpendicular
пирамида – pyramid
планиметрия – planimetry
плоскость – plane
площадь – square, area
поверхность – surface
поворот осей – rotation of axes
подобные – similar
преобразование – transformation
признак (характерный признак) – attribute
призма – prism
проводить линию – draw a line
прямая – straight
прямой угол – right angle
пунктирная линия – dotted line

Р

равнобедренный треугольник – isosceles triangle
равновеликий – isometric
равносторонний треугольник – equilateral triangle
развернутый угол – straight angle, flat angle
расстояние – distance
ребро – edge
ромб – rhombus

У

усеченный – truncated

С

свойство – property
сегмент – segment
сектор – section
секущая – secant
симметрия – symmetry
скрещиваться – intersect
смежный – adjoining
смежный угол – adjacent angle
соотношение – relation
соотношение между – ratio
справедливо, верно – rightly, right, true
стереометрия – stereometry
совпадать – coincide
средняя линия – centerline
сторона – side
сфера – sphere

Т

тело вращения – figure of revolution
теорема – theorem
треугольник – triangle
точка – point
тупой угол – obtuse angle

У

усеченный – truncated
угол – angle

Ф

фигура – figure

Х

хорда – chord

Ц

центр – center
цилиндр – cylinder

Ч

четырёхугольник – quadrilateral

Ш

шар – boll

ширина – width

Э

эллипс – ellipse

Русско-английский словарь (для чтения очерков по истории математики)

А

апатия – apathy

астрономия – astronomy

Б

безуспешно – unsuccessfully

бесследно – without a trace

бесчисленное множество – uncountable set

бык – bull

В

веревка – rope

возбуждение – excitation

возникать – spring up

возраст (с возрастом) – (with) age

возродиться (из пепла) – will revive (from ashes)

вопреки тому (не смотря на) – despite

временно – temporarily

всевидающий – all-seeing

всевозможный – all kinds

вымысел – fiction

Г

гарантировать – guarantee

горе – grief

гармония – harmony

громоздко – cumbersome

Д

дедуктивный – deductive

диапазон – range

духовные потребности – spiritual needs

добродетельный человек – virtuous person

достоверно – authentically

допустим противное (противоположное) – assume opposite

Е

единое целое – a single whole

единообразный – uniform

Ж

жалованье – salary

жертвенник – altar

жрец – oracle

З

закладка – laying

заново – newly, again

задолго до – long before

закономерность – pattern

заставлять – to make

защищать – protect

И

искомая – unknown

именно – just

интерпретировать – interpret

искажать – distort

испуганный – frightened

исследование – research

К

колония бактерий – colonies of bacteria

круг интересов – focus of interest

Л

легенда – legend

М

материальное положение – financial position

мудрость – wisdom

Н

наблюдение – observation

наименование – name

настойчиво – persistently
натянуть – stretch
начертить – draw
небосклон – horizon sky
невероятный – incredible
негативный – negative
несмотря на – in spite of

О

общепризнанно – universally recognized
община – community
обязан – must
однотипный – of the same type
окружать – surround
оракул (жрец) – oracle
орбита – orbit
оригинал (источник) – original
освободится – get free
ослепший – blind
основатель – founder
осязание – feel, touch
отказаться – refuse
отзыв – review
отличный от – differ from
открытие – discovery
очевидный – obvious

П

парадоксальный – paradoxical
переезд – move
переносить (в другие области) – transfer to other areas
подошва – sole
покрыть (накрыть) – cover
понятие (не иметь понятия) – notion
послать (письмо) – send
пост (должность) – post
постепенно – little by little

постулат – postulate
поток – flow
потребность – need
познание – knowledge
править – govern
прежде всего – first of all
приблизенно – approximately
приглашать – invite
признанный (быть признанным) – be accepted
прикладной – applied
приложение – application
принести (в жертву) – sacrifice
принципиальный – principled
причина – reason
приобретение – acquirement
пропагандировать – propagandize
простота – simplicity
противоположное (противное) – opposite
пупок – navel

Р

равноотстоящий – equidistant
равносильно – equivalent
радость – joy
размечать – mark
разнообразие – variety
редко – seldom
рецепт – recipe

С

самостоятельно – independently
следить за – observe
случайно – accidentally
совпадать – coincide
согласованность – co-ordination
содержание – content
соратник – companion in arms
состояние духа – state of mind
совершенство – perfection

сподвижник – fellow campaigner
способствовать – promote
страшный удар – terrible blow
строгость (к себе) – rigor

Т

таким образом – so
талантливый – talented
только в том случае, когда – only when
торжественный – solemn
точность (в пределах точности) – precision
трансцендентный – transcendental
трудоспособность – capacity for work

У

удаленный от крайностей – remote from the extremes
удвоить – double
увлекаться – get involved
узел – knot
указ (по указу) – decree
уникальный – unique
упадок – decline
успех – success
устойчивый – steady
утверждать – approve
участие (при участии) – with the participation

Ф

феноменальный (уникальный) – unique
формулировка – formulation

Х

храм – temple

Ц

цепь – chain
центр тяжести – center of gravity

церемония – ceremony

Ч

частное решение – particular solution

чума –plague

Э

эпидемия – epidemic

эстетический – aesthetic

Я

явно – obviously

Содержание

Предисловие	3
-------------------	---

ГЛАВА 1

ПЛАНИМЕТРИЯ

§1. Прямые углы на плоскости	5
§2. Треугольники	11
§3. Четырехугольники	29
§4. Многоугольники	41
§5. Окружность и круг	43
§6. Примеры	51
§7. Упражнения	56

ГЛАВА 2

СТЕРЕОМЕТРИЯ

§1. Прямые и плоскости в пространстве	58
§2. Многогранники	64
§3. Тела вращения	69
§4. Примеры	72
§5. Упражнения	75

ГЛАВА 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§1. Системы координат на плоскости	77
§2. Вывод канонических уравнений прямой	86
§3. Кривые второго порядка	98
§4. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду	107
§5. Инварианты уравнения второго порядка	112
§6. Примеры	112
§7. Упражнения	114

ГЛАВА 4

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ ГЕОМЕТРИИ

§1. Геометрия, культура и традиции	115
§2. Школа Пифагора	119
§3. Три классические задачи древности	128
§4. Неевклидова геометрия	130

ГЛАВА 5

ПЕТЕРБУРГСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

§1. Петр I и математика	136
§2. Создание Петербургской Академии наук	138
§3. Леонард Эйлер	140
§4. Пафнутий Львович Чебышев	145
§5. Андрей Андреевич Марков	148
§6. Александр Михайлович Ляпунов	151

ОТВЕТЫ (КЛЮЧИ К УПРАЖНЕНИЯМ)	153
---	------------

ЛИТЕРАТУРА	156
-------------------------	------------

ПРИЛОЖЕНИЯ

ЭТИМОЛОГИЧЕСКИЙ И ТОЛКОВЫЙ СЛОВАРЬ

МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И ПОНЯТИЙ	159
--	------------

РУССКО-АНГЛИЙСКИЙ СЛОВАРЬ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ	173
--	------------

РУССКО-АНГЛИЙСКИЙ СЛОВАРЬ (для чтения очерков по истории математики)	178
---	------------

387-63

Подписано в печать 04.07.2011 г.

Усл. печ.л. 14,5

Тираж 100 экз. Заказ №13

Отпечатано в ООО "ПолиКром"

195112, Санкт-Петербург, Новочеркасский пр., д. 1