

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г. И. Беликова

МАТЕМАТИКА

Учебное пособие
для иностранных студентов,
обучающихся по программе
предвузовской подготовки

Издание 2, исправленное

Часть 1

Санкт-Петербург

2012 г

УДК [808.2 : 800.7 : 51] (073.8)

Беликова Г.И., Математика. Учебное пособие для иностранных студентов, обучающихся по программе предвузовской подготовки. Часть 1. – СПб.: РГТМУ, 2012. – 232 стр.

Редакторы: Л.Е. Травина, старший преподаватель кафедры русского языка РГТМУ,
Л.В. Витковская, старший преподаватель кафедры высшей математики РГТМУ.

Рецензент: Матвеев Ю.Л.,
д. физ-мат.н., проф., зав. кафедрой высшей математики и информатики Государственной полярной академии.

Ответственные редакторы: Егоров А.Д.
д. физ-мат. н., зав. кафедрой высшей математики и теоретической механики РГТМУ,
Николаева Е.К.
к. филол.н., зав. кафедрой русского языка РГТМУ.

Учебное пособие "Математика" (Часть 1) предназначено для иностранных студентов, обучающихся по программе предвузовской подготовки. Первая часть пособия включает следующие разделы школьной математики: числовые множества, классификация алгебраических выражений и их свойства, обзор основных элементарных функций, способы решений уравнений и систем, тригонометрия, прогрессии, векторная алгебра.

Основная цель пособия: подготовить иностранных студентов к успешному восприятию лекций и практических занятий по математике на 1-ом курсе университетов и воспитать математическую культуру устного и письменного изложения материала в рамках традиций русской математической школы.

© Беликова Г.И., 2012

© Российский государственный гидрометеорологический университет (РГТМУ), 2012

Российский государственный
гидрометеорологический университет

БИБЛИОТЕКА

195189, СПб, Малоохтинский пр., 98

УДК. № 1484

ПРЕДИСЛОВИЕ

Это учебное пособие предназначено, в первую очередь, для иностранных студентов, обучающихся по программе предвузовской подготовки, но оно может быть полезно и тем, для кого русский язык является родным, тем, кто уже прошёл курс элементарной математики в объёме программы средней школы и хочет повторить алгебру, тригонометрию, геометрию и начала анализа.

Работа состоит из трех частей. В первую часть вошли алгебра, тригонометрия и обзор элементарных функций. Вторая часть посвящена планиметрии, стереометрии. Третья часть посвящена началам математического анализа. Каждая часть пособия заканчивается главой с историческими очерками, весьма полезными для более глубокого понимания и самой математики, и её роли в культурном развитии человечества.

Пособие составляют лекции, которые читаются в течение 6-ти последних лет для иностранных студентов, обучающихся в РГТМУ по программе предвузовской подготовки. Основная задача книги – помочь иностранным студентам быстро адаптироваться к базовому курсу математики с учётом некоторых методических особенностей классической российской математической школы.

В некоторых случаях в скобках даны синонимы математических терминов, приведено чтение устойчивых математических выражений. Кроме этого, жирным курсивом выделены те впервые встречающиеся в данном учебном пособии слова и устойчивые фразы, которыми обычно пользуются в математике. В конце почти каждой главы даются упражнения для самостоятельной работы студента.

Для упрощения процесса адаптации в пособии представлено лишь небольшое количество доказа-

тельств различных математических утверждений. В тех разделах, где доказательство опущено, написана фраза: "Можно доказать, что..."

Опыт работы с иностранными студентами показал пользу сопоставления звучания и записи математических терминов на русском и английском языках, поэтому в конце пособия есть англо-русский словарь математических терминов.

Представленная Вашему вниманию книга является полезным дополнением к обязательным лекциям и практическим занятиям.

Для тех, кто со школьных времён боится математику, советую начинать чтение этой книги с 13-ой главы. Надеюсь, что после чтения исторических очерков, страх пройдёт и появится интерес к этой удивительно красивой науке.

Благодарю преподавателя кафедры высшей математики Ларису Валерьевну Витковскую и преподавателей кафедры русского языка Ларису Евгеньевну Травину, Елену Викторовну Денисюк за внимание к этой работе и ценные замечания.

Пособие написано благодаря поддержке заведующей кафедрой русского языка Елены Каировны Николаевой и заведующего кафедрой высшей математики и теоретической механики Александра Дмитриевича Егорова.

ОБОЗНАЧЕНИЯ, СИМВОЛЫ И ЗНАКИ

Кванторы

- $\exists$ квантор существования; он заменяет слова: существует, найдётся.
- $\exists!$ квантор существования и единственности; он заменяет фразу “существует и единственный”.
- $\forall$ квантор всеобщности; он заменяет слова: любой, всякий, каждый.

Скобки

- (круглая скобка, открывающая скобка.
-) круглая скобка, закрывающая скобка.
- [квадратная скобка, открывающая скобка.
-] квадратная скобка, закрывающая скобка.
- { фигурная скобка.
- } фигурная скобка.
- $\left\{ \begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array} \right.$ фигурная скобка, которая заменяет фразу “ A, B, C рассматриваются вместе”, или “ A, B, C выполняются вместе”.
- $\left[\begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array} \right.$ квадратная скобка, которая заменяет фразу “рассматривается либо A , либо B , либо C ”, или “выполняется либо A , либо B , либо C ”, или “справедливо либо A , либо B , либо C ”.

Знаки, связанные с множествами.

- $\subset$ знак принадлежности одного множества другому множеству;
- $A \subset B$ множество A принадлежит множеству B (множество A – часть множества B).

- $\in$ знак принадлежности одного элемента
некоторому множеству;
 $x \in A$ элемент x принадлежит множеству A .
- $\cup$ знак объединения множеств;
 $C = A \cup B$, множество C является суммой или
объединением множеств A и B .
- $\setminus$ знак вычитания множеств;
 $C = A \setminus B$ множество C является разностью множеств
 A и B .
- $\{a_k\}_{k=1}^n$ обозначение дискретного множества, которое
состоит из n элементов.

Стрелки

- $\Rightarrow$ знак следования; он заменяет слова: следует, вы-
текает;
 $A \Rightarrow B$ из A следует (вытекает) B .
- $\rightarrow$ знак стремления к чему-то;
 $x \rightarrow a$ переменная x стремится к числу (величи-
не) a .

ГЛАВА 1

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА, ДЕЙСТВИЯ И ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§1. Определение числовых множеств

Числовые множества образуют фундамент всей математики, поэтому прежде всего, рассмотрим основные понятия, действия и свойства этих множеств.

Операции (действия): сложение, вычитание, умножение, деление – называются арифметическими операциями (действиями).

Числовое множество, состоящее из чисел $1, 2, 3, \dots$, образует множество **натуральных чисел** и обозначается буквой N . В этом множестве всегда **справедливы** только две операции: сложение и умножение

$$a + b = c; a \in N, b \in N \Rightarrow c \in N;$$

a – первое **слагаемое**, b – второе слагаемое, c – **сумма**

$$a \cdot b = c; a \in N, b \in N \Rightarrow c \in N;$$

a – первый **множитель**, b – второй множитель, c – **произведение**.

Вычитание и деление в множестве натуральных чисел возможны только в том случае, когда результат этих действий будет натуральным числом:

$$a - b = c; a \in N, b \in N, c \in N;$$

a – **уменьшаемое**, b – **вычитаемое**, c – **разность**.

$$a / b = c \quad (a \div b = c), \quad a \in N, b \in N, c \in N;$$

a – **делимое**, b – **делитель**, c – **частное**.

Определение 1. Натуральное число, не равное единице, называется *простым*, если оно делится только на себя и на единицу. Не простое натуральное число, не равное единице, называется *составным числом*. Единица – единственное число, которое не является ни *простым*, ни *составным*. Например, 5, 7, 13, 17 – простые числа; 4, 6, 15, 21 – составные числа.

Можно доказать, что всякое натуральное число, большее единицы, можно представить в виде произведения простых сомножителей и притом *единственным образом (способом)*.

Пример. Разложить на множители число 135.

$135 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$; 3, 3, 3, 5 – простые *сомножители*, на которые единственным образом раскладывается число 135.

Определение 2. *Общим делителем* натуральных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ называется натуральное число, на которое *делится нацело (без остатка)* каждое из чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$. Самый большой из таких делителей называют *наибольшим общим делителем* или *НОД* ($a_1, a_2, \dots, a_n$). Если наибольший общий делитель чисел равен 1, то такие числа называются *взаимно простыми*.

Определение 3. Любое натуральное число, которое делится нацело на каждое из чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$, называется *общим кратным*. Самое маленькое общее кратное называется *наименьшим общим кратным* или *НОК* ($b_1, b_2, \dots, b_n$). *Наименьшее общее кратное двух взаимно простых чисел равно произведению этих чисел.*

Пример. Найти *НОК* и *НОД* чисел 72 и 60.

$$72 = 2^3 \cdot 3^2, \quad 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$$

тогда $\text{НОД}(72, 60) = 3 \cdot 4 = 12$, $\text{НОК}(72, 60) = 8 \cdot 9 \cdot 5 = 360$.

Числовое множество, состоящее из чисел 0, $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, образует множество целых чисел и обозначается буквой Z . В этом множестве всегда справедливы три операции: сложение, умножение и вычитание.

Целое число называется **чётным**, если среди его сомножителей есть хотя бы одна цифра 2. В противном случае число называется **нечётным**.

Любое **чётное** число можно представить в виде $K = 2 \cdot n$, а любое **нечётное** число в виде $K = 2 \cdot n + 1$, где $n \in Z$. Например, $7 = 2 \cdot 3 + 1$, $21 = 2 \cdot 10 + 1$, $30 = 2 \cdot 15$, $38 = 2 \cdot 19$.

В некоторых случаях деление целого числа на целое даёт в результате (**частное**) тоже целое число. Если частное – не целое число, то говорят о **делении с остатком**. Рассмотрим два целых числа a и b , пусть $a > b$. Представление числа a в виде $a = b \cdot q + r$ называется **делением числа a на b с остатком**. Целое число q – **частное**, целое число r – **остаток**, причём $0 < r < b$.

Пример. Число 17 делится на 5 с остатком: 3 – **частное**, 2 – **остаток**.

Числовое множество, состоящее из чисел вида $\frac{n}{m}$,

где m – любое натуральное число ($\forall m \in N$), а n – любое целое число ($\forall n \in Z$), называется **множеством раци-**

ональных чисел. Это множество обозначается буквой Q , и в нём всегда можно выполнить четыре действия: сложение, вычитание, умножение и деление (кроме деления на 0).

Число вида $\frac{n}{m}$ — **рациональная дробь** (обычно-

венная дробь, простая дробь); n — **числитель** дроби, m — **знаменатель** дроби. Если $n < m$ — дробь называется **правильной**, если $n \geq m$ — дробь называется **неправильной** дробью. У неправильной дроби можно выделить

целую часть, записав её в виде $A\frac{b}{c}$, где $\frac{b}{c}$ будет **правильной** дробью, A — целое число. Дробь вида

$A\frac{b}{c}$ — называется **смешанной** дробью.

Пример. $\frac{3}{5}$ — **правильная дробь**; $\frac{6}{5}$ — **неправильная дробь**;

$1\frac{4}{5}$ — **смешанная дробь**.

Свойства рациональных дробей

1. Дробь не изменится, если числитель и знаменатель умножить или разделить на одну и ту же величину, не равную нулю.

2. Из двух дробей с одинаковыми знаменателями больше та, у которой больше числитель.

3. Из двух дробей с одинаковыми числителями больше та, у которой меньше знаменатель.

4. Складываются и вычитаются дроби только с одинаковыми знаменателями, поэтому для сложения и вычитания дробей с разными знаменателями необходимо с помощью 1-го свойства привести эти дроби к общему (одинаковому) знаменателю. В качестве общего знаменателя обычно берут наименьшее общее кратное знаменателей этих дробей.

Дробь называется *сократимой*, если у числителя и знаменателя есть общие (одинаковые) множители и *несократимой*, если общих множителей нет. Любую рациональную дробь можно представить в виде несократимой дроби, если *сократить* (убрать) одинаковые множители числителя и знаменателя.

Примеры: $\frac{3}{5}$ — *правильная несократимая дробь*;

$\frac{14}{35}$ — *правильная сократимая дробь*; $\frac{14}{35} = \frac{7 \cdot 2}{7 \cdot 5} = \frac{2}{5}$ —

сократили дробь на 7 — общий множитель числителя и знаменателя.

Определение 4. Две несократимые дроби называются равными, если у них равны числители и равны знаменатели:

$$m_1 = m_2; n_1 = n_2 \Rightarrow \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}$$

Следует отметить, что рациональная дробь равна нулю только тогда, когда равен нулю её числитель.

Числа, которые не являются рациональными числами, называются *иррациональными*.

Примеры иррациональных чисел.

1. Можно доказать, что отношение длины окружности к её диаметру не является рациональным числом.

лом: $\frac{L}{D} \neq \frac{m}{n}$ (рис. 1).



рис. 1

2. Можно доказать, что отношение длины диагонали квадрата к длине его стороны не является рациональным числом.

ным числом: $\frac{a}{AB} \neq \frac{m}{n}$ (рис. 2).

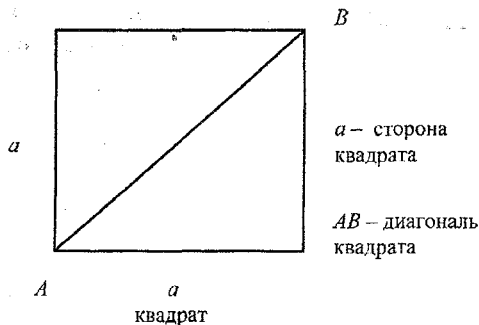


рис. 2

3. Докажем, что не существует рационального числа, равного $\sqrt{2}$ – квадратному корню из двух.

Предположим, что существует такая несократимая дробь, для которой справедливо равенство

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n} \Rightarrow 2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow m^2 = 2n^2.$$

Из последнего равенства следует, что число m — чётное число:

$$m = 2m_1,$$

где m_1 — целое число. Из чётности числа m следует, что

$$(2m_1)^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2m_1 \Rightarrow n = 2n_1.$$

В результате (в итоге) мы приходим к равенству дробей

$$\frac{m}{n} = \frac{2m_1}{2n_1}.$$

Отсюда следует, что дробь $\frac{m}{n}$ сократимая, что противоречит исходному условию о несократимости дроби. Из полученного противоречия вытекает, что $\sqrt{2}$ не является рациональным числом: $\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$.

Объединение (совокупность) множеств рациональных и иррациональных чисел называется множеством **действительных чисел** и обозначается буквой R .

Соотношения между числовыми множествами можно представить в виде $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Десятичные дроби

Действительные числа изображают **десятичными дробями**.

Существует три вида десятичных дробей:

$A, a_1 a_2 \dots a_n$ – **конечная десятичная дробь**;

$A, a_1 a_2 \dots a_n (b_1 \dots b_k)$ – **бесконечная периодическая дробь**,
 $b_1 \dots b_k$ – **период дроби**;

$A, a_1 a_2 a_3 \dots$ – **бесконечная непериодическая дробь**.

Можно доказать, что конечные десятичные дроби и бесконечные периодические дроби являются рациональными числами, то есть

$$A, a_1 a_2 \dots a_n = \frac{n}{m}; \quad A, a_1 a_2 \dots a_n (b_1 b_2 \dots b_k) = \frac{l}{p}.$$

Бесконечные десятичные непериодические дроби не могут быть рациональными числами; они являются изображением **иррациональных чисел**.

Определение 5. Два действительных числа называются **противоположными**, если их сумма равна нулю. У каждого числа есть противоположное число и оно единственно. Например, числа 15 и -15 – **противоположные числа**.

Определение 6. Два действительных числа называются **взаимно обратными**, если их произведение равно единице. У каждого числа, кроме нуля, есть обратное число и оно единственно. Существуют только два числа, равные своим обратным – это 1 и -1 .

Множество действительных чисел является **упорядоченным, плотным и непрерывным множеством**. Рассмотрим отдельно **смысл** каждого из этих свойств.

Упорядоченное множество. Для любых двух различных чисел a и b имеет место одно из двух неравенств $a < b$ либо $b < a$.

Плотное множество. Между любыми двумя различными числами a и b существует бесконечное множество других действительных чисел c , для которых выполняется неравенство $a < c < b$.

Непрерывное множество. Разделим множество действительных чисел на два подмножества: $R = A \cup B$. Каждое число при этом находится только в одном подмножестве. Для каждой пары любых чисел $a \in A$ и $b \in B$ выполняется соотношение $a < b$. Свойство непрерывности *состоит в том, что* существует единственное число c , которое удовлетворяет неравенству $a \leq c \leq b$ ($\forall a \in A, \forall b \in B$). Это число c отделяет числа из множества A от чисел из множества B . Число c является либо наибольшим числом в множестве A (тогда в классе B нет наименьшего), либо наименьшим в множестве B (тогда в классе A нет наибольшего).

Графическим образом множества действительных чисел является *числовая ось* — прямая, на которой выбрано положительное направление, масштаб и начало отсчёта (начало координат) (рис.3).

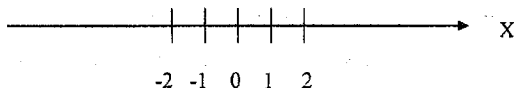


рис.3

Свойство непрерывности *позволяет установить взаимно однозначное соответствие* между множеством всех действительных чисел и множеством всех

точек на прямой линии, то есть, каждому действительному числу соответствует единственная точка числовой оси и наоборот, каждой точке числовой оси соответствует одно число.

Отрезок $A = [a, b]$ на числовой оси X соответствует неравенствам $a \leq x \leq b$. Точки a и b этого отрезка называются **граничными точками** и они принадлежат этому отрезку. Остальные точки называются **внутренними точками** отрезка.

Интервал $A = (a, b)$, или $A =]a, b[$ на числовой оси X соответствует **строгим неравенствам** $a < x < b$. Граничные точки a и b в этом случае не **принадлежат** этому интервалу.

Замечание. Иногда вместо слова “отрезок” или “интервал” используют слово “промежуток” или “область”. В этом случае либо заранее всё известно о граничных точках, либо сами граничные точки в данном вопросе не важны.

§2. Арифметические действия

На множестве действительных чисел определены четыре арифметические операции (арифметические действия): сложение, вычитание, умножение и деление.

Справедливы следующие основные свойства (законы) относительно сложения и умножения.

1. $a + b = b + a$ – коммутативный закон сложения.
2. $ab = ba$ – коммутативный закон умножения.
3. $(a + b) + c = a + (b + c)$ – ассоциативный закон сложения.
4. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ – ассоциативный закон умножения.
5. $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ – дистрибутивный закон.

§3. Операции сравнения

На множестве действительных чисел существуют несколько операций сравнения двух чисел:

$>$ знак больше, $a > b$ — *а больше b*; строгое неравенство.

$<$ знак меньше, $a < b$ — *а меньше b*; строгое неравенство.

$\geq$ знак не меньше, $a \geq b$ — *а не меньше b*; нестрогое неравенство.

$\leq$ знак не больше, $a \leq b$ — *а не больше b*, или a не превосходит b ; нестрогое неравенство.

Числовые неравенства могут быть *справедливыми (верными)* или *несправедливыми (противоречивыми)*.

Неравенство, справедливое для всех допустимых значений, входящих в него *величин*, а также справедливое числовое неравенство называется *тождественным* неравенством. Например, неравенство $x^2 + 1 > x^2$ является тождественным.

Два или несколько неравенств называют неравенствами *одинакового смысла*, если они содержат один и тот же знак неравенства и *противоположного смысла*, если один из них имеет знак $>$, а другой имеет знак $<$.

Основные свойства операций сравнения

1. Если $a > b$, $b > c$, то $a > c$.
2. Если $a > b$, то $a + c > b + c$ — *смысл неравенства не изменится, если к обеим частям неравенства прибавить одну и ту же величину.*
3. Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$ — *смысл неравенства не меняется, если оно умножается на положительную величину.*

Если $a < b$ и $c < 0$, то $ac > bc$ — *при умножении неравенства на отрицательную величину смысл неравенства меняется на противоположный.*

4. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$ — два неравенства одного смысла можно складывать, в результате знак неравенства сохранится.
5. Если a, b, c, d — положительные числа и $a > b, c > d$ то $ac > bd$ — при умножении двух неравенств одного смысла с положительными членами получается неравенство того же смысла.
6. Если $ab > 0$, то из неравенства $a > b$ следует противоположное неравенство для обратных величин

т.е. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

§4. Модуль

Модулем действительного числа, или **абсолютной величиной** числа a называется неотрицательное число $|a|$, равное числу a если $a \geq 0$, и числу $(-a)$, если $a < 0$. Определение модуля можно записать **кратко** в виде выражения:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a \geq 0, \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Геометрический смысл: $|a|$ — **расстояние** от точки a или точки $(-a)$ числовой оси до начала координат.

Основные свойства абсолютных величин

1. $|a| = |-a|$ — модули противоположных чисел равны.
2. $|a| \geq a$ — модуль любого числа не меньше этого числа.

3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ – модуль произведения чисел равен произведению модулей этих чисел.
4. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$ – модуль отношения двух чисел равен отношению модулей этих чисел.
5. $|a + b| \leq |a| + |b|$ – модуль суммы чисел не превосходит суммы модулей этих чисел.
6. $|a - b| \geq |a| - |b|$ – модуль разности чисел не меньше разности модулей этих чисел.

§5. Степень и логарифм

Выражение $a^n = a \cdot a \cdot a \dots a$ называется **степенью с натуральным показателем n** , для $\forall a \in R$. Число a называется **основанием степени** (a^n – **степень**, n – **показатель**, a – **основание**).

Из этого определения сразу вытекают все свойства степеней:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ – произведение степеней с одинаковым основанием равно степени с тем же основанием, показатель равен сумме показателей сомножителей.

$$2. \quad \frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n}, & m > n \\ 1, & m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & m < n \end{cases} \quad (a \neq 0)$$

– отношение степеней с одинаковым основанием равно степени с тем же основанием, показатель равен разности показателей числителя и знаменателя.

3. $(a^m)^n = a^{mn}$ — степень в степени равна степени с тем же основанием, показатель равен произведению показателей.

$$4. (-a)^n = \begin{cases} a^n, & \text{если } n - \text{чётное,} \\ -a^n, & \text{если } n - \text{нечётное.} \end{cases}$$

5. $a^n \cdot b^n = (ab)^n$ — произведение степеней с разными основаниями и одинаковыми показателями равно степени с тем же показателем, основание равно произведению оснований сомножителей.

$$6. \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n, \quad (b \neq 0) - \text{отношение степеней с}$$

разными основаниями и одинаковыми показателями равно степени с тем же показателем, основание равно отношению их оснований.

Если показатель степени равен двум, то такой показатель обычно называют квадратом. Например, число 5^2 — *пять в квадрате*, величина a^2 — *а в квадрате*.

Если показатель степени равен трём, такой показатель степени называют кубом.

Например, число 7^3 — *семь в кубе*, величина b^3 — *б в кубе*.

Ниже представлены формулы, которые часто встречаются при работе с квадратами и кубами различных величин.

Формулы сокращенного умножения

1. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^2$ - квадрат суммы;

$a^2 + 2ab + b^2$ - полный квадрат.

2. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^2$ - квадрат разности;

$a^2 - 2ab + b^2$ - полный квадрат.

3. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^3$ - куб суммы.

4. $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$(a-b)^3$ - куб разности.

5. $(a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

$a^2 + ab + b^2$ - неполный квадрат суммы;

$a^3 - b^3$ - разность кубов.

6. $(a+b) \cdot (a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$

$a^2 - ab + b^2$ - неполный квадрат разности;

$a^3 + b^3$ - сумма кубов.

7. $(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$;

$a^2 - b^2$ - разность квадратов.

Понятие степени можно **обобщить**, если **рассматривать в качестве** показателя любое действительное число, **сохраняя при** этом все свойства (1–6) степеней с натуральными показателями.

По определению *полагают*:

$$a^{-r} = \frac{1}{a^r}, \quad a \neq 0 - a \text{ в степени минус } r \text{ равно еди-}$$

нице, делённой на } a \text{ в степени } r.

Из этого определения *вытекает*, что

$$a^0 = a^{r-r} = \frac{a^r}{a^r} = 1 \Rightarrow a^0 = 1.$$

Выражение 0^0 не имеет смысла.

В том случае, когда (если) показатель степени является рациональным числом, степень можно записывать с помощью **радикала** $\sqrt{}$:

$$a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Выражение $\sqrt[q]{a^p}$ называют **корнем степени q** (из a в степени p).

Определение 1. **Арифметическим корнем n -ой степени** из неотрицательного числа a называется неотрицательное число b , для которого $b^n = a$. Например,

$$b_{1,2} = \pm\sqrt{12}, \quad b_1 = +\sqrt{12} - \text{арифметический корень.}$$

Рассмотрим степень $a^r = b$. **Благодаря** обобщению понятия степени в множестве действительных чисел появились три новых действия (три новых операции).

1. **Возведение в степень** – по заданному *основанию* a и *показателю* r вычисляется степень b .

2. **Нахождение корня или извлечение корня** – вычисление основания степени a по заданной степени b и показателю r . Если показатель степени чётное число, то рассматривается только неотрицательное основание a .

3. Вычисление логарифма или нахождение логарифма — нахождение показателя степени r по заданному основанию и степени. В этом действии показатель принято называть логарифмом, а в числовом множестве R рассматриваются только положительные значения основания и степени. Показатель r записывается в виде $r = \log_a b$ — логарифм по основанию a от b .

Сравнительная таблица свойств степеней и логарифмов

№	Возведение в степень	Нахождение логарифма
1	$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}$	$\log_a b + \log_a d = \log_a (b \cdot d)$ <i>Сумма логарифмов равна логарифму произведения.</i>
2	$(a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta}$	$\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$; $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b$
3	$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$	$\log_a b - \log_a d = \log_a \frac{b}{d}$ <i>Разность логарифмов равна логарифму отношения.</i>
4	$\frac{a^\alpha}{b^\alpha} = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$; $a^\alpha b^\alpha = (ab)^\alpha$	Формула перехода к новому основанию $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$; $\log_c b = \frac{1}{\log_b c}$ — частный случай
5	$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$ <i>Логарифм единицы равен нулю.</i>
6	Если $a = b$, то $a^\alpha = b^\alpha$	Если $a = b$, то $\log_a a = \log_b b$ <i>Если величины равны, то равны их логарифмы.</i>
7	При $a > 1$, если $\alpha > \beta$, то $a^\alpha > a^\beta$. При $0 < a < 1$, если $\alpha > \beta$, то $a^\alpha < a^\beta$.	При $a > 1$, если $b > c$, то $\log_a b > \log_a c$. <i>Большей величине соответствует больший логарифм.</i> При $0 < a < 1$, если $b > c$, то $\log_a b < \log_a c$. <i>Большей величине соответствует меньший логарифм.</i>

Логарифмическое тождество

Рассмотрим степень $b = a^r$, где a и b — положительные числа, число r — логарифм по основанию a от числа b (степени), то есть $r = \log_a b$, поэтому степень b можно записать в виде $b = a^{\log_a b}$ — a в степени логарифм по основанию a от числа b .

Это равенство в математике называется **логарифмическим тождеством**.

В математике очень часто в качестве основания логарифма используют число e . В этом случае логарифм называют натуральным (логарифм Непера):

$r = \log_e b = \ln b$ – натуральный логарифм,

$r = \log_{10} b = \lg b$ – десятичный логарифм.

ГЛАВА 2

КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ И ИХ СВОЙСТВА

§1. Базовые понятия

В каждом отдельном случае в алгебраическом выражении выделяются основные для данной задачи буквенные величины — аргументы, относительно которых ведётся классификация, остальные буквенные величины могут называться *коэффициентами* или *параметрами*.

Алгебраическое выражение называется *целым рациональным*, если с его аргументами производятся только сложение, вычитание, умножение и возведение в целую положительную степень.

Алгебраическое выражение называется рациональным, если с его аргументами производятся сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в целую положительную и отрицательную степени.

Рациональное выражение называется дробным, если оно содержит операцию деления на выражения, которые содержат аргумент.

Алгебраическое выражение называется иррациональным, если в нём присутствуют аргументы или рациональные выражения в дробных степенях.

Простейшее целое рациональное выражение — *одночлен*.

Одночленом называется произведение числового множителя и одной или нескольких букв, каждая из которых взята в некоторой степени с целым неотрицательным показателем.

Числовой множитель одночлена называется *коэффициентом одночлена*.

Два одночлена называются равными, если у них одинаковые коэффициенты, и они составлены из одинаковых букв с равными показателями.

Одночлены называются *подобными*, если они отличаются только коэффициентами.

Примеры:

$6abct^5x^3$ - одночлен;

$a^3x + dx^2 + c$ - целое рациональное выражение;

$ax^{-5} + \frac{7}{cx}$ - рациональное выражение;

$\frac{a^2x^7 + bx}{3cx + 5}$ - дробное выражение;

$2x^{\frac{3}{5}} - 7ax^{\frac{1}{9}}$ - иррациональное выражение;

$3abcx^3$ и $6fklx^3$ - подобные члены относительно x .

§2. Многочлены

Алгебраическая сумма (+ или -) нескольких одночленов называется многочленом. Многочлен - целое рациональное выражение. Если многочлен не имеет подобных членов, то он называется *приведённым многочленом*. Обычно многочлены записывают в *приведённом* виде

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} \dots a_{n-1}x + a_n,$$

где a_0 - старший коэффициент, a_0x^n - старший член, a_n - свободный член, n - степень многочлена.

Определение 1. Два многочлена $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ называются равными (одинаковыми, тождественно рав-

ными), если их степени равны ($m=n$) и равны коэффициенты при одинаковых степенях x .

Из определения равенства многочленов следует, что равенство многочленов не зависит от числового значения x . Поэтому, если многочлены равны, то они равны при любом значении x .

Многочлены можно складывать, вычитать, умножать. Для этих действий с многочленами справедливы все основные свойства арифметических действий.

Рассмотрим вопрос о *делимости многочленов*.

Пусть $P_n(x)$ и $D_m(x)$ — два многочлена, причём $n \geq m$.

Если существует такой многочлен $Q_l(x)$, что справедливо равенство

$$P_n(x) = D_m(x) \cdot Q_l(x),$$

говорят, что многочлен $P_n(x)$ делится (нацело делится) на многочлен $D_m(x)$. В этом случае $P_n(x)$ называется делимым ($P_n(x)$ — *делимое*);

$D_m(x)$ называется делителем ($D_m(x)$ — *делитель*);

$Q_l(x)$ называется частным ($Q_l(x)$ — *частное*).

В том случае, когда многочлен $Q_l(x)$ не существует, говорят, что многочлен $P_n(x)$ не делится на многочлен $D_m(x)$, и тогда рассматривают *деление с остатком*.

Определение 2. Разделить многочлен $P_n(x)$ на многочлен $D_m(x)$ с остатком *означает* представить многочлен $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x) = D_m(x) \cdot Q_l(x) + R_k(x), \quad (1)$$

где $Q_l(x)$ и $R_k(x)$ - многочлены, причём $k < m$. Многочлен $R_k(x)$ называется *остатком*.

Можно доказать, что для любых двух многочленов $P_n(x)$ и $D_m(x)$ ($n \geq m$) всегда можно найти и **единственным образом** многочлены $Q_i(x)$ и $R_k(x)$, для которых справедливо равенство (1).

Алгоритм деления многочленов с остатком

Для деления многочленов обычно применяется правило “*деление уголком*”. С этой целью располагают многочлены по убывающим степеням x и находят старший член частного $Q_k(x)$ из условия, что при умножении его на старший член делителя $D_l(x)$ получается старший член делимого $P_n(x)$. Затем найденный член частного умножают на делитель и вычитают из делимого. Следующий член частного определяют из условия, что он при умножении на старший член делителя даёт старший член многочлена разности и т.д. Процесс *продолжается до тех пор, пока* степень новой разности не окажется меньше степени делителя. Эта последняя разность и будет остатком $R_r(x)$.

Пример 1. Выполнить деление, если

$$P_4(x) = x^4 + 2x + x^2 + x^3 + 1, \quad D_2(x) = 1 + x^2.$$

Решение. Прежде всего запишем многочлены по убыванию степеней x . Деление уголком *оформляется* следующим образом:

$$\begin{array}{r}
 \text{делимое} \quad x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 \quad \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 \\ \hline x^2 + x \end{array} \right. \text{ делитель} \\
 \underline{x^4 + x^2} \\
 x^3 + x \\
 \underline{ x^3 + x} \\
 x + 1 \text{ остаток}
 \end{array}$$

Отсюда $Q_2(x) = x^2 + x$, $R_1(x) = x + 1$. В результате получаем

$$x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1 = (x^2 + 1) \cdot (x^2 + x) + x + 1.$$

Пример 2. Выполнить деление, если

$$P_3(x) = x^3 - 1, \quad D_2(x) = x^2 + x + 1$$

Решение. Здесь $Q_1(x) = x - 1$, $R(x) = 0$, так как

$$x^3 - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1).$$

Деление производится *нацело*, т. е. *без остатка*.

Теорема Безу. Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x - c$ равен значению многочлена $P_n(x)$ при $x = c$.

Доказательство. Запишем многочлен в виде

$$P_n(x) = (x - c) \cdot Q_{n-1}(x) + R,$$

где остаток R — *некоторое* число. Пусть в этом равенстве $x = c$, тогда $P(c) = R$, что и требовалось доказать.

Определение 3. Число c называется *корнем многочлена* $P_n(x)$, если $P_n(c) = 0$.

Из теоремы Безу следует, что для делимости многочлена $P_n(x)$ на двучлен $x - c$ без остатка *необходимо и достаточно*, чтобы число c было корнем многочлена $P_n(x)$.

Определение 4. Преобразование многочлена в произведение нескольких многочленов ненулевой степени называется *разложением многочлена на множители*.

§3. Алгебраические дроби

Дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ — многочлены,

называется **алгебраической рациональной дробью**. Дробь называется **правильной**, если $n < m$ и **неправильной**, если $n \geq m$.

Всякую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной дроби. Для этого достаточно разделить с остатком многочлен $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = K_{n-m}(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)}, \quad (2)$$

где частное $K_{n-m}(x)$ — целая часть дроби, а $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ —

правильная рациональная дробь.

Представление неправильной дроби в виде (2) называется **выделением целой части дроби**. Например,

$$\frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = x + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Определение 1. Алгебраические дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \text{ и } \frac{P1(x)}{Q1(x)}$$

считаются равными (тождественно равными) при выполнении равенства

$$P(x) \cdot Q1(x) = P1(x) \cdot Q(x)$$

для всех значений x , при которых $Q(x) \neq 0$, $Q1(x) \neq 0$.

Например,

$$\frac{x+1}{x^2-1} = \frac{1}{x-1}.$$

Из определения равенства дробей вытекает, что дробь не изменится, если числитель и знаменатель умножить на один и тот же многочлен.

Определение 2. Две равные алгебраические дроби образуют **пропорцию**:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P1(x)}{Q1(x)}.$$

Основные свойства пропорций

1. Произведения накрест лежащих членов пропорции равны между собой:

$$P(x) \cdot Q1(x) = P1(x) \cdot Q(x).$$

2. Если задана пропорция $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P1(x)}{Q1(x)}$,

то можно доказать справедливость равенства

$$\frac{kP(x) + lQ(x)}{mP(x) + nQ(x)} = \frac{kP1(x) + lQ1(x)}{mP1(x) + nQ1(x)}, \quad (3)$$

$$(mP(x) + nQ(x) \neq 0, \quad mP1(x) + nQ1(x) \neq 0)$$

Равенство (3) называется **производной пропорцией**.

ГЛАВА 3

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ, ЕЁ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И КЛАССИФИКАЦИЯ

§1. Определение функции

Рассмотрим два числовых множества X и Y из множества действительных чисел R ($X \subset R$, $Y \subset R$). Любому числу x , принадлежащему множеству X ($\forall x \in X$), сопоставим одно число y из множества Y ($\exists! y \in Y$). Такое правило сопоставления называется функцией или числовой функцией. Определим *некоторые понятия*, связанные с функцией.

X — *область определения функции (область задания функции)*, $D(f)$;

Y — *область значений функции (область изменения функции)*, $E(f)$;

x — *независимая переменная или аргумент*;

y — *зависимая переменная или функция*.

Слово “функция” может означать *правило* (закон) сопоставления (f), может означать результат сопоставления (y). Обычно смысл этого слова ясен *из контекста*.

Суперпозиция функций

Предположим, что у функции $y = f(u)$ аргумент u тоже является функцией $u = \varphi(x)$, а область определения функции y совпадает с областью значений функции u . *В этом случае* можно построить *суперпозицию* функций $y = f(\varphi(x))$. Такую функцию можно называть функцией от функции или просто *сложной функцией*.

§2. Способы задания функции

1. Табличный способ.

X	x_1	x_2	x_3		x_{n-1}	x_n
Y	y_1	y_2	y_3		y_{n-1}	y_n

2. Графический способ.

График функции *строится* обычно в определённой системе координат. Наиболее часто пользуются декартовой прямоугольной **правосторонней системой координат**. На *плоскости* такая система координат состоит из двух числовых осей.

Числовая ось, на которой *откладываются значения* независимой переменной, называется **осью абсцисс**. Числовая ось, на которой откладываются значения зависимой переменной, называется **осью ординат**.

Точка пересечения этих осей называется **началом координат**. В прямоугольной системе координат оси пересекаются под углом 90° (девяносто градусов). В правосторонней системе координат ось абсцисс **направлена вправо**, ось ординат **направлена вверх**.

Плоскость с определённой системой координат называется **координатной плоскостью**.

Прямоугольная декартова система координат делит плоскость на четыре **равные части**. Каждая четверть имеет свой номер. Углы, образованные системой координат, называются **координатными углами**. Номера этих углов совпадают с номерами соответствующих координатных четвертей (рис.4).

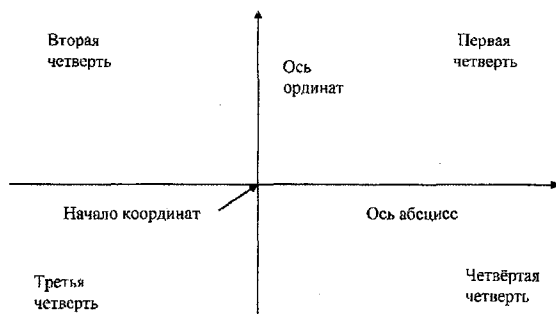


рис. 4

У каждой точки координатной плоскости есть *пара* координат. Если задана функция $y = f(x)$, то её графиком является множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют последнему равенству (рис. 5).

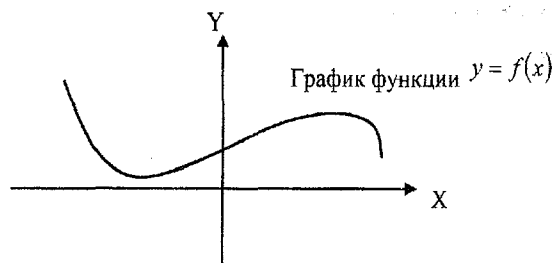


рис. 5

3. Аналитический способ.

Существуют различные способы аналитического задания функций:

$y = f(x)$ — *явное задание функции*,

$y = 3x^3 + 5$ — функция задана *явно*;

$F(x, y) = 0$, $(F(x, y) = C)$ — *неявное задание функции*,

$x^2 + y^2 = r^2$ — функция задана *неявно*;

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ — *параметрическое задание функции*,

$\begin{cases} x = \sin t \\ y = \cos t \end{cases}$ — функция задана *параметрически*.

§3. Основные свойства функций

1. Область определения.

Если у функции нет области определения X , то остальных свойств нет и быть не может.

2. Чётность (нечётность).

Определение 1. Функция $f(x)$ с областью определения X называется **чётной**, если для $\forall x \in X$ *имеет место (справедливо)* равенство

$$f(x) = f(-x).$$

Определение 2. Функция $f(x)$ с областью определения X называется **нечётной**, если при $\forall x \in X$ справедливо (имеет место) равенство

$$f(-x) = -f(x).$$

Из определений 1 и 2 следует, что области определения чётных и нечётных функций **симметричны относительно начала координат**.

График чётной функции **симметричен относительно оси ординат**. График нечётной функции **симметричен относительно начала координат**.

Если функция не *обладает* свойством чётности или нечётности, она называется функцией *общего вида*.

3. Монотонность.

Определение 3. Функция $y = f(x)$ с областью определения X называется **монотонной**, если для

$\forall x_1 \in X$ и $\forall x_2 \in X$ из неравенства $x_2 > x_1$ следует одно из четырёх неравенств:

$y_2 > y_1 \Rightarrow$ функция строго возрастает,

$y_2 \geq y_1 \Rightarrow$ функция не убывает,

$y_2 < y_1 \Rightarrow$ функция строго убывает,

$y_2 \leq y_1 \Rightarrow$ функция не возрастает.

Если функция не обладает свойством монотонности, она называется *немонотонной*.

Обратная функция

Рассмотрим функцию $y = f(x)$ с областью определения X и областью изменения Y . Сделаем обратную операцию, т.е. $\forall y \in Y$ сопоставим единственное значение $x \in X$. При таком сопоставлении *возникает* новая функция $x = \varphi(y)$, которая *по отношению к исходной*, называется обратной. Такие функции часто обозначают в виде $x = f^{-1}(y)$.

Из определения обратной функции следует, что у любой *строго монотонной* функции всегда есть обратная функция. При этом у этих взаимно обратных функций одинаковый тип монотонности. Графики взаимно обратных функций изображаются одинаковой кривой. При изображении графиков этих функций в одной системе координат графики будут симметричны относительно *биссектрисы* первого и третьего координатных углов (рис. 4).

4. *Корни функции.*

Определение 4. Число x_0 называется *корнем функции* $f(x)$, если выполняется равенство $f(x_0) = 0$.

Графический образ корня – *точка пересечения* графика функции с осью абсцисс.

5. Периодичность функции.

Определение 5. Число T называется *периодом функции* $f(x)$, если для $\forall x \in X$ справедливо равенство $f(x \pm T) = f(x)$. Функция в этом случае называется *периодической*. Можно доказать, что если у функции $f(x)$ есть период T , то у неё существуют бесконечно много периодов, которые вычисляются по формуле $T_k = kT$, где k – любое целое число.

6. Ограниченность.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* в области X , если существует такое число N , что при $\forall x \in X$ выполняется неравенство $|f(x)| \leq N$.

7. Наибольшее и наименьшее значения.

Определение 7. Число M называется *наибольшим* значением функции $f(x)$ в области X , если для $\forall x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq M$.

Число m называется *наименьшим* значением функции $f(x)$ в области X , если для $\forall x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq m$.

§4. График функции и его преобразование

Определение 1. Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек плоскости OXY , координатами которых являются значения аргумента x и *соответствующие* значения функции y .

Предположим, что мы знаем график некоторой исходной функции $f(x)$ (рис. 6). Для построения графика функции $f(x+c)$ достаточно сдвинуть график исходной функции параллельно оси абсцисс вправо на c

единиц при $c < 0$ (рис. 6.1) или влево на c единиц при $c > 0$ (рис 6.2).

График функции $f(x) + c$ получается из исходного графика с помощью его подъема на c единиц при $c > 0$ (рис. 6.3) или спуска на c единиц при $c < 0$, параллельно оси ординат (рис 6.4).

Рассмотрим, как строится график функции $y = f(kx)$.

Если $k > 1$, график получается с помощью сжатия исходного графика в k раз вдоль оси абсцисс. Если $0 < k < 1$, график исходной функции разжимается в k раз относительно оси абсцисс.

Аналогично строится график функции $y = Af(x)$. При $A > 1$ график исходной функции сжимается в A раз вдоль оси ординат. При $0 < A < 1$ исходный график разжимается в A раз. Если $A = -1$, исходный график *отражается* симметрично относительно оси абсцисс.

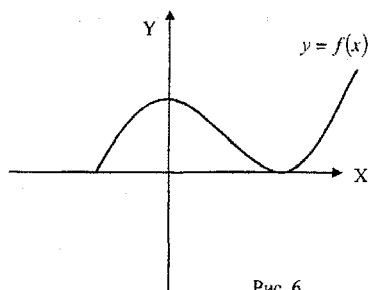


Рис. 6

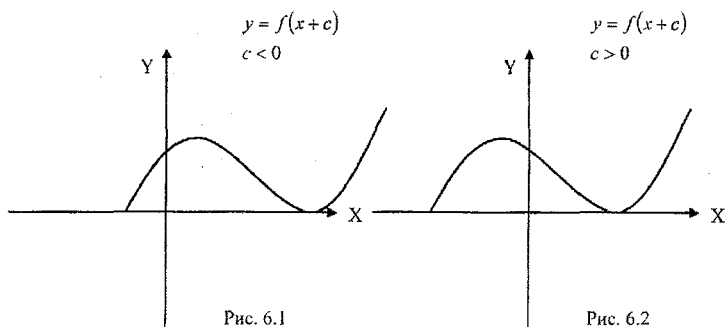


Рис. 6.1

Рис. 6.2

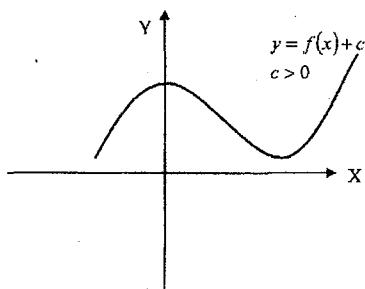


Рис. 6.3

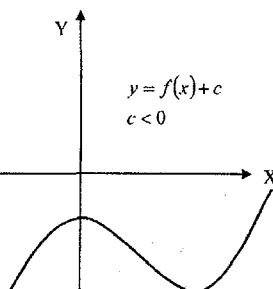


Рис. 6.4

§5. Классификация функций

Основными элементарными функциями называются следующие функции.

1. Степенная функция $y = x^r$, $r \in \mathbb{R}$.
2. Показательная функция $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Логарифмическая функция
 $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$.
4. Тригонометрические функции
 $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.
5. Обратные тригонометрические функции
 $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

Определение 1. *Элементарной функцией* называется явно заданная функция $y = f(x)$, где аналитическое выражение $f(x)$ составлено из основных элементарных функций и постоянных при помощи **конечного** числа операций сложения, вычитания, умножения, деления и суперпозиции основных элементарных функций.

Примеры элементарных функций:

$$y = \sqrt{1 + 4 \sin^2 x}; \quad y = \frac{\log x + 4\sqrt{x} + 2\operatorname{tg} x}{10^x - x + 10}.$$

Примеры *неэлементарных функций*:

1. Функция $y = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ ($y = f(n)$) не является элементарной, так как количество сомножителей неограниченно увеличивается с неограниченным увеличением числа n .

$$2. \text{ Модуль функции } |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{если } f(x) < 0 \end{cases}$$

не является элементарной функцией, так как он задаётся с помощью двух формул.

Среди элементарных функций выделяют *алгебраические функции* трёх видов.

1. *Целая рациональная функция* или многочлен:

$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$, где $a_0, a_1, \dots, a_n$ - коэффициенты, n - степень многочлена, целое неотрицательное число.

2. *Дробно рациональная функция*. Эта функция определяется как отношение двух многочленов:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \dots + b_m}.$$

Примером дробно рациональной функции является фун-

кция *обратно пропорциональной зависимости* $y = \frac{k}{x}$

и *дробно линейная функция*

$$y = \frac{x+a}{x+b}.$$

С помощью элементарных преобразований эту функцию можно представить в виде функции **обратной зависимости**.

$$y = \frac{x+b+a-b}{x+b} = \frac{x+b}{x+b} + \frac{a-b}{x+b} = 1 + \frac{k}{x+b},$$

где $k = a - b$.

3. **Иррациональная функция.** Это элементарная функция с дробно рациональным показателем степени.

Примеры иррациональных функций:

$$y = \frac{2x^2 + \sqrt{x}}{\sqrt{1+5x^2}}; \quad y = \sqrt{x}.$$

Элементарные неалгебраические функции называются **трансцендентными**. Примером таких функций могут быть функции

$$y = \operatorname{tg} x, \quad y = \arccos x, \quad y = \sin x, \quad y = 10^x.$$

ГЛАВА 4

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

§1. Канонические уравнения прямой и её свойства

Функция вида $y = kx + b$ называется *линейной* функцией. В математике используются различные аналитические представления линейной функции, каждое из которых имеет своё применение. Графическим образом линейной функции является прямая линия, поэтому обычно канонические виды линейной функции называют уравнениями прямой. Рассмотрим некоторые из таких *канонических уравнений*.

1. $y = kx + b$ — *уравнение прямой с угловым коэффициентом*.

Коэффициент k — называется угловым коэффициентом; $k = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс, $|b|$ — длина части оси ординат, которая находится между осью абсцисс и прямой (рис. 7).

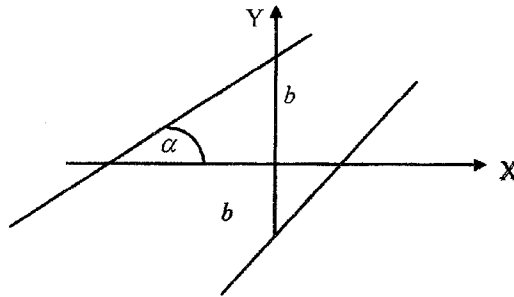


рис. 7

2. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ — уравнение прямой в отрезках.

$|a|$ — длина отрезка, части оси абсцисс, которая находится между осью ординат и прямой; $|b|$ — длина отрезка, части оси ординат, которая находится между осью абсцисс и прямой (рис. 8).

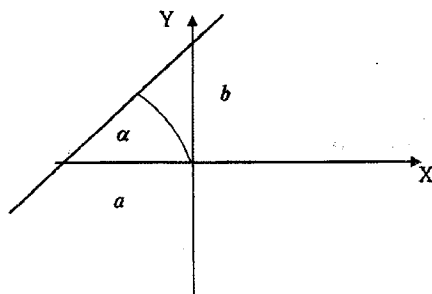


рис. 8

3. $y - y_1 = k(x - x_1)$ — уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом (рис. 9).

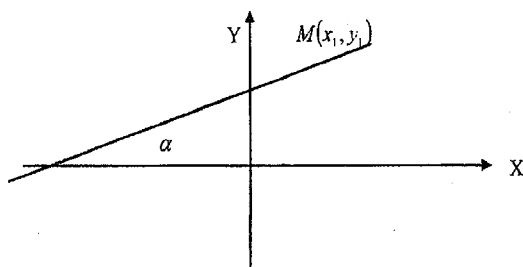


рис. 9

4. $Ax + By + C = 0$ – *общее уравнение прямой*.

С помощью тождественных преобразований каждое из четырёх уравнений может быть преобразовано в уравнение другого вида.

Пример 1. Приведём уравнение в отрезках к общему уравнению прямой.

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \Rightarrow bx + ay = ab \Rightarrow bx + ay - ab = 0.$$

Пример 2. Приведём уравнение прямой с угловым коэффициентом к уравнению в отрезках.

$$y = kx + b \Rightarrow y - kx = b \Rightarrow \frac{y}{b} + \frac{-kx}{b} = 1 \Rightarrow \frac{x}{-\frac{b}{k}} + \frac{y}{b} = 1.$$

Свойства линейной функции.

1. Область определения функции – все действительные числа, т.е.

$$X = R.$$

2. Функция общего вида.

В частном случае $y = kx$ является нечётной функцией.

3. Монотонная функция.

При $k > 0$ возрастает, при $k < 0$ убывает.

4. У линейной функции всегда есть один корень

$$kx + b = 0, \quad x = -\frac{b}{k}.$$

5. Линейная функция – непериодическая.

§2. Метод интервалов

Рассмотрим метод интервалов – классический метод решения определённого вида неравенств. Он целиком основан на свойствах линейной функции.

Предположим, что у нас есть n линейных функций с положительными угловыми коэффициентами.

Для простоты пусть эти функции имеют вид:

$$y = x - x_1, \quad y = x - x_2, \dots, y = x - x_{n-1}, \quad y = x - x_n. \quad (1)$$

Числа $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ – корни соответствующих уравнений. Группу линейных функций можно *упорядочить* так, чтобы

$$x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n.$$

Все линейные функции (1) строго монотонно возрастают и, проходя через свои корни, меняют знак с минуса на плюс (рис. 10).

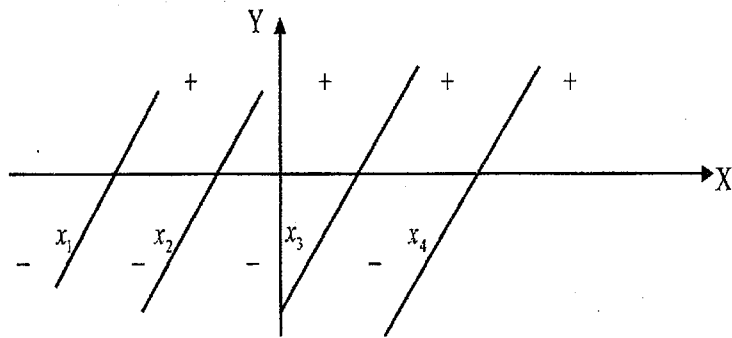


рис. 10

Поставим вопрос о знаке функции, которая является произведением линейных функций (1), то есть найдём, для каких значений аргумента функция

$\phi(x) = (x - x_1) \cdot (x - x_2) \dots (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n)$ больше нуля, а для каких меньше нуля.

Рассмотрим неравенство

$$(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n) > 0. \quad (2)$$

Для всех значений аргумента, больших большего корня ($\forall x > x_n$), все множители функции строго больше нуля, поэтому $\phi(x) > 0$ в области $(x_n; +\infty)$. В интервале $(x_{n-1}; x_n)$ функция $y = x - x_n$ отрицательна, следовательно, и $\phi(x)$ в этом же интервале меньше нуля. В интервале $(x_{n-2}; x_{n-1})$ два сомножителя отрицательны, поэтому функция $\phi(x)$ опять будет положительна и т.д. Такие рассуждения можно представить в виде простейшей схемы (рис. 11).

Схема смены знака функции $\phi(x)$.

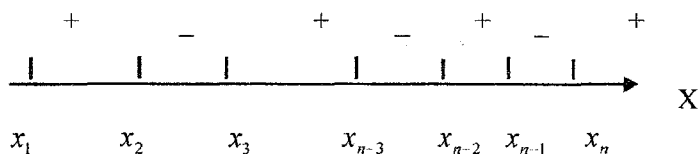


рис. 11

Методом интервалов можно решать неравенства с дробно рациональными функциями вида

$$\beta(x) = \frac{(x - x_1) \cdot (x - x_2) \cdot \dots \cdot (x - x_{k-1}) \cdot (x - x_k)}{(x - x_m) \cdot (x - x_{m+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1}) \cdot (x - x_n)}, \quad (3)$$

так как неравенства

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0 \quad (< 0) \quad \text{и} \quad f(x)g(x) > 0 \quad (< 0)$$

имеют одинаковый смысл при условии, что $g(x) \neq 0$. Первое и второе неравенства говорят о том, что функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют одинаковые знаки (разные знаки).

§3. Упражнения

Решите неравенства методом интервалов:

1. $\frac{1+2x}{|x|-2} \leq 1$; 2. $(5x+3) \cdot (7x-4) \cdot (4-x) > 0$;

3. $\frac{x \cdot (7x+5) \cdot (4-3x)}{(2x+1)} \leq 0$.

Решите уравнения:

4. $\frac{x-3}{2x+3} = 2$; 5. $\frac{1}{x+2} = \frac{3}{1-2x}$.

Постройте графики функций:

6. $y = |x-1| + |x+3|$; 7. $y = 2x - |x-2| + 1$;

8. $y = x + |x+3|$;

9. $y = \frac{2}{x-1}$; 10. $y = -\frac{|x|}{x}$.

11. Найдите площадь фигуры, заданной неравенством

$$|x-1| + |y+3| \leq 2.$$

12. Найдите площадь четырёхугольника, ограниченного прямыми

$$2x + y = -7, \quad 4x + 2y = -10 \text{ и осями координат.}$$

13. Найдите сумму корней уравнения $|x+1| = 2|x-2|$.

14. Найдите значение параметра a , при котором наибольшее отрицательное решение неравенства

$$\frac{ax+10}{x} \geq -3, \text{ равно } -5.$$

15. Найдите сумму целых решений системы:

$$\begin{cases} |x-5| \geq 2 \\ -1 < x < 8 \end{cases}$$

16. Найдите координаты точек на прямой $y = 3x - 2$, отстоящих на одинаковом расстоянии от оси абсцисс и оси ординат.

ГЛАВА 5

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

§1. Определение и основные свойства.

Алгебраическая, рациональная функция $y = ax^2 + bx + c$ называется квадратичной функцией. Коэффициент a называется *старшим коэффициентом*, b – *коэффициент при первой степени*, c – *свободный член*. Выражение $ax^2 + bx + c$ – *квадратный трёхчлен*.

1. Область определения квадратичной функции – всё множество действительных чисел ($\forall x \in R$).
2. Функция общего вида. В частном случае может быть чётной функцией: $y = ax^2 + c$.
3. Функция немонотонная, но у неё есть два интервала монотонности, поэтому можно сказать, что квадратичная функция – кусочно-монотонная функция.
4. У квадратичной функции могут отсутствовать корни, возможен один корень; максимальное количество корней – два.
5. Функция неперiodическая.

§2. Выделение полного квадрата и корни.

Для упрощения исследования поведения квадратичной функции в квадратном трёхчлене выделяют полный квадрат. Ниже представлена простая цепочка таких тождественных преобразований.

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= a \left(x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{c}{a} \right) = \\
&= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \right) \right) = \\
&= a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right). \tag{1}
\end{aligned}$$

Выражение $x^2 + 2x \frac{b}{2a} + \left(\frac{b}{2a} \right)^2$ является полным квадратом.

В любом квадратном трёхчлене всегда можно выделить полный квадрат:

$$ax^2 + bx + c = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right). \tag{2}$$

Примеры.

$$x^2 + x + 1 = \left(x^2 + 2x \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + 1 \right) = \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4};$$

$$x^2 - 3x = x^2 - 2x \frac{3}{2} + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} = \left(x - \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{9}{4};$$

$$\begin{aligned}
4x^2 + 2x - 3 &= 4 \left(x^2 + 2x \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - \frac{1}{16} - \frac{3}{4} \right) = \\
&= 4 \left(\left(x + \frac{1}{4} \right)^2 - \frac{13}{16} \right).
\end{aligned}$$

Для нахождения корней квадратичной функции (корней квадратного трёхчлена) приравняем нулю правую часть равенства (2) и проведём простые преобразования:

$$a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right) = 0 \Rightarrow \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = 0; \quad (3)$$

$$\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}. \quad (4)$$

Знак правой части квадратного уравнения (4) зависит только от знака двучлена $b^2 - 4ac$, который называется **дискриминантом** и обычно обозначается греческой буквой Δ или латинской буквой D .

Возможны три случая.

1. Уравнение (4) имеет два решения (два действительных корня), если $D > 0$. Корни вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}. \quad (5)$$

2. Уравнение (4) имеет один действительный корень, если $D = 0$. Корень вычисляется по формуле:

$$x = -\frac{b}{2a}.$$

Если у квадратичной функции (у квадратного уравнения) есть только один действительный корень, то в этом случае можно говорить, что корень один кратности два или, что у функции два одинаковых корня.

3. Уравнение (4) не имеет действительных корней (у функции нет действительных корней).

Рассмотрим частный случай формулы (5). Предположим, что коэффициент при первой степени – чётное число $b = 2 \cdot b_1$, тогда

$$\begin{aligned}
 x_{1,2} &= \frac{-2b_1 \pm \sqrt{4b_1^2 - 4ac}}{2a} = \frac{2(-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac})}{2a} = \\
 &= \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}. \quad (6)
 \end{aligned}$$

Следует отметить, что алгоритм выделения полного квадрата (1) и формула (6) встречаются в различных разделах высшей математики: аналитическая геометрия, методы интегрирования, математическая физика и т. д.

§3. Теорема Виета.

Если коэффициенты квадратичной функции – целые числа, а старший – равен единице, в этом случае часто можно найти корни с помощью теоремы Виета.

Рассмотрим квадратичную функцию в виде

$$y = x^2 + px + q; \quad x_1, x_2 \text{ – корни этой функции,} \quad (7)$$

тогда свободный член равен произведению корней: $q = x_1 \cdot x_2$, коэффициент при первой степени равен сумме корней, взятой с противоположным знаком: $p = -(x_1 + x_2)$.

Примеры. $x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x_1 = 2; \quad x_2 = 3;$

$$x^2 + 12x - 28 = 0 \Rightarrow x_1 = -14; \quad x_2 = 2;$$

$$x^2 + 9x + 14 = 0 \Rightarrow x_1 = -2; \quad x_2 = -7.$$

Разложение на множители

Любую квадратичную функцию можно разложить на линейные множители, если у функции есть два разных (различных) действительных корня; причём, это разложение единственно:

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1) \cdot (x - x_2)$, где x_1, x_2 — корни квадратного трёхчлена.

Справедливо **обратное утверждение (обратная теорема Виета)**. Если x_1, x_2 — корни некоторого квадратного уравнения или функции вида $y = x^2 + px + q$, то по этим корням можно восстановить и квадратное уравнение, и функцию вида (7).

Пример. Построить квадратное уравнение, корни которого

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{1}{3}.$$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = -\frac{1}{3} \Rightarrow (x - (-1)) \cdot \left(x - \left(-\frac{1}{3}\right)\right) =$$

$$= (x + 1) \cdot \left(x + \frac{1}{3}\right) = 0,$$

$$x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \quad | \cdot 3 \Rightarrow 3x^2 + 4x + 1 = 0.$$

Ответ: $3x^2 + 4x + 1 = 0$.

§4. График функции

График квадратичной функции называется **параболой**. Парабола состоит из двух **ветвей** и **вершины** (рис. 12).

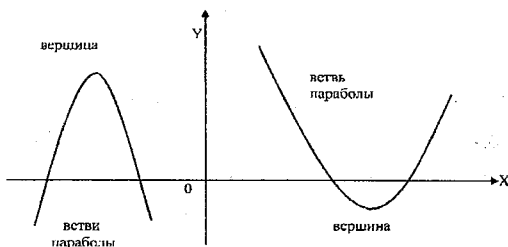


Рис. 12

Положение параболы на плоскости и знак функции зависят от знака старшего коэффициента и количества корней. Если дискриминант отрицательный, то квадратичная функция имеет постоянный знак. Функция положительная, если коэффициент $a > 0$ и отрицательная, если $a < 0$.

Ниже представлены в декартовой системе координат различные виды графиков (парабол) и их зависимость от знаков коэффициента a и дискриминанта D квадратичной функции (рис. 13).

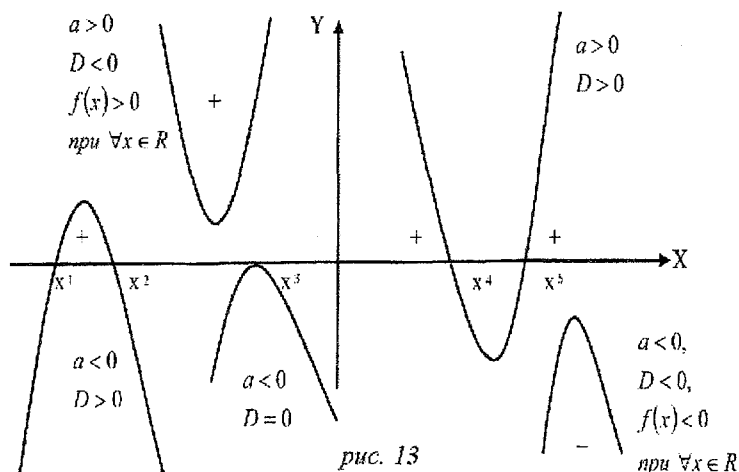


рис. 13

Координаты вершины параболы

Пусть квадратичная функция записана в виде

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}. \quad (8)$$

Если коэффициент $a > 0$, первое слагаемое в выражении (8) неотрицательно. Второе слагаемое не зависит от переменной, т.е. является постоянной величиной. Из этого следует, что наименьшее значение квадратичной функции достигается в точке с абсциссой

$x = -\frac{b}{2a}$. Первое слагаемое при таком значении x *обра-*

щается в ноль, а ордината становится равной $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$.

В этом случае в вершине параболы $V(x_v, y_v)$ функция достигает наименьшего значения.

Аналогичные рассуждения можно провести в случае $a < 0$. В вершине параболы $V(x_v, y_v)$ функция принимает наибольшее значение.

В итоге получаем, что при любом знаке старшего коэффициента координаты вершины параболы вычисляются по формулам:

$$x_v = -\frac{b}{2a}; \quad y_v = -\frac{b^2 - 4ac}{4a}. \quad (9)$$

§5. Использование метода интервалов в общем случае

Любое дробно рациональное неравенство можно всегда преобразовать к виду

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} > 0 \quad (< 0, \leq 0, \geq 0). \quad (10)$$

Будем считать для простоты, что старшие коэффициенты многочленов $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ равны единице.

Любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить на множители в множестве действительных чисел. Множители в таком разложении имеют вид:

$$(x - a), \quad (x^2 + px + q), \quad (x - a_1)^k, \quad (x^2 + p_1x + q_1)^l,$$

где $k = 2, \dots, N; \quad l = 2, \dots, M$.

Квадратичные множители в таком разложении имеют отрицательный дискриминант, т.е. они не раскладываются на линейные сомножители. Поэтому такие множители положительны при любом значении x .

При $k = 2 \cdot n$ и $x \neq a_1$ двучлены вида $(x - a_1)^{2n}$ положительны. При $k = 2n + 1$ двучлен $(x - a)^{2n+1}$ можно представить в виде произведения, $(x - a)^{2n} \cdot (x - a)$, где первый сомножитель положителен. Решение неравенств вида (10) можно упростить, если заранее убрать положительные множители.

Рассмотрим на примерах процесс решения неравенств (10) методом интервалов.

Пример 1. Решить неравенство

$$\frac{(1-2x) \cdot (x^2+x) \cdot (x^2-x-2)}{(3+5x) \cdot (x-x^2-1) \cdot (4-x)} \leq 0.$$

Решение. Для того, чтобы использовать метод интервалов, сделаем **предварительно тождественные преобразования** некоторых сомножителей:

$$1-2x = -2 \left(x - \frac{1}{2} \right), \quad x^2+x = x \cdot (x+1), \quad 4-x = -(x-4),$$

$$x^2-x-2 = (x-2) \cdot (x+1), \quad 3+5x = 5 \cdot \left(x + \frac{3}{5} \right),$$

$$x-x^2-1 = -(x^2-x+1).$$

Перепишем исходное неравенство в виде

$$\frac{-2 \cdot \left(x - \frac{1}{2} \right) \cdot x \cdot (x+1)^2 \cdot (x-2)}{5 \cdot \left(x + \frac{3}{5} \right) \cdot (x^2-x+1) \cdot (x-4)} \leq 0$$

Множитель $(x+1)^2 > 0$ для $\forall x \neq -1$, причём $x = -1$ удовлетворяет неравенству, поэтому это число будет в ответе. Трёхчлен $x^2 - x + 1 > 0$ при $\forall x \in \mathbb{R}$, так как дискриминант $D < 0$. Неравенство можно сократить на число $-\frac{2}{5}$, знак неравенства при этом изменится на противоположный. Исходное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 2)}{\left(x + \frac{3}{5}\right) \cdot (x - 4)} \geq 0 \quad \text{при } x \neq -1$$

Отметим на числовой оси корни числителя и знаменателя (рис. 14).

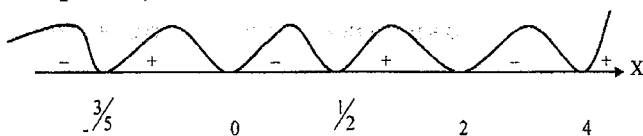


рис. 14

$$\text{Ответ: } x \in \{-1\} \cup \left[-\frac{3}{5}; 0\right] \cup \left[\frac{1}{2}; 2\right] \cup (4; +\infty)$$

Пример 2. Решить неравенство

$$\frac{x}{x^2 - 3x + 1} > \frac{x}{x^2 + 3x + 2}$$

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{x \cdot (x^2 + 3x + 2) - x \cdot (x^2 - 3x + 1)}{(x^2 - 3x + 1) \cdot (x^2 + 3x + 2)} > 0.$$

После тождественных преобразований числителя получаем

$$\frac{x \cdot (6x+1)}{(x^2-3x+1) \cdot (x^2+3x+2)} > 0.$$

Вычисляем корни знаменателя и преобразуем неравенство к виду

$$\frac{x \cdot \left(x + \frac{1}{6}\right)}{(x-x_1) \cdot (x-x_2) \cdot (x+1) \cdot (x+2)} > 0,$$

$$\text{где } x_1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \quad x_2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Отмечаем на числовой оси корни числителя и знаменателя (рис. 15).

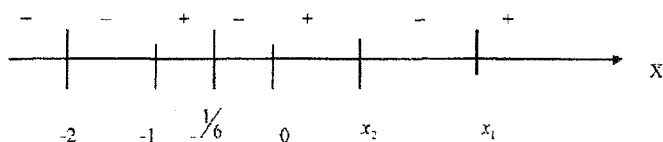


рис. 15

Ответ:

$$x \in (-\infty; -2) \cup \left(-1; -\frac{1}{6}\right) \cup \left(0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$$

§6. Упражнения

1. При каких значениях параметра a график функции $y = ax^2 + (a-3)x + a$ имеет общие точки с положительной полуосью OX ?
2. Найдите среднее арифметическое всех действительных корней уравнения $x^3 - 3x - 2 = 0$.

3. Сколько процентов составляет число 6 от наибольшего значения функции $y = 8 + 4x - x^2$?
4. Найдите меньший корень уравнения $2x|x| + 3 = |x|$.
5. Решите неравенство $x^2 + 2x \leq 3x\sqrt{x}$.
6. Составить уравнение параболы с осью, параллельной оси ординат, если она проходит через начало координат и имеет вершину в точке $A(2, 1)$.
(Ось параболы – это ось симметрии параболы).
7. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{3}{x^2 + |x - 1|}.$$

8. Найдите решения неравенства $\frac{2x - 9}{x - 4} \geq 1$, лежащие в промежутке $[3; 5]$.
9. Решите неравенство $4 < |x + 1| \cdot (|x| + 1)$.
10. Найдите меньший корень уравнения $|x - 1| = 2x^2$.
11. Найдите квадрат разности корней уравнения $x^2 = 3x - 2$.
12. Найдите множество значений функции

$$y = \frac{\sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}.$$

13. Найти сумму корней уравнения $|x + 1| = 2|x - 2|$.
14. Для каких значений параметра a корни квадратного трёхчлена $y = (a - 1)x^2 + ax + 1$ отрицательны?
15. Какой вид имеет квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, если один из его кор-

ней имеет вид $\frac{7}{5 - 3\sqrt{2}}$?

16. Найти сумму всех целых решений неравенства

$$\frac{x^3 - 10x^2 + 24x}{x^2 - 9x + 20} \cdot \frac{1}{5 - x} \geq 0.$$

17. Какой вид имеет уравнение параболы, если точка $M(0; -2)$ принадлежит этой параболе и её вершиной является точка $T(3; -3)$?

18. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^2 - (2a - 5)x + a^2 - 5a + 6 = 0$ положительны?

19. При каких значениях параметра a функцию $y = x^2 + 2(a + 1)x + 9a - 5$ можно представить в виде полного квадрата?

20. Найти сумму корней уравнения

$$(x + 0,5) \cdot (x^2 - 9) = (2x + 1) \cdot (x + 3)^2.$$

21. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{5 - 2x}{4x^2 - 12x + 9}}.$$

22. Найти сумму корней уравнения

$$(4 - x^2) \cdot \sqrt{-3x - 1} = 0.$$

23. Решите неравенство $\frac{(x - 1)^2 + 2x - 2}{(x - 5)^3} \geq 0.$

24. При каких значениях параметра c уравнение

$$x + 4 = \frac{c}{x}$$

имеет два различных действительных корня?

25. Найти сумму координат вершины параболы

$$y = -x^2 - 2x - 2.$$

26. Найти корни уравнения $\frac{8x^3 + 27}{4x + 6} = 5x + 21$.
27. Найдите сумму корней уравнения $|\sqrt{x-4} - 6| = 2$.
28. Найти произведение ординат точек пересечения прямой
 $3x + y = 1$ и гиперболы $y = \frac{3}{3x + 8}$.
29. Укажите наибольшее целое решение неравенства
 $\frac{25}{x^2 - 3x} \geq x^2 - 3x$.
30. Найдите сумму корней уравнения
 $3\sqrt{\frac{6x-10}{x}} - 2\sqrt{\frac{x}{6x-10}} = 5$.
31. Найдите сумму корней $\frac{x+4}{3x^2+9x-12} = \frac{1}{4}$.
32. При каких значениях параметра a выражение
 $x^2 + (a-1)x + 0.25a + 2.75$ можно представить в
 виде квадрата двучлена?
33. Вычислить $\frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1 + x_2}$, если x_1 и x_2 корни уравнения
 $2x^2 - 4x - 7 = 0$.
34. При каком значении b корни уравнения
 $x^2 - 3x + 2b + 3 = 0$ удовлетворяют условию
 $5x_1 + 3x_2 = 23$?
35. Чему равно произведение корней уравнения
 $(x^2 + x + 1) \cdot (x^2 + x - 1) = 3$?

36. Найти произведение корней уравнения

$$10x^3 - 15x^2 - 12x + 18 = 0.$$

37. Постройте графики функций

$$y = |x^2 - 3x + 2|;$$

$$y = x^2 - 3|x| + 2;$$

$$y = |x^2 - 3|x + 2||;$$

$$y = \frac{x}{1 - x^2};$$

$$y = \frac{1}{x^2 - 4};$$

$$y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

ГЛАВА 6

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§1. Показательная функция, её свойства

Функция вида $y = a^x$, где a – постоянное, положительное основание, называется *показательной функцией*.

Основные свойства:

1. Область определения функции – всё множество действительных чисел $\forall x \in R$.
2. Функция общего вида.
3. Монотонная функция. При основании $a > 1$ функция монотонно возрастает, если $0 < a < 1$ – монотонно убывает. Для $a = 1$ функция превращается в константу $y = 1$.
4. У функции нет корней, поэтому график функции не имеет общих точек с осью абсцисс. У графиков всех показательных функций с любым основанием всегда есть одна общая точка на оси ординат, поскольку $a^0 = 1$.
5. Функция непериодическая.
6. Графики показательной функции для случая $a > 1$ и $0 < a < 1$ представлены на рис.16.

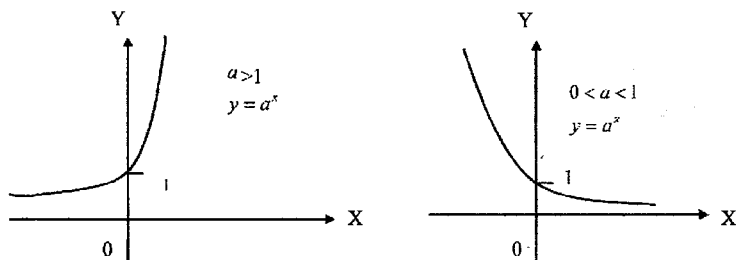


рис.16

Рассмотрим показательные функции, показатели которых являются некоторыми элементарными функциями с общей областью определения. Для таких показательных функций справедливы все свойства степеней:

1. $a^{f(x)} \cdot a^{g(x)} = a^{f(x)+g(x)}$;
2. $a^{f(x)} \cdot b^{f(x)} = (ab)^{f(x)}$;
3. $\frac{a^{f(x)}}{b^{f(x)}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$;
4. $\left(a^{f(x)}\right)^{g(x)} = a^{f(x)g(x)}$;
5. $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x)$
6. $a^{f(x)} > a^{g(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) < g(x), & \text{если } 0 < a < 1; \\ f(x) > g(x), & \text{если } a > 1. \end{cases}$

§2. Логарифмическая функция, её свойства

Логарифмическая функция является обратной к показательной и определяется как функция вида $y = \log_a x$. Основание логарифма $a > 0$, $a \neq 1$.

Основные свойства:

1. Область определения функции – все положительные числа $x > 0$.
2. Функция общего вида.
3. Монотонная функция. Если основание $a > 1$, функция монотонно возрастает, если $0 < a < 1$ – монотонно убывает.
4. У функции есть один корень $\log_a x = 0 \Rightarrow x = 1$ – корень функции.

Графики логарифмических функций с разными основаниями пересекаются в точке $x=1$ оси абсцисс.

5. Функция непериодическая.
6. Для построения графика логарифмической функции $y = \log_a x$ достаточно **перевернуть** (отразить) график показательной функции $y = a^x$ симметрично относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов (рис. 17).

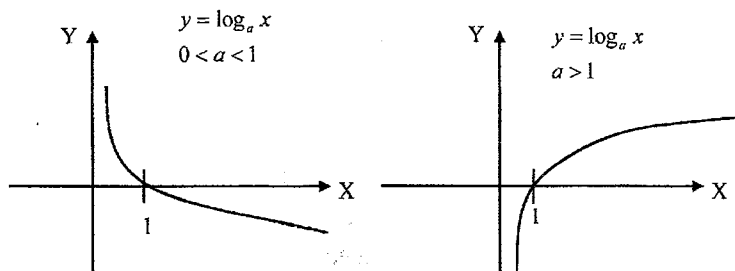


рис. 17

Рассмотрим логарифмические функции от положительных функций $f(x)$ и $g(x)$ с общей областью определения. Для таких логарифмических функций справедливы все свойства логарифмов:

1. $\log_a f(x) + \log_a g(x) = \log(f(x)g(x))$ — *сумма логарифмов равна логарифму произведения;*
2. $\log_a f(x) - \log_a g(x) = \log_a \frac{f(x)}{g(x)}$ — *разность логарифмов равна логарифму отношения;*
3. $\log_a f^r(x) = r \cdot \log_a f(x)$ — *логарифм от степени равен произведению показателя степени на логарифм;*

4. $\log_a f(x) = \frac{\log_a f(x)}{r}$ – логарифм со степенным основанием равен отношению логарифма к показателю этой степени;
5. $\log_a f(x) = \frac{\log_c f(x)}{\log_c a}$ – формула перехода к новому основанию;
6. $\log_a f(x) = \log_a g(x) \Rightarrow f(x) = g(x)$ – из равенства логарифмов следует равенство функций;
- 7.

$$\log_a f(x) > \log_a g(x) \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \text{ если } a > 1, \\ \text{если основание больше единицы,} \\ \text{то большему логарифму} \\ \text{соответствует большая функция;} \\ f(x) < g(x), \text{ если } 0 < a < 1, \\ \text{если основание меньше единицы,} \\ \text{то большему логарифму} \\ \text{соответствует меньшая функция.} \end{cases}$$

§3. Упражнения

Найдите области определения функций:

1. $y = \sqrt{2^{x^2-4x} - \frac{1}{8}};$
2. $y = (x-2)^x;$
3. $y = \frac{2^x + 2^{-x}}{5};$
4. $y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1};$

$$5. y = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2-1}}; \quad 6. y = \frac{1}{\log_2 (x^2-2x-8)-4};$$

$$7. y = \lg|x-1| - \lg|x+2|; \quad 8. y = \lg \frac{1+x}{1-x};$$

$$9. y = \lg(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Установите чётность или нечётность функций:

$$1. y = \frac{2^x + 2^{-x}}{5}; \quad 2. y = \frac{2^x - 2^{-x}}{4}; \quad 3. y = \frac{a^x + 1}{a^x - 1};$$

$$4. y = \lg \frac{1+x}{1-x}; \quad 5. y = \lg(x + \sqrt{1+x^2}).$$

Постройте графики функций:

$$1. y = 3^{x+1} - 1; \quad 2. y = 2^{|x|}; \quad 3. y = a^x + a^{-x};$$

$$4. y = \log_3(1-x^2); \quad 5. y = a^{\log_a x};$$

$$6. y = -\log_2|x| - 1; \quad 7. y = \frac{1}{\lg x}.$$

ГЛАВА 7

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

§1. Классификация уравнений и их преобразования

Уравнением с одним неизвестным называется выражение вида

$$f(x) = \phi(x),$$

где $f(x)$ и $\phi(x)$ — некоторые функции, x — неизвестная величина (искомая величина, неизвестная).

Уравнение называется **алгебраическим**, если входящие в него функции являются алгебраическими, **иррациональным**, если в алгебраическом уравнении присутствует хотя бы одна иррациональная функция, **трансцендентным**, если в уравнении есть неалгебраические функции.

Примеры различных типов уравнений:

$$\frac{0.5x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} = 3 - \text{иррациональное уравнение;}$$

$$\frac{\pi}{x^2-1} - \frac{1}{x} = 3 + x - \text{дробное алгебраическое уравнение;}$$

$$ax^4 + bx^2 - c = 0 - \text{целое алгебраическое уравнение 4-ой степени;}$$

$$2^{\sqrt{x}} = 8; \arctg x = x^2 - \text{трансцендентные уравнения.}$$

Определение 1. Областью допустимых значений (ОДЗ) уравнения называется общая часть всех областей определения функций, входящих в состав уравнения.

Например, ОДЗ уравнения $\sqrt{1-x^2} = \lg x$ является общая часть двух областей $-1 \leq x \leq 1$ и $x > 0$ т.е. $0 < x \leq 1$.

Определение 2. *Решением (корнем)* уравнения называется любое значение неизвестного из ОДЗ, при *подстановке* которого в уравнение последнее превращается в числовое тождество (всегда справедливое равенство).

Определение 3. Два уравнения называются *равносильными (эквивалентными)*, если множество всех корней первого уравнения совпадает с множеством корней второго уравнения.

Определение 4. Преобразование, при котором данное уравнение переходит в равносильное, называется *обратимым преобразованием*.

Можно доказать два достаточно важных свойства уравнений.

1. Уравнения $f(x) = \phi(x)$ и $f(x) + \omega(x) = \phi(x) + \omega(x)$ равносильны, если функция $\omega(x)$ имеет смысл (определена) в ОДЗ первого уравнения.

2. Уравнения $f(x) = \phi(x)$ и $f(x) \cdot \omega(x) = \phi(x) \cdot \omega(x)$ равносильны, если функция $\omega(x)$ имеет смысл (определена) и отлична от нуля в ОДЗ первого уравнения.

Если преобразования не приводят к равносильным уравнениям, то возможна *потеря корней* или появление *посторонних корней* в исходном уравнении. Если второе уравнение – следствие первого, возможны посторонние корни, если первое уравнение *следствие* второго, возможна потеря корней.

Рассмотрим примеры уравнений *с точки зрения* их равносильности.

Функции $f(x)$ и $\phi(x)$ для краткости будем записывать просто в виде f и ϕ .

1) $f = \phi$, $f^2 = \phi^2$ – уравнения *неравносильны*, второе уравнение – следствие первого.

- 2) $f = \phi, f^3 = \phi^3$ – уравнения равносильны.
- 3) $\frac{f}{\phi} = 0, f = 0$ – уравнения неравносильны, второе уравнение – следствие первого.
- 4) $\sqrt{f^2} = c, f = c \ (c > 0)$ – уравнения неравносильны, первое уравнение – следствие второго.
- 5) $\sqrt[3]{f^3} = c, f = c$ – уравнения равносильны.
- 6) $\sqrt{f} \cdot \sqrt{\phi} = c, \sqrt{f\phi} = c \ (c > 0)$ – уравнения неравносильны, второе уравнение – следствие первого.
- 7) $a^f = a^\phi, f = \phi$ – уравнения равносильны.
- 8) $\log_a f = \log_a \phi, f = \phi$ – уравнения неравносильны, второе уравнение – следствие первого.
- 9) $\log_a f^2 = c, 2 \cdot \log_a f = c$ – уравнения неравносильны, первое – следствие второго.
- 10) $\log_a f^3 = c, 3 \cdot \log_a f = c$ – уравнения равносильны.
- 11) $\log_a f + \log_a \phi = c, \log_a f\phi = c$ – уравнения неравносильны, второе уравнение – следствие первого.
- 12) $\log_a f - \log_a \phi = c; \log_a \frac{f}{\phi} = c$ – уравнения неравно-

сильны, второе уравнение – следствие первого.

Преобразования, которые ведут к *сужению* ОДЗ, т.е. к потере корней, *недопустимы*. Необходимо делать *проверку* корней в том случае, когда преобразования уравнений могли привести к появлению *посторонних корней*.

Приведём примеры уравнений, у которых нет решений:

$$1. \sqrt{2x+1} + \sqrt{x^2+5} + 1 = 0;$$

левая часть уравнения положительна, так как корни арифметические.

$$2. \sqrt{x-5} + \sqrt{2-x} = 8$$

ОДЗ: $x-5 \geq 0$, $2-x \geq 0$, т.е. $x \geq 5$, $x \leq 2$ — система неравенств **несовместна (противоречива)**.

$$3. \sqrt{x^2-1} + \sqrt{1-x^2} = x;$$

ОДЗ: $x^2-1 \geq 0$, $1-x^2 \geq 0$, $x \geq 0$, т.е. $x^2 \geq 1$, $x^2 \leq 1$,

$x \geq 0$, общая часть: $x = 1$. Но при таком значении x левая часть уравнения равна нулю, а правая единице, что **невозможно**.

Рассмотрим примеры решений другой группы уравнений:

$$1. \frac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt{0,5x^5+0,1x^4}} = \frac{\sqrt{10}}{x^2}.$$

Решение. ОДЗ: $x > -\frac{1}{2}$, $x \neq 0$. Сокращая на x^2 и

$\sqrt{5x+1}$, получим тождество: $1 = 1$

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{5}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

$$2. \sqrt{2x^2+3x+2} + \sqrt{2x^2-3x+2} = \sqrt{7x^2+8}.$$

Решение. ОДЗ: $x \in (-\infty, +\infty)$, так как дискриминанты отрицательны, а старшие коэффициенты всех подкоренных выражений положительны.

Возводим в квадрат уравнение, приводим подобные члены и получаем уравнение

$$2 \cdot \sqrt{4x^4 - x^2} + 4 = 3x^2 + 4,$$

которое равносильно исходному уравнению. Возведём ещё раз в квадрат и снова получим равносильное уравнение:

$$\begin{aligned} 7x^4 - 28x^2 &= 0, \\ 7x^2 \cdot (x^2 - 4) &= 0. \end{aligned}$$

Корни уравнения *очевидны*.

Ответ: $x_{1,2} = 0$, $x_{3,4} = \pm 2$.

$$3. \lg x^2 = 2.$$

Решение. ОДЗ: $x \neq 0$.

Первый способ. $\lg x^2 = \lg 100$, $x^2 = 100$, $x_{1,2} = \pm 10$.

Второй способ. $2\lg|x| = 2$, $\lg|x| = 1$, $|x| = 10$, $x_{1,2} = \pm 10$.

Неверным было бы такое решение:

$$2 \cdot \lg x = 2, \lg x = 1, x = 10.$$

В результате преобразований произошло сужение ОДЗ, что привело к потере корня $x = -10$.

Ответ: $x_{1,2} = \pm 10$.

$$4. (x-5)^{x+1} = (x-5)^3.$$

Решение. Это уравнение со *степенно-показательной* функцией. Она определена при любом вещественном показателе и только при положительном основании. ОДЗ: $x > 5$.

Приравнивая показатели степеней, получим $x = 2$ — это значение, не входит в ОДЗ.

Рассмотрим особый случай, когда основание равно единице, при этом $x = 6$, а исходное уравнение превращается в тождество.

Ответ: $x = 6$

$$5. \sqrt{\lg(1-x)} + 5\lg(1-x) = 6.$$

Решение.

$$\text{ОДЗ: } 1-x > 0, \lg(1-x) \geq 0; \Rightarrow x < 1, 1-x \geq 1 \Rightarrow x < 0.$$

Пусть $\sqrt{\lg(1-x)} = t, t \geq 0 \Rightarrow 5t^2 + t - 6 = 0$; корни уравнения:

$$t_1 = -\frac{6}{5}, t_2 = 1.$$

Первый корень посторонний, а второй приводит к уравнению $\sqrt{\lg(1-x)} = 1. \Rightarrow \lg(1-x) = 1,$

$$1-x = 10, x = -9.$$

Ответ: $x = -9$.

$$6. x^2 - 5 + \sqrt{x^2 - 6} = 7.$$

Решение. ОДЗ: $x^2 - 6 \geq 0, |x| \geq \sqrt{6}.$

Уединим корень:

$$\sqrt{x^2 - 6} = 12 - x^2 \Rightarrow 12 - x^2 \geq 0 \Rightarrow |x| \leq \sqrt{12}.$$

В результате появилось **дополнительное** ограничение.

Решение будем искать в области $\sqrt{6} \leq |x| \leq \sqrt{12}.$

При возведении в квадрат ОДЗ расширяется и возможно появление посторонних корней (нужна проверка). После возведения в квадрат получим уравнение $x^4 - 25x^2 + 150 = 0.$

Корни уравнения: $x_{1,2} = \pm\sqrt{10}$ и $x_{3,4} = \pm\sqrt{15}$. Последняя пара корней – посторонняя.

Ответ: $x_{1,2} = \pm\sqrt{10}$.

§2. Уравнения, содержащие параметры

В уравнения, кроме неизвестных, могут входить числа, **обозначенные** буквами. Такие буквенные величины обычно называют **параметрами**. Числовые значения параметра, при которых уравнение имеет смысл, называются **допустимыми**. Множество всех таких значений составляет ОДЗ параметра.

Решение уравнения с параметрами начинается **обычно** с нахождения ОДЗ неизвестного и ОДЗ параметров. Решить уравнение, содержащее параметр, означает, что для каждого допустимого значения параметра следует найти множество всех корней данного уравнения (найти формулы). Обязательно следует исследовать особые значения параметра, при которых корни уравнения существуют, но не выражаются полученными формулами.

Пример. Решить уравнение $m^2 \cdot (x - 2) - 3m = x + 1$.

Решение. После преобразований получим:
 $(m^2 - 1) \cdot x = 2m^2 + 3m + 1$. Если $|m| \neq 1$, то решение выражается формулой

$$x = \frac{2m^2 + 3m + 1}{m^2 - 1} = \frac{2m + 1}{m - 1}.$$

Рассмотрим те значения параметра, при которых формула не имеет смысла: $m = \pm 1$. Если $m = 1$, исходное уравнение **противоречиво**:

$$1 \cdot (x - 2) - 3 \cdot 1 = x + 1 \Rightarrow x - 5 = x + 1 \Rightarrow -5 = 1,$$

чего быть не может. Если $m = -1$, то уравнение удовлетворяется тождественно:

$$(-1)^2 \cdot (x-2) + 3 = x+1 \Rightarrow x+1 = x+1.$$

Ответ: $x = \frac{2m+1}{m-1}$, если $|m| \neq 1$; x — любое действительное число, если $m = -1$.

§3. Уравнения с двумя неизвестными

Уравнения с двумя неизвестными $F(x, y) = 0$ в общем случае имеет **бесчисленное** множество решений. Можно задать одному из неизвестных произвольное (допустимое) значение, тогда из уравнения находится соответствующее значение второго неизвестного. Геометрически это означает, что линия, уравнением которой является $F(x, y) = 0$, состоит из бесчисленного множества точек, координаты которых являются решением уравнения $F(x, y) = 0$.

Определение. Алгебраическое уравнение называется **однородным уравнением**, если оно содержит слагаемые одной и той же степени относительно неизвестных и не содержит свободного члена. Например,

$$ax + by = 0; \quad ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0.$$

У однородного уравнения среди бесчисленного множества решений всегда есть нулевое решение (**тривиальное решение**). Найдём ненулевые решения однородного уравнения.

Рассмотрим однородное уравнение второй степени

$$ax^2 + dxy + cy^2 = 0.$$

Предположим, что $x = yt$, тогда

$$ay^2t^2 + bty^2 + cy^2 = 0 \quad \text{или} \quad y^2 \cdot (at^2 + bt + c) = 0.$$

Если $y = 0 \Rightarrow x = 0$ (нулевое решение). Пусть $y \neq 0$ и корни уравнения $at^2 + bt + c = 0$ равны t_1 и t_2 , тогда получим решение однородного уравнения:

$x = t_1 y$, $x = t_2 y$, где y - любое действительное число.

§4. Системы линейных уравнений

Два или больше уравнений образуют систему уравнений. Решить систему уравнений – значит найти такие значения неизвестных, при которых каждое уравнение превращается в тождество.

Определение 1. Система называется *совместной*, если у неё есть хотя бы одно решение. Система называется *несовместной*, если у неё нет ни одного решения.

Определение 2. Системы называются *эквивалентными (равносильными)*, если решения этих систем полностью совпадают.

Пусть дана система двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2 \end{cases} \quad (1)$$

Умножим первое уравнение на a_{22} , а второе – на a_{12} . Вычитая второе уравнение из первого, построим уравнение, из которого *исключена* неизвестная y :

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot x = c_1a_{22} - c_2a_{12}. \quad (2)$$

Умножим первое уравнение на a_{21} , а второе – на a_{11} , вычитая первое уравнение из второго, исключим x :

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) \cdot y = c_2a_{11} - c_1a_{21}. \quad (3)$$

Выражение $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ записывается обычно в виде квадратной таблицы, которая называется *определителем* системы и обозначается греческой буквой Δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \quad (4)$$

Определитель системы Δ составлен из коэффициентов при неизвестных. Правую часть уравнения (2) легко получить с помощью Δ , если формально заменить коэффициенты при x свободными членами; обозначим такой определитель Δ_x . Правую часть уравнения (3) получим из Δ , заменив коэффициенты при y свободными членами; обозначим этот определитель Δ_y :

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

$$\Delta_x = c_1a_{22} - c_2a_{12}; \quad \Delta_y = a_{11}c_2 - a_{21}c_1.$$

Предположим, что $\Delta \neq 0$, тогда у системы существует решение и оно единственно. Неизвестные могут быть найдены по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \quad (6)$$

Рассмотрим случай, когда Δ равно нулю и хотя бы одно из чисел Δ_x или Δ_y не равно нулю. В этом случае система несовместна, т.е. у системы нет решений.

Пусть теперь все три определителя равны нулю:

$$\Delta = 0, \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0 \Rightarrow \frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}};$$

$$\Delta_x = 0, \quad c_1 a_{22} - c_2 a_{12} = 0 \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_{12}}{a_{22}};$$

$$\Delta_y = 0, \quad c_1 a_{21} - c_2 a_{11} = 0 \Rightarrow \frac{c_1}{c_2} = \frac{a_{11}}{a_{21}}.$$

Из приведённых равенств видно, что в этом случае коэффициенты при *одноимённых* неизвестных и свободные члены пропорциональны:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{c_1}{c_2} = k - \text{коэффициент пропорцио-}$$

нальности ($k \neq 0$).

Система превращается в одно уравнение с двумя неизвестными и, следовательно, имеет бесконечное множество решений.

Таким образом, при решении системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными возможны три случая.

1. Если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера.
2. Если $\Delta = 0$, и хотя бы один из определителей Δ_x , Δ_y не равен нулю, система несовместна.
3. Если $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ система имеет бесконечно много решений.

Можно классифицировать эти три случая с помощью отношений коэффициентов.

1. Система имеет единственное решение, если коэффициенты при одноимённых неизвестных не пропорциональны:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} \neq \frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

2. Система является несовместной, если коэффициенты при одноимённых неизвестных пропорциональны, но не пропорциональны свободным членам:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} \neq \frac{c_1}{c_2}.$$

3. Система имеет бесконечно много решений, если коэффициенты при одноимённых переменных и свободные члены пропорциональны:

$$\frac{a_{11}}{a_{21}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Рассмотрим *однородную линейную систему*

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = 0 \\ a_{21}x + a_{22}y = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что однородная система всегда имеет нулевое решение: $x = y = 0$. Если $\Delta \neq 0$, то это решение единственно. Если $\Delta = 0$, то кроме нулевого решения есть ещё бесконечное множество решений.

Рассмотрим примеры анализа решений линейных систем.

Пример 1.

$$\begin{cases} 3x + 5y = 13 \\ 7x - 2y = 3. \end{cases}$$

Решение. $\Delta = -2 \cdot 3 - 5 \cdot 7 = -41 \neq 0$. Система имеет единственное решение.

Ответ: $x = 1, \quad y = 2$.

Пример 2.

$$\begin{cases} x + 4y = 10 \\ 3x + 12y = 17. \end{cases}$$

Решение. $\Delta = 1 \cdot 12 - 4 \cdot 3 = 0$. Отношение коэффициен-

тов: $\frac{1}{3} = \frac{4}{12} \neq \frac{10}{17}$.

Ответ: система несовместна.

Пример 3.

$$\begin{cases} 2x - 7y = 21 \\ 8x - 28y = 84. \end{cases}$$

Решение.

$$\Delta = 2 \cdot (-28) - (-7) \cdot 8 = 0, \quad \Delta_x = 21 \cdot (-28) - (-7) \cdot 84 = 0.$$

Все коэффициенты и свободные члены пропорциональны:

$\frac{2}{8} = \frac{-7}{-28} = \frac{21}{84}$. Система имеет бесконечное множество решений.

Ответ: для $\forall x \in R$; $y = \frac{21-2x}{7}$; если $x = 1 \Rightarrow y = \frac{19}{7}$,

при $x = 7 \Rightarrow y = 1$.

Пример 4.

$$\begin{cases} 5x + 2y = 0 \\ 6x + 7y = 0. \end{cases}$$

Решение. $\Delta = 5 \cdot 7 - 2 \cdot 6 \neq 0 \Rightarrow$ Система имеет единственное решение: $x = y = 0$.

Пример 5. Исследовать систему с параметром a .

$$\begin{cases} (a+1)x - (2a+1)y = a \\ (3a+1)x - (5a+1)y = a+1. \end{cases}$$

Решение.

$\Delta = -(a+1) \cdot (5a+1) + (2a+1) \cdot (3a+1) = a \cdot (a-1)$. Если $a \neq 0$ и $a \neq 1 \Rightarrow \Delta \neq 0$.

Решение выражается формулами.

$$x = -\frac{3a+1}{a}, \quad y = -\frac{2a+1}{a}.$$

Рассмотрим те значения параметра, при которых $\Delta = 0$. Если $a = 0$, система принимает вид:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 1. \end{cases}$$

Очевидно, что эта система несовместна. Если $a = 1$, система имеет вид:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 4x - 6y = 2. \end{cases}$$

Эта система эквивалентна уравнению $2x - 3y = 1$, у которого есть бесконечное множество решений: для

$$\forall y \in R, \quad x = \frac{1+3y}{2}.$$

Ответ: система имеет единственное решение:

$$x = -\frac{3a+1}{a}, \quad y = -\frac{2a+1}{a} \quad (a \neq 0 \text{ и } a \neq 1).$$

Если $a = 0$ — у системы нет решений, при $a = 1$, у системы есть бесконечное множество решений: $x = \frac{1+3y}{2}$

для $\forall y \in R$.

Геометрическая интерпретация решений линейных систем

Известно, что каждому (одному) уравнению первой степени с двумя неизвестными соответствует на плоскости некоторая прямая. Если система имеет единственное решение, это означает, что прямые пересекаются в одной точке (координаты *точки пересечения* прямых являются решением системы). Если система несовместна – прямые параллельны. Если бесконечно много решений – прямые линии *сливаются (совпадают)*.

§5. Упражнения

Решите иррациональные уравнения:

1. $5 - \sqrt{x-4} = 4 \cdot (x-4)$; 2. $\sqrt{2-x-x^2} = 1-x$;
3. $\sqrt{3x-5} = 3 - \sqrt{2x}$;
4. $\sqrt{x^2-3x+5} + x^2 = 3x+7$; 5. $\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{4}{13} \left(x + \frac{1}{x} \right)$.
6. Решите неравенство $x^2 + 2x \leq 3x\sqrt{x}$.
7. При каких значениях a корни уравнения $1+x^2 = \sqrt{10-a^2} - ax$ являются целыми числами?
8. При каких значениях a уравнение $\sqrt{x^2-x} = \sqrt{3x+a}$ имеет ровно одно решение?
9. Найдите корень уравнения $\sqrt{x+3} \cdot \sqrt{2x-1} = x+1$.
10. При каких значениях параметра c уравнение $x+4 = \frac{c}{x}$ имеет два различных действительных корня?

11. Найдите сумму корней уравнения $|\sqrt{x-4}-6|=2$.

12. Найдите произведение ординат точек пересечения прямой $3x+y=1$ и гиперболы $y=\frac{3}{3x+8}$.

Решите логарифмические уравнения:

13. $2\lg \lg x = \lg(3-2\lg x)$;

14. $\log_{x-3} \sqrt{x^2-6x+9} = 1$;

15. $\log_{16x} x^3 + \log_x \sqrt{x} = 2$;

16. $\log_4(x+12) \cdot \log_x 2 = 1$.

Решите показательные уравнения:

17. $5^x \cdot \sqrt[3]{8^x} = 100$; 18. $17^{x^2-5x+6} = 1$; 19. $x^{x-2} = 1$;

20. $7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}$; 21. $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$;

22. $3^{x+8} \cdot 7^{3x} = 21^{2x+4}$; 23. $(6+\sqrt{35})^{\frac{x}{3}} + (6-\sqrt{35})^{\frac{x}{3}} = 12$.

ГЛАВА 8

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

§1. Углы, дуги и их измерение

Углом на плоскости называют фигуру, образованную двумя *лучами*, *выходящими* из одной точки. Любой угол, образованный двумя радиусами одной окружности, называется *центральный углом*. Центральному углу соответствует дуга этой окружности, ограниченная концами этих радиусов. Углы и дуги обычно измеряются градусной или радианной мерой (измеряются в радианах или в градусах).

Один градус – это $\frac{1}{360}$ часть окружности. Центральный угол, равный одному градусу, опирается на дугу, равную одному градусу. Для более точных измерений градус делится на 60 равных частей. Одна шестидесятая $\frac{1}{60}$ часть градуса называется *минутой*. Минута тоже делится на 60 равных частей, одна шестидесятая часть минуты называется *секундой*.

При радианном измерении углов единицей измерения служит центральный угол, который опирается на дугу окружности, равную по длине радиусу этой окружности.

Любая окружность содержит 2π радиан. Вычислим радианную меру 1° (одного градуса):

$$\begin{aligned} 2\pi \text{ (радиан)} &\text{ соответствует } 360^\circ \\ x \text{ (радиан)} &\text{ соответствует } 1^\circ \end{aligned} \Rightarrow x = \frac{2\pi \cdot 1^\circ}{360^\circ} = 0,0174...$$

Радианная мера является *безразмерной величиной*, поэтому записывается числом без *наименования*.

§2. Основные тригонометрические величины и тождества

Рассмотрим плоскость с заданной прямоугольной декартовой системой координат. Выберем на плоскости любую точку $M(x, y)$, которая не совпадает с началом координат. Построим **радиус-вектор** (*подвижной радиус*) OM , длина которого равна r , и введём угол α , который отсчитывается от положительного направления оси абсцисс против часовой стрелки до радиус-вектора OM (рис 18). При таком отсчёте угла он будет положительным. Угол будет отрицательным, если он отсчитывается от положительного направления оси абсцисс по часовой стрелке (рис 19).

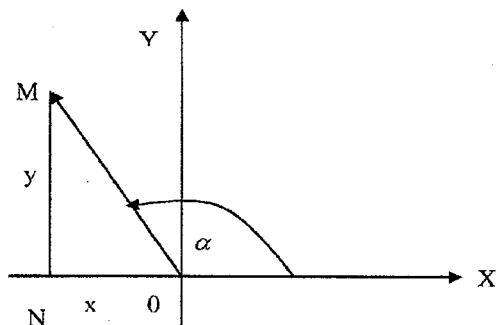


рис 18

Определение 1. Косинусом угла α называется отношение абсциссы конца радиус-вектора, образующего угол α с осью абсцисс, к длине этого радиуса:

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}.$$

Определение 2. Синусом угла α называется отношение ординаты конца радиус-вектора, образующего угол α с осью абсцисс, к длине этого радиуса:

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}.$$

Определение 3. Тангенсом угла α называется отношение синуса этого угла к его косинусу:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}.$$

Определение 4. Котангенсом угла α называется отношение косинуса этого угла к его синусу:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x}{y}.$$

Численные значения $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ не зависят от длины подвижного радиуса, поэтому обычно **полагают**, что $r = 1$. Конец подвижного радиуса в этом случае находится на единичной окружности. Синус угла равен ординате конца подвижного радиуса, а косинус его абсциссе (рис. 19).

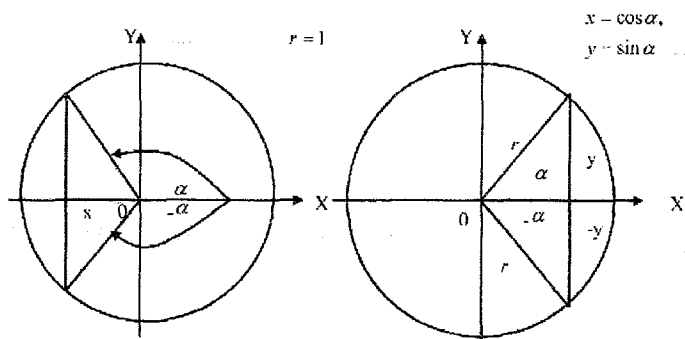


рис. 19

Основные тригонометрические тождества

Представим основные соотношения, которыми связаны тригонометрические величины одного угла.

1. Сумма квадратов косинуса и синуса одного угла равна единице:

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1. \quad (1)$$

2. Тангенс и котангенс одного угла – взаимно обратные величины:

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1. \quad (2)$$

Разделим тождество (1) на $\cos^2 \alpha$, а затем тождество (1) на $\sin^2 \alpha$, мы получим ещё два тождества:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}; \quad 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}. \quad (3)$$

С помощью тождества (1) можно выразить косинус угла через его синус и синус через косинус:

$$\sin \alpha = \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}; \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}. \quad (4)$$

Тождество (4) даёт возможность выразить тангенс и котангенс угла через его косинус или синус:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}},$$
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sin \alpha}. \quad (5)$$

Чётность и нечётность тригонометрических величин

Из определения косинуса угла следует его чётность:

$$\cos \alpha = \cos(-\alpha). \quad (6)$$

Равенство (6) означает, что смена знака угла не меняет значения косинуса (рис. 19). Из определения синуса угла следует его нечётность:

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha. \quad (7)$$

Равенство (7) означает, что смена знака угла приводит к смене знака синуса (рис. 19). Тангенс и котангенс угла тоже обладают свойством нечётности, то есть при изменении знака угла изменяется только знак тангенса и котангенса:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}(\alpha), \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}(\alpha). \quad (8)$$

Определение 5. Два угла α и β называются *взаимно дополнительными*, если их сумма равна $\frac{\pi}{2}$.

Для взаимно дополнительных углов справедливы равенства:

$$\sin \alpha = \cos \beta,$$

$$\cos \alpha = \sin \beta,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} \beta.$$

Таблица значений тригонометрических величин
некоторых углов

Градусы α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
Рadianы α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0	-

§3. Обратные тригонометрические величины

Определение 1. Угол α называется арксинусом m ($\alpha = \arcsin m$), если угол α принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а синус этого угла равен числу m :

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \\ \sin \alpha = m, |m| \leq 1. \end{cases}$$

Определение 2. Угол α называется арккосинусом m ($\alpha = \arccos m$), если угол α принадлежит отрезку $[0, \pi]$, а косинус этого угла равен числу m :

$$\begin{cases} 0 \leq \alpha \leq \pi \\ \cos \alpha = m, |m| \leq 1. \end{cases}$$

Определение 3. Угол α называется арктангенсом m ($\alpha = \arctg m$), если угол α принадлежит интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, а тангенс этого угла равен числу m :

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{tg} \alpha = m. \end{cases}$$

Определение 4. Угол α называется арккотангенсом m ($\alpha = \operatorname{arccotg} m$), если угол α принадлежит интервалу $(0, \pi)$, и котангенс этого угла равен числу m :

$$\begin{cases} 0 < \alpha < \pi \\ \operatorname{ctg} \alpha = m. \end{cases}$$

При всех допустимых значениях угла справедливы тождества

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Примеры:

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}; \quad \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3};$$

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}; \quad \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

§4. Теоремы сложения

Теорема 1. Косинус суммы (разности) двух углов равен произведению косинусов минус (плюс) произведению синусов данных углов:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta, \quad (9)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta. \quad (10)$$

Доказательство. Докажем формулу (10). Доказательство *основывается* на том, что при вращении координатных осей XOY вокруг точки O длины отрезков не изменяются. Даны дуги α и β ; пусть M и N — точки единичной окружности с центром в начале координат, в которых оканчиваются эти дуги: $\angle AOM = \alpha$ и $\angle AON = \beta$ (рис. 20).

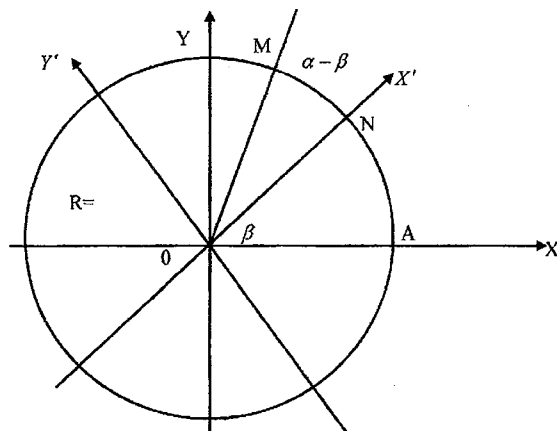


рис. 20

В системе координат XOY точки M и N имеют следующие координаты:

$$x_M = \cos \alpha, \quad y_M = \sin \alpha; \quad x_N = \cos \beta, \quad y_N = \sin \beta.$$

Квадрат расстояния между точками M и N равен:

$$\begin{aligned} |MN|^2 &= (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 = \\ &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 = \\ &= (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta) + \\ &+ (\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta - 2 \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - \\ &- 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) = \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta). \end{aligned}$$

Повернём оси координат на угол β . Точка N лежит на новой оси OX' . Отрезок OM составляет с осью

OX' угол $\alpha - \beta$. Точки M и N в системе координат $X'OY'$ будут иметь координаты:

$$x'_M = \cos(\alpha - \beta), y'_M = \sin(\alpha - \beta); x'_N = 1, y'_N = 0.$$

Вычислим квадрат расстояния между точками M и N в новой системе координат:

$$\begin{aligned} |MN|^2 &= (x'_M - x'_N)^2 + (y'_M - y'_N)^2 = \\ &= (1 - \cos(\alpha - \beta))^2 + \sin^2(\alpha - \beta) = \\ &= (\cos^2(\alpha - \beta) + \sin^2(\alpha - \beta)) + 1 - 2\cos(\alpha - \beta) = \\ &= 2 - 2\cos(\alpha - \beta). \end{aligned}$$

Приравняем два найденных выражения для квадрата длины отрезка MN

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta),$$

после сокращения получается формула (10):

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Для получения формулы (9) достаточно заменить в формуле (10) угол β на угол $-\beta$ и использовать чётность косинуса и нечётность синуса:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - (-\beta)) &= \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \sin \alpha \sin(-\beta) = \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Теорема 2. Синус суммы (разности) двух углов равен произведению синуса первого угла на косинус второго плюс (минус) произведение косинуса первого угла на синус второго:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \quad (11)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (12)$$

Доказательство. Испо́льзуем свойства взаимно дополнительных углов и перейдём от синуса к косинусу дополнительного угла:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \beta\right) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\cos\beta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)\sin\beta = \\ &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Приравняем начало и конец цепочки этих равенств:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Заменив в полученной формуле (11) угол β на угол $-\beta$, получим формулу (12) для синуса разности:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha - \beta) &= \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \\ &= \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Теорема 3. При всех допустимых значениях углов α и β справедлива формула:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha) + \operatorname{tg}(\beta)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}. \quad (13)$$

Доказательство. Выразим тангенс через синус и косинус:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}.$$

Разделим числитель и знаменатель на $\cos\alpha\cos\beta \neq 0$, после этого формула (13) будет *очевидна*:

Заменим в формуле (13) β на $-\beta$ и, используя свойство нечётности тангенса, получим формулу для тангенса разности двух углов:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} \quad (14)$$

§5. Формулы двойного угла

Рассмотрим частный случай для формул (9), (11), (13). Пусть $\alpha = \beta$, тогда эти формулы преобразуются к виду:

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}.$$

Последние три формулы удобнее использовать в общем виде:

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}; \quad (15)$$

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}; \quad (16)$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}. \quad (17)$$

Формулы (15) – (17) выражают косинус, синус и тангенс угла через соответственно косинус, синус и тангенс половинного угла.

§6. Формулы понижения степени

Рассмотрим *совместно* две формулы:

$$\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \cos 2\alpha,$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

После сложения этих формул и последующего деления на два получаем формулу

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}. \quad (18)$$

Вычитаем из второго равенства первое, делим на два и приходим к формуле

$$\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}. \quad (19)$$

§7. Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму

Складываем формулы (9) и (10), делим результат на два и приходим к тождеству

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)). \quad (20)$$

Вычитаем из формулы (9) формулу (10), делим разность на два, получаем тождество

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)) \quad (21)$$

Аналогичным путём с помощью формул (11) и (12) получается тождество

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \quad (22)$$

§8. Преобразование суммы и разности синусов и косинусов в произведение

Введём *вспомогательные* углы $\delta = \alpha + \beta$ и $\lambda = \alpha - \beta$. Выразим углы α и β через вспомогательные углы:

$$\alpha = \frac{\delta + \lambda}{2}, \quad \beta = \frac{\delta - \lambda}{2}$$

В тождествах (20) – (22) поменяем местами правые части равенств на левые, запишем углы с помощью вспомогательных и в результате получим новую группу тождеств:

$$\cos \delta + \cos \lambda = 2 \cos \frac{\delta + \lambda}{2} \cos \frac{\delta - \lambda}{2},$$

$$\cos \delta - \cos \lambda = -2 \sin \frac{\delta + \lambda}{2} \sin \frac{\delta - \lambda}{2},$$

$$\sin \delta + \sin \lambda = 2 \sin \frac{\delta + \lambda}{2} \cos \frac{\delta - \lambda}{2}.$$

В последнем равенстве заменим угол λ на $-\lambda$ и получим формулу для разности синусов

$$\sin \delta - \sin \lambda = 2 \sin \frac{\delta - \lambda}{2} \cos \frac{\delta + \lambda}{2}$$

Для того чтобы подчеркнуть, что эти формулы справедливы для любых углов, вернёмся к прежним обозначениям:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (23)$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (24)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}, \quad (25)$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}. \quad (26)$$

**§9. Выражение синуса и косинуса через тангенс
половинного угла**

Преобразуем формулы (15) и (16) следующим образом:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}},$$

$$\cos \alpha = \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Будем предполагать, что $\cos \frac{\alpha}{2} \neq 0$ и разделим числители и знаменатели полученных дробных выражений на $\cos^2 \frac{\alpha}{2}$. В итоге получаем *искомые* формулы:

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (27)$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (28)$$

§ 10 Упражнения

Вычислите значения выражений:

1. $\frac{\cos 76^\circ - \cos 16^\circ}{1 - 2 \sin^2 22^\circ}$; 2. $2 \sin 44^\circ \cdot \cos 16^\circ + 2 \sin^2 31^\circ - 1$;

3. $\frac{4 \sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ}{1 + \sin 190^\circ}$; 4. $\frac{\cos 240^\circ}{\cos 300^\circ}$; 5. $\frac{\sin 70^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 40^\circ}$;

6. $\operatorname{ctg} 40^\circ \cdot \operatorname{tg} 140^\circ$; 7. $\frac{4 \sin 130^\circ \cdot \cos 140^\circ}{1 + \cos 80^\circ}$;

8. $12 \operatorname{ctg} 15^\circ \cdot \cos 105^\circ$; 9. $(2 - 2 \sin 300^\circ) \cdot (2 - 2 \cos 330^\circ)$.

10. Найдите $\operatorname{tg} \alpha$, если $\frac{4 \sin \alpha - 3 \cos \alpha}{2 \cos \alpha - 5 \sin \alpha} = -\frac{23}{27}$.

11. Найдите значение выражения $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha$, если $\operatorname{tg} 2\alpha = 2$.

12. Найдите значение выражения $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha$, если $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}$.

13. Найдите значение $\sin \alpha$, если $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ и

$$\left(\cos \alpha - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \cdot \left(\cos \alpha + \frac{1}{4} \right) = 0.$$

14. Вычислите значение выражения $\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta}$, если

дано, что $\alpha - \beta = \frac{\pi}{2}$.

15. Найдите значение выражения $\frac{14 \sin \alpha + 21 \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha}$,

если $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}$.

Вычислите:

16. $\cos \left(\operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{3} \right) - \frac{3}{2} \pi \right)$; 17. $\sin \left(\operatorname{arcctg} \left(-\frac{1}{3} \right) - \frac{5}{2} \pi \right)$;

18. $\operatorname{tg} \left(\arcsin \left(-\frac{1}{3} \right) + \frac{\pi}{2} \right)$.

Укажите в градусах значения углов:

19. $\arcsin(\cos(-315^\circ))$; 20. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 675^\circ)$;

21. $\operatorname{arctg}(\sin(-540^\circ))$.

Докажите равенства:

22. $\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} x + 4 \operatorname{ctg} 2x = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}$;

23. $\operatorname{tg} 7,5^\circ + \operatorname{tg} 37,5^\circ + \operatorname{tg} 7,5^\circ \operatorname{tg} 37,5^\circ = 1$.

Упростите выражения:

24. $\left(\frac{\sin 4\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos 4\alpha}{\sin \alpha} \right) \cdot \left(\frac{1}{\cos 3\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \right)$;

25. $\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16} \dots \cos \frac{\pi}{2^n}$.

ГЛАВА 9

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§1. Формулы общих решений простейших тригонометрических уравнений

Рассмотрим частные случаи простейших уравнений и форму записи ответов.

$$1. \sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k; \quad 2. \sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k;$$

$$3. \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad 4. \cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k;$$

$$5. \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow x = \pi k; \quad 6. \operatorname{tg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k;$$

$$7. \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad 8. \operatorname{ctg} x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Представим без вывода формулы решений других простейших уравнений.

$$1. \cos x = m \Rightarrow x = \pm \arccos m + 2\pi k, \quad |m| \leq 1;$$

$$2. \sin x = m \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin m + \pi k, \quad |m| \leq 1;$$

$$3. \operatorname{tg} x = m \Rightarrow x = \operatorname{arctg} m + \pi k;$$

$$4. \operatorname{ctg} x = m \Rightarrow x = \operatorname{arcctg} m + \pi k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}.$$

Формулы решений уравнений, содержащих тригонометрические функции в квадрате:

$$1. \sin^2 x = m \Rightarrow x = \pm \arcsin \sqrt{m} + 2\pi k, \quad 0 \leq m \leq 1;$$

$$2. \cos^2 x = m \Rightarrow x = \pm \arccos \sqrt{m} + 2\pi k, \quad 0 \leq m \leq 1;$$

$$3. \operatorname{tg}^2 x = m \Rightarrow x = \pm \operatorname{arctg} \sqrt{m} + \pi k, \quad m \geq 0;$$

$$4. \operatorname{ctg}^2 x = m \Rightarrow x = \pm \operatorname{arccctg} \sqrt{m} + \pi k, \quad m \geq 0,$$

где $k \in \mathbb{Z}$.

Достаточно часто встречаются уравнения, в которых приравниваются одинаковые тригонометрические величины. Найдём формулы общих решений таких уравнений.

$$1. \sin f = \sin g \Rightarrow \sin f - \sin g = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cos \frac{f+g}{2} \sin \frac{f-g}{2} = 0 \Rightarrow \cos \frac{f+g}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f+g}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k; \quad \sin \frac{f-g}{2} = 0 \Rightarrow \frac{f-g}{2} = \pi n,$$

$$f+g = \pi + 2\pi k, \quad f-g = 2\pi n \Rightarrow f = \frac{\pi}{2} + \pi(k+n),$$

$$g = \frac{\pi}{2} + \pi(k-n).$$

$$2. \cos f = \cos g \Rightarrow -2 \sin \frac{f+g}{2} \sin \frac{f-g}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f+g = \pi k, \quad f-g = \pi k.$$

$$3. \operatorname{tg} f = \operatorname{tg}(g) \Rightarrow \operatorname{tg} f - \operatorname{tg}(g) = 0 \Rightarrow \frac{\sin(f-g)}{\cos f \cos g} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin(f-g) = 0 \Rightarrow f-g = \pi k.$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad \operatorname{ctgf} &= \operatorname{ctg}(g) \Rightarrow \operatorname{ctgf} - \operatorname{ctg}(g) = 0 \Rightarrow \\
 &\Rightarrow -\frac{\sin(f-g)}{\sin f \sin g} = 0 \Rightarrow f - g = \pi k.
 \end{aligned}$$

Пример. Решить уравнение $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$.

Решение. Разделим уравнение на два, используем формулу косинуса разности углов и перейдем к уравнению

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}.$$

Из условия равенства косинусов получаем

$$x - \frac{\pi}{6} = 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k,$$

$$x - \frac{\pi}{2} = 2\pi k \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

§2. Однородные уравнения

Однородными относительно синуса и косинуса называются те уравнения, все слагаемые которых имеют одинаковый порядок относительно синуса и косинуса.

Однородное уравнение первого порядка (линейное уравнение) имеет вид:

$$a \sin x + b \cos x = 0. \quad (1)$$

Разделим обе части на $\cos x$ и получим уравнение $a \cdot \operatorname{tg} x + b = 0$. Опасность потери корня $\cos x = 0$ отсутствует, так как если $\cos x = 0$, то $\sin x = \pm 1$ и левая часть не равна нулю. Окончательно получаем

$$\operatorname{tg} x = -\frac{b}{a} \Rightarrow x = -\operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi k.$$

Пример 1. Решить уравнение

$$\cos(x-1) = 2 \sin x - 3 \cos x.$$

Решение. Используем формулу косинуса разности двух углов

$$\cos x \cos 1 + \sin x \sin 1 = 2 \sin x - 3 \cos x,$$

$$\cos x (\cos 1 + 3) = \sin x (2 - \sin 1).$$

Разделим последнее уравнение на $\cos x \neq 0$ и в результате получаем

$$\operatorname{tg} x = \frac{3 + \cos 1}{2 - \sin 1} \Rightarrow x = \operatorname{arctg} \frac{3 + \cos 1}{2 - \sin 1} + \pi k.$$

Пример 2. Решить уравнение

$$\cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x = 0.$$

Решение. Данное уравнение является однородным уравнением второго порядка. Сначала следует вынести общий множитель $\cos x$ за скобки:

$$\cos x (\cos x + \sqrt{3} \sin x) = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Рассмотрим теперь случай когда $\cos x \neq 0$ и

$$\cos x + \sqrt{3} \sin x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{6} + \pi k.$$

$$\text{Ответ: } x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Рассмотрим однородное уравнение второго порядка следующего вида:

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0. \quad (2)$$

Разделим уравнение на $\cos^2 x$ ($\cos x = 0$ не может быть решением уравнения). В результате получаем уравнение $a \cdot \operatorname{tg}^2 x + b \cdot \operatorname{tg} x + c = 0$. Введём новую переменную $z = \operatorname{tg} x$ и запишем уравнение в виде квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$. Если у этого уравнения есть действительные корни, то $\operatorname{tg} x = z_1$, $\operatorname{tg} x = z_2$.

Пример 3. $\sin^2 x + 5 \sin x \cos x + 6 \cos^2 x = 0$.

Решение. Разделим уравнение на $\cos^2 x$ и введём переменную $z = \operatorname{tg} x$. Приходим к алгебраическому уравнению $z^2 + 5z + 6 = 0$; $z_1 = -3$, $z_2 = -2$;

$$\operatorname{tg} x = -3 \Rightarrow x = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k;$$

$$\operatorname{tg} x = -2 \Rightarrow x = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k.$$

§3. Неоднородные уравнения

Рассмотрим неоднородное линейное уравнение вида

$$a \sin x + b \cos x = c \quad (a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0). \quad (3)$$

Первый способ решения. Разделим уравнение на b

$$\frac{a}{b} \sin x + \cos x = \frac{c}{b}.$$

Введём угол φ , для которого справедливо соотно-

шение $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a}{b}$ (это возможно при любом a и $b \neq 0$).

Уравнение преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi \sin x + \cos x &= \frac{c}{b} \Rightarrow \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \sin x + \cos x = \frac{c}{b} \Rightarrow \\ \frac{\sin \varphi \sin x + \cos \varphi \cos x}{\cos \varphi} &= \frac{c}{b} \Rightarrow \cos(x - \varphi) = \frac{c}{b} \cos \varphi \Rightarrow \end{aligned}$$

$$x = \pm \arccos\left(\frac{c}{b} \cos \varphi\right) + \varphi + 2\pi k,$$

где $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{b}$ — известное число.

Второй способ решения.

Как известно, синус и косинус угла рационально выражаются через тангенс половинного угла, поэтому исходное уравнение можно записать в виде

$$a \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} + b \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = c.$$

Это уравнение сводится к квадратному уравнению

относительно $z = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Пример 4. Решить уравнение $\sin x + \cos x = 1$.

Решение. Уравнение можно записать в виде

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2\pi k \text{ или } x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

Ответ: $x = 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$

Неоднородное уравнение второго порядка

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = d \quad (4)$$

можно свести к однородному уравнению, если свободный член уравнения записать в виде

$$d = d \sin^2 x + d \cos^2 x.$$

Пример 5. Решить уравнение

$$3 \sin^2 x - 2 \sin 2x + 5 \cos^2 x = 2.$$

Решение. Преобразуем уравнение в однородное. Приведём подобные члены, разделим уравнение на $\cos^2 x$ и введём новую переменную $z = \operatorname{tg} x$. В результате получим уравнение

$$z^2 - 4z + 3 = 0 \Rightarrow z_1 = 1, \quad z_2 = 3 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + \pi k,$$

$$x = \operatorname{arctg} 3 + \pi k.$$

Рассмотрим неоднородное уравнение второго порядка вида

$$a(\sin x + \cos x) + b \sin x \cos x = c. \quad (5)$$

Это уравнение легко приводится к алгебраическому уравнению, если **ввести подстановку**

$$\sin x + \cos x = t. \quad (6)$$

Оценим область изменения переменной t . Для этого умножим последнее равенство на число $\frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \cos x + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} t \Rightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{t}{\sqrt{2}} \right| \leq 1 \Rightarrow |t| \leq \sqrt{2}.$$

После возведения в квадрат равенства (6), получим

$$1 + 2 \sin x \cos x = t^2 \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Теперь исходное уравнение превращается в квадратное алгебраическое уравнение относительно переменной t :

$$at + b \frac{t^2 - 1}{2} = c.$$

Предположим, что корни этого уравнения t_1, t_2 .

Если $|t_1| \leq \sqrt{2}$ и $|t_2| \leq \sqrt{2}$, то посторонних корней нет, и остаётся решить два простых уравнения

$$\sin x + \cos x = t_1, \quad \sin x + \cos x = t_2.$$

Пример 6. Решить уравнение

$$\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1.$$

Решение. Сделаем подстановку $t = \cos x + \sin x$, тогда

$$\sin x \cos x = \frac{t^2 - 1}{2}.$$

Уравнение принимает вид $t^2 + 2t - 3 = 0$. Корень $t_1 = -3$ является посторонним корнем, так как $|t| > \sqrt{2}$.

$$t_2 = 1 \Rightarrow \sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2\pi k, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k.$$

§4. Упражнения

Решите уравнения:

1. $\sin x + \sin 1 = \sin(x+1)$;
2. $\sin x \cdot \sin 3x = \frac{1}{2}$;
3. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$;
4. $\sin^{10} x + \cos^{10} x = 1$;
5. $\sin^2 \pi x + \sin^2 \pi y = 0$;
6. $\sqrt{\sin^2 x - 1} + \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sin 2x$;
7. $\sin 2x = \operatorname{tg} x$;
8. $\sin 4x = 4 \cos 2x$;
9. $2 \cos^2 x - 5 \sin x - 4 = 0$;
10. $\sin 5x = \sqrt{3}(1 + \cos 5x)$;
11. $\sqrt{1 - \sin x} = \sqrt{2} \sin x$;
12. $1 + \operatorname{ctg} x = \cos x + \frac{1}{\sin x}$;
13. $(2 \cos x + 1) \cdot |\cos x| = -1$;
14. $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} 2x = -1$;
15. $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$;
16. $x \sin 3x = |x|$;
17. $2 \sin x = 3 \operatorname{ctg} x$;
18. $2 \cos(270^\circ + x) \sin 8x = \cos 7x$.

ГЛАВА 10

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§1. Определение и свойства функций

Функция $y = \sin x$ (синус x) определена на всём множестве действительных чисел.

Функция является нечётной функцией:

$$y(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -y(x).$$

Немонотонная функция, но имеет бесконечное множество интервалов монотонности.

У функции есть бесконечное множество корней:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \sin(x) = 0 \Rightarrow x = \pi k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Функция периодическая. Наименьший период равен 2π . У функции есть бесконечное множество периодов T_k : $T_k = 2\pi k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi k).$$

Все значения функции по модулю не превосходят единицы, поэтому функция ограниченная:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow |y| \leq 1.$$

График функции называется синусоидой (рис. 21).

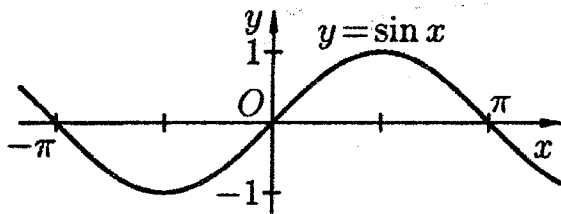


рис. 21

Функция $y = \cos(x)$ (косинус x) определена на всём множестве действительных чисел.

Функция является чётной функцией:

$$y(-x) = \cos(-x) = \cos x = y(x).$$

Немонотонная функция, но имеет бесконечное множество интервалов монотонности.

У функции есть бесконечное множество корней:

$$y(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Функция периодическая. Наименьший период равен 2π . У функции есть бесконечное множество периодов T_k : $T_k = 2\pi k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

$$\cos(x) = \cos(x + 2\pi k).$$

Все значения функции по модулю не превосходят единицы, поэтому функция ограниченная:

$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

График функции может быть получен параллельным переносом синусоиды влево на расстояние $\frac{\pi}{2}$ (рис.22).

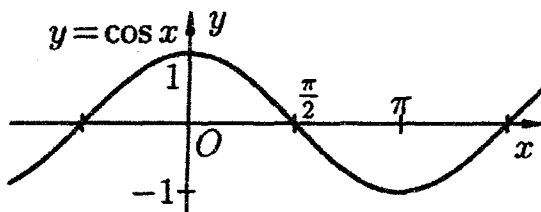


рис.22

Функция $y = \operatorname{tg}(x)$ (тангенс x) определена на множестве действительных чисел кроме чисел $\frac{\pi}{2} + \pi k$,

$\forall k \in \mathbb{Z}$. Область определения можно записать в виде $X = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k \right\}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.

Функция является нечётной функцией:

$$y(-x) = \operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}(x) = -y(x).$$

Функция немонотонная, но имеет бесконечное множество интервалов монотонности. В каждом интервале монотонности функция возрастает.

У функции есть бесконечное множество корней:

$$\operatorname{tg}(x) = 0 \Rightarrow x = \pi k.$$

Функция периодическая. Наименьший период равен π . У функции есть бесконечное множество периодов $T_k: T_k = \pi k, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + \pi k).$$

Функция неограниченная.

График функции называется тангенсоидой (рис.23).

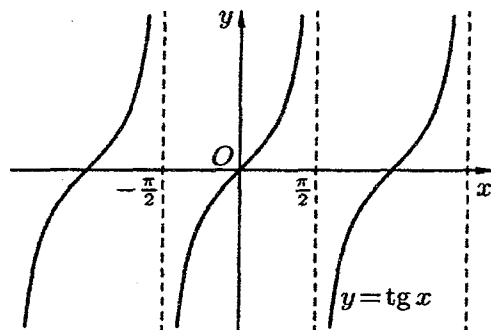


рис.23

Функция $y = \operatorname{ctg} x$ (котангенс x) определена на всём множестве действительных чисел кроме чисел πk , где $k \in \mathbb{Z}$.

Функция является нечётной функцией:

$$y(-x) = \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg}(x) = -y(x).$$

Немонотонная функция, но имеет бесконечное множество интервалов монотонности, в каждом из них функция убывает.

У функции есть бесконечное множество корней:

$$y(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{ctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k.$$

Функция периодическая и неограниченная. Наименьший период равен π . У функции есть бесконечное множество периодов $T_k = \pi k$:

$$\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi k).$$

График функции представлен на рис. 24.

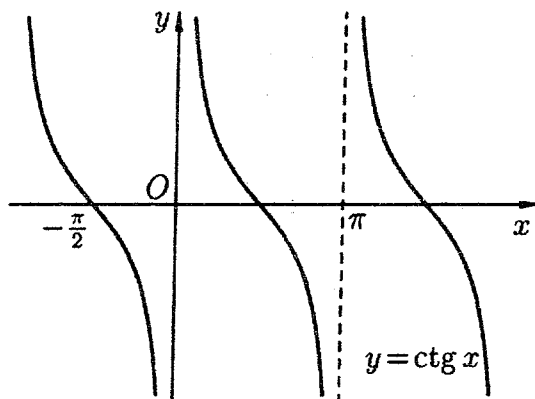


рис. 24

§2. Обратные тригонометрические функции

Все тригонометрические функции не являются монотонными. Поэтому для построения обратной функции выбирают заранее такой интервал в области определения, в котором соответствующая исходная тригонометрическая функция монотонна и принимает все возможные для неё значения. Рассмотрим, как определяются такие обратные функции.

Арксинус

Функция $y = \sin x$ монотонно возрастает в области $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ и изменяется на этом отрезке непрерывно от -1 до 1 . В этой области определяется обратная функция. Она монотонно возрастает в области $[-1, 1]$, изменяется при этом от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Такая обратная функция записывается в виде

$$y = \arcsin x \text{ (арксинус } x \text{)}.$$

Очевидно следующее равенство:

$$\sin(\arcsin x) = x, \quad |x| \leq 1.$$

Область определения функции $x \in [-1, 1]$, область изменения $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Функция нечётна: $\arcsin(-x) = -\arcsin x$. График функции симметричен относительно начала координат.

Функция строго монотонно возрастает:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow \arcsin x_2 > \arcsin x_1.$$

Есть один корень: $\arcsin x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Функция неперiodическая и ограниченная:

$$|y| \leq \frac{\pi}{2}.$$

График функции $y = \arcsin x$ можно получить из части графика функции $y = \sin x$, $|x| \leq \frac{\pi}{2}$ с помощью его зеркального отражения относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 25).

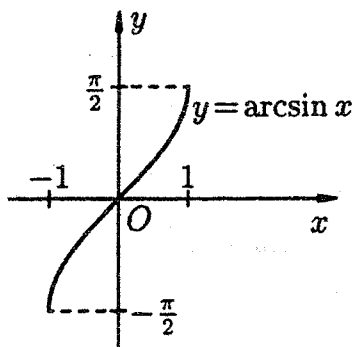


рис. 25

Арккосинус

Функция $y = \cos x$ монотонно убывает на отрезке $[0, \pi]$ и изменяется там от 1 до -1, поэтому на этом интервале строится обратная функция, которая имеет вид:

$$y = \arccos x \text{ (арккосинус)}. \quad \text{исх.}$$

Справедливо следующее равенство:

$$\cos(\arccos x) = x, \quad |x| \leq 1.$$

Функция определена и однозначна на отрезке

$$x \in [-1, +1].$$

Область изменения функции $y \in [0, \pi]$.

Функция общего вида, то есть не является ни чётной, ни нечётной функцией.

Функция строго монотонно убывает:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow \arccos x_2 < \arccos x_1.$$

Есть один корень: $\arccos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Функция неперiodическая и ограниченная:

$$0 \leq y \leq \pi.$$

График функции $y = \arccos x$ можно получить из части графика функции $y = \cos x$, $x \in [0, \pi]$ с помощью его зеркального отражения относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис.26).

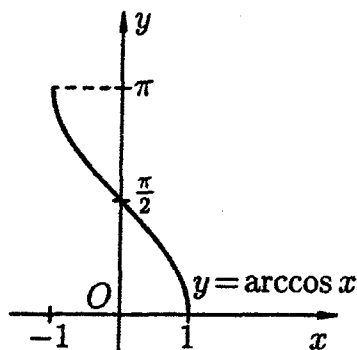


рис.26

Арктангенс

В интервале $X = \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ функция $y = \operatorname{tg} x$ монотонно возрастает и непрерывно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Поэтому для функции $y = \operatorname{tg} x$ с областью оп-

ределения X можно построить обратную функцию, которая имеет вид:

$$y = \operatorname{arctg} x (\text{арктангенс } x).$$

Справедливо следующее равенство:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad \forall x \in R.$$

Область определения функции: R .

Является нечётной функцией: $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg}(x)$.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат. Функция строго монотонно возрастает:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow \operatorname{arctg}(x_2) > \operatorname{arctg}(x_1).$$

Есть один корень: $\operatorname{arctg} x = 0 \Rightarrow x = 0$.

Функция непериодическая и ограниченная: $|\operatorname{arctg} x| < \frac{\pi}{2}$.

График функции $y = \operatorname{arctg} x$ можно получить из части графика функции $y = \operatorname{tg} x$, $|x| < \frac{\pi}{2}$ с помощью его зеркального отражения относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 27).

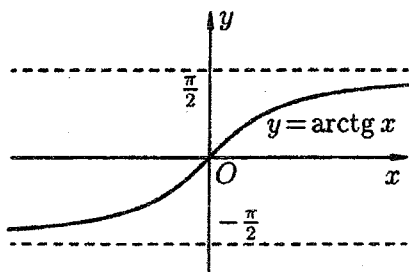


рис. 27

Арккотангенс

В интервале $X=(0, \pi)$ функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонно убывает и непрерывно изменяется от $+\infty$ до $-\infty$. Поэтому можно построить обратную функцию, которая имеет вид:

$$y = \operatorname{arcctg} x \text{ (арккотангенс икс).}$$

Очевидно равенство:

$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Область определения функции: $\mathbb{R}$.

Функция общего вида, то есть ни чётна, ни нечётна.

Строго монотонно убывающая функция:

$$x_2 > x_1 \Rightarrow \operatorname{arcctg} x_2 < \operatorname{arcctg} x_1.$$

У функции есть один корень: $\operatorname{arcctg} x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}$.

Функция непериодическая и ограниченная:

$$0 < \operatorname{arcctg} x < \pi.$$

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ можно получить из части графика функции $y = \operatorname{ctg} x$, $0 < x < \pi$ с помощью его зеркального отражения относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 28).

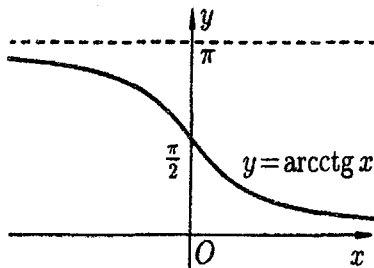


рис. 28

Упражнения

Найдите области определения функций:

1. $y = \arcsin \sqrt{-x}$; 2. $y = \arccos \sqrt{x^2 - 1}$;

3. $y = \arcsin(1 + \operatorname{tg}^2 \pi x)$; 4. $y = \sqrt{\sqrt{2} - 2 \sin x}$;

5. $y = \sqrt{\log_a (\sin x)}$; 6. $y = \lg \lg \operatorname{tg} x$.

Найдите периоды функций:

7. $y = \sin \pi x$; 8. $y = \cos^2 x$; 9. $y = \sin^3 x$;

10. $y = 3 \sin \frac{x}{4} - 2 \cos \frac{x}{5}$; 11. $y = 3 \operatorname{tg} 2x - 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{3}$.

Постройте графики функций:

12. $y = \sin |x|$; 13. $y = |\sin x|$; 14. $y = |\sin |x||$;

15. $y = \sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right)$; 16. $y = |\sin x| + \sin x$;

17. $y = \arcsin |x|$; 18. $y = \sin (\arcsin x)$;

19. $y = \arcsin (\sin x)$; 20. $y = \lg (\sin x)$;

21. $y = \sqrt{\log_5 (\cos x)}$; 22. $y = 7^{\log_7 (\sin |x|)}$;

23. $y = \frac{1}{\sin x}$.

ГЛАВА 11

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ПРОГРЕССИИ

§1. Последовательность

Рассмотрим функцию $a(n)$, областью определения которой является множество натуральных чисел $n \in N$. В этом случае каждому натуральному числу n сопоставляется по определённому правилу действительное число a_n . В результате строится числовая последовательность

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots \quad (1)$$

Числа a_i , где $i \in N$, называются членами последовательности (1).

Чаще всего последовательность задаётся формулой её общего члена: $a_n = a(n)$. Последовательность можно записывать в виде $\{a_n\}$. Структура формулы общего члена может иметь различный вид. Например, формула

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{если } n = 2k, \\ \frac{1}{n}, & \text{если } n = 2k + 1, \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots$$

задаёт последовательность

$$1, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{2k-1}, 2k, \frac{1}{2k+1}, \dots,$$

у которой члены с чётными номерами и члены с нечётными номерами образуются по разным законам.

Числовую последовательность можно задавать **рекуррентной формулой**. **Рекуррентные формулы** — это такие формулы, которые выражают любой n -ый член

последовательности через предыдущие члены этой же последовательности. Например, $a_{n+1} = 2a_n + n$, $a_1 = 1$.

Формула общего члена $a_n = a(n)$ может быть задана для $n = k$, где $k > 1$. В этом случае общий член $a_n = a(n)$, $n = k, k+1, \dots$. Значения $a_1, a_2, \dots, a_{k-1}$ первых членов последовательности задаются отдельно.

Не любая последовательность может быть задана формулой общего члена или рекуррентной формулой. Такой является последовательность простых чисел или последовательность десятичных приближений к любому иррациональному числу: π , e , $\sqrt{2}$ и т.д.

Определение 1. Последовательность называется *ограниченной*, если существует такое положительное число $M > 0$, что для всех членов последовательности выполняется неравенство $|a_n| \leq M$.

Определение 2. Последовательность называется *неограниченной*, если для любого положительного числа M найдутся члены последовательности, которые превосходят по абсолютной величине это число M .

Например, последовательности

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, (M=1);$$

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \dots, (M=1);$$

$$1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \dots, \frac{2n-1}{2n}, \dots, (M=2)$$

являются ограниченными, а последовательность

$$1, 4, 9, \dots, n^2, \dots \text{ — неограниченная.}$$

Определение 3. Последовательность называется *возрастающей*, если для $\forall n \in N$ справедливо неравенство

$$a_n < a_{n+1}$$

(каждый последующий член больше предыдущего).

Последовательность называется *убывающей*, если для $\forall n \in N$ выполняется неравенство

$$a_n > a_{n+1}$$

(каждый последующий член меньше предыдущего).

Возрастающие и убывающие последовательности называются *монотонными*. К монотонным последовательностям относятся неубывающие последовательности ($a_{n+1} \geq a_n$) и невозрастающие последовательности ($a_{n+1} \leq a_n$).

Примеры монотонных последовательностей.

Последовательность 1, 2, 7, 7, 19, 19, 25, 25 – не убывает.

Последовательность 35, 35, 21, 21, 21, 15, 3, 2 – не возрастает.

Последовательность с общим членом $a_n = 2^n$,

где $n=1, 2, 3, \dots$ – возрастает.

Последовательность с общим членом $a_n = \frac{1}{5^n}$,

где $n=1, 2, 3, \dots$ – убывает.

§2. Предел последовательности

Определение 1. Число A называется пределом последовательности $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, если для любого положительного числа ε можно подобрать такое натуральное число N , что для всех значений $n > N$ выполняется неравенство

$$|a_n - A| < \varepsilon. \quad (2)$$

Кратко это определение записывается в виде равенства

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Основные свойства пределов последовательностей.

1. Любая ограниченная монотонная последовательность имеет предел.
2. Если члены последовательности $\{b_n\}$, начиная с некоторого номера N , заключены между соответствующими членами a_n и c_n двух других последовательностей $\{a_n\}$ и $\{c_n\}$:

$$a_n \leq b_n \leq c_n \text{ для } \forall n \geq N,$$

и существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = A,$$

то последовательность $\{b_n\}$ имеет предел и он равен A :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A.$$

3. Если последовательность имеет предел, то этот предел единственный.
4. Если у двух последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ есть пределы, то справедливо равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

5. Предел произведения последовательностей равен произведению их пределов, если последние существуют:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

В частности, если $a_n = a - \text{const}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a \cdot b_n) = a \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n.$$

Последнее равенство означает, что постоянный множитель можно вынести за знак предела.

6. Предел отношения двух последовательностей равен отношению предела числителя к пределу знаменателя, если эти пределы существуют, и предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} \quad \left(\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0 \right).$$

Доказательство этих свойств даётся в курсе высшей математики.

§3. Арифметическая прогрессия

Определение 1. Последовательность чисел (числовая последовательность) с общим членом

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d,$$

где a_1 и d — заданные числа, называется **арифметической прогрессией**. Число a_1 — первый член арифметической прогрессии, d — **разность арифметической прогрессии**. При $d > 0$ прогрессия называется возрастающей, при $d < 0$ прогрессия называется убывающей.

Свойства арифметической прогрессии

1. Каждый член арифметической прогрессии равен сумме предыдущего члена и разности:

$$a_{k+1} = a_k + d, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3)$$

2. Каждый член арифметической прогрессии является *средним арифметическим* двух равноудалённых от него членов этой прогрессии:

$$a_k = \frac{a_{k+m} + a_{k-m}}{2}, \quad (4)$$

где k и m любые натуральные числа и $k > m$.

3. В любой конечной арифметической прогрессии сумма двух членов, одинаково удалённых от концов – величина постоянная для данной прогрессии и равная сумме крайних членов:

$$a_1 + a_n = a_{1+k} + a_{n-k}. \quad (5)$$

4. Сумма n последовательных членов арифметической прогрессии равна *полусумме* её крайних членов, умноженной на число членов:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}. \quad (6)$$

Если в формуле (6) заменить a_n формулой общего члена, то получим другую формулу для нахождения суммы S_n :

$$S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n. \quad (7)$$

§4. Геометрическая прогрессия

Определение 1. Последовательность чисел с общим членом $a_n = a_1 q^{n-1}$, где $a_1 \neq 0$ и $q \neq 0$ – заданные действительные числа, называется *геометрической прогрессией*.

Число a_1 называется *первым членом геометрической прогрессии*, q – *знаменатель геометрической прогрессии*.

Из условия $a_1 \neq 0$, $q \neq 0$ следует, что среди членов геометрической прогрессии не могут быть нули. При $a > 0$ и $q > 1$ прогрессия будет возрастающей, а при $q \in (0, 1)$ – убывающей прогрессией. Если $q < 0$ прогрессия – *знакопеременная*.

Свойства геометрической прогрессии

1. Каждый член геометрической прогрессии равен произведению предыдущего члена на знаменатель прогрессии:

$$a_{k+1} = a_k \cdot q, \quad k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

2. Квадрат каждого члена геометрической прогрессии равен произведению двух равноудалённых от него членов этой прогрессии:

$$a_k^2 = a_{k-m} \cdot a_{k+m}, \quad k > m, \quad (9)$$

$$a_k = \pm \sqrt{a_{k-m} \cdot a_{k+m}} - \text{среднее геометрическое.}$$

3. Сумма n членов геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}. \quad (10)$$

Рассмотрим очень простое доказательство этой формулы.

Доказательство. Пусть S_n – сумма n членов геометрической прогрессии.

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n. \quad (11)$$

Умножим все члены этого равенства на знаменатель прогрессии q и *учтём, что* $a_k q = a_{k+1}$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, тогда

$$S_n q = a_2 + a_3 + \dots + a_n + a_n q. \quad (12)$$

Вычтем из (отнимем от) равенства (11) равенство (12)

$$\begin{aligned} S_n(1-q) &= a_1 - a_n q \Rightarrow S_n = \frac{a_1 - a_n q}{1-q} = \frac{a_1 - a_1 q^n}{1-q} \Rightarrow \\ \Rightarrow S_n &= \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}. \end{aligned}$$

Справедливость формулы (10) доказана.

§5. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

Определение 1. Бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой $|q| < 1$, называется ***бесконечно убывающей геометрической прогрессией***.

Если $a > 0$ и $0 < q < 1$ прогрессия монотонно убывает, если $-1 < q < 0$, прогрессия немонотонная.

Для вычисления суммы бесконечно убывающей прогрессии нам *понадобится* следующая *лемма*.

Лемма. Если $|q| < 1$, то $\lim q^n = 0$.

Доказательство. Возьмём $\forall \varepsilon > 0$ и рассмотрим неравенство $|q^n - 0| < \varepsilon$.

Решим это неравенство относительно n :

$$|q|^n < \varepsilon \Rightarrow n \cdot \ln |q| < \ln \varepsilon,$$

$$|q| < 1 \Rightarrow \ln |q| < 0 \Rightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|},$$

$$n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln |q|}. \quad (13)$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ и всех n , удовлетворяющих неравенству (13), справедливо неравенство: $|q^n - 0| < \varepsilon$, что по определению предела последовательности означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0.$$

Из леммы и 5-го свойства пределов вытекает, что предел общего члена бесконечно убывающей последовательности равен нулю:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_1 q^{n-1} = a_1 \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n-1} = 0, \text{ если } |q| < 1.$$

Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Очевидно, что **процесс** сложения всех членов бесконечной геометрической прогрессии – бесконечный процесс. Мы никогда не закончим процесс суммирования. Поэтому в случае бесконечно убывающей геометрической прогрессии **поступают следующим образом**. По формуле (10) вычисляется сумма двух, трёх, ... и т. д. первых её членов. Эти суммы $S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$ образуют бесконечную последовательность, которая имеет предел. По свойству пределов

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1}{1-q} \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^n) = \frac{a_1}{1-q}.$$

При увеличении n в сумму S_n будет входить всё больше и больше членов геометрической прогрессии, поэтому предел последовательности $S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$ будет суммой бесконечно убывающей прогрессии.

$$S = S_\infty = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \frac{a_1}{1-q}.$$

Рассмотрим решения задач на прогрессии.

Задача 1. Сумма первых трёх членов геометрической прогрессии равна 13, а сумма квадратов тех же чисел равна 91. Найти эти числа.

Решение. Составляем систему по условию задачи.

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 13 \\ b_1^2(1+q^2+q^4) = 91, \end{cases}$$

где b_1 - первый член прогрессии, а q - знаменатель. Для упрощения решения задачи *учтём*, что

$$q^4 + q^2 + 1 = (q^2 + q + 1) \cdot (q^2 - q + 1).$$

Благодаря этому равенству последнее уравнение системы можно записать в более простом виде:

$$\begin{aligned} b_1^2(1+q^2+q^4) &= b_1(1+q+q^2) \cdot b_1(q^2-q+1) = \\ &= 13b_1(1-q+q^2) = 91 \Rightarrow b_1 \cdot (1-q+q^2) = 7. \end{aligned}$$

Теперь система приведена к виду

$$\begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 13 \\ b_1(1-q+q^2) = 7. \end{cases}$$

Раскрываем скобки в уравнениях, далее из первого уравнения вычитаем второе. В результате, получим $2b_1q = 6 \Rightarrow b_1 = \frac{3}{q}$. Подставляем b_1 во второе уравнение и приходим к квадратному уравнению

$$3q^2 - 10q + 3 = 0.$$

Корни этого уравнения $q_1 = \frac{1}{3}$,

$$q_2 = 3 \Rightarrow b_1 = 9 \text{ или } b_1 = 1.$$

Ответ: существуют две прогрессии, которые удовлетворяют условию задачи: 9, 3, 1, и 1, 3, 9,

Задача 2. Найти пятый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если известно, что её сумма равна 9, а сумма квадратов её членов равна 40,5.

Решение. Пусть первый член геометрической прогрессии равен b , а её знаменатель q ($|q| < 1$).

$$\text{Сумма равна } \frac{b}{1-q} = 9.$$

Последовательность $b^2, b^2q^2, b^2q^4, \dots$ также является бесконечно убывающей прогрессией со знаменателем q^2 и первым членом b^2 . По условию сумма этой про-

грессии равна 40,5, поэтому $\frac{b^2}{1-q^2} = 40,5$.

Приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{b}{1-q} = 9 \\ \frac{b^2}{1-q^2} = 40,5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{1-q} = 9 \\ \frac{b}{1+q} = 4,5 \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на первое и получим одно уравнение *относительно* q :

$$\frac{1+q}{1-q} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2+2q=1-q \Rightarrow 3q=-1 \Rightarrow q=-\frac{1}{3}.$$

Из первого уравнения системы находим первый член прогрессии

$$b_1 = 9 \cdot (1-q) = 9 \cdot \frac{4}{3} = 12.$$

Пятый член прогрессии равен $b_5 = b_1 q^4 = \frac{4}{27}$.

Ответ: $b_5 = \frac{4}{27}$.

Задача 3. Найдите десятый член арифметической прогрессии, если сумма её n членов равна $3n^2 - 2n$.

Решение. Сумму n членов арифметической прогрессии можно вычислить по формуле (7)

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} n.$$

По условию задачи эта же сумма может быть вычислена по другой формуле

$$S_n = 3n^2 - 2n.$$

Приравниваем правые части этих формул и *приходим к уравнению*

$$\frac{2a_1 + (n-1) \cdot d}{2} n = 3n^2 - 2n.$$

Последнее уравнение справедливо для $\forall n \in N$, поэтому подставим в уравнение $n=1$. Уравнение *приобретает* вид: $2a_1 = 2 \Rightarrow a_1 = 1$. При подстановке в уравнение $n=2$, $a_1 = 1$ получаем

$$\frac{2 \cdot 1 + (2-1) \cdot d}{2} \cdot 2 = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 \Rightarrow 2 + d = 8 \Rightarrow d = 6.$$

Десятый член этой прогрессии $a_{10} = a_1 + 9d = 55$.

Ответ: $a_{10} = 55$.

§6. Упражнения

1. Сумма $a_1 + a_n$ первого и n -го членов арифметической прогрессии равна 2, а сумма её n членов равна 7. Найти сумму $a_3 + a_5$.
2. Найдите второй член a_2 арифметической прогрессии, если для всех $n \in N$ сумма её n первых членов $S_n = 3n^2 + n$.
3. Найдите разность d арифметической прогрессии, если сумма её первых шести членов равна -6 , а её первый член $a_1 = -2d$.
4. Сумма двух последних членов арифметической прогрессии равна 12. Найдите число членов прогрессии, если $a_1 = -3$, $a_2 = -1$.
5. Первый член арифметической прогрессии $a_1 = 7$, её четвёртый член $a_4 = 16$. Найдите наибольшее значение n при котором a_n является двузначным числом.
6. Сумма S_5 пяти первых членов арифметической прогрессии в два раза больше суммы первых трёх членов S_3 . Найдите отношение первого члена к разности прогрессии.
7. Сумма последних трёх членов арифметической прогрессии равна её первому члену $a_1 = 6$. Найдите число членов последовательности, если её разность $d = -2$.

8. Числа $a_1 = 4$, a_2 , a_3 образуют арифметическую прогрессию, а числа $4a_1$, $3a_2$, a_3 также образуют арифметическую прогрессию. Найдите разность второй прогрессии.
9. Какие значения может принимать разность d арифметической прогрессии, если её первый член $a_1 = -12$, а сумма её первых n членов S_n достигает своего наименьшего значения при $n=4$?
10. Числа a_1 , a_2 , a_3 образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = -1$, а числа $4a_1$, $3a_2$, $3a_3$ образуют геометрическую прогрессию. Найдите её знаменатель.

ГЛАВА 12

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§1. Основные понятия

Определение 1. Геометрическим вектором, или просто **вектором** называется **направленный отрезок**. У каждого вектора есть начало, конец, длина и направление.

Из определения следует, что вектора не **закреплены** в определённой точке, поэтому их можно **свободно переносить** в **пространстве**, не меняя ни длины, ни направления. Такие вектора обычно называют **свободными векторами**. Если начало вектора закреплено в некоторой точке, такой вектор называется **радиус-вектором**.

Определение 2. **Нулевым вектором** называется вектор с нулевой длиной. Он обозначается символом $\vec{0}$. Направление нулевого вектора не определено.

Определение 3. Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат на одной или на **параллельных** прямых. Коллинеарные векторы делятся на **одинаково направленные (сонаправленные)** и **противоположно направленные**.

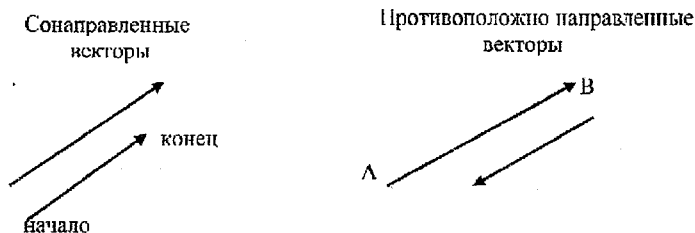


рис. 29

Определение 4. Векторы называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

Очевидно, что два вектора, равные третьему вектору, равны между собой.

Длина вектора называется обычно *модулем вектора* и обозначается $|\vec{a}|$. Если равны векторы, то равны их модули, *обратное заключение неверно*.

Равные векторы

Противоположные



рис. 30

§2. Линейные операции над векторами

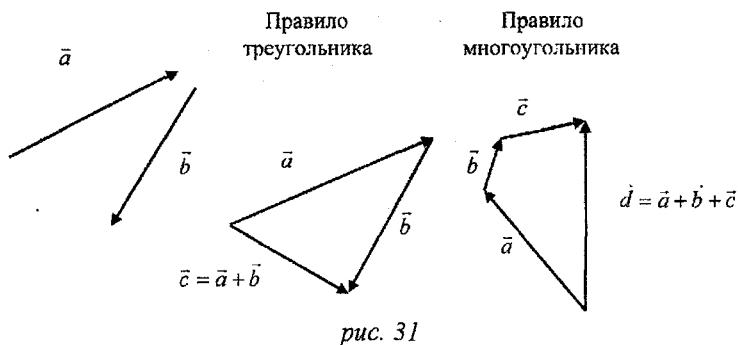
Определение 1. Линейные операции над векторами — это сложение векторов и умножение вектора на действительное число. Рассмотрим как определяются эти операции в векторной алгебре.

Определение 2. Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b},$$

который строится следующим образом. Конец вектора $\vec{a}$ соединяем с началом вектора $\vec{b}$ и строим новый вектор, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец совпадает с концом вектора $\vec{b}$. Это определение *обычно* называется правилом треугольника (рис. 31).

Сумма нескольких векторов находится аналогично сумме двух векторов с помощью правила многоугольника, которое является *обобщением* правила треугольника (рис. 31).



Определение 3. Произведением вектора $\vec{a}$ на число r называется коллинеарный вектор $\vec{b} = r\vec{a}$. Длина $\vec{b}$ равна $|\vec{b}| = |r| \cdot |\vec{a}|$. Если число r положительное, направления векторов *совпадают*, если отрицательное, направления векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ противоположны.

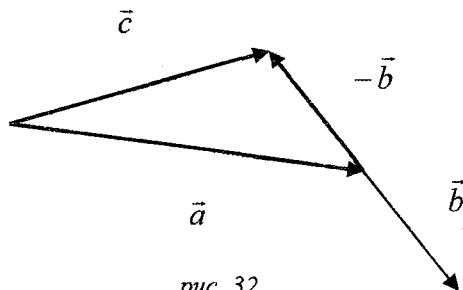
Определение 4. Два вектора называются противоположными, если их сумма равна нулевому вектору.

У любого ненулевого вектора $\vec{a}$ есть противоположный вектор $-\vec{a}$ и он единственный.

Определение 5. Разностью двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ даёт вектор $\vec{a}$:

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} \Rightarrow \vec{b} + \vec{c} = \vec{a}.$$

Вектор $\vec{c}$ можно найти, если сложить вектор $\vec{a}$ с вектором, противоположным вектору $\vec{b}$ (рис. 32).



Для удобства сложения или вычитания векторов удобно пользоваться правилом параллелограмма. *На основе* двух векторов строится параллелограмм. Вектор, построенный на большей диагонали, является суммой векторов, а вектор, построенный на меньшей диагонали – разность векторов (рис. 33).

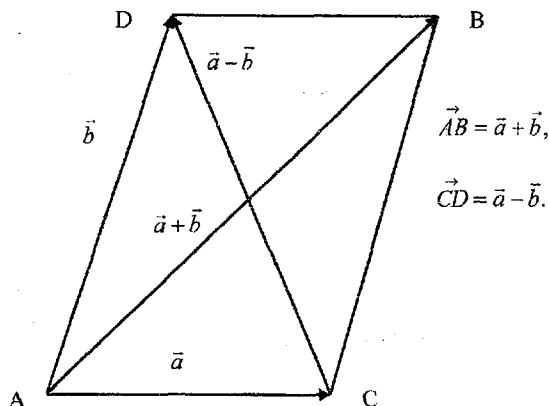


рис. 33

§3. Скалярное умножение векторов

Определение. Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi. \quad (1)$$

(модуль вектора a на модуль вектора b , на косинус угла между ними).

Свойства скалярного произведения

1. Из определения скалярного произведения следует его коммутативность:

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}. \quad (2)$$

2. Из определения вытекает ассоциативное свойство относительно умножения на число:

$$(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot \vec{b} = \alpha \cdot (\vec{a}\vec{b}), \quad (3)$$

$$(\alpha \cdot \vec{a}) \cdot (\beta \cdot \vec{b}) = \alpha\beta \cdot (\vec{a}\vec{b}).$$

3. Дистрибутивное свойство относительно сложения:

$$\vec{a}(\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}. \quad (4)$$

5. Если угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ острый, скалярное произведение положительно, если угол тупой, скалярное произведение отрицательно.
6. Если векторы ортогональны (взаимно перпендикулярны), то их скалярное произведение равно нулю: $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\vec{b} = 0$. Справедливо и обратное утверждение: если скалярное произведение равно нулю, то эти векторы ортогональны.
7. Скалярное произведение вектора на самого себя равно квадрату модуля вектора:

$$\vec{a}\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2}. \quad (5)$$

8. Модуль скалярного произведения векторов равен произведению их модулей

$$|\vec{a}\vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|.$$

§4. Проекция вектора и их свойства

Рассмотрим вектор $\overrightarrow{AB}$ и произвольную числовую ось u . Опустим из точек A и B перпендикуляры на ось и обозначим их основания соответственно A' и B' . Построим вектор $\overrightarrow{A'B'}$. Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось

равна модулю вектора $\overrightarrow{A'B'}$, если направление этого вектора совпадает с направлением оси u .

$$\text{пр}_u \overrightarrow{AB} = \left| \overrightarrow{A'B'} \right| > 0.$$

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось равна минус модулю вектора $\overrightarrow{A'B'}$ если направление последнего вектора противоположно направлению оси u :

$$\text{пр}_u \overrightarrow{AB} = - \left| \overrightarrow{A'B'} \right| < 0.$$

Угол φ — угол между вектором $\overrightarrow{AB}$ и положительным направлением оси u .

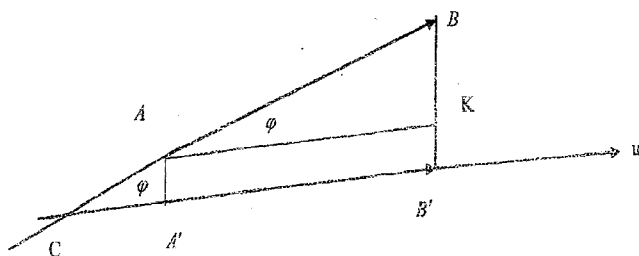


рис. 34

Очевидно (*по построению*), что отрезок AK параллелен числовой оси и $AK = A'B'$ (рис.34). Из этого следует, что

$$AK = \text{пр}_u \overrightarrow{AB}.$$

Отрезок AK является катетом в прямоугольном треугольнике ABK , поэтому

$$AK = |AB| \cdot \cos \varphi.$$

Последние два равенства приводят к формуле для вычисления проекции вектора на любую числовую ось:

$$\text{пр}_u \vec{AB} = \left| \vec{AB} \right| \cos \varphi.$$

Свойство 1. Проекция вектора на ось равна произведению модуля вектора на косинус угла между вектором и осью:

$$\text{пр}_u \vec{a} = |\vec{a}| \cos \varphi.$$

Свойство 2. Равные векторы имеют равные проекции на одну и ту же ось:

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow \text{пр}_u \vec{a} = \text{пр}_u \vec{b}.$$

Свойство 3. Проекция суммы нескольких векторов на одну и ту же ось равна сумме их проекций на эту ось:

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \Rightarrow \text{пр}_u \vec{a} = \text{пр}_u \vec{b} + \text{пр}_u \vec{c} + \text{пр}_u \vec{d}.$$

Свойство 4. При умножении вектора на число его проекция умножается на это же число:

$$\text{пр}_u (r \cdot \vec{a}) = r \cdot \text{пр}_u \vec{a}.$$

§5. Разложение вектора по координатным векторам

Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат и вместе с ней тройку векторов $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, направленных вдоль координатных осей. Модули таких векторов обычно берутся равными единице, а векторы назы-

ваются **координатными векторами, базисом или ортами**.

Определение 1. Проекция вектора на координатные оси называются **координатами вектора в данной системе координат**.

Координаты вектора могут быть вычислены с помощью координат его конца и начала. Пусть точка $B(x_2, y_2, z_2)$ — конец вектора $\overrightarrow{AB}$, а точка $A(x_1, y_1, z_1)$ — его начало. Проекция вектора на координатные оси равны разности **одноимённых** координат конца и начала этого вектора: $X = x_2 - x_1$; $Y = y_2 - y_1$; $Z = z_2 - z_1$;

$(X; Y; Z)$ — координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Кратко можно записать: $\overrightarrow{AB} = (X; Y; Z)$.

Свойства координат

1. Координаты вектора не изменяются при параллельном переносе.
2. У равных векторов равны одноимённые координаты.
3. Любой вектор единственным образом может быть разложен по базису (по координатным векторам):

$$\overrightarrow{AB} = X \cdot \vec{i} + Y \cdot \vec{j} + Z \cdot \vec{k}. \quad (6)$$

Коэффициенты при ортах являются координатами вектора $\overrightarrow{AB}$.

4. Если вектор $\vec{a}$ равен сумме векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то координаты этого вектора равны сумме одноимённых координат слагаемых:

$$\vec{b} = (x_1, y_1, z_1), \vec{c} = (x_2, y_2, z_2), \vec{a} = (x, y, z),$$

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} \Rightarrow x = x_1 + x_2, y = y_1 + y_2, z = z_1 + z_2. \quad (7)$$

5. Если вектор $\vec{a}$ равен разности векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, то координаты этого вектора равны разности одноимённых координат векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a} = \vec{b} - \vec{c} \Rightarrow x = x_1 - x_2, y = y_1 - y_2, z = z_1 - z_2. \quad (8)$$

7. Если вектор $\vec{a}$ равен произведению вектора $\vec{b}$ на число λ , то его координаты равны произведению координат вектора $\vec{b}$ на это число:

$$\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b} \Rightarrow x = \lambda \cdot x_1, y = \lambda \cdot y_1, z = \lambda \cdot z_1. \quad (9)$$

8. Модуль (длина) вектора $\vec{a} = (x, y, z)$ равен квадратному корню из суммы квадратов координат:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (10)$$

Скалярное произведение и координаты

Скалярное произведение векторов легко вычислить, если известны координаты сомножителей. Докажем для этого следующую теорему.

Теорема. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами:

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1), \vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

то их скалярное произведение равно сумме произведений одноимённых координат:

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (11)$$

Доказательство. Для удобства вычислений составим таблицу скалярных произведений базисных векторов.

орты	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Из таблицы видно, что скалярное произведение различных базисных векторов равно нулю:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0.$$

Скалярное произведение орта на себя равно единице:

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1.$$

Разложим векторы по базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$:

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k},$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

Умножим последние два равенства векторов:

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b} = & x_1 x_2 \vec{i}^2 + x_1 y_2 \vec{i}\vec{j} + x_1 z_2 \vec{i}\vec{k} + y_1 x_2 \vec{j}\vec{i} + y_1 y_2 \vec{j}^2 + y_1 z_2 \vec{j}\vec{k} + \\ & + z_1 x_2 \vec{k}\vec{i} + z_1 y_2 \vec{k}\vec{j} + z_1 z_2 \vec{k}^2. \end{aligned}$$

Используя таблицу, получаем искомое равенство, т.е.

$$\vec{a}\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Вычисление угла между векторами

По определению скалярное произведение $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi$.

Из равенства (11) $\vec{a}\vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$. Левые части этих равенств равны, значит и правые части равны:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Выразим из этого равенства $\cos \varphi$ и используем формулу (10).

В результате приходим к формуле вычисления угла между векторами:

$$\cos \varphi = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \quad (12)$$

Из формулы (12) следует *условие ортогональности векторов*:

$$x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2 = 0. \quad (13)$$

(сумма произведений одноимённых координат равна нулю).

Из определения коллинеарности векторов и равенства (9) следует, что у коллинеарных векторов, одноимённые координаты пропорциональны:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = \lambda \quad (14)$$

(одноимённые координаты пропорциональны).

Равенство (14) называется *условием коллинеарности двух векторов*.

§6. Упражнения

1. Даны точки $A(1; -2; 3)$, $B(5; -1; -2)$, $C(-1; 1; 2)$. Найдите сумму координат точки $D(x; y; z)$, если $\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BD} = \vec{0}$.
2. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = (\alpha; 6; \beta)$ и $\overrightarrow{BC} = (2; -3; 5)$. Найдите сумму $\alpha + \beta$, если точки A, B, C лежат на одной прямой.

3. В параллелограмме $ABCD$ известны координаты трёх вершин $A(6; -5; 4)$, $B(2; 5; 1)$, $C(-3; 4; -2)$. Найдите сумму координат вершины D .
4. В четырёхугольнике $ABCD$ заданы $\overrightarrow{AB} = (4; -1; 5)$, $\overrightarrow{BC} = (-2; 8; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (-3; 4; 2)$, векторы $\vec{m}$, $\vec{n}$ его диагонали. Найдите модуль скалярного произведения векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$.
5. Вектор $\vec{p}$ направлен противоположно вектору $\vec{q} = (18; -24; -36)$ и $|\vec{p}| = \sqrt{61}$. Найдите сумму координат вектора $\vec{p}$.
6. Даны вектор $\vec{a} = (-2; 8; 1)$ и точка $A(2; 1; -2)$. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AB}$, ортогонального вектору $\vec{a}$, если известно, что точка B принадлежит оси OX .
7. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD известны векторы $\overrightarrow{AB} = (-2; 2; 5)$, $\overrightarrow{AC} = (3; 6; -2)$, $\overrightarrow{AD} = (10; 8; -14)$. Найдите сумму координат вектора $\overrightarrow{MN}$, где M и N — середины сторон AB и CD .
8. Найдите скалярное произведение векторов $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 2\vec{b})$, если известно, что $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 2$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 150° .
9. Найдите сумму координат вектора $\vec{b} = (x; y; z)$, коллинеарного вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$, если скалярное произведение $\vec{b}\vec{a} = 3$.
10. В треугольнике ABC точка M — середина стороны AB , точка N — середина стороны BC . Заданы два

вектора $\overrightarrow{AB} = (6; -1; 4)$, $\overrightarrow{MN} = (-4; 3; 5)$. Найдите сумму координат вектора $\overrightarrow{BC}$.

11. В параллелограмме $ABCD$ заданы векторы $\overrightarrow{AB} = (-5; -1; 2)$, $\overrightarrow{CB} = (-3; -3; 4)$ и точка $A(2; 8; -2)$. Найдите координаты точки пересечения диагоналей параллелограмма.

ГЛАВА 13

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

§1. Древний Вавилон и древний Египет.

Математика возникла *одновременно с образованием* первых *земледельческих* государств. С *зарождением* математики можно *познакомиться*, посмотрев тексты с египетскими *иероглифами*, *глиняными* табличками и с вавилонской *клинописью*. Это время XXVII – XX вв. до н. э.

Рассмотрим математику Древнего Вавилона или, точнее, – математику Двуречья. Одна из самых древних земледельческих культур мира возникла по берегам двух текущих рядом рек Тигра и Ефрата. Сейчас эту территорию занимает Ирак. Эти реки капризны. Иногда они разливаются и несут с собой плодородный ил, иногда приносят огромные разрушения, иногда мелеют и приносят засуху.

Для жизни на такой земле необходим был согласованный и совместный труд тысяч людей. Это привело к созданию городов – государств. Так, в Двуречье появились города шумерского народа : Ур, Урук, Лагаш, а в XXIII веке до н.э. уже было единое государство со столицей в Вавилоне. Вавилонское государство существовало как независимое государство 7 веков (23 г. до н. э. – 538 г.н.э.).

Это было государство с неограниченной властью царя и *регулярными* общественными работами на каналах, плотинах и дамбах. Такими работами руководило *сословие* писцов, которые должны были хорошо знать математику, уметь делить земли. Из опыта работы писцов *постепенно сформировалась* вавилонская математика.

Вавилон достиг своего *могущества* при царе Хаммурапи в XIX веке до н. э. В это время арифметика становится алгеброй. Вавилоняне умели решать линейные и квадратные уравнения. Они решали даже некоторые кубические и биквадратные уравнения, вычисляли площади прямоугольников, треугольников, трапеций, объёмы кубов, параллелепипедов, призм и пирамид.

В Вавилоне пользовались шестидесятеричной системой счисления. От них идёт традиция делить градус на 60 минут и минуту на 60 секунд. Они умели складывать и вычитать многозначные числа и дроби. Для упрощения процесса умножения и деления составлялись специальные таблицы степеней некоторых чисел до десятой степени.

Математика в Египте широко использовалась в практических целях. У египтян тоже возникали проблемы, связанные с разливом реки Нил. После каждого наводнения необходимо было вновь *восстанавливать* земельные участки в прежних границах. Знания арифметики и геометрии в таких случаях были необходимы.

В Британском музее Англии и в Москве хранятся два математических папируса из древнего Египта. Эти папирусы содержат много задач о количестве хлеба, о хранении зерна, о кормлении животных.

Египтяне хорошо знали арифметику и пользовались десятичной системой и дробями вида $\frac{1}{n}$. Арифметика

была аддитивной, то есть умножение сводилось к повторным сложениям. В Древнем Египте умели решать линейные уравнения, знали прогрессии и использовали их в *прикладных задачах*.

Уникальные строения Древнего Египта говорят о хорошем знании геометрии. Египтяне умели вычислять площади прямоугольника, треугольника, трапеции, зна-

ли приближённое значение площади круга, использовали свойства подобных фигур и пропорции. Художники и скульпторы широко использовали в своём творчестве симметрию фигур и линий.

Однако в математике Вавилона и Египта не было одного из самых главных моментов математики – *доказательства*. Правила вычисления заучивались как *догма* (аксиома, закон) и передавались от одного *поколения* писцов к другому. Критерием истинности *служила практика*. Использовали и *точные формулы*, и *приближённые*. Такого же типа была математика 1,5 – 3 тысячи лет тому назад в древних государствах, которые находились на территориях современной Индии и Китая.

Математика возникла как наука только в Древней Греции.

§2. Древняя Греция

Математика в Древней Греции начала развиваться позже и *заимствовала* первые сведения по геометрии у Египта, а по алгебре – у Вавилона. *Становление* греческой математики происходило на другой социально-экономической основе. Греция не имела таких плодородных орошаемых земель, как в долинах Нила, Тигра и Ефрата.

Постепенно орудия труда совершенствовались, и мало плодородные почвы Греции стали приносить *прибавочный продукт*, который послужил *материальной базой* для развития культуры и науки. Кроме того, греки – морской народ. Торговые, рыболовные и завоевательные плавания способствовали развитию математических знаний.

В VI веке до н.э. Греция не знала централизации. Она делилась на самостоятельные города - государства

(полисы). Такими городами были, например, Афины, Спарта, Милет, Сиракузы. Обычно в таких городах была демократическая форма правления. Ремесленники, купцы, матросы, земледельцы решали на народном собрании государственные дела, избирали должностных лиц и предводителей войска, *регулярно* избирали многочисленных членов судов. Суды обычно состояли из многих сотен человек. Таким образом, почти каждый гражданин участвовал в судах, привыкал к логике и доказательствам.

Греческая математика – творение свободных людей, привыкших думать и рассуждать, *слушать доводы* и, если это необходимо, *оспаривать* их. В VI веке до н. э. большинство греческих городов управлялись демократическим путём.

Расцвет греческой математики непосредственно связан с расцветом демократии в этом государстве. Математика помогала грекам находить *порядок в хаосе*, связывать *идеи* в *логические цепочки*, *обнаруживать* основные принципы. Греческая математика была более теоретической, чем другие науки того времени.

“Отцом греческой науки” является Фалес Милетский – купец, политический деятель, философ, астроном и математик. Он был первым греческим геометром, впервые ввёл понятие “доказательство”, как вывод некоторого утверждения из других, более *очевидных* и верных *утверждений*.

Позже Аристотель учил, что доказательства не только устанавливают справедливость математических *высказываний*, но и делают понятной их *сущность*. С этого времени (VI – V вв. до н. э.) начала развиваться *дедуктивная математика*, построенная на строгих, логических доказательствах.

Характерной чертой греческой математики является огромный интерес к чисто теоретическим вопро-

сам и особое внимание к строгости доказательств. Так, великий греческий философ Платон считал, что только строгое доказательство, а не наши *чувства* — может установить истину. Греки развивали математику для постижения законов, *управляющих миром*. Они считали, что все эти законы можно *свести к числу*. Новый подход греков к математической науке, основанный на рассуждении и доказательстве, позволил грекам за десятилетия *превзойти* достижения древних египтян и вавилонян, которые складывались в течение многих веков. Греки достаточно быстро доказали теоремы о свойствах прямоугольников, параллелограммов и других геометрических фигур.

Имя великого греческого математика Пифагора (около 580 — 500 гг. до н.э.) окружено легендами и мифами. Вся его жизнь — легенда. Пифагор родился на греческом острове Самос. Он вырос крепким, смелым юношей и увлекался спортом. Однажды Пифагора не хотели допускать к соревнованиям на одну из первых в истории олимпийских игр. Причиной тому был его маленький рост. Но ему всё же удалось пробиться на эту олимпиаду. Никому не известный Пифагор завоевал золотую медаль в кулачных боях.

Пифагор в ранней юности покинул родину. Он прошёл по дорогам Египта, 12 лет жил в Вавилоне и Италии. В этих долгих путешествиях Пифагор *глубоко изучил* астрономию, астрологию, философию, религию, арифметику, геометрию, музыку и в результате разработал свою систему знаний и свои философские взгляды на окружающий мир.

После долгих путешествий он поселился в Сицилии и там, в Кротоне, основал братство из своих учеников. Так появилась знаменитая школа пифагорейцев.

Пифагорейская система знаний состояла из четырёх частей: арифметики, геометрии, музыки и астрономии. Эти четыре раздела стали называть одним словом *матема*, или *математика*, – *учение, знание*. В Средние века эти четыре ветви учения вошли в систему образования и вместе с грамматикой, *риторикой* и *диалектикой* получили знаменитое название “Семь свободных искусств”.

Трудно сказать, какие научные идеи принадлежали Пифагору, какие – его воспитанникам. Пифагор не записал своего учения. Оно известно только в пересказах Аристотеля и Платона.

Пифагорейцы были уверены, что у чисел есть божественная сила. Чётные числа они считали более разумными. Цифра 4 у них была символом здоровья и гармонии. *Мистика* цифр дожила до наших дней. Через много веков после смерти Пифагора число 12 стало знаком счастья, число 666 – числом зверя.

Основой философии школы Пифагора был *девиз*: “Всё есть число”. Смысл этого девиза состоит в утверждении, что *вселенная*, как и числа, подчиняется определённым законам, которые можно описать с помощью чисел.

Интересно отметить, что Пифагор был первым из философов, который назвал себя философом.

О греческой математике можно судить по трактату Евклида “Начала”, состоящего из 13 книг. В этой работе представлены: планиметрия, стереометрия, учение об отношениях, геометрическая алгебра, решение квадратных уравнений.

Основой нашей школьной геометрии стали первые шесть книг “Начал”. *Фактически* вся геометрия в современной средней школе была создана греками. *К сожалению, подлинные* работы древних греческих ма-

тематиков до нас не дошли. Они известны только в письменных пересказах математиков более поздней эпохи. После изобретения *книгопечатания* появилось более тысячи *изданий* “Начал”.

Трактат Евклида часто изучали для *тренировки ума* в *логических построениях* и воспитания *чувства прекрасного*. В английских частных школах XVIII – XIX вв. школьников (будущих джентльменов) учили по *дословным переводам* Евклида для того, чтобы они потом могли *логично выражать свои мысли* на выступлениях в судах, в администрации или парламенте.

О жизни Евклида не сохранилось достоверных биографических сведений. Осталось лишь несколько анекдотов, которые отражают представление о математике его современников.

В одном анекдоте говорится, что царь Птолемей, покровитель Евклида, спросил: неужели и ему, царю, для изучения геометрии нужно проходить столь *трудным путём*, изучая леммы и теоремы, которые непонятно как связаны между собой? Евклид гордо ответил, что в математике и для царей нет лёгкого пути.

Евклид принадлежал к эпохе эллинизма. Это было время (336 – 323 гг. до н. э.) когда Египет стал частью державы Александра Македонского. На захваченной им территории стали возникать эллинистические государства, в которых многие из царей *покровительствовали* наукам и искусству. Особую роль в расцвете эллинистической культуры сыграли цари из династии Птолемеев, которая царствовала почти 300 лет (последней была царица Клеопатра). Птолемей I основал в новой столице Египта – Александрии Мусейон (дом муз), в котором работали и получали от государства *жалование* многие видные учёные того времени. Мусейон был *по существу* первым научным институтом.

В Александрии проживало очень много греков, поэтому традиции греческой культуры успешно развивались и в Египте. В эпоху эллинизма греческая наука **приобрела** новые черты, наука поддерживалась государством, появлялись библиотеки. Крупнейшая из них в Мусейоне насчитывала около 700 тыс. рукописей. Постепенно на базе Мусейона **сформировалась** первая в истории научная Александрийская школа со своими **традициями**. Основными из них являлись: абсолютная строгость в доказательствах, геометрический стиль изложения и отказ от **актуальной бесконечности**. К этой научной школе принадлежали выдающиеся математики Евклид, Аполлоний и Архимед.

Архимед (287 – 212 до н.э.) – великий математик эпохи эллинизма и всего древнего мира. Он – один из немногих учёных античности, о котором сохранились некоторые подлинные **сведения** о жизни. Отец Архимеда был математиком и астрономом и состоял в близком родстве с царём Гиероном.

Архимед с детства подружился с миром чисел и математикой. Большую часть жизни он прожил в Сиракузах, окружённый почётом и вниманием. Легенды говорят о том, что он настолько увлекался математикой и механикой, что забывал о пище и готов был **чертить** везде: в **пыли**, **пепле**, на песке, даже на собственном теле. Некоторые свои **открытия** он не записывал, поэтому мы никогда не узнаем, как удалось ему извлекать квадратные корни из очень больших чисел (в то время не было правил извлечения корней).

Труды Архимеда по астрономии, геометрии, механике велики и многочисленны. Наиболее важный вклад в математику относится к той области, которую теперь называют интегральным исчислением. Он доказал теоремы о площадях плоских фигур и объёмах тел, нашёл прибли-

жённое выражение для длины окружности, пользуясь вписанными и описанными правильными многоугольниками. Архимед определил площадь круга, площадь поверхности шара и сферического сегмента, вычислил объёмы шара, параболоида, эллипсоида и др.

Эти задачи *предшествовали* интегральному исчислению, которое усилиями многих математиков было разработано в конце XVII в., т.е. через два тысячелетия после Архимеда. Обилие вычислений у Архимеда отличает его от большинства математиков Греции. Архимед – редчайшее в науке сочетание высокого теоретика с *виртуозом* инженера.

В трудах Плутарха описана осада Сиракуз римским полководцем Марцелом. Десятки сконструированных Архимедом катапульт метали камни в корабли захватчиков, на их головы неслись тучи копий и дротиков из метательных машин. “Что ж, придётся нам прекратить войну против геометра”, – невесело шутил Марцелл. Архимед победил. Он совершил высочайший научный и гражданский подвиг. И когда *предательство* открыло римлянам ворота в город, он погиб как солдат от меча римского legionера.

На своей *могильной плите* Архимед заранее повелел изобразить шар и цилиндр – символы его геометрических открытий.

§3. История арифметики

Натуральные числа

История возникновения и эволюции понятия “натуральное число” – это часть истории культуры языка, литературы и религии.

Термин “натуральное число” впервые использовал римский автор Боэций (475 – 524 гг.). Иногда этот

термин можно встретить в *рукописях* XI в. и позже. В современном смысле понятие “натуральное число” стал использовать французский математик и философ Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783 гг.). Он включил это понятие в знаменитую французскую энциклопедию (1751 – 1780 гг.). С этого времени термин “натуральное число” постепенно стал использоваться в математике *повсюду*.

Наибольшее освоенное число натурального ряда в древнем мире часто приобретало особый ореол чудесного и, очевидно, служило основанием для возникновения суеверий, связанных с такими числами. Примером такого числа является цифра 7.

Магическая семёрка в культуре различных народов мира имела значение *максимума, предела*: семь чудес света, семь мудрецов, семь великих богов Древнего Шумера, семь Духов в египетской религии. Француз даёт самую сильную клятву словами: “крепко, как семь”. Счастливый человек чувствует себя на седьмом небе (считает себя “бесконечно” счастливым).

В таком же смысле используется число семь во многих русских пословицах и поговорках. “У семи няnek дитя без глазу”, “Семь раз отмерь, один раз отрежь”, “За семь вёрст кисели хлебать”, “Семеро одного не ждут”, “Семь бед – один ответ”. Про то, что нам совершенно непонятно, мы и теперь говорим, что эта книга “за семью печатями”, а в сказках рассказывают о “семимильных сапогах”.

Интересно отметить, что исследования современной науки – инженерной психологии – подтверждают, что число семь действительно связано с максимумом. Например, оптимальный размер первичного научного или военного коллектива равен семи. Максимальное число одинаковых по *структуре элементов*, которые может *надёжно контролировать* один человек, равно семи.

Распространены суеверия, связанные с числом 13. В некоторых американских домах нет тринадцатого этажа, в гостиницах нет тринадцатого номера. Представление о числе тринадцать, как о числе, приносящем несчастье, могло возникнуть в связи с тем, что, освоив числовой ряд до двенадцати, человек считал 12 символом полноты.

Особая роль отдельных натуральных чисел в истории культуры говорит о том, что человеческая мысль с большим трудом осваивала этот числовой ряд. Потребовались многие тысячелетия, пока люди пришли к выводу о неограниченности этого ряда, и поняли, что не существует наибольшего числа. Размышления о бесконечном числе натуральных чисел можно найти в сочинениях Архимеда.

Многим числам придавали глубокий смысл, они были символами различных понятий.

- 1 – символ мудрости (по Пифагору);
- 2 – символ невежества, но и мать мудрости;
- 3 – символ разделения мира и времени: небеса, земля, подземный мир и прошедшее, настоящее и будущее время, священное число;
- 4 – символ устойчивости, гармонии и здоровья;
- 5 – символ человека;
- 6 – символ шести индусских измерений пространства: вниз, вверх, назад, вперед, налево, направо (в Индии число 6 считается священным);
- 7 – символ духовного таинства;
- 8 – символ гармонии, любви, соглашения (по Пифагору);
- 9 – символ физической природы человека, символ вечности материи, символ ошибок и недостатков, считается агрессивным числом;
- 10 – символ познания универсальной вселенной;
- 12 – символ гармонии (двенадцать знаков Зодиака, двенадцать апостолов);

- 13 – символ таинственной силы (тринадцать лунных месяцев в году), несчастливое число, его называют: чёртова дюжина;
- 20 – символ человека (у народов майя);
- 21 – символ совершенства (самое совершенное из всех нечётных чисел, так как оно равно произведению двух священных чисел трёх и семи);
- 22 – символ трансформации духа и тела (сакральное число, число букв еврейского алфавита,).

Нечётность символизирует *незавершённость*, постоянное продолжение. Поэтому в *орнаментах*, в украшениях архитектурных или скульптурных *сооружений* используется обычно нечётное число элементов.

Пальцевой счёт

Единственной причиной появления десятичной системы счисления является количество пальцев. Десять пальцев – это то стандартное множество, с которым количественно сравнивал первобытный человек другие множества. В английском языке до сих пор первые девять чисел (цифры) называют словом *digits*, которое произошло от латинского слова *digitus* – палец. В римских цифрах цифра один обозначает один палец, пять – рука, десять – две руки. Термин “десятичная или декадная система счисления” стал широко использоваться только с конца XVIII века.

Пальцевой счёт – обозначение чисел при помощи пальцев, был необходим в торговле разноязычных народов. Этому счёту обучали детей в школах.

Существовавшая ранее двадцатеричная система счисления у народов майя в центральной Америке, у басков и кельтов имеет, *по-видимому*, в основе пальцевой счёт. Об исторической роли пальцевого счёта говорят и названия чисел в некоторых языках. Число пять

называется “рукой”, десять – “две руки”, двадцать – “весь человек”.

Системы счисления

За *основание системы счисления* можно *формально* принять любое число. Это положение было высказано ещё в 1665 г. французским математиком Блезом Паскалем.

Некоторые системы счисления использовались задолго до десятичной. Следы пятеричной системы счисления сохранились в римской письменной нумерации, в устройстве китайских и японских счётов.

Существовавшая когда-то у народов Франции двадцатеричная система, оставила следы в современном французском языке. Название чисел 80, 90 и т.д. звучат: quatre – vingts, quatre – vingts – dix. Известный роман Виктора Гюго “93-й год” на французском языке пишется “Quatre – vingts – treize”. В английском языке среди многих значений слова score есть числовое – двадцать. Число 60 – three score, 80 – four score и т.д.

Шестидесятеричная система счисления была разработана в Древнем Вавилоне. О существовании некогда двенадцатеричной системы счисления говорит традиция считать некоторые предметы, например, тарелки, вилки, предметы белья – дюжинами (12) и gros-сами (Gross – большой, “большая дюжина” – 144).

Двоичная система счисления существовала в Китае. Изобретение её *приписывается* императору Фо Ги, который жил в четвёртом тысячелетии до н.э. Отметим, что идея о преимуществе десятичной системы появилась в Китае гораздо раньше, чем у европейцев и американцев.

Позиционная десятичная система возникла в Индии не позже начала нашей эры. Первое известное применение

ние десятичной позиционной системы относится к 595г. Сохранилась каменная плита, на которой число 346 записано в такой системе. В основе этого *совершенного* изображения лежит изображение нуля. Французский математик Лаплас (1749 – 1827 гг.) писал о позиционной системе: “Мысль – выражать все числа знаками, придавая им, кроме значения по форме, ещё значение по занимаемому месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты *трудно осознать*, насколько она *удивительна*. Как не-легко было прийти к этому, видно на примере величайших гениев греческой учёности Архимеда и Апполония, для которых эта мысль осталась скрытой”.

Сохранилось предание, что впервые арабские цифры попали в Европу в 807 году, когда в Айхен прибыло посольство знаменитого халифа Гарун аль-Рашида к императору Франции, Германии и Италии – Карлу Великому.

Новые идеи шли из Испании, которая до этого времени находилась под *владычеством* арабов. Город Толедо, ставший свободным в 1085 году, ещё оставался *очагом* арабской образованности, там часто работали учёные из Англии и Италии.

Но только к концу XII века индийская система завоевывает Европу и вытесняет римскую систему. Этим завоеванием Европа обязана уроженцу города Пизы в Италии, купцу Леонардо. Его отец был *консулом* в одном из портов Алжира, который входил в состав арабской империи. Отец вызвал Леонардо из Италии специально для обучения “удивительному искусству” арабской арифметики. Леонардо *блестяще* освоил новую для Европы систему счисления и написал о ней книгу под *заглавием* “Книга абака”. Она была написана на латинском языке, издана и *опубликована* в Пизе в 1202 году и стала первым учебником по алгебре в Европе.

§4. Происхождение некоторых названий чисел

Особое место в позиционной системе занимает число 0. Это число **возникло** в Индии, быть может, не случайно. Только в Индии **увлекались огромными** числами. Например, у индусов было 68000 образов верховного божества, у брамов сто миллионов божеств. В легенде о **мудром** Арджуме **пытались** вычислить количество всех мельчайших частиц во вселенной. С другой стороны именно индийский ум создал понятие "**небытия**", которое играет важную роль в буддийской философии. Всё это привело к введению знака, который обозначал отсутствие цифры. Индийцы называли такой знак словом "сунья", что значит "пустой". Арабы перевели это слово по смыслу и получили слово "сифр" (sifr). Леонардо искажил слово под влиянием латинского и называл в своей книге современный нуль словом "зефирум". Отсюда произошло французское слово "zero" для обозначения нуля. Сторонники индийской нумерации в Италии сохранили арабское звучание "сифра" (cifra), которое перешло во все европейские языки к XIII веку.

Для обозначения любого числа использовали латинское слово нумерус (numerus). Это слово до сих пор есть во всех европейских языках, и используется в том же смысле.

Только в XV веке итальянцы заменили арабское слово "сифр" итальянским словом "нулла" (nulla), что означает "никакая". Эта nulla от них заимствовали немцы, стали приносить его "нуль" и писать null. Из Германии нуль перешёл в Россию. Введение нового термина освободило арабское слово "сифр" от значения 0. Его стали постепенно использовать для обозначения числового знака.

Слово "цифра" очень долго использовалось для обозначения нуля. Так, например, Эйлер употреблял ещё в 1783 г. вместо "нуль", термин "цифра", также посту-

пал и Гаусс в 1799 г. В Англии такое же использование слов можно встретить не только в математике, но и в литературе (Шекспир, Теккерей). Английское слово “сайфер” (cipher) до сих пор сохраняет значение “нуль”.

В России в конце XVIII в. нуль ещё называли “цифрой”. В латинских переводах арабских трактатов XII в. знак 0 называется “кружком” – *ciculus* или *nulla figura* – никакой знак.

Грамматический состав русских слов числительных обычно понятен. К таким словам можно отнести, например слова: одиннадцать, двадцать, тридцать, полтора. *Этимология* двух числительных “сорок” и “девяносто” не столь очевидна. Корень слова “сорок” тот же, что в слове “сорочка” (рубаша). На полную шубу шло 40 штук соболей. Известно, что собольи шкуры играли роль единицы ценности. Сорок соболей, составляющие полную шубу, также служили единицей ценности. Постепенно это слово приобрело современный смысл.

Можно привести несколько *аналогичных* переносов терминов с конкретного счёта в абстрактный счёт. Римская унция была первоначально мерой веса, равной $\frac{1}{12}$ основной меры веса, впоследствии унция ста-

ла просто названием дроби $\frac{1}{12}$. Датское слово *ol* – название числа 80 означает шест или жердь. На *жердь надевали* обычно именно 80 рыб, поэтому постепенно это слово приобрело современный смысл.

Русское числительное “девяносто” можно объяснить достаточно просто. Девяносто – это число “девять до ста”. Аналогично образовано название числа 90 в греческом и латинском языках.

В древней Греции отдельные числа обозначались первыми буквами названий этих чисел: 5 (пенте), 10 (дека), 1000 (хилиой), 10000 (мириой). Эти названия продолжают жить в современных терминах: пентаграмма, пентагон, километр, мириады.

В России в допетровскую *эпоху* числа выражались буквами, как у греков. Некоторые очень большие числа имели свои уникальные названия. Так число 10000 называлось, как и у татар, словом *туман*. Число 6000 — легион от латинского слова *legio*, что означает отряд из 6000 (шести тысяч) *солдат*.

§5. История алгебры

Начиная с V-го в. центр математической культуры *переместился* на восток к индусам и арабам.

Основные достижения индусов состоят в том, что они ввели в обращение цифры, называемые арабскими и позиционную систему записи чисел. Кроме этого, они обнаружили двузначность квадратного корня, ввели отрицательные числа и распространили правила действия с рациональными числами на иррациональные числа. Индусы совершенствовали алгебраическую символику. Ввели обозначения степеней.

Дальнейшее развитие математика получила у арабов, завоевавших в VII веке Западную Азию, Северную Африку и Испанию. Появились *благоприятные* условия для слияния восточной и западной культур. Одним из таких условий стало удачное расположение столицы восточного халифата Багдада, который находился на полпути между Индией и Европой.

К концу IX века на арабский язык были переведены почти все труды Евклида, Архимеда, Аполлония и Птолемея.

Многие арабские учёные были персами, таджиками, египтянами, евреями, маврами. Они просто все свои научные труды писали на арабском языке, поскольку этот язык был международным языком исламского мира.

Средняя Азия

Огромен вклад арабских и среднеазиатских народов в процесс распространения индийской позиционной системы.

Начиная с IX-го в. арабы в течение шести столетий владели большей частью завоёванного им культурного мира. Они собирали культурное наследие всех покорённых ими стран, переводили на арабский язык научные труды народов Европы и Азии. Многие математические труды греков известны в настоящее время только по арабским переводам. Список переводчиков работ только Евклида содержит более ста имён.

Арабы *постепенно* освоили позиционную систему нумерации и до сих пор называют её “индийской”. Произошло это *главным образом благодаря* среднеазиатским учёным. Одним из них был математик Мухаммед ибн Мусса ал-Хорезми, родившийся во второй половине VIII века. Он написал учебник по арифметике, используя индийскую позиционную систему счисления. От его имени родилось слово: арифметика, а цифры, лежащие в основе индийской позиционной системы стали называть арабскими.

Большая часть книги описывает решения практических задач, чего совершенно не было у греческих математиков. Теоретическая часть представляет алгебру как науку *общего характера*. Оригинал этой книги до сих пор не найден, но в 1857г. был обнаружен и издан её латинский перевод, сделанный в XII веке под названием “Алхорезми об индийском числе”. Этот перевод

начинается словами: *Dixit Algorihmi* – сказал ал-Хорезми. Отсюда произошло слово “алгоритм”, которое означает правило выполнения математических операций для решения определённой задачи.

В начале IX века Мухаммед ал-Хорезми вновь написал учебник по алгебре. “Краткая книга об исчислении ал-джабра и ал-мукабалы”, где давались числовое и геометрическое решения уравнений первой и второй степеней. Название книги соответствует операциям при решении уравнений: “ал-джабр” (восстанавливать) и означает восстановление отрицательного члена в одной части уравнения в виде положительного в другой. “Ал-мукабала” означает сопоставление подобных членов, приведение подобных членов к одному. Модификация слова ал-джабр породила более позднее слово алгебра. Это был первый учебник по алгебре, по которому позже учились в Европе.

Наиболее значительным достижением арабов в алгебре был “Трактат о доказательствах задач алгебры и ал-мукабалы” знаменитого поэта, философа и астронома Омара Хайяма (1048 – 1122). В этой работе он представил геометрический способ решения уравнений третьего порядка. Хайям пытался найти правило решения кубического уравнения в общем виде, но *безуспешно*. Алгебраические методы решения этих уравнений были найдены в Европе лишь в середине XVI столетия.

Интересно отметить, что Омар Хайям в 1079 г. составил с помощью математики новый очень точный календарь, который был введён в некоторых странах Азии и *использовался* для составления французского календаря в конце XVIII века.

Математика в течение всей своей истории очень тесно связана с астрономией. Поэтому естественно, что многие математики одновременно занимались и аст-

рономией. К ним относится знаменитый среднеазиатский философ, астроном и математик ал-Беруни из Хорезма (973 – 1050). В своей “Книге о хордах” он вычислил сторону правильного вписанного девятиугольника с помощью кубического уравнения специального вида. Содержание этой книги связано со сложными вопросами геометрии и тригонометрии. В астрономических работах ал-Беруни есть черты современных способов составления более точных карт (метод триангуляции).

Внук монгольского властелина Тамерлана Улугбек (1393 – 1449), крупный астроном и математик, построил в Самарканде лучшую для того времени *обсерваторию*, собрав в ней известных учёных для научной работы в области астрономии и математики. В круг его математических интересов также входили алгебраические кубические уравнения.

Италия

Только в XII–XIII вв. в Европе стали *интенсивно* переводить с арабского языка на латынь большое количество научной и философской литературы и изучать *наследие* древних греков и арабов.

Первым европейским математиком, которому удалось *внести свой вклад* в становление математической науки в Европе, был Леонардо Пизанский (Фибоначчи, 1180 – 1240). В его “Книге абака” арифметика и алгебра линейных и квадратичных уравнений изложены с небывалой до этого строгостью и полнотой. Задачи Леонардо и приёмы их решения *разошлись* в XV – XVI вв. по многим книгам на разных языках. Они встречаются и в знаменитой “Алгебре” Эйлера, изданной в 1768 – 1769 гг.

Выдающимся алгебраистом своего времени стал итальянский монах Лука Пачоли (1445 – 1514), близ-

кий друг Леонардо да Винчи. Алгебру Пачоли называл “великим искусством”. Он ввёл “ алгебраические буквы”, дал обозначения квадратным и кубическим корням. Для обозначения операции сложения он пользовался знаком $\bar{p}$ (plus – больше), для вычитания – знаком $\bar{m}$ (minus – меньше). Пачоли *сформулировал* правила умножения чисел, перед которыми стоят эти знаки. Интересно, что именно Пачоли подсчитал количество металла, необходимого для *статуи всадника*, созданной Леонардо да Винчи.

Следует отметить, что значительного успеха в совершенствовании “ алгебраических букв” достигли и немецкие алгебраисты – “коссисты”. Это слово возникло благодаря тому, что немецкие математики называли алгебру словом “Coss”. *По аналогии с* итальянским словом cosa – вещь (неизвестная величина). Коссисты ввели знаки + и знак – , знаки для неизвестной и её степеней, свободного члена. Эти знаки распространились во многих странах Европы, в том числе и в России, после выхода в свет “Арифметики” Магницкого.

В XVI в. произошло величайшее открытие в алгебре. Удалось решить в общем виде уравнения третьей и четвёртой степеней. Сделали это итальянские математики.

Проблема нахождения общих решений таких уравнений *волновала* математиков в течение двух тысячелетий. Известно, что в 1505 году итальянский математик Ферро нашел решение кубического уравнения, но не опубликовал его, а сообщил его своему ученику Фиоре. *С современной точки зрения утаивание* научного открытия может *показаться страшным*. Научных журналов ещё не было, а выпуск книг был *очень дорог*. Но главная причина была в том, что *обладание* общим методом решения некоторого класса задач давало учёному большие *преимущества перед* другими математиками.

В те времена получил распространение особый вид общения учёных – научный *турнир (диспут, поединок)*. Такой поединок по математике состоял в том, что два математика *предлагали друг другу* для решения несколько десятков задач. Выигрывал поединок тот, кто решал большее число предложенных задач. Победитель получал *денежное вознаграждение* и известность, ему предлагали *должности на выгодных условиях*.

В одном из поединков, 12 февраля 1535 года, Фиоре встретился с Николо Тартальей (1500 – 1557), выдающимся итальянским математиком. Тарталья предполагал, что легко победит Фиоре, но, узнав, что Фиоре знаком с секретом решения кубических уравнений, Тарталья приложил много усилий, чтобы самому вывести такие формулы решения. К диспуту участники подготовили по 30 разных задач, связанных с кубическими уравнениями. Текст задач был отдан на хранение нотариусу. За каждую решенную задачу давали *приз* 5 сольди. В день диспута Тарталья в течение двух часов решил все задачи Фиоре, противник не решил ни одной.

Это было величайшим достижением. Тартальи надо было обладать *мужеством*, чтобы взяться за задачу, которая не поддавалась усилиям выдающихся математиков около двух тысячелетий. *Популярность* Тартальи сильно возросла; его пригласили преподавать математику в Вероне и Венеции.

Николо Тарталья, настоящая фамилия которого Фонтано, прожил достаточно тяжелую жизнь. Шестилетним мальчиком, в 1506 году, он вместе с родственниками спасался в церкви от жестокости завоевателей – французских войск. Старинный обычай прятаться в храме не уберёг от несчастья. Тарталья получил увечье гортани от удара мечом. После этого он остался на всю жизнь *заикой* и получил прозвище (tartaglia – заика).

Бедность не позволила Тарталье получить *систематическое образование*. Родители ребёнка *обязаны* были оплачивать труд учителя. Мать Тартальи рано *овдовела* и смогла оплатить только начальный этап учёбы. Поэтому мальчик под наблюдением учителя выучил лишь половину алфавита. Дальше Тарталья овладевал знаниями уже сам и проявил *необыкновенную* любовь к учению. В доме не было бумаги; это не останавливало мальчика. Он упражнялся в письме и счёте на *могильных плитах* кладбищ. В книге “Вопросы и различные изобретения” Тарталья пишет: “С тех пор я учился сам, и у меня не было другого *наставника*, кроме спутницы бедности – *предприимчивости*”.

Завершил построение алгоритма решения кубических уравнений Кардано – знаменитый учёный эпохи Возрождения. Он занимался философией, астрологией, медициной и математикой.

Джироламо Кардано с детства увлекался математикой. К двенадцати годам он одолел первые шесть книг “Начал” Евклида. Не смотря на огромную любовь к математике, Кардано поступает на медицинский факультет университета. Такой выбор связан с идеей Кардано, оставить после себя как можно более значительный след. Для этого он должен был уметь следить за своим слабым здоровьем. Во время обучения в университете Джироламо замещал в гимназиях профессоров; читал лекции по геометрии, философии и диалектике. Он сам удивлялся тому, как мог без *утомления усвоить* столько самых *разнообразных* знаний.

В 1525 г. Кардано окончил университет, и был увенчан лаврами доктора медицины. Первая медицинская практика у него сложилась очень неудачно. Поэтому он какое-то время не работал, а занимался укреплением сво-

его здоровья. Кардано уделял много времени физическим упражнениям – верховой езде, фехтованию, плаванию.

С помощью *влиятельных* друзей Кардано удалось получить в Милане место преподавателя “геометрии и математики” в школе, где раньше преподавал его отец, а затем и место врача. В эти годы он написал много работ по медицине, философии, математике и чем больше он писал, тем глубже *опускался в бедность*.

В 1539 г. была опубликована первая книга Кардано по математике – “Практическая арифметика”. Книга была встречена весьма холодно на родине автора и с большим одобрением во Франции и Германии. В Нюрнберге выпустили книгу вторым изданием, на фронтисписе Кардано поместил изречение: “Никто не пророк в своём отечестве”. Издатель книги предложил Кардано написать новую большую книгу по математике, которая представляла бы энциклопедию всего известного в арифметике и алгебре.

Естественно, что Кардано хотелось поместить в книгу решения кубических уравнений. Он отправил Тарталье письмо с просьбой сообщить его способ решения. Тарталья отказался. Но после очень долгих уговоров он приехал в Милан и встретился с Кардано, который *покаялся* “на святом Евангелии” никому не сообщать *секрет* решения. Тарталья поверил клятве и рассказал способ решения.

В 1545г. вышла в свет знаменитая книга Кардано “Великое искусство, или об алгебраических правилах”, содержащая решение уравнений третьей степени. Он *указал*, что Тарталье принадлежит честь открытия. Несмотря на это признание, формула для решения уравнений третьей степени носит и сейчас название “формулы Кардано”.

В книге “Великое искусство” впервые опубликовано решение уравнений четвёртой степени. Открыл этот

метод решения 23-летний ученик и воспитанник Кардано – Луиджи Феррари (1522 – 1565).

О Феррари известно немного. Он родом из Болоньи, где его отец был убит *интервентами* – французами. Маленький Луиджи *скитался* по стране и зарабатывал на пропитание чтением и письмом (тогда грамотность была редкостью), и каким-то образом в Милане попал в дом Кардано. Уникальные способности мальчика и любовь к учению расположили к нему хозяина дома. Феррари быстро освоил латинский и греческий языки, математику, помогал Кардано *оформлять* книги. К моменту очередного диспута с Тартальей Феррари уже овладел вершинами математики, открыл метод решения уравнений четвёртой степени. После победы над Тартальей он получил выгодные предложения от кардинала города Мантуи и даже от короля.

Франция

Фамилия французского математика XVI века Франсуа Виета известна каждому школьнику. Виет получил юридическое образование и стал членом парламента, затем советником короля Генриха III, который очень высоко ценил Виета. Но истинной страстью Виета была математика. Ей он посвящал всё свободное время и работал *самозабвенно*. Рассказывали, что, занимаясь математикой, Виет мог сидеть за письменным столом по трое суток. Он изучил работы древних классиков (Архимеда, Евклида, Аполлония, Диофанта) и своих *непосредственных предшественников* (Тартальи, Кардано и др.). Интерес Виета к алгебре первоначально был связан с возможными приложениями к тригонометрии и геометрии. Он не пользовался словом “алгебра”, эту науку он называл “искусством анализа”. Виет разрабо-

тал символику, в которой наравне с обозначением неизвестных впервые появились знаки для произвольных величин, которые называются в настоящее время параметрами. Слово “коэффициент” введено в алгебру Виетом.

Для трёх низших степеней он взял названия из геометрии. Мы и сейчас говорим “ a в квадрате (a^2)” или “ a в кубе (a^3)”. Виет первый стал применять буквенные обозначения для коэффициентов и для неизвестных. Его символика позволяла находить общие *закономерности* и *обосновывать* их, а это способствовало выделению алгебры в самостоятельную ветвь математики, не зависящую от геометрии.

Предшественники Виета высказывали некоторые правила, рецепты для решений конкретных задач и *иллюстрировали* их примерами. Виет впервые дал полное изложение вопросов, связанных с решением уравнений первых четырёх степеней и разработал метод приближённого решения уравнений с числовыми коэффициентами. Этот метод применялся математиками до конца XVII века. Работы Виета оказали *существенное* влияние на развитие математики. Его имя донесла до наших дней “теорема Виета”.

Реформа всей математики и алгебры *в том числе*, произошла после выхода знаменитой книги “Геометрия” (1637 г.), автором которой был Рене Декарт. В этой книге в алгебру была включена вся классическая геометрия.

Рене Декарт был родом из Турени (Франция), вёл жизнь *дворянина*, некоторое время служил в армии, в течение многих лет жил в Голландии.

В своей книге “Рассуждения о методе” Декарт сам говорит о *причинах* переезда в Голландию. Ему необходимо было *удинение* и *относительная свобода*. Его *девизом* были слова: “Хорошо прожил тот, кто хорошо укрылся”.

Вместе со многими другими великими мыслителями XVII века Декарт искал общий метод мышления, который бы позволял быстрее делать изобретения и выявлять истину в науке. У него была идея о всеобщей математике, объединяющей все её разделы.

В XVII в. мир рассматривался как *механизм*, действующий в соответствии с постоянными законами. В связи с таким взглядом ведущее значение приобрела механика, а вместе с ней и математика. Она была тогда единственной наукой, которая имела системное *строение*. Поэтому математика стала наиболее важным *средством* для изучения *окружающего мира*. В те времена многие учёные считали математику царицей наук. Леонардо да Винчи называл механику *раем* математических наук.

Деятельность Декарта – математика, как и большинства математиков того времени, тесно связана с кружком (ассамблеей) Мерсенна. Этот кружок стал *зародышем* Парижской академии наук. Мерсенн был францисканским *монахом* и незаурядным учёным. Подлинным центром французской науки была его *келья в монастыре*.

Декарт *неустанно* вёл переписку со всеми учёными Европы. Переписка *заменяла* тогда научные журналы, которые появились значительно позже. Через Мерсенна велись научные *дискуссии* по всем важным *спорным* вопросам. Члены кружка высоко ценили научные достижения Декарта.

Декарт *продолжил* идеи Виета и построил алгебру как самостоятельную часть математики. Он *усовершенствовал* буквенную символику, которая сделала математику более демократической. Декарт стал обозначать известные величины буквами $a, b, c, \dots$, а неизвестные (“неопределённые величины”) – буквами $x, y, z, \dots$. Он ввёл обозначения степеней: $a^2, a^3, \dots$. Именно Декарт стал первым записывать уравнения в виде $P(x)=0$

и настолько формализовал алгебраические действия, что после этого отпала (ушла) необходимость в геометрической *интерпретации* алгебры.

Размышляя о роли математики в познании мира, он писал: "... к области математики относятся только те науки, в которых рассматривается либо порядок, либо *мера*, и совершенно несущественно, будут ли это числа, фигуры, звёзды, звуки или что-нибудь другое, в чём отыскивается мера".

Девятнадцатый век дал алгебре двух гениальных математиков. Одним из них был француз Эварист Галуа, сын мэра маленького городка вблизи Парижа. Удивительно, но он дважды не был принят в знаменитую своими математиками Политехническую школу, затем поступил в Нормальную школу, но оттуда потом был исключён. Галуа зарабатывал деньги уроками по математике и со страстной любовью занимался математической наукой.

Галуа принимал участие во французской революции 1830 г., несколько месяцев провёл в тюрьме и вскоре после этого был убит на дуэли. Ему было тогда всего 21 год.

Две статьи о *разрешимости* алгебраических уравнений выше четвёртой степени, которые Галуа послал в печать, *пропали*. Другие статьи были напечатаны *спустя много лет* после его смерти. Накануне *дуэли* он написал одному из друзей *резюме* своих открытий в теории уравнений. Этот драматический документ заканчивается такими словами: "Ты публично попросишь Якоби или Гаусса дать заключение не о справедливости, а о значении этих теорем. После этого, я надеюсь, найдутся люди, которые сочтут нужным расшифровать всю эту *галиматью*". Эта галиматья содержала новую теорию групп, ключ к современной алгебре. Теперь подход Галуа к решению алгебраического уравнения

любой степени признан одним из самых выдающихся достижений математики XIX века.

В двадцатые годы XIX века в Норвегии появился другой молодой гений, Нильс Генрих Абель, сын сельского священника. Короткая жизнь Абеля почти столь же трагична, как жизнь Галуа. Ещё студентом он опубликовал статью с решением уравнения 5-ой степени, но потом нашёл у себя ошибку. В новой брошюре в 1824 г. он доказал невозможность решения общего уравнения пятой степени в радикалах. Эта задача интересовала математиков со времён Виета. За это открытие Абель получил *стипендию* и совершил поездку в Берлин, Италию и Францию. Во время своего *путешествия* он написал несколько математических работ. Имя Абеля часто встречается в современной математике. Это и абелевы группы и интегральные уравнения Абеля и др.

§6. История тригонометрии

Слово “тригонометрия” греческого происхождения, в переводе на русский язык оно означает “измерение треугольников”.

Ещё задолго до новой эры древневавилонские учёные умели *предсказывать* солнечные и лунные *затмения*, следовательно, они владели некоторыми знаниями из тригонометрии. Ко II веку до н. э. накопились большие *ряды* астрономических *наблюдений*, и для научного анализа таких рядов были необходимы тригонометрические таблицы. Автором первых тригонометрических таблиц был древнегреческий астроном Гиппарх. Эти таблицы вошли в сочинение знаменитого александрийского астронома Клавдия Птолемея, жившего во второй половине II в. н. э. Естественно, что в Греции тригонометрия считалась частью астрономии.

Важный вклад в развитие тригонометрии внесла индийская математика в период V – XII вв. н. э. Ин-

дийские математики составили таблицу синусов, им были известны соотношения, которые в современных обозначениях пишутся в виде:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha).$$

В период IX – XV вв. ведущую роль в развитии тригонометрии играли народы Средней Азии и Закавказья. Тригонометрию использовали для решения прикладных задач в *геодезии* и *географии*, астрономии. Учёные Средней Азии ввели в тригонометрию шесть линий – линии синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса и косеканса. Выдающийся астроном и математик Абу аль-Вефа из Харасана (Иран) выразил словесно алгебраические соотношения между тригонометрическими величинами, составил таблицы синусов с точ-

ностью $\frac{1}{60^4}$ через каждые $10'$ и таблицы тангенсов. В обсерватории Улугбека в Самарканде в XV веке, был разработан весьма точный способ составления тригонометрических таблиц.

Знаменитый математик и астроном Насирэддин Туси, живший в XIII в., впервые письменно изложил тригонометрию в виде самостоятельной математической дисциплины.

Первые научные работы по тригонометрии в Западной Европе относятся только к XV веку, когда немецкий учёный Иоганн Мюллер написал трактат “Пять книг о различного рода треугольниках”, где было дано систематическое изложение тригонометрии. Иоганн

Мюллер составил таблицы синусов с точностью $\frac{1}{10^7}$.

Развитие алгебраической символики позволило записывать тригонометрические соотношения в виде формул.

Английский математик Исаак Ньютон разработал численный метод, с помощью которого можно вычислять значения тригонометрических величин с *любой степенью точности*.

Дальнейшее развитие тригонометрии связано с великим Леонардом Эйлером (1707 – 1783 г.г.), членом Российской академии наук. Эйлер впервые стал рассматривать тригонометрические величины в круге единичного радиуса, доказал ряд теорем тригонометрии, открыл связь между тригонометрическими и показательными функциями. Аналитическое построение теории тригонометрических функций, начатое Эйлером, было завершено русским учёным – математиком Николаем Лобачевским.

Французский математик Жан Батист Жозеф Фурье доказал, что любое периодическое движение с любой степенью точности можно представить в виде суммы *простейших* синусоидальных *колебаний*. Это доказательство стало базой в современном гармоническом анализе, который широко используется в математике, механике, физике, метеорологии, гидрологии, океанологии, экономике и других научных областях

Заключение

Период развития алгебры от античности до середины XVII в., когда разрабатывались способы решения уравнений, и в основном было завершено построение алгебраической символики, называется предисторией алгебры. Собственно алгебра создавалась в последующие три столетия, и содержание алгебры изменилось.

Отметим основные *вехи* развития алгебры.

1. Задачами алгебры XVII – XVIII столетий были преобразования буквенных выражений, решение алгебраических уравнений.

2. В XVIII – XIX столетиях алгебра стала, прежде всего, алгеброй многочленов; основной её задачей стало решение уравнений с одним неизвестным. После того как усилиями Тарталли, Кардано и Феррари были найдены способы решения уравнений третьей и четвёртой степеней, в течение почти трёх столетий математики пытались найти формулы для выражения корней уравнений более высоких степеней через их коэффициенты. *Безуспешные попытки* завершились тем, что в 1824 г. Нильс Абель доказал неразрешимость уравнений выше четвёртой степени в общем случае, а в 1830 г. Эварист Галуа установил *критерий* разрешимости уравнений в радикалах.

3. В конце XVIII в. Карл Гаусс доказал основную теорему алгебры о существовании корня алгебраического уравнения.

Исследования систем линейных уравнений привело к возникновению теории матриц и теории определителей. С середины XIX в. в алгебре появляются новые, отличные от чисел, объекты. Поэтому основное содержание алгебры переместилось на изучение произвольных алгебраических операций.

4. Современное построение алгебры объединило разрозненные ранее алгебраические идеи общей аксиоматической основой. Предметом изучения алгебры стали различные множества с заданными на них алгебраическими операциями.

ПРИЛОЖЕНИЯ

РУССКО-АНГЛИЙСКИЙ СЛОВАРЬ
(для чтения очерков по истории математики)

А

актуальный – actual

аналогичный – analogous

Б

безразлично – with indifference

безуспешно – unsuccessfully

бедность – poverty

бесконечность – infinity

благодаря – owing to

благоприятный – favorable

блестящий – brilliant

В

виртуоз – virtuoso

владеть – to be able to use

владычество – dominion

влиятельный – influential

внести вклад – to make a contribution

вознаграждение – reward

возникать – to arise

волноваться – worry

восстанавливать – to restore

всадник – rider

вселенная – world

выгодный – profitable

выразить – to express

высказывание – statement

Г

галиматья – rubbish
география – geography
геодезия – geodesy
главным образом – mainly
глина – clay
глубоко – deeply

Д

дворянин – nobleman
девиз – motto
дедуктивный – deductive
диалектика – dialectics
дискуссия – discussion
диспут – disputation
довод – argument
догма – dogma
доказательство – proof
должность – position
дорогой – a high price
дословный перевод – literal translation

Ж

жалование (зарплата) – salary
жердь – pole

З

завершить – to complete
задолго до – long before
заглавие (под заглавием) – title
заика – stutter
заимствовать – to adopt

закономерность – low-governed nature
заменять – to substitute
зарабатывать себе на пропитание – to earn enough to buy food
зарождение – origination
затмение – eclipse
земледельческий – landowning
значительный – considerable

И

идея – idea
иероглиф – hieroglyph
иллюстрировать – to illustrate
интервент – interventionist
интерпретация – interpretation
использовать – to use

К

казаться – to seem
келья – cell
книгопечатание – book-printing
кладбище – cemetery
колебание – oscillation
консул – consul
контролировать – to check
критерий – criterion

М

материальная (база) – material
мера – measure
механизм – mechanism
мистика – mysticism
могильная плита – gravestone

монастырь – monastery

монах – monk

могущество – power

мудрый – wise

мужество – power

механизм – mechanism

Н

наблюдать – to watch, observe

надёжно – effective

наследие – legacy

наставник – teacher

незаурядный – outstanding

необыкновенный – extraordinary

непосредственный – direct, immediate

неразрешимый – insoluble

неустанный – tireless

О

обнаруживать – to discover

обосновывать – substantiate

образование – education

объект – object

обязанность – duty

овдоветь – to become a widow

огромный – huge, enormous

одновременно – at the same time

окружающий (мир) – surrounding

опубликовать – to publish

опускаться – to put into

орнамент – ornament

основание – base

осознать – to realize

оспаривать – to contest
остановить – to restrain
открытие – discovery
относительная (свобода) – relative freedom
очаг – centre
очерк – article
оформлять – to design a book

II

пепел – ashes
переместиться – to move
плита – plate
поверить – to believe
по-видимому – probably
повсюду – everywhere
подлинный – original
поединок – duel
позиционная – positional
познакомиться – to get to know
показаться – to imagine
поклясться – to swear
поколение – generation
покровительство – protection
положение – principle
популярность – popularity
попытка – attempt
порядок (в хаосе) – order
постепенно – gradually
построение – construction
практика – practice
превзойти – to excel
предательство – betrayal
предел – limit
предлагать – to put

предсказывать – to predict
предприимчивость – enterprise
предшествовать – to precede
преимущество – preference
прекрасный – excellent
прибавочный (продукт) – surplus product
приближённый – approximate
приз – prize
прикладная (задача) – applied
природа – nature
приобрести – to acquire
приписывать – to ascribe
причина – reason
продолжить – to continue
пропасть – to disappear
путешествие – trip
пыль – dust
пытаться – to try

Р.

разнообразный – varied
разойтись (распространяться) – to spread
разрозненные – odd, incomplete
рай – paradise
регулярный – regular
резюме – summary
риторика – rhetoric
рукопись – manuscript
ряд – series

С

самозабвенно – oblivion, absorption
сведение – information

секрет – secret
систематическое (образование) – systematic
скитаться – to roam
служить – to serve
совершенный – perfect
сожаление (к сожалению) – unfortunately
солдат – soldier
сооружение – structure
сословие – estate
сохранить – to preserve
спорный – disputable
спустя (много лет) – after (later)
становление – formation
статуя – statue
стипендия – grant
странный – strange
строение – structure
структурный – structural
суд – court of law
существо (по существу) – as a matter of fact
существенный – essential
сущность – essence
сформулировать – to formulate

Т

табличка – table(exact)
точный – precise
тренировка – training
трудный – difficult (hard)
туман – mist
турнир – tournament
традиция – tradition

У

увлекаться – to carry away
уединение – solitude
указывать – to show (indicate)
укрыться – to protect
уникальный – unique
управлять – to direct
усвоить – to know
условие – condition
усовершенствовать – to improve
утаивать – to keep back
утверждение – affirmation
утомляться – to tire (oneself)

Ф

формально – formally
формулировать – to formulate

Х

хаос – chaos

Ч

чувство – sense
чертить – to draw

Э

эпоха – age
элемент – element

АНГЛО-РУССКИЙ СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ

A

- abstract* – абстрактный
abstraction – абстракция
absciss – абсцисса
axiom – аксиома
algebra – алгебра (algebraical – алгебраический)
algorithm – алгоритм
alphabet – алфавит
arithmetic – арифметика
arch – арка

B

- ball* – шар
basis – базисный, основной
belong – принадлежать, относиться к
boundless – неограниченный
binomial – бином
bisector – биссектриса
bisectrix – биссектриса
biunique – взаимно однозначный
book – книга
brace – фигурная скобка
bracket – скобка; round bracket- круглые скобка;
square bracket- квадратная скобка

C

- calculate* – вычислять, подсчитывать, рассчитывать
cancel – вычёркивать; cancel out- сокращать числитель
и знаменатель дроби
cancellation – сокращение

canonical – канонический;
 canonical equation – каноническое уравнение
cardinal number – кардинальное число или мощность
cartesian – декартов;
 C. coordiates- декартовы координаты;
 C. space- евклидово пространство
change – менять; change of variable in integration – замена переменной интегрирования
check – проверка
chord – хорда
cipher – нуль
circle – круг, окружность
circumcircle – описанная окружность
closely – близко; arbitrarily closely – сколь угодно близко
coefficient – коэффициент, индекс
coincide – совпадать
collinear – коллинеарный
column – столбец
combination – комбинация;
 linear combination – линейная комбинация
comma – запятая
commutative law – закон коммутативности
compare – сравнивать, сопоставлять
composite function – сложная функция
condition – условие
consequence – следствие
constant – постоянный
contingence – касание
continuity – непрерывность;
 continuity property – свойство непрерывности
correct – исправлять.
correspondence – соответствие;
 one-to-one correspondence – взаимно однозначное соответствие

cosine – косинус;
direction cosine – направляющий косинус
count – считать
cylinder – цилиндр

D

data – исходные данные
decimal – десятичный
decimal point – запятая в десятичном числе
decision – решение
decomposition – разложение;
decomposition of a fraction – разложение дроби
deduction – вычитание
define – определять
definition – определение;
range of definition – область определения
deflate – понижать порядок
degree – степень
delete – вычёркивать
demonstrate – доказывать
denominator – знаменатель;
common denominator – общий знаменатель
denote – обозначать
depend – зависеть
dependence – зависимость;
linear dependence – линейная зависимость
derivation – дифференцирование
derivative – производная
describe – описывать
determine – определять, вычислять
diameter – диаметр
difference – разность
differentiate – дифференцировать
digit – цифра

direction – направление
discriminant – дискриминант
discussion – рассмотрение, обсуждение
display – показывать, указывать
distance – расстояние
divide – делить
divisor – делитель;
greatest common divisor – общий наибольший делитель
domain – область
double – двойной

E

each – каждый
education – образование
element – элемент;
element of integration – подинтегральное выражение
elimination – исключение;
elimination by substitution – исключение с помощью подстановки
ellipse – эллипс
endless – бесконечный
enough – достаточный
entire – целый;
entire rational function – целая рациональная функция, многочлен
environ – окружность
equal – равный, одинаковый
equality – равенство
equation – уравнение, равенство
equilateral – равносторонний;
equilateral triangle – равносторонний треугольник
erect – прямой,
erect a perpendicular – восстанавливать перпендикуляр
error – ошибка

essential – существенный
evaluate – вычислять, выражать
even – чётный
every – каждый, всякий
evolution – извлечение корня
exemplar – образец, экземпляр
exercise – упражнение, задача, пример
exist – существовать;
 there exists such a number... существует такое число
existence – существование;
 existence theorem – теорема существования
explicit – явный
exponent – показатель, показатель степени
exponential – показательный;
 exponential equation – показательное уравнение;
 exponential function – показательная функция
express – выражать
expression – выражение;
 numerical expression – численное выражение
extract a root – извлекать корень
extraction of a root – извлечение корня
extraneous – посторонний;
 extraneous root – посторонний корень
extreme – экстремум;
 extreme point – экстремальная точка;
 extreme value of a function – экстремальное значение
 функции

F

face – грань, плоская поверхность
fact – результат
factor – множитель, коэффициент;
 constant factor – постоянный множитель
factoring – разложение на множители

faithful – точный, истинный
familiar – хорошо известный, обычный
feature – свойство
few – немного, мало
field – область
figure – символ, цифра, коэффициент, число;
geometric figure – геометрическая фигура
first of all – прежде всего
follow – следовать, вытекать
foot – основание (перпендикуляра), точка пересечения, проекция (точки)
formula – формула;
formula addition – формула сложения
fraction – дробь; common fraction – простая дробь;
decimal fraction – десятичная дробь;
proper fraction – правильная дробь,
improper fraction – неправильная дробь
function – функция
fuctional – функциональный
fundamental – основной, фундаментальный

G

general – общий, общего вида
generator – образующая (линия)
geometrical – геометрический;
geometrical average – среднее геометрическое;
geometrical progression – геометрическая прогрессия
geometry – геометрия; plane geometry – планиметрия

H

hypotenuse – гипотенуза

I

- idea** – идея, представление
identical – тождественный
identically – тождественно
identity – тождество
illustrate – пояснять, иллюстрировать
illustration – рисунок
impossible – невозможно
improve – уточнять
incircle – вписанная окружность
inclination – наклон; угол наклона
incline – наклон
increase – возрастать
increment – приращение;
increment of a function – приращение функции
independent – независимый
index – индекс, показатель, порядок, показатель степени;
index laws – правила действия с показателями
infer – заключать, делать вывод
infinite – бесконечный, бесконечно большой
infinity – бесконечность
inradius – радиус вписанной окружности
inside – внутренность
insphere – вписанная сфера
integral – интеграл;
integral table – таблица интегралов;
definite integral – определённый интеграл;
indefinite integral – неопределённый интеграл
integrand – подинтегральное выражение; подинтегральная функция;
exact integrand – подинтегральное выражение, которое является точным дифференциалом
integrate – интегрировать;
by parts integrate – интегрировать по частям;

integrate by substitution – интегрировать подстановкой

interior – внутренний; interior angles – внутренние

углы

intersect – пересекать

interval – интервал, промежуток, отрезок

involve – возводить в степень

J

jump – скачок

just – верный, точный

L

label – обозначение

largest – наибольший

low – правило, закон

length – длина

let – допускать, позволять

like – сходный, подобный

limit – предел

linear – линейный;

linear dependence – линейная зависимость

linearity – линейность

literal equation – уравнение с буквенными коэффициентами

logarithm – логарифм;

logarithmic curve – график логарифмической функции;

logarithmic equation – логарифмическое уравнение

M

main – главный, основной

mark – знак, метка

maximum – максимум

mean – среднее, среднее значение;

by all means – любым способом
median – медиана, средняя линия;
 median of a trapezoid – средняя линия трапеции;
 median of a triangle – средняя линия треугольника
method – метод, способ;
 method of elimination – метод исключения
methodical – методический
middle – середина
midline – средняя линия
minimal – наименьший
minute – минута
missing – отсутствующий
mistake – ошибаться
mode – форма, вид
module – модуль
monotone – монотонный;
 monotone function – монотонная функция
more – больший, более
most – наибольший; at the most- самое большое
multinomial – многочлен, полином
multihle – кратное;
 least common multiple – общее наименьшее кратное
multiplication – умножение
multitude – множество
mutually – взаимно;
 mutually perpendicular lines – перпендикулярные прямые

N

Naperian logarithms – натуральный логарифм или не-
 перов логарифм
natural – натуральный;
 natural number – натуральное число
naught – нуль

necessary – необходимый;
necessary condition – необходимое условие
negate – отрицать
negation – отрицание
neighbourhood – окрестность
non-decreasing – неубывающий;
non-decreasing function – неубывающая функция
nonlinear – нелинейный
nonterminating – бесконечный;
nonterminating decimal – бесконечная десятичная дробь
normal – обыкновенный, средний, перпендикуляр-
ный, нормальный
notation – обозначение
nothing – нисколько, нуль
nought – нуль
null – пустой; **null set** – пустое множество
number – число, количество;
number variable – числовая переменная;
serial number – порядковый номер; нумеровать, считать,
подсчитывать
numeral – цифра, цифровой, числовой
numeration – система счисления; нумерация;
decimal numeration – десятичная система счисления
numerical – численный;
numerical calculations (solution) – численное решение;
numerical value – численное значение

O

obtuse – тупой; **obtuse angle** – тупой угол;
obtuse triangle – тупоугольный треугольник
odd – нечётный
one-one (one-to-one) – взаимно однозначный
one-valued – однозначный;
one-valued function – однозначная функция

only – единственный;
one and only one – один и только один, единственный
operation – действие, операция
opposite – противоположный, противоположащий;
opposite side of a triangle – противоположная сторона;
opposite vertices of a polygon – противоположные вершины многоугольника
ordinate – ордината
origin – начало; origin of coordinates – начало координат
original – первоначальный, подлинный, исходный;
original equation – исходное уравнение
ortho – прямо-, орто-.
orthocenter – центр вписанной окружности;
orthocenter of a triangle – центр вписанной окружности треугольника
orthogonal – ортогональный, перпендикулярный;
orthogonal projection – ортогональная проекция
orthogonality – ортогональность;
orthocenter of a triangle – центр вписанной окружности треугольника
otherwise – иным способом

P

page – страница
pair – пара; a pair of compasses – циркуль
parabola – парабола
parallel – параллельный
parallelepiped – параллелепипед;
oblique, rectangular, right parallelepiped – наклонный, прямоугольный, прямой параллелепипед
parallelism – параллельность
parallelogram – параллелограмм;
parallelogram law – правило параллелограмма
parametric – параметрический;

parametric equations – параметрические уравнения

part – часть;

integration by parts – интегрирование по частям

partial – частичный, частный;

partial fraction – элементарная дробь

pentagon – пятиугольник;

regular pentagon – правильный пятиугольник

perimeter – периметр

period – период;

period of a repeating decimal – период периодической дроби

periodic – периодический;

periodic function – периодическая функция

perpendicular – перпендикулярный, вертикальный

perpendicularity – перпендикулярность

phrase – выражение, фраза, предложение

picture – изображение, рисунок

place – место, положение

plot – график

plus – знак плюс, положительная величина, положительный, плюс

point – точка; point at infinity – бесконечность;

point of discontinuity – точка разрыва;

point of intersection – точка пересечения;

point set – точечное множество;

at a point – окрестность точки; decimal point

polar – полярный;

polar of a system of coordinates – полюс в системе координат.

polynomial – многочлен, полином

positive – положительный, положительная величина;

positive angle – положительный угол;

positive sign – знак плюс

postulate – постулат, аксиома;

postulate method – метод аксиом

power – степень, показатель степени
practice – практика, упражнение
precise – точный, определённый
precision – точность
preface – предисловие, введение
preset – заранее задавать
presume – предполагать, допускать
previous – предыдущий, предварительный
presume – предполагать, допускать
previous – предыдущий
prime – элементарный, простой;
 prime formula – элементарная формула;
 prime number – простое число
primitive – примитивный, основной, первообразная
 (функция), интеграл; primitive period – основной период
principal – главный, основной;
 principal root – арифметическое значение корня;
 principal value of an inverse trigonometric function – главное
 значение обратной тригонометрической функции
problem – задача
product – произведение;
 scalar product – скалярное произведение;
 product of sets – пересечение множеств
projection – проекция;
 orthogonal projection – ортогональная проекция
proof – доказательство, проверка
proper – собственный, правильный, истинный;
 proper fraction – правильная дробь
property – свойство
proportion – пропорция
proportional – пропорциональный
prototype – прототип, прообраз
prove – доказывать
proven – доказанный

punctured – проколотый, с выкинутой точкой;

punctured disc – круг без центра

purpose – цель

puzzle – загадка, затруднение

pyramid – пирамида;

regular pyramid – правильная пирамида

Q

quadrangle – четырёхугольник

quadrant – квадрант, четверть круга, шара, пространства

quadrante – квадрат, вторая степень, возводить в квадрат

quadratic – квадратный, квадратичный;

quadratic equation – квадратное уравнение;

quadratic formula – формула корней квадратного уравнения

quadric – второй степени, второго порядка

quantifier – квантор;

existential quantifier – квантор существования;

generality (universal) quantifier – квантор общности

quarter – четвёртая часть

question – вопрос, спрашивать

quite – вполне, полностью

R

radical – корень, радикал; radical sign – знак корня

radicand – подкоренное выражение, подкоренное число

radius – радиус; radius of a circle – радиус окружности;

radius vector – радиус-вектор

radix – основание системы счисления, основание логарифмов, корень

raise – возводить в степень, потенцировать

range – область, интервал;

range of definition – область определения;

range of function – множество значений функции;

range of a variable – область изменения переменной

rate – скорость;
 rate of change of a function – производная функции
rational – рациональный;
 rational number – рациональное число
rationalize – освобождаться от иррациональности
real – действительный, реальный;
 real number – действительное число
reciprocal – обратная величина
rectangle – прямоугольник
recurrence – возвращение;
 recurrence formula – рекуррентная формула
recursion – рекурсия;
 recursion formula – рекурсивная формула
reduce – сокращать, превращать;
 reduce a common fraction to a decimal – превращать простую дробь в десятичную;
 reduce a fraction by a factor – сократить дробь;
 reduce a fraction to its lowest terms – приводить дробь к несократимому виду;
 reduce fractions to a common denominator – приводить дроби к общему знаменателю
relation – отношение, соотношение
remainder – остаток, разность;
 remainder theorem – теорема Безу
remark – замечать, замечание, примечание
remarkable – замечательный, выдающийся
remember – запомнить, вспомнить
repeat – повторять
reply – отвечать, ответ
represent – представлять, изображать
requirement – требование, условие
residual – остаток, разность
resolution – решение
resume – подводить итог

right – правильный, прямой, прямоугольный;
right angle – прямой угол;
right circular cone – прямой круговой конус
Roman numerals – римские цифры
root – корень; root of an equation – корень уравнения;
root of number – корень из числа
rule – правило, закон;
rules of arithmetics – правила арифметических действий

S

salience – выпуклость
same – одинаковый
satisfy – выполнять, удовлетворять;
satisfy an equation – удовлетворять уравнению
scalar – скаляр, скалярный;
scalar product – скалярное произведение;
scalar quantity – скалярная величина
scalene – разносторонний, косой;
scalene triangle – разносторонний треугольник
science – наука
secant – секущая
section – сечение, деление (отрезка), раздел (книги), параграф
see – понимать, вообразить
segment – сегмент, отрезок, дуга окружности
semi-circle – полукруг, полуокружность
separate – отдельный, изолированный
sequence – последовательность
set – множество, система;
to set a problem – поставить задачу;
set of equations – система уравнений;
closed set – замкнутое множество;
countable set – счётное множество;

empty set – пустое множество
several – несколько
sextant – шестая часть круга
short – короткий, краткий; for short – для краткости
side – сторона, бок;
 side of a polygon – сторона многоугольника;
 set opposite an angle – сторона, противолежащая углу
sign – знак, символ
similar – подобный, однородный;
 similar terms of an equation – подобные члены уравнения
simple – простой, элементарный;
 simple equation – линейное уравнение
sinusoid – синусоида
size – размер, величина, объём
skip – скачѐк
slope – наклон, тангенс угла наклона;
 slope of a straight line – угловой коэффициент прямой
smallest – наименьший
sole – единственный
solid – пространственный;
 solid geometry – стереометрия
solution – решение;
 solution of an equation – решение уравнения
solve – решать
solving – решение
space – пространство, расстояние
square – квадрат, вторая степень
stereometry – стереометрия
straight – прямолинейный, прямой;
 straight line – прямая линия
subregion – подобласть
subscript – нижний индекс
subset – подмножество
substitution – подстановка

subtense – хорда, сторона, противолежащая углу
subtract – вычитать
sufficient – достаточный;
sufficient condition – достаточное условие
suggest – предлагать
sum – сумма, складывать, суммировать
summand – слагаемое
surd – иррациональный;
entire surd – иррациональное выражение
surface – поверхность;
surface area – площадь поверхности
surround – окружать
symbol – символ, знак;
algebraic symbol – алгебраический символ
symmetrize – симметрично
symmetry – симметрия
system – система;
system of equations – система уравнений;
algebraic system – алгебраическая система

T

table – таблица
tangency – касание;
intercepts of tangency – отрезки касательной и нормали;
point of tangency – точка касания
tangent – касательный, тангенс;
tangent curve – тангенсоида
tetragon – четырёхугольник
tetrahedron – четырёхгранник, тетраэдр; regular
tetrahedron – правильный тетраэдр
text – текст, тема
total – полный, общий, целый, сумма
transcendental – трансцендентный;

transcendental equation – трансцендентное уравнение;
transcendental function – трансцендентная функция
transformation – преобразование;
angular transformation – тригонометрическое преобразование
translation – перенос, сдвиг
trapezium – четырёхугольник, трапеция
triangle – треугольник
trigonometric – тригонометрический;
trigonometric function – тригонометрическая функция;
trigonometric substitution – тригонометрическая подстановка
trigonometry – тригонометрия
trinomial – трёхчленный, трёхчлен
trisection – деление на три равные части
trivial – тривиальный;
trivial solution of a set of homogeneous linear equations – нулевое решение системы однородных линейных уравнений
triviality – тривиальность
truncated – усечённый
tutor – репетитор, наставник, обучать
twice – дважды, вдвое;
twice two is four – дважды два – четыре;
twice as much – вдвое больше
two – два, двойка, пара; *in two* – пополам;
two point form of the equation of a straight line – уравнение прямой, проходящей через две данные точки
two-dimensional – двумерный

U

unbounded – неограниченный; *unbounded function* – неограниченная функция.
uneven – нечётный
union – объединение

unique – единственный;
unique solution – единственное решение
uniquely – однозначно, единственным образом
unit – единица;
unit circle – единичный круг, единичная окружность

V

value – значение, величина;
principal value of arcsine – главное значение арксинуса
vanish – обращаться в нуль, стремиться к нулю
variable – переменная величина;
free variable – свободная переменная;
independent variable – независимая переменная;
dependent variable – зависимая переменная;
range of a variable – область изменения переменной
variant – вариант
various – различный, разный
vary – меняться, изменять;
vary directly – изменяться прямо пропорционально;
vary inversely – изменяться обратно пропорционально
vector – вектор; unit vector – единичный вектор
velocity – скорость
verification – проверка
verify – проверять
verity – истина
version – версия, вариант
vertex – вершина; vertex of an angle – вершина угла
vertical – вертикальный;
vertical angles – вертикальные углы
vicinity – окрестность
vulgar – простой, широко распространённый;
vulgar fraction – простая дробь

W

way – способ, метод

whole – целый, система

width – ширина

within – внутри, в пределах

work – вычислять, решать;

work out a problem – решать задачу

wrong – неправильность, ошибочность

Z

zero – ноль, начало отсчёта, начало координат;

zero of a function – ноль функции;

zero solution – нулевое решение

Литература

1. Шувалова Э.З., Агафонов Б.Г., Богатырёв Г.И. Повторим математику. – М.: Высшая школа, 1968. – 464 с.
2. Новосёлов С.И. Тригонометрия. – М.: Учпедгиз, 1961. – 96 с.
3. Босс. В. Лекции по математике (анализ). – М.: Едиториал Урсс, 2004. – 216 с.
4. Деппач И.Я. История математики. – М.: Просвещение, 1959. – 423 с.
5. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. – М.: Наука, 1969. – 327 с.
6. Голованов Я.К. Этюды об учёных. – М.: Молодая гвардия, 1970. – 288 с.
7. Никифоровский В.А. Из истории алгебры XVI-XVII вв. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
8. Лишевский В.П. Рассказы об учёных. – М.: Наука, 1986. – 168 с.
9. Петров Ю. П. История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика, – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 441 с.
10. Филинова О.Е. Математика в истории мировой культуры. – М.: Гелиос АРВ, 2006. – 223 с.
11. Тесты. Математика. Варианты и ответы централизованного (абитуриентского) тестирования – М.: Федеральное государственное учреждение “Федеральный центр тестирования”, 1999-2006 гг.
12. Англо-русский словарь математических терминов. – М.: Иностранная литература, 1992. – 370 с.
13. Шейнина Е.Я. Энциклопедия символов. – М.: Изд-во Торсинг, 2003. – 581с.
14. Беликова Г.И. Математика. Программа дисциплины для предвузовской подготовки иностранных учащихся. – СПб.: Изд-во РГТМУ, 2008. – 11с.

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава 1

1. 1, 2, 3; 2. $\sqrt{23}$; 3. 25; 4. $2\sqrt{6} + 3$; 5. 1; 6. 39; 7. -2;
8. $|\sqrt{a} - 1|$; 9. 9;
10. 2; 11. $2 - \alpha$; 12. 25; 13. 6; 14. -2; 15. 4; 16. 8; 18. 4.

Глава 4

Решение неравенств методом интервалов:

1. $x \in (-\infty; -2) \cup [-1; 2)$; 2. $x \in \left(-\infty; \frac{3}{5}\right) \cup \left(\frac{4}{7}; 4\right)$;
3. $x \in \left[-\frac{5}{7}; -\frac{1}{2}\right) \cup \left[0; \frac{4}{3}\right)$.

Решение уравнений:

4. $x = -3$; 5. $x = -1$.
11. Неравенство задаёт ромб, площадь которого равна 8 квадратных единиц (кв.ед.).
12. Площадь четырёхугольника равна 6 кв.ед.
14. Численное значение параметра a равно -1.
15. Целые решения системы: 2, 3, 7. Сумма целых решений равна 12.
16. Точки $A(1; 1)$ и $B\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ прямой $y = 3x - 2$ отстоят на одинаковом расстоянии от координатных осей.

Глава 5

1. На основе условия задачи составляется и затем решается система неравенств:

$$\begin{cases} D = (a-3)^2 - 4a^2, \\ a \neq 0, \\ \frac{a-3}{a} < 0. \end{cases}$$

Ответ: $a \in (0; 1)$.

2. Корни уравнения: $x_{1,2} = 1$ (кратности 2, или два одинаковых корня), $x_3 = 2$. Ответ: среднее арифме-

тическое корней: $x_{\text{по}} = \frac{4}{3}$.

3. Наибольшее значение заданной квадратичной функции равно 12, поэтому число 6 составляет 50% от 12. Ответ: 50%.

4. Меньший корень уравнения равен -1 .

5. $x \in [1; 2] \cup \{0\}$.

6. $y = -\frac{1}{4}x^2 + x$. 7. $y \in \left(-\infty; \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}; +\infty\right)$.

8. $x \in [3; 4) \cup \{5\}$. 9. $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

10. Наименьший корень уравнения равен -1 . 11. 1.

12. $y \in [0; 1)$.

13. В этом уравнении можно избавиться от модулей, если уравнение возвести в квадрат. В результате получается квадратное уравнение

$$x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 6.$$

14. $a \in (1; +\infty)$.

15. Уравнение имеет вид $x^2 - 10x + 7 = 0$.

16. Целые решения неравенства: 0, 1, 2, 3, 6. Сумма корней равна 12.

17. $y = \frac{1}{9}x^2 - \frac{6}{9}x - 2$. 18. $x \in (3; +\infty)$. 19. $a = \{1; 6\}$.

20. 6, 5. 21. $x \in \left(-\infty; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}\right]$.

22. Сумма корней равна $-\frac{7}{3}$. 23. $x \in [-1; 1] \cup (5; +\infty)$.

24. $c \in (-4; 0) \cup (0; +\infty)$.

25. Координаты вершины параболы равны:
 $x = -1, y = -1$.

26. $\frac{11}{2}$. 27. 88. 28. 3. 29. 4. 30. $-\frac{10}{3}$. 31. $\frac{7}{3}$.

32. $\{-2; 5\}$. 33. $\frac{29}{2}$. 34. $b = \frac{25}{2}$. 35. -2. 36. 1, 8.

Глава 6

Области определения функций:

1. $x \in (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$. 2. $x \in \mathbb{R}$ 3. $x \in \mathbb{R}$. 4. $x \neq 0$.

5. $x \in \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 0\right) \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

6. $x \in (-\infty; -4) \cup (-4; -2) \cup (4; 6) \cup (6; +\infty)$.

7. $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; +\infty)$. 8. $x \in (-1; 1)$.

9. $x \in \mathbb{R}$

Чётность или нечётность функций:

- | | |
|----------------------|----------------------|
| 1. Чётная функция. | 2. Нечётная функция. |
| 3. Нечётная функция. | 4. Нечётная функция. |
| 5. Нечётная функция. | |

Глава 7

1. Для решения уравнения введите новую переменную

$t = \sqrt{x-4}$, $t \geq 0$. Уравнение преобразуется к виду

$$4t^2 + t - 5 = 0, \quad t = 1 \Rightarrow x = 5.$$

2. $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}.$

3. Область допустимых значений неизвестной величины

ны $x \in \left[\frac{5}{3}; \frac{9}{2}\right]$, поэтому из двух решений уравнения под-

ходит только одно $x = 2$.

4. Надо ввести новую переменную $\sqrt{x^2 - 3x + 5} = t$,

$t \geq 0$. Уравнение приводится к виду

$$t^2 + t - 12 = 0, \quad t = 3.$$

Ответ: $x_1 = 4; x_2 = -1$.

5. Представить $x + \frac{1}{x}$ в виде суммы кубов и разложить

на множители, ввести новую переменную $\sqrt[3]{x^2} = t$,

$$t > 0, \quad t_1 = 4, \quad t_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_1 = 8, \quad x_2 = \frac{1}{8}.$$

6. $x \in [1; 4] \cup \{0\}$. 7. $a = \{-3; -1; 1; 3\}$.

8. $a = -4$. 9. $x = 1$. 10. $c \in (-4; 0) \cup (0; +\infty)$.

11. $x_1 = 68$, $x_2 = 20$.

12. Произведение ординат точек пересечения прямой и гиперболы равно 3.

Решение логарифмических уравнений

13. Следует сделать подстановку $\lg x = t$. Область допустимых значений новой переменной $t \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$. Исходное уравнение приводится к виду

$$t^2 + 2t - 3 = 0 \Rightarrow t = 1 \Rightarrow x = 10.$$

14. В области допустимых значений уравнение выполняется тождественно, поэтому решение совпадает с областью допустимых значений: $x \in (3; 4) \cup (4; +\infty)$.

15. $x_1 = 2^{\frac{8}{3}}$, $x_2 = 4$.

16. $x = 4$.

Решение показательных уравнений

17. $x = 2$. 18. $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. 19. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$.

20. $x = -1$. 21. $x = 4$.

22. $x = 4$. 23. Числа $6 + \sqrt{35}$ и $6 - \sqrt{35}$ — взаимно обратные числа, поэтому можно ввести новую переменную $(6 + \sqrt{35})^{\frac{x}{3}} = t$, $t > 0$, и уравнение преобразуется к виду $t^2 - 12t + 1 = 0$. Корни этого уравнения: $t_1 = 6 + \sqrt{35}$, $t_2 = 6 - \sqrt{35} \Rightarrow x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = -3$.

Глава 8

Вычислить:

1.

$$\frac{\cos(76^\circ) - \cos(16^\circ)}{1 - 2\sin^2(22^\circ)} = -2\sin\left(\frac{76^\circ + 16^\circ}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{76^\circ - 16^\circ}{2}\right).$$

$$\frac{1}{1 - 2\sin^2 22^\circ} = \frac{-2\sin 46^\circ \cdot \sin 30^\circ}{\cos 44^\circ} = \frac{-2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin 46^\circ}{\cos 44^\circ} = -1$$

Ответ: -1.

2.

$$2\sin 44^\circ \cdot \cos 16^\circ + 2\sin^2 31^\circ - 1 = 2\frac{1}{2}(\sin 60^\circ + \sin 28^\circ) - \\ - \cos 62^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3.

$$\frac{4\sin 40^\circ \cdot \cos 50^\circ}{1 + \sin 190^\circ} = \frac{2(\sin 90^\circ - \sin(-10^\circ))}{1 - \sin 10^\circ} = \\ = \frac{2(1 - \sin 10^\circ)}{1 - \sin 10^\circ} = 2$$

Ответ: 2.

4.

$$\begin{aligned}\frac{\cos(240^\circ)}{\cos(300^\circ)} &= \frac{\cos(60^\circ + 180^\circ)}{\cos(300^\circ - 360^\circ)} = \frac{-\cos(60^\circ)}{\cos(-60^\circ)} = \\ &= \frac{-\cos(60^\circ)}{\cos(60^\circ)} = -1\end{aligned}$$

ОТВЕТ: -1.

5.

$$\frac{\sin 70^\circ - \sin 10^\circ}{\cos 40^\circ} = \frac{2 \cos 40^\circ \sin 30^\circ}{\cos 40^\circ} = 1.$$

ОТВЕТ: 1.

6.

$$\operatorname{ctg}(40^\circ) \cdot \operatorname{tg}(140^\circ) = \frac{\operatorname{tg}(180^\circ - 40^\circ)}{\operatorname{tg}(40^\circ)} = \frac{\operatorname{tg}(-40^\circ)}{\operatorname{tg}(40^\circ)} = -1.$$

ОТВЕТ: -1.

7.

$$\begin{aligned}\frac{4 \sin 130^\circ \cdot \cos 140^\circ}{1 + \cos 80^\circ} &= \frac{2(\sin 270^\circ - \sin 10^\circ)}{1 + \cos 80^\circ} = \\ &= \frac{2(-1 - \sin 10^\circ)}{1 + \sin 10^\circ} = -2\end{aligned}$$

ОТВЕТ: -2.

8.

$$12 \operatorname{ctg} 15^\circ \cdot \cos 105^\circ = 12 \frac{\cos(90^\circ + 15^\circ) \cdot \cos 15^\circ}{\sin 15^\circ} =$$

$$= \frac{-12 \cos 15^\circ \sin 15^\circ}{\sin 15^\circ} = -12 \cos 15^\circ;$$

$$\cos^\circ 15^\circ = \frac{1 + \cos 30^\circ}{2} = \frac{2 + \sqrt{3}}{4}; \quad \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{2}$$

Ответ: $-6\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

9.

$$(2 - 2 \sin 300^\circ) \cdot (2 - 2 \cos 330^\circ) =$$

$$4(1 + \sin 60^\circ) \cdot (1 - \cos 30^\circ) = 1.$$

Ответ: 1.

10. Делим числитель и знаменатель правой части исходного равенства на $\cos \alpha$ и приходим к пропорции

$$\frac{4 \operatorname{tg} \alpha - 3}{2 - 5 \operatorname{tg} \alpha} = -\frac{23}{27} \Rightarrow 27(4 \operatorname{tg} \alpha - 3) = -(2 - 5 \operatorname{tg} \alpha) \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -5$$

Ответ: -5

$$II. \sin 4\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{4}{5}, \quad \cos 4\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha} = -\frac{3}{5}.$$

Ответ: $\frac{1}{5}$.

12. $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$; $\cos^2 \alpha = \frac{1}{9}$.

Ответ: $-\frac{7}{9}$.

13. По условию угол α находится в 3-ей четверти, где $\sin \alpha < 0$ и $\cos \alpha < 0$, поэтому только второй множитель может равняться нулю:

$$\cos \alpha + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{4}.$$

Ответ: $\sin \alpha = -\frac{\sqrt{15}}{4}$.

14.

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} = \frac{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}} = \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1.$$

Ответ: 1.

15.

$$\frac{14 \sin \alpha + 21 \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = \frac{14 \operatorname{tg} \alpha + 21}{1 - \operatorname{tg} \alpha},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = -\frac{4}{3}$$

Ответ: 1.

16. $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha \Rightarrow$ угол α принадлежит 4-ой чет-

верти; $\cos\left(\alpha - \frac{3}{2}\pi\right) = -\sin \alpha$;

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{1}{9};$$

$$\sin \alpha < 0.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

17. $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha \Rightarrow$ угол α принадлежит 2-ой чет-

верти; $\sin\left(\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos \alpha$;

$$\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{\cos^2 \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{9}; \quad \cos \alpha < 0.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

18.

$$\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = \alpha \Rightarrow \text{угол } \alpha \text{ принадлежит 4-ой четвер-}$$

ти;

$$\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha; \quad \sin \alpha = -\frac{1}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ответ: $2\sqrt{2}$.

Указать в градусах значения углов:

19.

$$\begin{aligned} \arcsin\left(\cos\left(-315^\circ\right)\right) &= \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \cos\left(-315^\circ\right) \\ &= \cos\left(360^\circ - 315^\circ\right) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Ответ: 45° .

20.

$$\begin{aligned} \operatorname{arcctg}\left(\operatorname{tg} 675^\circ\right) &= \alpha \Rightarrow \operatorname{ctg} \alpha = \operatorname{tg} 675^\circ = \\ &= \operatorname{tg}\left(675^\circ - 720^\circ\right) = \operatorname{tg}\left(-45^\circ\right) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1; \\ \operatorname{ctg} \alpha &= -1. \end{aligned}$$

Ответ: 135° .

21.

$$\begin{aligned} \arctg\left(\sin\left(-540^\circ\right)\right) &= \alpha \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sin\left(-540^\circ\right) = \\ &= \sin\left(360^\circ - 540^\circ\right) = 0; \quad \operatorname{tg} \alpha = 0. \quad \hat{\alpha} \text{ ôââð: } 0^\circ. \end{aligned}$$

Доказать равенства:

22

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2\operatorname{tg} x + 4\operatorname{ctg} 2x &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2\operatorname{tg} x + 4 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x} = \\ &= \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{4\operatorname{tg}^2 x + 4 - 4\operatorname{tg}^2 x}{2\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

23.

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 7,5^\circ + \operatorname{tg} 37,5^\circ + \operatorname{tg} 7,5^\circ \operatorname{tg} 37,5^\circ &= \\ &= \frac{\sin 45^\circ}{\cos 7,5^\circ \cos 37,5^\circ} + \frac{\sin 7,5^\circ \cdot \sin 37,5^\circ}{\cos 7,5^\circ \cos 37,5^\circ} = \\ &= \frac{\cos 7,5^\circ \cos 37,5^\circ - \sin 7,5^\circ \sin 37,5^\circ + \sin 7,5^\circ \sin 37,5^\circ}{\cos 7,5^\circ \cos 37,5^\circ} = 1. \end{aligned}$$

Упростить выражения:

24.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sin 4\alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos 4\alpha}{\sin \alpha} \right) \cdot \left(\frac{1}{\cos 3\alpha} - \frac{1}{\cos \alpha} \right) = \\ & = \frac{\cos 3\alpha \cdot 2 \sin 2\alpha \cdot \sin \alpha}{\cos \alpha \sin \alpha \cos 3\alpha \cos \alpha} = \frac{2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos \alpha \cos \alpha} = 4 \operatorname{tg} \alpha. \end{aligned}$$

25.

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \cos \frac{\pi}{16} \dots \cos \frac{\pi}{2^n} &= \frac{\cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{\pi}{8} \dots 2 \sin \frac{\pi}{2^n} \cos \frac{\pi}{2^n}}{2 \sin \frac{\pi}{2^n}} = \\ &= \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2^{n-1} \sin \frac{\pi}{2^n}}. \end{aligned}$$

Глава 9

Решение тригонометрических уравнений

1. Преобразуем исходное уравнение к виду

$$2 \sin \frac{x+1}{2} \cos \frac{x-1}{2} = 2 \sin \frac{x+1}{2} \cos \frac{x+1}{2}.$$

Выносим общий множитель

$$2 \sin \frac{x+1}{2} \left(\cos \frac{x-1}{2} - \cos \frac{x+1}{2} \right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \frac{x+1}{2} = 0 \Rightarrow x = 2\pi k - 1;$$

$$\cos \frac{x-1}{2} - \cos \frac{x+1}{2} = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 2\pi k.$$

Ответ: $x = 2\pi k$, $x = 2\pi k - 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

2. Представим левую часть уравнения в виде

$$\frac{1}{2}(\cos 2x - \cos 4x) \Rightarrow \cos 2x - \cos 4x = 1 \Rightarrow$$

$$\cos 2x = 1 + \cos 4x \Rightarrow \cos 2x = 2 \cos^2 2x \Rightarrow$$

$$\cos 2x(1 - 2 \cos 2x) = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4}(2k \pm 1);$$

$$1 - 2 \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1).$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4}(2k \pm 1)$, $x = \frac{\pi}{6}(6k \pm 1)$ $k \in \mathbb{Z}$.

3. Область допустимых значений: $x \neq \frac{\pi}{2}(2k + 1)$,

$x \neq \frac{\pi}{4}(2k + 1)$, $x \neq \frac{\pi}{6}(2k + 1)$. После преобразования

суммы тангенсов в произведение получим:

$$\frac{\sin 3x}{\cos x \cdot \cos 2x} = \frac{\sin 3x}{\cos 3x} \Rightarrow \sin 3x (\cos 3x - \cos x \cos 2x) = 0 \Rightarrow$$

$$\sin 3x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi k}{3};$$

$$\cos 3x - \cos x \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 3x - \frac{1}{2} \cos 3x - \frac{1}{2} \cos x = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 3x = \cos x \Rightarrow -2 \sin 2x \cdot \sin x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0,$$

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi k}{2}, x = \pi k.$$

Решение $x = \frac{\pi k}{2}$ при нечётном значении k ($k = 2n + 1$) находится вне области допустимых значений. Если k — чётное ($k = 2n$), то $x = \pi n$.

Ответ: $x = \frac{\pi k}{3}$ (при k **кратным** трём эта серия ответов совпадает с серией ответов $x = \pi k$), $k \in \mathbb{Z}$.

4. Есть две серии очевидных решений

$$|\sin x| = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}(2k + 1) \text{ и } |\cos x| = 1 \Rightarrow x = \pi k. \text{ Эти}$$

два решения можно объединить в одно $x = \frac{\pi k}{2}$. До-

кажем, что других решений нет. Если $|\sin x| \neq 1$ и

$$|\cos x| \neq 1, \text{ то}$$

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x < \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow \sin^{10} x + \cos^{10} x < 1.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

5. Сумма двух чисел равна нулю только когда каждое

$$\text{слагаемое равно нулю} \quad \begin{cases} \sin \pi x = 0 \\ \sin \pi y = 0 \end{cases}.$$

Решением этой системы является любая пара целых чисел.

Ответ: $\forall x \in R, \forall y \in R$.

$$6. x = \frac{\pi}{2}(2k+1). \quad 7. x = \pi k, x = \frac{\pi}{4}(2k+1).$$

$$8. x = \frac{\pi}{4}(2k+1). \quad 9. x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k.$$

$$10. x = \frac{\pi n}{5}, x = \frac{2\pi}{15}(3n+1). \quad 11. x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k.$$

$$12. x = \frac{\pi}{2}(4k+1). \quad 13. x = \pi(2k+1). \quad 14. x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k.$$

15.

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cdot \cos^2 x \Rightarrow$$

$$1 - \frac{1}{2} \sin^2 2x = \frac{5}{8} \Rightarrow \sin^2 2x = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{6}(3x \pm 1).$$

16.

$$x = 0, x = \frac{\pi}{6}(4k+1), k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$x = \frac{\pi}{6}(4k-1), k = 0, -1, -2, \dots.$$

$$17. x = \frac{\pi}{3}(6k \pm 1). \quad 18. \frac{\pi}{18}(2k+1).$$

Глава 10

Найти область определения

1. $x \in [-1; 0]$. 2. $x = \{-1; 1\}$. 3. $\forall x \in Z$.

4. $\frac{3\pi}{4} + 2\pi k \leq x \leq \frac{9\pi}{4} + 2\pi k$.

5. $\alpha \in (0; 1)$; $\pi 2k < x < \pi(2k + 1)$.

6. $\frac{\pi}{4} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$.

Найти периоды функций

7.

$$\begin{aligned}\sin \pi x &= \sin(\pi x + 2\pi k) = \sin \pi(x + 2k) \Rightarrow \\ &\Rightarrow T_k = 2k, \quad \forall k \in Z.\end{aligned}$$

8

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1 + \cos 2x}{2} = \frac{1 + \cos(2x + 2\pi k)}{2} = \\ &= \frac{1 + \cos 2(x + \pi k)}{2} \Rightarrow T_k = \pi k, \quad \forall k \in Z.\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \sin x(\sin^2 x) = \sin x \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{2}(\sin x - \sin x \cos 2x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x;\end{aligned}$$

$$\sin 3x = \sin(3x + 2\pi k) = \sin 3\left(x + \frac{2\pi k}{3}\right);$$

$$\sin x = \sin(x + 2\pi k) \Rightarrow k = 3n \Rightarrow T_n = 6n, \forall n \in \mathbb{Z}$$

10.

$$3\sin\frac{x}{4} - 2\cos\frac{x}{5} = 3\sin\left(\frac{x}{4} + 2\pi k\right) - 2\cos\left(\frac{x}{5} + 2\pi k\right) =$$

$$= 3\sin\frac{1}{4}(x + 8\pi k) - 2\cos\frac{1}{5}(x + 10\pi k) \Rightarrow T_n = 40\pi n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

11.

$$3\operatorname{tg} 2x - 2\operatorname{ctg} \frac{x}{3} = 3\operatorname{tg} 2\left(x + \frac{\pi k}{2}\right) - 2\operatorname{ctg} \frac{1}{3}(x + 3\pi k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_n = 6\pi n, \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Глава 11

1. Сумма равна 2.

2. $a_2 = 10$.

3. Разность прогрессии равна -2 .

4. Число членов прогрессии равно 6.

5. Наибольшее значение n равно 31.

6. Отношение первого члена к разности прогрессии равно 4.

7. Число членов прогрессии равно 4.

8. Разность второй прогрессии равна -7 .

9. $3 < d < 4$.

10. Возможны два варианта: $a_1 = 3, a_2 = 2, a_3 = 1$ и

$a_1 = -1, a_2 = -2, a_3 = -3$. Ответ: первое значение знаменателя прогрессии $q_1 = \frac{2}{3}$, второе — $q_2 = \frac{3}{2}$.

Глава 12

1. Сумма координат точки D равна 6.
2. Надо использовать условие коллинеарности векторов. Ответ: $\alpha + \beta = -14$.

3. $\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow$ равны координаты этих векторов. Ответ: сумма координат вершины D равна -4 .

4. $\vec{m} = \vec{AB} + \vec{BC}$; $\vec{n} = \vec{AD} - \vec{AB}$. Ответ: скалярное произведение диагоналей равно 3.

5. $\frac{|\vec{q}|}{|\vec{p}|} = 6 \Rightarrow$ такое же соотношение между одноимёнными

координатами этих векторов. Ответ: сумма координат вектора $\vec{p}$ равна -7 .

6. $\left| \vec{AB} \right| = \sqrt{14}$.

7. $\overrightarrow{MN} = \frac{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}}{2}$.

Ответ: сумма координат вектора $\overrightarrow{MN}$ равна 3.

8. Скалярное произведение равно 7.

9. $x + y + z = 1$.

10. Сумма координат вектора $\overrightarrow{BC}$ равна 1.

11. Обозначим точку пересечения диагоналей буквой M . Координаты точки M равны полусумме одноимённых координат точек A и C . Ответ: $M(1; 9; -3)$.

Содержание

Предисловие.....	3
Обозначения, символы и знаки	5

ГЛАВА 1

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА, ДЕЙСТВИЯ И ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§1. Определение числовых множеств	7
§2. Арифметические действия	16
§3. Операции сравнения.....	16
§4. Модуль	18
§5. Степень и логарифм	19

ГЛАВА 2

КЛАССИФИКАЦИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ И ИХ СВОЙСТВА

§1. Базовые понятия	25
§2. Многочлены	26
§3. Алгебраические дроби	30

ГЛАВА 3

ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ, ЕЁ ОСНОВНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И КЛАССИФИКАЦИЯ

§1. Определение функции	32
§2. Способы задания функции.....	33
§3. Основные свойства функций.....	35
§4. График функции и его преобразование	37

ГЛАВА 4

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ

§1. Канонические уравнения прямой и её свойства	42
§2. Метод интервалов	45
§3. Упражнения	47

ГЛАВА 5

КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ

§1. Определение и основные свойства	49
§2. Выделение полного квадрата и корни	49
§3. Теорема Виета	52
§4. График функции	53
§5. Использование метода интервалов в общем случае ..	55
§6. Упражнения	58

ГЛАВА 6

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ

§1. Показательная функция, её свойства	63
§2. Логарифмическая функция, её свойства	64
§3. Упражнения	66

ГЛАВА 7

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ

§1. Классификация уравнений и их преобразования .	68
§2. Уравнения, содержащие параметры	74
§3. Уравнения с двумя неизвестными	75
§4. Системы линейных уравнений	76
§5. Упражнения	82

ГЛАВА 8

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ И ФОРМУЛЫ

§1. Углы, дуги и их измерение	84
§2. Основные тригонометрические величины и тождества	85
§3. Обратные тригонометрические величины	89
§4. Теоремы сложения	90
§5. Формулы двойного угла	94
§6. Формулы понижения степени	94
§7. Преобразование произведения синусов и косинусов в сумму	95

§8. Преобразование суммы и разности синусов и косинусов в произведение	95
§9. Выражение синуса и косинуса через тангенс половинного угла.....	97
§ 10 Упражнения	98

ГЛАВА 9

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ

§1. Формулы общих решений простейших тригонометрических уравнений	100
§2. Однородные уравнения	102
§3. Неоднородные уравнения	104
§4. Упражнения	107

ГЛАВА 10

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ И ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§1. Определение и свойства функций.	109
§2. Обратные тригонометрические функции	113
§3. Упражнения	118

ГЛАВА 11

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ И ПРОГРЕССИИ

§1. Последовательность	119
§2. Предел последовательности	121
§3. Арифметическая прогрессия	123
§4. Геометрическая прогрессия	124
§5. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия	126
§6. Упражнения	131

ГЛАВА 12

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§1. Основные понятия	133
§2. Линейные операции над векторами	134
§3. Скалярное умножение векторов	136
§4. Проекция вектора и их свойства	137

§5. Разложение вектора по координатным векторам . 139

ГЛАВА 13

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

§1. Древний Вавилон и древний Египет. 146

§2. Древняя Греция 148

§3. История арифметики 154

§4. Происхождение некоторых названий чисел 160

§5. История алгебры 162

§6. История тригонометрии 174

П Р И Л О Ж Е Н И Я 179

РУССКО-АНГЛИЙСКИЙ СЛОВАРЬ 180

АНГЛО-РУССКИЙ СЛОВАРЬ

МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ 188

Литература 209

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ 210

Подписано в печать 20.04.2012

Формат 60х90/16. Бумага офсетная. Печать ризографическая.

Гарнитура Times New Roman. Объем 14,5 усл.п.л. Тираж 100 экз.

Заказ №81 от 27.10.2011 г.

Отпечатано в ООО «ПолиКром»

195112, Санкт-Петербург, Новочеркасский пр., 1

Тел.: 224-95-29, 907-23-45,

e-mail: spbkrom@rambler.ru <http://spbkrom.ru>