

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

**ГОУ ВПО РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Бекряев В. И.

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ФИЗИКИ ОБЛАКОВ
И АКТИВНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА НИХ**

учебное пособие

РГТМУ
Санкт-Петербург

2007

УДК 551.509.6: 551.57

Бекряев В. И. Некоторые вопросы физики облаков и активных воздействий на них. – СПб., изд. РГГМУ, 2007 – 337с.

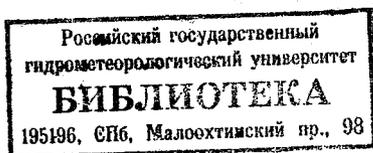
Учебное пособие. – СПб.: Изд. РГГМУ, 2001 – 337с.

Излагаются начала классической теории нуклеации, предлагается альтернативное решение задач гомогенного и гетерогенного ядрообразования, рассматривается природа действия хладо-, льдообразующих и гигроскопических реагентов. Дается вывод уравнений для скоростей диффузионного и коагуляционного роста капель и ледяных частиц различной формы. Приводятся теоретические модели изолированной частицы, термика и струи. Представлена нестационарная трехмерная модель конвективного облака.

Книга предназначена в качестве учебного пособия для студентов и аспирантов метеорологических факультетов. Может быть полезной инженерам и научным сотрудникам, специализирующимся в области физики облаков и активных воздействий.

© Российский государственный гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2007

В. И. Бекряев



ПРЕДИСЛОВИЕ

Успешное осуществление воздействий на атмосферные процессы невозможно без глубокого понимания физики и динамики явлений, без учета взаимодействия и обратных связей между процессами микро-, мезо- и даже макромасштабов. Эта книга задумывалась как конспект лекций по курсу «Физические основы воздействия на атмосферные процессы», который в течение ряда лет автор читал в РГГМУ. Однако при написании книги автор воспользовался возможностью исправить ошибки, допущенные им в предшествующих публикациях, и рассеять свои и чужие заблуждения (или может быть породить новые). Вследствие этого перечень рассматриваемых тем был сокращен по сравнению с программой курса. В результате книга превратилась в учебное пособие. Основное внимание в нем уделено вопросам микрофизики облаков, природы действия реагентов, теории осадкообразования и численного моделирования атмосферных процессов.

В подготовке разд. 1.6 и 1.10 принимала участие С. В. Крюкова. Нестационарная численная модель конвективного облака (глава 5) реализована М. В. Гуровичем. Им же выполнены численные эксперименты по этой модели.

Введение

Проблема воздействия на атмосферные процессы с целью обеспечения благоприятных условий для жизнедеятельности человека или предотвращения ущерба от опасных явлений погоды становится все более актуальной, ее решение представляется одной из важнейших перспективных задач метеорологии. В то же время следует иметь в виду, что энергия атмосферных процессов все еще несоизмеримо велика по сравнению с современной энерговооруженностью человечества. Непосредственные затраты энергии, равновеликие естественному процессу, возможны лишь при воздействии на некоторые локальные явления погоды, например, рассеяние тумана над ВПП или смога в карьере путем прямого нагрева воздуха. При значительной пространственной и временной протяженности объекта воздействия (конвективное облако, облачные системы) реально доступная энергия окажется недостаточной для достижения цели. В связи с этим основным принципом, реализуемым при активных воздействиях, является управление, то есть нахождение таких моментов или этапов в развитии атмосферных процессов, при которых сравнительно небольшие энергетические затраты приводят к резкому изменению их характера. Это возможно при потенциальной неустойчивости процессов. Неустойчивость особенно часто проявляется на определенных стадиях развития облаков. Обычно выделяют три вида энергии неустойчивости:

– термическая, точнее термобарическая, которая реализуется при движении воздуха в горизонтальном направлении (ветер) и в вертикальном (восходящие и нисходящие токи). Обычно речь идет о реализации энергии влажнонеустойчивости;

– фазовая, связанная с переходом воды из одного агрегатного состояния в другое с выделением тепла фазовых превращений;

— коллоидальная, определяемая различием физических и химических свойств частиц (капель, ледяных кристаллов), при этом столкновения и коагуляция частиц приводят к расширению спектра размеров и потере устойчивости. Реализация неустойчивости достигается путем внесения ограниченных, порой гомеопатических, доз реагента либо небольших затрат механической или тепловой энергии.

Внесение одних и тех же реагентов в облака разных форм или стадий развития осуществляется для достижения различных целей. В результате воздействия облака (слоистообразные, сравнительно небольшой мощности) и туманы могут быть рассеяны. При большей мощности облаков могут быть получены либо интенсифицированы осадки. Воздействия на конвективные облака осуществляются с целью управления процессами осадкообразования, в частности, ослабления или предотвращения градобитий, разрушения облаков или их усиления. Проводились масштабные опыты по созданию конвективных облаков (метеотроны).

Предпринимались попытки рассеяния слоистообразной облачности на значительных территориях (превосходящих 10^4 км²) с целью изменения радиационного баланса и вместе с ним стимулирования образования локальных антициклонов и циклонов. С помощью кристаллизующих реагентов осуществлялось воздействие на облачные системы тропических циклонов для ослабления их разрушительной силы. Рассматривались возможности борьбы с засухой на большой территории путем создания пелены перистых облаков с помощью самолетных облачных следов или путем внесения хладореагентов.

Центральными для современной физики облаков и активных воздействий являются проблемы увеличения количества осадков и борьбы с градом.

Вокруг проблемы увеличения количества осадков (УКОС) путем засева облаков кристаллизующими реагентами сложилась парадоксальная ситуация. Убедительные результаты первых экспериментов, показавшие, что при

воздействии происходит ускорение процессов осадкообразования, послужили основой для проведения широкомасштабных операций по УКОС в исследовательских, коммерческих и военных целях в различных районах земного шара (Австралия, Израиль, Индия, КНР, Н. Зеландия, СССР США и др.). Однако после полувековой истории реализации многочисленных проектов УКОС, после огромных усилий по разработке и совершенствованию реагентов, техники и технологии воздействий, после сообщений о фантастических успехах некоторых проектов вопрос о физической и экономической эффективности УКОС остается открытым. Более того, негромкий скептицизм ранних лет стремительно нарастает, превращаясь в убежденность, что до сих пор нет надежных доказательств сколько-нибудь существенного увеличения осадков на сколько-нибудь значительной территории. Отражением этой пессимистической оценки стало резкое сокращение финансирования исследований по проблеме УКОС, например, в США и Израиле.

Объективно возможность увеличения осадков ограничена сравнительно узкими рамками благоприятных условий: мощностью, водностью, температурой на верхней границе, параметрами подоблачного слоя (статическая концепция засева) и, дополнительно, узкой «щелью» для градиента температуры между конденсационной адиабатой и адиабатой осаждения (динамическая концепция засева). Интенсификация осадкообразующих процессов в неконвективных облаках лимитируется медленным восстановлением их водозапаса, что неминуемо приводит к ослаблению этих процессов на подветренной стороне; при воздействиях на конвективные облака ограничителем является запас энергии неустойчивости. Субъективные причины недоверия порой связаны с априорными обещаниями непременного успеха экспериментов, как условия их финансирования. Необходимость выполнения этих обязательств вольно или невольно сопровождается «улучшением» результатов. Те же цели достигаются с помощью лукавой статистики, используемой при оценках физической

эффективности воздействия. Многообразие статистических критериев предоставляет экспериментатору большую «свободу маневра» при определении значимости увеличения осадков. Эти критерии зачастую используются «за гранью фолла» вследствие ограниченности выборок, неизвестности законов распределения, коррелированности результатов на рабочей и контрольной площадках и др.

Параллельно с экспериментами по вызыванию осадков выполнялись работы по предотвращению или ослаблению градобитий. Широкое распространение эти работы получили в 50 ... 60 гг. прошлого столетия в Италии, Франции, ЮАР. В это же время в СССР проводились масштабные исследования градовых процессов и путей управления ими. В результате этих исследований была создана эмпирическая модель мощного конвективного облака, а на ее основе – метод воздействия на градовые процессы, получивший название советского метода. В последующие годы модель облака уточнялась и совершенствовалась, вместе с ней модифицировался и приобретал региональные особенности метод воздействия, сохраняя в целом свои основные черты. В стране была создана военизированная служба борьбы с градом. По официальным данным деятельность этой службы была весьма эффективной. Наблюдавшиеся случаи выпадения града на защищаемую территорию связывались с субъективными факторами (несоблюдение инструкций, запреты на воздействие со стороны авиации и др.). Площади защищаемых от града сельскохозяйственных культур непрерывно увеличивались. Под противоградовой защитой находились обширные территории градоопасных районов от Молдавии до Таджикистана. К концу восьмидесятых годов площадь этих территорий превышала 11 млн. га. Советский метод борьбы с градом экспортировался в Болгарию, Венгрию и в др. страны.

Удивительные успехи борьбы с градом, декларируемые советскими учеными, привлекли внимание исследователей других стран. В восьмидесятые годы в США проводился национальный проект, целью

которого было изучение возможностей управления градовыми процессами. В проекте наряду с другими осуществлялась проверка советского метода. Аналогичные исследования выполнялись в Швейцарии. Результаты этих экспериментов оказались весьма пессимистическими. Успешность советского метода борьбы с градом не нашла в них подтверждения. В современной России противоградовая служба функционирует в ряде регионов Северного Кавказа. В последнее десятилетие с помощью российских коллег противоградовая служба создана и функционирует в некоторых странах Южной Америки. В то же время пессимизм в отношении эффективности воздействий на град распространился в научном сообществе и даже проник в коллектив исследователей Высокогорного геофизического института (г. Нальчик), являющегося головным по этой проблеме.

Удручающая неопределенность в оценках физической эффективности экспериментов по увеличению осадков вслед за потерей уверенности в успехе борьбы с градом грозит долговременной утратой доверия к науке об активных воздействиях на погоду.

Разумеется, работы по воздействию на атмосферные процессы продолжаются. Человечество никогда не остановится в стремлении управлять природными явлениями, особенно теми, с которыми связаны большие материальные и человеческие потери. Однако на смену лихим атакам на погоду, основанным на весьма слабых представлениях о физике явлений и примитивных моделях, должно прийти глубокое понимание физики и динамики процессов, положительных и отрицательных обратных связей, ближайших и отдаленных последствий. Теоретические исследования, включающие создание многомерных численных моделей, должны сопровождаться проведением лабораторных и полевых экспериментов. В свою очередь для этого необходимо существенное и долговременное финансирование этих работ.

ГЛАВА 1. ФАЗОВЫЕ ПРЕВРАЩЕНИЯ ВОДЫ В АТМОСФЕРЕ

1.1. Основные понятия и определения

Фазовым превращением воды называют переход ее из одного агрегатного состояния в другое. В атмосфере вода встречается в трех фазах (агрегатных состояниях): твердой (лед), жидкой (собственно вода) и газообразной (водяной пар). При этом возможны три пары взаимных превращений: вода-лед (замерзание) и лед-вода (таяние), вода-пар (испарение) и пар-вода (конденсация), лед-пар (испарение льда – возгонка) и пар-лед (осаждение). В русскоязычной литературе по метеорологии для фазового превращения пар-лед обычно используется термин сублимация, но перевод этого слова на русский язык означает возгонка. Во избежание недоразумений в дальнейшем для фазового превращения пар-лед будем использовать термин осаждение (депозиция), как это принято в англоязычной литературе.

Фазовые превращения происходят на молекулярном уровне. Для описания их используются понятия молекулярной физики. Назовем *системой* совокупность однородных элементов (молекул, групп молекул) одного и того же вещества или различных веществ. Будем различать системы открытые, которые обмениваются с окружающей средой массой и/или энергией, и закрытые, изолированные, замкнутые системы, для которых такой обмен отсутствует. В реальных условиях, естественно, строго замкнутых систем не бывает. Однако если взаимодействие с окружающей средой оказывается не существенным, то при решении многих теоретических задач удобно использовать понятие замкнутой системы. Каждая система может быть охарактеризована ее состоянием. Будем различать состояния стабильные (устойчивые, равновесные), нестабильные (неустойчивые) и метастабильные. Определение этих понятий приведено ниже. В зависимости от числа компонент, участвующих в фазовых превращениях, последние разделяют на гомогенные и гетерогенные. Гомогенным называют такое фазовое превращение, в котором участвует одна компонента, т. е. одно вещество, например, пар превращается в воду. Пар

может быть также составной частью газа (воздуха). Однако, если другие молекулы (кислорода, азота) в фазовом превращении участия не принимают, то оно остается гомогенным. Когда другие компоненты вовлечены в фазовое превращение, его называют гетерогенным. Примером может служить конденсация водяного пара на аэрозольных частицах (облачных ядрах конденсации), содержащихся в воздухе.

По характеру протекания фазовые превращения подразделяют на обратимые и необратимые. Обратимым называется фазовое превращение, в котором при одних и тех же условиях система находится в одном и том же состоянии, независимо от направления процесса. Если состояние системы при тех же самых условиях оказывается различным в зависимости от направления процесса, то такое превращение называется необратимым (появляется гистерезис). Проиллюстрируем приведенные определения экспериментами, которые можно провести непосредственно дома или в лаборатории, или поставить их мысленно, поскольку результаты их заранее предсказуемы.

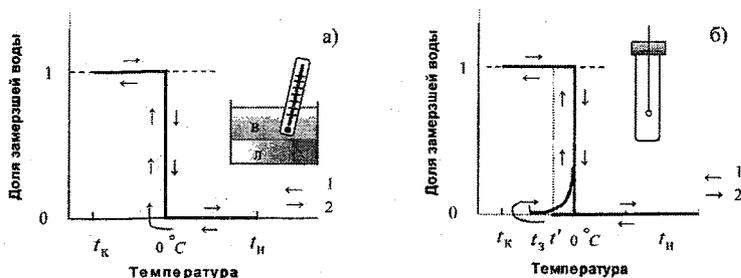


Рис. 1.1.1. Результаты опытов по замораживанию воды.

а) Большой объем неочищенной (водопроводной) воды, б) Капля дистиллированной воды: 1 - «ход вперед», 2 - «ход назад».

Опыт первый. Будем замораживать сравнительно большой объем обычной воды, например, налитой из водопроводного крана, и контролировать условия, при которых находится эта вода: измерять температуру воды и массу

льда, точнее, отношение массы льда к исходной массе воды. Опустим в воду термометр и поставим сосуд с водой в холодильник. Пусть исходная температура, при которой начинаются наблюдения, t_n . Результаты эксперимента представим в виде графика (рис. 1.1.1а), на котором по оси абсцисс откладывается температура, а по оси ординат – доля замерзшей воды, т. е. отношение $m_d / m_{в0}$. Исходное состояние системы определяется на графике точкой $(0, t_n)$. Температура воды в сосуде, помещенном в холодильную камеру, будет, естественно, понижаться. До тех пор пока температура воды выше 0°C , вода не замерзает, т. е. отношение $m_d / m_{в0} = 0$. Когда температура воды понизится до 0°C , в сосуде появится лед, масса льда со временем растет, однако температура оставшейся воды сохраняется равной 0°C . Этот этап эксперимента на графике отражен вертикальным отрезком при температуре 0°C . После того, как вся вода замерзнет, температура льда понизится до температуры холодильника – t_k . Определим рассмотренный этап эксперимента как «ход вперед». Теперь рассмотрим обратный процесс – «ход назад». Извлечем сосуд со льдом из холодильника и в помещении при положительной температуре продолжим наблюдения. Очевидно, что до тех пор, пока температура льда в сосуде остается ниже 0°C , со льдом не будет происходить никаких изменений. Когда температура льда достигнет 0°C , лед начнет таять. И до тех пор, пока лед не растает, температура воды будет оставаться равной 0°C . Наконец, когда лед полностью растает, температура воды начнет повышаться до температуры окружающей среды – t_n . Это пример обратимого процесса: при одних и тех же условиях (при одинаковых температурах) система находится в одинаковых состояниях независимо от направления процесса. Во всем диапазоне положительных температур, также как и во всем диапазоне отрицательных температур, состояние системы является устойчивым.

Выполним теперь другой опыт по замораживанию воды. Возьмем каплю дистиллированной воды. Для предохранения от загрязнения подвесим ее на нейтральной нити в стеклянной пробирке. Представим, что мы умеем измерять температуру этой воды. Например, в качестве подвеса используем спай термопары. Пусть исходная температура окажется той же самой — t_n . Поместим пробирку в холодильник и снова будем измерять температуру воды и долу льда. Очевидно, что на начальном этапе, при понижении температуры от t_n до 0°C , никаких отклонений от результатов предыдущего опыта не следует ожидать — рис. 1.1.16. Когда температура опустится ниже 0°C , наблюдатель либо с удивлением, либо с пониманием того, что так и должно быть, обнаружит, что капля остается незамерзшей. При дальнейшем понижении температуры наступает момент, когда в капле мгновенно появляется лед, а температура капли резко повышается до 0°C . Далее процесс идет знакомым путем. До тех пор, пока капля полностью не замерзнет, температура незамерзшей воды остается равной 0°C . И только с момента полного замерзания капли температура ее начнет понижаться, стремясь к температуре окружающей среды. На этом “ход вперед” закончился.

Выполним теперь второй этап эксперимента — “ход назад”. Извлечем из холодильника пробирку с замерзшей каплей и будем следить за изменением состояния капли при повышении температуры. Можно ли ожидать, что при достижении температуры замерзания t_3 произойдет какое-то изменение состояния льда? Нет, лед будет нагреваться до 0°C . При достижении 0°C начинается таяние. Температура остается равной 0°C до тех пор, пока лед полностью не растает. Далее температура капли будет повышаться до температуры окружающей среды. “Ход вперед” и “ход назад” на участке от 0°C до температуры t_3 не совпадают. Система при “ходе вперед” в этом интервале температур находится в состояниях вода, вода плюс лед и только

лед, в то время как при “ходе назад” до температуры 0°C система находится в состоянии лед, выше 0°C – в состоянии вода. Это пример необратимого процесса.

Формальным признаком необратимости является появление гистерезиса на кривой состояния. Неформальной, т. е. физической сущностью различий, является наличие метастабильного состояния. Метастабильным состоянием является такое состояние воды, в котором она находится при температуре ниже 0°C . При проведении второго эксперимента можно было прекратить охлаждение капли при любой температуре t' ниже 0°C (градусы, доли градуса). При этом можно смело утверждать, что рано или поздно капля замерзнет. Чем больше переохлаждение, тем скорее это произойдет. Даже при малых переохлаждениях вода неминуемо превратится в лед. В этом и заключается отличие стабильного состояния от метастабильного. Дадим теперь общие определения стабильного и метастабильного состояний.

Стабильным называется такое состояние, в котором замкнутая система может находиться бесконечно долго.

Метастабильным называется такое состояние, в котором замкнутая система может находиться неопределенно долго, но не бесконечно.

Вода при положительной температуре (стабильное состояние) никогда не замерзнет. Вода при отрицательной температуре (метастабильное состояние) замерзнет обязательно.

Таким образом, физической предпосылкой необратимого процесса является наличие метастабильного состояния. В теории фазовых превращений метастабильное состояние определяется прилагательным с приставкой “пере”: переохлажденная вода, пересыщенный пар (иногда говорят перенасыщенный пар, хотя вторая приставка в этом слове оказывается излишней), перегретая вода, т. е. такая вода, которая нагрета выше температуры кипения. Теоретически возможно состояние – перегретый лед, т. е. лед, нагретый до температуры выше 0°C .

Не определяются ли различия результатов двух рассмотренных опытов только объемами воды? Нет. Обратите внимание на то, что в первом опыте мы взяли неочищенную воду, во втором были предприняты меры по очистке воды, ее дистилляции и защите от возможного контакта с загрязнениями, содержащимися в воздухе. Таким образом, первый опыт отражает гетерогенное фазовое превращение, характеризующееся наличием в обычной воде примесей и влиянием стенок сосуда, способствующих ее замерзанию, в то время как второй опыт отражает гомогенное фазовое превращение (точнее, имитацию гомогенного фазового превращения, как мы увидим это позднее).

Прежде чем перейти к обсуждению механизмов гомогенного и гетерогенного фазовых превращений, рассмотрим сначала структуру воды при разных агрегатных состояниях.

1.2. Структура воды в различных агрегатных состояниях

Как известно, вода представляет собой соединение водорода H и кислорода O в соответствии с реакцией



Эта реакция является экзотермической, в результате ее выделяется энергия $q \approx 28$ кДж/моль. Рассматривая эту реакцию как процесс сгорания водорода в кислороде (в воздухе), можно рассчитать теплотворную способность водорода $\alpha_{H_2} = 14$ МДж/кг при влаготворной способности $\alpha'_{H_2} = 9$ кг/кг.

Структура молекулы воды

Квантово-механическое описание электронной структуры атома водорода имеет вид $1s^1$, что означает наличие одного электрона на первом энергетическом уровне или на $1s$ орбитали. Аналогичное описание атома кислорода $1s^2 2s^2 2p^4$ означает, что на первой и второй s орбиталях находятся по

два электрона, а на полярных орбиталях второго уровня $2p$ находятся четыре электрона. Распределение электронов на полярных орбиталях можно детализировать как $2p_x^2 p_y^1 p_z^1$, где x, y, z – оси прямоугольной системы координат. На вытянутой вдоль оси x орбитали p_x содержится два электрона с противоположными спинами, то есть эта орбиталь является заполненной. На орбиталях p_y и p_z находится по одному электрону. Эти орбитали не заполнены.

При взаимодействии атома кислорода с двумя атомами водорода электроны с s орбиталей последних переходят на p_y и p_z орбитали кислорода. При этом формируются новые заполненные орбитали, охватывающие ядра атомов O и H . Такая связь между атомами называется ковалентной. Схематическое изображение орбиталей второго уровня в молекуле воды показано на рис. 1.2.1а.

В целом, молекула воды является электрически нейтральной. Однако, в силу того, что заряд ядра атома кислорода существенно больше, чем заряд ядра атома водорода, поверхностная плотность заряда на объединенных орбиталях оказывается неравномерной. Вблизи ядра кислорода она больше. Вследствие этого часть заряда протона водорода оказывается незэкранированной. Здесь появляется избыточный положительный заряд. Электрическое отталкивание зарядов ядер водорода увеличивает угол $H-O-H$ до $104,5^\circ$ (вместо 90° в исходном атоме кислорода). Кроме того появляется сила взаимного отталкивания между электронами присоединенных атомов водорода и неподеленной парой электронов на p_x орбитали. В результате взаимодействия p_x орбиталь отклоняется от оси x . Таким образом на поверхности молекулы H_2O появляются два центра положительного заряда (вблизи ядер водорода) и два центра отрицательного заряда (на противоположной от атомов водорода стороне). При этом отрезки, соединяющие центры положительных и отрицательных зарядов, перпендикулярны друг другу. Такое расположение зарядов создает дипольный момент молекулы H_2O . Значение дипольного мо-

мента $p = 6.10 \cdot 10^{-30}$ Кл м (в изданиях прошлых лет это значение часто приводится в виде $p = 1.83 \cdot 10^{-18}$ ед. СГСЭ или $1.83 D$, где D – внесистемная единица дебай, $1D = 3.34 \cdot 10^{-30}$ Кл м).

Геометрические размеры и форма молекулы воды приведены на рис. 1.2.1б, а ее электростатическая четырехполюсная модель – на рис. 1.2.1в. В соответствии с этой моделью заряды располагаются в вершинах практически правильного тетраэдра.

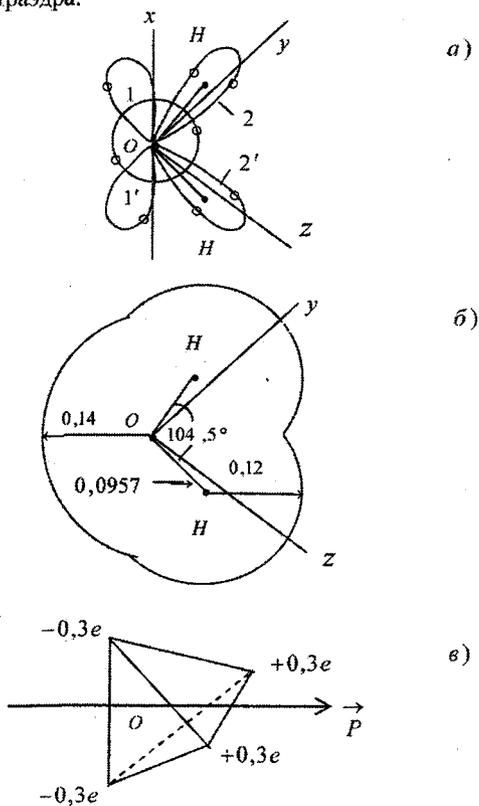


Рис. 1.2.1. Структура молекулы H_2O .

а) Схема атомных орбиталей. 1, 1' – поперечное сечение орбитали неподеленной пары электронов (в плоскости рисунка); 2, 2' – поперечное сечение орбиталей, образованных из непарных электронов O и H в плоскости, перпендикулярной рисунку; б) Форма и размеры (в нм) молекулы («вид сверху» – вдоль оси x); в) Электростатическая модель молекулы, \vec{P} – дипольный момент.

Наличие зарядов на поверхности приводит к возникновению электростатического взаимодействия между молекулами. Как уже говорилось, каждый атом кислорода внутри молекулы ковалентно связан с двумя атомами водорода. В то же время благодаря избыточному положительному заряду каждый атом водорода может быть связан с отрицательным электрическим зарядом атома кислорода другой молекулы воды. Такие связи называются водородными. Они обозначаются как $H...O$. Благодаря наличию водородных связей каждая молекула воды может активно вступать во взаимодействие с другими аналогичными молекулами. Эти взаимодействия являются остро направленными: сила водородной связи является максимальной, если в цепочке $O-H...O$ (или $O...H-O$) атомы располагаются на прямой линии. При отклонении угла $O-H...O$ от 180° сила связи быстро уменьшается.

Структура водяного пара

В метеорологическом диапазоне температур и давлений плотность водяного пара столь невелика, что среднее расстояние между молекулами существенно больше, чем их размеры. Силы притяжения между молекулами на таких расстояниях оказываются пренебрежимо малыми. В этом смысле водяной пар можно рассматривать как идеальный газ, взаимодействия между молекулами в котором определяются тепловыми движениями. Свойства водяного пара хорошо описываются уравнением состояния

$$\rho_n = e / (R_n T), \quad (1.2.2)$$

где ρ_n – плотность, e – парциальное давление, R_n – газовая постоянная водяного пара, T – температура.

Применительно к задачам фазовых превращений следует учитывать то обстоятельство, что при сближении молекул между ними проявляются силы электростатического взаимодействия (водородные связи). В результате этого могут образовываться временные неустойчивые скопления молекул. Их называют кластерами (или полимерами). Кластеры могут быть открытыми, ко-

уч. н. - 1365

гда скопление молекул представляет собой цепочку, или закрытыми, когда объединение молекул приобретает форму замкнутого кольца. Можно было бы ожидать, что концентрация полимеров (димеров – объединение двух молекул, тримеров – объединение трех молекул и т.п.) будет тем меньше, чем больше молекул содержит полимер (кластер). Однако это не так. В результате теплового движения кластеры разрушаются. Поскольку степень связи между молекулами при разной конфигурации кластеров оказывается различной, характерное время существования кластеров неодинаково. Так, замкнутые димеры и тримеры являются очень неустойчивыми, так как углы $O-H...O$ у них сильно отличаются от 180° . В то же время замкнутый кластер, состоящий из пяти молекул, оказывается сравнительно устойчивым.

Реальное распределение кластеров по размерам не исследовано. Модельные расчеты показывают, что устойчивыми могут быть кластеры, содержащие большое число молекул. Так например, легко может быть построена модель устойчивого кластера из 21 молекулы. Такой кластер представляет собой геометрическую фигуру – пентагональный додекаэдр. Эта фигура состоит из двенадцати пятиугольников, в вершинах которых расположены молекулы воды. Таких вершин двадцать. Двадцать первая молекула располагается в центре «клетки». Каждая молекула, находящаяся на поверхности додекаэдра, связана с тремя соседними молекулами. «Прочность» конструкции усиливается тем, что четыре поверхностных молекулы дополнительно связаны с молекулой, находящейся в центре. Можно ожидать, что такой кластер окажется достаточно устойчивым. Разработаны модели других устойчивых кластеров, например, содержащих 180 молекул.

Подчеркнем еще раз, что кластеры являются временными образованиями. Они непрерывно формируются и столь же непрерывно разрушаются. При этом в каждый момент времени доля молекул, участвующих в образовании кластеров, невелика. Большая часть молекул остается в виде мономеров (одиночных молекул).

Структура льда

Перейдем теперь от неупорядоченной, хаотической, характерной для пара, структуры к упорядоченной структуре льда, в которой молекулы расположены в узлах регулярной кристаллической решетки. В настоящее время известно девять разновидностей кристаллического льда. Для существования большинства из них требуется очень высокое давление. При этом лед может наблюдаться даже при положительных температурах. В обычных условиях в природе образуется и существует лед разновидности *Ih* (читается – один аш). Далее будем рассматривать только эту разновидность льда.

Особенности кристаллической структуры льды определяются наличием водородных связей между молекулами H_2O . Благодаря этим связям каждая молекула соединяется с четырьмя другими молекулами, которые располагаются в вершинах практически правильного тетраэдра (четырёхгранной пирамиды). В свою очередь вокруг каждой из этих молекул образуется свой тетраэдр и т. д. При этом молекула электростатически взаимодействует и с другими более удалёнными соседями. Сила взаимодействия тем слабее, чем больше расстояние между ними. Молекулы в структуре льда оказываются «напряжёнными»: расстояния между атомами кислорода и водорода уменьшаются до 0.09 нм, а углы *H-O-H* увеличиваются до 109°. В результате проявления водородных связей и электростатических сил дальнего действия формируется кристаллическая решетка льда (рис. 1.2.2). Можно заметить, что расположение молекул в структуре льда имеет слоистый характер. Соседние слои являются зеркальным отражением друг друга. В каждом слое молекулы располагаются в вершинах правильных шестиугольников (гексагонов), образуя ажурную структуру. В направлении, перпендикулярном слоям, возникают «туннели» с диаметром около 0.22 нм, меньшим диаметра молекулы воды. Поэтому молекулы H_2O не могут перемещаться вдоль этих туннелей, но по ним могут мигрировать более мелкие молекулы.

Для описания структуры кристалла в нем выделяют элементарную единичную ячейку. Единичная ячейка представляет собой наименьшую часть кристалла, которая содержит всю информацию, необходимую для описания кристаллической решетки. Размеры такой ячейки обычно выражают длинами трех взаимно перпендикулярных координатных осей: a_0, b_0, c_0 . Для гексагональной симметричной решетки льда Ih достаточно использовать оси a_0 и c_0 . Они показаны на рис. 1.2.2.

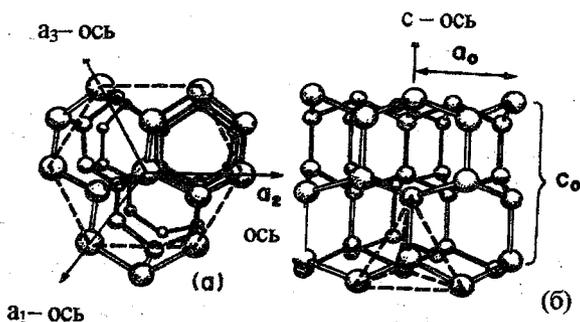


Рис. 1.2.2 Кристаллическая решетка льда Ih

а) вид вдоль оси c . б) вид перпендикулярно оси c .

Если напрячь воображение, то, рассматривая рис. 1.2.2, можно увидеть, что каждая элементарная ячейка представляет собой параллелепипед, основанием которого является правильный ромб со стороной a_0 и острым углом 60° , а ось c_0 является высотой параллелепипеда. Каждая элементарная ячейка включает в себя 14 молекул, восемь из них находятся в вершинах параллелепипеда, а значит, каждая из них одновременно является вершиной восьми ячеек. Четыре молекулы находятся на ребрах параллелепипеда, а значит, каждая из них относится к четырем ячейкам. Две молекулы находятся внутри ячейки. Таким образом, на каждую ячейку приходится четыре целых молекулы.

Размеры кристаллической решетки льда Ih составляют $a_0 = 0.452$ нм, $c_0 = 0.736$ нм при температуре 0°C . Плотность льда, рассчитанная по этим

параметрам решетки, $\rho_{\text{л}} = 0,919 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ хорошо согласуется с результатами макроскопических измерений ($0,916 \dots 0,918$) $\text{г} \cdot \text{см}^{-3}$.

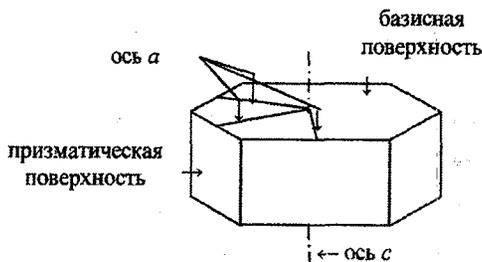


Рис. 1.2.3. Макроскопическая структура кристалла льда

Гексагональная структура кристаллической решетки льда определяет формирование гексагональной структуры макроскопических кристаллов, например, частиц твердых осадков (снежных кристаллов). Характерной формой таких кристаллов является гексагональная призма – рис. 1.2.3. Верхнее и нижнее основания призмы называют базисными или базальными поверхностями. Их плоскости соответствуют слоям кристаллической решетки льда. Боковые поверхности называют призматическими. Размеры макрокристалла характеризуются длинами осей a и c , a равна половине расстояния между двумя призматическими гранями (радиусу вписанной в шестигранник окружности), c равна половине расстояния между базисными поверхностями (половине высоты призмы).

Структура воды

Молекулярная структура воды занимает промежуточное положение между структурами льда и пара. Так же как и в паре, значительная часть молекул находится в хаотическом движении. Однако расстояния между молекулами в воде, как и во льду, соизмеримы с размерами молекул. На этих расстояниях активно проявляются водородные связи между молекулами. Как и в паре, в результате теплового движения водородные связи непрерывно разрушаются и возникают вновь. Таким образом, в воде появляются кластеры.

Ажурная структура, характерная для льда, не образуется. Плотность воды оказывается выше плотности льда. Средние размеры кластеров уменьшаются с увеличением температуры. Можно было бы ожидать, что в результате этого плотность воды будет увеличиваться. С другой стороны, с повышением температуры увеличивается тепловое расширение воды – плотность уменьшается. Эти две тенденции уравниваются при температуре около $+4\text{ }^{\circ}\text{C}$, когда плотность воды максимальная.

Удивительные свойства воды. Вода как минерал – самое распространенное вещество на Земле. Она является источником и носителем биологической жизни. Тело человека на 90 % состоит из воды. Наличием или отсутствием воды определяются условия погоды – благоприятные и опасные. Вода – вещество самое обычное и самое загадочное. Изучению воды уделялось и уделяется столько внимания, как, пожалуй, никакому другому веществу. Однако до сих пор вода таит много загадок.

Перечислим некоторые уникальные свойства воды. Среди всех известных жидкостей вода обладает самой большой теплоемкостью и самым большим поверхностным натяжением (кроме ртути). Вода имеет самую большую диэлектрическую проницаемость. Вода – единственная из всех известных жидкостей, которая при затвердевании расширяется.

1.3. Энергия образования зародышей новой фазы

Процесс образования жизнеспособных зародышей стабильной фазы в системе, находящейся в метастабильном состоянии, называют нуклеацией (ядрообразованием). Применительно к задачам физики облаков речь идет о возникновении зародышевых капелек воды в пересыщенном паре или, с некоторыми оговорками, зародышевых кристаллов льда в переохлажденной воде. Обобщая задачу, рассмотрим здесь образование зародышей стабильной фазы в метастабильной.

Введем понятие термодинамического потенциала Φ , как характеристики состояния некоторой замкнутой системы.

$$\varphi = U + pV - TS, \quad (1.3.1)$$

где U – внутренняя энергия, p – давление, V – объем, T – температура, S – энтропия. Будем относить φ, U, V и S к единице массы.

1.3.1. Гомогенная нуклеация

Пусть внутри метастабильной фазы образуется сферический зародыш стабильной фазы радиусом r . Масса такого зародыша $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c$, ρ_c – плотность вещества стабильной фазы. Термодинамический потенциал молекул, образующих зародыш, изменяется на $(\varphi_m - \varphi_c)m$. При этом, по определению термодинамический потенциал метастабильной фазы больше или равен потенциалу стабильной фазы $(\varphi_m - \varphi_c) \geq 0$. Образование зародыша связано с затратами энергии на формирование поверхности раздела между фазами. Эта энергия равна $4\pi r^2 \sigma_{m-c}$, где σ_{m-c} – удельная поверхностная энергия, а $4\pi r^2$ – площадь поверхности зародыша.

Тогда суммарная энергия образования зародыша составит

$$\Phi = -(\varphi_m - \varphi_c) \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_c + 4\pi r^2 \sigma_{m-c}. \quad (1.3.2)$$

Проанализируем выражение (1.3.2). Знак минус перед первым слагаемым означает, что при переходе молекул из метастабильной фазы в стабильную энергия выделяется.

Второе слагаемое всегда положительное. Таким образом, величина Φ оказывается экстремальной: $\Phi=0$, естественно, при $r=0$ и при равенстве абсолютных значений обоих слагаемых. Вид зависимости Φ от r показан на рис. 1.3.1.

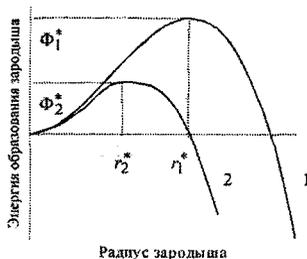


Рис. 1.3.1. Энергия, необходимая для образования зародыша стабильной фазы в метастабильной при двух значениях r^*

Найдем максимальное значение Φ^* , соответствующее радиусу зародыша r^* . С этой целью возьмем производную $d\Phi/dr$ и приравняем ее нулю.

$$\left. \frac{d\Phi}{dr} \right|_{r=r^*} = -(\varphi_M - \varphi_C)4\pi\rho_C r^{*2} + 8\pi r^* \sigma_{M-C} = 0, \quad (1.3.3)$$

отсюда

$$\varphi_M - \varphi_C = 2\sigma_{M-C} / \rho_C r^*. \quad (1.3.4)$$

Подставляя выражение (1.3.4) в (1.3.2), найдем

$$\Phi^* = \frac{4}{3}\pi r^{*2} \sigma_{M-C}. \quad (1.3.5)$$

С учетом (1.3.4) выражение (1.3.2) можно представить в виде

$$\Phi = \frac{4}{3}\pi r^2 \sigma_{M-C} \left(3 - 2 \frac{r}{r^*} \right). \quad (1.3.6)$$

Вернемся к рис. 1.3.1. Проанализируем зависимость, представленную, например, кривой 1. С увеличением размера зародыша энергия, необходимая для его образования, сначала растет, достигает максимума, затем стремительно уменьшается и становится отрицательной. Последнее соответствует, знакомому из курса физики, выделению энергии при фазовых превращениях. В этом смысле образование и рост больших зародышей энергетически выго-

ден для системы. Для образования и роста малых зародышей энергия должна быть затрачена. Для системы в целом это невыгодно. Система не обладает никаким источником дополнительной энергии. Формирование зародышей происходит лишь за счет случайного столкновения и соединения молекул, либо случайного увеличения размеров молекулярных кластеров (число молекул, столкнувшихся с кластером больше, чем число молекул, покинувших его).

Граничное значение радиуса зародышей r^* разделяет их на нежизнеспособные (гомофазные) при $r < r^*$ и жизнеспособные (гетерофазные) при $r \geq r^*$.

Сопоставление кривых 1 и 2 на рис. 1.3.1 показывает, что с уменьшением r^* максимальная энергия образования жизнеспособных зародышей быстро уменьшается.

1.3.2. Гетерогенная нуклеация

Если внутри метастабильной фазы находятся твердые частицы (ядра) других веществ, то фазовые превращения могут происходить на поверхности этих ядер. При этом энергия образования зародышей оказывается меньше, чем при гомогенном процессе. Уменьшение энергии определяется свойствами поверхностей ядер: их смачиваемостью, кривизной, растворимостью.

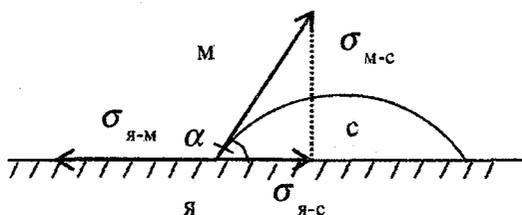


Рис. 1.3.2. К определению угла смачивания α

Рассмотрим нерастворимые ядра. Идеализируя задачу, будем считать их поверхности плоскими и достаточно большими по сравнению с размерами

интересующих нас зародышей. Смачиваемость частиц будем характеризовать краевым углом α (углом смачивания) – рис. 1.3.2.

Значение этого угла определяется соотношениями между поверхностными натяжениями на границах ядро – метастабильная фаза $\sigma_{я-м}$, ядро – стабильная фаза $\sigma_{я-с}$ и метастабильная – стабильная фазы $\sigma_{м-с}$. В установившемся состоянии

$$\sigma_{я-м} = \sigma_{я-с} + \sigma_{м-с} \cos \alpha. \quad (1.3.7)$$

Отсюда

$$\cos \alpha = \frac{\sigma_{я-м} - \sigma_{я-с}}{\sigma_{м-с}}. \quad (1.3.8)$$

Оценим энергию образования зародыша на плоской поверхности ядра. Пусть зародыш представляет собой шаровой сегмент, то есть является частью капли радиусом r , высота сегмента – h , (см. рис. 1.3.3).

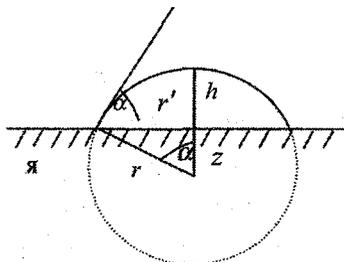


Рис. 1.3.3. Зародыш на поверхности ядра

Объем такого зародыша $V_3 = \frac{\pi}{3} h^2 (3r - h)$, а его масса $m_3 = V_3 \rho_c$. Площадь поверхности сегмента (купола) $A_k = 2\pi r h$, а площадь основания зародыша $A_3 = \pi r'^2$. Таким образом, работа образования зародыша может быть представлена выражением

$$\Phi' = -(\varphi_m - \varphi_c) m_3 + A_k \sigma_{м-с} + A_3 \sigma_{я-с} - A_3 \sigma_{я-м}. \quad (1.3.9)$$

Здесь, как и в выражении (1.3.2), первое слагаемое справа – выделение энергии, связанное с переходом молекул из одной фазы в другую, второе – затраты энергии на образование поверхности раздела между зародышем и метастабильной фазой, третье и четвертое слагаемые отражают разность поверхностных энергий на границе ядро – метастабильная фаза и ядро – стабильная фаза.

Подставляя в выражение (1.3.9) приведенные выше соотношения для V_3 , m_3 , A_k , A_3 и выполняя замены $(1 - \cos^2 \alpha)$, $z = r \cos \alpha$, $h = r - z = r(1 - \cos \alpha)$, $r'^2 = r^2(1 - \cos^2 \alpha)$, получим

$$\Phi' = \left[-(\varphi_m - \varphi_c) \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c + 4\pi r^2 \sigma_{m-c} \right] \frac{(2 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)^2}{4}. \quad (1.3.10)$$

Смножитель в квадратных скобках, как легко убедиться, в точности равен правой части выражения (1.3.2). Введем обозначение

$$\frac{(2 + \cos \alpha)(1 - \cos \alpha)^2}{4} = \psi(\alpha). \text{ Таким образом}$$

$$\Phi' = \Phi \psi(\alpha). \quad (1.3.11)$$

Поскольку множитель $\psi(\alpha)$ не зависит от радиуса зародыша, то, выполняя для выражения (1.3.11) операцию нахождения максимума (подобно (1.3.3)), найдем

$$(\varphi_m - \varphi_c) = 2\sigma_{m-c} / \rho_c r^\nabla, \quad (1.3.12)$$

где r^∇ – значение переменной r , соответствующее максимальной энергии.

Очевидно, что $r^\nabla = r^*$. Однако обозначение r^∇ введено здесь, чтобы подчеркнуть различие процессов (гомогенного от гетерогенного). При гетерогенном процессе зародыш представляет собой только часть сферы радиусом r^∇ .

Подставляя формулу (1.3.12) в (1.3.10), получим выражение для максимальной энергии образования зародыша.

$$\Phi^{\nabla} = \Phi^* \psi(\alpha). \quad (1.3.13)$$

Параметр $\psi(\alpha)$ изменяется от нуля при $\alpha = 0$ (полное смачивание) до 1 при $\alpha = \pi$ (несмачиваемая поверхность). Как следует из выражения (1.3.13), величина $\psi(\alpha)$ представляет собой отношение энергий образования жизнеспособных зародышей при гетерогенном и гомогенном процессах — рис. 1.3.4.

Легко видеть, что при малых углах смачивания гетерогенный механизм образования зародышей энергетически существенно выгоднее, чем гомогенный. Если поверхность ядер абсолютно несмачиваемая, то $\Phi^{\nabla} = \Phi^*$: гомогенный процесс является частным случаем общего гетерогенного процесса.

Приведенные здесь соотношения получены для плоской поверхности инородного ядра. Можно показать, что Φ^{∇} для вогнутой поверхности окажется меньше, чем для плоской, а для выпуклой — больше. При этом, конечно, всегда $\Phi^{\nabla} \leq \Phi^*$. Особый интерес для физики облаков представляет процесс образования зародышей на растворимых ядрах. Этот вопрос будет рассмотрен позже.

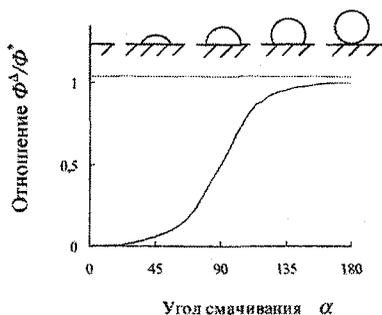


Рис. 1.3.4. Зависимость отношения Φ^{∇} / Φ^* от угла смачивания

1.4. Обобщенное уравнение равновесия фаз

Зародыши радиусов r_1^* и r_2^* на рис. 1.3.1 находятся в условиях неустойчивого равновесия. Случайное увеличение их размеров приводит далее к неограниченному росту, а уменьшение – к исчезновению. Найдем соотношение, определяющее условия такого равновесия.

Возьмем полный дифференциал от выражения (1.3.1)

$$d\phi = dU + pdV + Vdp - TdS - SdT. \quad (1.4.1)$$

В соответствии с первым началом термодинамики количество тепла, сообщенное системе

$$dQ = dU + pdV. \quad (1.4.2)$$

В соответствии со вторым началом термодинамики

$$dQ \leq TdS. \quad (1.4.3)$$

Из выражений (1.4.2), (1.4.3) получим

$$dU + pdV - TdS \leq 0. \quad (1.4.4)$$

Рассмотрим условие равновесия, при котором

$$dU + pdV - TdS = 0. \quad (1.4.5)$$

Тогда

$$d\phi = Vdp - SdT. \quad (1.4.6)$$

Запишем уравнение (1.4.6) дважды – для метастабильной и стабильной фаз – и найдем разности правой и левой частей этих выражений.

$$d(\phi_M - \phi_C) = -(S_M - S_C)dT + (V_M - V_C)dp. \quad (1.4.7)$$

Возьмем дифференциал разности $(\phi_M - \phi_C)$ из выражения (1.3.4)

$$d(\phi_M - \phi_C) = \frac{2\sigma_{M-C}}{\rho_C} d\left(\frac{1}{r^*}\right). \quad (1.4.8)$$

Приравняем правые части уравнений (1.4.7) и (1.4.8)

$$\frac{2\sigma_{\text{м-с}}}{\rho_{\text{с}}} d\left(\frac{1}{r^*}\right) = -(S_{\text{м}} - S_{\text{с}})dT + (V_{\text{м}} - V_{\text{с}})dp. \quad (1.4.9)$$

Это уравнение определяет условия существования зародыша радиусом r^* при различных сочетаниях температуры и давления. Его называют *обобщенным уравнением равновесия фаз*. Рассмотрим несколько частных случаев.

1.4.1. Равновесие между паром и водой и паром и льдом при плоской поверхности раздела фаз

Для плоской поверхности раздела фаз $r^* \rightarrow \infty$ и, следовательно, $d\left(\frac{1}{r^*}\right) = 0$. Тогда вместо уравнения (1.4.9) имеем

$$(S_{\text{м}} - S_{\text{с}})dT = (V_{\text{м}} - V_{\text{с}})dp. \quad (1.4.10)$$

Разность энтропий определим через энергию фазовых превращений

$$S_{\text{м}} - S_{\text{с}} = L_{\text{м-с}}/T. \quad (1.4.11)$$

Разность удельных объемов можно заменить на разность обратных плотностей

$$(V_{\text{м}} - V_{\text{с}}) = \frac{1}{\rho_{\text{м}}} - \frac{1}{\rho_{\text{с}}}. \quad (1.4.12)$$

Если метастабильной фазой является пар ($\text{м} \equiv \text{п}$), а стабильной – вода ($\text{с} \equiv \text{в}$), то $\frac{1}{\rho_{\text{п}}} \gg \frac{1}{\rho_{\text{в}}}$. Как принято в метеорологии, давление пара обозначим через e , а давление насыщенного пара через E . Используя уравнение состояния, перейдем от плотности пара к его давлению $\rho_{\text{п}} = e/R_{\text{п}}T$, где $R_{\text{п}}$ – газовая постоянная водяного пара. Теперь выражение (1.4.10) приводится к виду

$$\frac{L_{п-в}}{T} dT = \frac{R_n T}{e} de. \quad (1.4.13)$$

Пусть при некоторой температуре T_0 пар является насыщенным $e = E_0$. Будем искать зависимость E от T . В дифференциальной форме эту зависимость можно выразить как

$$\frac{dE}{dT} = \frac{L_{п-в} E}{R_n T^2}. \quad (1.4.14)$$

Это уравнение называют уравнением Клаузиуса-Клапейрона.

В выражении (1.4.13) переменные легко разделяются. Однако величина $L_{п-в}$ в общем случае зависит от температуры. Пренебрегая этой зависимостью (считая $L_{п-в} = const$), проинтегрируем уравнение (1.4.13) по температуре от T_0 до T и по давлению пара от $E_{0,в}$ до E_v

$$-L_{п-в} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) = R_n \ln \frac{E_v}{E_{0,в}} \quad (1.4.15)$$

или после потенцирования

$$E_v = E_{0,в} \exp \left(\frac{L_{п-в} (T - T_0)}{R_n T_0 T} \right). \quad (1.4.16)$$

Аналогичным образом можно получить формулу зависимости давления насыщенного водяного пара над плоской поверхностью льда от температуры

$$E_l = E_{0,л} \exp \left(\frac{L_{п-л} (T - T_0)}{R_n T_0 T} \right). \quad (1.4.17)$$

Зависимости $E_v(T)$ и $E_l(T)$ представлены на рис. 1.4.1.

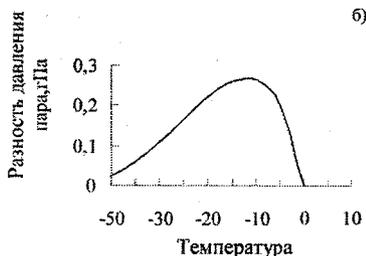
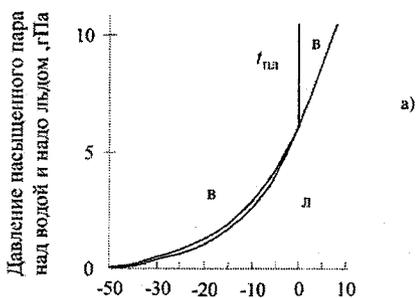


Рис. 1.4.1. а) Зависимость давления насыщенного водяного пара над плоской поверхностью воды $E_{\text{в}}(T)$ и льда $E_{\text{л}}(T)$ от температуры; б) Зависимость разности $\Delta E = E_{\text{в}} - E_{\text{л}}$ от температуры

Легко видеть, во-первых, что давление насыщенного пара резко уменьшается с понижением температуры, а, во-вторых, что разность давлений $\Delta E = E_{\text{в}} - E_{\text{л}}$ изменяется немонотонно. Сначала с понижением температуры от 0°C эта разность возрастает, достигает максимума при температуре около -12°C , а далее медленно убывает.

В силу сделанных при выводе уравнений (1.4.16), (1.4.17) допущений, расчеты по ним не вполне согласуются с экспериментальными данными.

Результаты измерений $E_{\text{в}}(T)$ и $E_{\text{л}}(T)$ в широком диапазоне температур затабулированы. В литературе можно найти также аналитические выражения, аппроксимирующие эти зависимости.

1.4.2. Условия существования водяных и ледяных зародышей
в пересыщенном паре

Радиус жизнеспособного водяного зародыша

Рассмотрим процесс изотермического повышения давления пара $dT = 0$, $dp = de$. В этом случае из обобщенного уравнения равновесия фаз (1.4.9.) получим

$$\frac{2\sigma_{п-в}}{\rho_{в}} d\left(\frac{1}{r_{в}^*}\right) = \left(\frac{1}{\rho_{п}} - \frac{1}{\rho_{в}}\right) de. \quad (1.4.18)$$

Пренебрегая, как и выше, величиной $\frac{1}{\rho_{в}}$ по сравнению с $\frac{1}{\rho_{п}}$ и переходя от плотности пара к его давлению, преобразуем предыдущую формулу к виду

$$\frac{2\sigma_{п-в}}{\rho_{в}} d\left(\frac{1}{r_{в}^*}\right) = R_{п} T \cdot \frac{de}{e}. \quad (1.4.19)$$

Проинтегрируем левую часть уравнения (1.4.19) по переменной $\frac{1}{r_{в}^*}$ от $r_{в}^* = \infty$ до произвольного значения $r_{в}^*$, а правую часть по e от давления насыщенного водяного пара над плоской поверхностью воды $E_{в\infty}$ до давления насыщенного пара над каплей $E_{r_{в}^*}$.

$$\frac{2\sigma_{п-в}}{\rho_{в}} \frac{1}{r_{в}^*} = R_{п} T \ln \frac{E_{r_{в}^*}}{E_{в\infty}}. \quad (1.4.20)$$

Введем обозначение $f_{r_{в}^*} = \frac{E_{r_{в}^*}}{E_{в\infty}}$, где $f_{r_{в}^*}$ представляет относительную влажность, при которой капля радиусом $r_{в}^*$ находится в равновесии с водяным паром. Перепишем выражение (1.4.20) в виде

$$r_B^* = \frac{2\sigma_{п-в}}{\rho_B R_{п} T \ln f_{r_B^*}} \quad (1.4.21)$$

Это уравнение называют уравнением Кельвина (Томпсона). Далее оно будет часто использоваться в форме

$$\ln f_{r_B^*} = \frac{2\sigma_{п-в}}{\rho_B R_{п} T r_B^*} \quad (1.4.22)$$

либо

$$f_{r_B^*} = \exp\left(\frac{2\sigma_{п-в}}{\rho_B R_{п} T r_B^*}\right) \quad (1.4.23)$$

Графическое представление зависимости $f_{r_B^*}$ от r_B^* показано на рис.

1.4.2. Как и следовало ожидать, при $r_B^* \rightarrow \infty$ равновесная относительная влажность стремится к единице.

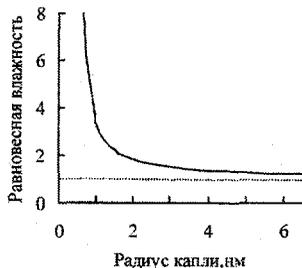


Рис. 1.4.2. Зависимость равновесной влажности $f_{r_B^*}$ от радиуса сферического водяного зародыша r_B^*

Кривая на этом рисунке отражает условие неустойчивого равновесия. Если точка $(f_{r_B^*}, r_B^*)$ лежит выше кривой, то капля оказывается в условиях неограниченного роста, если точка лежит ниже кривой, то такая капля будет испаряться до полного исчезновения.

Формально уравнение Кельвина не имеет ограничения со стороны малых размеров: $f_{r_b^*} \rightarrow \infty$ при $r_b^* \rightarrow 0$. С физической точки зрения использование этого уравнения должно быть ограничено некоторым минимальным размером зародыша, который можно рассматривать как каплю. Этот размер не установлен. Примем в качестве минимального радиус объема, приходящегося на единичную молекулу в воде, $\overset{\circ}{r}$. Значение $\overset{\circ}{r}$ легко определяется из условия $\frac{4}{3}\pi\rho_B \overset{\circ}{r}^3 = \frac{\mu}{N_A}$. Здесь μ – молярная масса воды, N_A – число Авогадро. Отсюда

$$\overset{\circ}{r} = \left(\frac{3\mu}{4\pi\rho_B N_A} \right)^{\frac{1}{3}} \approx 0,19 \text{ нм.} \quad (1.4.24)$$

Подставляя это значение в выражение (1.4.23), найдем, что $f_r \approx 528$.

Конечно, это фантастическая цифра, хотя такие значения пересыщения при определенных условиях могут быть получены. Возьмем зародыш, состоящий из 10 молекул. Его радиус составит $r_{10} = 10^{1/3} \cdot \overset{\circ}{r} = 0,41$ нм и соответствующая равновесная влажность окажется всего $f_{r_{10}} = 18$.

Для диапазона предоблачных и облачных капель выражение (1.4.23) можно упростить, удерживая первые два слагаемых разложения экспоненты в ряд Тейлора

$$f_{r_b^*} = 1 + \frac{2\sigma_{п-в}}{\rho_B R_{п} T r_b^*} = 1 + \frac{r_b^+}{r_b^*}, \quad (1.4.25)$$

где $r_b^+ = \frac{2\sigma_{п-в}}{\rho_B R_{п} T}$. При температуре 0°C $r_b^+ \approx 1,2$ нм. Отношение $\frac{r_b^+}{r_b^*}$ характеризует относительное пересыщение, необходимое для существования капли заданного радиуса. Его часто называют томпсоновской добавкой.

Размер ледяного зародыша

Если предположить, что жизнеспособный ледяной зародыш имеет сферическую форму, то радиус его можно определить уравнением, аналогичным (1.4.21)

$$r_{л|п}^* = \frac{2\sigma_{п-л}}{\rho_{л} R_{п} T \ln \left(\frac{E_{r_{л|п}^*}}{E_{л\infty}} \right)}, \quad (1.4.26)$$

где $E_{л\infty}$ — давление насыщенного водяного пара над плоской поверхностью льда, $E_{r_{л|п}^*}$ — давление насыщенного водяного пара над сферической ледяной частицей радиусом $r_{л|п}^*$. Здесь индекс л|п означает образование ледяного зародыша в пересыщенном паре (сокращение читается: «лед, если пар»).

Вследствие гексагональной структуры кристаллической решетки льда трудно ожидать, что зародышевые кристаллы окажутся строго сферическими. При отклонении формы от сферической изменяется соотношение между энергией, затрачиваемой на образование поверхности зародыша, и энергией, выделяющейся при переходе молекулы из одной фазы в другую. Зададим зародыш в форме шестигранной призмы с осями a и c как на рис. 1.2.3. Пусть соотношение осей остается постоянным и равным $c = \epsilon a$. Масса такого призматического зародыша $m_{пз} = 4\sqrt{3}a^3 \epsilon \rho_{л}$. Площадь поверхности его $A_{пз} = 4\sqrt{3}a^2(1 + 2\epsilon)$. Тогда, полагая, что поверхностная энергия на базальных и призматических гранях одинакова, работу образования зародыша аналогично (1.3.2) можно представить в виде

$$\Phi_{пз} = -(\varphi_{п} - \varphi_{л})\rho_{л} 4\sqrt{3}a^3 \epsilon + 4\sqrt{3}a^2(1 + 2\epsilon)\sigma_{п-л}. \quad (1.4.27)$$

Приравнивая нулю производную по a от выражения (1.4.27), найдем

$$\varphi_{\text{п}} - \varphi_{\text{л}} = \frac{2\sigma_{\text{п-л}}}{\rho_{\text{л}} a^*} \left(\frac{1+2\varepsilon}{3\varepsilon} \right). \quad (1.4.28)$$

Максимальное значение энергии, соответствующее a^* ,

$$\Phi_{\text{пз}}^* = \frac{4}{\sqrt{3}} (1+2\varepsilon) a^{*2} \sigma_{\text{п-л}}. \quad (1.4.29)$$

Найдем $d(\varphi_{\text{п}} - \varphi_{\text{л}})$, и подставим его в обобщенное уравнение равновесия фаз (1.4.9). Тогда для изотермического процесса запишем

$$\frac{2\sigma_{\text{п-л}}}{\rho_{\text{л}}} \frac{(1+2\varepsilon)}{3\varepsilon} d\left(\frac{1}{a^*}\right) = R_{\text{п}} T \frac{de}{e}. \quad (1.4.30)$$

Трудность использования уравнения (1.4.30) заключается в том, что условия равновесия пар-лед оказываются различными для граней, ребер и вершин призмы. Для качественных оценок введем величину E_{a^*} – условное давление насыщенного водяного пара над малой кристаллической частицей.

Проинтегрируем левую часть от $\frac{1}{a^*} = 0$ до произвольного значения

$\frac{1}{a^*}$, а правую от $e = e_{\text{лс}} до e_{a^*} . Тогда$

$$a^* = \frac{2\sigma_{\text{п-л}}(1+2\varepsilon)}{\rho_{\text{л}} R_{\text{п}} T 3\varepsilon \ln f_{a^*}}, \quad (1.4.31)$$

где $f_{a^*} = \frac{E_{a^*}}{E_{\text{сл}}}$.

Сравним энергии образования жизнеспособных сферического $\Phi_{\text{л}}^*$ и призматического $\Phi_{\text{пз}}^*$ зародышей при одинаковых температуре T и относительной влажности $f = f_{\text{г}}^* = f_{a^*}$.

$$\frac{\Phi_{\text{л}}^*}{\Phi_{\text{пз}}^*} = \frac{3\sqrt{3}\pi\varepsilon^2}{(1+2\varepsilon)^3}. \quad (1.4.32)$$

Легко убедиться, что при любых значениях ε энергия образования сферического зародыша $\Phi_{\text{л}}^*$ меньше энергии образования призматического зародыша $\Phi_{\text{пз}}^*$. При этом в крайних случаях $\varepsilon \rightarrow 0$ (пластинчатый кристалл) и $\varepsilon \rightarrow \infty$ (игольчатый кристалл) отношение $\frac{\Phi_{\text{л}}^*}{\Phi_{\text{пз}}^*} \rightarrow 0$. Полученный результат означает, что микроскопические ледяные кристаллы, если они образуются в паре, должны иметь форму близкую к сферической ($\varepsilon \rightarrow 1$).

1.4.3. Размер жизнеспособных ледяных зародышей в переохлажденной воде

Обратимся к процессу образования зародышевых ледяных кристаллов в переохлажденной воде. Поскольку вода практически несжимаема, изменением давления можно пренебречь. Следовательно, $dp = 0$. Полагая ледяной зародыш сферическим, из обобщенного уравнения равновесия фаз (1.4.9) сразу получим

$$\frac{2\sigma_{\text{в-л}}}{\rho_{\text{л}}} d\left(\frac{1}{r_{\text{л|в}}^*}\right) = -L_{\text{в-л}} \frac{dT}{T}. \quad (1.4.33)$$

Равновесное состояние между водой и плоской поверхностью льда ($r_{\text{л|в}}^* = \infty$) достигается при температуре $T_0 = \text{const}$ ($T_0 = 273,15 \text{ K}$, см. ниже).

Интегрирование уравнения (1.4.33) дает

$$\frac{2\sigma_{\text{в-л}}}{\rho_{\text{л}} r_{\text{л|в}}^*} = -L_{\text{в-л}} \ln \frac{T}{T_0}. \quad (1.4.34)$$

Отсюда размер жизнеспособного ледяного зародыша в воде

$$r_{\text{л|в}}^* = \frac{2\sigma_{\text{в-л}}}{\rho_{\text{л}} L_{\text{в-л}} \ln \frac{T_0}{T}}. \quad (1.4.35)$$

Графическое представление зависимости размера жизнеспособного ледяного зародыша в воде от переохлаждения ($T_0 - T$) приведено на рис. 1.4.3.

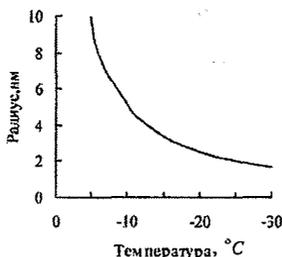


Рис. 1.4.3. Зависимость размера ледяного жизнеспособного зародыша $r_{лв}^*$ в переохлажденной воде от температуры

Легко видеть, что с понижением температуры размеры жизнеспособных зародышей быстро уменьшаются.

Температура плавления льда

Из обобщенного уравнения равновесия фаз (1.4.9) можно получить зависимость температуры равновесия между фазами вода-лед от давления. Такую температуру часто называют температурой плавления льда (замерзания воды). Для плоской поверхности раздела фаз ($r_{лв}^* = \infty$) из уравнения (1.4.9) имеем

$$L_{в-л} \cdot \frac{dT}{T} = \left(\frac{1}{\rho_{в}} - \frac{1}{\rho_{л}} \right) dp. \quad (1.4.36)$$

Пусть при некотором исходном давлении p_0 температура плавления льда T_0 . Интегрируя выражение (1.4.36), получим

$$L_{в-л} \cdot \ln \frac{T}{T_0} = - \frac{(\rho_{в} - \rho_{л})}{\rho_{в} \rho_{л}} (p - p_0) \quad (1.4.37)$$

или

$$T = T_0 \exp \left[\frac{1}{L_{в-л}} \frac{(\rho_{в} - \rho_{л})}{\rho_{в} \rho_{л}} (p_0 - p) \right]. \quad (1.4.38)$$

Легко убедиться, что с повышением давления температура равновесия фаз вода-лед понижается. В качестве p_0 часто выбирают стандартное атмосферное давление ($p_0 = 1013,6$ гПа), при этом $T_0 = 273,15$ К. Напомним, что эту температуру принимают за 0°C . Температура тройной точки воды, соответствующая условиям равновесия фаз пар-вода-лед, при давлении насыщенного водяного пара $p = e_0 = 6,107$ гПа принята равной $273,16$ К, то есть $0,01^\circ\text{C}$ (точно). Таким образом, при повышении давления в 166 раз температура плавления льда понижается на $0,01$ градуса. На рис. 1.4.1 эта зависимость представлена отрезком, идущим из тройной точки практически параллельно оси ординат ($t_{пл}$).

1.5. Скорость нуклеации при гомогенных фазовых превращениях

Скоростью нуклеации или ядрообразования J называют *число жизнеспособных зародышей стабильной фазы, образующихся в единицу времени в единице объема метастабильной фазы*. (В литературе прошлых лет использовался термин термодинамическая вероятность. Этот термин хорошо отражает физическую сущность образования зародышей новой фазы в результате случайных сближений и столкновений молекул при их хаотическом движении. Однако величина J является размерной, поэтому использование слова вероятность часто служит источником недоразумений).

Первые оценки скорости нуклеации были выполнены применительно к задачам спонтанной конденсации в камерах расширения (камерах Вильсона). Термин *спонтанная конденсация* является синонимом словосочетания гомогенное образование зародышевых капель в пересыщенном паре. Развитие теории нуклеации связано с именами Фолмера, Вебера, Фаркаса, Зельдовича, Френкеля и др. Обобщающее изложение теории нуклеации применительно к

задачам физики облаков представлено в известной монографии Мейсона (1957, русское издание 1961). За минувшие годы эта теория стала уже классической. Современное изложение ее приводится в сравнительно недавно изданной книге Янга (1993). Ниже в сокращенном виде излагается решение задачи о скорости нуклеации в соответствии с упомянутыми работами.

1.5.1. Скорость спонтанной конденсации

Аналитическое решение задачи удалось получить только при сравнительно грубых предположениях. Теория строится на представлении о том, что концентрация зародышей n_g , состоящих из g молекул, описывается распределением Больцмана

$$n_g = n_1 \exp\left(-\frac{\Phi}{kT}\right), \quad (1.5.1)$$

где n_1 – число мономеров, то есть свободных (неассоциированных) молекул ($g=1$), Φ – энергия образования зародышей (см. п. 1.3).

Для удобства дальнейших преобразований перейдем в выражении (1.3.6) от радиуса зародыша к числу содержащихся в нем молекул

$$g = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_v \frac{N_A}{\mu}. \quad (1.5.2)$$

Для зародыша критического размера r^*

$$g^* = \frac{4}{3} \pi r^{*3} \rho_v \frac{N_A}{\mu}. \quad (1.5.3)$$

Тогда, вместо выражения (1.3.6), получим

$$\Phi = 4\pi r^{*2} \sigma_{\text{п-в}} \left(-\frac{2}{3} \frac{r^3}{r^{*3}} + \frac{r^2}{r^{*2}} \right) = 4\pi r^{*2} \sigma_{\text{п-в}} \left(-\frac{2}{3} \frac{g}{g^*} + \left(\frac{g}{g^*} \right)^{\frac{2}{3}} \right) \quad (1.5.4)$$

Предполагается, что распределение (1.5.1) для насыщенного пара является установившимся в том смысле, что число возникающих зародышей, содержащих g молекул, в среднем равно числу разрушающихся зародышей такого же размера. В этом случае выполняется условие

$$\beta_{g-1} \cdot n_{g-1} = \gamma_g \cdot n_g, \quad (1.5.5)$$

где β_{g-1} — число молекул, сталкивающихся (захватываемых) в единицу времени с зародышем $(g-1)$, γ_g — число молекул, испаряющихся с поверхности зародыша g . Таким образом, равенство (1.5.5) является условием динамического равновесия.

Когда пар становится пересыщенным (метастабильным), условие (1.5.5) нарушается. В теории предполагается, что сначала образуются маленькие зародыши, которые затем растут. Считается, что n_1 не меняется со временем, то есть в систему с постоянной скоростью поступает пар. Вследствие этого формируется «поток» зародышей по спектру от малых g к большим

$$J_g = \beta_{g-1} \cdot n'_{g-1} - \gamma_g \cdot n'_g. \quad (1.5.6)$$

Со временем этот поток устанавливается так, что $J_g = J = const$. Комбинируя (1.5.6) и (1.5.5) и переходя при больших g к дифференциальной записи, получают

$$J = \beta_{g-1} \cdot n_{g-1} \left(\frac{n'_{g-1}}{n_{g-1}} - \frac{n'_g}{n_g} \right) = -\beta_g \cdot n_g \frac{d \left(\frac{n'_g}{n_g} \right)}{dg}. \quad (1.5.7)$$

Разделяя переменные, уравнение (1.5.7) записывают в следующем виде

$$d\left(\frac{n'_g}{n_g}\right) = \frac{-J}{\beta_g} \cdot \frac{dg}{n_g}. \quad (1.5.8)$$

Правую часть интегрируют по g от 0 до ∞ , для левой части принимается,

что $\frac{n'_g}{n_g} \rightarrow 1$ при $g \rightarrow 0$ (поскольку n_1 постулируется практически постоянным, весь поступающий пар превращается в зародыши). При $g \rightarrow \infty$

принимают, что отношение $\frac{n'_g}{n_g} \rightarrow 0$. Тогда $\int_1^0 d\left(\frac{n'_g}{n_g}\right) = -1$.

Полагая, что $\beta_g \approx \beta = const$, получают

$$J = \frac{\beta}{\int_0^{\infty} \frac{dg}{n_g}}. \quad (1.5.9)$$

Чтобы взять интеграл, в правой части выражения (1.5.9) вводят величину

$n_{g^*} \equiv n^*$, тогда из (1.5.1)

$$n^* = n_1 \exp\left(-\frac{\Phi^*}{kT}\right). \quad (1.5.10)$$

Теперь

$$n_g = n^* \exp\left(\frac{\Phi^* - \Phi}{kT}\right). \quad (1.5.11)$$

Подынтегральное выражение имеет четкий максимум при $g = g^*$. Очередное приближение состоит в следующем. Вблизи максимума при $g = g^*$

функцию Φ представляют в виде разложения в ряд Тейлора. Удерживая первые три члена разложения и имея в виду, что $\left. \frac{\partial \Phi}{\partial g} \right|_{g=g^*} = 0$, записывают

$$\Phi - \Phi^* = \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g^2} \right|_{g=g^*} \cdot (g - g^*)^2. \quad (1.5.12)$$

Для нахождения $\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g^2} \right|_{g=g^*}$ используют формулу (1.5.4), тогда

$$\left. \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g^2} \right|_{g=g^*} = 4\pi r^{*2} \sigma_{п-в} \left(-\frac{2}{9} \right) \frac{g^{*\frac{4}{3}}}{g^{*\frac{2}{3}}}. \quad (1.5.13)$$

Соответственно,

$$\left. \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial g^2} \right|_{g=g^*} = -\frac{4}{9} \pi r^{*2} \sigma_{п-в} \cdot \frac{1}{g^{*\frac{2}{3}}}. \quad (1.5.14)$$

Подставляя в интеграл (1.5.9) выражения (1.5.11) и (1.5.14), получают

$$J = \frac{\beta n^*}{\int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{4 \pi \sigma_{п-в} r^{*2}}{9 kT} \frac{r^{*2}}{g^{*2}} (g - g^*)^2 \right) dg}. \quad (1.5.15)$$

Интеграл в последнем выражении приводится к стандартной функции Лапласа

$$\frac{\sqrt{\pi}}{G} \cdot \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{z^2}{2} \right) dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{G}}, \quad (1.5.16)$$

где $G = \frac{4}{9} \pi \frac{\sigma_{п-в}}{kT} \cdot \frac{r^{*2}}{g^{*2}}$.

Осредненная величина β определяется соотношением

$$\beta = \frac{1}{4} \kappa A n_1 \bar{v}, \quad (1.5.17)$$

где κ — коэффициент аккомодации (доля молекул, присоединяющихся к зародышу, от общего числа молекул, сталкивающихся с ним), по экспериментальным данным $\kappa \approx 0,04$, A — площадь поверхности зародышевой капли, $A = 4\pi r^{*2}$, \bar{v} — средняя квадратическая скорость теплового движения молекул,

$\bar{v} = \sqrt{\frac{8kN_A T}{\pi \mu}}$, n_1 — концентрация свободных молекул;

$n_1 \approx \frac{e}{kT}$, e — парциальное давление пара.

Подставляя в (1.5.15) выражения (1.5.16), (1.5.17) и (1.5.10), получают скорость образования зародышевых капель в единицу времени в единице объема

$$J_B = \frac{4\kappa}{\rho_B} \sqrt{\frac{\sigma_{п-в}\mu}{2\pi N_A}} \cdot \left(\frac{e}{kT}\right)^2 \exp\left(\frac{-4\pi\sigma_{п-в}r^{*2}}{3kT}\right). \quad (1.5.18)$$

Перепишем эту формулу в виде

$$J_B = C_n \left(\frac{e}{E_0}\right)^2 \exp\left(\frac{-4\pi\sigma_{п-в}r^{*2}}{3kT}\right), \quad (1.5.18a)$$

где $C_n = \frac{4\kappa}{\rho_B} \sqrt{\frac{\sigma_{п-в}\mu}{2\pi N_A}} \cdot \left(\frac{E_0}{kT}\right)^2$, E_0 — давление насыщенного пара при

$T = 273,16\text{K}$. При характерной температуре $T = 273\text{K}$ множитель $C_n = 8 \cdot 10^{28} \approx 10^{29} \text{ 1/(м}^3 \cdot \text{с)} = 10^{23} \text{ 1/(см}^3 \cdot \text{с)}$. Отмечается, что в силу допущений, сделанных при выводе уравнения (1.5.18), недостоверным является

даже порядок величины C_n . Множитель $\left(\frac{e}{E_0}\right)^2$ в диапазоне облачных температур может изменяться на несколько порядков. Например, если при

температуре 0°C давление пара $e = E_0 = 6,1$ гПа, отношение $\left(\frac{e}{E_0}\right)^2 = 1$,

то при температуре -50°C давление насыщенного пара над водой

($e \approx 6 \cdot 10^{-2}$ гПа), отношение $\left(\frac{e}{E_0}\right)^2$ в 10^4 раз меньше. Зависимость C_{Π} от

температуры пренебрежимо мала по сравнению с этими изменениями.

Подставим в выражение для J вместо r_v^* уравнение Кельвина. Тогда

$$J_v = 10^{29} \left(\frac{e}{E_0}\right)^2 \exp\left(\frac{-16\pi\sigma_{\text{п-в}}^3}{3k\rho_v^2 R_{\Pi}^2 T^3 \ln^2 f_v}\right), \quad (1.5.19)$$

где f_v — относительная влажность, $f_v = \frac{e}{E_v(T)}$. (Внимание: относительная

влажность f_v задается в долях от единицы, а не в процентах).

Легко видеть, что экспоненциальный множитель в формуле (1.5.19) в первую очередь зависит от относительной влажности f_v . Он изменяется

от нуля при $f_v = 1$ до единицы при $f_v \rightarrow \infty$. В последнем случае

$J_v \rightarrow C_{\Pi} \cdot \left(\frac{e}{E_0}\right)^2$. Зависимость $\lg J_v$ от относительной влажности f_v при-

ведена на рис. 1.5.1.



Рис. 1.5.1 Скорость образования зародышевых капель воды в пересыщенном паре.

1 – расчет по уравнению (1.5.19), 1а – температура пара $T=273\text{ K}$,

1б – температура пара $T = 253\text{ K}$; 2 – результаты экспериментов.

Можно заметить, что при сравнительно небольших значениях f_B скорость нуклеации J_B изменяется очень быстро. Так, например, при увеличении влажности от 4,5 до 5,5 (кривая 1а) значение J_B возрастает на четыре порядка. При дальнейшем увеличении f_B логарифм скорости нуклеации растет медленнее. Здесь же на рисунке приведены результаты экспериментов, проведенных в камерах расширения различными авторами. Опыты проводились при варьировании начальной температуры от 250 до 295 K. Результаты экспериментов отражают зависимость скорости нуклеации от пересыщения. Видно, что теоретические кривые сильно завышают скорость нуклеации, это, по-видимому, связано с отмеченной выше грубой оценкой предэкспоненциального множителя C_B в уравнении (1.5.18а). С увеличением пересыщения различия между теорией и экспериментом возрастают. Можно предположить, что в экспериментах не выполняется условие постоянства концентрации пара: уже образовавшиеся зародыши быстро растут, уменьшая действительную относительную влажность.

Критическое пересыщение

Как следует из теории, скорость нуклеации $J_v > 0$ при любом значении $f_v > 1$. Однако если скорость J_v очень мала, то образование зародышевых капель в паре реально не может быть обнаружено. Визуально начало конденсации отмечается, если J_v больше некоторого критического значения. Для нахождения его вводят понятие критического пересыщения $f_{v,кр}$. Критическим называют пересыщение, при котором спонтанная конденсация обнаруживается визуально. Зададим в выражении (1.5.19) $J_v = J_{v,кр}$, соответственно приравняем f_v к $f_{v,кр}$ и решим уравнение (1.5.19) относительно $\ln f_{v,кр}$ (пренебрегая зависимостью e от $f_{кр}$)

$$\ln f_{v,кр} = C_{кр} \cdot \left(\frac{\sigma_{п-в}}{T} \right)^{\frac{3}{2}}, \quad (1.5.20)$$

$$\text{где } C_{кр} = \left[\frac{16\pi}{3kR_{п}^2 \rho_v^2 \left[\ln \left(C_{п} \left(\frac{e}{E} \right)^2 \right) - \ln J_{v,кр} \right]} \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \text{При характерных значениях}$$

ях $T = 273 \text{ K}$, $\frac{e}{E_0} = 1$ и $J_{v,кр} = 10^6 \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$ получим

$$C_{кр} \approx 3,3 \cdot 10^5 \left(\frac{\text{К} \cdot \text{м}^2}{\text{Дж}} \right)^{3/2}$$

1.5.2. Гомогенное образование ледяных зародышей в пересыщенном паре (спонтанное осаждение, спонтанная депозиция)

Теоретически возможно гомогенное образование зародышевых ледяных кристаллов в пересыщенном паре. Если предположить, что в паре образуются только ледяные зародыши сферической формы, то вывод уравнения

для скорости нуклеации льда в паре $J_{л|п}$ повторяет вывод формулы (1.5.18).

При этом порядок величины предэкспоненциального множителя при подстановке в него характеристик льда практически не изменяется. Меняется лишь энергия образования зародыша $\Phi_{л|п}^*$ (индекс л|п означает, что ледяная фаза образуется непосредственно из пара).

$$\Phi_{л|п}^* = \frac{4}{3} \pi r_{л|п}^{*2} \cdot \sigma_{п-л}, \quad (1.5.21)$$

где в соответствии с уравнением Кельвина

$$r_{л|п}^* = \frac{2\sigma_{п-л}}{\rho_{л} R_{п} T \ln f_{л}}, \quad f_{л} = \frac{e}{E_{л}(T)}.$$

Окончательно получим

$$J_{л|п} = 10^{29} \left(\frac{e}{E_0} \right)^2 \cdot \exp \left(- \frac{16\pi\sigma_{п-л}^3}{3\rho_{л}^2 k R_{п}^2 T^3 \ln^2 f_{л}} \right), \quad (1.5.22)$$

где $J_{л|п}$ в $1/(M^3 \cdot c)$.

Таким образом, в пересыщенном паре теоретически существуют условия для спонтанного образования капель и зародышевых ледяных кристаллов.

Зародыши какой фазы будут образовываться в реальных условиях? Очевидно той, для которой больше скорость нуклеации. Поскольку предэкспоненциальный множитель в формулах (1.5.19) и (1.5.22) один и тот же, то соотношение между $J_{в}$ и $J_{л|п}$ определяется различием энергий образования зародышей $\Phi_{в}^*$ и $\Phi_{л|п}^*$. Если $\Phi_{в}^*$ меньше $\Phi_{л|п}^*$, то в пересыщенном паре с большей вероятностью должны образовываться зародышевые капельки воды: $J_{в} > J_{л|п}$. При обратном соотношении с большей вероятностью должны образовываться ледяные зародыши. Найдем условия равенства скоростей нуклеации $J_{в}$ и $J_{л|п}$. Из условия $\Phi_{в}^* = \Phi_{л|п}^*$ вытекает равенство

$$r_{\text{в}}^{*2} \sigma_{\text{п-в}} = r_{\text{л|п}}^{*2} \sigma_{\text{п-л}} \quad (1.5.23)$$

Либо после подстановки $r_{\text{в}}^*$ и $r_{\text{л|п}}^*$ в (1.5.23)

$$\frac{1}{\rho_{\text{в}}^2} \cdot \frac{\sigma_{\text{п-в}}^3}{\ln^2 f_{\text{в}}} = \frac{1}{\rho_{\text{л}}^2} \cdot \frac{\sigma_{\text{п-л}}^3}{\ln^2 f_{\text{л}}} \quad (1.5.24)$$

Используем далее связь между $f_{\text{в}}$ и $f_{\text{л}}$

$$f_{\text{л}} = \frac{e}{E_{\text{л}}} = \frac{e}{E_{\text{в}}} \cdot \frac{E_{\text{в}}}{E_{\text{л}}} = f_{\text{в}} \cdot \frac{E_{\text{в}}}{E_{\text{л}}} \quad (1.5.25)$$

Отношение $\frac{E_{\text{в}}}{E_{\text{л}}}$ является только функцией температуры.

В линейном приближении $\frac{E_{\text{в}}}{E_{\text{л}}} \approx 1 - 0,01t$, где t – температура в °С.

Решим уравнение (1.5.24) относительно $\ln f_{\text{в}}$, подставляя в него (1.5.25)

$$\ln f_{\text{в}} \Big|_{J_{\text{в}}=J_{\text{л|л}}} = \frac{\ln \frac{E_{\text{в}}}{E_{\text{л}}}}{\frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} \left(\frac{\sigma_{\text{п-л}}}{\sigma_{\text{п-в}}} \right)^{3/2} - 1} \quad (1.5.26)$$

Величины, входящие в правую часть уравнения (1.5.26), зависят только от температуры. Если влажность в пересыщенном паре $f_{\text{в}} > f_{\text{в}} \Big|_{J_{\text{в}}=J_{\text{л|л}}}$, то $J_{\text{л|л}} < J_{\text{в}}$. Таким образом, при одной и той же температуре могут образовываться и зародышевые капли воды, и ледяные кристаллы, при этом для образования капель требуется бóльшая влажность.

Сравним представленные теорией зависимости с экспериментальными данными. На рис. 1.5.2 нанесены результаты опытов в камерах расширения. В этих опытах отмечалось появление льда или воды при значениях температуры и влажности, рассчитываемых в предположении адиабатического процесса. На этом же рисунке приведена зависимость критической влажности

$f_{в,кр}$ от температуры (кривая 1), рассчитанная по формуле (1.5.20). Видно, что эта кривая хорошо отделяет область, где происходит спонтанное ядрообразование ($f_v > f_{в,кр}$), от области, где влажность недостаточна для гомогенного процесса.

Зависимость $f_v \Big|_{J_в=J_{лп}}$ от температуры представлена двумя кривыми (2а и 2б). Первая из них (2а) построена при значениях поверхностного натяжения на границе пар-лед $\sigma_{п-л}$, аппроксимируемых формулой $\sigma_{п-л} = (80,5 - 0,085t) \cdot 10^{-3}$, $\sigma_{п-л}$ в Дж/м², t в °С. Кривая 2а хорошо разделяет случаи образования водяных и ледяных зародышей (выше кривой 1). Это обстоятельство позволило Качурину Л. Г. (1990) сделать заключение о преимущественном образовании ледяных зародышей непосредственно из пара¹.

В диапазоне температур от -32 до -41 °С ледяные зародыши образуются при $f_v \Big|_{J_в=J_{лп}} > f_v > f_{в,кр}$, тогда как водяные зародыши при $f_v > f_v \Big|_{J_в=J_{лп}}$.

Однако по современным представлениям значения $\sigma_{п-л}$ существенно больше значений, использованных авторами ($\sigma_{п-л} \approx (104 + 0,12t) \cdot 10^{-3}$). Поскольку энергия образования зародышей пропорциональна третьей степени поверхностного натяжения, различия между значениями $\sigma_{п-л}$ оказывают сильное влияние на зависимость $f_v \Big|_{J_в=J_{лп}}$ от t . На рис. 1.5.2 эту зависимость отражает кривая 2б. Экстраполяция ее в область низких температур показывает, что кривые 1 и 2б пересекаются при температуре (-90...-100) °С. Это означает, что в диапазоне реальных атмосферных температур и достижимых пересыщений непосредственный гомогенный переход пара в лед практически невозможен, что находится в соответствии с известным прави-

¹ Впервые это было отмечено Мушченко П. М. в 1965 г.

лом Оствальда. Как же тогда объяснить появление ледяной фазы в экспериментах, представленных на рис. 1.5.2?

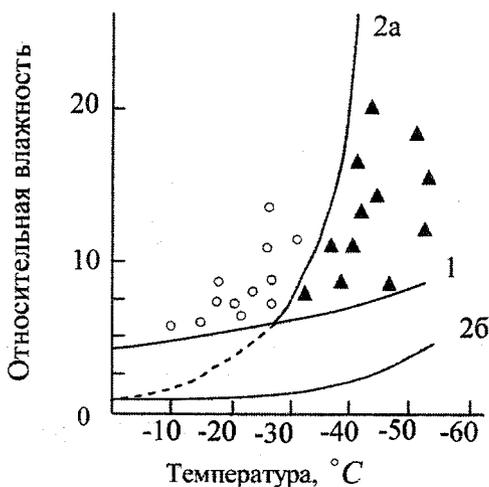


Рис. 1.5.2. Зависимость фазового состояния конденсата от пересыщения и температуры пара. Эксперименты: \circ – наблюдалось образование капель, \blacktriangle – образование ледяных кристаллов. Теория: кривая 1 – критическое пересыщение для спонтанной конденсации; кривая 2 – расчеты по уравнению (1.5.20) при различных аппроксимациях $\sigma_{\text{пл}}$ (см. в тексте).

1.5.3. Спонтанное замерзание

Спонтанным замерзанием (кристаллизацией) называют процесс гомогенного образования ледяных зародышей в переохлажденной воде. Подобно тому, как в пересыщенном паре в результате случайного столкновения молекул образуются и распадаются зародышевые капли воды, в переохлажденной воде формируются и разрушаются льдоподобные зародыши. Если их размеры превышают критический $r_{\text{лв}}^*$, то эти зародыши становятся жизнеспособными. Радиус ледяного жизнеспособного зародыша, как было показано в п. 1.3, равен

$$r_{л\text{в}}^* = \frac{2\sigma_{\text{в-л}}}{\rho_{\text{л}} L_{\text{в-л}} \ln \frac{T_0}{T}} \quad (1.5.27)$$

Классическая теория скорости нуклеации льда в переохлажденной воде в целом аналогична рассмотренной выше в п. 1.5.1 теории скорости спонтанной конденсации. Принципиальные отличия заключаются в следующем. Ледяной кристалл в переохлажденной воде находится в «плотном» окружении молекул, а зародышевая капля окружена паром, имеющим существенно меньшую плотность. Кроме того, переход молекул из водяной фазы в ледяную требует разрыва водородных связей между молекулами в воде и формирования упорядоченной структуры льда. Эти отличия в теории преодолеваются изменением выражения для числа молекул, присоединяющихся к зародышу в единицу времени, $\beta_{\text{л}}$.

$$\beta_{\text{л}} = 4\pi r_{\text{л\text{в}}}^{*2} \cdot n_{\text{к}} \frac{kT}{h} \exp\left(-\frac{\Delta_{\text{акт}}}{kT}\right), \quad (1.5.28)$$

где h – постоянная Планка, $n_{\text{к}}$ – число молекул воды, находящихся в контакте с единицей поверхности ледяного зародыша, $\Delta_{\text{акт}}$ – так называемая энергия активации.

Энергия активации определяется косвенными методами по измерениям скорости самодиффузии молекул воды. Практически эта величина отражает увеличение вязкости воды с понижением температуры. Существуют полуэмпирические формулы зависимости $\Delta_{\text{акт}}$ от температуры. Одна из них имеет вид

$$\Delta_{\text{акт}} = 3,8 \cdot 10^{-20} \exp\left(-1,330 \cdot 10^{-2} t + 2,74 \cdot 10^{-4} t^2 + 1,085 \cdot 10^{-6} t^3\right), \quad (1.5.29)$$

где $\Delta_{\text{акт}}$ – в джоулях, а t – в °С.

Выражение (1.5.29) аппроксимирует результаты вычисления $\Delta_{\text{акт}}$ в интервале температур от 0 до –30 °С. Экстраполяция значений $\Delta_{\text{акт}}$ за пределы

этого интервала, как и при использовании любой полиномиальной функции, может привести к значительным ошибкам. Более грубой, но более пригодной для экстраполяции, является формула

$$\Delta_{\text{акт}} = (3,6 - 0,073t) \cdot 10^{-20}. \quad (1.5.30)$$

Здесь также $\Delta_{\text{акт}}$ в джоулях, а t – в $^{\circ}\text{C}$.

Общее выражение для скорости нуклеации льда в переохлажденной воде имеет вид

$$J_{\text{л|в}} = 2n_{\text{к}} \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_{\text{л}}} \left(\frac{kT}{h} \right) \left(\frac{\sigma_{\text{в-л}}}{kT} \right)^{1/2} \exp \left(- \frac{\Phi_{\text{л|в}}^*}{kT} \right) \exp \left(- \frac{\Delta_{\text{акт}}}{kT} \right). \quad (1.5.31)$$

Предэкспоненциальный множитель определен со сравнительно невысокой точностью, его можно считать постоянным, не зависящим от температуры и равным $10^{40} \text{ м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$. Первая экспонента в этом уравнении отражает изменение энергии образования зародышей с увеличением переохлаждения. Чем ниже температура, тем, в соответствии с выражением (1.5.27), меньше размер жизнеспособного зародыша $r_{\text{л|в}}^*$. Следовательно, тем меньше отношение $\frac{\Phi_{\text{л|в}}^*}{kT}$ и тем больше $J_{\text{л|в}}$. Значение $\Delta_{\text{акт}}$ с понижением температуры увеличивается, что приводит к уменьшению скорости нуклеации. Таким образом, зависимость $J_{\text{л|в}}$ от температуры является экстремальной. Для нахождения температуры, при которой значение $J_{\text{л|в}}$ максимально, требуется знание $\Delta_{\text{акт}}(T)$ в широком интервале температур.

На рис. 1.5.3 приведены результаты расчета $J_{\text{л|в}}$ по формуле (1.5.31), где $\Delta_{\text{акт}}$ задается выражением (1.5.29). Анализируя результаты расчетов, легко убедиться, что при переохлаждениях от 0 до -30°C гомогенное обра-

зование льда в переохлажденной воде практически невозможно. Далее с понижением температуры происходит быстрый рост $\lg J_{\text{лв}}$, что соответствует почти скачкообразному росту скорости нуклеации. Любопытно, что этому скачкообразному росту $J_{\text{лв}}$ соответствует по температуре переход от образования капель воды к ледяным зародышам в опытах, представленных на рис. 1.5.2.

Это обстоятельство является подтверждением того, что образование ледяной фазы происходит не непосредственно из пара, а путем последовательных превращений пар-вода-лед.

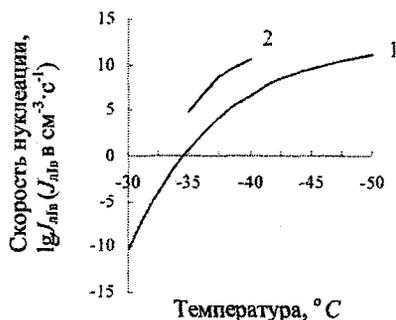


Рис. 1.5.3. Скорость образования жизнеспособных ледяных зародышей в переохлажденной воде.

1 — расчет по уравнению (1.5.31); 2 — оценка по результатам экспериментов.

На рис. 1.5.3 приведена также зависимость $J_{\text{лв}}$, полученная на основании результатов экспериментов по гомогенной кристаллизации воды. В этих опытах популяции капель примерно одинаковых диаметров d охлаждались с примерно постоянной скоростью $\dot{T} = \frac{dT}{d\tau}$. Отмечалась температура, при которой $\frac{1}{2}$ часть капель замерзала. Сводный график результатов таких экспериментов, заимствованный из монографии Прупахера и Клетта (1978), при-

веден в учебном пособии Бекряева (1991). Оценочные значения $J_{\text{лив}}$ находились по формуле

$$\bar{J}_{\text{лив}} = \frac{4,2}{\pi} \frac{\dot{T}}{T_{j+1} - T_j} \left(\frac{1}{d_{j+1}^3} - \frac{1}{d_j^3} \right), \quad (1.5.32)$$

где T_j и d_j – границы интервалов при численном дифференцировании по температуре и диаметру капель. Вывод этой формулы приводится ниже в разд. 1.11.

На рисунке кривая 2, отражающая эмпирическую зависимость $\bar{J}_{\text{лив}}(T)$, лежит существенно выше теоретической кривой 1. Однако следует иметь в виду, что в экспериментах не удается полностью исключить ни возможность загрязнения воды инородными частицами, ни влияние подложек (поддерживающих жидкостей), подвесов, то есть проявления гетерогенного механизма нуклеации.

1.6. Квазистатистическая модель образования жизнеспособных зародышей. Гомогенная нуклеация

Классическое решение задачи о скорости нуклеации, приведенное в предыдущем параграфе, получено при весьма грубых предположениях. В результате этого формулы для расчета J_v и $J_{\text{лив}}$ отражают лишь тенденцию изменения этих величин в зависимости от относительной влажности или температуры. При оценках численных значений J_v и $J_{\text{лив}}$ даже порядки величин становятся недостоверными. Фактически классическая теория позволяет описать лишь начальную стадию спонтанной конденсации, для которой собственно она и разрабатывалась. В частности, полезным оказалось введение понятия критического пересыщения. В последующие годы классическая теория совершенствовалась. Разрабатывались также и другие модели нуклеации, например, кластерная, в которой форма и размер зародышей задавались в виде кластеров; предпринимались попытки построения стохастических моделей ядрообразования с использованием техники Монте-Карло. Однако эти модели не получили применения в силу их громоздкости.

Ниже предлагается новый подход к решению задачи. Он базируется на представлении о том, что в материнской фазе всегда существуют зародыши новой фазы как результат непрерывно действующих механизмов их образования и разрушения. Предполагается, что спектр этих зародышей определяется не столько степенью метастабильности сколько концентрацией и энергией молекул материнской фазы. При этом сравнительно небольшие изменения термодинамических характеристик материнской фазы не влияют существенно на распределение зародышей по размерам – распределение остается квазистатистическим. Если материнская фаза переходит в метастабильное состояние, то размеры крупных зародышей оказываются больше критического. Эти зародыши становятся жизнеспособными. Задавая вид функции их распределения по размерам, можно рассчитать скорость нуклеации. В модели не учитывается как уменьшение числа молекул материнской фазы, связанное с ростом жизнеспособных зародышей, так и восстановление их спектра. Первое обстоятельство завышает, а второе занижает рассчитанную скорость нуклеации. Задача заключается в том, чтобы рассчитать число таких зародышей.

Спонтанная конденсация

Зададим плотность распределения зародышей по размерам $\eta(r)$ в виде монотонной функции

$$\eta(r) = B_v \exp\left(-\frac{\Phi^+}{kT}\right), \quad (1.6.1)$$

где B_v – параметр распределения, Φ^+ – энергия образования зародышей.

Логично предположить, что $\Phi^+ \leq \Phi^*$. В п. 1.3 получено выражение для Φ^* в виде

$$\Phi^* = \frac{4}{3} \pi r^2 \sigma_{п-в}. \quad (1.6.2)$$

Однако следует иметь в виду, что физически r не может быть меньше радиуса молекулы воды r° . Естественно принять, что $\Phi^* = 0$ при $r = r^\circ$.

Чтобы учесть это обстоятельство, зададим Φ^+ в виде

$$\Phi^+ = \frac{4}{3} \pi \gamma \sigma_{\text{п-в}} \left(r^2 - r^{\circ 2} \right), \quad (1.6.3)$$

где γ – множитель, $0 < \gamma \leq 1$. Значение γ априори неизвестно. Далее этот множитель будет служить параметром подгонки теории к эксперименту. Обозначая

$$b_{\text{в}} = \frac{4}{3} \frac{\pi \gamma \sigma_{\text{п-в}}}{kT}, \quad (1.6.4)$$

перепишем выражение (1.6.1) в виде

$$\eta(r) = B_{\text{в}} \exp \left(-b_{\text{в}} \left(r^2 - r^{\circ 2} \right) \right). \quad (1.6.5)$$

Условие нормировки для функции распределения

$$\int_{r^\circ}^{\infty} B_{\text{в}} \exp \left(-b_{\text{в}} \left(r^2 - r^{\circ 2} \right) \right) dr = 1. \quad (1.6.6)$$

Найдем отсюда

$$B_{\text{в}} = \frac{1}{\int_{r^\circ}^{\infty} \exp \left(-b_{\text{в}} \left(r^2 - r^{\circ 2} \right) \right) dr} = \frac{\exp \left(-b_{\text{в}} r^{\circ 2} \right)}{\int_{r^\circ}^{\infty} \exp \left(-b_{\text{в}} r^2 \right) dr}. \quad (1.6.7)$$

Переходя в знаменателе выражения (1.6.7) к переменной $z = \sqrt{2b_{\text{в}}} r$, сведем интеграл к функции Лапласа

$$\int_r^{\infty} \exp(-b_b r^2) dr = \sqrt{\frac{\pi}{b_b}} \int_{\frac{z}{\sqrt{2\pi}}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \sqrt{\frac{\pi}{b_b}} \times$$

$$\times \left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz - \int_0^{\frac{z}{\sqrt{2\pi}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \right) = \sqrt{\frac{\pi}{b_b}} \left(0,5 - F\left(\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\right) \right), \quad (1.6.8)$$

где функция Лапласа

$$F\left(\frac{z}{\sqrt{2\pi}}\right) = \int_0^{\frac{z}{\sqrt{2\pi}}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz. \quad (1.6.9)$$

Возвращаясь к переменной r , найдем

$$B_b = \sqrt{\frac{b_b}{\pi}} \frac{\exp\left(-b_b \frac{r^2}{2}\right)}{0,5 - F\left(\sqrt{2b_b} \frac{r}{\sqrt{2\pi}}\right)}. \quad (1.6.10)$$

Определим $N_{0,b}$ – общую концентрацию зародышевых капель в пересыщенном паре. Для этого приравняем массу всех зародышей от $r = r$ до $r = \infty$ к плотности пара ρ_n

$$N_{0,b} \int_r^{\infty} \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_b B_b \exp\left(-b_b \left(r^2 - \frac{r^2}{2}\right)\right) dr = \rho_n. \quad (1.6.11)$$

Интеграл в последнем выражении решается в квадратурах

$$\int_r^{\infty} r^3 \exp(-b_b r^2) dr = \frac{1}{2b_b^2} \int_{b_b r^2}^{\infty} b_b r^2 \exp(-b_b r^2) d(b_b r^2) = \frac{1}{2b_b^2} \left(b_b r^2 + 1 \right) \exp\left(-b_b r^2\right). \quad (1.6.12)$$

Таким образом

$$\begin{aligned}
 N_{0,B} &= \frac{3 \rho_{\text{п}}}{4\pi \rho_{\text{в}}} \frac{1}{B_{\text{в}} \exp\left(b_{\text{в}} r^{\circ 2}\right) \frac{1}{2b_{\text{в}}^2} \left(b_{\text{в}} r^{\circ 2} + 1\right) \exp\left(-b_{\text{в}} r^{\circ 2}\right)} = \frac{3 \rho_{\text{п}}}{2\pi \rho_{\text{в}}} \frac{b_{\text{в}}^2}{B_{\text{в}} \left(b_{\text{в}} r^{\circ 2} + 1\right)} = \\
 &= \frac{3 \rho_{\text{п}}}{2\sqrt{\pi}} \frac{\rho_{\text{п}}}{\rho_{\text{в}}} \frac{b_{\text{в}}^{3/2}}{\left(b_{\text{в}} r^{\circ 2} + 1\right)} \frac{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{\text{в}} r^{\circ}}\right)\right)}{\exp\left(-b_{\text{в}} r^{\circ 2}\right)}.
 \end{aligned} \tag{1.6.13}$$

Предположим, что при исходной температуре T_1 водяной пар насыщен $e = E_{\text{в},T_1}$. Размер гетерофазного зародыша при этом $r_{\text{в}}^* = \infty$, то есть гомогенный процесс невозможен. Будем понижать температуру пара. При этом относительная влажность увеличивается, а значение $r_{\text{в}}^*$, в соответствии с уравнением Кельвина, уменьшается. При произвольной температуре T

$$r_{\text{в},T}^* = \frac{2\sigma_{\text{п-в}}}{\rho_{\text{в}} R_{\text{п}} T \ln\left(\frac{E_{\text{в},T_1}}{E_{\text{в},T}}\right)}, \tag{1.6.14}$$

где отношение $\frac{E_{\text{в},T_1}}{E_{\text{в},T}}$ — текущая относительная влажность.

Чтобы определить число зародышей, становящихся жизнеспособными при температуре T , достаточно умножить $N_{0,B}$ на долю тех из них, размеры которых превышают $r_{\text{в},T}^*$

$$\begin{aligned}
 N_{\text{в},T} &= N_{0,B} \int_{r_{\text{в},T}^*}^{\infty} \eta(r) dr = N_{0,B} \int_{r_{\text{в},T}^*}^{\infty} B_{\text{в}} \exp\left(-b_{\text{в}} \left(r^{\circ 2} - r_{\text{в},T}^{\circ 2}\right)\right) dr = N_{0,B} \frac{0,5 - F\left(\sqrt{2b_{\text{в}} r_{\text{в},T}^{\circ}}\right)}{0,5 - F\left(\sqrt{2b_{\text{в}} r^{\circ}}\right)}.
 \end{aligned} \tag{1.6.15}$$

Принимая $b_{\text{в}}$, $B_{\text{в}}$ и, следовательно, $N_{0,B}$ не зависящими от температуры, выражение (1.6.15) можно использовать для расчета числа жизнеспособных водяных зародышей, образующихся в единице объема пара при понижении температуры от T_1 до T .

Примечание: Если изменение температуры в пересыщенном паре происходит в результате понижения давления (как в камере расширения), то следует учесть изменение парциального давления пара e как при расчете плотности ρ_n , так и при расчете относительной влажности f_n .

Например, для адиабатического процесса

$$\frac{e}{e_1} = \frac{p}{p_1}, \quad T = T_1 \left(\frac{p}{p_1} \right)^{\frac{c_p - c_v}{c_p}},$$

где $e_1 = E_{T_1}$, p_1 — соответственно давление пара и воздуха при исходной температуре T_1 .

Функция Лапласа при больших значениях аргумента в таблицах, как правило, не приводится. При необходимости ее можно найти численным интегрированием. Однако для больших z появляются трудности вычислительного характера. Чтобы избежать их, выражение $(0,5 - F(z))$ удобно представить в виде разложения в ряд

$$(0,5 - F(z)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z} \left(1 - \frac{1}{z^2} + \frac{1 \cdot 3}{z^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{z^6} + \dots \right).$$

Уже при $z > 3$ с погрешностью, не превышающей нескольких процентов, можно использовать упрощенную формулу

$$(0,5 - F(z)) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{z^2}{2}}}{z}.$$

При $z < 3$ рекомендуется пользоваться таблицей функции Лапласа.

Перейдем от величины $N_{в,Т}$ к скорости нуклеации J_v .

$$J_v = \frac{dN_{в,Т}}{dt} = \frac{dN_{в,Т}}{dT} \frac{dT}{dt} = \frac{dN_{в,Т}}{dT} \cdot \dot{T}, \quad (1.6.16)$$

где \dot{T} — скорость охлаждения.

Величину J_B можно вычислить непосредственно по формуле (1.6.16), заменяя в ней производную $\frac{dN_{B,T}}{dT}$ конечными разностями $\frac{\Delta N_{B,T}}{\Delta T}$. Можно также получить и аналитическое решение для J_B .

С этой целью продифференцируем формулу (1.6.15) по температуре.

$$\begin{aligned} \frac{dN_{B,T}}{dT} &= \frac{N_{0,B}}{0,5 \cdot F \left(\sqrt{2b_B} r \right)} \cdot \left(- \frac{d}{dT} F \left(\sqrt{2b_B} r_{B,T}^* \right) \right) = \\ &= \frac{-N_{0,B}}{0,5 \cdot F \left(\sqrt{2b_B} r \right)} \frac{d}{dT} \int_{\sqrt{2b_B} r_{B,T}^*}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left(- \frac{z^2}{2} \right) dz = \\ &= \frac{N_{0,B}}{0,5 \cdot F \left(\sqrt{2b_B} r \right)} \cdot \sqrt{\frac{b_B}{\pi}} \cdot \frac{dr_{B,T}^*}{dT} \cdot \exp \left(- b_B r_{B,T}^{*2} \right). \end{aligned} \quad (1.6.17)$$

При выводе последнего соотношения использована формула Лейбница (дифференцирование интеграла по параметру).

Для того чтобы найти $\frac{dr_{B,T}^*}{dT}$, преобразуем формулу (1.6.14). Выразим $E_{B,T}$ через E_{B,T_1} , используя уравнение Клаузиуса-Клапейрона, $E_{B,T} =$

$$E_{B,T_1} \exp \left(\frac{L_{п-в}}{R_{п}} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T} \right) \right). \text{ Тогда}$$

$$r_{B,T}^* = \frac{2\sigma_{п-в}}{\rho_B R_{п} T \ln \left(\exp \left(\frac{L_{п-в}}{R_{п}} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T} \right) \right) \right)} = \frac{2\sigma_{п-в}}{\rho_B L_{п-в}} \cdot \frac{T_1}{(T_1 - T)} = l_B \frac{T_1}{(T_1 - T)}, \quad (1.6.18)$$

$$\text{где } l_B = \frac{2\sigma_{п-в}}{\rho_B L_{п-в}}.$$

Пренебрегая зависимостью от температуры величин $\sigma_{п-в}$, ρ_B и $L_{п-в}$ получим

$$\frac{dr_{в,Г}^*}{dT} = \frac{l_B T_1}{(T_1 - T)^2} \quad (1.6.19)$$

Таким образом.

$$J_B = \frac{N_{0,в} \dot{T}}{0,5 - F \left(\sqrt{2b_B} r \right)} \cdot \sqrt{\frac{b_B}{\pi}} \cdot \frac{l_B T_1}{(T_1 - T)^2} \exp \left(-b_B l_B^2 \left(\frac{T_1}{T_1 - T} \right)^2 \right) \quad (1.6.20)$$

Следует заметить, что величина J_B , вычисляемая по формуле (1.6.20), не вполне соответствует аналогичной величине, полученной в классической теории. Разумеется, размерности этих величин одинаковы. Однако в классической теории рассчитывается скорость нуклеации в предположении, что параметры системы (температура и давление пара) остаются постоянными, в то время как в предлагаемой модели скорость нуклеации определяется, прежде всего, изменением температуры пара.

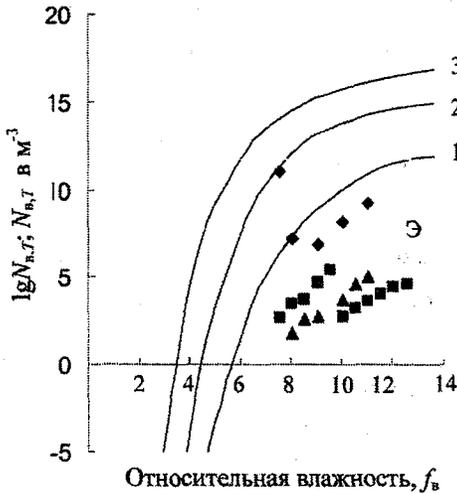


Рис. 1.6.1. К выбору значения множителя γ .
 Результаты расчетов $N_{в,Г}$ при значениях γ : 1 - 1; 2 - 0,75; 3 - 0,5;
 Э - экспериментальные данные.

Единственной, пока еще не определенной величиной в формулах (1.6.15) и (1.6.20), остается множитель γ , скрытый в параметре b_v (см. формулу (1.6.4)). Выберем множитель γ . С этой целью рассчитаем изменение числа водяных зародышей при адиабатическом понижении температуры пара. Результаты расчетов при начальной температуре $T_1 = 293\text{K}$ и разных γ представлены на рис. 1.6.1. Здесь в качестве аргумента выбрана относительная влажность f_v , определяемая в свою очередь температурой. Для сравнения на этот же график с рис. 1.5.1 перенесены экспериментальные данные, выполненные различными авторами при разной начальной температуре T_1 .

Кривая 1 охватывает результаты экспериментов сверху, Если начальную температуру задать близкой к минимальной температуре, при которой проводились эксперименты ($T_1 = 293\text{K}$), то теоретическая кривая при том же значении $\gamma = 1$ пройдет вблизи нижней границы области экспериментальных точек. Таким образом, для спонтанной конденсации значение подгоночного множителя γ можно задать равным единице.

Спонтанное образование ледяных зародышей в пересыщенном паре

Рассмотрим возможность непосредственного образования ледяных зародышей в пересыщенном паре. Ранее в рамках классической теории было показано, что вероятность фазового превращения пар-лед мала по сравнению с вероятностью превращения пар-вода. Выполним аналогичные оценки на основе предложенного здесь решения. Будем считать, что в пересыщенном паре формируется спектр ледяных зародышей, задаваемый выражением вида (1.6.1) Тогда формулы, полученные выше для спонтанной конденсации, легко трансформируются для процесса гомогенного образования ледяных зародышей. С этой целью в формулах для расчета $b_{л|п}$, $B_{л|п}$, $N_{0,л|п}$, $r_{л|п}^*$ достаточно заменить $\sigma_{п-в}$ на $\sigma_{п-л}$, ρ_v на ρ_l , $L_{п-в}$ на $L_{п-л}$ и $E_{в,Т}$ на $E_{л,Т}$. Для

сохранения одинаковых условий со спонтанной конденсацией будем считать, что при исходной температуре $T_1 = 273K$ давление пара $e = E_{в, T_1}$.

Число ледяных зародышей, образующихся при понижении температуры от T_1 до T определяется формулой, аналогичной (1.6.15).

$$N_{лп, T} = N_{0, лп} \frac{0,5 - F\left(\sqrt{2b_{лп}} r_{лп, T}^*\right)}{0,5 - F\left(\sqrt{2b_{лп}} r\right)}, \quad (1.6.21)$$

где

$$N_{0, лп} = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\rho_{лп}}{\rho_{л}} \cdot \frac{b_{лп}^{3/2}}{\left(b_{лп} r + 1\right)^2} \cdot \frac{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{лп}} r\right)\right)}{\exp\left(-b_{лп} r\right)}, \quad (1.6.22)$$

$$b_{лп} = \frac{4 \pi \gamma \sigma_{лп-л}}{3 kT}. \quad (1.6.23)$$

Чтобы оценить возможность непосредственного образования ледяных зародышей в пересыщенном паре, достаточно найти отношение $N_{в, T} / N_{лп, T}$. Если это отношение существенно больше единицы, то в пересыщенном паре в соответствии с правилом Оствальда будут образовываться водяные зародыши.

$$\begin{aligned} \frac{N_{в, T}}{N_{лп, T}} &= \frac{N_{0, в}}{N_{0, л}} \cdot \frac{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{в}} r_{в, T}^*\right)\right)}{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{лп}} r_{лп, T}^*\right)\right)} \cdot \frac{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{лп}} r\right)\right)}{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{в}} r\right)\right)} = \\ &= \frac{\rho_{л}}{\rho_{в}} \cdot \left(\frac{b_{в}}{b_{лп}}\right)^{3/2} \cdot \frac{\left(b_{лп} r + 1\right)^2}{\left(b_{в} r + 1\right)^2} \cdot \exp\left[r\left(b_{в} - b_{лп}\right)\right] \cdot \frac{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{в}} r_{в, T}^*\right)\right)}{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{лп}} r_{лп, T}^*\right)\right)}. \end{aligned} \quad (1.6.24)$$

Сравнение эффективностей спонтанного образования капель воды и ледяных зародышей при одинаковых условиях, то есть при понижении температуры от $T_1 = 273\text{K}$ до температуры T , представлено на рис. 1.6.2. При расчетах параметров b_v и $b_{лп}$ множитель γ задавался одинаковым, $\gamma = 0,5$.

Видно, что отношение $\frac{N_{в,T}}{N_{лп,T}}$ быстро уменьшается с понижением температуры, оставаясь, однако, в диапазоне представленных температур много больше единицы. (При $T = 203\text{K}$ логарифм отношения составляет 1,08, то есть само отношение $\frac{N_{в,T}}{N_{лп,T}} = 12$).

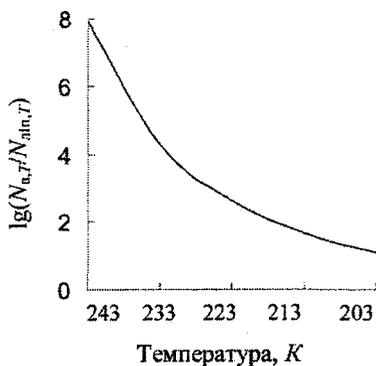


Рис. 1.6.2. Отношение числа спонтанно образующихся капель воды $N_{в,T}$ к числу спонтанно образующихся ледяных зародышей $N_{лп,T}$ в пересыщенном паре как функция температуры охлаждения T . (Исходная температура $T_1 = 273\text{K}$).

Это свидетельствует о преимущественном образовании водяных зародышей в пересыщенном паре. Таким образом, подтверждаются выводы классической теории.

Формулу для скорости нуклеации льда в пересыщенном паре можно получить аналогично тому, как выведена формула (1.6.20). Выпишем соотношения, необходимые для вычисления $\frac{dr_{лп,Т}^*}{dT}$.

$$r_{лп,Т}^* = \frac{2\sigma_{п-л}}{\rho_{л} R_{п} T \ln f_{л,Т}}$$

$$\ln f_{л,Т} = \ln \frac{E_{в,Т_1}}{E_{л,Т}} = \ln \frac{E_{в,Т_1}}{E_{л,Т_1} \exp\left(\frac{L_{п-л}}{R_{п}} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T}\right)\right)}$$

Если для зависимости отношения $\frac{E_{в,Т_1}}{E_{л,Т_1}}$ от температуры воспользоваться

линейным приближением $\frac{E_{в,Т_1}}{E_{л,Т_1}} = 1 + 0,01(T_0 - T_1)$, где $T_0 = 273,16 K$,

то

$$\ln f_{л,Т} = 0,01(T_0 - T_1) + \frac{L_{п-л}}{R_{п}} \cdot \frac{(T_1 - T)}{T_1 T}$$

Пренебрегая зависимостью от температуры величин $\sigma_{п-л}$, $\rho_{л}$, $L_{п-л}$, после несложных преобразований получим

$$\frac{dr_{лп,Т}^*}{dT} = \frac{r_{лп,Т}^*}{T} \left(\frac{\rho_{л} L_{п-л} r_{лп,Т}^*}{2\sigma_{п-л}} - 1 \right) \quad (1.6.25)$$

Теперь формулу для $J_{лп}$ можно записать в виде

$$J_{лп} = \frac{N_{0,лп} \dot{T}}{0,5 - F\left(\sqrt{2b_{лп}} r\right)} \cdot \sqrt{\frac{b_{лп}}{\pi}} \cdot \frac{r_{лп,Т}^*}{T} \left(\frac{\rho_{л} L_{п-л} r_{лп,Т}^*}{2\sigma_{п-л}} - 1 \right) \exp\left(-b_{лп} r_{лп,Т}^{*2}\right)$$

*Спонтанное образование ледяных зародышей
в переохлажденной воде*

Распространим подход, используемый при оценке скорости образования водяных капель в пересыщенном паре, на процесс образования ледяных зародышей в переохлажденной воде. Будем считать, что в переохлажденной воде образуется квазистатическое распределение ледяных зародышей по размерам. В качестве исходной температуры для этого процесса удобно принять температуру фазового равновесия вода-лед, так что $T_1 = T_0$. Распределение зародышей по размерам, как и ранее, зададим в виде

$$\eta(r_l) = B_{л|в} \exp\left(-b_{л|в} \left(r^2 - r^{*2}\right)\right), \quad (1.6.26)$$

где $b_{л|в}$ и $B_{л|в}$ — параметры распределения.

При этом

$$b_{л|в} = \frac{4\pi\gamma_{л|в}\sigma_{л|в}}{3kT}, \quad (1.6.27)$$

$$B_{л|в} = \sqrt{\frac{b_{л|в}}{\pi}} \cdot \frac{\exp\left(-b_{л|в} r^{*2}\right)}{0,5 - F\left(\sqrt{2b_{л|в}} \cdot r\right)}. \quad (1.6.28)$$

Тогда, приравнивая массу всех зародышей в единице объема к плотности воды, получим общее число ледяных зародышей

$$N_{0,л|в} = \frac{3}{2\pi} \cdot \frac{\rho_{в}}{\rho_{л}} \cdot \frac{b_{л|в}^2}{B_{л|в} \left(b_{л|в} r^{*2} + 1\right)}. \quad (1.6.29)$$

Число ледяных частиц, превышающих критический размер $r_{л|в}^*$, при понижении температуры от T_0 до T составляет

$$N_{л|в, T} = N_{0, л|в} \cdot \frac{0,5 - F\left(\sqrt{2b_{л|в}} \cdot r_{л|в, T}^*\right)}{0,5 - F\left(\sqrt{2b_{л|в}} \cdot r\right)}, \quad (1.6.30)$$

где

$$r_{л|в, T}^* = \frac{2\sigma_{в-л}}{\rho_{л} L_{в-л} \ln \frac{T_0}{T}}. \quad (1.6.31)$$

Однако не каждый зародыш с радиусом $r_{л|в} > r_{л|в}^*$ становится жизнеспособным. Это связано с тем, что при переходе молекул из воды в лед разрушаются водородные связи в воде и формируются связи, соответствующие кристаллической решетке льда. Энергетический барьер, возникающий при таком переходе, в классической теории выражается полуэмпирическими соотношениями, учитывающими энергию активации $\Delta_{акт}$. Например,

$$\Delta_{акт} = [3,6 - 0,073(T - T_0)] \cdot 10^{-20}, \quad (1.6.32)$$

где $\Delta_{акт}$ — в джоулях.

Найдем сначала условную скорость нуклеации $J_{л|в}^{(y)}$ без учета энергии активации

$$J_{л|в}^{(y)} = \frac{dN_{л|в, T}}{dT} \cdot \dot{T}. \quad (1.6.33)$$

Перепишем формулу (1.6.31) в виде

$$r_{л|в, T}^* \approx \frac{l_{л|в} \cdot T_0}{T_0 - T}, \quad (1.6.34)$$

где $l_{л|в} = \frac{2\sigma_{в-л}}{\rho_{л} L_{в-л}}$.

Соответственно

$$\frac{dr_{л|в, T}^*}{dT} = \frac{l_{л|в} \cdot T_0}{(T_0 - T)^2}. \quad (1.6.35)$$

Тогда

$$\frac{dN_{л\dot{в},T}}{dT} = \frac{N_{0,л\dot{в}}}{0,5-F\left(\sqrt{2b_{л\dot{в}} \cdot r}\right)} \cdot \sqrt{\frac{b_{л\dot{в}}}{\pi}} \cdot \frac{I_{л\dot{в}} T_0}{(T_0 - T)^2} \cdot \exp\left(-b_{л\dot{в}} I_{л\dot{в}}^2 \left(\frac{T}{T_0 - T}\right)^2\right) \quad (1.6.36)$$

Чтобы получить действительную скорость нуклеации следует величину $J_{л\dot{в}}^{(y)}$ умножить на коэффициент, отражающий вероятность перехода молекул из воды в лед. Обычно его задают в виде $\exp\left(-\frac{\Delta_{акт.}}{kT}\right)$. Значение этого коэффициента уже при температуре T_0 составляет примерно 10^4 , если $\Delta_{акт.}$ задавать формулой (1.6.32). Однако распределение зародышей по размерам (1.6.26) построено в предположении формирования их при температуре T_0 . При этом энергетический баланс корректируется множителем $\gamma_{л\dot{в}}$. Поэтому представляется логичным, оценивая скорость нуклеации, учитывать только изменение энергии активации, связанное с понижением температуры ниже T_0 . Таким образом, приращение энергии активации составляет

$$\delta_{акт.} = \Delta_{акт.} - \Delta_{акт.,T_0} = -0,073 \cdot 10^{-20} (T - T_0). \quad (1.6.37)$$

Тогда действительная скорость нуклеации

$$J_{л\dot{в}}(T) = J_{л\dot{в}}^{(y)} \cdot \exp\left(-\frac{\delta_{акт.}}{kT}\right). \quad (1.6.38)$$

Окончательно

$$J_{л\dot{в}}(T) = \frac{N_{0,л\dot{в}} \cdot \dot{T}}{0,5-F\left(\sqrt{2b_{л\dot{в}} \cdot r}\right)} \cdot \sqrt{\frac{b_{л\dot{в}}}{\pi}} \cdot \frac{I_{л\dot{в}} T_0}{(T_0 - T)^2} \cdot \exp\left(-b_{л\dot{в}} I_{л\dot{в}}^2 \left(\frac{T}{T_0 - T}\right)^2\right) \cdot \exp\left(-\frac{\delta_{акт.}}{kT}\right). \quad (1.6.39)$$

Для получения действительного числа ледяных зародышей, образующихся при понижении температуры от T_0 до T , необходимо проинтегри-

ровать выражение (1.6.39) по времени, либо, исключая из него скорость охлаждения \dot{T} , по температуре.

$$N_{\text{д.в.},T} = \int_{\dot{T}}^T \frac{N_{0,\text{д.в.}}}{0.5 - F\left(\sqrt{2b_{\text{д.в.}}} \cdot r\right)} \cdot \sqrt{\frac{b_{\text{д.в.}}}{\pi}} \cdot \frac{l_{\text{д.в.}} T_0}{(T_0 - T)^2} \cdot \exp\left(-b_{\text{д.в.}} l_{\text{д.в.}}^2 \left(\frac{T}{T_0 - T}\right)^2\right) \cdot \exp\left(-\frac{\delta_{\text{акт.}}}{kT}\right) dT. \quad (1.6.40)$$

На рис. 1.6.3 приведены результаты расчета скорости нуклеации при $\gamma_{\text{д.в.}} = 0,5$, $\dot{T} = -1\text{К} \cdot \text{с}^{-1}$. Кривая 2 рассчитана по формуле (1.6.39), то есть при учете приращения энергии активации, задаваемой выражением (1.6.37). Для сравнения здесь же даны кривые 1 и 3, рассчитанные при полном учете (формула (1.6.36)) и без учета энергии активации ($\Delta_{\text{акт.}} = 0$) соответственно. Кривая 4 построена по экспериментальным данным. Она перенесена сюда с рис. 1.5.3. Представляется, что кривая 1 дает явно заниженные значения $J_{\text{д.в.}}(T)$ в частности по сравнению с результатами гетерогенной нуклеации (см. ниже в разд. 1.10). Кривая 3 отражает монотонный рост $J_{\text{д.в.}}(T)$ с понижением температуры, что противоречит результатам наблюдений. Кривая 2 согласуется с общепринятыми представлениями об экстремальной зависимости $J_{\text{д.в.}}(T)$ и с экспериментальными данными. Разумеется, расчет $J_{\text{д.в.}}(T)$ по формуле (1.6.39) можно уточнить, изменяя значения $\gamma_{\text{д.в.}}$ и $\delta_{\text{акт.}}$. Однако для этого необходимы экспериментальные данные в широком диапазоне температур.

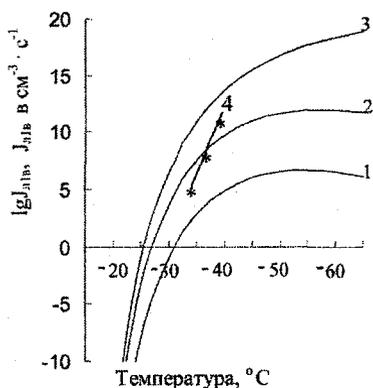


Рис. 1.6.3. Скорость нуклеации ледяных зародышей в переохлажденной воде при различных вариантах учета энергии активации. 1. — $\Delta_{\text{акт}}$ задается формулой (1.6.32); 2. — $\delta_{\text{акт}}$ задается формулой (1.6.37); 3. — $\Delta_{\text{акт}} = 0$; 4. — значения $J_{\text{лв}}$, рассчитанные по экспериментальным данным.

1.7. Природа действия хладореагентов

В практике активных воздействий часто появляется необходимость генерации в переохлажденных облаках или туманах большого количества мелких ледяных частиц. С этой целью в облако вносят тела, имеющие низкую температуру. Температура воздуха вокруг холодного тела понижается, а влажность увеличивается. Если перепад температур достаточно велик, то влажность может превышать критическую. В воздухе создаются условия для спонтанного образования зародышевых капель воды, которые затем могут превратиться в ледяные кристаллы.

В качестве охлаждающих тел удобно использовать частицы веществ (твердые, жидкие), имеющих низкие температуры испарения. Такие частицы сохраняют свою низкую температуру до тех пор, пока полностью не испарятся. Эти вещества называют реагентами (в буквальном смысле никакие реакции не происходят, кроме «реакции» охлаждения). Наиболее распространенным реагентом является «сухой лед» — твердая углекислота, точнее углекислый газ CO_2 в твердом состоянии. Используется также жидкий пропан C_3H_8 .

В последние годы распространение получили так называемые азотные технологии, в которых применяется сжиженный азот. Температура испарения сухого льда -79°C , пропана -41°C , жидкого азота -196°C .

Рассмотрим процессы, происходящие вокруг частички реагента, внесенного в насыщенный водяным паром воздух.

Поля температуры и влажности

Предположим, что в облако вносится сферическая частица реагента радиусом R с температурой поверхности частицы T_R . Температура облака $T_{\text{обл}}$. Рассчитаем распределение температуры вокруг частицы, предполагая процесс изотропным. Расчет будем выполнять вдоль произвольно выбранной оси x с началом координат в центре частицы реагента.

Уравнение теплопроводности для сферически изотропной среды

$$\frac{\partial(Tx)}{\partial\tau} = D_T \frac{\partial^2(Tx)}{\partial x^2}, \quad (1.7.1)$$

где D_T – коэффициент температуропроводности.

Граничные и начальные условия: $T(0, x) = T_{\text{обл}}$, $T(\tau, \infty) = T_{\text{обл}}$, $T(\tau, R) = T_R$.

Решение уравнения (1.7.1) довольно громоздко. Приведем его здесь без вывода.

$$\frac{T - T_{\text{обл}}}{T_R - T_{\text{обл}}} = \frac{R}{x} \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x - R}{2\sqrt{D_T\tau}} \right) \right] \quad (1.7.2)$$

Анализ показывает, что для характерных значений R (миллиметры) уже при значениях τ в несколько секунд процесс оказывается установившимся. В этом случае вторым слагаемым в правой части уравнения можно пренебречь. Тогда

$$T = T_{\text{обл}} + \frac{R}{x}(T_R - T_{\text{обл}}) \quad (1.7.3)$$

Пока спонтанная конденсация не началась, содержание водяного пара вокруг частицы реагента остается постоянным. Относительная влажность может быть рассчитана по простой формуле

$$f_v = \frac{e_{\text{обл}}}{E_v(T)} \quad (1.7.4)$$

Если в облаке $f_{\text{обл}} = 1$, то $e_{\text{обл}} = E_{v,\text{обл}}$. Очевидно, что изоповерхности температуры и влажности представляют собой сферы, концентрически охватывающие частицу реагента.

Для спонтанной конденсации требуется, чтобы относительная влажность была больше критической ($f > f_{v,\text{кр}}$). Формула критической влажности была получена выше в виде

$$\ln f_{v,\text{кр}} = 3,3 \cdot 10^5 \left(\frac{\sigma_{\text{п-в}}}{T} \right)^2 \quad (1.7.5)$$

Распределение температуры, относительной влажности и $f_{v,\text{кр}}$ вдоль координаты x представлено на рис. 1.7.1. Видно, что условия для спонтанной конденсации наблюдаются лишь в очень узкой зоне вблизи частицы реагента. Если считать, что относительная влажность остается постоянной, то число зародышевых капель, образующихся в единицу времени вокруг частицы реагента, можно рассчитать по уравнению

$$W = \int_R^{\infty} 4\pi x^2 J_v(x) dx \quad (1.7.6)$$

Практически в качестве верхнего предела можно взять значение x , соответствующее точке пересечения кривых f и $f_{v,\text{кр}}$.

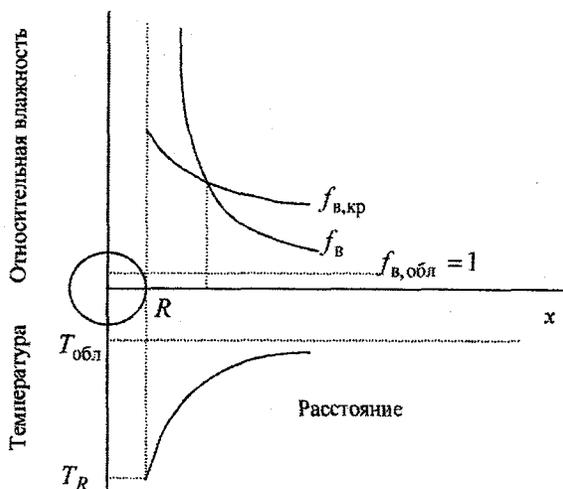


Рис. 1.7.1. Распределение температуры и влажности вокруг частицы реагента

Полученные по последнему уравнению значения W оказываются сильно завышенными (на несколько порядков) из-за принятой гипотезы постоянства влажности. Гетерофазные зародыши, образовавшиеся в зоне охлаждения, растут, поглощая водяной пар, и тем самым уменьшают относительную влажность. Вследствие этого условия для спонтанной конденсации быстро бы исчезли, если бы не вступал в действие механизм диффузии водяного пара в зону охлаждения. Уравнение диффузии пара в случае сферической изотропности подобно уравнению (1.7.1). Решение его в установившемся режиме имеет вид

$$\rho_{\text{п}} = \rho_{\text{п,обл}} + \frac{R}{x} (\rho_{\text{п,R}} - \rho_{\text{п,обл}}). \quad (1.7.7)$$

Используя уравнение состояния для пара, получим

$$\frac{e}{T} = \frac{E_{\text{в,обл}}}{T_{\text{обл}}} + \frac{R}{x} \left(\frac{e_R}{T_R} - \frac{E_{\text{в,обл}}}{T_{\text{обл}}} \right), \quad (1.7.8)$$

где e_R — давление водяного пара у поверхности частицы реагента. Логично принять $e_R = f_{\text{в,кр,R}} \cdot E_R$, E_R — давление насыщенного пара при температуре T_R .

Практический интерес представляет скорость образования не водяных, а ледяных зародышей. Судьба зародышевых капель и ледяных кристаллов схематически показана на рис. 1.7.2. Зародышевые капли воды, образующиеся у поверхности реагента, диффундируют из зоны охлаждения в облако. При этом они сначала быстро растут. По мере удаления от реагента они оказываются в условиях все меньшей и меньшей влажности (стремящейся к $f_{в,обл} = 1$), а значит в условиях ненасыщения над каплями малого размера. В облаке они испаряются в пользу более крупных облачных капель (цепочка 2 на рис. 1.7.2). Процесс идет по пути пар-вода-пар. Как было показано ранее, наиболее вероятным механизмом образования ледяных зародышей является замерзание зародышевых капель при низких температурах около поверхности реагента (цепочка 1 на рис. 1.7.2).

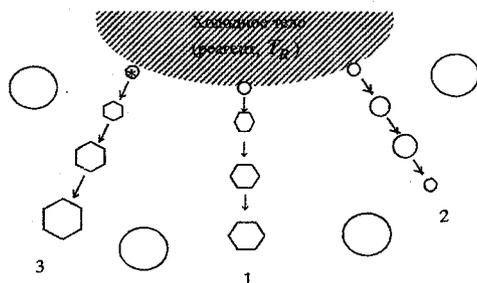


Рис. 1.7.2. Схема образования зародышевых капель и ледяных частиц в окрестностях гранул реагента (1 – превращение пар-вода-лед, 2 – превращение пар-вода-пар, 3 – превращение пар-лед).

Ледяные зародыши быстро растут. Если в зоне охлаждения они достигают таких размеров, что становятся жизнеспособными среди переохлажденных капель, то далее они превращаются в АЛЧ – активные ледяные частицы.

Размер жизнеспособного ледяного зародыша в облаке $r_{л,обл}^*$ рассчитывается по формуле

$$r_{\text{л,обл}}^* = \frac{2\sigma_{\text{п-л}}}{\rho_{\text{л}} R_{\text{п}} T \ln \left(\frac{E_{\text{в,обл}}}{E_{\text{л,обл}}} \right)} \quad (1.7.9)$$

Существует небольшая вероятность того, что ледяные зародыши в зоне пересыщения и охлаждения образуются непосредственно из пара (цепочка 3). Такие ледяные частицы растут также как и в случае превращений 1. Разумеется, если ледяные частицы, попавшие в среду облачных капель, не достигли размера $r_{\text{л,обл}}^*$, то они, как и зародышевые капли, испаряются. Существует еще один механизм образования АЛЧ – замерзание облачных капель при столкновении с частицей реагента. Однако число возможных столкновений реагента с облачными каплями столь мало по сравнению с числом ледяных зародышей, генерируемых реагентом, что ролью этого механизма можно заранее пренебречь.

Расчет числа ледяных кристаллов, образующихся вокруг частицы реагента

Итак, эксперименты показывают, что вокруг частицы реагента образуются мириады ледяных зародышей. Примем следующую модель явления. Ледяные зародыши образуются у поверхности реагента и распространяются от него в облако. Навстречу потоку ледяных частиц идет поток пара. В установившемся состоянии эти потоки по массе равны друг другу. Поток пара определяется уравнением Максвелла

$$P_{\text{п}} = 4\pi DR (\rho_{\text{п,обл}} - \rho_{\text{п,R}}) = 4\pi DR \frac{1}{R_{\text{п}}} \left(\frac{E_{\text{в,обл}}}{T_{\text{обл}}} - f_{\text{в,сп,R}} \frac{E_{\text{R}}}{T_{\text{R}}} \right) \quad (1.7.10)$$

Поток массы всех ледяных частиц, выходящих из зоны охлаждения можно выразить как

$$P_{\text{л}} = \dot{n} \int_0^{\infty} \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{л}} r_{\text{л}}^3 \eta(r_{\text{л}}) dr_{\text{л}}, \quad (1.7.11)$$

где \dot{n} – скорость образования ледяных зародышей.

Зададим распределение ледяных частиц по размерам в виде

$$\eta(r_{\text{л}}) = \frac{1}{r_{\text{л,обл}}^*} \cdot \exp\left(-r_{\text{л}}/r_{\text{л,обл}}^*\right). \quad (1.7.12)$$

Тогда

$$P_{\text{л}} = \dot{n} \int_0^{\infty} \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{л}} \frac{r_{\text{л}}^3}{r_{\text{л,обл}}^*} \exp\left(-r_{\text{л}}/r_{\text{л,обл}}^*\right) dr_{\text{л}} = 8\pi \dot{n} \rho_{\text{л}} r_{\text{л,обл}}^{*3}. \quad (1.7.13)$$

Приравнявая $P_{\text{л}}$ к $P_{\text{п}}$, найдем \dot{n}

$$\dot{n} = \frac{DR}{2\rho_{\text{л}} r_{\text{л,обл}}^{*3} R_{\text{п}}} \left(\frac{E_{\text{в,обл}}}{T_{\text{обл}}} - f_{\text{в,кр},R} \frac{E_R}{T_R} \right). \quad (1.7.14)$$

В потоке этих частиц жизнеспособными в облаке окажутся только те, размеры которых равны или превышают $r_{\text{л,обл}}^*$. Их доля в общем потоке составляет

$$\delta = \int_{r_{\text{л,обл}}^*}^{\infty} \frac{1}{r_{\text{л,обл}}^*} \cdot \exp\left(-\frac{r_{\text{л}}}{r_{\text{л,обл}}^*}\right) dr_{\text{л}} = \exp(-1) = \frac{1}{2,71}. \quad (1.7.15)$$

Таким образом, поток жизнеспособных зародышей $\dot{n}_{r_{\text{л}}^*}$ составляет

$$\dot{n}_{r_{\text{л}}^*} = \delta \cdot \dot{n} = \frac{DR}{5,42\rho_{\text{л}} r_{\text{л,обл}}^{*3} R_{\text{п}}} \left(\frac{E_{\text{в,обл}}}{T_{\text{обл}}} - f_{\text{в,кр},R} \frac{E_R}{T_R} \right). \quad (1.7.16)$$

Формула(1.7.16) получена в предположении изотропности процессов диффузии ледяных зародышей и пара. Реальная частица реагента движется относительно воздуха (или воздух относительно ее). В результате этого изотропность процесса нарушается. Строгое теоретическое решение для частицы, падающей относительно воздуха, оказывается весьма громоздким. Чтобы учесть увеличение потока пара к падающей частице, часто используют эмпирический коэффициент, так называемый коэффициент вентиляции (ветровой

множитель). Простейшей формой коэффициента вентиляции для диффузии пара является выражение его через число Рейнольдса

$$\varphi_D(\text{Re}) = 1 + 0,25\sqrt{\text{Re}}, \quad (1.7.17)$$

где

$$\text{Re} = \frac{2RV(R)}{\nu}. \quad (1.7.18)$$

Здесь ν – кинематический коэффициент вязкости воздуха, $V(R)$ – скорость движения частицы реагента относительно воздуха. Приравняем для свободно падающей частицы силу тяжести силе аэродинамического сопротивления. Тогда для установившейся скорости падения можно получить приближенное соотношение

$$V(R) \approx 220\sqrt{R}, \quad (1.7.19)$$

где $V(R)$ в м/с, если R в метрах.

Умножим выражение (1.7.16) на коэффициент вентиляции. Проинтегрируем скорость образования зародышей по времени от 0 до $\tau_{\text{исп}}$ – времени полного испарения частицы реагента. Таким образом, найдем общее число жизнеспособных ледяных зародышей, образующихся при полном испарении частицы реагента.

$$n_{\Sigma} = \int_0^{\tau_{\text{исп}}} \dot{n}_{r^*} \varphi_D(\text{Re}) d\tau. \quad (1.7.20)$$

Для того чтобы найти $\tau_{\text{исп}}$, следует решить уравнение баланса тепло-содержания для частицы реагента. Пусть $m_R = (4/3) \cdot \pi \rho_R \cdot R^3$ – масса такой частицы, ρ_R и L_R – плотность и теплота испарения реагента, соответственно. Тогда

$$\frac{d}{d\tau} (-L_R m_R) = 4\pi\lambda R (T_{\text{обн}} - T_R) \cdot \varphi_T(\text{Re}), \quad (1.7.21)$$

где λ – коэффициент теплопроводности воздуха, а $\varphi_T(\text{Re})$ – ветровой множитель для потока тепла. Справа в этом выражении записан поток тепла к холодной частице от более теплого окружающего воздуха с учетом коэффициента вентиляции. В первом грубом приближении можно принять, что $\varphi_T(\text{Re}) = \varphi_D(\text{Re})$. Полагая L_R , T_R и ρ_R постоянными, найдем скорость испарения частицы реагента

$$-\frac{dR}{d\tau} = \frac{\lambda(T_{\text{обл}} - T_R)\varphi_T(\text{Re})}{\rho_R R L_R} \quad (1.7.22)$$

Перейдем в выражении (1.7.20) от интегрирования по времени к интегрированию по радиусу частицы реагента, используя замену $d\tau = \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^{-1} dR$, тогда

$$n_\Sigma = \int_{R_0}^0 \dot{n}_{r, \Sigma} \frac{\rho_R R L_R}{\lambda(T_{\text{обл}} - T_R)} dR \quad (1.7.23)$$

После интегрирования получим

$$n_\Sigma = \frac{R_0^3 D \rho_R \left(\frac{E_{\text{в, обл}}}{T_{\text{обл}}} - f_{\text{в, R}} \frac{E_R}{T_R} \right) L_R}{16,26 \rho_{\text{л}} r_{\text{л, обл}}^* \lambda R_{\text{л}} (T_{\text{обл}} - T_R)} \quad (1.7.24)$$

В выражении (1.7.24) величина n_Σ не зависит от коэффициента вентиляции: увеличение потока пара к частице компенсируется увеличением скорости ее испарения.

Для оценки времени испарения реагента следует проинтегрировать выражение (1.7.22). Если подставить в него формулу (1.7.17), то получить решение в квадратурах не удастся. Для характерных значений R в выражении (1.7.17) можно пренебречь единицей по сравнению со вторым слагаемым. Тогда

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{\lambda(T_{\text{обл}} - T_R) 0,25 \sqrt{\frac{440}{v}}}{\rho_R R^{1/4} L_R} \quad (1.7.25)$$

Разделяя переменные и интегрируя по R от R_0 до 0 и по τ от 0 до $\tau_{\text{исп}}$, получим

$$\tau_{\text{исп}} = 0,16 \frac{\rho_R R_0^{5/4} \sqrt{v} L_R}{\lambda(T_{\text{обл}} - T_R)} \quad (1.7.26)$$

Оценим путь, который проходит частица реагента до полного испарения

$$h = \int_0^{\tau_{\text{исп}}} V(R) d\tau = \frac{25 \rho_R R_0^{7/4} \sqrt{v} L_R}{\lambda(T_{\text{обл}} - T_R)} \quad (1.7.27)$$

Для характеристики эффективности реагента введем понятие льдообразующей активности. *Льдообразующей активностью реагента* (ЛОАР) называют число ледяных кристаллов, образующихся в облаке при внесении в него единичной массы реагента $N_{\text{ЛОАР}}$. Зная n_{Σ} , легко найти $N_{\text{ЛОАР}}$.

$$N_{\text{ЛОАР}} = \frac{n_{\Sigma}}{(4/3)\pi \rho_R R_0^3} \quad (1.7.28)$$

и окончательно

$$N_{\text{ЛОАР}} = \frac{DL_R \left(\frac{E_{\text{в.обл}}}{T_{\text{обл}}} - f_{\text{в.вр},R} \frac{E_R}{T_R} \right)}{68 \rho_{\text{л}} r_{\text{л,обл}}^* \lambda R_{\text{п}} (T_{\text{обл}} - T_R)} \quad (1.7.29)$$

Результаты расчетов по формуле (1.7.29) приведены на рис. 1.7.3 в сопоставлении с результатами экспериментов для наиболее распространенных реагентов CO_2 и C_3H_8 . Следует иметь в виду, что эксперименты проводились в различных условиях – в камерах разного объема, при разных скоростях обдува, различными были методики отбора проб и способы расчета льдообразующей активности. Эти обстоятельства являются оправданием громадного

разброса. Нумерация работ на рисунках условная. Заметим только, что номерами 1...4 на рис. 1.7.3а отмечены данные из публикаций 30...50-летней давности, когда техника экспериментов была менее совершенной. Легко убедиться, что результаты расчетов в целом согласуются с экспериментами (в пределах точности последних).

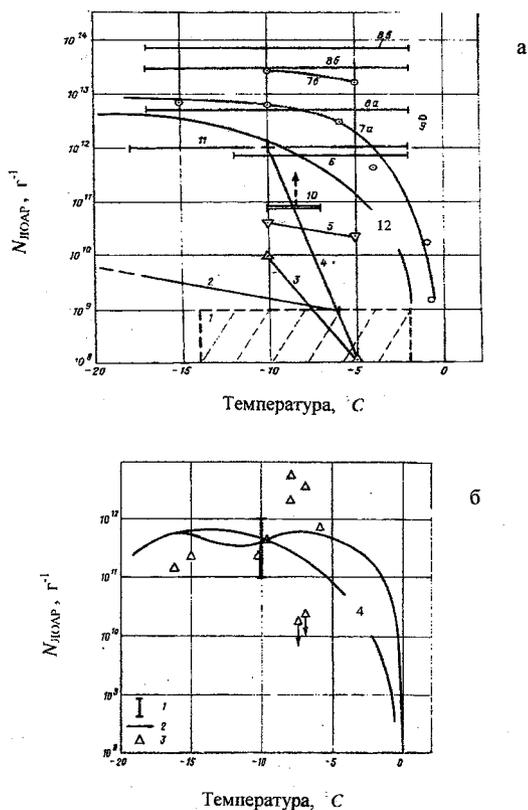


Рис. 1.7.3. Сравнение рассчитанных зависимостей льдообразующей активности реагентов от температуры с результатами эксперимента

а – реагент "сухой лед"; 1–9 – результаты лабораторных опытов, 10 и 11 – данные натуральных экспериментов, 12 – расчет по уравнению (1.7.29); б – реагент жидкий пропан; 1 и 2 – результаты лабораторных опытов. 3 – данные натурального эксперимента, 4 – расчет по уравнению (1.7.29).

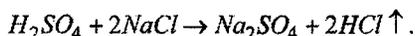
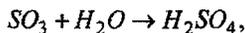
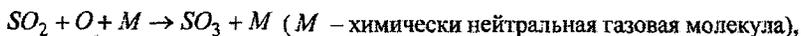
1.8. Гетерогенная конденсация

Для гомогенного образования зародышевых капель воды требуется большое пересыщение (при температуре около 0°C критическая влажность составляет 400...500 %). В реальной атмосфере такие условия никогда не осуществляются. Измеренные значения относительной влажности в облаках редко превышают 101...102 %. Причиной тому является наличие в атмосфере инородных примесей, инициирующих гетерогенные фазовые превращения.

1.8.1. Атмосферный аэрозоль

Атмосферным аэрозолем (АА) называют взвешенные в воздухе жидкие и твердые частицы различных веществ.

Роль АА. При всеобщей озабоченности качеством окружающей среды часто создается впечатление, что атмосферный аэрозоль является негативным фактором. Это представление верно лишь отчасти. Негативным фактором является не АА, а его избыточное содержание или наличие некоторых вредных веществ. Будучи загрязнителем атмосферы, АА служит также ее «очистителем»: в результате химических реакций аэрозольных частиц с газами, в частности с агрессивными, происходит уменьшение концентрации последних. Например, являющийся продуктом сгорания ядовитый сернистый газ SO_2 нейтрализуется при взаимодействии с частицами хлористого натрия в результате следующей цепочки реакций



Захватывая легкие ионы, аэрозольные частицы превращаются в тяжелые ионы, которые служат носителями объемных электрических зарядов. С изменением содержания тяжелых ионов меняются электропроводность атмосферы и напряженность электрического поля. В воздухе, содержащем аэро-

зольные частицы (АЧ), может происходить сильная электризация летательных аппаратов, вызывающая помехи в радиосвязи и даже провоцирующая молниевые разряды.

Атмосферный аэрозоль служит важным климатообразующим фактором: повышение содержания АА в верхних слоях атмосферы приводит к увеличению альбедо, а значит к уменьшению поступления коротковолновой солнечной радиации на земную поверхность. В то же время находящийся в тропосфере АА препятствует длинноволновому земному излучению. Важнейшую роль АА играет в образовании облаков и формировании осадков. Трудно представить себе ту катастрофическую картину изменений погоды и климата, которая наблюдалась бы при исчезновении атмосферного аэрозоля.

Источники и стоки АА. Выделяют две основные группы источников атмосферного аэрозоля. Это естественные источники, связанные с природными процессами, и, к сожалению, почти соизмеримые с ними по интенсивности антропогенные источники, определяемые хозяйственной (а может быть и безхозяйственной) деятельностью человека. В табл. 1.8.1 приводится перечень основных источников поступления АА в атмосферу и примерная оценка их интенсивности.

Таблица 1.8.1

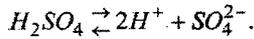
Интенсивность различных источников атмосферного аэрозоля (мегатонны в год)

Источник АА	Интенсивность
Природные источники	
Частицы почвы и горных пород	100-500
Лесные и торфяные пожары	10-150
Морская соль	300-500
Выбросы вулканов	20-150
Химические превращения газ-частица:	
сульфаты,	130-200
соли аммония,	80-270
нитраты	60-430
Углеводороды от растительности	70-200

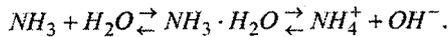
Источник АА	Интенсивность
Всего от природных источников	770-2400
Антропогенные источники	
Непосредственный выброс	10-90
Химические превращения газ-частица:	
сульфаты,	130-200
нитраты,	30-40
углеводороды	10-90
Всего от антропогенных источников	180-420
Внеземные источники	1-50
Всего	1000-3000

Поставщиком аэрозольных частиц в атмосферу является земная поверхность. Практически постоянно действующим источником служит ветровая эрозия – выветривание горных пород и почвы. Экстремальным проявлением этого механизма являются пыльные и песчаные бури. Существенный вклад вносят лесные пожары, возникающие, например, в результате молниевых разрядов. Мощным, хотя и нерегулярным источником аэрозоля, является вулканическая деятельность. Постоянно действующим источником аэрозоля служит поверхность океана. Мириады воздушных пузырьков, образующихся в гребнях волн, всплывают на поверхность и лопаются. При этом образуются многочисленные капельки воды. Более крупные из них падают на поверхность моря, а мелкие подхватываются воздушным потоком, испаряются и превращаются в частички морской соли – рис. 1.8.1.

Существенным, до недавнего времени недооцениваемым, источником АА является механизм образования аэрозольных частиц в результате химических реакций между газами. Этот механизм называют превращением газ – частица. Рассмотрим в качестве примера реакцию образования соли сернистого аммония в результате взаимодействия сернистого газа с аммиаком. Выше была приведена одна из реакций превращения сернистого газа SO_2 в серную кислоту H_2SO_4 . Частичка H_2SO_4 , поглощая из воздуха водяной пар, быстро становится каплей сильно разбавленного раствора кислоты, которая диссоциирует на ионы



Содержащийся в воздухе аммиак растворяется в такой капле и далее также диссоциирует на ионы



Далее легко осуществляется реакция



В ненасыщенном воздухе вода может испариться, в результате получается частичка соли.

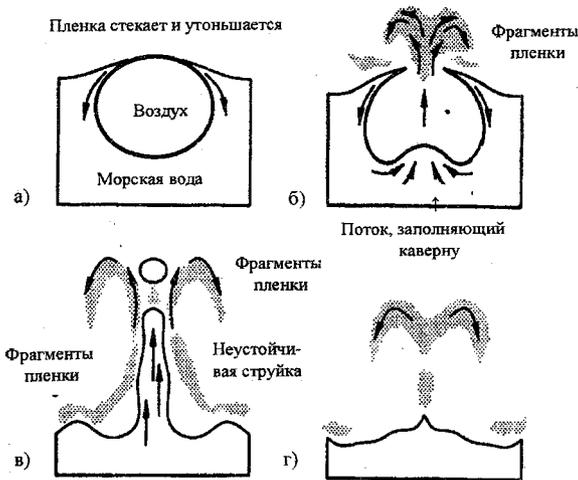


Рис. 1.8.1. Последовательные стадии разрушения воздушного пузырька на поверхности воды

а) пузырек всплывает на поверхность, образуя тонкую пленку воды; б) пленка разрушается, образуя мелкие капли; в) при заполнении каверны формируется струйка воды (всплеск), которая распадается на небольшое число более крупных капелек; г) часть фрагментов падает обратно в воду, другая часть испаряется, образуя микрочастицы соли.

Антропогенные источники АА – это прежде всего поступающие в атмосферу продукты сгорания топлива различного вида. При этом происходит как прямая эмиссия аэрозольных частиц, так и эмиссия различных газов. Последние также превращаются в аэрозольные частицы. Вклад антропогенных источников достигает 15...20 % от общего поступления аэрозольных частиц в атмосферу. Некоторое количество аэрозольных частиц образуется при сгорании метеоров и падении метеоритов.

Поступление аэрозольных частиц в атмосферу компенсируется их стоком. Основными механизмами уменьшения АЧ являются гравитационное оседание и вымывание осадками.

Распределение аэрозольных частиц в атмосфере. Распределение аэрозольных частиц определяется процессами переноса и диффузии. Разумеется, максимальные концентрации наблюдаются вблизи источников аэрозоля. По мере удаления от источников концентрация убывает. Наиболее интенсивные источники АА находятся на поверхности суши, поэтому концентрация убывает как с высотой по мере удаления от поверхности, так и по горизонтали при перемещении с суши на море. Максимальные концентрации аэрозоля наблюдаются в больших городах, в промышленных центрах. Здесь концентрация АЧ может достигать 10^6 см^{-3} .

В сельской местности характерная концентрация АЧ составляет $10^3 \dots 10^4 \text{ см}^{-3}$, в открытом океане и высоко в горах – 10^2 см^{-3} . Последнее значение отражает экспоненциальное уменьшение концентрации АЧ с высотой. Большая часть атмосферного аэрозоля сосредоточена в нижнем слое тропосферы. С высотой меняется не только концентрация аэрозольных частиц, но и их средние размеры. Чем дальше от земной поверхности, тем меньше средние размеры аэрозольных частиц, а значит тем больше время их пребывания в воздухе.

Характерное время жизни аэрозольной частицы в нижней тропосфере составляет несколько дней, в верхней тропосфере – несколько недель, в стратосфере – несколько месяцев и даже лет.

Распределение аэрозольных частиц по размерам. Размеры аэрозольных частиц находятся в пределах от мельчайших, радиусом 10^{-7} см, состоящих из нескольких десятков молекул, до сравнительно крупных, радиусом $10^{-4} \dots 10^{-3}$ см (исключая из рассмотрения более крупные частицы, извергаемые вулканами либо поднимаемые в воздух воздушными вихрями, смерчами и т. п.).

Обобщая действия всех механизмов формирования АА, логично ожидать, что функция распределения АЧ по размерам должна быть монотонной: чем меньше размеры частиц, тем их больше. Реальное распределение частиц по размерам практически соответствует этим представлениям. Небольшие отличия наблюдаются только при сравнительно малых и достаточно больших размерах. При малых размерах, когда большую роль играет броуновское движение, частицы сталкиваются и коагулируют друг с другом. Поэтому в спектре появляется «провал» в области малых размеров. Соответственно увеличивается доля более крупных частиц. На правом краю спектра доля наблюдаемых частиц оказывается меньше ожидаемой, благодаря тому, что частицы этих размеров быстро выпадают на землю – рис. 1.8.2.

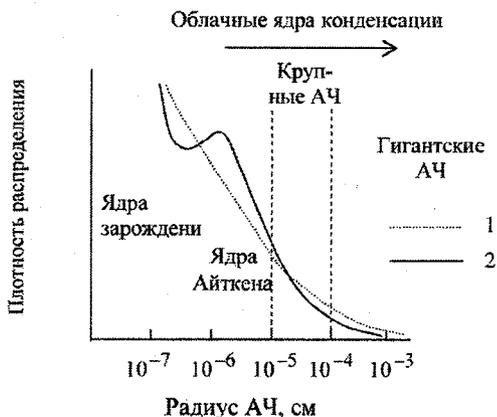


Рис. 1.8.2. Схематическое представление спектра аэрозольных частиц в атмосфере (масштаб по оси ординат условный)

1 – предполагаемое распределение АЧ по размерам, 2 – реальное распределение.

В спектре аэрозольных частиц принято выделять разные группы в зависимости от их дисперсности (измельченности). Аэрозольные частицы, в

особенности твердые, не обязательно имеют сферическую форму. Однако обычно размеры их характеризуют эквивалентным радиусом или диаметром. Частицы с радиусом $r_{АЧ} > 10^{-4}$ см называют грубодисперсными или гигантскими. Частицы $10^{-5} \leq r_{АЧ} \leq 10^{-4}$ см называют большими или крупными (среднедисперсными). Более мелкие частицы ($r_{АЧ} < 10^{-5}$ см) принято называть ядрами Айткена. В последнее время на левом краю спектра стали выделять еще одну группу – ядра зарождения. Сюда относят микроскопические частицы, образующиеся гомогенно или гетерогенно из газовой фазы, либо в результате химических превращений газ-частица.

Свойства АА. В силу разнообразия источников АЧ они обладают различными физическими свойствами. Частицы могут быть гидрофобными и гидрофильными. К первым относятся нерастворимые несмачиваемые или плохо смачиваемые частицы. Ко вторым – смачиваемые растворимые или нерастворимые. В физике облаков гидрофильные частицы в диапазоне от правого края ядер Айткена до гигантских и сверхгигантских частиц называют облачными ядрами конденсации. Это преимущественно солевые растворимые частицы морского происхождения или образующиеся в результате превращения газ-частица. Нерастворимые, но хорошо смачиваемые частицы (сажа, древесный уголь, глина и т. п.) как ядра конденсации играют второстепенную роль.

1.8.2. Природа действия облачных ядер конденсации

Облачные ядра конденсации являются центрами зарождения мелких капель воды в облаках и туманах. Действие их основано на эффекте гигроскопичности растворимых солей. Известно, что давление насыщенного водяного пара над раствором соли E_p меньше, чем над чистой водой E . Соотношение между этими величинами определяется законом Рауля

$$\frac{E_p}{E} = \frac{v_s}{v_c + v_s} = \frac{1}{1 + \frac{v_c}{v_s}} \quad (1.8.1)$$

где v_c – число молей растворенной в воде соли, v_s – число молей воды (растворитель).

Переходя от числа молей к массе соли m_c и воды m_s , получим

$$\frac{E_p}{E} = \frac{1}{1 + i \frac{\mu m_c}{M_c m_s}} \approx 1 - i \frac{\mu m_c}{M_c m_s}, \quad (1.8.2)$$

где μ и M_c – молярные массы воды и соли, соответственно, а i – коэффициент Вант-Гоффа. Коэффициент Вант-Гоффа учитывает число ионов, образующихся при диссоциации молекулы соли в растворе (например, для разбавленных растворов $NaCl$ $i \approx 2$, а для $(NH_4)_2SO_4$ $i \approx 3$). Выражение (1.8.2) справедливо лишь до тех пор, пока масса соли полностью растворяется в воде. Оно относится к плоской поверхности раздела между раствором и паром. Распространим это выражение на случай мелких капель раствора.

Введем частичку соли (сухое ядро) радиусом $r_{с.я.}$ в каплю радиусом r . Соль в воде растворяется. Обозначим через r_n такой размер капли, при котором она представляет собой насыщенный раствор соли, при этом солевая частица полностью растворена. Если $r < r_n$, то раствор является насыщенным, но часть соли остается нерастворенной. При $r > r_n$ раствор становится ненасыщенным. Плотность насыщенного раствора обозначим $\rho_{рн}$, ненасыщенного – ρ_p , плотность чистой воды ρ_v . Имея в виду, что при растворении соли объем растворителя (капли воды) остается неизменным, массу соли выразим как

$$m_c = \frac{4}{3} \pi \rho_{рн} r_n^3 - \frac{4}{3} \pi \rho_v r_n^3. \quad (1.8.3)$$

Масса воды в капле раствора составляет

$$m_{\text{в}} = \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{р}} r^3 - m_{\text{с}} = \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{в}} r^3. \quad (1.8.4)$$

Подставляя выражения (1.8.3) и (1.8.4) в формулу (1.8.2), получим

$$\frac{E_{\text{р}}}{E} = 1 - i \frac{\mu}{M_{\text{с}}} \frac{(\rho_{\text{рн}} - \rho_{\text{в}})}{\rho_{\text{в}}} \left(\frac{r_{\text{н}}}{r} \right)^3. \quad (1.8.5)$$

Множитель $C_{\text{с}} = i \frac{\mu}{M_{\text{с}}} \frac{(\rho_{\text{рн}} - \rho_{\text{в}})}{\rho_{\text{в}}}$ для разбавленных растворов соли является практически постоянным и определяется, главным образом, химической формулой соли. (Строго говоря, величина $C_{\text{с}}$ изменяется, поскольку коэффициент i зависит от концентрации раствора, а плотность $\rho_{\text{рн}}$ от растворимости соли, которая, в свою очередь, зависит от температуры).

Таким образом,

$$\frac{E_{\text{р}}}{E} = 1 - C_{\text{с}} \left(\frac{r_{\text{н}}}{r} \right)^3. \quad (1.8.6)$$

Выражение (1.8.6) справедливо для крупных капель. Для мелких капель необходимо учесть влияние кривизны поверхности.

Воспользуемся для малых частиц упрощенной формой уравнения Кельвина

$$\frac{E_{\text{р}}}{E} = f_{\text{р}} = 1 + \frac{2\sigma_{\text{п-в}}}{\rho_{\text{в}} R_{\text{п}} T r} = 1 + \frac{r^+}{r}. \quad (1.8.7)$$

Тогда

$$\frac{E_{\text{рп}}}{E} = \left(1 + \frac{r^+}{r} \right) \left(1 - C_{\text{с}} \left(\frac{r_{\text{н}}}{r} \right)^3 \right) \approx 1 + \frac{r^+}{r} - C_{\text{с}} \left(\frac{r_{\text{н}}}{r} \right)^3. \quad (1.8.8)$$

Отношение $\frac{E_{\text{рп}}}{E} = \overset{\circ}{f}$ назовем равновесной относительной влажностью, отражающей условия равновесия капли раствора с паром.

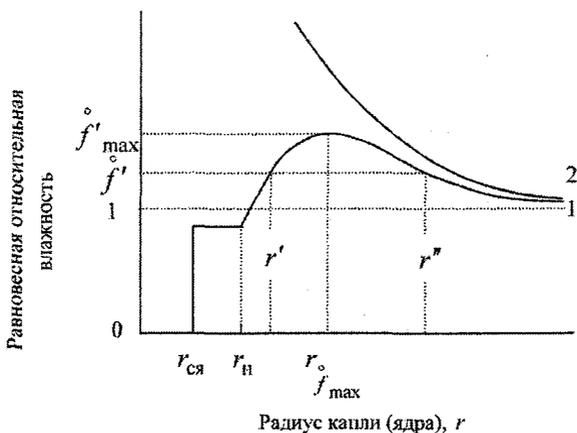


Рис. 1.8.3. Зависимость равновесной относительной влажности от радиуса капли.

1 – капля, содержащая растворенную соль; 2 – чистая вода.

На рис. 1.8.3 приведена зависимость равновесной влажности от размера капли (частицы). Пусть имеется сухое ядро $r_{ся}$. При изменении влажности от нуля до $(1 - C_c)$ соль не поглощает водяной пар из воздуха (если пренебречь капиллярными эффектами). Частица остается сухой, а стало быть, ее размеры не меняются. Если влажность достигает значения $f^{\circ} = 1 - C_c$, то соль начинает поглощать водяной пар, частица покрывается пленкой воды, в которой растворяется соль. При растворении образуется насыщенный раствор, частица продолжает расти. Этот процесс идет до тех пор, пока соль полностью не растворится.

На этапе от $r_{ся}$ до r_n частица может расти без изменения относительной влажности f° . Собственно закон Рауля, то есть выражение (1.8.8), начинает работать при $r > r_n$. С увеличением размера капли второе и третье слагаемые в выражении (1.8.8) уменьшаются. При этом второе слагаемое уменьшается обратно пропорционально первой степени радиуса, а третье – обратно пропорционально кубу радиуса. Поскольку эти слагаемые входят в формулу (1.8.8) с разными знаками, равновесная относительная влажность с

увеличением r сначала растёт. Этот рост продолжается и при $f > 1$. Затем равновесная влажность достигает максимального значения f_{\max}° при $r_{f_{\max}^{\circ}}$.

Далее с увеличением радиуса f уменьшается, стремясь в пределе к единице ($f \rightarrow 1$). Естественно, что кривая, построенная по уравнению (1.8.8), лежит ниже кривой, соответствующей уравнению Кельвина (1.8.7).

Подставляя в выражение (1.8.8) $f^{\circ} = 1$, найдем равновесный размер капель r_0 в насыщенном паре

$$r_0 = \sqrt{\frac{C_c \cdot r_H^3}{r^+}}. \quad (1.8.9)$$

Чтобы найти $r_{f_{\max}^{\circ}}$, приравняем нулю первую производную по r от правой части выражения (1.8.8). Тогда

$$r_{f_{\max}^{\circ}} = \sqrt{\frac{3C_c r_H^3}{r^+}} = \sqrt{3} \cdot r_0. \quad (1.8.10)$$

Подставляя (1.8.10) в (1.8.8), найдем

$$f_{\max}^{\circ} = 1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{1}{3C_c} \left(\frac{r^+}{r_H}\right)^3} = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{r^+}{r_0}. \quad (1.8.11)$$

Обратимся снова к рис. 1.8.3. Радиус $r_{f_{\max}^{\circ}}$ делит зависимость $f(r)$ на две принципиально отличные части. Левая ветвь от r_H до $r_{f_{\max}^{\circ}}$ отражает обратимый процесс. Выберем на этом участке кривой точку (f' , r'). Если влажность будет расти, то радиус будет увеличиваться и наоборот. Правая ветвь кривой 1 (при $r > r_{f_{\max}^{\circ}}$) отражает необратимый процесс. При влажно-

сти f' равновесный радиус составляет r'' . Если влажность уменьшается, то капля оказывается в условиях ненасыщения и она будет испаряться до тех пор, пока не окажется в условиях обратимого процесса (на левом участке кривой). Если в окружающем каплю воздухе влажность оказалась больше f' , то капля неограниченно растет.

Таким образом, ядра конденсации начинают обводняться при относительной влажности воздуха меньше 100 %. Однако для того чтобы произошел переход из спектра обводненных ядер конденсации в спектр облачных капель, относительная влажность воздуха должна превысить 100 %. Это превышение невелико. В реальных облаках и туманах оно составляет доли процента, в редких случаях (в мощных конвективных облаках) несколько процентов.

При использовании уравнений (1.8.8)...(1.8.11) необходимо задавать два параметра: C_c и r_n . Значения C_c для различных солей табулированы, их можно найти в справочниках. Чтобы задать r_n , нужно знать размеры сухого ядра и растворимость соли в воде. Если ядро представляет собой смесь различных солей, то расчеты оказываются затруднительными. Вместо этих двух параметров — C_c и r_n можно использовать только один — r_0 .

Из формулы (1.8.9) найдем

$$C_c \cdot r_n^3 = r_0^2 \cdot r^+ \quad (1.8.12)$$

Подставляя выражение (1.8.12) в (1.8.10) и (1.8.11), соответственно, получим

$$\frac{r_c}{f_{\max}} = r_0 \sqrt{3} \quad (1.8.13)$$

$$f_{\max}^{\circ} = 1 + \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{r^+}{r_0} \quad (1.8.14)$$

Формула для f° может быть представлена в виде

$$\overset{\circ}{f}(r) = 1 + \frac{r^+}{r} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \quad (1.8.15)$$

Зависимость $\overset{\circ}{f}$ от r определяется, главным образом, параметром r_0 , то есть размером обводненного ядра конденсации при $f = 1$. При более строгом рассмотрении следует учесть, что r^+ меняется вследствие зависимости поверхностного натяжения и плотности от концентрации раствора.

В практических расчетах, в частности при численном моделировании процессов осадкообразования, в качестве исходного вместо традиционно используемого спектра сухих аэрозольных частиц следует задавать спектр обводненных ОЯК, найденный при относительной влажности 100 %, в котором аргументом является размер частиц r_0 . При этом исключается необходимость учета индивидуальных характеристик различных аэрозольных частиц.

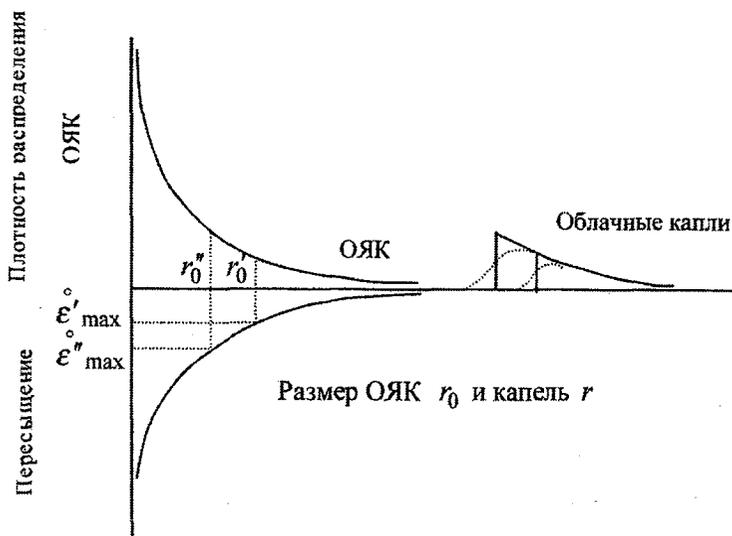


Рис. 1.8.4. Схема превращения обводненных ОЯК в облачные капли.

Любопытно отметить, что отношение пересыщения $\varepsilon_{\max}^{\circ} = f_{\max}^{\circ} - 1$ к $\varepsilon_{\tau} = f_{\tau} - 1$ при $r = r_{\tau}^{\circ} / f_{\max}$ является величиной постоянной и составляет $\varepsilon_{\max}^{\circ} / \varepsilon_{\tau} = 2/3$.

Облачные ядра конденсации (ОЯК) являются частью атмосферного аэрозоля. Их распределение по размерам аналогично представленному на рис. 1.8.2. Очевидно, что превращение ОЯК в облачные капли начинается с самых крупных размеров: чем больше размер ядра, тем при меньшем пересыщении оно начинает расти. Схема превращения ОЯК в облачные капли представлена на рис. 1.8.4.

В верхней части этого рисунка показано распределение ОЯК по размерам. Для того чтобы не рассматривать ядра различного химического состава, в качестве аргумента используется величина r_0 . В нижней части рисунка приведена зависимость максимального пересыщения, необходимого для превращения ядра радиусом r_0 в облачную каплю. Представим себе, что относительная влажность воздуха выросла от значения $f = 1$ до $f = 1 + \varepsilon_{\max}^{\circ}$. Тогда все ОЯК с размером большим чем r_0^{\prime} оказываются в условиях пересыщения. Если влажность постоянна во времени, то все они неограниченно растут. Поскольку ОЯК могут содержать нерастворимые компоненты, а также в силу случайных факторов (взаимная коагуляция, действие электростатических сил и т. п.), левый фронт спектра облачных капель не обрывается круто, а сглаживается, как это отмечено на рисунке пунктирной кривой. Если влажность снова увеличится, например, до значения $f = 1 + \varepsilon_{\max}^{\circ}$, то новая группа ОЯК, заключенных в интервале от $r_0^{\prime\prime}$ до r_0^{\prime} превратится в облачные капли.

Распределение ОЯК по размерам сильно варьирует в пространстве и во времени. На практике зависимость числа «активированных» ядер конденсации n (ядер конденсации, превратившихся в облачные капли) от пересыще-

ния, заданного в процентах $\varepsilon_{\%} = (f - 1) \cdot 100$, аппроксимируют формулой вида

$$n = G\varepsilon_{\%}^k, \quad (1.8.16)$$

где G и k – параметры, зависящие от метеорологических факторов, в том числе от вида воздушной массы. В частности, рекомендуется использовать для морских воздушных масс характерные значения $G \approx 100 \text{ см}^{-3}$, $k \approx 0,7$, для континентальных воздушных масс, содержащих значительно больше аэрозольных частиц, $G \approx 600 \text{ см}^{-3}$, $k \approx 0,5$. Впрочем, эти значения, полученные разными авторами для разных районов земного шара, варьируют в широких пределах.

Зная эмпирическую зависимость концентрации активированных ядер конденсации от пересыщения, можно оценить функцию распределения $\eta(r_0)$. Покажем, как это можно сделать на примере формулы (1.8.16). Переходя в этой формуле от $\varepsilon_{\%}$ к равновесному пересыщению $\varepsilon = f - 1$ и подставляя вместо f значение f_{\max} , определяемое выражением (1.8.14), получим

$$n = \frac{G_1}{r_0^k}, \quad (1.8.17)$$

где $G_1 = G \cdot 100^k \left(\frac{2r^+}{3\sqrt{3}} \right)^k$.

С другой стороны

$$n = n_0 \int_{r_0}^{\infty} \eta(r_0) dr_0. \quad (1.8.18)$$

Приравняем правые части выражений (1.8.17) и (1.8.18)

$$n_0 \int_{r_0}^{\infty} \eta(r_0) dr_0 = \frac{G_1}{r_0^k}. \quad (1.8.19)$$

Дифференцируя выражение (1.8.19) по r_0 и имея в виду, что $\eta(r_0) = 0$ при $r_0 \rightarrow \infty$, получим

$$\eta(r_0) = \frac{(k+1)}{n_0} \cdot G_1 \cdot r_0^{-(k+1)} = \frac{(k+1)}{n_0} \cdot 100^k \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} r^+ \right)^k G \cdot r_0^{-(k+1)}. \quad (1.8.20)$$

Единственным неизвестным параметром в этой формуле является n_0 . Чтобы оценить значение n_0 , подставим в формулу (1.8.16) значение пересыщения, заведомо превышающее реально возможное в облаках. Пусть, например, $\varepsilon_0 = 0,10$ ($\varepsilon\% = 10$).

Тогда

$$n_{0,1} = n_0 = G \cdot 100^k \cdot 0,10^k. \quad (1.8.21)$$

Соответственно,

$$\eta(r_0) = (k+1) \cdot 0,10^{-k} \left(\frac{2}{3\sqrt{3}} r^+ \right)^k \cdot r_0^{-(k+1)}. \quad (1.8.22)$$

Если при численном моделировании необходимо задать спектр ОЯК в виде дискретных градаций, то для j -той градации

$$n_j = n_0 \cdot \eta(r_{0j}) \cdot \Delta r_{0j} = G \cdot 100^k \cdot 0,10^k \cdot \eta(r_{0j}) \cdot \Delta r_{0j}, \quad j = \overline{1, N_r}. \quad (1.8.23)$$

где Δr_{0j} — ширина градации, N_r — число градаций.

1.8.3. Гигроскопические реагенты

Ширина спектра облачных капель определяет степень коллоидальной устойчивости облака. Чем уже диапазон размеров облачных капель, тем меньше вероятность их взаимной коагуляции, а значит, тем медленнее изменяется спектр капель со временем. Наличие в воздухе небольшого числа гигантских ($r > 1$ мкм) и сверхгигантских ($r > 10$ мкм) облачных ядер конденсации приводит к образованию крупных капель. Если концентрация гигант-

ских и сверхгигантских ОЯК мала, то при решении ряда задач активных воздействий возникает необходимость создания крупных капель путем внесения в облако частиц, выполняющих роль этих ядер. Такие частицы называют гигроскопическими реагентами. В качестве реагентов обычно используют хорошо растворимые соли различных кислот, например, хлористый натрий $NaCl$, кристаллогидраты хлористого кальция $CaCl_2 \cdot nH_2O$ и другие. Как реагенты могут быть использованы минеральные удобрения, такие как карбамид $CO(NH_2)_2$ и аммиачная селитра NH_4NO_3 .

Природа действия гигроскопических реагентов, распыленных в облаке, ничем не отличается от природы действия естественных ядер конденсации. Также как ядра конденсации, солевые частички реагента адсорбируют водяной пар, создавая вокруг себя водяную пленку, и растворяются в ней. В зависимости от влажности окружающего воздуха они растут, как капли солевого раствора. Если размеры солевых частиц больше размеров естественных ОЯК, то для неограниченного роста таких частиц требуется меньшее пересыщение.

Принцип воздействия на облака и туманы заключается в переконденсации-перегонке водяного пара с большого числа облачных капелек на меньшее число более крупных капель, образующихся на частицах реагента. Далее вступает в действие механизм коагуляции (см. разд. 2).

Введение в облако гигроскопических реагентов осуществляется либо распылением сухой соли воздушной струей, либо пульверизацией насыщенного раствора реагента. К сожалению, такими методами не удастся получить частицы (капли) заданного размера. Спектр частиц оказывается очень широким.

В последние годы большую популярность получил «огненный» метод диспергирования реагента. Реагент-соль смешивается с пиротехническим составом. При сгорании этого состава частички соли попадают в воздух в хорошо измелеченном состоянии.

Существуют гигроскопические реагенты, которые при взаимодействии с водой вступают с ней в экзотермическую реакцию (с выделением значи-

тельной тепловой энергии). В качестве примера можно привести такие широко известные вещества как известь (негашеная) CaO , карбид кальция CaC_2 , а также гидриды – химические соединения водорода с другими элементами (гидрид лития LiH , алюмогидриды металлов $M(AlH_3)_n$ и др.).

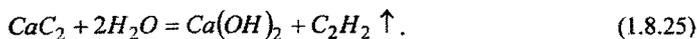
В соответствии с законом Гесса количество теплоты, выделяющейся в результате химической реакции, определяется выражением

$$\Delta \dot{H}_p = \sum_{j=1}^{n_2} b_j \Delta \dot{H}(B_j) - \sum_{i=1}^{n_1} a_i \Delta \dot{H}(A_i), \quad (1.8.24)$$

где a_i, b_j – стехиометрические коэффициенты веществ, вступающих в реакцию A_i и образующихся в результате ее $B_j, i = \overline{1, n_1}, j = \overline{1, n_2}$. (Стехиометрические коэффициенты – число молей веществ, участвующих в реакции).

$\Delta \dot{H}(A_i)$ и $\Delta \dot{H}(B_j)$ – количество теплоты образования соответствующего вещества. Эти значения можно найти в справочниках.

Рассмотрим в качестве примера реакцию взаимодействия карбида кальция с водой



В этой реакции $n_1 = n_2 = 2, a_1 = 1, a_2 = 2, b_1 = b_2 = 1,$

$$\Delta \dot{H}_p(CaC_2) = -62 \text{ кДж}\cdot\text{моль}^{-1}, \quad \Delta \dot{H}_p(H_2O) = -285 \text{ кДж}\cdot\text{моль}^{-1},$$

$$\Delta \dot{H}_p(Ca(OH)_2) = -986 \text{ кДж}\cdot\text{моль}^{-1}, \quad \Delta \dot{H}_p(C_2H_2) = 226 \text{ кДж}\cdot\text{моль}^{-1}.$$

Таким образом, в соответствии с формулой (1.8.24)

$$\Delta \dot{H}_p = -986 + 226 + 62 + 2 \cdot 285 = -128 \text{ кДж}\cdot\text{моль}^{-1}.$$

Знак « \rightarrow » соответствует выделению энергии. Перейдем от количества теплоты реакции к теплоте α , отнесенной к единице массы воды

$$\alpha = \frac{\Delta H_p}{a_2 \mu} \quad (1.8.26)$$

где μ – молярная масса воды. Подставляя $a_2 = 2$, $\mu = 0,018$ кг·моль⁻¹, найдем $\alpha_{CaC_2} \approx -3,6 \cdot 10^6$ Дж кг⁻¹. Сравним это значение α с энергией фазового превращения вода-пар $L_{п-в} = 2,50 \cdot 10^6$ Дж кг⁻¹. Легко видеть, что выделяющаяся в результате реакции энергия превышает энергию, необходимую для испарения воды.

Аналогичные выводы могут быть сделаны и при анализе реакции взаимодействия CaO с водой.

Имея в виду большое выделение энергии в подобного рода реакциях, предлагалось на их основе осуществлять рассеивание туманов, используя кальцийсодержащие вещества. Несмотря на кажущуюся заманчивость утилизации тепла экзотермических реакций, оценки показывают, что этот подход к просветлению туманов мало эффективен. В самом деле, при внесении в туман в диспергированном виде CaC_2 на единицу массы воды в соответствии с уравнением (1.8.25) образуется вдвое большая масса плохо растворимого основания $Ca(OH)_2$. Будучи взвешенными в воздухе частицы $Ca(OH)_2$ приведут к ухудшению видимости.

В литературе сообщалось об успешном использовании экзотермических реагентов, в частности гидридов, для предотвращения заморозков на почве.

1.9. Гетерогенная нуклеация льда. ЛОЯ и ЛОР

На рубеже XIX–XX веков с удивлением было обнаружено, что капли в облаках не замерзают при понижении температуры ниже 0 °С, а остаются в переохлажденном состоянии. Эта загадка была разрешена с разработкой теории гомогенных фазовых превращений. Но, как было показано выше, гомогенное образование льда в чистой переохлажденной воде начинается при

температуре ниже -35°C . Однако наблюдения показали, что отдельные капли в облаках замерзают уже при температурах около -10°C . В неконвективных облаках подавляющее большинство капель замерзает при $-18\dots-20^{\circ}\text{C}$. В конвективных облаках переохлажденная вода может наблюдаться до температур гомогенного ядрообразования. Заметим, что температура $-40\dots-42^{\circ}\text{C}$ является пределом переохлаждения капель, как в лабораторных условиях, так и в облаках. При достижении этой температуры происходит быстрое замерзание капель любых размеров, характерных для облаков.

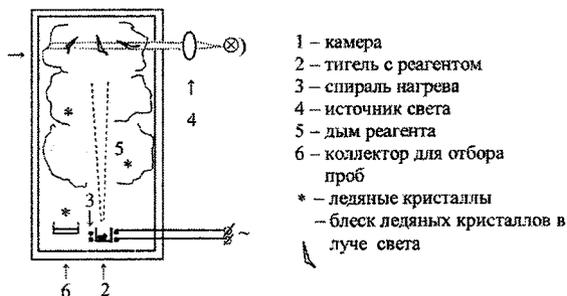


Рис. 1.9.1. Схема установки для демонстрации способа получения льдообразующих ядер

Для решения проблемы появления льда в облаках при сравнительно небольших переохлаждениях была высказана гипотеза о наличии в атмосфере особого рода аэрозольных частиц, которые способствуют нуклеации льда. По аналогии с облачными ядрами конденсации эти гипотетические частицы получили название ядер сублимации. Долгое время поиски ядер сублимации были настойчивыми, но безуспешными. Однако уверенность исследователям придали результаты лабораторных экспериментов, которые показали, что аэрозольные частицы, способные вызвать нуклеацию льда, могут быть получены искусственно.

Для проведения таких опытов требуется холодильная камера (рис. 1.9.1). При введении в нее водяного пара создается переохлажденный туман (на рисунке не показан). В камеру помещают небольшой сосуд из огнеупорного

материала (тигель). Тигель снабжается устройством подогрева (электрическая спираль). В сосуд помещают вещество (реагент), например, *AgI*. Если тигель с реагентом быстро нагреть до достаточно высокой температуры, то реагент начнет испаряться (происходит возгонка). Струйка дыма поднимается вверх, а затем дым распространяется по всему объему камеры. Вскоре в луче света, проходящем через камеру, наблюдатель может увидеть блеск мелких ледяных кристаллов. Эти кристаллы растут и оседают на коллекторе, расположенном в нижней части. Отпечатки их (реплики) могут быть далее исследованы под микроскопом. Позднее аэрозольные частицы естественного происхождения, способствующие образованию льда, были обнаружены в атмосфере. Такие частицы получили название льдообразующих ядер (ЛОЯ).

1.9.1. Льдообразующие ядра

В настоящее время существование ЛОЯ в атмосфере не вызывает сомнений. Более того, изучены многие характеристики этих ядер: концентрация и ее изменчивость во времени и в пространстве, зависимость концентрации от температуры, примерный состав, размеры и свойства.

Исследованы механизмы образования льда на поверхности таких частиц.

Концентрация ЛОЯ. Долгие и трудные поиски ЛОЯ в атмосфере объясняются тем, что концентрация их чрезвычайно мала по сравнению с общей концентрацией аэрозольных частиц. Если концентрация ОЯК в воздушной морской массе составляет 10^8 м^{-3} , а в континентальной $10^9 \dots 10^{10} \text{ м}^{-3}$, то характерная концентрация ЛОЯ при температуре $-20 \text{ }^\circ\text{C}$ всего 10^3 м^{-3} (или 10^0 л^{-1}). Таким образом, концентрация ЛОЯ в миллионы и десятки миллионов раз меньше концентрации ОЯК. Воистину речь идет о поиске иголки в стоге сена. И все-таки поиски увенчались успехом.

Концентрация ЛОЯ сильно зависит от температуры. Речь, разумеется, не идет о том, что с понижением температуры в воздух откуда-то поступают новые ядра. Дело в том, что чем ниже температура, тем большая часть содер-

жащихся в воздухе аэрозольных частиц проявляет льдообразующие свойства. На рис. 1.9.2 приведены результаты измерений концентрации ЛОЯ, полученные в различных районах земного шара от Арктики до Антарктики. Видно, что абсолютные значения концентрации сильно изменяются при переходе от одного района к другому, а точнее говоря, от одной серии измерений к другой.

В каждом отдельном пункте изменчивость $N_{\text{ЛОЯ}}$ соизмерима с изменением ее от одного географического района к другому. Тем не менее, общим для всех приведенных результатов является уверенное увеличение концентрации ЛОЯ с понижением температуры. В диапазоне представленных на рисунке температур это увеличение достигает десятикратного при изменении температуры на $3,5 \dots 4^\circ \text{C}$. Очевидно, что линейное изменение $\lg N_{\text{ЛОЯ}}$ с температурой является только частью более сложной зависимости, тем более, если иметь в виду, что при приближении температуры к 0°C концентрация ЛОЯ стремится к 0.

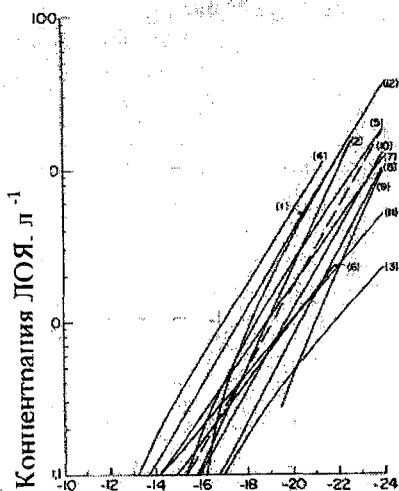


Рис. 1.9.2. Зависимость средней концентрации ЛОЯ от температуры.

1...12 — данные разных авторов, полученные в различных географических районах.
Пунктирная линия — аппроксимация Флетчера.

В литературе часто цитируется аппроксимация зависимости $N_{\text{ЛОЯ}}$ от температуры T формулой, предложенной Флетчером.

$$N_{\text{ЛОЯ}} = C_{\Phi} \exp(-\alpha t), \quad (1.9.1)$$

где t — температура в $^{\circ}\text{C}$, C_{Φ} и α — эмпирические коэффициенты; $C_{\Phi} = 10^{-5} \text{ л}^{-1}$, $\alpha = 0,6 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$. Формула (1.9.1) отражает экспоненциальное изменение $N_{\text{ЛОЯ}}$ с температурой. Некоторый изъян формулы (1.9.1) проявляется в том, что при $t = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$ значение $N_{\text{ЛОЯ}}$ не равно нулю ($N_{\text{ЛОЯ}} = C_{\Phi}$). Более гибкой является аппроксимация вида

$$N_{\text{ЛОЯ}} = C' t^2 \exp(-\alpha' t), \quad (1.9.2)$$

Если приравнять значения концентраций ЛОЯ, полученных по формулам (1.9.1) и (1.9.2) при двух реперных температурах, например, -10 и $-20 \text{ }^{\circ}\text{C}$, то можно найти коэффициенты $C' = 4 \cdot 10^{-7} \text{ л}^{-1}$, $\alpha' = 0,46 \text{ }^{\circ}\text{C}^{-1}$. Формула (1.9.2) автоматически дает $N_{\text{ЛОЯ}} = 0$ и $dN_{\text{ЛОЯ}}/dt = 0$ при $t = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$.

Заметим, что поскольку концентрация ОЯК с высотой убывает, а концентрация ЛОЯ с понижением температуры и, следовательно, с увеличением высоты растет, то доля ЛОЯ с высотой увеличивается, оставаясь, впрочем, много меньше единицы.

Происхождение и состав ЛОЯ. Многоотрудные поиски ЛОЯ в атмосфере породили немало гипотез об их происхождении, включая и такое экзотическое, как взезное (продукты сгорания метеоров и метеоритов). По современным представлениям источниками ЛОЯ являются те же процессы и механизмы, которые порождают атмосферный аэрозоль, включая ОЯК. Принципиальное различие между ОЯК и ЛОЯ заключается в том, что первые являются гигроскопическими, чаще всего растворимыми в воде, а вторые — нерастворимыми и плохо смачиваемыми. Реальные аэрозольные частицы редко бывают однородными, чаще всего это конгломераты, образовавшиеся в ре-

зультате коагуляции более мелких частиц различного химического состава, растворимых и нерастворимых.

Основным источником ЛОЯ в атмосфере является земная поверхность: частицы глины, песка, поднимаемые ветром, и продукты выветривания горных пород. Наиболее распространенными ЛОЯ являются такие минералы как каолинит ($Al_4Si_4O_{10}(OH)_8$), монтмориллонит ($Na(Mg, Al)_2Si_4O_{10}(OH)_2 \cdot 4H_2O$), кварц (SiO_2). Свойствами ЛОЯ обладают в той или иной мере многие соли и окислы металлов как естественного, так и антропогенного происхождения. Часть таких ЛОЯ поступает в атмосферу вместе с выбросами сталелитейных и алюминиевых производств, тепловых электростанций, автомобильного транспорта. Некоторую долю льдообразующих ядер составляют частицы органического происхождения, попадающие в атмосферу, например, в результате лесных пожаров или сгорания органических топлив. Особую группу представляют отдельные виды бактерий (живых и погибших), проявляющих льдообразующие свойства. В частности, это бактерии, колонии которых развиваются в опавшей листве, в морской воде. Такие ЛОЯ называют *биогенными*.

Механизмы (моды) действия ЛОЯ. Универсальной теории нуклеации льда на аэрозольных частицах не существует, как не существует, по видимому, и универсального механизма действия ЛОЯ. В физике облаков выделяют четыре различных механизма формирования ледяных зародышей и соответствующие им четыре вида льдообразующих ядер (Рис. 1.9.3).

1. Ядра осаждения. Зародышевые ледяные кристаллы на поверхности инородных частиц образуются непосредственно из пара. Ядра этого вида проявляют свои льдообразующие свойства в воздухе, где относительная влажность над водой меньше насыщающей, но над льдом наблюдается пересыщение, то есть при условии $E_d \leq e \leq E_b$. Предполагается, что при этих условиях конденсация водяного пара на негигроскопических поверхностях отсутству-

ет, так что осуществляется прямой переход пар-лед. (Правило Оствальда не распространяется на гетерогенные процессы).

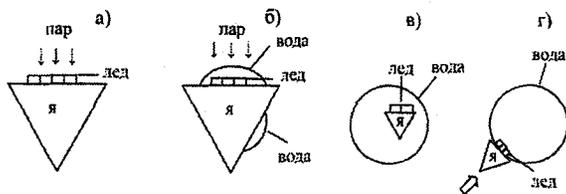


Рис. 1.9.3. Виды ЛОЯ.

а) ядро осаждения, б) конденсационное ядро замерзания,
 в) иммерсионное ядро, г) контактное ядро.

2. *Конденсационные ядра замерзания.* Если влажность над водой больше насыщающей, то на поверхности нерастворимой аэрозольной частицы (достаточного размера) начинается конденсация водяного пара. Поверхность частицы или часть ее покрывается пленкой воды. На границе вода-ядро формируются зародышевые ледяные кристаллы. Когда какой-либо из таких кристаллов достигает критического размера, он быстро растет, замораживая всю воду. Ядро превращается в активную ледяную частицу (АЛЧ), которая далее растет по законам диффузии пара.

3. *Иммерсионные ядра замерзания.* Это ядра, находящиеся внутри водяных капель. Они могли быть захвачены каплями из воздуха в результате коагуляции, либо оказаться внутри капли при формировании ее на комбинированных ядрах, содержащих растворимые и нерастворимые компоненты. Ледяные зародыши образуются на поверхности раздела вода-ядро. Как и в случае конденсационных ядер замерзания, ледяной зародыш, имеющий размер больше критического, быстро растет и замораживает всю каплю. Капля превращается в АЛЧ.

4. *Контактные ядра.* Замечено, что переохлажденные капли быстро замерзают, если они сталкиваются с ЛОЯ. При этом образование ледяного за-

родыша происходит в момент контакта ЛОЯ с поверхностью капли. Далее такие зародыши кристаллизуют всю каплю.

На первый взгляд может показаться, что ядра второго и третьего видов не отличаются друг от друга. Однако это не так. Иммерсионные ядра могут находиться в воде без проявления льдообразующих свойств довольно долго. Действие конденсационных ядер заморзания проявляется в том, что в пересыщенном паре пленка воды растет очень быстро. Так же быстро в пленке образуются ледяные зародыши. В этом смысле второй механизм ближе к четвертому, поэтому его часто интерпретируют как механизм *самоконтактной нуклеации*.

Следует иметь в виду, что одни и те же льдообразующие ядра в зависимости от условий могут проявлять свои свойства любым из перечисленных механизмов.

1.9.2. Льдообразующие реагенты

Льдообразующими реагентами (ЛОР) называют вещества, при внесении которых в облако в сильно измельченном (диспергированном) виде создаются искусственные льдообразующие ядра. Первым использованным более полвека назад реагентом было йодистое серебро AgI . Выбор его не был случайным. Дело в том, что параметры кристаллической решетки одной из модификаций йодистого серебра ($\beta - AgI$) практически совпадают с параметрами кристаллической решетки льда Ih . В кристаллохимии широко используется способ выращивания искусственных кристаллов на изоморфной подложке (такой процесс называется эпитаксией). Изоморфность AgI льду Ih послужила основанием для использования йодистого серебра в качестве стимулятора образования ледяных кристаллов. За минувшие годы были испытаны в качестве ЛОР сотни, если не тысячи, различных веществ. Среди них достаточно эффективными оказались соли PbI_2 , CuS , $MgTe$, окислы металлов CuO , Cu_2O , NiO , органические вещества $C_6H_3(OH)_3 \cdot 2H_2O$ (кристал-

логидрат флороглюцина), $(CH_3CHO)_4$ (метальдегид), $C_{10}H_6(OH)_2$ (1,5 – диоксинафталин), специально синтезированные металлоорганические вещества, например, $CuC_{10}H_{14}O_4$ (ацетилацетонат меди).

Качество реагента характеризуется двумя величинами – льдообразующей активностью (ЛОАР) и температурным порогом льдообразования (t_n). Льдообразующей активностью называют количество активных ледяных частиц, формирующихся в облаке при внесении в него единичной массы реагента. ЛОАР зависит от температуры. Самая высокая температура, при которой реагент проявляет свои льдообразующие свойства, называется пороговой (порог температуры). При этой температуре льдообразующая активность становится настолько малой, что ее трудно зарегистрировать. (Практически ЛОАР при этом составляет $10^8 \dots 10^9 \text{ г}^{-1}$). Реагент считается тем эффективнее, чем выше его пороговая температура (ближе к 0°C) и чем больше ЛОАР при заданной температуре.

Вещества, используемые в качестве реагента, должны удовлетворять следующим основным требованиям.

1. *Нерастворимость.* При растворении в воде разрушается поверхность вещества, тем самым исключается возможность упорядоченной ориентации молекул воды, необходимой для образования кристаллической структуры. В то же время для проявления льдообразующих свойств вещество должно обладать гидрофильностью. Требования нерастворимости и гидрофильности плохо совместимы. На практике они удовлетворяются добавлением к реагенту гидрофильных присадок.

2. *Размер.* Важной характеристикой является степень дисперсности реагента. Чем меньше размеры частиц реагента, тем большее число их может быть получено из единичной массы. Однако независимо от механизма нуклеации при заданных условиях жизнеспособными могут быть только ледяные зародыши с размерами больше критического. Напомним, что критиче-

ский радиус жизнеспособных зародышей зависит от температуры (при механизмах конденсационного, иммерсионного и контактного замерзания) и от пересыщения при замерзании осаждения, которое, в конечном счете, также является функцией температуры. Очевидно, что формирование жизнеспособного ледяного зародыша на ЛОЯ или частичке ЛОР энергетически выгодно только в том случае, когда размер ядра оказывается больше размера зародыша. Поэтому очень мелкие частички становятся неэффективными в качестве ЛОЯ.

Исследования показали, что образцы реагента с очень однородной поверхностью (хорошо отполированной) проявляют меньшую льдообразующую способность, чем те, на поверхности которых содержатся многочисленные микроскопические трещины, сколы, выступы, каверны и т. д. Более того, на поверхности реагентов отмечаются, так называемые активные места, на которых происходит образование ледяных зародышей при повторных опытах. Окруженные участками гидрофобной поверхности активные места адсорбируют молекулы воды, которые с понижением температуры встраиваются в ледяную решетку. Размеры активных мест соизмеримы с размерами жизнеспособных зародышей, а значит размеры ЛОЯ должны быть существенно больше их.

3. *Подобие*. Важным условием эффективности реагента является подобие его кристаллической решетки или поверхностных свойств соответствующим характеристикам льда. Это способствует уменьшению энергии, необходимой для образования жизнеспособных ледяных зародышей. Различают три вида подобия.

– *Изоморфность* (Тождество кристаллических структур). В табл. 1.9.1 приведены сведения о параметрах кристаллических решеток для некоторых веществ.

Видно, что кристаллические решетки йодистого серебра и льда являются практически одинаковыми. Этим и объясняют высокий температурный порог

AgI. Кристаллические решетки других веществ в большей или меньшей мере отличаются от решетки льда *lh*. Образование ледяных зародышей связано с необходимостью подстройки (преодоления деформации) кристаллической решетки льда (или подложки). Такая подстройка возможна лишь при сравнительно небольших отличиях строения кристаллов.

Таблица 1.9.1

Параметры кристаллической решетки некоторых веществ

Вещество	Сингония *	Постоянные решетки, нм			Температурный порог, °C
		a_0	b_0	c_0	
Лед- <i>lh</i>	гексагональная	0,452		0,736	
<i>AgI</i>	гексагональная	0,459		0,751	-3...-6
<i>PbI₂</i>	тригональная	0,454		0,686	-4...-7
<i>CuS</i>	гексагональная	0,380		1,64	-4...-8
<i>Cu₂O</i>	кубическая	0,425			-4...-6
<i>C₆H₃(OH)₃·2H₂O</i>	орторомбическая	0,673	1,35 8	0,809	-2...-5
<i>(CH₃CHO)₄</i>	тетрагональная	1,040		0,411	-1...-2

* Сингония – классификационное подразделение кристаллов по признаку симметрии элементарной ячейки кристалла.

Если отличаются не только параметры решетки, но и вид сингонии, рост кристаллов не может быть эпитаксиальным. Для подстройки кристаллов в этом случае требуется дополнительная энергия. Например, *Cu₂O* отличается от льда *lh* и сингонией, и размерами осей. Эпитаксиальный рост льда на подложке *Cu₂O* представляется маловероятным. Однако пороговая температура почти не отличается от t_n для *AgI* и *PbI₂*. Еще большее отличие проявляется между решетками льда и органических веществ. Тем не менее, пороговые температуры для них оказываются даже выше, чем для *AgI*. Это означает, что эффективность льдообразования определяется не только изоморфностью.

– *Подобие водородных связей.* Взаимодействие между молекулами H_2O во льду осуществляется с помощью водородных связей $O...H$. Наличие атомов кислорода или гидроксильных групп на поверхности вещества способствует формированию водородных связей с молекулами пара или воды. Аналогичную природу льдообразования проявляют и биогенные ЛОЯ.

– *Подобие электростатической структуры поверхности,* расположение зарядов полярных молекул на поверхности вещества подобно их расположению на поверхности льда.

В табл. 1.9.1 приведены осредненные по результатам экспериментов различных авторов пороговые температуры без уточнения механизмов нуклеации. Однако современная техника позволяет провести исследования различных механизмов льдообразования по отдельности. В специальных диффузионных камерах создаются и поддерживаются условия, необходимые для проявления того или иного механизма. В табл. 1.9.2 представлены результаты одного из таких исследований, приведенных в книге Янга (1993).

Таблица 1.9.2

Пороговые температуры ($^{\circ}C$) при различных механизмах льдообразования

Вещество	Контактное замерзание	Конденсационное замерзание	Замерзание осажде-ния	Иммерсионное замерзание
Йодистое серебро	-3...-5	-4	-8	-13...-16
Сернистая медь	-6	—	-13	-16
Йодистый свинец	-6	-7	-15	—
Йодистый кадмий	-12	—	-21	—
Метальдегид	-3	-2	-10	—
1,5-диокси-нафталин	-6	-6	-12	—
Флороглюцин	—	-5	-9	—
Каолинит	-5...-12	-10	-19	-32

Несмотря на неполноту данных, представленных в этой таблице, можно отметить вполне очевидные закономерности. Максимальные пороговые температуры наблюдаются при контактном и конденсационном замерзании. Самые низкие пороговые температуры – при иммерсионном замерзании.

На рис. 1.9.4 приведены полученные в тех же опытах оценки числа активных мест на поверхности образца $AgI - AgCl - 4NaCl$ в зависимости от температуры для различных механизмов льдообразования. Нуклеация осаждения начинается уже при сравнительно высоких температурах. Однако число активных мест при иммерсионном замерзании растет значительно быстрее, так что роль механизма осаждения при температуре ниже $-10^\circ C$ становится пренебрежимо малой. Наибольшую эффективность проявляет механизм контактного замерзания. Высокая эффективность контактной нуклеации отмечается различными авторами. Убедительного теоретического обоснования этому явлению до сих пор не дано.

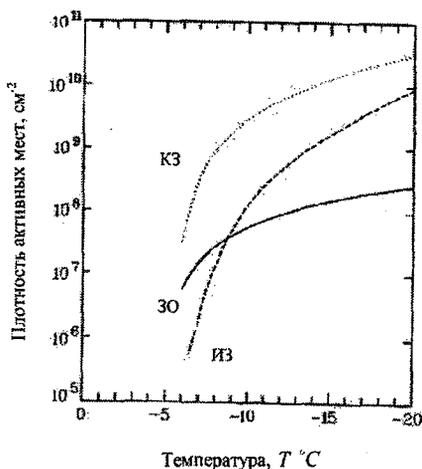


Рис. 1.9.4. Зависимость плотности активных мест от температуры при различных механизмах льдообразования.

ЗО – замерзание осаждения, КЗ – контактное замерзание, ИЗ – иммерсионное замерзание

Простейшее логическое объяснение сводится к различию размеров жизнеспособных зародышей. Как было показано в разд. 1.3, размер жизнеспособного ледяного зародыша, образующегося на поверхности раздела пар-ядро (замерзание при нуклеации осаждения), определяется формулой

$$r_{л|п}^{\nabla} = \frac{2\sigma_{п-л}}{\rho_{л} R_{п} T \ln f_{л}}, \quad (1.9.3)$$

где $f_{л}$ – относительная влажность надо льдом, $f_{л} = \frac{e}{E_{л}}$. Пусть $e = E_{в}$, тогда

$$f_{л} = \frac{E_{в}}{E_{л}} \approx 1 - 0,01(T - T_0), \quad (1.9.4)$$

$$r_{л|п}^{\nabla} = \frac{200 \cdot \sigma_{п-л}}{\rho_{л} R_{п} T (T_0 - T)}. \quad (1.9.5)$$

Размер жизнеспособного ледяного зародыша, образующегося на поверхности ядра в переохлажденной воде (иммерсионная нуклеация), зависит от температуры.

$$r_{л|в}^{\nabla} = \frac{2\sigma_{в-л}}{\rho_{л} L_{в-л} \ln \frac{T_0}{T}} \approx \frac{2\sigma_{в-л} T}{\rho_{л} L_{в-л} (T_0 - T)}, \quad (1.9.6)$$

$$\frac{r_{л|п}^{\nabla}}{r_{л|в}^{\nabla}} = \frac{\sigma_{п-л}}{\sigma_{в-л}} \cdot \frac{L_{в-л}}{0,01 R_{п} T^2} \approx \frac{\sigma_{п-л}}{\sigma_{в-л}} \approx 4. \quad (1.9.7)$$

Это означает, что размер ледяного жизнеспособного зародыша в воде существенно меньше размера такого же зародыша в паре. Если в популяции ледяных зародышей на поверхности ядра в паре жизнеспособные зародыши отсутствуют, но существует некоторое число зародышей, размеры которых заключены в интервале от $r_{л|п}^{\nabla}$ до $r_{л|в}^{\nabla}$, то при столкновении ядра с переохлажденной каплей они становятся жизнеспособными.

При характерных размерах льдообразующих частиц, меньших 1 мкм, основным механизмом столкновения является броуновская коагуляция. Определенный вклад в коагуляцию ЛОЯ с переохлажденными каплями вносят также механизмы термофореза и диффузиофореза.

Термофорез – движение аэрозольных частиц по градиенту температуры от тепла к холоду. Если капля холоднее окружающего воздуха, то аэрозольные частицы движутся к капле, и наоборот.

Диффузиофорез – движение аэрозольных частиц, увлекаемых диффузионным потоком пара. Если капля растет благодаря диффузии водяного пара, то аэрозольные частицы движутся по направлению к ней. Заметим, что для растущих капель термофорез и диффузиофорез действуют в противоположных направлениях.

1.9.3. Диспергирование и льдообразующая активность реагентов

Как уже отмечалось, чем мельче аэрозольные частицы реагента, тем большее число их может быть получено из одной и той же массы. Однако если размеры частиц меньше или соизмеримы с размерами жизнеспособных зародышей, то они не могут обеспечивать эффективное образование ледяной фазы.

Зададим в качестве условия активности аэрозольной частицы соотношение ее размера a_T с размером жизнеспособного зародыша $r_{дв}^\nabla$ в виде

$$a_T = \bar{k} r_{дв}^\nabla, \quad (1.9.8)$$

где \bar{k} – средний коэффициент пропорциональности ($\bar{k} > 1$).

Три наиболее сильных механизма нуклеации – конденсационное, контактное и иммерсионное замерзания – связаны с образованием ледяных зародышей в переохлажденной воде. Размер жизнеспособного ледяного зародыша $r_{дв}^\nabla$ вычисляется по формуле (1.9.6). В приближенном виде эту формулу можно представить как

$$r_{\text{л/в}}^{\nabla} = \frac{l^*}{T_0 - T}, \quad (1.9.9)$$

где l^* – численный коэффициент; $l^* \approx 4,1 \cdot 10^{-8}$ м·К. Тогда условие активности льдообразующего ядра сводится к виду

$$a_T = \frac{\bar{k}l^*}{T_0 - T}. \quad (1.9.10)$$

Если переохлаждение сравнительно невелико, то условие (1.9.10) выполняется для очень небольшого числа крупных аэрозольных частиц. На рис. 1.9.5 представлены распределения аэрозольных частиц по размерам a и зависимости размера активных аэрозольных частиц a_T от температуры в соответствии с уравнением (1.9.10).

С понижением температуры $r_{\text{л/в}}^{\nabla}$ уменьшается, следовательно, уменьшается и a_T . Доля активных аэрозольных частиц a может быть оценена как

$$a = 1 - F_p(a_T) = \int_{a_T}^{\infty} \eta(a) da, \quad (1.9.11)$$

где $F_p(a_T)$, $\eta(a)$ – функция и плотность распределения частиц по размерам соответственно.

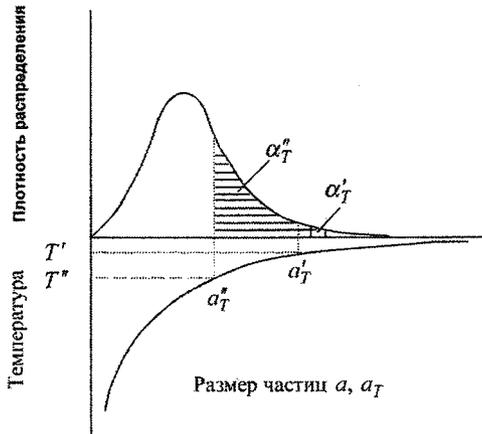


Рис. 1.9.5. Плотность распределения аэрозольных частиц реагента по размерам (вверху) и зависимость минимального размера частиц, проявляющих льдообразующие свойства, от температуры (внизу).

На рис. 1.9.5 при температуре T' значению a_T' соответствует площадь α' , а при T'' значению a_T'' – площадь α'' . Если общее число аэрозольных частиц N_0 , то число частиц, участвующих в нуклеации льда $N_{л,T}$, составит $\alpha_T N_0$. Таким образом с понижением температуры доля АЛЧ, а следовательно, льдообразующая активность реагента повышается. Очевидно, что льдообразующая активность определяется видом распределения частиц реагента по размерам. Последнее зависит от способа диспергирования. В теоретических исследованиях плотность распределения частиц $\eta(a)$ часто задают в форме логарифмически-нормального закона или в виде Г-распределения.

Цепочка превращений. Последовательность превращений исходной массы реагента в АЛЧ показана на рис. 1.9.6. Здесь прямоугольниками обозначены состояния реагента и ледяных частиц, а стрелками – физические процессы, отражающие переходы из одного состояния в другое. С физической точки зрения мы имеем дело с фазовыми превращениями собственно реагента и гетерогенной нуклеацией льда на его поверхности. Сильный нагрев реагента приводит к его быстрому испарению, то есть к переходу в газообразное состояние (возгонка). По мере удаления от источника нагрева газ реагента, перемешиваясь с окружающим воздухом, охлаждается и становится пересыщенным. Создаются условия для гомогенной (газ \rightarrow капли \rightarrow кристаллы реагента) или гетерогенной (газ \rightarrow кристаллы) нуклеации реагента. Образование жизнеспособных ледяных зародышей на частицах реагента осуществляется одной из четырех мод нуклеации льда, описанных выше. Состояния 1...4 и процессы 1...3 отражают механизм диспергирования реагента.

Степень диспергированности (измельченности) реагента определяется скоростями нагрева и следующего за ним охлаждения, а также наличием и размерами инородных частиц, присутствующих в среде. На практике способы диспергирования тесно связаны со средствами доставки реагента в облака. В лабораторных условиях диспергирование реагента можно осуществить путем внешнего нагрева, как это показано на рис. 1.9.1. В практике воздейст-

Вий реализация такого приема затруднительна. Широкое распространение получили методы диспергирования, связанные с сжиганием реагента в пиротехнических составах. Эти методы используются при доставке реагента в облако с помощью специальных ракет, которые несут так называемые шашки активного дыма (ШАД). Шашка представляет собой пиротехническую смесь с примесью реагента. На заданном участке траектории ШАД воспламеняется. В облаке образуется «след» аэрозоля реагента. Аналогичный процесс происходит при обстреле облаков пиропатронами с летательных аппаратов.

При обстреле облаков с поверхности земли с помощью артиллерийских орудий реагент закладывается в снаряд, начиненный взрывчатким веществом (ВВ). При взрыве снаряда температура ВВ резко повышается, что приводит к испарению реагента. Последующие стадии образования частиц реагента отражены на рис. 1.9.6.

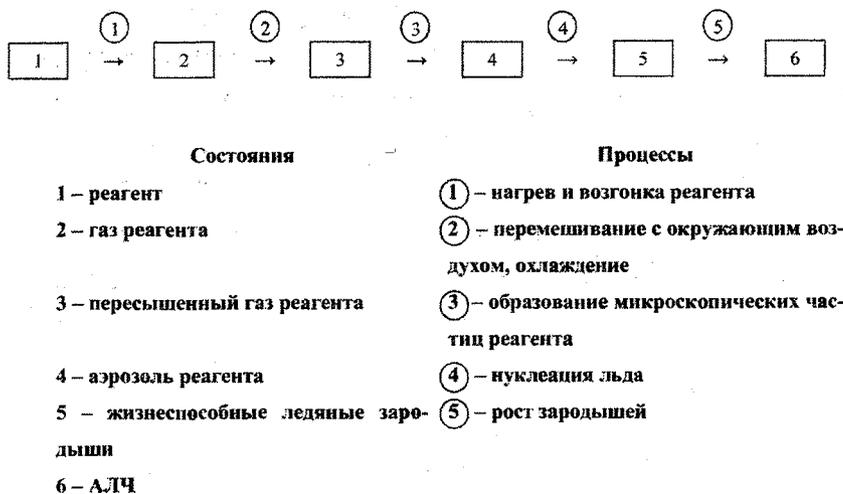


Рис. 1.9.6. Цепочка превращений реагент → АЛЧ

Эффективным способом получения мелкодисперсных частиц йодистого серебра является растворение его в ацетоне. Сжигание ацетона в специ-

альной камере приводит к образованию газа AgI . Перемешиваясь с воздухом этот газ становится пересыщенным, что способствует образованию аэрозольных частиц реагента. Этот способ имеет ряд технологических недостатков, в частности связанных с пожароопасностью.

Оценка льдообразующей активности

Существует два подхода к оценке доли аэрозольных частиц, участвующих в нуклеации льда. Первый из них базируется на представлении о том, что любая аэрозольная частица, размеры которой превышают критический, становится активной (превращается в АЛЧ). Другими словами предполагается, что процесс является детерминированным. Этот подход отражает формула (1.9.11). Другой подход связан с представлением о том, что процесс нуклеации является стохастическим – активация аэрозольных частиц происходит случайным образом в соответствии с вероятностным характером скорости нуклеации. В этом смысле выражение (1.9.11) становится справедливым при бесконечно малой скорости охлаждения. Чтобы объединить оба эти подхода, нужно знать зависимость от температуры скорости образования ледяных зародышей на единичной площади поверхности аэрозольных частиц $J^{\nabla}(T)$. В этом случае

$$\frac{dN_{л,T}}{d\tau} = (\alpha_T N_0 - N_{л,T}) \cdot J^{\nabla}(T) \int_{a_T}^{\infty} 4\pi a^2 \eta(a) da. \quad (1.9.12)$$

где $N_{л,T}$ – число аэрозольных частиц, превратившихся в АЛЧ к моменту времени τ , N_0 – общее число аэрозольных частиц. Если N_0 отнести к единице массы реагента, то $N_{л,T}$ представляет собой льдообразующую активность к моменту времени τ . При $\tau \rightarrow \infty$ производная $dN_{л,T}/d\tau \rightarrow 0$, а $N_{\text{ЛОАР}} \equiv N_{л,T,\infty} = \alpha_T N_0$ – на каждой аэрозольной частице образуется жизнеспособный ледяной зародыш (при $a \geq a_T$).

Применительно к реальным облакам удобно перейти от производной по времени τ к производной по температуре T или по высоте z .

$$d\tau = \frac{d\tau}{dT} dT = \frac{d\tau}{dz} \cdot \frac{dz}{dT} dT = \frac{dT}{w(-\gamma_{\text{ва}})},$$

где w – скорость восходящих потоков, $\gamma_{\text{ва}}$ – влажноадиабатический градиент.

$$-\frac{dN_{\text{л},T}}{dT} = (\alpha_T N_0 - N_{\text{л},T}) \frac{J^{\nabla}(T)}{w\gamma_{\text{ва}}} \int_{a_T}^{\infty} 4\pi a^2 \eta(a) da. \quad (1.9.13)$$

Чтобы проинтегрировать выражение (1.9.13), следует знать функцию распределения частиц по размерам $\eta(a)$, общее число частиц N_0 , предельный размер аэрозольной частицы a_T и скорость нуклеации $J^{\nabla}(T)$.

Теоретические оценки величины $J^{\nabla}(T)$ затруднены, поэтому ее пытаются определить из результатов экспериментов. Обычно эксперимент состоит в том, что в облачную камеру, содержащую переохлажденные взвешенные в воздухе капли воды, вносят аэрозоль реагента. При разных температурах и различном времени выдержки определяют число АЛЧ.

Пусть характеристики дисперсности аэрозоля $\eta(a)$ и N_0 известны (как входные параметры эксперимента), тогда неизвестными в уравнении (1.9.12) остаются a_T и $J^{\nabla}(T)$.

Определим в ходе опыта значения $N_{\text{л},T,\tau}$ для разных моментов времени τ . Интегрируя уравнение (1.9.12) при постоянной температуре, найдем

$$N_{\text{л},T,\tau} = \alpha_T N_0 \left(1 - \exp(-A_{a_T} J^{\nabla}(T) \tau) \right), \quad (1.9.14)$$

где A_{a_T} – общая площадь поверхности аэрозольных частиц с размерами $a \geq a_T$.

$$A_{a_T} = \int_{a_T}^{\infty} 4\pi a^2 \eta(a) da. \quad (1.9.15)$$

Выберем два момента времени τ_1 и τ_2 , для которых при проведении опыта получены значения $N_{л,Т,\tau_1}$ и $N_{л,Т,\tau_2}$. Подставляя их в выражение (1.9.14), получим систему из двух уравнений, решение которой приводит к соотношению

$$\frac{N_{л,Т,\tau_1}}{N_{л,Т,\tau_2}} = \frac{1 - \exp(-A_{aT} \cdot J^{\nabla}(T)\tau_1)}{1 - \exp(-A_{aT} \cdot J^{\nabla}(T)\tau_2)}. \quad (1.9.16)$$

В трансцендентное уравнение (1.9.16) неизвестные величины $J^{\nabla}(T)$ и A_{aT} , зависящие от a_T , входят в виде произведения. Решение может быть упрощено, если выбрать достаточно большое время $\tau_2 \rightarrow \infty$. Тогда

$$J^{\nabla}(T) = -\frac{1}{A_{aT}\tau_1} \cdot \ln\left(1 - \frac{N_{л,Т,\tau_1}}{N_{л,Т,\infty}}\right). \quad (1.9.17)$$

Величина A_{aT} по-прежнему остается неопределенной.

На практике результаты экспериментов обычно представляют в виде зависимости $N_{ЛОАР}$ (или $N_{л,Т,\infty}$) от температуры. Результаты типичного эксперимента, проведенного в облачной камере при диспергировании йодистого серебра, приведены на рис. 1.9.7.

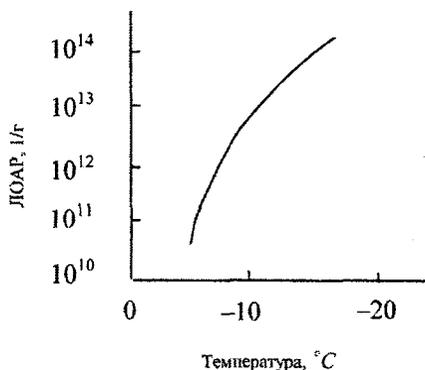


Рис. 1.9.7. Температурная зависимость выхода активных частиц ЛОАР AgI

Распространение результатов лабораторных измерений на реальные условия в облаках ограничено тем, что в такой интерпретации исчезает зависимость числа АЛЧ от времени. Кроме того, неопределенными часто остаются и представления о спектре аэрозольных частиц.

*Оценка характеристик дисперсности аэрозольных частиц
по экспериментальным данным*

Зададим распределение частиц реагента по размерам в виде логарифмически нормального закона.

$$\eta(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot a\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln a - \ln a_r)^2}{2\sigma^2}\right), \quad (1.9.18)$$

где a_r – средний геометрический радиус аэрозольных частиц.

$$a_r = \prod_{i=1}^{N_0} a_i, \quad i = \overline{1, N_0}, \quad a_i \neq 0, \quad (1.9.19)$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N_0 - 1} \cdot \sum_{i=1}^{N_0} (\ln a_i - \ln a_r)^2}. \quad (1.9.20)$$

Введем безразмерную переменную

$$z_i = \frac{(\ln a_i - \ln a_r)}{\sigma} = \frac{\ln(\bar{k}b^* / (T_0 - T)) - \ln a_r}{\sigma}. \quad (1.9.21)$$

Функция распределения

$$F_p = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz = \frac{1}{2} + F(z), \quad (1.9.22)$$

где $F(z)$ – функция Лапласа.

Неизвестными параметрами являются величины N_0 , a_r , σ и \bar{k} . Задача заключается в том, чтобы найти их на основании результатов экспериментов, представленных на рис. 1.9.7. Выберем на кривой ЛЮАР три (можно больше) значения N_j и соответствующие им значения температуры

$t_j = -(T_0 - T)$, $j = \overline{1,3}$, при этом выберем N_j таким образом, чтобы $N_{j+1} = 0,1N_j$.

Составим три уравнения, связывающих значения аргумента z_j с температурой T_j .

$$\sigma \cdot z_1 = \ln \bar{k} b^* - \ln(T_0 - T_1) - \ln a_r, \quad (1.9.23a)$$

$$\sigma \cdot z_2 = \ln \bar{k} b^* - \ln(T_0 - T_2) - \ln a_r, \quad (1.9.23б)$$

$$\sigma \cdot z_3 = \ln \bar{k} b^* - \ln(T_0 - T_3) - \ln a_r, \quad (1.9.23в)$$

Система уравнений (1.9.23) содержит три неизвестных σ , \bar{k} , a_r . Неопределенными пока остаются значения z_1, z_2, z_3 . Система не имеет решения относительно неизвестных. Однако ее можно использовать для нахождения связи между z_j и T_j . Вычтем из первого уравнения последовательно второе и третье и разделим первую разность на вторую. Тогда найдем

$$\delta = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{\ln\left(\frac{T_0 - T_1}{T_0 - T_2}\right)}{\ln\left(\frac{T_0 - T_1}{T_0 - T_3}\right)} = \frac{\ln\left(\frac{t_1}{t_2}\right)}{\ln\left(\frac{t_1}{t_3}\right)}. \quad (1.9.24)$$

Выпишем теперь соотношения, связывающие z_j с N_j .

$$0,5 - F(z_1) = \frac{N_1}{N_0}, \quad (1.9.25a)$$

$$0,5 - F(z_2) = \frac{N_2}{N_0}, \quad (1.9.25б)$$

$$0,5 - F(z_3) = \frac{N_3}{N_0}. \quad (1.9.25в)$$

Разделим уравнение (1.9.25a) последовательно на уравнения (1.9.25б) и (1.9.25в). Имея в виду, что $N_2 = 0,1N_1$, $N_3 = 0,1N_2$, получим

$$0,5 - F(z_1) = 10(0,5 - F(z_2)), \quad (1.9.26a)$$

$$0,5 - F(z_2) = 10(0,5 - F(z_3)) \quad (1.9.26b)$$

Отсюда

$$F(z_2) = 0,45 + 0,1F(z_1), \quad (1.9.27a)$$

$$F(z_3) = 0,45 + 0,1F(z_2). \quad (1.9.27b)$$

Чтобы найти значения z_2 и z_3 достаточно знать значение z_1 . При известном значении z_1 и заданном отношении N_1/N_2 (или N_1/N_3) для теоретического распределения разности $(z_2 - z_1)_{\text{теор}}$ и $(z_3 - z_1)_{\text{теор}}$ являются фиксированными. Их отношение $\delta_{\text{теор}} = (z_2 - z_1)_{\text{теор}} / (z_3 - z_1)_{\text{теор}}$ является функцией z_1 . Используя таблицу функции Лапласа, можно найти $\delta_{\text{теор}}$ для интересующего нас интервала значений z_1 . Зависимость $\delta_{\text{теор}}$ от z_1 аппроксимирована приближенной формулой

$$\delta_{\text{теор}} = \frac{8,2}{12,8 + z_1}. \quad (1.9.28)$$

Отсюда

$$z_1 = \frac{8,2}{\delta_{\text{теор}}} - 12,8. \quad (1.9.29)$$

Приравняв значение δ , рассчитанное по уравнению (1.9.24) к $\delta_{\text{теор}}$, найдем z_1 . Далее по уравнениям (1.9.27а,б) легко определить z_2 и z_3 .

Чтобы найти N_0 , достаточно воспользоваться выражением (1.9.25а).

$$N_0 = \frac{N_1}{0,5 - F(z_1)}. \quad (1.9.30)$$

Обратимся снова к системе уравнений (1.9.23). Объединим неизвестные \bar{k} и a_r . Тогда можно составить три уравнения, в каждом из которых содержится по два неизвестных σ и $\bar{k}b^*/a_r$.

$$z_1 \sigma = \ln(\bar{k}b^* / a_r) - \ln(T_0 - T_1), \quad (1.9.31a)$$

$$z_2 \sigma = \ln(\bar{k}b^* / a_r) - \ln(T_0 - T_2), \quad (1.9.31б)$$

$$z_3 \sigma = \ln(\bar{k}b^* / a_r) - \ln(T_0 - T_3). \quad (1.9.31в)$$

Из первых двух уравнений найдем

$$\sigma_{a,б} = \frac{\ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right)}{z_1 - z_2}.$$

Комбинируя уравнение (1.9.31a) с уравнением (1.9.31в), а уравнение (1.9.31б) с уравнением (1.9.31в), найдем

$$\sigma_{a,в} = \frac{\ln\left(\frac{t_3}{t_1}\right)}{z_1 - z_3},$$

$$\sigma_{б,в} = \frac{\ln\left(\frac{t_3}{t_2}\right)}{z_2 - z_3}.$$

При строгом соответствии результатов экспериментов теоретической модели распределения должно выполняться условие $\sigma_{a,б} = \sigma_{a,в} = \sigma_{б,в}$. В действительности эти значения могут отличаться друг от друга. В качестве окончательного решения возьмем среднее значение

$$\sigma = \frac{1}{3} \left(\frac{\ln\left(\frac{t_2}{t_1}\right)}{z_1 - z_2} + \frac{\ln\left(\frac{t_3}{t_1}\right)}{z_1 - z_3} + \frac{\ln\left(\frac{t_3}{t_2}\right)}{z_2 - z_3} \right). \quad (1.9.32)$$

Аналогично найдем второе неизвестное.

$$\left(\ln\left(\frac{\bar{k}b^*}{a_r}\right) \right)_{a,б} = \frac{z_1 \ln(T_0 - T_2) - z_2 \ln(T_0 - T_1)}{z_1 - z_2},$$

$$\left(\ln \left(\frac{\bar{k}b^*}{a_r} \right) \right)_{a,в} = \frac{z_1 \ln(T_0 - T_3) - z_3 \ln(T_0 - T_1)}{z_1 - z_3},$$

$$\left(\ln \left(\frac{\bar{k}b^*}{a_r} \right) \right)_{б,в} = \frac{z_2 \ln(T_0 - T_3) - z_3 \ln(T_0 - T_2)}{z_2 - z_3}.$$

$$\frac{\bar{k}b^*}{a_r} = \exp \left[\frac{1}{3} \left(\frac{z_1 \ln(T_0 - T_2) - z_2 \ln(T_0 - T_1) + z_1 \ln(T_0 - T_3) - z_3 \ln(T_0 - T_1)}{z_1 - z_3} + \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \frac{z_2 \ln(T_0 - T_3) - z_3 \ln(T_0 - T_2)}{z_2 - z_3} \right) \right] \quad (1.9.33)$$

Зная N_0 , можно найти средний кубический радиус частиц \bar{a}_3 .

$$\bar{a}_3 = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi\rho_{\text{реар}} N_0}},$$

где $\rho_{\text{реар}}$ — плотность реагента.

Для логарифмически нормального распределения связь между \bar{a}_3 и a_r определяется соотношением

$$a_r = \bar{a}_3 \exp\left(-\frac{3}{2}\sigma^2\right). \quad (1.9.34)$$

Таким образом

$$\bar{k} = \frac{a_r}{b^*} \exp \left[\frac{1}{3} \left(\frac{z_1 \ln(T_0 - T_2) - z_2 \ln(T_0 - T_1) + z_1 \ln(T_0 - T_3) - z_3 \ln(T_0 - T_1)}{z_1 - z_3} + \frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \frac{z_2 \ln(T_0 - T_3) - z_3 \ln(T_0 - T_2)}{z_2 - z_3} \right) \right] \quad (1.9.35)$$

Формулы (1.9.30), (1.9.32), (1.9.34) и (1.9.35) дают решение поставленной задачи.

Рассмотрим пример. На графике 1.9.7 выберем три значения N_j : $N_1 = 10^{14,5}$, $N_2 = 10^{13,5}$, $N_3 = 10^{12,5}$ и снимем соответствующие им значения температуры t : $t_1 = -15,5^\circ\text{C}$; $t_2 = -11,0^\circ\text{C}$, $t_3 = -8,2^\circ\text{C}$. Далее после-

довательно рассчитаем $\delta = 0,54$ и $z_1 = 2,42$. Найденное по таблицам функции Лапласа значение $F(z_1) = F(2,42) = 0,4922$. Рассчитаем значения $F(z_2) = 0,49922$, и $F(z_3) = 0,499922$. Соответственно $z_2 = 3,15$ и $z_3 = 3,80$.

Теперь можно рассчитать характеристики дисперсности $N_0 = 4,0 \cdot 10^{16} \text{ г}^{-1}$, $\sigma = 0,46$, $a_r = 7,35 \cdot 10^{-9} \text{ м}$ и $\bar{k} = 8,4$. Следует обратить внимание на то, что радиус аэрозольной частицы в среднем почти в десять раз должен превышать радиус жизнеспособного ледяного зародыша.

К сожалению, информация, представленная на рис. 1.9.7, недостаточна для расчета $J^\nabla(T)$. Чтобы решить эту задачу, необходимо иметь данные о $N_{л,г,r_1}$, полученные при сравнительно небольшом интервале времени наблюдения τ_1 .

1.10. Теоретическая модель гетерогенной нуклеации льда

Используем для оценки числа и скорости образования ледяных зародышей подход, который был разработан для описания гомогенной нуклеации (см. разд. 1.6). Суть этого подхода заключается в предположении того, что на поверхности инородной частицы в результате флуктуаций формируются зародыши разных размеров. Распределение их по размерам является квазистатическим в том смысле, что устанавливается динамическое равновесие между спектрами зародышей возникающих и разрушающихся. При переходе системы в метастабильное состояние (увеличение пересыщения или переохлаждения) наиболее крупные из зародышей становятся жизнеспособными. Задача заключается в том, чтобы оценить число и скорость их образования.

В рассматриваемой модели предполагается, что любой зародыш критического размера становится жизнеспособным, то есть процесс считается детерминированным, в то время как в реальных условиях превращение зародышей в жизнеспособные носит, по-видимому, вероятностный характер. Строго говоря, следовало бы одновременно рассматривать как гетерогенный,

так и гомогенный процессы. Энергия гетерогенного образования зародышей, как это показано в разд. 1.3, существенно меньше, чем гомогенного, поэтому вкладом последнего можно пренебречь.

Рассмотрим два механизма гетерогенной нуклеации – непосредственное осаждение пара на поверхность ЛОЯ и иммерсионное замерзание.

1.10.1. Нуклеация льда при осаждении пара

Предположим, что на поверхности инородного ядра, окруженного водяным паром, образуются ледяные зародыши различного размера. Функцию распределения аппроксимируем выражением, аналогичным использованному ранее при описании гомогенного процесса.

$$n_{лп}^{\nabla}(r_{л}) = B_{лп}^{\nabla} \exp\left(-b_{лп}^{\nabla} \left(r_{л}^2 - r^{\circ 2}\right)\right), \quad (1.10.1)$$

где $n_{лп}^{\nabla}(r_{л})$ – плотность распределения зародышей по размерам (доля зародышей, отнесенных к единице длины), $B_{лп}^{\nabla}$ и $b_{лп}^{\nabla}$ – параметры распределения, $r_{л}$ – радиус кривизны выпуклой поверхности зародыша, форма которого задается в виде шарового сегмента, r° – радиус объема, приходящегося на одну молекулу H_2O в воде (пренебрегая различием плотностей воды и льда).

В отличие от формулы (1.6.4) выражение для параметра $b_{лп}^{\nabla}$ запишем в виде

$$b_{лп}^{\nabla} = \frac{4\pi\gamma_{лп}\sigma_{п-л}\Psi_{лп}}{3kT}. \quad (1.10.2)$$

Множитель $\Psi_{лп}$ учитывает фактор гетерогенности, то есть уменьшение энергии необходимой для образования зародыша на поверхности ядра по

сравнению с гомогенным процессом. Для механизма осаждения запишем его в виде

$$\Psi_{л|п} = (2 + \Theta_{ос.}) \cdot (1 - \Theta_{ос.})^2 / 4.$$

Здесь $\Theta_{ос.}$ – так называемый, контактный параметр. Термин контактный параметр используется вместо термина угла смачивания (см. разд. 1.3.2), который для ледяных зародышей не имеет смысла.

Для фазового превращения пар-лед (осаждение)

$$\Theta_{ос.} = (\sigma_{п-я} - \sigma_{л-я}) / \sigma_{п-л}. \quad (1.10.3)$$

Из условия нормировки функции распределения зародышей по размерам найдем

$$B_{л|п}^{\nabla} = \sqrt{\frac{b_{л|п}^{\nabla}}{\pi}} \cdot \frac{\exp\left(-b_{л|п}^{\nabla} r^{\circ 2}\right)}{0,5 - F\left(\sqrt{2b_{л|п}^{\nabla}} r\right)}. \quad (1.10.4)$$

Чтобы оценить общее число зародышей, содержащихся на единичной поверхности ядра, следует приравнять их массу массе молекул, «участвующих» в формировании зародышей. Будем считать, что число таких молекул определяется содержанием их в слое толщиной, равной длине свободного пробега, и составляет $\left(\frac{e}{kT}\right)^{2/3}$.

Тогда их масса или поверхностная плотность

пара $\rho_{п}^{\nabla} = \left(\frac{e}{kT}\right)^{2/3} \cdot \frac{\mu}{N_A}$, где e – парциальное давление водяного пара, N_A

– число Авогадро, μ – молярная масса воды. Масса зародыша на поверхности

ядра $m_3 = \frac{4}{3} \pi r_l^3 \rho_l \Psi_{л|п}$. Таким образом

$$N_{0,л|п,r}^{\nabla} = \int_r^{\infty} \frac{4}{3} \pi r_l^3 \rho_l \Psi_{л|п} B_{л|п}^{\nabla} \exp\left(-b_{л|п}^{\nabla} \left(r_l^2 - r^{\circ 2}\right)\right) dr = \rho_{п}^{\nabla}. \quad (1.10.5)$$

Отсюда общее число зародышей, содержащихся на единичной поверхности ЛОЯ

$$N_{0, \lambda | n, T}^{\nabla} = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \frac{\rho_{\text{л}}^{\nabla}}{\rho_{\text{л}}} \frac{(b_{\lambda | n}^{\nabla})^{3/2}}{\Psi_{\lambda | n}^{\nabla} \left(b_{\lambda | n}^{\nabla} r^{\circ 2} + 1 \right)} \frac{\left(0,5 - F \left(\sqrt{2b_{\lambda | n}^{\nabla}} r^{\circ} \right) \right)}{\exp \left(-b_{\lambda | n}^{\nabla} r^{\circ 2} \right)}. \quad (1.10.6)$$

Доля жизнеспособных зародышей определяется как

$$\int_{r_{\lambda | n, T}^{\nabla}}^{\infty} B_{\lambda | n}^{\nabla} \exp \left(-b_{\lambda | n}^{\nabla} \left(r_{\lambda}^2 - r^{\circ 2} \right) \right) dr,$$

а число их при температуре T составляет

$$N_{\lambda | n, T}^{\nabla} = N_{0, \lambda | n, T}^{\nabla} \frac{\left(0,5 - F \left(\sqrt{2b_{\lambda | n}^{\nabla}} \cdot r_{\lambda | n}^{\nabla} \right) \right)}{\left(0,5 - F \left(\sqrt{2b_{\lambda | n}^{\nabla}} \cdot r^{\circ} \right) \right)}. \quad (1.10.7)$$

Нижний предел интегрирования $r_{\lambda | n, T}^{\nabla}$ вычисляется по формуле

$$r_{\lambda | n}^{\nabla} = \frac{2\sigma_{\text{п-л}}}{\rho_{\text{л}} R_{\text{л}} T \ln f_{\lambda}}.$$

Механизм осаждения проявляется, если водяной пар пересыщен относительно льда $f_{\text{л}} > 1$, но не пересыщен относительно воды $f_{\text{в}} \leq 1$. Пусть при исходной температуре T_1 парциальное давление пара $e = E_{\text{л}, T_1}$. При понижении температуры относительная влажность увеличивается. При этом

$$f_{\text{л}} = \frac{E_{\text{л}, T_1}}{E_{\text{л}, T}} = \exp \left(-\frac{L_{\text{п-л}}}{R_{\text{л}}} \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T} \right) \right) \approx 1 - 0,09(T - T_1). \quad (1.10.8)$$

Предельное значение влажности надо льдом, ограничивающее возможность превращения пар-лед на поверхности ЛОЯ, составляет

$f_{\text{л}, T_2} = E_{\text{в}, T_2} / E_{\text{л}, T_2}$, где T_2 — температура, при которой $E_{\text{л}, T_1} = E_{\text{в}, T_2}$. Ис-

пользуя линейное приближение зависимости E_b / E_n от температуры и подставляя в выражение (1.10.8) T_2 вместо текущего значения T , найдем понижение температуры $(T_2 - T_1)$, необходимое для получения предельного пересыщения надо льдом.

$$1 - 0,01(T_2 - T_0) = 1 - 0,09(T_2 - T_1),$$

отсюда

$$T_2 - T_1 = 0,125(T_1 - T_0). \quad (1.10.9)$$

Следовательно, предельные значения влажности, совместимой с возможностью механизма осаждения, и радиуса жизнеспособного зародыша составляют соответственно

$$f_{n,T_2} = 1 - 0,011(T_1 - T_0), \quad (1.10.10)$$

$$r_{n,T_2}^{\nabla} = \frac{2\sigma_{n-l}}{\rho_l R_n T_1 \cdot 0,011(T_0 - T_1)}. \quad (1.10.11)$$

При этом выражение для максимального числа ледяных зародышей, образующихся на единичной площади ЛОЯ при понижении температуры от T_1 до T_2 , в соответствии с формулой (1.10.7) принимает вид

$$N_{n,T_2}^{\nabla} = N_{0,n,T_1}^{\nabla} \cdot \frac{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{n,l}^{\nabla}} \cdot r_{n,T_2}^{\nabla}\right)\right)}{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{n,l}^{\nabla}} \cdot r\right)\right)}. \quad (1.10.12)$$

В интервале температур $T_2 \leq T \leq T_1$ из выражения (1.10.7) можно найти скорость нуклеации $J_{n,T}^{\nabla}$

$$J_{n,T}^{\nabla} = \frac{dN_{n,T}^{\nabla}}{dT} \cdot \dot{T}. \quad (1.10.13)$$

Упрощая дальнейшие выкладки, пренебрежем зависимостью от температуры величин σ_{n-l} , L_{n-l} и ρ_l и преобразуем выражение для $r_{n,T}^{\nabla}$ к виду

$$r_{лп, T}^{\nabla} = \frac{2\sigma_{п-л}}{\rho_{л} L_{п-л}} \cdot \frac{T_1}{(T_1 - T)} \quad (1.10.14)$$

Скорость нуклеации ледяных зародышей из пара в предположении детерминированности процесса

$$J_{лп}^{\nabla}(T) = \frac{N_{0, лп, T_1}^{\nabla} \cdot \dot{T}}{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{лп}^{\nabla}} \cdot r\right)\right)} \cdot \sqrt{\frac{b_{лп}^{\nabla}}{\pi}} \cdot \frac{2\sigma_{п-л}}{\rho_{л} L_{п-л}} \cdot \frac{T_1}{(T_1 - T)^2} \exp\left(-b_{лп}^{\nabla} \cdot r_{лп, T}^{\nabla}\right) \quad (1.10.15)$$

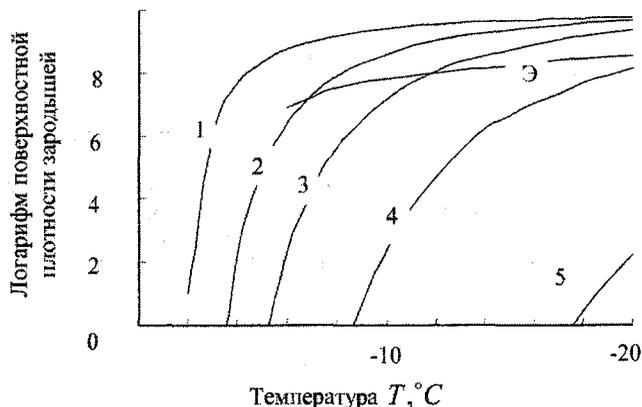


Рис. 1.10.1. Поверхностная плотность жизнеспособных ледяных зародышей ($N_{лп, T_2}^{\nabla}$ в см^{-2}), образующихся в результате осаждения водяного пара на ЛЮЯ при различных значениях контактного параметра $\Theta_{ос}$.

1. $\Theta_{ос} = 0,99$; 2. $\Theta_{ос} = 0,98$; 3. $\Theta_{ос} = 0,97$; 4. $\Theta_{ос} = 0,95$; 5. $\Theta_{ос} = 0,90$; Э — плотность активных мест нуклеации, полученных экспериментально (см. разд. 1.9)

На рис. 1.10.1 приведены зависимости $N_{лп, T_2}^{\nabla}$ от исходной температуры T_1 для различных значений контактного параметра $\Theta_{ос}$. Величина $\Theta_{ос}$ является еще одним (дополнительно к $U_{лп}$) подгоночным параметром модели. Для активных льдообразующих ядер $\sigma_{л-я}$ существенно меньше $\sigma_{п-я}$. В свою очередь $\sigma_{п-я}$ близко к $\sigma_{п-л}$. Таким образом, значение $\Theta_{ос}$ должно быть близким к единице, но меньше ее.

Сравнивая кривые, приведенные на этом рисунке, с результатами экспериментов, можно отметить неплохое соответствие теории эксперименту при $\Theta_{\text{ос.}} = 0,97$.

1.10.2. Иммерсионная нуклеация льда

Рассмотрим образование ледяных зародышей на поверхности льдообразующих ядер, полностью погруженных в воду. В модели иммерсионной нуклеации, в отличие от механизма осаждения, необходимо уточнить ряд величин.

1. При определении контактного параметра $\Theta_{\text{им.}}$ следует использовать поверхностное натяжение на границах вода-ядро и вода-лед

$$\Theta_{\text{им.}} = (\sigma_{\text{в-я}} - \sigma_{\text{л-я}}) / \sigma_{\text{в-л}}. \quad (1.10.16)$$

Различия между $\sigma_{\text{в-я}}$, $\sigma_{\text{л-я}}$ и $\sigma_{\text{в-л}}$ не столь существенны как между $\sigma_{\text{п-я}}$, $\sigma_{\text{л-я}}$ и $\sigma_{\text{п-л}}$. Поэтому характерные значения $\Theta_{\text{им.}}$ должны быть заметно меньше единицы.

2. Число молекул, приходящихся на единицу поверхности воды, составляет $(\rho_{\text{в}} N_{\text{А}} / \mu)^{2/3}$. Будем считать, что в образовании зародышей участвуют молекулы, содержащиеся в слое, толщина которого примерно равна высоте ступеньки нарастающего льда, что соответствует числу молекулярных слоев $h = 10^2 \dots 10^3$. Отсюда масса молекул, участвующих в образовании зародышей на единичной поверхности ЛОЯ (поверхностная плотность молекул)

$$\rho_{\text{в}}^{\nabla} = \left(\frac{\rho_{\text{в}} N_{\text{А}}}{\mu} \right)^{2/3} \cdot h \frac{\mu}{N_{\text{А}}} = \rho_{\text{в}}^{2/3} \left(\frac{\mu}{N_{\text{А}}} \right)^{1/3} h. \quad (1.10.17)$$

3. В модели иммерсионной нуклеации необходимо учесть энергию активации превращения вода-лед. Как и при гомогенной нуклеации льда (см. разд.

1.6), используем здесь только приращение энергии активации $\delta_{\text{акт.}}$, связанное с отклонением температуры от равновесной $T_0 = 273K$. Тогда при произвольной температуре T

$$\delta_{\text{акт.}} = 0,073(T_0 - T) \cdot 10^{-20},$$

где $\delta_{\text{акт.}}$ в джоулях.

Зададим начальное распределение ледяных зародышей по размерам при температуре $T_1 = T_0$. Повторяя рассуждения предыдущего подраздела, последовательно выпишем необходимые соотношения.

Функция распределения ледяных зародышей по размерам

$$\eta_{\text{лв}}^{\nabla}(r_{\text{л}}) = B_{\text{лв}}^{\nabla} \exp\left(-b_{\text{лв}}^{\nabla} \left(r_{\text{л}}^2 - r_{\text{с}}^2\right)\right). \quad (1.10.18)$$

Параметры распределения

$$b_{\text{лв}}^{\nabla} = \frac{4\pi\gamma_{\text{лв}}\sigma_{\text{в-л}}}{3kT_0} \Psi_{\text{лв}} \Theta_{\text{им.}}, \quad (1.9.19)$$

где $\Psi_{\text{лв}} = (2 + \Theta_{\text{им.}}) \cdot (1 - \Theta_{\text{им.}})^2 / 4$.

$$B_{\text{лв}}^{\nabla} = \sqrt{\frac{b_{\text{лв}}^{\nabla}}{\pi}} \frac{\exp\left(-b_{\text{лв}}^{\nabla} r_{\text{с}}^2\right)}{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{\text{лв}}^{\nabla}} r_{\text{с}}\right)\right)}, \quad (1.9.20)$$

Найдем число зародышей, приходящихся на единицу поверхности ЛОЯ, приравняв их общую массу к поверхностной плотности воды $\rho_{\text{в}}^{\nabla}$.

$$N_{0,\text{лв}}^{\nabla} = \frac{3}{2\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\rho_{\text{в}}^{\nabla}}{\rho_{\text{л}}} \cdot \frac{\left(b_{\text{лв}}^{\nabla}\right)^{3/2}}{\Psi_{\text{лв}} \left(b_{\text{лв}}^{\nabla} r_{\text{с}}^2 + 1\right)} \cdot \frac{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{\text{лв}}^{\nabla}} r_{\text{с}}\right)\right)}{\exp\left(-b_{\text{лв}}^{\nabla} r_{\text{с}}^2\right)}. \quad (1.9.21)$$

(Заметим, что при фиксированной исходной температуре T_0 значение $N_{0,л|в}^{\nabla}$ остается постоянным).

Условное число зародышей, становящихся жизнеспособными при произвольной температуре $T < T_0$, без учета энергии активации

$$N_{л|в,T}^{\nabla(y)} = N_{0,л|в}^{\nabla} \cdot \frac{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{л|в}^{\nabla}} \cdot r_{л|в,T}^{\nabla}\right)\right)}{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{л|в}^{\nabla}} \cdot r\right)\right)}. \quad (1.9.22)$$

Размер жизнеспособного зародыша

$$r_{л|в,T}^{\nabla} = \frac{2\sigma_{в-л}}{\rho_{л}L_{в-л} \ln \frac{T_0}{T}} \approx \frac{2\sigma_{в-л}}{\rho_{л}L_{в-л}} \cdot \frac{T}{(T_0 - T)}. \quad (1.9.23)$$

Условную скорость нуклеации (без учета энергии активации – см. п. 1.6) запишем в виде

$$J_{л|в}^{\nabla(y)}(T) = \frac{dN_{л|в,T}^{\nabla(y)}}{d\tau} = \frac{N_{0,л|в}^{\nabla} \dot{T}}{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{л|в}^{\nabla}} \cdot r\right)\right)} \cdot \sqrt{\frac{b_{л|в}^{\nabla}}{\pi}} \cdot \frac{2\sigma_{в-л}}{\rho_{л}L_{в-л}} \cdot \frac{T_0}{(T_0 - T)^2} \exp\left(-b_{л|в}^{\nabla} \cdot r_{л|в,T}^{\nabla 2}\right). \quad (1.9.24)$$

Действительную скорость нуклеации найдем как

$$J_{л|в}^{\nabla}(T) = J_{л|в}^{\nabla(y)} \cdot \exp\left(-\frac{\delta_{\text{акт}}}{kT}\right). \quad (1.9.25)$$

Теперь, чтобы найти действительное число ледяных жизнеспособных зародышей, следует проинтегрировать выражение для скорости нуклеации по времени

$$N_{л|в,T}^{\nabla} = \int_0^{\tau} J_{л|в}^{\nabla}(T) d\tau, \quad (1.10.26)$$

либо возвращаясь к переменной T ,

$$V_{\text{д.в.},T}^{\nabla} = \int_{T_0}^T \frac{N_{0,\text{д.в.}}^{\nabla}}{\left(0,5 - F\left(\sqrt{2b_{\text{д.в.}}^{\nabla}} \cdot r\right)\right)} \cdot \sqrt{\frac{b_{\text{д.в.}}^{\nabla}}{\pi}} \cdot \frac{2\sigma_{\text{в-л}}}{\rho_{\text{л}}L_{\text{в-л}}} \cdot \frac{T_0}{(T_0 - T)^2} \cdot \exp\left(-b_{\text{д.в.}}^{\nabla} \cdot r_{\text{д.в.},T}^{\nabla 2}\right) \cdot \exp\left(-\frac{\delta_{\text{вст.}}}{kT}\right) dT. \quad (1.10.27)$$

Результаты расчетов $N_{0,\text{д.в.},T}^{\nabla}$ как функции температуры T приведены на рис. 1.10.2.

Расчеты выполнены при различных значениях $\Theta_{\text{им}}$ для $h = 100$ и $\gamma_{\text{в|л}} = 0,5$. Можно отметить, что расчеты качественно согласуются с экспериментальными данными. В качественном отношении разумные результаты достигаются при значениях $\Theta_{\text{им}}$ в интервале от 0,5 до 0,6. Это обстоятельство представляется вполне ожидаемым в связи с отмеченными выше различиями между $\Theta_{\text{ос}}$ и $\Theta_{\text{им}}$.

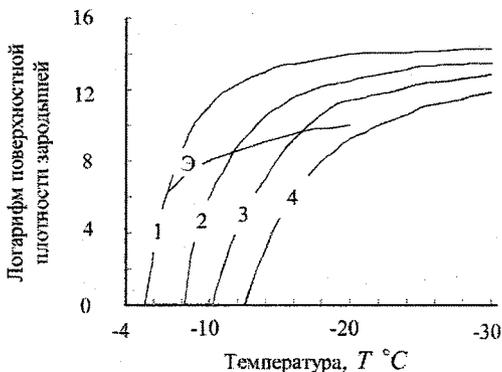


Рис. 1.10.2. Поверхностная плотность жизнеспособных ледяных зародышей ($N_{\text{д.в.},T}^{\nabla}$ в см^{-2}), образующихся в результате иммерсионного механизма нуклеации на ЛОЯ при различных значениях контактного параметра $\Theta_{\text{им}}$.

1. $\Theta_{\text{им}} = 0,8$; 2. $\Theta_{\text{им}} = 0,7$; 3. $\Theta_{\text{им}} = 0,6$; 4. $\Theta_{\text{им}} = 0,5$; Э – экспериментальные данные (см. рис. 1.9.4)

1.11. Определение суммарной скорости нуклеации льда по экспериментальным данным

Как уже отмечалось, образование ледяных зародышей в переохлажденной воде осуществляется двумя механизмами – гетерогенным и гомогенным. При этом гетерогенная нуклеация осуществляется на поверхности ЛОЯ. Размерность скорости гетерогенной нуклеации $\text{м}^2 \cdot \text{с}^{-1}$. Гомогенная нуклеация осуществляется в объеме воды, размерность ее скорости – $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$. Для получения суммарной скорости нуклеации составляющие ее следует привести к одинаковой размерности. Так как скорость гетерогенной нуклеации при имперсионной моде $J_{\text{л}}^{\text{V}}$ относится к единице площади поверхности льдообразующих ядер, то для перехода к единице объема переохлажденной воды следует учесть размеры и концентрацию ЛОЯ в воде

$$J_{\text{л,гетер.}}^{\text{V}} = A_{\text{а}} \cdot n_{\text{а}} \cdot J_{\text{л}}^{\text{V}}, \quad (1.11.1)$$

где $A_{\text{а}}$ – средняя площадь поверхности, а $n_{\text{а}}$ – объемная концентрация аэрозольных частиц в воде. Таким образом, суммарная скорость нуклеации

$$J_{\text{л}}(T) = J_{\text{л,гетер.}}^{\text{V}} + J_{\text{л,гом.}} \quad (1.11.2)$$

Использование полученных выше теоретических оценок скоростей нуклеации затруднено в связи с неопределенностью ряда параметров, входящих в формулы. Поэтому при расчетах чаще всего используют эмпирические зависимости, построенные на основе лабораторных исследований. Различными исследователями проведены многочисленные опыты по замораживанию переохлажденных капель воды. В этих опытах фиксировали размер капель, скорость их охлаждения, температуру появления ледяных зародышей. Использовалась вода различной степени очистки и разного происхождения: дистиллированная вода, слабые растворы солей, жидкие осадки, растопленные снег, крупа, град.

Для перехода от результатов эксперимента к искомой величине скорости нуклеации $J_n(T)$ можно использовать формулу, связывающую скорость нуклеации со скоростью замерзания совокупности капель

$$\frac{dn_n}{d\tau} = (n_0 - n_n) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 J_n(T), \quad (1.11.3)$$

где n_n – число капель, превратившихся в ледяные частицы, n_0 – общее число капель, использованных в эксперименте, r – средний кубический радиус капель. Поделив обе части уравнения на n_0 , перейдем к безразмерной величине $W = \frac{n_n}{n_0}$ – доля замерзших капель.

$$\frac{dW}{d\tau} = (1 - W) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 J_n(T). \quad (1.1.4)$$

В зависимости от методики эксперимента фиксируются различные характеристики замерзания. Соответственно изменяется переход от этих характеристик к величине $J_n(T)$.

1. Если отдельные капли выдерживаются при постоянной температуре, то фиксируется время появления в них первого ледяного зародыша. В этом случае определяется время $\tau_{0,5}$, при котором замерзает половина капель.

Проинтегрировав уравнение (1.11.4) при постоянных r и $J_n(T)$, получим

$$-\ln(1 - W) = \frac{4}{3} \pi r^3 J_n(T) \tau. \quad (1.11.5)$$

При $W = 0,5$ и $\tau = \tau_{0,5}$

$$J_n(T) = \frac{0,52}{\pi r^3 \tau_{0,5}}. \quad (1.11.6)$$

2. Условие выдерживания капель при постоянной температуре трудно реализуемо. В экспериментах неизбежно появляется этап охлаждения капель

от начальной положительной температуры до заданного переохлаждения.

Удобно проводить опыты, охлаждая капли с постоянной скоростью $\frac{dT}{d\tau} = \dot{T}$.

Перейдем в уравнении (1.11.4) от переменной τ к переменной T . Полагая r и \dot{T} постоянными, проинтегрируем это уравнение по W от 0 до W и по температуре от $T_0 = 273K$ до T

$$-\ln(1-W) = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi r^3}{\dot{T}} \int_{T_0}^T J_n(T) dT. \quad (1.11.7)$$

Фиксируя в опытах температуру $T_{0,5}$, при которой замерзает половина капля ($W = 0,5$), получим

$$\int_{T_0}^{T_{0,5}} J_n(T) dT = \frac{0,52 \dot{T}}{\pi} \cdot \frac{1}{r^3}. \quad (1.11.8)$$

Проводя опыты с каплями разных размеров, можно построить график зависимости $T_{0,5}$ от радиуса (диаметра) каплей. Выполним численное дифференцирование этой зависимости. С этой целью разобьем ее на интервалы, определив для каждого из них среднее значение r_j и $T_{0,5;j}$, $j = \overline{1, k}$, k - число интервалов. Возьмем дифференциалы от правой и левой частей выражения (1.11.8). Тогда

$$J_n(T) = \frac{0,52}{\pi} \cdot \frac{\dot{T}}{(T_{0,5;j+1} - T_{0,5;j})} \cdot \left(\frac{1}{r_{j+1}^3} - \frac{1}{r_j^3} \right) \quad (1.11.9)$$

или

$$J_n(T) = \frac{4,2}{\pi} \cdot \frac{\dot{T}}{(T_{0,5;j+1} - T_{0,5;j})} \cdot \left(\frac{1}{d_{j+1}^3} - \frac{1}{d_j^3} \right). \quad (1.11.10)$$

Последняя формула была использована ранее в разд. 1.5.

3. Более полная информация о скорости замерзания может быть получена при наблюдении за совокупностью капель одного размера. Капли распределяются на поверхности подложек (или на границе двух нейтральных

жидкостей, одна из которых обладает плотностью большей, а другая меньшей, чем плотность воды). Совокупность капель охлаждается с постоянной скоростью и фотографируется под микроскопом. Рассчитывается доля капель ΔW , закристаллизовавшихся при понижении температуры на ΔT .

В соответствии с уравнением (1.11.4)

$$J_d(T) = \frac{1}{1-W} \cdot \frac{\Delta W}{\Delta T} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\dot{T}}{\pi r^3} \quad (1.11.11)$$

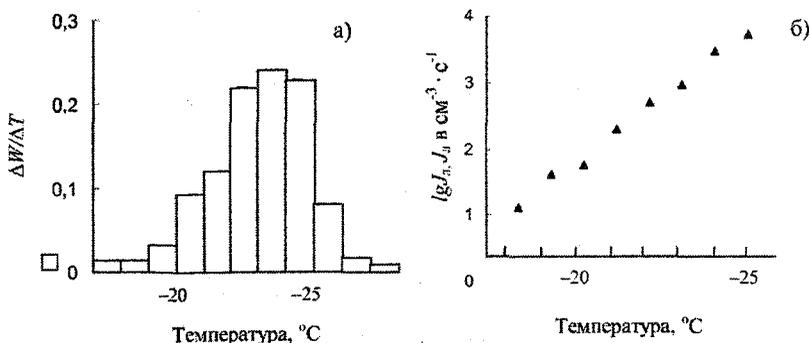


Рис.1.11.1. а) Скорость кристаллизации переохлажденных капель, эксперимент. Радиус капель $r = 300$ мкм, скорость охлаждения $\dot{T} = 3$ °С/мин, число капель $N_0 = 798$; б) Зависимость скорости нуклеации от температуры. Расчет по формуле (1.11.11)

На рис. 1.11.1а приведены результаты типового опыта по замораживанию капель дистиллированной воды. Результаты расчета $J_d(T)$ по этим данным приведены на рис.1.11.1б. Из обработки исключены крайние справа и слева интервалы в связи с малым числом капель, относящихся к ним.

Зависимости $J_d(T)$, полученные разными авторами, сильно различаются между собой. Разброс значений $J_d(T)$ при одних и тех же температурах составляет несколько порядков. Это связано с большой изменчивостью концентрации и состава ЛОЯ в воздухе, а, следовательно, и в замораживаемой воде.

Обобщая результаты многочисленных экспериментов, Бекряев (1991) предложил как наиболее вероятную зависимость для скорости нуклеации в виде

$$J_{\text{д}}(T) = -3 \cdot 10^2 t \cdot \exp(-0,6t), \quad (1.11.12)$$

где $J_{\text{д}}(T)$ в $\text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$, t – температура в $^{\circ}\text{C}$. Эту формулу рекомендуется использовать в диапазоне температур от 0 до $-35, \dots, -36^{\circ}\text{C}$.

Интересно, что кривые, построенные по результатам экспериментов различных авторов в координатах $\lg J_{\text{д}}(T)$ и t , имеют примерно одинаковый наклон, соответствующий показателю экспоненты $(-0,6t)$, в то время как предэкспоненциальный множитель может изменяться на несколько порядков. Любопытно отметить, что такой же наклон имеет кривая Флетчера, отражающая зависимость концентрации ЛОЯ в атмосфере от температуры (см. рис. 1.9.2 и формулу (1.9.1)). Это обстоятельство лишний раз подчеркивает зависимость скорости нуклеации от концентрации ЛОЯ.

Более детальный анализ экспериментальных данных показывает, что скорость нуклеации существенно превышает ту, которая задана формулой (1.11.12) при температурах ниже -36°C . По литературным источникам при температуре, примерно равной -36°C , в «игру вступает» механизм гомогенной нуклеации льда. Наклон кривых резко увеличивается. Чтобы учесть это обстоятельство, можно предложить уточнение формулы (1.11.12), задав ее в виде

$$J_{\text{д}}(T) = -3 \cdot 10^2 t \cdot [\exp(-0,6t) + \omega_1 \exp(-\omega_2 t)]. \quad (1.11.13)$$

В качестве минимального значения множителя ω_2 можно принять $\omega_2 = 1,2$, постулируя таким образом вдвое больший наклон кривой $J_{\text{д}}(T)$. Для того чтобы выбрать значение множителя ω_1 , приравняем составляющие скорости гомогенной и гетерогенной нуклеаций $\exp(-0,6t) = \omega_1 \exp(-1,2t)$.

Отсюда при температуре $-36\text{ }^{\circ}\text{C}$ получим $\omega_1 = 10^{-9}$. Таким образом рабочая формула для $J_{\text{д}}(T)$ принимает вид

$$J_{\text{д}}(T) = -3 \cdot 10^2 t \cdot \exp(-0,6t) \left(1 + 10^{-9} \exp(-0,6t) \right). \quad (1.11.14)$$

Результаты экспериментов, по которым построена эта формула ограничиваются температурой $-42\text{ }^{\circ}\text{C}$.

ГЛАВА 2. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОСАДКООБРАЗОВАНИЯ

Модальный радиус облачных капель обычно находится в интервале 5...12 мкм. Характерный радиус капель дождя из слоистообразных облаков составляет 0,1...1 мм. Радиус капель из кучево-дождевых облаков достигает 2...3 мм. Размеры твердых частиц (крупа, град) могут доходить до нескольких сантиметров. Таким образом, чтобы облачная капля превратилась в частицу осадков, ее размер должен увеличиться в 100...1000 раз, а масса в $10^6...10^9$ раз. Рост частиц в облаках определяется двумя механизмами – диффузией водяного пара и коагуляцией. Термин диффузионный рост облачных частиц одинаково применим для описания роста капель и ледяных частиц. Мы будем использовать этот термин вместо распространенных в литературе словосочетаний конденсационный рост капель и сублимационный рост ледяных частиц. (О неточности термина сублимация мы уже говорили в начале первой главы).

Механизмы диффузионного и коагуляционного роста облачных частиц являются аддитивными в том смысле, что скорость изменения массы m со временем τ за счет диффузии не зависит от скорости коагуляции и наоборот.

$$\frac{dm}{d\tau} = \left(\frac{dm}{d\tau}\right)_{\text{дифф.}} + \left(\frac{dm}{d\tau}\right)_{\text{коаг.}}$$

2.1. Диффузионный рост капель

Диффузионный поток пассивной примеси (газа, пыли, тепла и т.п.) через единичную поверхность определяется градиентом концентрации

$$P_1 = -D_c \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (2.1.1)$$

где D_c – коэффициент диффузии, c – концентрация примеси, x – направление, перпендикулярное поверхности.

Поток пассивной примеси к сферической частице радиусом r (или от нее) в предположении изотропности процесса можно представить в виде

$$P_x = -4\pi x^2 D_c \frac{\partial c}{\partial x}, \quad (2.1.2)$$

где x – радиус сферы, concentрически охватывающей частицу ($r \leq x \leq \infty$).

Если рассматривать в качестве пассивной примеси водяной пар, то формулу (2.1.2) можно представить в виде

$$P_x = -4\pi x^2 D_{\Pi} \frac{\partial \rho_{\Pi}}{\partial x}, \quad (2.1.3)$$

где D_{Π} – коэффициент молекулярной диффузии водяного пара, далее просто D , ρ_{Π} – концентрация, то есть плотность водяного пара.

В установившемся состоянии $P_x = -\frac{dm}{d\tau}$, где m – масса капли, $m = \frac{4}{3}\pi\rho_{\text{в}}r^3$. Если принять скорость $\frac{dm}{d\tau}$ постоянной, то разделяя переменные x и ρ_{Π} и интегрируя выражение (2.1.3) по x от $x=r$ до $x=\infty$ и по ρ_{Π} от $\rho_{\Pi} = \rho_r$ до $\rho_{\Pi} = \rho_{\infty}$, получим

$$\frac{dm}{d\tau} = 4\pi r D (\rho_{\infty} - \rho_r), \quad (2.1.4)$$

2.1.1. Диффузионный рост изолированной капли

Рассмотрим рост отдельной капли, находящейся в среде с постоянными во времени температурой T_{∞} и плотностью пара ρ_{∞} . Используя уравнение состояния водяного пара, перейдем от плотности пара к относительной влажности

$$\rho_{\infty} = \frac{f_{\infty} E_{T_{\infty}}}{R_{\Pi} T_{\infty}}, \quad (2.1.5a)$$

$$\rho_r = \frac{f_r E_{T_r}}{R_{\Pi} T_r}, \quad (2.1.5b)$$

где f_{∞} и f_r – относительные влажности среды при $x = \infty$ и непосредственно у поверхности капли ($x = r$) соответственно, T_{∞} и T_r – температуры среды

при $x = \infty$ и капли воды, E_{T_∞} и E_{T_r} – давления насыщенного пара при температурах T_∞ и T_r , R_{II} – газовая постоянная водяного пара.

Подставляя выражения (2.1.5) в уравнение (2.1.4), получим

$$\frac{dm}{d\tau} = 4\pi r \frac{DE_{T_\infty}}{R_{\text{II}}T_\infty} \left(f_\infty - f_r \cdot \frac{E_{T_r}}{E_{T_\infty}} \cdot \frac{T_\infty}{T_r} \right). \quad (2.1.6)$$

Уравнение (2.1.6) является достаточно общим выражением скорости диффузионного роста или скорости испарения капель. Оно может быть использовано при различных приближениях.

1. Пренебрежем различием между температурами капли и окружающей среды ($T_\infty = T_r$) и влиянием кривизны поверхности капли и ее солёности ($E_{T_\infty} = E_{T_r}$). При этом $f_r = 1$. Тогда уравнение (2.1.6) принимает вид

$$\left(\frac{dm}{d\tau} \right)_1 = 4\pi r \frac{DE_{T_\infty}}{R_{\text{II}}T_\infty} (f_\infty - 1) \quad (2.1.7)$$

От скорости роста массы капли можно перейти к скорости изменения ее радиуса $\frac{dr}{d\tau}$. Имея в виду, что

$$\frac{dm}{d\tau} = 4\pi \rho_{\text{B}} r^2 \frac{dr}{d\tau},$$

получим

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)_1 = \frac{DE_{T_\infty}}{\rho_{\text{B}} R_{\text{II}} T_\infty} \frac{1}{r} (f_\infty - 1). \quad (2.1.8)$$

Легко видеть, что скорость роста массы капли тем больше, чем больше ее радиус r , в то время как скорость роста радиуса обратно пропорциональна r .

При постоянных T_∞ и f_∞ выражение (2.1.8) легко интегрируется.

$$r(\tau) = \sqrt{r^2(0) + \frac{2DE_{T_\infty}}{\rho_{\text{B}} R_{\text{II}} T_\infty} (f_\infty - 1)\tau}, \quad (2.1.9)$$

где $r(0)$ – исходный радиус капли в момент времени $\tau = 0$.

2. Переход молекул из парообразного состояния в жидкое (и наоборот) связан с выделением (затратами) энергии фазовых превращений. Растущая капля нагревается. Вследствие этого давление насыщенного пара у ее поверхности E_{T_r} увеличивается, что приводит к замедлению скорости роста капли, поскольку второе слагаемое в скобках в выражении (2.1.6) растет. Нагретая капля отдает тепло окружающей среде посредством теплопроводности.

Избыточное теплосодержание капли (по сравнению с теплосодержанием при температуре $T_0 = 273 K$)

$$Q = c_v m (T_r - T_0), \quad (2.1.10)$$

где c_v – удельная теплоемкость воды, температура капли считается равной температуре ее поверхности T_r .

Изменение теплосодержания капли во времени:

$$\frac{dQ}{d\tau} = c_v m \frac{dT_r}{d\tau} + c_v (T_r - T_0) \frac{dm}{d\tau} \quad (2.1.11)$$

определяется двумя факторами:

– выделением тепла фазового превращения пар-вода

$$\left(\frac{dQ}{d\tau} \right)_1 = L_{п-в} \frac{dm}{d\tau}, \quad (2.1.12)$$

где $L_{п-в}$ – удельная энергия фазового превращения пар-вода;

– теплообменом капли с окружающим воздухом

$$\left(\frac{dQ}{d\tau} \right)_2 = -4\pi r \lambda (T_r - T_\infty), \quad (2.1.13)$$

λ – коэффициент теплопроводности воздуха.

Выражение (2.1.13) непосредственно получается из уравнения (2.1.2), если в последнем поток тепла P_x обозначить через $\left(\frac{dQ}{d\tau} \right)_2$, заменить D_c и c на λ и T соответственно и выполнить интегрирование от T_r до T_∞ .

Приравнивая правую часть выражения (2.1.11) сумме выражений (2.1.12) и (2.1.13) и полагая, что для установившегося состояния $\frac{dT_r}{d\tau} = 0$, получим

$$c_B(T_r - T_0) \frac{dm}{d\tau} = L_{п-в} \frac{dm}{d\tau} - 4\pi r \lambda (T_r - T_\infty). \quad (2.1.14)$$

Решим это уравнение относительно разности температур $(T_r - T_\infty)$.

$$T_r - T_\infty = \frac{(L_{п-в} - c_B(T_\infty - T_0)) \frac{dm}{d\tau}}{c_B \frac{dm}{d\tau} + 4\pi r \lambda}. \quad (2.1.15)$$

Используя уравнение Клаузиуса-Клапейрона, отношение $\frac{E_{T_r}}{E_{T_\infty}}$ в формуле (2.1.6) заменим на

$$\frac{E_{T_r}}{E_{T_\infty}} = \exp\left(\frac{L_{п-в}}{R_n} \left(\frac{1}{T_\infty} - \frac{1}{T_r}\right)\right) \approx 1 + \frac{L_{п-в}}{R_n} \cdot \frac{(T_r - T_\infty)}{T_\infty^2}. \quad (2.1.16)$$

Чтобы найти $\frac{dm}{d\tau}$, следует подставить выражение (2.1.15) в формулу

(2.1.16) и найденное отношение $\frac{E_{T_r}}{E_{T_\infty}}$ в уравнение (2.1.6). Решение получен-

ного выражения относительно $\frac{dm}{d\tau}$ оказывается очень громоздким. Чтобы его упростить, пренебрежем в знаменателе выражения (2.1.15) произведением

$c_B \frac{dm}{d\tau}$ по сравнению с $4\pi r \lambda$, примем также $\frac{T_\infty}{T_r} \approx 1$. Тогда

$$\frac{dm}{d\tau} = \frac{4\pi r D E_{T_\infty} (f_\infty - f_r)}{R_n T_\infty} \left(1 + \frac{f_r D E_{T_\infty} L_{п-в} (L_{п-в} - c_B(T_\infty - T_0))}{R_n^2 T_\infty^3 \lambda}\right)^{-1}. \quad (2.1.17)$$

Для сравнительно крупных капель влияние кривизны поверхности и солености на скорость роста становится незначительным, $f_r \rightarrow 1$. В этом случае выражение (2.1.17) можно привести к унифицированной форме

$$\left(\frac{dm}{d\tau}\right)_2 = \left(\frac{dm}{d\tau}\right)_1 \cdot \varphi_2(T_\infty), \quad (2.1.18)$$

где

$$\varphi_2(T_\infty) = \left(1 + \frac{DE_{T_\infty} L_{п-в} (L_{п-в} - c_B (T_\infty - T_0))}{R_{п}^2 T_\infty^3 \lambda}\right)^{-1}. \quad (2.1.19)$$

Соответственно для $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2$ получим

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_2 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)_1 \cdot \varphi_2(T_\infty) \quad (2.1.20)$$

Заметим, что множитель $\varphi_2(T_\infty)$ в форме (2.1.19) не зависит от размера капли, его значение определяется, прежде всего, температурой среды. (Значение $\varphi_2(T_\infty)$ изменяется также с изменением давления воздуха в той мере, в какой D и λ зависят от него).

3. Учтем теперь роль кривизны поверхности капли и влияние растворенных в ней солей (облачных ядер конденсации). Эти факторы определяют отличие от единицы величины f_r .

Ранее в разделе 1.8 получена зависимость относительной равновесной влажности $\overset{\circ}{f}$ над каплей, образовавшейся на гигроскопическом ядре, от радиуса. Полагая $\overset{\circ}{f} \approx f_r$, запишем

$$f_r = 1 + \frac{r^+}{r} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right), \quad (2.1.21)$$

где r_0 – радиус капли, образовавшейся на ядре и находящейся в равновесии с паром при $f = 1$.

Подставим выражение (2.1.21) в формулу (2.1.17)

$$\left(\frac{dm}{d\tau}\right)_3 = \frac{4\pi DE_{T_\infty}}{R_\Pi T_\infty} \left(f_\infty - 1 - \frac{r^+}{r} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right) \times$$

$$\times \left(1 + \frac{\left(1 + \frac{r^+}{r} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right) DE_{T_\infty} L_{\Pi-B} (L_{\Pi-B} - c_B (T_\infty - T_0))}{R_\Pi^2 T_\infty^3 \lambda} \right)^{-1}$$
(2.1.22)

или

$$\left(\frac{dm}{d\tau}\right)_3 = \left(\frac{dm}{d\tau}\right)_1 \cdot \varphi_{23}(T_\infty, r_0, r),$$
(2.1.23)

где

$$\varphi_{23}(T_\infty, r_0, r) = \frac{1 - \frac{r^+}{r} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{f_\infty - 1}}{1 + \frac{\left(1 + \frac{r^+}{r} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \right) DE_{T_\infty} L_{\Pi-B} (L_{\Pi-B} - c_B (T_\infty - T_0))}{R_\Pi^2 T_\infty^3 \lambda}}$$
(2.1.24)

Для облачных капель при $r > r_0$ выражение (2.1.22) может быть упро-

щено

$$\left(\frac{dm}{d\tau}\right)_3 = \left(\frac{dm}{d\tau}\right)_2 \left(1 - \frac{r^+}{r} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{f_\infty - 1} \right),$$
(2.1.22a)

или

$$\left(\frac{dm}{d\tau}\right)_3 = \left(\frac{dm}{d\tau}\right)_1 \cdot \varphi_2(T_\infty) \varphi_3(r_0, r),$$
(2.1.25)

где

$$\varphi_3(r_0, r) = 1 - \frac{r^+}{r} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2} \right) \cdot \frac{1}{f_\infty - 1}.$$
(2.1.26)

4. Используемые выше уравнения диффузии предполагают, что процесс миграции молекул пара является непрерывным. Однако когда молекулы приближаются к поверхности капли, непрерывность потока нарушается: часть молекул, столкнувшихся с каплей, поглощается ею, другая часть отражается, отскакивает. Кроме того, молекулы испаряются с поверхности капли. Вследствие этого скорость роста капли замедляется. Этот эффект называется кинетическим. Он проявляется в окрестностях капли на расстоянии Δ , примерно равном длине свободного пробега молекул пара. Чтобы учесть кинетический эффект, обычно «склеивают» уравнения диффузионного и кинетического роста. Скорость кинетического роста определяется выражением

$$\left(\frac{dm}{d\tau}\right)' = 4\pi r^2 \kappa (\rho_{r+\Delta} - \rho_r) v, \quad (2.1.27)$$

где $\rho_{r+\Delta}$ – плотность пара на расстоянии Δ от поверхности капли, v – средняя скорость теплового движения молекул пара, κ – коэффициент конденсации (отношение числа молекул, поглощенных каплей, к числу молекул, столкнувшихся с ней). Напомним, что $v = \left(\frac{R_u T_\infty}{2\pi}\right)^{1/2}$.

Диффузионный поток массы при $x = r + \Delta$ в соответствии с уравнением (2.1.4)

$$\left(\frac{dm}{d\tau}\right)'' = 4\pi(r + \Delta)D(\rho_\infty - \rho_{r+\Delta}). \quad (2.1.28)$$

Приравняем правые части уравнений (2.1.27) и (2.1.28) и найдем величину $\rho_{r+\Delta}$

$$\rho_{r+\Delta} = \frac{r^2 \kappa v \rho_r + (r + \Delta) D \rho_\infty}{r^2 \kappa v + (r + \Delta) D}. \quad (2.1.29)$$

Подставляя выражение (2.1.29) в уравнение (2.1.28), найдем скорость роста капли с учетом кинетического эффекта

$$\left(\frac{dm}{d\tau}\right)'' = 4\pi r D (\rho_\infty - \rho_r) \cdot \left(\frac{r}{r + \Delta} + \frac{D}{r \kappa v}\right)^{-1}. \quad (2.1.30)$$

Формула скорости роста капли с учетом предыдущих уточнений принимает вид

$$\left(\frac{dm}{d\tau}\right)_4 = \left(\frac{dm}{d\tau}\right)_1 \cdot \varphi_2(T_\infty) \cdot \varphi_3(r_0, r) \cdot \varphi_4(r, \text{кин.}), \quad (2.1.31)$$

где

$$\varphi_4(r, \text{кин.}) = \left(\frac{r}{r+\Delta} + \frac{D}{rKv}\right)^{-1} = \left(\frac{r}{r+\Delta} + \frac{D}{rK} \cdot \left(\frac{2\pi}{R_0 T_\infty}\right)^{1/2}\right)^{-1}. \quad (2.1.32)$$

При характерных значениях $\Delta \approx 10^{-7}$ м, $K \approx 0,04$ и $T_\infty \approx 273$ К зависимость $\varphi_4(r, \text{кин.})$ может быть аппроксимирована простой формулой

$$\varphi_4(r, \text{кин.}) = \frac{r}{b_k + r}, \quad (2.1.33)$$

где $b_k = 6 \cdot 10^{-6}$ м.

Легко видеть, что кинетический эффект сильно проявляется при малых размерах капель. Для крупных капель роль его становится пренебрежимо малой.

5. Сферическая симметрия диффузионного и кинетического потоков предполагает неподвижность капли относительно окружающей среды. В реальных условиях капли перемещаются относительно воздуха под действием силы тяжести – с тем большей скоростью, чем больше размер капли. Градиент плотности пара перед движущейся каплей резко возрастает. В тылу капли градиент естественно уменьшается. Однако суммарный эффект приводит к увеличению скорости роста капли. Строгая постановка задачи о притоке пара к капле требует совместного решения уравнений диффузии пара и тепла и уравнений гидродинамического обтекания капли воздушным потоком. Если при этом учесть также деформацию капли, то решение становится слишком громоздким. Для инженерных задач обычно используют эмпирические соотношения. Распространенным является прием введения в уравнение скорости роста капли коэффициента вентиляции (ветрового множителя). В литературе

часто используется следующая форма коэффициента вентиляции $\varphi_5(V(r))$ в зависимости от чисел Рейнольдса N_{Re} и Шмидта N_{Sc}

$$\varphi_5(V(r)) = 1,00 + 0,108X^2 \text{ при } X < 1,4, \quad (2.1.34a)$$

$$\varphi_5(V(r)) = 0,78 + 0,308X \text{ при } X > 1,4, \quad (2.1.34б)$$

где $X = N_{Sc}^{1/3} \cdot N_{Re}^{1/2}$, $N_{Sc} = \frac{v}{D}$, $N_{Re} = \frac{2rV(r)}{v}$, v – кинематический коэффициент вязкости воздуха, D – коэффициент молекулярной диффузии пара, $V(r)$ – скорость падения капли радиуса r относительно воздуха.

При детальном анализе следует учесть, что коэффициенты вентиляции для потока пара и теплообмена капли с окружающей средой выражаются по-разному. Параметр X для потока тепла определяется как $X_T = N_{Pr}^{1/3} \cdot N_{Re}^{1/2}$, где число Прандтля $N_{Pr} = c_p \rho v / \lambda$, c_p – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении. Значения коэффициентов в формулах (2.1.34a,б) остаются теми же. Поскольку численные значения N_{Sc} и N_{Pr} практически не отличаются, то при расчетах различие коэффициентов для потоков пара и тепла можно пренебречь.

Хорошей аппроксимацией результатов измерений скорости падения капель относительно воздуха служит формула

$$V(r) = 9,6 \left(1 - \exp(-1,2 \cdot 10^3 r) \right) \left(1 - \exp(-1,2 \cdot 10^4 r) \right) \varphi_1(z) \quad (2.1.35)$$

Здесь $V(r)$ в м/с, если r в метрах. Множитель $\varphi_1(z)$ учитывает изменение скорости падения капли с высотой, связанное с изменением плотности воздуха. С достаточной для практических целей точностью его можно задать в виде

$$\varphi_1(z) = \sqrt{\rho_{\text{возд.,0}} / \rho_{\text{возд.}}(z)} = \sqrt{\frac{p_0}{p(z)} \cdot \frac{T(z)}{T_0}}$$

где $\rho_{\text{возд.,0}}$ – плотность воздуха при нормальных условиях, то есть при $p_0 = 1013,6$ гПа и $T_0 = 293$ К.

Таким образом, формула скорости роста массы капли (при $r > r_0$) с учетом коэффициента вентиляции принимает вид

$$\left(\frac{dm}{d\tau}\right)_5 = \left(\frac{dm}{d\tau}\right)_1 \cdot \varphi_2(T_\infty) \cdot \varphi_3(r_0, r) \cdot \varphi_4(r, \text{кин.}) \cdot \varphi_5(V(r)), \quad (2.1.36)$$

Соответственно формула скорости роста радиуса капли

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_5 = \left(\frac{dr}{d\tau}\right)_1 \cdot \varphi_2(T_\infty) \cdot \varphi_3(r_0, r) \cdot \varphi_4(r, \text{кин.}) \cdot \varphi_5(V(r)). \quad (2.1.37)$$

Чтобы проиллюстрировать вклад каждого из рассмотренных здесь факторов, на рис. (2.1.1а) представлены зависимости отношений $\left(\frac{dm}{d\tau}\right)_\mu / \left(\frac{dm}{d\tau}\right)_1$,

$\mu = \overline{1,5}$ от радиуса капли. При $\mu = 1$ эта зависимость представляет собой прямую, параллельную оси абсцисс. Множитель $\varphi_2(T_\infty)$ не зависит от r , поэтому при $\mu = 2$ отношение скоростей роста также имеет вид прямой, лежащей ниже прямой 1. При $\mu = 3$ отношение скоростей отражается кривой 3, заметно отличающейся от прямой 2 при малых значениях r и сливающейся с ней при больших. Следует отметить, что применение выражения для $\varphi_3(r_0, r)$ ограничено со стороны малых значений r радиусом капли насыщенного раствора r_n при полном растворении ОЯК, то есть $r \geq r_n = \left(\frac{r_0^2 r^+}{C_c}\right)^{1/3}$, C_c – по-

стоянная соли (см. разд. 1.8).

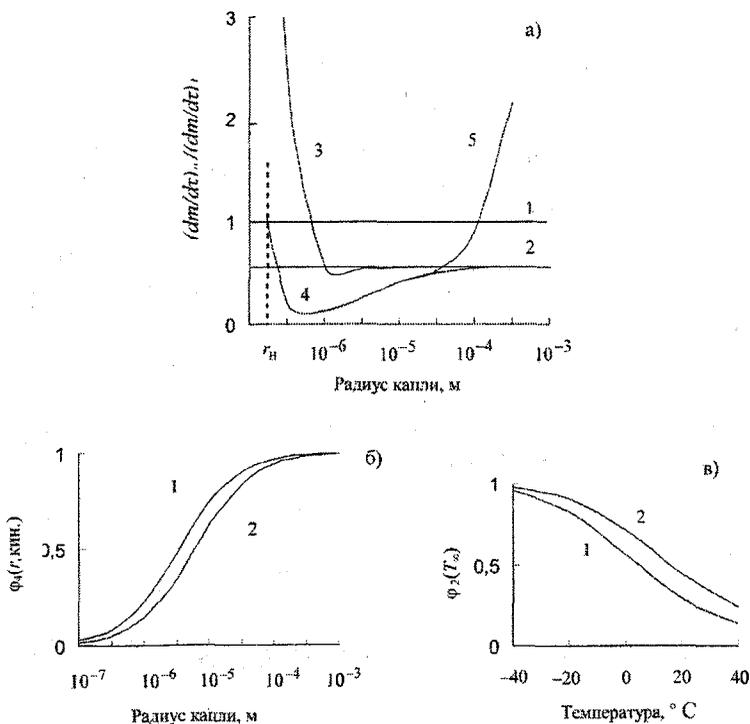


Рис. 2.1.1. Влияние различных факторов на скорость роста капли.

а) Зависимость отношения $\left(\frac{dm}{dt}\right)_\mu / \left(\frac{dm}{dt}\right)_1$ от радиуса капли. Исходные данные: $r_0 = 10^{-6}$ м, $r_n = 1,75 \cdot 10^{-7}$ м, $T_\infty = 273$ К; б) Зависимость от радиуса капли множителя $\varphi_4(r, \text{кин.})$: 1 – расчет по формуле (2.1.32), 2 – по формуле (2.1.33); в) Зависимость от температуры множителя $\varphi_2(T_\infty)$: 1 – расчет при $p=1000$ гПа, 2 – при $p=500$ гПа.

Кинетический эффект сильно проявляется при малых радиусах капли — кривая 4, а вентиляционный при больших r — кривая 5.

На рис. 2.1.1б показана зависимость кинетического множителя $\varphi_4(r, \text{кин.})$ от размера капли, рассчитанная по общей формуле (2.1.32) при $T_\infty = 273$ К и по упрощенной формуле (2.1.33). Различия между кривыми находятся в пределах точности описания множителя $\varphi_4(r, \text{кин.})$. Анализируя зависимость $\varphi_2(T_\infty)$, представленную на рис. 2.1.1в, можно заметить, что с ростом температуры $\varphi_2(T_\infty)$ уменьшается. Следует, однако, иметь в виду, что скорость роста как массы, так и радиуса капли, определяется множителем

$E_{T_\infty} \cdot \varphi_2(T_\infty)$. С ростом температуры $\varphi_2(T_\infty)$ уменьшается, а E_{T_∞} растет.

При этом произведение $E_{T_\infty} \cdot \varphi_2(T_\infty)$ растет.

2.1.2. Диффузионный рост совокупности капель

Выше скорость диффузионного роста капель определялась в предположении постоянства относительной влажности f_∞ и температуры T_∞ в окружающей среде. Если рассматривать облако, в котором концентрация капель достаточно велика, то следует учитывать, что содержание пара в воздухе уменьшается в результате осаднения его на каплях. При постоянной температуре плотность пара будет уменьшаться, асимптотически приближаясь к условию равновесия $f_\infty = f_r$, при этом $\left(\frac{dr}{d\tau}\right)_1 \rightarrow 0$. Чтобы капли в облаке продолжали расти, влажность должна увеличиваться. Обычно это увеличение связано с понижением температуры.

Монодисперсное облако

Рассмотрим идеализированное облако, состоящее из капель одинакового размера r . Обозначим объемную концентрацию капель через n . Суммарный поток массы пара к каплям можно записать в виде

$$P_\Sigma = n \left(\frac{dm}{d\tau} \right). \quad (2.1.38)$$

Используя уравнения (2.1.36) и (2.1.7), получим

$$P_\Sigma = \frac{4\pi r n D E_{T_{\text{обл.}}}}{R_{\text{ц}} T_{\text{обл.}}} (f_{\text{обл.}} - 1) \cdot \varphi_2(T_{\text{обл.}}) \cdot \varphi_3(r_0, r) \cdot \varphi_4(r, \text{кин.}) \cdot \varphi_5(V(r)). \quad (2.1.39)$$

Здесь f_∞ и T_∞ заменены на $f_{\text{обл.}}$ и $T_{\text{обл.}}$, чтобы подчеркнуть, что эти величины изменяются со временем. Поток пара P_Σ приравняем изменению плотности пара в воздухе (с обратным знаком).

$$P_{\Sigma} = -\frac{d\rho_{\text{обл.}}}{d\tau} = -\frac{d}{d\tau} \left(\frac{f_{\text{обл.}} E_{T_{\text{обл.}}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}} \right). \quad (2.1.40)$$

Выполним операцию дифференцирования в уравнении (2.1.40). Осуществим замену $\frac{dE_{T_{\text{обл.}}}}{d\tau} = \frac{dE_{T_{\text{обл.}}}}{dT_{\text{обл.}}} \cdot \frac{dT_{\text{обл.}}}{d\tau} = \frac{L_{\text{п-в}} E_{T_{\text{обл.}}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}^2} \cdot \frac{dT_{\text{обл.}}}{d\tau}$ и приравняем правые части выражений (2.1.39) и (2.1.40). Решая полученное уравнение относительно $\frac{df_{\text{обл.}}}{d\tau}$, найдем

$$\frac{df_{\text{обл.}}}{d\tau} = -f_{\text{обл.}} \left(\frac{L_{\text{п-в}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{T_{\text{обл.}}} \cdot \frac{dT_{\text{обл.}}}{d\tau} - 4\pi n D (f_{\text{обл.}} - 1) \cdot \varphi_2(T_{\text{обл.}}) \cdot \varphi_3(r_0, r) \cdot \varphi_4(r, \text{кин.}) \cdot \varphi_5(V(r)). \quad (2.1.41)$$

Заметим, что отношение $\frac{L_{\text{п-в}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}}$ существенно больше единицы, поэтому единицей в скобках можно пренебречь. В правой части выражения (2.1.41) первое слагаемое $\left(\frac{dT_{\text{обл.}}}{d\tau} = \dot{T}_{\text{обл.}} < 0 \right)$ отражает увеличение относительной влажности при понижении температуры. Второе слагаемое учитывает сток пара на капли. Любопытно отметить, что этот сток пропорционален не площади поверхности каплей, а произведению их концентрации на размер. Изменение влажности, таким образом, определяется влиянием двух противоположно действующих факторов: относительная влажность растет с понижением температуры, но уменьшается в результате конденсации пара на каплях. Решая совместно уравнение (2.1.41) и уравнение скорости роста капли (2.1.37), можно рассчитать изменение со временем $f_{\text{обл.}}(\tau)$ и $r(\tau)$.

На рис. (2.1.2), заимствованном из работы Качурина (1990), представлены результаты подобных расчетов. В этой работе множители $\varphi_5(V(r))$ и $\varphi_4(r, \text{кин.})$ приняты равными единице, а в множителе $\varphi_3(r_0, r)$ параметр $r_0 = 0$. Расчеты выполнены при различных скоростях охлаждения $\dot{T}_{\text{обл.}}$. Лег-

ко видеть, что с понижением температуры влажность растёт и соответственно увеличивается радиус капель.

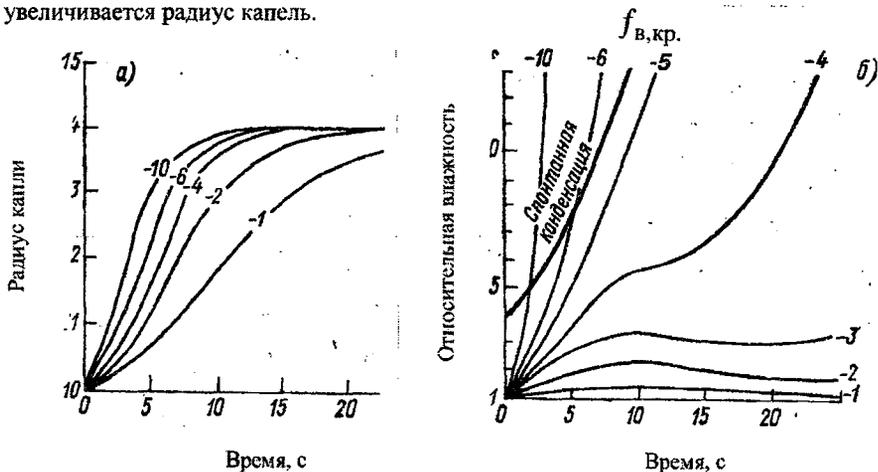


Рис. 2.1.2. Изменение размера капель (а) и относительной влажности (б) в монодисперсном облаке при разных скоростях охлаждения $\dot{T}_{обл.}$. (Начальные параметры: $r(0) = 10 \mu\text{м}$, $T_{обл.}(0) = 263 \text{ K}$, $n = 10^8 \text{ м}^{-3}$). Скорости охлаждения $\dot{T}_{обл.}$ (K с^{-1}) указаны у кривых.

При малых скоростях охлаждения влажность, достигнув максимального значения, монотонно уменьшается, стремясь к единице. Далее с увеличением скорости охлаждения вслед за достижением максимума на кривых проявляются локальные минимумы влажности. Последующий рост относительной влажности связан с уменьшением диффузионного потока вследствие уменьшения абсолютного пересыщения.

При больших скоростях охлаждения влажность возрастает так быстро, что уже через несколько секунд достигает критических значений $f_{обл.} \rightarrow f_{в,кр}$ (см. разд. 1.5). С этого момента дальнейшие расчеты $f_{обл.}$ и r становятся некорректными, поскольку в облаке начинают гомогенно образовываться зародышевые капли воды. Строгое решение требует учета расхода пара на их образование и рост. Заметим, что такие условия достигаются лишь при огромных скоростях охлаждения, например, при внесении в облако хладореагента.

При скоростях охлаждения, характерных для естественных облаков, пересыщение ($f_{\text{обл.}} - 1$) составляет доли процента или проценты. Чтобы оценить характерное пересыщение в облаках, положим в уравнении (2.1.41)

$\frac{df_{\text{обл.}}}{d\tau} = 0$. Тогда

$$f_{\text{обл.}} - 1 = - \frac{1}{1 + \frac{4\pi r n D R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}^2 \varphi_2(T_{\text{обл.}}) \varphi_3(r_0, r) \varphi_4(r, \text{кин}) \varphi_5(V(r)) \cdot L_{\text{п-в}} \frac{dT_{\text{обл.}}}{d\tau}}}. \quad (2.1.42)$$

Используем преобразование $\frac{dT_{\text{обл.}}}{d\tau} = \frac{dT_{\text{обл.}}}{dz} \cdot \frac{dz}{d\tau} \approx \gamma_{\text{ва}} w$, где $\gamma_{\text{ва}}$ – влажно-адиабатический градиент температуры, w – скорость вертикальных потоков. Пренебрегая в знаменателе уравнения (2.1.42) единицей по сравнению со вторым слагаемым и подставляя постоянные и характерные для облаков значения коэффициентов, получим

$$f_{\text{обл.}} - 1 \approx \bar{K} \frac{\gamma_{\text{ва}} w}{rn}, \quad (2.1.43)$$

где \bar{K} – размерный множитель; $\bar{K} \approx 5 \cdot 10^2 \text{ м}^2 \text{ К}^{-1} \text{ с}^{-1}$.

Полидисперсное облако

Реальные облака состоят из капель различных размеров, в облаке содержатся также обводненные ядра конденсации. Изменение плотности пара в воздухе определяется интегральным диффузионным потоком пара ко всем частицам. Если задано распределение частиц по размерам $\eta(r)$, то

$$P_{\Sigma} = \int_0^{\infty} \eta(r) \left(\frac{dm(r)}{d\tau} \right)_5 dr. \quad (2.1.44)$$

Переходя от $\left(\frac{dm(r)}{d\tau} \right)_5$ к $\left(\frac{dr}{d\tau} \right)_5$, получим

$$P_{\Sigma} = \int_0^{\infty} 4\pi r^2 \rho_v \left(\frac{dr}{d\tau} \right)_s \eta(r) dr. \quad (2.1.45)$$

Ограничимся рассмотрением спектра облачных капель. Чтобы найти поток пара P_{Σ} , следует рассчитать изменение массы $\frac{dm(r)}{d\tau}$ для всех капель облака. Разумеется, такой расчет практически невозможен. Поэтому спектр капель разбивают на интервалы (градации) $r_i, i = \overline{1, k}, k$ – число градаций. Дискретные значения средних для градаций радиусов капель задаются соотношением

$$r_{i+1} = r_i + \Delta r_i. \quad (2.1.46)$$

Параметр Δr_i может быть постоянным или зависящим от i . Число капель в i -той градации

$$n_i = n \cdot \int_{(r_{i-1}+r_i)/2}^{(r_i+r_{i+1})/2} \eta(r) dr. \quad (2.1.47)$$

Теперь суммарный поток пара к каплям определим как

$$P_{\Sigma} = \sum_{i=1}^k 4\pi \rho_v n_i r_i^2 \left(\frac{dr_i}{d\tau} \right)_s. \quad (2.1.48)$$

Приравнивая правые части уравнений (2.1.48) и (2.1.40), найдем

$$\begin{aligned} \frac{df_{\text{обл.}}}{d\tau} = & -f_{\text{обл.}} \left(\frac{L_{п-в}}{R_n T_{\text{обл}}} - 1 \right) \cdot \frac{1}{T_{\text{обл.}}} \cdot \frac{dT_{\text{обл.}}}{d\tau} - 4\pi D (f_{\text{обл.}} - 1) \times \\ & \times \varphi_2(T_{\text{обл.}}) \sum_{i=1}^k n_i r_i \varphi_3(r_{0i}, r_i) \varphi_4(r_i, \text{кин.}) \varphi_5(V(r_i)) \end{aligned} \quad (2.1.49)$$

Для конкретных условий значения n_i могут быть заданы либо на основе измерений, либо подходящей аналитической функцией $\eta(r)$. Часто для описания $\eta(r)$ используют известную функцию гамма-распределения (Γ -распределения).

$$\eta(r) = Br^{\nu-1} \exp(-br^{\nu}) \quad (2.1.50)$$

Параметры B и b находят соответственно из условий

$$\int_0^{\infty} \eta(r) dr = 1, \quad (2.1.51)$$

$$\frac{d\eta(r)}{dr} = 0 \text{ при } r = r_{\text{мод}}, \quad (2.1.52)$$

где $r_{\text{мод}}$ – модальный радиус функции распределения.

Выполнив операции (2.1.51) и (2.1.52), найдем

$$B = \left(\frac{r_{\text{мод}}^{v_1+1}}{v} \left(\frac{v}{v_1} \right)^{\frac{v_1+1}{v}} \cdot \Gamma \left(\frac{v_1+1}{v} \right) \right)^{-1}, \quad (2.1.53)$$

$$b = \frac{v_1}{v_{\text{мод}}^v}, \quad (2.1.54)$$

где $\Gamma(\alpha)$ – полная гамма-функция.

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} u^{\alpha-1} \exp(-u) du. \quad (2.1.55)$$

Для аппроксимации спектра облачных капель часто используют простейший вариант формулы (2.1.50) при $v_1 = 2$ и $v = 1$. Тогда $B = \frac{4}{r_{\text{мод}}^3}$,

$$b = \frac{2}{r_{\text{мод}}},$$

$$\eta(r) = \frac{4}{r_{\text{мод}}^3} r^2 \exp\left(-2 \frac{r}{r_{\text{мод}}}\right). \quad (2.1.56)$$

Приведем для справки некоторые параметры распределения (2.1.56):

- модальный радиус $r_{\text{мод}} = \frac{2}{b}$,
- средний арифметический радиус $r_1 = \frac{3}{2} r_{\text{мод}}$,
- средний квадратический радиус $r_2 = \sqrt{3} \cdot r_{\text{мод}}$,
- средний кубический радиус $r_3 = \sqrt[3]{\frac{15}{2}} \cdot r_{\text{мод}}$,

— стандартное (среднее квадратическое) отклонение $\sigma(r) = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot r_{\text{мод}}$.

Расчет трансформации спектра капель со временем осуществляется путем численного интегрирования. Возможны два пути решения. Если считать, что число капель n_i в каждой градации остается постоянным, то, используя формулы (2.1.8) и (2.1.37), можно составить систему уравнений вида

$$\frac{dr_i}{d\tau} = \frac{DE_{T_{\text{обл}}}}{\rho_v R_{\text{п}} T_{\text{обл}}} \cdot \frac{1}{r_i} (f_{\text{обл}} - 1) \cdot \varphi_2(T_{\text{обл}}) \cdot \varphi_3(r_{0i}, r_i) \cdot \varphi_4(r_i, \text{кин.}) \cdot \varphi_5(V(r_i)), \quad i = \overline{1, k}. \quad (2.1.57)$$

Уравнения (2.1.57) вместе с (2.1.49) составляют систему из $(k+1)$ уравнений. Вычисляя на каждом временном шаге r_i и $f_{\text{обл}}$, можно последовательно найти

$$r_{i,j+1} = r_{i,j} + \left(\frac{dr_i}{d\tau} \right)_j \Delta\tau_j, \quad (2.1.58)$$

$$f_{\text{обл.,}j+1} = f_{\text{обл.,}j} + \left(\frac{df_{\text{обл.}}}{d\tau} \right)_j \cdot \Delta\tau_j, \quad (2.1.59)$$

где j — номер шага по времени $\Delta\tau$, $j = \overline{0, l}$, l — число временных шагов.

Чтобы вернуться к плотности распределения $\eta_j(r_j)$, достаточно разделить $n_{i,j}$ на ширину интервала

$$(r_{i+1,j} + r_{i,j})/2 - (r_{i,j} + r_{i-1,j})/2 = (r_{i+1,j} - r_{i-1,j})/2.$$

Другой метод численного решения заключается в том, что фиксируются размеры капель в градациях, а вычисляются концентрации n_i . Решение задачи осуществляется в частных производных. Имея в виду, что спектр капель изменяется не только во времени, но и в пространстве, общее уравнение трансформации спектра записывается в виде

$$\frac{\partial n_i}{\partial \tau} + u \frac{\partial n_i}{\partial x} + v \frac{\partial n_i}{\partial y} + w \frac{\partial n_i}{\partial z} - V(r_i) \frac{\partial n_i}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial r} (r_i n_i) = 0 \quad (2.1.60)$$

где u, v, w – составляющие скорости переноса вдоль осей x, y, z , а $\dot{r}_i = \frac{dr_i}{d\tau}$.

В случае однородного облака производные по x, y, z равны нулю. Тогда

$$\frac{\partial n_i}{\partial \tau} = -\frac{\partial}{\partial r}(\dot{r}_i n_i). \quad (2.1.61)$$

Решая уравнение (2.1.61) в конечных разностях, получим

$$n_{i,j+1} = n_{i,j} - \frac{\dot{r}_{i+1,j} \cdot n_{i+1,j} - \dot{r}_{i-1,j} \cdot n_{i-1,j}}{r_{i+1} - r_{i-1}} \cdot \Delta \tau. \quad (2.1.62)$$

В уравнении для влажности (2.1.49) изменяются значения n_i .

2.2. Диффузионный рост ледяных частиц

2.2.1. Формы и особенности роста ледяных частиц

Многообразие форм снежных кристаллов, выпадающих из облаков, знакомо каждому наблюдательному человеку. В физике облаков предложена классификация ледяных кристаллов, насчитывающая свыше 80 различных форм. По главным признакам они объединены в несколько основных групп, таких как иглы, столбики, пластины, их комбинации, обзерненные кристаллы (кристаллы с намерзшими на них каплями воды) и другие. Полная классификация – названия, обозначения и схематические изображения кристаллов – приведена в справочнике «Облака и облачная атмосфера» (1989) и в монографиях Мазина, Шметера (1983), Янга (1993).

Исследования показали, что форма (габитус) кристалла зависит от условий его роста, прежде всего от температуры воздуха и пересыщения водяного пара над льдом. На рис. 2.2.1 показано, при каких сочетаниях температуры и влажности воздуха растут ледяные кристаллы той или иной формы. Влажность воздуха выражена абсолютным пересыщением $\Delta \rho_p = \rho_p - \rho_{p,л}$, где ρ_p – парциальная плотность пара, $\rho_{p,л}$ – плотность пара, насыщенного над льдом.

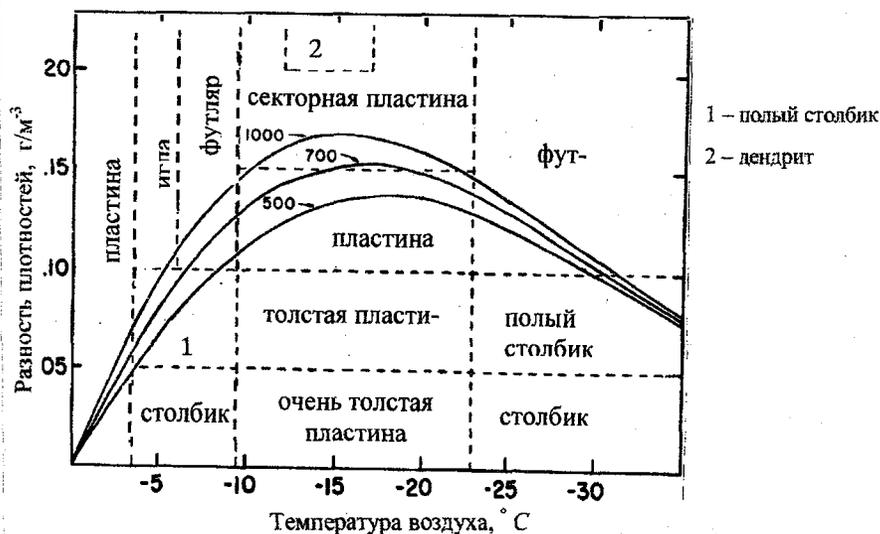


Рис. 2.2.1. Условия роста ледяных кристаллов разных форм.

При анализе рисунка просматриваются определенные закономерности чередования форм ледяных кристаллов. При температурах от 0 до $-4\text{ }^{\circ}\text{C}$ формируются пластинчатые шестигранные призмы независимо от $\Delta\rho_{\text{п}}$. Затем происходит переход от пластинок к столбикам (сплошным, полым, иглам, футлярам). В интервале температур $-10\text{...}-23\text{ }^{\circ}\text{C}$ снова образуются кристаллы пластинчатых форм и дендриты. При дальнейшем понижении температуры вновь создаются условия для образования кристаллов столбчатых форм. Более детальный анализ экспериментальных данных показывает, что в отличие от резких переходов при температурах около -4 и $-10\text{ }^{\circ}\text{C}$, последний переход осуществляется постепенно в диапазоне температур от -20 до $-30\text{ }^{\circ}\text{C}$. Что касается зависимости форм кристалла от пересыщения, то можно заметить следующее. Увеличение пересыщения при фиксированной температуре приводит к уменьшению плотности ледяных кристаллов: столбики трансформируются в полые столбики, футляры, иглы, а толстые пластины превращаются в тонкие, секторные, звездчатые и дендриты. В табл. 2.2.1 приведены характерные значения плотности кристаллов различных форм.

Форма кристалла	Объемные плотности,
	г·см ⁻³
Сплошные столбики	0,9
Полые столбики	0,7
Футляры	0,6
Иглы	0,3
Пластины	0,9
Секторные пластины	0,5
Деириды	0,16

Примечание: объемную плотность кристалла определяют как отношение массы кристалла к объему гексагональной призмы с полуосями \bar{a} и \bar{c} равновеликими полуосям кристалла.

На рис. 2.2.1 представлены результаты экспериментов, проведенных в облачных камерах при фиксированных значениях температуры и влажности. При перемещении ледяных частиц в реальных облаках условия их роста меняются, что приводит к усложнению и многообразию их форм. На этом же рисунке приведены зависимости $\Delta\rho_{\text{п}}$ от температуры при условии, что пар насыщен над водой ($f_{\text{в}} = 1$), а ледяная частица нагрета в результате выделения тепла осаждения. Кривые рассчитаны для атмосферного давления 1000, 700 и 500 гПа. Различия между кривыми связаны с тем, что с понижением давления уменьшается теплообмен ледяной частицы с окружающим воздухом. Вследствие этого температура частицы увеличивается, а $\Delta\rho_{\text{п}}$ уменьшается. Эти кривые отражают типичные условия формирования кристаллов в переохлажденных облаках.

Кристаллическая структура льда определяет ту особенность его роста, что молекула пара, столкнувшись с ледяной поверхностью, не встраивается тут же в кристаллическую решетку. Нарастание льда происходит слоями в виде ступенек. Распространение ступенек начинается либо от спонтанно образовавшегося зародыша, либо чаще от места нарушения упорядоченной структуры льда (дислокации) в виде выступов, ямок, сколов и т. п. Ступенька распространяется до тех пор, пока она не заполнит соответствующую грань

кристалла. Далее этот процесс повторяется. Возможно и непрерывное распространение ступенек по поверхности в виде винтовой дислокации. Нарастание новых слоев льда происходит вследствие диффузии молекул пара по поверхности кристалла к ступенькам. При этом возможны различные режимы поверхностной диффузии. Если концентрация молекул пара на поверхности кристалла сравнительно невелика, то их миграция по поверхности происходит скачкообразно по мере разрывов одних и установления других водородных связей молекулы с кристаллом. При большой скорости поступления молекул из пара на поверхности кристалла образуется квазижидкий слой. Это слой, толщиной от 10^0 до 10^2 молекул, связанных друг с другом подобно тому, как это происходит в жидкой воде. Рост кристалла осуществляется в результате непрерывной диффузии молекул к ступенькам.

2.2.2. Скорость роста ледяного кристалла

Для решения задачи диффузии пара к ледяной частице произвольной формы используют так называемую электростатическую аналогию — известное решение задачи о заряде проводника в электрическом поле. В соответствии с этой аналогией в уравнении (2.1.4) следует вместо размера капли подставить электростатическую емкость C_3 . Тогда

$$\frac{dm_n}{d\tau} = 4\pi D \frac{C_3}{4\pi\epsilon\epsilon_0} (\rho_{\text{обл.}} - \rho_{n,T_n}) \quad (2.2.1)$$

где m_n — масса ледяной частицы, D — коэффициент молекулярной диффузии пара, $\rho_{\text{обл.}}$ — плотность пара в облаке, ρ_{n,T_n} — плотность насыщенного пара у поверхности ледяной частицы, имеющей температуру T_n , ϵ_0 — электрическая постоянная, ϵ — диэлектрическая проницаемость среды (воздуха), размерность C_3 — фарад. В свою очередь, электростатическая емкость может быть выражена, как

$$C_3 = 4\pi\epsilon\epsilon_0 C_T, \quad (2.2.2)$$

где C_r – геометрический фактор, то есть параметр, учитывающий размеры и форму ледяной частицы, C_r имеет размерность длины. Таким образом

$$\frac{dm_{л}}{d\tau} = 4\pi DC_r (\rho_{обл.} - \rho_{л, T_{л}}) \quad (2.2.3)$$

Аналогично поток тепла от ледяной частицы в облако можно записать в виде

$$\left(\frac{dQ_{л}}{d\tau}\right)_2 = -4\pi\lambda C_r (T_{л} - T_{обл.}), \quad (2.2.4)$$

где λ – коэффициент молекулярной теплопроводности воздуха. Формулы (2.2.3) и (2.2.4) записаны в предположении, что плотность пара $\rho_{л, T_{л}}$ и температура $T_{л}$ сохраняются постоянными по всей поверхности ледяной частицы.

Геометрический фактор

Геометрический фактор C_r для сферической частицы равен ее радиусу $C_r = r$. Для частиц иной формы соотношения оказываются более сложными. Если ледяной кристалл имеет форму плоской шестигранной призмы, то ее можно аппроксимировать эллипсоидом вращения вокруг малой оси. Для такой частицы

$$C_r = \frac{a\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}}{\arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{c^2}{a^2}}\right)}, \quad (2.2.5)$$

где a и c – полуоси эллипсоида, $a > c$.

При $\frac{c}{a} \rightarrow 0$ выражение (2.2.5) упрощается

$$C_r = \frac{2a}{\pi}. \quad (2.2.6)$$

Ледяные иглы или столбики можно аппроксимировать эллипсоидами вращения вокруг большой оси ($c > a$). Для них

$$C_r = \frac{a \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1}}{\ln \left[\frac{c}{a} + \sqrt{\frac{c^2}{a^2} - 1} \right]} \quad (2.2.7)$$

Легко видеть, что при $\frac{c^2}{a^2} \gg 1$

$$C_r = a \frac{c}{\ln \left(2 \frac{c}{a} \right)} \quad (2.2.8)$$

Можно показать, что обе формулы (2.2.5) и (2.2.7) при $a \rightarrow c$ дают

$$C_r = a = c.$$

Рассмотрим зависимость геометрического фактора C_r от коэффициента деформации $\frac{c}{a}$ при неизменной массе ледяной частицы, равной массе ледяного шара радиусом $r_{л}$

$$m_{л} = \frac{4}{3} \pi r_{л}^3 \rho_{л}.$$

Масса эллипсоида вращения

$$m_{л,эл} = \frac{4}{3} \pi a^2 c \rho_{л} = \frac{4}{3} \pi a^3 \left(\frac{c}{a} \right) \rho_{л}.$$

Если $m_{л} = m_{л,эл}$, то

$$a = r_{л} \left(\frac{c}{a} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Подставляя это соотношение в формулы (2.2.5) и (2.2.7), рассчитаем значение C_T при различных коэффициентах деформации. Чтобы исключить из рассмотрения размер ледяной частицы, разделим C_T на $r_{л.}$, то есть найдем отношение геометрического фактора эллипсоида к геометрическому фактору шара $C_{T,ш} = r_{л.}$ Зависимость этого отношения от коэффициента деформации приведена на рис. 2.2.2.

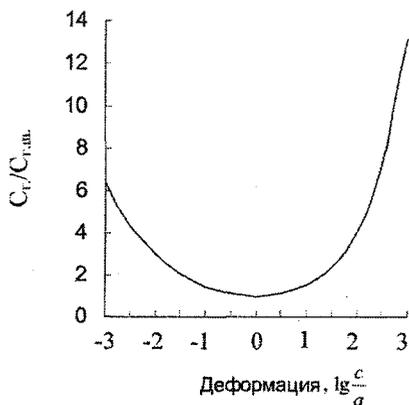


Рис. 2.2.2. Изменение геометрического фактора для ледяной частицы постоянной массы в зависимости от логарифма коэффициента деформации

Легко видеть, что минимальное значение геометрического фактора имеет сферическая частица ($\lg \frac{c}{a} = 0$). С увеличением деформации (сжатия, $\lg \frac{c}{a} < 0$ или растяжения, $\lg \frac{c}{a} > 0$) геометрический фактор увеличивается. При характерных значениях $\frac{c}{a} \approx 0,01$ (пластинки) или $\frac{c}{a} \approx 100$ (иглы) значения C_T в 3 ... 4 раза больше, чем $C_{T,ш}$. В соответствии с формулой (2.2.3) скорость роста таких кристаллов в 3 ... 4 раза больше скорости роста ледяной сферической частицы.

Для кристаллов более сложной формы C_r находят путем измерения емкости модельных частиц, изготовленных из электропроводящих материалов. Впрочем, для дисков с глубокими секторными вырезами, представляющих собой модели звездчатых кристаллов или дендритов, измеренные значения емкости оказываются близкими к тем, которые дает формула (2.2.6).

При переходе от размеров реальной ледяной призмы \hat{a} , \hat{c} к размерам эллипсоида вращения a , c следует учесть, что объем шестигранной призмы

$$v_{\text{пр.}} = 4\sqrt{3}\hat{a}^2\hat{c} = 4\sqrt{3}\hat{a}^3\left(\frac{\hat{c}}{\hat{a}}\right), \text{ а объем эллипсоида } v_{\text{эл.}} = \frac{4}{3}\pi a^2 c = \frac{4}{3}\pi a^3\left(\frac{c}{a}\right).$$

Тогда при $v_{\text{пр.}} = v_{\text{эл.}}$ и $\frac{\hat{c}}{\hat{a}} = \frac{c}{a}$ получим $a = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right)^{1/3} \cdot \hat{a}$, $c = \left[\frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right]^{1/3} \cdot \hat{c}$.

Вернемся к выводу формулы скорости роста. Переходя в формуле (2.2.3) от плотности пара к относительной влажности

$$\rho_{\text{обл.}} = \frac{f_{\text{в.обл.}} E_{\text{в.}T_{\text{обл.}}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}}, \quad \rho_{\text{л.}T_{\text{л}}} = \frac{f_{\text{л}} E_{\text{л.}T_{\text{л}}}}{R_{\text{п}} T_{\text{л}}}$$

и полагая $T_{\text{л}}/T_{\text{обл.}} \approx 1$, получим

$$\frac{dm_{\text{л}}}{d\tau} = 4\pi DC_r \frac{E_{\text{в.}T_{\text{обл.}}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}} \left(f_{\text{в.обл.}} - \frac{f_{\text{л}} E_{\text{л.}T_{\text{л}}}}{E_{\text{в.}T_{\text{обл.}}}} \right), \quad (2.2.9)$$

где $f_{\text{в.обл.}}$ и $f_{\text{л}}$ – относительные влажности над водой в облаке и надо льдом у поверхности частицы, $E_{\text{в.}T_{\text{обл.}}}$ и $E_{\text{л.}T_{\text{л}}}$ – давления насыщенного водяного пара над водой при температуре $T_{\text{обл.}}$ и надо льдом при температуре ледяной частицы $T_{\text{л}}$ соответственно. Перейдем от $E_{\text{л.}T_{\text{л}}}$ к $E_{\text{л.}T_{\text{обл.}}}$, используя соотношение

$$E_{\text{л.}T_{\text{л}}} = E_{\text{л.}T_{\text{обл.}}} \left(1 + \frac{L_{\text{п-л}} (T_{\text{л}} - T_{\text{обл.}})}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}^2} \right). \quad (2.2.10)$$

Аналогично уравнению (2.1.14) для капли (см. разд. 2.1), запишем уравнение для изменения избыточного теплосодержания ледяной частицы (при установившемся состоянии $\frac{dT_{л}}{d\tau} = 0$).

$$c_{л}(T_{л} - T_0) \frac{dm_{л}}{d\tau} = L_{п-л} \frac{dm_{л}}{d\tau} - 4\pi\lambda C_{г}(T_{л} - T_{обл.}) \quad (2.2.11)$$

Решив это уравнение (с теми же допущениями, что и в разд. 2.1), получим

$$T_{л} - T_{обл.} \approx \frac{L_{п-л} - c_{л}(T_{обл.} - T_0)}{4\pi\lambda C_{г}} \cdot \frac{dm_{л}}{d\tau} \quad (2.2.12)$$

Подставим выражение (2.2.12) в формулу (2.2.10), а найденное значение

$E_{л, T_{л}}$ в уравнение (2.2.9). Решив его снова относительно $\frac{dm_{л}}{d\tau}$, получим

$$\frac{dm_{л}}{d\tau} = 4\pi DC_{г} \frac{E_{в, T_{обл.}}}{R_{п} T_{обл.}} \left(f_{в, обл.} - \frac{f_{л} E_{л, T_{обл.}}}{E_{в, T_{обл.}}} \right) \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{f_{л} E_{л, T_{обл.}} DL_{п-л} (L_{п-л} - c_{л}(T_{обл.} - T_0))}{R_{п}^2 T_{обл.}^3 \lambda} \right)} \quad (2.2.13)$$

Если во втором слагаемом знаменателя принять $f_{л} \approx 1$, то выражение (2.2.13) можно записать в виде аналогичном (2.1.)

$$\frac{dm_{л}}{d\tau} = 4\pi DC_{г} \frac{E_{в, T_{обл.}}}{R_{п} T_{обл.}} \left(f_{в, обл.} - \frac{f_{л} E_{л, T_{обл.}}}{E_{в, T_{обл.}}} \right) \cdot \varphi_{2л}(T_{обл.}), \quad (2.2.14)$$

где

$$\varphi_{2л}(T_{обл.}) = \left(1 + \frac{E_{л, T_{обл.}} DL_{п-л} (L_{п-л} - c_{л}(T_{обл.} - T_0))}{R_{п}^2 T_{обл.}^3 \lambda} \right)^{-1} \quad (2.2.15)$$

Зависимость отношения $E_{v,T_{обл.}} / E_{l,T_{обл.}}$ от температуры зададим, как и ранее, выражением

$$E_{v,T_{обл.}} / E_{l,T_{обл.}} = 1 - 0,01(T_{обл.} - 273,15) = 1 - 0,01t, \quad (2.2.16)$$

где t – температура в градусах Цельсия.

Равновесную относительную влажность над ледяной частицей с учетом кривизны поверхности зададим формулой Томпсона

$$f_l = 1 + \frac{r_l^+}{r_{l,x}}, \quad (2.2.17)$$

где $r_l^+ = \frac{2\sigma_{п-л}}{\rho_l R_l T_{обл.}}$, $r_{l,x}$ – характеристический радиус кривизны поверхности ледяной частицы.

Характеристический радиус

Трудности теоретического описания процессов тепло- и массообмена связаны с тем, что кривизна поверхности ледяной частицы неодинакова на различных ее участках. Радиус кривизны граней ледяного кристалла стремится к бесконечности, в то время как на ребрах и вершинах он теоретически равен нулю. Строгое решение задачи, требующее интегрирования по поверхности, оказывается чрезвычайно громоздким. Для упрощения решения введем понятие характеристического радиуса.

Характеристический радиус ледяной частицы определим как отношение площади поверхности частицы к удвоенному периметру ее максимального (по площади) сечения. Так, для плоского диска радиусом a это отношение

$$r_{l,x} = \frac{2\pi a^2}{4\pi a} = \frac{a}{2}, \text{ для шара } r_{l,x} = \frac{4\pi r_l^2}{4\pi r_l} = r_l, \text{ для длинного цилиндра (иглы)}$$

$$r_{l,x} = \frac{2\pi a^2 + 4\pi a c}{2 \cdot 4(a+c)} \approx \frac{\pi a}{2}.$$

Для эллипсоидов вращения с разными коэффициентами деформации $\frac{c}{a}$ можно использовать аналитические формулы расчета площади поверхности. Эти расчеты сравнительно громоздки. Поэтому для вычисления зависимости $r_{л,х}$ от $\frac{c}{a}$ здесь приводятся аппроксимационные формулы

Для сжатого эллипсоида ($\frac{c}{a} < 1$)

$$r_{л,х} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1,15 \left(\frac{c}{a} \right)^2}{1,3 + \left(\frac{c}{a} \right)^2} \right) a = \left(\frac{1}{2} + \frac{1,15 \left(\frac{c}{a} \right)^2}{1,3 + \left(\frac{c}{a} \right)^2} \right) \left(\frac{c}{a} \right)^{-\frac{1}{3}} r_{л}, \quad (2.2.18)$$

– для вытянутого эллипсоида ($\frac{c}{a} > 1$)

$$r_{л,х} = \left(1 + \frac{0,25 \left(\left(\frac{c}{a} \right)^2 - 1 \right)}{3 + \left(\frac{c}{a} \right)^2} \right) a = \left(1 + \frac{0,25 \left(\left(\frac{c}{a} \right)^2 - 1 \right)}{3 + \left(\frac{c}{a} \right)^2} \right) \left(\frac{c}{a} \right)^{-\frac{1}{3}} r_{л}, \quad (2.2.19)$$

Вернемся снова к выводу уравнения скорости роста ледяной частицы. С учетом выражений (2.2.16) и (2.2.17) получим

$$\frac{dm_{л}}{dt} = 4\pi DC_{г} \frac{E_{в,г,обл.}}{R_{п} T_{обл.}} \left(f_{в,обл.} - 1 - \frac{0,01t + \frac{r^+}{r_{л,х}}}{1 - 0,01t} \right) \cdot \varphi_{2л}(T_{обл.}). \quad (2.2.20)$$

На скорость роста мелких ледяных частиц, как и капель воды, оказывает влияние кинетический эффект (см. разд. 2.1.1). Строгий вывод поправочного множителя для ледяных частиц произвольной формы оказывается весьма сложным. В первом приближении представляется возможным использовать

множитель аналогичный $\varphi_4(r, \text{кин})$, заменяя в нем радиус капль r характеристическим размером ледяной частицы $r_{л,х}$.

$$\varphi_{4л}(r_{л,х}, \text{кин}) = \left(\frac{r_{л,х}}{r_{л,х} + \Delta} + \frac{D}{r_{л,х} \kappa_l} \left(\frac{2\pi}{R_H T_\infty} \right)^{1/2} \right)^{-1}, \quad (2.2.21)$$

где κ_l – коэффициент осаждения для ледяной поверхности.

Для крупных ледяных частиц следует ввести коэффициент вентиляции. Как и для капль воды используем эмпирическое выражение для коэффициента вентиляции $\varphi_{5л}(V(a, c))$ в виде

$$\varphi_{5л}(V(a, c)) = 1,0 + 0,14X^2, \quad X < 1,0, \quad (2.2.22a)$$

$$\varphi_{5л}(V(a, c)) = 0,86 + 0,28X, \quad X \geq 1,0, \quad (2.2.22b)$$

где $X = N_{Sc}^{1/3} \cdot N_{Re}^{1/2}$, число Шмидта $N_{Sc} = \frac{\nu}{D}$, число Рейнольдса

$N_{Re} = \frac{2r_{л,х} V(a, c)}{\nu}$, ν – кинематический коэффициент вязкости воздуха. Число Рейнольдса выражается здесь через характеристический радиус $r_{л,х}$ и скорость падения ледяной частицы $V(a, c)$.

Значения $r_{л,х}$ вычисляются по формулам (2.2.18) и (2.2.19). Скорость падения ледяных частиц сильно зависит от их формы. Попробуем здесь выразить установившуюся скорость падения ледяной частицы через скорость падения капли воды эквивалентной массы $V(r_{эkv.})$ – см. формулу (2.1.26). Установившаяся скорость падения капли или ледяной частицы определяется равенством сил тяжести и аэродинамического сопротивления

$$mg = C_{a.c.} \rho_{возд.} \frac{V^2(r_{эkv.})}{2} \pi r_{эkv.}^2, \quad (2.2.23)$$

$$m_{лг} g = C_{a.c.л} \rho_{возд.} \frac{V^2(a, c)}{2} A(a, c), \quad (2.2.24)$$

где g – ускорение свободного падения, $C_{a.c.}$ и $C_{a.c.l}$ – коэффициенты аэродинамического сопротивления для капли и ледяной частицы соответственно, $V(r_{\text{экв.}})$ и $V(a, c)$ – скорости падения капли и ледяной частицы одинаковой массы, $A(a, c)$ – максимальная площадь поперечного сечения ледяной частицы, перпендикулярного направлению движения.

Приравнивая правые части уравнений (2.2.23) и (2.2.24), получим

$$V(a, c) = \left(\frac{C_{a.c.}}{C_{a.c.l}} \cdot \frac{\pi r_{\text{экв.}}^2}{A(a, c)} \right)^{1/2} \cdot V(r_{\text{экв.}}). \quad (2.2.25)$$

Для частиц, аппроксимируемых сжатыми ($c < a$) эллипсоидами вращения (призмы, звездчатые кристаллы, дендриты), $A(a, c) = \pi a^2$, а для частиц, аппроксимируемых вытянутыми эллипсоидами, $A(a, c) = \pi a c$. Из условия равенства масс $m = m_l$ найдем $r_{\text{экв.}} = a \left(\left(\frac{c}{a} \right) \frac{\rho_l}{\rho_b} \right)^{1/3}$, где ρ_l – эффективная

плотность ледяной частицы (отношение ее массы к объему аппроксимирующего эллипсоида). В результате получим

$$V(a, c) = \left(\frac{C_{a.c.}}{C_{a.c.l}} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{c}{a} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{\rho_l}{\rho_b} \right)^{1/3} V(r_{\text{экв.}}), \quad \left(\frac{c}{a} \right) < 1, \quad (2.2.26a)$$

$$V(a, c) = \left(\frac{C_{a.c.}}{C_{a.c.l}} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{c}{a} \right)^{-1/6} \cdot \left(\frac{\rho_l}{\rho_b} \right)^{1/3} V(r_{\text{экв.}}), \quad \left(\frac{c}{a} \right) > 1. \quad (2.2.26b)$$

Таким образом, общую формулу скорости роста ледяной частицы можно представить в виде

$$\frac{dm_{\text{л}}}{d\tau} = 4\pi DC_{\Gamma} \frac{E_{\text{в},T_{\text{обл}}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл}}} \left(f_{\text{в},\text{обл}} - 1 - \frac{0,01t + \frac{r^+}{r_{\text{л},\text{х}}}}{1 - 0,01t} \right) \cdot \varphi_{2\text{л}}(T_{\text{обл}}) \times$$

$$\times \varphi_{4\text{л}}(r_{\text{л},\text{х}}, \text{кин}) \cdot \varphi_{5\text{л}}(V(a, c)). \quad (2.2.27)$$

Имея в виду, что параметры C_{Γ} , $r_{\text{л},\text{х}}$ и, следовательно, $\varphi_{4\text{л}}(r_{\text{л},\text{х}}, \text{кин})$ зависят от a и $\frac{c}{a}$, перейдем от $\frac{dm_{\text{л}}}{d\tau}$ к $\frac{da}{d\tau}$. Тогда при $\frac{c}{a} = \text{const}$ получим

$$\frac{da}{d\tau} = D \frac{C_{\Gamma}(a, c)}{ac\rho_{\text{л}}} \frac{E_{\text{в},T_{\text{обл}}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл}}} \left(f_{\text{в},\text{обл}} - 1 - \frac{0,01t + \frac{r_{\text{л}}^+}{r_{\text{л},\text{х}}(a, c)}}{1 - 0,01t} \right) \cdot \varphi_{2\text{л}}(T_{\text{обл}}) \times$$

$$\times \varphi_{4\text{л}}(r_{\text{л},\text{х}}(a, c), \text{кин}) \cdot \varphi_{5\text{л}}(V(a, c)). \quad (2.2.28)$$

Дальнейшее уточнение теории связано с учетом различия скоростей роста кристалла вдоль кристаллографических осей. Изменение массы ледяного кристалла со временем можно представить следующим образом

$$\frac{dm_{\text{л}}}{d\tau} = \frac{\partial m_{\text{л}}}{\partial \bar{a}} \frac{d\bar{a}}{d\tau} + \frac{\partial m_{\text{л}}}{\partial \bar{c}} \frac{d\bar{c}}{d\tau} = 4\sqrt{3} \cdot \bar{a}^2 \bar{c} \rho_{\text{л}} \left(\frac{2}{\bar{a}} \frac{d\bar{a}}{d\tau} + \frac{1}{\bar{c}} \frac{d\bar{c}}{d\tau} \right). \quad (2.2.29)$$

Чтобы найти изменение массы льда со временем, необходимо знать $\frac{d\bar{a}}{d\tau}$ и

$\frac{d\bar{c}}{d\tau}$. На рис. 2.2.3 представлены результаты лабораторных измерений скоростей роста кристаллов при различных температурах. Опыты выполнены при фиксированном пересыщении водяного пара над льдом, равном 0,013 гПа, что соответствует примерному превышению плотности пара $\Delta\rho = 0,01 \text{ гм}^{-3}$. Предполагалось, что это пересыщение недостаточно для образования квазижидкого слоя молекул на поверхности льда. Рост льда осуществляется в результате миграции молекул по поверхности к ступенькам. На рисунке легко

видеть сильную зависимость линейных скоростей роста кристаллов от температуры. В интервале температур от 0 до -5°C скорость роста призматических граней больше, чем базальных, то есть растут кристаллы пластинчатой формы. В интервале от -5 до -10°C , где $\frac{d\bar{c}}{d\tau} > \frac{d\bar{a}}{d\tau}$, формируются кристаллы столбчатой формы. При температуре ниже -10°C скорость роста кристаллов вдоль оси a снова становится больше, чем вдоль оси c . Результаты этих экспериментов хорошо согласуются с данными, приведенными на рис. 2.2.1.

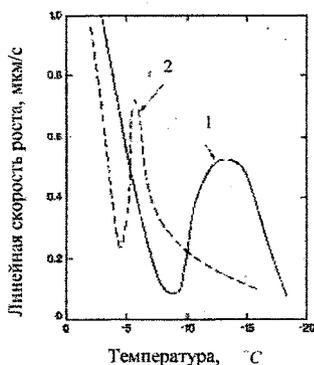


Рис. 2.2.3. Зависимость линейной скорости роста ледяных кристаллов вдоль кристаллографических осей от температуры при фиксированном пересыщении $\Delta e = 0,013$ гПа.

1 — скорость роста призматических граней, $\frac{d\bar{a}}{d\tau}$; 2 — скорость роста базальных граней, $\frac{d\bar{c}}{d\tau}$.

Очевидно, представленная на рис 2.2.3 зависимость скорости роста кристаллов от температуры будет трансформироваться при изменении пересыщения. Экспериментально установлено, например, что скорость роста кристаллов льда в паре, насыщенном над водой, имеет локальный минимум при температуре, когда разность $(E_B - E_{II})$ максимальна. К сожалению, не имеется еще ни теоретических разработок, ни достаточных экспериментальных данных, необходимых для удовлетворительного описания этих процессов.

2.2.3. Рост ледяных частиц в переохлажденном облаке

Рассмотрим облако, состоящее из переохлажденных капель и ледяных частиц. Пусть все капли обладают одинаковой массой m , их концентрация n_v . Ледяные частицы имеют одинаковую массу m_l , их концентрация n_l . Поток пара к каплям

$$P_v = n_v \frac{dm}{d\tau}, \quad (2.2.30)$$

а к ледяным частицам

$$P_l = n_l \frac{dm_l}{d\tau}. \quad (2.2.31)$$

Приравняем суммарный поток пара $P_\Sigma = P_v + P_l$ изменению плотности пара со временем.

$$P_\Sigma = -\frac{d\rho_n}{d\tau} = -\frac{f_{v,обл.} E_{v,обл.}}{R_n T_{обл.}} \left[\frac{1}{f_{v,обл.}} \cdot \frac{df_{v,обл.}}{d\tau} + \left(\frac{L_{п-в}}{R_n T_{обл.}} - 1 \right) \frac{1}{T_{обл.}} \cdot \frac{dT_{обл.}}{d\tau} \right]. \quad (2.2.32)$$

Подставляя в формулу (2.2.32) выражения (2.2.30) и (2.2.31) и решая полученное уравнение относительно $\frac{df_{v,обл.}}{d\tau}$, найдем

$$P_\Sigma = -\frac{d\rho_n}{d\tau} = -\frac{f_{v,обл.} E_{v,обл.}}{R_n T_{обл.}} \left[\frac{1}{f_{v,обл.}} \cdot \frac{df_{v,обл.}}{d\tau} + \left(\frac{L_{п-в}}{R_n T_{обл.}} - 1 \right) \frac{1}{T_{обл.}} \cdot \frac{dT_{обл.}}{d\tau} \right]. \quad (2.2.33)$$

Уравнения (2.2.33), (2.1.36) и (2.2.29) составляют систему, решение которой позволяет найти изменения со временем влажности $f_{v,обл.}(\tau)$, масс капель воды $m(\tau)$ и ледяных частиц $m_l(\tau)$. Можно предвидеть, что временной ход указанных величин будет определяться не только скоростью изменения температуры $\frac{dT_{обл.}}{d\tau} = \dot{T}_{обл.}$, но и соотношением между концентрациями капель и ледяных частиц. При $n_l \ll n_v$ изменения влажности будут подобны тем, которые представлены на рис. 2.1.2.

При существенных концентрациях n_d произойдут качественные изменения зависимости $m(\tau)$. При не очень больших скоростях охлаждения рост ледяных частиц будет сопровождаться уменьшением размеров капель вплоть до их полного испарения. Такой процесс называют перегонкой пара с капель на кристаллы.

При рассмотрении полидисперсного облака следует сформировать дискретные спектры для капель и ледяных частиц подобно тому, как это было сделано для капель в разделе 2.1.

2.3. Коагуляционный рост капель

Коагуляцией называют укрупнение облачных капель вследствие их столкновения и слияния. Столкновение капель происходит в результате движения их относительно друг друга. Такое движение осуществляется под действием различных факторов. Соответственно выделяют несколько видов коагуляции: броуновская, турбулентная, электрическая и гравитационная.

Броуновская коагуляция возникает в результате хаотического движения облачных частиц, вызванного беспорядочными ударами молекул окружающего воздуха. Сколь угодно заметное броуновское движение испытывают очень мелкие частицы радиусом менее одного микрометра. Как уже отмечалось ранее (разд. 1.8), существенную роль броуновская коагуляция играет в формировании спектра аэрозольных частиц, в частности, обводненных облачных ядер конденсации.

Турбулентная коагуляция возникает в результате того, что облачные капли, обладая механической инерцией, по-разному реагируют на флуктуации несущего их турбулентного воздушного потока. Траектории капель пересекаются, что приводит к их столкновениям и возможной коагуляции. По оценкам турбулентная коагуляция не играет существенной роли в формировании спектра частиц осадков.

Электростатическая коагуляция происходит вследствие взаимного притяжения разноименно заряженных капель или индукции зарядов в сильных

электрических полях. Оценки роли этого механизма весьма противоречивы. Кулоновское взаимодействие увеличивает возможность столкновения мелких облачных капель. Для частиц средних размеров роль электростатической коагуляции считается несущественной. Полагают, что электростатическая коагуляция дает заметный вклад в формирование частиц осадков в грозовых облаках.

Гравитационной коагуляцией называют процесс слияния капель разного размера, падающих в поле тяжести с различными скоростями. Считается, что этот вид коагуляции играет доминирующую роль в формировании осадков.

2.3.1. Скорость роста капель при гравитационной коагуляции

Рассмотрим сравнительно крупную каплю радиусом r , падающую относительно воздуха со скоростью $V(r)$ в облаке, состоящем из мелких капель разных радиусов r' . Эти капли падают со скоростями $V(r') < V(r)$. Крупная капля догоняет мелкие. Этот процесс можно рассматривать, как движение воздуха относительно крупной капли, при котором воздух обтекает каплю. При таком обтекании появляется радиальная составляющая скорости воздуха. Под действием этой составляющей мелкие капли также обтекают крупную. Однако, поскольку они обладают определенной массой, траектория этих капель не совпадает с линиями тока воздуха. Таким образом, некоторая часть мелких капель соударяется и сливается с крупной. В правой части рис. 2.3.1 показаны траектории трех капель одинакового размера, находящихся в исходный момент на разных расстояниях от оси движения. Все они вовлечены в обтекающий поток. Капля 3 успевает отклониться от прямолинейного движения настолько, что она проходит мимо крупной капли, не сталкиваясь с ней. Капля 1 напротив сталкивается с большой каплей и сливается с ней. Капля 2 лишь касается крупной капли. Все капли, находящиеся на расстояниях, больших Δ от оси движения, повторяют "судьбу" капли 3 – они не сталкиваются с крупной каплей. Капли, расположенные от оси движения на расстояниях меньших Δ , сталкиваются с крупной.

Слева на рисунке приведены траектории каплей 4 и 5, "стартующих" с одинакового расстояния от оси, но имеющих разные размеры. Мелкая капля 4 легко увлекается воздушным потоком и не сталкивается с крупной каплей. Капля 5 большего радиуса коагулирует с крупной. Разумеется, возможна ситуация, когда мелкая капля, столкнувшись с крупной, не сливается с ней, а отскакивает, подобно тому, как плоский камень, брошенный умелой рукой, отскакивает от поверхности воды ("печет блинчики").

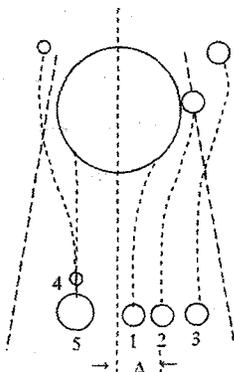


Рис. 2.3.1. Схема обтекания и столкновения мелких капель с крупной.

Площадь вымывания крупной каплей мелких составляет $\pi(r+r')^2$. В единицу времени вымываются капли из объема $\pi(r+r')^2(V(r)-V(r'))$. Такой объем часто называют вымываемым (выметаемым). С увеличением r площадь вымывания и вымываемый объем растут. Не все капли, содержащиеся в вымываемом объеме, коагулируют с крупной каплей. Часть из них, как отмечено выше, обтекают ее, некоторая часть после столкновения отскакивает.

Если объемная концентрация мелких капель радиуса r' составляет $n(r')$, то число таких капель в вымываемом объеме

$$n'(r') = \pi(r+r')^2(V(r)-V(r'))n(r') \quad (2.3.1)$$

Коэффициентом захвата $\mathcal{E}(r, r')$ называют долю капель радиуса r' , захватываемых каплей радиуса r , от числа капель $n(r')$, содержащихся в вымываемом объеме. Коэффициент захвата представляет собой произведение коэффициентов столкновения $\mathcal{E}_{ст}$ и слияния $\mathcal{E}_{сл}$.

$$\mathcal{E}(r, r') = \mathcal{E}_{ст}(r, r') \mathcal{E}_{сл}(r, r'). \quad (2.3.2)$$

Коэффициент столкновения можно выразить следующим образом. Если с крупной каплей сталкиваются только те мелкие, которые в невозмущенном потоке находились на расстояниях $\Delta(r')$, то

$$\mathcal{E}_{ст}(r, r') = \frac{\pi \Delta^2(r')}{\pi (r + r')^2} = \left(\frac{\Delta(r')}{r + r'} \right)^2. \quad (2.3.3)$$

Часто при практических расчетах коэффициент захвата принимают равным коэффициенту столкновения.

Изменение массы крупной капли за счет слияния с каплями радиуса r' составляет

$$\frac{dm_{r'}}{d\tau} = \pi (r + r')^2 (V(r) - V(r')) \mathcal{E}(r, r') n(r') \frac{4}{3} \pi r'^3 \rho_v. \quad (2.3.4)$$

Чтобы найти скорость изменения массы капли за счет коагуляции ее с каплями всех размеров, выражение (2.3.4) следует проинтегрировать по спектру капель $0 \leq r' \leq r$. Выразим $n(r')$ через спектральную плотность капель $\eta(r')$.

$$n(r') = n \eta(r') \Delta r', \quad (2.3.5)$$

где n — общая концентрация капель в облаке.

Тогда, переходя к непрерывному спектру,

$$\frac{dm}{d\tau} = \int_0^r \pi (r + r')^2 (V(r) - V(r')) \cdot \mathcal{E}(r, r') \cdot n \eta(r') \cdot \frac{4}{3} \pi r'^3 \rho_v dr'. \quad (2.3.6)$$

Если в уравнении (2.3.6) перейти от $\frac{dm}{d\tau}$ к $\frac{dr}{d\tau}$, то получим

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{4\pi r^2 \rho_v} \int_0^r \pi(r+r')^2 (V(r) - V(r')) \cdot \mathcal{E}(r, r') \cdot n\eta(r') \cdot \frac{4}{3} \pi r'^3 \rho_v dr'. \quad (2.3.7)$$

Уравнения (2.3.6) и (2.3.7) интегрируются численно.

Для вычисления скоростей падения каплей относительно воздуха можно воспользоваться приведенной ранее формулой (2.1.26). Приведем ее здесь снова.

$$V(r) = 9,6(1 - \exp(-1200r))(1 - \exp(-12000r)) \cdot \sqrt{\frac{\rho_{\text{возд}}(0)}{\rho_{\text{возд}}(z)}}. \quad (2.3.8)$$

где $V(r)$ в $\text{м}\cdot\text{с}^{-1}$, а r в метрах.

Важную роль при расчетах скорости коагуляционного роста каплей играет учет коэффициента захвата $\mathcal{E}(r, r')$. Зависимость коэффициента захвата от размеров растущей капли r и захватываемых ею каплей r' является весьма сложной. Некоторые частные случаи этой зависимости можно предсказать из простых физических соображений. Когда r и r' малы, а значит, малы и скорости падения каплей относительно воздуха, они не коагулируют — коэффициент захвата стремится к нулю. С увеличением крупной капли коэффициент коагуляции увеличивается.

На рис. (2.3.2) приведена экспериментально полученная зависимость коэффициента захвата $\mathcal{E}(r, r')$ от размеров сталкивающихся каплей. Любопытно, что на рис. 2.3.2 для сравнительно больших каплей $\mathcal{E}(r, r')$ оказывается больше единицы. Это на первый взгляд неожиданное обстоятельство связано с тем, что за крупными каплями воздух турбулизируется — образуется так называемый турбулентный след. Попадающие в этот след капли испытывают меньшее сопротивление и догоняют каплю-лидера. Их движение в этом смысле подобно полету журавлей в строю вслед за вожаком.

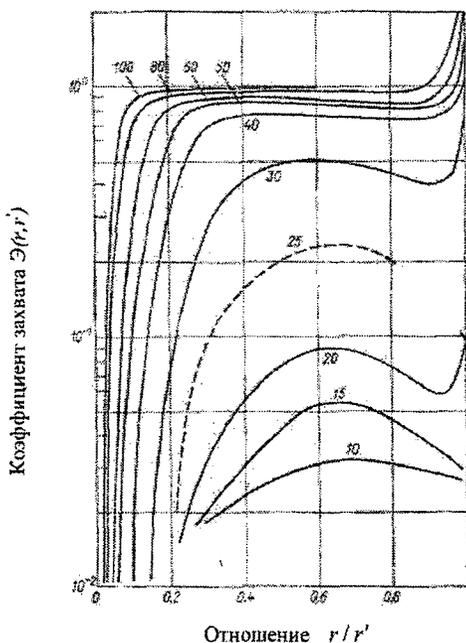


Рис. 2.3.2. Зависимость коэффициента захвата $\mathcal{E}(r, r')$ от размеров растущей r и захватываемых r' капель. Цифры у кривых — значения r в мкм.

Результаты экспериментов и теоретические оценки коэффициента захвата, полученные различными авторами, могут быть аппроксимированы следующей формулой

$$\mathcal{E}(r, r') = \left[1 - \exp\left(-\frac{r'}{a} \left(\frac{r-r'}{r+b/r'}\right)^2\right) \right] \exp\left[-\left(\frac{r}{cr'}\right)^2\right], \quad (2.3.9)$$

где $a = 5 \cdot 10^{-6}$ м, $b = 4 \cdot 10^{-4}$ м, $c = 1500$.

Вернемся к формуле (2.3.6). Если радиус крупной капли r существенно больше размеров облачных капель r' , то произведение $\pi(r+r')^2 \cdot (V(r) - V(r'))$ можно заменить на $\pi r^2 \cdot V(r)$. Введем средний коэффициент захвата $\bar{\mathcal{E}}(r)$ и вынесем его из-под знака интеграла. Верхний предел интегрирования r заменим на ∞ . Тогда, учитывая, что

$$\int_0^{\infty} n\eta(r') \cdot \frac{4}{3} \pi r'^3 \rho_B dr' = q_B, \quad (2.3.10)$$

где q_B – водность облака, уравнение (2.3.6) упрощается

$$\frac{dm}{d\tau} = \pi r^2 \bar{\Theta}(r) V(r) q_B. \quad (2.3.11)$$

Соответственно для скорости изменения радиуса растущей капли получим

$$\frac{dr}{d\tau} = \frac{\bar{\Theta}(r) V(r) q_B}{4\rho_B}. \quad (2.3.12)$$

Выражение (2.3.12) часто используется для вычисления скорости коагуляционного роста капель.

2.3.2. Кинетическое уравнение коагуляции

Уравнения (2.3.6), (2.3.7) и (2.3.11), (2.3.12) определяют изменения массы и радиуса отдельной капли. Легко видеть, что $\frac{dm}{d\tau}$ и $\frac{dr}{d\tau}$ зависят от размера растущей капли сложным образом. Вследствие этого в реальном облаке со временем происходит изменение спектра капель. В результате коагуляции общее число капель уменьшается, а спектр капель по массам (размерам) расширяется.

Для удобства изложения перейдем от изменяющейся со временем относительной плотности распределения капель по размерам $\eta(r, \tau)$ (см. разд. 2.1) к плотности распределения их по объемам $\eta(v, \tau)$, v – объем капли радиуса r .

Используем следующее соотношение

$$\eta(r, \tau) dr = \eta(v, \tau) dv, \quad (2.3.13)$$

Таким образом

$$\eta(v, \tau) = \eta(r, \tau) \left(\frac{dv}{dr} \right)^{-1} = \eta(r, \tau) \frac{1}{4\pi r^2}. \quad (2.3.14)$$

Перейдем далее от относительной плотности распределения капель по объемам к счетному распределению

$$\phi(v, \tau) = n(\tau) \eta(v, \tau), \quad (2.3.15)$$

где $n(\tau)$ – общая концентрация капель в момент времени τ , $\varphi(v, \tau)$ – счетная плотность распределения капель по объемам, то есть число капель объема v , содержащихся в единичном объеме облака и отнесенных к единичному интервалу объема капель. Размерность $\varphi(v, \tau)$ м⁻⁶.

Будем рассматривать изменение величины $\varphi(v, \tau)$ со временем. При этом ограничимся только коагуляционным процессом, полагая облако пространственно однородным (производные от $\varphi(v, \tau)$ по пространственным координатам равны нулю).

Обратимся к рис. 2.3.3, на котором приведено условное распределение капель по объемам в произвольный момент времени. Выберем из спектра группу сравнительно крупных капель объемом v_1 (рис. 2.3.3а). Число таких капель $n_1 = \varphi(v_1, \tau) \Delta v$, где Δv – ширина интервала капель по объемам (ширина столбика на графике). Каждая из таких капель, падая через облако, коагулирует с более мелкими каплями. В результате коагуляции образуются капли, объемы которых больше v_1 : при коагуляции v_1 с v_2 формируется капля v_4 , а при коагуляции такой же капли v_1 с каплей v_3 получается капля v_5 и т.д. При этом число капель в градациях 1, 2, 3 уменьшается, а в градациях 4 и 5 увеличивается.

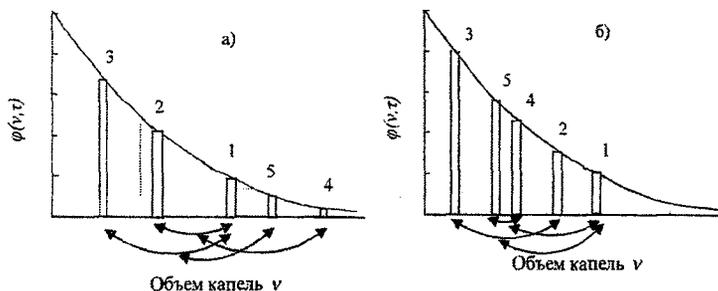


Рис. 2.3.3. Убывание а) и приращение б) числа капель v_1 при коагуляции

В свою очередь капли, объемы которых больше v_1 , при падении коагулируют с ними. Таким образом, число капель в градации v_1 убывает не только за счет коагуляции с более мелкими, но и за счет вымывания их более крупными каплями.

Чтобы оценить уменьшение плотности распределения капель v_1 со временем, надо учесть возможность взаимодействия этих капель со всеми каплями спектра.

$$\left(\frac{\partial \varphi(v, \tau)}{\partial \tau} \right)_{\text{убывания}} = -\varphi(v, \tau) \int_0^{\infty} \pi(r+r')^2 \cdot (V(r) - V(r')) \cdot \mathcal{E}(r, r') \cdot \varphi(v', \tau) dv'. \quad (2.3.16)$$

Произведение $\pi(r+r')^2 \cdot (V(r) - V(r')) \cdot \mathcal{E}(r, r')$ называют ядром уравнения коагуляции. От $K(r, r')$ легко можно перейти к $K(v, v')$, где v и v' — объемы соответствующих капель.

Обратимся теперь к рис. 2.3.36. Число капель в градации v_1 увеличивается за счет коагуляции более мелких капель. При этом капля объема v_1 образуется в результате слияния капли v с дополняющей ее каплей v_d , так что $v + v_d = v_1$. Например, v_1 образуется в результате слияния капель v_2 и v_3 или v_4 и v_5 . Таким образом, приращение плотности распределения капель объема v за счет коагуляции более мелких капель можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial \varphi(v, \tau)}{\partial \tau} \right)_{\text{приращ.}} = \frac{1}{2} \int_0^v K(v', v'_d) \varphi(v', \tau) \varphi(v'_d, \tau) dv'. \quad (2.3.17)$$

Множитель $\frac{1}{2}$ перед интегралом появляется в связи с тем, что при интегрировании каждое взаимодействие между v и v'_d учитывается дважды.

Общее изменение плотности распределения капель по объемам представляет собой сумму выражений (2.3.16) и (2.3.17).

$$\frac{\partial \varphi(v, \tau)}{\partial \tau} = \left(\frac{\partial \varphi(v, \tau)}{\partial \tau} \right)_{\text{убывания}} + \left(\frac{\partial \varphi(v, \tau)}{\partial \tau} \right)_{\text{приращ.}}$$

или

$$\frac{\partial \varphi(v, \tau)}{\partial \tau} = -\varphi(v, \tau) \int_0^{\infty} K(v, v') \varphi(v', \tau) dv' + \frac{1}{2} \int_0^v K(v', v'_d) \varphi(v', \tau) \varphi(v'_d, \tau) dv'. \quad (2.3.18)$$

Выражение (2.3.18) называют кинетическим уравнением коагуляции (КУК). В более широком смысле это название используют для обозначения уравнения, описывающего изменение спектра капель под действием механизмов переноса, диффузии, конденсационного роста, замерзания капель, взаимодействия капель с ледяными кристаллами, разбрызгивания капель, активации ОЯК и др.

В общем случае интегро-дифференциальное уравнение (2.3.18) решается численно. Для некоторых частных случаев можно получить аналитическое решение. Рассмотрим, например, как меняется со временем общая концентрация капель в облаке. Умножим левую и правую части уравнения (2.3.18) на dv и проинтегрируем их по v от 0 до ∞ . Тогда для левой части получим

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial \varphi(v, \tau)}{\partial \tau} dv = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{\infty} \varphi(v, \tau) dv = \frac{\partial}{\partial \tau} n(\tau) = \frac{dn(\tau)}{d\tau},$$

$$\frac{dn(\tau)}{d\tau} = - \int_0^{\infty} \varphi(v, \tau) \int_0^{\infty} K(v, v') \varphi(v', \tau) dv' dv + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(v', v'_d) \varphi(v', \tau) \varphi(v'_d, \tau) dv' dv.$$

В связи с интегрированием по v от 0 до ∞ верхний предел интегрирования во втором интеграле второго слагаемого справа заменяется на ∞ .

Имея в виду, что v'_d как и v изменяется от 0 до ∞ заменим v'_d на v .

$$\frac{dn(\tau)}{d\tau} = - \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(v, v') \varphi(v, \tau) \varphi(v', \tau) dv' dv + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(v, v') \varphi(v, \tau) \varphi(v', \tau) dv' dv.$$

Таким образом

$$\frac{dn(\tau)}{d\tau} = - \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} K(v, v') \varphi(v, \tau) \varphi(v', \tau) dv' dv. \quad (2.3.19)$$

Пусть $K(v, v') = b = const$. В этом случае

$$\frac{dn(\tau)}{d\tau} = -\frac{b}{2} \int_0^{\infty} \varphi(v, \tau) dv \int_0^{\infty} \varphi(v', \tau) dv' = -\frac{b}{2} n^2(\tau). \quad (2.3.20)$$

Последнее выражение легко интегрируется, если в момент времени $\tau = 0$ задать концентрацию капель $n(0)$. Тогда

$$\int_{n(0)}^{n(\tau)} \frac{dn(\tau)}{n^2(\tau)} = -\frac{b}{2} \int_0^{\tau} d\tau.$$

Отсюда

$$n(\tau) = \frac{n(0)}{1 + \frac{b}{2} n(0)\tau}. \quad (2.3.21)$$

Анализируя последнее уравнение, легко видеть, что концентрация капель в результате коагуляции уменьшается практически обратно пропорционально времени. Конечно, условие постоянства ядра кинетического уравнения для естественных облаков является нереальным. Поэтому результаты расчета по уравнению (2.3.21) не имеют практического смысла. Однако они могут быть использованы как тестовые при отладке программы численного интегрирования КУК.

2.3.3. Стохастическая коагуляция

Полученные в предыдущем разделе уравнения коагуляции выведены на основе модели непрерывного роста капель. В соответствии с этой моделью масса (размер) растущей капли на временном шаге $\Delta\tau$ увеличивается независимо от того, является ли число захваченных капель целым или дробным. Если, например, концентрация капель такова, что на вымываемый объем приходится только доля капель r' , то масса растущей капли увеличивается на массу этой доли. При этом все капли радиуса r имеют одинаковую скорость роста. Разумеется, эта модель является приближенной. Она не отражает того факта, что коагуляция капель представляет собой дискретный процесс: крупная капля может захватить только целое число мелких капель. Такой процесс являет-

ся стохастическим (вероятностным), поскольку и концентрация мелких капель и коэффициент захвата изменяются в пространстве и во времени.

Схематически сравнение моделей непрерывного и дискретного роста представлено на рис. 2.3.4. Выберем 100 крупных капель, имеющих в исходный момент $t = 0$ одинаковую массу m_0 . Эти капли падают в облаке мелких капель с массой m' . Пренебрежем изменениями концентрации мелких капель и вымываемого объема со временем. Пусть в режиме непрерывного роста на временном шаге Δt каждая из крупных капель захватывает по одной мелкой. Тогда в момент времени Δt масса каждой крупной капли увеличивается до $(m_0 + m')$, а в момент времени $2\Delta t$ до $(m_0 + 2m')$. Таким образом, все рассмотренные капли в любой момент времени имеют одинаковые массы.

Обратимся к дискретной модели. Пусть на первом шаге Δt только 50 крупных капель захватывают по одной мелкой, 25 капель вообще не коагулируют, а оставшиеся 25 захватывают по две капли. При этом общее число захваченных капель остается тем же, что и в результате непрерывного роста. Сохраним ту же пропорцию, то есть ту же вероятность коагуляции, на втором временном шаге. Легко видеть, что в результате образуется спектр капель разной массы от m_0 до $(m_0 + 4m')$. При этом средняя масса всех капель оказывается равной массе капель, формирующихся в режиме непрерывного роста. Важной особенностью дискретного режима является быстрый рост крупных капель, что особенно важно при формировании спектра частиц осадков. Рассмотренный здесь пример является скорее квазистохастическим, поскольку вероятности коагуляции на каждом шаге остаются постоянными и ограниченными только тремя исходами: отсутствие коагуляции, захват одной капли, захват двух капель. В реальных условиях некоторое число капель может коагулировать с тремя, четырьмя и т. д. мелкими каплями, при этом вероятности коагуляции могут изменяться случайным образом.

Оценим, как меняется со временем доля капель, испытавших разное число слияний с мелкими.

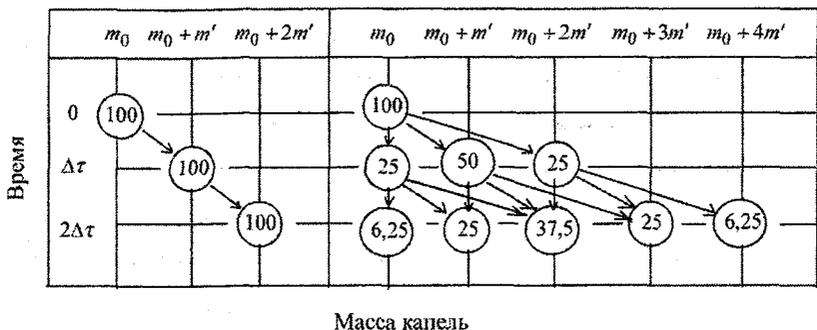


Рис. 2.3.4. Сравнение моделей непрерывного (слева) и дискретного (квазистохастического) (справа) коагуляционного роста капель.

Величина

$$\beta(r, r') = \mathfrak{D}(r, r') \pi(r + r')^2 [V(r) - V(r')] \cdot n'(r') \quad (2.3.22)$$

имеет размерность $1/c$, она отражает скорость коагуляции, то есть число мелких капель, захваченных крупной в единицу времени. Обозначим через $x(k, \tau)$ долю крупных капель, захвативших k мелких капель к моменту времени τ . Изменение со временем доли крупных капель, захвативших по одной мелкой, $k=1$, определяется произведением скорости коагуляции $\beta(r, r')$ и доли капель, не участвовавших к моменту τ в коагуляции, $k=0$.

$$\frac{dx(1, \tau)}{d\tau} = \beta(r, r') [1 - x(1, \tau)] \quad (2.3.23)$$

Соответственно, для доли капель $x(2, \tau)$, захвативших по две мелких,

$$\frac{dx(2, \tau)}{d\tau} = \beta(r, r') [x(1, \tau) - x(2, \tau)] \quad (2.3.24)$$

Для $k > 0$ можно написать аналогичные рекуррентные соотношения. В общем виде получим

$$\frac{dx(k, \tau)}{d\tau} = \beta(r, r') [x(k-1, \tau) - x(k, \tau)] \quad (2.3.25)$$

Начальные условия для каждого из уравнений $x(k, 0) = 0$, $k = 1, 2, 3 \dots$. При $k = 0$ начальное условие $x(0, 0) = 1$.

Чтобы проинтегрировать уравнения (2.3.23), (2.3.24) и (2.3.25), нужно знать изменения по времени величины $\beta(r, r')$, поскольку r и $r'(r')$ зависят от времени. Поэтому интегрирование системы k уравнений выполняется численно. Аналитическое решение легко может быть получено, если принять $\beta(r, r') = \beta = \text{const}(\tau)$.

Тогда

$$x(1, \tau) = 1 - \exp(-\beta\tau),$$

$$x(2, \tau) = 1 - (1 + \beta\tau)\exp(-\beta\tau),$$

$$x(3, \tau) = 1 - \left(1 + \beta\tau + \frac{\beta^2\tau^2}{2}\right)\exp(-\beta\tau).$$

Или в общем виде

$$x(k, \tau) = 1 - \left(\sum_{i=1}^k \frac{(\beta\tau)^{i-1}}{(i-1)!} \right) \exp^{-\beta\tau}. \quad (2.3.26)$$

Формулу (2.3.26) можно использовать как тестовую при численных экспериментах.

Расчет стохастической коагуляции является довольно громоздким и может быть осуществлен только при использовании быстродействующей вычислительной техники.

2.3.4. Разбрызгивание капель

Наблюдения показывают, что дождевые капли редко вырастают до таких размеров, при которых их эквивалентный радиус превышает 3 мм. Дело в том, что крупные капли становятся неустойчивыми и разрушаются, разбрызгиваются (при аналогичных условиях градины достигают размеров в несколько сантиметров). В аэродинамике в качестве формы тела, обладающего минимальным аэродинамическим сопротивлением, принято считать форму падающей капли. Однако такое представление является ошибочным. Крупная капля имеет идеально обтекаемую форму только в момент, когда она отрывается от крана (острия пилетки). Далее она деформируется под действием силы аэродинамического сопротивления – тем больше, чем больше скорость паде-

ния. Капля сплющивается, площадь ее поперечного сечения увеличивается, она теряет устойчивость и разбрызгивается. На рис. 2.3.5 приведены фотографии капель различных размеров, взвешенных в нетурбулизированном потоке в аэродинамической трубе.

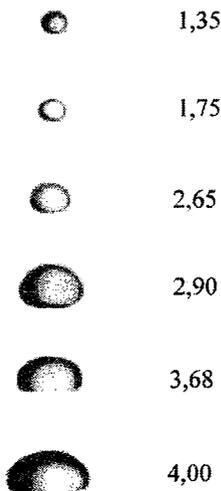


Рис. 2.3.5. Формы дождевых капель различного размера, взвешенных в воздушном потоке в аэродинамической трубе. (Цифры означают эквивалентный радиус в мм).

Видно, что мелкие капли при падении относительно воздуха сохраняют сферическую форму: сила поверхностного натяжения превышает деформирующую силу аэродинамического сопротивления (вязкости). С увеличением размера соотношение между силами становится обратным. Капля сплющивается, в ее лобовой части появляется углубление, капля приобретает форму перевернутой чашки. В турбулизированной среде форма капли непрерывно меняется. Вода "переливается" и капля-чашка под действием пульсации скорости раздувается как мыльный пузырь и лопаётся.

Разбрызгивание капли может происходить также в результате столкновения и временного слияния ее с другими облачными каплями. Вероятность разбрызгивания зависит от размеров сталкивающихся капель и геометрии столкновения (прямой или касательный удары). Хотя с небольшой вероятностью

стью могут разбрызгиваться капли радиусом 1...2 мм, при расчетах в качестве критического размера принимают эквивалентный радиус $r_{кр} = 2,5...3$ мм. При разбрызгивании крупной капли образуется целый спектр капель: несколько сравнительно крупных и десятки и даже сотни мелких. Масса всех осколков равна массе разбрызгивающейся капли.

2.4. Особенности коагуляционного роста ледяных частиц

Предполагается, что основным механизмом коагуляционного роста ледяных частиц, как и капель, является гравитационная коагуляция. Сравнительно крупная ледяная частица, падая сквозь облако, может сталкиваться с переохлажденными каплями и с более мелкими ледяными частицами. Таким образом, скорость коагуляционного роста ледяной частицы представляет собой сумму скоростей

$$\left(\frac{dm_{л}}{d\tau}\right)_{\text{коаг.}} = \left(\frac{dm_{л}}{d\tau}\right)_{\text{лв}} + \left(\frac{dm_{л}}{d\tau}\right)_{\text{лл}}, \quad (2.4.1)$$

где индексы лв и лл означают взаимодействие ледяной частицы с водяными каплями и с ледяными частицами соответственно.

Если ледяная частица сталкивается с переохлажденной каплей, то в зависимости от температуры частицы и капли возможны два механизма их взаимодействия. При сравнительно небольшом переохлаждении капли, попадая на ледяную поверхность, прежде чем замерзнуть, растекается по ней. При столкновении с другой каплей происходит то же самое. Однако если капли следуют достаточно часто друг за другом, то вода не успевает замерзнуть. На поверхности льда формируется водяная пленка, под которой происходит нарастание льда. Такой режим роста ледяных частиц называют *мокрым*.

Если ледяной кристалл и переохлажденная капля имеют сравнительно низкую температуру, то при соприкосновении их капля так быстро покрывается корочкой льда, что ее сферическая форма сохраняется. Нарастание таких

капель на поверхности льда называют *обзернением*. Это сухой режим роста льда. Типичным примером сухого роста льда является образование снежной крупы. Чередование режимов сухого и мокрого роста проявляется при формировании многослойных градин.

Коагуляция лед-лед может происходить, когда мелкие ледяные кристаллы сталкиваются с крупной ледяной частицей, находящейся в режиме мокрого роста – ледяные частицы прилипают к мокрой поверхности. Сухие ледяные частицы, имеющие низкую температуру, практически не коагулируют.

Диффузионный рост снежных ледяных кристаллов при температурах, близких к нулю, сопровождается образованием на поверхности льда тончайшей водяной пленки (квазижидкого слоя). При соприкосновении кристаллов в пленках формируются ледяные „мостики“, скрепляющие кристаллы друг с другом. Аналогичный механизм может проявляться во время роста града, когда поверхность градины сухая, но температура ее близка к нулю градусов.

По аналогии с формулой скорости коагуляционного роста капель скорость роста ледяной частицы можно представить уравнением

$$\left(\frac{dm_n}{d\tau}\right)_{\text{коаг.}} = \int_0^{\infty} \mathcal{E}(m_n, m'_b) \cdot A_{m_n} \cdot (V(m_n) - V(m'_b)) \eta(m'_b) dm'_b + \int_0^{m_n} \mathcal{E}(m_n, m'_n) \cdot A_{m_n} \cdot (V(m_n) - V(m'_n)) \eta(m'_n) dm'_n, \quad (2.4.2)$$

где $\mathcal{E}(m_n, m'_b)$ и $\mathcal{E}(m_n, m'_n)$ – коэффициенты захвата ледяной частицей m_n переохлажденных капель массой m'_b и мелких ледяных частиц $m'_n < m_n$; A_{m_n} – площадь вымывания; $V(m_n)$, $V(m'_b)$ и $V(m'_n)$ – скорости падения относительно воздуха растущей ледяной частицы, капель воды и мелких ледяных частиц соответственно; $\eta(m'_b)$ и $\eta(m'_n)$ – плотности распределения по массам переохлажденных капель воды и ледяных частиц.

Для ледяных частиц заданной геометрической формы от распределений параметров по массам можно перейти к распределениям по размерам – по ра-

диусам, длинам полуосей a и c . Поскольку $\mathcal{E}(m_{\text{л}}, m'_{\text{в(л)}})$ и $\eta(m'_{\text{в(л)}})$ чаще всего не описываются аналитическими выражениями, то вместо их используют осредненные характеристики $\mathcal{E}_{\text{лв}}, \mathcal{E}_{\text{лл}}, q_{\text{в}}, q_{\text{л}}$, где $q_{\text{в}}$ и $q_{\text{л}}$ – водность и ледность облака. Имея в виду, что $V(m_{\text{л}}) \gg V(m'_{\text{в}}), V(m'_{\text{л}})$ уравнение (2.4.2) редуцируется к виду

$$\left(\frac{dm_{\text{л}}}{dt}\right)_{\text{коаг.}} = \mathcal{E}_{\text{лв}} A_{m_{\text{л}}} V(m_{\text{л}}) q_{\text{в}} + \mathcal{E}_{\text{лл}} A_{m_{\text{л}}} V(m_{\text{л}}) q_{\text{л}}. \quad (2.4.3)$$

2.4.1. Скорость обзертания правильных ледяных кристаллов

Как показано выше в п. 2.2, в результате диффузионного осаждения растут ледяные кристаллы разнообразных форм. В зависимости от температуры и влажности вырастают кристаллы правильной геометрической формы: плоские – пластинки, звездочки, дендриты – либо вытянутые – иглы, столбики, пульки и другие. Такие кристаллы, падая через облако переохлажденных капель, сталкиваются и коагулируют с ними. Удивительным является то, что, как показывают наблюдения, сколько-нибудь заметная коагуляция начинается лишь при достаточно больших размерах ледяных частиц.

Рассмотрим рост пластинчатых кристаллов. Считается, что они при падении стремятся занять горизонтальное положение, их малая ось c направлена вертикально. Площадь выметания такой частицы в первом приближении составляет πa^2 (без учета эффекта зацепления). На самом деле пластинчатая частица падает не строго вертикально. Любой случайный наклон приводит к возникновению горизонтальной составляющей движения – скольжению. При этом возникает подъемная сила, угол атаки увеличивается и горизонтальная составляющая скорости уменьшается, а затем меняет направление. Ледяная частица совершает маятниковые движения подобно сухому листу, падающему с дерева в тихую погоду. Вследствие такого движения площадь выметания оказывается меньше, а возможности обтекания пластинки каплями улучшаются. При этом уменьшается коэффициент захвата переохлажденных капель. К сожалению, существуют только отрывочные экспериментальные данные об

обзёрнении пластинчатых кристаллов переохлажденными каплями. На рис. 2.4.1 приведены результаты численных экспериментов (см. Прупахер и Клет (1978)) по исследованию зависимости коэффициента захвата ледяной частицы от радиуса переохлажденных капель. Расчеты были выполнены для различных размеров пластинчатых кристаллов при постоянном отношении $c/a = 0,05$.

Анализируя данные, приведенные на рис. 2.4.1, можно отметить некоторую аналогию зависимости коэффициента захвата для ледяных пластинок с коэффициентом захвата для капель, рис. 2.3.2. Различие заключается в том, что обзёрнение ледяных кристаллов начинается при сравнительно больших размерах пластинок. Результаты, приведенные на рис. 2.4.1, могут быть аппроксимированы приближенной формулой

$$\mathcal{E}_{\text{лв}}^{\text{пл.}}(a, r'_в) = \frac{0,8 \left(r'_в - \frac{2 \cdot 10^{-9}}{a} \right) \cdot \left(\frac{a}{7} - r'_в \right) \cdot \left(1 + 4 \frac{a - 1,6 \cdot 10^{-4}}{a - 1 \cdot 10^{-4}} \right)}{\left(\frac{a}{7} - \frac{2 \cdot 10^{-9}}{a} \right)^2}, \quad (2.4.4)$$

для $\frac{2 \cdot 10^{-9}}{a} \leq r'_в \leq \frac{a}{7}$ при $a \geq 1,5 \cdot 10^{-4}$ м, a и $r'_в$ в метрах. Принято считать, что пластинчатые кристаллы начинают обзёрняться при длине большой полуоси около 150 мкм.

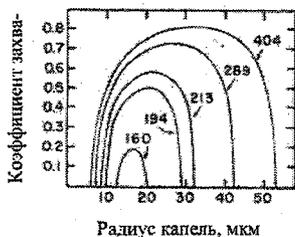


Рис. 2.4.1. Коэффициент захвата $\mathcal{E}_{\text{пл.}}(a, r'_в)$ для тонких пластинок как функция радиуса переохлажденных капель. Цифры у кривых — радиусы пластинок в мкм.

Столбчатые кристаллы падают так, что их большая ось ориентирована горизонтально. Площадь выметания можно принять равной $4ac$. Столбчатые

кристаллы при падении вращаются вокруг продольной оси, в результате чего появляется сила, отклоняющая их от движения по вертикали. Намерзание переохлажденных капель происходит на боковых призматических гранях кристалла. Зависимость коэффициента захвата от размеров кристалла и переохлажденных капель исследовалась в численных экспериментах Шлампа и др. (см. Янг (1993)). Качественно эта зависимость аналогична представленной на рис. 2.4.1. Результаты численных экспериментов аппроксимированы приближенной формулой

$$\varepsilon_{\text{лв}}^{\text{ст.}}(a, r'_в) = \frac{0,8 \left(r'_в - \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{a} \right) \cdot \left(\frac{a}{1,3} - r'_в \right) \cdot \left(1 + 4 \frac{a - 0,33 \cdot 10^{-4}}{a - 0,26 \cdot 10^{-4}} \right)}{\left(\frac{a}{1,3} - \frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{a} \right)^2}, \quad (2.4.5)$$

для $\frac{0,3 \cdot 10^{-3}}{a} \leq r'_в \leq \frac{a}{1,3}$, при $r'_в < 0,75 \cdot 10^{-4}$ м, $a > 0,26 \cdot 10^{-4}$ м.

Формулы (2.4.4) и (2.4.5) отражают результаты численных экспериментов, относящихся к „чистым“, необзерненным ледяным кристаллам, то есть кристаллам, на поверхности которых нет намерзших капель. При обзержении условия обтекания кристаллов каплями существенно изменяются, так что коэффициент захвата, рассчитанный по этим формулам, оказывается заниженным.

Как уже отмечалось, установившаяся скорость падения ледяных кристаллов относительно воздуха существенно зависит от их формы и эффективной плотности. В разд. 2.2 были получены приближенные формулы скорости падения пластинчатых и столбчатых кристаллов

$$V^{\text{пл.}}(a, c) = \left(\frac{C_{\text{а.с.}}}{C_{\text{а.с.,л}}} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{c}{a} \right)^{1/3} \cdot \left(\frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} \right)^{1/3} \cdot V(r_{\text{Э}}), \quad (2.4.6)$$

$$V^{\text{ст.}}(a, c) = \left(\frac{C_{\text{а.с.}}}{C_{\text{а.с.,л}}} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{c}{a} \right)^{-1/6} \cdot \left(\frac{\rho_{\text{л}}}{\rho_{\text{в}}} \right)^{1/3} \cdot V(r_{\text{Э}}), \quad (2.4.7)$$

где $C_{a.c.}$ и $C_{a.c.,л}$ – коэффициенты аэродинамического сопротивления капли воды и ледяной частицы соответственно, ρ_w – плотность воды, $\rho_{л}$ – эквивалентная плотность ледяной частицы, $V(r_3)$ – скорость падения капли, имеющей массу, равную массе ледяной частицы. Формулы (2.4.6) и (2.4.7) могут быть использованы только для ледяных частиц, эквивалентная масса которых меньше массы капли критического размера.

2.4.2. Рост крупы и града

Рассмотрим рост сравнительно крупных ледяных частиц крупы или града. Различие между этими видами осадков заключается в следующем. Частица крупы представляет собой совокупность смерзшихся мелких почти сферических ледяных зерен. Каждое такое зерно в свою очередь образуется при быстром замерзании переохлажденной капли воды. Смерзшиеся частицы образуют сравнительно рыхлую структуру матово-белого цвета снаружи и в разрезе. Частицы крупы формируются в режиме сухого роста.

В режиме мокрого роста, когда тепло, выделяющееся при замерзании переохлажденных капель, оказывается достаточно большим, на всей поверхности частицы или части ее образуется пленка воды. Под ней происходит нарастание прозрачного льда сравнительно высокой плотности (приближающейся к $0,9 \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$). Следует заметить, что прозрачность льда зависит также от размеров и концентрации включенных в лед пузырьков воздуха. Эти пузырьки образуются вследствие того, что растворимость воздуха в воде многократно больше, чем во льду. При замерзании воды воздух выделяется. При малых скоростях замерзания во льду образуется сравнительно небольшое число крупных пузырьков или длинных столбчатых каналов воздуха – формируется прозрачный сравнительно плотный лед. При большой скорости замерзания молекулы воздуха не успевают собраться в большие пузырьки или каналы. Во льду образуется множество мельчайших воздушных пузырьков, лед становится матовым. Матовые слои льда могут образовываться также путем захвата ледяной частицей, покрытой пленкой воды, более мелких ледяных кристал-

лов, которые примерзают к поверхности, часто не успевая растаять. В реальных облаках обычно происходит смена режимов сухого и мокрого роста, в результате чего формируются градины слоистой структуры. При переходе от сухого режима к мокрому часть незамерзшей воды проникает в поры рыхлого слоя, выросшего в сухом режиме. При этом, если вода не успевает замерзнуть, формируется, так называемый, губчатый град. Матовые слои различной природы сравнительно легко выделяются при анализе поперечных срезов под микроскопом, например, в поляризованном свете.

При расчетах размера или массы градины следует учитывать режим ее роста, который определяется балансом энергии. Изменение массы градины определяется следующими механизмами:

- испарением (диффузионным осаждением) пара с (на) ледяной (или водной) поверхности градины,
- коагуляционным захватом переохлажденных капель,
- коагуляционным захватом мелких ледяных частиц,
- потерей незамерзшей части воды в виде срывающихся капель.

$$\frac{dm_r}{d\tau} = \left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{диф.л(в)}} + \left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лв}} + \left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лл}} + \left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{срыв}} \quad (2.4.8)$$

Уравнение баланса тепла растущей градины удобно записать для избыточного теплосодержания относительно температуры фазового равновесия T_0

$$Q = c_l m_r (T_r - T_0), \quad (2.4.9)$$

где c_l – удельная теплоемкость льда, m_r и T_r – масса и температура градины.

Строго говоря, температура градины T_r меняется по ее сечению. Далее для упрощения будем считать, что T_r представляет собой среднюю температуру градины.

Изменение избыточного теплосодержания определяется следующими процессами:

– потерей тепла при испарении или выделением его за счет диффузии пара к поверхности градины

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_{1л(в)} = L_{п-л(в)} \left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{дифф.л(в)}, \quad (2.4.10)$$

– изменением теплосодержания в результате захвата градиной переохлажденных капель воды (в предположении, что температура их равна температуре облака)

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_2 = c_v (T_{обл.} - T_0) \left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{коаг.лв}, \quad (2.4.11)$$

– выделением тепла замерзания захваченной воды

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_3 = \alpha L_{в-л} \left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{коаг.лв}, \quad (2.4.12)$$

где α – доля замерзшей воды,

– изменением теплосодержания градины в результате захвата ею ледяных облачных частиц (будем считать, что температура их, как и мелких капель, равна $T_{обл.}$)

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_4 = c_l (T_{обл.} - T_0) \left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{коаг.лл}, \quad (2.4.13)$$

– теплообменом градины с окружающим воздухом

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_5 = -4\pi\lambda r_r (T_r - T_{обл.}) \cdot \varphi_{5л}(V(r_r)), \quad (2.4.14)$$

где $\varphi_{5л}(V(r_r))$ – коэффициент вентиляции (как и ранее в п. 2.1, пренебрежем различием между коэффициентами вентиляции для тепла и пара), λ – коэффициент молекулярной теплопроводности воздуха.

Таким образом, изменение избыточного теплосодержания можно представить в виде

$$\frac{dQ}{d\tau} = \sum_{i=1}^5 \left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_i, \quad i = \overline{1,5}. \quad (2.4.15)$$

В зависимости от режима роста уравнения (2.4.8) и (2.4.15) видоизменяются.

Сухой рост

В режиме сухого роста вся захваченная вода замерзает, $\alpha = 1$, жидкая пленка отсутствует и, следовательно, из уравнения (2.4.8) исключается последнее слагаемое. Что касается третьего слагаемого, то механизм захвата градиной мелких ледяных кристаллов может проявляться только при сравнительно высокой температуре, близкой к 0°C , когда на поверхности градины формируется квазизжидкий слой молекул воды. Однако для полноты картины и для сохранения плавности перехода от одного режима к другому это слагаемое следует сохранить. Таким образом

$$\left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{сух.}} = \left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{дифф.л}} + \left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лв}} + \left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{коаг.ли}} \quad (2.4.16)$$

Скорость испарения (диффузионного роста) ледяной частицы в соответствии с п. 2.2 зададим в виде

$$\left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{дифф.л}} = 4\pi D r_g \frac{E_{в, T_{\text{обл.}}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}} \left(f_{в, \text{обл.}} - \frac{E_{л, T_r}}{E_{в, T_{\text{обл.}}}} \right) \varphi_{\text{эл}}(V(r_g)) \quad (2.4.17)$$

При записи этого выражения геометрический фактор для градины принят равным ее радиусу $C_r = r_g$, кроме того, в связи с малым влиянием не учитываются кинетический эффект и томпсоновская поправка.

Принимая

$$E_{л, T_r} = E_0 \exp \left[-\frac{L_{\text{п-л}}}{R_{\text{п}}} \left(\frac{1}{T_r} - \frac{1}{T_0} \right) \right], \text{ и}$$

$$E_{в, T_{\text{обл.}}} = E_0 \exp \left[-\frac{L_{\text{п-в}}}{R_{\text{п}}} \left(\frac{1}{T_{\text{обл.}}} - \frac{1}{T_0} \right) \right]$$

и, полагая $T_r \cdot T_0 \approx T_{\text{обл.}} \cdot T_0 \approx T_{\text{обл.}}^2$, после несложных преобразований получим

$$\frac{E_{л, T_{\Gamma}}}{E_{в, T_{обл.}}} = 1 + \frac{(L_{п-л} - L_{п-в})}{R_{п} T_{обл.}^2} (T_{обл.} - T_0) + \frac{L_{п-л}}{R_{п} T_{обл.}^2} (T_{\Gamma} - T_{обл.}).$$

Тогда выражение (2.4.17) приводится к виду

$$\left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau} \right)_{\text{дифф.л}} = \frac{4\pi D r_{\Gamma} E_{в, T_{обл.}}}{R_{п} T_{обл.}} \times \\ \times \left(f_{в.обл.} - 1 - \frac{(L_{п-л} - L_{п-в})}{R_{п} T_{обл.}^2} (T_{обл.} - T_0) - \frac{L_{п-л}}{R_{п} T_{обл.}^2} (T_{\Gamma} - T_{обл.}) \right) \cdot \varphi_{5л}(V(r_{\Gamma})) \quad (2.4.18)$$

Коагуляционный рост ледяной частицы описывается выражениями

$$\left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau} \right)_{\text{коаг.лв}} = \mathcal{E}_{лв} \pi r_{\Gamma}^2 q_{в} V(r_{\Gamma}), \quad (2.4.19)$$

$$\left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau} \right)_{\text{коаг.лл}} = \mathcal{E}_{лл} \pi r_{\Gamma}^2 q_{л} V(r_{\Gamma}) \quad (2.4.20)$$

Установившаяся скорость падения градин относительно воздуха может быть получена из условия равенства сил тяжести и аэродинамического сопротивления. Тогда

$$V(r_{\Gamma}) = \sqrt{\frac{8}{3} \cdot \frac{g}{C_{а.с.}} \cdot \frac{\rho_{л}}{\rho_{возд.}(z)} \cdot r_{\Gamma}}. \quad (2.4.21)$$

Коэффициент вентиляции для крупных ледяных частиц можно рассчитать по упрощенной формуле

$$\varphi_{5л}(V(r_{\Gamma})) = 1 + 0,25 \sqrt{\frac{2r_{\Gamma} V(r_{\Gamma})}{\nu}}. \quad (2.4.22)$$

Уравнение баланса избыточного теплосодержания для сухого режима роста (2.4.15) принимает вид

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_{\text{сух.}} = L_{\text{п-л}} \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{дифф.л}} + [L_{\text{в-л}} + c_{\text{в}}(T_{\text{обл.}} - T_0)] \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лв}} + c_{\text{л}}(T_{\text{обл.}} - T_0) \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лл}} - 4\pi\lambda r_{\Gamma}(T_{\Gamma} - T_{\text{обл.}}) \varphi_{5\text{л}}(V(r_{\Gamma})) \quad (2.4.23)$$

Подставляя левую часть уравнения (2.4.23) в виде

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_{\text{сух.}} = c_{\text{л}}(T_{\Gamma} - T_0) \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{сух.}} + c_{\text{л}} m_{\Gamma} \frac{dT_{\Gamma}}{d\tau}, \quad (2.4.24)$$

решим его относительно скорости изменения температуры градины

$$\frac{dT_{\Gamma}}{d\tau} = \frac{1}{c_{\text{л}} m_{\Gamma}} \left(L_{\text{п-л}} \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{дифф.л}} + (L_{\text{в-л}} + c_{\text{в}}(T_{\text{обл.}} - T_0)) \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лв}} + c_{\text{л}}(T_{\text{обл.}} - T_0) \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лл}} - 4\pi\lambda r_{\Gamma}(T_{\Gamma} - T_{\text{обл.}}) \cdot \varphi_{5\text{л}}(V(r_{\Gamma})) - c_{\text{л}}(T_{\Gamma} - T_0) \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{сух.}} \right) \quad (2.4.25)$$

Для изменяющихся вдоль траектории частицы параметров облака $(T_{\text{обл.}}, q_{\text{в}}, q_{\text{л}}, f_{\text{в, обл.}})$ и ее размера r_{Γ} уравнение (2.4.25) решается путем численного интегрирования. Для установившегося состояния $\left(\frac{dT_{\Gamma}}{d\tau} = 0\right)$ выражение для T_{Γ} получается довольно громоздким. Выпишем его в виде корней квадратного уравнения

$$T_{\Gamma} = T_{\text{обл.}} - \frac{b}{2a} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4ac}{b^2}} \right), \quad (2.4.26)$$

где $a = c_{\text{л}} B$,

$$b = B[c_{\text{л}}(T_{\text{обл.}} - T_0) - L_{\text{п-л}}] - Ac_{\text{л}} - c_{\text{л}} \left[\left(\frac{dm}{d\tau} \right)_{\text{коаг.лп}} + \left(\frac{dm}{d\tau} \right)_{\text{коаг.лв}} \right] - 4\pi\lambda r_{\text{г}} \varphi(V(r_{\text{г}}))$$

$$c = [(c_{\text{в}} - c_{\text{л}})(T_{\text{обл.}} - T_0) + L_{\text{в-л}}] \left(\frac{dm}{d\tau} \right)_{\text{коаг.лв}} - A(c_{\text{л}}(T_{\text{обл.}} - T_0) - L_{\text{п-л}}).$$

В свою очередь

$$A = \frac{4\pi D r_{\text{г}} E_{\text{в}, T_{\text{обл.}}} \varphi(V(r_{\text{г}}))}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}} \left[f_{\text{в, обл.}} - 1 - \frac{L_{\text{в-л}}(T_{\text{обл.}} - T_0)}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}^2} \right],$$

$$B = \frac{4\pi D r_{\text{г}} E_{\text{в}, T_{\text{обл.}}} L_{\text{п-л}} \varphi(V(r_{\text{г}}))}{R_{\text{п}}^2 T_{\text{обл.}}^3}.$$

Выражения (2.4.23) и (2.4.24) могут быть использованы для определения режима роста градины. Пока $T_{\text{г}} < T_0$ и $T_{\text{обл.}} < T_0$, градина растет в сухом режиме, ее рост определяется уравнением (2.4.16). Когда температура градины достигает T_0 , меняется режим роста. Если $T_{\text{г}} > T_0$, то следует принять $T_{\text{г}} = T_0$.

Можно заметить, что сухой режим сохраняется в подоблачном слое (или в межоблачном пространстве) при температуре выше 0°C . Если $q_{\text{в}}, q_{\text{л}} = 0$, а $f_{\text{в, обл.}} < 1$, то температура градины становится ниже температуры воздуха. При этом, естественно, градина испаряется.

Мокрый режим

Рост льда в мокром режиме происходит под пленкой воды. Упрощая задачу, пренебрежем изменением толщины пленки во времени и по поверхности градины, а также изменением теплоемкости градины за счет пленки воды. Таким образом, будем считать, что поверхность градины покрыта водяной пленкой бесконечно малой толщины. Изменение массы градины определяется теми же механизмами, которые перечислены при записи уравнения (2.4.8)

$$\left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{мокр.}} = \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{дифф.в}} + \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лв}} + \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лп}} + \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{срыв}} \quad (2.4.27)$$

Долю воды и водяного пара, «осваиваемую» градиной обозначим через α .

Тогда

$$\left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{мокр.}} = \alpha \left[\left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{дифф.в}} + \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лв}} \right] + \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лп}} \quad (2.4.28)$$

Принимая температуру поверхности градины равной температуре равновесия вода-лед ($T_{\Gamma} = T_0$), скорость диффузионного изменения массы градины можно записать в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{дифф.в}} &= \frac{4\pi D r_{\Gamma} E_{в, T_{\text{обл.}}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}} \left(f_{в, \text{обл.}} - \frac{E_{в, T_0}}{E_{в, T_{\text{обл.}}}} \right) \cdot \varphi_{5\lambda}(V(r_{\Gamma})) = \\ &= \frac{4\pi D r_{\Gamma} E_{в, T_{\text{обл.}}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}} \times \left(f_{в, \text{обл.}} - 1 + \frac{L_{\text{п-в}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}^2} (T_{\text{обл.}} - T_0) \right) \cdot \varphi_{5\lambda}(V(r_{\Gamma})). \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

Скорости коагуляционного роста $\left(\frac{dm}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лв}}$ и $\left(\frac{dm}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лп}}$ определяются

выражениями (2.4.19) и (2.4.20).

Изменение избыточного теплосодержания градины, растущей в мокром режиме, равно нулю. Уравнение баланса тепла можно представить в виде

$$\begin{aligned} L_{\text{п-в}} \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{дифф.в}} + \alpha L_{\text{в-л}} \left[\left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{дифф.в}} + \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лв}} \right] + c_{\text{в}} (T_{\text{обл.}} - T_0) \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лп}} \\ + c_{\text{л}} (T_{\text{обл.}} - T_0) \left(\frac{dm_{\Gamma}}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лп}} + 4\pi \lambda r_{\Gamma} (T_{\text{обл.}} - T_0) \cdot \varphi_{5\lambda}(V(r_{\Gamma})) = 0. \end{aligned} \quad (2.4.30)$$

В соответствии с предположением, что температура срывающихся капель равна T_0 , избыточное теплосодержание градины при срыве капель не меняется.

Из уравнения (2.4.30) можно найти величину α

$$\alpha = \left[\begin{array}{cc} -L_{\text{п-в}} \left(\frac{dm_r}{d\tau} \right)_{\text{дифф.в}} - c_{\text{в}} (T_{\text{обл.}} - T_0) \left(\frac{dm_r}{d\tau} \right)_{\text{коаг.лв}} & - \\ -c_{\text{л}} (T_{\text{обл.}} - T_0) \left(\frac{dm_r}{d\tau} \right)_{\text{коаг.лл}} & -4\pi\lambda r_r (T_{\text{обл.}} - T_0) \varphi_{5\text{л}}(V(r_r)) \end{array} \right] \times \\ \times \left[L_{\text{в-л}} \left(\left(\frac{dm_r}{d\tau} \right)_{\text{дифф.в}} + \left(\frac{dm_r}{d\tau} \right)_{\text{коаг.лв}} \right) \right]^{-1}. \quad (2.4.31)$$

Если принять $\alpha = 1$, то из того же уравнения (2.4.30) с учетом выражения (2.4.19) можно найти критическое значение водности, при котором происходит переход от одного режима роста к другому.

$$q_{\text{в,кр.}} = \left[\begin{array}{cc} -(L_{\text{п-в}} + L_{\text{в-л}}) \left(\frac{dm_r}{d\tau} \right)_{\text{дифф.в}} - c_{\text{л}} (T_{\text{обл.}} - T_0) \left(\frac{dm_r}{d\tau} \right)_{\text{коаг.лл}} & - \\ -4\pi\lambda r_r (T_{\text{обл.}} - T_0) \cdot \varphi_{5\text{л}}(V(r_r)) & \end{array} \right] \times \\ \times \left[\mathcal{E}_{\text{лв}} \pi r_r^2 V(r_r) (L_{\text{в-л}} + c_{\text{в}} (T_{\text{обл.}} - T_0)) \right]^{-1}. \quad (2.4.32)$$

Критическое значение водности $q_{\text{в}}$ зависит от температуры $T_{\text{обл.}}$, размера растущей градины r_r , ледности $q_{\text{л}}$, относительной влажности в облаке $f_{\text{в}}$, коэффициентов захвата $\mathcal{E}_{\text{лв}}$ и $\mathcal{E}_{\text{лл}}$ и давления воздуха p (в той мере, в которой от него зависят значения $D, \lambda, V(r_r)$).

Полагая $f_{\text{в}} \approx 1$ и $q_{\text{л}} = 0$, можно найти предельные условия перехода от одного режима роста к другому, определяемые значениями $q_{\text{в}}$, $T_{\text{обл.}}$ и r_r . Эти условия называют в литературе пределом Шумана-Лудлама.

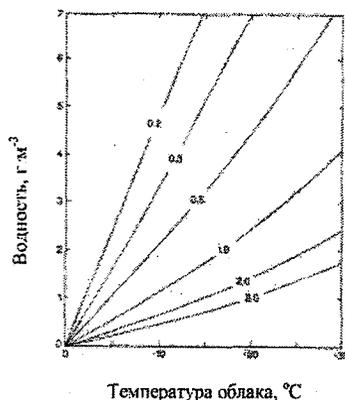


Рис. 2.4.2. Условия перехода от режима сухого роста градины к мокрому (и наоборот) – предел Шумана–Лудлама. (Цифры у кривых – радиусы градин в см).

На рис. 2.4.2, заимствованным из книги Янга (1993), приведены результаты расчетов связи между $q_{в,кр.}$, $T_{обл.}$ и $r_{Г}$ при давлении $p = 700$ гПа. График позволяет найти критическую водность при заданных $T_{обл.}$ и $r_{Г}$, либо критический радиус градины при заданных $q_{в}$ и $T_{обл.}$, либо температуру облака $T_{обл.}$ при заданных $q_{в}$ и $r_{Г}$.

Таяние градин

Когда градина, падая через облако, пересекает нулевую изотерму, она начинает таять. Пренебрегая, по-прежнему, теплосодержанием и массой воды, образующей пленку, будем считать, что вся избыточная вода срывается с поверхности градины. Примем также, что ниже нулевой изотермы в облаке не содержится мелких ледяных частиц ($q_{л} = 0$). Тогда, считая, что температура градины $T_{Г} = T_0$, уравнение баланса избыточного теплосодержания для градины сводится к виду

$$L_{п-в} \left(\frac{dm_{Г}}{d\tau} \right)_{дифф.в} + L_{в-л} \left(\frac{dm_{Г}}{d\tau} \right)_{таян.} + c_{в} (T_{обл.} - T_0) \left(\frac{dm_{Г}}{d\tau} \right)_{коаг.лв} + 4\pi\lambda r_{Г} (T_{обл.} - T_0) \cdot \varphi_{5л} (V(r_{Г})) = 0 \quad (2.4.33)$$

Решим это уравнение относительно $\left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{таян.}}$.

$$\left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{таян.}} = -\frac{1}{L_{\text{в-л}}} \left(4\pi r_r \lambda (T_{\text{обл.}} - T_0) \varphi_{5\text{л}}(V(r_r)) + L_{\text{п-в}} \left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{лиф.ф.в}} + c_{\text{в}}(T_0 - T_{\text{обл.}}) \left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{коаг.лв}} \right). \quad (2.4.34)$$

Чтобы получить рабочую формулу для расчета скорости таяния градины, в уравнение (2.4.34) следует подставить выражения (2.4.19) и (2.4.29)

$$\left(\frac{dm_r}{d\tau}\right)_{\text{таян.}} = -\frac{1}{L_{\text{в-л}}} \left(4\pi r_r \lambda (T_{\text{обл.}} - T_0) \cdot \varphi_{5\text{л}}(V(r_r)) + \frac{4\pi D r_r E_{\text{в.Т.обл.}} L_{\text{в-л}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}} \right) \cdot \left(f_{\text{в.обл.}} - 1 + \frac{L_{\text{п-в}}}{R_{\text{п}} T_{\text{обл.}}^2} (T_{\text{обл.}} - T_0) \right) \cdot \varphi_{5\text{л}}(V(r_r)) + c_{\text{в}}(T_{\text{обл.}} - T_0) \cdot \Delta_{\text{лв}} \pi r_r^2 q_{\text{в}} V(r_r). \quad (2.4.35)$$

Уравнение (2.4.35) можно использовать лишь до тех пор, пока идет интенсивный срыв воды с поверхности градины. С уменьшением размера градины срыв становится менее эффективным и при достижении градиной массы примерно равной массе капли критического размера (эквивалентный радиус около 3 мм) полностью прекращается.

2.5. Кристаллизация переохлажденных облаков

Чтобы капля замерзла, в ней должен появиться ледяной зародыш. Ледяные зародыши образуются в результате действия гомогенного и (или) гетерогенного механизмов нуклеации. Как показано в разд. 1, гомогенный механизм «включается» в действие лишь при больших переохлаждениях (при температуре ниже -35°C).

Проявление разных форм гетерогенного механизма связано со свойствами и концентрациями ядер нуклеации. При этом независимо от вида механизма возникновения ледяных жизнеспособных зародышей есть процесс вероятно-

стный. Каждая отдельная капля в переохлажденном состоянии может находиться неопределенно долго. Однако для большой совокупности капель (облако) существуют вполне определенные закономерности их кристаллизации.

Будем различать характерное время кристаллизации капельного облака и время полного замерзания отдельной капли от момента появления в ней ледяного зародыша.

2.5.1. Время замерзания капли воды

Независимо от того, в какой части капли и вследствие действия какого механизма появляется ледяной зародыш, динамика дальнейшего замерзания заключается в следующем. Зародыш «прорастает» к поверхности капли и далее распространяется по ней, образуя сплошную ледяную корку. Затем эта корка утолщается – фронт кристаллизации распространяется к центру капли. Поскольку плотности воды и льда различны, внутри капли создается избыточное давление, в результате чего капля деформируется, растрескивается и даже взрывоподобно раскалывается.

Идеализируя процесс замерзания, будем считать, что как капля, так и ледяная оболочка имеют сферическую форму. Выделение тепла кристаллизации происходит внутри капли со скоростью

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_в = -L_{в-л} \frac{dm}{d\tau}, \quad (2.5.1)$$

где $L_{в-л}$ – удельная теплота фазового превращения вода-лед, m – масса незамерзшей части капли, $m = \frac{4}{3}\pi\rho_в x_1^3$, $\rho_в$ – плотность воды, x_1 – расстояние от центра капли до фронта кристаллизации.

Тепло, выделяющееся при замерзании воды, распространяется сферически изотропно сначала через ледяную корку к поверхности капли

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_л = -4\pi x^2 \lambda_л \frac{dT}{dx}, \quad (2.5.2)$$

а затем в окружающую среду

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_{\text{возд.}} = -4\pi x^2 \lambda \frac{dT}{dx}. \quad (2.5.3)$$

Здесь $\lambda_{\text{л}}$ и λ – удельные теплопроводности льда и воздуха соответственно, x – текущая координата – расстояние от центра капли.

Будем считать, что в каждый момент времени потоки тепла $\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_{\text{л}}$ и

$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_{\text{возд.}}$ равны и не зависят от координаты x . Выполним интегрирование

уравнения (2.5.2) по x от x_1 до r , а по температуре от $T_0 = 273\text{ K}$ до T_r , и уравнения (2.5.3) по x от r до ∞ , а по T от T_r до $T_{\infty} \equiv T_{\text{обл.}}$. Тогда получим

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_{\text{л}} = \frac{4\pi\lambda_{\text{л}}rx_1(T_0 - T_r)}{r - x_1}, \quad (2.5.4)$$

$$\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_{\text{возд.}} = 4\pi r\lambda(T_r - T_{\text{обл.}}). \quad (2.5.5)$$

Приравнявая выражения (2.5.4) и (2.5.5), найдем неизвестную пока температуру поверхности капли

$$T_r = T_0 - \frac{T_0 - T_{\text{обл.}}}{\frac{\lambda_{\text{л}}}{\lambda} \cdot \frac{x_1}{(r - x_1)} + 1}. \quad (2.5.6)$$

Используя формулу (2.5.6), можно рассчитать температуру поверхности капли при любом расстоянии фронта кристаллизации от ее центра $0 \leq x_1 < r$. Условие $x_1 = r$ отражает отсутствие ледяной корки и, следовательно, не охватывается представленным решением.

Подставим в выражение (2.5.1) $\frac{dm}{d\tau} = 4\pi x_1^2 \rho_{\text{в}} \frac{dx_1}{d\tau}$, а в выражение (2.5.4)

$(T_0 - T_r)$ из формулы (2.5.6). Приравняем $\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_{\text{л}}$ к $\left(\frac{dQ}{d\tau}\right)_{\text{в}}$

$$-L_{\text{в-л}}x_1\rho_{\text{в}} \frac{dx_1}{d\tau} = \frac{\lambda_{\text{л}}\lambda r(T_0 - T_{\text{обл.}})}{\lambda_{\text{л}}x_1 - \lambda(r - x_1)}. \quad (2.5.7)$$

Разделив переменные и выполнив интегрирование по x_1 от $x_1 \rightarrow r$ до $x_1 = 0$, а по времени от $\tau = 0$ до $\tau_{\text{зам.}}$, получим

$$\tau_{\text{зам.}} = \frac{(2\lambda_{\text{л}} - \lambda)r^2 L_{\text{в-л}} \rho_{\text{в}}}{6\lambda_{\text{л}} \lambda (T_0 - T_{\text{обл.}})} \quad (2.5.8)$$

Имея в виду, что $\lambda \ll \lambda_{\text{л}}$, формулу (2.5.8) можно упростить

$$\tau_{\text{зам.}} = \frac{r^2 L_{\text{в-л}} \rho_{\text{в}}}{3\lambda (T_0 - T_{\text{обл.}})} \quad (2.5.9)$$

Выражение (2.5.3) записано для капли неподвижной относительно окружающей среды и без учета затрат тепла на испарение с ледяной поверхности. Первое обстоятельство легко учесть введением коэффициента вентиляции $\varphi_{5\text{л}}(V(r))$

$$\tau_{\text{зам.}} = \frac{r^2 L_{\text{в-л}} \rho_{\text{в}}}{3\lambda (T_0 - T_{\text{обл.}}) \cdot \varphi_{5\text{л}}(V(r))} \quad (2.5.10)$$

Чтобы учесть тепло фазовых переходов, выражение (2.5.3) следует дополнить слагаемым $L_{\text{л-л}} \left(\frac{dm}{d\tau} \right)_{\text{дифф.л}}$

Оценим толщину ледяной корки, образующейся на переохлажденной капле за счет ее «отрицательного» теплосодержания. Если исходная температура капли $T_{\text{в}} < T_0$, то образование массы льда $m_{\text{л}}$ в капле приведет к выделению тепла фазовых превращений $L_{\text{в-л}} m_{\text{л}}$.

$$c_{\text{в}} m_{\text{в}} (T_{\text{в}} - T_0) + L_{\text{в-л}} m_{\text{л}} = c_{\text{в}} (m_{\text{в}} - m_{\text{л}}) \cdot (T - T_0) + c_{\text{л}} m_{\text{л}} (T - T_0), \quad (2.5.11)$$

где T – температура льда и оставшейся незамерзшей части воды.

Замерзание может происходить без теплоотдачи в окружающую среду до тех пор, пока температура T не достигнет температуры фазового равновесия T_0 . Принимая $T - T_0 = 0$, $m_{\text{л}} = \frac{4}{3} \pi \rho_{\text{л}} (r^3 - x_1^3)$ и пренебрегая различием

плотностей воды и льда, получим для толщины пленки $(r - x_1)$ выражение

$$r - x_1 = r \left(1 - \left(1 + \frac{c_v(T_v - T_0)}{L_{в-л}} \right)^{1/3} \right). \quad (2.5.12)$$

Например, если капля переохлаждена до -10°C , то толщина ледяной пленки, образующейся при отсутствии теплообмена с окружающей средой, составит $\sim 0,045$ радиуса капли. Если исходная температура капли равна примерно -80°C , то она без теплообмена с окружающей средой полностью замерзает.

Обратимся к формуле (2.5.10) и оценим время полного замерзания для двух капель радиусами $r_1 = 10^{-5}$ м и $r_2 = 10^{-4}$ м в облаке с температурой -10°C . Коэффициент вентиляции для меньшей капли $\varphi_{5л}(V(r_1)) \approx 1$, а для второй капли $\varphi_{5л}(V(r_2)) \approx 1,7$. Соответственно получим время замерзания первой капли $\tau_{зам,1} \approx 0,05$ с, а второй $\tau_{зам,2} \approx 3$ с. Это означает, что время полного замерзания отдельных облачных капель пренебрежимо мало по сравнению со временем существования этих капель в переохлажденных облаках. Поэтому в дальнейшем при оценках скорости кристаллизации облаков время собственно замерзания капель не будем учитывать: будем считать, что переохлажденная капля мгновенно переходит в разряд ледяных частиц, как только в ней появляется ледяной зародыш.

2.5.2. Естественная кристаллизация переохлажденных облаков

Воспользуемся для суммарной скорости нуклеации выражением, предложенным ранее в разд. 1.11

$$J_{л}(T) = -3 \cdot 10^2 t \cdot \exp(-0,6t) (1 + 10^{-9} \exp(-0,6t)), \quad (2.5.13)$$

где $J_{л}(T)$ в $\text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$, t в $^\circ\text{C}$.

Рассмотрим, как изменяется со временем число замерзших капель при различных условиях в облаках.

Монодисперсное облако

Облако состоит из капель одинакового размера r , концентрация капель n . Скорость превращения капель в ледяные частицы (скорость замерзания) определяется их числом, размером и температурой.

$$\frac{dn_{\text{л}}}{d\tau} = (n_0 - n_{\text{л}}) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 J_{\text{л}}(T), \quad (2.5.14)$$

где $n_{\text{л}}$ — число замерзших капель к моменту времени τ , n_0 — концентрация капель при $\tau = 0$. Таким образом, разность $(n_0 - n_{\text{л}})$ представляет собой концентрацию капель, сохранившихся ко времени τ . Заметим, что $\frac{dn}{d\tau} = -\frac{dn_{\text{л}}}{d\tau}$.

Разделим обе части уравнения (2.5.14) на n_0 . Отношение $\frac{n_{\text{л}}}{n_0} = W$ представляет собой долю замерзших капель.

$$\frac{dW}{d\tau} = (1 - W) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 J_{\text{л}}(T). \quad (2.5.15)$$

Если размеры капель и температура облака остаются постоянными во времени, то уравнение (2.5.15) легко интегрируется от 0 до W и от 0 до τ .

$$W = 1 - \exp\left(-\frac{4}{3} \pi r^3 J_{\text{л}}(T) \tau\right). \quad (2.5.16)$$

Очевидно, что ко времени τ доля замерзших капель тем больше, чем больше r и чем ниже температура облака. Это означает, что при одинаковой температуре крупнокапельное облако кристаллизуется быстрее мелкокапельного, а при одинаковых размерах капель время существования капельного облака тем меньше, чем глубже переохлаждение. Облако полностью кристаллизуется ($W = 1$) при $\tau = \infty$. На практике часто рассматривают время $\tau_{0,5}$, в течение которого замерзает половина капель ($W = 0,5$).

$$\tau_{0,5} = -\frac{0,525}{\pi r^3 J_{\text{л}}(T)} \quad (2.5.17a)$$

или, переходя от радиуса к диаметру капли d ,

$$\tau_{0,5} = -\frac{4,2}{\pi d^3 J_n(T)}. \quad (2.5.176)$$

Пусть температура облака изменяется со скоростью $\frac{dT}{d\tau} = \dot{T}$. Перейдем в уравнении (2.5.15) от производной по времени к производной по температуре $d\tau = \frac{dT}{\dot{T}}$.

$$\frac{dW}{dT} = (1-W) \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 J_n(T) \cdot \frac{1}{\dot{T}}. \quad (2.5.18)$$

Интегрируя это выражение по температуре от T_0 до T , получим

$$W = 1 - \exp\left(-\int_{T_0}^T \frac{4}{3} \pi r^3 J_n(T) \cdot \frac{dT}{\dot{T}}\right). \quad (2.5.19)$$

Переходя к реальным облакам, удобно скорость охлаждения представить в виде $\dot{T} \approx -w \cdot \gamma_{\text{в.а.}}$, где w – скорость вертикальных токов, $\gamma_{\text{в.а.}}$ – влажноадиабатический градиент температуры. В первом грубом приближении можно считать, что понижение температуры в поднимающемся воздухе происходит по влажной адиабате.

$$W = 1 - \exp\left(\int_{T_0}^T \frac{4}{3} \pi r^3 J_n(T) \cdot \frac{dT}{w \gamma_{\text{в.а.}}}\right). \quad (2.5.20)$$

На рис. 2.5.1 приведено схематическое распределение доли замерзших капель в облаках при различных размерах r и скоростях восходящих токов w . Рассмотрим характерный ход зависимости доли замерзших капель от температуры.

Теоретически при любом переохлаждении $W > 0$. Однако при небольших переохлаждениях отличие W от нуля оказывается чрезвычайно малым – кривые практически сливаются с осью абсцисс. Это связано с тем, что мала сама скорость нуклеации $J_n(T)$. С понижением температуры $J_n(T)$ возрастает и в соответствии с уравнением (2.5.18) доля замерзших капель стремительно уве-

личивается. При этом доля незамерзших капель уменьшается, $(1 - W) \rightarrow 0$.

Следовательно, $\frac{dW}{dT}$ также стремится к нулю, а $W \rightarrow 1$. Кривыми 1, 2, 3 отражены зависимости W от размеров капель и скоростей восходящих токов.

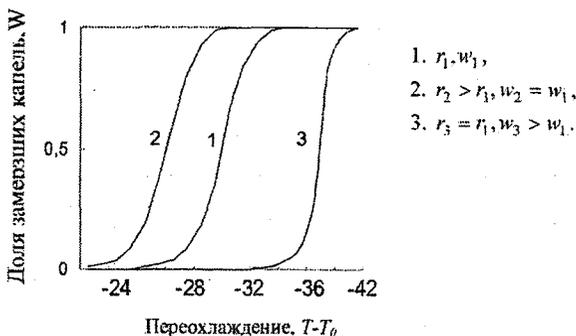


Рис. 2 5 1. Схематическое изображение доли замерзших капель в облаках при различных вертикальных скоростях и размерах капель.

Пусть кривая 1 соответствует размерам капель r_1 и скорости восходящих токов w_1 . Возьмем облако с такими же вертикальными токами, но состоящее из капель с радиусом $r_2 > r_1$ (кривая 2). Капля замерзает, если в ней образуется, по крайней мере, один жизнеспособный ледяной зародыш. Очевидно, что при фиксированной температуре, чем крупнее капля, тем больше вероятность образования в ней ледяного зародыша. Поэтому кривая 2 идет левее кривой 1. Сравним теперь два облака, состоящие из капель одинакового размера $r_1 = r_3$, но с различными вертикальными токами. Пусть $w_3 > w_1$. В соответствии с уравнением (2.5.20) кривая 3 идет правее кривой 1. Физический смысл заключается в следующем. Капли в облаке с малыми вертикальными токами проходят путь от T_0 до T за некоторое время. В облаке с большими вертикальными токами это время окажется в w_3/w_1 раз меньше. Следовательно, во столько же раз меньше будет вероятность образования ледяного зародыша. Заметим, например, что для слоистообразных облаков с характерными скоростями

вертикальных токов 10^{-2} м с^{-1} их кристаллизация ($W = 0,5$) наблюдается при температурах $(-18 \dots -20)^\circ\text{C}$.

В мощных конвективных облаках вертикальные скорости имеют порядок 10^1 м с^{-1} . Температура кристаллизации этих облаков понижается до $-25 \dots -35$, а иногда до -40°C .

Выражения (2.5.19) и (2.5.20) не учитывают всей сложности процессов, происходящих в реальных облаках, поскольку в последних имеет место изменение размеров капель с высотой, коагуляция замерзших капель с переохлажденными. Важную роль играет и то обстоятельство, что реальные облака не являются монодисперсными.

Полидисперсное облако

Чтобы оценить скорость кристаллизации облака, состоящего из капель различных размеров, спектр капель разбивают на градации и для каждой градации выполняют расчеты подобно тому, как это было сделано выше для монодисперсного облака. Удобно ввести счетную плотность распределения $\varphi(r) = n\eta(r)$. Тогда скорость замерзания капель радиуса r

$$\left(\frac{d\varphi(r)}{d\tau} \right)_{\text{зам.}} = -\varphi(r) \frac{4}{3} \pi r^3 J_n(T). \quad (2.5.21)$$

В этом случае скорость замерзания капель рассматривается как один из механизмов трансформации облачного спектра. Распространяя выводы, полученные для монодисперсного облака, на полидисперсное, легко убедиться, что замерзание начинается с крупнокапельного «хвоста» распределения. Мелкокапельная фракция сохраняется в переохлажденном состоянии до более низких температур, обеспечивая возможность коагуляционного роста образовавшихся ледяных частиц.

2.5.3. Нахождение скорости нуклеации $J_n(T)$

по экспериментальным данным

Как уже отмечалось, образование ледяных зародышей в переохлажденной воде осуществляется двумя механизмами – гетерогенным и гомогенным. При этом гетерогенная нуклеация осуществляется на поверхности ЛОЯ. Размерность скорости гетерогенной нуклеации $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$. Гомогенная нуклеация осуществляется в объеме воды, размерность ее скорости – $\text{м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$. Для получения суммарной скорости нуклеации составляющие ее следует привести к одинаковой размерности. Так как скорость гетерогенной нуклеации при иммерсионной моде J_n^V относится к единице площади льдообразующего ядра, то для перехода к единице объема переохлажденной воды следует учесть размеры и концентрацию ЛОЯ в воде

$$J_{\text{л.гетер.}}^V = A_a \cdot n_a \cdot J_n^V, \quad (2.5.22)$$

где A_a – средняя площадь поверхности, а n_a – концентрация аэрозольных частиц. Таким образом, использованная выше величина

$$J_n(T) = J_{\text{л.гетер.}}^V + J_{\text{л.гомог.}} \quad (2.5.23)$$

Состав, концентрация и размеры ЛОЯ в воде сильно изменяются во времени и в пространстве. Поэтому теоретическое описание гетерогенного процесса получить не удастся. Несовершенной является также и теория гомогенного ядрообразования. Для практических целей используются результаты экспериментов по замораживанию капель. При этом в зависимости от методики экспериментов фиксируются различные характеристики.

1. Если отдельные капли выдерживаются при постоянной температуре, то фиксируется время появления в них первого ледяного зародыша. В этом случае рассчитывается время, при котором замерзает половина капель. Величина $J_n(T)$ находится как

$$J_n(T) = - \frac{0,525}{\pi^3 \tau_{0,5}^3} \quad (2.5.24)$$

2. Выдерживание капель при постоянной температуре трудно реализуемо, поскольку формирование капель возможно только при положительных температурах. В экспериментах неизбежно появляется этап охлаждения капель от начальной температуры до заданной температуры T . Удобнее проводить опыты, охлаждая капли с постоянной скоростью \dot{T} . Будем фиксировать температуру $T_{0,5}$, при которой замерзает половина капель.

Из уравнения (2.5.19) при $r = \text{const}(T)$ и $W = 0,5$ получим

$$\int_{T_0}^{T_{0,5}} J_n(T) dT_{0,5} = \frac{0,525\dot{T}}{\pi} \cdot \frac{1}{r^3}. \quad (2.5.25)$$

Проводя опыты с каплями разных размеров, можно построить зависимость $T_{0,5}$ от радиуса (диаметра) капель.

Выполним численное дифференцирование. С этой целью разобьем полученную зависимость на интервалы, определив для каждого из них среднее значение r_j и $T_{0,5;j}$, $j = \overline{1, k}$, k – число интервалов. Возьмем дифференциалы от правой и левой частей выражения (2.5.25). Тогда

$$J_n(T) = \frac{0,525}{\pi} \cdot \frac{\dot{T}}{(T_{0,5;j+1} - T_{0,5;j})} \cdot \left(\frac{1}{r_{j+1}^3} - \frac{1}{r_j^3} \right) \quad (2.5.26)$$

или

$$J_n(T) = \frac{4,2}{\pi} \cdot \frac{\dot{T}}{(T_{0,5;j+1} - T_{0,5;j})} \cdot \left(\frac{1}{d_{j+1}^3} - \frac{1}{d_j^3} \right). \quad (2.5.27)$$

Последняя формула была использована ранее в разд. 1.5.

3. Более полная информация о скорости замерзания может быть получена при наблюдении за совокупностью капель одного размера. Капли распределяются на поверхности подложек (или на границе двух нейтральных жидкостей, одна из которых обладает плотностью большей, а другая меньшей, чем плотность воды). Совокупность капель охлаждается с постоянной скоростью и фотографируется под микроскопом. Рассчитывается доля капель ΔW , закристаллизовавшихся при понижении температуры на ΔT .

В соответствии с уравнением (2.5.18)

$$J_n(T) = \frac{1}{1-W} \cdot \frac{\Delta W}{\Delta T} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{\bar{T}}{\pi r^3}. \quad (2.5.28)$$

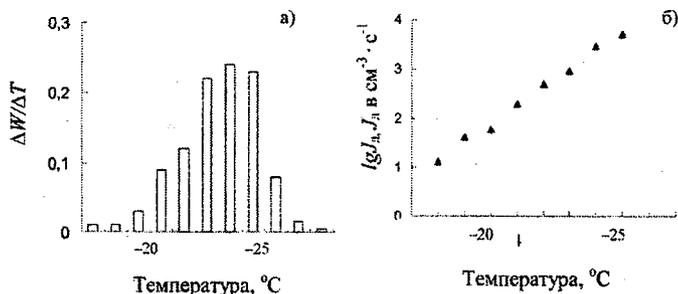


Рис. 2.5.2. а) Скорость кристаллизации переохлажденных капель, эксперимент. Радиус капля $\bar{r} = 300$ мкм, скорость охлаждения $\bar{T} = 3$ °С/мин, число капель $N_0 = 798$; б) Зависимость скорости нуклеации от температуры. Расчет по формуле (2.5.28)

На рис. 2.5.2а приведены результаты типового опыта по замораживанию капель дистиллированной воды. Результаты расчета $J_n(T)$ по этим данным приведены на рис. 2.5.2б. Из обработки исключены крайние справа и слева интервалы в связи с малым числом капель, относящихся к ним.

Зависимости, подобные представленной на рис. 2.5.2б, различаются между собой сильно. Разброс $J_n(T)$ составляет несколько порядков, что, как уже отмечалось, связано с большой изменчивостью концентрации и состава ЛОЯ в воздухе, а, следовательно, и в замораживаемой воде.

2.6. Обобщенные характеристики осадкообразования

2.6.1. Водозапас облаков

Общий водозапас облака Π , отнесенный к столбу единичного поперечного сечения, определяется простым выражением

$$П = \int_{z_{н.г.}}^{z_{в.г.}} q(z) dz, \quad (2.6.1)$$

где $q(z)$ – водность облака (масса капель, содержащихся в единице объема воздуха); $z_{н.г.}$ и $z_{в.г.}$ – высоты нижней и верхней границ облака соответственно.

В общем случае распределение водности с высотой $q(z)$ зависит от стадии развития облака, скорости восходящих потоков и концентрации водяного пара. Содержание водяного пара при относительной влажности близкой к единице (100%) однозначно определяется температурой воздуха.

В литературе (например, Матвеев (1984)) приводятся осредненные результаты измерений водности слоистообразных облаков в зависимости от температуры. Эти результаты можно представить эмпирической формулой

$$\langle q(t) \rangle = \langle q_0 \rangle \cdot \exp(\alpha \cdot t), \quad (2.6.2)$$

где $\langle q_0 \rangle$ – среднее значение водности облака при 0°C ($q_0 = 2,5 \cdot 10^{-4} \text{ кг} \cdot \text{м}^{-3}$), t – температура в $^\circ\text{C}$, α – параметр ($\alpha = 0,03 \text{ K}^{-1}$).

По определению в облаках водность на нижней и верхней границах равна нулю независимо от температуры. В общем виде распределение водности по высоте можно аппроксимировать выражением

$$q(z) = b(z_{в.г.} - z)^{\beta_1} \cdot (z - z_{н.г.})^{\beta_2}, \quad (2.6.3)$$

где b, β_1, β_2 – параметры распределения. Опыт показывает, что для реальных слоистообразных облаков можно принять $\beta_1 = 2, \beta_2 = 1$.

Вычислим среднее значение водности по всей высоте облака \bar{q} , исходя из условия

$$\bar{q} = \frac{1}{H} \int_{z_{н.г.}}^{z_{в.г.}} q(z) dz, \quad (2.6.4)$$

где $H = (z_{в.г.} - z_{н.г.})$ – вертикальная мощность облака. Подставляя формулу (2.6.3) в выражение (2.6.4), при оговоренных значениях β_1 и β_2 , найдем

$$b = \frac{12\bar{q}}{H^3}. \quad (2.6.5)$$

Тогда

$$q(z) = \frac{12\bar{q}}{H^3} (z_{\text{в.г.}} - z)^2 \cdot (z - z_{\text{н.г.}}). \quad (2.6.6)$$

Максимум водности, соответствующий условию $\frac{dq(z)}{dz} = 0$, находится на высоте

$$z_{q_{\text{max}}} = z_{\text{н.г.}} + \frac{1}{3}H \quad (2.6.7)$$

и составляет

$$q_{\text{max}} = \frac{16}{9}\bar{q}. \quad (2.6.8)$$

Среднее значение водности \bar{q} логично выразить через температуру в облаке. Однако выражения (2.6.2) и (2.6.6) не согласуются друг с другом. В соответствии с уравнением (2.6.2) максимум водности должен находиться там, где температура максимальна, то есть, как правило, на нижней границе облака. В то же время выражение (2.6.6) дает максимум водности на высоте, равной одной трети мощности облака, и нулевую водность на верхней и нижней границах. Причиной такого расхождения является то обстоятельство, что зависимость $\langle q(t) \rangle$ получена путем осреднения результатов измерений без учета высоты их проведения. Попытаемся разрешить отмеченное противоречие. Проведем мысленный эксперимент по измерению водности на разных высотах в облаке с изотермическим распределением температуры. Пусть, например, $t = 0^\circ\text{C}$. Логично представить, что распределение водности с высотой в таком облаке должно быть симметричным относительно высоты середины облака. Положим, что это распределение описывается формулой вида (2.6.3) с $\beta_1 = \beta_2 = 1$

$$q(z) = b_1 (z_{\text{в.г.}} - z) \cdot (z - z_{\text{н.г.}}). \quad (2.6.10)$$

Выполняя те же операции, что и выше, можно показать, что

$$b_1 = \frac{6\bar{q}_1}{H_1^2}, \quad (2.6.10)$$

$$q_{\max,1} = \frac{3}{2}\bar{q}_1. \quad (2.6.11)$$

В соответствии с принятой схемой $\bar{q}_1 = \langle q_0 \rangle$, а действительное значение водности при 0°C

$$q_0 = q_{\max,1} = 1,5\langle q_0 \rangle. \quad (2.6.12)$$

Выполняя аналогичные мысленные опыты при других температурах, представим зависимость водности облака от температуры в виде

$$q(t) = 1,5\langle q_0 \rangle \cdot \exp(\alpha \cdot t). \quad (2.6.13)$$

Вернемся теперь к распределению (2.6.6). Выразим максимальное значение водности через температуру на высоте $z_{q_{\max}}$

$$q_{\max} = 1,5\langle q_0 \rangle \cdot \exp(\alpha \cdot t_{z_{q_{\max}}}). \quad (2.6.14)$$

Чтобы найти \bar{q} , приравняем правые части выражений (2.6.8) и (2.6.14)

$$\bar{q} = 0,84\langle q_0 \rangle \exp(\alpha \cdot t_{z_{q_{\max}}}). \quad (2.6.15)$$

Следовательно,

$$q(z) = 10,1\langle q_0 \rangle \cdot (z_{\text{в.г.}} - z)^2 \cdot (z - z_{\text{н.г.}}) \cdot \exp(\alpha \cdot t_{z_{q_{\max}}}) / H^3, \quad (2.6.16)$$

$$\Pi = \bar{q} \cdot H = 0,84\langle q_0 \rangle H \exp(\alpha \cdot t_{z_{q_{\max}}}). \quad (2.6.17)$$

Приведенные соотношения характеризуют капельное облако. Если переохлажденное облако естественным путем или при искусственном воздействии кристаллизуется, то общий водозапас (твердая фаза) увеличивается на массу пара, осаждающегося на ледяных частицах

$$\Delta\Pi = \int_{z_0}^{z_{\text{в.г.}}} \frac{(E_{\text{п-в}} - E_{\text{п-л}})}{R_{\text{п}}T} dz, \quad (2.6.18)$$

где z_0 – высота нулевой изотермы.

2.6.2. Интенсивность осадков

Для упрощения задачи рассмотрим стационарный процесс, характерный для обложных осадков. Будем считать распределение водяного пара установившимся ($\frac{\partial c}{\partial \tau} = 0$) и пренебрежем его горизонтальной адвекцией ($\frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial y} = 0$). Полагая, что масса пара, конденсирующегося в единицу времени в столбе облака единичного сечения, равняется интенсивности осадков J , найдем

$$J = -\frac{1}{\rho_{\text{в}}} \int_{z_{\text{н.г.}}}^{z_{\text{в.г.}}} w \frac{\partial c}{\partial z} dz, \quad (2.6.19)$$

где $\rho_{\text{в}}$ – плотность воды, c – концентрация пара, w – скорость вертикальных токов, в общем случае зависящая от высоты $w = w(z)$. В этом уравнении интенсивность осадков J выражается, как принято, высотой столба воды, выпадающей в единицу времени.

Перейдем для установившегося состояния от частной производной к полной и воспользуемся следующей цепочкой преобразований

$$\frac{dc}{dz} = \frac{dc}{dT} \cdot \frac{dT}{dz} = \frac{d}{dT} \left(\frac{E_{\text{п-в}}}{R_{\text{п}} T} \right) \cdot (-\gamma_{\text{в.а.}}) \approx \frac{1}{R_{\text{п}} T} \cdot \frac{dE_{\text{п-в}}}{dT} \cdot (-\gamma_{\text{в.а.}}) = -\gamma_{\text{в.а.}} \cdot \frac{L_{\text{п-в}} E_{\text{п-в}}}{R_{\text{п}}^2 T^3}. \quad (2.6.20)$$

Зададим давление насыщенного водяного пара как функцию температуры в виде

$$E_{\text{п-в}} = E_0 \exp \left[\frac{L_{\text{п-в}}}{R_{\text{п}}} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T} \right) \right] \approx E_0 \exp \left[-\frac{L_{\text{п-в}} \gamma (z - z_0)}{R_{\text{п}} T_0^2} \right], \quad (2.6.21)$$

где E_0 – давление насыщенного водяного пара при температуре $T_0 = 273 \text{ K}$, γ – вертикальный градиент температуры в облаке, z_0 – высота нулевой изо-

термы. Здесь в силу малости изменения температуры T по сравнению с $E_{п-в}$ принято $T = T_0$. Подставим выражения (2.6.20) и (2.6.21) в уравнение (2.6.19).

$$J = \frac{1}{\rho_v} \int_{z_{н.г.}}^{z_{в.г.}} w \gamma_{в.а.} \cdot \frac{L_{п-в} E_0}{R_n^2 T_0^3} \exp \left[-\frac{L_{п-в} \gamma (z - z_0)}{R_n T_0^2} \right] dz. \quad (2.6.22)$$

При вычислении интеграла здесь следует учесть зависимости от высоты величин $w, \gamma, \gamma_{в.а.}$. Для приближенных оценок примем эти величины постоянными (например, осредненными по высоте). Тогда

$$J = \frac{\bar{w}}{\rho_v} \cdot \frac{\gamma_{в.а.}}{\gamma} \cdot \frac{E_0}{R_n T_0} \cdot \left[1 - \exp \left(-\frac{L_{п-в} \bar{\gamma} H}{R_n T_0^2} \right) \right]. \quad (2.6.23)$$

Выражения (2.6.22) и (2.6.23) получены для капельного облака. Если в облаке имеется переохлажденная часть и возможность кристаллизации капель, то интеграл в выражении (2.6.22) следует представить в виде суммы двух интегралов. Первый вычисляется для непереохлажденного слоя от $z_{н.г.}$ до z_0 , а второй – для переохлажденного от z_0 до $z_{в.г.}$. При этом во втором интеграле необходимо заменить $L_{п-в}$ на $L_{п-л}$ (теплоту фазового перехода пар-лед).

Для конвективных облаков полученные зависимости можно использовать лишь как грубо оценочные, поскольку процесс осадкообразования в них, как правило, имеет явно нестационарный импульсивный характер.

Общее количество осадков $R_{ос.}$ можно оценить как

$$R_{ос.} = J \tau_{ос.} = J \frac{l}{v}, \quad (2.6.24)$$

где $\tau_{ос.}$ – время выпадения осадков, l – ширина зоны осадков, а v – скорость ее смещения.

Следует подчеркнуть, что приведенные здесь формулы соответствуют интенсивности осадков на нижней границе облака – без учета их испарения в подоблачном слое.

Глава 3. Расчет конвективных процессов в атмосфере

3.1. Простые модели конвекции

3.1.1. Метод частицы

1. Рассмотрим сначала адиабатический подъем «сухой» частицы воздуха, то есть частицы внутри которой фазовые превращения водяного пара отсутствуют, воздух ненасыщен.

В простейшем случае состояние частицы определяется тремя переменными: скоростью ее движения по вертикали w , температурой воздуха T' и относительной влажностью f' внутри частицы. При этом считается, что давление внутри частицы p' равно давлению в окружающей среде p на той же высоте. В горизонтальном направлении частица безинерционна, то есть переносится со скоростью ветра. Соответственно состояние такой частицы описывается тремя уравнениями:

- изменения количества движения

$$d(mw) = F_A d\tau; \quad (3.1.1)$$

- сохранения полной энергии

$$d\left(m\left(c_p T' + gz + \frac{w^2}{2}\right)\right) = 0; \quad (3.1.2)$$

- постоянства содержания водяного пара

$$d\left(ms'\right) = d\left(m\frac{\mu}{M}\frac{fE'}{p}\right) = 0. \quad (3.1.3)$$

В этих уравнениях m – масса частицы, τ – время, z – высота, c_p – удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении, g – ускорение свободного падения, $T = T(z)$ – температура окружающего воздуха, s' – массовая доля водяного пара в частице, μ и M – молярные массы водяного пара и воздуха соответственно, E' – давление насыщенного водяного пара при температуре T' , F_A – архимедова сила

$$F_A = mg \frac{T'_v - T_v}{T_v}, \quad (3.1.4)$$

где T'_v и T_v – виртуальные температуры частицы и окружающей среды соответственно

$$\begin{cases} T'_v = T' \left[1 + \left(1 - \frac{\mu}{M} \right) \frac{fE'}{p} \right], \\ T_v = T \left[1 + \left(1 - \frac{\mu}{M} \right) \frac{fE}{p} \right]. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

Поскольку частица не обменивается массой с окружающей средой, то $m = const$. Следовательно, из уравнений (3.1.1...3.1.3) масса m исключается. Перейдем в уравнении (3.1.1) от переменной τ к z , используя подстановку $d\tau = dz / w$. Тогда

$$w dw = g \frac{T'_v - T_v}{T_v} dz \quad (3.1.6)$$

или после интегрирования

$$w^2 = w_0^2 + 2g \int_{z_0}^z \frac{T'_v - T_v}{T_v} dz, \quad (3.1.7)$$

где w_0 – вертикальная скорость частицы на исходном уровне z_0 . Величину $\mathcal{E}_H = g \int_{z_0}^z \frac{T'_v - T_v}{T_v} dz$ обычно называют энергией неустойчивости. Она представляет собой работу гидростатических сил, действующих на единицу массы воздуха при подъеме ее от уровня z_0 до z , или, что то же самое, изменение кинетической энергии.

В уравнении (3.1.2) полная энергия частицы записана, как сумма энергий: внутренней (точнее, энтальпии), потенциальной и кинетической. Дифференцируя уравнение (3.1.2) по z и решая его относительно $\frac{dT'}{dz}$, получим

$$-\frac{dT'}{dz} = \frac{g}{c_p} + \frac{w}{c_p} \frac{dw}{dz}. \quad (3.1.8)$$

Если пренебречь вкладом кинетической энергии, то вместо выражения (3.1.8) получим знакомое уравнение сухоадиабатического градиента γ_a

$$-\frac{dT'}{dz} = \frac{g}{c_p} = \gamma_a. \quad (3.1.9)$$

Аналогично, дифференцируя по z уравнение (3.1.3), после преобразований найдем

$$-\frac{df'}{dz} = f' \left(\frac{L_{п-в}}{R_{п} T'^2} \frac{dT'}{dz} + \frac{g}{R_{возд.} T} \right), \quad (3.1.10)$$

где $R_{п}$ и $R_{возд.}$ – газовые постоянные водяного пара и воздуха соответственно, $L_{п-в}$ – энергия фазового превращения пар-вода.

Совместное решение уравнений (3.1.7) и (3.1.9) позволяет получить изменение с высотой скорости вертикального движения адиабатической частицы. При интегрировании необходимо учитывать распределение температуры в окружающей среде с высотой.

Расчет по формуле (3.1.7) прекращается либо при $w = 0$, либо при $f' \geq 1$. Последнее условие означает, что в частице начинается конденсация водяного пара.

2. С началом конденсации следует перейти к описанию влажноадиабатического процесса. При этом основные уравнения трансформируются следующим образом.

В уравнении движения архимедова плавучесть уменьшается под действием взвешенных в воздухе капель воды.

$$w \frac{dw}{dz} = g \left(\frac{T'_v - T'_v}{T'_v} - q'_в \right), \quad (3.1.11)$$

где $q'_в$ – удельная водность (масса воды, отнесенная к единичной массе воздуха).

В уравнении энергии следует учесть влияние теплоты фазовых превращений

$$d\left(c_p T' + gz + \frac{w^2}{2} - L_{п-в} q'_в\right) = 0 \quad (3.1.12)$$

или при переходе к производной $\frac{dT'}{dz}$

$$-\frac{dT'}{dz} = \frac{g}{c_p} + \frac{w}{c_p} \frac{dw}{dz} - \frac{L_{п-в}}{c_p} \frac{dq'_в}{dz} = \gamma_a + \frac{w}{c_p} \frac{dw}{dz} - \frac{L_{п-в}}{c_p} \frac{dq'_в}{dz} \quad (3.1.13)$$

Из условия сохранения общего влагосодержания

$$\frac{d}{dz}(s' + q'_в) = 0, \quad (3.1.14)$$

при $f' = 1$ найдем

$$-\frac{dq'_в}{dz} = \frac{E' L_{п-в}}{p R_{п} T'} \left(\frac{\mu}{M} \frac{1}{T'} \frac{dT'}{dz} + \frac{g}{L_{п-в}} \frac{T'}{T} \right) \quad (3.1.15)$$

Очевидно, что $\frac{dq'_в}{dz}$ связана с изменением температуры $\frac{dT'}{dz}$. Подставляя

уравнение (3.1.15) в (3.1.13) и решая его относительно $\frac{dT'}{dz}$, получим выра-

жение для изменения температуры частицы с высотой с учетом конденсации.

$$-\frac{dT'}{dz} = \frac{\gamma_a \left(1 + \frac{E' L_{п-в}}{p R_{п} T} \right) + \frac{w}{c_p} \frac{dw}{dz}}{1 + \frac{E' L_{п-в}^2}{c_p p R_{п} T'^2} \frac{\mu}{M}} \quad (3.1.16)$$

Исключая слагаемое, учитывающее изменение кинетической энергии, получим известное выражение для влажноадиабатического градиента $\gamma_{ва}$

$$-\frac{dT'}{dz} = \gamma_a \frac{\left(1 + \frac{E' L_{п-в}}{p R_{п} T} \right)}{1 + \frac{E' L_{п-в}^2}{c_p p R_{п} T'^2} \frac{\mu}{M}} = \gamma_{ва} \quad (3.1.17)$$

Совместное численное решение уравнений (3.1.11), (3.1.15) и (3.1.16) позволяет получить изменение с высотой температуры, влажности и вертикальной скорости частицы.

Метод частицы до сих пор широко используется при расчетах конвективных процессов, в частности при оценках термической неустойчивости.

Стратификация атмосферы считается абсолютно неустойчивой, если вертикальный градиент температуры $\gamma > \gamma_a$. Если $\gamma < \gamma_{ва}$, то стратификация абсолютно устойчивая. При $\gamma_{ва} < \gamma < \gamma_a$ стратификацию характеризуют как условно устойчивую (устойчива по отношению к сухоадиабатической частице и неустойчива по отношению к влажно-адиабатической).

Строго говоря, в качестве критерия устойчивости следовало бы рассматривать величину $w \frac{dw}{dz} = \frac{1}{2} \frac{dw^2}{dz}$. При $dw^2/dz > 0$ слой атмосферы является термически неустойчивым, а при $dw^2/dz < 0$ устойчивым. Для частицы значение dw^2/dz определяется архимедовым ускорением, которое зависит не только от разности градиентов γ и γ_a ($\gamma_{ва}$), но и от влажности воздуха в частице и вне ее и от влажности (для влажной частицы).

Следует иметь в виду, что этот метод является очень грубым приближением к реальным процессам, поскольку не учитывает взаимодействия поднимающейся воздушной частицы с окружающей средой.

3.1.2. Расчет параметров термика

Термиком (пузырем, султаном, плюмажем) называют объем воздуха, имеющий отличающиеся от окружающей среды температуру и влажность. Если термик обладает положительной плавучестью, то он поднимается, преодолевая при этом сопротивление окружающей среды и перемешиваясь с ней. Как и выше примем, что давление воздуха внутри термика равно давлению в окружающей среде на той же высоте. В горизонтальном направлении

термик перемещается со скоростью ветра. Пусть термик имеет форму сферы радиусом R . Его масса

$$m = (4/3)\pi R^3 \rho', \quad (3.1.18)$$

где ρ' – плотность воздуха в термике. Будем считать, что плотность ρ' , температура T' , влажность f' и вертикальная скорость w осреднены по всему объему термика.

Уравнение количества движения для термика запишем в виде

$$\frac{d(mw)}{dz} = \frac{F_A + F_{a.c.}}{w}, \quad (3.1.19)$$

где $F_{a.c.}$ – сила аэродинамического сопротивления. Уподобляя движение термика движению твердого тела, силу аэродинамического сопротивления можно представить в виде

$$F_{a.c.} = -C_a \rho_{\text{возд.}} \cdot \frac{w^2}{2} \pi R^2, \quad (3.1.20)$$

где C_a – коэффициент аэродинамического сопротивления.

Архимедова сила F_A в зависимости от вида термика задается формулами:

– для «сухого» термика

$$F_A = mg \left(\frac{T'_v - T_v}{T_v} \right), \quad (3.1.21a)$$

– для облачного термика (при конденсации пара)

$$F_A = mg \left(\frac{T'_v - T_v}{T_v} - q'_B \right). \quad (3.1.21б)$$

Изменение полной энергии термика с высотой определяется вовлечением массы воздуха dm/dz с внутренней и потенциальной энергиями окружающей среды

$$\frac{d}{dz} \left[m \left(c_p T' + gz + \frac{w^2}{2} - L_{п-в} q'_B \right) \right] = (c_p T + gz) \frac{dm}{dz}. \quad (3.1.22)$$

Изменение общего влагосодержания (массовая доля водяного пара s' плюс удельная водность $q'_в$) связано с вовлечением ненасыщенного воздуха с массовой долей водяного пара s .

$$\frac{d}{dz}(m(s' + q'_в)) = s \frac{dm}{dz}. \quad (3.1.23)$$

Если термик сухой, то $s' = f' \cdot S'$, для облачного термика $s' = S'$ (при $f' = 1$). Здесь S' – массовая доля насыщенного водяного пара.

Скорость вовлечения воздуха в термик обычно задается выражением вида

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dz} = \frac{C}{R}, \quad (3.1.24)$$

где C – константа вовлечения.

Продифференцируем уравнение (3.1.19), подставим в него выражения (3.1.18), (3.1.20), (3.1.21) и (3.1.24) и решим относительно dw/dz . Тогда

$$w \frac{dw}{dz} = -\frac{w^2}{R} \left(\frac{3}{8} C_a \frac{T'}{T} + C \right) + g \left(\frac{T'_v - T_v}{T_v} - q'_в \right). \quad (3.1.25)$$

Аналогично для изменения температуры с высотой получим

$$-\frac{dT'}{dz} = \frac{g}{c_p} + \frac{w}{c_p} \frac{dw}{dz} - \frac{L_{п-в}}{c_p} \frac{dq'_в}{dz} + \frac{C}{R} \left(T' - T + \frac{w^2}{2c_p} - \frac{L_{п-в} q'_в}{c_p} \right). \quad (3.1.26)$$

Выражение (3.1.26) можно упростить, если пренебречь слагаемыми, учитывающими кинетическую энергию и ее изменение,

$$-\frac{dT'}{dz} = \gamma_a - \frac{L_{п-в}}{c_p} \frac{dq'_в}{dz} + \frac{C}{R} \left(T' - T - \frac{L_{п-в} q'_в}{c_p} \right). \quad (3.1.27)$$

Для сухого термика ($q'_в = 0$) из уравнения (3.1.23) после дифференцирования найдем

$$\frac{ds'}{dz} = -\frac{(s' - s)}{m} \frac{dm}{dz}. \quad (3.1.28)$$

Перейдем от массовой доли водяного пара к относительной влажности

$$s' = \frac{\mu}{M} \frac{fE'}{p} \quad \text{и} \quad s = \frac{\mu}{M} \frac{fE}{p},$$

где $\frac{\mu}{M} = 0,622$; f' и f – относительные влажности в термике и окружающей среде соответственно, p – давление воздуха, естественно, $p = p(z)$.

Тогда из уравнения (3.1.28) получим

$$-\frac{df'}{dz} = f' \left(\frac{L_{п-в}}{R_{п} T'^2} \frac{dT'}{dz} + \frac{g}{R_{возд.} T} \right) + \left(f' - f \frac{E}{E'} \right) \frac{C}{R}. \quad (3.1.29)$$

Для облачного термика в предположении того, что $f' = 1$, из уравнения (3.1.23) определим изменение удельной водности

$$-\frac{dq'_в}{dz} = \frac{\mu}{M} \frac{E'}{p} \left(\frac{L_{п-в}}{R_{п} T'^2} \frac{dT'}{dz} + \frac{g}{R_{возд.} T} + \left(1 - f \frac{E}{E'} \right) \frac{C}{R} \right). \quad (3.1.30)$$

Легко убедиться, что при отсутствии вовлечения ($C=0$) выражения для изменения с высотой температуры, влажности и водности в термике превращаются в аналогичные выражения для адиабатической частицы.

Численное интегрирование системы уравнений (3.1.24), (3.1.25), (3.1.27) и (3.1.29) или (3.1.30) позволяет получить изменение с высотой основных характеристик термика. На «стартовом» уровне задаются: радиус термика R_0 , его температура T'_0 , относительная влажность f'_0 , вертикальная скорость w_0 . В качестве боковых граничных условий используются распределения с высотой температуры T , относительной влажности f и давления p . Текущий радиус термика R находится из уравнения (3.1.18), а плотность воздуха в термике $\rho'_{возд.}$ вычисляется по уравнению состояния. Система дополняется уравнением, отражающим зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры (см. разд.1). Верхним граничным условием является высота, на которой $w = 0$.

Используем снова в качестве критерия устойчивости ускорение термика dw^2/dz . Как видно из уравнения (3.1.25), первое слагаемое, отражающее влияние аэродинамического сопротивления и вовлечения, приводит к увеличению устойчивости по сравнению с адиабатической частицей. Следует подчеркнуть, что степень устойчивости зависит не только от распределения температуры и влажности, но и от размеров термика и скорости его движения. В частности, при $R \rightarrow \infty$ или $w \rightarrow 0$, критерии устойчивости для термика и частицы становятся одинаковыми.

3.1.3. Метод слоя

Метод слоя обычно рассматривают, если не как альтернативу, то как уточнение метода частицы. Это уточнение связано с тем обстоятельством, что при наличии устойчивых восходящих потоков в окружающем их пространстве формируются компенсирующие нисходящие движения. Опускание воздуха сопровождается его нагреванием, а значит изменением стратификации.

Выделяют сравнительно тонкий слой атмосферы толщиной h . Горизонтальная протяженность этого слоя такова, что в нем содержится как восходящий поток с площадью A^\uparrow , так и нисходящий с площадью A^\downarrow . В простейшем случае предполагают, что восходящий поток имеет форму цилиндра, а нисходящий – форму кольца, окружающего этот цилиндр. Рассматривают типичные условия развития конвективного облака: $\gamma_{ва} < \gamma < \gamma_a$, воздух в восходящем потоке насыщен, а в нисходящем не насыщен.

Изменение температуры на произвольной высоте z внутри слоя определяется уравнениями:

– в восходящем потоке

$$\frac{\partial T^\uparrow}{\partial \tau} = w^\uparrow (\gamma - \gamma_{ва}), \quad (3.1.31)$$

– в нисходящем потоке

$$\frac{\partial T^\downarrow}{\partial \tau} = w^\downarrow (\gamma - \gamma_a), \quad (3.1.32)$$

где w^\uparrow и w^\downarrow – скорости вертикальных движений в соответствующих направлениях. Разность температур восходящего и нисходящего потоков через время $\Delta \tau$ находят как

$$\Delta T = (\Delta T^\uparrow - \Delta T^\downarrow) = [w^\uparrow (\gamma - \gamma_{ва}) - w^\downarrow (\gamma - \gamma_a)] \Delta \tau \quad (3.1.33)$$

Считают, что потоки массы через сечения A^\uparrow и A^\downarrow равны

$$\rho^\uparrow A^\uparrow w^\uparrow = -\rho^\downarrow A^\downarrow w^\downarrow$$

или, пренебрегая различием плотностей ρ^\uparrow и ρ^\downarrow ,

$$A^\uparrow w^\uparrow = -A^\downarrow w^\downarrow. \quad (3.1.34)$$

С учетом соотношения (3.1.34) выражение (3.1.33) преобразуют к виду

$$\Delta T = \left[(\gamma - \gamma_{ва}) + \frac{A^\uparrow}{A^\downarrow} (\gamma - \gamma_a) \right] w^\uparrow \Delta \tau. \quad (3.1.35)$$

При $\Delta T > 0$ восходящий поток ускоряется, то есть состояние неустойчивое, при $\Delta T < 0$ – устойчивое. Условие $\Delta T = 0$ соответствует критическому значению $\gamma_{кр.}$

$$\gamma_{кр.} = \gamma_{ва} + \frac{\frac{A^\uparrow}{A^\downarrow} (\gamma_a - \gamma_{ва})}{1 + \frac{A^\uparrow}{A^\downarrow}}. \quad (3.1.36)$$

Выражение (3.1.36) используют для оценки устойчивости атмосферы: при $\gamma > \gamma_{кр.}$ атмосфера влажнонеустойчива, при $\gamma < \gamma_{кр.}$ – устойчива.

Формальный анализ выражения (3.1.36) показывает, что устойчивость атмосферы к вертикальным движениям возрастает с увеличением отношения $A^\uparrow / A^\downarrow$. Из этого вытекает тот парадоксальный результат, что для малых возмущений стратификация оказывается неустойчивой при вертикальных градиентах γ близких к $\gamma_{ва}$, в то время как при тех же условиях для круп-

ных возмущений стратификация устойчива. Этот вывод противоречит здравому смыслу. Трудно представить, что при одних и тех же условиях малые по горизонтальному сечению конвективные облака развиваются активнее крупных. Напомним, что анализ устойчивости для термика показывает, что чем меньше размер частицы, тем больше относительная роль сил аэродинамического сопротивления и вовлечения, то есть стратификация для малой частицы более устойчива. Впрочем, в методе слоя упомянутые факторы не рассматриваются.

Представляется, что причиной указанных противоречий является некорректный вывод выражения (3.1.33). Интегрирование уравнений (3.1.31) и (3.1.32) осуществлялось в предположении одинаковых начальных условий — от температуры воздуха на произвольной высоте T_0 до температуры восходящего T^\uparrow и нисходящего потоков T^\downarrow . Если предположить, что в некоторый момент времени мгновенно сформировались восходящий и нисходящий потоки со скоростями w^\uparrow и w^\downarrow , то начальные условия для нисходящего потока сохраняются, в то время как для восходящего потока, окруженного кольцом нисходящего движения, начальным условием является температура воздуха в кольце T^\downarrow . При интегрировании уравнений (3.1.31) и (3.1.32) на интервал времени получим

$$T^\downarrow - T_0 = w^\downarrow (\gamma - \gamma_a) \Delta \tau,$$

$$T^\uparrow - T^\downarrow = w^\uparrow (\gamma - \gamma_{ва}) \Delta \tau.$$

Отсюда

$$\Delta T = \Delta T^\uparrow - \Delta T^\downarrow = (T^\uparrow - T_0) - (T^\downarrow - T_0) = w^\uparrow (\gamma - \gamma_{ва}) \Delta \tau.$$

Таким образом, критерий устойчивости по методу слоя ничем не отличается от аналогичного критерия по методу частицы.

На основе метода слоя разработана схема расчета вертикальных токов в конвективных облаках. Приравнивая изменение тепловой энергии слоя воздуха, связанное с его нагревом ΔT , рассчитанным по уравнению (3.1.35), к

изменению кинетической энергии воздуха, получено выражение для вертикальной скорости на верхней границе слоя.

Опуская не вполне корректные громоздкие выкладки, приведем один из вариантов формулы для приращения кинетической энергии в пределах i -того слоя

$$\frac{\Delta w_i^2}{2} = \frac{gH_i}{6T_{0i}} \left[(T_{vi} - T_i) - \frac{A_i^\uparrow}{A_i^\uparrow + A_i^\downarrow} (T_{vi} - T_{ci}) \right], \quad (3.1.37)$$

где H_i – толщина i -того слоя, T_{0i}, T_i – температуры воздуха на нижней и верхней границах рассматриваемого слоя, T_{vi} и T_{ci} – температуры воздуха, поднимающегося от T_{0i} по влажной и сухой адиабатам, на верхней границе слоя.

Кривую стратификации температуры от уровня конденсации до уровня конвекции разбивают на ряд слоев. Далее, суммируя приращения Δw_i^2 , получают формулу для вычисления вертикальной скорости на верхней границе i -того слоя

$$w_i^2 = \sum_{i=1}^i \Delta w_i^2. \quad (3.1.38)$$

Кроме оговоренной выше неточности расчета ΔT по уравнению (3.1.33) представляется ошибочным использование формулы (3.1.37). Приращение кинетической энергии определяется здесь только частью энергии неустойчивости, зависящей главным образом от $(T_{vi} - T_i) = (\gamma_i - \gamma_{vai})H_i$. При этом не учитывается перегрев, связанный с вертикальным переносом воздуха. Чтобы исключить эту ошибку, следует просто вернуться к методу частицы. Очевидное несоответствие формул (3.1.37) и (3.1.38) физической модели процесса проявляется в том, что максимум скорости восходящего потока в облаке достигается вблизи уровня, на котором разность температур между кривой состояния, проведенной от уровня конденсации, и кривой стратификации максимальна. На самом деле, на этом уровне максимально ускорение воздуха, а не скорость. Смещение в реальных облаках максимума скорости от уровня

конвекции вниз связано с факторами, не учитываемыми в методе слоя. Формулы (3.1.37), (3.1.38) и связанные с ними способы расчета оптимальной бальности и мощности облаков, если они удовлетворяют практическим потребностям диагноза или прогноза конвективных явлений, могут рассматриваться как чисто эмпирические, не имеющие теоретического обоснования.

3.1.4. Изменение стратификации температуры при развитии конвективных облаков

Рассмотрим подробнее влияние нисходящих компенсирующих потоков на стратификацию окружающей облако среды. Выберем слой воздуха, заключенный в интервале высот z_1, z_2 . Пусть температуры воздуха в исходный момент на этих высотах T_{01}, T_{02} , а градиент температуры $\gamma = (T_{01} - T_{02}) / (z_2 - z_1)$. Если скорость нисходящего потока w^\downarrow не меняется с высотой, то в соответствии с уравнением (3.1.32) температуры T_{01}, T_{02} за промежуток времени Δt повышаются на одно и то же значение ΔT^\downarrow . Кривая стратификации смещается вправо, но градиент γ не меняется. Однако если $w_1^\downarrow \neq w_2^\downarrow$, то $\Delta T_1^\downarrow \neq \Delta T_2^\downarrow$, следовательно в этом слое происходит изменение градиента γ . Очевидно, что характер этих изменений определяется профилем $w^\downarrow(z)$.

На рис. 3.1.1. схематически показано изменение профиля температуры под влиянием нисходящих токов за интервал времени Δt , в течение которого параметры облака можно считать постоянными. Для упрощения схемы распределение температуры в облаке задается таким, что уровень равенства температур T_0 и T^\uparrow совпадает с верхней границей облака, где $w^\uparrow = 0$. Предполагается, что изменение скорости нисходящего потока с высотой определяется распределением восходящего потока в облаке в соответствии с равенством $A^\uparrow w^\uparrow = -A^\downarrow w^\downarrow$. Поскольку бальность мощных конвективных облаков сравнительно мала, то $A^\downarrow \gg A^\uparrow$ и $w^\downarrow \ll w^\uparrow$. Легко видеть, что при заданном профиле

нисходящих токов в верхней части конвективного слоя неустойчивость усиливается $\gamma > \gamma_0$, а в нижней ослабляется $\gamma < \gamma_0$. Разумеется, абсолютные значения температуры T^\downarrow зависят от шага по времени $\Delta\tau$. Следует однако иметь в виду, что при изменении профиля T^\downarrow меняются параметры восходящего потока. В зависимости от исходных условий развитие облака может либо тормозиться, либо, что реже, усиливаться.

Детальный расчет динамики развития облака с учетом нисходящих токов может быть выполнен на основе модели конвекции – струйной или нестационарной.

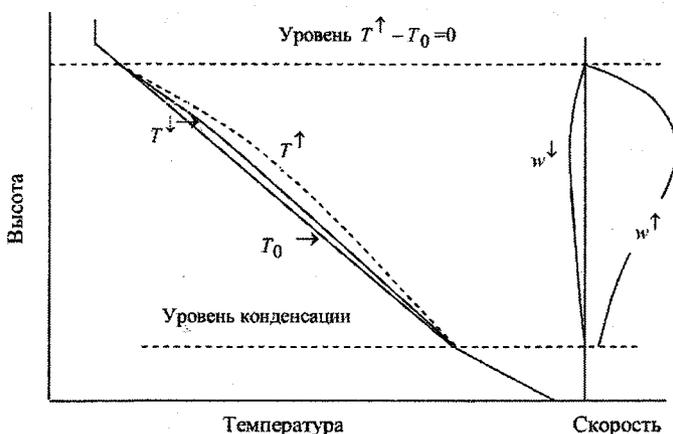


Рис. 3.1.1. Изменение профиля температуры в слое развития конвективного облака.

$T_0 = T_0(z)$ – исходное распределение температуры вне облака;

$T^\downarrow = T^\downarrow(z)$ – распределение температуры вне облака через интервал времени $\Delta\tau$;

$T^\uparrow = T^\uparrow(z)$ – распределение температуры внутри облака;

w^\uparrow, w^\downarrow – скорости восходящего потока внутри облака и нисходящего вне его.

3.2. Теория турбулентных струй в стратифицированной атмосфере

Будем различать струи вынужденные, формируемые некоторыми источниками – динамическими или тепловыми, и спонтанные, возникающие в термически неустойчивой атмосфере.

3.2.1. Вынужденные струи в стратифицированной атмосфере

Примером таких струй являются дымовые факелы промышленных предприятий, мощных тепловых электростанций и т.п. Применительно к задачам воздействия на атмосферные процессы можно назвать используемые для образования конвективных облаков или проветривания глубоких карьеров струи метеотронов, которые создаются тепловыми либо динамическими источниками значительной мощности. В качестве последних используются турбовинтовые и реактивные двигатели.

«Сухая струя»

Рассмотрим струю ненасыщенного нагретого воздуха, сформированную некоторым техническим устройством (рис. 3.2.1). В этом разделе для сокращения записи заменим общепринятые обозначения осей декартовых координат x, y, z на x_1, x_2, x_3 и составляющих скорости u, v, w на v_1, v_2, v_3 соответственно.

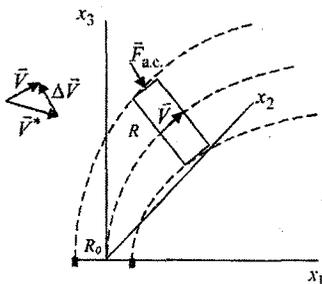


Рис. 3.2.1. Схема струи

Совместим начало координат с центром струи на исходном уровне – на срезе сопла. Предположим, что струя на этом уровне имеет круговое сечение с радиусом R_0 . Идеализируя картину, будем полагать, что круговое сечение сохраняется в плоскостях, перпендикулярных оси струи, на всем ее протяже-

нии. В исходном сечении вектор скорости в струе \vec{V}_0 направлен под произвольным углом к горизонту.

Пусть скорость потока в окружающей среде характеризуется вектором $\vec{V}^* = \vec{V}^*(x_3)$, с составляющими по координатным осям v_1^*, v_2^* и v_3^* . Температура воздуха в струе $T' = T'(x_3)$, в среде $T = T(x_3)$. Разность температур струя-среда $\Delta T = T' - T$. На исходном уровне $\Delta T|_{x_3=0} \equiv \Delta T_0 = T'_0 - T_0$. Будем считать, что распределение параметров струи по сечению, перпендикулярному ее оси, имеют Π – образную форму.

Введем понятие секундной массы струи (массы воздуха, протекающей через сечение струи в единицу времени, $\text{кг} \cdot \text{с}^{-1}$)

$$m = \pi R^2 \rho'_{\text{возд.}} |\vec{V}|, \quad (3.2.1)$$

где R – текущий радиус струи, $\rho'_{\text{возд.}}$ – плотность воздуха в струе, $|\vec{V}|$ – модуль вектора средней скорости воздуха в струе, определяемый как

$$|\vec{V}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2}, \quad (3.2.2)$$

где v_i – компоненты этого вектора вдоль осей пространственных координат, $i = 1, 2, 3$.

Уравнение движения. Изменение количества движения в струе может быть определено уравнением

$$d(m\vec{V}) = \vec{V}^* dm + (\vec{F}_A + \vec{F}_{\text{a.c.}}) d\tau. \quad (3.2.3)$$

Здесь первое слагаемое справа отражает изменение количества движения секундной массы струи за счет вовлечения воздуха из окружающей среды, движущегося со скоростью \vec{V}^* . Второе слагаемое представляет собой импульс сил – архимедовой \vec{F}_A и аэродинамического давления внешнего потока (аэродинамического сопротивления) $\vec{F}_{\text{a.c.}}$

Пренебрегая различием давлений в струе и среде, выражение для \bar{F}_A можно записать в виде

$$\bar{F}_A = m\bar{g} \frac{T'_v - T_v}{T_v} \quad (3.2.4)$$

или в проекциях на координатные оси

$$\bar{F}_{Ai} = \delta_{i3} m |\bar{g}| \frac{T'_v - T_v}{T_v}, \quad (3.2.5)$$

где g – ускорение свободного падения, T'_v и T_v – виртуальные температуры в струе и среде соответственно, δ_{i3} – символ Кронекера $\left(\delta_{i3} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = 3, \\ 0 & \text{при } i \neq 3. \end{cases} \right)$.

При взаимодействии струи с внешним потоком формируется сложное поле скоростей, детальное описание которого представляет собой самостоятельную и трудную задачу. С целью упрощения ее в струйной механике часто используют прием, при котором стационарная струя для внешнего потока уподобляется твердому телу, обладающему аэродинамическим сопротивлением. Сила аэродинамического давления, действующая на элемент струи, равный ее секундной массе, при таком подходе выражается формулой

$$\bar{F}_{a.c.} = -C_a \rho_{\text{возд.}} A_{\perp} \frac{(\Delta \bar{V})^2}{2} \cdot \frac{\Delta \bar{V}}{|\Delta \bar{V}|}. \quad (3.2.6)$$

Здесь C_a – коэффициент аэродинамического сопротивления, $\rho_{\text{возд.}}$ – плотность воздуха в среде, A_{\perp} – проекция миделева сечения элемента секундной массы на плоскость, перпендикулярную вектору силы $\bar{F}_{a.c.}$,

$$\Delta \bar{V} = \bar{V} - \bar{V}^*, \quad |\Delta \bar{V}| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (v_i - v_i^*)^2}.$$

Поскольку вектор $\bar{F}_{a.c.}$ коллинеарен вектору $\Delta \bar{V}$, то

$$A_{\perp} = A \cdot \sin \left(\Delta \bar{V} \wedge \bar{V} \right). \quad (3.2.7)$$

Пренебрегая конусностью струи на малом участке, будем полагать

$$A = 2R|\vec{V}|. \quad (3.2.8)$$

Используя соотношения векторной алгебры, можно переписать выражение (3.2.7) с учетом (3.2.8)

$$A_{\perp} = 2R|\vec{V}| \frac{|\Delta\vec{V} \times \vec{V}|}{|\Delta\vec{V}| \cdot |\vec{V}|}. \quad (3.2.9)$$

Таким образом, после подстановки соотношения (3.2.9) в выражение (3.2.6), получим

$$\vec{F}_{\text{a.c.}} = -C_a \rho_{\text{возд.}} R \Delta\vec{V} |\Delta\vec{V} \times \vec{V}|. \quad (3.2.10)$$

Для перехода к рабочим формулам выразим векторное произведение в выражении (3.2.10) через определитель третьего порядка

$$\vec{F}_{\text{a.c.}} = -C_a \rho_{\text{возд.}} R \Delta\vec{V} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 - v_1^* & v_2 - v_2^* & v_3 - v_3^* \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \quad (3.2.11)$$

и вычислим его. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{a.c.}} &= -C_a \rho_{\text{возд.}} R \Delta\vec{V} \left| \begin{array}{l} \vec{i} \left[(v_2 - v_2^*)v_3 - (v_3 - v_3^*)v_2 \right] - \vec{j} \left[(v_1 - v_1^*)v_3 - (v_3 - v_3^*)v_1 \right] + \\ + \vec{k} \left[(v_1 - v_1^*)v_2 - (v_2 - v_2^*)v_1 \right] \end{array} \right| = \\ &= -C_a \rho_{\text{возд.}} R \Delta\vec{V} \left\{ \left[(v_2 - v_2^*)v_3 - (v_3 - v_3^*)v_2 \right]^2 + \left[(v_1 - v_1^*)v_3 - (v_3 - v_3^*)v_1 \right]^2 + \left[(v_1 - v_1^*)v_2 - (v_2 - v_2^*)v_1 \right]^2 \right\}^{1/2} \end{aligned} \quad (3.2.12)$$

Проекция $\vec{F}_{\text{a.c.}}$ на координатные оси определяются в общем виде уравнением

$$F_{\text{a.c.},x_i} = |F_{\text{a.c.}}| \frac{v_i - v_i^*}{|\Delta\vec{V}|}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (3.2.13)$$

либо

$$F_{\text{a.c.},x_i} = -C_a \rho_{\text{возд.}} R (v_i - v_i^*) \cdot Z_1^{1/2}, \quad (3.2.14)$$

где Z_1 — выражение в фигурных скобках уравнения (3.2.12).

Перейдем от векторного уравнения (3.2.3) к уравнениям движения в проекциях на координатные оси, подставляя в них составляющие сил, выраженные формулами (3.2.5) и (3.2.14). Для стационарной струи удобно перейти от производной по времени к производной по пространственной координате, например, по высоте

$$d\tau = \frac{dx_3}{v_3} \quad (3.2.15)$$

Тогда для составляющих скорости в струе v_i как функций вертикальной координаты найдем

$$\frac{dv_i}{dx_3} = -\frac{v_i - v_i^*}{m} \cdot \frac{dm}{dx_3} + \delta_{i3} \frac{|\vec{g}|}{v_3} \cdot \frac{T'_v - T_v}{T_v} - \frac{C_a \rho_{\text{возд.}} R}{m} \cdot \frac{v_i - v_i^*}{v_3} \cdot Z_1^{1/2} \quad (3.2.16)$$

Уравнение энергии. Как уже отмечалось ранее (разд.3.1), полная энергия единичной массы воздуха включает в себя внутреннюю $c_p T'$, потенциальную gx_3 и кинетическую $\frac{(\vec{v})^2}{2}$ энергии. Будем полагать, что изменение полной энергии секундной массы струи осуществляется только за счет присоединения к ней воздуха из окружающей среды.

$$d \left[m \left(c_p T' + gx_3 + \frac{(\vec{v})^2}{2} \right) \right] = \left[c_p T + gx_3 + \frac{(\vec{v}^*)^2}{2} \right] dm \quad (3.2.17)$$

Здесь c_p — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении, T' и T — температуры в струе и среде. Продифференцируем это уравнение по

высоте и решим его относительно $\frac{dT'}{dx_3}$

$$-\frac{dT'}{dx_3} = \gamma_a + \frac{1}{c_p} \sum_{i=1}^3 v_i \frac{dv_i}{dx_3} + \left(T' - T + \frac{1}{2c_p} \sum_{i=1}^3 (v_i - v_i^*)^2 \right) \frac{1}{m} \frac{dm}{dx_3} \quad (3.2.18)$$

Слагаемыми, учитывающими вклад кинетической энергии и ее изменений, для дымовых факелов промышленных предприятий и для струй острого дутья обычно можно пренебречь. В высокоскоростных струях эффекты торможения или ускорения могут играть существенную роль. Любопытно в связи с этим отметить, что изотермическая в исходном сечении ($T'_0 - T_0 = 0$) высокоскоростная струя может оказаться перегретой в результате быстрого торможения. Таким образом, трансформация энергии, связанная с уменьшением скорости, вызывает появление архимедова ускорения.

Уравнение влажности в струе. Пока воздух остается ненасыщенным, изменение влагосодержания секундной массы определяется механизмом перемешивания

$$d(ms') = sdm. \quad (3.2.19)$$

Здесь s' и s – массовые доли водяного пара в струе и среде соответственно.

Перейдем от массовой доли водяного пара к относительной влажности с помощью приближенных соотношений

$$s = \frac{\mu}{M} \cdot \frac{fE}{p}, \quad (3.2.20)$$

$$s' = \frac{\mu}{M} \cdot \frac{fE'}{p}.$$

Тогда, используя уравнение Клаузиуса-Клапейрона

$$\frac{dE'}{dT'} = \frac{L_{п-в}E'}{R_{п}T'^2}, \quad (3.2.21)$$

после преобразований уравнения (3.2.19) можно получить выражение для изменения относительной влажности с высотой

$$-\frac{df'}{dx_3} = f' \left[\frac{L_{п-в}}{R_{п}T'^2} \cdot \frac{dT'}{dx_3} - \frac{1}{p} \frac{dp}{dx_3} + \left(1 - \frac{fE}{f'E'} \right) \frac{1}{m} \frac{dm}{dx_3} \right]. \quad (3.2.22)$$

В выражениях (3.2.20) ... (3.2.22) E и E' , f и f' – давления насыщенного пара и относительные влажности над водой при температуре среды и струи; $L_{п-в}$ – удельная теплота фазового превращения пар-вода; μ и M – молярные массы воды и воздуха; R_p – газовая постоянная водяного пара.

Уравнение для секундной массы (уравнение неразрывности). Единственным неопределенным параметром в уравнениях (3.2.16), (3.2.18), (3.2.22) является относительное вовлечение $\frac{1}{m} \frac{dm}{dx_3}$.

Если обратиться к изотермическим затопленным струям сравнительно небольших поперечных размеров, законы расширения которых изучены достаточно хорошо, то для таких струй характерным является практически линейное расширение их на основном участке струи.

$$\frac{dR}{dl} = \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{const}, \quad (3.2.23)$$

где l – расстояние вдоль оси струи, α – угол раствора струи.

Для струй, распространяющихся в стратифицированной атмосфере, предположение (3.2.23) представляется слишком грубым, а в ряде случаев противоречащим здравому смыслу. Для таких струй условие вовлечения должно быть более гибким.

Рассмотрим вертикальную затопленную струю. Изменение ее секундной массы можно выразить через радиальное вовлечение воздуха из окружающей среды

$$\frac{dm}{dl} = 2\pi R \rho_{\text{возд.}} v_R, \quad (3.2.24)$$

где v_R – скорость потока вовлечения на внешней границе струи по нормали к ее оси.

Разделим правую и левую части выражения (3.2.24) на m . Тогда, с учетом (3.2.1), относительное изменение секундной массы

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dl} = 2 \frac{v_R}{|\vec{v}|} \frac{T'}{T} \frac{1}{R}. \quad (3.2.25)$$

Найдем связь между выражениями (3.2.23) и (3.2.25). Соотношение (3.2.23), как уже отмечалось, хорошо выполняется для изотермической струи. Из уравнения (3.2.3) для изотермической затопленной струи (при $\vec{V}^* = 0$) можно получить

$$R|\vec{V}| = R_0|\vec{V}_0|. \quad (3.2.26)$$

Подставляя выражения (3.2.1) и (3.2.26) в уравнение (3.2.25), получим

$$\frac{dR}{dl} = 2 \frac{v_R}{|\vec{V}|}. \quad (3.2.27)$$

Сравнивая выражения (3.2.23) и (3.2.27), можно сделать вывод, что для изотермической струи $2 \frac{v_R}{|\vec{V}|} = \text{tg} \alpha = C$. Величину C обычно называют константой вовлечения. Изменение массы струи с учетом выражения (3.2.27) может быть представлено в виде

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dl} = \frac{C}{R} \frac{T'}{T}. \quad (3.2.28)$$

Постоянство отношения $v_R/|\vec{V}|$ вытекает из следующих простых соображений. Естественно предположить, что скорость вовлечения v_R определяется перепадом статического давления между окружающей средой p и струей p' таким образом, что

$$v_R = b_1 \left(\frac{\Delta p}{\rho_{\text{возд.}}} \right)^{1/2}, \quad (3.2.29)$$

где $\Delta p = p - p'$, b_1 — коэффициент пропорциональности.

В свою очередь, характерное значение Δp может быть оценено по величине динамического напора

$$\Delta p = b_2 \rho'_{\text{возд.}} \frac{|\vec{V}|^2}{2}. \quad (3.2.30)$$

Подставляя Δp из выражения (3.2.30) в (3.2.29), получим примерное постоянство отношения скоростей.

$$\frac{v_R}{|\vec{V}|} = b_1 \left(\frac{b_2}{2} \cdot \frac{\rho'_{\text{возд.}}}{\rho_{\text{возд.}}} \right)^{1/2} \approx b_1 \left(\frac{b_2}{2} \right)^{1/2} = \text{const}.$$

Распространим выражение (3.2.28) на струю, искривленную сносящим потоком. Будем полагать, что изменение массы струи происходит пропорционально пути, который она проходит относительно воздуха. Тогда, переходя к производной по высоте, получим

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dx_3} = \frac{1}{m} \frac{dm}{dl} \frac{dl}{dx_3} = \frac{C T'}{R T} \frac{|\Delta \vec{V}'|}{v_3} = \frac{C T'}{R T} \frac{\left(\sum_{i=1}^3 (v_i - v_i^*)^2 \right)^{1/2}}{v_3}. \quad (3.2.31)$$

Выражая радиус струи R из соотношения (3.2.1) с учетом (3.2.2)

$$R = \sqrt{\frac{m}{\pi \rho'_{\text{возд.}} \left(\sum_{i=1}^3 v_i^2 \right)^{1/2}}}, \quad (3.2.32)$$

получаем замкнутую систему уравнений (3.2.16), (3.2.18), (3.2.31), (3.2.32), позволяющую рассчитать составляющие вектора скорости, температуру и радиус струи как функции высоты. Изменение влажности с высотой можно получить при одновременном решении уравнения (3.2.22). Используя очевидное уравнение осевой линии струи

$$\frac{dx_1}{v_1} = \frac{dx_2}{v_2} = \frac{dx_3}{v_3}, \quad (3.2.33)$$

можно найти пространственное положение оси струи.

В качестве граничных условий для решения полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка задаются параметры струи на некотором исходном уровне, например, на срезе сопла. Верхние пределы интегрирования (конец счета) определяются характером решаемой задачи. Это может быть максимальная высота подъема, определяемая усло-

вием $v_3 = 0$ при устойчивой стратификации, либо возрастание относительной влажности до насыщения ($f' = 1$), после чего требуется перейти к другой системе уравнений.

Струя с конденсацией.

Как и ранее будем считать, что струя распространяется в ненасыщенном воздухе. По мере подъема вверх и охлаждения относительная влажность в струе растет и при благоприятных условиях достигает единицы – начинается конденсация. Выделяющееся при конденсации тепло увеличивает архимедову плавучесть в струе, в то же время сконденсировавшаяся вода уменьшает ее. Изменения в уравнениях для струи с учетом конденсации сводятся к следующему.

В уравнении движения эти изменения появляются только в выражении для архимедовой силы. Взвешенные в воздухе капли уменьшают плавучесть. Таким образом

$$F_{A,xi} = \delta_{i3} m |\bar{g}| \left[\frac{T'_v - T_v}{T_v} - q'_v \right] \cong \delta_{i3} m |\bar{g}| \cdot \left[\frac{T' - T}{T} + \left(1 - \frac{\mu}{M} \right) \frac{f'E' - fE}{p} - q'_v \right], \quad (3.2.34)$$

где q'_v – удельная водность в струе.

В уравнении энергии необходимо учесть выделение тепла, связанное с конденсацией водяного пара. Выражение (3.2.17) принимает вид

$$d \left[m \left(c_p T' + gx_3 + \frac{(\bar{V})^2}{2} - L_{п-в} q'_v \right) \right] = \left(c_p T + gx_3 + \frac{(\bar{V}^*)^2}{2} \right) dm. \quad (3.2.35)$$

Вместо уравнения (3.2.19) теперь следует записать закон изменения общего влагосодержания в струе

$$d[m(s' + q'_v)] = s dm. \quad (3.2.36)$$

Выполнив преобразования аналогично тем, которые были сделаны выше для сухой струи, получим систему уравнений для вычисления параметров струи с учетом эффектов конденсации. Выпишем ее.

$$\frac{dv_i}{dx_3} = -\frac{v_i - v_i^*}{m} \frac{dm}{dx_3} \left[1 + \frac{C_a}{C_p} \left(\frac{Z_1}{\left(\sum_{i=1}^3 (v_i - v_i^*)^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^3 v_i^2 \right)} \right)^{1/2} \right] + \quad (3.2.37)$$

$$+ \delta_{i3} \frac{|\bar{g}|}{v_3} \left[\frac{T' - T}{T} + \left(1 - \frac{\mu}{M} \right) \frac{fE' - fE}{p} - q'_B \right].$$

$$-\frac{dT'}{dx_3} = \gamma_a + \frac{1}{c_p} \sum_{i=1}^3 v_i \frac{dv_i}{dx_3} - \frac{L_{п-в}}{c_p} \left(\frac{dq'_B}{dx_3} \right) + \left(T' - T + \frac{1}{2c_p} \sum_{i=1}^3 (v_i - v_i^*)^2 - \frac{L_{п-в}}{c_p} q'_B \right) \frac{1}{m} \frac{dm}{dx_3}. \quad (3.2.38)$$

$$\frac{dq'_B}{dx_3} = -\frac{\mu}{M} \frac{fE'}{p} \left(\frac{1}{f'} \frac{df'}{dx_3} + \frac{L_{п-в}}{R_{п} T'^2} \frac{dT'}{dx_3} - \frac{1}{p} \frac{dp}{dx_3} \right) - \frac{1}{m} \frac{dm}{dx_3} \left(q'_B + \frac{\mu}{M} \frac{fE' - fE}{p} \right). \quad (3.2.39)$$

При выводе уравнения (3.2.39) принято, что вся сконденсировавшаяся влага переносится вместе с воздухом – без отставания от него. Таким образом, расчет водности и ледности в такой постановке задачи осуществляется в режиме полного увлечения.

В качестве фоновых условий задаются распределения с высотой температуры, влажности и вектора ветра в окружающей среде. При этом полагается, что параметры среды остаются постоянными – обратные связи между параметрами среды и струи не рассматриваются. Система уравнений (3.2.31) ... (3.2.33), (3.2.37) ... (3.2.39) должна быть дополнена уравнениями состояния и статики.

$$p = \rho_{\text{возд.}} R_{\text{возд.}} T. \quad (3.2.40)$$

$$dp = -\rho_{\text{возд.}} g dx_3. \quad (3.2.41)$$

Давление насыщенного водяного пара над плоской поверхностью воды как функция температуры рассчитывается по полуэмпирической формуле Магнуса

$$E_B = E_0 \cdot 10^{\frac{7,63t}{241,9+t}}, \quad (3.2.42)$$

где $E_0 = 610$ Па, $t = T - 273,15$.

Далее будет использована также зависимость давления насыщенного водяного пара над льдом

$$E_{\text{л}} = E_0 \cdot 10^{\frac{9,5t}{265,5+t}}. \quad (3.2.43)$$

Если принять, что конденсация водяного пара осуществляется при $f' = 1$, $\frac{df'}{dx_3} = 0$, то система (3.2.31) ... (3.2.33), (3.2.37) ... (3.2.39) с учетом (3.2.40) ... (3.2.42) оказывается замкнутой. Численное решение ее позволяет получить вертикальное распределение осредненных по сечению параметров облачной струи.

3.2.2. Спонтанные облачные струи

Спонтанные струи – это вид конвективных течений, развивающихся в неустойчиво стратифицированной атмосфере. Особенностью спонтанных струй является то, что они «не привязаны» жестко к фиксированному источнику. Появление их носит, вообще говоря, случайный характер. При этом горизонтальная неоднородность температуры воздуха или подстилающей поверхности, либо динамические факторы могут служить лишь инициаторами струи – дальнейшее развитие и существование ее связано с реализацией энергии неустойчивости. По-видимому, первичными элементами конвекции являются термики. Превратятся ли термик и его турбулентный след в более или менее устойчивую струю, зависит от запаса энергии неустойчивости. Спонтанные струи существенно отличаются от привычных в аэродинамике вынужденных струй. Однако основные уравнения, описывающие поведение вы-

нужденных струй, можно распространить и на спонтанные. При этом необходимо ввести следующие изменения в расчетные схемы.

1. Спонтанная облачная струя переносится вместе с воздушной массой, следовательно, взаимодействие ее с полем ветра в окружающей среде определяется тем, каков сдвиг ветра по вертикали.

Для такой струи удобно искать решение в системе координат, движущейся с облаком со скоростью \vec{U} . Совместим ось x_1 с направлением движения облачной струи. Тогда взаимодействие струи с переменным по высоте ветром может быть учтено, если перейти от фактического распределения $\vec{V}^*(z)$ к относительному

$$\vec{V}^*_{\text{отн.}}(z) = \vec{V}^*(z) - \vec{U}. \quad (3.2.44)$$

Если в качестве исходного принять уровень конденсации, то горизонтальные составляющие скорости в облачной струе на этом уровне находятся из простых геометрических построений

$$v_{01} = |\vec{U}| - |\vec{V}^*_{\text{у.к.}}| \cdot \cos(\vec{U}, \hat{\vec{V}}^*_{\text{у.к.}}), \quad (3.2.45)$$

$$v_{02} = |\vec{V}^*_{\text{у.к.}}| \cdot \sin(\vec{U}, \hat{\vec{V}}^*_{\text{у.к.}}). \quad (3.2.46)$$

В частном случае при $\vec{U} = \vec{V}^*_{\text{у.к.}}$ горизонтальные составляющие скоростей внешнего ветра в струе $v_{01}^* = v_{02}^* = v_{01} = v_{02} = 0$. Здесь и далее для сокращения записи индекс «отн.» при \vec{V}^* и v_i^* опускается.

2. Переход к облачным струям связан с необходимостью преодоления некоторого противоречия между расчетной схемой и физикой явления. Выше было принято, что осреднение параметров струи осуществляется в круговом сечении, перпендикулярном ее оси. Для облачных струй, характеризующихся значительными поперечными размерами, такое осреднение требует, строго говоря, учета распределения с высотой параметров струи и среды. Кроме то-

го, геометрия расчетной струи не отражает модель облака, вытекающую из наблюдений.

Чтобы не усложнять схему расчета, в первом приближении можно пренебречь различием между сечениями – горизонтальным и перпендикулярным оси. Тогда рассчитанное значение R можно трактовать как радиус струи в горизонтальном сечении. Очевидно, что такая замена тем ближе отражает реальный процесс, чем меньше ось струи отклоняется от вертикали. В этом смысле при условии $v_{01} = v_{02} = 0$ такая трактовка результатов практически соответствует расчетной схеме для всей струи, исключая область наковальни. Однако в предвершинной части, а при $v_{01} = v_{02} \neq 0$ и вблизи уровня конденсации эта замена становится слишком грубой.

В качестве альтернативы можно использовать другую схему струи. Будем считать, что горизонтальное сечение струи является кругом. Уподобим элемент секундной массы струи шайбе, движущейся таким образом, что ее продольная ось остается строго вертикальной. Сохраняя общность с разд. 3.2.1, получим уравнения для составляющих скорости такой шайбы.

Секундная масса струи в этом варианте

$$m = \pi R^2 \rho'_{\text{возд}} |v_3|. \quad (3.2.47)$$

Составляющие скорости v_1 и v_2 определяют только перемещение шайбы по горизонтали и на изменение секундной массы не влияют. Поперечное сечение шайбы для внешнего потока определяется площадью

$$A = 2R |v_3|. \quad (3.2.48)$$

Повторяя выкладки, аналогичные тем, которые приведены в разд. 3.2.1, последовательно запишем:

$$\bar{F}_{\text{а.с.}} = -C_a \rho_{\text{возд.}} \frac{(\Delta \bar{V})^2}{2} A_{\perp} \frac{\Delta \bar{V}}{|\Delta \bar{V}|}, \quad (3.2.49)$$

где

$$A_{\perp} = A \cdot \sin \left(\Delta \vec{V}, \hat{k} v_3 \right) = 2R |v_3| \frac{|\Delta \vec{V} \cdot \vec{k} v_3|}{|\Delta \vec{V}| \cdot |\vec{k} v_3|}. \quad (3.2.50)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{a.c.}} &= -C_a \rho_{\text{возд.}} R \cdot |v_3| \cdot (\Delta \vec{V})^2 \frac{|\Delta \vec{V} \times \vec{k} v_3|}{|\Delta \vec{V}| \cdot |\vec{k} v_3|} \cdot \frac{\Delta \vec{V}}{|\Delta \vec{V}|} = \\ &= -C_a \rho_{\text{возд.}} R \cdot \Delta \vec{V} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 - v_1^* & v_2 - v_2^* & v_3 - v_3^* \\ 0 & 0 & v_3 \end{vmatrix} = \\ &= -C_a \rho_{\text{возд.}} R \cdot \Delta \vec{V} \cdot \left[\vec{i} (v_2 - v_2^*) v_3 - \vec{j} (v_1 - v_1^*) v_3 \right]. \end{aligned} \quad (3.2.51)$$

Составляющие $\vec{F}_{\text{a.c.}}$ по координатным осям

$$F_{\text{a.c.}, x_i} = -C_a \rho_{\text{возд.}} R \cdot |v_3| \cdot (v_i - v_i^*) \sqrt{(v_1 - v_1^*)^2 + (v_2 - v_2^*)^2}. \quad (3.2.52)$$

3. Время существования спонтанных струй сравнительно невелико, вследствие чего они не успевают приобрести черты установившихся течений. Формирование спонтанной струи осуществляется в результате подсоса воздуха из подоблачного слоя. Эти эффекты обычно учитываются введением поправочного множителя в выражение для архимедовой силы. Одновременно распространим решение на случай появления в облачной струе ледяной фазы и возможности формирования облаков затопленной конвекции (например, формирование конвективных облаков в системе облачности теплого фронта). Последнее обстоятельство учитывается тем, что в выражение архимедовой плавучести следует ввести разность удельных содержаний воды и льда в облаке и вне его.

$$\vec{F}_{\Lambda} = G \delta_{i3} m |\vec{g}| \left[\frac{T'_v - T_v}{T_v} - (q'_v + q'_{\text{л}} - q_v - q_{\text{л}}) \right], \quad (3.2.53)$$

где $q'_{\text{л}}$ – ледность в струе, q_v и $q_{\text{л}}$ – водность и ледность вне струи; G – коэффициент неполноты реализации энергии неустойчивости, $G < 1$. Численные эксперименты показали, что приемлемым значением этого коэффициента является $G = 0,5$.

Составляющие скорости как функции высоты определяются теперь уравнениями

$$\frac{dv_i}{dx_3} = -\frac{v_i - v_i^*}{m} \cdot \frac{dm}{dx_3} \left[1 + \frac{C_a}{C\pi} \left(\frac{\sum_{i=1}^2 (v_i - v_i^*)^2}{\sum_{i=1}^3 (v_i - v_i^*)^2} \right)^{1/2} \right] + G\delta_{i3} \frac{|\bar{g}|}{v_3} \left[\frac{T' - T}{T} + \left(1 - \frac{\mu}{M} \right) \frac{fE' - fE}{p} - (q'_B + q'_L - q_B - q_L) \right] \quad (3.2.54)$$

С учетом ледяной фазы в струе и содержания водности и ледности вне струи исходные уравнения для баланса энергии и общего влагосодержания принимают вид

$$\begin{aligned} d \left[m \left(c_p T' + gx_3 + \frac{(\bar{v})^2}{2} - L_{\Pi-B} q'_B - L_{\Pi-L} q'_L \right) \right] = \\ = \left(c_p T + gx_3 + \frac{(\bar{v}^*)^2}{2} - L_{\Pi-B} q_B - L_{\Pi-L} q_L \right) dm \end{aligned} \quad (3.2.55)$$

$$d[m(s' + q'_B + q'_L)] = (s + q_B + q_L) dm \quad (3.2.56)$$

Решая уравнение (3.2.55) относительно $\frac{dT'}{dx_3}$, а уравнение (3.2.56) относи-

тельно $\frac{df'}{dx_3}$ получим

$$\begin{aligned} -\frac{dT'}{dx_3} = \gamma_a + \frac{1}{c_p} \sum_{i=1}^3 v_i \frac{dv_i}{dx_3} - \frac{L_{\Pi-B}}{c_p} \frac{dq'_B}{dx_3} - \frac{L_{\Pi-L}}{c_p} \frac{dq'_L}{dx_3} + \\ + \left(T' - T + \frac{1}{2c_p} \sum_{i=1}^3 (v_i - v_i^*)^2 - \frac{L_{\Pi-B}}{c_p} (q'_B - q_B) - \frac{L_{\Pi-L}}{c_p} (q'_L - q_L) \right) \cdot \frac{1}{m} \frac{dm}{dx_3} \end{aligned} \quad (3.2.57)$$

$$\frac{df'}{dx_3} = -f' \left(\frac{L_{п-в}}{R_{п} T'^2} \frac{dT'}{dx_3} - \frac{1}{p} \frac{dp}{dx_3} \right) - \frac{M}{\mu} \frac{p}{E'} \left(\frac{dq'_в}{dx_3} + \frac{dq'_л}{dx_3} \right) - \left(\frac{fE' - fE}{E'} + \frac{M}{\mu} \cdot \frac{p}{E'} (q'_в + q'_л - q_в - q_л) \right) \cdot \frac{1}{m} \frac{dm}{dx_3} \quad (3.2.58)$$

Система уравнений (3.2.54), (3.2.57), (3.2.58), (3.2.47), (3.2.31) не является замкнутой, поскольку неопределенными остаются величины $q'_в$ и $q'_л$.

Определим их как

$$q'_в = \int_0^{\infty} n_в \eta(m_в) \cdot m_в dm_в, \quad (3.2.59)$$

$$q'_л = \int_0^{\infty} n_л \eta(m_л) \cdot m_л dm_л, \quad (3.2.60)$$

где $n_в$ и $n_л$ — концентрации капель воды и ледяных частиц, отнесенные к единичной массе воздуха; $\eta(m_в)$ и $\eta(m_л)$ — плотности распределения капель воды и ледяных частиц по массам $m_в$ и $m_л$ соответственно.

Производные от $q'_в$ и $q'_л$ по высоте

$$\frac{dq'_в}{dx_3} = \frac{1}{v_3} \int_0^{\infty} \left(\frac{d(n_в \eta(m_в))}{d\tau} \cdot m_в + n_в \eta(m_в) \frac{dm_в}{d\tau} \right) dm_в, \quad (3.2.61)$$

$$\frac{dq'_л}{dx_3} = \frac{1}{v_3} \int_0^{\infty} \left(\frac{d(n_л \eta(m_л))}{d\tau} \cdot m_л + n_л \eta(m_л) \frac{dm_л}{d\tau} \right) dm_л. \quad (3.2.62)$$

Изменение концентрации и размеров частиц находится путем решения кинетических уравнений (см. разд. 2).

*Переход к пространственному распределению
характеристик облачной струи*

Рассмотренная выше струйная модель конвективного облака относится к разряду полугорамерных моделей. В ней рассчитываются распределения термодинамических характеристик и горизонтальные размеры струи вдоль вертикальной координаты. Разумеется, в реальном облаке изменение термо-

динамических характеристик происходит не только по высоте, но и в горизонтальном сечении. Зная распределения составляющих скорости и водности в облаке, можно рассчитать траектории частиц осадков, в частности градовых зародышей. Строго такие задачи решаются в рамках нестационарных пространственных моделей облаков (подробнее об этом в разд. 5). Однако представляется возможным осуществить приближенный переход от 1,5-мерной струйной модели к трехмерной.

Для перехода от интегральных характеристик облака к распределению их по сечению струи нужно задать вид функций распределения. Его подбирают на основе экспериментальных данных. Так, для распределения вертикальной составляющей скорости можно использовать выражение

$$v_{3,r} = v_{3,0} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (3.2.63)$$

где $v_{3,0}$ и $v_{3,r}$ – вертикальные составляющие скорости на оси струи и на расстоянии r от нее. Пренебрегая зависимостью $\rho'_{\text{возд.}}$ от r , связь между v_3 и $v_{3,0}$ можно представить выражением

$$v_3 = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_{3,0} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/2} \cdot 2\pi r dr. \quad (3.2.64)$$

Выполнив интегрирование уравнения (3.2.64), получим

$$v_3 = \frac{2}{3} v_{3,0} \quad \text{или} \quad v_{3,0} = \frac{3}{2} v_3. \quad (3.2.65)$$

Таким образом, профиль вертикальной скорости в горизонтальном сечении облака $v_{3,r}$ имеет вид

$$v_{3,r} = \frac{3}{2} v_3 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (3.2.66)$$

Примечание: Выражение (3.2.64) записано для условия баланса секундной массы. Другой подход может заключаться в том, чтобы фиксировать баланс количества движения секундной массы. В этом случае вместо выражения

(3.2.64) следовало бы написать

$$v_3^2 = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R v_{3,0}^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right] \cdot 2\pi r dr.$$

Тогда $v_{3,0} = \sqrt{2}v_3$. Различие коэффициентов $3/2$ и $\sqrt{2}$ сравнительно невелико, что позволяет использовать любой из вариантов. Ниже рассматривается первый вариант.

Изменения вертикальной скорости и радиуса облачной струи с высотой приводят к появлению вергентной скорости.

Уравнение неразрывности для элементарного цилиндра радиусом r и высотой dx_3 можно представить в виде

$$\frac{d}{dx_3} (\pi r^2 \bar{\rho}'_{\text{возд.,}r} \bar{v}_{3,r}) + 2\pi r \rho'_{\text{возд.,}r} v_r = 0, \quad (3.2.67)$$

где $\bar{v}_{3,r}$ и $\bar{\rho}'_{\text{возд.,}r}$ – вертикальная скорость и плотность воздуха, осредненные по сечению цилиндра; $\rho'_{\text{возд.,}r}$ – плотность воздуха в струе на расстоянии r от ее оси; v_r – вергентная скорость – горизонтальная составляющая скорости, направленная по радиусу струи на расстоянии r от оси. Снова пренебрегая изменением плотности $\bar{\rho}'_{\text{возд.,}r}$ по сечению струи и принимая для упрощения расчетной схемы $\bar{\rho}'_{\text{возд.,}r} = \rho_{\text{возд.}}$, из уравнения (3.2.67) найдем

$$-v_r = \frac{r}{2} \left(\frac{\bar{v}_{3,r}}{\rho_{\text{возд.}}} \cdot \frac{d\rho_{\text{возд.}}}{dx_3} + \frac{d\bar{v}_{3,r}}{dx_3} \right). \quad (3.2.68)$$

Величину $\bar{v}_{3,r}$ найдем как

$$\bar{v}_{3,r} = \frac{1}{\pi r^2} \int_0^r v_3 \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]^{1/2} 2\pi r dr. \quad (3.2.69)$$

Проинтегрировав это уравнение, получим

$$\bar{v}_{3,r} = v_3 \left(\frac{R}{r} \right)^2 \left[1 - \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^{3/2} \right]. \quad (3.2.70)$$

Подставляя выражение (3.2.70) в уравнение (3.2.68) и заменяя

$$\frac{1}{\rho_{\text{возд.}}} \cdot \frac{d\rho_{\text{возд.}}}{dx_3} = \frac{1}{T} (\gamma - \gamma_A),$$

найдем

$$-v_r = \frac{R}{2} A v_3 \frac{\gamma - \gamma_A}{T} + \frac{R}{2} A \frac{dv_3}{dx_3} + v_3 B \frac{dR}{dx_3}, \quad (3.2.71)$$

где γ_A – градиент автоконвекции ($\gamma_A = 0,034K \cdot \text{м}^{-1}$),

$$A = \frac{R}{r} \left[1 - \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)^{3/2} \right],$$

$$B = A \frac{r}{R} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right).$$

Положительное значение скорости v_r соответствует движению от оси струи.

Представим горизонтальные составляющие скорости воздуха в струе в виде сумм $v_1 + v_{r1}$ и $v_2 + v_{r2}$, где v_1 и v_2 – горизонтальные составляющие скорости движения шайбы (элемента секундной массы), а v_{r1} и v_{r2} – составляющие вергентной скорости. Выберем в сечении струи точку с координатами Δx_1 и Δx_2 относительно оси струи. Естественно, $\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2} = r$. Горизонтальные составляющие вергентной скорости, очевидно, равны

$$v_{r1} = v_r \cdot \frac{\Delta x_1}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}}, \quad (3.2.72)$$

$$v_{r2} = v_r \cdot \frac{\Delta x_2}{\sqrt{\Delta x_1^2 + \Delta x_2^2}}. \quad (3.2.73)$$

Если полагать, что облачные частицы или частицы осадков в горизонтальном направлении смешаются вместе с воздухом, а в вертикальном движутся относительно воздуха со скоростью $V(a, x_3)$, где a – размер частицы, то уравнения траектории частицы имеют вид

$$\left(\frac{dx_1}{dx_3}\right)_a = \frac{v_1 + v_{r1}}{v_3 - V(a, x_3)}, \quad (3.2.74)$$

$$\left(\frac{dx_2}{dx_3}\right)_a = \frac{v_2 + v_{r2}}{v_3 - V(a, x_3)}. \quad (3.2.75)$$

Характерной чертой мощных конвективных облаков является механизм регенерации – нарастание облака в передней части и разрушение в тыловой. Этот эффект учитывается введением, так называемой, регенерационной скорости U_p . Если ось x_1 направлена в сторону перемещения облака, то эффект регенерации учитывается изменением только уравнения (3.2.74)

$$\left(\frac{dx_1}{dx_3}\right)_a = \frac{v_1 + v_{r1} - U_p}{v_3 - V(a, x_3)}. \quad (3.2.76)$$

Напомним, что координаты оси струи x_{10} и x_{20} рассчитываются по формулам

$$x_{10} = \int_0^{x_3} \frac{v_1}{v_3} dx_3, \quad (3.2.77)$$

$$x_{20} = \int_0^{x_3} \frac{v_2}{v_3} dx_3. \quad (3.2.78)$$

Распределение других характеристик струи – суммарной водности $(q'_в + q'_д)$ и перегрева $(T' - T)$ – можно задать выражениями, аналогичными (3.2.66). Следует, впрочем, иметь в виду, что максимальные значения $(q'_в + q'_д)|_{r=0}$ и $(T' - T)|_{r=0}$ не могут превышать значений, полученных методом частицы (при влажноадиабатическом подъеме воздуха).

В работе Качурина Л. Г. (1990) для вертикальной составляющей скорости воздушного потока предложено выражение

$$v_{3,r} = Av_3 \exp \left[-k \left(\frac{r}{R} \right)^n \right], \quad (3.2.79)$$

где A, k, n – параметры. Нормирующий множитель A находится из условия постоянства количества движения секундной массы. Параметры k и n определяются из экспериментальных данных. Одновременно задается распределение по сечению струи горизонтальной тангенциальной составляющей скорости $v_{T.}$.

Для тангенциальной составляющей в качестве параметра распределения задается расстояние r_m , при котором v_T достигает максимума ($v_{T.,\text{макс.}} = v_{T.} |_{r_m}$). При этом получено соотношение $k = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r_m} \right)^n$. В окончательном виде Качурин Л. Г. (1990) приходит к следующим выражениям для $v_{3,r}$ и $v_{T.,r}$

$$v_{3,r} = \frac{R}{r_m} \sqrt{\frac{n}{2\Gamma(2/n)}} \cdot v_3 \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_m} \right)^n \right], \quad (3.2.80)$$

$$v_{T.,r} = n \frac{R}{r_m} \sqrt{\frac{C_{с.а} \left(\frac{R}{r_m} \right)^n}{4\Gamma(2/n)}} \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^{n/2} \cdot v_3 \cdot \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_m} \right)^n \right]. \quad (3.2.81)$$

Можно показать, что при $n \rightarrow \infty$ распределение (3.2.79) превращается в Π – образное. При практических расчетах для облачных струй Качурин Л. Г. (1990) использует $n = 4$. Следует заметить, что при рекомендуемом в работе Качурина Л. Г. (1990) значении $r_m / R = 0,64$ вдоль линий тока не выполняется закон сохранения количества движения.

Глава 4. Примеры использования струйной модели конвекции. Сравнение с экспериментом.

Изложенная выше теория турбулентных струй развивалась применительно к задачам атмосферной конвекции. Ее главное отличие от теории струй, используемой при решении различного рода технологических задач, состоит в учете адиабатических процессов и связанных с ними изменений влажности и водности (ледности) в струе. В практике активных воздействий теория струй имеет много приложений. Например, расчет дальности струи играет важную роль при использовании ее как средства доставки и распространения реагента для рассеяния облаков и туманов.

Струйный характер имеют воздушные потоки, создаваемые метеотронами, предназначенными для вентиляции глубоких карьеров или создания конвективных облаков. Широкомасштабные усилия предпринимались для развития струйной модели мощных конвективных облаков. Развитие теории сопровождалось сопоставлением ее с результатами экспериментов. Ниже приводятся некоторые примеры реализации теории турбулентных струй в различных ее модификациях.

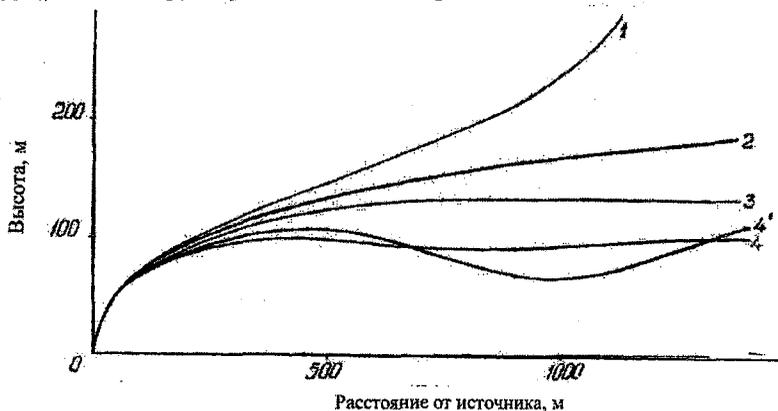


Рис. 4.1.1. Зависимость траектории струи от стратификации
($R_0 = 3,5 \text{ м}$, $\Delta T_0 = 100 \text{ К}$, $V_0 = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $V^* = 5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$).

1. $\gamma = 0,02 \text{ К} \cdot \text{м}^{-1}$; 2. $\gamma = 0,01 \text{ К} \cdot \text{м}^{-1}$; 3. $\gamma = 0$; 4. $\gamma = -0,02 \text{ К} \cdot \text{м}^{-1}$;

$$4'. \gamma = -0,02 \text{ К} \cdot \text{м}^{-1}, \frac{dm}{dz} = 0.$$

4.1. Расчет дымовых факелов

На рис. 4.1.1 показано, как меняется траектория струи в зависимости от стратификации атмосферы. На начальном этапе велика роль перемешивания струи с окружающим воздухом. Вертикальная составляющая скорости быстро уменьшается. Струя приобретает характерный изгиб. На этом этапе ее траектория практически не зависит от стратификации атмосферы. По мере удаления от источника относительная роль архимедовой плавучести увеличивается. При неустойчивой стратификации архимедова сила возрастает и вертикальная составляющая скорости в струе неограниченно растет (кривая 1).

При сухоадиабатической стратификации и перегрев, и вертикальная скорость с удалением от источника стремятся к нулю (кривая 2).

Особый интерес представляют траектории струй в инверсионных условиях. При распространении струи в устойчиво стратифицированной атмосфере падение температуры за счет адиабатического охлаждения происходит быстрее, чем потеря скорости. В результате при равенстве температур T и T' струя, обладая запасом вертикальной скорости, продолжает подъем вверх, температура в струе становится ниже температуры окружающей среды, а ее вертикальная скорость вскоре падает до нуля. Под действием отрицательного архимедова ускорения струя опускается, снова переходит через уровень, где $T' = T$, и далее совершает затухающие колебания вблизи него. Такое поведение струи отражено кривой 4. Однако при заданном масштабе рисунка эти колебания плохо различимы. Поэтому для наглядности приведена кривая 4', рассчитанная в предположении отсутствия вовлечения воздуха в струю ($\frac{dm}{dz} = 0$).

4.2. Распространение струй, создаваемых реактивными двигателями.

Один из методов искусственной вентиляции глубоких карьеров горнодобывающей промышленности состоит в применении свободных турбулентных струй. При этом используются либо мощные тепловые

источники, размещенные на дне карьера, либо динамические, устанавливаемые на уступах. В качестве последних используются реактивные двигатели. Струя от двигателя направляется по горизонтали или под некоторым углом вглубь карьера. В нее вовлекаются большие массы воздуха. Струя, обладая архимедовой плавучестью, искривляется и поднимается вверх, вынося загрязненный воздух за пределы карьера.

На рис. 4.2.1 приведено сравнение результатов расчета траектории неизотермической струи с экспериментом. Струя создавалась реактивным двигателем, установленным на уступе, расположенном на глубине 140м от поверхности земли. Глубина карьера составляла 180м. Визуализация струи достигалась с помощью дымовых шашек. Опыт проводился при отсутствии ветра в карьере. Можно отметить довольно хорошее совпадение расчета с экспериментом. Существенное расхождение отмечается только выше карьера, где, по-видимому, был слабый ветер.

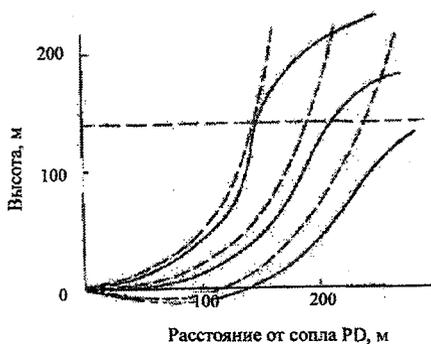


Рис. 4.2.1. Траектории оси и контура струи: эксперимент (сплошные линии) и расчет (прерывистые).

$R_0 = 0,43 \text{ м}$. $V_0 = 500 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $\Delta T_0 = 500 \text{ К}$. Горизонтальная прерывистая линия соответствует уровню поверхности земли (140м).

4.3. Сравнение расчетов по струйной модели конвективного облака с результатами ракетного зондирования.

Наблюдаемая мощность конвективных облаков хорошо коррелирует с расчетами по струйной модели. Представляет интерес сравнение модельных расчетов с фактическими распределениями скорости восходящих токов и

перегрева облака. В Высокогорном геофизическом институте (г. Нальчик) было выполнено ракетное зондирование мощных конвективных облаков. Радиозонд транспортировался ракетой в верхнюю часть облака, а затем опускался на парашюте. На этапе спуска измерялась температура воздуха и координаты зонда. По изменению координат радиозонда во времени при известной скорости опускания относительно воздуха рассчитывались вертикальная и горизонтальная составляющие скорости в облаке. Проводилось сравнение рассчитанных по модели распределений скорости вертикальных потоков и перегрева облака относительно окружающей среды с экспериментальными данными. При расчетах исходная стратификация атмосферы задавалась по радиозонду ближайшей сетевой аэрологической станции. Результаты сравнения для трех конкретных облаков представлены на рис. 4.3.1. Анализируя их, можно отметить, что теория и эксперимент не только согласуются качественно, но и в количественном отношении расхождения находятся в допустимых пределах. В каждом из рассмотренных случаев отмечается хорошее соответствие рассчитанных и наблюдаемых уровней максимальных скоростей. Любопытно, что в случае а) радиозонд сделал «петлю» в облаке на высоте 4...5 км и преодолел восходящий поток, лишь существенно сместившись по горизонтали. Расчет дал на уровне 4,5 км максимальную скорость около $14 \text{ м}\cdot\text{с}^{-1}$, превышающую скорость опускания радиозонда на парашюте. Ход разности температур облако – окружающая среда оказался менее наглядным. Однако следует учесть возможность смещения профилей температуры в пределах погрешностей измерений, возникающих при подготовке радиозонда к выпуску.

Обратимся к рис. 4.3.1 в. Разность температур между двумя радиозондами (аэрологической станции и запущенного ракетой в облако) свидетельствует об отрицательном перегреве практически во всей толще облака (ломаная 1). В то же время вертикальные токи в облаке на пути движения зонда оказались существенно положительными, что свидетельствует о наличии архимедовой плавучести, а значит и положительного перегрева. Обращает внимание тот

факт, что кривая 2 – расчет по струйной модели – в значительной мере повторяя ход экспериментальных данных, сдвинута примерно на 2 K вправо.

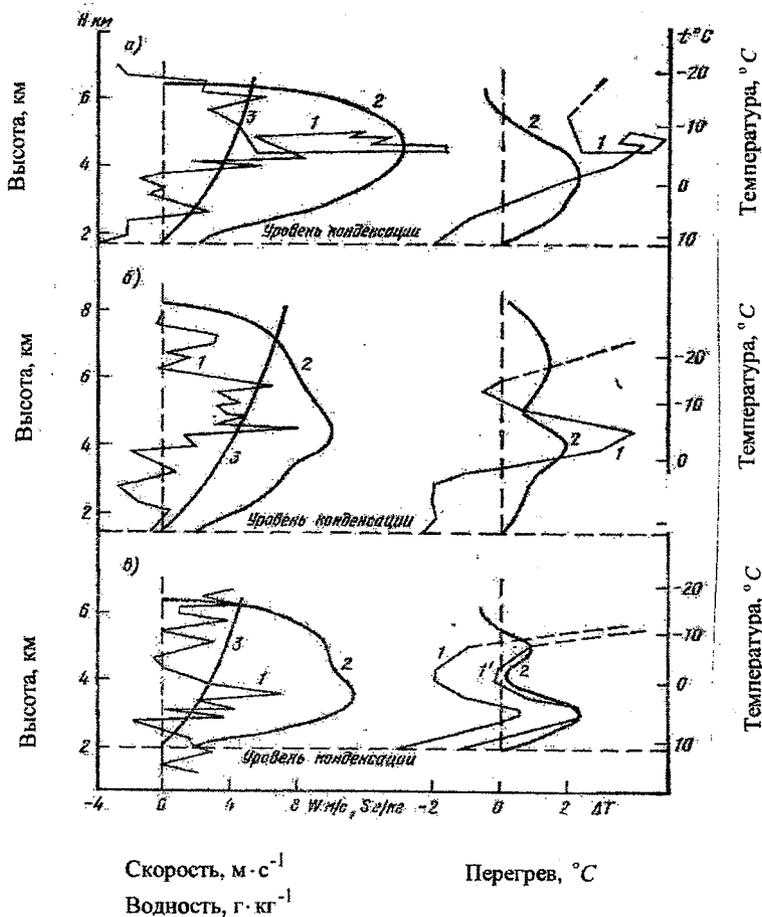


Рис. 4.3.1. Сравнение рассчитанных по струйной модели (2) и измеренных при ракетном зондировании (1) профилей вертикальной составляющей скорости w и перегрева облака относительно окружающей среды ΔT ; 3 – рассчитанный профиль водности в облаке q'_v .

а – 28.07 1974 г., $R_0 = 3000$ м, $w_0 = 2$ м·с⁻¹, $p_{y.k.} = 825$ гПа;

б – 21.08 1974 г., $R_0 = 3000$ м, $w_0 = 2$ м·с⁻¹, $p_{y.k.} = 850$ гПа;

в – 28.08 1974 г., $R_0 = 2000$ м, $w_0 = 2$ м·с⁻¹, $p_{y.k.} = 800$ гПа.

Во всех случаях $G = 1$.

Для наглядности на рисунке ломаная 1 смещена параллельно самой себе (линия 1') таким образом, чтобы максимальные рассчитанный и экспериментальный перегревы на высоте 3 км совпали. Как можно видеть, эти линии далее также почти совпадают практически по всей высоте облака. Следует, впрочем, отметить, что во всех случаях в предвершинной части облака эксперимент дает положительный перегрев. Можно предположить, что этот результат, противоречащий теории и общим физическим представлениям о природе конвекции, связан со скоростным нагревом ракеты на этапе подъема, то есть является погрешностью измерений. Участки предположительно остаточного перегрева на рисунке показаны пунктиром.

4. 4. Струйная модель мощного градового облака.

В течение ряда лет в РГГМУ (ранее ЛГМИ) разрабатывалась струйная численная модель конвективного облака. С помощью модели удалось выявить характерные черты распределения с высотой параметров конвективных облаков в зависимости от условий в окружающей среде. Предпринимались попытки анализа процессов образования ливневых осадков и града. Струйная модель является стационарной, а процессы осадкообразования в конвективных облаках носят ярко выраженный нестационарный характер. Это обстоятельство ограничивает возможности применения струйной модели для короткоживущих однопячейковых облаков и отдельных ячеек в мультячейковых облаках. Особое положение занимают суперъячейковые штормы. Наблюдения показывают, что для них характерным является существование неизменной формы радиоэхо в течение длительного времени (несколько часов), четкое пространственное разделение зон восходящих токов в передней части облака и осадков в тыловой, наличие протяженной почти непрерывной градовой дорожки. Таким образом, в суперъячейковых облаках выделяется квазистационарная стадия, что явилось основанием для использования струйной модели при их анализе.

Отмеченные особенности суперъячейковых процессов в модели учтены введением регенерационной скорости перемещения градового очага,

связанной с его непрерывным самовозобновлением в передней части и разрушением, диссипацией – в тыловой. Регенерационная скорость \bar{U}_p определялась как векторная разность скоростей фактического ветра на уровне конденсации $V_{y,к}^*$ и скорости движения градового облака \bar{U} относительно земной поверхности.

Обобщая результаты наблюдений, можно выделить – скорее как правило, чем исключение – еще одну характерную особенность мощных конвективных облаков – вращение восходящего потока вокруг вертикальной оси. Причиной появления завихренности является перепад давления между восходящей струей и окружающим воздухом. Расчеты параметров облачной струи выполнены с учетом поворота внешнего ветра с высотой. Переход от осредненных параметров облачной струи к их распределению по сечению осуществлялся с помощью полуэмпирических соотношений (3.2.80) и (3.2.81). Затраты энергии на образование завихренности учитывались в уравнении движения коэффициентом реализации энергии неустойчивости G .

В модели при расчетах трансформации облачного спектра решалось кинетическое уравнение для трехфазного облака. Рассчитывались трехмерные поля основных термодинамических величин и геометрические контуры облачной струи. Далее на фоне квазистационарной термодинамики вычислялись траектории частиц осадков, временное и пространственное распределение их концентрации и размеров. В качестве выходных характеристик модели, используемых для сравнения с результатами наблюдений, рассчитывались поля радиолокационной отражаемости и кинетическая энергия дождя и града, выпадающих на земную поверхность. Расчеты выполнялись для естественного процесса градобития и трансформации его в результате воздействия кристаллизующими реагентами.

Для сравнительных оценок и демонстрации возможностей численной модели был выбран градовый процесс, получивший название Флемингштурм. Этот шторм подробно описан в научной и учебной литературе.

Результаты расчетов представлены на рис. 4.4.1 и 4.4.2. Проекция центра облачной струи на уровне конденсации на горизонтальную плоскость

совмещена с началом координат. Эта плоскость – «помост ринга» – расположена на уровне моря. Поверхность земли находится на высоте 1,4 км, уровень конденсации – 2,8 км. На рис. 4.4.1 положительное направление осей соответствует общепринятому. Направление движения облака совпадает с направлением оси x . Облако изображено таким, как его «видит» наблюдатель, находящийся спереди и справа. На рис. 4.4.2 то же облако показано с тыла слева: положительные направления осей x и y по сравнению с рис. 4.4.1 здесь повернуто на 180 градусов.

На рис. 4.4.1 слева на помосте ринга изображен годограф скорости ветра, построенный относительно направления движения шторма. Вектор \vec{U} отражает действительную скорость движения облака, а \vec{U}_p – вектор регенерационной скорости. Представление о геометрии облачной струи дают осевые сечения, проведенные параллельно осям x и y . Контуры облака в этих сечениях на обоих рисунках изображены пунктирными кривыми, соединяющими овалы нижнего и верхнего сечений облака. На передней стенке ринга показано распределение с высотой водности q'_v (кривая 0) и вертикальной скорости w , осредненных по сечению струи. В качестве оценки максимального значения вертикальной составляющей скорости для Флеминг-шторма можно принять $w(z)_{\text{макс.}} = 40 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Рассчитанное по модели максимальное значение средней скорости равно $28 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$ при переходе к распределению скорости по сечению струи дает согласованное значение около $40 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$. Здесь же приведено распределение тангенциальной составляющей скорости вращательного движения. Вертикальный профиль максимальных значений $v_{t,\text{макс.}}$ показан в той же системе координат, что и w . Треугольниками на этом графике отмечены скорости движения локальных максимумов отражаемости – «горячих» точек, которые можно рассматривать как трассеры поля скоростей в облаке – по крайней мере, горизонтальной составляющей этого поля.

На двух других вертикальных стенках ринга на рис. 4.4.1 приводятся распределения радиолокационной отражаемости для разрезов параллельных осям x и y при $x = -1$ км и $y = -5$ км. Расчеты отражаемости выполнялись в узлах 2-х километровой сетки. Сопоставляя эти и другие разрезы с результатами наблюдений, можно заключить, что структура поля отражаемости в основном согласуется с экспериментальными данными. Хорошо выделяются характерные для мощных градовых облаков навес и свес радиозо в направлении движения шторма. Четко проявляется зона слабого эхо в центральной части восходящего потока. Указанные особенности радиозо являются типичными для суперячейковых градовых облаков. Это позволяет надеяться, что распределение основных термодинамических параметров, механизмы роста облачных частиц и частиц осадков, а также характер внутриоблачной циркуляции в модели отражены реалистично.

Перемещение градин в облаке определяется суммой факторов: распределением восходящих потоков, удерживающих градины, общим горизонтальным переносом воздуха в облачной струе, вращательными и вергентными составляющими скорости, регенерационным перемещением облака в целом. На рис. 4.4.2 показаны траектории трех градин – от места образования соответствующего градового зародыша (замерзания переохлажденной капли) до выпадения на землю. Цифры у кривых на конце траекторий указывают размер (диаметр) градин в сантиметрах. Самая крупная из представленных градин зародилась в тыловой части облака. Градина увлекается горизонтальным потоком к центру восходящей струи примерно с такой же скоростью, с какой восходящий поток «уходит» из-под градины в результате механизма регенерации. Градина практически зависает в облаке в условиях большой влажности. Здесь она быстро растет. Далее, преодолевая восходящий поток падает вниз и оказывается вне облачной струи. Определенное несоответствие модели и природы заключается в том, что в модели не воспроизводится область нисходящих токов. Некоторым оправданием этому служит то обстоятельство, что скорость нисходящих

токов в зоне осадков обычно существенно меньше скорости в восходящей струе.

Градина, образовавшаяся на правой стороне облачной струи, вовлекается в область больших скоростей раньше, чем она успевает вырасти до значительных размеров. Сильными восходящими токами она выбрасывается в верхнюю часть облака, где водность мала и градина практически не растет. Ее рост возобновляется лишь на левом фланге, когда она, опускаясь по периферии, снова проходит через переохлажденную часть облака.

Представленные на рисунке примеры не отражают всего многообразия судеб градовых зародышей, образовавшихся в различных частях облака. Обобщающей характеристикой концентрации и размеров градин является поле секундной кинетической энергии града, выпадающего на единичную площадь подстилающей поверхности. Это поле изображено на помосте ринга. Легко видеть, что поле осадков согласуется с полем радиолокационной отражаемости. Как характерную особенность для Флеминг-шторма (не проявляющуюся при аналогичных расчетах для других градовых ситуаций) можно отметить наличие двух максимумов интенсивности градобития. На задней стенке ринга как функция расстояния по оси Y представлена суммарная кинетическая энергия града K , выпадающего на единичную площадь за время градобития. Распределение K , естественно, оказывается также бимодальным. Полученные максимальные значения K соответствуют очень сильному градобитию.

Как показывают численные эксперименты, эффективность воздействия на градовые процессы кристаллизующими реагентами существенно зависит от мощности процесса и концентрации введенного реагента. Слева внизу на рис. 4.4.2 приведена зависимость максимального значения $K_{\text{макс}}$ от концентрации искусственных ледяных кристаллов, введенных в облако. Предполагается, что внесение реагента осуществляется непрерывно и равномерно по всему сечению облака, реагент активизируется при температуре -7°C . На графике представлены результаты расчетов для двух исходных спектров капель. Кривая 1 рассчитана для сравнительно широкого

спектра капель в нижней части облака — при показателе степени в двухпараметрическом Γ -распределении $\nu = 0,6$. Кривая 2 — для $\nu = 1,2$. Таким образом, график характеризует одновременно чувствительность модели к концентрации реагента и условиям развития градового процесса (континентальная или морская воздушные массы).

Несмотря на некоторое различие в абсолютных значениях K , ход кривых свидетельствует о неоднозначной зависимости градоопасности от концентрации реагента. При малых концентрациях ледяных частиц интенсивность градобития возрастает, затем по мере увеличения n^* уменьшается до нуля. Если говорить о существенном или полном подавлении градобития, то, как показывают расчеты, для градового процесса типа Флеминг-шторма требуется довольно большой расход реагента. Сознавая известную условность абсолютных оценок, полученных в модели, можно, однако, утверждать, что мощность современных технических средств воздействия не рассчитана на засев такой интенсивности.

Таким образом, оценки потенциального ослабления интенсивности градобитий показывают, что воздействие на градовые процессы (при использовании существующих реагентов) может быть успешным лишь при максимально точном введении реагента в облако.

Главным недостатком приведенной здесь модели является то, что в ней не учитываются отрицательные обратные связи между термогидродинамикой и микрофизикой, точнее осадкообразованием. Отставание крупных капель и ледяных частиц от восходящего потока приводит к уменьшению плавучести облачного воздуха и даже к смене знака вертикальных движений. В квазистационарной модели суперъязычкового облака предприняты попытки пространственно разделить области восходящего потока и осадков. Однако и в этом случае результаты расчетов, более или менее адекватные наблюдениям, достигаются лишь путем «настройки» модели — подбором соответствующих значений эмпирических параметров, не определяемых непосредственно условиями развития процесса. Представляется очевидным, что дальнейший прогресс в исследованиях осадкообразования в

конвективных облаках возможен лишь на пути перехода к нестационарным моделям.

Что касается стационарной модели вынужденных и спонтанных струй, то они могут быть рекомендованы для практических расчетов как дальнобойности струй, так и мощности облаков.

4.5. Использование свободных турбулентных струй при искусственной вентиляции карьеров

Выше проведено сравнение теоретических и экспериментальных траекторий турбулентных струй, создаваемых реактивными двигателями, применительно к задачам вентиляции глубоких карьеров. Рассмотрим теперь эту задачу подробнее.

Для современного этапа развития горнодобывающей промышленности характерно дальнейшее расширение добычи полезных ископаемых открытым способом. Глубина открытых карьеров в настоящее время составляет 300–400 м, проектная глубина эксплуатации карьеров, к сожалению, сопровождается выделением большого количества пыли и вредных примесей (при бурении, взрывах, экскавации пород, использовании автотранспорта и т.д.). Рассеяние примесей обычно происходит за счет естественного воздухообмена. Однако с углублением карьеров увеличивается повторяемость условий, при которых естественная вентиляция оказывается недостаточной, и требуется искусственное проветривание с целью предотвращения опасных для здоровья людей загазованности и запыленности воздуха. Наиболее эффективным средством искусственной вентиляции являются свободные турбулентные струи, создаваемые специальными устройствами. Турбулентная струя, обладающая достаточной мощностью, не только выносит за пределы карьера загрязненный воздух, но и уменьшает термическую устойчивость атмосферы в карьере, способствуя интенсификации естественного воздухообмена.

4.5.1. Расчет накопления примесей в карьере

Строгий расчет накопления и рассеяния примесей в карьере требует использования трехмерных нестационарных моделей. При этом необходимо учитывать геометрию карьера и пространственное распределение источников загрязнения. Такие модели весьма громоздки и являются скорее эвристическими, чем прогностическими.

Рассмотрим упрощенную схему расчета динамики примеси в карьере. Используем одномерное уравнение диффузии примеси в виде

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial z} D \frac{\partial c}{\partial z}, \quad (4.5.1)$$

где $c = c(\tau, z)$ – объемная концентрация примеси, τ – время, D – коэффициент турбулентной диффузии, z – высота.

Аналитическое решение уравнения (4.5.1) удастся получить, задавая распределение концентрации примеси по высоте, например, в виде

$$c = c_0 \exp\left(-\frac{z}{\beta}\right). \quad (4.5.2)$$

Здесь c_0 – концентрация примеси на дне карьера ($z=0$), β – параметр распределения. Величины c_0 и β являются неизвестными функциями времени. Задача состоит в их нахождении.

Найдем производные $\frac{\partial c}{\partial \tau} = \dot{c}$ и $\frac{\partial c}{\partial z}$

$$\dot{c} = \dot{c}_0 \exp(-z/\beta) + c_0 \dot{\beta} \beta^{-2} z \exp(-z/\beta), \quad (4.5.3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} = -\frac{c_0}{\beta} \exp(-z/\beta), \quad (4.5.4)$$

где $\dot{c}_0 = \frac{\partial c_0}{\partial \tau}$, $\dot{\beta} = \frac{\partial \beta}{\partial \tau}$.

Подставим выражения (4.5.3) и (4.5.4) в уравнение (4.5.1) и проинтегрируем его по z от 0 до ∞ .

$$\int_0^{\infty} \dot{c}_0 \exp(-z/\beta) dz + \int_0^{\infty} c_0 \beta \beta^{-2} z \exp(-z/\beta) dz = - \int_0^{\infty} d \left(D \frac{c_0}{\beta} \exp(-z/\beta) \right). \quad (4.5.5)$$

Имея в виду, что $c|_{z=\infty} = 0$, $\frac{\partial c}{\partial z}|_{z=\infty} = 0$, получим

$$\frac{d(c_0 \beta)}{d\tau} = D \frac{c_0}{\beta}. \quad (4.5.6)$$

Величина $D \frac{c_0}{\beta}$ представляет собой диффузионный поток примеси через единичное сечение на дне карьера. Приравняем этот поток к интенсивности источника I , отнесенной к единице площади

$$I = D \frac{c_0}{\beta}. \quad (4.5.7)$$

Поскольку распределение (4.5.2) является квазистационарным, интегрирование дифференциального уравнения (4.5.6) следует выполнять шагами по времени от τ_i до τ_{i+1} , $\tau_{i+1} - \tau_i = \Delta\tau_i$. При этом предполагается, что D_i, D_{i+1} и I_i, I_{i+1} измеряются или предвычисляются. Тогда с учетом выражения (4.5.7) после интегрирования уравнения (4.5.6) получим

$$c_{0,i+1} \beta_{i+1} - c_{0,i} \beta_i \approx \bar{I} \cdot \Delta\tau_i \approx \frac{I_{i+1} + I_i}{2} \Delta\tau_i. \quad (4.5.8)$$

Исключая последовательно с помощью выражения (4.5.7) из уравнения (4.5.8) величины β и c_0 , получим

$$c_{0,i+1} = \sqrt{\left[c_{0,i}^2 + \frac{I_i}{2D_i} (I_{i+1} + I_i) \Delta\tau_i \right] \frac{J_{i+1} D_i}{J_i D_{i+1}}}, \quad (4.5.9)$$

$$\beta_{i+1} = \sqrt{\left[\beta_i^2 + \frac{D_i}{2I_i} (I_{i+1} + I_i) \Delta\tau_i \right] \frac{D_{i+1} J_i}{D_i J_{i+1}}}. \quad (4.5.10)$$

Подставляя два последних выражения в распределение (4.5.2), можно рассчитать профиль концентрации примеси.

4.5.2. Перестройка поля температуры в карьере при работе струйной установки

Возможны различные варианты искусственной вентиляции. Если струйная установка располагается на дне карьера, то создаваемая ею струя уносит загрязненный воздух вверх. На смену ему в карьер вне струи опускается чистый воздух из окружающей среды. Возможен другой вариант. Струйная установка размещается на борту карьера. Тогда струя чистого воздуха направляется вглубь, разбавляя и вытесняя загрязненный примесями воздух. В любом случае струя должна обладать достаточной мощностью, чтобы проходить через толщу карьера. Далее для определенности будем рассматривать первый вариант.

Будем полагать, что опускание воздуха в карьере вне струи на фиксированном уровне происходит с одинаковой скоростью по всему сечению. Если скорость опускания достаточно велика, чтобы можно было пренебречь турбулентным перемешиванием, то изменение температуры на произвольном уровне можно описать выражением

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = w^*(\gamma - \gamma_a), \quad (4.5.11)$$

где γ и γ_a – градиенты температуры в карьере и сухоадиабатический соответственно. Сухоадиабатический градиент γ_a используется в случае, если воздух не насыщен водяным паром. Если в карьере наблюдается туман (смог), то γ_a следует заменить на $\gamma_{ва}$ – влажноадиабатический градиент. Скорость опускания воздуха вне струи w^* определяется из условия баланса масс

$$w^* = -\frac{m}{\rho_{\text{возд.}} A}. \quad (4.5.12)$$

Здесь $m = m(z)$ – секундная масса струи, $A = A(z)$ – площадь сечения карьера. (Строго говоря, следовало бы в формулу (4.5.12) вместо A

подставить разность площадей сечения карьера и струи ($A - A_c$). Обычно $A \gg A_c$.

Непосредственное интегрирование уравнения (4.5.11) затруднено тем, что $\gamma = \gamma(\tau)$ и $m = m(z, \tau)$. Задача может быть решена при численном интегрировании системы уравнений вида (4.5.11), составленных для различных уровней z в карьере, с шагом по времени $\Delta\tau$, в течение которого γ и $m(z)$ можно считать постоянными.

Перестройка профиля температуры в карьере заканчивается, когда воздух, находившийся в исходный момент на верхней границе карьера, достигает его дна. Если принять, что температура воздуха, поступающего в карьер, остается постоянной и равной температуре на борту T_b , то к этому времени во всем карьере устанавливается градиент $\gamma = \gamma_a$. Время полной вентиляции карьера τ_b определяется выражением

$$\tau_b = - \int_0^H \frac{dz}{w}, \quad (4.5.13)$$

где H – глубина карьера.

Траектория струи, ее дальнобойность и распределение по высоте секундной массы сильно зависят от метеорологических условий, в частности, от температурной стратификации. С усилением устойчивости атмосферы высота подъема струи резко уменьшается.

Рассмотрим ситуацию, когда дальнобойность струи меньше глубины карьера. Это не означает, что искусственная вентиляция в этом случае не имеет смысла. Во-первых, в результате действия струи происходит перемешивание воздуха в объеме карьера, что приводит к выравниванию концентраций примесей. Во-вторых, – и это главное – появление замкнутой циркуляции с восходящим потоком в зоне струи и компенсирующим нисходящим в свободном пространстве карьера способствует уменьшению устойчивости. Уменьшение устойчивости в нижней части карьера приводит к увеличению высоты подъема струи, то есть к увеличению толщины слоя, в котором осуществляется перестройка температурного поля; это снова

способствует увеличению высоты подъем струи и так далее, до тех пор пока струя не выйдет за пределы карьера. С этого момента начинается собственно вентиляция карьера.

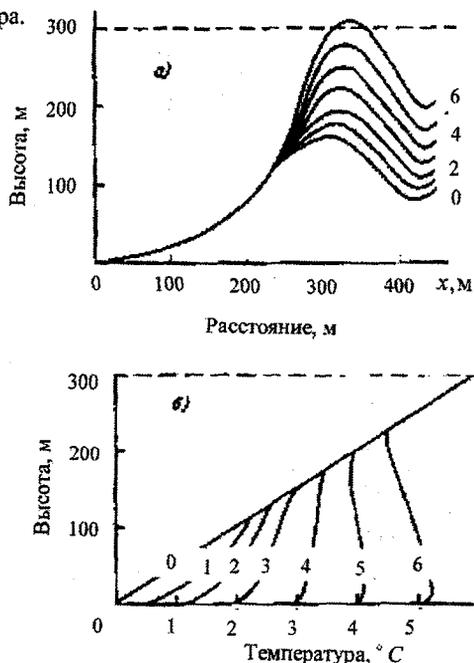


Рис. 4.5.1. Траектории оси струи реактивного двигателя (а) и профили температуры в карьере (б) в различные моменты времени.

0 – в исходный момент, 1 – через 100 с, 2 – через 200 с, 3 – через 350 с, 4 – через 650 с, 5 – через 1050 с, 6 – через 1650 с.

На рис. 4.5.1 приведены результаты численного моделирования изменений траекторий струи и стратификации температуры в карьере при работе струйной установки. В качестве струйной установки задавался реактивный двигатель. Предполагалось, что двигатель на дне карьера, а струя его направлена горизонтально. Карьер задан в виде перевернутого усеченного конуса с радиусом дна 100 м, верхнего сечения 500 м и глубиной 300 м.

Струя, проходя достаточно большой путь в нижней части карьера, вовлечет в себя большую массу загрязненного воздуха, затем под действием сил плавучести она искривляется и поднимается вверх. В условиях

устойчивой стратификации струя совершает затухающие колебательные движения.

В исходный момент времени, характеризующийся инверсионным распределением температуры во всем карьере ($\gamma = -0,02 \text{ К} \cdot \text{м}^{-1}$), максимальная высота подъема струи (точнее – ее оси) не превышает 160 м. На начальном этапе происходит быстрое изменение температуры в нижней части карьера. Через 17 мин. после включения двигателя температура воздуха на дне карьера повысилась на 4 К, а стратификация в слое толщиной около 200 м вместо инверсионной стала изотермической. Примерно через полчаса после начала работы струя достигла верхней границы карьера. Дальнейшее изменение профиля температуры связано с сухоадиабатическим нагреванием воздуха, затекающего в карьер с его борта. Принималось, что температура на борту остается постоянной.

Представленные на рис. 4.5.1 результаты дают максимально возможную оценку изменения температуры. В действительности за счет теплообмена опускающегося воздуха со стенками карьера изменения температуры будут несколько меньше.

4.5.3. Туман в карьере

Часто загрязнение в карьере связано с образованием тумана (смога). Туман в карьере является своеобразным индикатором устойчивого состояния воздуха. В то же время, отражая коротковолновую солнечную радиацию днем и поглощая излучаемую Землей длинноволновую радиацию ночью, туман уменьшает суточную изменчивость температуры, способствуя сохранению устойчивости и накоплению загрязнений в карьере – вплоть до катастрофических концентраций. Рассеяние тумана приводит к возникновению местной горно-долинной циркуляции и способствует естественному выносу загрязнений.

Накоплению вредных примесей в карьере может способствовать и наличие взвешенной пыли в пространстве карьера. Избавиться от облака пыли можно, лишь выбросив загрязненный воздух за пределы карьера. В

случае тумана затраты могут быть существенно меньше – следует лишь рассеять туман. Если рассеяние тумана осуществить в утренние часы, то далее под действием солнечной радиации будет происходить процесс естественной вентиляции.

Сравнительно успешно решается задача рассеяния переохлажденных туманов путем внесения гомеопатических доз реагентов, создающих ледяную фазу. Просветление тумана происходит за счет перегонки воды с большого числа капель на ограниченное число ледяных кристаллов. Рассеяние ледяных туманов с помощью реагентов оказывается невозможным. «Теплые» туманы коллоидально устойчивы. Пока еще не отработаны технологии, позволяющие их эффективно рассеивать.

В условиях карьеров, когда туман локализован в сравнительно небольшом пространстве, ограниченном твердыми стенками, рассеяние его может быть осуществлено не путем конденсационно-коагуляционных процессов, а путем нагревания и испарения тумана. При этом реализуется принцип, так называемого, динамического метода рассеяния туманов.

Если при работе струйной установки в тумане создается нисходящий поток, то в результате адиабатического нагревания капли (ледяные частицы) станут испаряться. Пренебрегая механизмом турбулентного перемешивания, изменение влажности в опускающемся тумане можно найти из определения влажноадиабатического градиента

$$\gamma_{ва} = \gamma_a - \frac{L}{c_p} \frac{dq'}{dz}, \quad (4.5.13)$$

где q' – удельная влажность тумана, связанная с обычно используемой абсолютной влажностью соотношением $q' = q / \rho_{возд.}$. Тогда, пренебрегая изменением плотности воздуха с высотой,

$$\frac{dq}{dz} = \frac{c_p \rho_{возд.}}{L_{п-в}} (\gamma_a - \gamma_{ва}). \quad (4.5.14)$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение (4.5.14) от исходной влажности тумана q_H на произвольной высоте z_H до текущих значений q и z , получим

$$q = q_n + \frac{c_p \rho_{\text{возд.}}}{L_{\text{п-в}}} (\gamma_a - \gamma_{\text{ва}}) (z - z_n). \quad (4.5.15)$$

Положив в уравнении (4.5.15) $q=0$, найдем путь h , на котором происходит полное испарение тумана,

$$h = z_n - z = \frac{q_n L_{\text{п-в}}}{c_p \rho_{\text{возд.}} (\gamma_a - \gamma_{\text{ва}})}. \quad (4.5.16)$$

Легко видеть, что h определяется прежде всего водностью тумана и температурой и давлением воздуха в той мере, в какой от этих величин зависит $\gamma_{\text{ва}}$. Значения $\gamma_{\text{ва}}$ могут быть рассчитаны по формуле (3.1.17). При низких температурах $\gamma_{\text{ва}} \rightarrow \gamma_a$, поэтому в этих условиях полное испарение тумана становится практически невозможным. Разумеется, по мере опускания водность тумана уменьшается в соответствии с формулой (4.5.15).

Другой характеристикой условия испарения тумана может служить $\Delta T_{\text{мин}}$ — минимальный нагрев воздуха, необходимый для того, чтобы вся жидкокапельная влага превратилась в насыщенный пар. Величины $\Delta T_{\text{мин}}$ и h связаны между собой простым соотношением

$$\Delta T_{\text{мин}} = h \gamma_{\text{ва}}. \quad (4.5.17)$$

Трансформацию полей температуры и водности легко рассчитать, выбирая на оси z ряд точек, отождествляя их с соответствующими слоями воздуха. В каждой точке в исходный момент зададим температуру $T_{n,j}$ и водность $q_{n,j}$, $j = \overline{1, k}$, k — число точек. Тогда на i -том шаге по времени $\Delta \tau_i$ изменение высоты $\Delta z_{ji} = w_j^* \Delta \tau_i$, а температуры $\Delta T_{ji} = \Delta z_{ji} \gamma_{\text{ва}}$. Соответственно $z_j = z_{nj} + \sum_{i=1}^j \Delta z_{ji}$, $T_j = T_{nj} + \sum_{i=1}^j \Delta T_{ji}$. Одновременно по формуле (4.5.15) рассчитаем q_j . Если для какой-либо точки выполняется условие $z_{n,j} - z_j \geq h$, то далее при расчетах для этого слоя $q_j = 0$, а $\Delta T_{ji} = \Delta z_{ji} \gamma_a$.

Результаты расчетов просветления тумана в карьере при использовании в качестве струйной установки реактивного двигателя схематически представлены на рис. 4.5.2. Расчеты выполнены в двух вариантах: в исходный момент туман заполняет чашу карьера и туман наблюдается как в карьере, так и вне его.

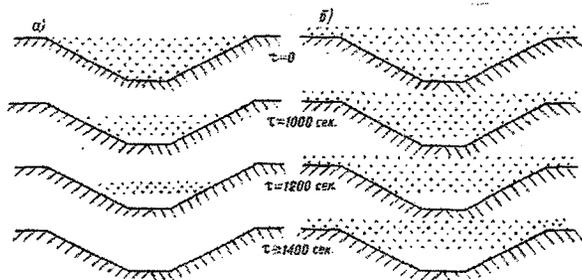


Рис. 4.5.2. Изменение толщины слоя тумана в карьере при работе струйной установки. а – в исходный момент туман наблюдается только в чаше карьера; б – туман в карьере и вне его.

В первом случае на смену воздуху, выброшенному из карьера струей, сверху поступает воздух, свободный от тумана. Толщина слоя тумана уменьшается как за счет опускания его верхней границы, так и за счет испарения при повышении температуры. При этом полное испарение тумана достигается сначала в придонной части карьера, где скорость опускания максимальна. Через некоторое время верхняя и нижняя границы тумана смыкаются. Туман в карьере исчезает. Время необходимое для этого оказывается существенно меньше, чем время полной замены воздуха во всем объеме карьера.

Во втором случае туман непрерывно поступает в карьер из окружающей среды. Туман прогревается, опускаясь вниз, но полностью он испаряется только в нижней части карьера, где он проходит путь по вертикали равный или больший, чем h_j . Нижняя граница тумана поднимается на высоту $H - h_n$, где h_n – путь, который проходит туман от уровня борта карьера до его полного испарения. Далее, независимо от

продолжительности работы струйной установки, толщина слоя, свободного от тумана, не меняется.

4.5.4. Анализ экспериментов по использованию свободных струй для рассеяния туманов в карьере

Выше в качестве характеристики интенсивности тумана использовалась его водность. В реальных условиях измерение водности связано с известными трудностями. Поэтому распространенной характеристикой прозрачности тумана является метеорологическая дальность видимости. Для нахождения связи между водностью и дальностью видимости часто используют формулу Траберта [К или Б]. Для характерных значений концентрации и размеров капель в тумане эта связь представляется формулой

$$L = 33q^{-2/3}, \quad (4.5.18)$$

где L в метрах, если q в $\text{г} \cdot \text{м}^{-3}$.

Формула (4.5.18) позволяет перейти от измеренной дальности видимости к водности

$$q = \sqrt{\left(\frac{33}{L}\right)^3}. \quad (4.5.19)$$

Зная распределение L по глубине карьера, можно рассчитать распределение q .

Вид формулы (4.5.18) свидетельствует о том, что при $q \rightarrow 0$ дальность видимости $L \rightarrow \infty$. В реальных условиях помутнение атмосферы обусловлено наличием не только тумана, но и взвешенной пыли. Это следует иметь в виду при сравнении временных ходов рассчитанной и наблюдаемой дальностей видимости. Для того чтобы рассчитанные значения не отличались в предельном случае (при $q \rightarrow 0$) от реальных, введем в расчет некоторую фиктивную фоновую водность – эквивалент ослабления прозрачности воздуха взвешенными твердыми примесями. Если, например, вне карьера без

тумана фоновая видимость $L_{\Phi} \neq \infty$, то фиктивная фоновая видимость может быть рассчитана по формуле (4.5.19), как $q_{\Phi} = (33/L)^{3/2}$.

Теперь в качестве водности тумана следует задавать величину $q_{\Sigma} = q + q_{\Phi}$.

При нагревании тумана испарение его происходит неравномерно по глубине карьера, поэтому нужно уметь рассчитывать дальность видимости по заданному лучу визирования, проходящему через слои тумана разной водности и, следовательно, разной плотности.

Для тумана переменной вдоль луча визирования водности $q = q(l)$ можно записать условие

$$\int_0^L q^{2/3} dl = 33. \quad (4.5.20)$$

Здесь искомая дальность видимости является верхним пределом интегрирования. От приращения dl можно перейти к приращению dz , используя простое соотношение

$$dz = (\sin \alpha) dl, \quad (4.5.21)$$

где α – угол наклона луча визирования к горизонту.

Для практического определения дальности видимости луч визирования нужно разбить на ряд участков Δl_j , в пределах которых водность меняется сравнительно мало, найти для каждого участка значение q_j и суммировать произведения $q_j^{2/3} \cdot \Delta l_j$, пока не будет достигнуто равенство

$$\sum_{j=1}^j S_j^{2/3} \cdot \Delta l_j = 33. \quad (4.5.22)$$

Тогда метеорологическая дальность видимости определяется как

$$L = \sum_{j=1}^j \Delta l_j. \quad (4.5.23)$$

Ниже рассматриваются примеры анализа результата экспериментов по рассеянию тумана в глубоком угольном карьере, расположенном вблизи г. Челябинск. В этих опытах в качестве струйной установки использовался

тепловой метеотрон, представляющий собой систему горелок, в которых сжигалось углеводородное топливо. Общая мощность тепловыделения составляла 240 МВт. Опыты проводились в карьере, представляющим собой чашу неправильного овального сечения глубиной около 320 м и общим объемом примерно $0,6 \text{ км}^3$. Для удобства расчетов карьер представлялся в виде перевернутого усеченного конуса с радиусом верхнего сечения 1400 м, нижнего 100 м и глубиной 300 м.

Для полной замены воздуха в таком карьере струей метеотрона заданной мощности требуется 7,5 часа, причем только на замену воздуха в верхнем 200-метровом слое необходимо шесть часов непрерывной работы. Время включения метеотрона в опытах составляло от 20 мин до 1,5 ч. Таким образом, в этих опытах не могло быть речи о сколько-нибудь значительном выбрасывании воздуха из объема карьера, тем не менее, в ряде случаев были получены существенно положительные результаты рассеяния тумана.

Рассмотрим два опыта, один из которых может служить примером определенно успешного воздействия, другой — примером, когда непосредственный эффект воздействия оказался несущественным.

На рис. 4.5.3 приведены результаты измерений температуры воздуха, метеорологической дальности видимости на борту и на дне карьера во время воздействий (с небольшим интервалом до и после). Здесь же приведены расчетные кривые изменения температуры на дне карьера и дальности видимости.

Разности температур борт-дно до начала опытов были примерно одинаковы, в обоих случаях на борту карьера наблюдался небольшой ветер, а на дне ветра не было. Для того и другого случая характерно резкое увеличение температуры на дне карьера во время работы метеотрона. Однако если считать положительным результатом рассеяние тумана, то в опыте а) этот результат был достигнут, а опыт б) оказался безуспешным. Правда, опыт б) продолжался несколько меньше, а исходная плотность тумана была больше, но как показал анализ, не эти обстоятельства определили различие результатов. Выше отмечалось, что величина h , а следовательно, ΔT_{\min}

сильно зависит от температуры. Опыт а) проведен при температурах воздуха, близких к 0°C , а опыт б) при значительно более низких температурах.

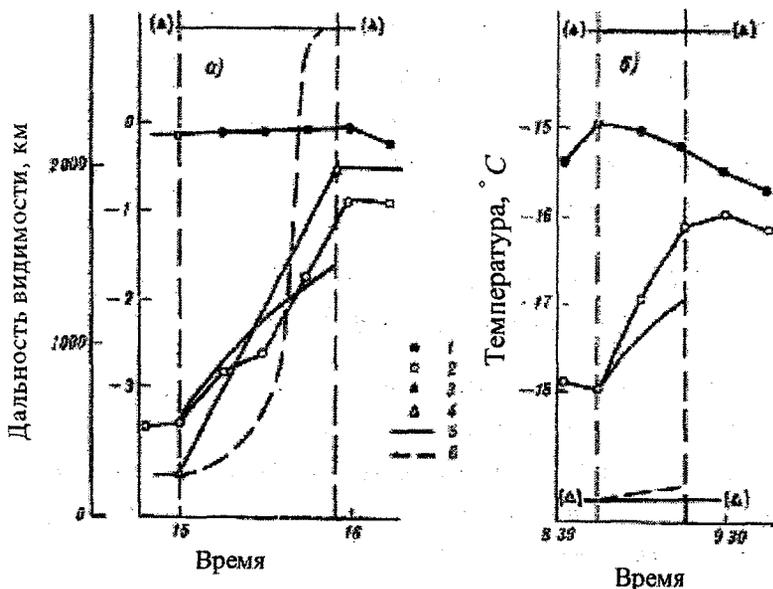


Рис. 4.5.3. Результаты экспериментов по рассеянию тумана в карьере с помощью метеотрона

1,2 – температура воздуха на борту и дне карьера соответственно; 3,4 – метеорологическая дальность видимости на борту и дне. 1...4 – результаты измерений; 5 – расчет хода температуры на дне карьера; 6 – расчет изменения наклонной дальности видимости в карьере. Вертикальными прерывистыми линиями отмечены время начала и конца воздействия.

Переходя от дальности видимости к влажности тумана, получим для опыта

а) перед воздействием $q = 0,053 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$, что соответствует

$$\Delta T_{\text{min, борт}} = 0,15^{\circ} \text{C} \text{ и } \Delta T_{\text{min, дно}} = 0,19^{\circ} \text{C}. \text{ Те же величины для опыта б)}$$

составляют: $q = 0,21 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$, $\Delta T_{\text{min, борт}} = 1,57^{\circ} \text{C}$ и $\Delta T_{\text{min, дно}} = 1,95^{\circ} \text{C}$. Для

того чтобы туман полностью испарился в первом случае он должен

опуститься на 25...30 м, а во втором на 200...250 м. По расчетам в опыте а)

туман испарился на дне карьера уже через 7...8 мин, а полностью во всем карьере через 50 мин после начала воздействия. В опыте б) туман испарялся слишком медленно, за время опыта оптическая плотность тумана практически не изменилась. Как показывают расчеты, для полного испарения тумана в опыте б) установка должна работать около 5,5 часа.

Сравнивая приведенные на рис. 4.5.3 рассчитанные и экспериментальные значения температуры воздуха и дальности видимости, можно отметить их вполне удовлетворительное соответствие друг другу.

4.6. Разрушение конвективных облаков искусственно созданными нисходящими потоками

В 60-е...70-е годы прошлого столетия сообщалось о проведении успешных опытов коллективами исследователей ИПГ (г. Москва), ЦАО (г. Долгопрудный), ВГИ (г. Нальчик) по разрушению конвективных облаков искусственно созданными нисходящими потоками. Нисходящие движения воздуха инициировались путем сброса с самолета в предвершинную часть облака мелкоразмолотых порошков. В других случаях направленный вниз импульс скорости создавался струей газа от двигателя реактивного самолета при кабрировании на больших углах тангажа. Положительный эффект достигался и при обстреле вершин облаков фугасными снарядами.

Для теоретического обоснования эффекта воздействия использовалась теория спонтанных конвективных струй. При этом некоторые исследователи (Вульфсон Н. И., Левин Л. М.) исходили из того, что обычно устойчивость атмосферы к влажноадиабатическому процессу растет с высотой. Вследствие этого интенсивность спонтанных нисходящих струй должна быть больше, чем восходящих облачных. Это заключение представляется сомнительным. Кроме того, в этих рассуждениях не учитывалась роль встречного восходящего потока как добавочного сопротивления. «Пробиваясь» сквозь восходящий поток в облаке, нисходящая струя испытывает существенно большее сопротивление, чем собственно облачная, формирующаяся при практически отсутствующих вертикальных потоках. Существенно и то, что

водность конвективных облаков меньше адиабатической. Поэтому при опускании облачного воздуха испарение капель может происходить раньше, чем струя достигнет нижней границы облака. Опускание ненасыщенного воздуха внутри облака во влажнонеустойчивом, но обычно сухоустойчивом слое – процесс конвективно устойчивый, то есть препятствующий развитию нисходящего потока.

В то же время в работах сотрудников ЦАО (Гайворонский И. И. и др.) было отмечено, что при введении грубодисперсного гидрофильного аэрозоля в облаке, помимо направленного вниз импульса скорости, создаются условия благоприятные для развития гравитационной коагуляции. Сравнительно крупные капли, образовавшиеся на частичках реагента, при падении быстро укрупняются, увеличивая, в свою очередь, отрицательную плавучесть воздуха и способствуя усилению нисходящего потока. Действительно, известно, что совокупность взвешенных капель может двигаться относительно окружающего воздуха с большей скоростью, чем отдельно взятая капля. Благодаря этому более крупные капли не могут «выпасть» из объема, в котором они локализованы, но в то же время стремятся занять место в его фронтальной части. Здесь они встречаются с мелкокапельной фракцией встречного потока, коагулируют с ней и увеличиваются в размере. Возникающая в результате трения торообразная циркуляция увлекает часть капель по периферии объема вверх. В верхней центральной части тора капли попадают в зону нисходящих движений и отсюда снова возвращаются во фронтальную часть. Таким образом, происходит непрерывный захват облачной влаги и перераспределение ее по всему объему. Водность в объеме может также расти за счет улавливания капель, выпадающих из турбулентного следа. Увеличение водности определяет появление дополнительной отрицательной плавучести, необходимой для преодоления встречного восходящего потока. Кроме того, дополнительный запас влаги обеспечивает влажноадиабатическое изменение температуры вплоть до нижней границы облака и – под облаком. Таким образом, и избыточная

водность, и отрицательный перегрев способствуют развитию нисходящего потока.

Ниже оценивается роль различных факторов, влияющих на развитие нисходящих потоков.

4.6.1. Расчетная схема

Рассмотрим схему расчета термодинамических параметров некоторого ограниченного объема воздуха (термика), содержащего взвешенную примесь и имеющего отличающиеся от окружающей среды температуру и общее влагосодержание. Простая модель термика изложена в разд. 3.1. Распространим тот же подход на случай термика, развивающегося во встречном восходящем потоке воздуха в облаке. Будем рассматривать термик, имеющий форму эллипсоида вращения вокруг вертикальной оси. При этом горизонтальная полуось эллипсоида представляет собой радиус его миделева сечения. Этот радиус принимается в качестве характерного размера термика. Обозначим его через R .

Масса воздуха в термике

$$m = K\pi R^3 \rho'_{\text{возд.}}, \quad (4.6.1)$$

где K – коэффициент деформации ($K = 4/3$ – для сферического термика, $K < 4/3$ – для сплюснутого эллипсоида, $K > 4/3$ – для вытянутого вдоль оси z эллипсоида), $\rho'_{\text{возд.}}$ – плотность воздуха в термике.

Будем рассматривать вертикальное движение термика, пренебрегая инерционностью его в горизонтальном направлении. Для удобства направим ось z вниз. В этом случае при движении термика к земной поверхности

$w = \frac{dz}{dt} > 0$. Если термик пробивается через встречный вертикальный поток,

скорость которого $w^* < 0$, то изменение массы воздуха в нем при перемещении относительно земли

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dz} = \frac{1}{m} \frac{dm}{dl} \frac{dl}{dz} = \frac{c}{R} \frac{w - w^*}{w}, \quad (4.6.2)$$

где l – путь, который термик проходит относительно воздуха.

Общая масса термика определяется суммой масс воздуха m и взвешенной примеси M . В свою очередь

$$M = M_0 + m q'_B, \quad (4.6.3)$$

где M_0 – масса сброшенного реагента, q'_B – удельная водность термика.

Изменение количества движения для термика запишем в виде

$$d[(m + M)w] = w^* dm + w^* dM + [F_{a.c.} + F_A] \frac{dz}{w}. \quad (4.6.4)$$

Здесь сила аэродинамического сопротивления

$$F_{a.c.} = -C_{a.c.} \rho_{возд.} \frac{(w - w^*)^2}{2} \pi R^2, \quad (4.6.5)$$

а сила плавучести

$$F_A = -mg \left[\frac{T'_v - T_v^*}{T_v^*} - \frac{M_0}{m} - (q'_B - q'^{*}_B) \right]. \quad (4.6.6)$$

В этих выражениях $C_{a.c.}$ – коэффициент аэродинамического сопротивления; T' и T^* – температуры воздуха в термике и в облаке по высоте z , q'^{*} – удельная водность вне термика (в облаке) на высоте z .

В выражении (4.6.4) первое и второе слагаемые справа учитывают изменение количества движения в термике за счет присоединения к нему массы воздуха dm и облачных капель dM , движущихся со скоростью внешнего потока w^* . Изменение количества движения за счет присоединения массы капель dM в виду его малости далее пренебрежем.

Изменение влагосодержания в термике определяется механизмами вовлечения и коагуляции.

$$d(m(S' + q'_B)) = (S'^* + q'^{*}_B) dm + m(q'_B)_K, \quad (4.6.7)$$

где S' и S'^* – массовые доли водяного пара в термике и в облаке соответственно; $(dq'_B)_K$ – изменение водности термика за счет механизма коагуляции.

Уравнение (4.6.7) справедливо при предположении, что относительная влажность в облаке и термике составляет 100% (в термике до тех пор, пока $q'_B > 0$).

Изменение $(dq'_B)_K$ с высотой можно рассчитать, рассматривая термик как гигантскую каплю, обладающую некоторым интегральным коэффициентом захвата Э. Тогда по аналогии с выкладками разд. 2.3

$$\left(\frac{dq'_B}{dz}\right)_K = \frac{\mathcal{E}}{m} \pi R^2 \rho_{\text{возд.}}^* q_B^{*c} \frac{w-w^*}{w}. \quad (4.6.8)$$

Уравнение для изменения полной энергии термика имеет вид

$$d \left[m \left(c_p T' - gz + \frac{w^2}{2} - L_{\text{п-в}} q'_B \right) \right] = \left(c_p T^* - gz + \frac{w^{*2}}{2} - L_{\text{п-в}} q_B^{*c} \right) dm - L_{\text{п-в}} m (dq'_B)_K \quad (4.6.9)$$

Решая уравнения (4.6.4), (4.6.7) и (4.6.9) относительно dw/dz , dq'_B/dz и dT'/dz с учетом выражений (4.6.1), (4.6.2), (4.6.5) (4.6.6) и (4.6.8), получим

$$\frac{dw}{dz} = \left[-\frac{(w-w^*)^2}{Rw} \left(C + \frac{C_{\text{а.с.}} T'}{2K T^*} \right) - \frac{g}{w} \left(\frac{T'_v - T_v^*}{T_v^*} - \frac{M_0}{m} - (q'_B - q_B^{*c}) \right) \right] \cdot \left(1 + \frac{M}{m} \right)^{-1}, \quad (4.6.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{dq'_B}{dz} = & \frac{C}{R} \frac{(w-w^*)}{w} \left[\frac{\mathcal{E} q_B^{*c} T'}{CK T^*} - \frac{\mu_1 (E' - E^*)}{\mu_2 p} - (q'_B - q_B^{*c}) \right] - \\ & - \frac{\mu_1 E'}{\mu_2 p} \left(\frac{L_{\text{п-в}}}{R_{\text{п}} T'^2} \frac{dT'}{dz} - \frac{1}{p} \frac{dp}{dz} \right) \end{aligned} \quad (4.6.11)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT'}{dz} = & \gamma_a - \frac{C}{R} \frac{(w-w^*)}{w} \left[T' - T^* + \frac{1}{2c_p} (w^2 - w^{*2}) - \frac{L_{\text{п-в}}}{c_p} (q'_B - q_B^{*c}) \right] + \\ & + \frac{L_{\text{п-в}}}{c_p} \left(\frac{dq'_B}{dz} - \left(\frac{dq'_B}{dz} \right)_K \right) - \frac{w}{c_p} \frac{dw}{dz} \end{aligned} \quad (4.6.12)$$

Здесь μ_1 и μ_2 — молярные массы водяного пара и воздуха, E' и E — давление насыщенного водяного пара при температурах T' и T^* , p — давление воздуха на высоте z .

Уравнения (4.6.1), (4.6.2), (4.6.10) ... (4.6.12) вместе с уравнениями статики, состояния и зависимости давления насыщенного водяного пара от температуры составляют замкнутую систему, решение которой позволяет получить распределение основных параметров термика вдоль его траектории.

В качестве граничных условий задаются параметры термика на некотором уровне (уровне сброса реагента). При расчетах учитываются распределения с высотой температуры T^* , скорости w^* и влажности q_v^* в облаке. Предполагается, что характеристики облака со временем не меняются, обратные связи между термиком и облаком отсутствуют.

Ниже при численном моделировании не учитывались виртуальные добавки к T' и T^* и слагаемые, учитывающие вклад кинетической энергии.

4.6.2. Результаты расчетов

В качестве экспериментальных констант в расчетной схеме используются четыре коэффициента: вовлечения C , аэродинамического сопротивления $C_{a.c.}$, деформации K и захвата \mathcal{E} . Истинные значения каждого из этих коэффициентов неизвестны. Более того, можно ожидать, что эти коэффициенты не остаются постоянными, а являются функциями концентрации и вида примеси, размеров термика, влажности и спектра капель облака и т.п. В ходе численного моделирования значения этих коэффициентов и параметры облачной струи варьировались в разумных пределах. Ниже приводятся некоторые результаты расчетов.

Остановимся сначала на результатах расчетов, выполненных для гипотетического облака с постоянными по высоте вертикальной скоростью, влажностью и градиентом температуры. Моделировался сброс в такое облако массы M_0 порошкообразного реагента, который, падая и распыляясь в

воздухе, формировал искусственный термик радиусом R_0 с начальной скоростью движения относительно земли w_0 .

Результаты представлены на рис. 4.6.1, 4.6.2. Характерным для всех приведенных вариантов расчета является следующее. На начальном этапе под действием силы аэродинамического сопротивления скорость термика резко убывает до нуля и меняет знак. Встречным восходящим потоком термик увлекается вверх. За счет вовлечения масса и размеры термика постепенно растут. С подъемом вверх увеличивается отрицательная разность температур термик – облако (при фиксированном $\gamma = 0,007 \text{ К} \cdot \text{м}^{-1}$ выше 6 км стратификация становится влажноустойчивой). Водность растет как за счет конденсации, так и за счет механизма коагуляционного захвата. Интенсивность последнего определяется значением \mathcal{E} , которым определяется в конечном счете и дальнейшая судьба термика. (рис. 4.6.1).

При сравнительно больших значениях \mathcal{E} (кривые 1...4) избыточная водность ($q'_v - q_v$) сначала быстро растет. Совместное действие отрицательного перегрева и избыточной водности способствует торможению термика. В результате на некоторой высоте скорость термика снова меняет знак – термик начинает опускаться. Движение вниз осуществляется теперь за счет избыточной водности, разность температур термик – облако при опускании сначала оказывается положительной. При дальнейшем движении вниз термик попадает во влажнестойчивый слой, он становится холоднее окружающей среды. Отрицательный перегрев и сохранившаяся избыточная водность создают значительную отрицательную плавучесть – термик движется сквозь облако с ускорением. Заметим, что избыточная водность термика от момента зависания убывает: интенсивность механизмов перемешивания и испарения оказывается больше, чем механизма захвата. Отличие кривых 1 ... 4 между собой состоит в том, что обращение термика происходит на разных высотах – тем выше, чем меньше \mathcal{E} .

При $\mathcal{E} = 0,2$ (кривые 5) термик зависает под действием избыточных перегрева и водности на высоте около 10,5 км. Затем он начинает опускаться,

но несколько ниже скорость снова меняет знак – термик поднимается и, как показывает расчет, намечается тенденция к его зависанию на некоторой высоте. При этом радиус термика продолжает расти. Его увеличение до размеров, превышающих разумные размеры облака, служит основой для прекращения дальнейших расчетов.

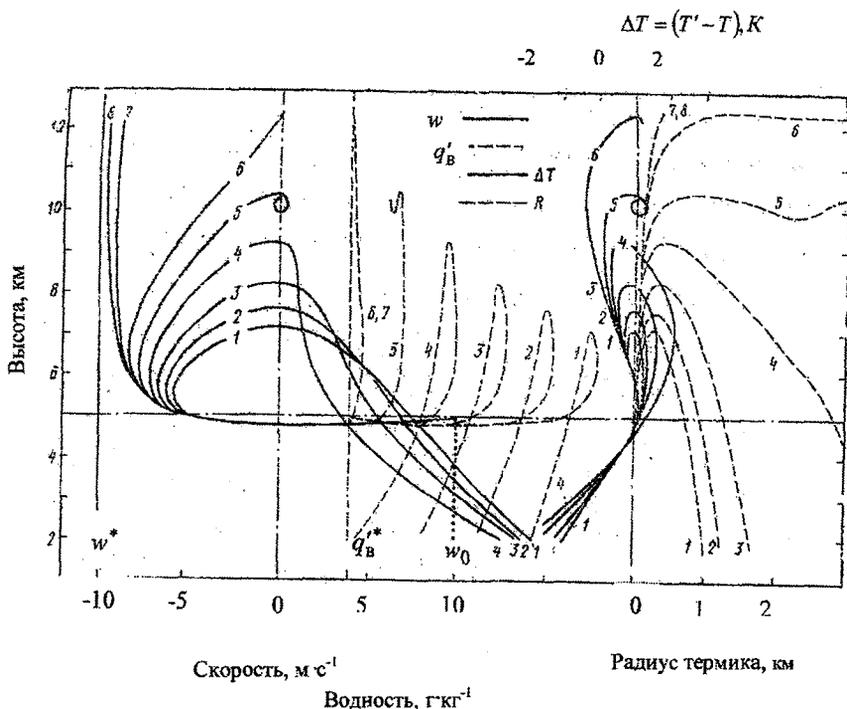


Рис. 4.6.1. Результаты расчетов параметров термика: скорости w , водности q'_B , перегрева относительно окружающей среды $T - T'$ и радиуса R в гипотетическом облаке с $w^* = -10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $q_B^* = 4 \text{ г} \cdot \text{кг}^{-1}$, $\gamma = 0,007 \text{ К} \cdot \text{м}^{-1}$ при различных значениях коэффициента захвата \mathcal{E} : 1 – $\mathcal{E} = 1$; 2 – $\mathcal{E} = 0,8$; 3 – $\mathcal{E} = 0,6$; 4 – $\mathcal{E} = 0,4$; 5 – $\mathcal{E} = 0,2$; 6 – $\mathcal{E} = 0$; 7 – $\mathcal{E} = 0$, $T' - T = 0$; 8 – $\mathcal{E} = 0$, $q'_B - q_B^* = 0$. Во всех случаях $C = 0,22$, $C_{a.c.} = 0,1$, $K = 4/3$. Исходные параметры термика: $w_0 = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $M_0 = 50 \text{ кг}$, $R_0 = 4,5 \text{ м}$, $m_0 = 200 \text{ кг}$, $q'_B = 4 \text{ г} \cdot \text{кг}^{-1}$.

Кривые 6 рассчитаны при $\mathcal{E} = 0$. Как и следовало ожидать, в этом случае термик не пробивает облако. Впрочем, несколько неожиданным оказался выход термика на режим зависания. Можно было ожидать, что при «выключенном» механизме захвата отрицательная плавучесть будет

компенсироваться действием силы аэродинамического сопротивления, и термик выйдет на режим движения с постоянной скоростью. Более детальный анализ, однако, показывает, что роль сил аэродинамического сопротивления с высотой уменьшается быстрее, чем отрицательной плавучести. На высоте зависания радиус термика растет, а избыточные водность и отрицательный перегрев уменьшаются – термик рассеивается.

Кривые 7, 8 являются тестовыми. Как и в варианте 6, расчет ведется при $\Xi = 0$. В варианте 7 для термика искусственно задается $\Delta T(z) = T' - T = 0$. При этом на этапе подъема водность термика больше водности облака вследствие конденсации водяного пара при охлаждении. Термик обладает отрицательной плавучестью, скорость его меньше скорости потока в облаке. Вариант 8 рассчитывается при $T' - T = 0$ и $q'_v - q_v = 0$. В этом случае, как и следовало ожидать, w асимптотически стремится к w^* .

Рис. 4.6.2 иллюстрирует чувствительность модели к изменчивости других эмпирических коэффициентов – при постоянном значении коэффициента захвата. Выберем в качестве «опорного» вариант 1, для которого приняты те же значения эмпирических коэффициентов, что и на рис. 4.6.1. Увеличение коэффициента аэродинамического сопротивления (вариант 2) до значения $C_{a.c.} = 0,5$ – скорее максимального, чем характерного – приводит к значительному увеличению высоты обращения движения. Тем не менее, термик уверенно пробивает восходящий поток. Увеличение коэффициента перемешивания, то есть увеличение скорости роста радиуса термика приводит к зависанию и в конечном итоге к рассеянию термика (вариант 3).

Варианты 4 и 5 отличаются от 1 значениями коэффициентов деформации K . $K < 4/3$ соответствует сплюсненному, а $K > 4/3$ вытянутому вдоль направления движения термикам. При выбранных для вариантов 4 и 5 значениях K эффективные поперечные сечения термиков вдвое больше (для $K=0,47$) и вдвое меньше (для $K=3,8$) площади сечения сферического термика. Как показывает анализ, наиболее благоприятными оказываются условия для сплюсненного термика: увеличение площади захвата при сохранении объема приводит к резкому увеличению водности. Вытянутый

вдоль оси движения термик практически зависает на высоте 10 км, так как избыточная водность в нем оказывается сравнительно небольшой.

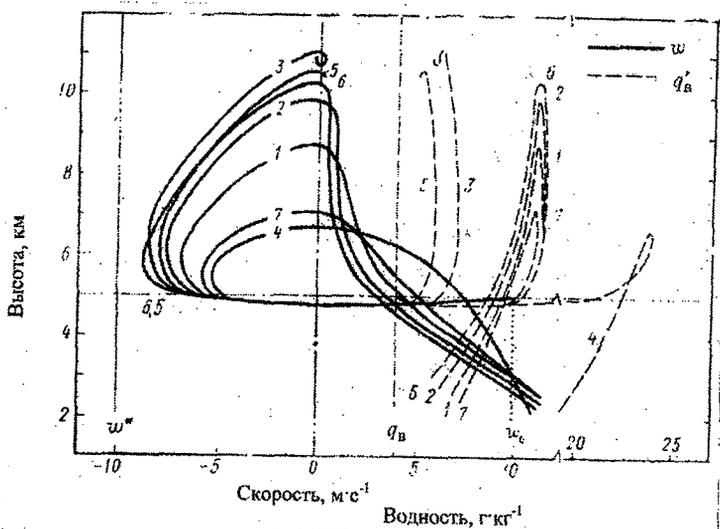


Рис. 4.6.2. Результаты расчета скорости w_0 и водности q'_v термика при фиксированном значении $Z=0,5$ и различном сочетании эмпирических коэффициентов, массы реагента и исходных размеров термика

Результаты расчета, представленные кривыми 6, 7, показывают роль сброшенного реагента. Если отвлечься от некоторого противоречия, заключающегося в том, что при $M_0 = 0$ задается сравнительно большой коэффициент захвата, то из сравнения кривых 1 и 6, 7 можно заключить, что изменение массы реагента не играет решающей роли в «судьбе» термика. Практически это означает, что эффект воздействия может заключаться в формировании в облаке некоторого локального объема, обладающего способностью захвата облачной влаги с интенсивностью большей, чем это предполагает механизм вовлечения. По-видимому, такие условия создаются и при подрыве фугасных зарядов, и при кабрировании скоростных самолетов в облаках.

Возможность реализации механизма захвата продуктами взрыва представляется очевидной. В случае кабрирования можно предположить, что

специфический характер поля скоростей в струе реактивного самолета способствует созданию условий накопления наиболее крупных капель в лобовой части струи. Накопление капель определяет обособление объема, т.е. превращение его в термик, обладающий теми же свойствами, что и образовавшийся при сбрасывании реагента. При этом, как видно из сравнения кривых 6 и 7, чем больше исходный размер термика, тем легче он «пробивает» облако.

На рис. 4.6.3 приведены результаты модельных расчетов для облаков с типичными распределениями с высотой скорости восходящих токов и влажности. Параметры облаков рассчитаны по струйной модели конвекции — разд. 3.3. Для анализа выбраны два облака. Облако 1 развивается при значительной влажнонеустойчивости атмосферы. Оно характеризуется сравнительно большими вертикальными токами и высокой влажностью. Другое облако 2 развивается в условиях небольшой энергии неустойчивости, вертикальные токи и влажность в нем существенно меньше, чем в облаке 1. Для удобства сравнения уровни конденсации для обоих облаков на рис. 4.6.3 совмещены.

Моделировался сброс реагента (формирование термика) на уровне верхней границы облаков ($w^* = 0$). В облаке 1 при $\mathcal{E} = 0,2$ термик монотонно движется к земле — сравнительно медленно в верхней части и с ускорением ниже уровня максимальных скоростей. Уже в средней части облака при хорошей скорости опускания размеры термика становятся соизмеримыми с размерами облака — термик подавляет восходящий поток. Этот случай в рамках модели является примером успешного воздействия.

В облаке 2, встречая восходящий поток, термик затормаживается, увлекается этим потоком вверх и, замкнув петлю, начинает опускаться. При $\mathcal{E} = 0,2$ опускание идет очень медленно, термик фактически зависает в облаке. Его размеры растут, а контраст между термиком и облаком в полях температуры и влажности уменьшается. Поскольку в реальных условиях длительное зависание термика в верхней части облака практически всегда исключается из-за существующего сдвига ветра, то этот случай можно было

бы квалифицировать как пример неудачного воздействия. Однако в работе [Вульфсон Н. И. и Черенкова Е. Л.], по исходным данным которой рассчитаны параметры облачной струи, для этого случая результаты воздействия характеризуются как положительные («Вершина облака стала плоской, облако приобрело волокнистую структуру. Нижняя часть облака растеклась»). Кривые 2а на рис. 4.6.3 представляют результаты расчетов при $\Xi = 0,3$. Видно, что небольшое увеличение одного из параметров решительно изменяет характер движения моделируемого термика. Таким образом, если постулируемый в модели механизм захвата облачной воды на самом деле имеет место, то интегральный коэффициент захвата, по крайней мере на начальной стадии развития термика, должен быть достаточно большим. Сравнивая результаты расчетов, выполненные для различных облаков, можно заметить, что более мощное и интенсивное облако 1 разрушается при воздействии легче, чем сравнительно вялое, менее мощное облако 2.

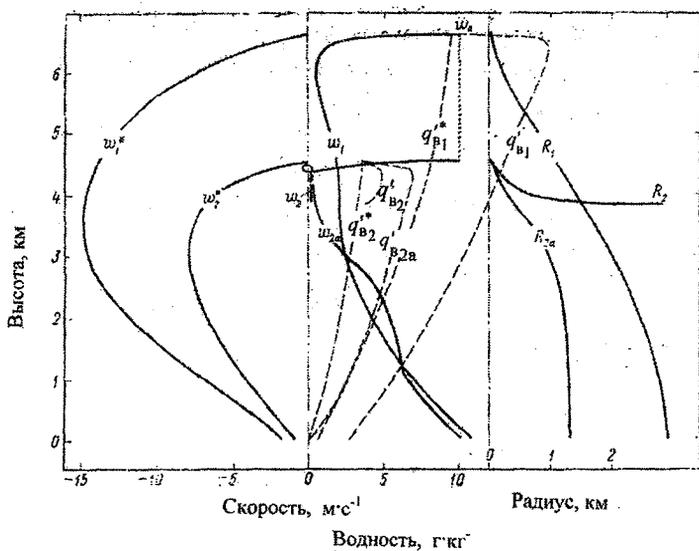


Рис. 4.6.3. Расчеты движения термика для двух облаков с типовыми распределениями скорости восходящих токов и водности с высотой.

Исходные параметры термика: $w_0 = 10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, $K_0 = 4,5 \text{ м}$, $\Xi = 0,2$

Кривые 1 и 2) и $\Xi = 0,3$ (кривые 2а)

Любопытно, что этот парадоксальный на первый взгляд результат хорошо согласуется с результатами наблюдений. В рамках настоящей модели этому факту может быть дано следующее объяснение. Наиболее интенсивное развитие конвективных облаков наблюдается в условиях высокой влажнонеустойчивости, которая в свою очередь, как правило, проявляется при высоких температурах на уровне конденсации. В этих условиях облака характеризуются интенсивными восходящими токами, и, что главное – большой водностью. В дни с низкой температурой и малым влагозапасом на уровне конденсации образуются обыкновенно облака со слабыми вертикальными токами и небольшой водностью. Обе эти ситуации и представлены на рис. 4.6.3. В облаке 1 избыточная водность термика ($q'_B - q_B$) велика, именно она определяет отрицательную плавучесть по всей толще облака. При том же значении \mathcal{E} в облаке 2 максимальная избыточная водность по своему действию эквивалентна отрицательному перегреву в несколько десятых градуса. Она быстро теряется при зависании термика.

Разумеется, представленные здесь расчеты не могут претендовать на прямое сравнение с экспериментом. Этому мешает, как уже отмечалось, и то, что пока еще не известны истинные значения эмпирических коэффициентов, и то, что в ряде случаев существенную роль могут играть обратные связи между термиком и облаком. Последнее становится особенно важным, если учесть, что время развития термика соизмеримо с характерным временем существования конвективной ячейки.

Глава 5. Нестационарная численная модель конвективного облака

Конвективное облако представляет собой пример нестационарного процесса, реалистическое описание которого невозможно без учета многочисленных обратных связей между микрофизикой и гидротермодинамикой. Корректный учет таких связей возможен лишь в рамках нестационарной многомерной модели.

Развитие численных моделей определялось возможностями вычислительной техники – ее быстродействием и объемом памяти. На ранних этапах создавались сравнительно простые модели – одномерные осесимметричные, двумерные, трехмерные с параметризацией микрофизических процессов или без нее с непосредственным решением кинетических уравнений. В связи со стремительным совершенствованием вычислительной техники в настоящее время простые или упрощенные численные модели облаков представляют лишь исторический интерес. Появилась возможность реализовывать достаточно сложные пространственные, нестационарные модели конвективных облаков от кучевых облаков хорошей погоды до кучево-дождевых (грозоградовых). Такие модели записываются уравнениями термогидродинамики и кинетики фазовых превращений в частных производных. Решение уравнений осуществляется в узлах регулярной сетки. Часто метод реализации таких моделей называют сеточным. Ниже приводится система уравнений и примеры реализации одной из таких моделей.

5.1. Общая характеристика модели

Модель предназначена для изучения динамики конвективных облаков – от зарождения до разрушения – в режимах естественного развития и при воздействии кристаллизующими реагентами. Одной из задач численного моделирования является поиск ответа на вопрос о механизме воздействия на градовые облака: происходит ли при внесении реагента изменение спектров частиц осадков (механизмы конкуренции или общей кристаллизации переохлажден-

ной воды) либо стимулируется ускорение осадкообразования и, как следствие, разрушение облака (динамическое воздействие). В связи с этим в модели осуществляется непосредственное интегрирование кинетических уравнений коагуляции (КУК) для спектров капель и ледяных частиц. КУК решаются совместно с системой уравнений термогидродинамики. Таким образом, модель является нестационарной и четырехмерной в фазовом пространстве: три декартовых координаты и подпространство размеров частиц. Характеристики, определяющие процессы осадкообразования (температура частиц, режимы роста – сухой или мокрый, срыв воды при таянии и др.), рассчитываются непосредственно по текущим данным – без учета «предыстории».

В рассматриваемой модели спектр ОЯК задается постоянным в пространстве и во времени, без учета изменения их концентрации в результате активации.

Моделируемый объем представляет собой параллелепипед в общем случае произвольных размеров и дискретизации. Пространство размеров гидрометеоров разбивается на некоторое число нерегулярных градаций, различных для капель и ледяных частиц.

5.2. Система уравнений

Модель включает трехмерные уравнения термогидродинамики в негидростатическом приближении и кинетические уравнения коагуляции для трехфазной среды.

Выпишем сначала уравнения термогидродинамики:

– уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho_{\text{возд.}}}{\partial \tau} + \frac{\partial (\rho_{\text{возд.}} u_i)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.2.1)$$

– три уравнения движения для составляющих скорости воздушного потока u_i вдоль осей декартовой системы координат x_i

$$\frac{\partial u_i}{\partial \tau} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_{\text{возд.}}} \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \Delta' u_i + F_{K_i} + \delta_{i3} |\bar{g}| \left(\frac{T_v - T_{\text{вф}}}{T_{\text{вф}}} - \frac{q_{\text{в}} + q_{\text{з}}}{\rho_{\text{возд.}}} \right), \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (5.2.2)$$

– уравнение сохранения энергии применительно к возмущению температуры $T'(\tau, x_i) = T(\tau, x_i) - T_{\phi}(x_3)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T'}{\partial \tau} + u_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} = \Delta' T' - u_3 (\gamma_a - \gamma) \frac{T}{T_{\phi}} + \frac{L_{\text{п-в}}}{\rho_{\text{возд.}} c_p} \left(\frac{\partial q_{\text{в}}}{\partial \tau} \right)_{\text{диф.}} + \frac{L_{\text{в-л}}}{\rho_{\text{возд.}} c_p} \left(\frac{\partial q_{\text{л}}}{\partial \tau} \right)_{\text{зам.}} + \\ + \frac{L_{\text{п-л}}}{\rho_{\text{возд.}} c_p} \left(\frac{\partial q_{\text{л}}}{\partial \tau} \right)_{\text{диф.}} + \frac{1}{c_p} u_i \frac{\partial u_i}{\partial \tau} + \frac{\varepsilon_{\tau}}{c_p}, \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

– уравнение баланса массовой доли водяного пара $s = s(\tau, x_i)$

$$\frac{\partial s}{\partial \tau} + u_j \frac{\partial s}{\partial x_j} = \Delta' s - \frac{1}{\rho_{\text{возд.}}} \left(\frac{\partial q_{\text{в}}}{\partial \tau} \right)_{\text{диф.}} - \frac{1}{\rho_{\text{возд.}}} \left(\frac{\partial q_{\text{л}}}{\partial \tau} \right)_{\text{диф.}}, \quad (5.2.4)$$

– уравнение баланса турбулентной энергии

$$\frac{\partial b}{\partial \tau} + u_j \frac{\partial b}{\partial x_j} = \Delta' b + K \Psi^2 - c_1 b^2 / K. \quad (5.2.5)$$

В этих уравнениях для сокращения записи использованы обозначения, принятые в тензорном анализе: если в каком-либо слагаемом уравнения индекс (буква, но не число) встречается дважды, то по этому индексу осуществляется суммирование. В частности,

$$\frac{\partial(\rho_{\text{возд.}} u_i)}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\rho_{\text{возд.}} u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial(\rho_{\text{возд.}} u_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho_{\text{возд.}} u_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho_{\text{возд.}} u_3)}{\partial x_3}.$$

Адвективные члены (вторые слагаемые слева в уравнениях (5.2.2) ... (5.2.5)) для каждой из переменных u_i , T' , s , $b = \varphi$ имеют вид

$$u_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = u_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}.$$

Оператор $\Delta' \varphi$ описывает турбулентный перенос при рассчитываемых компонентах тензора коэффициента турбулентности k_{ij}

$$\Delta' \varphi = \frac{\partial}{\partial x_i} k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} k_{ij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_1} k_{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} k_{12} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_1} k_{13} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_2} k_{21} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} k_{22} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} k_{23} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_3} k_{31} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} k_{32} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} k_{33} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3}$$

Вернемся снова к уравнениям (5.2.1) ... (5.2.5). В этих уравнениях

$\rho_{\text{возд.}} = \rho_{\text{возд.}}(\tau, x_i)$ – плотность воздуха. В уравнении (5.2.2) первое слагаемое в правой части учитывает возмущение давления, то есть отклонение давления от фонового, задаваемого граничными условиями,

$$p' = p'(\tau, x_i) = p(\tau, x_i) - p_{\phi}(x_3).$$

Предварительные оценки показали, что при больших вертикальных скоростях, характерных для мощных конвективных облаков, заметную роль играет сила Кориолиса. Слагаемые F_{K_i} соответствуют составляющим этой силы по координатным осям. Если ось x_1 направлена, как обычно, по широте с запада на восток, ось x_2 – по меридиану к северу, а ось x_3 в зенит, то

$$F_{K_1} = 2\omega(u_2 \sin \varphi - u_3 \cos \varphi), \quad (5.2.6)$$

$$F_{K_2} = -2\omega u_1 \sin \varphi, \quad (5.2.7)$$

$$F_{K_3} = 2\omega u_1 \cos \varphi, \quad (5.2.8)$$

где ω – угловая скорость вращения Земли, φ – географическая широта.

Перемещение облака в поле ветра может привести к тому, что оно выйдет за пределы моделируемого пространства. Для «удержания» облака внутри расчетной сетки следует изменять, как геометрию пространства, так и направление осей x_1 и x_2 . Если направление осей x_1 и x_2 повернуто на угол α относительно стандартной системы координат, то выражения (5.2.6) ... (5.2.8) принимают вид

$$F_{K_1} = 2\omega(u_2 \sin \varphi - u_3 \cos \varphi \cos \alpha), \quad (5.2.9)$$

$$F_{K_2} = 2\omega(-u_1 \sin \varphi + u_3 \cos \varphi \sin \alpha), \quad (5.2.10)$$

$$F_{K_3} = 2\omega(u_1 \cos \alpha - u_2 \sin \alpha) \cos \varphi, \quad (5.2.11)$$

Последнее слагаемое в уравнении (5.2.2) представляет собой архимедово ускорение. Здесь δ_{i3} – символ Кронекера $\left(\delta_{i3} = \begin{cases} 1, & i = 3 \\ 0, & i \neq 3 \end{cases} \right)$, $|\vec{g}| = g$ – ускорение свободного падения, T_v и $T_{v\phi}$ – виртуальные температуры в моделируемом объеме и фоновая, $T_v = T_v(t, x_i)$, $T_{v\phi} = T_{v\phi}(x_3)$, q_v и q_d абсолютные влажность и ледность соответственно.

В уравнении (5.2.3) второе слагаемое справа отражает локальное изменение температуры, вызываемое вертикальным перемещением сухого воздуха. Третье, четвертое и пятое слагаемые учитывают влияние тепла фазовых превращений пар-вода, вода-лед и пар-лед соответственно. Шестое слагаемое отражает изменение температуры, связанное с эффектами торможения или ускорения воздуха. Последнее слагаемое учитывает вклад диссипации турбулентной энергии (превращение ее в тепловую).

Два последних слагаемых в правой части уравнения (5.2.4) учитывают изменение массовой доли водяного пара в результате диффузионного роста (испарения) содержащихся в облаке капель и ледяных частиц.

Как и во всех предыдущих уравнениях, левая часть уравнения (5.2.5) отражает трансформацию турбулентной энергии. Первое слагаемое справа отвечает за турбулентное перемешивание, второе и третье слагаемые соответственно описывают скорость перехода кинетической энергии среднего движения в турбулентную и турбулентной энергии в тепловую. Заметим, что

$$c_1 b^2 / K \approx \varepsilon_T,$$

где c_1 – безразмерный коэффициент; $c_1 = 0,046$.

Коэффициент турбулентности K определяется как

$$K = \frac{1}{9} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 k_{ij}.$$

В силу симметрии матрицы коэффициентов имеем $k_{ij} = k_{ji}$. Тогда

$$K = \frac{1}{9} [k_{11} + k_{22} + k_{33} + 2(k_{12} + k_{13} + k_{23})]. \quad (5.2.12)$$

При расчетах коэффициентов k_{ij} использованы рекомендации Клинго В. В.¹

$$k_{ij} = C_0 L_{ij} \sqrt{b},$$

где C_0 – экспериментальная константа, $C_0 = 0,375$, L_{ij} – компонента тензора масштабов турбулентности

$$L_{ij} = \chi \frac{\Psi \left| \frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} \right|}{\left[\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x_i} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (5.2.13)$$

Здесь χ – постоянная Кармана, $\chi = 0,4$; Ψ – деформационная функция

$$\Psi = \left[2 \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 + \right. \\ \left. + \frac{1,43gk_{33}}{K} \left[\frac{1}{\bar{T}_\Phi} (\gamma - \Gamma) + 0,608 \frac{\partial s}{\partial x_3} \right] \right]^{1/2}, \quad (5.2.14)$$

где γ – градиент температуры в узле сетки, $\Gamma = \gamma_a (\gamma_{ва})$ – сухоадиабатический (влажноадиабатический) градиент температуры, если узел сетки находится вне (внутри) облака.

Приведённая схема расчёта (5.2.12) - (5.2.14) и численные значения параметров рекомендованы Клинго В.В.(1988).

Анализ выражения (5.2.14) показывает, что последнее слагаемое, отражающее роль термической неустойчивости, может на порядок превышать остальные. Вследствие этого при расчетах в неустойчивых слоях происходит турбулизация настолько сильная, что она подавляет развитие конвективного облака. Это обстоятельство очевидным образом противоречит общепринятым представлениям о физике явления. Далее при численном моделировании это слагаемое было исключено. Следует иметь в виду, что при сравнительно

¹ См., например, Клинго В.В., Файзуллин Б. Ш. Труды ИГО. 1988, вып 517, с 43...54.

больших шагах сетки влияние счетной вязкости на результаты расчета оказывается соизмеримым с влиянием физической турбулентности.

Чтобы результаты расчетов удовлетворяли уравнению неразрывности, на каждом временном слое решается диагностическое эллиптическое уравнение для возмущения давления p' (уравнение Пуассона). Трехмерное уравнение Пуассона получается путем дифференцирования по x_i уравнений (5.2.2) с последующим суммированием результатов. При этом в уравнениях (5.2.2) исключаются слагаемые, учитывающие адвекцию, турбулентное перемешивание и кориолисову силу.

$$\nabla^2 p' = \frac{1}{\Delta t} \left[\frac{\partial(\rho_{\text{возд.}} u_1')}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho_{\text{возд.}} u_2')}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho_{\text{возд.}} u_3')}{\partial x_3} \right] + g \frac{\partial}{\partial x_3} \left[\rho_{\text{возд.}} \left(\frac{T_v - T_{\text{вф}}}{T_{\text{вф}}} - \frac{q_v - q_d}{\rho_{\text{возд.}}} \right) \right] \quad (5.2.15)$$

Согласование результатов расчетов по уравнениям (5.2.2) и (5.2.15) достигается путем последовательных итераций. Найденные при очередной итерации значения составляющих скорости u_i' используются для расчета значений p' . Итерации повторяются до тех пор, пока разница между двумя последующими значениями давления станет меньше наперед заданной допустимой погрешности.

Таким образом система уравнений (5.2.2) ... (5.2.5), (5.2.12) и (5.2.15) становится замкнутой относительно термогидродинамических характеристик облака при условии, что известны поля водности q_v , ледности q_d и их производных по времени.

Обратимся теперь к схеме расчета микрофизических характеристик облака. В каждой точке счетного пространства в любой момент времени водность и ледность определяются как интеграл от функций распределения капель и ледяных частиц (ЛЧ) по их характеристикам: размерам, плотности, формам др. Упрощая задачу, будем считать, что как капли, так и ледяные частицы, имеют сферическую форму и постоянную плотность (ρ_v, ρ_d). В этом случае

можно ограничиться распределением капель и ЛЧ по их размерам. Плотность распределения облачных частиц является функцией трех декартовых координат, размеров частиц и времени ($\eta = \eta(x_i, i = 1, 2, 3; r_{в(л)}, \tau)$).

Имея в виду, что речь определенно идет о нестационарном процессе, будем использовать сокращенную запись $\eta(x_i, i = 1, 2, 3, r_{в(л)}; \tau) = \eta(r_{в(л)})$. В таком случае

$$q_{в} = \int_0^{\infty} n_{в} \eta_{в}(r_{в}) \frac{4}{3} \pi r_{в}^3 \rho_{в} dr_{в}, \quad (5.2.16)$$

$$q_{л} = \int_0^{\infty} n_{л} \eta_{л}(r_{л}) \frac{4}{3} \pi r_{л}^3 \rho_{л} dr_{л}, \quad (5.2.17)$$

где $n_{в}, n_{л}$ – объемные концентрации капель и ледяных частиц соответственно.

Перейдем от относительной функции распределения к счетной – числу капель (или ЛЧ), приходящихся на интервал размеров от $r_{вк} - \Delta r_{вк} / 2$ до $r_{вк} + \Delta r_{вк} / 2$,

$$\varphi(r_{вк}) = n_{в} \int_{r_{вк} - \Delta r_{вк} / 2}^{r_{вк} + \Delta r_{вк} / 2} \eta(r_{в}) dr_{в}. \quad (5.2.18)$$

Аналогично для ледяных частиц

$$\varphi(r_{лк}) = n_{л} \int_{r_{лк} - \Delta r_{лк} / 2}^{r_{лк} + \Delta r_{лк} / 2} \eta(r_{л}) dr_{л}. \quad (5.2.19)$$

Здесь «к» – порядковый номер интервала (градации) размеров, на которые разбивается весь спектр возможных радиусов капель (ледяных частиц).

Спектры капель и ЛЧ разбивают произвольным образом на неравные градации – более узкие для мелких частиц и более широкие для крупных, обычно разные для капель и ЛЧ. Что касается $\Delta r_{к}$, то при заданных значениях $r_{к}$ они могут быть найдены из условий определения границ интервалов.

при осаждении на нее пара. Для нахождения величины $\left(\frac{dr_{\text{в}}}{dr}\right)_{\text{диф}}$ используется полученное ранее уравнение (2.1.37). Скорость диффузионного роста ледяной частицы можно рассчитать по уравнению (2.2.28), если принять $a = c = r_{\text{д}}$. Необходимые значения относительной влажности f находятся из уравнения (5.2.4) с учетом $f = s/s_{\text{нас.}}(T)$, $s_{\text{нас.}}(T)$ – массовая доля насыщенного водяного пара при температуре T .

Вторые слагаемые в правых частях уравнений (5.2.22) и (5.2.23) отражают влияние различных механизмов трансформации спектров капель и ледяных частиц. Для жидкокапельной части облака это

- увеличение числа капель радиуса r при коагуляции более мелких капель $I_{\text{в1}}$,
- вымывание капель радиуса r при коагуляции с более крупными каплями $I_{\text{в2}}$,
- замерзание капель в переохлажденной части облака $I_{\text{в3}}$,
- коагуляция капель с ледяными частицами $I_{\text{в4}}$,
- дробление капель при превышении ими критического размера $I_{\text{в5}}$,
- образование капель при таянии ледяных частиц в теплой части облака $I_{\text{в6}}$,
- образование капель при срыве водяной пленки с градин, растущих в мокром режиме $I_{\text{в7}}$,
- образование капель при активации ядер конденсации $I_{\text{в8}}$,

На трансформацию спектра ледяных частиц оказывают влияние следующие механизмы:

- коагуляция ледяных частиц с ледяными частицами $I_{\text{л1}} + I_{\text{л2}}$,
- образование ледяных частиц в результате замерзания капель $I_{\text{л3}}$,
- коагуляция ледяных частиц с каплями $I_{\text{л4}}$,
- таяние ледяных частиц $I_{\text{л5}}$,

— мультипликация ледяных частиц в результате раскалывания переохлажденных капель $I_{лб}$.

Таким образом $N_{в} = 8$, $N_{л} = 6$.

Выпишем некоторые из соотношений для $I_{в}$ и $I_{л}$. Вывод соотношений для $I_{в1}$ и $I_{в2}$ приведен в разд. 2.

$$I_{в1} + I_{в2} = \frac{1}{2} \int_0^{r_{в}} \beta_{вв}(r_{в} - r'_{в}, r'_{в}) \varphi(r_{в}) \varphi(r_{в} - r'_{в}) dr'_{в} - \varphi(r_{в}) \int_0^{\infty} \beta_{вв}(r_{в}, r'_{в}) \varphi(r'_{в}) dr'_{в} \quad (5.2.24)$$

$$I_{л1} + I_{л2} = \frac{1}{2} \int_0^{r_{л}} \beta_{лл}(r_{л} - r'_{л}, r'_{л}) \varphi(r_{л}) \varphi(r_{л} - r'_{л}) dr'_{л} - \varphi(r_{л}) \int_0^{\infty} \beta_{лл}(r_{л}, r'_{л}) \varphi(r'_{л}) dr'_{л} \quad (5.2.25)$$

$$I_{в4} = -\varphi(r_{в}) \int_0^{\infty} \beta_{вл}(r_{в}, r_{л}) \varphi(r_{л}) dr_{л}, \quad (5.2.26)$$

$$I_{л4} = \frac{1}{2} \int_0^{r_{л}} \beta_{лв}(r_{л} - r_{в}, r_{в}) \varphi(r_{в}) \varphi(r_{л} - r_{в}) dr_{л} - \varphi(r_{л}) \int_0^{\infty} \beta_{лв}(r_{л}, r_{в}) \varphi(r_{в}) dr_{в} \quad (5.2.27)$$

В уравнениях (5.2.24) ... (5.2.27) через $\beta_{...}$ (.....) обозначены ядра кинетических уравнений (интегралов столкновений). Например, для взаимодействия «капля-капля» выражение для ядра имеет вид

$$\beta_{вв}(r_{в} - r'_{в}, r'_{в}) = \pi \left(\sqrt[3]{r_{в}^3 - r_{в}'^3} + r'_{в} \right)^2 \cdot \left| V(r'_{в}) - V \left(\sqrt[3]{r_{в}^3 - r_{в}'^3} \right) \right| \cdot \mathfrak{E} \left(\sqrt[3]{r_{в}^3 - r_{в}'^3}, r'_{в} \right).$$

Аналогичные уравнения можно записать для других взаимодействий.

Уменьшение числа капель в результате замерзания в переохлажденной части облака

$$I_{в3} = -\theta(T_0 - T) \frac{4}{3} \pi r_B^3 J_L(T) \varphi(r_B), \quad (5.2.28)$$

где $\theta(T_0 - T)$ – функция Хэвисайда; $\theta(T_0 - T) = \begin{cases} 1, & \text{если } (T_0 - T) > 0 \\ 0, & \text{если } (T_0 - T) < 0 \end{cases}$, $J_L(T)$

– скорость нуклеации ледяных зародышей в переохлажденной воде в результате гомогенного и гетерогенного процессов (см. формулу (1.11.14)).

Очевидно, что $I_{л3} = -I_{в3}$.

Изменение спектра в результате дробления капель

$$I_{в5} = \int_{r_{кр}}^{\infty} \xi_5(r_B, r'_B) \varphi(r'_B) dr'_B, \quad (5.2.29)$$

где ξ_5 – вероятность образования капель размером r'_B при дроблении капель радиусом $r'_B > r_{кр.в}$.

Аналогично

$$I_{в6} = \theta(T - T_0) \int_0^{\infty} \xi_6(r_B, r'_л) \varphi(r'_л) dr'_л, \quad (5.2.30)$$

$$I_{в7} = \theta(T_0 - T) \int_0^{\infty} \xi_7(r_B, r'_л, q_B, T) \varphi(r'_л) dr'_л, \quad (5.2.31)$$

где $\xi_6(r_B, r'_л)$ и $\xi_7(r_B, r'_л, q_B, T)$ – вероятности образования капель радиуса $r'_л$ при таянии ледяных частиц и срыве капель с поверхности градин соответственно.

Что касается активации ядер конденсации, то, строго говоря, для расчета этого механизма кинетические уравнения (5.2.22) и (5.2.23) следует дополнить еще одним уравнением – кинетическим уравнением для спектра ОЯК ($\varphi(r_{ояк})$). Однако в связи с большой скоростью изменения радиусов ОЯК при пересыщениях для решения КУК пришлось бы задавать очень маленький шаг по времени, что резко увеличивает общее время реализации модели. С другой стороны, большая скорость роста ОЯК позволяет оперировать с их равновесными размерами, соответствующими текущему пересыщению. Ниже при численных экспериментах использовалась схема расчёта актива-

ции ОЯК, аналогичная предложенной в книге Когана и др. («Численное моделирование облаков», 1984). Предполагается, что распределение ОЯК по эффективным радиусам является логарифмически нормальным и не зависящим от пространственных координат и времени.

Активация ОЯК определяется по значениям пересыщения в узлах сетки.

Граничные и начальные условия

При моделировании мезомасштабных метеорологических процессов естественными граничными и начальными условиями являются параметры процессов синоптического масштаба. При этом предполагается, что последние за время развития конвективных облаков сохраняются неизменными. Поэтому в качестве граничных условий задаются фактические (или предвычисленные на период развития конвекции) вертикальные профили давления, температуры, влажности и ветра. Результаты зондирования интерполируются в узлы сетки, при этом значения p_ϕ и T_ϕ адаптируются между собой и к шаблону счетной сетки таким образом, чтобы выполнялись уравнения статики и состояния при численном дифференцировании.

Для температуры, влажности и концентраций частиц ставятся условия типа «открытой границы».

Для уравнения Пуассона решается задача Неймана с нулевыми граничными условиями, т.е. поддерживается нулевой градиент p и постоянные значения u_i на всех боковых границах. При этом на всех боковых границах $u_3 \equiv 0$. На верхней и нижней границах параллелепипеда для u_1 и u_2 задаются условия скольжения ($\partial u_{1,2} / \partial x_3 = 0$).

Для начала развития конвекции формируется тепловой импульс. С этой целью в узлах сетки $4 \cdot 4 \cdot 2$ задается перегрев ΔT_0 . При этом перегретый объем размещается вблизи подстилающей поверхности по оси x_3 в центре счетной области (по осям x_1 и x_2), либо на ее наветренной стороне.

Выходные параметры модели

Результаты расчетов спектров капель и ледяных частиц в узлах сетки используются для вычисления радиолокационной отражаемости в соответствии с выражением

$$\eta^* = \int_0^{\infty} \sigma(r_B, \lambda) dr_B + \int_0^{\infty} \sigma(r_L, \lambda) dr_L, \quad (5.2.32)$$

где $\sigma(r_B, \lambda)$ и $\sigma(r_L, \lambda)$ – поперечники обратного рассеяния на длине волны λ для капель и ледяных частиц соответственно.

На нижней границе моделируемого пространства выдаются двумерные поля потоков массы дождя \dot{M}_d и града \dot{M}_g (ледяных частиц радиусом больше 3 мм), потоков кинетической энергии дождя \dot{K}_d и града \dot{K}_g , интегральных за время процесса масс M_d и M_g и кинетических энергий дождя и града K_d и K_g , отнесенных к единичной площади поверхности, а также общей массы дождя TM_d и града TM_g , выпадающих из облака.

Поток кинетической энергии града определяется выражением

$$\dot{K}_g = \int_0^{\infty} \varphi(r_L) m_L \frac{V^2(r_L)}{2} V(r_L) dr_L. \quad (5.2.33)$$

Аналогично рассчитывается \dot{K}_d .

5.3. Результаты численного моделирования

Первые численные эксперименты на основе изложенной выше модели были проведены в начале 90-х годов прошлого века. Моделируемое пространство задавалось в виде параллелепипеда с горизонтальными гранями 30 км и высотой 15 км. Шаг сетки по горизонтальным осям равнялся 1,0 км, а по вертикали 0,4 км. Пространство размеров гидrometeorov было разбито на 40 нерегулярных градаций, различных для капель и ледяных частиц.

5.3.1. Динамика конвективного облака в штилевых условиях

Распределение фоновой температуры задавалось сухобезразличным в слое от земной поверхности до 1,5 км; влажнонеустойчивым ($\gamma = 8 \text{ К км}^{-1}$) от 1,5 до 10,5 км; выше – изотермическим. Фоновая относительная влажность линейно возрастала от 50 % у поверхности до 70 % на высоте 1,5 км, выше оставалась постоянной. Для инициализации конвекции на двух приземных уровнях 0,2 и 0,6 км в четырех центральных узлах в исходный момент ($\tau = 0$) задавался перегрев $T' = 0,5 \text{ К}$.

Последовательные стадии развития облака представлены на рис. 5.3.1. Здесь для разных моментов времени приведены осевые сечения облака в плоскости $X_1 O X_3$. На оси X_3 (высота) отмечены значения температуры на уровнях излома градиентов и для наглядности положение нулевой изотермы. Слева на разрезах показаны поля водности q_v , q_l и $\lg(\eta)$, справа – возмущения температуры в облаке относительно фоновой и проекция вектора скорости воздушного потока на вертикальную плоскость $X_1 O X_3$.

Первый разрез (рис. 5.3.1а) отражает раннюю стадию формирования облака. В верхней части облака четко выделяется ядро с большим перегревом и торообразной циркуляцией. В нижней части развивается турбулентный след с вертикальными токами, достигающими $10 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$, но со сравнительно небольшой еще водностью ($q_v < 1 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$). В верхней части облака $q_v > 3 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$, ледяных частиц еще нет, радиолокационная отражаемость (РЛО) не превышает порогового значения 10^{15} см^{-1} – «на экране локатора» облако еще не наблюдается.

Следующий разрез (рис. 5.3.1б) характеризует облако в момент, предшествующий выпадению осадков. Точнее говоря, осадки в облаке уже сформировались: граница ледяной фазы опустилась ниже нулевой изотермы, появление зоны повышенной отражаемости с $\eta > 10^{-9} \text{ см}^{-1}$ свидетельствует о наличии здесь крупных частиц осадков. Верхняя часть облака – выше 9 км – полностью закристаллизована.

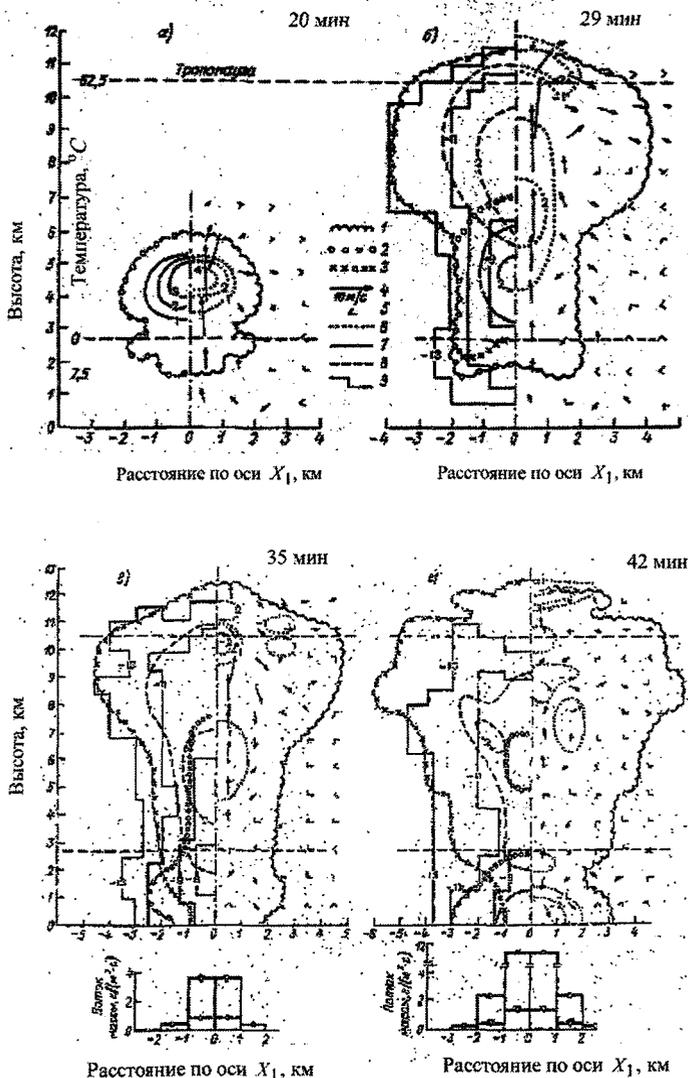


Рис. 5.3.1. Динамика конвективного облака

1 — внешний контур облака; 2,3 — границы распространения водяной и ледяной фаз (кривые 1,2,3 соответствуют изолиниям $0 < q_v + q_d, q_v, q_d \leq 0,01 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$); 4 — масштаб вектора скорости воздушного потока; 5 — направление потока для узлов, в которых скорость меньше 1 м/с ; 6 — изменение возмущения температуры; 7, 8 — изолинии водности и ледности в $\text{г} \cdot \text{м}^{-3}$; 9 — изолинии логарифма отражаемости $\lg \eta$ в см^{-1} .

Вблизи оси облака практически по всей его высоте наблюдается восходящий поток, максимум скорости которого на высотах 8 ... 9 км превысил 20 м с⁻¹.

Рис. 5.3.1в отражает стадию выпадения града. Здесь РЛО достигает своего максимального значения (более 10⁻⁸ см⁻¹). Восходящие токи сохраняются в средней и верхней частях облака. На рисунке внизу – под облаком – приведено распределение потоков массы дождя и града на поверхности земли. Как легко видеть, на этой стадии интенсивность града существенно больше, чем дождя.

На 42-ой минуте (рис. 5.3.1г) выпадение осадков из облака продолжается. Зона повышенной отражаемости опускается под облако. Однако интенсивность градобития уменьшилась, основной вклад в осадки и отражаемость дает дождь. Впрочем, интенсивность дождя уже ослабевает. Большая часть облака охвачена нисходящими токами – облако разрушается. В предвершинной части облака на рис. 5.3.1в,г можно заметить неподдающееся физической интерпретации чередование областей положительного и отрицательного перегрева и соответствующих изменений скорости потока. Вероятно, появление этих очагов связано с неполной монотонностью численной схемы переноса, в частности, с большими пространственными шагами вычислительной сетки.

Общая динамика полей водности и ледности и характеристик осадков представлена на рис. 5.3.2. На рис. 5.3.2а отражено изменение со временем распределения по вертикали суммарной водности и ледности $q_v + q_l$ на оси облака. Здесь же показан ход верхней и нижней границ облака, как изолиний q_v , q_l , $(q_v + q_l) \leq 0,01 \text{ г м}^{-3}$. В головном термике в сравнительно тонком слое формируется зона повышенной водности, переходящая затем при низких температурах в зону повышенной ледности. Однако зона осадков непосредственно связана с вторичным максимумом $q_v + q_l$, формирующимся в турбулентном следе за головным термиком.

На рис. 5.3.2б приведены изменения во времени концентрации града у земли n , его среднего кубического радиуса \bar{r}_3 и потока кинетической энер-

гии града на единичную поверхность \dot{K}_r . Видно, что первыми достигают земли наиболее крупные градины, хотя их концентрация очень мала. Имея в виду, что кинетическая энергия зависит от размера градин сильнее, чем от их концентрации, легко понять, почему максимум \dot{K}_r наблюдается раньше, чем максимум n .

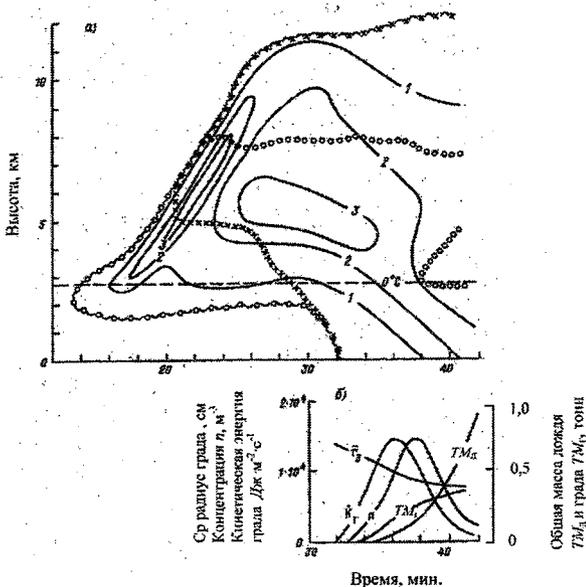


Рис. 5.3.2. Пространственно-временной ход $q_B + q_d$ на оси облака а) и характеристики осадков на земной поверхности б).

Здесь же на графике показано изменение во времени общих масс дождя и града T_{M_d} и T_{M_r} , выпадающих из облака. К моменту времени, которым заканчивается график, выпадение града практически прекратилось. Его полная масса достигает 10^4 т. Выпадение града отмечалось в 12 узлах сетки ($\cong 12 \text{ км}^2$), при этом основная масса града приходится на 4 центральных узла. Суммарная масса дождя к 42 минуте составила около $2 \cdot 10^4$ т, выпавших на площадь 36 км^2 .

5.3.2. Динамика облака, развивающегося в поле ветра

На рис. 5.3.3 и 5.3.4 приводятся результаты численного моделирования конвективного облака, развивающегося в атмосфере с одномерным сдвигом ветра ($dU_{1ф}/dx_2 = 0,0015 \text{ с}^{-1}$). Заданный профиль ветра показан на рис. 5.3.3 слева. Распределения температуры и влажности те же, что и в предыдущем эксперименте. При этом расчеты выполнены в вариантах естественного развития и при воздействии.

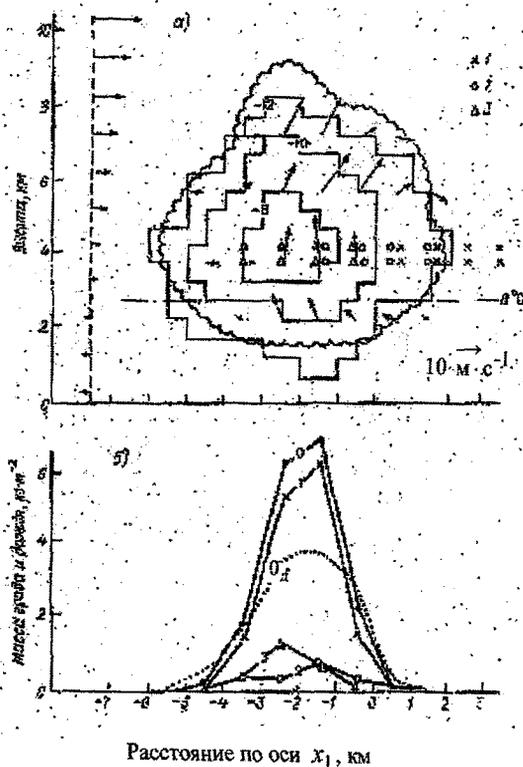


Рис. 5.3.3. Динамика облака в поле ветра. Влияние места внесения реагента на эффективность воздействия.

а – параметры облака в сечении $x_1 O x_3$, естественный процесс, 24,1 мин.; б – распределение массы града и дождя, выпадающих на единицу площади вдоль оси x_1 при $x_2 = -0,5 \text{ км}$, 0 – естественный процесс, град; 0_д – дождь; 1 ... 3 – узлы сетки в осевом сечении, в которых «вносится» реагент (а) и соответствующие распределения массы (б). Остальные обозначения см. рис. 5.3.1.

На рис. 5.3.3а представлено вертикальное сечение облака в плоскости $X_1O X_3$: распределение РЛО и скорости воздушных потоков для естественно-го процесса. В этот момент в облаке отчетливо выделяется зона повышенной отражаемости, однако осадки еще не выпадают: изолиния пороговой водности $0,01 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ практически совпадает с уровнем конденсации. Впрочем, некоторое «провисание» изолинии отражаемости 10^{-12} см^{-1} свидетельствует о том, что отдельные частицы осадков уже опустились через основание облака.

На рис. 5.3.4а,б слева приведены аналогичные разрезы еще для двух моментов времени. Дополнительно к разрезу 5.3.3а здесь нанесены водность и ледность. Разрез на рис. 5.3.4а соответствует моменту максимальной интенсивности конвекции и началу выпадения осадков. Рис. 5.3.4б характеризует структуру облака в стадии разрушения: выпадение осадков к этому моменту практически закончилось, нижняя часть облака охвачена нисходящими потоками. Следует отметить сравнительно небольшие значения максимальных водности и ледности: $3,2$ и $4,5 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$ соответственно. При этом не отмечается тенденции к аккумуляции сконденсированной влаги.

При моделировании воздействия были испытаны различные варианты внесения реагента. Во всех вариантах воздействие начиналось в момент, когда РЛО достигала критического значения 10^{-9} см^{-1} (20 мин.). Внесение реагента (точнее, ледяных частиц) осуществлялось со скоростью $1,67 \cdot 10^5 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$, что при воздействии в течении 1 мин. обеспечивало концентрацию 10^7 м^{-3} . Ввод реагента имитировался в $4 \times 4 \times 2$ узлах счетной сетки: по оси X_2 симметрично относительно центрального сечения, по оси X_3 на двух соседних уровнях в диапазоне температур $265 \dots 261 \text{ К}$. Выбор узлов по оси X_1 варьировался. Расчеты выполнены для трех вариантов: воздействие на подветренную периферию облака – в зону слабого радиозоха (вариант 1), в узлы сетки симметричные относительно центра исходного теплового импульса и моделируемого пространства (вариант 2) и непосредственно под зону повышенной РЛО – ближе к наветренной части облака (вариант 3). Локализация узлов внесения реагента в плоскости $X_1O X_3$ показана на рис. 5.3.3а.

Общее представление о результатах воздействия дает рис. 5.3.36, на котором показано распределение вдоль оси X_1 массы града, выпавшего на единичную площадь к 36 минуте – времени окончания расчетов по вариантам. Для естественного процесса градообразования (вариант 0) максимальное количество града около $6 \text{ кг} \cdot \text{м}^{-2}$ смещено на 1,5 .. 2,5 км от центра моделируемого пространства влево, как и зона повышенной отражаемости. Воздействие в варианте 1 практически не повлияло на распределение выпавшего града. Воздействия в вариантах 2 и 3 оказались весьма удачными и практически идентичными: масса выпавшего града уменьшилась на порядок.

На рис. 5.3.4а и 5.3.4б представлены синхронные осевые сечения облаков для естественного процесса и при воздействии в варианте 3. Анализируя их, можно отметить, что вопреки распространенным представлениям воздействие не ускоряет, а замедляет процесс осадкообразования. На разрезах для момента времени 27,3 мин в варианте 0 зона осадков уже опустилась до земли, а в варианте с успешным воздействием контур нулевой водности и ледности проходит между уровнем конденсации и землей. Наиболее сильно эффект воздействия просматривается в изменении полей водности и ледности: в результате воздействия водность резко уменьшилась, ее максимальное значение (рис. 5.3.4а вариант 3) едва превышает $1 \text{ г} \cdot \text{м}^{-3}$. Максимальное значение ледности сохранилось, однако его высота переместилась с 4,5 км в варианте 0 до 8 км в варианте 3. Практически это означает, что в результате воздействия резко ухудшаются условия роста градовых зародышей, восходящими потоками они выносятся в закристаллизовавшуюся часть облака. Процесс градообразования замедляется, а общая масса града уменьшается. Что касается количества жидких осадков, то здесь нет однозначного ответа. В варианте 3 общая масса дождя оказалась меньше, чем в нулевом, но в варианте 1 несколько больше. Сравнивая варианты, легко также заметить, что в результате воздействия существенно уменьшился объем ЗПО – зоны повышенной отражаемости, ограниченный изолинией 10^9 см^{-1} . Однако уменьшение объема ЗПО и более быстрое по сравнению с нулевым вариантом снижение ее верхней границы к 33 минуте связано не с ускорением, а с замедлением осадко-

образования, с перераспределением водности – ледности по высоте облака, с уменьшением средних размеров ледяных частиц.

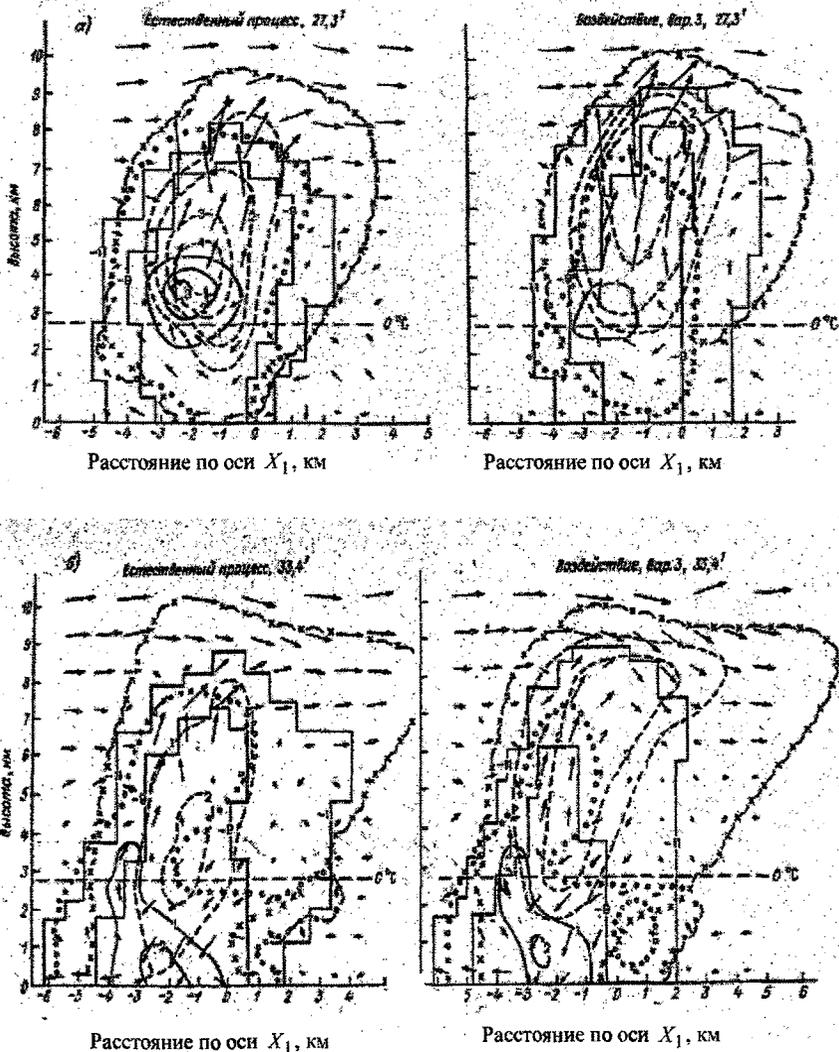


Рис. 5.3.4. Динамика облака в поле ветра (продолжение)
Усл. Обозначения см. рис. 5.3.1 и 5.3.3

5.3.3. Примеры численного моделирования при уменьшении шагов вычислительной сетки

Увеличение быстродействия и оперативной памяти вычислительной техники позволило перейти к реализации модели с уменьшенными расстояниями между узлами вычислительной сетки. Ниже приводятся примеры расчетов, выполненных для шага сетки по горизонтали 0,25 км, а по вертикали 0,20 км. Моделируемое пространство было расширено по горизонтальным осям до 35 км, а по вертикальной – до 17 км. При этом общее число узлов расчетной сетки увеличилось примерно в 50 раз. Пространство размеров гидрометеоров было разбито на 75 нерегулярных градаций, различных для капель и ледяных частиц.

Для инициализации конвективного движения задавался мгновенный нагрев воздуха в узлах сетки, заключенных внутри цилиндра диаметром 4 км и высотой 0,2 км. Центр основания цилиндра совмещался с центром горизонтального сечения моделируемого пространства ($x = y = 17,5$ км). По вертикали нагрев задавался на двух приземных уровнях 0,1 и 0,3 км. Максимальный нагрев в центральной части цилиндра (в узлах $3 \times 3 \times 2$) составлял 0,25 К, по мере удаления от центра перегрев уменьшался. Чтобы оценить влияние размеров шагов сетки и начального перегрева, расчеты, представленные в разд. 5.3.1 и 5.3.2 («старые расчеты»), были повторены при тех же фоновых распределениях температуры и влажности. Результаты приведены на рис. 5.3.5 ... 5.3.7. Назовем их новыми.

Изменение во времени распределений термодинамических характеристик вдоль вертикальной оси облака (пространственно-временной разрез) приведено на рис. 5.3.5. Сравним рис. 5.3.2 и 5.3.5. Поля водности и ледности качественно хорошо согласуются. На стадии роста максимумы q_v и q_l находятся вблизи верхней границы облака, вторичные максимумы связаны с формированием и выпадением осадков. В обоих случаях верхняя граница облака достигала 12 км. В первом случае большой начальный перегрев привел к более быстрому образованию облака. Оно появилось уже на 14-й минуте. В но-

вом расчете зарождение облака произошло на 23-ей минуте. От момента возникновения до стадии максимального развития в старом расчете прошло 14 минут, в новом 17. От момента достижения максимальной мощности до начала выпадения осадков прошло 4 и 6 минут соответственно. Таким образом, влияние начального импульса быстро затухает во времени.

На рис. 5.3.5 приведены также поля перегрева T' и скорости вертикальных токов u_3 . От момента возникновения облака до начала выпадения осадков восходящие токи на оси облака наблюдаются от уровня конденсации до его верхней границы. Максимальные значения превышают 30 м с^{-1} . Выпадение осадков сопровождается образованием области нисходящих токов в нижней части облака и в подоблачном пространстве. На периферии облака нисходящие токи появляются раньше (см. рис. 5.3.6). В зоне осадков вблизи земной поверхности отклонение температуры от фоновой $T' < -8 \text{ К}$, а нисходящие вертикальные токи достигают значений $u_3 < -10 \text{ м с}^{-1}$.

Изолинии T' и u_3 на рис. 5.3.5 сильно сглажены. Сглаживание потребовалось в связи с обнаружением локализованных во времени и пространстве экстремумов T' , u_3 , q_B и q_L . Пошаговый анализ результатов вычислений позволяет предположить, что хаотическое появление экстремумов связано с гармоническим характером решения уравнения Пуассона. Следует заметить, что существенное уменьшение шага вычислительной сетки не повлияло на их поведение.

Сравнивая рис. 5.3.2б с рис. 5.3.5в, легко убедиться, что изменения во времени характеристик осадков \bar{r}_3 , n , \dot{K}_T качественно являются похожими. Однако в количественном отношении обнаруживаются заметные различия. Так в новом расчете максимальное значение концентрации градин увеличилось в 6 раз, а максимальный поток кинетической энергии в 20 раз.

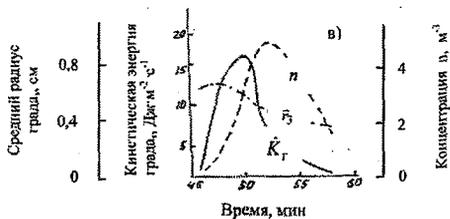
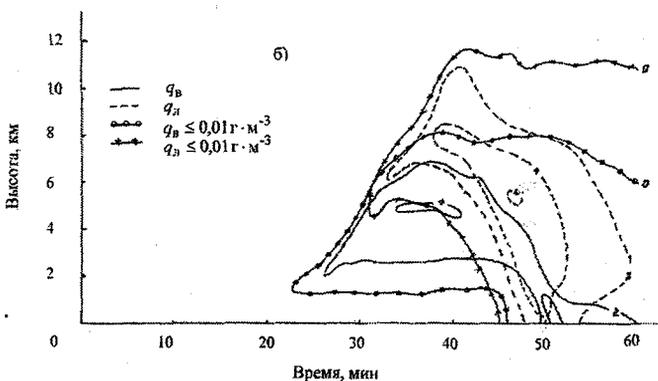
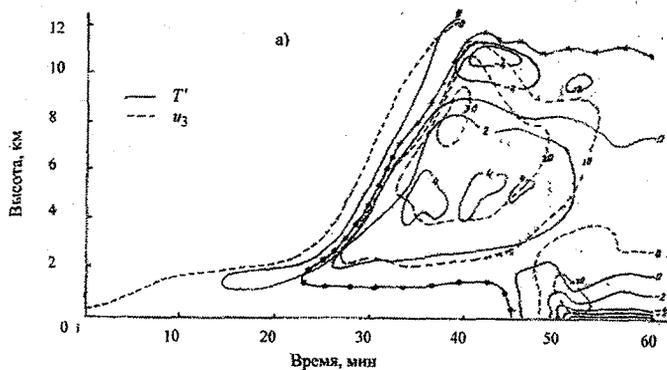


Рис. 5.3.5. Пространственно-временное распределение основных термодинамических характеристик облака (а, б) и осадков (в).

а) Изолинии перегрева $T'K$ и вертикальной скорости u_3 м·с⁻¹; б) Изолинии водности q_v и ледности q_n в г·м⁻³; в) Временной ход характеристик осадков: \bar{r}_3 — средний кубический радиус градин в см, n — концентрация градин в м⁻³, \dot{K}_Γ — поток кинетической энергии града, Дж·м⁻²·с⁻¹ и n для ледяных частиц с радиусом $r_3 \geq 0,3$ см.

На рис. 5.3.6 приведены вертикальные разрезы облака для четырех различных моментов времени. Эти разрезы построены с использованием компьютерной графики без какого-либо предварительного анализа или сглаживания. Приводятся поля водности и ледности в осевом сечении облака X_1OX_3 и проекции вектора скорости воздушного потока на него. Для моментов времени 46 и 56 мин показаны двумерные проинтегрированные по времени поля количества осадков и кинетической энергии. Последовательность разрезов позволяет проследить динамику формирования градового облака и выпадения осадков.

Сравнивая рис. 5.3.6 с рис. 5.3.1, можно отметить подобие динамики развития облака с учетом оговоренного выше временного сдвига. Любопытно, что в момент времени 36 мин облако представляет собой пример классической струи. Именно для этой стадии может быть использована струйная модель конвекции. Обобщая результаты сравнения, можно констатировать, что с уменьшением шага сетки происходит более медленное расширение облака по горизонтали. Представляется, что это обстоятельство связано с уменьшением счетной вязкости.

Динамика облака, развивающегося в поле ветра, представлена на рис. 5.3.7. Этот численный эксперимент повторяет расчеты, приведенные на рис. 5.3.3 и 5.3.4 (естественный процесс).

Как и ранее, в плоскости X_1OX_3 задается линейный сдвиг ветра по высоте, равный $0,0015 \text{ с}^{-1}$. В пограничном слое задан ветер восточного направления, в свободной атмосфере – западного. Различия между двумя вариантами расчета оказались весьма существенными. При использовании густой вычислительной сетки проявилась более сложная динамика развития облака.

Координаты центра теплового импульса составляли $x_1 = x_2 = 17,5 \text{ км}$. Подъем термика до начала образования облака сопровождался сносом его восточным ветром (на рисунке влево). Облако начало формироваться на 25-й минуте, уровень конденсации находился на высоте около полутора километров. На разрезе 28-ой минуты облако смещено к западу на 2,5 км относительно центра исходного теплового импульса, мощность облака чуть более 1 км. Слева от него выше и ниже уровня конденсации наблюдается небольшая область восходящих потоков. На разрезе 30 мин видно, что в этом месте начала образовываться новая облачная ячейка. При этом вершина «старой» ячейки поднялась до 3,7 км. Далее обе ячейки развиваются по вертикали, при этом новая растет быстрее.

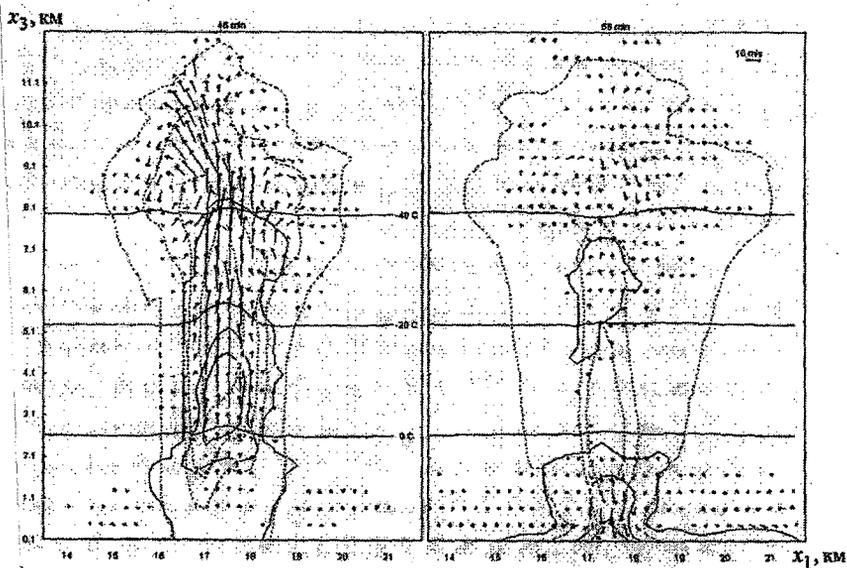
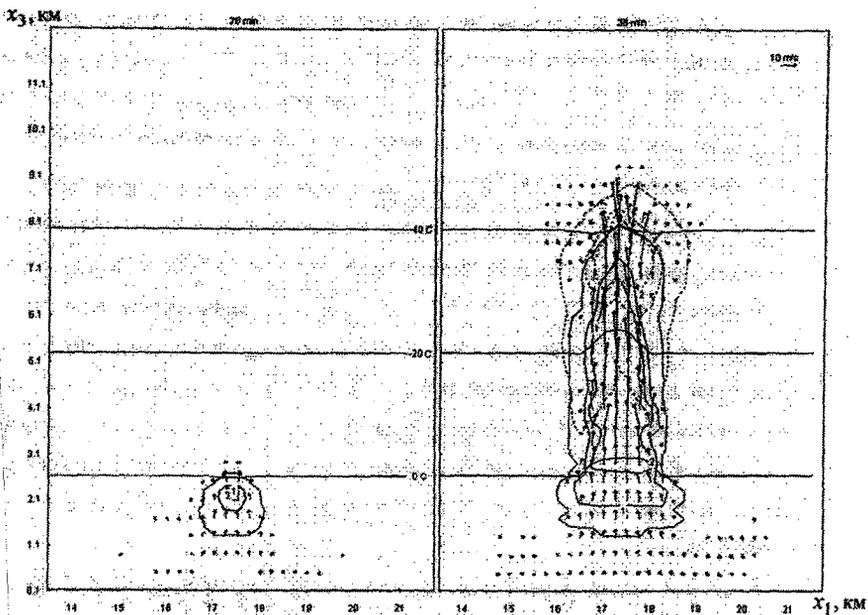


Рис. 5.3.6а. Вертикальные сечения облака в различные моменты времени

На вертикальных разрезах: сплошные линии – водность, прерывистые – ледность в $\text{г}\cdot\text{м}^{-3}$, стрелки – проекция вектора скорости на плоскость сечения.

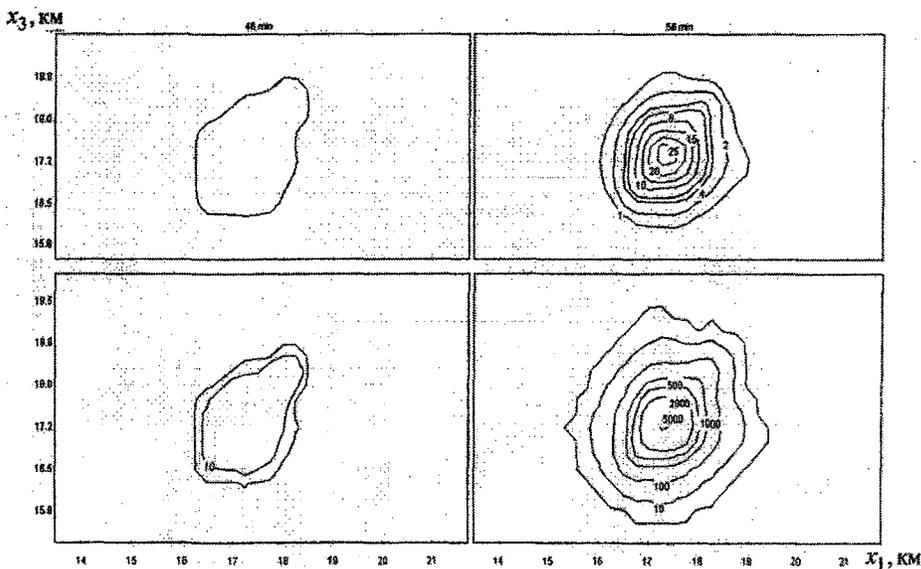


Рис. 5.3.66. Характеристики осадков на земной поверхности: верхний ряд – изолинии количества осадков в мм, нижний ряд – изолинии кинетической энергии в Дж \cdot м $^{-2}$.

К 42-ой минуте мощности обеих ячеек практически сравнялись, а интенсивные восходящие движения наблюдаются только в новой ячейке. Старая перешла в стадию диссипации. В ней сформировались осадки, которые к 48-ой минуте достигли земной поверхности. В новой ячейке осадки начинаются на 50-й минуте. Максимальная площадь выпадения осадков наблюдается на 58 ... 60-й мин. (рис. 5.3.76). К 58-ой минуте восходящие токи наблюдаются лишь в левой периферийной части ячейки, к 60-ой минуте ячейка диссипирует, осадки наблюдаются только в ее нижней части и под облаком. Жизненный цикл облака закончился.

Обобщая результаты численных экспериментов, приведенные (и неприведенные) здесь, можно констатировать, что представленная нестационарная модель конвективного облака хорошо отражает процесс его развития от зарождения до разрушения, включая образование и выпадение дождя и града. Чтобы рассчитать жизненный цикл развития облака продолжительностью около одного часа на сетке 114x114x86 узлов (0,25x0,25x0,20 км 3) при 75

градациях для капель и ЛЧ, требуется примерно 8...10 часов машинного времени на ПЭВМ типа Athlon64 3600+. В этом смысле модель является эвристической. При использовании сетки 30x30x36 узлов ($1,0 \times 1,0 \times 0,4 \text{ км}^3$) и 40 градаций для капель и ЛЧ время счета сокращается до 12...15 минут. Этот вариант модели может быть использован в прогностических целях. К сожалению, по субъективным причинам расчеты по модели выполняются лишь эпизодически.

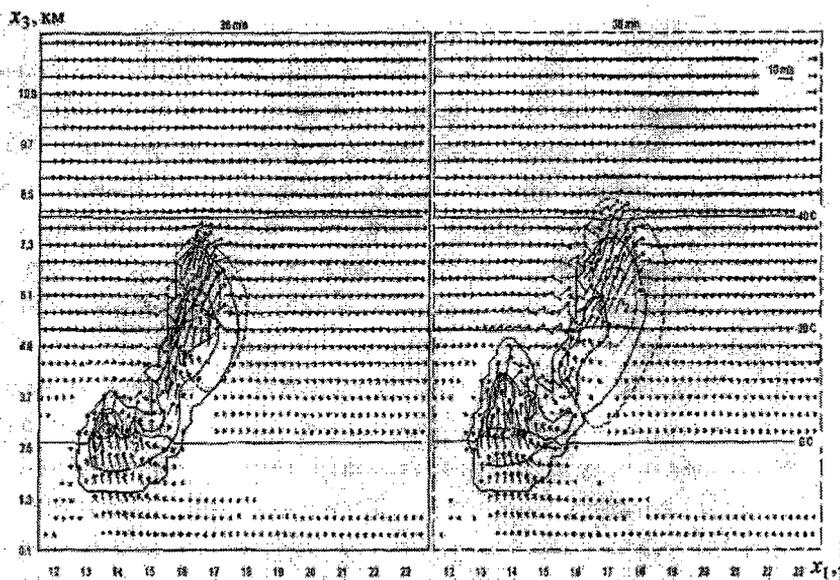
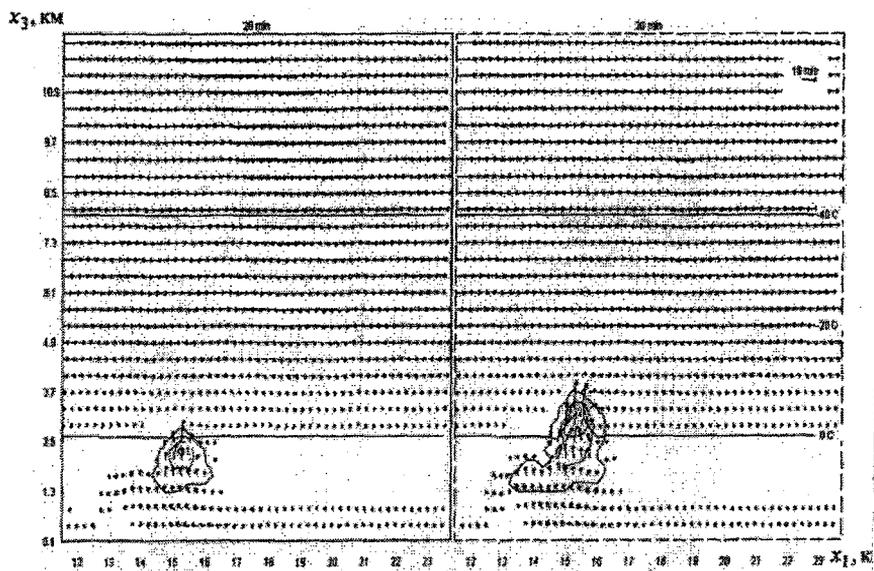
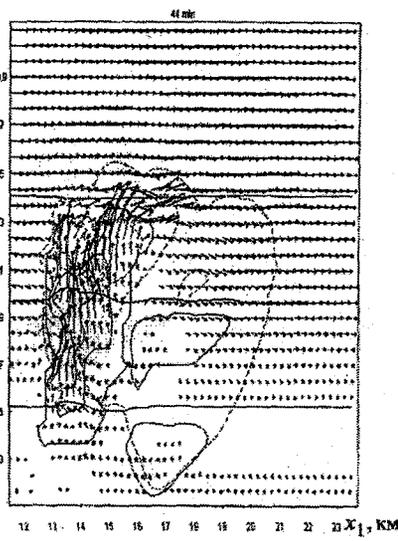
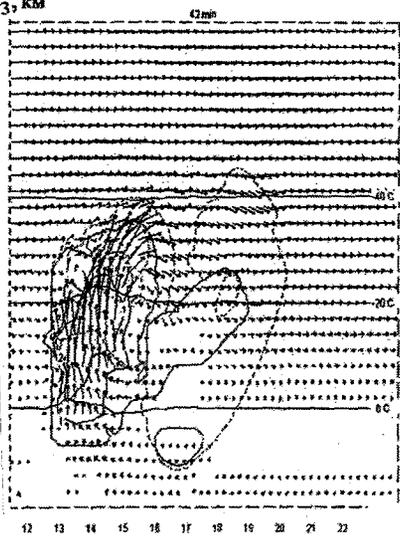


Рис. 5.3.7а. Динамика развития двухячейкового градового облака в поле ветра. Вертикальные разрезы полей водности, ледности и скорости воздушных потоков в сечении X_1OX_3 в разные моменты времени.

X₃, KM



KM

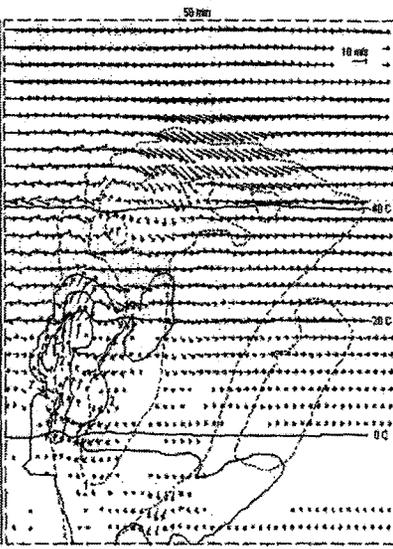
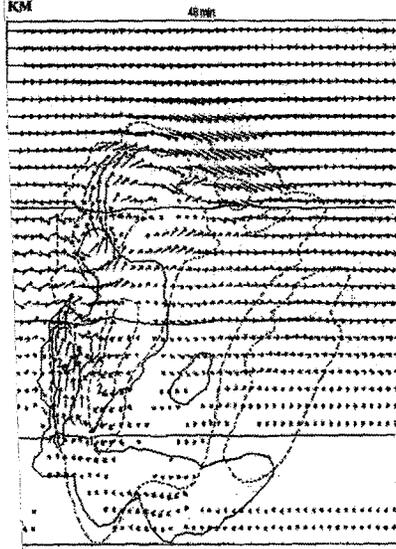


Рис. 5.3.7а (продолжение1)

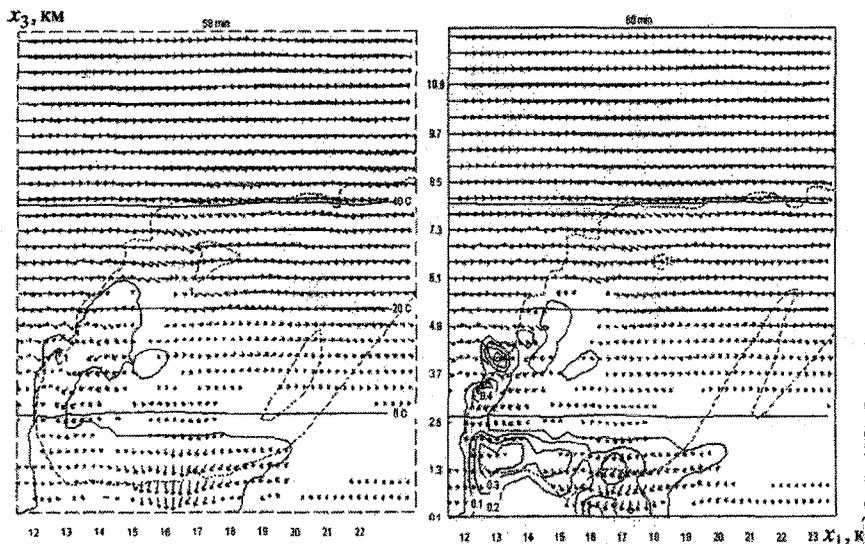
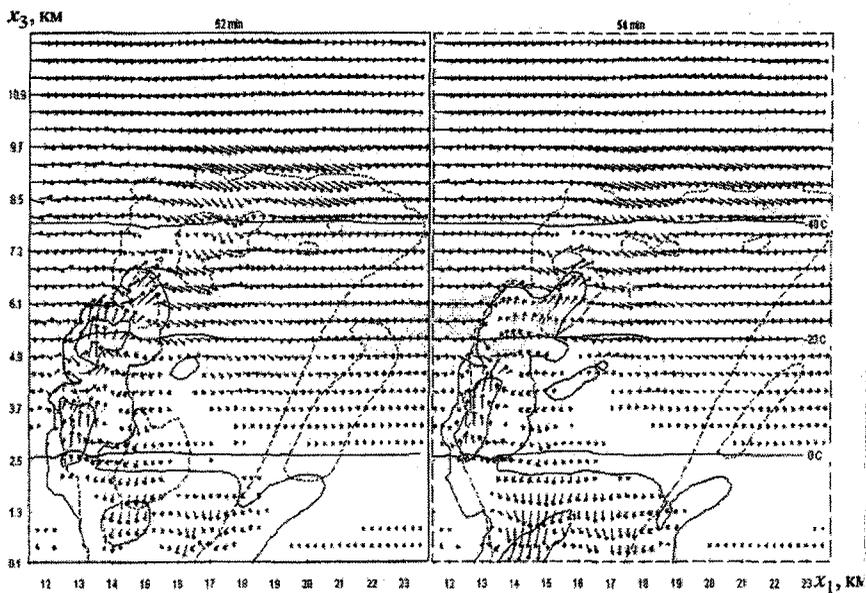
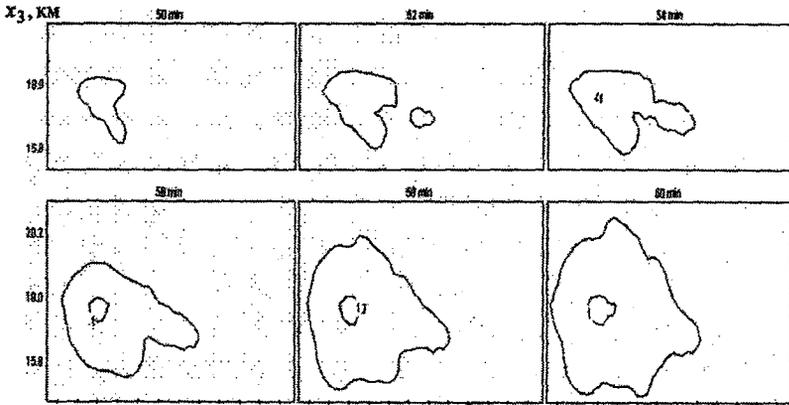


Рис. 5.3.7.а (продолжение2)

Поле осадков (мм)



Кинетическая энергия выпавшего града (Дж · м⁻² · сек⁻¹)

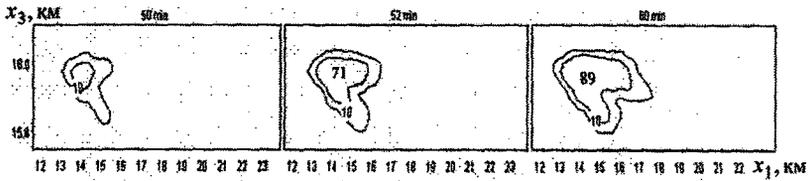


Рис. 5.3.76. Поля количества осадков и кинетической энергии града на подстилающей поверхности в сечении $X_1O X_2$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Глава 1. Фазовые превращения воды в атмосфере	9
1.1. Основные понятия и определения	9
1.2. Структура воды в различных агрегатных состояниях	14
1.3. Энергия образования зародышей новой фазы	22
1.3.1. Гомогенная нуклеация	23
1.3.2. Гетерогенная нуклеация	25
1.4. Обобщенное уравнение равновесия фаз	29
1.4.1. Равновесие между паром и водой и паром и льдом при плоской поверхности раздела фаз	30
1.4.2. Условия существования водяных и ледяных зародышей в пересыщенном паре	33
1.4.3. Размер жизнеспособных ледяных зародышей в переохлажденной воде	38
1.5. Скорость нуклеации при гомогенных фазовых превращениях	40
1.5.1. Скорость спонтанной конденсации	41
1.5.2. Гомогенное образование ледяных зародышей в пересыщенном паре (спонтанное осаждение, спонтанная депозиция)	48
1.5.3. Спонтанное замерзание	52
1.6. Квазистатическая модель образования жизнеспособных зародышей. Гомогенная нуклеация	56
1.7. Природа действия хладореагентов	72
1.8. Гетерогенная конденсация	83
1.8.1. Атмосферный аэрозоль	83
1.8.2. Природа действия облачных ядер конденсации	89
1.8.3. Гигроскопические реагенты	98
1.9. Гетерогенная нуклеация льда. ЛОЯ и ЛОР	101
1.9.1. Льдообразующие ядра	103
1.9.2. Льдообразующие реагенты	108
1.9.3. Диспергирование и льдообразующая активность реагентов	115
1.10. Теоретическая модель гетерогенной нуклеации льда	127
1.10.1. Нуклеация льда при осаждении пара	128
1.10.2. Иммерсионная нуклеация льда	133
1.11. Определение суммарной скорости нуклеации льда по экспериментальным данным	137
	143
Глава 2. Элементы теории осадкообразования	
2.1. Диффузионный рост капель	143
2.1.1. Диффузионный рост изолированной капли	144

2.1.2.	Диффузионный рост совокупности капель	155
2.2.	Диффузионный рост ледяных частиц	162
2.2.1.	Формы и особенности роста ледяных частиц	162
2.2.2.	Скорость роста ледяного кристалла	165
2.2.3.	Рост ледяных частиц в переохлажденном облаке	177
2.3.	Коагуляционный рост капель	178
2.3.1.	Скорость роста капель при гравитационной коагуляции	179
2.3.2.	Кинетическое уравнение коагуляции	184
2.3.3.	Стохастическая коагуляция	188
2.3.4.	Разбрызгивание капель	191
2.4.	Особенности коагуляционного роста ледяных частиц	193
2.4.1.	Скорость обзернения правильных ледяных кристаллов	195
2.4.2.	Рост крупы и града	198
2.5.	Кристаллизация переохлажденных облаков	208
2.5.1.	Время замерзания капли воды	209
2.5.2.	Естественная кристаллизация переохлажденных облаков	212
2.5.3.	Нахождение скорости нуклеации $J_d(T)$ по экспериментальным данным	217
2.6.	Обобщенные характеристики осадкообразования	219
2.6.1.	Водозапас облаков	219
2.6.2.	Интенсивность осадков	223
Глава 3.	Расчет конвективных процессов в атмосфере	225
3.1.	Простые модели конвекции	225
3.1.1.	Метод частицы	225
3.1.2.	Расчет параметров термика	229
3.1.3.	Метод слоя	233
3.1.4.	Изменение стратификации температуры при развитии конвективных облаков	237
3.2.	Теория турбулентных струй в стратифицированной атмосфере	238
3.2.1.	Вынужденные струи в стратифицированной атмосфере	239
3.2.2.	Спонтанные облачные струи	250
Глава 4.	Примеры использования струйной модели конвекции. Сравнение с экспериментом	261
4.1.	Расчет дымовых факелов	262
4.2.	Распространение струй, создаваемых реактивными двигателями	262
4.3.	Сравнение расчетов по струйной модели конвективного облака с результатами ракетного зондирования	263

4.4.	Струйная модель мощного градового облака	266
4.5.	Использование свободных турбулентных струй при искусственной вентиляции карьеров	274
4.5.1.	Расчет накопления примесей в карьере	275
4.5.2.	Перестройка поля температуры в карьере при работе струйной установки	277
4.5.3.	Туман в карьере	280
4.5.4.	Анализ экспериментов по использованию свободных струй для рассеяния туманов в карьере	284
4.6.	Разрушение конвективных облаков искусственно созданными нисходящими потоками	288
4.6.1.	Расчетная схема	290
4.6.2.	Результаты расчетов	293
Глава 5.	Нестационарная численная модель конвективного облака	301
5.1.	Общая характеристика модели	301
5.2.	Система уравнений	302
5.3.	Результаты численного моделирования	314
5.3.1.	Динамика конвективного облака в штилевых условиях	315
5.3.2.	Динамика облака, развивающегося в поле ветра	319
5.3.3.	Примеры численного моделирования при уменьшении шагов вычислительной сетки	323

Литература, использованная и рекомендуемая

1. Атмосфера. Справочник. – Л.: Гидрометеиздат, 1991. – 509 с.
2. Бекряев В. И. Практикум по физическим основам воздействия на атмосферные процессы. – Л.: Гидрометеиздат, 1991. – 144 с.
3. Бекряев В. И. Основы теории эксперимента. – СПб.: Изд-во РГГМУ, 2002. – 265 с.
4. Деннис А. Изменение погоды за счет облаков /Пер. с англ. – М.: Мир, 1983. – 272 с.
5. Дессенс А. Можем ли мы изменить климат? – Л.: Гидрометеиздат, 1969. – 117 с.
6. Довгалюк Ю. А., Ивлев Л. С. Физика водных и других атмосферных аэрозолей. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 255 с.
7. Качурин Л.Г. Физические основы воздействия на атмосферные процессы. – Л.: Гидрометеиздат, 1990. – 463 с.
8. Клинго В.В., Б.Ш. Файзулин. Численное моделирование пространственно-временного изменения турбулентных характеристик в конвективных облаках. – Л.: Труды ГГО, вып. 517, 1988. – с.43-54.
9. Мазин И. П., Шметер С. М. Облака: строение и физика образования. – Л.: Гидрометеиздат, 1983. – 279 с.
10. Матвеев Л. Т. Курс общей метеорологии. Физика атмосферы. – Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 751 с.
11. Матвеев Л. Т., Матвеев Ю. Л. Облака и вихри – основа колебаний климата. – СПб.: Изд-во РГГМУ, 2005 – 327 с.
12. Мейсон Б. Дж. Физика облаков /Пер. с англ. – Л.: Гидрометеиздат, 1961. – 541 с.
13. Облака и облачная атмосфера. Справочник /Под ред. И.П. Мазина, А. Х. Хргиана. – Л.: Гидрометеиздат, 1989. – 647 с.
14. Тлисов М. И. Физические характеристики града и механизм его образования. – СПб.: Гидрометеиздат, 2002. – 386 с.

15. Численное моделирование облаков. / Е. Л. Коган, И. П. Мазин, Б. Н. Сергеев, В. И. Хворостьянов. – М.: Гидрометеоздат, 1984. – 185 с.
 16. Cotton W. R., Pielke R. A. Human impacts on weather and climate. – Cambridge University Press, 1995. – 288 p.
 17. Jacobson M. Z. Fundamentals of atmospheric modeling. – Cambridge University Press, 2000. – 656 с.
 18. Pruppacher H. R., Klett J. D. Microphysics of clouds and precipitation. – Dordrecht, Boston, London: D. Reidel. Pub. Comp., 1978. – 714 p.
 19. Wang P. K. Ice microdynamics. – San Diego, California Academic Press, 2002. – 271 с.
 20. Young K. C. Microphysical processes in clouds. – New York, Oxford: Oxford University Press, 1993. – 427 p.
-

Учебное издание

Бекряев Виктор Иванович

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ФИЗИКИ ОБЛАКОВ
И АКТИВНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА НИХ

Редактор: Артемьева Н.Д.

Формат 60X90 1/16. Бумага офсетная. Печать ризографическая.
21,06 усл. печ. листов. Заказ № 87. Тираж 200 экз
Подписано в печать 25 декабря 2007 г.

Отпечатано: ООО «КРОМ»

Санкт-Петербург, Новочеркасский пр., д.1
тел: 495-69-44 e-mail: spbkrom@ Rambler.ru