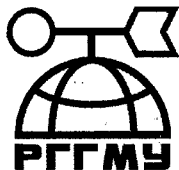


Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
Высшего профессионального образования  
Российский государственный гидрометеорологический университет

В. Н. МОРОЗОВ

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ  
АТМОСФЕРНО-ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ  
ПРОЦЕССОВ С УЧЕТОМ ВЛИЯНИЯ  
АЭРОЗОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ  
И РАДИОАКТИВНЫХ ВЕЩЕСТВ**

Монография



Санкт-Петербург  
2011

УДК 556.557

Математическое моделирование атмосферно-электрических процессов с учетом влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ.

Монография / В.Н.Морозов; РГГМУ. - СПб, 2011, 253 с.

Рассматриваются задачи математического моделирования влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ на электрическое состояние атмосферы. Рассчитываются коэффициенты присоединения атмосферных ионов к аэрозольным частицам, даются оценки вклада радиоактивных веществ в интенсивность ионообразования в атмосфере. Приводятся методы расчета структуры электродного приземного слоя с учетом этих факторов в приближении классического и турбулентного электродного эффекта. Формулируется задача математического моделирования глобальной электрической цепи (ГЭС) в земной атмосфере с учетом различных генераторов, действующих в атмосфере. Рассматриваются стационарная и нестационарная модели ГЭС с учетом грозных облаков, как генераторов электрического поля атмосферы. Обсуждаются также космические факторы, влияющие на электрическое поле атмосферы. Приводятся оценки влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ на основные параметры глобальной электрической цепи.

Монография представляет интерес для студентов, аспирантов, преподавателей метеорологических и экологических специальностей.

Табл. 7. Ил.14. Библиогр.: 124.

Рецензенты: кафедра высшей математики РГГМУ, отдел физики облаков и атмосферного электричества ГГО им. А.И.Воейкова Михайловский Ю.П. - кандидат физ.-мат. наук, заведующий лабораторией ГГО им. А.И.Воейкова

© В.Н.Морозов, 2011

© Российский государственный гидрометеорологический университет, 2011

## Введение.

Настоящая монография предназначена для студентов – магистров аспирантов и преподавателей РГГМУ, которых интересуют проблемы теории атмосферного электричества. В этой монографии рассматриваются вопросы теории происхождения электрического поля атмосферы, влияние космических процессов на эту компоненту атмосферы, турбулентности в пограничном слое атмосферы, влияние аэрозольных частиц и радиоактивных веществ на электрическое состояние атмосферы. Электрическое состояние атмосферы характеризуется потенциалом и напряженностью электрического поля, концентрацией аэроионов, электрической проводимостью, плотностью электрического тока, плотностью электрического заряда. Все эти величины зависят от присутствия в атмосфере аэрозольных частиц и радиоактивных веществ, как естественного, так и антропогенного происхождения. В настоящей монографии рассматриваются задачи, связанные с вычислением коэффициентов присоединения аэроионов к аэрозольным частицам в кинетическом и диффузионном приближениях. Знание численных значений этих величин для аэрозольных частиц различных радиусов и различного химического состава дает возможность определить изменения концентраций аэроионов (легких ионов), следовательно вычислить изменения электрической проводимости. Кроме того решение этих задач дает возможность вычислить электрические заряды аэрозольных частиц (заряд тяжелых ионов), и затем используя методы электроспектрометрии определять их характерные размеры. Присутствие радиоактивных веществ наоборот приводит к увеличению концентрации легких ионов за счет ионизации атмосферного воздуха, следовательно, и к увеличению электрической проводимости атмо-

сферы. Таким образом, электрическая проводимость является индикатором аэрозольного и радиоактивного загрязнения атмосферы.

Изменения электрической проводимости за счет этих факторов приводят к изменению напряженности электрического поля, плотности электрического заряда, как в приземном слое, так и в атмосфере выше этого слоя.

Наземные наблюдения за элементами атмосферного электричества проводятся помощью аппаратуры, устанавливаемой на высоте несколько метров от земли (Афиногенов и др., 1977). Электрическая структура приземного слоя определяется электродным эффектом, возникающим вблизи земной поверхности (Чалмерс, 1974; Куповых и др., 1998). В настоящей монографии рассматриваются задачи математического моделирования электродного приземного слоя в стационарном, одномерном приближении, с учетом влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ так и без их учета, как в случае классического, так и в случае турбулентного эффектов. Структура распределения по высоте при наличии этих факторов электрической проводимости, напряженности электрического поля, плотности электрического заряда может изменяться существенно. Рассматриваются математические модели глобальной электрической цепи, как в квазистационарном так и в нестационарном приближениях с грозовыми облаками, как токовыми генераторами, поддерживающими электрическое поле атмосферы. Аэрозольные частицы и радиоактивные вещества распределенные в глобальном масштабе могут также изменять также параметры глобальной электрической цепи (ГЭЦ) – системы токов пронизывающих всю атмосферу от нижних ее частей до магнитосферы. Эти изменения электрических параметров могут влиять на жизнедеятельность различных организмов, в том числе и организма человека,

т.е. на экологию. Рассмотрению всех этих проблем и посвящено настоящая монография.

1. Математическое моделирование электродного приземного слоя с учетом влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ.

1. 1. Экспериментальные данные о влиянии аэрозольных частиц и радиоактивных веществ на электрическое состояние атмосферы.

Электрическое состояние атмосферы определяется такими параметрами, как электрическая проводимость  $\lambda$ , напряженность электрического поля  $E$ , которая вблизи земной поверхности составляет величину порядка 100В/м и которое является преимущественно вертикальным и плотности электрического тока равной  $2 \times 10^{-12}$  А/м<sup>2</sup> (Атмосфера. Справочник.....1992). Электрическая проводимость определяется ионным составом атмосферы. Ионный состав верхних слоев атмосферы, начиная с ионосферы, определяется ионизацией молекул кислорода и азота ультрафиолетовым и рентгеновским солнечным излучением и представляет собой слабоионизованную плазму (Гершман, 1972) Существенное влияние на электрическую проводимость оказывает земное магнитное поле, которое делает ее анизотропной (Чепмен и Акасофу, 1975) Ионный состав нижней атмосферы в тоже время довольно сложен. Основную роль здесь играют легкие ионы, имеющие подвижности:  $b_1=1.36 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$ ,  $b_2=1.56 \text{ см}^2/\text{В} \cdot \text{с}$  (Брикар, 1969; Таммет и др.1987; Israel, 1970) и представляющие собой заряженные молекулярные кластеры, существенное влияние на образование которых оказывает водяной пар, содержащийся в атмосфере. Примерами легких ионов являются следующие ионы:  $\text{H}_3\text{O}^+$  ( $\text{H}_2\text{O}$ )<sub>n</sub>,  $\text{H}^+$  ( $\text{H}_2\text{O}$ )<sub>n</sub>,  $\text{O}_2^-$  ( $\text{H}_2\text{O}$ )<sub>n</sub>,  $\text{CO}_4^-$  ( $\text{H}_2\text{O}$ )<sub>n</sub>, где  $n=4-8$ . Для сравнения укажем, что подвижность электронов равна  $|b_e| = 700 \text{ см}^2 / \text{В} \cdot \text{с}$  т.е. почти в 500 раз больше по-

движности легких ионов. Подвижность легких ионов зависит от давления  $P(z)$  и температуры атмосферы  $T(z)$  и определяется выражением (Брикар, 1969):

$$b_{1,2} = b_{1,2}^0 \cdot \frac{P(0)}{P(z)} \cdot \frac{T(z)}{T(0)} \quad (1.1)$$

где:  $P(0) = 1013$  мбар,  $T(0) = 273^\circ K$

Схема образования легких ионов следующая: галактические космические лучи ионизуют молекулы кислорода и азота. Возникающие электроны присоединяются за время  $10^{-7}$  с к нейтральным молекулам и создают отрицательные ионы. Затем отрицательные и положительные ионы, взаимодействуя с молекулами  $H_2O$  образуют молекулярные кластеры - легкие ионы за несколько микросекунд.

Легкие ионы рекомбинируют друг с другом и присоединяются к аэрозольным частицам, образуя долгоживущие малоподвижные большие ионы (аэрозольные ионы). В стационарных условиях и равных концентрациях положительных и отрицательных ионов их концентрация находится из уравнения баланса:

$$\frac{dn_{1,2}}{dt} = 0 = q - \alpha n_{1,2}^2 - \beta n_{1,2} N \quad (1.2)$$

где:  $q$  - интенсивность ионообразования,  $\alpha$  - коэффициент рекомбинации,  $\beta$  - коэффициент присоединения легких ионов к аэрозольным частицам,  $N$  - концентрация аэрозольных частиц.

Наряду с ионизацией галактическими и космическими лучами, которые дают  $q = 10^6 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$  на уровне моря и  $q = (4-5) \times 10^7 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$  в умеренных широтах на высоте 15 км, важную роль могут играть радиоактивные газы, выделяющиеся из земной коры. В частности газ-радон может давать вблизи земной поверхности  $q = 10^7 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$ . Его действие может простирается до высоты порядка 100 м.

Таблицы 1 и 2 составлены по данным статьи (Брикар, 1969) и монографии (Israel, 1970) и показывают сложность определения ионного состава атмосферы.

В работе (Гаммет и др.1987) вводятся также конденсационные ионы, которые возникают при конденсации различных микропримесей воздуха на отрицательных и положительных ионах. Их подвижности находятся в интервале  $0.3-0.5 \text{ см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ .

Подвижности и радиусы ионов (Брикар, 1969) Таблица 1

Ионы	Подвижность [ $\text{см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ ]	Размеры [см], R
Легкие	$1.0 > b_{\pm} > 0.01$	$6.6 \cdot 10^{-8} < R < 7.8 \cdot 10^{-8}$
Средние	$0.01 > b_{\pm} > 0.001$	$7.8 \cdot 10^{-8} < R < 250 \cdot 10^{-8}$
Ланжевена	$0.001 > b_{\pm} > 0.00025$	$250 \cdot 10^{-8} < R < 570 \cdot 10^{-8}$
Ультратяжелые	$b_{\pm} < 0.00025$	$R > 570 \cdot 10^{-8}$

Подвижности и радиусы ионов (Israel, 1970) Таблица 2

Ионы	Подвижность [ $\text{см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ ]	Размеры [см], R
Легкие	$b_{\pm} > 1.0$	$R < 6.6 \cdot 10^{-8}$
Легкие промежуточные ионы	$1.0 > b_{\pm} > 0.01$	$6.6 \cdot 10^{-8} < R < 80 \cdot 10^{-8}$
Тяжелые (большие) промежуточные ионы	$0.01 > b_{\pm} > 0.001$	$80 \cdot 10^{-8} < R < 250 \cdot 10^{-8}$
Ланжевена	$0.001 > b_{\pm} > 0.00025$	$250 \cdot 10^{-8} < R < 570 \cdot 10^{-8}$
Ультратяжелые	$b_{\pm} < 0.00025$	$R > 570 \cdot 10^{-8}$

Электрическая проводимость в атмосфере определяется выражением:

$$\lambda = \sum_{k=1}^n (e_{\pm}^k b_{\pm}^k n_{\pm}^k + e_2^k b_2^k n_2^k) \quad (1.3)$$

где:  $e_{\pm}^k, b_{\pm}^k, n_{\pm}^k$  - электрические заряды, подвижности, и концентрации положительных и отрицательных ионов  $k$ -ой группы. Основной вклад в электрическую проводимость атмосферы вносят легкие ионы, которые определяют электродинамику нижней атмосферы, т.е. распределение полей и токов в ней.

Очень сильные изменения электрической проводимости воздуха происходили во время Чернобыльской катастрофы 1986 года. Так по данным приведенным в работе (Israelson, Knudsen, 1986) проводимость за счет выпадения радиоактивных веществ на территории Швеции возросла в 10 раз, при этом напряженность электрического уменьшилась в такое же число раз. Аналогичное явление наблюдалось в 60 годы прошлого столетия во время многочисленных в то время ядерных испытаний. В ряде работ рассматривалось влияние выбросов криптона-85 на электрическую проводимость атмосферы (Воеск, 1976; Коклев, 2000). В то же время выброс аэрозольных частиц в атмосферу приводит к понижению электрической проводимости воздуха (Огуряева, Шварц, 1987). В этой работе показано на основе анализа данных, полученных рядом сетевых станций по измерению атмосферно-электрических параметров на территории бывшего СССР за последние 40 лет, что уменьшение  $\lambda$  вызвано по всей видимости возросшей антропогенной деятельностью, приведшей к значительному повышению концентрации аэрозольных частиц в атмосфере. Согласно данным, приведенным в работах (Атмосфера. Справочник....



1992, Огуряева, Шварц, 1987) их концентрация в том диапазоне размеров (0.01-0.2) мкм, в котором они оказывают влияние на параметры атмосферного электричества составляет по порядку величины:

- над океаном вдали от берегов -  $(3-5) \times 10^8 \text{ м}^{-3}$ , - в континентальной сельской местности вдали от городов -  $(1-5) \times 10^9 \text{ м}^{-3}$ ,

- в сельской местности вблизи городов -  $(1-10) \times 10^9 \text{ м}^{-3}$ ,

- в городах -  $(1-10) \times 10^{10} \text{ м}^{-3}$ .

Уменьшение электрической проводимости, вызванное присутствием аэрозольных частиц, должно приводить к изменению напряженности электрического поля, плотности электрического тока и плотности электрического заряда, как в локальном, так и в глобальном масштабах. Глобальные эффекты, связанные с присутствием аэрозоля в атмосфере, будут рассмотрены выше в главе, посвященной глобальной электрической цепи. В настоящем разделе рассматриваются некоторые задачи, связанные с присутствием аэрозольных частиц в приземном турбулентном слое атмосферы.

Теоретические исследования влияния аэрозольных частиц электрическую структуру приземного слоя проводились в работах [Chalmers, 1966; Hoppel, 1967; Hoppel, Gatham, 1971; Jordanov, 1970; Latham, Poor, 1972; Tuomi, 1982]. В работе (Tuomi, 1982) решение задачи проводилось численными методами. В работах Chalmers, 1966; Hoppel, 1967) решалась с помощью численных методов задача для классического электродного эффекта, при этом оказалось, что толщина электродного слоя с ростом концентрации аэрозольных частиц убывает. Это связано с тем, что характерная толщина электродного слоя определяется выражением  $L = |b_{\pm}| E \tau$ , где  $b_{\pm}$  - подвижности положительных и отрицательных ионов,  $E$  - напряженность электрического

поля,  $\tau$  - время жизни иона. В присутствии аэрозольных частиц время жизни иона убывает с ростом его концентрации. В то же время в случае турбулентного электродного слоя его толщина растёт, так как в этом случае его характерная толщина оценивается по формуле:  $L_m = (D_m \tau \lambda)^{1/2-m} \tau \lambda$  - время электрической релаксации, которое в присутствии аэрозольных частиц возрастает,  $D_m$  определяется из выражения для коэффициента турбулентного обмена:  $D(z) = D_m z^m$ ,  $m$  определяется стратификацией приземного слоя  $m=0$  имеем устойчивую стратификацию,  $m=1$  нейтральная стратификация,  $m=4/3$  - термически-неустойчивая стратификация. Это было также отмечено в работе (Latham, Poor, 1972). При этом увеличивается значение напряженности электрического поля за пределами турбулентного электродного слоя

$$E_\infty = \frac{j_0}{\lambda_\infty} \text{ при неизменном значении плотности электрического тока } j_0.$$

В работе (Jordanov, 1970) было получено аналитическое решение задачи о влиянии аэрозольных частиц на электрическую проводимость и напряженность электрического поля в приземном турбулентном слое.

Получены выражения для изменения электрической проводимости с высотой в зависимости от стратификации приземного слоя, т.е. от вида коэффициента турбулентного обмена, но связанное с изменением  $\lambda$  изменение плотности электрического заряда  $\rho$  и напряженности электрического поля  $E$  с высотой исследовано не совсем корректно, так как не учтено влияние турбулентного переноса. Делается например следующее: плотность электрического заряда рассчитывается по формуле:  $\rho = [-j_0 / 4\pi\lambda^2(z)] \frac{d\lambda}{dz}$ , хотя

при наличии турбулентного перемешивания плотность электрического заряда описывается следующим дифференциальным уравнением:

$$\frac{d}{dz} \left[ \frac{D(z)}{\lambda(z)} \cdot \frac{d\rho}{dz} \right] - 4\pi\rho(z) = \frac{j_0}{\lambda^2} \frac{d\lambda}{dz} \quad (1.4)$$

Аналогичная процедура для нахождения  $\rho$  и  $E$  без учета турбулентного переноса использовалась в работе (Брикар, 1969).

Одним из важных вопросов, возникающих при исследовании влияния аэрозольных частиц на электрическое состояние атмосферы, является вопрос об определении степени загрязнения этой компонентой вещества атмосферы по измерению электрической проводимости и напряженности электрического поля. Как отмечалось выше в работах (Огуряева, Шварц, 1987; Шварц, 1980), был сделан вывод о загрязнении по измерениям электрической проводимости. В более ранней работе (Имянитов, Шифрин, 1962) была получена связь концентрации аэрозольных частиц с напряженностью электрического поля. Действительно, как мы увидим ниже при больших концентрациях аэрозольных частиц  $N_0$  электрическая проводимость  $\lambda \propto N_0^{-1}$ , а из постоянства стационарной плотности электрического тока проводимости следует, что  $E \propto \lambda^{-1}$ . Из этих двух соотношений получим:  $E = BN_0$ , где  $B$  - некоторая постоянная. В работе (Раменский, Дячук, 1984) экспериментально исследовались вариации  $E$  в непосредственной близости от источника аэрозольных частиц, когда существенную роль играют электрические заряды аэрозольных частиц. В работе Таммета (1977) было показано, что более точную характеристику степени загрязнения атмосферы аэрозолем может дать электрическая плотность аэрозоля, представляющая интеграл от произведения коэффициента поглощения лег-

ких ионов аэрозольными частицами на функцию распределения аэрозоля по размерам. В настоящей главе рассматривается влияние аэрозольных частиц на структуру стационарного, одномерного электродного слоя с учетом влияния не только на  $\lambda$ , но и также на  $E$  и  $\rho$ .

1.1.1 Экспериментальные данные о влиянии аэрозольных частиц и радиоактивных веществ на экологию человека.

Существенное влияние мелкие аэрозольные частицы на состояние здоровья человека, особенно на дыхательные пути, приводя к их раздражению. Роль радиоактивных веществ гораздо более сложная и многоплановая. Влияние на здоровье человека рассматривается в таких разделах науки, как радиационная медицина и радиационная биология. Более подробно эти вопросы рассмотрены в монографии (Электричество атмосферы - как биофактор, 1984)

1.1.2 Экспериментальные основы экологического влияния ионного состава атмосферы и атмосферных электрических полей.

В России работы по влиянию ионного состава атмосферы на экологию человека проводились А.Л. Чижевским. Довольно подробный анализ работ Чижевского в этой области проведен в монографии (Ягодинский, 1987). А.Л.Чижевский в своих экспериментальных работах рассматривал влияние положительных и отрицательных ионов на жизнедеятельность в животном и растительном мире. В опытах над крысами было показано важное положительное влияние отрицательных ионов на жизнедеятельность крыс, в тоже время положительные ионы чаще всего оказывают неблагоприятное влияние на здоровье, рост, вес, аппетит, поведение и внешний вид животных. Смертность крыс при отрицательной ионизации была минимальная, при положительной - максимальная. В то же время дезионизация воз-

духа сказывается отрицательно на жизнедеятельности животного организма. Чижевский в результате проведенных экспериментов над крысами показал, что дезионизованный воздух приводит животных через ограниченный срок к серьезным заболеваниям и затем к смерти, при этом происходят резкие деструктивные сдвиги в жизненно важных органах и тканях. При этом происходит в частности перерождение печени, почек, сосудистые аномалии, миодегенерация сердца. Изменения в органах и тканях, как предполагал Чижевский у животных в таком воздухе совпадают теми, которые наблюдаются при кислородном голодании, при дефиците кислорода. Результаты этих экспериментов были подтверждены в работах (Биологическое действие атмосферного электричества, 1988; Крушатина и др., 2007). В частности было отмечено отрицательно влияние тяжелых ионов на жизнедеятельность человека, отрицательное влияние, связанное с дезионизацией воздуха (головные боли, утомляемость, раздражительность и т.д.).

Другим направлением исследований является исследование изменчивости атмосферных электрических полей на состояние здоровья человека [Электричество атмосферы - как биофактор, 1984; Биологическое действие атмосферного электричества, 1988; Крушатина и др., 2007]. В частности существует зависимость сердечно-сосудистых заболеваний от грозových электрических полей (Крушатина и др., 2007). Считается, что длительное воздействие статических электрических полей с напряженностью  $E > 10^3$  В/м вызывает головную боль, утомляемость, нарушаемость обмена веществ, раздражительность. Механизм действия статического электрического поля на человеческий организм остается до конца не выясненным (Коклев, 2000).

1.2. Математические модели кинетики ионообразования в приземном слое атмосферы.

Задача ионообразования в нижних слоях атмосферы является очень сложной и до сих пор не решена полностью. В ее решении используются, как теоретические, так и экспериментальные методы. В настоящем разделе мы рассмотрим некоторые математические модели кинетики ионообразования в приземном слое атмосферы на основе монографии (Смирнов, 1992).

Атмосфера Земли из-за наличия значительного (более  $10^{17} \text{ см}^{-3}$ ) количества молекул водяного пара, обладающих заметным дипольным моментом  $P_{H_2O}$  достаточно быстро превращают молекулярные ионы и электроны в гидратированные ионные комплексы. Гидратация молекулярных ионов в тропосфере происходит в результате тройных столкновений:

$M_{\pm} + H_2O + O_2 \rightarrow M_{\pm}(H_2O) + O_2$  Первая молекула водяного пара захватывается молекулярным ионом спустя время:

$$\tau_{0,1} \approx (K_m [H_2O] \cdot [M])^{-1} \quad (1.5)$$

где:  $[M]$  - концентрация молекулярных ионов сорта  $M$ ,  $K_m$  - соответствующая константа скорости реакции.

Для иона  $O_2^-$   $\tau_{0,1} \approx 10^{-7} \text{ с}$  Качественный и количественный характер ион-молекулярных реакций на последующих (спустя время порядка  $10^{-7} \text{ с}$ ) этапах формирования ионов является предметом углубленных исследований и дискуссий. Тем не менее большинство специалистов считает, что ионы  $N_2^+(H_2O)_n$ ,  $O_2^-(H_2O)_n$ ,  $OH^-(H_2O)_n$  в реальной атмосфере не являются конечными продуктами ион-молекулярных реакций и изложенная выше классическая модель ограничена. Была рассмотрена количественная мо-

дель кинетики атмосферных ионов в тропосфере, согласно которой молекулярные ионы  $O_2^-$  исчезают на отметке  $10^{-8}$  с, что связано с процессом их гидратации и в возрасте около 1 с основными отрицательными ионами являются  $O_2^-(H_2O)_5, O_2^-(H_2O)_4$ . Но уже при 0.05- 0.5 с необходим учет ионов  $CO_3^-(H_2O)_n$ . К концу первой секунды в обычно воздухе в заметных количествах появляются ионы на основе окислов азота:  $NO_2^-(H_2O)_n, NO_3^-(H_2O)_n$ . Увеличение концентрации воды замедляет возникновение последних.

Что касается схемы превращений атмосферных положительных ионов то существует схема Фергюсона-Арнольда, которая удовлетворительно описывает эти процессы. Согласно этой схеме стадия гидратации начинается с образования комплексов  $O_2^+H_2O, NO^+H_2O$ , но конечным продуктом является комплексный ион  $H_3O^+(H_2O)_m$  или протонный гидрат  $H^+(H_2O)_m$

1. 3. Математические модели взаимодействия аэроионов с аэрозольными частицами.

1. 3.1 Вычисление коэффициентов  $\beta_{ij}^{(k)}$ , определяющих взаимодействие ионов с аэрозольными частицами.

Уменьшение концентрации легких ионов в приземном слое происходит за счет их присоединения к аэрозольным частицам и определяется коэффициентами присоединения  $\beta_{ij}^{(k)}$ . Теория расчета этих коэффициентов разрабатывалась в работах (Брикар, 1969; Noppel, Frick, 1986; Noppel, 1977;) Исходным уравнением для определения этих коэффициентов является выражение для потока положительных и отрицательных ионов на аэрозольную частицу в предположении ее сферичности:

$$I_i = -4\pi r^2 \left( D_i \frac{\partial n_i}{\partial r} - b_i E n_i \right) \quad (1.6)$$

где:  $i$  обозначает полярность иона ( $i=1,2$ ),  $n_i$  - концентрация ионов,  $D_i$  - коэффициент молекулярной диффузии,  $E$  - напряженность электрического поля, определяемая электрическим зарядом частицы и зарядом - изображения иона. Предполагается, что сферическая аэрозольная частица является проводником.

Тогда для потенциала электрического поля, создаваемого частицей, имеет место выражение:

$$\varphi^{(k)}(r) = \frac{ke^2}{r} - \frac{a^3 e^2}{2r^2(r^2 - a^2)} \quad (1.7)$$

где:  $k$  - число элементарных зарядов на частице,  $a$  - радиус аэрозольной частицы.

Второй член в выражении определяет потенциал, обусловленный зарядом-изображением.

В работах (Noppel, 1977; Noppel, Frick, 1986) рассмотрена теория расчета коэффициентов  $\beta_{ij}^{(k)}$  с учетом кулоновской силы и силы зеркального изображения. Для этих коэффициентов было получено следующее выражение:

$$\beta_{ij}^{(k)} = \frac{4\pi D_i a}{\bar{v}_i (E.F.) a \exp \left[ b \left[ \frac{k}{x} - \frac{1}{2x^2(x^2 - 1)} \right] \right]_{x=\frac{\Delta+L}{a}} + \int_{\frac{\Delta+L}{a}}^{\infty} \frac{1}{x^2} e^{b \left[ \frac{k}{x^2} - \frac{1}{2x^2(x^2 - 1)} \right]} dx}, \quad (1.8)$$

где:  $\bar{v}_i = \sqrt{\frac{2k_1 T}{m_i}}$ ,  $D_i = \frac{b_i k_1 T}{e}$ ,  $b_i$  - подвижность  $i$ -го иона,  $m_i$  - масса иона,  $T$  - температура среды,  $k_1$  - постоянная Больцмана,  $b = \frac{e^2}{ak_1 T}$ ,  $k$  - число элементарных зарядов на частице



(( $k < 0$  - заряд частицы и иона противоположны по знаку,  $k > 0$  - заряды частицы и иона одинаковы по знаку),

$L$  - длина свободного пробега иона,  $\Delta$  - радиус действия зеркальных сил,  $x = \frac{r}{a}$ .

Параметр (E.F.), входящий в выражение (1.8), определяется следующим образом:

$$(E.F.) = \frac{1}{\bar{v}_i} \int v_i B_{\Delta}^2 F(v_i) dv_i, B_{\Delta} = \frac{b_{\Delta}}{a}, \quad (1.9)$$

где:  $b_{\Delta}$  - параметр захвата,  $F(v_i)$  - максвелловская функция распределения ионов по скоростям.

Параметр захвата  $B_{\Delta}$  определяется из уравнения:

$$B_{\Delta}^2 = s^2 - 2kYs + \frac{Y}{s^2 - 1} \quad (1.10)$$

где:  $s = \frac{r_a}{a}$ ,  $Y = \frac{e^2}{am_i v_i^2}$ ,  $r_a$  - расстояние наиболее близкого подхода иона к аэрозольной частице.

Расстояние  $\Delta$  находится из решения уравнения, получаемого из условия  $\frac{dB_{\Delta}^2}{ds} = 0$  при  $s = \Delta$ :

$$\Delta^5 - kY\Delta^4 - 2\Delta^3 + 2kY\Delta^2 + (1-Y)\Delta - kY = 0 \quad (1.11)$$

Отсюда  $B_{\Delta}^2$  равно:

$$B_{\Delta}^2 = \Delta^2 - 2kY\Delta + \frac{Y}{\Delta^2 - 1} \quad (1.12)$$

В пренебрежении зеркальными силами ( $s=1$ ), в этом случае минимальное апсидальное расстояние совпадает с радиусом частицы) получим:

$$B_{\Delta}^2 = 1 - 2kY \quad (1.13)$$

$$(E.F.) = 1 - \frac{ke^2}{ak_1T} \quad (1.14)$$

При  $k=0$  (отсутствие электрического заряда на аэрозольной частице) имеем:

$$\Delta^2 = 1 + \sqrt{Y}, B_{\Delta} = 1 + 2\sqrt{Y}, (E.F.) = 1 + 2\sqrt{\frac{\pi e^2}{8ak_1T}} \quad (15)$$

Если учитывать силы изображения и кулоновские силы, то задача становится более сложной и должна решаться численно. Результаты вычислений  $\beta_{ij}^{(k)}$  представлены в работе (Норпель, Frick, 1986) до значений  $k=5$  в виде таблиц.

Из этих таблиц следует, что для  $a < 0.03 \text{ мкм}$ ,  $\beta_{ii}^{(k)} = 0, k \geq 2$ .

При  $a < 0.007 \text{ мкм}$  взаимодействие ионов с аэрозольными частицами определяется рекомбинациями при тройных столкновениях. В этом случае коэффициент перед экспонентой в знаменателе выражения (1.8)  $\frac{4D_i}{\bar{v}_i(E.F.)a}$  необходимо

заменить на выражение  $\frac{4D_i a}{\bar{v}_i f(y) \delta^2}$ , где:  $\delta > \Delta$  - радиус сферы захвата при тройных столкновениях, который рассчитывается на основе уравнений (Норпель, 1977):

$$\Phi(\delta) - \Phi(\delta + L) = E = \frac{e^2 L}{2d(d+L)}, \Phi(x) = \frac{ke^2}{x} - \frac{a^3 e^2}{2x^2(x^2 - a^2)},$$

$$\gamma = 1 - \frac{\Phi(\delta) - \Phi(\delta + L)}{k_1 T}, \quad (1.16)$$

$$f(y) = 1 - \frac{1}{2y^2} [1 - e^{-2y} \cos \theta_c (1 + 2y \cos \theta_c)], y = \frac{\delta}{L}, \theta_c = \arcsin \frac{b_c}{\Delta},$$

$$b_c^2 = \Delta^2 \left[ 1 - \frac{\Phi(\Delta) - \Phi(\delta)}{k_1 T} \right]$$

где:  $d$  – расстояние ионного захвата, определяемое из коэффициента рекомбинации ионов.

Из рассмотрения системы уравнений (1.63) следует, что если характерные времена взаимодействия ионов с аэрозольными частицами малы по сравнению с гидродинамическим временем, которое в данном случае определяется турбулентным переносом, то можно считать, что в элементарном объеме устанавливается равновесное состояние между концентрациями заряженных и нейтральных частиц, обусловленное принципом детального равновесия (Noppel, Frick, 1986):

$$n_i \beta_{ii}^{(k)} N_i^{(k-1)} = n_j \beta_{ji} N_i^{(k)} \quad (1.17)$$

Из соотношения следует выражение, связывающее  $N_i^{(k)}$  и  $N_0$ :

$$\frac{N_i^{(k)}}{N_0} = \left( \frac{n_i}{n_j} \right)^k \prod_{m=1}^k \frac{\beta_{ii}^{(m-1)}}{\beta_{ji}^{(m)}} \quad (1.18)$$

Используя (1.18) и выражение  $N(a) = N_0 +$

$\sum_{k=1}^p N_1^{(k)} + \sum_{k=1}^p N_2^{(k)}$ , получим соотношение, связывающее общую концентрацию аэрозольных частиц  $N$  радиуса  $a$  с концентрацией нейтральных аэрозольных частиц  $N_0$  того же радиуса:

$$N(a) = N_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^p \left( \frac{n_1}{n_2} \right)^k \prod_{m=1}^k \frac{\beta_{11}^{(m-1)}}{\beta_{21}^{(m)}} + \sum_{k=1}^p \left( \frac{n_2}{n_1} \right)^k \prod_{m=1}^k \frac{\beta_{22}^{(m-1)}}{\beta_{12}^{(m)}} \right] \quad (1.19)$$

При  $n_1 \approx n_2$  и при известной функции  $N(a)$ , получим распределение распределение  $N_0, N_i^{(k)}$  по координате  $z$ . В этом случае функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  можно представить в следующем виде:

$$\Phi_1 = \int_a \bar{\beta}_1(a) N(a) da, \quad \Phi_2 = \int_a \bar{\beta}_2(a) N(a) da, \quad (1.20)$$

$$\bar{\beta}_1 = \frac{\beta_{11}^{(0)} + \sum_{k=1}^{p-1} \beta_{11}^{(k)} \prod_{m=1}^k \frac{\beta_{11}^{(m-1)}}{\beta_{21}^{(m)}} + \sum_{k=1}^p \beta_{12}^{(k)} \prod_{m=1}^k \frac{\beta_{22}^{(m-1)}}{\beta_{12}^{(m)}}}{1 + \sum_{k=1}^p \prod_{m=1}^k \frac{\beta_{11}^{(m-1)}}{\beta_{21}^{(m)}} + \sum_{k=1}^p \prod_{m=1}^k \frac{\beta_{22}^{(m-1)}}{\beta_{12}^{(m)}}}, \quad (1.21)$$

$$\bar{\beta}_2 = \frac{\beta_{22}^{(0)} + \sum_{k=1}^{p-1} \beta_{22}^{(k)} \prod_{m=1}^k \frac{\beta_{22}^{(m-1)}}{\beta_{12}^{(m)}} + \sum_{k=1}^p \beta_{21}^{(k)} \prod_{m=1}^k \frac{\beta_{11}^{(m-1)}}{\beta_{21}^{(m)}}}{1 + \sum_{k=1}^p \prod_{m=1}^k \frac{\beta_{11}^{(m-1)}}{\beta_{21}^{(m)}} + \sum_{k=1}^p \prod_{m=1}^k \frac{\beta_{22}^{(m-1)}}{\beta_{12}^{(m)}}}. \quad (1.22)$$

Для расчета коэффициентов присоединения по формулам (1.20)-(1.22) необходимо использовать общее выражения для коэффициентов  $\beta_{ij}^{(k)}$  по формуле (1.8) (смотри также Приложение 1.1). Рассмотрим некоторые предельные случаи.

В работе (Сальм, 1986) были получены аппроксимации  $\bar{\beta}_1$  и  $\bar{\beta}_2$  для случая, когда подвижности положительных и отрицательных легких ионов одинаковы ( $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = \beta_\delta$ ). Оказалось, что для частиц радиусом  $a > 0.01 \mu\text{м}$  ( $10^{-6}$  см):

$$\beta_s(a) = 4\pi D a \quad (1.23)$$

При этом эффективный коэффициент присоединения, определяемый выражением:

$$\beta = \frac{\int \beta_s(a) N(a) da}{\int N(a) da} \quad (1.24)$$

равен:

$$\beta = 4\pi D \bar{a} \quad (1.25)$$

где:  $\bar{a}$  - средний радиус аэрозольных частиц, D - коэффициент молекулярной диффузии.

В работе (Hoppel, Frick, 1986) приведено другое аппроксимационное выражение для  $\beta_s$ , имеющее смысл в более широком диапазоне размеров аэрозольных частиц:

$$\beta_s(a) = 0.436a - 9.2 \times 10^{-8} \quad (1.26)$$

где:  $a$  измеряется в см.

Данные расчетов, приведенные в работе (Hoppel, Frick, 1986), можно использовать для расчета коэффициентов  $\bar{\beta}_1$  и  $\bar{\beta}_2$  и в случае отсутствия равновесия, определяемого *выражением* (1.17). Приведем значения этих коэффициентов при некоторых значениях радиуса аэрозольных частиц:  $r=0.01$  мкм-  $\bar{\beta}_1 = 0.17 \times 10^{-6} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ ,  $\bar{\beta}_2 = 0.23 \times 10^{-6} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ ;  $r=0.04$  мкм-  $\bar{\beta}_1 = \bar{\beta}_2 = 1.815 \times 10^{-6} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ ;  $r=0.1$  мкм-  $\bar{\beta}_1 = 4.72 \times 10^{-6} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ ,  $\bar{\beta}_2 = 4.7 \times 10^{-6} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$ . Используя эти данные можно рассчитать функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  при известной функции распределения по радиусам  $N(a)$ . Одним из наиболее используемых распределений в диапазоне размеров (0.01-0.2) мкм является распределение, полученное в работе (Смеркалов, 1984):

$$N(a) = \frac{A \exp\left[-K \left| \frac{a - a_0}{a} \right|^{v'}\right]}{a \ln 10 (a^{v'} + |a - a_0|^{v'})} \quad (1.27)$$

Для тропосферного аэрозоля:  $K=0.42$ ,  $a_0=0.03$  мкм,  $v_* = 3$ ,  $v = 0.74v_*$ ,  $v' = 0.47$ . Постоянная  $A$  определяется из условия нормировки на полное число аэрозольных частиц. На основании расчетов, проведенных в работе (Огуряева, Шварц, 1987) можно получить для частиц с размерами в этом диапазоне значения  $\Phi_1 = \Phi_2 = 0.85 \times 10^{-6} N$ , где  $N$  - полная концентрация аэрозольных частиц.

Приложение 1.1. Вывод выражения для коэффициента присоединения  $\beta_{ij}^{(k)}$  (8)

Из уравнения (1.6) следует уравнение для концентрации ионов в окрестности сферической аэрозольной частицы:

$$\frac{dn_i}{dr} + \frac{1}{k_1 T} \frac{d\varphi}{dr} = - \frac{I_i}{4\pi r^2 D_i} \quad (1.1.1)$$

где:  $\varphi$  - потенциал электрического поля, определяемый выражением (1.7). Решение этого уравнения представляется в следующем виде:

$$n_i(r) = n_\infty e^{-\frac{\varphi(r)}{kT}} - \frac{I_i e^{-\frac{\varphi(r)}{k_1 T}}}{4\pi D_i} \int_r^\infty \frac{e^{\frac{\varphi(r)}{k_1 T}}}{r^2} dr \quad (1.1.2)$$

где:  $n_\infty$  - концентрация ионов вдали от аэрозольной частицы.

Из выражения (1.1.2) следует выражение для потока ионов на частицу:

$$I_i = \frac{4\pi D_i \left[ n_\infty - n_i e^{\frac{\phi(r)}{k_1 T}} \right]}{\int_r^\infty \frac{e^{\phi(r)/k_1 T}}{r^2} dr} \quad (1.1.3)$$

Выражение (1.1.3) описывает поток ионов в диффузионной области. Если размеры частицы меньше длины свободного пробега ионов, то необходимо рассматривать область кинетического описания с радиусом  $\delta$  около частицы, который больше радиуса частицы на одну длину свободного пробега. Этот внутренний поток пропорционален концентрации ионов на  $\delta$  и равен:

$$I_i = F_i n_i(\delta) \quad (1.1.4)$$

Подставляя в (1.1.4), получим выражение для  $\beta_{ij}^{(k)}$ :

$$\begin{aligned} \beta_{ij}^{(k)} &= \frac{I_i^{(k)}}{n_\infty} = \frac{F_i e^{\frac{\phi(\delta)}{k_1 T}}}{1 + F_i e^{-\phi(\delta)/k_1 T} / 4\pi D_i \int_\delta^\infty e^{\phi(r)/k_1 T} / r^2 dr} \\ &= \frac{4\pi D_i}{(4\pi D_i / F_i) e^{\phi(\delta)/k_1 T} + \int_\delta^\infty e^{\phi(r)/k_1 T} / r^2 dr} \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

Выражение (1.8) было получено в предположении, что  $F_i = \pi a^2 \bar{v}_i (E.F.)$ , -  $\delta = \Delta + \lambda$ ,  $\Delta$  радиус сферы зеркального захвата,  $\lambda$  - длина свободного пробега иона (Норреп, 1977)

1.3.2 Вычисление коэффициентов  $\beta_{ij}^{(k)}$  и электрических зарядов на аэрозольных частицах в диффузионном приближении.

В земной атмосфере длина свободного пробега ионов составляет  $\lambda = 7 \times 10^{-2}$  мкм и поэтому для частиц с ра-

диусом  $a \gg \lambda$  можно использовать для расчета потока на заряженную аэрозольную частицу можно использовать диффузионное приближение. В противном случае используется кинетический подход (Hoppel, Frick, 1986; Hoppel, 1977; Мучник, Фишман, 1982). В диффузионном приближении потоки ионов и коэффициенты  $\beta_{ij}^{(k)}$  вычисляются следующим образом. Основные уравнения, описывающие распределение концентрации ионов и напряженности электрического поля около аэрозольной частицы имеют вид (Морозов, 1984; Седова, Черный, 1986):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{I}_{1,2} &= q - \alpha n_1 n_2, \\ \operatorname{div} \bar{E} &= 4\pi e(n_1 - n_2), \operatorname{rot} E = 0, \\ \bar{I}_{1,2} &= -D_{1,2} \nabla n_{1,2} + n_{1,2} b_{1,2} \bar{E}, \quad b_{1,2} = \frac{\pm e D_{1,2}}{k T_{1,2}} \end{aligned} \quad (1.28)$$

где: индекс "1" соответствует положительно заряженным ионам, индекс "2" - отрицательно заряженным ионам,  $\bar{I}_{1,2}$  - вектор плотности потока ионов,  $\bar{E}$  - напряженность электрического поля,  $D_{1,2}, b_{1,2}$  - коэффициенты молекулярной диффузии и подвижности ионов, которые предполагаются однозарядными,  $e$  - заряд электрона,  $k$  - постоянная Больцмана,  $T_{1,2}$  - температура ионов,  $q$  - интенсивность ионообразования (локальная скорость ионизации),  $\alpha$  - коэффициент рекомбинации.

Пренебрегая внешним электрическим полем, объемным электрическим зарядом ионов, а также процессами ионизации и рекомбинации и считая, что распределение электрического поля и концентрации ионов около частицы определяется электрическим зарядом частицы, значениями концентрации ионов вдали от частицы, процессами диффу-



зии ионов и скоростью их осаждения на частицу, а также считая, что характерные времена изменения концентрации ионов и заряда частицы велики по сравнению с  $a^2/D_{1,2}$ , получим следующие математические неравенства для выполнения этих условий [(Морозов, 1984; Седова, Черный, 1986):

$$\frac{D_{1,2}n_{1,2}^0}{a^2} \gg q, \quad \frac{D_{1,2}}{a^2} \gg \alpha n_{1,2}^0, \quad \chi^2 = \frac{\varepsilon \bar{k} T_{1,2}}{4\pi e^2 (n_1^0 + n_2^0)} \gg a^2,$$

$$T \gg \frac{a^2}{D_{1,2}}, \quad \frac{eaE^0}{kT_{1,2}} \ll 1 \quad (1.29)$$

где:  $n_{1,2}^0, E^0$  - концентрация ионов и напряженность электрического поля вдали от частицы,  $\chi$  - радиус Дебая,  $\varepsilon$  - диэлектрическая проницаемость газа,  $T$  - характерное время изменения концентрации  $n_{1,2}^0$  и заряда частицы.

Используя условия (1.29), можно заменить систему уравнений (1.28) уравнениями:

$$\operatorname{div} \vec{I}_{1,2} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (1.30)$$

Зарядка или разрядка частицы происходит за счет диффузии ионов к частице и осаждения их на поверхности частицы за счет действия поверхностных сил. Изменение заряда частицы  $Q$  в результате осаждения ионов на ее поверхности описывается уравнением:

$$\frac{dQ}{dt} = -4\pi a^2 (\vec{I}_1 - \vec{I}_2) \vec{v} \quad (1.31)$$

где:  $\vec{v}$  - единичный вектор внешней нормали к поверхности частицы.

Граничные условия вдали от частицы и на ее поверхности имеют вид:

$$n_{1,2} = n_{1,2}^0, \quad \vec{E} = 0 (r \rightarrow \infty), \quad -(\vec{I}_{1,2} \vec{v}) = K_{1,2} n_{1,2} (r = a) \quad (1.32)$$

Здесь  $K_{1,2}$  - константа скоростей реакции, протекающих на поверхности аэрозольной частицы с участием ионов и приводящих к осаждению последних на частице. Предполагается, что разрядка осевших ионов протекает достаточно быстро, так, что их влияние на значения  $K_{1,2}$ , а также процессами, обратными осаждению ионов можно пренебречь.

Система уравнений, состоящая из третьего уравнения системы (1.28), уравнений (1.30), (1.31) с граничными условиями (1.32) описывает задачу о диффузионной зарядке аэрозольной частицы в слабоионизованном газе. Предполагается, что частица имеет сферическую форму. Случай несферической частицы рассматривался в работе Седунова (1959). Для сферической частицы все величины будут зависеть только от радиуса  $r$  - расстояния до центра частицы.

Поэтому в сферической системе координат с началом в центре частицы уравнения (1.30) имеют решение:

$$I_{r,1,2} = I_{a,1,2} \frac{a^2}{r^2}, \quad E_r = E_a \frac{a^2}{r^2}, \quad E_a = \frac{Q}{a^2} \quad (1.33)$$

где:  $E_a, I_{a,1,2}$  - значения напряженности электрического поля и плотн ости потоков ионов при  $r = a$ .

Из третьего уравнения системы (1.28), уравнений (1.33) и граничных условий (1.32) найдем распределение концентраций ионов и плотностей их потоков на частицу:

$$n_{1,2}(r) = \frac{aI_{a,1,2}}{Q_{1,2}^* D_{1,2}} + \left( n_{1,2}^0 - \frac{aI_{a,1,2}}{Q_{1,2}^* D_{1,2}} \right) \exp\left(-\frac{a}{r} Q_{1,2}^*\right)$$

$$I_{a,1,2} = -\frac{n_{1,2}^0 D_{1,2} Q_{1,2}^* \exp(-Q_{1,2}^*)}{a[1 - \exp(-Q_{1,2}^*) + D_{1,2} Q_{1,2}^* / K_{1,2} a]},$$

$$Q_{1,2}^* = \frac{b_{1,2} Q}{a D_{1,2}} = \pm \frac{eQ}{akT} \quad (1.34)$$

Здесь предполагается, что  $T_1 = T_2$ .

Отметим, что при  $K_{1,2} \rightarrow \infty$

$$I_{a,1,2} = -\frac{n_{1,2}^0 D_{1,2} Q_{1,2}^* \exp(-Q_{1,2}^*)}{a[1 - \exp(-Q_{1,2}^*)]} = \frac{n_{1,2}^0 D_{1,2} Q_{1,2}^*}{a[1 - \exp Q_{1,2}^*]} \quad (1.35)$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (1.34), получим, что  $n_1(a) = n_2(a) = 0$ . Условие  $K_{1,2} \rightarrow \infty$  соответствует выполнению условия:  $aK_{1,2} / D_{1,2} Q_{1,2}^* \gg 1$ .

Переходя от безразмерных переменных к размерным, получим вместо (1.34) выражения:

$$\begin{aligned} n_1(r) &= \frac{I_{a,1}}{b_1 E_a} + \left( n_1^0 - \frac{I_{a,1}}{b_1 E_a} \right) \exp\left(-\frac{eQ}{rkT}\right), \\ n_2(r) &= \frac{I_{a,2}}{b_2 E_a} + \left( n_2^0 - \frac{I_{a,2}}{b_2 E_a} \right) \exp\left(\frac{eQ}{rkT}\right) \\ I_{a,1} &= -\frac{n_1^0 b_1 Q \exp\left(-\frac{eQ}{akT}\right)}{a^2 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{eQ}{akT}\right) + \frac{b_1 Q}{K_1} \right]} \\ I_{a,2} &= -\frac{n_2^0 b_2 Q \exp\left(\frac{eQ}{akT}\right)}{a^2 \left[ 1 - \exp\left(\frac{eQ}{akT}\right) + \frac{b_2 Q}{K_2} \right]} \end{aligned} \quad (1.36)$$

Другой подход к определению потоков ионов на аэрозольную частицу состоит во введении коэффициентов поглощения ионов частицей  $\chi_{1,2}$  (Морозов, 1984). В этом случае на поверхности частицы будут выполнены следующие соотношения для концентраций ионов:

$$n_1(a) = (1 - \chi_1) n_1^0, \quad n_2(a) = (1 - \chi_2) n_2^0 \quad (1.37)$$

При  $\chi_{1,2}=0$  поглощение ионов не происходит, а при  $\chi_{1,2}=1$  ионы поглощаются полностью. Подставляя (1.37) в выра-

жения для концентраций ионов в (1.36) при  $r=a$ , получим следующие выражения для потоков ионов на частицу:

$$I_{a,1} = -\frac{n_1^0 b_1 Q [\exp(-\frac{eQ}{akT}) - (1 - \chi_1)]}{a^2 [1 - \exp(-eQ/akT)]}$$

$$I_{a,2} = -\frac{n_2^0 b_2 Q [\exp(\frac{eQ}{akT}) - (1 - \chi_2)]}{a^2 [1 - \exp(eQ/akT)]} \quad (1.38)$$

Электрический заряд на аэрозольной частице рассчитывается на основе уравнения (1.31) и в стационарном случае определяется из равенства:  $I_{a,1} - I_{a,2} = 0$ . Используя выражения (1.38) получим уравнение для определения стационарного заряда на частице:

$$-\frac{\lambda_1}{\lambda_2} [e^{-y} - 1 - (1 - \chi_1) + (1 - \chi_1)e^y] = e^y - 1 - (1 - \chi_2) + (1 - \chi_2)e^{-y},$$

$$\lambda_1 = en_1^0 b_1, \lambda_2 = -en_2^0 b_2, y = \frac{eQ}{akT} \quad (1.39)$$

Обозначая:  $s = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}, e^y = z$ , получим уравнение для определения величины  $z$ :

$$z^2 [1 - s(1 - \chi_1)] - z [1 + (1 - \chi_2) - s(2 - \chi_1)] + (1 - \chi_2) - s = 0 \quad (1.40)$$

При  $\chi_1 = \chi_2 = 1$ , т.е. при полном поглощении ионов поверхностью аэрозольной частицы, из уравнения (1.40) следует формула Френкеля для стационарного заряда:

$$Q = \frac{kTa}{e} \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \quad (1.41)$$

В общем случае при неполном поглощении ионов аэрозольной частицей, решая уравнение (1.40) получим:

$$Q = \frac{\bar{k}Ta}{e} \ln \frac{[1 + (1 - \chi_2) - s(2 - \chi_1)]}{2[1 - s(1 - \chi_1)]} - \frac{\sqrt{[1 + (1 - \chi_2) - s(2 - \chi_1)]^2 - 4[(1 - \chi_2) - s][1 - s(1 - \chi_1)]}}{2[1 - s(1 - \chi_1)]}$$

Процесс установления по времени стационарного заряд определяется уравнением:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{4\pi en_1^0 b_1 Q [\exp(-\frac{eQ}{akT}) - (1 - \chi_1)]}{1 - \exp(-\frac{eQ}{akT})} - \frac{4\pi n_2^0 b_2 Q [\exp(\frac{eQ}{akT}) - (1 - \chi_2)]}{1 - \exp(\frac{eQ}{akT})} \quad (1.43)$$

Для коэффициентов присоединения  $\beta_{ij}^{(k)}$  получим в этом случае выражения:

$$\beta_{11}^{(k)} = \frac{I_{a,1}}{n_1^0} \times 4\pi a^2 = - \frac{4\pi b_1 ek [(1 - \chi_1) - \exp(-\frac{e^2 k}{akT})]}{[1 - \exp(-\frac{e^2 k}{akT})]}$$

$$\beta_{12}^{(k)} = \frac{I_{a,1}}{n_1^0} \times 4\pi a^2 = \frac{4\pi b_1 ek [\exp(\frac{e^2 k}{akT}) - (1 - \chi_1)]}{[\exp(\frac{e^2 k}{akT}) - 1]}$$

$$\beta_{22}^{(k)} = \frac{I_{a,2}}{n_2^0} \times 4\pi a^2 = - \frac{4\pi b_2 ek [\exp(-\frac{e^2 k}{akT}) - (1 - \chi_2)]}{[1 - \exp(-\frac{e^2 k}{akT})]}$$

$$\beta_{21}^{(k)} = \frac{I_{a,2}}{n_2^0} \times 4\pi a^2 = \frac{4\pi b_2 e k [\exp(\frac{e^2 k}{akT}) - (1 - \chi_2)]}{[\exp(\frac{e^2 k}{akT}) - 1]} \quad (1.44)$$

В таблице 3 приведены результаты расчетов коэффициентов присоединения  $\beta_{11}^{(k)}, \beta_{12}^{(k)}, \beta_{22}^{(k)}, \beta_{21}^{(k)}$  для  $k=0-4$   $b_1=1.36$   $\text{см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ ,  $b_2=-1.56$   $\text{см}^2/\text{В}\cdot\text{с}$ ,  $a=0.1$   $\text{мкм}$ ,  $T=300^\circ\text{К}$

Величины  $\beta_{ij}^{(k)}$  представлены в единицах  $\text{см}^3/\text{с}$  ( $\chi_1 = \chi_2 = 1$ ).

Таблица 3

Зависимость коэффициентов  $\beta_{ij}^{(k)}$  от заряда на аэрозольных частицах, вычисленных в диффузионном приближении.

к	$\beta_{11}^{(k)} \times 10^6$	$\beta_{12}^{(k)} \times 10^6$	$\beta_{22}^{(k)} \times 10^6$	$\beta_{21}^{(k)} \times 10^6$
0	3.2	3.2	3.67	3.67
1	3.13	5.83	3.59	6.68
2	2.44	7.38	2.80	8.46
3	1.77	9.12	2.03	10.46
4	1.24	11.04	1.42	12.66

Таблица 4

Зависимость коэффициентов присоединения  $\beta_{ij}^{(k)}$  от радиуса аэрозольной частицы вычисленных в кинетическом приближении

Радиус (мкм)	$\beta_0 \times 10^6$	$\beta_{12}^{(1)} \times 10^6$	$\beta_{11}^{(1)} \times 10^6$	$\beta_{12}^{(2)} \times 10^6$
0.002	0.0192	1.40	0	3.71
0.004	0.0555	1.41	0	3.72

0.006	0.102	1.45	0	3.74
0.008	0.157	1.55	0	3.78
0.01	0.218	1.60	0	3.81
0.04	1.40	2.71	0.338	4.48
0.06	2.25	3.57	1.42	5.17

Из таблиц 3 и 4 следует, что с ростом заряда на аэрозольных частицах величина коэффициента присоединения иона к одноименно заряженной частице уменьшается. Для очень маленьких частиц коэффициент присоединения иона к частице, заряженной одним элементарным зарядом того же знака обращается в нуль.

Величина электрического заряда, рассчитанного по формуле (1.41) не превышает двух электронов.

В кинетическом режиме, когда длина свободного пробега ионов относительно столкновений с нейтральными молекулами воздуха гораздо больше радиуса аэрозольной частицы, заряд на ней не превышает заряда одного электрона так как определяющим параметром задачи является величина

$\frac{e^2}{akT}$ , которая представляет отношение электростатической энергии взаимодействия заряженного иона с заряженной тем же знаком аэрозольной частицей и которое в рассматриваемом случае гораздо больше единицы.

Будем предполагать  $\chi_1 = \chi_2 = 1, eQ/kTa \ll 1$  и рассмотрим следующую задачу. Пусть в среде до момента  $t=0$  действовал источник ионизации, который в этот момент прекратил свое существование. Пусть  $n_1^0 = n_2^0 = n_{1,2}^0, n_1 = n_2$ . Тогда решая систему уравнений при  $q_1 = q_2 = 0$

$$\frac{dn_{1,2}}{dt} = q_{1,2} - \alpha n_{1,2}^2 - \beta_{1,2} N n_{1,2}, \beta_{1,2} = 4\pi a \bar{k} T |b_{1,2}| \quad (1.45)$$

получим следующее выражение для концентрации легких ионов:

$$n_1 = n_2 = n_{1,2}^0 \frac{\exp(-\frac{t}{\tau_{1,2}^*})}{1 + \frac{\tau_{1,2}^*}{\tau_{1,2}} [1 - \exp(-\frac{t}{\tau_{1,2}^*})]} \quad (1.46)$$

где:  $\tau_1^* = \tau_2^* = 1/\beta N$ ,  $\beta = \beta_1 \approx \beta_2$ ,  $\tau_{1,2} = 1/\alpha n_{1,2}^0$ ,  $\tau_1 = \tau_2$ .

Используя (1.46) можно определить, как заряжается аэрозольная частица, помещенная в нестационарную ионизованную среду, состоящую из легких ионов. При  $eQ/\bar{k}Ta \ll 1$  используя уравнение (1.43) и (1.46), получим уравнение, описывающее зарядение аэрозольной частицы:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} = 4\pi(\lambda_1^0 - \lambda_2^0) \frac{\bar{k}Ta}{e} \frac{\exp(-\frac{t}{\tau_1^*})}{1 + \frac{\tau_1^*}{\tau_1} [1 - \exp(-\frac{t}{\tau_1^*})]} \\ - 2\pi(\lambda_1^0 + \lambda_2^0) \frac{\exp(-\frac{t}{\tau_1})}{1 + \frac{\tau_1^*}{\tau_1} [1 - \exp(-\frac{t}{\tau_1^*})]} \end{aligned} \quad (1.47)$$

где:  $Q|_{t=0} = 0$ ,  $\lambda_1^0 = en_1^0 b_1$ ,  $\lambda_2^0 = en_2^0 |b_2|$ .

Интегрируя уравнение (1.47), получим следующее выражение для заряда аэрозольной частицы:

$$Q(t) = \frac{2\bar{k}Ta}{e} \frac{\lambda_1^0 - \lambda_2^0}{\lambda_1^0 + \lambda_2^0} \left\{ 1 - \left[ 1 + \frac{\tau_1^*}{\tau_1} (1 - \exp(-\frac{t}{\tau_1^*})) \right]^{-\tau_1/\tau_1} \right\} \quad (1.48)$$



где:  $\tau = 1/2\pi(\lambda_1^0 + \lambda_2^0)$ .

При  $t \rightarrow \infty$  получим следующее выражение для стационарного электрического заряда:

$$Q_* = \frac{2\bar{k}Ta}{e} \frac{\lambda_1^0 - \lambda_2^0}{\lambda_1^0 + \lambda_2^0} \left[ 1 - \left( 1 + \frac{\tau_1^*}{\tau_1} \right)^{-\tau_1/\tau} \right] \quad (1.49)$$

Рассмотрим поведение этого заряда при возрастании начальной концентрации легких ионов  $n_1^0 = n_2^0$ .

Пусть:  $a = 10 \text{ мкм}$ ,  $\alpha = 1.6 \times 10^{-6} \text{ см}^3 / \text{с}$ ,  $\beta_1 \approx \beta_2 = 4 \times 10^{-4} \text{ см}^3 / \text{с}$ ,  $N = 10^2; 10^3 \text{ см}^{-3}$ .

Тогда при  $n_1^0 = n_2^0 = 10^6 \text{ см}^{-3}$  и  $N = 10^2 \text{ см}^{-3}$  значение выражения в квадратных скобках составляет 0.99. Таким образом при росте начальной концентрации легких ионов значение заряда  $Q_*$  растет приближаясь к значению

$$\frac{2\bar{k}Ta}{e} \frac{\lambda_1^0 - \lambda_2^0}{\lambda_1^0 + \lambda_2^0} \quad (1.50)$$

Время релаксации заряда определяется характерным временем  $\tau_1^*$ .

Из выше изложенного видно, что в общем случае значение электрического заряда  $Q$  зависит от характерного времени рекомбинации  $\tau_1 = \tau_2$ , времени электрической релаксации  $\tau$  и времени жизни легкого иона за счет присоединения к аэрозольной частице  $\tau_1^* = \tau_2^*$ . Не учитывалось при рассмотрении различие подвижностей ионов различных знаков. Ввиду их небольшой разницы это не должно сказаться существенно на величине  $Q$ .

Если рекомбинация между ионами играет малую роль по сравнению с их присоединением к аэрозольной ча-

стице ( $\tau_{1,2} \gg \tau_{1,2}^*$ ), тогда концентрация ионов будет определяться выражением:

$$n_{1,2} = n_{1,2}^0 e^{-t/\tau_{1,2}^*} \quad (1.51)$$

Считая  $\tau_1^* \approx \tau_2^*$ , получим для  $Q(t)$ :

$$Q(t) = \frac{2\bar{k}Ta}{e} \frac{\lambda_1^0 - \lambda_2^0}{\lambda_1^0 + \lambda_2^0} \exp\left\{2\pi(\lambda_1^0 \tau_1^* e^{-\frac{t}{\tau_1^*}} + \lambda_2^0 \tau_2^* e^{-\frac{t}{\tau_2^*}})\right\} \times \\ \times [\exp\{-\tau_1^* 2\pi(\lambda_1^0 + \lambda_2^0) e^{-\frac{t}{\tau_2^*}}\} - \exp\{-2\pi(\lambda_1^0 + \lambda_2^0) \tau_1^*\}] \quad (1.52)$$

При  $t \rightarrow \infty$  выражение для  $Q(t)$  стремится к предельному значению:

$$Q^* = \frac{2\bar{k}Ta}{e} \frac{\lambda_1^0 - \lambda_2^0}{\lambda_1^0 + \lambda_2^0} (1 - e^{-\frac{\tau_1^*}{\tau}}) \quad (1.53)$$

Из выражения (1.53) следует, что несмотря на то, что ионы в основном рекомбинируют с аэрозольными частицами значение предельного заряда при  $\tau_1^* \ll \tau$  меньше заряда, вычисляемого в предположении постоянной концентрации ионов. Аналогичные результаты можно получить, если учесть избирательную способность аэрозольной частицы к поглощению ионов различных знаков (Шишкин, 1968). При постоянной концентрации легких ионов из формулы (1.29) следует уравнение для заряда аэрозольной частицы: <sup>43</sup>

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{4\pi\lambda_2 Q}{\exp\left(\frac{eQ}{kTa}\right) - 1} \left[ \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \exp\left(\frac{eQ}{kTa}\right) \right] \quad (1.54)$$

Равновесный электрический заряд определяется из этого уравнения условием  $\frac{dQ}{dt} = 0$  и определяется выражением (1.29) (Френкель, 1949). Из уравнения (1.54) также <sup>44</sup>

следует, что если заряд частицы меньше равновесного, то она заряжается до равновесного заряда, если же заряд частицы больше равновесного, то разряжается до этого значения. Если отношение  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  к единице, то уравнение (1.54)

заменяется на следующее:

$$\frac{dQ}{dt} = 2\pi(\lambda_1 + \lambda_2)(Q_* - Q), Q_* = \frac{2\bar{k}Ta}{e} \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \quad (1.55)$$

Рассмотренные выше формулы были получены в предположении равенства нулю суммарного тока на каплю, причем отличный от нуля стационарный заряд различной подвижностью ионов разных знаков. В другом подходе отличный от нуля стационарный заряд объясняется действием возможно существующего на поверхности частицы потенциала двойного слоя, играющего для положительных или отрицательных ионов роль потенциального барьера для проникновения в частицу. В этом случае в качестве стационарного условия выступало условие компенсации потенциала двойного слоя  $\Phi$  потенциалом заряда, приобретаемого частицей:

$$Q = a\Phi \quad (1.56)$$

Таким образом наблюдаемый в основном отрицательный заряд аэрозольных частиц в атмосфере объяснялся в первом случае более высокой отрицательной проводимостью, а во втором – совпадающим с внешней нормалью к поверхности частицы вектором поля двойного слоя. Однако сравнение с экспериментом расчетов по этим формулам (Шишкин, 1964) было неудачным, так как в случае однозарядных ионов с  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \approx 1.1 \div 1.4$ ,  $\Phi \approx 0.3$  В и частиц радиусом

$a \approx 1 \div 10 \mu\text{м}$  формула (39) дает заниженный результат, а формула (56) – более чем на порядок завышенный. В работе (1.56)

(Шишкин, 1967) было получено выражение для стационарного заряда:

$$Q_s = \frac{2\bar{k}Ta}{e} \frac{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 2}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 2}, \quad (1.57)$$

где появление двойки вместо единицы в аналогичном разложении (1.55) обуславливалось основанным на экспериментальных данных косвенном учете влияния потенциала двойного слоя. В работе (Борзилов, Седунов, 1971) была рассмотрена задача о заряджении аэрозольной частице, находящейся в ионизованной среде более строгими методами теоретической физики, в которой учитывался потенциал двойного слоя, возникающий на границе частица-атмосфера, конечное отношение длины свободного иона в атмосфере к радиусу частицы. Было рассчитаны диффузионные потоки ионов до расстояния  $l$  ( $l$  – длина свободного пробега иона), которые затем сшивались с кинетическими потоками (аналогичная процедура описана в приложении 1). В результате проведения такой процедуры определялись потоки положительных и отрицательных ионов на частицу, которые приравнялись друг другу и в результате чего было получено уравнение для определения стационарного заряда на частице, которое имеет следующий вид:

$$A - \frac{1}{F_1} Ak_1(1+k_1)x - (A+1)e^x + e^{2x} + \frac{k_1(1+k_1)}{F_1} xe^{2x} = 0$$

$$F_2 = 2\{1 + [1 - (1+k_1)^{-2}]^{3/2}\}^{-1}$$

$$F_1 = \frac{e^{e\Phi/\bar{k}T} \{(1+k_1)^2 - [(1+k_1)^2 - 1] \exp\left[\frac{e\Phi}{kT} \cdot \frac{1}{(1+k_1)^2 - 1}\right]\}}{\Psi\left(\sqrt{-\frac{e\Phi}{kT}}, k\right)}, \quad (1.58)$$

где:  $A = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}, k_1 = \frac{l}{a}, \Psi(\sqrt{\frac{e\Phi}{kT}}, k_1)$  – функция, определяемая в рассматриваемой работе.

Равновесный заряд определяется выражением:

$$Q_* = \frac{\bar{k}Ta}{e}(1 + k_1)x_0(a) \quad (1.59)$$

где:  $x_0(a)$  – корни уравнения (1.58)

На рисунке 1 представлены численные расчеты заряда частиц, выраженного в зарядах электрона в зависимости от радиуса при  $l = 0.5 \text{ мкм}, \Phi = 0.3, 0.15, 0.1, 0.06, 0.030$  и  $0 \text{ в}$  (кривые 1-6). Выделяются три характерных области:

$$1. \quad e^{\frac{e\Phi}{kT}} \frac{l}{a} \ll 1 \quad 2. \quad \frac{l}{a} \gg 1 \quad 3. \quad \frac{l}{a} \approx 1; \frac{l}{a} \ll 1, \text{ но}$$

$$\frac{l}{a} e^{\frac{e\Phi}{kT}} \approx 1 \text{ или } \frac{l}{a} e^{\frac{e\Phi}{kT}} \gg 1. \text{ В первой области все кривые стремятся к асимптотической прямой по формуле (1.39). Во$$

втором случае асимптотика описывается формулой:

$$Q_* = \frac{\bar{k}T}{2e} \ln\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{\frac{e\Phi}{kT}}\right) \quad (1.60)$$

В третьем случае поскольку рассматривается водный аэрозоль, возможно лучшее согласие меньшие значения потенциала  $\Phi = 0.1 - 0.06 \text{ в}$ . Это уменьшение потенциала происходит за счет добавки к чистой воде примесей различных солей. Экспериментальные данные приведены на рисунке 1 (кривая 7). На рисунке 2 приведен график зависимости от радиуса величины  $\frac{eQ}{kTa}$  при значениях  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2} \approx 2$  и

$\Phi = 0.06 \text{ в}$  (кривая 1) и  $0.1 \text{ в}$  (кривая 2). Пересечение кривых с осью абсцисс, соответствующее нулевому стационарному происходит в районе  $a \approx 10^{-4} \text{ см} = 1 \text{ мкм}$ , что

при уменьшении  $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$  переведет заряды этих капель в отрицательные, а при увеличении – в положительные. Аналогичные результаты были получены в работе (Седова, Черный, 1986). Рассмотрим случай  $aK_{1,2}/D_{1,2} \ll 1$ . Для стационарного заряда в этом случае получаем выражение:

$$Q_* = \frac{1}{2} \frac{\bar{k}Ta}{e} \ln \frac{n_1^0 K_1}{n_2^0 K_2} \quad (1.61)$$

Для ионов с примерно одинаковой массой отношение  $\frac{K_1}{K_2}$  определяется формулой (Киреев, 1975):

$$\frac{K_1}{K_2} = \exp\left(-\frac{\Delta E}{kT}\right), \Delta E = E_1 - E_2 \quad (1.62)$$

где:  $E_{1,2}$  - энергии активации реакций захвата положительных и отрицательных ионов частицей.

На поверхности обычно образуется двойной электрический слой со скачком электрического потенциала со скачком потенциала  $\Delta\varphi = \varphi_{a,2}^0 - \varphi_{a,1}^0$  и в этом случае имеем  $|\Delta E| \leq e|\Delta\varphi|$ .

Например для аэрозольных капель воды  $\Delta\varphi \approx 0.25\text{в}$  (Фукс, 1955, Соу, 1975). Однако вообще говоря  $|\Delta E| \neq e|\Delta\varphi|$ .

В частности может быть  $E_{1,2} \approx e|\Delta\varphi|$ , но  $|\Delta E| \ll e|\Delta\varphi|$ .

В квазинейтральном газе для стационарного заряда справедливо соотношение, следующее из выражений (1.61), (1.62):

$$Q_* = -\frac{\Delta E}{2e} a, |Q_*| \leq a|\Delta\varphi| \quad (1.63)$$

Это выражение аналогично выражению (1. 56), связывающего заряд частицы с потенциалом двойного слоя на поверхности аэрозольной частицы.

1.3.3 Влияние формы аэрозольных частиц на их заряд в ионизованной среде.

Такая задача была рассмотрена в работе (Седунов, 1959). Изменение концентрации ионов в окрестности аэрозольной частицы описывалось уравнением диффузии:

$$D_{1,2} \operatorname{div} \operatorname{grad} n_{1,2} - b_{1,2} \operatorname{div}(n_{1,2} \vec{E}) = 0, \quad \vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (1.64)$$

Уравнение (1.64) записывалось в криволинейной системе координат:

$$D_{1,2} \frac{1}{h_i h_j h_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{h_j h_k}{h_i} \frac{\partial n_{1,2}}{\partial x_i} \right) + b_{1,2} \frac{1}{h_i h_j h_k} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{h_j h_k}{h_i} n_{1,2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) = 0 \quad (1.65)$$

где:  $h_i, h_j, h_k$  - параметры Ламэ,  $i, j, k$  - 1, 2, 3 соответственно.

Идея решения уравнения (1.65) состоит в следующем. Необходимо выбрать такую криволинейную систему координат в которой концентрации ионов и потенциал электрического поля зависят от одной переменной. Тогда это уравнение интегрируется. Система существует.

Если на одной из ее характерных координатных плоскостей  $n_{1,2}$ ,  $\varphi$  являются постоянными, т. е. необходимым условием является существование такой поверхности, которая является эквипотенциальной по отношению к этим величинам. В частности одной из таких поверхностей является поверхность частицы. где эти величины постоянны. Используя эту методику, можно свести уравнение (1.65) к уравнению с одной переменной, рассчитать потоки ионов на частицу и найти стационарный электрический заряд аэрозольной частицы. Этот заряд равен:

$$Q_* = \frac{\bar{k}T}{e} C \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

где:  $C$  - электростатическая емкость частицы. В случае сферической частицы  $C = a$ . Таким образом равновесный заряд имеет такое же представление, как и (1.41) только вместо радиуса частицы стоит ее емкость, которую необходимо рассчитывать, используя методы электродинамики (Смайт, 1954).

1.3.4 Моделирование заряжения аэрозольных частиц в ионосфере.

Задача заряжения аэрозольных частиц, в ионизированной нижней атмосфере, была рассмотрена выше. В настоящем параграфе рассматривается задача о заряжении аэрозольных частиц в ионосферной плазме, состоящей из ионов и электронов. Электрический заряд аэрозольной частицы  $Q$  определяется уравнением (Фортов и др, 2004):

$$\frac{dQ}{dt} = I_e - I_i \quad (1.67)$$

где:  $I_e$ ,  $I_i$  - потоки электронов и ионов на аэрозольную частицу.

Эти потоки определяются следующими выражениями:

$$I_e = en_e \int v_e \delta_e(v) f_e(v_e) d^3v \quad (1.68)$$

$$I_i = en_i \int v_i \delta_i(v) f_i(v_i) d^3v$$

где:

$n_e$ ,  $n_i$  - концентрации электронов и ионов;

$\delta_e(v)$ ,  $\delta_i(v)$  - сечение поглощения электронов и ионов аэрозольной частицы;

$v_{e(i)}$  - скорость электронов и ионов относительной частицы;

$f_e$  и  $f_i$  - функции распределения электронов и ионов скорости;



$$\begin{aligned}
 f_e(v) &= (2\pi v_{Te}^2)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{Te}^2}\right) \\
 f_i(v) &= (2\pi v_{Ti}^2)^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{v^2}{2v_{Ti}^2}\right) \\
 v_{Te} &= \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}}, \quad v_{Ti} = \sqrt{\frac{kT_i}{m_i}}
 \end{aligned}
 \tag{1.69}$$

где:

$T_e$  – температура электронов;

$T_i$  – температура ионов;

$m_e, m_i$  – масса электронов и ионов.

Для расчета  $I_e$  и  $I_i$  используется приближение ограниченного орбитального движения, которое определяется условиями:  $a \ll \lambda_D \ll l_{e(i)}$ , где  $a$  – радиус частицы,  $\lambda_D$  – радиус Дебая,  $l_{e(i)}$  – длина свободного пробега электронов и ионов. Частицы считаются изолированными в том смысле, что другие аэрозольные частицы не оказывают влияния на движение электронов и ионов в ее окрестности. В этом приближении для  $\delta_e(v)$ ,  $\delta_i(v)$  имеет место представление:

$$\delta_e(v) = \begin{cases} \pi a^2 \left(1 + \frac{2e\varphi_s}{m_e v^2}\right), & \text{при } \frac{2e\varphi_s}{m_e v^2} > -1 \\ 0 & \text{при } \frac{2e\varphi_s}{m_e v^2} < -1 \end{cases}
 \tag{1.70}$$

$$\delta_i(v) = \pi a^2 \left(1 - \frac{2e\varphi_s}{m_i v^2}\right)$$

где:

$\varphi_s$  – электрический потенциал частицы, который предполагается отрицательным ( $\varphi_s < 0$ ). Вычисления с использова-

нием выражений (1.69) и (1.70) дают следующие выражения для  $I_e$  и  $I_i$ :

$$I_e = \sqrt{8\pi} a^2 e n_e v_{Te} \exp\left(\frac{e\varphi_s}{kT_e}\right) \quad (1.71)$$

$$I_i = \sqrt{8\pi} a^2 e n_i v_{Ti} \left(1 - \frac{e\varphi_s}{kT_i}\right)$$

где:  $k$  – постоянная Больцмана.

Стационарный электрический потенциал  $\varphi_s$  определяется приближенно уравнением  $\varphi_s = -kT_e/e$ , отсюда следует выражение для электрического заряда для сферической аэрозольной частицы:  $Q = -kT_e a/e$ , где  $a$  – радиус частицы. При  $T_e = 400^\circ\text{K}$ , получили  $a = 100$  мкм  $|Q| = 2430e$ , при  $a = 1$  мкм  $|Q| = 24e$ , при  $a = 0,1$  мкм  $|Q| \approx 2.4e$ . для нахождения заряда частицы, как функции времени необходимо рассматривать уравнение (1.67), которое с учетом (1.71) представляется в виде:

$$\frac{dZ}{dt} = \sqrt{8\pi} a \left[ n_e v_{Te} \exp\left(\frac{e\varphi_s}{kT_e}\right) - n_i v_{Te} \left(1 - \frac{e\varphi_s}{kT_i}\right) \right] \quad (1.72)$$

где:  $Z = Q/e$  – элементарный заряд.

Введем замену переменных:

$$Z = \frac{|Z|e^2}{aT_e}, \quad \tau = \frac{T_e}{T_i}, \quad \mu = \frac{m_e}{m_i}, \quad t' = \frac{\omega_{pi}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{a}{\lambda_{Di}}\right)t \quad (1.73)$$

где  $\lambda_{Di} = \sqrt{\frac{kT_i}{4\pi e^2 n_i}}$  – ионный дебаевский радиус,  $\omega_{pi} = \frac{v_{Ti}}{\lambda_{Di}}$

– ионная плазменная частота. Используя эту замену переменных получим вместо (1.72) уравнение, описывающее процесс зарядки аэрозольной частицы в ионизированной среде:

$$\frac{dz}{dt'} = \frac{1}{\sqrt{\mu\tau}} \left[ \exp(-z) - \left(\frac{\mu}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}} (1+zz) \right] \quad (1.74)$$

Начальное условие для решения уравнения (1.74):  $z(t'=0)=0$  и решение этого уравнения дает возможность определить стационарный заряд  $z=Z(\tau, \mu)$  при  $t \rightarrow \infty$  и характерное время зарядки  $t'_{ch}(\tau, \mu)$ , Это время оценивается по формуле  $t_{ch} = Q/I_0$ ,

$I_0 = I_{e0} = I_{i0}$ , где потоки с индексом нуль – это потоки ионов и электронов в стационарном состоянии.

В случае, когда выполнено условие:  $l_{i(e)} \ll \lambda_D$  имеет место диффузионный режим зарядки. Заряд (потенциал) частицы определяется равенством электронного и ионного потоков на ее поверхность, которые записываются следующим образом:

$$I_i = 4\pi r^2 \left[ n_i b_i \frac{d\varphi}{dr} + D_i \frac{dn_i}{dr} \right],$$

$$-I_e = -4\pi r^2 \left[ n_e |b_e| \frac{d\varphi}{dr} - D_e \frac{dn_e}{dr} \right] \quad (1.75)$$

где:  $\varphi(r)$  - электрический потенциал в окрестности аэрозольной частицы,

$b_{i(e)}, D_{i(e)}$  - подвижность и коэффициент диффузии ионов (электронов). Уравнения (1.75) дополняются уравнением Пуассона:

$$\nabla^2 \varphi = -4\pi(n_i - n_e) \quad (1.76)$$

и соответствующими граничными условиями. На поглощающей поверхности частицы принято задавать следующие условия:

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= \varphi_s, \quad \varphi(\infty) = 0 \\ n_i(a) &= n_e(a) = 0, \quad n_i(\infty) = n_e(\infty) = n_0 \end{aligned} \quad (1.77)$$

Используя методы, развитые выше, можно оценить отрицательный заряд на аэрозольной частице по формуле (1.41),

предполагая выполненными условия диффузионного заряжения. Тогда получим:

$$Q = -\frac{\bar{k}T_e a}{e} \ln \frac{\lambda_e}{\lambda_i} \quad (1.78)$$

где:  $T_e$  – электронная температура ионосферной плазмы.

Для частицы с радиусом  $a=100$ мкм,  $T_e=400^{\circ}\text{K}$ ,  $Q=1000e$

#### 1.4 Влияние радиоактивных веществ на ионный состав атмосферы

Радиоактивные вещества например антропогенного происхождения вносят дополнительный вклад в ионный состав атмосферы через дополнительную интенсивность ионообразования в уравнении (1.2). В этом случае уравнение (1.2) в стационарном случае приобретает вид:

$$q_0 + q_1 - \alpha n_{1,2}^2 - \beta_{1,2} N n_{1,2} = 0 \quad (1.79)$$

где:  $q_0$  - фоновая интенсивность ионообразования,  $q_1$  - интенсивность ионообразования, обусловленная антропогенными источниками. Из этого соотношения следует выражение для концентрации легких ионов  $n_{1,2}$ :

$$n_{1,2} = \frac{2(q_0 + q_1)}{\beta_{1,2} N + \sqrt{(\beta_{1,2} N)^2 + 4(q_0 + q_1)\alpha}} \quad (1.80)$$

Изменения концентрации легких ионов приводят к изменению электрической проводимости атмосферы в соответствии с формулой (2) и в этом случае электрическая проводимость атмосферы может являться также индикатором радиоактивного загрязнения атмосферы, как это было в наблюдениях последствий Чернобыльской катастрофы на территории Швеции [10].

При определении интенсивности ионообразования, обусловленной радиоактивными веществами важной задачей является ее связь с концентрацией того или иного ра-

диоактивного элемента. В работе [Willet, 1985], посвященной решению задачи о распределении радиоактивного элемента  $Rn^{222}$  и продуктов его распада в приземном слое используется для связи  $q_1$  и концентрации радона  $Q$  соотношение:

отношение:  $q_1 = \frac{E}{w_i \tau} Q$ , где  $E$ - энергия  $\alpha$  - частиц для этого радиоактивного элемента,  $w_i$ - энергия, необходимая для образования одной пары ионов из молекул воздуха, равная 33.9-32.3 эв.,  $\tau$  - период полураспада радона.

Аналогичная формула имеет место для радиоактивного элемента  $Kr-85$ , только в этом случае  $E$  есть энергия  $\beta$  частиц. Важно подчеркнуть, что для проявления влияния антропогенного радиоактивного загрязнения необходимо выполнение условия:  $q_1 \gg q_0$ , то есть интенсивность ионообразования, создаваемая антропогенными радиоактивными веществами должна значительно превышать фоновую интенсивность образования. Влияние радиоактивных веществ на электрическое состояние приземного слоя рассматривается ниже в главе, посвященной электродному приземному слою.

1. 5. Математические модели переноса ионов в приземном слое атмосферы. Классический и турбулентный электродный эффекты.

Вблизи земной поверхности существует область, в которой описание электрических процессов отличается от их описания в свободной атмосфере (Атмосфера. Справочник.....1991). Эта область приземного слоя атмосферы, в которой существенное влияние на распределение электрических характеристик оказывают, процессы турбулентного обмена, наличие поверхностных источников радиоактивных веществ, свойства подстилающей поверхности, наличие аэрозольных частиц. Наличие земной поверхности приводит к образованию вблизи этой поверхности электродного слоя, в котором концентрации положительных и

отрицательных ионов, а следовательно и электрическая проводимость зависят от напряженности электрического поля. Поэтому для их определения необходимо исходить из следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} + \operatorname{div}(n_{1,2}\vec{v}) + \operatorname{div}(n_{1,2}b_{1,2}\vec{E}) - \operatorname{div}(D_{1,2}\operatorname{grad}n_{1,2}) = \\ = q_{1,2}(\vec{r}) - \alpha n_1 n_2 - K_{1,2} \end{aligned}$$

$$\operatorname{div}\vec{E} = 4\pi e(n_1 - n_2) \quad (1.81)$$

где:  $n_{1,2}$  - концентрации положительных и отрицательных легких ионов,  $b_{1,2}$  - их подвижности,  $\vec{v}$  - скорость атмосферного воздуха,  $D_{1,2}$  - коэффициент молекулярной диффузии,  $q_{1,2}(\vec{r})$  - интенсивность ионобразования,  $\alpha$  - коэффициент рекомбинации,  $K_{1,2}$  - член, описывающий взаимодействие ионов с аэрозольными частицами,  $E$  - напряженность электрического поля.

В общем случае получить решение системы уравнений (1.81) получить невозможно. В настоящей главе рассматриваются два предельных случая электрического состояния приземного слоя: классический и турбулентный электродные эффекты. Необходимо отметить, что при решении таких задач можно ограничиться решением одномерных задач, поскольку напряженность электрического поля направлена по нормали к земной поверхности, а масштабы горизонтального изменения электрических величин  $L_x, L_y$ , гораздо больше масштаба вертикального изменения  $L_z$  ( $L_x, L_y \gg L_z$ ).

### 1.5.1 Классический электродный эффект.

Классический электродный эффект проявляется в условиях хорошей погоды (т.е. при отсутствии ветра, облачности, конвекции, загрязнений) вблизи земной поверхности. Пренебрегая молекулярной диффузией, получим уравнения, описывающие классический электродный эффект:

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} + \operatorname{div}(n_1 b_1 \vec{E}) &= q(\vec{r}) - \alpha n_1 n_2 \\ \frac{\partial n_2}{\partial t} + \operatorname{div}(n_2 b_2 \vec{E}) &= q(\vec{r}) - \alpha n_1 n_2 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi e(n_1 - n_2), \operatorname{rot} \vec{E} = 0 \end{aligned} \quad (1.82)$$

В стационарном ( $\frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} = 0$ ), одномерном случае при наличии горизонтально-однородной поверхности и зависимости источников ионизации от вертикальной координаты  $z$ , система уравнений (1.82) приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} b_1 \frac{d}{dz} n_1 E_z &= q(z) - \alpha n_1 n_2, \\ b_2 \frac{d}{dz} n_2 E_z &= q(z) - \alpha n_1 n_2, \\ \frac{dE_z}{dz} &= 4\pi e(n_1 - n_2) = 4\pi \rho, \end{aligned} \quad (1.83)$$

где:  $E_z$  - напряженность электрического поля, направленная по оси  $z$ ,  $\rho$  - плотность электрического заряда.

$$q(z) \gg b_1 \frac{d}{dz} n_1 E_z, q(z) \gg \left| b_2 \frac{d}{dz} n_2 E_z \right|$$

Концентрация положительных и отрицательных ионов определяется выражением:

$$n_1 = n_2 = \sqrt{\frac{q(z)}{\alpha}}$$

а электрическая проводимость:

$$\lambda(z) = e(b_1 + |b_2|) \sqrt{\frac{q(z)}{\alpha}}$$

В этом случае изменение электрической проводимости с высотой определяется интенсивностью ионообразования  $q(z)$ . Тогда распределение напряженности электрического поля с высотой имеет вид:

$$E_z = \frac{j_0}{\lambda} = \frac{j_0}{e} \sqrt{\frac{\alpha}{q(z)}} (b_1 + |b_2|)^{-1}, \quad (1.84)$$

а распределение плотности электрического заряда представляется формулой:

$$\rho(z) = -\frac{j_0}{4\pi\lambda^2} \frac{d\lambda}{dz} \quad (1.85)$$

где:  $j_0$  - плотности электрического тока в атмосфере.

Так как  $j_0 < 0$ , то из выражения (1.85) следует, что плотность электрического заряда  $\rho < 0$  при  $\partial\lambda/\partial z < 0$  больше нуля при  $\partial\lambda/\partial z > 0$ , то есть при мощных источниках ионизации изменение электрической проводимости с высотой определяет распределение плотности электрического заряда с высотой.

Анализ системы уравнений (1.83), основанный на теории размерностей, показывает, что характерная толщина электродного слоя определяется выражением:

$$L = b_0 E_0 \tau, \tau = (q\alpha)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.86)$$

где:  $b_0 = \max\{b_1, b_2\}$ ,  $E_0$  - напряженность электрического поля вблизи земной поверхности. При  $E_0 = 100 \text{ В/м}$ ,  $q = 10^7 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha = 1.6 \times 10^{-12} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$ ,  $b_0 = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$ ,  $L = 3.8 \text{ м}$ . Величина  $\tau$  определяет время жизни иона от его возникновения до аннигиляции с ионом противоположного знака.



В общем случае исследование классического электродного эффекта проводится численными методами. В работе (Норреп, 1967) граничные условия задавались в виде:

$$n_2(z=0) = 0, E(z=0) = E_0, n_1(\infty) = n_2(\infty) = \sqrt{\frac{q(\infty)}{\alpha}} \quad (1.87)$$

С математической точки зрения система уравнений (49) с граничными условиями (1.87) представляет так называемую двухточечную краевую задачу для обыкновенных дифференциальных уравнений (Камке, 1971). Краевая задача сводилась к задаче Коши следующим методом: значение  $n_1$  на границе  $z=0$  подбиралась таким образом, чтобы решение удовлетворяло граничным условиям на бесконечности. Для численного решения системы уравнений использовался метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Как показывают результаты расчетов, представленные рис. 11 на высоте чуть большей 4м электродный эффект исчезает концентрации ионов стремятся к своему асимптотическому значению. Значение концентрации положительных ионов  $n_1$  внутри электродного слоя остается приблизительно постоянной. На рисунке представлены расчеты для  $b_1 = 1.2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$ ,  $b_2 = 1.4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \text{ В}^{-1} \text{ с}^{-1}$   $q(z) = 7 \cdot 10^6 + Q_0 \exp(-2.362z) \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$ .

$Q_0 = 4.8 \cdot 10^6 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}$  С ростом  $Q_0$  имеет место отмеченная выше ситуация, когда электрическое поле не успевает унести наверх отрицательные ионы, вырабатываемые источником вблизи поверхности и профиль электрической проводимости и напряженности электрического поля определяется именно этим процессом.

### 1. 5. 2 Турбулентный электродный эффект.

В реальных условиях вблизи земной поверхности вследствие взаимодействия горизонтального ветра с под-

стиляющей поверхностью и нагрева поверхности солнечным излучением, приводящего к появлению вертикальных конвективных движений, классический электродный эффект в турбулентный электродный эффект. Термогидродинамические процессы в приземном слое приобретают турбулентный характер, что осложняет описание электрических процессов в этой области атмосферы. Одним из подходов к описанию электрических процессов при наличии турбулентности состоит в следующем: все известные и неизвестные величины  $\bar{v}, n_{1,2}, \bar{E}, \rho$  в виде (Монин, Яглом, 1965):

$$n_{1,2} = \langle n_{1,2} \rangle + n'_{1,2}, \bar{v} = \langle \bar{v} \rangle + \bar{v}', \rho = \langle \rho \rangle + \rho', \bar{E} = \langle \bar{E} \rangle + \bar{E}' \quad (1.88)$$

где: величины, стоящие в угловых скобках – средние величины, а величины со штрихами – флуктуации этих величин.

Средние величины рассматриваемых величин определяются в соответствии с формулой:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} f(t) dt \quad (1.89)$$

где: временной масштаб  $T_1$  удовлетворяет условию  $\tau \ll T_1 \ll T$ , где  $\tau$  - характерный временной масштаб флуктуаций,  $T$  - характерный временной масштаб изменения средних величин,  $\langle f' \rangle = 0$ .

Подставляя (1.88) в (1.81), пренебрегая членами, описывающими взаимодействие ионов с аэрозольными частицами и усредним соответствующие уравнения, пренебрегая квадратичными членами, а для членов  $\langle n'_{1,2} \bar{v}' \rangle, \langle \rho' \bar{v}' \rangle$  используем представление Прандтля:

$$\langle n'_{1,2} \bar{v}' \rangle = -D_T \nabla \langle n_{1,2} \rangle, \langle \rho' \bar{v}' \rangle = -D_T \langle \rho \rangle$$

где:  $D_T$  - коэффициент турбулентной диффузии (или турбулентного обмена). В результате этой процедуры получим

уравнения, описывающие электрические процессы в условиях турбулентного приземного слоя:

$$\frac{\partial \langle n_{1,2} \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \langle n_{1,2} \rangle \langle \vec{v} \rangle + b_{1,2} \operatorname{div} \langle n_{1,2} \rangle \langle \vec{E} \rangle - \operatorname{div} [(D_T(\vec{r}) + D_{1,2}) \nabla n_{1,2}] =$$

$$= q(\vec{r}) - \alpha \langle n_1 \rangle \langle n_2 \rangle$$

$$\operatorname{div} \langle \vec{E} \rangle = 4\pi e (\langle n_1 \rangle - \langle n_2 \rangle) = 4\pi \langle \rho \rangle \quad (1.90)$$

Для средней плотности электрического заряда  $\langle \rho \rangle$ , используя первые два уравнения системы (1.90), т.е. умножая первое уравнение на заряд электрона  $e$ , а второе на  $-e$  и складывая оба эти уравнения, получим уравнение:

$$\frac{\partial \langle \rho \rangle}{\partial t} + \operatorname{div} \langle \rho \rangle \langle \vec{v} \rangle - \operatorname{div} D_T(\vec{r}) \operatorname{grad} \langle \rho \rangle + \operatorname{div} \langle \lambda \rangle \langle \vec{E} \rangle = 0$$

$$\langle \lambda \rangle = e b_1 \langle n_1 \rangle + e |b_2| \langle n_2 \rangle \quad (1.91)$$

Далее необходимо сделать предположение о виде коэффициента турбулентной диффузии  $D_T(\vec{r})$ .

Поскольку в данном случае концентрации легких ионов является пассивной примесью, то можно использовать результаты работы (Монин, Обухов, 1954) в которой показано, что для горизонтально-однородного конвективно-неустойчивого приземного слоя можно использовать следующее представление:

$$D_T(z) = D_1 z, \quad z < L$$

$$D_T(z) = D_{4/3} z^{4/3}, \quad z > L \quad (1.92)$$

где:  $L$  - масштаб Монина-Обухова.

В общем случае иногда используют следующее представление для коэффициента турбулентной диффузии (турбулентного обмена):  $D_T(z) = D_m z^m$ , где  $m$  - некоторое число, характеризующее стратификацию приземного слоя.

В так называемом случае сильного турбулентного перемешивания, соответствующего выполнению условия:

$$b_0 E_\infty \tau / l_m \ll 1, \tau = (q\alpha)^{-1/2}, l_m = (D_m \tau)^{1/(2-m)}$$

система уравнений (1.90) и (1.91) в горизонтально-однородном случае сводится к системе уравнений (Куповых, Морозов, Шварц, 1998):

$$\begin{aligned} \frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} (D_m z^m \frac{\partial n_{1,2}}{\partial z}) &= q(z) - \alpha n_{1,2}^2, \\ \frac{\partial E}{\partial t} - D_m z^m \frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + 4\pi\lambda(z, t)E &= 4\pi j_0(t), \rho = \frac{1}{4\pi} \frac{dE}{dz} \end{aligned} \quad (1.93)$$

Здесь угловые скобки у усредненных величин отброшены.

При  $T \gg \tau_\lambda, T \gg \tau$ , где  $\tau_\lambda$  - время электрической релаксации,  $\tau$  - время жизни иона.  $T$  - характерное время изменения гидродинамических и электрических характеристик атмосферы система уравнений может рассматриваться, как стационарная:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dz} (D_m z^m \frac{dn_{1,2}}{dz}) &= q(z) - \alpha n_{1,2}^2, \\ -D_m z^m \frac{d^2 E}{dz^2} + 4\pi\lambda(z)E &= 4\pi j_0 \end{aligned} \quad (1.94)$$

Как показывает анализ, основанный на теории размерности, толщина турбулентного электродного слоя определяется выражением:

$$L_m = (D_m \tau_{\lambda\infty})^{1/2-m}, \tau_{\lambda\infty} = (4\pi\lambda_\infty)^{-1}, \lambda_\infty = e(b_1 + |b_2|) \sqrt{\frac{q_\infty}{\alpha}} \quad (1.95)$$

Например при нейтральной стратификации ( $m=1$ ),  $D_1=0.2$  м/с,  $\lambda_\infty = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ с}^{-1}$ ,  $L_1=15\text{м}$ , а для термически-неустойчивой стратификации ( $m=4/3$ )

$D_{4/3}=3.22 \text{ см}^{2/3} \text{ с}^{-1}$ ,  $L_{4/3}=35.6\text{м}$ . Как мы увидим ниже в случае аэрозольного загрязнения эта величина возрастает, вслед-

ствие увеличения времени электрической релаксации. Решение системы (1.94) зависит от задания граничных условий. Формулировка общих граничных условий для земной поверхности затруднена из-за многообразия условий (наличие поверхностных радиоактивных источников, травяного покрова, неровностей поверхности). Один из возможных вариантов задания граничных условий, часто используемых при решении системы (1.94) (Willet, 1978; Морозов, 1986):

$$\begin{aligned} n_{1,2}(z = z_0) = 0, n_{1,2}(z \rightarrow \infty) &= \sqrt{\frac{q(\infty)}{\alpha}}, \frac{dE}{dz}(z = z_0) = \\ &= 0, E(z \rightarrow \infty) = \frac{j_0}{\lambda_\infty} \end{aligned} \quad (1.96)$$

Другие возможные граничные условия, а также варианты численных решений приведены в (Атмосфера. Справочник.....1992; Куповых и др.1998).

1.5.3 Основные уравнения, описывающие влияние аэрозольных частиц на электрические характеристики приземного слоя.

Влияние аэрозольных частиц на структуру электродного приземного слоя в стационарном, одномерном случае описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dz}(D_T(z) \frac{dn_{1,2}}{dz}) + \frac{d}{dz}(b_{1,2} n_{1,2} E_z) &= q(z) - \alpha n_1 n_2 - n_{1,2} \Phi_{1,2} \\ -\frac{d}{dz}(D_T(z) \frac{dN_0(z)}{dz}) &= G_0(z) \\ -\frac{d}{dz}(D_T(z) \frac{dN_{1,2}^{(k)}(z)}{dz}) + \frac{d}{dz} I_{z,1,2}^{(k)} &= G_{1,2}^{(k)}, I_{z,1,2}^{(k)} = B_{1,2}^{(k)} \cdot N_{1,2}^{(k)} \cdot E_z \\ \frac{dE_z}{dz} &= 4\pi\rho \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Phi_1 &= \int \sum_{r, k=0}^{p-1} \beta_{11}^{(k)}(r) N_1^{(k)}(r) dr + \int \sum_{r, k=1}^p \beta_{12}^{(k)}(r) N_2^{(k)}(r) dr \\
\Phi_2 &= \int \sum_{r, k=0}^{p-1} \beta_{22}^{(k)}(r) N_2^{(k)}(r) dr + \int \sum_{r, k=1}^p \beta_{21}^{(k)}(r) N_1^{(k)}(r) dr \\
G_0 &= n_1 \beta_{12}^{(1)} N_2^{(1)} + n_2 \beta_{21}^{(2)} N_1^{(1)} - n_1 \beta_{10}^{(0)} N_0 - n_2 \beta_{20}^{(0)} N_0 \\
G_1^{(k)} &= n_1 \beta_{11}^{(k-1)} N_1^{(k-1)} - n_1 \beta_{11}^{(k)} N_1^{(k)} + n_2 \beta_{21}^{(k+1)} N_1^{(k+1)} - n_2 \beta_{21}^{(k)} N_1^{(k)} \\
G_2^{(k)} &= n_2 \beta_{22}^{(k-1)} N_2^{(k-1)} - n_2 \beta_{22}^{(k)} N_2^{(k)} + n_1 \beta_{12}^{(k+1)} N_2^{(k+1)} - n_1 \beta_{12}^{(k)} N_2^{(k)} \\
\rho &= e(n_1 - n_2) + e \int \left( \sum_{r, k=1}^p k N_1^{(k)} - \sum_{r, k=1}^p k N_2^{(k)} \right) dr \quad (1.97)
\end{aligned}$$

где:  $n_{1,2}$  - концентрация положительных и отрицательных легких ионов,  $b_{1,2}$  - их подвижности,  $N_0(r)$  - функция распределения нейтральных аэрозольных частиц по радиусу  $r$ ,  $N_i^{(k)}(r)$  - функции распределения заряженных аэрозольных частиц,  $B_i^{(k)}$  - их подвижности,  $\beta_{ij}^{(k)}$  - коэффициенты присоединения легкого иона полярности  $i$  к аэрозольной частице полярности  $j$ , имеющей  $k$ - элементарных зарядов и радиус  $r$ .

Запись членов, описывающих взаимодействие легких ионов с аэрозольными частицами в уравнениях системы (1.97), использовалась в ряде работ (Брикар, 1969; Норпель, Фрикс, 1986; Норпель, 1977) и обосновывается в работе (Борзилов и др., 1973), где условие записи этих членов имеет вид  $((n_{1,2} r^3) < 1$  и при  $n_{1,2} = 10^9 \text{ м}^{-3}$ ,  $r < 1000 \text{ мкм}$ . Выделение группы легких ионов и группы аэрозольных ионов также имеет экспериментальное обоснование (Таммет и др, 1988), хотя можно использовать более подробное описание группы однозарядных ионов (Комаров, 1987) При написании системы уравнений (1.97) пренебрегалось скоростями седиментации. Поскольку рассматриваются аэрозольные ча-

стицы в диапазоне радиусов  $r < 0.5 \mu\text{км}$ , то вследствие их малости ими можно пренебречь и считать коэффициенты турбулентного обмена для ионов и аэрозольных частиц равными.

Физика взаимодействия легких ионов и аэрозольных частиц в земной атмосфере состоит в том, что их взаимодействие приводит к возникновению заряженных аэрозольных ионов и к уменьшению концентрации легких ионов.

Пренебрегая током заряженных частиц аэрозоля  $I_{z,1,2}^{(k)}$ , складывая второе и третье уравнения системы (1.97) при  $i=1,2$ , получим, что суммарная концентрация аэрозольных частиц, включая и заряженные, удовлетворяют уравнению:

$$\frac{d}{dz} D_T(z) \frac{dN(a)}{dz} = 0,$$

$$N(a) = N_0(a) + \sum_{k=1}^p N_1^{(k)}(a) + \sum_{k=1}^p N_2^{(k)}(a) \quad (1.98)$$

где:  $p$  - максимальное число элементарных электрических зарядов на аэрозольных частицах.

Аналогично, используя первое и третье уравнения системы (1.97), получим уравнение для суммарной плотности электрического заряда  $\rho$ :

$$-\frac{d}{dz} D_T(z) \frac{d\rho}{dz} + \frac{d}{dz} (\lambda E_z) = 0, \quad \lambda = eb_1 n_1 + eb_2 n_2 \quad (1.99)$$

При выводе уравнения (1.99) предполагалось, что вклад заряженных аэрозольных частиц в электрическую проводимость мал, что справедливо, как показывают оценки, при концентрациях аэрозольных частиц  $N > 10^{14} \text{м}^{-3}$ .

Интегрируя уравнение (1.99), получим уравнение плотности электрического тока в приземном слое атмосферы:

$$-D_T(z) \frac{d\rho}{dz} + \lambda E_z = j_0 \quad (1.100)$$

Первый член в этом уравнении определяет плотность турбулентного электрического тока, а второй - плотность тока проводимости.

#### 1.5.4. Приближение сильного турбулентного перемешивания в задаче.

Моделирования электродного приземного слоя.

Для турбулентного электродного приземного основные уравнения были сформулированы в монографии (Куповых и др., 1998) и в одномерном нестационарном случае эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} b_{1,2} n_{1,2} E_z - \frac{\partial}{\partial z} [(D_T(z,t) + D_0) \frac{\partial n_{1,2}}{\partial z}] = q(z) - \alpha n_1 n_2 - n_{1,2} \Phi_{1,2}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi e(n_1 - n_2) \quad (1.101)$$

где:  $n_{1,2}$  - концентрация положительных и отрицательных легких ионов,  $b_{1,2}$  - подвижности легких ионов,  $E_z$  - напряженность электрического поля,  $D_T(z,t)$  - коэффициент моделирования электродного приземного слоя.

Для турбулентного электродного приземного слоя основные уравнения были сформулированы в монографии турбулентного обмена,  $q(z)$  - интенсивность ионообразования,  $\alpha$  - коэффициент рекомбинации легких ионов,  $\Phi_{1,2}$  - интегральный коэффициент взаимодействия легких ионов с аэрозолем,  $t$  - время,  $z$  - вертикальная координата, направленная ортогонально земной поверхности.

Система уравнений (1.101) записана для средних величин. Используя эту систему уравнений можно получить уравнение для плотности электрического заряда  $\rho = e(n_1 - n_2)$  и электрической проводимости  $\lambda = en_1 b_1 + en_2 |b_2|$ :



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} [D_T(z, t) + D_0 \frac{\partial \rho}{\partial z}] + \frac{\partial}{\partial z} (\lambda E_z) = 0,$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z} [(D_T(z, t) + D_0) \frac{\partial \lambda}{\partial z}] + b^2 \frac{\partial}{\partial z} (\rho E_z) = 2beq - \alpha \frac{\lambda^2 - b^2 \rho^2}{2eb},$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho. \quad (1.102)$$

Уравнение для  $\lambda$  получено в предположении, что подвижности легких ионов равны.

Для коэффициента турбулентного обмена используется представление (Зилитинкевич, 1970; Монин и Обухов, 1954):

$$D_1 z, z < |L| \quad D_T(z, t) =$$

$$D_m z^m, z > |L| \quad (1.103)$$

где:  $m = 0, 4/3$ ,  $L$  - масштаб Монина-Обухова:

$$L = -\frac{u_*^3}{\chi \frac{g}{T_0} \cdot \frac{H}{c_p \rho_0}}, \quad \chi = 0.43 - \text{постоянная Кармана, } c_p - \text{тепло-}$$

емкость при постоянном давлении,  $g$  - ускорение силы тяжести,  $T_0$  - температура вблизи земной поверхности,  $H$  - турбулентный тепловой поток,  $\rho_0$  - плотность воздуха,  $u_*$  - динамическая скорость вблизи земной поверхности.

В общем случае решение системы дифференциальных уравнений (1.101) в аналитическом виде получить невозможно, так как система является нелинейной. В работах (Noppel, 1967; Noppel, Gatham, 1971; Willet, 1978; Морозов, Куповых, 1989) были получены численные решения стационарной системы уравнений, следующей из системы (1.101), которые основаны на использовании метода «стрельбы по мишеням» (Камке, 1971). Но даже при использовании численных методов имеют место трудности полу-

чения решений особенно при значительных величинах коэффициента турбулентного обмена, отмеченные в работах (Hoppel, Gatham, 1971; Willet, 1978).

В связи с этим представляет интерес разработка приближенного аналитического метода решения системы уравнений (1. 101) в стационарном ее варианте, основанном на использовании метода малого параметра (Найфе, 1976). Для этого, предполагая, что коэффициент турбулентного обмена представляется в виде:  $D_T(z, t) = D_m z^m, m = 0, 1, 4/3$ , приведем систему уравнений (1.101) к безразмерному виду, вводя замену переменных:

$$t' = \frac{t}{T}, z' = \frac{z}{l_m}, n'_{1,2} = \frac{n_{1,2}}{n_\infty}, E' = \frac{E_z}{E_\infty},$$

$$n_\infty = \sqrt{\frac{q_\infty}{\alpha}}, l_m = (D_m \tau)^{\frac{1}{2-m}}, \tau = (q_\infty \alpha)^{\frac{1}{2}} \quad (1.104)$$

где:  $T$  - характерное время изменения  $D_m(t)$  или  $E_\infty$ .

Используя замену переменных (1.104), получим вместо (1.101) следующую систему уравнений:

$$\frac{\tau}{T} \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial t'} - \frac{\partial}{\partial z'} (z'^m \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial z'}) \pm \xi_{1,2} \frac{\partial}{\partial z'} (n'_{1,2} E') = \frac{q(z')}{q_\infty} - n'_1 n'_2 - n'_{1,2} \Phi_{1,2} \tau,$$

$$\frac{\partial E'}{\partial z'} = \gamma (n'_1 - n'_2) \quad (1.105)$$

где:  $\xi_{1,2} = \frac{|b_{1,2}| \cdot E_\infty \tau}{l_m}, \gamma = \frac{4\pi e n_\infty l_m}{E_\infty}$ .

Из уравнения для плотности электрического заряда (1.102) можно получить, используя уравнение Пуассона, уравнение для напряженности электрического поля  $E'$ , нормируя расстояние  $z$  на характерную длину  $L_m = (D_m \tau_{\lambda_\infty})^{\frac{1}{2-m}},$

$\tau_{\lambda_\infty} = (4\pi \lambda_\infty)^{-1}$ , имеющего следующий вид:

$$\frac{\tau_{\lambda\infty}}{T} \frac{\partial E'}{\partial t'} - z''^m \frac{\partial^2 E'}{\partial z''^2} + \frac{\lambda(z'')}{\lambda_\infty} E' = j', z'' = \frac{z}{L_m} \quad (1.106)$$

где:  $j' = 1$ , если напряженность электрического поля не меняется со временем и  $j' = f(t')$ , если имеет место изменение этой величины со временем. Из уравнений (1.105) следует, что при  $\tau \ll T, \tau_{\lambda\infty} \ll T$  уравнения становятся квазистационарными и вместо системы (1.105) имеем:

$$-\frac{\partial}{\partial z'} (z''^m \frac{\partial n'_{1,2}}{\partial z'}) \pm \xi_{1,2} \frac{\partial}{\partial z'} (n'_{1,2} E') = \frac{q(z')}{q_\infty} - n'_1 n'_2 - n'_{1,2} \tau \Phi_{1,2}$$

$$\frac{\partial E'}{\partial z'} = \gamma (n'_1 - n'_2) \quad (1.107)$$

Уравнение (1.106) при этом приобретает вид:

$$-z''^m \frac{d^2 E'}{dz''^2} + \frac{\lambda(z'')}{\lambda_\infty} E' = j' \quad (1.108)$$

Использование квазистационарного приближения в описании электрического состояния приземного слоя с учетом турбулентного обмена оправдано, так как характерное время изменения состояния приземного слоя  $T$  составляет несколько часов, в то же самое время характерные времена  $\tau$  и  $\tau_\lambda$  в условиях незагрязненной атмосферы составляют 100 с и 250 с. соответственно при  $q = 10^7 \text{ M}^{-3} \text{ c}^{-1}$ ,  $\alpha_{1,2} = 1,6 \times 10^{-12} \text{ M}^3 \text{ c}^{-1}$ . Загрязнения в виде аэрозольных частиц приводят к уменьшению времени жизни ионов  $\tau$  за счет присоединения ионов к аэрозольным частицам, в то же самое время время электрической релаксации  $\tau_\lambda$  увеличивается, но это увеличение остается гораздо меньше  $T$ . Влияние аэрозольных частиц в первом уравнении системы (1.105) определяется последним членом, который играет существенную роль при  $\tau \Phi_{1,2} > 1$ .

Граничные условия для системы уравнений (1.107) записываются в следующем виде:

$$n'_{1,2}(z' = z'_0) = 0, n'_{1,2}(z'' \rightarrow \infty) = 1, E'(z'' \rightarrow \infty) = 1 \quad (1.109)$$

где:  $z_0$  - параметр шероховатости земной поверхности.

Другие граничные условия, возможные для этой системы обсуждаются в монографии (Куповых и др., 1998).

Из представленного выше вида системы уравнений (1.107) видно, что решение этой системы при граничных условиях (1.109) определяется параметрами  $\xi_1, \xi_2, \gamma$ . При  $|\gamma| \ll 1$  плотностью электрического заряда, создаваемого ионами, можно пренебречь. При  $\xi_{1,2} \gg 1$  задача сводится к задаче о классическом электродном эффекте в приземном слое (Норрел, 1967). Рассмотрим противоположный случай, когда выполнено условие:  $\xi_{1,2} \ll 1$ . Представим решение первого уравнения системы (1.107) для концентрации ионов  $n'_{1,2}$  в виде следующего разложения (Куповых и др., 1998):

$$n'_{1,2} = n'_{1,2}{}^0 + \xi_{1,2} n'_{1,2}{}^1 + \xi_{1,2}^2 n'_{1,2}{}^2 + \dots \quad (1.110)$$

Используя это разложение, можно получить, подставляя его в систему (1.107) совокупность уравнений, определяющих члены разложения (1.110) (Куповых и др., 1998):. Далее мы рассмотрим нулевое и первое приближение по  $\xi_{1,2}$ . В этом случае рассматриваемая система уравнений сводится к следующей:

$$-\frac{d}{dz'}(z'^m \frac{dn'_{1,2}{}^0}{dz'}) = \frac{q(z')}{q_\infty} - n'_{1,2}{}^{02} - n'_{1,2}{}^0 \Phi_{1,2} \tau,$$

$$-z'^m \frac{d^2 E'}{dz'^2} + \frac{\lambda(z'')}{\lambda_\infty} E' = 1, \lambda(z'') = e(b_1 n_1^0 + |b_2| n_2^0),$$

$$\rho = \left( \frac{E_\infty}{4\pi L_m} \right) \frac{dE'}{dz''}, \rho' = \frac{dE'}{dz''}. \quad (1.111)$$

Граничные условия для системы (1.111) имеют вид:

$$n_{1,2}^{i0}(z' = z'_0) = 0, n_{1,2}^{i0}(z' \rightarrow \infty) = 1, \frac{dE'}{dz''}(z'' = z''_0) = 0, E'(z'' \rightarrow \infty) = 1$$

Система уравнений (1.111) описывает электрическое состояние приземного слоя в так называемом случае «сильного турбулентного перемешивания». В отличие от классического электродного эффекта в этом случае имеет место турбулентный эффект. Как следует из рассмотрения проведенного в монографии (Куповых и др., 1998), система уравнений (1.107) расщепляется на систему уравнений линейных по электрическому полю и в нулевом приближении концентрации ионов не зависит от напряженности электрического поля, а определяется турбулентным обменом, процессами ионизации и рекомбинации. Распределение ионов по высоте  $z$  определяется масштабом  $L_m$ , который представляет расстояние, проходимое ионом за счет турбулентной диффузии за время своей жизни. В то же время распределение напряженности электрического поля  $E$  определяется изменением электрической проводимости  $\lambda(z)$  с высотой и характерным масштабом  $L_m$ . Физически масштаб  $L_m$  представляет толщину турбулентного электродного слоя и например, при  $m=0$  соответствует толщине ленгмюровского слоя (Алвен, Фельтхаммер, 1967). Математическим условием, контролирующим реализацию турбулентного электродного эффекта в приземном слое является

$$\xi_{1,2} = \frac{b_{1,2} E_\infty \tau}{(D_m \tau)^{2-m}} \ll 1. \text{ При } m=1 \text{ из}$$

этого неравенства получим:  $D_1 \gg |b_{1,2}| E_\infty = 1.4 \cdot 10^{-4} E_\infty m / c,$

где  $E_\infty$  измеряется в В/м. В нейтральной стратификации (Зилигиневич, 1970):

$$D_1 = \frac{\chi^2 u}{\ln \frac{z}{z_0}} \quad (1.112)$$

Выражение (1.112) определяет связь коэффициента  $D_1$  со скоростью  $u$ , измеренной на высоте  $z$ . В этом случае скорость ветра является тем метеорологическим параметром, который определяет изменчивость электрических параметров в приземном электродном слое. При термически неустойчивой стратификации приземного слоя электрические параметры зависят также и от параметров, характеризующих неустойчивую стратификацию (Монин, Обухов, 1954).

1.5.5 Моделирование влияния аэрозольных частиц на электрическую структуру электродного приземного слоя в приближении сильного турбулентного перемешивания.

Используя систему уравнений (1.97), для одномерного, стационарного приземного слоя запишем эту систему, предполагая, что он заполнен монодисперсными, аэрозольными частицами с постоянной концентрацией и выполнено условие сильного турбулентного перемешивания:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dz} [D_T(z) \frac{dn_1}{dz}] &= q - \alpha n_1^2 - \beta_{11}^{(0)} n_1 N_0 - \beta_{12}^{(1)} n_1 N_2^{(1)}, \\ -\frac{d}{dz} [D_T(z) \frac{dn_2}{dz}] &= q - \alpha n_2^2 - \beta_{22}^{(0)} n_2 N_0 - \beta_{21}^{(1)} n_2 N_1^{(1)}, \\ N_1^{(1)} &= \frac{\beta_{11}^{(0)} n_1}{\beta_{21}^{(1)} n_2} N_0, N_2^{(1)} = \frac{\beta_{22}^{(0)} n_2}{\beta_{12}^{(1)} n_1} N_0, \\ D_T(z) \frac{d^2 E_z}{dz^2} - 4\pi\lambda(z) E_z &= -4\pi j_0 \quad (1.113) \end{aligned}$$

где:  $j_0$  - полная плотность вертикального электрического тока, состоящая из тока из плотности тока проводимости и плотности турбулентного тока.

Система уравнений (1.113) учитывает только однократно заряженные аэрозольные частицы. Такое описание справедливо в случае, если рассматриваются ядра Айткена (Hoppel, 1967).

В дальнейшем примем, что

$$\beta_{11}^{(0)} = \beta_{22}^{(0)} = 1.4 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}, \beta_{21}^{(1)} = \beta_{12}^{(1)} = 4 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}.$$

Будем также предполагать, что

$N = N_0 + N_1^{(1)} + N_2^{(1)} = \text{const}, n_1 \approx n_2$ . Тогда система уравнений (1.113) может быть преобразована к виду:

$$-\frac{d}{dz} [D_T(z) \frac{dn_{1,2}}{dz}] = q - \alpha n_{1,2}^2 - \bar{\beta} N n_{1,2}, \bar{\beta} = \frac{2\beta_{22}^{(0)}}{1 + \frac{2\beta_{22}^{(0)}}{\beta_{21}^{(1)}}},$$

$$D_T(z) \frac{d^2 E_z}{dz^2} - 4\pi\lambda(z) E_z = -4\pi j_0, \lambda(z) = en_1 b_1 + en_2 |b_2|, \quad (1.114)$$

Граничные условия для системы уравнений (1.114) имеют следующий вид:

$$n_{1,2}(z = z_0) = 0, n_{1,2}(z \rightarrow \infty) = n_\infty,$$

$$\frac{dE_z}{dz}(z = z_0) = 0, E_z(z \rightarrow \infty) = \frac{j_0}{\lambda_\infty} \quad (1.115)$$

Будем также предполагать, что интенсивность ионообразования  $q$  от высоты не зависит. Рассмотрим предельный случай, когда выполнено условие:  $\bar{\beta} N \gg \alpha n_{1,2}$ .

При

$$\bar{\beta} = 1.65 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}, q = 10^7 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}, \alpha = 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}, N \gg 2.5 \cdot 10^9 \text{ м}^{-3}$$

В этом случае первые два уравнения системы (1.113) сводятся к следующим:

$$-\frac{d}{dz}[D_T(z)\frac{dn_{1,2}}{dz}] = q - \bar{\beta}Nn_{1,2} \quad (1.116)$$

Пусть для  $D_T(z)$  имеет место представление:

$D_T(z) = D_m z^m, m = 0, 1, \frac{4}{3}$ . Тогда для уравнения (1.116), как и в работе (Jordanov, 1970), получим следующее решение:

$$n_{1,2}(z) = n_\infty [1 - (\frac{z}{z_0})^{\frac{1-m}{2}} \frac{K_\nu(\alpha_m z^{\frac{2-m}{2}})}{K_\nu(\alpha_m z_0^{\frac{2-m}{2}})}], n_\infty = \frac{q}{\bar{\beta}N} \quad (1.117)$$

где:  $\alpha_m = \frac{2}{2-m} \sqrt{\frac{\bar{\beta}N}{D_m}}, K_\nu(x)$  - функция Макдональда,

$$\nu = \frac{1-m}{2-m}$$

Отметим некоторые частные случаи выражения (1.117). Для устойчивой стратификации при  $m=0$  имеем:

$$n_{1,2}(z) = \frac{q}{\bar{\beta}N} (1 - e^{-\alpha_0(z-z_0)}), \alpha_0 = \sqrt{\frac{\bar{\beta}N}{D_0}} \quad (1.118)$$

При  $m=1$ , что соответствует нейтральной стратификации приземного слоя:

$$n_{1,2}(z) = \frac{q}{\bar{\beta}N} [1 - \frac{K_0(\alpha_1 z^{1/2})}{K_0(\alpha_1 z_0^{1/2})}], \alpha_1 = \sqrt{\frac{\bar{\beta}N}{D_1}} \quad (1.119)$$

При выполнении условий:  $\alpha_1 z^{1/2} \ll 1, \alpha_1 z_0^{1/2} \ll 1$ , используя асимптотическое представление для функции Макдональда:  $K_0(x) \approx \ln \frac{2}{\gamma x}$  (Камке, 1971), получим для  $n_{1,2}(z)$ :

$$n_{1,2}(z) = \frac{q}{\bar{\beta}NA} \ln \frac{z}{z_0}, A = 2 \ln \frac{2}{\gamma \alpha_1 z_0^{1/2}} \quad (1.120)$$

где:  $\gamma$  - число Эйлера, равное 1.781.....



Таким образом при  $z \ll \frac{1}{\alpha_1^2}$  для нейтральной стратификации имеет место логарифмический закон распределения концентрации легких ионов, а следовательно и электрической проводимости. Наконец при  $m = 4/3$  для термически-неустойчивой стратификации найдем:

$$n_{1,2}(z) = \frac{q}{\beta N} \left[ 1 - \left( \frac{z_0}{z} \right)^{1/3} e^{-\alpha_{4/3} (z^{1/3} - z_0^{1/3})} \right], \alpha_{4/3} = \sqrt[3]{\frac{\beta N}{D_{4/3}}} \quad (1.121)$$

На рисунках 4, 5, 6 приведены кривые, описывающие изменение  $\frac{n_{1,2}}{n_\infty}$  с высотой для трех типов стратификаций. При  $z \rightarrow \infty, n_{1,2} \rightarrow \frac{q}{\beta N}$ .

Рассмотрим, когда второй и третий члены в уравнении (1.114) сравнимы.

Тогда, производя в этом уравнении замену переменных:

$$n'_i = n_i + \frac{\beta N}{2\alpha}, q' = q \left( 1 + \frac{\beta^2 N^2}{4q\alpha} \right), \text{ получим вместо}$$

уравнения (1.116):

$$-\frac{d}{dz} \left( D_T(z) \frac{d'_i}{dz} \right) = q' - \alpha n_i'^2, \quad i = 1, 2 \quad (1.122)$$

Граничные условия для уравнения (1.122) имеют вид:

$$n'_i(z = z_0) = \frac{\beta N}{2\alpha}, n'_i(z \rightarrow \infty) = \sqrt{\frac{q'}{\alpha}} = n'_\infty \quad (1.123)$$

Производя в уравнении (123) замену переменных:

$$y_i = \frac{n'_i}{n'_\infty}, z' = \frac{z}{l_m}, l_m = (D_m \tau')^{\frac{1}{2-m}}, \tau' = (q'\alpha)^{-1/2}, \quad (1.124)$$

получим уравнение:

$$-\frac{d}{dz'}[z'^m \frac{dy'_i}{dz'}] = 1 - y_i'^2 \quad (1.125)$$

с граничными условиями:

$$y'_i(z' = z'_0) = \frac{\bar{\beta}N}{2(q'\alpha)^{1/2}}, y'_i(z \rightarrow \infty) = 1 \quad (1.126)$$

Используя методику, приведенную в монографии (Куповых и др., 1998): получено решение уравнения (1.125) при граничных условиях (1.126), имеющее следующий вид при  $m=1$ :

$$y'_i(z') = y'_i(z'_0) + c_1 \ln \frac{z'}{z'_0}, z' \ll 1,$$

$$y'_i(z') = 1 - c_2 K_0(2\sqrt{2}z'^{1/2}), z' > 1 \quad (1.127)$$

где:  $c_1, c_2$  - постоянные, определяемые из условия сшивки первого и второго решения в (1.127).

Таким образом для высотного распределения концентрации легких ионов в приближении сильного турбулентного перемешивания для приземного слоя с нейтральной стратификацией имеем:

$$n_i = c_1 \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \left(1 + \frac{\bar{\beta}^2 N^2}{4q\alpha}\right)^{1/2} \ln \frac{z}{z_0}, z_0 \leq z \leq z_1,$$

$$n_i = \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \left(1 + \frac{\bar{\beta}^2 N^2}{4q\alpha}\right)^{1/2} \left(1 - c_2 K(2\sqrt{2}\left(\frac{z}{l_1}\right)^{1/2})\right) - \frac{\bar{\beta}N}{2\alpha}, z_1 \leq z < \infty \quad (1.128)$$

В случае устойчивой стратификации приземного слоя ( $m=0$ ) концентрация легких ионов определяется уравнением:

$$n_{1,2} = \sqrt{\frac{q}{\alpha}} \left(1 + \frac{\bar{\beta}^2 N^2}{4q\alpha}\right)^{1/2} \left[1 - \frac{12\bar{c}e^{-\frac{\sqrt{2}z-z_0}{l_0}}}{\left(1 + \bar{c}e^{-\frac{\sqrt{2}z-z_0}{l_0}}\right)^2}\right] - \frac{\bar{\beta}N}{2\alpha}$$

$$\bar{c} = \frac{1-u_1}{1+u_1}, u_1 = \frac{\sqrt{y'_{1,2} + 2}}{3}, y'_{1,2} = \frac{\bar{\beta}N}{2\sqrt{q\alpha}(1 + \frac{\bar{\beta}^2 N^2}{4q\alpha})^{1/2}} \quad (1.129)$$

Распределение концентрации ионов  $\frac{n_{1,2}}{n_\infty}$  с высотой  $\frac{z-z_0}{l_0}$

для этого случая при  $N = 10^9 \text{ м}^{-3}$  приведены на рисунке 4. Полученные результаты имеют автомодельный характер.

При  $z \rightarrow \infty (\frac{z-z_0}{l_0} \gg 1) n_{1,2} \rightarrow 0.82n_\infty, n_\infty = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}$ .

Обратимся теперь к уравнению, описывающему распределение напряженности электрического поля в системе уравнений (1.114). Подставляя в это уравнение выражение для концентрации ионов (1.117), получим:

$$D_m z^m \frac{d^2 E_z}{dz^2} - 4\pi\lambda_\infty \left[ 1 - \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{1-m}{2}} \frac{K_\nu(\alpha_m z^{\frac{2-m}{2}})}{K_\nu(\alpha_m z_0^{\frac{2-m}{2}})} \right] E_z = -4\pi j_0 \quad (1.130)$$

Вводя масштаб  $L_m = (D_m / 4\pi\lambda_\infty)^{\frac{1}{2-m}}$  и производя в (1.130)

замену переменных:  $z'' = \frac{z}{L_m}, E' = \frac{E_z}{E_\infty}, E_\infty = \frac{j_0}{\lambda_\infty}$  имеем урав-

нение:

$$z''^m \frac{d^2 E'}{dz''^2} - \left[ 1 - \left(\frac{z''}{z_0''}\right)^{\frac{1-m}{2}} \frac{K_\nu(\bar{\alpha}_m z''^{\frac{2-m}{2}})}{K_\nu(\bar{\alpha}_m z_0''^{\frac{2-m}{2}})} \right] E' = -1 \quad (1.131)$$

где:  $\bar{\alpha}_m = \frac{2}{2-m} \left(\frac{\gamma}{4\pi\lambda_\infty}\right)^{1/2}, \gamma = \bar{\beta}N$ .

Рассмотрим вначале случай устойчивой стратификации. При  $m=0$  уравнение (1.131) сводится к следующему:

$$\frac{d^2 E'}{dz'^2} - [1 - e^{-\bar{\alpha}(z'-z'_0)}] E' = -1 \quad (1.132)$$

Решение уравнения (1.132) находится стандартными методами (Камке, 1971) и представляется в следующем виде:

$$E'(z) = C_1 J_\nu(v e^{-\bar{\alpha}_0(z-z'_0)/2}) - \frac{\pi}{\bar{\alpha}_0} [J_\nu(v e^{-\bar{\alpha}_0(z-z'_0)/2}) \int_{z'_0}^z Y_\nu(v e^{-\bar{\alpha}_0(z'-z'_0)/2}) dz' + Y_\nu(v e^{-\bar{\alpha}_0(z-z'_0)/2}) \int_z^\infty J_\nu(v e^{-\bar{\alpha}_0(z'-z'_0)/2}) dz']$$

$$C_1 = \frac{\pi}{\bar{\alpha}_0} \frac{Y'_\nu(\nu)}{J_\nu(\nu)} \int_{z'_0}^\infty J_\nu(v e^{-\bar{\alpha}_0(z''-z'_0)/2}) dz'' \quad (1.133)$$

где:  $J_\nu(x), Y_\nu(x)$  - функция Бесселя и Неймана соответственно,  $\nu = \frac{2}{\bar{\alpha}_0}$ .

Безразмерная плотность электрического заряда находилась по формуле  $\rho'(z') = \frac{dE'}{dz'}$ . Результаты численных расчетов функций  $E'(z'), \rho'(z')$  при  $N = 10^{10} \text{ м}^{-3}$  приведены на рисунках 6,7. При этом расчетные параметры, входящие в исходные формулы были следующие:

$$\nu = 0.89, \gamma = 1.65 \cdot 10^{-2} \text{ с}^{-1}, \lambda_\infty = 2.62 \cdot 10^{-4} \text{ с}^{-1}, \frac{q}{\beta N} = 6.1 \cdot 10^2 \text{ см}^{-3}, \bar{\alpha}_0 = 2.24$$

Переход к размерным величинам напряженности электрического поля и плотности электрического заряда осуществляется по формулам:

$$E_z(z) = \frac{j_0}{\lambda_\infty} E'(\frac{z-z_0}{L_0}), \rho(z) = \frac{j_0}{4\pi\lambda_\infty L_0} \rho'(\frac{z-z_0}{L_0}) \quad (1.134)$$

Как видно из представленных графиков в случае присутствия в приземном слое аэрозольных кривые сдвигаются влево:  $E'(z_0)$  уменьшается, максимальное значение  $\rho'(z')$  также уменьшается. С физической точки

зрения это объясняется тем, что поскольку электрическая проводимость в приземном слое уменьшается, то возрастает масштаб  $L_0$  и градиент напряженности электрического поля также уменьшается.

В случае нейтральной стратификации для нахождения распределений  $E'(z'), \rho'(z')$  можно использовать приближенный метод, рассмотренный в монографии (Куповых и др., 1998). Согласно этому методу разобьем кривую  $\lambda(z)$  на три участка  $(z_0, z_1), (z_1, z_2), (z_2, z_3)$  и аппроксимируем реальный ход электрической проводимости линейной зависимостью:

$$\lambda(z) = \lambda_1 \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}, \lambda_1 = \lambda_\infty \left[ 1 - \frac{K_0 (\alpha_1 z_1^{1/2})}{K_0 (\alpha_1 z_0^{1/2})} \right], z_0 \leq z \leq z_1,$$

$$\lambda(z) = a_1 z + b_1, a_1 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{z_2 - z_1}, b_1 = \frac{\lambda_1 \bar{z}_2 - \lambda_2 z_1}{z_2 - z_1}, \lambda_2 = \lambda(\bar{z}_2), \bar{z}_2 < z_2, z_1 \leq z \leq z_2$$

$$\lambda(z) = \lambda_\infty = a_1 z_2 + b_1, z_2 \leq z \leq z_3 = \infty \quad (1.135)$$

Тогда для напряженности электрического поля на каждом из участков получим уравнения:

$$z'' \frac{d^2 E'_0}{dz''^2} - B(z'' - z''_0) E'_0 = -1, z''_0 \leq z'' \leq z''_1,$$

$$z'' \frac{d^2 E'_1}{dz''^2} - (\bar{a}_1 z'' + \bar{b}_1) E'_1 = -1, z''_1 \leq z'' \leq z''_2, \quad (1.136)$$

$$z'' \frac{d^2 E'_2}{dz''^2} - E'_2 = -1, z''_2 \leq z'' < \infty$$

Были получены аналитические решения уравнений (103) на основе работы (Морозов, 1986) и которые использовались для проведения численных расчетов  $E'(z''), \rho'(z'')$  при концентрации аэрозольных частиц  $N = 10^{10} \text{ м}^{-3}$ . При этом толщина электродного слоя  $L_1 = 61 \text{ м}$  при  $D_1 = 0.2 \text{ м/с}$ ,

а в случае отсутствия аэрозоля в приземном слое она составляла 15 м. Кривые этих распределений приведены на рисунке 9. Здесь также происходит уменьшение градиента напряженности электрического поля. Переход к размерным значениям этих величин происходит по формулам, аналогичным формулам (1.134). Интересно отметить, что из полученных теоретических расчетов следует связь между напряженностью электрического поля и концентрацией аэрозольных частиц, которая впервые была отмечена в работе (Имянитов, Шифрин, 1962).

1.5.6. Моделирование влияния аэрозольных частиц на электрическую структуру электродного приземного слоя в случае классического электродного эффекта.

В случае, когда параметр  $\xi_{1,2} \gg 1$  в электродном приземном слое имеет место классический электродный эффект и основные уравнения записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 b_1 \frac{d}{dz}(En_1) &= q(z) - \alpha n_1 n_2 - \beta_{11}^{(0)} n_1 N_0 - \beta_{12}^{(1)} n_1 N_2^{(1)}, \\
 b_2 \frac{d}{dz}(En_2) &= q(z) - \alpha n_1 n_2 - \beta_{22}^{(0)} n_2 N_0 - \beta_{21}^{(1)} n_2 N_1^{(1)}, \\
 N_1^{(1)} &= \frac{\beta_{11}^{(0)} n_1}{\beta_{21}^{(1)} n_2} N_0, \quad N_2^{(1)} = \frac{\beta_{22}^{(0)} n_2}{\beta_{12}^{(1)} n_1} N_0, \\
 \frac{dE}{dz} &= 4\pi e(n_1 - n_2 + N_1^{(1)} - N_2^{(1)}), \quad N = N_0 + N_1^{(1)} + N_2^{(1)} = const
 \end{aligned}
 \tag{1.137}$$

Результаты численных экспериментов на основе данной системы рассмотрены в работе (Куповых, Морозов, 2003). Расчеты были проведены для концентраций аэрозольных частиц  $N = 10^7 - 10^9 \text{ м}^{-3}$ . Проведенные расчеты показали, что при  $N \leq 10^8 \text{ м}^{-3}$  аэрозоль практически не влияет на распреде-

ление  $n_{1,2}, E$  в приземном слое. Увеличение  $N$  до значений  $5 \cdot 10^8 - 10^9 \text{ м}^{-3}$  приводит к уменьшению толщины электродного слоя. Анализ приведенных результатов показывает, что при увеличении  $N$  значения  $n_1(z=0), n_\infty$  уменьшаются, отношение  $E_0 / E_\infty$  при этом с точностью до нескольких процентов остается постоянным. На рисунках 10 и 11 представлены зависимости этих величин с высотой для двух крайних значений концентрации аэрозольных частиц. На высоте 1-2 м от поверхности значения  $n_{1,2} / n_\infty, N_{1,2} / N_\infty, E / E_\infty$  меняются нелинейно, что обусловлено линейностью самого электродного эффекта.

### 1.5.7. Влияние радиоактивных веществ на электрическую структуру электродного приземного слоя

Основные уравнения, описывающие электрическую структуру в стационарном, одномерном приближении имеют вид:

$$\begin{aligned}
 -\frac{d}{dz} [D_{Tz} \frac{dn_1}{dz}] + \frac{d}{dz} (b_1 n_1 E) &= q_0(z) + q_1(z) - \alpha n_1 n_2 - \beta_1 N n_1 \\
 -\frac{d}{dz} [D_{Tz} \frac{dn_2}{dz}] - \frac{d}{dz} (b_2 n_2 E) &= q_0(z) + q_1(z) - \alpha n_1 n_2 - \beta_2 N n_2 \\
 \frac{dE}{dz} &= 4\pi e(n_1 - n_2) \quad (1.138)
 \end{aligned}$$

где:  $q_0$  - фоновая интенсивность ионообразования, вызванная естественными источниками (галактические космические лучи, поверхностные радиоактивные источники),  $q_1$  - искусственная ионизация, обусловленная антропогенными процессами,  $n_1, n_2$  - концентрации легких положительных и отрицательных ионов,  $b_1, b_2$  - их подвижности,  $E$  - вертикальная составляющая напряженности электрического поля,  $D_{Tz}$  - коэффициент турбулентного обмена,  $\beta_1, \beta_2$  - ко-

эффиценты присоединения легких положительных и отрицательных ионов к аэрозольным частицам с концентрацией  $N$

К системе уравнений (1.138) необходимо добавить уравнение, описывающее распределение концентрации радиоактивных веществ  $Q$  в приземном слое атмосферы, обусловленных антропогенными процессами:

$$-\frac{d}{dz} D_{Tz} \frac{dQ}{dz} k_1 Q = \chi(z) \quad (1.139)$$

где:  $k_1 = \frac{1}{\tau}$  - постоянная полураспада,  $\chi(z)$  - интенсивность источника радиоактивных веществ.

Используя результаты работы (Jordanov, 1970), выпишем решение уравнения (1.139), соответствующее случаю  $\chi(z) = 0$  при следующих граничных условиях:

$Q(z = z_0) = Q_0, Q(z \rightarrow \infty) = 0$ , предполагая также, что коэффициент турбулентного обмена представляется в виде:  $D_{Tz} = D_m z^m$ , где  $m = 0, 1, 4/3$ . Оно имеет следующий вид:

$$Q(z) = Q_0 \left( \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{1-m}{2}} \frac{K_\nu(\eta)}{K_\nu(\eta_0)} \quad (1.140)$$

где:  $\nu = \frac{1-m}{2-m}$ ,  $\eta = \frac{2}{2-m} \sqrt{\frac{k_1}{D_m}} z^{\frac{2-m}{2}}$ ,  $K_\nu(\eta)$  - функция Макдональда,  $z_0$  - параметр шероховатости земной поверхности.

При  $m=0, 1, 4/3$  решения для различных стратификаций представляются в следующем виде:

$$Q(z) = Q_0 e^{-\sqrt{\frac{k_1}{D_0}}(z-z_0)}, m = 0$$



$$Q(z) = Q_0 \frac{K_0(\eta)}{K_0(\eta_0)}, m = 1$$

$$Q(z) = Q_0 \left(\frac{z}{z_0}\right)^{\frac{1}{3}} e^{-3 \sqrt{\frac{k_1}{D_1^4}} (z^{\frac{1}{3}} - z_0^{\frac{1}{3}})}, m = \frac{4}{3} \quad (1.141)$$

Далее  $q_1$  можно связать с  $Q$  соотношением:

$$q_1 = \frac{E}{w_i \tau} Q, \text{ где } E - \text{энергия } \alpha - \text{ частиц для радиоактивного}$$

элемента  $Rn^{222}$ ,  $w_i$  - энергия, необходимая для образования одной пары ионов из молекул воздуха, равная 33.9-32.3 эв. Влияние радиоактивного вещества на электрическое состо-

яние приземного слоя определяется отношением  $\frac{q_1}{q_0}$ , тур-

булентным обменом и периодом полураспада  $\tau = k_1^{-1}$ . Рассмотрим случай нейтрального приземного слоя. Пусть име-

ет место сильное турбулентное перемешивание ( $\frac{bE_\infty}{D_1} \ll 1$ )

(Куповых и др., 1998), а аэрозольное загрязнение отсутствует. Тогда, если характерный масштаб распределения легких ионов по высоте  $l_1 = D_1 \tau_i \ll D_1 k_1^{-1}$ , то в пределах электродного приземного слоя  $q_1$  можно считать постоянной (величина  $q_0$  также предполагается постоянной). Вре-

мя жизни легкого иона, равное  $\tau_i = [(q_1 + q_0)\alpha]^{-\frac{1}{2}}$ , уменьшается, а отсюда уменьшается характерный масштаб  $l_1 = D_1 \tau_i$ . Становится меньше и характерная толщина электродного слоя  $L_1 = D_1 \tau_\lambda$ , определяющая распределение напряженно-

сти электрического поля по высоте, так как время электрической релаксации  $\tau_\lambda$  также уменьшается. Например, если

$$\frac{q_1}{q_0} = 10, \text{ то при } D_1 = 0.1 \text{ м/с, } q_0 = 10^7 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}, l_1 = 7.5 \text{ м,}$$

$L_1 = 4.5 \text{ м}$  при этом за пределами электродного слоя  $\lambda_\infty$  увеличивается в три раза и соответственно  $E_\infty$  уменьшается в

$$\text{три раза; если } \frac{q_1}{q_0} = 100, \text{ то } l_1 = 2.5 \text{ м, } L_1 = 1.5 \text{ м, } \frac{\lambda_\infty}{\lambda_{0\infty}} =$$

$$= 10, \frac{E_\infty}{E_{0\infty}} = 0.1. \text{ Последняя оценка соответствует экспери-}$$

ментальным результатам, приведенным в работе (Israelson, Knudsen, 1986), в которой исследуется влияние Чернобыльской катастрофы на атмосферно-электрические параметры приземного слоя на территории Швеции.

В случае если имеет место сильное аэрозольное загрязнение приземного слоя ( $N > 2.5 \times 10^9 \text{ м}^{-3}$ ), то можно получить следующее выражение для  $n_{1,2}$  в условиях сильного турбулентного перемешивания:

$$n_{1,2} = \frac{q_0}{\beta_{1,2} N} + \frac{q_{01}}{\beta_{1,2} N - k_1} \left( \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{1-m}{2}} \frac{K_v(\eta)}{K_v(\eta_0)} -$$

$$\left( \frac{q_{01}}{\beta_{1,2} N - k} + \frac{q_0}{\beta_{1,2} N} \right) \times \left( \frac{z}{z_0} \right)^{\frac{1-m}{2}} \frac{K_v(\tilde{\beta})}{K_v(\tilde{\beta}_0)} \quad (1.142)$$

$$\text{где: } \tilde{\beta} = \frac{2}{2-m} \sqrt{\frac{\beta_{1,2} N}{D_m}} z^{\frac{2-m}{2}}, q_{01} = \frac{E}{w_i \tau} Q_0$$

Выражение (1.142) может быть использовано для расчета распределения напряженности электрического поля с высотой в электродном приземном слое на основе урав-

нения:

$$-D_{Tz}(z) \frac{d^2 E}{dz^2} + 4\pi\lambda(z)E = 4\pi j_0, \lambda(z) = e(n_1 b_1 + n_2 |b_2|) \quad (1.143)$$

где:  $j_0$  - суммарная плотность электрического тока, состоящая из плотности тока проводимости и плотности турбулентного электрического тока,  $\lambda$  - электрическая проводимость приземного слоя.

Граничные условия для решения уравнения (1.143) записываются в следующем виде:  $\frac{dE}{dz}(z = z_0) = 0$ ,

$$E_\infty = E(z \rightarrow \infty) = \frac{j_0}{\lambda_\infty}$$

Для радона период полураспада составляет четыре дня, поэтому в пределах электродного приземного слоя его концентрацию можно считать постоянной.

Предполагая также выполненным условие  $\beta_{1,2} N \gg k_1$ , получим из (1.142):

$$n_{1,2} = \frac{q_0 + q_{01}}{\beta_{1,2} N} \left(1 - \frac{K_v(\tilde{\beta})}{K_v(\tilde{\beta}_0)}\right) \quad (1.144)$$

Приведем выражения для концентрации легких положительных и отрицательных ионов для случаев устойчивой ( $m=0$ ), нейтральной ( $m=1$ ), и термически-неустойчивой стратификаций приземного слоя ( $m=4/3$ ):

$$n_{1,2} = \frac{q}{\beta_{1,2} N} (1 - e^{-\alpha_0(z-z_0)}), q = q_0 + q_{01}, \alpha_0 = \sqrt{\frac{\beta_{1,2} N}{D_0}}, \quad (1.145)$$

$$n_{1,2} = \frac{q}{\beta_{1,2} N} \left[1 - \frac{K_0(\alpha_1 z^{\frac{1}{2}})}{K_0(\alpha_1 z_0^{\frac{1}{2}})}\right], \alpha_1 = \sqrt{\frac{\beta_{1,2} N}{D_1}} \quad (1.146)$$

$$n_{1,2} = \frac{q}{\beta_{1,2} N} \left[ 1 - \left( \frac{z_0}{z} \right)^{\frac{1}{3}} e^{-\frac{\alpha_4}{3} (z^{1/3} - z_0^{1/3})} \right], \alpha_{4/3} = 3 \sqrt{\frac{\beta_{1,2} N}{D_{4/3}}} \quad (1.147)$$

При выполнении условий:  $\alpha_1 z^{1/2} \ll 1, \alpha_1 z_0^{1/2} \ll 1$ , используя асимптотическое представление для функций Макдональда:  $K_0(\alpha_1 z^{1/2}) \approx \ln \frac{2}{\gamma \alpha_1 z^{1/2}}$  получим для  $n_{1,2}(z)$ :

$$n_{1,2}(z) = \frac{q}{\beta_{1,2} N A} \ln \frac{z}{z_0}, A = 2 \ln \frac{2}{\gamma \alpha_1 z_0^{1/2}} \quad (1.148)$$

где:  $\gamma$  — число Эйлера:  $\gamma = 1.781 \dots$

Таким образом при  $z \ll 1/\alpha_1^2$  для нейтральной стратификации имеет место логарифмический закон распределения концентрации легких ионов и следовательно электрической проводимости. Аналогично в случае отсутствия аэрозольных частиц в приближении сильного турбулентного перемешивания для концентрации легких ионов в случае нейтральной стратификации можно получить асимптотическое решение:

$$n_{1,2}(z) = n_\infty 0.11 \ln \frac{z}{z_0}, z_0 \leq z \leq 0.1 l_1 = z_1$$

$$n_{1,2}(z) = n_\infty (1 - 0.34 K_0(2\sqrt{2}(\frac{z}{l_1})^{1/2})), 0.1 l_1 \leq z < \infty, \quad (1.149)$$

где:  $n_\infty = \sqrt{\frac{q_0 + q_{01}}{\alpha}}$

Производя в уравнении (1.143) замену переменных

$$z' = \frac{z}{L_m}, E' = \frac{E}{E_\infty}, E_\infty = \frac{j_0}{\lambda_\infty}, L_m = (D_m / 4\pi\lambda_\infty)^{1/(2-m)}$$

и используя (1.149), получим уравнения:

$$z' \frac{d^2 E'}{dz'^2} - 0.11 \ln \frac{z'}{z'_0} E' = -1, z'_0 \leq z' \leq z'_1$$

$$z' \frac{d^2 E'}{dz'^2} - [1 - 0.34 K_0 (2\sqrt{2\alpha_2 z'})] E' = -1, z'_1 \leq z' < \infty, \alpha_2 = \frac{L_1}{l_1}$$

(1.147)

с граничными условиями:

$$\frac{dE'}{dz'}(z' = z'_0) = 0, E'(z' \rightarrow \infty) = 1$$

Используя результаты численных расчетов, приведенных в работе (Куповых и др., 1998), для  $D_1 = 0.2 \text{ м/с}$  получим

$$E(z' = z'_0) = 2.6 E_\infty. \quad \text{При } E_\infty = 10 \text{ В/м} \quad \text{получим}$$

$E(z = z_0) = 26 \text{ В/м}$  Дальнейшее развитие данной модели должно учитывать радиоактивные вещества с меньшими периодами полураспада порядка десятков-сотен секунд с привлечением численных методов решения дифференциальных уравнений.

2. Математическое моделирование глобальной электрической цепи (ГЭЦ) в атмосфере.

2.1 Основные уравнения ГЭЦ. Стационарное и нестационарное приближения.

Глобальная электрическая цепь - это система электрических токов, возникающая в атмосфере и пронизывающая нижнюю атмосферу, ионосферу и магнитосферу. Как указывалось выше, данные многолетних измерений электрических характеристик атмосферы указывают на существование электрического поля с напряженностью порядка  $10^2 \text{ В/м}$  и электрического тока с плотностью  $2 \times 10^{-12} \text{ А/м}^2$ . Эти параметры определяются в так называемых условиях «хорошей погоды», т.е. при отсутствии в

данном районе Земли облаков, ветров, метелей и прочих метеорологических явлений. Поскольку земная атмосфера обладает электрической проводимостью, то при отсутствии источников (генераторов) электрического поля электрические поля должны были бы исчезнуть за время примерно равное 10 мин. Но этого не происходит и наблюдается квазистационарная картина электрического поля. Согласно современным представлениям основным источником электрического поля в тропосфере и стратосфере являются грозовые облака, действующие в экваториальной зоне земного шара. Грозовые облака действуют, как токовые генераторы. Наряду с этим типом генераторов определенную роль в создании временных суточных вариаций электрического поля атмосферы играют генераторы, действующие в верхних слоях атмосферы: магнитосферный генератор, возникающий при взаимодействии солнечного ветра с магнитным полем Земли, он создает горизонтальную разность потенциалов 40-100Кв и электрический ток  $10^6 A$  (Акасофу, Чепмен, 1974) и ионосферное динамо, возникающее вследствие солнечных и лунных приливов и которое поддерживает горизонтальную разность потенциалов 5-15кв между высокими низкими широтами, при этом электрический ток, даваемый этим генератором составляет  $10^5 A$  (Roble, 1991). Отметим, что в областях существования грозовых облаков наверх текут электрические токи, заряжающие атмосферу а в областях, где грозовые облака отсутствуют текут токи разрядки (рис. 3).

Основные уравнения, используемые для математического моделирования глобальной электрической цепи - это уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_s) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \vec{E} &= 4\pi\rho, \operatorname{div} \vec{H} = 0, \vec{j} = \lambda \vec{E} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где:  $\vec{E}, \vec{H}$  - напряженности электрического и магнитного полей,  $\vec{j}, \vec{j}_s$  - плотности омического и стороннего электрических токов,  $\lambda, \rho$  - электрическая проводимость и плотность электрического заряда атмосферы.

Из второго уравнения этой системы уравнений следует уравнение сохранения плотности электрического заряда:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j} + \vec{j}_s) = 0 \quad (2.2)$$

При выполнении условий:

$T \gg L/c, T \gg 4\lambda L^2/c^2$ , где  $T$  - характерный временной масштаб рассматриваемых электрических процессов,  $L$  - характерный пространственный масштаб,  $c$  - скорость света, система уравнений (2.1) - (2.2) сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \text{rot} \vec{E} &= 0, \text{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\vec{j} + \vec{j}_s) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Отметим, что система уравнений (2.3) описывает практически все электрические процессы в нижней атмосфере, исключая быстропеременные процессы, протекающие при молниевых разрядах.

Если выполнено условие:  $T \gg \frac{1}{4\pi\lambda} = \tau_\lambda$ , где  $\tau_\lambda$  - время

электрической релаксации, то ток смещения  $\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  можно пренебречь и система уравнений (2.3) превращается в стационарную:

$$\text{div}(\vec{j} + \vec{j}_s) = 0, \text{rot} \vec{E} = 0, \text{div} \vec{E} = 4\pi\rho \quad (2.4)$$

Поскольку электрическое поле потенциально, то можно ввести потенциал электрического поля  $\varphi$ , который связан с напряженностью электрического поля соотношением:

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi = -\nabla\varphi.$$

Используя это соотношение, получим соответствующие уравнения для определения потенциала электрического поля в нестационарном и стационарном случаях:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Delta\varphi + \text{div}(\lambda\nabla\varphi) = \sum_{s=1}^N \text{div}\vec{j}_s, \quad (2.5)$$

$$\text{div}(\lambda\nabla\varphi) = \sum_{s=1}^N \text{div}\vec{j}_s \quad (2.6)$$

Здесь в правых частях уравнений записаны выражения учитывающие суммарное действие грозовых генераторов. Уравнения (2. 5) и (2. 6) вместе с соответствующими начальными и граничными условиями являются основными уравнениями, используемыми при моделировании глобальной электрической цепи. В частности для стационарной (квазистационарной) задачи используются следующие граничные условия:

$$\varphi|_{r=R} = 0, \varphi|_{r=R+H} = \varphi_{\infty} \quad (2.7)$$

где: R - радиус Земли, R+H - радиус ионосферы,  $\varphi_{\infty}$  - потенциал ионосферы.

Обычно при модельных расчетах предполагается, электрическая проводимость представляется выражением (Атмосфера. Справочник..... 1992):

$$\lambda(r) = \lambda_0 e^{\alpha(r-R)}, \alpha = (0.2 - 0.3) \text{ км}^{-1} \quad (2.8)$$

Основными параметрами, определяющими глобальное электрическое состояние являются потенциал ионосферы  $\varphi_{\infty}$ , определяемый балансом электрических токов за-



рядки от грозовых облаков и токов разрядки, текущих в областях «хорошей погоды». Его величина составляет 250-300 Кв. Другим параметром является общее сопротивление атмосферы  $\hat{R}$  определяемое выражением:

$$\hat{R} = \frac{1}{4\pi R^2} \int_R^{R+H} \frac{dr}{\lambda(r)} \quad (2.9),$$

Его величина составляет 230 Ом, полный электрический ток в атмосфере 1000А. Число гроз, действующих в данный момент времени по всему земному шару равно 2000. (Атмосфера. Справочник.....1991). Кроме того глобальную электрическую цепь можно характеризовать некоторой емкостью С, равной 2.9 Ф и временной постоянной  $\tau = RC=10$  мин, которая определяет время разрядки глобальной цепи в отсутствии генераторов.

Возникает вопрос: почему грозовые облака можно рассматривать, как генераторы электрического поля атмосферы? Это обусловлено двумя причинами: ростом электрической проводимости атмосферы с высотой и полярностью грозовых облаков в квазистационарной стадии их развития, когда верхняя часть грозового облака имеет положительный электрический заряд, а нижняя — отрицательный заряд. Математически эта задача основана на решении уравнения (2.6) в области, где грозовых облаков нет и в области, где они присутствуют. В области, где грозовые источники отсутствуют для атмосферы с экспоненциальной электрической проводимостью (2.8)(смотри приложение 2.1) получим выражение для потенциала электрического поля атмосферы:

$$\varphi(r) = \varphi_{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha(r-R)}}{1 - e^{-\alpha H}} \quad (2.10)$$

где:  $H$  - высота ионосферы. При  $H = 80 \text{ км}$   $\alpha H \gg 1$  вместо (2.10) имеем:

$$\varphi(r) = \varphi_{\infty}(1 - e^{-\alpha(r-R)}) \quad (2.11)$$

Это выражение определяет распределение электрического поля в модели «сферического конденсатора» предложенной Вильсоном (Атмосфера. Справочник.....1991)(смотри также приложение 2.1)

Плотность тока разрядки, возникающего под действием этого поля равна:

$$j_p = \lambda(r)E_r(r) = -\lambda(r)\frac{d\varphi(r)}{dr} = -\alpha\varphi_{\infty}\lambda_0 \quad (2.12)$$

С другой стороны для дипольной модели грозового облака можно получить выражение для потенциала электрического поля, создаваемого электрическими зарядами облака (Атмосфера. Справочник.....1991):

$$\varphi(\vec{r}) = q_{i+}e^{\frac{\alpha}{2}(z-z_{i+})} \left[ \frac{e^{\frac{\alpha}{2}\rho_{i+}}}{\rho_{i+}} - \frac{e^{\frac{\alpha}{2}\rho'_{i+}}}{\rho'_{i+}} \right] + q_{i-}e^{\frac{\alpha}{2}(z-z_{i-})} \left[ \frac{e^{\frac{\alpha}{2}\rho_{i-}}}{\rho_{i-}} - \frac{e^{\frac{\alpha}{2}\rho'_{i-}}}{\rho'_{i-}} \right] \quad (2.13)$$

Здесь:  $\rho_{i+} = \sqrt{r^2 + (z - z_{i+})^2}$ ,  $\rho_{i-} = \sqrt{r^2 + (z - z_{i-})^2}$ ,  $\rho'_{i+}, \rho'_{i-}$  - расстояния от зарядов -изображений. Выражение (2.13) получено в цилиндрической системе координат. (Смотри также приложение 2.3)

Используя это выражение можно получить выражение для тока, который течет от двух зарядов  $q_{i+}, q_{i-}$  в верхние слои атмосферы:

$$I_{zi} = \int_0^{\infty} \lambda E_z 2\pi r dr = I_i \lambda_0 \left( \frac{1}{\lambda_{i-}} - \frac{1}{\lambda_{i+}} \right),$$

$$I_i = 4\pi q_{i+} \lambda(z_{i+}) = -4\pi q_{i-} \lambda(z_{i-}) \quad (2.14)$$

Из соотношения:

$$I_p = 4\pi R^2 |j_p| = I_s = \sum_{i=1}^N I_i \lambda_0 \left( \frac{1}{\lambda_{i-}} - \frac{1}{\lambda_{i+}} \right) \quad (2.15)$$

получим выражение для потенциала ионосферы, создаваемого грозями:

$$\varphi_\infty = \frac{1}{4\pi R^2 \alpha} \times \sum_{i=1}^N I_i \left( \frac{1}{\lambda_{i-}} - \frac{1}{\lambda_{i+}} \right) = \frac{1}{R^2 \alpha} \times \sum_{i=1}^N (|q_{i-}| - q_{i+}) \quad (2.16)$$

(Более строгий вывод этого выражения приведен в приложении 2.3) Электрический ток  $I_i$  есть ток электризации, который обычно возникает в облаке процессе его развития и обусловлен различными механизмами электризации (Имянитов, 1981). При  $|q_{i-}| - q_{i+} = 150 \text{ Кл}$  для всех гроз,  $N=2000$ , получим  $\varphi_\infty = 330 \text{ кВ}$ . Таким образом грозовая теория электрического поля атмосферы способна объяснить наблюдаемые значения электрических полей в атмосфере. Другие возможные модели описания электрических полей в атмосфере, основанные на грозовой теории, рассматриваются в справочнике (Атмосфера. Справочник .....1991). Другие результаты в области математического моделирования электрического поля атмосферы представлены в приложениях 2.4-2.9.

Гелиокосмические влияния на глобальную электрическую цепь проявляются двух аспектах: это изменения потенциала ионосферы на нижней границы ионосферы за счет действия магнитосферного и ионосферного генераторов, изменения электрической проводимости атмосферы за счет эффекта Форбуша (Акософу, Чепмен, 1975) и изменения электрической проводимости атмосферы, вызванные вторжением солнечных космических лучей. Эти вопросы подробно изложены в работах (Морозов, 1981; Hays, Roble,

1979; Roble, 1991,). Более подробно некоторые из этих вопросов будут рассмотрены ниже в приложении 2.4.

2.2 Влияние аэрозольных частиц и радиоактивных веществ на глобальную электрическую цепь.

В ряде работ российских и зарубежных исследователей рассматривалось влияние выбросов в атмосферу аэрозольных частиц и радиоактивных веществ на параметры глобальной электрической цепи (Морозов, 1996; Makino, Ogawa, 1985; Ogawa, 1985; Sarkota, Varshneva, 1990). Как следует из результатов модельных расчетов основные электрические параметры ГЭЦ могут изменяться в процессе изменения числа и эволюции основных грозовых генераторов, расположенных в экваториальной зоне земного шара, это в частности приводит к суточной унитарной вариации электрического поля (Makino, Ogawa, 1984) Кроме того такие параметры, как плотность электрического тока, полный электрический ток в атмосфере, напряженность электрического поля, полное и столбцовое сопротивления атмосферы, потенциал ионосферы могут меняться при изменении электрической проводимости в атмосфере.

Прежде все сделаем несколько пояснений, необходимых для дальнейшего. Полное сопротивление атмосферы определяется формулой (2. 9). Столбцовое сопротивление формулой:

$$\hat{R}_c = \int_R^{R+H} \frac{dr}{\lambda(r)} \quad (2.17)$$

Выражение для потенциала ионосферы (2. 16) получено в предположении экспоненциального изменения электрической проводимости с высотой (2.8). В то же время в случае произвольного закона изменения электрической проводимости эта формула перестает быть верной и для оценок потенциала ионосферы необходимо использовать формулу:

$$\varphi_{\infty} = \hat{R} \sum_{i=1}^N \frac{R_{i1}}{R_{ic}} I_i = \hat{R} \cdot I, R_{ic} = R_{i1} + R_{i2} + R_{i3} + \hat{R}_c \quad (2.18)$$

где:  $R_{i1}$  - внутреннее сопротивление грозового генератора (то есть сопротивление между положительным и отрицательным зарядами),  $R_{i2}, R_{i3}$  - сопротивление между положительным зарядом и ионосферой и сопротивление между отрицательным зарядом облака и ионосферой соответственно.

Электрическая проводимость в атмосфере может изменяться под действием аэрозольных частиц и радиоактивных веществ, как естественного так и антропогенного. Расчеты влияния изменений электрической проводимости под влиянием этих факторов на ГЭЦ были рассмотрены в работах (Makino, Ogawa, 1985; Sarkota, Varsheya, 1990) на основе балансовой токовой модели, развитой в работе (Makino, Ogawa, 1984).

В работе (Makino, Ogawa, 1985) распределение концентрации легких ионов, определяющих электрическую проводимость, определялось на основе стационарного уравнения (2.2). Предполагалось, что аэрозольными частицами являются ядра конденсации, распределение которых в атмосфере задавалось в следующем виде:

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{z}{S_c}\right) \quad (2.19)$$

где:  $z$  - вертикальная координата,  $S_c = 1 \text{ км}$

Для  $N_0$  принимались следующие значения:  $N_0 = 10^{10} \text{ м}^{-3}$  над землей,  $N_0 = 10^9 \text{ м}^{-3}$  над морем,  $\beta = 5 \times 10^{-12} \text{ м}^3 \text{ с}^{-1}$ . Интенсивность ионообразования определялась в этой модели космическими лучами и радиоактив-

ными веществами, для которых интенсивность ионообразования убывает экспоненциально с высотой:

$$q_r(z) = q_{r,0} \exp\left[-\frac{z-z_G}{S_r}\right], q_{r,0} = 8.6 \times 10^6 \text{ м}^{-3} \text{ с}^{-1}, S_r = 1 \text{ км} \quad (2.20)$$

- где:  $z_G$  - высота земной поверхности выше уровня моря.

На основе построенной модели электрической проводимости с использованием уравнения (1.2) были проведены оценки электрических величин, характеризующих ГЭЦ. В случае, когда ионизация космическими лучами уменьшается на 20%, потенциал ионосферы, определяемый (2.18) увеличивается на 15% и напряженность электрического поля над океанами и континентами увеличивается на 20% и 7% соответственно. С другой стороны увеличение глобального тока составляет 0.8% и плотность тока над океанами уменьшается 0.7% и увеличивается 3% над континентами. Это различие обусловлено ионизацией, возникающей от радиоактивных субстанций на континентах. В случае, когда концентрация ядер конденсации увеличивается на 20%, потенциал ионосферы увеличивается на 8% и напряженность электрического поля больше в негорных областях, нежели высокогорных районах.

Аналогичные результаты были получены в работах (Морозов, 1995; Sarkota, Varshney, 1990) Как следует из проведенных расчетов, эффект влияния аэрозольных частиц составляет 10%. Конечно, если учитывать загрязнения аэрозольными частицами вследствие антропогенной деятельности, эти изменения могут значительно возрасти. Некоторые результаты обработки экспериментальных данных, указывающих на связь годовых изменений потенциала ионосферы с изменениями концентрации сульфатного аэрозоля в стратосфере обсуждаются в работе (Ogawa, 1985). Ряд работ (Voesck, 1976; Стыро, Будкус, 1988) посвящен оценке влия-

ния криптона - 85 на электрическое состояние атмосферы. Использовалось следующее представление для электрической проводимости:

$$\lambda(z) = \lambda_0 e^{0.238z} + \frac{C\lambda_0}{100} e^{-0.238z} \quad (2.21)$$

где  $C$  - процентное увеличение концентрации ионов за счет криптона - 85.

С помощью выражения (2.21) можно вычислить столбцовое сопротивление и плотность электрического тока при неизменном потенциале ионосферы:

$$\hat{R}_c = \frac{1}{0.238} \frac{\arctg \sqrt{\frac{C}{100}}}{\sqrt{\frac{C}{100}}} \quad (2.22)$$

$$j_0 = -\frac{\varphi_\infty}{\hat{R}_c} = -\frac{0.238\lambda_0 \sqrt{\frac{C}{100}}}{\arctg \sqrt{\frac{C}{100}}} \quad (2.23)$$

Согласно данным, приведенным в (Стыро, Будкус, 1988) прогнозируемый рост ядерной энергетики должен привести к увеличению количества криптона - 85 в земной атмосфере и к 2020 году процентное увеличение  $C$  может составить 250%. В этом случае уменьшение столбцового сопротивления и соответственно увеличение плотности электрического тока составит 58%.

#### Заключение.

Как следует из материала, изложенного выше, наряду с понятием климата Земли можно ввести понятие электроклимата, определяемого глобальной электрической цепью в земной атмосфере. Безусловно существует связь

между ГЭЦ и различными циркуляционными процессами в атмосфере, приводящими к формированию климата Земли поскольку глобальная электрическая цепь определяется мировой грозовой активностью.

В настоящей монографии рассмотрены математические модели глобальной электрической цепи в атмосфере в квазистационарном и нестационарном приближениях. Существенную роль в этих моделях играет неоднородное распределение электрической проводимости по высоте. Получена связь между потенциалом ионосферы, который представляет глобальную характеристику электрического поля атмосферы и токовыми характеристиками грозowych облаков, которые в настоящее время предполагаются основными генераторами электрического поля атмосферы, а также проводимостью атмосферы. Эта связь установлена как в квазистационарном, так в нестационарном приближениях. В рамках нестационарной модели оценены характерные времена установления стационарного электрического поля при включение в начальный момент времени грозowych токовых генераторов. Исследовано влияние магнитосферного генератора, действующего в ионосфере, на электрическое поле, создаваемое грозowymi генераторами в нижней атмосфере.

Неоднородное распределение электрической проводимости играет также определяющую в электродном турбулентном приземном слое. Рассмотрен электродный приземный слой в приближении сильного турбулентного перемешивания. Получены основные уравнения в стационарном одномерном приближении как в отсутствии аэрозольных частиц, так и при их наличии. Построены аналитические решения задачи для различных стратификаций приземного слоя, приведены численные решения. Из полученных решений следует связь, между напряженностью



электрического поля и концентрацией аэрозольных частиц, которая была обнаружена ранее в экспериментальных исследованиях. Поскольку человеческое общество живет и функционирует в этом электроклимате, то естественно возникает вопрос о влиянии электрических процессов в атмосфере на жизнедеятельность человека. Как указывалось выше существуют данные, указывающие на то, что концентрация легких ионов влияет на защитно-приспособительские реакции человека. Уменьшение их концентрации ниже некоторого определенного значения отрицательно сказывается на проявлении этих реакций. Также в ряде медико-биологических исследований показывается влияние изменчивости электрических полей на состояние здоровья человека. В частности, как указывалось выше существует зависимость сердечно-сосудистых заболеваний от грозовых явлений. Жизнь человека в основном протекает в приземном слое атмосфере. Поэтому зависимость ионного состава приземного слоя, электрических полей от аэрозольных и радиоактивных загрязнений делает актуальным исследование этой связи, как теоретическими, так и экспериментальными методами. Как следует из рассмотрения теоретических задач, проведенного выше, измерения электрических параметров, таких как электрическая проводимость, напряженность электрического поля может давать важную информацию о загрязнениях упомянутых выше. Эти электрические параметры, особенно электрическая проводимость, могут являться индикаторами аэрозольного и радиоактивного загрязнений и работа в этом направлении должна быть продолжена.

Приложение 2.1. Вывод основных выражений для электрических величин в модели Вильсона. Из уравнения (2.6) в случае отсутствия источников электрического поля в

сферической системе координат  $(r, \theta, \phi)$  с началом в центре Земли следует уравнение:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \Delta_{\theta, \phi} \varphi + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0 \quad (2.1.1)$$

Пренебрегая угловой частью оператора Лапласа и предполагая что электрическая проводимость атмосферы определяется выражением (2.8) получим уравнение:

$$\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \left( \frac{2}{r} + \alpha \right) \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad (2.1.2)$$

Найдем решение полученного уравнения при следующих граничных условиях:

$$\varphi(r=R) = 0, \varphi(r=R+H) = \varphi_{\infty} \quad (2.1.3)$$

Производя замену переменной  $\frac{d\varphi}{dr} = y$  и интегрируя исходное уравнение два раза получим общее решение:

$$\varphi(r) = C_1 - \frac{C}{\alpha} e^{-\alpha r} \quad (2.1.4)$$

Постоянные  $C$  и  $C_1$  определяются из граничных условий (2.1.3) и находятся из следующих соотношений:

$$C = \frac{\varphi_{\infty} \alpha}{e^{-\alpha R} (1 - e^{-\alpha H})}, C_1 = \frac{\varphi_{\infty}}{1 - e^{-\alpha H}} \quad (2.1.5)$$

где:  $H$  - нижняя границы ионосферы.

Подставляя (2.1.5) в (2.1.4), получим выражение для потенциала электрического поля для сферически-симметричного случая:

$$\varphi(r) = \varphi_{\infty} \frac{1 - e^{-\alpha(r-R)}}{1 - e^{-\alpha H}} \quad (2.1.6)$$

При  $H=70$  км,  $\alpha H \gg 1$  и из выражения (2.1.6) имеем:

$$\varphi(r) = \varphi_{\infty} (1 - e^{-\alpha(r-R)}) = \varphi_{\infty} (1 - e^{-\alpha z}), z = r - R \quad (2.1.7)$$

Напряженность электрического поля находится из соотношения:

$$E_r = E_z = -\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{d\varphi}{dr} = -\alpha\varphi_\infty e^{-\alpha z} = -\alpha\varphi_\infty e^{-\alpha(r-R)} \quad (2.1.8)$$

Как следует из полученных соотношений вертикальная составляющая напряженности убывает с высотой от земной поверхности. Согласно современной грозовой теории электрического поля атмосферы (Атмосфера. Справочник.....1991) на верхней границе в классической модели сферического конденсатора создается за счет грозовой деятельности потенциал  $\varphi_\infty = 300\text{kB}$ . При  $z=0$  ( $r=R$ ) полу-

чим, что  $E_z = (60-90)\frac{B}{\text{м}}$ . Эта величина согласуется по порядку величины с наблюдаемыми значениями напряженности электрического поля в равнинных условиях.

Приложение 2.2. Основные сведения о сферических функциях (гармониках)

Эти функции возникают при решении уравнения Лапласа в сферической системе координат  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \Delta_{\theta, \phi} \varphi = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\Delta_{\theta, \phi} \varphi = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}$$

Это уравнение решается методом разделения переменных. В этом случае функция  $\varphi(r, \theta, \phi)$  ищется в виде:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\phi) \quad (2.2.2)$$

где функции, входящие в выражение (2.2.2), удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2} = -m^2, Q = e^{\pm im\phi},$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left( \sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right] P = 0$$

$$\frac{d^2 U}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} U = 0 \quad (2.2.3)$$

где:  $m, l$  - целые числа.

Второе уравнение в полученной системе уравнений называют обобщенным уравнением Лежандра, а его решения – присоединенными функциями Лежандра. Производя замену переменной  $x = \cos \theta$  получим уравнение:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] + \left[ l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] P = 0 \quad (2.2.4)$$

Рассмотрим случай  $m=0$ . Тогда  $l=0, 1, 2, 3, \dots$  и получаемые решения называются полиномами Лежандра  $P_l(x)$  порядка  $l$ . Для нескольких первых полиномов Лежандра имеют место представления:

$$P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$
(2.2.5)

Для произвольных  $l$  имеет место формула Родрига:

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \quad (2.2.6)$$

Полиномы Лежандра образуют полную систему функций, ортогональных на замкнутом отрезке  $-1 \leq x \leq 1$ , т.е. имеют место соотношения:

$$\int_{-1}^{+1} P_l(x) P_l(x) dx = 0, \int_{-1}^{+1} [P_l(x)]^2 dx = \frac{2}{2l+1} \quad (2.2.7)$$

Поскольку полиномы Лежандра образуют полную систему ортогональных функций, то любая функция  $f(x)$  может быть разложена в ряд полиномам Лежандра на интервале  $-1 \leq x \leq 1$ .

Это разложение имеет вид:

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l P_l(x), \quad A_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 f(x) P_l(x) dx \quad (2.2.8)$$

Рассмотрим для примера функцию:

$$f(x) = +1, \quad \text{при } x > 0$$

$$f(x) = -1 \quad \text{при } x < 0$$

В этом случае

$$A_l = \frac{2l+1}{2} \left[ \int_0^1 P_l(x) dx - \int_{-1}^0 P_l(x) dx \right]$$

Поскольку при нечетных  $l$  полином  $P_l(x)$  нечетен относительно  $x=0$ , а при четных  $l$  четен, отличны от нуля только коэффициенты с нечетным  $l$ . Таким образом для нечетных  $l$  имеем:

$$A_l = (2l+1) \int_0^1 P_l(x) dx \quad (2.2.9)$$

Вычисляя этот интеграл с помощью формулы Родрига найдем:

$$A_l = \left(-\frac{1}{2}\right)^{(l-1)/2} \frac{(2l+1)(l-2)!!}{2\left(\frac{l+1}{2}\right)!} \quad (2.2.10)$$

где:  $(2n+1)!! = (2n+1)(2n-1)(2n-3)\dots\dots\dots 5 \cdot 3 \cdot 1$ . Таким образом ряд для  $f(x)$  имеет вид:

$$f(x) = \frac{3}{2} P_1(x) - \frac{7}{8} P_3(x) + \frac{11}{16} P_5(x) - \dots\dots\dots \quad (2.2.11)$$

Полиномы Лежандра возникают, если задача имеет азимутальную симметрию ( $m=0$ ). Однако, как будет видно ниже в общем случае  $m \neq 0$ . Можно доказать, должны выполняться условия:

$$l \geq 0, \text{ а } m = -l, -(l-1), \dots, 0, \dots, (l-1), l.$$

Обладающее этим свойством решение называется присоединенной функцией Лежандра и обозначается  $P_l^m(x)$ . Для положительных  $m$  справедлива формула

$$\begin{aligned} P_l^m(x) &= (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = \\ &= \frac{(-1)^m}{2^l l!} (1-x^2)^{m/2} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Второе выражение в (2.2.12) получено с помощью формулы Родрига справедливо как при положительных, так и при отрицательных  $m$ .

Функции  $P_l^{-m}(x)$  и  $P_l^m(x)$  пропорциональны друг другу, поскольку дифференциальное уравнение содержит лишь  $m^2$ , а  $m$  - целое число. Можно показать, что

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \quad 2.2.13$$

При фиксированном  $m$  функции  $P_l^m(x)$  образуют ортогональную систему по индексу  $l$  на отрезке  $-1 \leq x \leq 1$ . Условие ортогональности может быть получено тем же методом, что и для полиномов Лежандра и имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_{l'}^m(x) P_l^m(x) dx &= \frac{2}{2l+1} \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \delta_{ll'} \\ \delta_{ll} &= 1, l' = l \\ \delta_{ll'} &= 0, l' \neq l \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

Функции  $Q_m(\phi) = e^{im\phi}$  образуют полную систему ортогональных функций по индексу  $m$  на интервале  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Точно также функции  $P_l^m(\cos\theta)$  образуют полную ортогональную систему по индексу  $l$  для каждого  $m$  на интервале  $-1 \leq \cos\theta \leq 1$ .

Поэтому их произведение  $P_l^m Q_m$  образуют полную ортогональную систему функций на поверхности единичной сферы по двум индексам  $l$  и  $m$ . Эти функции называются сферическими гармониками. В более старых руководствах сферические гармоники иногда называют тессеральными. Из условия нормировки (2.2.14) видно, что нормированные сферические функции, которые мы обозначим через  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ , имеют вид:

$$Y_{lm}(\theta, \phi) = \left( \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right)^{1/2} P_l^m(\cos\theta) e^{im\phi} \quad (2.2.15)$$

Из (2.2.13) следует, что

$$Y_{l,-m}(\theta, \phi) = (-1)^m Y_{lm}^*(\theta, \phi) \quad (2.2.16)$$

Условие нормировки и ортогональности имеет вид

$$\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\theta d\theta Y_{l'm'}^*(\theta, \phi) Y_{lm}(\theta, \phi) = \delta_{l'l} \delta_{m'm} \quad (2.2.17)$$

Рассмотрим примеры сферических гармоник  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  для нескольких значений  $l$  и  $m \geq 0$ . Для отрицательных значений  $m$  можно воспользоваться соотношением (2.2.16)

Сферические гармоники  $Y_{lm}(\theta, \phi)$ .

$$l=0 \quad Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$$

$$Y_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \theta e^{i\phi}$$

$$l=1$$

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \theta$$

$$Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{2\pi}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$$l=2 \quad Y_{21} = -\sqrt{\frac{15}{8\pi}} \sin \theta \cos \theta e^{i\phi}$$

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \left( \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2} \right)$$

Отметим, что при  $m=0$

$$Y_{l0}(\theta, \phi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} P_l(\cos \theta) \quad (2.2.18)$$

Произвольную функцию  $\varphi(r, \theta, \phi)$  можно разложить в ряд по сферическим гармоникам:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \varphi_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi),$$

$$\varphi_{lm}(r) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi Y_{lm}^*(\theta, \phi) \varphi(r, \theta, \phi) \quad (2.2.19)$$

При  $\theta=0$  получим

$$\varphi(r, 0, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \varphi_{l0},$$

$$\varphi_{l0} = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi P_l(\cos \theta) \varphi(r, \theta, \phi) \quad (2.2.20)$$



Все члены ряда с  $m \neq 0$  обращаются в нуль при  $\theta = 0$ .

Приложение 2.3. Функция Грина для стационарного токового источника в сферической геометрии.

Функция Грина для стационарного, зарядового, точечного источника определяется на основе решения уравнения:

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} G) = -4\pi\lambda \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (2.3.1)$$

где:  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$  - трехмерная функция Дирака.

В сферической системе координат  $(r, \theta, \phi)$  с началом в центре Земли уравнение (2.3.1) при  $\lambda = \lambda_0 e^{\alpha(r-R)}$  записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \Delta_{\theta, \phi} G + \alpha \frac{\partial G}{\partial r} = \\ = -\frac{4\pi}{r^2} \delta(r - r_0) \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

Перейдем в уравнении (2.3.2) к новой функции по формуле:  $G = e^{\frac{\alpha}{2}(r-R)} \bar{G}$ . Тогда для радиальной части оператора в (2.3.2) получим:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial G}{\partial r} \right) + \alpha \frac{\partial G}{\partial r} = e^{\frac{\alpha}{2}(r-R)} \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \bar{G}}{\partial r} \right) - \left( \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{4} \right) \bar{G} \right] \quad (2.3.3)$$

и для определения функции  $\bar{G}$  имеем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \bar{G}}{\partial r} \right) - \left( \frac{\alpha}{r} + \frac{\alpha^2}{4} \right) \bar{G} + \Delta_{\theta, \phi} \bar{G} = \\ = -\frac{4\pi}{r^2} e^{\frac{\alpha}{2}(r-R)} \delta(r - r_0) \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

При  $\alpha r \gg 1$  получим вместо (2.3.4):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \bar{G}}{\partial r} \right) - \frac{\alpha^2}{4} \bar{G} + \Delta_{\theta, \phi} \bar{G} = \\ & = -\frac{4\pi}{r^2} e^{\frac{\alpha}{2}(r-R)} \delta(r-r_0) \delta(\cos \theta - \cos \theta_0) \delta(\phi - \phi_0) \end{aligned} \quad (2.3.5)$$

Граничные условия для решения данной задачи записываются в виде:

$$\bar{G} \Big|_{r=R} = 0, \quad \bar{G} \Big|_{|r| \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.3.6)$$

Представим функцию  $\bar{G}$  в виде разложения по сферическим гармоникам:

$$\bar{G} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i \bar{G}_{ij} Y_{ij}(\theta, \phi) \quad (2.3.7)$$

Подставляя это разложение в (П.3.5), получим уравнения для функций  $\bar{G}_{ij}$ :

$$\frac{d^2 \bar{G}_{ij}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \bar{G}_{ij}}{dr} - \left( \frac{\mu}{r^2} + k^2 \right) \bar{G}_{ij} = -\frac{4\pi}{r^2} e^{\frac{\alpha}{2}(r-R)} \delta(r-R) Y_{ij}^*(\theta_0, \phi_0) \quad (2.3.8)$$

где:  $\mu = i(i+1), i = 0, 1, 2, \dots, k^2 = \frac{\alpha^2}{4}$ .

Решение однородного уравнения выражается в виде линейной комбинации модифицированных функций Бесселя (Камке, 1971):

$$y_1(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} I_{i+\frac{1}{2}}(kr), \quad y_2(r) = \frac{1}{\sqrt{r}} K_{i+\frac{1}{2}}(kr) \quad (2.3.9)$$

Для неоднородного уравнения (2.3.8) с учетом граничных условий (2.3.6) имеем решение:

$$\bar{G}_{ij} = 4\pi \frac{K_{i+\frac{1}{2}}(kr_0)}{\sqrt{rr_0}} e^{\frac{\alpha}{2}(r_0-R)} Y_{ij}^*(\theta_0, \phi_0) \left[ I_{i+\frac{1}{2}}(kr) - \frac{I_{i+\frac{1}{2}}(kR)}{K_{i+\frac{1}{2}}(kR)} K_{i+\frac{1}{2}}(kr) \right]$$

$$r < r_0$$

$$\bar{G}_{ij} = 4\pi \frac{K_{i+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{rr_0}} e^{\frac{\alpha}{2}(r_0-R)} Y_{ij}^*(\theta_0, \phi_0) \left[ I_{i+\frac{1}{2}}(kr_0) - \frac{I_{i+\frac{1}{2}}(kR)}{K_{i+\frac{1}{2}}(kR)} K_{i+\frac{1}{2}}(kr_0) \right]$$

$$r > r_0 \quad (2.3.10)$$

Тогда функция Грина  $G$  запишется следующим образом:

$$G = 4\pi \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i Y_{ij}^*(\theta_0, \phi_0) Y_{ij}(\theta, \phi) \frac{K_{i+\frac{1}{2}}(kr_0)}{\sqrt{rr_0}} e^{-\frac{\alpha}{2}(r-r_0)} \times$$

$$\left[ I_{i+\frac{1}{2}}(kr) - \frac{I_{i+\frac{1}{2}}(kR)}{K_{i+\frac{1}{2}}(kR)} K_{i+\frac{1}{2}}(kr) \right] r < r_0 \quad (2.3.11)$$

$$G = 4\pi \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i Y_{ij}^*(\theta_0, \phi_0) Y_{ij}(\theta, \phi) \frac{K_{i+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{rr_0}} e^{-\frac{\alpha}{2}(r-r_0)} \times$$

$$\left[ I_{i+\frac{1}{2}}(kr_0) - \frac{I_{i+\frac{1}{2}}(kR)}{K_{i+\frac{1}{2}}(kR)} K_{i+\frac{1}{2}}(kr_0) \right]$$

$r > r_0$  Далее формулы (2.3.11) преобразуются с помощью выражения (Градштейн, Рыжик, 1971):

$$\sum_{j=-i}^i Y_{ij}^*(\theta_0, \phi_0) Y_{ij}(\theta, \phi) = \frac{2i+1}{4\pi} P_i(\cos \gamma_0) \quad (2.3.12)$$

где:  $P_i(\cos\gamma_0)$  - полином Лежандра,

$$\cos\gamma_0 = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\phi - \phi_0),$$

к следующему виду:

$$G = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) \frac{K_{i+\frac{1}{2}}(kr_0)}{\sqrt{rr_0}} e^{-\frac{\alpha}{2}(r-r_0)} \times$$

$$[I_{i+\frac{1}{2}}(kr) - \frac{I_{i+\frac{1}{2}}(kR)}{K_{i+\frac{1}{2}}(kR)} K_{i+\frac{1}{2}}(kr)] P_i(\cos\gamma_0), \quad r < r_0$$

$$G = \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) \frac{K_{i+\frac{1}{2}}(kr)}{\sqrt{rr_0}} e^{-\frac{\alpha}{2}(r-r_0)} \times$$

$$[I_{i+\frac{1}{2}}(kr_0) - \frac{I_{i+\frac{1}{2}}(kR)}{K_{i+\frac{1}{2}}(kR)} K_{i+\frac{1}{2}}(kr_0)] P_i(\cos\gamma_0) \quad r > r_0 \quad (2.3.13)$$

Воспользуемся с целью дальнейшего преобразования (2.3.13), следующей формулой (Градштейн, Рыжик, 1971):

$$\frac{e^{-kR_1}}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{rr_0}} \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) I_{i+\frac{1}{2}}(kr_0) K_{i+\frac{1}{2}}(kr) P_i(\cos\gamma_0) \quad (2.3.14)$$

где:  $R_1^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\gamma_0$  - квадрат расстояния от источника до точки наблюдения,  $\gamma_0$  - угол между направления на зарядовый источник и точкой наблюдения.

Используя (2.3.14), можно получить из (2.3.13) функцию Грина для источника:

$$G(r, r_0) = e^{-\frac{\alpha}{2}(r-r_0)} \left[ \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}\rho_0}}{\rho_0} - \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}\rho'_0}}{\rho'_0} \right] \quad (2.3.15)$$

где:  $\rho_0 = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ ,  $\rho'_0 = |\vec{r} - \vec{r}'_0|$ ,  $\rho'_0$  - расстояние от зеркально расположенного зарядового источника.

Учтем поправку, связанную с отклонением от плоского случая. Для этого запишем уравнение (2.3.4) в следующем виде:

$$\Delta f - k^2 f - \frac{2k}{r} f = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad (2.3.16)$$

Заменяя  $r$  на  $R$ , получим следующее решение уравнения (2.3.16):

$$f = \frac{e^{-k'\rho_0}}{\rho_0} \quad (2.3.17)$$

где:  $k' = \sqrt{k^2 + \frac{2k}{R}} \approx k + \frac{1}{R}$

Окончательно в первом приближении по  $\frac{\rho_0}{R}$  получим:

$$G \approx e^{-k(r-r_0)} \frac{e^{-k\rho_0}}{\rho_0} \left(1 - \frac{\rho_0}{R}\right) \quad (2.3.18)$$

Из полученного выражения следует, что поправка линейно растет с удалением от источника. Так при  $\rho_0 \approx 50 \text{ км}$ ,  $\frac{\rho_0}{R} = 0.01$ , но для таких  $\rho_0$  за счет экспоненциального множителя функция Грина  $G$  равна практически нулю.

Приложение 2.4. Модель квазистационарного электрического поля атмосферы с учетом действия грозových

токовых источников и влияние космических факторов на электрическое поле атмосферы

В квазистационарной домолниевой стадии развития грозовых облаков основного уравнения, описывающее электрическое поле атмосферы в предположении, что в некоторый момент времени по всему земному шару действует  $N$  грозовых генераторов, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} & \lambda(r) \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \Delta_{\theta, \varphi} \phi \right] + \frac{d\lambda}{dr} \frac{d\phi}{dr} = \\ & = - \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs}}{r^2} [\delta(r - r_{s0}) - \delta(r - r_{s1})] \delta(\cos \theta - \cos \theta_s) \delta(\varphi - \varphi_0) = \\ & = S(r, \theta, \varphi, ) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

где:  $(r, \theta, \phi)$  - сферические координаты с началом в центре Земли;  $r_{s0}, r_{s1}$  - радиальные расстояния, соответствующие положительному и отрицательному заряду  $s$ -го грозового облака ( $r_{s0} > r_{s1}$ );  $\delta(u)$  - функция Дирака;  $I_{cs}$  - сторонний ток, даваемый  $s$ -грозовым генератором.

При выводе уравнения (2.4.1) предполагалось, что электрическая проводимость атмосферы изотропна и представляется в виде (Атмосфера. Справочник.....1991):

$$\lambda(r) = \lambda_0 e^{-\alpha(r-R)} \quad (2.4.2)$$

где:  $\lambda_0$  - электрическая проводимость вблизи земной поверхности,  $R$  - радиус Земли,  $\alpha = (0.2 - 0.3) \text{ км}^{-1}$ .

Орография земной поверхности в настоящем рассмотрении не учитывается, Земля предполагается сферической. Также не учитывается зависимость  $\lambda$  от углов  $\theta$  и  $\phi$ . Обсуждение этой проблемы содержится в работах [Haas, Roble, 1979; Давыденко, Беспалов, 2000].

Решение уравнения (2.4.1) будем искать в виде суммы двух функций:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2, \quad (2.4.3)$$

где функция  $\varphi_1$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \right) + \alpha \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = 0 \quad (2.4.4)$$

с граничными условиями:

$$\varphi_1 |_{r=R} = 0, \quad \varphi_1 |_{|r| \rightarrow \infty} = \varphi_\infty \quad (2.4.5)$$

а функция  $\varphi_2$  удовлетворяет уравнению:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right) + \Delta_{\theta, \phi} \varphi_2 + \alpha \frac{d\varphi_2}{dr} = \frac{1}{\lambda(r)} S(r, \theta, \phi) \quad (2.4.6)$$

с граничными условиями:

$$\varphi_2 |_{r=R} = 0, \quad \varphi_2 |_{|r| \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.4.7)$$

Решение уравнения (2.4.4) с граничными условиями (2.4.5) представляется в следующем виде:

$$\varphi_1(r) = \varphi_\infty (1 - e^{-\alpha(r-R)}) \quad (2.4.8)$$

Для нахождения функции  $\varphi_2$  представим ее в виде разложения по сферическим гармоникам (смотри Приложение 2.3):

$$\varphi_2(r, \theta, \phi) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i \varphi_{2,ij}(r) Y_{ij}(\theta, \phi) \quad (2.4.9)$$

При этом функция источника  $S$ , стоящая в правой части уравнения (2.4.6), представляется в виде:

$$S(r, \theta, \phi) = - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs}}{r^2} [\delta(r - r_{s0}) - \delta(r - r_{s1})] Y_{ij}^*(\theta_s, \phi_s) Y_{ij}(\theta, \phi) \quad (2.4.10)$$

Используя эти соотношения, получим уравнения для определения  $\varphi_{2,ij}$ :

$$\frac{d^2 \varphi_{2,ij}}{dr^2} + \alpha \frac{d\varphi_{2,ij}}{dr} - \frac{\mu}{R^2} \varphi_{2,ij} =$$

$$= - \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs}}{\lambda(r)r^2} [\delta(r-r_{s0}) - \delta(r-r_{s1})] Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) \quad (2.4.11)$$

Решение однородного уравнения, соответствующего (2.4.11) записывается в следующем виде:

$$\varphi_{2,ij}(r) = C_{1ij} e^{\sigma_1 r} + C_{2ij} e^{\sigma_2 r},$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 4i(i+1)/R^2}}{2}, \quad i=0,1,2,\dots \quad (2.4.12)$$

Общее решение неоднородного уравнения находится с помощью метода вариации произвольных постоянных Лангранжа (Камке, 1971), в котором предполагается, что постоянные  $C_{1ij}$  и  $C_{2ij}$  являются функциями  $r$  и для их определения получают следующую систему уравнений:

$$C'_{1ij} e^{\sigma_1 r} + C'_{2ij} e^{\sigma_2 r} = 0$$

$$\sigma_1 C'_{1ij} e^{\sigma_1 r} + \sigma_2 C'_{2ij} e^{\sigma_2 r} = f(r) =$$

$$= - \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs}}{\lambda(r)r^2} [\delta(r-r_{s0}) - \delta(r-r_{s1})] Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) \quad (2.4.13)$$

где штрихи у постоянных означают производные по  $r$ .

Решая систему полученных уравнений и интегрируя полученные выражения получим для  $\varphi_{2,ij}(r)$  выражение:

$$\varphi_{2,ij}(r) = C_{1ij} e^{\sigma_1 r} + e^{\sigma_1 r} \int_R^r \frac{f(r') e^{-\sigma_1 r'}}{\sqrt{\alpha^2 + 4\mu/R^2}} dr' +$$

$$+ C_{2ij} e^{\sigma_2 r} - e^{\sigma_2 r} \int_R^r \frac{f(r') e^{-\sigma_2 r'}}{\sqrt{\alpha^2 + 4\mu/R^2}} dr' \quad (2.4.14)$$

где:  $\mu = i(i+1), i = 0,1,2,\dots$

При  $r < \min\{r_{s1}\}$  интегральные члены в (2.4.14) исчезают вследствие присутствия в подынтегральных функциях дельта-функций и для  $\varphi_{2,ij}$  имеем:



$$\varphi_{2,ij} = C_{1ij}e^{\sigma_1 r} + C_{2ij}e^{\sigma_2 r} \quad (2.4.15)$$

При  $r > \max\{r_{s0}\}$  получим:

$$\begin{aligned} \phi_{2,ij}(r) &= C_{1ij}e^{\sigma_1 r} - e^{\sigma_1 r} \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 + 4\mu/R^2}} \times \\ &\sum_{s=1}^N \frac{I_{cs}}{R^2} \left( \frac{e^{-\sigma_1 r_{s0}}}{\lambda(r_{s0})} - \frac{e^{-\sigma_1 r_{s1}}}{\lambda(r_{s1})} \right) Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) + C_{2ij}e^{\sigma_2 r} + \\ &+ \frac{e^{\sigma_2 r}}{\sqrt{\alpha^2 + 4\mu/R^2}} \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs}}{R^2} \left( \frac{e^{-\sigma_2 r_{s0}}}{\lambda(r_{s0})} - \frac{e^{-\sigma_2 r_{s1}}}{\lambda(r_{s1})} \right) Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

Используя второе условие в (2.4.7), получим, что при  $r \rightarrow \infty$ :

$$C_{1ij} = \frac{1}{R^2 \sqrt{\alpha^2 + 4\mu/R^2}} \sum_{s=1}^N I_{cs} \left( \frac{e^{-\sigma_1 r_{s0}}}{\lambda(r_{s0})} - \frac{e^{-\sigma_1 r_{s1}}}{\lambda(r_{s1})} \right) Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) \quad (2.4.17)$$

Из первого граничного условия в (2.4.7) имеем:

$$C_{2ij} = -C_{1ij}e^{(\sigma_1 - \sigma_2)R} \quad (2.4.18)$$

Подставляя (2.4.17) и (2.4.18) в выражения для  $\varphi_{2,ij}$ , получим:

$$\begin{aligned} \phi_{2,ij}(r) &= \frac{1}{R^2 \sqrt{\alpha^2 + 4\mu/R^2}} \times \\ &\sum_{s=1}^N I_{cs} \left( \frac{e^{-\sigma_1 r_{s0}}}{\lambda(r_{s0})} - \frac{e^{-\sigma_1 r_{s1}}}{\lambda(r_{s1})} \right) Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) (e^{\sigma_1(r-R)} - e^{\sigma_2(r-R)}) e^{\sigma_1 R}, r < \min\{r_{s1}\} \\ \phi_{2,ij}(r) &= \frac{1}{R^2 \sqrt{\alpha^2 + 4\mu/R^2}} \times \end{aligned}$$

$$\left[ \sum_{s=1}^N I_{cs} \left( \frac{e^{\sigma_2(r-r_{s0})}}{\lambda(r_{s0})} - \frac{e^{\sigma_2(r-r_{s1})}}{\lambda(r_{s1})} \right) - e^{\sigma_2(r-R)} \right. \\ \left. \sum_{s=1}^N I_{cs} \left( \frac{e^{-\sigma_1(r_{s0}-R)}}{\lambda(r_{s0})} - \frac{e^{-\sigma_1(r_{s1}-R)}}{\lambda(r_{s1})} \right) \right] Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) \quad r > \max\{r_{s1}\} \\ (2.4.19)$$

Выражения (2.4.19) можно переписать в более компактной форме:

$$\phi_{2,ij}^{(1)} = \frac{1}{R^2 \alpha \sqrt{1 + 4\mu / \alpha^2 R^2}} \\ \sum_{s=1}^N I_{cs} \left[ \frac{1}{\lambda(r_{s0})} e^{-\frac{\alpha}{2}(r-r_{s0})} \left( e^{\frac{\alpha}{2}(r-r_{s0})\sqrt{1+4\mu/\alpha^2 R^2}} - e^{\frac{\alpha}{2}(r+r_{s0}-2R)\sqrt{1+4\mu/\alpha^2 R^2}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda(r_{s1})} e^{-\frac{\alpha}{2}(r-r_{s1})} \left( e^{\frac{\alpha}{2}(r-r_{s1})\sqrt{1+4\mu/\alpha^2 R^2}} - e^{\frac{\alpha}{2}(r+r_{s1}-2R)\sqrt{1+4\mu/\alpha^2 R^2}} \right) \right] \times \\ Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s), r > \max\{r_{s0}\} \quad (2.4.20)$$

$$\phi_{2,ij}^{(2)} = \frac{1}{R^2 \alpha \sqrt{1 + 4\mu / \alpha^2 R^2}} \times \\ \sum_{s=1}^N I_{cs} \left[ \frac{1}{\lambda(r_{s0})} e^{-\frac{\alpha}{2}(r-r_{s0})} \left( e^{\frac{\alpha}{2}(r_{s0}-r)\sqrt{1+4\mu/\alpha^2 R^2}} - e^{\frac{\alpha}{2}(r+r_{s0}-2R)\sqrt{1+4\mu/\alpha^2 R^2}} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda(r_{s1})} e^{-\frac{\alpha}{2}(r-r_{s1})} \left( e^{\frac{\alpha}{2}(r_{s1}-r)\sqrt{1+4\mu/\alpha^2 R^2}} - e^{\frac{\alpha}{2}(r+r_{s1}-2R)\sqrt{1+4\mu/\alpha^2 R^2}} \right) \right] \times \\ Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s), r < \min\{r_{s1}\}$$

Используя эти выражения, получим общее решение исходного уравнения:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \varphi_{\infty} (1 - e^{-\alpha(r-R)}) + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i}^i \varphi_{2,ij}^{(k)} Y_{ij}(\theta, \phi),$$

$$\kappa = 1, 2 \quad (2.4.21)$$

Используя полученное решение, можно оценить потенциал ионосферы  $\varphi_{\infty}$ , на основе соотношения

$$\oint_S \lambda E_r dS = 0 \quad (2.4.22)$$

Это соотношение отражает баланс электрических токов, текущих в областях, где грозовые источники отсутствуют и в областях, где они присутствуют. В первых областях текут токи разрядки, во вторых областях текут токи зарядки.

Дифференцируя соотношение (2.4.21) при  $\kappa=2$  и подставляя полученное выражение в (2.4.22) и используя при этом условие:  $\mu \ll \frac{1}{4} \alpha^2 R^2$ . получим в результате интегрирования по углам  $\theta$  и  $\phi$  сферической поверхности радиуса  $r$  выражение для потенциала ионосферы:

$$\varphi_{\infty} = \frac{1}{4\pi R^2 \alpha} \sum_{s=1}^N I_{cs} \left( \frac{1}{\lambda(r_{s1})} - \frac{1}{\lambda(r_{s0})} \right) \quad (2.4.23)$$

Выше было показано, что одним из источников электрического поля в нижней атмосфере являются грозовые облака, причем как показывают современные исследования - это облака экваториальной зоны земного шара (Roble, Hays, 1979; Roble, Tzur, 1986). Изменчивость грозовой активности приводит к вариациям напряженности электрического поля в атмосфере, носящим общий глобальный характер, к так называемой унитарной вариации потенциала и напряженности электрического поля (Имянитов, Чубарина, 1965). Наряду с грозовыми облаками определенный вклад в вариации электрического поля могут давать конвективный токовый генератор, действующий в пог-

раничном слое атмосферы (Морозов, Селезнева, 1988; Morozov, 2006), магнитосферный генератор, действующий в околополярной зоне (Roble, Haas, 1979; Морозов, Трошичев, 2008) и ионосферное динамо, обусловленное приливными явлениями со стороны Солнца и Луны (Haas, Roble, 1979; Volland, 1977; Грунская, Морозов и др. 2003). Причем свойства последних двух генераторов определяется свойствами ионосферы и магнитосферы. Мониторинг глобальной атмосферно-электрической цепи (ГАЭЦ) или глобальной электрической цепи (ГЭЦ) проводился ААНИИ на станции «Восток» в Антарктиде (Frank-Kamenetsky et al., 2001). Было показано, что вклад магнитосферного генератора в вариации напряженности электрического поля и потенциала ионосферы составляет 30-40%, наблюдения также выявили унитарную вариацию электрического поля, обусловленную грозовой активностью. Мониторинг электрического поля на этой станции продолжался в течение десяти лет. Полученные результаты были подтверждены теоретическими расчетами (Морозов, Трошичев, 2008), которые будут рассмотрены ниже.

Экспериментальные работы по исследованию приливного ионосферного динамо проводились во Владимирском государственном университете. В результате статистической обработки результатов наблюдений за напряженностью электрического поля было показано, что влияние солнечных термических приливов на электрическое поле атмосферы составляет 10%, а лунные гравитационные приливы дают вклад около 5%, что подтверждается теоретическими оценками, проведенными в работах (Грунская и др. 2003; Грунская и др. 2005)

Мониторинг влияния аэрозольных загрязнений на электрическую проводимость приземного слоя проводился на атмосферно-электрической станции «Воейково» (ГГО).

В результате многолетних исследований было показано, что аэрозольные частицы в диапазоне радиусов 0.01-0.2 мкм оказывают существенное влияние на электрическую проводимость приземного слоя (Шварц, Огуряева, 1987). Уменьшение составляет 10-20%. В случае глобального аэрозольного загрязнения с характерными масштабами порядка 1000 км напряженность электрического поля, измеряемая в незагрязненных районах земного шара, может служить индикатором аэрозольных загрязнений такого масштаба. Соответствующие оценки будут даны ниже.

Таким образом потенциал ионосферы, являющийся важной характеристикой, определяющей электрическое поле атмосферы, складывается из следующих частей: потенциала ионосферы, определяемого грозами экваториальной зоны земного шара и потенциала ионосферы, определяемого космическими факторами – взаимодействием солнечного ветра с земной магнитосферой и приливного воздействия на ионосферу со стороны Солнца и Луны. Потенциал ионосферы, определяемый грозами не зависит от сферических координат  $(r, \theta, \phi)$ , в то время, как потенциал ионосферы, определяемый космическими факторами (магнитосферный генератор, ионосферное динамо) зависят от этих координат, так как занимают ограниченную область на ионосферной сфере. В этом случае в электрическом поле «хорошей погоды» появляются горизонтальные составляющие напряженности электрического поля -  $E_\theta, E_\phi$ , которые являются индикаторами генераторов этого типа. Теоретическое рассмотрение задачи о трансформации электрического поля, создаваемого на ионосферных высотах в нижнюю атмосферу основывается на уравнении стационарного тока без источников в правой части, которое в сферической системе координат с началом в центре Земли записывается в виде:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \right) + \Delta_{\theta, \phi} \varphi_3 + \alpha \frac{d\varphi_3}{dr} = 0 \quad (2.4.24)$$

Для этого уравнения имеют место следующие граничные условия:

$$\varphi_3(r=R)=0, \quad \varphi_3(r=r_1)=\varphi_3(r_1, \theta, \phi) \quad (2.4.25)$$

где:  $\varphi_3(r_1, \theta, \phi)$  - распределение потенциала электрического поля на нижней границе ионосферы, обусловленное космическими факторами.

Используя метод разложения по сферическим гармоникам, представленный в приложении 2, получим следующее выражение для распределения потенциала  $\varphi_3(r, \theta, \phi)$ :

$$\varphi_3(r, \theta, \phi) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i \frac{\varphi_{3,ij}(r_1) (e^{\beta_1(r-R)} - e^{\beta_2(r-R)})}{e^{\beta_1(r_1-R)} - e^{\beta_2(r_1-R)}} Y_{ij}(\theta, \phi) \quad (2.4.26)$$

$$\beta_1 = -\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4\mu/R^2}}{2}, \quad \beta_2 = -\frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{\alpha^2 + 4\mu/R^2}}{2},$$

$$\varphi_{3,ij}(r_1) = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \varphi_3(r_1, \theta, \phi) Y_{ij}^*(\theta, \phi) \sin \theta d\theta d\phi$$

Из решения (2.4.26) следует более упрощенная формула, поскольку для числа членов  $n$  до 20 выполнено условие:  $\alpha^2 \gg 4\mu/R^2$  и эта формула имеет вид:

$$\varphi_3(r, \theta, \phi) = \frac{1 - e^{-\alpha(r-R)}}{1 - e^{-\alpha(r_1-R)}} \varphi_3(r_1, \theta, \phi) \quad (2.4.27)$$

Из выражения (2.4.27) следуют выражения для вертикальной, широтной и долготной составляющих напряженности электрического поля, создаваемого ионосферным генератором:

$$\begin{aligned}
 E_r = E_z &= -\frac{\partial \varphi_3}{\partial r} = -\frac{\alpha e^{-\alpha(r-R)}}{1 - e^{-\alpha(r_1-R)}} \varphi_3(r_1, \theta, \phi) \\
 E_\theta &= -\frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} = -\frac{1 - e^{-\alpha(r-R)}}{1 - e^{-\alpha(r_1-R)}} \frac{\partial \varphi_3(r_1, \theta, \phi)}{r \partial \theta} \\
 E_\phi &= -\frac{\partial \varphi}{r \sin \theta \partial \phi} = -\frac{1 - e^{-\alpha(r-R)}}{1 - e^{-\alpha(r_1-R)}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \varphi_3(r_1, \theta, \phi)}{\partial \phi} \quad (2.4.28)
 \end{aligned}$$

Используем формулы для оценки составляющих напряженности электрического поля, возникающих вследствие генерации электрического поля за счет солнечных и лунных приливов в ионосфере. В работе Volland (1977) были распределения потенциала электрического поля на уровне ионосферы, обусловленные солнечными и лунными приливами. Действительно горизонтальные движения нейтральной компоненты совместно со слабоионизованной плазменной компонентой атмосферы поперек магнитного поля Земли приводит к генерации электрических токов и следовательно к возникновению разности потенциалов электрического поля. Солнечное воздействие в основном приводит к возникновению термических приливов или термической суточной приливной волны (1,-1). Для расстояний меньших 100 км имеет место следующее представление для горизонтальных составляющих этой приливной волны:

$$v_\theta = \frac{5}{3} V_0^{sq} \cos \theta \cos \tau, \quad v_\phi = -\frac{1}{3} V_0^{sq} (6 \cos^2 \theta - 1) \sin \tau \quad (2.4.29)$$

где:  $\tau$ - локальное время,  $V_0^{sq} = 20 \text{ м/с}$ .

Вычисления, проведенные в этой работе, для дипольного магнитного поля Земли, дают следующее выражение для потенциала электрического поля:

$$\varphi(r_1, \theta, \phi) = \frac{r_1 B_{00} V_0^{sq}}{3} \sin \theta (3 + 4 \cos^2 \theta) \sin \tau \quad (2.4.30)$$

где:  $B_{00} = 3 \times 10^{-5} T$  - напряженность магнитного поля на экваторе.

Численные оценки величины этого потенциала дают следующие значения: при  $\theta = \frac{\pi}{6}$ ,  $\varphi(r, \theta, \phi) = 3.84 \sin \tau$  Кв, при

$\theta = \frac{\pi}{3}$ ,  $\varphi(r_1, \theta, \phi) = 4.43 \sin \tau$  Кв.

С помощью выражений (2.4.28) и (2.4.30) можно найти отношение горизонтальной составляющей напряженности электрического поля  $E_\theta$  к вертикальной составляющей  $E_r$ :

$$\left| \frac{E_\theta}{E_r} \right| = \frac{1 - e^{-\alpha(r-R)}}{\alpha r e^{-\alpha(r-R)}} \quad (2.4.31)$$

Это отношение становится равным единице на высоте  $z=r-R=42\text{км}$  при  $\alpha = 1/6\text{км}^{-1}$  и с увеличением высоты оно возрастает.

Для расчета разности потенциала электрического поля, возникающей под действием различных космофизических факторов в ионосфере, необходимо рассмотреть вопрос об электрической проводимости ионосферы.

Как указывалось выше в ионосфере начинает играть электронная проводимость, которая в нижних слоях атмосферы мала, так как электроны рекомбинируют с нейтральными молекулами за время порядка  $10^{-7}$  с, образуя отрицательные ионы. Однако с ростом высоты роль электронной проводимости возрастает и с высот порядка 70 км на эту проводимость начинает влиять магнитное поле Земли, чего она приобретает анизотропный, тензорный характер. При наличии магнитного поля основную роль в ионосфере играют три проводимости:



$$\lambda_{II} = Ne^2 \left( \frac{1}{m_e v_e} + \frac{1}{m_i v_i} \right)$$

$$\lambda_p = Ne^2 \left( \frac{v_e}{m_e (v_e^2 + \omega_e^2)} + \frac{v_i}{m_i (v_i^2 + \omega_i^2)} \right) \quad (2.4.32)$$

$$\lambda_H = Ne^2 \left( \frac{\omega_e}{m_e (v_e^2 + \omega_e^2)} + \frac{\omega_i}{m_i (v_i^2 + \omega_i^2)} \right)$$

где:  $N$  - концентрации электронов и положительных ионов,  $e$  - заряд электрона,  $m_e, m_i$  - массы электронов и ионов.  $v_e, v_i$  - частота столкновений электронов и ионов с нейтральными молекулами,  $\omega_e = \frac{e|\vec{B}|}{m_e c}$ ,  $\omega_i = \frac{e|\vec{B}|}{m_i c}$  - гирочастоты электрона

и иона,  $\vec{B}$  - напряженность магнитного поля,  $\lambda_{II}$  - обычная электропроводность, соответствующая электрическому полю, направленному вдоль магнитного поля;  $\lambda_p$  - электрическая проводимость Педерсона, соответствующая электрическому полю, направленному перпендикулярно магнитному полю; электрическая проводимость Холла, соответствующая направлению, перпендикулярному электрическому полю и магнитному полю.

На высотах меньших 70км  $v_e \gg \omega_e, v_i \gg \omega_i$ . В этом случае из выражений (2.4.32) следует  $\lambda_{II} \approx \lambda_p \gg \lambda_H$  и в этом случае электропроводность изотропна. Закон Ома в случае анизотропной электрической проводимости записывается в следующем виде:

$$\vec{j} = \lambda_{II} \vec{E}_{II} + \lambda_p \vec{E}_{\perp} + \lambda_H \frac{[\vec{B} \times \vec{E}]}{B^2} \quad (2.4.33)$$

Одной из важных проблем атмосферного электричества является проблема связи ГЭЦ с крупномасштабными

системами продольных магнитосферных токов. Эти токи, текущие в около полярной зоне вдоль силовых линий магнитного поля (эти крупномасштабные продольные токи втекают в ионосферу на утренней границе полярной шапки и вытекают из ионосферы на вечерней границе) генерируют в ионосфере разность потенциалов утро-вечер поперек полярной шапки и электрические поля, которые затем проникают в приземную атмосферу, вызывая вариации напряженности электрического поля, которые дополняют вариации поля, вызванные грозowymi облаками (унитарная суточная вариация). Эти электрические поля рассчитывались в работе Морозова, Трошичева (2008). Основное уравнение для определения этой разности потенциалов в стационарном случае имеет следующий вид:

$$\operatorname{div}(\vec{j} + \vec{j}_{\parallel}) = 0 \quad (2.4.34a)$$

где:  $\vec{j}_{\parallel}$  - плотность продольного стороннего тока.

Предполагается, что напряженность магнитного поля  $\vec{B}$  в высокоширотной ионосфере направлена вертикально вдоль оси  $z$  и является величиной постоянной. Поскольку  $\lambda_{\parallel} \gg \lambda_p, \lambda_H$ , то напряженность электрического поля  $\vec{E}$  будет иметь только горизонтальные компоненты (Gurevich et al., 1976). Предполагая, что в высокоширотной области  $\vec{E}_{\parallel} = 0$ ,  $\lambda_p = \text{const}$ ,  $\lambda_H = \text{const}$  и используя для  $\vec{E}$  представление:  $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ , где  $\varphi$  - потенциал электрического поля, получим используя соотношения (2.4.32) и (2.4.33) уравнение:

$$\lambda_p \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \operatorname{div} \vec{j}_{\parallel} \quad (2.4.34)$$

где  $x$  и  $y$  - декартовы координаты, перпендикулярные оси  $Oz$ .

Интегрируя уравнение (2.4.34) по  $z$  и считая, что  $\vec{E}_\perp$  не зависит от  $z$ , получим уравнение для потенциала электрического поля в приближении тонкой ионосферы:

$$\Sigma_p \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = \int_{z_0}^{\infty} \text{div} \vec{j}_\parallel dz \quad (2.4.35)$$

где:  $\Sigma_p$  - интегральная электрическая проводимость Педерсона,  $z_0$  - координата нижней границы ионосферы.

Записывая полученное уравнение в цилиндрической системе координат  $(r, \phi, z)$  имеем вместо (2.4.35):

$$\Sigma_p \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right] = \int_{z_0}^{\infty} \text{div} \vec{j}_\parallel dz \quad (2.4.36)$$

В работе (Морозов, Трошичев, 2008) рассматривалось три модели для плотности продольного тока  $\vec{j}_\parallel$ . В модели аврорального овала (модель 1) плотность продольного тока задавалась выражениями:

$$\vec{j}_\parallel = -\vec{e}_z \frac{I_\parallel}{\pi R} \theta(z - z_0) \delta(r - R), \quad 0 < \phi < \pi$$

$$\vec{j}_\parallel = \vec{e}_z \frac{I_\parallel}{\pi R} \theta(z - z_0) \delta(r - R), \quad \pi < \phi < 2\pi \quad (2.4.37)$$

В этом случае из (2.4.36) имеем следующие уравнения:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = -\frac{I_\parallel}{\pi R \Sigma_p} \delta(r - R) \quad 0 < \phi < \pi$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = \frac{I_\parallel}{\pi R \Sigma_p} \delta(r - R) \quad \pi < \phi < 2\pi \quad (2.4.38)$$

где:  $I_\parallel$  - величина полного продольного тока,  $\theta(z - z_0)$  - функция Хевисайда,  $\delta(r - R)$  - функция Дирака,  $R$  - радиус

области втекания продольного тока (радиус аврорального овала)

Модель аврорального овала может быть обобщена на случай неоднородного распределения по углу  $\phi$  (модель 2). Предполагая, что распределение является гауссовой функцией, имеем:

$$\vec{j}_{\parallel} = -\vec{e}_z \frac{I_{\parallel}}{\pi\chi} e^{-(\phi - \frac{\pi}{2})^2 / \Delta^2} \theta(z - z_0) \delta(r - R), \quad 0 < \phi < \pi,$$

$$\vec{j}_{\parallel} = \vec{e}_z \frac{I_{\parallel}}{\pi\chi} e^{-(\phi - \frac{3\pi}{2})^2 / \Delta^2} \theta(z - z_0) \delta(r - R), \quad \pi < \phi < 2\pi$$

$$\chi = 2\Delta \int_0^{\pi/2\Delta} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\phi^2 / \Delta^2} d\phi \quad (2.4.39)$$

Уравнения для определения потенциала электрического поля в этом случае аналогичны уравнениям (2.4.38). Наконец существует модель продольных токов в области каспа (касп - это воронка, расширяющаяся от поверхности Земли вплоть до магнитопаузы, образованная силовыми линиями геомагнитного поля). Существуют две воронки по одной в каждом полушарии. Эти воронки разделяют силовые линии дневной магнитосферы Земли и геомагнитного хвоста. На ночной стороне магнитосферы Земли геомагнитное поле образует геомагнитный хвост, который образуется двумя пучками силовых линий с противоположными направлениями магнитного поля. Продольные токи в области каспа могут быть промоделированы, как противоположно направленные токи, направленные вдоль двух концентрических поверхностей, с радиусами  $R_1$  и  $R_2$ , ограниченные сектором с азимутальным углом  $\alpha$  относительно полуденного меридиана ( $\pi - \alpha/2, \pi + \alpha/2$ ). Направление этих токов определяется компонентой межпланетного магнитного поля  $B_y$ , изменяется на

противоположное, когда она меняет знак. На рис.11 представлен случай, когда  $B_y > 0$ . В этом случае мы получим при аналогичных упрощениях следующее выражение для плотности продольных электрических токов:

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\parallel}^{(1)} &= \vec{e}_z \frac{I_{\parallel} \delta(r - R_1) \theta(z - z_0)}{R_1 \alpha}, \quad \pi - \frac{\alpha}{2} < \phi < \pi + \frac{\alpha}{2} \\ \vec{j}_{\parallel}^{(2)} &= -\vec{e}_z \frac{I_{\parallel} \delta(r - R_2) \theta(z - z_0)}{R_2 \alpha}, \quad \pi - \frac{\alpha}{2} < \phi < \pi + \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

Уравнение для потенциала электрического поля представляется в виде:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = -\frac{I_{\parallel}}{R_2 \alpha \Sigma_p} \delta(r - R_2) + \frac{I_{\parallel}}{R_1 \alpha \Sigma_p} \delta(r - R_1) \quad (2.4.41)$$

Для всех трех моделей решение находилось с помощью разложения в ряд Фурье (Ли Цзун-дао, 1965; Тихонов и Самарский, 1966):

$$\begin{aligned} \varphi(r, \phi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \varphi_n(r) e^{in\phi}, \\ \varphi_n(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \phi) e^{-in\phi} d\phi, \quad i = \sqrt{-1} \end{aligned} \quad (2.4.42)$$

С помощью этого метода было получено распределение электрического потенциала в области аврорального овала (Модель 1):

$$\begin{aligned} \varphi(r, \phi) &= \frac{2I_{\parallel}}{\pi^2 \Sigma_p} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{r}{R} \right)^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\phi}{(2k+1)^2}, \quad r < R, \\ \varphi(r, \phi) &= \frac{2I_{\parallel}}{\pi^2 \Sigma_p} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{R}{r} \right)^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\phi}{(2k+1)^2}, \quad r > R \end{aligned} \quad (2.4.43)$$

Для неоднородного распределения плотности продольного тока по  $\phi$  (Модель 2) распределение электрического потенциала представляется в виде:

$$\begin{aligned}\varphi(r, \phi) &= \frac{I_{\parallel}}{\pi \chi \Sigma_p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \eta_{2k+1} \left(\frac{r}{R}\right)^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\phi}{(2k+1)^2}, r < R \\ \varphi(r, \phi) &= \frac{I_{\parallel}}{\pi \chi \Sigma_p} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \eta_{2k+1} \left(\frac{R}{r}\right)^{2k+1} \frac{\sin(2k+1)\phi}{(2k+1)^2}, r > R \\ \eta_{2k+1} &= 2 \int_0^{\pi/2} \exp(-\phi_1^2 / \Delta^2) \cos(2k+1)\phi_1 d\phi_1 \quad (2.4.44)\end{aligned}$$

Наконец в случае модели дневного каспа (Модель 3) имеем:

$$\begin{aligned}\varphi(r, \phi) &= -\frac{I_{\parallel}}{2\pi \Sigma_p} \left\{ \ln \frac{R_2}{R_1} - \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{r}{R_2}\right)^n - \left(\frac{r}{R_1}\right)^n \right] \times \right. \\ &\quad \left. \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{\alpha}{2} n \cos n\phi \right\}, r < R_1 \\ \varphi(r, \phi) &= -\frac{I_{\parallel}}{2\pi \Sigma_p} \left\{ \ln \frac{R_2}{r} - \frac{2}{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{r}{R_2}\right)^n - \left(\frac{R_1}{r}\right)^n \right] \times \right. \\ &\quad \left. \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{\alpha}{2} n \cos n\phi \right\}, R_1 < r < R_2 \\ \varphi(r, \phi) &= -\frac{I_{\parallel}}{2\pi \Sigma_p} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left(\frac{R_2}{r}\right)^n - \left(\frac{R_1}{r}\right)^n \right] \times \right. \\ &\quad \left. \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{\alpha}{2} n \cos n\phi \right\}, r > R_2 \quad (2.4.45)\end{aligned}$$

На рис.12 представлены распределения продольных токов  $I_{\parallel}$  вдоль аврорального овала и дневного каспа. Для расчета  $\varphi(r, \phi)$  выбирались следующие значения параметров: радиус области аврорального овала  $R=1500$ км; радиусы области дневного каспа  $R_1=850$ км и  $R_2=1000$ км;

$$r=550\text{км}; I_{\parallel}=10^6\text{А}; (\Sigma_p)^{-1}=1\text{Ом}; \Delta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{20}, \alpha = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}.$$

Величина тока  $I_{\parallel}$  связана с напряженностью межпланетного магнитного поля (Frank – Kamenetsky et al., 2001) и может принимать при  $R=R_1$ , как положительные, так и отрицательные значения.

Полученные распределения потенциала электрического поля на нижней границе ионосферы можно использовать в качестве верхнего граничного условия при решении задачи о проникновении ионосферных электрических полей в нижнюю атмосферу. Предположение об изотропности электрической проводимости нижней атмосферы и равенстве нулю продольного электрического тока приводит к следующему уравнению для потенциала электрического поля в области  $0 < z < z_0$ , записанному в цилиндрической системе координат:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \lambda \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} \right] = 0 \quad (2.4.46)$$

Электрическая проводимость  $\lambda$  определяется соотношением (2.4.2):  $\lambda = \lambda_0 e^{\alpha z}$ .

Граничные условия для решения уравнения (2.4.46) записываются в следующем виде:

$$\varphi(z=0, r, \phi) = 0, \quad \varphi(z=z_0, r, \phi) = \widehat{\varphi}(r, \phi) \quad (2.4.47)$$

где:  $\widehat{\varphi}(r, \phi)$  - распределение электрического потенциала на нижней границе ионосферы, определяемое распределениями полученными выше.

Решение этой задачи находится методом разложения в ряд Фурье (2.4.42), а также использованием Фурье-Бесселя (Диткин, Прудников, 1974). Так используя в начале разложение в ряд Фурье, получим уравнение:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \phi_n(r, z)}{\partial z} \right) + \lambda \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \phi_n}{\partial r} \right) - \frac{n^2}{r^2} \phi_n(r, z) \right] = 0, n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (2.4.48)$$

Если к этому уравнению применить преобразование Фурье-Бесселя:

$$\bar{\varphi}_n(z) = \int_0^{\infty} \varphi_n(r, z) J_n(xr) r dr, \quad \varphi_n = \int_0^{\infty} \bar{\varphi}_n J_n(xr) x dx,$$

где:  $J_n(xr)$ - функция Бесселя  $n$ -го порядка то имеем уравнение для определения  $\bar{\varphi}_n$ :

$$\frac{d^2 \bar{\varphi}_n}{dz^2} + \alpha \frac{d\bar{\varphi}_n}{dz} - x^2 \bar{\varphi}_n = 0 \quad (2.4.49)$$

Общее решение уравнения записывается в виде:

$$\bar{\varphi}_n = C_{1n} \exp\left(-\frac{\beta - \sqrt{\beta^2 + 4x^2}}{2}\right) + C_{2n} \exp\left(-\frac{\beta + \sqrt{\beta^2 + 4x^2}}{2}\right), \quad (2.4.50)$$

где  $C_{1n}, C_{2n}$  - постоянные, подлежащие определению.

Граничные условия (2.4.47) для определения этих постоянных записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_n(z=0) &= 0, \\ \bar{\varphi}_n(z=z_0) &= \hat{\varphi}_n = \int_0^{\infty} \hat{\varphi}_n J_n(xr) r dr = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_0^{2\pi} \hat{\varphi}(r, \varphi) \exp(-in\varphi) d\varphi \right) J_n(xr) r dr \quad (2.4.51) \end{aligned}$$

Принимая во внимание первое граничное условие, получим из (2.4.50)  $C_{1n} = -C_{2n}$  и



$$\bar{\phi}_n = 2C_{1n} \exp\left(-\frac{\beta}{2}z\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4x^2}}{2}\right) z. \quad (2.4.52)$$

Из второго граничного условия найдем

$$C_{1n} = \frac{\bar{\phi}_n \exp\left(-\frac{\beta}{2}z_0\right)}{2\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4x^2}}{2}\right) z_0}. \quad (2.4.53)$$

Используя (2.4.53), получим для  $\bar{\Phi}_n$ :

$$\bar{\phi}_n = \frac{\bar{\phi}_n \exp\left(-\frac{\beta}{2}(z - z_0)\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4x^2}}{2}\right) z}{\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4x^2}}{2}\right) z_0}. \quad (2.4.54)$$

В нижней атмосфере электрический потенциал может быть представлен в виде:

$$\phi(r, \varphi, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\varphi) \times \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\bar{\phi}_n \exp\left(-\frac{\beta}{2}(z - z_0)\right) \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4x^2}}{2}\right) z}{\operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4x^2}}{2}\right) z_0} J_n(xr) x dx \right\}. \quad (2.4.55)$$

Используя (2.4.55), найдем выражение для вертикальной составляющей напряженности электрического поля при  $z = 0$ :

$$E_z|_{z=0} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\phi) \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\bar{\varphi}_n \exp\left(\frac{\beta}{2} z_0\right) \sqrt{\beta^2 + 4x^2}}{2 \operatorname{sh}\left(\frac{\sqrt{\beta^2 + 4x^2}}{2}\right) z_0} J_n(xr) x dx \right\} \quad (2.4.56)$$

Преобразуем (2.4.56), совершая в этом выражении замену из переменных  $y = xr$ . В результате получим:

$$E_z|_{z=0} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\phi) \times \left\{ \int_0^{\infty} \frac{\bar{\phi}_n \left(\frac{y}{r}\right) \exp\left(\frac{\beta}{2} z_0\right) \beta \sqrt{1 + \frac{4y^2}{r^2 \beta^2}} e^{-\frac{\beta}{2} z_0 \sqrt{1 + \frac{4y^2}{r^2 \beta^2}}}}{\left(1 - e^{-\sqrt{1 + \frac{4y^2}{r^2 \beta^2}} \beta z_0}\right) r^2} J(y) y dy \right\} \quad (2.4.57)$$

При  $r^2 \beta^2 \gg 1$  ( $r \gg \beta^{-1}$ ,  $\beta^{-1} \approx 3,3$  км), пренебрегая в (2.4.57) выражениями, содержащими  $r^2 \beta^2$  в знаменателе и возвращаясь к прежней переменной, получим:

$$E_z|_{z=0} = - \frac{\beta \phi(r, \phi)}{1 - \exp(-\beta z_0)} \quad (2.4.58)$$

При  $\beta z_0 \gg 1$  ( $z_0 = 70-100$  км) экспоненциальной функцией в (2.4.58) можно пренебречь и вместо (2.4.58) имеем:

$$E_z|_{z=0} = -\alpha \bar{\phi}(r, \phi) \quad (2.4.59)$$

Полученная формула справедлива при выполнении следующих условий:  $\alpha r \gg 1, \alpha z_0 \gg 1$  и отражает то обстоятельство, что напряженность электрического поля вблизи

земной поверхности пропорциональна электрическому потенциалу «над головой».

Результаты расчетов напряженности электрического поля вблизи земной поверхности, которые проводились по этой формуле представлены на рис.13 и в таблицах 5 и 6. Из рассмотрения таблиц и рисунка следует, что напряженность электрического поля, создаваемая за счет разности потенциалов электрического поля в области аврорального овала и дневного каспа, может давать существенный вклад в вариации электрического поля атмосферы.

Таблица 5. Модельное распределение электрического потенциала  $\hat{\varphi}$  и напряженности электрического поля вблизи земной поверхности  $E_z$  в зависимости от  $\phi$  при  $r=550$ км для модели аврорального овала.

	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\Pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
Модель 1								
$\hat{\varphi}(\phi), B$	0	$5.3 \times 10^4$	$7.3 \times 10^4$	$5.3 \times 10^4$	0	$-5.3 \times 10^4$	$-7.3 \times 10^4$	$-5.3 \times 10^4$
$E_z, B / м$	0	-16	-22	-16	0	16	22	16

Модель 2,  $\Delta=\pi/6$

$\widehat{\varphi}(\phi), B$	0	$7.48 \times 10^4$	$1.11 \times 10^5$	$7.48 \times 10^4$	0	$-7.48 \times 10^4$	$-1.11 \times 10^5$	$-7.48 \times 10^4$
$E_z, B / m$	0	-22.4	-33.4	-22.4	0	22.4	33.4	22.4

Таблица 6 Модельное распределение электрического потенциала  $\widehat{\varphi}$  и напряженности электрического поля вблизи земной поверхности  $E_z$  в зависимости от  $\phi$  при  $r=550$ км для модели дневного каспа

$\phi$	0	$\pi/4$	$\pi/2$	$3\pi/4$	$\pi$	$5\pi/4$	$3\pi/2$	$7\pi/4$
--------	---	---------	---------	----------	-------	----------	----------	----------

Модель 3,  $\alpha=\pi/3$

$\widehat{\varphi}(\phi), B$	$-1.63 \times 10^4$	$-1.68 \times 10^4$	$-3.19 \times 10^4$	$-3.53 \times 10^4$	$-5.33 \times 10^4$	$-3.19 \times 10^4$	$-1.95 \times 10^4$	$-1.68 \times 10^4$
$E_z, B / m$	4.89	5.04	9.57	10.59	16.0	9.57	5.85	5.04

Таким образом по результатам численных характерные значения  $\widehat{\varphi}(r, \phi)$  составляют  $(7.5 \dots 11.1) \times 10^4$  в. Это значение должно быть добавлено к потенциалу ионосферы, создаваемому грозами. Как показывают проведенные расчеты вариации вертикальной составляющей напряженности электрического поля, ее значение в области аврорального овала составляет по абсолютной величине  $35 \text{ В/м}$ , которая является отрицательной в утренние часы и положительной в вечерние часы, а в области дневного каспа максимальная величина вариации составляет  $18 \text{ В/м}$ . Таким образом представленные выше расчеты демонстрируют важную роль продольных токов в токовом балансе глобальной токовой цепи в земной атмосфере.

Приложение 2.5 Нестационарная модель электрического поля атмосферы.

В настоящем приложении рассматриваются нестационарные задачи, связанные с временными изменениями электрического поля атмосферы. Эти изменения могут быть обусловлены, как временным характером действия грозных генераторов, так и генераторов, действующих в верхних слоях атмосферы. На основе уравнения (2.5) раздела 2.1, будет построена нестационарная модель электрического поля в нижней атмосфере на основе которой будет оценен количественно вклад молниевых разрядов в глобальную электрическую цепь. В рамках этой модели будет оценено время установления стационарного электрического состояния атмосферы при включении грозового генератора в некоторый момент времени. Задача о релаксации электрического поля в атмосфере важна для многих задач атмосферного электричества. Сюда, прежде всего, надо отнести задачу об установлении стационарного электрического состояния в атмосфере при включении грозных источников в некоторый момент времени [Морозов, 2005], задачу реак-

ции проводящей атмосферы на грозовые разряды [Illingworth, 1972]. Интересна также задача об уменьшении напряженности электрического поля при выключении всех источников. Обычно предполагается, что уменьшение напряженности электрического поля происходит по экспоненциальному закону:

$$\vec{E}(x, y, z, t) = \vec{E}_0(x, y, z, t = 0) e^{-\frac{t}{\tau_\lambda(x, y, z)}} \quad (2.5.1)$$

где:  $\vec{E}_0(x, y, z, t = 0)$  - начальная напряженность электрического поля,  $\tau_\lambda$  - время электрической релаксации.

На самом деле, как указывается в монографии [Альвен, 1983], это не совсем так, поскольку с физической точки зрения релаксация определяется всей проводящей атмосферой, т.е. временной константой  $RC$  атмосферы, где  $R$  - сопротивление атмосферы,  $C$  - электрическая емкость. С математической точки зрения, как будет видно из дальнейшего использования преобразования Лапласа для решения временных, переходных задач, приводит к таким выражениям для образа потенциала и напряженности электрического поля, в которых наряду с полюсами содержатся особые точки-точки ветвления, которые при переходе к оригиналам приводят к интегральным выражениям вдоль разреза от особой точки до  $\infty$ .

Выражение (2.5.1) следует из уравнения Максвелла:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \lambda \vec{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (2.5.2)$$

если положить левую часть этого уравнения, равной нулю. (Здесь  $\lambda$  - электрическая проводимость атмосферы).

В настоящем приложении рассматриваются две задачи: задача о временных значениях электрического поля атмосферы в одномерном случае и задача об установлении стационарного электрического поля атмосферы при включении источников

электрического поля. Задачи рассматриваются в электростатическом токовом приближении. Получены аналитические решения обеих задач.

Эти результаты используются для интерпретации экспериментальных данных по измерению полного максвелловского тока, который измерялся одновременно на основе Вильсанди (Эстония) и в Вэлфорде (США) [Атмосферное электричество, 1991]. Кроме того, метод, используемый в настоящей статье, дает возможность оценить изменения электрического тока атмосферы при изменении электрической проводимости, обусловленного выбросом аэрозольных частиц [Морозов, 2002], а также выбросом радиоактивных веществ, приводящих к увеличению электрической проводимости атмосферы.

2.5.1 Задача о временных изменениях электрического поля в атмосфере в одномерном случае

Для рассмотрения этой задачи будем использовать уравнение (2). Для этого применим к обеим частям уравнения операцию  $div$  и воспользуемся представлением  $E = -\nabla\varphi$ ,  $\varphi$  - потенциал электрического поля. В результате получим уравнение:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Delta\varphi + \nabla(\lambda\nabla\varphi) = 0 \quad (2.5.3)$$

В одномерном случае в условиях горизонтальной однородности атмосферы вместо (П.5.3) имеем уравнение:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.5.4)$$

где:  $z$  - ось, направленная перпендикулярно земной поверхности.

Краевые условия для решения уравнения (2.5.4) представляются в следующем виде:

$$\varphi(z = 0, t) = 0, \quad \varphi(z \rightarrow \infty, t) = \varphi_{\infty}(t),$$

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial z}(z, t=0) = E_z(z, t=0) \quad (2.5.5)$$

Решение уравнения (2.5.4) при электрической проводимости  $\lambda = \lambda(z)$ , независимой от времени, имеет следующее представление:

$$\varphi(z, t) = -4\pi \int_0^z \int_0^t j_0(t') e^{-4\pi\lambda(z')(t-t')} dz' dt' - \int_0^z E_z(z', 0) e^{-4\pi\lambda(z')t} dz' \quad (2.5.6)$$

где:  $j_0(t)$  – плотность электрического тока.

Напряженность электрического поля  $E_z(z, t)$  определяется выражением:

$$E(z, t) = E_z(z, 0) + 4\pi \int_0^t j_0(t') e^{-4\pi\lambda(z)(t-t')} dt' \quad (2.5.7)$$

Полагая  $z = \infty$  в выражении (2.5.6), получим следующее представление для потенциала ионосферы  $\varphi_\infty(t)$ :

$$\varphi_\infty(t) = -4\pi \int_0^t \int_0^\infty j_0(t') e^{-4\pi\lambda(z)(t-t')} dz dt' - \int_0^\infty E_z(z, 0) e^{-4\pi\lambda(z)t} dz \quad (2.5.8)$$

Полученные соотношения (2.5.6)-(2.5.8) позволяют по известной зависимости от времени  $\varphi_\infty(t)$  найти законы изменения  $j_0(t)$ ,  $E_z(z, t)$  и  $\varphi(z, t)$  со временем. Для решения этой задачи применим к уравнениям (2.5.6)-(2.5.8) преобразование Лапласа [Диткин и Прудников., 1974]:

$$f(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt, \quad f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f(p) e^{pt} dp \quad (2.5.9)$$

Тогда получим уравнения, определяющие образы преобразования Лапласа от соответствующих величин:

$$\varphi(z, p) = -4\pi j_0(p) \int_0^z \frac{dz'}{4\pi\lambda(z') + p} - \int_0^z \frac{E(z', 0)}{4\pi\lambda(z') + p} dz' \quad (2.5.10a)$$



$$E_z(z, p) = 4\pi j_0(p)[4\pi\lambda(z) + p]^{-1} + E_z(z, 0)[4\pi\lambda(z) + p]^{-1} \quad (2.5.10b)$$

$$\varphi_\infty(p) = -4\pi j_0(p) \int_0^\infty \frac{dz}{4\pi\lambda(z) + p} - \int_0^\infty \frac{E_z(z, 0)}{4\pi\lambda(z) + p} dz \quad (2.5.10c)$$

Рассмотрим некоторые случаи представления электрической проводимости  $\lambda(z)$  в атмосфере в зависимости от высоты. Так если атмосфера имеет экспоненциальную электропроводность  $\lambda(z) = \lambda_0 e^{\alpha z}$ , то для  $\varphi_\infty(p)$  имеем выражение:

$$\varphi_\infty(p) = -\frac{4\pi}{\alpha p} j_0(p) \ln(1 + p\tau_0) - \int_0^\infty \frac{E(z, 0)}{4\pi\lambda_0 e^{\alpha z} + p} dz, \quad (2.5.11)$$

$$\tau_0 = \frac{1}{4\pi\lambda_0}$$

В случае, если электрическая проводимость  $\lambda$  представляется в виде нескольких экспонент (Атмосфера. Справочник..... 1991):

$$\begin{aligned} \lambda_0 e^{\alpha_1 z}, z \in (0, h_1) \\ \lambda(z) = \lambda_1 e^{\alpha_2 z}, z \in (h_1, h_2), \\ \lambda_2 e^{\alpha_3 z}, z \in (h_2, \infty) \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

для  $\varphi_\infty(p)$  получим представление:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}_{\infty}(p) = & -4\pi \hat{j}_0(p) \left[ \frac{1}{\alpha_1 p} \ln \frac{1 + \frac{p}{4\pi\lambda_0}}{1 + \frac{p}{4\pi\lambda_0 e^{\alpha_1 h}}} + \right. \\
& + \frac{1}{\alpha_2 p} \ln \frac{1 + \frac{p}{4\pi\lambda_1 e^{\alpha_2 h_1}}}{1 + \frac{p}{4\pi\lambda_1 e^{\alpha_2 h_2}}} + \left. \frac{1}{\alpha_3 p} \ln \left( 1 + \frac{p}{4\pi\lambda_3} e^{-\alpha_3 h_2} \right) \right] - \\
& - \int_0^{h_1} \frac{E_z(z, 0)}{p + 4\pi\lambda_0 e^{\alpha_1 z}} dz - \int_{h_1}^{h_2} \frac{E_z(z, 0)}{p + 4\pi\lambda_1 e^{\alpha_2 z}} dz - \int_{h_2}^{\infty} \frac{E_z(z, 0)}{p + 4\pi\lambda_2 e^{\alpha_3 z}} dz
\end{aligned} \tag{2.5.13}$$

Рассмотрим выражение (2.5.11) для  $\varphi(p)$ . Из него вытекает следующее выражение для образа плотности электрического тока  $j_0(p)$

$$j_0(p) = -\frac{\alpha p \varphi_{\infty}(p)}{4\pi \ln(1 + p\tau_0)} - \frac{\alpha p}{4\pi \ln(1 + p\tau_0)} \int_0^{\infty} \frac{E_z(z, 0)}{p + 4\pi\lambda_0 e^{\alpha z}} dz \tag{2.5.14}$$

Используя выражение (2.5.10b), получим для образа напряженности электрического поля:

$$\begin{aligned}
\hat{E}_z(z, p) = & \frac{E_z(z, 0)}{p + 4\pi\lambda(z)} - \frac{\alpha p \hat{\phi}_{\infty}(p)}{(p + 4\pi\lambda(z)) \ln(1 + p\tau_0)} - \\
& - \frac{\alpha p}{(p + 4\pi\lambda(z)) \ln(1 + p\tau_0)} \int_0^{\infty} \frac{E_z(z, 0)}{p + 4\pi\lambda(z)} dz
\end{aligned}$$

Пусть  $\varphi_{\infty}(t)$  представляется в виде:

$$\varphi_{\infty}(t) = \varphi_{\infty}^0 \theta(t) \tag{2.5.16}$$

где:  $\theta(t)$  - функция Хевисайда. В этом случае имеем:

$\varphi_\infty(p) = \frac{\varphi_\infty^0}{p}$ . Тогда переходя в (2.5.14) и (2.5.15) от обра-

зов преобразования Лапласа к оригиналам, используя свойства преобразования Лапласа (Диткин и Прудников, 1974) и результаты, приведенные в Приложении 2.5.1, получим для плотности электрического тока и напряженности электрического поля выражения:

$$j_0(t) = -\lambda_0 \varphi_\infty^0 \alpha e^{-\frac{t}{\tau_0}} v_1\left(\frac{t}{\tau_0}\right) - \alpha \lambda_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} v_1\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \times \\ \int_0^\infty E_z(z, 0) dz + \alpha \int_0^\infty E_z(z, 0) \lambda_0 e^{az} \left( \int_0^t \tilde{v}_1\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau(z)}} d\tau \right) dz \quad (2.5.17)$$

$$E_z(z, t) = E_z(z, 0) e^{-\frac{t}{\tau(z)}} - \\ \varphi_\infty^0 \alpha \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau(z)}} \tilde{v}_1\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) d\tau - \alpha \int_0^\infty E_z(z', 0) \left[ \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau(z)}} \tilde{v}_1\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) d\tau \right] dz' + \\ + \frac{\alpha}{\tau(z)} \left\{ \int_0^\infty E_z(z', 0) \left[ \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau')}{\tau(z')}} \times \left[ \int_0^\tau e^{-\frac{(\tau-\tau')}{\tau(z)}} \tilde{v}_1\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right) d\tau' \right] d\tau \right] dz \right\} \quad (2.5.18)$$

$$v_1\left(\frac{t}{\tau_0}\right) = \int_0^\infty \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{\xi-1} \frac{d\xi}{\Gamma(\xi)}, \quad \tilde{v}_1\left(\frac{t}{\tau_0}\right) = \frac{e^{-\frac{t}{\tau_0}}}{\tau_0} v_1\left(\frac{t}{\tau_0}\right), \\ \tau(z) = (4\pi\lambda(z))^{-1}$$

При  $\varphi_\infty^0 = 0$  из формул (2.5.17) и (2.5.18) получим выражения, описывающие процесс исчезновения плотности тока и напряженности электрического поля при выключении источников. Из (2.5.17) видно, что процесс уменьшения  $E_z(z, t)$  в атмосфере не определяется простой экспонен-

той, а имеет более сложный характер и время исчезновения этого поля  $t$  больше времени электрической релаксации на данной высоте  $\tau(z)$ . При  $\varphi_\infty^0 = 0$  из выражения (2.5.18) имеем:

$$E_z(z, t) = E_z(z, 0)e^{-\frac{t}{\tau(z)}} - \alpha \int_0^\infty E_z(z', 0) \times \\ \left[ \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau(z')}} \tilde{v}_1\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) d\tau \right] dz' + \frac{\alpha}{\tau(z)} \left\{ \int_0^\infty E_z(z', 0) \left[ \int_0^t e^{-\frac{(t-\tau)}{\tau(z')}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \left[ \int_0^t e^{-\frac{(\tau-\tau')}{\tau(z)}} \tilde{v}_1\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right) d\tau' \right] d\tau \right] dz \right\} \quad (2.5.19)$$

Используя представления для функций  $v_1\left(\frac{t}{\tau_0}\right)$  и  $\tilde{v}_1\left(\frac{t}{\tau_0}\right)$ , приведенные в приложении 2.5.1, получим следующее представление для плотности тока:

$$j_0(t) = \lambda(z) E_z(z, 0) e^{-\frac{t}{\tau(z)}} - \alpha \lambda_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{\tau_0 \bar{z}}}}{\ln^2 \bar{z} + \pi^2} d\bar{z} \int_0^\infty E_z(z', 0) dz' - \\ \alpha \lambda_0 \int_0^\infty E_z(z', 0) e^{-\frac{t}{\tau(z')}} dz' + \alpha \lambda_0 \int_0^\infty E_z(z', 0) dz' \times \\ \times dz' \times \left( \int_0^\infty \frac{\left[ e^{-\frac{t}{\tau(z')}} - e^{-\frac{t}{\tau_0(1+\bar{z})}} \right]}{(\ln^2 \bar{z} + \pi^2) [e^{-\alpha z'} (1 + \bar{z}) - 1]} dz \right) \quad (2.5.20)$$

Из выражения (2.5.20) следует, что при  $t \rightarrow \infty$  плотность электрического тока стремится к нулю, причем характерным временем является наибольшее из времен- время электрической релаксации вблизи земной поверхности  $\tau_0$ . Интересно отметить, что при  $\alpha=0$  имеет место закон

убывания (2.5.1), т.е. в случае атмосферы с постоянной проводимостью напряженность электрического поля в отсутствие источников убывает по экспоненциальному закону.

2.5.2. Задача об установлении стационарного электрического состояния атмосферы при включении источников электрического поля

Используя решения (2.5.17) и (2.5.18), можно рассмотреть задачу об установлении стационарного электрического состояния атмосферы при включении в момент  $t=0$  потенциала ионосферы  $\varphi_\infty(t) = \varphi_\infty^0 \theta(t)$ . В этом случае, полагая  $E_z(z,0) = 0$ , получим из (2.5.17) выражение для  $j_0(p)$ :

$$j_0(p) = -\frac{\varphi_\infty^0 \alpha}{4\pi \ln(1 + p\tau_0)} \quad (2.5.21)$$

На основе результатов, приведенных в приложении 2.5.1, получим для плотности электрического тока  $j_0(t)$ :

$$j_0(t) = -\lambda_0 \varphi_\infty^0 \alpha e^{-\frac{t}{\tau_0}} \int_0^\infty \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{\xi-1} \frac{d\xi}{\Gamma(\xi)} = -\lambda_0 \varphi_\infty^0 \alpha e^{-\frac{t}{\tau_0}} \nu_1\left(\frac{t}{\tau}\right) \quad (2.5.22)$$

Используя выражение (2.5.1.5) Приложения 2.5.1, можно представление для тока  $j_0(t)$  записать в следующем виде:

$$j_0(t) = -\lambda_0 \varphi_\infty^0 \alpha \left(1 + e^{-\frac{t}{\tau_0}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{\tau_0} z}}{\ln^2 z + \pi^2} dz\right) \quad (2.5.23)$$

При  $t \rightarrow \infty (t \gg \tau_0)$   $j_0(t) \rightarrow -\lambda_0 \varphi_\infty^0 \alpha$ , в то же время в начальный момент времени  $t=0$   $j_0(t)$  обращается в бесконечность. По всей видимости, это связано с представлением потенциала ионосферы  $\varphi_\infty^0(t)$  в виде (2.5.16). Для того,

чтобы исключить эту возможность, рассмотрим случай, когда  $\varphi_\infty(t)$  изменяется в соответствии с законом:

$$\varphi_\infty(t) = \varphi_\infty^0 (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \quad (2.5.24)$$

Тогда для  $\varphi_\infty(p)$  получим представление:

$$\varphi_\infty(p) = \frac{\varphi_\infty^0}{p(1+p\tau)} \quad (2.5.25)$$

Подставляя это выражение в (2.5.14), получим для  $j_0(p)$  при  $E_z(z,0) = 0$  и  $\tau = \tau_0$ :

$$j_0(t) = -\lambda_0 \phi_\infty^0 \alpha e^{-\frac{t}{\tau_0}} \nu\left(\frac{t}{\tau_0}\right) = -\lambda_0 \phi_\infty^0 \alpha e^{-\frac{t}{\tau_0}} \int_1^\infty \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^{\xi-1} \frac{d\xi}{\Gamma(\xi)} =$$

$$-\lambda_0 \phi_\infty^0 \alpha (1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{\tau_0} z}}{z(\ln^2 z + \pi^2)} dz) \quad (2.5.26)$$

В полученном выражении при  $t=0$ ,  $j_0(0) = 0$  и особенностей не возникает.

Если  $\tau \neq \tau_0$ , то необходимо рассмотреть два случая:  $\tau > \tau_0$  и  $\tau < \tau_0$ . Прежде всего отметим, что, используя теорему о свертке преобразований Лапласа (Диткин, Прудников 1974), можно получить, что:

$$\frac{1}{(1+p\tau)\ln(1+p\tau_0)} \leftrightarrow \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \nu\left(\frac{t}{\tau_0}\right) +$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) \frac{1}{\tau} \int_0^t e^{-\left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right)\tilde{\tau}} \nu\left(\frac{\tilde{\tau}}{\tau_0}\right) d\tilde{\tau} = J \quad (2.5.27)$$

Используя представление для  $\nu\left(\frac{t}{\tau_0}\right)$ , приведенное в приложении 2.5.1 и производя соответствующие преобра-

зования, получим, что интеграл  $J$  можно представить в следующем виде :

$$J = \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\tau_0} z}}{(\ln^2 z + \pi^2)(az + b)} dz -$$

$$\left(\frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{\tau}\right) e^{-\frac{t}{\tau}} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z(\ln^2 z + \pi^2)(az + b)} \quad (2.5.28)$$

где:  $a = \frac{\tau}{\tau_0}, b = \frac{\tau}{\tau_0} - 1$ .

Запишем последний интеграл в правой части (2.5.28) в виде двух интегралов:

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{z(\ln^2 z + \pi^2)(az + b)} = \frac{1}{b} \int_0^{\infty} \frac{dz}{z(\ln^2 z + \pi^2)} - \frac{1}{b} \int_0^{\infty} \frac{dz}{\left(z + \frac{b}{a}\right)(\ln^2 z + \pi^2)}$$

$$(2.5.29)$$

Первый интеграл в (2.5.29) вычисляется элементарно, его значение равно единице. Второй интеграл вычисляется с помощью теории вычетов [Смирнов, 1969] и его значение при  $\frac{b}{a} > 0$  равно:

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{\left(z + \frac{b}{a}\right)(\ln^2 z + \pi^2)} = \frac{1}{1 - \frac{b}{a}} + \frac{1}{\ln \frac{b}{a}} \quad (2.5.30)$$

Условие  $\frac{b}{a} > 0$  соответствует условию  $\tau > \tau_0$ . Окончательное представление для оригинала преобразования Лапласа от выражения  $[(1 + p\tau) \ln(1 + p\tau_0)]^{-1}$  при  $\tau > \tau_0$  имеет вид:

$$\frac{1}{(1 + p\tau) \ln(1 + p\tau_0)} \Leftrightarrow \frac{1}{\tau_0} +$$

$$\frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau \ln(1 - \frac{\tau_0}{\tau})} - \frac{1}{\tau_0} e^{-\frac{t}{\tau_0}} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{t}{\tau_0} z}}{(\ln^2 z + \pi^2)(az + b)} dz \quad (2.5.31)$$

При  $\frac{b}{a} < 0$ , т.е. при  $\tau < \tau_0$  необходимо использовать первоначальное представление для оригинала (2.5.27), так как в этом случае интегралы в (2.5.29) и (2.5.31) расходятся логарифмически при  $z = \frac{b}{a}$ .

При  $E_z(z, 0) = 0$  для потенциала электрического поля  $\varphi(z, t)$  и напряженности электрического поля  $E_z(z, t)$ , используя полученное выше выражение для  $j_0(t)$  (2.5.22):

$$\begin{aligned} \varphi(z, t) &= \varphi_{\infty}^0 \left[ 1 - \int_0^t \bar{v}_1(t-x) E_1\left(\frac{x}{\tau(z)}\right) dx \right] \\ E_z(z, t) &= -\varphi_{\infty}^0 \alpha e^{-\alpha z} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x}{\tau(z)}}}{\tau(z)} \bar{v}_1(t-x) dx \quad (2.5.32) \end{aligned}$$

где:  $\tau(z) = [4\pi\lambda(z)]^{-1}$ ,  $\bar{v}_1(t) = e^{-\frac{t}{\tau_0}} v_1\left(\frac{t}{\tau_0}\right)$ ,

$$E_1\left(\frac{t}{\tau(z)}\right) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{\tau(z)} u} \frac{du}{u}.$$

Из (2.5.32) следуют следующие асимптотические выражения для  $\varphi(z, t), E_z(z, t)$  при  $\frac{t}{\tau_0} \gg 1$ :

$$\varphi(z, t) = \varphi_{\infty}^0 \left[ 1 - e^{-\alpha z} \int_1^{\infty} \frac{1}{u^2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau(z)} u}) du \right]$$



$$E_z(z, t) = -\varphi_\infty^0 \alpha e^{-\alpha z} (1 - e^{-\frac{t}{\tau(z)}}) \quad (2.5.33)$$

В случае представления  $\lambda(z)$  в виде нескольких экспонент (2.5.12) установление стационарного токового режима в атмосфере определяется функцией  $\zeta(t)$ , вычисления которой приведены в Приложении 2.5.2. Первый член в этом интеграле соответствует стационарному состоянию, последующие интегральные члены уменьшаются по экспоненте с характерными временами:  $\tau_0, \tau_1 e^{-\alpha_2 h_1}, \tau_2 e^{-\alpha_3 h_2}$ .

Представим потенциал ионосферы  $\varphi_\infty(t)$  в следующем виде:

$$\varphi_\infty(t) = \varphi_\infty^0 + \varphi_\infty^1 \sin \alpha t \quad (2.5.34)$$

где:  $\varphi_\infty^0$  - постоянная, стационарная часть потенциала ионосферы.

Тогда наличие второго слагаемого в этом выражении приводит к появлению гармонических колебаний плотности электрического тока напряженности электрического поля. В этом случае установившееся решение интегрального уравнения

$$\varphi_\infty^1 \sin \omega t = - \int_0^t \int_0^z j_0(t') e^{-4\pi\lambda(z)(t-t')} dz dt' \quad (2.5.35)$$

будем искать в следующем виде:

$$j_0(t) = A \sin \alpha t + B \cos \alpha t \quad (2.5.36)$$

где:  $A, B$  - постоянные.

Подставляя (36) в (35), получим соотношения, определяющие  $A$  и  $B$ . Из этих соотношений получим следующие выражения для этих величин:

$$A = -\alpha\lambda_0\varphi_\infty^1\omega\tau_0 \frac{\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(\omega\tau_0)^{-1}}{\frac{1}{4}\ln^2(1 + \omega^2\tau_0^2) + (\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(\omega\tau_0)^{-1})^2}$$

$$B = -\frac{\alpha\lambda_0\varphi_\infty^1}{2}\omega\tau_0 \frac{\ln(1 + \omega^2\tau_0^2)}{\frac{1}{4}\ln^2(1 + \omega^2\tau_0^2) + (\frac{\pi}{2} - \text{arctg}(\omega\tau_0)^{-1})^2} \quad (2.5.37)$$

Из выражений (2.5.37) следует, что при  $\omega \ll 4\pi\lambda_0$ ,  $B \approx 0$ ,  $A \approx -\alpha\lambda_0\varphi_\infty^1$ , т.е. колебания плотности электрического и потенциала электрического поля происходят синфазно. В общем случае имеет сдвиг фаз между колебаниями плотности тока в атмосфере и потенциала ионосферы. Выражение для плотности тока можно записать следующим образом:

$$j_0(t) = \sqrt{A^2 + B^2} \sin(\omega t + \chi)$$

$$\cos \chi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin \chi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \text{tg} \chi = \frac{B}{A} \quad (2.5.38)$$

При  $\omega\tau_0 \gg 1$ ,  $\chi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .

При глобальных вариациях потенциала ионосферы  $\varphi_\infty(t)$  с частотами  $\omega \geq 4\pi\lambda_0$  колебания плотности электрического поля в разных точках земной поверхности могут иметь сдвиг фаз вследствие различия значений электрической проводимости в разных районах земного шара. Возможно именно это обстоятельство определяет сдвиг фаз в колебаниях плотности полного максвелловского тока, который измерялся одновременно в совместном глобальном эксперименте с помощью антенных датчиков на острове Вильсанди (Эстония) и в Вэлфорде (США) (Атмосфера.

Справочник.... 1992). Характерный период этих колебаний равен 60 секундам. Эта величина значительно меньше времени электрической релаксации, которая вблизи земной поверхности составляет величину порядка 600 секунд. Поэтому  $\omega\tau_0 \approx 60$  и величина плотности электрического тока определяется электрическим током смещения и может по величине составлять  $(3 - 4) \times 10^{-12} \frac{A}{M^2}$  при возмущениях

потенциала ионосферы  $\varphi_{\infty}^1 \approx 10kV$ . Остается неясным вопрос о причинах этих глобальных вариаций. Возможно, что источниками этих вариаций являются сами грозовые генераторы, которые определяют квазистационарное электрическое поле атмосферы, возможно здесь играют определенную роль вариации электрических полей ионосферного и магнитосферного происхождения.

Таким образом, рассмотренные в настоящем приложении методы дают возможность исследовать реакцию атмосферы на действие различных генераторов электрического поля в атмосфере. С их использованием можно также решать задачи релаксации атмосферы при изменении электрической проводимости атмосферы, обусловленного выбросом аэрозольных частиц в атмосферу [Морозов, 2002], так и выбросом радиоактивных веществ, приводящих к увеличению проводимости. В этой работе решалась задача об установлении стационарного электрического поля в атмосфере, содержащей протяженный слой аэрозольных частиц. Как мы покажи выше аэрозольные частицы оказывают существенное влияние на электрическое состояние атмосферы, меняя ее электрическую проводимость, напряженность электрического поля. Например изменение концентрации аэрозольных частиц с высотой, согласно работе (Селезнева, Юдин, 1960) приводит к трансформации

напряженности электрического поля (Чубарина, 1964), а именно распределения с высотой ядер конденсации и напряженности электрического поля в ряде случаев оказываются подобными. В глобальном масштабе наличие достаточно протяженного слоя аэрозольных частиц может изменять потенциал ионосферы, определяемый, как произведение полного электрического тока, текущего в атмосфере на ее сопротивление.

Слои аэрозольных частиц, резко ограниченные по высоте при достаточной концентрации частиц могут выступать, как усилители электрического поля атмосферы. Действительно, для плоского слоя аэрозольных частиц из условия непрерывности вертикальной составляющей плотности электрического тока в стационарном случае получим следующее соотношение на его границах:

$$\lambda_c E_c = \lambda_0 E_0$$

где:  $\lambda_c, \lambda_0$  - электрические проводимости в слое и свободной атмосфере,  $E_c, E_0$  - соответствующие значения напряженности электрического поля.

Если  $\lambda_0 \gg \lambda_c$ , то  $E_c \gg E_0$ , то есть напряженность электрического поля в аэрозольном слое может значительно отличаться от напряженности электрического поля в свободной атмосфере.

Как показано в работах (Морозов, 1998; Морозов, 2010), с физической точки зрения усиление напряженности электрического поля в аэрозольном слое обусловлено объемным электрическим зарядом, возникающем в тонком слое около границы аэрозольный слой- свободная атмосфера вследствие градиента концентрации ионов. В монографии (Имянитов, Чубарина, Шварц, 1972) этот механизм усиления поля рассматривался как один из возможных механизмов генерации электрических полей в облаках слои-

стных форм. Вместе с тем для установления стационарного поля требуется определенное время. Здесь мы рассмотрим решение задачи об установлении стационарного электрического поля в атмосфере, содержащий слой аэрозольных частиц, бесконечный в горизонтальной плоскости при следующих предположениях. Во-первых предполагаем, что внесение слоя аэрозольных частиц в атмосферу почти мгновенно уменьшает электрическую проводимость за время  $\tau \ll \tau_\lambda$  ( $\tau_\lambda$  - время электрической релаксации). Во-вторых будем предполагать, что процесс установления стационарного электрического состояния протекает в электростатическом токовом режиме ( $\text{rot} \vec{E} = 0$ ). Выпишем уравнение (1.2), описывающее изменение концентрации ионов со временем:

$$\frac{\partial n_{1,2}}{\partial t} = q - \alpha n_{1,2} - \beta N n_{1,2}, \quad n_{1,2} |_{t=0} = n_0 \quad (2.5.39)$$

Решение уравнения (2.5.39) записывается в виде:

$$n_{1,2}(t) = n_{cm} + \bar{n} \frac{2Ce^{-t/\tau}}{1 - Ce^{-t/\tau}}, \quad n_{cm} = \frac{2q}{\beta N + (4q\alpha + \beta^2 N^2)^{1/2}},$$

$$\bar{n} = \sqrt{\frac{q}{\alpha} \left(1 + \frac{\beta^2 N^2}{4q\alpha}\right)^{1/2}},$$

$$C = \frac{(n_0 + \beta N / 2\alpha) - (\beta^2 N^2 / 4\alpha^2 + q/\alpha)^{1/2}}{(n_0 + \beta N / 2\alpha) + (\beta^2 N^2 / 4\alpha^2 + q/\alpha)^{1/2}},$$

$$\tau = (\beta^2 N^2 + 4q\alpha)^{-1/2} \quad (2.5.40)$$

Введем обозначения:  $\tau_1 = \frac{1}{\beta N}$ ,  $\tau_2 = (q\alpha)^{1/2}$ , где  $\tau_1$  определяет время жизни легких ионов за счет присоединения к аэрозольным частицам, а  $\tau_2$  - время жизни ионов за счет

взаимной рекомбинации. В этом случае характерное время  $\tau$  установления стационарного значения концентрации ионов записывается в следующем виде:

$$\tau = \left( \frac{1}{\tau_1^2} + 4 \frac{1}{\tau_2^2} \right)^{-1/2} = \frac{\tau_1 \tau_2}{(\tau_2^2 + 4\tau_1^2)^{1/2}} \quad (2.5.41)$$

Рассмотрим предельный случай  $\tau_1 \ll \tau_2$ . В этом случае  $\tau \approx \tau_1$ . Для электрической проводимости в случае равных подвижностей легких ионов ( $b_1 = b_2 = b_0$ ) и  $t \gg \tau$  имеем:

$$\lambda_{cm} = \frac{4q_0 e b_0 e^{\alpha z}}{\beta N + (4q\alpha + \beta^2 N^2)^{1/2}}, \quad q = q_0 e^{\alpha z} \quad (2.5.41a)$$

В предельном случае  $\beta^2 N^2 \gg 4q\alpha$  (или  $\tau_1^2 \ll 4\tau_2^2$ ) получим:

$$\lambda_{cm} = 2 \sqrt{\frac{q}{\alpha}} b_0 e^{\frac{\tau_1}{\tau_2} \alpha z} = \frac{\tau_1}{\tau_2} \lambda_0 e^{\alpha z} = \eta \lambda_0 e^{\alpha z}, \quad \lambda_0 = 2 \sqrt{\frac{q}{\alpha}} b_0 e^{\alpha z} \quad (2.5.42)$$

Пусть плоскопараллельный аэрозольный слой расположен вблизи земной поверхности. Тогда модель вертикального распределения электрической проводимости атмосферы имеет вид:

$$\begin{aligned} \lambda_0 e^{\alpha z}, H < z < \infty (\text{область I}) \\ \lambda(z) = & \quad (2.5.43) \\ \eta \lambda_0 e^{\alpha z}, 0 < z < H (\text{область II}) \end{aligned}$$

Рассмотрим следующую задачу: пусть при  $t < 0$  атмосфера имеет электрическую проводимость:  $\lambda(z) = \lambda_0 e^{\alpha z}$  (Атмосфера. Справочник... 1992). При  $t = 0$  в атмосфере появляется плоскопараллельный слой аэрозольных частиц и  $\lambda$  в атмо-

сфере изменяется мгновенно ( $\tau \ll \tau_\lambda = (4\pi\lambda_{cm})^{-1}$ ), так что устанавливается распределение (2.5.43).

Рассмотрим теперь задачу об установлении стационарного электрического поля в атмосфере при изменении электрической проводимости при изменении электрической проводимости согласно (2.5.43). Для решения задачи воспользуемся уравнением:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Delta\varphi + \operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}\varphi) = 0 \quad (2.5.44)$$

из которого в одномерном случае следует уравнение:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial t \partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0 \quad (2.5.45)$$

Получим решение этого уравнения при следующих начальных и граничных условиях:

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_\infty (1 - e^{-\alpha z}), \quad \varphi_{II}|_{z=0} = 0, \quad \varphi_I|_{z \rightarrow \infty} = \varphi_\infty, \quad \varphi_I|_{z=H} = \varphi_{II}|_{z=H}$$

$$\left( \eta \lambda_0 e^{\alpha z} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \varphi_{II}}{\partial z} \Big|_{z=H} = \left( \lambda_0 e^{\alpha z} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \varphi_I}{\partial z} \Big|_{z=H} \quad (2.5.46)$$

где  $\varphi_I$  и  $\varphi_{II}$  описывают распределение потенциала электрического поля в областях:  $H < z < \infty$  и  $0 < z < H$ .

Третье и четвертое условия в (2.5.46) соответствуют условиям непрерывности потенциала и плотности полного электрического тока, состоящего из тока проводимости и тока смещения, на границе аэрозольного слоя и атмосферы. Для решения уравнения (2.5.45) при начальных и граничных условиях (П.5.46) воспользуемся преобразованием Лапласа (2.5.9). В результате получим следующие уравнения для образов потенциала:

$$\left( \lambda_0 e^{\alpha z} + \frac{p}{4\pi} \right) \frac{d^2 \widehat{\varphi}_I}{dz^2} + \alpha \lambda_0 e^{\alpha z} \frac{d \widehat{\varphi}_I}{dz} = \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \Big|_{t=0}, \quad H < z < \infty$$

$$(\eta\lambda_0 e^{\alpha z} + \frac{p}{4\pi}) \frac{d^2 \widehat{\varphi}_{II}}{dz^2} + \eta\alpha\lambda_0 \frac{d\widehat{\varphi}_{II}}{dz} = \frac{d^2 \varphi}{dz^2} \Big|_{z=0}, \quad 0 \leq z \leq H \quad (2.5.47)$$

При этом начальные и граничные условия записываются в виде:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{II} \Big|_{z=0} = 0, \widehat{\varphi}_I \Big|_{z \rightarrow \infty} = \frac{\phi_\infty}{p}, \widehat{\varphi}_{II} \Big|_{z=H} = \widehat{\varphi}_I \Big|_{z=H}, (\eta\lambda_0 e^{\alpha z} + \frac{p}{4\pi}) \frac{d\widehat{\varphi}_I}{dz} \Big|_{z=H} = \\ (\lambda_0 e^{\alpha z} + \frac{p}{4\pi}) \frac{d\widehat{\varphi}_{II}}{dz} \Big|_{z=H} \end{aligned} \quad (2.5.48)$$

Используя стандартные методы решения уравнений (2.5.47), получим следующие общие решения:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_I(z, p) = C_1^1 + \int_H^z \frac{\phi_z'' \Big|_{z=0} \ln(1 + p\tau_0 e^{-\alpha z'})}{\alpha p} dz' + C_1^2 \ln(1 + p\tau_0 e^{-\alpha z}) - \\ \frac{1}{\alpha p} [\phi_z'(z) \Big|_{z=0}] \ln(1 + p\tau_0 e^{-\alpha z}) \end{aligned} \quad (2.5.49)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi}_{II}(z, p) = C_{II}^1 + \int_0^z \frac{\phi_z'' \Big|_{z=0} \ln(1 + p\tau_0^\eta e^{-\alpha z'})}{\alpha p} dz' + C_{II}^2 \ln(1 + p\tau_0^\eta e^{-\alpha z}) - \\ \frac{1}{\alpha p} [\phi_z'(z) \Big|_{z=0}] \ln(1 + p\tau_0^\eta e^{-\alpha z}) \end{aligned}$$

где:

$$\tau_0 = (4\pi\lambda_0)^{-1}; \tau_0^\eta = (4\pi\eta\lambda_0)^{-1}; \varphi_z' \Big|_{z=0} = \frac{d\varphi}{dz} \Big|_{z=0}; \varphi_z'' \Big|_{z=0} = \frac{d^2\varphi}{dz^2} \Big|_{z=0}$$

Для образов напряженности электрического поля имеем:

$$\begin{aligned} \widehat{E}_I(z, p) = -\frac{\partial \widehat{\varphi}_I}{\partial z} = C_I^2 \frac{\alpha p \tau_0 e^{-\alpha z}}{1 + p\tau_0 e^{-\alpha z}} - [\varphi_z'(z) \Big|_{z=0}] \frac{\tau_0 e^{-\alpha z}}{1 + p\tau_0 e^{-\alpha z}} \\ \widehat{E}_{II}(z, p) = -\frac{\partial \widehat{\varphi}_{II}}{\partial z} = C_{II}^2 \frac{\alpha p \tau_0^\eta e^{-\alpha z}}{1 + p\tau_0^\eta e^{-\alpha z}} - [\varphi_z'(z) \Big|_{z=0}] \frac{\tau_0^\eta e^{-\alpha z}}{1 + p\tau_0^\eta e^{-\alpha z}} \end{aligned} \quad (2.5.50)$$



Из граничных условий (2.5.48) получим для постоянных  $C_I^1, C_I^2, C_{II}^1, C_{II}^2$ :

$$C_I^1 = \frac{\varphi_\infty}{p} - \frac{1}{\alpha p} \int_H^\infty \varphi_z''|_{t=0} \ln(1 + p\tau_0 e^{-\alpha z}) dz, \quad C_I^2 = C_{II}^2 = \bar{C}$$

$$C_{II}^1 = -C_{II}^2 \ln(1 + p\tau_0^\eta) + \frac{1}{\alpha p} [\varphi_z'(0)|_{t=0}] \ln(1 + p\tau_0^\eta)$$

$$\bar{C} = \frac{-\frac{\varphi_\infty}{p} + \frac{1}{\alpha p} \int_H^\infty \varphi_z''|_{t=0} \ln(1 + p\tau_0 e^{-\alpha z}) dz}{\ln(1 + p\tau_0 e^{-\alpha H}) + \ln(1 + p\tau_0^\eta) - \ln(1 + p\tau_0^\eta e^{-\alpha H})} +$$

$$\frac{\frac{1}{\alpha p} \int_0^H \varphi_z''|_{t=0} \ln(1 + p\tau_0^\eta e^{-\alpha z}) dz + \frac{\varphi_z'(H)|_{t=0}}{\alpha p} \ln \frac{1 + p\tau_0 e^{-\alpha z}}{1 + p\tau_0^\eta e^{-\alpha z}}}{\ln(1 + p\tau_0 e^{-\alpha H}) + \ln(1 + p\tau_0^\eta) - \ln(1 + p\tau_0^\eta e^{-\alpha H})} \quad (2.5.51)$$

Рассмотрим наиболее простой случай, когда  $\alpha H \ll 1$  и  $\varphi|_{t=0} = 0$ . Тогда для постоянных  $C_I^1, C_I^2, C_{II}^1, C_{II}^2$  имеем:

$$C_I^1 = \varphi_\infty / p, \quad C_{II}^2 = C_I^2 = \bar{C} = -\frac{\varphi_\infty}{p \ln(1 + p\tau_0 e^{-\alpha})},$$

$$C_{II}^1 = \frac{\varphi_\infty}{p} \frac{\ln(1 + p\tau_0^\eta)}{\ln(1 + p\tau_0 e^{-\alpha H})} \quad (2.5.52)$$

И для образов напряженности электрического поля получим:

$$\hat{E}_I(z, p) = -\frac{\varphi_\infty \alpha \tau_0 e^{-\alpha z}}{(1 + p\tau_0 e^{-\alpha z}) \ln(1 + p\tau_0 e^{-\alpha z})}, \quad H < z < \infty \quad (2.5.53)$$

$$\hat{E}_{II}(z, p) = -\frac{\varphi_\infty \alpha \tau_0^\eta e^{-\alpha z}}{(1 + p\tau_0^\eta e^{-\alpha z}) \ln(1 + p\tau_0^\eta e^{-\alpha z})}, \quad 0 \leq z \leq H$$

Асимптотические значения при  $t \rightarrow \infty$  для действительных значений  $E_I(z), E_{II}(z)$  можно найти, если вычислить

пределы  $\lim_{p \rightarrow 0} \widehat{f}(p)p = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  (Диткин, Прудников, 1974):

$$E_I(z) = -\varphi_\infty \alpha e^{-\alpha(z-H)}, \quad E_{II}(z) = -\frac{\varphi_\infty \alpha}{\eta} e^{-\alpha(z-H)} \quad (2.5.54)$$

Для расчета временной эволюции  $E(z, t)$  воспользуемся переходом к оригиналам преобразования Лапласа (Диткин, Прудников, 1974), используя (2.5.53) и следующие табличные преобразования

$$\frac{1}{1+p\tau} \div \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}, \quad \frac{1}{\ln(1+p\tau_1)} \div \frac{1}{\tau_1} e^{-t/\tau_1} v_1\left(\frac{t}{\tau_1}\right),$$

$$v_1\left(\frac{t}{\tau_1}\right) = \int_0^\infty \frac{\left(\frac{t}{\tau_1}\right)^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} d\xi \quad (2.5.55)$$

Используя соотношения (2.5.55), получим переходя от образов преобразования Лапласа к оригиналам:

$$E_I(z, t) = -\varphi_\infty \alpha \tau_0 e^{-\alpha z} \int_0^t e^{-\frac{t-\tau}{\tau_1}} \frac{1}{\tau_1 \tau_2} v_1\left(\frac{t}{\tau_2}\right) e^{\tau/\tau_2} d\tau \quad (2.5.56)$$

$$E_{II}(z, t) = -\varphi_\infty \alpha \tau_0^\eta e^{-\alpha z} \int_0^t e^{-(t-\tau)/\tau_3} \frac{1}{\tau_3 \tau_2} v_1\left(\frac{t}{\tau_2}\right) e^{-\tau/\tau_2} d\tau$$

где:  $\tau_1 = \tau_0 e^{-\alpha z}$ ,  $\tau_2 = \tau_0 e^{-\alpha H}$ ,  $\tau_3 = \tau_0^\eta e^{-\alpha z}$ .

Произведем некоторые преобразования формул (2.5.56). Для этого воспользуемся следующим представлением для функции  $v_1(t/\tau_2)$ , приведенным в приложении 2.5.1:

$$v_1\left(\frac{t}{\tau_2}\right) = e^{t/\tau_2} + \int_0^\infty \frac{e^{-z/\tau_2}}{\ln^2 z + \pi^2} dz \quad (2.5.57)$$

Для напряженности электрического поля в области  $H < z < \infty$  получим следующее представление:

$$E_I(z, t) = -\phi_\infty \alpha e^{-\alpha(z-H)} \left\{ (1 - e^{-t/\tau_1}) + \frac{1}{\tau_1} \left[ \int_0^t e^{-t/\tau_1} \left( \int_0^\infty \frac{e^{-(\tau/\tau_2)z} dz}{\ln^2 z + \pi^2} \right) dt \right] \right\} \quad (2.5.58)$$

а в области  $0 < z < H$  имеем:

$$E_{II}(z, t) = -\frac{\phi_\infty \alpha}{\eta} e^{-\alpha(z-H)} \left\{ (1 - e^{-t/\tau_3}) + \eta e^{-\frac{t}{\tau_3}} \int_0^\infty \frac{dz}{(1 + z - \frac{\tau_2}{\tau_3})(\ln^2 z + \pi^2)} - \eta e^{-t/\tau_2} \int_0^\infty \frac{e^{-(t/\tau_2)z} dz}{(1 + z - \frac{\tau_2}{\tau_3})(\ln^2 z + \pi^2)} \right\} \quad (2.5.59)$$

Как следует из полученных выражений процесс установления стационарного электрического поля определяется временами электрической релаксации  $\tau_1$ ,  $\tau_2$ ,  $\tau_3$ , точнее  $\tau_3$  - временем релаксации в слое аэрозольных частиц, поскольку оно является наибольшим.

В случае, когда  $\alpha H \gg 1$ , необходимо найти оригинал от образа преобразования Лапласа:

$$\widehat{\Psi}(p) = \frac{1}{\ln(1 + p\tau_0 e^{-\alpha H}) + \ln(1 + p\tau_0^\eta) - \ln(1 + p\tau_0^\eta e^{-\alpha H})} \quad (2.5.60)$$

Вычисления оригинала от этого образа в соответствии с методикой, изложенной в приложении 2. 5.1, дает следующее представление для функции  $\psi(t)$ :

$$\Psi(t) = \frac{1}{\tau_0 [e^{-\alpha H} + \frac{1}{\eta} (1 - e^{-\alpha H})]} + \int_{\tau_2^{-1}}^\infty \frac{e^{-yt} dy}{\pi^2 + \ln^2 \frac{(y\tau_2 - 1)(y\tau_4 - 1)}{y\tau_2 - 1}}$$

$$\int_{\tau_4^{-1}}^{\bar{\tau}_2} \frac{e^{-y t} dy}{\pi^2 + \ln^2 \frac{(1-y\tau_2)(y\tau_4-1)}{1-y\bar{\tau}_3}} \quad (2.5.61)$$

где:  $\bar{\tau}_3 = \tau_0^\eta e^{-\alpha H}$ ,  $\tau_4 = \tau_0^\eta$ ,  $\tau_2 = \tau_0 e^{-\alpha H}$ .

В этом случае для  $E_I(z, t)$  и  $E_{II}(z, t)$  имеем:

$$E_I(z, t) = -\frac{\phi_\infty \alpha}{e^{-\alpha H} + \frac{1}{\eta}(1 - e^{-\alpha H})} e^{-\alpha z} (1 - e^{-t/\tau_1}) + \Phi_1, H < z < \infty \quad (2.5.62)$$

$$E_{II}(z, t) = -\frac{\phi_\infty \alpha}{\eta [e^{-\alpha H} + \frac{1}{\eta}(1 - e^{-\alpha H})]} e^{-\alpha z} (1 - e^{-t/\tau_3}) + \Phi_2, 0 < z < H,$$

где:  $\Phi_1, \Phi_2$  - некоторые функции, определяемые вторым и третьим членами в (2.5.61) и стремящиеся при  $t \rightarrow \infty$  к нулю с характерными временами  $\tau_4$  и  $\tau_0$ . Второй и третий члены в правой части (2.5.61) преобразуются к следующим интегралам:

$$I_1 = \frac{1}{\tau_2} \int_0^\infty \frac{e^{-(x+1)t/\tau_2} dx}{\ln^2 \frac{x[\tau_4(1+x)/\tau_2 - 1]}{\tau_3/\tau_2(1+x) - 1} + \pi^2} \quad (2.5.63)$$

$$I_2 = \frac{1}{\tau_4} \int_0^{(\tau_4/\tau_3)-1} \frac{e^{-(x+1)t/\tau_4} dx}{\ln^2 \frac{x[1-\tau_2(1+x)/\tau_4]}{1-\tau_3(1+x)/\tau_4} + \pi^2}$$

Тогда функции  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  определяются следующими выражениями:

$$\Phi_1(t) = \phi_\infty \alpha \int_0^t e^{-(t-\tau)/\tau_2} [I_2(\tau) - I_1(\tau)] d\tau \quad (2.5.64)$$

$$\Phi_2(t) = \varphi_\infty \alpha \int_0^t e^{-(t-\tau)/\tau_3} [I_2(\tau) - I_1(\tau)] d\tau$$

Из этих выражений следует, что  $\Phi_1(t), \Phi_2(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

В приведенных выше расчетах не учитывалось начальное электрическое поле. Из физических соображений ясно, что это поле будет исчезать и будет устанавливаться новый стационарный электрический режим. Из выражений (2.5.50) следует, что начальное электрическое поле, представляемое в этих выражениях вторыми членами, будет убывать, как  $e^{-t/\tau_1}$  в первом выражении и как  $e^{-t/\tau_3}$  во втором случае. Кроме того, определяемые начальным полем, войдут в постоянную  $\bar{C}$  в (2.5.51). Эти члены при  $t \rightarrow \infty$  также стремятся к нулю, причем время их убывания определяется максимальным из времен электрической релаксации.

Если аэрозольные слои способны усиливать электрическое поле атмосферы, то в случае слоя с повышенной ионизацией и следовательно  $\lambda_c \gg \lambda_0$  в нем будет происходить ослабление электрического поля. Это может иметь место, например, при забросе в приземный слой радиоактивных веществ. В этом случае процесс установления электрического стационарного состояния будет происходить быстрее, так как  $\tau = (4\pi\lambda_c)^{-1}$  будет мало.

В настоящем приложении в электростатическом приближении для атмосферы с экспоненциальной электрической проводимостью получены аналитические решения о временных изменениях электрического поля атмосферы и задачи об установлении стационарного электрического поля атмосферы при включении источников электрического поля без аэрозольных частиц и при наличии слоя аэрозольных частиц. Эти результаты могут быть использованы для

оценки характерных времен установления стационарного электрического поля при включении источников электрического поля, а также дают возможность определять характерное время диссипации электрического поля в отсутствие источников.

Полученные результаты могут быть также использованы при рассмотрении задачи о гармонических вариациях плотности полного максвелловского электрического тока атмосферы и гармонических вариациях потенциала ионосферы.

Так в эксперименте, который проводился одновременно на острове Вильсанди (Эстония) и в Вэлфорде (США), измерялась плотность полного максвелловского тока. Показано, что вариации этого тока с характерным периодом 60 с и амплитудой  $(3-4) \times 10^{-12}$  А/м<sup>2</sup> могут создаваться вариациями потенциала ионосферы с амплитудой 10 кВ. (Характерная величина стационарного электрического тока в атмосфере в областях, где грозвые генераторы отсутствуют, составляет  $2 \times 10^{-12}$  А/м<sup>2</sup>).

#### Приложение 2.5.1

В рассмотренных в основной части статьи задачах возникают интегралы в комплексной области:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \frac{dp}{\ln(1+p\tau)}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{pt} \frac{dp}{(1+p\tau)\ln(1+p\tau)} \quad (2.5.1.1)$$

Замена переменных:  $s = 1 + p\tau$  преобразует эти интегралы к следующим:

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \int_{a_1-i\infty}^{a_1+i\infty} e^{\frac{s}{\tau}t} \frac{ds}{\ln s}, \quad \frac{1}{2\pi i} \frac{e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \int_{a_1-i\infty}^{a_1+i\infty} e^{\frac{s}{\tau}t} \frac{ds}{s \ln s} \quad (2.5.1.2)$$

Рассмотрим первый интеграл в (2.5.1.2). Подынтегральное выражение имеет особенности при  $s=0$  и  $s=1$ . Точка  $s=0$  является точкой ветвления, в которой  $\ln s$

неоднозначен. Поэтому проведем разрез от 0 до  $-\infty$  и пусть контур интегрирования охватывает все особенности, лежащие слева. Для вычисления интеграла вдоль разреза на верхнем берегу  $s = -z + i0$  используем соотношение:

$$\ln s = \ln|s| + i\pi \quad (2.5.1.3)$$

а на нижнем берегу:

$$\ln s = \ln|s| - i\pi \quad (2.5.1.4)$$

Поэтому интеграл по контуру, охватывающему разрез равен:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{e^{\frac{z}{\tau}}}{\ln|z| - i\pi} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_0^{-\infty} \frac{e^{\frac{z}{\tau}}}{\ln|z| + i\pi} dz = \\ & \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{\tau}}}{\ln|z| - i\pi} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{\tau}}}{\ln z + i\pi} dz = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{\tau}}}{\ln^2 z + \pi^2} dz \end{aligned} \quad (2.5.1.5)$$

Вычет подынтегрального выражения при  $s=1$  равен  $e^{\frac{t}{\tau}}$ . Поэтому первый интеграл в (2.5.1.2) равен:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a_1 - i\infty}^{a_1 + i\infty} e^{\frac{s}{\tau}} \frac{ds}{\ln s} = e^{\frac{t}{\tau}} + \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{\tau}}}{\ln^2|z| + \pi^2} dz \quad (2.5.1.6)$$

Проводя аналогичные вычисления для второго интеграла в (2.5.1.2), получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a_1 - i\infty}^{a_1 + i\infty} e^{\frac{s}{\tau}} \frac{ds}{s \ln s} = e^{\frac{t}{\tau}} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{z}{\tau}}}{z(\ln^2 z + \pi^2)} dz \quad (2.5.1.7)$$

С другой стороны оригиналом преобразования Лапласа  $(s \ln s)^{-1}$  является функция (Диткин, Прудников, 1974):

$$\nu(x) = \int_0^{\infty} \frac{x^t}{\Gamma(t+1)} dt = \int_1^{\infty} \frac{x^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} d\xi \quad (2.5.1.8)$$

В то же время  $(\ln s)^{-1}$  имеет оригиналом функцию:

$$v_1(x) = \int_0^{\infty} \frac{x^{\xi-1}}{\Gamma(\xi)} d\xi \quad (2.5.1.9)$$

Асимптотическое значение функции (2.5.1.8) при  $t \rightarrow \infty (t \gg \tau)$  равно  $e^{\frac{t}{\tau}}$ . В то же время при  $t=0$  интеграл, стоящий в правой части расходится. Однако для функции, определяемой выражением (2.5.1.7), значение при  $t=0$  равно нулю.

### Приложение 2.5.2

В случае, если электрическая проводимость  $\lambda$  представляется несколькими экспонент (2.5.12) возникает задача обращения интеграла:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt} dp}{\alpha_1 [\ln(1+p\tau_0) - \ln(1+p\tau_0 e^{-\alpha_1 h_1})]} +$$

$$\frac{e^{pt} dp}{\frac{1}{\alpha_2} [\ln(1+p\tau_1 e^{-\alpha_2 h_1}) - \ln(1+p\tau_1 e^{-\alpha_2 h_2})] + \frac{1}{\alpha_3} \ln(1+p\tau_2 e^{-\alpha_3 h_2})} \quad (2.5.2.1)$$

Выражение, стоящее в знаменателе интеграла, имеет полюс при  $p=0$  и точки ветвления при

$$p = -\frac{1}{\tau_0}, -\frac{1}{\tau_0} e^{\alpha_1 h_1}, -\frac{1}{\tau_1} e^{\alpha_2 h_1}, -\frac{1}{\tau_1} e^{\alpha_2 h_2}, -\frac{1}{\tau_2} e^{\alpha_3 h_2}.$$

Проведем разрез вдоль отрицательной оси ОХ комплексной плоскости от точки  $-\frac{1}{\tau_0}$  до  $-\infty$ . Тогда на верхнем и нижнем берегах разреза имеем:



$$\ln(1 + p\tau_0) = \ln|1 - x\tau_0| \pm i\pi, x \in \left(\frac{1}{\tau_0}, +\infty\right)$$

$$\ln(1 + p\tau_0 e^{-\alpha_1 h_1}) = \ln|1 - x\tau_0 e^{-\alpha_1 h_1}| \pm i\pi, x \in \left(\frac{1}{\tau_0} e^{\alpha_1 h_1}, +\infty\right)$$

$$\ln(1 + p\tau_1 e^{-\alpha_2 h_1}) = \ln|1 - x\tau_1 e^{-\alpha_2 h_1}| \pm i\pi, x \in \left(\frac{1}{\tau_1} e^{\alpha_2 h_1}, +\infty\right)$$

$$\ln(1 + p\tau_1 e^{-\alpha_2 h_2}) = \ln|1 - x\tau_1 e^{-\alpha_2 h_2}| \pm i\pi, x \in \left(\frac{1}{\tau_1} e^{\alpha_2 h_2}, +\infty\right)$$

$$\ln(1 + p\tau_2 e^{-\alpha_3 h_2}) = \ln|1 - x\tau_2 e^{-\alpha_3 h_2}| \pm i\pi, x \in \left(\frac{1}{\tau_2} e^{\alpha_3 h_2}, +\infty\right)$$

(2.5.2.2)

Вычет подинтегральной функции в точке  $p = 0$  равен:

$$\begin{aligned} & \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pe^{pt}}{pe^{pt}} \times \\ & \frac{\frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1+p\tau_0}{1+p\tau_0 e^{-\alpha_1 h_1}} + \frac{1}{\alpha_2} \ln \frac{1+p\tau_1 e^{-\alpha_2 h_1}}{1+p\tau_1 e^{-\alpha_2 h_2}} + \frac{1}{\alpha_3} \ln(1+p\tau_2 e^{-\alpha_3 h_2})}{1} = \\ & = \frac{\frac{1}{\alpha_1} \tau_0 (1 - e^{-\alpha_1 h_1}) + \frac{1}{\alpha_2} \tau_1 (e^{-\alpha_2 h_1} - e^{-\alpha_2 h_2}) + \frac{1}{\alpha_3} \tau_2 e^{-\alpha_3 h_2}}{1} \end{aligned}$$

(2.5.2.3)

Используя теорему об обращении преобразования Лапласа (Диткин, Прудников, 1974), получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{pt}}{\frac{1}{\alpha_1} \ln \frac{1+p\tau_0}{1+p\tau_0 e^{-\alpha_1 h_1}} + \frac{1}{\alpha_2} \ln \frac{1+p\tau_1 e^{-\alpha_2 h_1}}{1+p\tau_1 e^{-\alpha_2 h_2}} + \frac{1}{\alpha_3} \ln(1+p\tau_2 e^{-\alpha_3 h_2})} \times$$

$$\begin{aligned}
dp = & \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} \tau_0 (1 - e^{-\alpha_1 h_1}) + \frac{1}{\alpha_2} \tau_1 (e^{-\alpha_2 h_1} - e^{-\alpha_2 h_2}) + \frac{1}{\alpha_3} \tau_2 e^{-\alpha_3 h_2}} + \\
& + \int_{\frac{1}{\tau_0} e^{\alpha_1 h_1}}^{\frac{1}{\tau_0}} \frac{e^{-xt}}{\ln^2 \left( \frac{x\tau_0 - 1}{1 - x\tau_0 e^{-\alpha_1 h_1}} \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \left( \frac{1 - x\tau_1 e^{-\alpha_2 h_1}}{1 - x\tau_1 e^{-\alpha_2 h_2}} \right)^{\frac{1}{\alpha_2}} (1 - x\tau_2 e^{-\alpha_3 h_2})^{\frac{1}{\alpha_3}} + \frac{\pi^2}{\alpha_1^2}} dx + \\
& + \int_{\frac{1}{\tau_1} e^{\alpha_2 h_2}}^{\frac{1}{\tau_1} e^{\alpha_2 h_1}} \frac{e^{-xt}}{\ln^2 \left( \frac{x\tau_0 - 1}{x\tau_0 e^{-\alpha_1 h_1} - 1} \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \left( \frac{x\tau_1 e^{-\alpha_2 h_1} - 1}{1 - x\tau_1 e^{-\alpha_2 h_2}} \right)^{\frac{1}{\alpha_2}} (1 - x\tau_2 e^{-\alpha_3 h_2})^{\frac{1}{\alpha_3}} + \frac{\pi^2}{\alpha_2^2}} dx + \\
& + \int_{\frac{1}{\tau_2} e^{\alpha_3 h_2}}^{\infty} \frac{e^{-xt}}{\ln^2 \left( \frac{x\tau_0 - 1}{x\tau_0 e^{-\alpha_1 h_1} - 1} \right)^{\frac{1}{\alpha_1}} \left( \frac{x\tau_1 e^{-\alpha_2 h_1} - 1}{x\tau_1 e^{-\alpha_2 h_2} - 1} \right)^{\frac{1}{\alpha_2}} (x\tau_2 e^{-\alpha_3 h_2} - 1)^{\frac{1}{\alpha_3}} + \frac{\pi^2}{\alpha_3^2}} dx \times \\
& dx = \zeta(t) \tag{2.5.2.4}
\end{aligned}$$

Приложение 2.6. Напряженность электрического поля, как индикатор глобального аэрозольного загрязнения.

На основе модели глобальной атмосферно-электрической цепи можно дать численные оценки изменения потенциала ионосферы и напряженности электрического поля атмосферы в случае глобального аэрозольного загрязнения.

Теоретические оценки изменения потенциала ионосферы вследствие выброса аэрозольных частиц в атмосферу можно получить, используя выражения для потенциала ионосферы:

$$\varphi_{\infty} = R_g \sum_{s=1}^N \frac{R_{1s}}{R_{cs}} I_s, \quad (2.6.1)$$

где:  $R_g$  - глобальное сопротивление атмосферы,  $R_{1s}$  - внутреннее столбцовое сопротивление  $s$ -го грозового генератора,  $R_{cs}$  - столбцовое сопротивление между земной поверхностью и ионосферой,  $I_s$  - электрический ток, даваемый  $s$ -ым грозовым генератором.

Плотность электрического тока вдали от гроз (плотность тока «хорошей погоды») определяется соотношением:

$$j = -\frac{\varphi_{\infty}}{\int_0^H \frac{dz}{\lambda(z)}} = -\frac{\varphi_{\infty}}{R_{g1}}, \quad R_{g1} = \int_0^H \frac{dz}{\lambda(z)}, \quad (2.6.2)$$

а вертикальная составляющая напряженности электрического поля равна:

$$E_z = -\frac{\varphi_{\infty}}{\lambda(z)R_{g1}} = -\frac{j}{\lambda(z)} \quad (2.6.3)$$

где:  $H$  - высота нижней ионосферы,  $\lambda(z)$  - электрическая проводимость атмосферы.

Если воздействию аэрозольных частиц подвергается определенная область «хорошей» погоды, а область действия грозовых облаков, как генераторов электрического поля находится вне зоны аэрозольного загрязнения, то используя выражение (2.6.1) для потенциала ионосферы, можно записать для измененного значения потенциала ионосферы:

$$\varphi_{\infty}^a = \frac{R_g^a}{R_g} \varphi_{\infty} \quad (2.6.4)$$

где:  $R_g^a$  - глобальное сопротивление атмосферы с учетом областей загрязнения аэрозольными частицами.

Выражение для  $R_g$  представляется в виде:

$$R_g = \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^H \frac{dz}{\lambda(z)} = \frac{1}{S} \int \frac{dz}{\lambda(z)}, \quad (2.6.5)$$

где:  $S=4\pi r^2$  - площадь земной поверхности,  $r$  - радиус Земли.

В то же время для  $R_g^a$  можно записать выражение:

$$R_g^a = \left[ \frac{1}{\gamma S} \int_0^H \frac{dz}{\lambda_1(z)} \times \frac{1}{(1-\gamma)S} \int_0^H \frac{dz}{\lambda(z)} \right] \times \left[ \frac{1}{\gamma S} \int_0^H \frac{dz}{\lambda_1(z)} + \frac{1}{(1-\gamma)S} \int_0^H \frac{dz}{\lambda(z)} \right]^{-1} \quad (2.6.6)$$

где:  $\gamma$  - доля земной поверхности, занимаемая аэрозольными загрязнениями,  $\lambda_1(z)$  - высотный профиль электрической проводимости в области загрязнений.

Сопротивления атмосферы  $R_g$  и  $R_g^a$  вычислялись в предположении, что в отсутствии аэрозольных частиц электрическая проводимость атмосферы определяется выражением:

$$\lambda(z) = \lambda_0 e^{\alpha z}, \alpha = (0.2 - 0.3) \text{ км}^{-1} \quad (2.6.7)$$

а при наличии аэрозольных частиц

$$\begin{aligned} \lambda_0 e^{\alpha z}, z \in [H_0, H] \\ \lambda(z) = \eta \lambda_0 e^{\alpha z}, z \in [h, H_0] \\ \lambda_0 e^{\alpha z}, z \in [0, h] \end{aligned} \quad (2.6.8)$$

где:  $\lambda_0$  - электрическая проводимость вблизи земной поверхности.

Величина  $\eta$  определяется из уравнения ионизационно-рекомбинационного равновесия и для ядер Айткена

она равна 0.21 при их концентрации равной  $10^{10} \text{ м}^{-3}$  и 0.024 при концентрации  $5 \times 10^{10} \text{ м}^{-3}$ .

При  $\gamma=0.1$ ,  $\eta=0.01$ ,  $h=0$ ,  $H_0=1 \text{ км}$ ,  $H=80 \text{ км}$ ,  $\alpha=0.3 \text{ км}^{-1}$ , получим  $\frac{R_g^a}{R_g} = 1.106$ ,  $\varphi_\infty^a = 1.106 \varphi_\infty$ . При  $\varphi_\infty = 300 \text{ Кв}$ ,  $\varphi_\infty^a = 331$

Кв. Если положить  $\eta=0.1$ , то получим  $\frac{R_g^a}{R_g} = 1.075$ ,

$\varphi_\infty^a = 1.075 \varphi_\infty$  и при  $\phi_\infty = 300 \text{ кА}$ ,  $\phi_\infty^a = 323 \text{ кА}$ .

Таким образом полученные выше оценки показывают, что присутствие аэрозольных частиц в атмосфере приводит к увеличению потенциала ионосферы на величину 8-10% от исходной величины  $\varphi_\infty = 300 \text{ кВ}$ . Если приборы для измерения напряженности электрического поля расположены в областях, где загрязнение аэрозольными частицами отсутствует, то изменения напряженности электрического поля вблизи земной поверхности, как следует из формул (2.6.2) и (2.6.3), также будет составлять 8-10%. Это дает возможность использовать напряженность электрического поля в качестве индикатора глобального аэрозольного загрязнения атмосферы.

Приложение 2. 7. Нестационарная модель электрического поля в нижней атмосфере

Многолетние экспериментальные исследования вблизи земной поверхности указывают на существование электрического поля в атмосфере, напряженность которого составляет  $E_z \sim 100 \text{ В/м}$  [Атмосфера. Справочник,..... 1991] и которое имеет отличные от нуля значения при удалении от земной поверхности по высоте. После того, как было обнаружено, что нижняя атмосфера обладает малой, но конечной электрической проводимостью, стало ясно, что в атмосфере существуют вертикальные электрические токи с

плотностью  $j_z = \lambda E_z \approx 2 \times 10^{-12} \text{ А/м}^2$ . Эти электрические токи проводимости должны приводить к исчезновению электрического поля атмосферы за характерное время порядка 10 мин [Атмосфера. Справочник, ... 1991]. Отсюда следует, что для поддержания электрического поля в нижней атмосфере необходимо действие генераторов, поддерживающих это электрическое поле. В 20-е годы прошлого столетия была выдвинута гипотеза [Wilson, 1925], что такими генераторами являются грозовые облака. На основе этой гипотезы в работе [Haas and Roble, 1979] была построена физико-математическая стационарная модель электрического поля атмосферы с грозовыми облаками как генераторами электрического поля. В этой модели предполагалось выполненным условие:  $T \gg \tau_\lambda$ , где  $T$  – характерное время действия грозовых генераторов,  $\tau_\lambda$  – время электрической релаксации в атмосфере.

Грозовые облака моделировались в этой модели в виде токового диполя, у которого верхний заряд был положительным, а нижний заряд был отрицательный (Holser, Saxon, 1952; Морозов, Селезнева, 1988). В условиях стационарной модели и конечной электрической проводимости эти заряды поддерживались некоторым сторонним током, который определяется процессами электризации в грозовом облаке. Как показали расчеты, проведенные в работе [Haas, Roble, 1979], основной вклад в поддержание электрического поля в областях, где грозовые облака отсутствуют, дают грозы, действующие в экваториальной зоне земного шара.

В то же время эта модель не учитывает нестационарную стадию деятельности грозовых генераторов с характерными временами  $T \leq \tau_\lambda$ , например, влияние как внутриоблачных разрядов, так и разрядов облако-земля, т.е. задача о генерации и поддержании электрического поля

нижней атмосферы должна быть нестационарной, т.к. нестационарны сами грозовые источники и их число, действующее по всему земному шару, непрерывно меняется.

Стационарная модель описывает ту стадию существования электрического поля, когда грозовые облака находятся в стадии развития до наступления разрядных процессов. Но в разрядной стадии жизни грозового облака, когда появляются процессы с характерными временами  $T \leq \tau_L$ , описания электрического поля нижней атмосферы в рамках стационарной модели становится несправедливыми. Возникает необходимость оценки влияния этой нестационарной стадии грозовых генераторов на электрическое поле атмосферы.

Качественно учет разрядных процессов в балансе глобальной электрической цепи был проведен в работе Hill (1971). Несмотря на то, что было показано, что учет разрядных процессов, в частности разрядов облако-земля приводит к увеличению эффективности грозовых генераторов в поддержании электрического поля нижней атмосферы, в этой работе не была учтено временное изменение электрического поля атмосферы в процессе эволюции грозовых генераторов.

В настоящем приложении рассчитываются с использованием аналитических методов нестационарные электрические поля в нижней атмосфере, создаваемые грозовыми токовыми генераторами. На основе проведенных расчетов оценивается влияние разрядов облако-земля и внутриоблачных разрядов на временные вариации электрического поля атмосферы.

Пренебрегая электромагнитными процессами, уравнения, описывающие нестационарную модель электрического поля атмосферы, можно записать в следующем виде (Атмосфера. Справочник, 1991; Морозов, 1981):

$$\operatorname{div}\left(\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \vec{j}\right) = -\sum_{s=1}^N \operatorname{div}\vec{j}_s \quad (2.7.1)$$

$$E = -\operatorname{grad}\phi, \quad \vec{j} = \lambda\vec{E}$$

где  $\vec{E}$  – напряженность электрического поля,  $\phi$  – потенциал электрического поля,  $\lambda$  – электрическая проводимость атмосферы,  $\vec{j}$  – плотность омического электрического тока,  $\vec{j}_s$  – плотность стороннего электрического тока, создаваемого  $s$ -грозовым генератором,  $N$  – число грозových генераторов, действующих в данный момент времени  $t$  по всему земному шару.

Система уравнений (2.7.1) справедлива для следующих значений величин характерных времен ( $T$ ) и пространственных масштабов ( $L$ ) задачи

$$T \gg \frac{L}{c}, \quad T \gg \frac{4\pi\lambda L^2}{c^2} = \frac{L^2}{c^2\bar{\tau}} \quad (2.7.2)$$

где  $c$  – скорость света,  $\bar{\tau} = (4\pi\lambda)^{-1}$  – время электрической релаксации атмосферы. При  $L \sim 100$  км  $\bar{\tau} = 600$  с (время релаксации вблизи земной поверхности) получим из (2.7.2):  $T \gg 3,3 \times 10^{-4}$  с,  $T \gg 1,85 \times 10^{-10}$  с. В то же время для  $\tau = 10^{-4}$  с, что имеет место на высоте атмосферы 70 км, из второго неравенства (2.7.2) получим условие:  $T \gg 1,2 \times 10^{-3}$  с. Для полученных выше ограничений на характерные времена следует условие пренебрежения электромагнитными процессами, т.е. пренебрежение запаздыванием в уравнениях Максвелла и индукционными токами.

В предположении точечных грозových источников [Hays, Roble, 1979] система уравнений (2.7.1) может быть сведена к уравнению для потенциала электрического поля  $\phi$ , которое в сферической системе координат ( $r, \theta, \phi$ ) с



началом в центре Земли записывается в следующем представлении:

$$\left(\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} + \lambda(r)\right) \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \right] \frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = - \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs}(t)}{r^2} [\delta(r-r_{s0}) - \delta(r-r_{s1})] \times \\ \delta(\cos \theta - \cos \theta_s) \delta(\varphi - \varphi_s) = S(r, \theta, \varphi, t) \quad (2.7.3)$$

где  $(r, \theta, \phi)$ -сферические координаты с началом в центре Земли;  $r_{s0}, r_{s1}$  – радиальные расстояния, соответствующие положительным и отрицательным зарядам грозового облака ( $r_{s0} > r_{s1}$ );  $\delta(u)$  – функция Дирака;  $I_{cs}(t)$  – сторонний электрический ток, даваемый  $s$ -грозовым генератором.

При выводе уравнения (2.1.3) предполагалось, что электрическая проводимость атмосферы изотропна и представляется в виде (Атмосфера. Справочник,..... 1991):

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\alpha(r-R)}, \quad (2.7.4)$$

где  $\lambda_0$  – электрическая проводимость вблизи земной поверхности,  $R$  – радиус Земли,  $\alpha = (0,2-0,3) \text{ км}^{-1}$ .

Орография земной поверхности в настоящей работе не учитывается.

Земля предполагается сферической. Также не учитывается зависимость  $\lambda$  от углов  $(\theta, \phi)$ . Обсуждение этой проблемы содержится в работах (Hays, Roble, 1979; Давыденко, Беспалов, 2000).

Изменения потенциала  $\phi$  в уравнении (2.7.3), обусловленные широтными и долготными вариациями  $\lambda$ , определяются членами:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \phi} \quad (2.7.5)$$

В грозовых облаках электрическая проводимость  $\lambda$  определяется выражением (Driscoll et al, 1992):

$$\lambda = \eta \lambda_0 e^{\alpha(r-R)} \quad (2.7.6)$$

где  $\eta = 0,1-0,01$  определяется поглощением легких ионов облачными частицами.

Для первого и второго члена в (2.7.5) следует оценка

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{r \partial \theta} \approx \frac{1}{\Delta y} \lambda_0 e^{\alpha(r-R)} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (2.7.7)$$

$$\frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \approx \frac{1}{\Delta x} \lambda_0 e^{\alpha(r-R)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

где  $\Delta y$ ,  $\Delta x$  – протяженность облака вдоль горизонтальных осей  $y$  и  $x$ .

В то же время оценка последнего члена левой части уравнения (3) дает

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \approx \alpha \lambda_0 e^{\alpha(r-R)} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad (2.7.8)$$

Из сравнения (2.7.7) и (2.7.8) следует, что горизонтальной неоднородностью электрической проводимости  $\lambda$ , обусловленной наличием грозových облаков, можно пренебречь, если выполнены неравенства  $\Delta y, \Delta x \gg 1/\alpha = (3,3-5)$  км. В противоположном случае это влияние существенно. В настоящей статье предполагается, что влияние горизонтальной неоднородности  $\lambda$ , обусловленной присутствием грозových облаков, несущественно, хотя в дальнейшем необходимо исследовать это влияние более строго.

Ток  $I_{cs}(t)$  определяет электризацию облака за счет взаимодействия облачных частиц и частиц осадков (Имянитов, 1981) и выражается через сумму токов положительно заряженных облачных частиц, движущихся вверх, и отрицательно заряженных частиц осадков, движущихся вниз. К этому току может быть добавлен ток диссипации, обусловленный тем, что в процессе роста электрическое поле достигает значений, при которых начинается корона-

ный разряд, который затем переходит в обычный внутриоблачный разряд или разряд облако-земля, а также молниевый ток, возникающий при внутриоблачных разрядах и разрядах облако-земля.

Общие граничные и начальные условия для решения уравнения (2.7.3) запишем в следующем виде:

$$\varphi|_{r=R} = 0, \quad \varphi|_{|\bar{r}| \rightarrow \infty} = \varphi_{\infty}(t), \quad \Delta\varphi|_{t=0} = 4\pi\rho(\bar{r}), \quad r > R, \quad (2.7.9)$$

где  $\rho(\bar{r})$  – начальное распределение плотности электрического заряда в атмосфере.

Потенциал ионосферы  $\varphi_{\infty}(t)$  определяется условием баланса полного тока в нижней атмосфере

$$\oint_{S_1} \left( \lambda \vec{E} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) d\vec{S} = 0, \quad (2.7.10)$$

где  $S_1$  – замкнутая сферическая поверхность, лежащая выше или ниже грозových генераторов.

Условие (2.7.10) отражает то обстоятельство, что в областях, где расположены грозových облака, в верхние слои атмосферы текут токи зарядки, а в областях, где они отсутствуют, текут вниз токи разрядки. Соотношение (2.7.10) не учитывает тот факт, что верхние слои атмосферы, начиная с ионосферы, являются хорошо проводящими областями. В этих областях начинает играть роль анизотропия электрической проводимости, определяемая геомагнитным полем Земли, электрические токи текут вдоль силовых линий магнитного поля. В стационарной модели электрического поля, рассмотренной в работе (Haas, Roble, 1979), в качестве верхнего граничного условия использовались условия

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda_m, \cos\theta, \phi) &= \varphi(\lambda_m, -\cos\theta, \phi), \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(\lambda_m, \cos\theta, \phi) &= -\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}(\lambda_m, -\cos\theta, \phi), \end{aligned} \quad (2.7.11)$$

где  $\lambda_m$  – усредненная по высоте электрическая проводимость Педерсона, соответствующая нижней границе магнитосферы  $z_m = 105$  км. Условия (2.7.11) означают, что электрические токи текут только вдоль силовых линий магнитного поля (вдоль силовых трубок магнитного поля) и силовые линии геомагнитного поля являются эквипотенциальными.

Это приближение предполагает отсутствие магнитосферных источников и влияет на распределение напряженности электрического поля на ионосферных высотах, но оставляет без изменения электрическую цепь в нижней атмосфере.

Дальнейший анализ этой модели (Селезнева, 1984; Морозов, Селезнева, 1988) показал, что для построения модели электрического поля в нижней атмосфере достаточно использовать условия (2.7.9) и (2.7.10), записанные для стационарного случая.

В случае наличия и учета других генераторов, действующих в верхних слоях атмосферы: ионосферного и магнитосферного динамо [Roble, Hays, 1979] и ротационного, униполярного генератора, обусловленного дифференциальным вращением плазмосферы (Беспалов, Чугунов, 1994), соответствующие разности потенциалов электрического поля, обусловленные этими генераторами, должны быть добавлены к  $\varphi_\infty(t)$ .

Для решения уравнения (2.7.3) при краевых условиях (2.7.9) воспользуемся вначале преобразованием Лапласа (Диткин, Прудников, 1974):

$$\bar{f} = \int_0^{\infty} f e^{-pt} dt, \quad f = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{f} e^{pt} dp, \quad i = \sqrt{-1}, \quad (2.7.12)$$

применяя которое к уравнению (2.7.3), получим для  $\bar{\varphi}$ :

$$\left[ \lambda(r) + \frac{p}{4\pi} \right] \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \bar{\phi}}{\partial \varphi^2} \right] + \alpha \lambda \frac{\partial \bar{\phi}}{\partial r} = \bar{S}(r, \theta, \varphi, p) + \frac{\Delta \phi}{4\pi} \Big|_{t=0} \quad (2.7.13)$$

Граничные условия (2.7.4) преобразуются к следующему виду

$$\bar{\phi}|_{r=R} = 0, \quad \bar{\phi}|_{r \rightarrow \infty} = \bar{\phi}_\infty(p). \quad (2.7.14)$$

Будем далее предполагать, что  $\Delta \phi / 4\pi|_{t=0} = 0$  и для решения уравнения (2.7.13) при граничных условиях (2.7.14) представим  $\phi(r, \theta, \phi, p)$  в виде разложения по сферическим гармоникам  $Y_{ij}(\theta, \phi)$  (Джексон, 1965):

$$\bar{\phi}(r, \theta, \phi, p) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i}^i \bar{\phi}_{ij}(r, p) Y_{ij}(\theta, \phi). \quad (2.7.15)$$

При этом функция источника, стоящая в правой части (2.7.13), представляется в виде:

$$\bar{S}(r, \theta, \varphi, p) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=i}^i \sum_{s=1}^N \frac{\bar{I}_{cs}}{r^2} [\delta(r - r_{s0}) - \delta(r - r_{s1})] \times Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) Y_{ij}(\theta, \varphi), \quad (2.7.16)$$

где  $\bar{I}_{cs}$  — образ преобразования Лапласа от стороннего электрического тока  $I_{cs}(t)$ ,  $Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s)$  — сферическая гармоника, комплексно сопряженная  $Y_{ij}(\theta_s, \varphi_s)$ .

Используя разложения (2.7.15) и (2.7.16), получим из (2.7.13) следующее уравнение для функции  $\bar{\phi}_{ij}$ :

$$\frac{d^2 \bar{\phi}_{ij}}{dr^2} + \left( \frac{2}{r} + \frac{\alpha \lambda_0 e^{\alpha(r-R)}}{\frac{p}{4\pi} + \lambda_0 e^{\alpha(r-R)}} \right) \frac{d \bar{\phi}_{ij}}{dr} - \frac{\mu \bar{\phi}_{ij}}{r^2} =$$

$$= - \sum_{s=1}^N \frac{\bar{I}_{cs}}{r^2} \frac{[\delta(r-r_{s0}) - \delta(r-r_{s1})]}{\frac{p}{4\pi} + \lambda_0 e^{\alpha(r-R)}} Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s), \quad (2.7.17)$$

$$\mu = i(i+1), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Рассмотрим вначале случай решения уравнения (2.7.17), удовлетворяющий условию  $4\pi\lambda_0 e^{\alpha(r-R)}/p \ll 2/\alpha R \approx 1,5 \times 10^{-3}$ . При выполнении этого условия уравнение (2.7.17) сводится к следующему:

$$\frac{d^2 \bar{\phi}_{ij}}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d \bar{\phi}_{ij}}{dr} - \frac{\mu \bar{\phi}_{ij}}{r^2} = - \sum_{s=1}^N \frac{4\pi \bar{I}_{cs}}{r^2 p} [\delta(r-r_{s0}) - \delta(r-r_{s1})] Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s). \quad (2.7.18)$$

С физической точки зрения уравнение (2.7.18) описывает начальную стадию нарастания электрического поля в нижней атмосфере, когда влиянием электрической проводимости можно пренебречь.

В этом случае общее решение уравнения (2.7.3) записывается в следующем виде в предположении  $I_{cs} = I_{cs0} \theta(t)$ :

$$\begin{aligned} \phi = \phi_\infty \left(1 - \frac{R}{r}\right) + \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs0} t}{r_{s0}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i \left(\frac{R}{r_{s0}}\right)^i \left[ \left(\frac{r}{R}\right)^i - \left(\frac{R}{r}\right)^{i+1} \right] \frac{4\pi}{2i+1} \times \\ Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) Y_{ij}(\theta, \varphi) - \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs0} t}{r_{s1}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i \left(\frac{R}{r_{s1}}\right)^i \left[ \left(\frac{r}{R}\right)^i - \left(\frac{R}{r}\right)^{i+1} \right] \frac{4\pi}{2i+1} \times \\ Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) Y_{ij}(\theta, \varphi), \quad r < \min\{r_{s1}\} \end{aligned} \quad (2.7.19)$$

$$\phi = \phi_{\infty} \left( 1 - \frac{R}{r} \right) + \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs0} t}{r_{s0}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i \left( \frac{R}{r} \right)^{i+1} \left[ \left( \frac{r_{s0}}{R} \right)^{i+1} - \left( \frac{R}{r_{s0}} \right)^i \right] \times$$

$$\frac{4\pi}{2i+1} Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) Y_{ij}(\theta, \varphi) - \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs0} t}{r_{s1}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i \left( \frac{R}{r} \right)^{i+1} \times$$

$$\left[ \left( \frac{r_{s1}}{R} \right)^{i+1} - \left( \frac{R}{r_{s1}} \right)^i \right] \frac{4\pi}{2i+1} Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) Y_{ij}(\theta, \varphi), \quad (2.7.20)$$

где  $\theta(t)$  – функция Хевисайда.

Используя свойства разложений по сферическим гармоникам (Джексон, 1965) выражения (2.7.19) – (2.7.20) можно записать в следующем компактном виде:

$$\phi = \phi_{\infty} \left( 1 - \frac{R}{r} \right) + \sum_{s=1}^N Q_{cs0} \left[ \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{s0}|} - \frac{R}{r_{s0} \left| \vec{r} - \frac{R^2}{r_{s0}^2} \vec{r}_{s0} \right|} \right) - \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_{s1}|} - \frac{R}{r_{s1} \left| \vec{r} - \frac{R^2}{r_{s1}^2} \vec{r}_{s1} \right|} \right) \right], \quad (2.7.21)$$

$$I_{cs0} t = Q_{cs0}.$$

Решение (2.7.21) описывает бестоковый режим в атмосфере, точнее равен нулю ток проводимости, а ток смещения отличен от нуля. Поэтому потенциал ионосферы  $\phi_{\infty}(t)$  можно определить, если воспользоваться условием из (2.7.10):

$$\oint_{s1} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} d\vec{S} = 0. \quad (2.7.22)$$

Вычисляя радиальную составляющую напряженности электрического поля, используя (2.7.19), а затем временную производную и подставляя в (2.7.21), получим:

$$\varphi_{\infty}(t) = \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs0} t}{R} \left( \frac{h_{s0}}{r_{s0}} - \frac{h_{s1}}{r_{s1}} \right) \approx \sum_{s=1}^N Q_s(t) \frac{h_{s0} - h_{s1}}{R^2} = \sum_{s=1}^N Q_s(t) \frac{\delta h_s}{R^2}, \quad (2.7.23)$$

где  $h_{s0} = r_{s0} - R$ ,  $h_{s1} = r_{s1} - R$ ,  $Q_s(t) = I_{cs0} t$ .

При выводе выражения (2.7.23) также предполагалось, что  $r_{s0} \approx R$ ,  $r_{s1} \approx R$ . Решение (2.7.21) и соотношение (2.7.23) описывают стадию изменения электрического поля в атмосфере при включении токовых источников, когда влияние электрической проводимости мало и важную роль играет сферичность атмосферы.

Если выполнено условие  $\left| \frac{4\pi\lambda_0 e^{\alpha(r-R)}}{p} \right| \gg \frac{2}{\alpha r} \approx \frac{2}{\alpha R}$ , то влия-

ние электрической проводимости становится существенным. Представим координату  $r = R + z$ , где  $z \ll R$ .

В этом случае, подставляя эту замену в (2.7.17) и пренебрегая членом  $z/R \ll 1$ , получим уравнение:

$$\frac{d^2 \bar{\phi}_{ij}}{dz^2} + \left( \frac{2}{R} + \frac{\alpha \lambda_0 e^{\alpha z}}{\frac{p}{4\pi} + \lambda_0 e^{\alpha z}} \right) \frac{d \bar{\phi}_{ij}}{dz} - \frac{\mu \bar{\phi}_{ij}}{R^2} = - \sum_{s=1}^N \frac{\bar{I}_{cs}}{R^2} \frac{[\delta(z - z_{s0}) - \delta(z - z_{s1})]}{\frac{p}{4\pi} + \lambda_0 e^{\alpha z}} Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) = \bar{S}_{ij}(z, p) \quad (2.7.24)$$

Поскольку масштаб  $\alpha^{-1}$ , определяющий изменение электрической проводимости, меньше гораздо радиуса Земли  $R$  ( $\alpha^{-1} \ll R$ ), то во втором члене в уравнении (2.7.24) член  $2/R$  можно отбросить и имеем:



$$\frac{d^2 \bar{\varphi}_{ij}}{dz^2} + \frac{\alpha \lambda_0 e^{\alpha z}}{\frac{p}{4\pi} + \lambda_0 e^{\alpha z}} \frac{d \bar{\varphi}_{ij}}{dz} - \frac{\mu \bar{\varphi}_{ij}}{R^2} = \bar{S}_{ij}(z, p) \quad (2.7.25)$$

Решение уравнения (2.7.25) при  $\left| \frac{e^{\alpha z}}{p \tau_0} \right| < 1$  находится

с учетом аналитического продолжения в область  $\left| \frac{e^{\alpha z}}{p \tau_0} \right| > 1$  с

помощью метода, предложенного в [Морозов, 2002]. Предполагая, что  $I_{cs}(t) = I_{cs0} \theta(t)$  и возвращаясь от образов преобразования Лапласа к оригиналам, используя (2.7.12), (2.7.14), (2.7.15), получим, что на второй стадии, когда важен учет электрической проводимости, следующее выражение для потенциал я электрического поля при  $t \ll \tau_0 = (4\pi \lambda_0)^{-1}$  è  $z < h(t)$ :

$$\begin{aligned} \varphi = & \varphi_{\infty}^{(t)} \frac{z}{h(t)} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i \sum_{s=1}^N \frac{4\pi}{\sqrt{i(i+1)}R} \\ & \left\{ \int_0^t I_{cs0} d\tau \frac{s h x z_{s0} - s h x z_{s1}}{s h x h(\tau)} s h x (h(t) - z) \right\} \times \\ & \times Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) Y_{ij}(\theta, \varphi), z > \max_s \{z_{s0}\}, x = \frac{\sqrt{i(i+1)}}{R} \end{aligned} \quad (2.7.26)$$

$$\phi = \phi_{\infty}^{(t)} \frac{z}{h(t)} + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i \sum_{s=1}^N \frac{4\pi}{\sqrt{i(i+1)}R} \times$$

$$\left\{ \int_0^t I_{cs0} d\tau \frac{[s h x (h(\tau) - z_{s0}) - s h x (h(\tau) - z_{s1})]}{s h x h(\tau)} \right\} \times$$

$$\times Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) Y_{ij}(\theta, \varphi), \quad z < \min_s \{z_{s1}\},$$

где потенциал ионосферы  $\phi_{\infty}^{(1)}$  определяется выражением (2.7.23).

Физический смысл характерной высоты

$h(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\tau_0}{t}$  состоит в том, что на этой высоте время

электрической релаксации  $\tau_{\lambda} = (4\pi\lambda)^{-1}$  равно времени, прошедшему с момента включения глобальных грозových генераторов. Для  $t > \tau_0$  после некоторых преобразований получим следующее выражение для потенциала электрического поля:

$$\phi_1(z, t) = \phi_{\infty}(t) - \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs0}}{R^2 \alpha} \left\{ \int_0^t \left( \int_0^{t-x} \tilde{v}_1(t-x-\tau) E_1 \left( \frac{\tau}{\tau(z)} \right) d\tau \right) \times \right.$$

$$\left. \left\{ \int_0^t E_1 \left( \frac{x}{\tau_{s0}} \right) dx - \int_0^t \left( \int_0^{t-x} \tilde{v}_1(t-x-\tau) E_1 \left( \frac{\tau}{\tau(z)} \right) d\tau \right) E_1 \left( \frac{x}{\tau_{s1}} \right) dx \right\} \right\}$$

$$\phi(z, t) = \phi_1(z, t) + \sum_{s=1}^N \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) Y_{ij}(\theta, \varphi) \left\{ \frac{4\pi I_{cs0} \tau_{s0}}{R^2 \alpha \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}}} e^{-\frac{\alpha}{2}(z-z_{s0})} \right\} \times$$

$$(2.7.27)$$

$$\times \left[ e^{-\frac{\alpha}{2}(z-z_{s0})\sqrt{1+\frac{4x^2}{\alpha^2}}} f_1(t, z) - e^{-\frac{\alpha}{2}(z+z_{s0})\sqrt{1+\frac{4x^2}{\alpha^2}}} f_2(t, z_{s0}) \right] - \frac{4\pi I_{cs0} \tau_{s1} e^{-\frac{\alpha}{2}(z-z_{s1})}}{R^2 \alpha \sqrt{1+\frac{4x^2}{\alpha^2}}} \times$$

$$\times \left[ e^{-\frac{\alpha}{2}(z-z_{s1})\sqrt{1+\frac{4x^2}{\alpha^2}}} f_1(t, z) - e^{-\frac{\alpha}{2}(z+z_{s1})\sqrt{1+\frac{4x^2}{\alpha^2}}} f_2(t, z_{s1}) \right] \Bigg\}, \quad z > \max_s \{z_{s0}\}$$

$$\phi(z, t) = \phi_1(z, t) + \sum_{s=1}^N \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=-i}^i Y_{ij}^*(\theta_s, \varphi_s) Y_{ij}(\theta, \varphi) \left\{ \frac{4\pi I_{cs0} \tau_{s0}}{R^2 \alpha \sqrt{1+\frac{4x^2}{\alpha^2}}} e^{-\frac{\alpha}{2}(z-z_{s0})} \times \right.$$

$$\times \left[ e^{-\frac{\alpha}{2}(z-z_{s0})\sqrt{1+\frac{4x^2}{\alpha^2}}} f_1(t, z_{s0}) - e^{-\frac{\alpha}{2}(z+z_{s0})\sqrt{1+\frac{4x^2}{\alpha^2}}} f_2(t, z_{s0}) \right] - \frac{4\pi I_{cs0} \tau_{s1} e^{-\frac{\alpha}{2}(z-z_{s1})}}{R^2 \alpha \sqrt{1+\frac{4x^2}{\alpha^2}}} \times$$

$$\times \left[ e^{-\frac{\alpha}{2}(z-z_{s1})\sqrt{1+\frac{4x^2}{\alpha^2}}} f_1(t, z_{s1}) - e^{-\frac{\alpha}{2}(z+z_{s1})\sqrt{1+\frac{4x^2}{\alpha^2}}} f_2(t, z_{s1}) \right] \Bigg\}, \quad z < \min_s \{z_{s1}\}$$

$$f_1(t, z) = 1 - E_2 \left( \frac{\tau}{\tau(z)} \right), \quad E_2 \left( \frac{\tau}{\tau(z)} \right) = \int_1^{\infty} e^{-\frac{\tau}{\tau(z)} u} \frac{du}{u^2}, \quad \tau(z) = (4\pi\lambda(z))^{-1} \quad (2.7.28)$$

$$f_1(t, z_{si}) = 1 - E_2 \left( \frac{\tau}{\tau(z_{si})} \right), \quad \tau_{si} = \tau(z_{si}) = (4\pi\lambda(z_{si}))^{-1}, \quad i = 0, 1$$

$$f_2(t, z_{si}) = \tau_0 \int_0^t \tilde{v}_1 \left( \frac{t-\tau}{\tau_0} \right) f_3(\tau, z, z_{si}) d\tau, \quad i = 0, 1,$$

$$\tau_0 = (4\pi\lambda_0)^{-1}$$

$$f_3(\tau, z, z_{si}) = \int_0^t E_1\left(\frac{\tau-x}{\tau(z)}\right) E_1\left(\frac{x}{\tau(z_{si})}\right) \frac{dx}{\tau(z)\tau(z_{si})},$$

$$i = 0, 1 \quad E_1\left(\frac{\tau}{\tau(z)}\right) = \int_1^\infty e^{-\frac{\tau}{\tau(z)u}} \frac{du}{u}$$

$$\tilde{v}_1\left(\frac{t}{\tau_0}\right) = e^{-\frac{t}{\tau_0}} \frac{1}{\tau_0} v_1\left(\frac{t}{\tau_0}\right) \quad v_1\left(\frac{t}{\tau_0}\right) = e^{\frac{t}{\tau_0}} + \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{z}{\tau_0}}}{\ln^2 \bar{z} + \pi^2} dz$$

Потенциал электрического поля  $\varphi_1(t, z)$  определяет электрического поля в областях атмосферы, достаточно удаленных от грозových центров. Выражение для него может быть преобразовано к следующему виду:

$$\varphi_1(z, t) = \varphi_\infty(t)(1 - e^{-\alpha z}) + \Phi_1(z, t, \tau_0, \tau(z_{s0}), \tau(z_{s1})) \quad (2.7.29)$$

Потенциал ионосферы  $\varphi_\infty(t)$  в (2.7.29) определяется выражением:

$$\varphi_\infty(t) = -\frac{1}{4\pi R^2 \alpha} \sum_{s=1}^N \left\{ \frac{I_{cs0}}{\lambda_{s0}} \left( 1 - E_2\left(\frac{t}{\tau_{s0}}\right) \right) - \frac{I_{cs0}}{\lambda_{s1}} \left( 1 - E_2\left(\frac{t}{\tau_{s1}}\right) \right) \right\} \quad (2.7.30)$$

Функция  $\Phi_1(z, t, \tau_0, \tau(z_{s0}), \tau(z_{s1}))$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  с характерными временами электрической релаксации  $\tau_0, \tau_{s0}, \tau_{s1}$ .

В случае произвольной временной зависимости тока электризации грозowego генератора  $I_{cs}(t)$  получим, используя условие баланса полного тока в нижней атмосфере (2.7.10) и решение (2.7.28), для потенциала ионосферы выражение:

$$\varphi_{\infty}(t) = -\frac{1}{R^2 \alpha} \sum_{s=1}^N \left\{ \int_0^t I_{cs}(t) E_1\left(\frac{t-\tau}{\tau_{s0}}\right) d\tau - \int_0^t I_{cs}(t) E_1\left(\frac{t-\tau}{\tau_{s1}}\right) d\tau \right\} \quad (2.7.31)$$

Выражения для потенциала электрического поля в (2.7.28), описывающие электрическое поле, создаваемыми самими грозowymi генераторами, может быть преобразовано, если воспользоваться следующими соотношениями [Градштейн, Рыжик, 1971]:

$$\sum_{j=-i}^i Y_{ij}^*(\theta_s, \phi_s) Y_{ij}(\theta, \phi) = \frac{2i+1}{4\pi} P_i(\cos \gamma_s)$$

$$\frac{e^{-\frac{\alpha}{2} R_1}}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{r} r_s} \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) I_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha}{2} r_s\right) K_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha}{2} r\right) P_i(\cos \gamma_s) \quad (2.7.32)$$

где  $P_i(\cos \gamma_s)$  - полином Лежандра,  $I_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha r_s}{2}\right)$  - мо-

дифицированная функция Бесселя,  $K_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{\alpha r}{2}\right)$  - функция

Макдональда,  $R_1^2 = r^2 + r_s^2 - 2r r_s \cos \gamma_s$  - расстояние от источника до точки наблюдения,  $\gamma_s$  - угол между направлениями на зарядовый источник  $s$  и точкой наблюдения. При  $\frac{\alpha r_s}{2} \gg 1$ ,  $\frac{\alpha r}{2} \gg 1$  вторая формула в (2.7.32) с использованием асимптотических представлений для функции  $I_\nu(x)$  и  $K_\nu(x)$  [Градштейн, Рыжик, 1971]:

$$I_\nu(x) \cong \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad K_\nu(x) \cong \frac{\pi e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}} \quad (2.7.33)$$

может быть представлена в виде:

$$\frac{e^{\frac{\alpha}{2}R_1}}{R_1} \cong \frac{1}{\alpha r r_s} \sum_{i=0}^{\infty} e^{\frac{\alpha}{2}(r-r_s)} (2i+1) P_i(\cos \gamma_s) \quad (2.7.34)$$

Полагая  $r \approx R$ ,  $r_s \approx R$  и переходя в (2.7.34) от переменной  $r$  к переменной  $z$ :  $r = R + z$ ,  $r_s = R + z_s$  и  $z_s > 0$   $r_s = R - z_s$  для заряда-изображения, а также учитывая, что  $\frac{x}{\alpha} \ll 1$ ,  $x = \frac{\sqrt{i(i+1)}}{R}$ , получим вместо (2.7.28) следующее выражение, используя (2.7.32):

$$\begin{aligned} \phi(z, t) &= \phi_{\infty}(t) (1 - e^{-\alpha z}) + \\ \Phi_1(z, t, \tau_0, \tau_{s0}, \tau_{s1}) &+ \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs0}}{4\pi\lambda(z_{s0})} e^{-\frac{\alpha}{2}(z-z_{s0})} \times \\ &\times \left[ \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}R_{1s0}}}{R_{1s0}} f_1(t, z) - \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}R'_{1s0}}}{R'_{1s0}} f_2(t, z_{s0}) \right] - \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs0}}{4\pi\lambda(z_{s1})} e^{-\frac{\alpha}{2}(z-z_{s1})} \times \\ &\times \left[ \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}R_{1s1}}}{R_{1s1}} f_1(t, z) - \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}R'_{1s1}}}{R'_{1s1}} f_2(t, z_{s1}) \right], \quad z > \max_s \{z_{s0}\} \\ \phi(z, t) &= \phi_{\infty}(t) (1 - e^{-\alpha z}) + \Phi_1(z, t, \tau_0, \tau_{s0}, \tau_{s1}) + \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs0}}{4\pi\lambda(z_{s0})} e^{-\frac{\alpha}{2}(z-z_{s0})} \times \\ &\times \left[ \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}R_{1s0}}}{R_{1s0}} f_1(t, z_{s0}) - \frac{e^{-\frac{\alpha}{2}R'_{1s0}}}{R'_{1s0}} f_2(t, z_{s0}) \right] - \sum_{s=1}^N \frac{I_{cs0}}{4\pi\lambda(z_{s1})} e^{-\frac{\alpha}{2}(z-z_{s1})} \times \end{aligned}$$

$$\times \left[ \frac{e^{-\frac{\alpha}{2} R_{1s1}}}{R_{1s1}} f_1(t, z_{s1}) - \frac{e^{-\frac{\alpha}{2} R'_{1s1}}}{R'_{1s1}} f_2(t, z_{s1}) \right], z < \min_s \{z_{s1}\} \quad (2.7.35)$$

где

$$R_{1s0} = \sqrt{r^2 + r_{s0}^2 - 2r_{s0} r \cos \gamma_{s0}}, \quad R_{1s1} = \sqrt{r^2 + r_{s1}^2 - 2r_{s1} r \cos \gamma_{s1}},$$

$R'_{1s0}, R'_{1s1}$  - соответствующие расстояния для зарядов-изображений.

При  $t \rightarrow \infty$   $f_1(z, t)$ ,  $f_2(t, z_{si})$ ,  $f_1(t, z_{s1})$  стремятся к единице и решение (2.7.35) соответствует сумме хорошо известных стационарных решений, полученных в работе [Holser, Saxon, 1952].

В стационарном случае при  $t \rightarrow \infty$  из выражения (2.7.30) следует выражение для потенциала ионосферы  $\varphi_\infty$ :

$$\varphi_\infty^0 = \frac{1}{4\pi R^2 \alpha} \sum_{s=1}^N I_{cs0} \left( \frac{1}{\lambda_{s1}} - \frac{1}{\lambda_{s0}} \right) = \frac{1}{R^2 \alpha} \sum_{s=1}^N (|Q_{s1}| - Q_{s0})$$

$$Q_{s0} = \frac{I_{cs0}}{4\pi\lambda(z_{s0})}, \quad |Q_{s1}| = \frac{I_{cs0}}{4\pi\lambda(z_{s1})} \quad (2.7.36)$$

Как следует из полученных выше решений, распределение потенциала электрического поля в атмосфере, создаваемое грозowymi генераторами, состоит из двух частей: общей части, определяющей распределение электрического поля по всему земному шару и характеризуемой потенциалом ионосферы  $\varphi_\infty(t)$ , и локальной части, зависящей от распределения грозowych генераторов по земному шару. Выражение для  $\varphi_\infty(t)$  определяется из условия токового баланса (2.7.10), в которое подставляются полученные решения (2.7.14), (2.7.15), (2.7.26) и (2.7.28).

Как следует из (2.7.23) и (2.7.30), потенциал ионосферы  $\varphi_{\infty}(t)$  определяется током электризации грозовых генераторов  $I_{cs0}$ , который предполагается для всех генераторов, действующих в данный момент времени, одинаковым.

Получим оценки величины  $\varphi_{\infty}$  для стационарного случая (2.7.36). Как указывается в ряде работ, использующих экспериментальные данные, для поддержания потенциала ионосферы  $\varphi_{\infty}^0 = (250-300)$  кВ необходимо одновременное действие  $N = 2000$  гроз по всему земному шару (Mühleisen, 1977; Морозов, 1981).

Обычно в дипольной модели облака  $Q_{s1} < 0, Q_{s0} > 0$ . Поскольку  $\lambda(z_{s0}) > \lambda(z_{s1})$ , то отсюда следует, что  $|Q_{s1}| > Q_{s0}$  и  $\varphi_{\infty} > 0$ . При  $|Q_{s1}| - Q_{s0} = 100$  Кл для всех грозовых генераторов,  $\alpha = (0,2-0,3)$  км<sup>-1</sup>,  $R = 6,4 \times 10^8$  м,  $N = 2000$  из (36) получим  $\varphi_{\infty}^0 = (220-140)$  кВ, а при  $|Q_{s1}| - Q_{s0} = 150$  Кл получим  $\varphi_{\infty}^0 = (330-220)$  кВ, т.е. полученные значения потенциала ионосферы соответствуют экспериментальным значениям (Muleisen 1977). Выбираемые разности электрических зарядов не противоречат экспериментальным данным (Ruffledge et al., 1990) и модельным расчетам (Latham, Dye, 1989).

Процесс установления стационарного значения потенциала ионосферы  $\varphi_{\infty}^0$  при включении в момент  $t = 0$   $N$  грозовых генераторов рассчитывается с помощью выражения (2.7.29). На рис.13 (кривая 3) представлена кривая, описывающая этот процесс при  $\tau_0 = 600$  с,  $\tau(z_{s0}) = 30$  с,  $\tau(z_{s1}) = 181$  с (в расчетах предполагается, что все  $N$  источников имеют одинаковые времена электрической релаксации). Этот процесс установления определяется максимальным временем электрической релаксации  $\tau(z_{s1}) = 181$  с.



В то же время процесс установления вертикальной составляющей напряженности электрического поля  $E_z$  и потенциала электрического поля  $\phi(z, t)$  в областях, далеких от грозовых источников, определяется временем электрической релаксации вблизи земной поверхности  $\tau_0$ , поскольку  $\tau_0 > \tau(z_{s1})$ ,  $\tau_0 \gg \tau(z_{s0})$ . На рис.14 (кривая 4) представлена кривая, описывающая процесс установления стационарной напряженности электрического поля вблизи земной поверхности  $E_z^0(0) = -\alpha\phi_\infty^0$ . При этом, как следует из (2.7.29) изменение  $E_z(t, 0)$  со временем определяется выражением:

$$E_z(t, 0) = -\alpha\phi_\infty^0 \left( 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{\tau_0}(1+x)}}{x(\ln^2 x + \pi^2)} dx \right) \quad (2.7.37)$$

Как известно [Driscoll et al., 1992], наряду с квазистационарной стадией грозового облака, характеризуемой током электризации  $I_{cs0}$ , в некоторый момент времени облако переходит в разрядную стадию, характеризующуюся интенсивными внутриоблачными разрядами и разрядами облако-земля.

Для оценки внутриоблачных разрядов представим полный сторонний ток  $\tilde{I}_{cs}$  в следующем виде:

$$\tilde{I}_{cs} = I_{cs} - I_{cc} = I_{cs} - \sum_{n=0}^{N_s} \Delta Q_s \delta(t - nT_s), \quad (2.7.38)$$

где  $I_{cc}$  – ток внутриоблачной молнии, соответствующий s-грозовому генератору,  $\Delta Q_s$  – количество электрического заряда, нейтрализуемого при разряде,  $T_s$  – временной интервал между молниевыми разрядами.

Подставляя выражение для  $I_{cc}$  в выражение (2.7.38), получим выражение для вариации потенциала ионосферы,

обусловленный молниевыми токами внутриоблачных разрядов в s-грозовом генераторе:

$$\Delta\varphi_{\infty}^s(t) = \frac{1}{R^2\alpha} \left[ \sum_{n=0}^{N_s} \Delta Q_s E_1 \left( \frac{t - nT_s}{\tau_{s0}} \right) - \sum_{n=0}^{N_s} \Delta Q_s E_1 \left( \frac{t - nT_s}{\tau_{s1}} \right) \right] \quad (2.7.39)$$

Если рассмотреть разряд в момент  $T_s$ , то при  $t \rightarrow T_s$  ( $t > T_s$ ), используя асимптотическое представление для функции  $E_1 \left( \frac{t - T_s}{\tau_s} \right)$  [Градштейн, Рьжик, 1971]:

$$E_1 \left( \frac{t - T_s}{\tau_{s1}} \right) \approx -\gamma - \ln(t - T_s) + \ln \tau_s, \quad (2.7.40)$$

получим для одного внутриоблачного разряда

$$\Delta\varphi_{\infty}^s(t) \approx -\Delta Q_s \frac{(Z_{s0} - Z_{s1})}{R^2} \quad (2.7.41)$$

При  $\Delta Q_s > 0$  получим, что вклад внутриоблачных разрядов в потенциал ионосферы  $\varphi_{\infty}$  отрицателен, т.е. внутриоблачные разряды уменьшают потенциал ионосферы.

Если в момент  $T_s$  внутриоблачный разряд испытывают  $N'$  гроз ( $N' < N$ ), то вместо (2.7.41) имеем:

$$\Delta\varphi_{\infty}^{cc}(t) \approx -\sum_{s=1}^{N'} \Delta Q_s \frac{(Z_{s0} - Z_{s1})}{R^2} \quad (2.7.42)$$

Вклад  $\Delta\varphi_{\infty}^s(t)$  убывает с течением времени экспоненциально, т.к. при  $t > nT_s$

$$E_1 \left( \frac{t - nT_s}{\tau_{si}} \right) \approx \frac{\tau_{si}}{t - nT_s} e^{-\frac{t - nT_s}{\tau_{si}}}, \quad i = 0, 1 \quad (2.7.43)$$

В то же время разряды облако-земля при нижнем отрицательном заряде увеличивают потенциал ионосферы.

Для того чтобы оценить это влияние, представим молниевый ток при разрядах этого вида в следующем виде:

$$I_{cg} = - \sum_{n=0}^{N_s} \Delta Q_s \delta(t - nT_s) [\theta(z) - \theta(z - z_{s1})] \quad (2.7.44)$$

Используя (2.7.44), получим для вариаций потенциала ионосферы выражение:

$$\Delta \varphi_{\infty}^{cg}(t) = \sum_{s=1}^N \sum_{n=0}^{N_s} \Delta Q_s \frac{1}{\alpha R^2} \left[ E_1 \left( \frac{t - nT_s}{\tau_0} \right) - E_1 \left( \frac{t - nT_s}{\tau_{s1}} \right) \right] \quad (2.7.45)$$

Предположим, что в некоторый момент времени все  $N$  гроз испытывают один разряд облако-земля. Тогда в этот момент времени ( $t = T_0$ ):

$$\Delta \varphi_{\infty}^{cg} = \sum_{s=1}^N \Delta Q_s \frac{z_{s1}}{R^2}, \quad (2.7.46)$$

а при  $t - T_0 = \tau_0$

$$\Delta \varphi_{\infty}^{cg}(t) = \sum_{s=1}^N \Delta Q_s \frac{1}{\alpha R^2} \left[ E_1(1) - E_1 \left( \frac{\tau_0}{\tau_{s1}} \right) \right] \quad (2.7.47)$$

Для  $\Delta Q_s = 10$  Кл,  $\alpha = 0,3$  км<sup>-1</sup>,  $N = 2000$ ,  $\tau_0 = 600$  с,  $\tau_{s1} = 100$  с,  $z_{s1} = 6$  км получим, что при  $t = T_0$   $\Delta \varphi_{\infty}^{cg} = 26,4$  кВ, а затем  $\Delta \varphi_{\infty}^{cg}(t)$  убывает и при  $t - T_0 = \tau_0$   $\Delta \varphi_{\infty}^{cg}(\tau_0) = 3,2$  кВ.

Из приведенных оценок следует, что вклад разрядов облако-земля в потенциал ионосферы максимален в момент разряда, а затем убывает по времени и в момент времени, равном времени электрической релаксации, вблизи земной поверхности составляет 1% от стационарного значения потенциала ионосферы  $\varphi_{\infty}$ .

На рис.14 (кривые 1 и 2) представлены кривые, иллюстрирующие процесс изменения со временем вариации потенциала ионосферы, обусловленных внутриоблачными разрядами и разрядами облако-земля. Как следует из расчетов и графиков, уменьшение скачков, обусловленных внут-

риоблачными разрядами, происходит с характерным временем  $\tau$  ( $z_{s1}$ ), а скачки потенциала ионосферы, возникающие вследствие разрядов облако-земля, спадают экспоненциально с характерным временем  $\tau_0$ .

Рассмотренное решение задачи об установлении стационарного электрического состояния в атмосфере с экспоненциальной электрической проводимостью при включении стороннего тока заряжения для  $N$  источников в начальный момент времени  $t = 0$  показывает наличие трех стадий в установлении стационарного электрического поля атмосферы. На первой стадии эффекты, связанные с электрической проводимостью атмосферы, не играют роли, и имеет место обычная кулоновская задача. На второй стадии рост поля происходит в сферической полости с внешней границей  $h(t) = (1/\alpha) \ln \tau_0/t$ , разделяющей область атмосферы, где течет электрический ток проводимости, от области, где электрической проводимостью можно пренебречь и на которой время электрической релаксации равно времени, прошедшему с момента включения источников. На третьей стадии, начиная с момента времени  $t > \tau_0$ , влияние электрической проводимости существенно для всей атмосферы и установление стационарного электрического поля атмосферы определяется электрическими токами проводимости. С помощью полученных решений и используя условие баланса полного электрического тока, состоящего из тока смещения и тока проводимости, получено выражение для потенциала атмосферы, определяющего также электрическое поле в областях атмосферы, где грозовой источник отсутствуют.

Используя выражение для потенциала ионосферы, рассмотрено влияние внутриоблачных разрядов и разрядов облако-земля на вариации  $\phi_\infty(t)$ . Внутриоблачные разряды при обычной полярности грозового облака (по-

ложительный верхний заряд и отрицательный нижний заряд) уменьшают потенциал ионосферы. В то же время разряды облако-земля увеличивают потенциал ионосферы. Проведенные численные оценки показывают, что вклад в потенциал ионосферы составляет 1-10% от квазистационарного значения этой величины. Из этого можно сделать вывод, что квазистационарная стадия жизни грозового генератора является определяющей в генерации электрического поля атмосферы и эта стадия определяется потенциалом ионосферы  $\varphi_{\infty}$  и токами электризации грозового генератора  $I_{cs}(t)$ , высотой зарядовых центров и профилем электрической проводимости атмосферы. Этот вывод подтверждается экспериментальными исследованиями грозовых облаков [Blakeslee et al., 1989].

Таким образом в настоящем приложении получено решение задачи об установлении стационарного электрического состояния в атмосфере с экспоненциальной электрической проводимостью при включении в момент времени  $t = 0$   $N$  грозовых токовых генераторов.

На основе этого решения установлено наличие трех стадий в установлении стационарного состояния, связанных с различной ролью электрической проводимости атмосферы в ходе этого процесса.

С помощью полученных решений и условия баланса электрических токов в атмосфере выведено выражение для потенциала ионосферы, связанного с проводящими свойствами атмосферы, токовыми характеристиками грозовых генераторов и их числом. Даны численные оценки величины потенциала ионосферы, показывающие ее непротиворечивость с экспериментальными данными и модельными расчетами.

Проведены оценки влияния внутриоблачных разрядов и разрядов облако-земля на потенциал ионосферы. По-

казано, что внутриоблачные разряды уменьшают потенциал ионосферы. В то же время разряды облако-земля увеличивают величину этого параметра. Это увеличение составляет (1-10)% от квазистационарного значения потенциала ионосферы, т.е. квазистационарная стадия жизни грозового генератора является определяющей в формировании электрического поля атмосферы.

Приложение 2.8 Расчет электрических полей грозовых облаков, необходимых для инициирования разрядов облако-верхние слои атмосферы.

Как свидетельствуют экспериментальные данные, полученные с американских космических кораблей, в наземных и самолетных наблюдениях, грозовая деятельность на территории США сопровождается разрядами грозовое облако-верхние слои атмосферы (Franz et al, 1990; Winckler, 1995; Winckler et al, 1996; Vaughan et al, 1992; Sentmann et al, 1995; Wescott et al, 1995). Выделяют две разновидности разрядов этого типа: спрайты и джеты, соответствующие различным интервалам высот в атмосфере [Sentmann et al, 1995; Wescott et al., 1995). Так джеты могут достигать высот 40-50 км и являются движущимися наверх со скоростью 100 км/с светящимися голубыми образованиями. Спрайты простираются от 30 до 70-80 км и излучают в основном в длинноволновой “красной” области спектра. Разрядное свечение наблюдалось также для более низких высот 14-20 км (Franz et al., 1990). Такое различие в проявлении разрядных свечений обусловлено, по-видимому, различной интенсивностью грозовых зон. По данным, приведенным в работе (Winckler et al., 1995), разряды облако-ионосфера состояли из ярких вертикальных полос, простирающихся от 50 до 80 км по высоте с разветвлениями уменьшающейся интенсивности. Наиболее интенсивные разряды облако-ионосфера наблюдались одновременно с

регистрируемыми атмосфериками в частотном диапазоне 300 Гц-12 кГц, но при менее интенсивных разрядах этого типа электромагнитное излучение не зафиксировано. Некоторые разряды облако-ионосфера наблюдались одновременно с разрядами облако-земля. Продолжительность оптических изображений этих разрядов была меньше 1/60 с. Многие из разрядов облако-ионосфера наблюдались с борта самолета, космических кораблей типа "Шаттл" (Vaughan et al., 1992) Большое количество наблюдений разрядов, зафиксированных с помощью наземной телевизионной аппаратуры, было проведено в США в штате Колорадо (Winckler et al., 1996)

Как следует из наблюдений (Winckler et al., 1995), разряды облако-ионосфера связаны с грозowymi комплексами, значительными по горизонтальной протяженности, и не наблюдались над локальными грозами. Эти разряды имеют разнообразные формы и размеры: от изолированных небольших клочковатых областей с вертикальными размерами от нескольких километров до 60 км и диаметрами, составляющими несколько десятком километров. Яркость наиболее интенсивных разрядов облако-ионосфера сравнима с яркостью полярных сияний и составляет 50-100 kR. Менее интенсивные разряды имеют яркость около 10 kR.

Существует два подхода к интерпретации разрядов названного типа.

В первом подходе предполагается, что появление рассматриваемых разрядов обусловлено локальным взаимодействием электромагнитного излучения разрядов облако-земля с верхней атмосферой. Работы [Taranenko et al., 1993; Taranenko et al., 1993) посвящены рассмотрению задачи о взаимодействии электромагнитного излучения с нижней ионосферой, причем (Taranenko et al., 1993) посвящена нагреву и ионизации этой части атмосферы, а ра-

бота (Taranenko et al., 1993) - задаче о возбуждении оптического излучения. Хотя в общем это воздействие в указанных работах не связывается с наблюдаемыми типами разрядов облако-ионосфера и рассматривается в интервале высот 80-95 км.

Во втором подходе разряды облако-ионосфера возникают вследствие реакции верхней атмосферы на разряды облако-облако, облако-облако и определяются электростатическим электрическим полем грозового облака. Как и в обычном разряде, предполагается, что рассматриваемые разряды вызываются ускорением электронов в атмосфере электрическим полем грозового облака с последующей ионизацией нейтральной атмосферы в послеразрядной стадии. Этот подход, по-видимому, находится в согласии со многими наблюдениями. В работе (Pasko et al., 1996) предполагается, что джеты по своей природе аналогичны разряду облако-земля. В то же время для разрядов этого типа, как показали наблюдения (Franz et al., 1990), характерно более медленное время достижения максимума оптического излучения, составляющее  $10^{-2}$  с.

Если джеты считаются возникающими при обычной полярности грозового облака, когда вверху находится положительный электрический заряд, а в основании облака отрицательный заряд (Wescott et al., 1995), то спрайты, как показывают наблюдения (Winckler et al., 1996), возникают при обратной полярности крупномасштабной грозовой системы. Предварительная теоретическая интерпретация спрайтов на основе электростатической теории содержится в работе (Pasko et al., 1995), в которой для расчета электрического поля грозового облака в верхней атмосфере используется численный метод.

Таким образом важной задачей при интерпретации разрядов облако-ионосфера на основе электростатической



теории является расчет электрического поля грозового облака, создаваемого им в верхней атмосфере в послеразрядной стадии. В настоящем приложении работе эта задача решается аналитическим методом для наиболее простых геометрий начального распределения облачного заряда, остающегося после разряда облако-земля для атмосферы с экспоненциальным ростом электрической проводимости. Полученные аналитические решения для точечного электрического заряда и протяженного в горизонтальной плоскости электрического заряда используются для оценок напряженности электрических полей и зарядов, необходимых для инициирования разряда грозовое облако-верхние слои атмосферы.

На основе предположения, что электрические разряды облако-верхние слои атмосферы вызываются электрическими полями, создаваемыми грозовыми облаками при разряде нижнего заряда облака, положительного и отрицательного, на землю, рассматривается задача об электрическом поле, создаваемом в атмосфере грозвым облаком после разряда облако-земля.

При молниевом разряде облако-земля в облаке за характерное время  $\sim 10^{-4}$ - $10^{-3}$  с формируется монополярная зарядовая система, возникает всплеск электромагнитного излучения (Uman, 1987). В настоящем приложении влияние электромагнитного излучения не рассматривается, (Pasko et al., 1995), т.к. считается, что на высотах 30-50 км оно не может вызывать значительную ионизацию и нагрев электронов. Гораздо более существенными являются электростатические поля, которые возникают после молниевых разрядов облако-земля внутри облачных разрядов, причем в настоящей работе рассматривается влияние разрядов первого типа.

Как показано в (Holser, Saxon, 1952), в квазистационарной стадии эволюции грозового облака важную роль в распределении электрических полей грозовых облаков играет растущая по высоте электрическая проводимость атмосферы, которая экранирует эти электрические поля. Но когда происходят молниевые разряды, то на определенном временном интервале электрическая проводимость атмосферы уже не оказывает влияния на распределение электрического поля заряда облака, оставшегося после разряда (Морозов, 1996). Поле является кулоновским и создаются условия для инициирования разряда облако-ионосфера. Это поле затем уменьшается вследствие диссипации, обусловленной электрической проводимостью.

Для расчета такого поля и его временных измерений предполагаются выполненными следующие условия:  $T \gg L/c$ ,  $T \gg 4\pi\lambda L^2/c^2$ , где  $T$ -характерное время,  $L$ -характерный размер системы,  $c$ -скорость света,  $\lambda$ -характерное значение электрической проводимости атмосферы. Первое неравенство означает условие пренебрежения запаздыванием потенциалов в уравнениях Максвелла, второе неравенство есть условие пренебрежения индукционными токами. Тогда система уравнений, описывающая распределение электрического поля, создаваемого зарядом в облаке, оставшимся в нем после разряда облако-земля, и его эволюцию во времени, имеет следующий вид в потенциальном приближении ( $\text{rot}\mathbf{E}=0$ ):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} - \nabla(\lambda \nabla \varphi) = 0, \quad \Delta \varphi = -4\pi\rho \quad (2.8.1)$$

Начальные и граничные условия задачи представляются в виде

$$\varphi|_{z=0} = 0, \quad \varphi|_{|\vec{r}|} = 0, \quad \Delta \varphi|_{t=0} = -4\pi\rho_s(\vec{r}), \quad |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (2.8.2)$$

где  $\rho$  - плотность электрического заряда атмосферы,  $\rho_s(r)$  - плотность электрического заряда в облаке в начальный момент времени (предполагается, что заряд противоположного знака удаляется на землю вследствие молниевых разрядов),  $\phi$ ,  $\vec{E}$  - потенциал и напряженность электрического поля атмосферы,  $\lambda$  - электрическая проводимость атмосферы, ось  $z$  направлена перпендикулярно земной поверхности.

Для электрической проводимости атмосферы будем использовать представление (Атмосфера. Справочник.....1991):

$$\lambda = \lambda_0 e^{\alpha z} \quad (2.8.3)$$

где:  $\alpha = 0.2 \text{ км}^{-1}$ ,  $\lambda_0$  - значение электрической проводимости вблизи земной поверхности.

Обоснование использования уравнений (2.8.1) для исследования электрической релаксации в атмосфере после разряда облако-земля дано в (Морозов, 1995) для случая, когда  $\lambda$  постоянна в атмосфере. Полученное решение для потенциала электрического поля  $\phi$  на основе системы уравнений Максвелла показывает, что при  $T \sim \tau_\lambda = (4\pi\lambda)^{-1} \gg L/c$ ,  $T \gg (4\pi\lambda)L^2/c^2$  можно считать процесс прохождения электромагнитного импульса и диффузионный (индукционный) процессы почти мгновенными, а сам процесс изменения электрического поля определяется временем электрической релаксации  $\tau_\lambda$ . Это должно иметь место и в случае изменения  $\lambda$  в соответствии с (2.8.3) в области, где  $\tau_\lambda(z) \gg L/c$ ,  $\tau_\lambda(z) \gg (4\pi\lambda)L^2/c^2$ . Как показывают оценки, эти неравенства выполняются в области  $0 < z < 70 \text{ км}$ , в то же время в ночных условиях верхняя граница может увеличиваться до 80 км (Hale, 1984).

Будем считать начальное распределение плотности электрического заряда  $\rho_s(r)$  осесимметричным и в цилин-

дической системе координат с осью  $z$ , совпадающей с осью симметрии системы, имеющим представление:

$$\begin{aligned} \rho_s(r, z) &= Q_{1s} \delta(z - z_0), 0 \leq r \leq a \\ \rho_s(r, z) &= 0, r > a \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

где  $\delta$  ( $u$ )-дельта-функция Дирака.

Распределение (2.8.4) выбрано с целью получения наглядного аналитического решения, описывающего распределение напряженности электрического поля в зависимости от высоты и времени. Хотя можно также рассмотреть более сложный случай гауссова осесимметричного распределения  $\rho_s \sim \exp[-(z-z_0)^2/a^2 + r^2/a^2]$  (Pasko et al., 1995; Морозов, 1996). К тому же характерные вертикальные размеры облачного заряда ( $\sim 1$  км) гораздо меньше высот, где происходит разряд облако-верхние слои атмосферы (Marshall et al., 1996).

Для расчета электрического поля в верхних слоях атмосферы, создаваемого начальным распределением электрического заряда (2.8.4), будем использовать уравнение для потенциала электрического поля, следующего из системы уравнений (2.8.1):

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi + 4\pi \nabla (\lambda \nabla \varphi) = 0 \quad (2.8.5)$$

Решение уравнения (2.8.5) при краевых условиях (2.8.2) может быть получено следующим образом. В цилиндрической системе координат  $(r, \phi, z)$  в предположении осевой симметрии ( $\partial/\partial\phi = 0$ ) уравнение (2.8.5) представляется в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + 4\pi\lambda\right) \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial \lambda}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (2.8.6)$$

Применяя к уравнению (2.8.6) последовательно преобразования Фурье-Бесселя и Лапласа (Диткин, Прудников, 1974):

$$\widehat{f}(x, p, z) = \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int f(r, z, t) J_0(xr) r dr \quad (2.8.7)$$

$$f(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} dp \int_0^{\infty} \widehat{f}(x, p, z) J_0(xr) x dx$$

получим уравнение для  $\widehat{\varphi}$  при  $\lambda = \lambda_0 e^{az}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \widehat{\varphi}}{dz^2} + \frac{4\pi\alpha\lambda_0 e^{az}}{p + 4\pi\lambda_0 e^{az}} \frac{d\widehat{\varphi}}{dz} - x^2 \widehat{\varphi} = \\ = \frac{1}{p + 4\pi\lambda_0 e^{az}} \int_0^{\infty} \Delta\varphi|_{t=0} J_0(xr) r dr \end{aligned} \quad (2.8.8)$$

где  $J_0(xr)$  - функция Бесселя нулевого порядка.

Граничные условия для решения уравнения (2.8.8) имеют вид:

$$\widehat{\varphi}|_{z=0} = 0, \quad \widehat{\varphi}|_{z \rightarrow \infty} = 0 \quad (2.8.9)$$

Общее решение (2.8.8) находится с помощью метода Лангранжа (Камке, 1971) и при  $|(1/p\tau_0)e^{az}| < 1$  оно представляется в следующем виде:

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} = C_1 y_1 + C_2 y_2 - y_1 \int_0^z \frac{\bar{f}(z')}{\Delta(z')} y_2 dz' + y_2 \int_0^z \frac{\bar{f}(z')}{\Delta(z')} y_1 dz' \\ y_1 = \left(-\frac{1}{p\tau_0} e^{az}\right)^{\bar{\alpha}_1} F(\bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2, \gamma, -\frac{1}{p\tau_0} e^{az}) \\ y_2 = \left(-\frac{1}{p\tau_0} e^{az}\right)^{1-\gamma_1+\bar{\alpha}_1} F(\bar{\alpha}_2 - \gamma_1 + 1, \bar{\beta}_2 - \gamma_1 = \\ = 1, 2 - \gamma_1, -\frac{1}{p\tau_0} e^{az}) \end{aligned}$$

$$\bar{f}(z) = \frac{1}{p + 4\pi\lambda_0 e^{\alpha z}} \int \Delta\varphi|_{t=0} J_0(xr) r dr,$$

$$\Delta(z) = y_1 \frac{dy_2}{dz} - y_2 \frac{dy_1}{dz}$$

$$\bar{\alpha}_1 = x/\alpha, \bar{\alpha}_2 = x/\alpha + (1 + \sqrt{1 + 4x^2/\alpha^2})/2, \bar{\beta}_2 = \\ = x/\alpha + \sqrt{1 - 4x^2/\alpha^2}/2$$

$$\gamma_1 = 1 + 2x/\alpha, \tau_0 = (4\pi\lambda_0)^{-1} \quad (2.8.11)$$

где:  $F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, u)$ - гипергеометрическая функция,  $C_1, C_2$ - постоянные

Функция  $f(z)$  в случае представления для начальной плотности электрического заряда в виде (2.8.4) сводится к выражению

$$f(z) = -\frac{4\pi Q_{1s}}{x(p + 4\pi\lambda_0 e^{\alpha z})} J_1(ax) \delta(z - z_0) \quad (2.8.12)$$

где  $J_1(ax)$ -функция Бесселя первого порядка.

При  $a \rightarrow 0$ , вводя полный электрический заряд  $Q_1 = Q_{1s}\pi a^2$  и используя приближенное значение для функции  $J(ax) \cong 1/2(ax)$ , получим для  $f(x)$ :

$$\bar{f}(z) = -\frac{2Q_1}{p + 4\pi\lambda_0 e^{\alpha z}} \delta(z - z_0) \quad (2.8.13)$$

Выражение (2.8.13) соответствует точечному электрическому заряду  $Q_1$ , находящемуся в точке  $z_0$ .

Малость аргумента  $|(1/p\tau_0)e^{\alpha z}| \ll 1$  соответствует большим значениям аргумента  $|p|$  или малым значениям времени  $t$ , прошедшим от момента появления в облаке монополюсного электрического заряда вследствие разряда облако-земля. При фиксированном значении параметра  $p$  ввиду экспоненциального роста электрической проводимости  $\lambda$  в атмосфере существует значение вертикальной координаты  $z =$

$z^*$ , при которой выполнено условие:  $|(1/p\tau_0)e^{\alpha z^*}| = 1$  и решение (10) должно переходить в область, где  $|(1/p\tau_0)e^{\alpha z}| > 1$ . Для выполнения этого перехода воспользуемся для аналитического продолжения гипергеометрической функции  $F(a, b, c, u)$  из области  $|u| < 1$  в область  $u > 1$  (Бейтмен, Эрдейи 1973):

$$F(a, b, c, u) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-u)^{-a} \times F(a, 1+a-c, 1+a-b, 1/u) + \frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-u)^{-b} \times F(b, 1+b-c, 1+b-a, 1/u) \quad (2.8.14)$$

где  $\Gamma(w)$ -гамма-функция.

Используя выражения (2.8.13) и (2.8.14) и граничные условия (2.8.9) для определения постоянных  $C_1$  и  $C_2$ , получим следующие выражения, определяющие образ потенциала электрического поля  $\phi$  в областях  $z_0 \leq z \leq h$  (p) и  $h < z \leq \infty$ :

$$\hat{\phi}_1 = \frac{\bar{Q}_1}{xp} [e^{-x(h(p)-z)} F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, -\frac{1}{p\tau_0} e^{\alpha z}) - a_2 e^{x(h(p)-z)} F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, -\frac{1}{p\tau_0} e^{\alpha z})] \Delta_1 \quad z_0 \leq z \leq h \text{ (p)} \quad (2.8.15)$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{2\bar{Q}_1}{\alpha p} (-1)^{x/\alpha+1} \frac{\Gamma(\alpha_1 - \frac{x}{\alpha})(e^{-\alpha(z-h(p))})^{\alpha_1}}{\Gamma(1 - \frac{2x}{\alpha})\Gamma(1 + \sqrt{1 + 4x^2/\alpha^2})} \times F(\tilde{\alpha}, \bar{\alpha}, 1 + \alpha_1 - \tilde{\alpha}_1, -p\tau_0 e^{\alpha z}) \Delta_1, \quad h(p) \leq z \leq \infty$$

$$\Delta_1 = \frac{e^{xz_0} F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, -\frac{1}{p\tau_0} e^{\alpha z_0}) F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, -\frac{1}{p\tau_0})}{e^{-xh(p)} F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, -\frac{1}{p\tau_0}) - a_2 e^{xh(p)} F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, -\frac{1}{p\tau_0})} - \frac{e^{-xz_0} F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, -\frac{1}{p\tau_0}) F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, -\frac{1}{p\tau_0} e^{\alpha z_0})}{e^{-xh(p)} F(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, -\frac{1}{p\tau_0}) - a_2 e^{xh(p)} F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, -\frac{1}{p\tau_0})} \quad (2.8.16)$$

$$h(p) = \alpha^{-1} \ln p\tau_0, a_2 =$$

$$= \Gamma(1+2x/\alpha) \Gamma^2(\alpha_1 - x/\alpha) / \Gamma(1-2x/\alpha) \Gamma^2(\alpha_1 + x/\alpha)$$

$$\alpha_1 = (1 + \sqrt{1+4x^2/\alpha^2})/2, \tilde{\alpha}_1 = (1 - \sqrt{1+4x^2/\alpha^2})/2, \tilde{\alpha} =$$

$$\tilde{\alpha}_1 + x/\alpha, \tilde{\beta} = \tilde{\alpha}_1 + x/\alpha$$

$$\tilde{\gamma} = 1 + 2x/\alpha, \bar{\alpha} = \alpha_1 - x/\alpha, \bar{\beta} =$$

$$\bar{\alpha}_1 - x/\alpha, \bar{\gamma} = 1 - 2x/\alpha, \bar{Q}_1 = 2Q_1 J_1(\alpha x) / \alpha x \setminus$$

Получим из (2.8.15) и (2.8.16) решение, соответствующее условию «то вблизи земной поверхности время электрической релаксации  $\tau_0 \approx 600$  с). Используя условие  $x \ll \alpha$ , что соответствует расстояниям  $\alpha z \gg 1$ ,  $\alpha h(t) \gg 1$  ( $h(t) = \alpha^{-1} \ln \tau_0/t$ ), а также считая выполненными неравенства  $|1/p\tau_0| \ll 1$ ,  $|(1/p\tau_0)e^{\alpha z}| \ll 1$  и используя представление для гипергеометрической функции (Камке, 1971; Градштейн, Рыжик, 1971):

$$F(1, n, 1, -\frac{1}{p\tau_0} e^{\alpha z}) = (1 + \frac{1}{p\tau_0} e^{\alpha z})^{-n} \quad (2.8.17)$$

$$F(1, 1, 2, -p\tau_0 e^{-\alpha z}) = \frac{\ln(1 + p\tau_0 e^{-\alpha z})}{p\tau_0 e^{-\alpha z}} \quad (2.8.18)$$



получим для образов потенциала электрического поля:

$$\widehat{\phi}_1 = \frac{2Q_1}{xp} \frac{shxz_0}{shxh(p)} shx[h(p) - z + \frac{1}{\alpha} \ln(1 + e^{-\alpha(h(p)-z)})],$$

$$z_0 \leq z \leq h(p) \quad (2.8.19)$$

$$\widehat{\phi}_2 = \frac{2\overline{Q}_1}{\alpha p} \frac{shxz_0}{shxh(p)} \ln(1 + e^{-\alpha(z-h(p))}) \quad h(p) \leq z < \infty$$

$$(2.8.20)$$

Переходя от образов преобразований Фурье-Бесселя и Лапласа (2.8.19), (2.8.20) к оригиналам (2.8.7), используя в асимптотическом случае  $\ln(\tau_0/t) \gg 1$  соотношение (Диткин, Прудников, 1974):

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{e^{pt}}{p} g(\ln p \tau_0) dp = g\left(\ln \frac{\tau_0}{t}\right) \quad (2.8.21)$$

получим для потенциалов электрического поля  $\phi_1$  и  $\phi_2$  представления:

$$\phi_1 = 4Q_1 \int_0^{\infty} \frac{J_1(ax)}{ax} \frac{shxz_0}{shxh(t)} shx[h(t) - z +$$

$$\frac{1}{\alpha} \ln(1 + e^{-\alpha(h(t)-z)})] J_0(xr) x dx, z_0 \leq z \leq h(t) \quad (2.8.22)$$

$$\phi_2 = 4Q_1 / \alpha \int_0^{\infty} \frac{J_1(ax)}{ax} \frac{shxz_0}{shxh(t)} \ln[1 + e^{-\alpha(z-h(t))}] \times$$

$$J_0(xr) x dx, h(t) < z < \infty \quad (2.8.23)$$

где:  $h(t) = \alpha^{-1} \ln \frac{\tau_0}{t}$ .

Из выражений (2.8.22) и (2.8.23) найдем выражения для вертикальной составляющей напряженности электрического поля  $E_z$  в областях  $z_0 \leq z \leq h(t)$  и  $h(t) < z < \infty$ :

$$E_{1z} = -\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = 4Q_1 \int_0^{\infty} \frac{J_1(ax)}{ax} \frac{shxz_0}{shxh(t)} chx[h(t) - z + \frac{1}{\alpha} \ln(1 + e^{-\alpha(h(t)-z)})] \times$$

$$\frac{J_0(xr)}{1 + e^{-\alpha(h(t)-z)}} xdx, \quad z_0 \leq z < h(t)$$

$$E_{2z} = 4Q_1 \frac{e^{-\alpha(z-h(t))}}{1 + e^{-\alpha(z-h(t))}} \int \frac{J_1(ax)}{ax} \frac{shxz_0}{shxh(t)} J_0(xr) xdx,$$

$$h(t) \leq z < \infty \quad (2.8.25)$$

Отметим предельные случаи выражений (2.8.22) и (2.8.23). При  $a \rightarrow \infty$ , что фактически означает выполнение неравенств:  $a/h(t) \ll 1, a/z_0 \ll 1$ , из этих выражений получим представления для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  в случае точечного заряда:

$$\varphi_1 = 2Q_1 \int_0^{\infty} \frac{shxz_0}{shxh(t)} shx[h(t) - z + \frac{1}{\alpha} \ln(1 + e^{-\alpha(h(t)-z)})] J_0(xr) xdx,$$

$$z_0 \leq z \leq h(t) \quad (2.8.26)$$

$$\varphi_2 = \frac{2Q_1}{\alpha} \int_0^{\infty} \frac{shxz_0}{shxh(t)} \ln(1 + e^{-\alpha(z-h(t))}) J_0(xr) xdx, \quad h(t) < z < \infty$$

$$(2.8.27)$$

Другим предельным случаем выражений (2.8.22) и (2.8.23) является случай больших  $a$ . Произведя в интегралах (2.8.22) и (2.8.23) замену переменной  $ax = y$  и используя условия  $z_0/a \ll 1, h(t)/a \ll 1$  и полагая  $J_0(xr/a) \approx 1$  при  $r \ll a$  и

$$\int_0^{\infty} J_1(y) dy = 1 \text{ имеем:}$$

$$\varphi = \frac{4\pi Q_{1s}}{\alpha} \frac{z_0}{h(t)} \ln(1 + e^{-\alpha(z-h(t))}) \quad (2.8.28)$$

Решение (2.8.28) также следует из решения одномерного варианта уравнения (2.8.5) при  $a \rightarrow \infty$ . В одномерном случае уравнение (2.8.5) записывается в следующем виде:

$$\frac{\partial^3 \varphi}{\partial t \partial z^2} + 4\pi\lambda_0 e^{\alpha z} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + 4\pi\lambda_0 \alpha e^{\alpha z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad (2.8.29)$$

Решение (2.8.29) можно получить непосредственным применением преобразования Лапласа с использованием следующих граничных и начальных условий:

$$\varphi|_{z=0} = 0, \quad \varphi|_{z \rightarrow \infty} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \Big|_{t=0} = -4\pi Q_{1s} \delta(z - z_0) \quad (2.8.30)$$

Вычислим напряженности электрического поля, соответствующие достаточно протяженному в горизонтальной плоскости облачному электрическому заряду ( $a \gg z_0, a \gg h(t)$ ) и точечному распределению облачного заряда ( $a \ll z_0, a \ll h(t)$ ). В первом случае имеем из (2.8.28):

$$E_z = 4\pi Q_{1s} \frac{z_0}{h(t)} \frac{e^{-\alpha(z-h(t))}}{1 + e^{-\alpha(z-h(t))}} = 4\pi Q_{1s} \frac{\alpha z_0 e^{-\alpha z}}{\ln \frac{\tau_0}{t}} \frac{\tau_0 / t}{1 + e^{-\alpha \frac{\tau_0}{t}}} \quad (2.8.31)$$

В случае точечного распределения заряда вычислим напряженность электрического поля при  $r = 0$ . Из выражений (2.8.26) и (2.8.27) найдем:

$$E_{1z} = \frac{2Q_1}{1 + e^{-\alpha(h(t)-z)}} \int_0^{\infty} \frac{shxz_0}{shxh(t)} chx \left[ h(t) - z + \frac{1}{\alpha} \ln(1 + e^{-\alpha(h(t)-z)}) \right] x dx$$

,  $z_0 \leq z < h(t)$  (2.8.32)

$$E_{2z} = 2Q_1 \frac{e^{-\alpha(z-h(t))}}{1 + e^{-\alpha(z-h(t))}} \int \frac{shxz_0}{shxh(t)} x dx, \quad h(t) \leq z < \infty \quad (2.8.33)$$

Для вычисления интеграла в выражении (2.8.32) представим числитель в подинтегральном выражении в следующем виде:

$$\operatorname{sh}x z_0 \operatorname{ch}x(h(t) - \bar{z}) = \{\operatorname{sh}x[h(t) - (\bar{z} - z_0)] + \operatorname{sh}x[(z + z_0) - h(t)]\}$$

$$\bar{z} = z - 1/\alpha \ln(1 + e^{-\alpha(h(t)-z)}) \quad (2.8.34)$$

и воспользуемся следующим интегралом (Градштейн, Рыжик, 1971)

$$\int_0^{\infty} x^{\mu-1} \frac{\operatorname{sh}\beta x}{\operatorname{sh}\gamma x} dx = \frac{\Gamma(\mu)}{(2\gamma)^\mu} \left\{ \zeta\left[\mu, \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right)\right] - \zeta\left[\mu, \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\beta}{\gamma}\right)\right] \right\} \quad (2.8.35)$$

где  $\zeta(z, q)$  – дзета функция Римана, определяемая рядом (Бейтмен, Эрдейи, 1973)

$$\zeta(z, q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(q+n)^z} \quad (2.8.36)$$

Используя (2.8.34) и (2.8.36), получим следующее выражение для вертикальной составляющей напряженности электрического поля при

$$z_0 \leq z < h(t):$$

$$E_{1z} = \frac{Q_1}{1 + e^{-\alpha(h(t)-z)}} \left\{ \frac{1}{(\bar{z} - z_0)^2} - \frac{1}{(\bar{z} + z_0)^2} + \frac{1}{4h(t)^2} \times \right. \\ \times \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(n + u_1(\bar{z}))^2} - \frac{1}{(n + u_2(\bar{z}))^2} \right) - \right. \\ \left. \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(n - u_1(\bar{z}))^2} - \frac{1}{(n - u_2(\bar{z}))^2} \right) \right] \right\} \quad z_1 < z < h(t) \quad (2.8.37)$$

где:  $u_1(\bar{z}) = (\bar{z} - z_0)/2h(t)$ ,  $u_2(\bar{z}) = (\bar{z} + z_0)/2h(t)$

Для вычисления  $E_{2z}$  в области  $h(t) < z < \infty$  достаточно в выражении (2.8.33) положить  $z = h(t)$ . В результате получим:

$$E_{2z} = \frac{Q_1 e^{-\alpha z}}{1 + e^{-\alpha z} \left(\frac{r_0}{t}\right)} \left\{ \frac{1}{(h(t) - z_0)^2} - \frac{1}{(h(t) + z_0)^2} + \right. \\ \left. + \frac{1}{4h(t)^2} \left[ \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(n + u_1(h))^2} - \frac{1}{(n + u_2(h))^2} \right) - \right. \right. \quad (2.8.38) \\ \left. \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{(n - u_1(h))^2} - \frac{1}{(n - u_2(h))^2} \right) \right] \right\} h(t) \text{ фз } < \text{ф}$$

Рассмотрим, наконец, случай, когда радиус  $a$  сравним с  $h(t)$ ,  $z$ . Используя выражение (2.8.34) и представляя подынтегральное выражение в (2.8.24) в виде:

$$\frac{shx[h(t) - (\bar{z} - z_0)]}{shxh(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n x h(t) - x(\bar{z} - z_0)} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+2)x h(t) + x(\bar{z} - z_0)} \quad (2.8.39)$$

$$\frac{shx[\bar{z} + z_0] - h(t)}{shxh(t)} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-(2n+2)x h(t) + x(\bar{z} + z_0)} - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2n x h(t) - x(\bar{z} + z_0)} \quad (2.8.40)$$

Полагая в (2.8.24)  $r=0$ , подставляя в него разложения (2.8.39) и (2.8.40), интегрируя полученные ряды почленно, используя выражение для интеграла приведенное в справочнике Рыжика и Градштейна (1971):

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} J_1(\beta x) dx = \frac{1}{\beta} \left( 1 - \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right) \quad (2.8.41)$$

Получим следующее выражение для вертикальной составляющей напряженности электрического поля на оси симметрии:

$$\begin{aligned}
 E_{1z} = & \frac{2Q_1}{a^2} \frac{1}{1 + e^{-\alpha(h(t)-z)}} \left\{ \frac{\bar{z} + z_0}{\sqrt{a^2 + (\bar{z} + z_0)^2}} - \frac{\bar{z} - z_0}{\sqrt{a^2 + (\bar{z} - z_0)^2}} + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nh(t) + (\bar{z} + z_0)}{\sqrt{a^2 + [2nh(t) + (\bar{z} + z_0)]^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nh(t) - (\bar{z} + z_0)}{\sqrt{a^2 + [2nh(t) - (\bar{z} + z_0)]^2}} - \\
 & \left. - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nh(t) + (\bar{z} - z_0)}{\sqrt{a^2 + [2nh(t) + (\bar{z} - z_0)]^2}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nh(t) - (\bar{z} - z_0)}{\sqrt{a^2 + [2nh(t) - (\bar{z} - z_0)]^2}} \right\} \\
 z_0 < z < h(t) & \qquad \qquad \qquad (2.8.42)
 \end{aligned}$$

В области  $h(t) < z < \infty$ , проводя аналогичные вычисления, получим:

$$\begin{aligned}
 E_{2z} = & \frac{2Q_1}{a^2} \frac{e^{-\alpha z} (\tau_0 / t)}{1 + e^{-\alpha z} (\tau_0 / t)} \left\{ \frac{h(t) + z_0}{\sqrt{a^2 + [h(t) + z_0]^2}} - \frac{h(t) - z_0}{\sqrt{a^2 + [h(t) - z_0]^2}} + \right. \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)h(t) + z_0}{\sqrt{a^2 + [(2n+1)h(t) + z_0]^2}} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)h(t) - z_0}{\sqrt{a^2 + [(2n+1)h(t) - z_0]^2}} \\
 & \qquad \qquad \qquad (2.8.43)
 \end{aligned}$$

Как следует из выражений (2.8.31), (2.8.38), (2.8.39) и (2.8.43), вертикальная составляющая напряженности  $E_{2z}$  при  $z > h(t)$  убывает медленнее по времени, чем при экспоненциальном затухании электрического поля:

Отметим также, что при  $h(t) \rightarrow \infty$  ( $t \rightarrow 0$ ) в случае точечного распределения облачного заряда и распределения с конечным радиусом  $a$   $E_z$  стремится к кулоновскому полю.

В случае одномерного распределения  $E_z \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow 0$   $z \rightarrow \infty$  ( $z > h(t)$ ), что следует из выражения (2.8.28).

Оценим напряженность электрического поля и значения величины облачных зарядов, необходимых для протекания разрядов облако-верхние слои атмосферы, используя выражение для вертикальных составляющих напряжен-

ности электрического поля (2.8.31), (2.8.37), (2.8.38), (2.8.41), (2.8.43) и соотношение

$$eE_z \lambda_e = W_{\text{ion}} \quad (2.8.44)$$

где  $e$  - заряд электрона,  $\lambda_e$  - его длина свободного пробега,  $W_{\text{ion}}$  - энергия ионизации молекул воздуха, состоящего в основном из молекул азота  $N_2$  ( $W_{\text{ion}} = 15,6$  эВ).

Для оценки величины  $\lambda_e$  воспользуемся следующим соотношением (Мишин и др.1989):

$$\lambda_e = \frac{v_{Te}}{v_e} = 6.6 \times 10^7 \sqrt{T_e} / v_e, \quad (2.8.45)$$

где  $T_e$  - температура электронов, выраженная в электрон-вольтах,  $v_e$  - частота столкновений электронов с нейтральными молекулами.

Принимая для температуры электронов  $T_e = 200$  К (или  $T_e = 1,7 \times 10^{-2}$  эВ) и частоту столкновений  $v_e$ , лежащую в интервале  $10^5 \text{ с}^{-1} < v_e < 108 \text{ с}^{-1}$  (Мишин и др.1989), получим  $\lambda_e = (0,079-7,9)$  см, что соответствует интервалу высот от 20 км до 75 км. Используя выражение (2.8.44), получим для напряженности электрического поля оценку:

$$E_z = (0,2-20) \text{ кВ/м} \quad (2.8.46)$$

Оценим величины электрического облачного заряда, которые необходимы для инициирования разрядов облако-ионосфера на основе рассмотренных выше решений.

Для одномерного приближения, используя условие  $h(t) \gg z$ , получим:

$$E_z = 4\pi Q_{1s} \frac{z_0}{h(t)} \quad (2.8.47)$$

При  $z_0 = 10$  км,  $\tau_0 = 600$  с,  $t = 10^{-4}$  с,  $h(t) = 78$  км получим, используя (46), (47),  $Q_{1s} = (0,0041-0,41)$  ед CGS/см<sup>2</sup>. Для заряда облака  $Q_1 = Q_{1s}\pi a^2$  имеем для  $a = 100$  км:

$$Q_1 = (4,27 \times 10^2 - 4,27 \times 10^4) \text{ К} \quad (2.8.48)$$

Значение величины облачного заряда  $Q_1$ , полученного на основе рассмотрения одномерной задачи, находятся в согласии с результатами экспериментальной работы (Marshall et al., 1996) в которой исследовались нестационарные электрические поля над мезомасштабными конвективными облачными системами с помощью аэростатов.

Для точечного распределения облачного электрического заряда, используя кулоновское приближение, следующее из (2.8.37) ( $h(t) \rightarrow \infty$ ), найдем при  $z = 50$  км ( $\lambda_e = 0,79$  м),  $z_0 = 10$  км,  $E_z = 2$  кВ/м  $Q_1 = 6,4 \times 10^2$  К, при  $z = 75$  км,  $E = 0,2$  кВ/м  $Q_1 = 2,2 \times 10^2$  К, а при  $z = 20$  км,  $E = 20$  кВ/м  $Q_1 = 250$  К.

В случае распределения облачного заряда (2.8.4) с радиусом  $a$ , используя для оценок облачного заряда выражение для  $E_z$  следующее из (2.8.41) при  $h(t) \rightarrow \infty$ :

$$E_z = \frac{2Q_1}{a^2} \left[ \frac{z + z_0}{\sqrt{a^2 + (z + z_0)^2}} - \frac{z - z_0}{\sqrt{a^2 + (z - z_0)^2}} \right] \quad (2.8.49)$$

получим для  $a = 50$  км,  $z_0 = 10$  км,  $z = 50$  км,  $E_z = 2$  кВ/м  $Q = 1,87 \times 10^3$  К, а при  $a = 20$  км  $Q_1 = 8,23 \times 10^2$  К.

В таблице 7 приведены результаты временных расчетов напряженности электрического поля для одномерно-го, точечного распределения и распределения (2.8.4) с  $a = 50$  км, используя выражения (2.8.31), (2.8.37), (2.8.38), (2.8.41), (2.8.43). В предположении, что начальные значения напряженности электрического поля, а следовательно и электрического заряда на высоте  $z = 50$  км соответствуют разрядным значениям ( $E_z = 2$  кВ/м). Как видно из табл.7, в трех моделях распределение напряженности электрического поля сначала возрастает, причем наибольший максимум имеет место при  $a = 50$  км, а затем убывает вследствие электрической релаксации как  $E_z \sim 1/t$ . Характерные време-



на изменения  $E_z$  соответствуют наблюдаемой продолжительности разрядов облако-ионосфера ( $\tau \sim 10^{-3}-10^{-2}$  с).

Другим механизмом, который привлекается для объяснения разрядов облако- верхние слои атмосферы, является механизм ионизации атмосферы с помощью убегающих электронов (Gurevich, et al., 1992). Условие для разряда с помощью убегающих электронов, полученное в этой работе, имеет следующий вид:

$$E_z > E_{zкр} = \frac{4\pi N_m Z e^2}{m V^2} \ln \frac{m V^2}{Z W_{ion}}$$

где  $m$ ,  $V$ -масса и скорость электронов,  $N_m$ -концентрация нейтральных молекул в атмосфере,  $Z = 14,5$ . При  $2\varepsilon = mV^2 = 2,2 \times 10^5$  эВ,  $z = 75$  км,  $N_m(z = 75 \text{ км}) = 5,4 \times 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , получим  $E_{zкр} = 0,06$  кВ/м. Это значение напряженности электрического поля меньше в 3,3 раза значения, необходимого для обычного атмосферного разряда на этой высоте, но энергия электронов должна быть больше, чем энергия ионизации воздуха, т.е. разряд за счет убегающих электронов должен создаваться электронами высоких энергий.

Проведенные оценки значений величин вертикальной составляющей напряженности электрического поля и зарядов грозового облака, необходимых для инициирования разрядов облако-верхние слои атмосферы совпадают с оценками этих величин, полученными на основе экспериментальных данных (Sentmann et al., 1995)

Применение полученных асимптотических выражений для составляющей напряженности электрического поля  $E_z$  для трех простых случаев начального облачного электрического заряда для этих оценок обосновывается тем, что высоты, на которых происходят разряды этого типа (от 30 до 80 км) гораздо больше вертикальных толщин электрически активных зон ( $\sim 1$  км). Вместе с тем горизонтальные размеры грозowych облачных систем значительны и нахо-

дятся в интервале от 20 до 200 км (Marshall et al., 1996). Случай мезомасштабных конвективных облаков наиболее благоприятен для разрядов облако-верхние слои атмосферы, так как горизонтальные протяженности этих разрядов могут составлять в диаметре несколько десятков километров (Winckler et al., 1995).

Расчет временных изменений напряженности электрического поля для высот порядка 50 км, представленных в табл.7, дает характерные времена, совпадающие с характерными временами продолжительности этих разрядов (Winckler et al., 1995; Winckler et al., 1996). Можно, по видимому, предполагать, что механизм убегающих электронов не является определяющим в генерации джетов и спрайтов из-за высокой энергии электронов, требуемой для того, чтобы этот механизм действовал. Основную роль играет разряд за счет электрического пробоя. Вместе с тем он может играть главную роль в генерации рентгеновских импульсов, часто наблюдаемых в мезомасштабных конвективных облаках (Gurevich et al., 1992; Eack et al., 1996).

Рассмотренная в настоящей статье задача основана на потенциальном приближении для электрического поля ( $\text{rot } E = 0$ ). Временные изменения определяются электрической проводимостью атмосферы, но не являются экспоненциальными:  $E_z \sim e^{-t/\tau_\lambda(z)}$ ,  $\tau_\lambda(z) = (4\pi\lambda(z))^{-1}$ , а происходят обратно пропорционально времени:  $E_z \sim 1/t$ .

В дальнейшем предполагается рассмотреть более общую задачу, в которой наряду с электростатическим полем будет учтено индукционное электрическое поле ( $\text{rot } E \neq 0$ ). Эта задача является важной для атмосферы с неоднородной электрической проводимостью.

Таким образом в настоящем приложении рассмотрено решение задачи об электростатическом поле, создаваемым облачным электрическим зарядом грозового облака

после разряда облако-земля в атмосфере с экспоненциальной проводимостью.

Получены асимптотические выражения для вертикальной составляющей напряженности электрического поля в атмосфере в зависимости от времени и высоты для точечного, одномерного распределений начального облачного заряда, а также для горизонтального распределения с конечным цилиндрическим радиусом.

На основе этих выражений проведены оценки значений величин вертикальной составляющей напряженности электрического поля и электрических зарядов грозового облака, которые необходимы для инициирования разряда облако-верхние слои атмосферы. Полученные значения облачных электрических зарядов соответствуют современным экспериментальным данным.

Проведенные численные оценки временных изменений электрических полей в послеразрядной стадии грозового облака показали совпадение характерных времен этого изменения с характерными временами продолжительности разрядов облако-верхние слои атмосферы.

Таблица 7. Зависимость напряженности электрического поля

$E_z(t, z=50 \text{ км})/E_z(0, z=50 \text{ км})$ , где  $E_z(0, z=50) = 2 \text{ кВ/м}$ , от времени для (а) точечного распределения облачного заряда, (в) одномерного, (с) горизонтального распределения с  $a = 50 \text{ км}$  при  $z = 50 \text{ км}$ ,  $\tau_0 = 600 \text{ с}$ ,  $\alpha = 0,2 \text{ км}^{-1}$ ,  $z_0 = 10 \text{ км}$

$t$ (с)	$h$ (т) (км)	$E_z/E_z(0)$ (а)	$E_z/E_z(0)$ (в)	$E_z/E_z(0)$ (с)
0	$\infty$	1	1	1
$10^{-4}$	78	1	1	1
0,001	66,5	1,04	1,12	1,095
0,01	55	1,19	1,03	1,35

0,02	51,5	1,10	0,87	1,19
0,03	49,5	1,02	0,74	0,53
0,04	48,1	0,94	0,65	0,47
0,06	47	0,81	0,52	0,39

Приложение 2.9. Распределение электрического поля, создаваемого нестационарным током заряжения грозового облака в атмосфере с неоднородной электрической проводимостью.

Задача о распределении электрического поля, создаваемого электрическими зарядами, генерируемыми в облаке, в атмосфере с неоднородной электрической проводимостью имеет важное значение для интерпретации экспериментальных данных по измерению электрических полей в наземных, самолетных и зондовых экспериментах, проводимых вне облака или облачной системы. Ее решение необходимо также для теории глобальной электрической цепи, так как позволяет оценить электрический ток, даваемый облачной зарядовой структурой в верхние слои атмосферы (Browning et al., 1987; Holser, Saxon, 1952).

Для стационарного варианта этой задачи решение было получено в работах (Holser, Saxon, 1952; Kasemir, 1959). Нестационарный вариант задачи, который представляет наибольший интерес для практических целей, не имеет простого решения, характерного для стационарного случая. В работах (Illingworth, 1972; Mann, 1970; Michnowski, 1973) сделаны попытки получить аналитическое решение нестационарной задачи, но в работе (Mann, 1970) решение не доведено до конца, работа (Michnowski, 1973) не совсем корректна в математическом плане, так как неясны границы применения полученного приближенного решения, а работа (Illingworth, 1972) просто констатирует

невозможность получения решения в аналитическом виде. Вместе с тем в настоящее время получил развитие численный метод решения нестационарной задачи о взаимодействии зарядовой структуры с окружающей неоднородной по электрической проводимости атмосферой (Browning et al., 1987; Hager et al., 1989), причем в этих работах была разработана разностная схема решения нестационарной задачи. Основное модельное нестационарное уравнение, которое использовалось в указанных выше работах, имеет вид:

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \Delta\varphi + \nabla(\lambda \nabla\varphi) = S \quad (2.9.1)$$

где  $\varphi$ -потенциал электрического поля,  $S$ -функция источника, определяемая процессами электризации в облаке,  $\lambda$ -электрическая проводимость в атмосфере, которая представляется в следующем виде (Browning et al., 1987):

$$\lambda = \lambda_0 e^{-\alpha z} \quad (2.9.2)$$

Уравнение (2.9.1) следует из уравнения непрерывности плотности электрического заряда и уравнения Пуассона (Джексон, 1965), причем для напряженности электрического поля  $\vec{E}$  используется потенциальное приближение:  $\vec{E} = -\nabla\varphi$ .

В настоящем приложении рассматривается аналитическое решение задачи о распределении электрического поля, создаваемого нестационарным токовым источником, включаемым в момент времени  $t = 0$  на основе уравнения (2.9.1).

Как мы увидим ниже, эта задача следует из более общей постановки задачи об электромагнитном поле токового источника в неоднородной по электрической проводимости атмосфере в пределе  $c \rightarrow \infty$ , где  $c$ -скорость света.

Рассмотрим задачу об электромагнитном поле, создаваемом нестационарным токовым источником, находящемся в проводящей атмосфере с экспоненциальной проводимостью (2.9.2) над горизонтальной, идеально проводящей земной поверхностью. Предполагается, что  $\varepsilon = 1$ ,  $\mu = 1$  ( $\varepsilon$ -диэлектрическая проницаемость,  $\mu$ -магнитная проницаемость), выпишем систему уравнений Максвелла (Джексон, 1965):

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} (\vec{j} + \vec{j}_{cm}) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (2.9.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \vec{H} = 0, \quad \vec{j} = \lambda \vec{E},$$

где  $\vec{E}, \vec{H}$  - напряженности электрического и магнитного полей,  $\vec{j}, \vec{j}_{cm}$  - плотности омического и стороннего электрических токов,  $\rho$  - плотность электрического заряда.

Воспользуемся далее представлением векторов  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  через векторный и скалярный потенциалы  $\vec{A}$  и  $\varphi$ :

$$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}, \quad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (2.9.4)$$

Рассматривая задачу в цилиндрической системе координат  $(r, \phi, z)$ , где ось  $z$  проходит перпендикулярно земной поверхности через источник, предполагая задачу осесимметричной ( $\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$ ),  $j_{cm} = (0, 0, j_{cm}^z)$  и  $\vec{A} = (0, 0, A_z)$ ,

получим из уравнения для  $\operatorname{rot} \vec{H}$ , используя (2.9.4), следующие его компоненты по координатам  $z$  и  $r$ :

$$-\left( \frac{\partial^2 A_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) = \frac{4\pi}{c} \left[ -\lambda \left( \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right) + j_{cm}^z \right] - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} \quad (2.9.5)$$

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial r \partial z} = -\frac{4\pi\lambda}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{1}{c} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial t} \quad (2.9.6)$$

Из уравнения (2.9.6) следует соотношение

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + \frac{4\pi\lambda}{c} \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = C(z, t) \quad (2.9.7)$$

Постоянная  $C(z, t) = 0$ , так как при  $r \rightarrow \infty$ ,  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $A_z \rightarrow 0$ .

Пусть сторонний электрический ток  $j_{cm}^z$  включен в момент времени  $t = 0$ . Граничные и начальные условия для уравнений (2.9.5), (2.9.7) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varphi|_{t=0} = \varphi_0(r, z), \quad \varphi|_{z=0} = 0, \quad \varphi|_{R \rightarrow \infty} = 0, \quad R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \frac{\partial A_z}{\partial z}|_{z=0} = 0, \quad A_z|_{R \rightarrow \infty} = 0, \quad A_z|_{t=0} = 0, \quad \frac{\partial A_z}{\partial z}|_{t=0} = 0. \end{aligned} \quad (2.9.8)$$

Применяя к этим уравнениям последовательно преобразования Фурье-Бесселя и Лапласа (Диткин, Прудников, 1974):

$$\hat{f}(x, z, p) = \int_0^\infty e^{-pt} dt \int_0^\infty f(r, z, t) J_0(xr) r dr, \quad (2.9.9)$$

$$f(r, z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} dp \int_0^\infty \hat{f}(x, z, p) J_0(xr) x dx$$

и производя несложные преобразования, получим следующие уравнения для определения функций  $\varphi$  и  $A_z$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \hat{\phi}}{dz^2} + \frac{4\pi \lambda'_z x^2}{(p+4\pi\lambda) \left( x^2 + \frac{4\pi\lambda p}{c^2} + \frac{p^2}{c^2} \right)} \frac{d\hat{\phi}}{dz} - \left( x^2 + \frac{4\pi\lambda p}{c^2} + \frac{p^2}{c^2} \right) \hat{\phi} = \\
& = \frac{4\pi}{p+4\pi\lambda} \frac{dj_{cm}^z}{dz} - \frac{\frac{16\pi^2 p}{c^2} \lambda'_z \hat{j}_{cm}^z}{(p+4\pi\lambda) \left( x^2 + \frac{4\pi\lambda p}{c^2} + \frac{p^2}{c^2} \right)} - \\
& \frac{\bar{\phi} \Big|_{t=0} \left( x^2 + \frac{4\pi\lambda p}{c^2} + \frac{p^2}{c^2} \right)}{p+4\pi\lambda} + \frac{\frac{d^2 \bar{\phi}}{dz^2} \Big|_{t=0}}{p+4\pi\lambda}
\end{aligned} \tag{2.9.10}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \hat{A}_z}{dz^2} - \frac{4\pi \lambda'_z}{p+4\pi\lambda} \frac{d\hat{A}_z}{dz} - \left( x^2 + \frac{4\pi\lambda p}{c^2} + \frac{p^2}{c^2} \right) \hat{A}_z = \\
& = -\frac{4\pi \hat{j}_{cm}^z}{c} - \frac{4\pi \lambda'_z \bar{\phi} \Big|_{t=0}}{c(p+4\pi\lambda)}
\end{aligned} \tag{2.9.11}$$

где  $\bar{\phi}$  - преобразование Фурье-Бесселя от потенциала электрического поля.

Граничные условия для решения уравнений (2.9.10), (2.9.11) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial \hat{A}_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \hat{A}_z \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0, \hat{\phi} \Big|_{z=0} = 0, \hat{\phi} \Big|_{z \rightarrow \infty} = 0. \tag{2.9.12}$$

Определив  $\hat{A}_z$  и  $\hat{\phi}$ , можно найти  $A_z$  и  $\phi$ , используя формулу обращения в (2.9.9). При  $c \rightarrow \infty$  уравнения (2.9.10), (2.9.11) в пренебрежении членами  $\sim 1/c^2$  приобретают вид:

$$\frac{d^2 \hat{A}_z}{dz^2} - \frac{4\pi \lambda'_z}{p+4\pi\lambda} \frac{d\hat{A}_z}{dz} - x^2 \hat{A}_z = -\frac{4\pi}{c} \hat{j}_{\text{нб}}^z - \frac{4\pi \lambda'_z \bar{\phi} \Big|_{t=0}}{c(p+4\pi\lambda)} \tag{2.9.13}$$



$$\frac{d^2 \hat{\phi}}{dz^2} - \frac{4\pi\lambda'_z}{p+4\pi\lambda} \frac{d\hat{\phi}}{dz} - x^2 \hat{\phi} = \frac{4\pi}{p+4\pi\lambda} \frac{df_{\text{нб}}^z}{dz} + \frac{\int_0^\infty \Delta\phi|_{t=0} J_0(xr) dr}{p+4\pi\lambda} \quad (2.9.14)$$

Последнее уравнение (2.9.14) следует из уравнения (2.9.1), если преобразовать его согласно рассмотренной выше методике.

Задача нахождения плотности стороннего электрического тока является задачей моделирования облачных электрических полей. Самое простое представление для стороннего электрического тока имеет вид (Hager et al., 1989; Volland, 1984):

$$I_{cm}^z = n_1 q_1 v_1 \left(1 - e^{-t/\tau}\right) \tilde{S} \quad (2.9.15)$$

где  $n_1$ ,  $q_1$  - концентрация и заряд крупных частиц,  $v_1$  - скорость их сидементации,  $\tau$  - время релаксации, обусловленное взаимодействием крупных частиц с мелкими,  $\tilde{S}$  - площадь поверхности, через которую этот ток протекает.

Тогда плотность стороннего электрического тока в приближении узкого канала, по которому этот ток течет, можно аппроксимировать следующим выражением:

$$j_{cm}^z = I_{cm}^z \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) [\theta(z - z_n) - \theta(z - z_p)] \quad (2.9.16)$$

где  $\delta$  ( $u$ )-функция Дирака,  $\theta$  ( $u$ )-функция Хевисайда (Джексон, 1965).

В случае, если этот канал имеет конечный радиус  $a$ , то для  $j_{cm}^z$  можно написать выражение:

$$j_{cm}^z = \frac{I_{cm}^z}{\pi a^2} [\theta(z - z_n) - \theta(z - z_p)] \quad (2.9.17)$$

Переходя к производным по координате  $z$  от этих выражений, получим:

$$\frac{dj_{cm}^z}{dz} = I_{cm}^z \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) [\delta(z-z_n) - \delta(z-z_p)] \quad (2.9.18)$$

$$\frac{dj_{cm}^z}{dz} = \frac{I_{cm}^z}{\pi a} [\delta(z-z_n) - \delta(z-z_p)]$$

Первое выражение в (2.9.18) использовалось в работах (Holser, Saxon, 1952; Kasemir, 1959). Более сложное представление для  $S$ , учитывающее пространственную зависимость функции источника от  $r$  и  $z$  рассматривалось в работе (Browning et al., 1987).

Общее решение уравнения (2.9.14) при граничных условиях (2.9.12) с учетом одного члена в первом выражении (2.9.18) находится с помощью стандартных методов решения дифференциальных уравнений (Камке, 1971). При

$\left| \frac{e^{az}}{p\tau_0} \right| < 1$  оно имеет вид:

$$\hat{\phi} = c_1 y_1 + c_2 y_2 - y_1 \int_0^z \frac{f(z')}{\Delta(z')} y_2 dz' + y_2 \int_0^z \frac{f(z')}{\Delta(z')} y_1 dz',$$

$$y_1 = \left( -\frac{1}{p\tau_0} e^{az} \right)^{\bar{\alpha}_1} F \left( \bar{\alpha}_2, \bar{\beta}_2, \gamma_1, -\frac{1}{p\tau_0} e^{az} \right),$$

$$y_2 = \left( -\frac{1}{p\tau_0} e^{az} \right)^{1-\gamma+\bar{\alpha}_1} F \left( \bar{\alpha}_2 - \gamma_1 + 1, \bar{\beta}_2 - \gamma_1 + 1, 2 - \gamma_1, -\frac{1}{p\tau_0} e^{az} \right),$$

$$f(z) = -\frac{2\hat{I}_1(p)}{p+4\pi\lambda} \delta(z-z_1) + \frac{1}{p+4\pi\lambda} \int_0^\infty \Delta\phi|_{t=0} J_0(xr) r dr,$$

$$\Delta(z) = y_1 y_2' - y_1' y_2, \quad y_i' = \frac{dy_i}{dz}, \quad i=1,2.$$

(2.9.19)

где  $\hat{I}_1(p)$  - образ преобразования Лапласа от тока  $I_1(t) = I_{cm}^z(t)$ ,  $\tau_0 = (4\pi\lambda_0)^{-1}$ ,

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{x}{\alpha}, \quad \bar{\alpha}_2 = \frac{x}{\alpha} + \frac{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}}\right)}{2}, \quad \bar{\beta}_2 = \frac{x}{\alpha} + \frac{\left(1 - \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}}\right)}{2},$$

$$\gamma_1 = 1 + \frac{2x}{\alpha},$$

$F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, u)$  - гипергеометрическая функция.

При  $|p\tau_0 e^{-\alpha z}| \ll 1$  для общего решения получим выражение

$$\varphi = \bar{c}_1 \bar{y}_1 + \bar{c}_2 \bar{y}_2 - \bar{y}_1 \int_0^z \frac{f(z')}{\bar{\Delta}(z')} dz' \bar{y}_2 + \bar{y}_2 \int_0^z \frac{f(z')}{\bar{\Delta}(z')} \bar{y}_1 dz',$$

$$\bar{y}_1 = (-p\tau_0 e^{-\alpha z})^{\alpha_1} F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, -p\tau_0 e^{-\alpha z}),$$

$$\bar{y}_2 = (-p\tau_0 e^{-\alpha z})^{1-\gamma+\alpha_1} F(\bar{\alpha} - \gamma + 1, \bar{\beta} - \gamma + 1, 2 - \gamma, -p\tau_0 e^{-\alpha z}),$$

$$\bar{\Delta} = \bar{y}_1 \bar{y}_2' - \bar{y}_1' \bar{y}_2,$$

(2.9.20)

где

$$\alpha_1 = \frac{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}}\right)}{2}, \quad \bar{\alpha} = \frac{x}{\alpha} + \frac{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}}\right)}{2},$$

$$\beta = -\frac{x}{\alpha} + \frac{\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}}\right)}{2}, \quad \gamma = 1 + \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}},$$

$c_1, c_2, \bar{c}_1, \bar{c}_2$  - постоянные.

Рассмотрим первое решение уравнения (2.9.19), соответствующее значениям переменной  $\left| \frac{e^{\alpha z}}{p\tau_0} \right| < 1$ . Малость значе-

ний этого аргумента  $|u| = \left| \frac{e^{\alpha z}}{p\tau_0} \right| \ll 1$  соответствует большим

значениям  $|p|$  или малым значениям времени  $t$ . Поэтому это решение соответствует малым временам, прошедшим от момента включения токового источника или от момента появления в некоторой области атмосферы электрического заряда  $Q$ . В общем случае оба эти процесса могут идти одновременно, но в настоящей статье мы рассмотрим их раздельно, чтобы не загромождать изложение.

При фиксированном значении параметра  $p$  в виду экспоненциального роста электрической проводимости  $\lambda$  (2.9.2) существует значение координаты  $z = z^*$ , при которой

выполнено условие  $\left| \frac{4\pi\lambda_0 e^{\alpha z^*}}{p} \right| = 1$  и решение (2.9.19) долж-

но переходить в область, где  $\left| \frac{4\pi\lambda_0 e^{\alpha z^*}}{p} \right| > 1$ . Используя ме-

тод аналитического продолжения решения (19) в область

$\left| \left( \frac{1}{p\tau_0} \right) e^{\alpha z} \right| > 1$  (Бейтмен.Эрдейи,1973),и определяя посто-

янные  $C_1$  и  $C_2$  с помощью граничных условий (2.9.12), получим асимптотическое решение, соответствующее усло-

виям  $\left| \frac{e^{\alpha z}}{p\tau_0} \right| \ll 1$ ,  $\frac{\tau_0}{t} \gg 1$ ,  $z < h(p) = \frac{1}{\alpha} \ln p\tau_0$ ,  $r \gg \alpha^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{2}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{I}_1(p) \frac{e^{pt}}{p} dp \int_0^\infty \frac{\text{shxz} \text{shx}(h(p)-z_1)}{\text{shxh}(p)} J_0(xr) dx, \quad z < z_1, \\ \phi_2 &= \frac{2}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{I}_1(p) \frac{e^{pt}}{p} dp \int_0^\infty \frac{\text{shxz}_1 \text{shx}(h(p)-z)}{\text{shxh}(p)} J_0(xr) dx, \quad z > z_1, \\ \phi_3 &= \frac{2}{2\pi i \alpha} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \hat{I}_1(p) \frac{e^{pt}}{p} dp \int_0^\infty \frac{\text{shxz}_1}{\text{shxh}(p)} e^{-\alpha(z-h(p))} J_0(xr) x dx, \quad z > h(p). \end{aligned} \quad (2.9.21)$$

Если в момент времени  $t = 0$  в атмосфере возник электрический заряд  $Q$ , то в формулах (2.9.21)  $I(p)$  заменяется на  $Q$ . При  $\ln \frac{\tau_0}{t} \gg 1$  и  $I_1(p) = \frac{I_0}{p(1+p\tau)}$ , что соот-

ветствует  $I_1(t) = I_0 \left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ , получим асимптотическое решение уравнения (2.9.18):

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 2I_0 \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{t-\tilde{\tau}}{\tau}}\right) d\tilde{\tau} \int_0^\infty \frac{\text{shxz} \text{shx}(h(\tilde{\tau})-z_1)}{\text{shxh}(\tilde{\tau})} J_0(xr) dx, \quad z < z_1, \\ \phi_2 &= 2I_0 \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{t-\tilde{\tau}}{\tau}}\right) d\tilde{\tau} \int_0^\infty \frac{\text{shxz}_1 \text{shx}(h(\tilde{\tau})-z)}{\text{shxh}(\tilde{\tau})} J_0(xr) dx, \quad z > z_1, \end{aligned} \quad (2.9.22)$$

$$\phi_3 = \frac{2I_0}{\alpha} \int_0^t \left(1 - e^{-\frac{t-\tilde{\tau}}{\tau}}\right) d\tilde{\tau} \int_0^\infty \frac{\text{shxz}_1}{\text{shxh}(\tilde{\tau})} e^{-\alpha(z-h(\tilde{\tau}))} J_0(xr) x dx,$$

$$z > h(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\tau_0}{t}.$$

При  $\Delta\varphi|_{t=0} = -4\pi Q\delta(\vec{r} - \vec{r}_1)$  и  $I_0 = 0$  для  $\varphi_I$  имеем:

$$\phi_1 = 2Q \int_0^\infty \frac{\text{shxz} \text{shx}(h(t)-z_1)}{\text{shxh}(t)} J_0(xr) dx, \quad z < z_1 \quad (2.9.23)$$

Используя выражение (2.9.23), найдем выражение для напряженности электрического поля при  $z = 0$ . Соответствующие вычисления дают:

$$E_{1z}|_{z=0} = -2Q \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}x(h(t) - z_1)}{\operatorname{sh}xh(t)} J_0(xr) dx \quad (2.9.24)$$

При  $r > h(t)$  получим, вычисляя интеграл в (2.9.24), следующее асимптотическое выражение для  $E_{1z}|_{z=0}$ :

$$\begin{aligned} E_{1z}|_{z=0} &\approx -\frac{4\pi Q}{h^2(t)} \sin \frac{\pi(h(t) - z_1)}{h(t)} K_0 \left( \frac{\pi r}{h(t)} \right) \approx \\ &\approx -\frac{4\pi Q}{h^2(t)} \sin \frac{\pi z_1}{h(t)} \left( \frac{h(t)}{2r} \right)^{1/2} e^{-\frac{\pi r}{h(t)}} \end{aligned} \quad (2.9.25)$$

где  $K_0(x)$  - функция Макдональда (Градштейн, Рыжик, 1971)

При  $r < h(t)$  имеем

$$E_{1z}|_{z=0} = -\frac{2Qz_1}{(r^2 + z_1^2)^{3/2}} \left\{ \frac{(2h(t) - z_1)(r^2 + z_1^2)}{\left\{ r^2 + [2h(t) - z_1]^2 \right\}^{3/2} z_1} \right\} \quad (2.9.26)$$

Физический смысл масштаба высоты  $h(t)$  состоит в следующем:  $h(t)$  отделяет область с малыми значениями времен электрической релаксации, где стационарное электрическое поле устанавливается быстро, от области, где влияние электрической проводимости мало.

Высота  $h(t)$  определяется из условия:

$$4\pi\lambda_0 e^{\alpha h(t)} = 1 \quad (2.9.27)$$

Из (2.9.27) получим выражение для  $h(t)$ , которое нами было получено из общего решения задачи:

$$h(t) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\tau_0}{t} \quad (2.9.28)$$

Приведем некоторые оценки величины  $h(t)$ . При  $\alpha = 0,2 \text{ км}^{-1}$ ,  $\tau_0 = 10 \text{ мин}$  и  $t = 10 \text{ сек}$   $h(t) = 20,5 \text{ км}$ , при  $t = 2 \text{ сек}$   $h(t) = 28,5 \text{ км}$ ;  $\tau_0 = 4 \text{ мин}$  и  $t = 2 \text{ сек}$   $h(t) = 21 \text{ км}$ , т.е.  $h(t)$  существенным образом зависит от электрической проводимости вблизи земной поверхности.

В общем случае, когда в грозовом облаке произошел разряд нижнего заряда на землю, но в облаке остался заряд  $Q$ , так что при  $t = 0$   $\Delta\varphi = -4\pi Q\delta(r - r_1)$ , и продолжается процесс зарядки облака ( $I_0 \neq 0$ ), получим следующее выражение для изменения вертикальной составляющей напряженности электрического поля при  $z = 0$  и  $\tau = 0$ :

$$E_z|_{z=0} = -2I_0 \int_0^t \alpha \bar{\tau} \int_0^\infty \frac{\text{sh}x(h(\bar{\tau}) - z_1)}{\text{sh}xh(\bar{\tau})} J_0(xr) x dx -$$

$$-2Q \int_0^\infty \frac{\text{sh}x(h(t) - z_1)}{\text{sh}xh(t)} J_0(xr) x dx$$
(2.9.29)

Для расстояний  $r > h(t)$  для второго члена имеет место выражение (2.9.25), а для первого члена в (2.9.29) получим следующую асимптотическую

$$E_z^1|_{z=0} = -2I_0 \int_0^t \alpha \bar{\tau} \int_0^\infty \frac{\text{sh}x(h(\bar{\tau}) - z_1)}{\text{sh}xh(\bar{\tau})} J_0(xr) x dx \approx$$

$$\approx -\frac{4\pi I_0 t}{h^2(\bar{t})} \sin \frac{\pi z_1}{h(\bar{t})} \left( \frac{h(\bar{t})}{r} \right)^{1/2} e^{-\frac{\pi r}{h(\bar{t})}}$$
(2.9.30)

где  $\bar{t}$  удовлетворяет условию:  $0 < \bar{t} < t$ .

Выражение (2.9.30) описывает рост напряженности электрического поля за счет накопления электрического заряда в облаке, обусловленного током электризации  $I_0$  на временном интервале  $0 < t \ll \tau_0$ , где  $\tau_0$  – время электрической релаксации вблизи земной поверхности. В то же время второе выражение в (2.9.29) описывает уменьшение напря-

женности электрического поля за счет диссипации электрического заряда.

Аналогичный результат можно получить для расстояний  $r < h(t)$ , используя выражение (2.9.26).

При  $|p\tau_0 e^{-\alpha z}| < 1$  решение (2.9.20) записывается в следующем виде при  $\Delta\phi|_{t=0} = 0$  и при  $z < z_1$  и  $z > z_1$ :

$$\begin{aligned} \phi_1 = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2\hat{I}_1(p)}{\alpha} \tau_0 e^{pt} dp \int_0^{\infty} \frac{F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, -p\tau_0 e^{-\alpha z})}{F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, -p\tau_0)} e^{-\frac{\alpha}{2} z_1 \left( \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}} - 1 \right)} \left[ e^{-\alpha \bar{\alpha}_1 z} F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, -p\tau_0) \times \right. \\ & \times F(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \gamma_1, -p\tau_0 e^{-\alpha z}) - e^{-\alpha \alpha_1 z} F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, -p\tau_0 e^{-\alpha z}) F(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \gamma_1, -p\tau_0) \left. \right] \times \\ & \times \frac{J_0(xr) x dx}{\sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}}}, \quad z < z_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_2 = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{2\hat{I}_1(p)}{\alpha} \tau_0 e^{pt} dp \int_0^{\infty} \frac{F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, -p\tau_0 e^{-\alpha z})}{F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, -p\tau_0)} e^{-\frac{\alpha}{2} z_1 \left( \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}} + 1 \right)} \left[ e^{-\alpha \bar{\alpha}_1 z} F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, -p\tau_0) \times \right. \\ & \times F(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \gamma_1, -p\tau_0 e^{-\alpha z}) - e^{-\alpha \alpha_1 z} F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, -p\tau_0 e^{-\alpha z}) F(\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1, \gamma_1, -p\tau_0) \left. \right] \times \\ & \times \frac{J_0(xr) x dx}{\sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}}}, \quad z > z_1 \end{aligned} \quad (2.9.31)$$

$$\alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}}}{2}, \quad \bar{\alpha} = \alpha_1 + \frac{x}{\alpha}, \quad \bar{\beta} = \alpha_1 - \frac{x}{\alpha}, \quad \gamma = 1 + \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}}$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \frac{1 - \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}}}{2}, \quad \bar{\alpha}_1 = \tilde{\alpha}_1 + \frac{x}{\alpha}, \quad \bar{\beta}_1 = \tilde{\alpha}_1 - \frac{x}{\alpha}, \quad \gamma = 1 - \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}}$$



При  $p \rightarrow 0$  решение (2.9.31) стремится к стационарному решению, даваемого теорией Хольцера-Саксона (Holser, Saxon, 1952). С помощью первого решения (2.9.31) можно найти напряженность электрического поля вблизи земной поверхности при  $z = 0$ . Полагая  $I_1(p) = \frac{I_0}{p(1+p\tau)}$ ,

получим:

$$E_z(0, t) = -2I_0\tau_1 \int_0^\infty J_0(xr) e^{-\frac{\alpha}{2z_1} \left( \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}} - 1 \right)} x dx \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} e^{pt} dp \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{p} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} - \frac{\tau_0}{\tau_0 - \tau} \left( \frac{1}{p + \frac{1}{\tau_0}} - \frac{1}{p + \frac{1}{\tau}} \right) \right] \frac{F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, -p\tau_0 e^{-\alpha z_1})}{F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, -p\tau_0)}.$$

(2.9.32)

При  $\alpha z_1 \ll 1$  из (2.9.32) следует

$$E_z(0, t) = -I_0\tau_1 e^{-\frac{\alpha}{2}(\sqrt{z_1^2 + r^2} - z_1)} \left[ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{\tau_0}{\tau_0 - \tau} \left( e^{-\frac{t}{\tau_0}} - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \right] \times$$

$$\times \frac{\alpha z_1}{(r^2 + z_1^2)} \left[ 1 + \frac{2}{\alpha(r^2 + z_1^2)^{1/2}} \right].$$

(2.9.33)

При  $\alpha z_1 \gg 1$  для  $E_z(0, t)$  имеем:

$$E_z(0,t) = -\frac{I_0\tau_1}{\pi i} \int_0^\infty J_0(xr) e^{-\frac{\alpha}{2}z_1 \left( \sqrt{1 + \frac{4x^2}{\alpha^2}} - 1 \right)} x dx \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{F^{-1}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, -p\tau_0) e^{pt}}{p(1+p\tau_0)(1+p\tau)} d\sigma. \quad (2.9.34)$$

Для вычисления интегралов в (2.9.34) воспользуемся условием, что при  $\alpha z_1 \gg 1$  экспонента в (2.9.34) играет существенную роль при  $x^2/\alpha^2 \ll 1$ . В этом случае для гипергеометрической функции  $F(\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \gamma, -p\tau_0)$  можно использовать представление (Камке, 1971):

$$F(1,1,2,-p\tau_0) = \frac{\ln(1+p\tau_0)}{p\tau_0} \quad (2.9.35)$$

При  $\tau_0 \gg \tau$  вычисления в интегралах (2.9.34) с использованием (2.9.35) приводят к следующему представлению для  $E_z(0,t)$ :

$$E_z(0,t) = -\frac{I_0\tau_1}{z_1^2 + r^2} e^{-\frac{\alpha}{2}(\sqrt{z_1^2 + r^2} - z_1)} \alpha z_1 \left[ 1 + \frac{2}{\alpha(r^2 + z_1^2)^{1/2}} \right] v_1\left(\frac{t}{\tau_0}\right),$$

$$v_1\left(\frac{t}{\tau_0}\right) = 1 - \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{\tau_0}(1+z)}}{z(\pi^2 + \ln^2 z)} dz, \quad \tau_1 = (4\pi\lambda(z_1))^{-1}. \quad (2.9.36)$$

Из выражений (2.9.33) и (2.9.36) следует, что при  $\tau_0 \gg \tau_1 > \tau$  время установления стационарного электрического поля определяется временем  $\tau_0$ . Для небольших расстояний  $r \ll \alpha^{-1} (x/\alpha \gg 1)$ , используя для  $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$  асимптотическое выражение при  $x/\alpha \gg 1$  (Камке, 1971):

$$F\left(\frac{2x}{\alpha}, \frac{1}{2}, \frac{2x}{\alpha}, u\right) = \frac{1}{(1-u)^{1/2}} \quad (2.9.37)$$

получим для  $E_z(0, t)$ :

$$\begin{aligned} E_z(0, t) &= -\frac{2I_0\tau_1 z_1}{(r^2 + z_1^2)^{3/2}} \frac{1}{(\tau_0\tau_1)^{1/2}} \int_0^t e^{-\frac{(\tau(z_1)+\tau_0)t'}{2\tau_0\tau(z_1)}} \bar{I}_0 \left[ \frac{\tau_0 - \tau(z_1)}{2\tau_0\tau(z_1)} t' \right] dt' = \\ &= -\frac{2I_0\tau_1 z_1}{(r^2 + z_1^2)^{3/2}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \frac{2\tau_0\tau_1}{(\tau_0 - \tau_1)\sqrt{\pi(\tau_0 - \tau_1)}} + \dots \right) \end{aligned} \quad (2.9.38)$$

$I_0(u)$  – функция Бесселя мнимого аргумента.

При  $z > z_1$  и  $\alpha z/2 \gg 1$  вычисления вертикальной составляющей напряженности электрического поля приводят к следующему результату:

$$\begin{aligned} E_z(z, t) &= \frac{I_0\tau\alpha z}{r^2 + z^2} \left[ 1 + \frac{2}{\alpha(r^2 + z^2)^{1/2}} \right] e^{-\frac{\alpha}{2}(z-z_1)} e^{-\frac{\alpha}{2}\sqrt{r^2+z^2}} \times \\ &\times \left\{ 1 - e^{-\frac{t}{\tau(z)}} - \int_0^t E_1\left(\frac{t-\tau}{\tau_1}\right) \left( \int_0^\tau \frac{1}{\tau(z)} e^{-\frac{\tau-\tau'}{\tau(z)}} \frac{1}{\tau_0} \nu\left(\frac{\tau'}{\tau_0}\right) d\tau' \right) \right\} d\tau, \\ E_1\left(\frac{t}{\tau_1}\right) &= \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\tau_1}u} \frac{du}{u}, \quad \nu\left(\frac{t}{\tau_0}\right) = 1 + \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{t}{\tau_0}(1+x)}}{\pi^2 + \ln^2 x} dx \end{aligned} \quad (2.9.39)$$

При  $t \rightarrow \infty$   $E_z(z, t)$  стремится к стационарному значению с характерными временами  $\tau_0, \tau(z), \tau(z_1)$ . Таким образом, на основе потенциального приближения получено аналитическое решение задачи, описывающей процесс установления стационарного электрического состояния в атмосфере с экспоненциальной проводимостью при вклю-

чении электрического тока заряжения, приводящего к генерации электрических зарядов в грозовом облаке. Характерной особенностью полученного решения является наличие двух временных стадий:  $t < \tau_0$  и  $t > \tau_0$ , где  $\tau_0$  – время электрической релаксации вблизи земной поверхности. Для времен, малых по сравнению с временем электрической релаксации  $\tau_0$ , роль электрической проводимости мала. Если к моменту  $t = 0$  облако накопило электрический заряд, достаточный для разряда облако-земля и облако-облако и после разряда в облаке остался заряд  $Q$ , то полученное решение (2.9.25) описывает процесс распада этого заряда, при этом характерное время уменьшения напряженности электрического поля при  $z = 0$  убывает с увеличением расстояния от источника, что находится в согласии с экспериментальными данными, приведенными в (Illingworth, 1972). Если при этом ток заряжения  $I_0 \neq 0$ , то как следует из (2.9.29) и (2.9.30), при  $I_0 \sim 10\text{А}$  и  $t \sim 10\text{с}$  в облаке может возникнуть заряд  $Q \sim 100\text{Кл}$ , что приведет опять к разряду в облаке и процесс опять повторяется. Возникает совокупность разрядно-восстановительных процессов при  $I_0 \neq 0$ , характерных для грозового облака. При  $t > \tau_0$  процесс установления стационарного электрического состояния в атмосфере определяется ее электрической проводимостью и, как показывают приведенные выше расчеты, характерными временами электрической релаксации  $\tau_0$ ,  $\tau(z)$  и  $\tau(z_1)$ .

#### Приложение 2.10. Функции Бесселя

Функции Бесселя возникают при решении Лапласа в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ ;

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.10.1)$$

Это уравнение решается методом разделения переменных. Для разделения переменных произведем подстановку

$$\Phi(r, \varphi, z) = R(r)Q(\varphi)Z(z) \quad (2.10.2)$$

Путем обычных преобразований получаем три обычных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z &= 0 \\ \frac{d^2 Q}{d\varphi^2} + \nu^2 Q &= 0 \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) R &= 0 \end{aligned} \quad (2.0.3)$$

Первые два уравнения имеют решения:

$$\begin{aligned} Z(z) &= e^{\pm kz} \\ Q(\varphi) &= e^{\pm i\nu\varphi} \end{aligned} \quad (2.10.4)$$

Для того, чтобы потенциал  $\Phi$  был однозначным параметр разделения  $\nu$  должен быть целым. Параметр  $k$  пока не наложены граничные условия в направлении  $z$  остается произвольным. Мы будем предполагать  $k$  действительным. Радиальное уравнение приводится к стандартной форме заменой  $x = kr$ . Оно принимает при этом вид:

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0 \quad (2.10.5)$$

Это уравнение называется уравнением Бесселя, а его решения — функциями Бесселя порядка  $\nu$ . Представляя решение в виде степенного ряда типа:

$$R(x) = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^j \quad (2.10.6)$$

находим, что

$$\alpha = \pm \nu, a_{2j} = -\frac{1}{4j(j+\alpha)} a_{2j-2}, j=0,1,2,\dots \quad (2.10.7)$$

Коэффициенты при всех нечетных степенях  $x^j$  равны нулю. Итерация рекуррентной формулы дает:

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j \Gamma(\alpha+1)}{2^{2j} j! \Gamma(j+\alpha+1)} a_0 \quad (2.10.8)$$

Постоянную  $a_0$  обычно принимают равной  $a_0 = [2^\alpha \Gamma(\alpha+1)]^{-1}$ . При этом два решения уравнения записываются в виде:

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j+\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \\ J_{-\nu}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j! \Gamma(j-\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \end{aligned} \quad (2.10.9)$$

Эти два решения называются функциями Бесселя первого рода порядка  $\nu$  и  $-\nu$ . Если  $\nu$  не целое число, то функции  $J_\nu(x)$  и  $J_{-\nu}(x)$  образуют пару линейно независимых решений дифференциального уравнения Бесселя второго порядка и общее решение этого уравнения представляется в виде:

$$R(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x) \quad (2.10.10)$$

При целых  $\nu$  эти решения линейно зависимы, т.к. если  $\nu = m$ , то имеет место соотношение:

$$J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x) \quad (2.10.11)$$

Поэтому при целых  $\nu$  нужно искать еще другое решение, линейно независимое от  $J_\nu(x)$ . Даже при не целых  $\nu$  принято вместо пары функций  $J_\nu(x)$  и  $J_{-\nu}(x)$  рассматривать другую пару, а именно  $J_\nu(x)$  и  $Y_\nu(x)$ , где  $Y_\nu(x)$  - так

называемая функция Неймана (функция Бесселя второго рода), определяемая соотношением:

$$Y_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \quad (2.10.12)$$

Для нецелых  $\nu$ . очевидно функция  $Y_\nu(x)$  линейно независима от  $J_\nu(x)$ . Можно показать, что в пределе. когда  $\nu$  стремится к целочисленному значению функция  $Y_\nu(x)$  остается линейно независимой от  $J_\nu(x)$ .

Функциями Бесселя третьего рода или функциями Ханкеля называются следующие линейные комбинации функций  $J_\nu(x)$  и  $Y_\nu(x)$ :

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iY_\nu(x), \\ H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iY_\nu(x) \end{aligned} \quad (2.10.13)$$

Так же как пара функций  $J_\nu(x)$  и  $Y_\nu(x)$ , пара функций Ханкеля образует фундаментальную систему решений уравнения Бесселя.

Все эти функции ( $J_\nu, Y_\nu, H_\nu^{(1)}, H_\nu^{(2)}$ ) удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$\Omega_{\nu-1}(x) + \Omega_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} \Omega_\nu(x) \quad (2.10.14)$$

$$\Omega_{\nu-1}(x) - \Omega_{\nu+1}(x) = 2 \frac{d\Omega_\nu(x)}{dx} \quad (2.10.15)$$

где:  $\Omega_\nu(x)$  - любая из цилиндрических функций порядка  $\nu$ . В справедливости этих соотношений легко убедиться, исходя из представления решений в виде ряда (2.10.9).

При малых значениях аргумента ( $x \ll 1$ ) имеем следующие представления для функций Бесселя, выписывая первые члены разложения:

$$J_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \quad (2.10.16)$$

$$Y_\nu(x) \rightarrow \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{x}{2} + 0.5772\dots\dots\right), \quad \nu = 0,$$

$$Y_\nu(x) \rightarrow -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \quad \text{при } \nu \neq 0 \quad (2.10.17)$$

Здесь  $\nu$  считается действительным и неотрицательным.

При  $x \gg 1$

$$\begin{aligned} J_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \\ Y_\nu(x) &\rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned} \quad (2.10.18)$$

Переход от области «малых» значений  $x$ , описываемых выражениями (2.10.16) и (2.10.17), к области больших значений, где справедливы асимптотические формулы, имеет место при  $x \approx \nu$ .

Из асимптотического разложения (2.10.18) видно, что каждая функция Бесселя первого и второго рода имеет бесконечное количество корней.

В случае корней функции Бесселя  $J_\nu(x)$  имеем:

$$J_\nu(x_{n\nu}) = 0, \quad n=1, 2, 3, \dots \quad (2.10.19)$$

Здесь за  $x_{n\nu}$  обозначен  $n$ -й корень функции  $J_\nu(x)$ . Приведем первые три корня для трех значений  $\nu$ :

$$\nu=0 \quad x_{0n} = 2,405, 5,520, 8,654 \dots \dots \dots$$

$$\nu=1 \quad x_{1n} = 3,832, 7,016, 10,173 \dots \dots \dots$$

$$\nu=2 \quad x_{2n} = 5,136, 8,417, 11,520 \dots \dots \dots$$

Для больших  $n$  значения корней (по крайней мере до трех значащих цифр)



Можно находить по довольно точной асимптотической формуле

$$x_m \approx n\pi + \left(\nu - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}$$

В заключение отметим, что если в первом уравнении (2.10.3) положить постоянную разделения равной  $-k^2$ , то для функции  $R(r)$  получим уравнение:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left(k^2 + \frac{\nu^2}{r^2}\right) R = 0 \quad (2.10.20)$$

Подстановка  $kr = x$  дает

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{\nu^2}{x^2}\right) R = 0 \quad (2.10.21)$$

Решения этого уравнения называются модифицированными функциями Бесселя. Они очевидно представляют собой просто функции Бесселя от чисто мнимого аргумента. Обычно в качестве двух линейно независимых решений выбирают функции  $I_\nu(x)$  и  $K_\nu(x)$ , определяемые следующим образом:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) \quad (2.10.22)$$

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{\nu+1} H_\nu^{(1)}(ix) \quad (2.10.23)$$

Эти функции действительны при действительных значениях аргумента. В пределе для малых и больших значений аргумента справедливы следующие представления (при действительном  $\nu \geq 0$ ):

При  $x \ll 1$

$$I_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right) \quad (2.10.24)$$

$$K_\nu(x) = -\left(\ln \frac{x}{2} + 0,5772\dots\right) \text{ при } \nu = 0$$

$$K_\nu(x) \rightarrow \frac{\Gamma(\nu)}{2} \left(\frac{2}{x}\right)^\nu \text{ при } \nu \neq 0 \quad (2.10.25)$$

При  $x \gg 1, \nu$

$$I_\nu(x) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^x \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right]$$

$$K_\nu(x) \rightarrow \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x} \left[1 + O\left(\frac{1}{x}\right)\right] \quad (2.10.26)$$

Приложение 2. 11. Гипергеометрическая функция.

Эта функция возникает при решении гипергеометрического уравнения Гаусса:

$$x(x-1)y'' + [(\alpha + \beta + 1)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0 \quad (2.11.1)$$

Решение этого уравнения для интервала  $0 < x < 1$  представляется в виде гипергеометрического ряда:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)} x^k =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_{\alpha+k-1}^k C_{\beta+k-1}^k}{C_{\gamma+k-1}^k} x^k \quad (2.11.2)$$

Здесь  $\gamma$  не должно не равняться никакому целому неположительному числу. Этот ряд заведомо сходится при  $|x| < 1$ . Приведем некоторые частные случаи гипергеометрической функции для целого натурального числа  $n$ :

$$x F(1, 1, 2, -x) = \ln(1+x)$$

$$F(-n, \beta, \beta, -x) = (1+x)^n$$

$$F(-n, 1, -n, x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad (2.11.3)$$

Другие случаи представления этой функции представлены в книге Камке (1971).

Из (2.11.2) непосредственно следует

$$F'(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x) \quad (2.11.4)$$

Если  $\gamma$  — не целое число, то общее решение уравнения (2.11.1) записывается в следующем виде:

$$y(x) = C_1 F(\alpha, \beta, \gamma, x) + C_2 x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x) \quad (2.11.5)$$

Случай, когда  $\gamma$  — целое, отрицательное число подробно рассматривается в (Камке, 1972) и в настоящем приложении не рассматривается.

### Список литературы

Афиногенов Л.П., Грушин С.И., Романов Е.В. Аппаратура для исследований приземного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1977, 319 с.

Чалмерс Дж. А. Атмосферное электричество. Л.: Гидрометеоиздат. 1974, 420 с

Брикар Дж. Влияние радиоактивности и загрязнений на элементы атмосферного электричества. Проблемы электричества атмосферы. Л.: Гидрометеоиздат, 1969, с.68-105.

Hoppel W.A., Frick G.M. Ion- aerosol attachment coefficients and the steady state charge distribution on aerosols in a bipolar environment // Aerosol Sci. and Tech., 1986, V.5, NO 1, P. 1- 21.

Атмосфера. Справочник (справочные данные, модели). Л.: Гидрометеоиздат, 1991, 506 с.

Гершман Б.Н. Динамика ионосферной плазмы. М.: Наука, 1974, 256 с.

Акасофу С.И., Чепмен С. Солнечно- земная физика. М.: Мир, 1974, 384 с.

Сальм Я.И. Баланс аэроионов при симметричной стационарной ионизации. Третий Всесоюзный симпозиум по атмосферному электричеству. Тезисы докладов. Тарту, 28-31 октября. 1986

Спектр подвижности аэроионов в приземном слое // Таммет Х.Ф., Сальм Я.И., Ихер Х.Р., Тамм Э.М., Мирме А.А., Кикас Ю.Э. Атмосферное электричество. Труды III Всесоюзного симпозиума. Л.: Гидрометеоиздат, 1988, с.48 – 50.

Israel H. Atmospheric electricity.// Ierysalem, 1973, V.2, 796 P.

Israelson S., Knudsen E. Effect of radioactive fallout from nuclear power plant accident on electrical parameters // J. Geophys. Res., 1986, V. 91, NO D11, p. 11909-11910.

Огуряева Л. В., Шварц Я.М. Многолетний ход величин атмосферного электричества приземном слое. Метеорология и гидрология, 1987, № 7, с.59 -64

Chalmers J.A. The theory of the electrode effect III // J. Atm. Terr.Phys., 1966, V.28, P. 1029-1033.

Hoppel W. A. Theory of the electrode effect // J. Atm. Terr. Phys., 1967, V. 29, NO6

Hoppel W. A., Gatham S.G. Determination of the eddy diffusive coefficients from atmospheric electrical measurements. // J. Geophys. Res., 1971, V.76, NO 6, P.1467 - 1477.

Iordanov D. On the stationary electric field in the surface air layer.// Pure and Appl Geophys., 1970, V. 79, NO 1 p. 85-91.

Latham D. G., Poor H.W. A time- dependent model of the electrode effect // J.Geophys. Res., 1972, V.77, NO 15, P.2669-2676.

Tuomi T.J. The atmospheric electrode effect over snow. // J. Atm. and Terr. Phys., 1982, V. 44, P. 737- 745.

Шварц Я. М. Электропроводность воздуха и аэрозоль. Труды ГГО, 1980, вып. 491, с.136-140.

Имянитов И.М., Шифрин К.С.. Современное состояние исследований атмосферного электричества. УФН, 1962, вып. 4, с 593- 642.

Раменский Л. А., Дячук В. А. Исследование электрических характеристик дымовых факелов по данным самолетных и наземных наблюдений. Атмосферное электричество. Труды 2 Всесоюзного симпозиума. Л: Гидрометеоиздат, 1984, с.39-41.

Таммет Х. Ф.. Электрические параметры загрязненности воздуха. Уч. зап. ТГУ, 1977, вып. 443, с.48-51.

Борзилов В.А., Седунов Ю.С., Степанов А.С. Кинетическое уравнение ионной зарядки облачных частиц. Изв. АН СССР, ФАО, 1973, Т.9, № 4, с. 386-398.

Комаров Н.Н. Теория изучения ионизационного состояния атмосферы. Л.: Гидрометеиздат, 1987, 159с.

Hoppel W.A. Ion-aerosol attachment coefficients and diffusional charging of aerosols Electrical Process in Atmosphere. Verlag, Darmstadt, 1977, p. 60-69.

Мучник В.М., Фишман Б. Е. Электризация грубодисперсных аэрозолей в атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1982, 207с.

Морозов В.Н. Диффузионное заряджение облачных частиц в ионизованной среде при наличии коагуляции. Труды ГГО, 1984, вып. 474, с.67- 75.

Седова Г.Л., Черный Л.Т.

Уравнения электрогидродинамики слабоионизованных аэрозолей с диффузионной зарядкой частиц дисперсной фазы. Изв. АН СССР. Механика жидкостей и газов. 1986, №1, с.54- 60

Седунов Ю.С. К теории диффузионного заряджения частиц произвольной формы. Инженерно- физический журнал. 1959, Т. II, № 12, с.57-63.

Куповых Г.В., Морозов В.Н., Шварц Я. М. Теория электродного эффекта в атмосфере. Таганрог.Изд. ТРТУ. 122с.

Морозов В.Н., Куповых Г.В. Влияние турбулентности и аэрозоля на распределение электрических параметров в приземном слое атмосферы. Труды ВГИ, 1989, вып. 77, с. 15-21.

Willet J.C. An analysis of the electrode effect in the limit of strong turbulent mixing // J. Geophys. Res., 1978, V. 83, P. 402- 408.

Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1971, 576 с.

Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976, 456с

Алвен Г., Фельтхаммер К.Г. Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967, 260 с

Зилитинкевич С.С. Динамика пограничного слоя атмосферы. Л.: Гидрометеиздат. 1970. 290 с.

Монин А.С., Обухов А.И. Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы. Труды Геофизического института АН СССР, 1954, № 24 (151), с.163-187.

Морозов В.Н. Распределение электрических характеристик в приземном турбулентном слое атмосферы. Труды ГГО, 1986, вып. 498, с.106-118.

Куповых Г.В., Морозов В.Н. Классический (нетурбулентный) электродный эффект в приземном слое. Известия ВУЗОВ. Северо-Кавказский регион, 2003, №2 (121), с.43-46.

Морозов В.Н. Модели глобальной атмосферно-электрической цепи. ВНИИГМИ- МЦД. Серия Метеорология. Обзорная информация. Вып.8, 1981.

Морозов В.Н.. Теоретическое моделирование электрических процессов в нижних слоях свободной атмосферы. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико- математических наук. Санкт- Петербург, 1996.

Имянитов И.М. Строение и условия развития грозовых облаков. Метеорология и гидрология, 1981, №3, с.4-17

Смирнов В.В. Ионизация в тропосфере. Санкт- Петербург, 1992, 311с

Ягодинский В.Н. Александр Леонидович ЧИЖЕВСКИЙ. М.: Наука, 1987, 316 с.

Makino M., Ogawa T. Quantitative Estimation of Global Circuit. J. Geophys. Res. 1985, v.90, NO D4, p.5961-5966

Makino M., Ogawa T. Responses of atmospheric electric field and air- earth current to variation of conductivity profiles. J. Atmos. Terr. Phys., 1984, v. 46, NO 5, p.431- 435

Ogawa T. Fair – weather electricity. J. Geophys. Res., 1985, v.90, NO D4, p.5951-5960.

Roble R.G. On modeling component processes in the Earths global electric/ circuit. J. Atmos. Terr. Phys., 1991, v.53, NO 9, p.831- 842

Hays P.B., Roble R.G. Quasi- static model of global atmospheric electricity I The Lower atmosphere. J. Geophys. Res., 1979, v.84, NO A7, p.3291-3305.

Sarkota B.K., Varshneya P. On the global atmospheric electrical circuit. J. Atmos. Terr. Phys., 1990, v.52, NO1, p.1-20

Boeck W.I. Meteorological consequences of atmospheric krypton- 85. Science, 1976, NO4249, p. 195- 198.

Коклев Ю.И. Физическая экология. М. 2000

Электричество атмосферы – как биофактор. Атмосферное электричество. Труды II Всесоюзного симпозиума. Л.: Гидрометеиздат, 1984, с.77-91.

Биологическое действие атмосферного электричества. Атмосферное электричество. Труды III Всесоюзного симпозиума. Л.: Гидрометеиздат, 1988, с.272- 285.

Крушати́на И.А., Шварц Я.М., Щукин Г.Г. Возможности использования связи между поведением электрического поля атмосферы и выпадением осадков в прогнозировании неблагоприятных погодных условий. VI Российская конференция по атмосферному электричеству. Сборник трудов. Нижний Новгород, 2007 с.267- 268.

Стыро Б.И., Будкус Д.В. Геофизические проблемы криптона- 85 в атмосфере. Вильнюс, Моклас, 1988, 139 с.

Смеркалов В.А. Аппроксимация среднего распределения аэрозольных частиц по размерам. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1984, Т.20, № 4, С. 341-348.

Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая механика. ч.1, М.: Наука. 1965.

Дж. Джексон. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965, 702с.



H.Volland. Global, Quasi-Static Electric Fields in the Earth's Environment. Electrical Processes in Atmospheres. H. Dolezalek, R. Reiter (Editors). Proceeding of the Fifth International Conference on Atmospheric Electricity held at Garmisch-Partenkirchen (Germany), 2-7 September 1974, p.509-528, Verlag, Darmstadt, 1977.

Gurevich A.V., Krylov A.L., Tsedilina E.E. Electric fields in the Earth's magnetosphere and ionosphere. Space Sci. Rev. V.19, NO1. P.59-160.1976.

В.Н. Морозов, О.А. Трошичев. Моделирование вариаций полярного атмосферного электрического поля в полярной атмосфере, связанного с магнитосферными продольными токами. Геом агнетизм и аэрономия, 2008, т.48, № 6, с.759-769.

Ли Цзун-Дао. Математические методы в физике. М.: Мир, 1965.

Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966.

Frank-Kamenetsky A.V., Troshichev O. A., Papitashvili V.O., Burns G.B. Variations of atmospheric electric field in the near pole region related to interplanetary magnetic field. J.Geophys. Res. V.106, NO A1, P.179-190, 2001.

Морозов В.Н. 2006. Распределение электрического поля, создаваемого нестационарным током заряжения грозового облака в атмосфере с неоднородной электрической проводимостью. Труды НИЦДЗА (Филиала ГГО) вып.7 (555), с.51-67.

Грунская Л.В., Морозов В.Н., Ефимов В.А., Гаврилов И.Н., Тарасов А.В. 2003. Лунно-солнечные приливы в электрическом поле атмосферы Земли.- Известия Вузов, Физика, №12, с.71-77.

Грунская Л.В., Морозов В.Н., Ефимов В.А., Исакевич В.В. 2005. Электрическое поле приземного слоя атмо-

сферы в ультранизкочастотном диапазонеолнечные. - Известия Вузов, Физика, №8, с.33-39.

*Морозов В.Н.* Об установлении стационарного электрического поля в атмосфере, содержащей слой аэрозольных частиц // Труды НИЦДЗА (Филиала ГГО), 2002, вып.4 (552). С.33-43.

*Морозов В.Н.* Модель нестационарного электрического поля в нижней атмосфере // Геомагнетизм и аэрномия, 2005, т.45, №2. С.268-278.

*Селезнева Е.С., Юдин М.И.* О закономерностях вертикального распределения ядер конденсации в атмосфере. Труды ГГО.1960.Вып.105. С.37-42.

*Чубарина Е.В.* Связь электрического поля атмосферы с ядрами конденсации. Труды ГГО.1964.Вып.157. С.20-24.

*Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.: Наука, т.3, 1969, 672с.

*Illingworth A.J.* Electrical field recovery after lightning as the response of the conducting atmosphere to field change // Quart.J.Roy. Meteor. Soc., 1972, v.98,-No417. P.604-616.

*Альвен Х.* Космическая плазма. М. Мир, 1983-216

*Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М. Наука. 1971.

*Беспалов П.А., Чугунов Ю.В.* Вращение плазмосферы и природа атмосферного электричества. // ДАН. Т.337. № 4. С.467-469. 1994.

*Давыденко С.С., Беспалов П.А.* Проявление широтного хода проводимости атмосферы в распределении электрических полей и токов глобальной цепи // Геомагнетизм и аэрномия. Т.40. № 2. С.71-77. 2000.

*Диткин В.А., Прудников А.П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Наука. 1974.

Имянитов И.М. Строение и условие развития грозных облаков // Метеорология и гидрология. № 3. С.5-17. 1981.

Морозов В.Н. Модели глобальной атмосферно-электрической цепи. Серия Метеорология. Обзорная информация, вып.8. Обнинск. С.1-56. 1981.

Морозов В.Н., Селезнева А.Н. К обобщению модели глобальной атмосферно-электрической цепи с учетом влияния пограничного слоя атмосферы. // Труды ГГО, вып.514. С.60-74. 1988.

Морозов В.Н. Расчет электрических полей грозных облаков для инициирования электрических разрядов облако-верхние слои атмосферы. // Геомагнетизм и аэрономия. Т.42. № 1. С.121-129. 2002.

Селезнева А.Н. К вопросу о роли грозных генераторов в атмосферно-электрической цепи. // Атмосферное электричество. Труды II Всесоюзного симпозиума. Л.: Гидрометеиздат. С.17-19. 1984.

Blakeslee R.J., Christian H.J., Vonnegut B. Electrical Measurements over Thunderstorms. // J.Geophys.Res. V.94. No D11. P.13135-13140. 1989.

Driscoll K.T., Blakeslee R.J., Baginski M.E. A Modeling Study of the Time-Averaged Electric Currents in the Vicinity of Isolated Thunderstorms // J.Geophys.Res. V.97. No D11. P.11535-11551. 1992.

Hill R.D. Spherical capacitor hypothesis of the Earth's electric field // Pure and Applied Geophys. V.84. No 1. P.67-75. 1971.

Holzer R.E., Saxon D.S. Distribution of electrical conduction current in the vicinity of thunderstorms // J.Geophys.Res. V.57. No 2. P.207-216. 1952.

Latham J., Dye J.E. Calculations on the Electric Development of a Small Thunderstorm // J.Geophys.Res. V.94. No D11. P.13141-13144. 1989.

Mühleisen R. The Global Circuit and its Parameters-in: Electrical Processes in Atmosphere, Steinkopff, Darmstade, West Germany. P.467-480. 1977.

Roble R.G., Hays P.B. Quasi-Static Model of Global Atmospheric Electricity. II Electrical Coupling Between the Upper and Lower Atmosphere // J. Geophys. Res. V.84. No A12. P.7247-7256. 1979.

Rutledge S.A., Lu C., Mac Gorman D. Positive Cloud-to-Ground Lightning in Mesoscale Convective System // J.Atmos.Science. V.47. No 17. P.2085-2100. 1990.

Wilson C.T.R. Investigations on lightning discharges and on electric field of thunderstorms // Phil.Trans.Roy.Soc., London, Ser A. V.221. No 1. P.73-115. 1925.

Franz R.C., R.J.Nemzek, and J.R.Winckler. Television image of large electrical discharges above thunderstorm system // Science. 1990. V.249. No 4964. P.48.

Winckler J.R. Further observations of cloud-ionosphere electrical discharge above thunderstorm // J.Geophys.Res. 1995. V.100. No D7. P.14335.

Winckler J.R., W.A.Lyons, T.E.Nelson, R.J.Nemzek. New-high-resolution ground-based studies of sprites // J.Geophys.Res. 1996. V.101. No D3. P.6997.

Vaughan O.H., Jr.R.Blakeslee, W.L.Boeck, B.Vonnegut, M.Brook, and J.Mc.Kube Jr. A cloud-to-space lightning as recorded by the space shuttle payload by TV cameras // Mon.Weather.Rev. 1992, V.120. No 7. P.1459.

Sentmann D.D., E.M.Wescott, D.L.Osborne, D.L.Hampton and M.J.Heavner. Preliminary results from the Sprites 94 aircraft campaign: I.Red sprites // Geophys. Res. Lett.1995, V.22. No 10. P.1205.

Wescott E.M., D.D.Sentmann, D.Osborne, D.Hampton and M.Heavner. Preliminary results from the sprites 94 aircraft campaign: 2.Bluejets // *Geophys.Res.Lett.* 1995, V.22. No 10. P.1209.

Pasko V.D., U.S.Unan and T.F.Bell. Blue jets produced by quasi-electrostatic pre-discharge thunderclouds fields // *Geophys. Res.Lett.* 1996. V.23. No 3. P.301.

Pasko V.D., U.S.Unan, Y.N.Taranenko, and T.F.Bell. Heating, ionization, and upward discharges in the mesosphere due to intense quasistatic thundercloud fields // *Geophys. Res.Lett.* 1995. V.22. No 4. P.365.

Gurevich A.V., Milikh G.M., Rausell-Dupre. Runaway electron mechanism of air breakdown and preconditioning during at thunderstorm // *Phys.Lett.A.* 1992. V.165. No 5-6. P.463.

Taranenko Y.N., U.S.Unan, T.F.Bell. Interaction with lower ionosphere of electromagnetic pulses from lightning: heating, attachment and ionization // *Geophys. Res. Lett.* 1993. V.20, No 15. P.1539.

Taranenko Y.N., U.S.Unan, T.F.Bell. The interaction with lower ionosphere of electromagnetic pulse from lightning: excitation of optical emission // *Geophys. Res.Lett.* 1993. V.20, No 23, P.2675.

Marshall T.S., M.Stolzenburg, W.D.Rust. Electric field measurements above mesoscale convective systems // *J.Geophys. Res.* 1996, V.101, No D3, P.6979.

Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функция Лежандра. М.: Наука. 1973. Т.1. 294 с.

Мишин Е.В., Ю.Я.Ружин, В.А.Телегин. Взаимодействие электронных потоков с ионосферной плазмой. Л.: Гидрометеиздат. 1989. 263 с.

Eack K.B., W.A.Beasley, W.D.Rust, T.C.Marshall, and M.Stolzenbur. X-ray pulses observed above a mesoscale con-

vective system // *Geophys. Res.Lett.* 1996. V.23. No 21. P.2915.

Uman M.A. The Lightning Discharge. International Geophysics Series. V.39. Academ'c Press. New-York. 1987. 377 p.

Hale L.C. Middle Atmosphere Electrical Structure, Dynamics and Coupling // *Adv. Space Res.* 1984. V.4. No 4. P.173.

Browning G.L., Tzur I., Roble R.G. A global time-dependent model of thunderstorms electricity. Part I: Mathematical properties of the physical and numerical models // *J.Atm.Sci.*, 1987, v.44, №15, p.2166-2177.

Hager W.W., Nisbet J.S., Kasha J.R., Wei-Chang Shann. Simulations of Electric Field with in a Thunderstorms // *J.Atm.Sci.*, 1989, v.46, №23, p.3542-3558.

Illingworth A.J. Electric field recoverg after lightning as the vespense of the conducting atmosphere to a field change // *Quart.J.Roy.Meteor.Soc.*, 1972, v.98, №417, p.604-616.

Kasemir H.W. Das Gewittergenerator im luflelektrischen Stromkreis I // *Zeitschrift für Geophysik*, 1959, J.25, H.1, p.33-64.

Mann J.J. Interaction of thunderstorm with conducting atmosphere // *J.Geophys.Res.*, 1970, v.75, №9, p.1697-1698.

Michnowski S. Electric field variations in a medium with variable conductivity, produced by a point charge above a conductive plane // *Acta geophysica Polonica*, 1973, v.21, №4, p.305-329.

Volland H. Atmospheric Electrodynamics // Berlin, Springer, 1984, 205 p.

Шишкин Н.С. Облака, осадки и грозовое электричество. Л.: Гидрометеоиздат, 1964, 402 с.

Шишкин Н.С. О диффузном заряджении облаков и туманов. ДАН СССР, 1967, т. 176, №6, с. 48-50.

Шишкин Н.С. Исследования заряжения капель в облаках и туманах, Труды ГГО, 1968, вып. 224, с. 77-86.

Борзилов В.А. Седунов Ю.С. О стационарных зарядах капель, обусловленных диффузией ионов. Труды ИЭМ, 1971, вып.23. с. 82-90.

Морозов В.Н. Атмосферные аэрозоли как усилители электрического поля атмосферы Естественные и антропогенные аэрозоли материалы международной конференции Санкт-Петербург., 1998, с.137-141

Морозов В.Н. Электродный слой в облачных системах Изв. ВУЗОВ ., Северо-Кавказский регион, Спецвыпуск 2010 г., с. 68-72.

Фортов В.Е., Храпак А.Г., Храпак С.А., Молотков В.И, Петров О.Ф. Пылевая плазма // Успехи физических наук, 2004, т. 174, №5, с. 495-544.

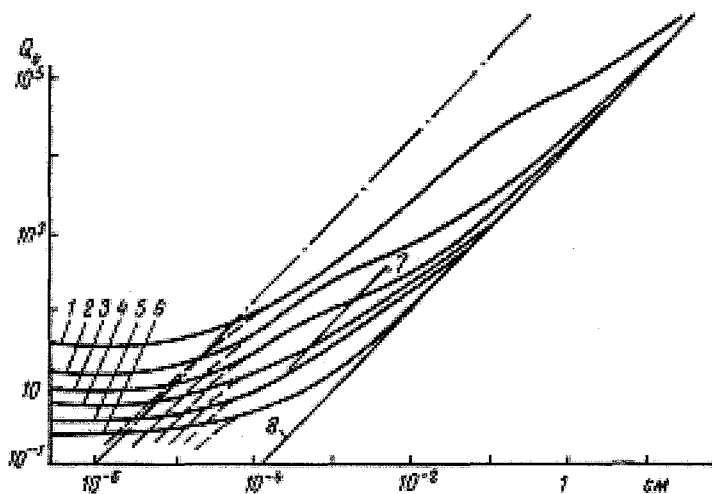


Рис. 1. Зависимость стационарного заряда капель в единицах  $\epsilon$  от радиуса капле для разных значений потенциала двойного слоя.

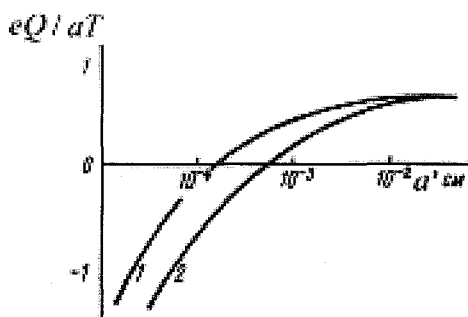


Рис. 2. Зависимость величины  $\frac{eQ}{aT}$  от радиуса капле для  $\Phi=0,05$  в (1) и  $\Phi=0,1$  в (2).



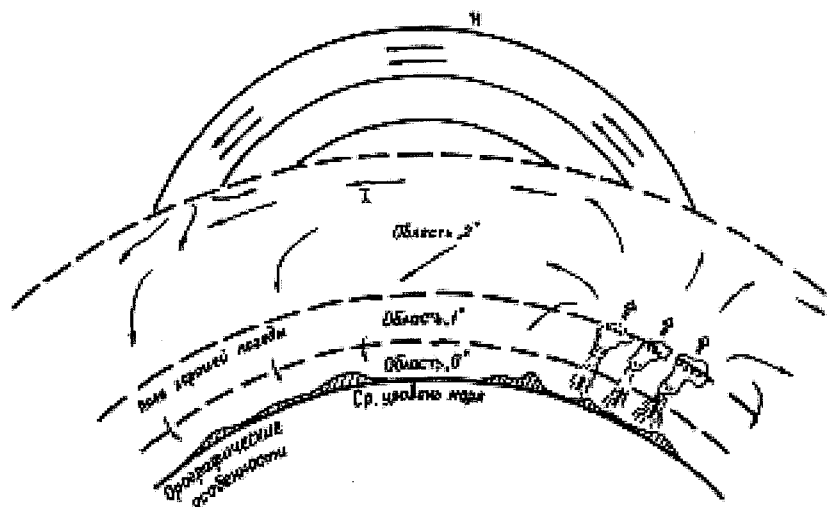


Рис.3 Модель глобальной геоэлектрической цепи (схема модели Робля-Хейса). Область "0" - область тропосферы, в которой учитываются орографические особенности Земли; Область "1" - нижняя тропосфера, содержащая токочные грозные источники; Область "2" - стратосфера и мезосфера. Выше этих областей расположены ионосфера, магнитосфера. И-силовые линии магнитного поля Земли.

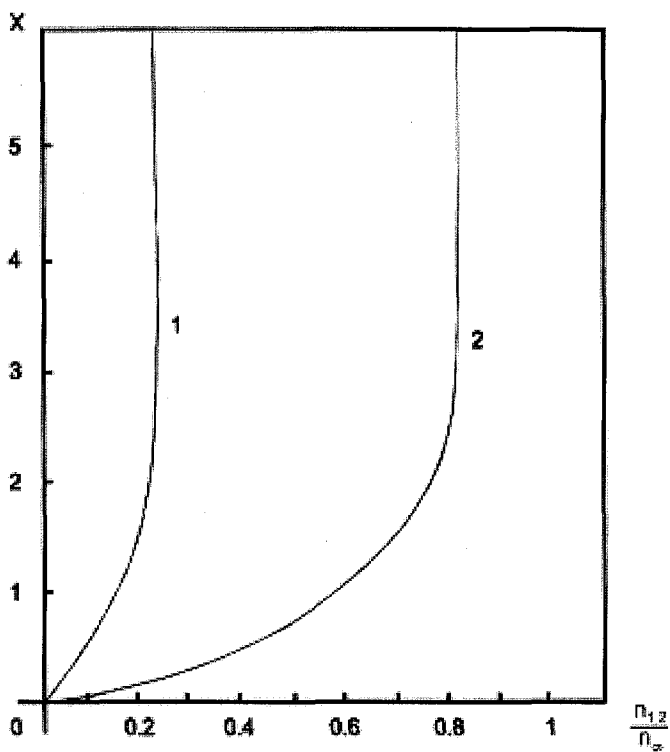


Рис. 4

Зависимость  $p_{1,2}/p_{\infty}$  от высоты для устойчивой стратификации приземного слоя при наличии аэрозольных частиц, концентрацией  $N$ .

1 -  $N = 10^6 \text{ м}^{-3}$ ,  $x = z/l_0$ ,  $l_0 = 7,8 D_0^2$  (см);

2 -  $N = 10^7 \text{ м}^{-3}$ ,  $x = z/l_0$ ,  $l_0 = 16 D_0^2$  (см);

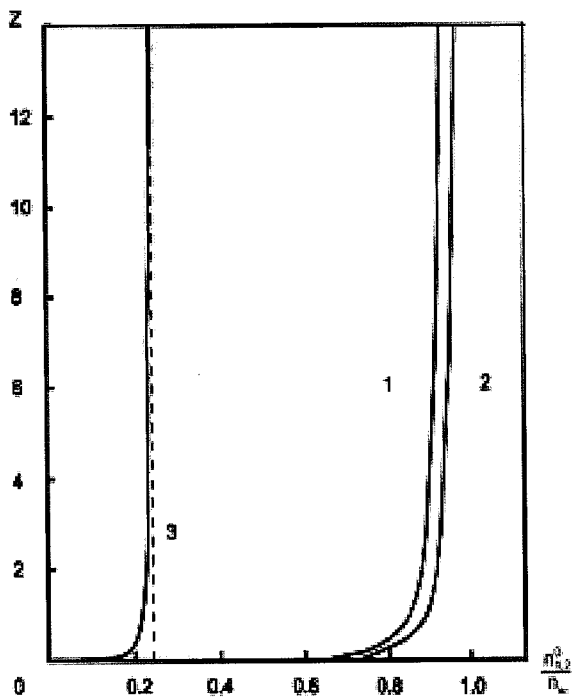


Рис. 5

Зависимость  $n_i / n_e$  от высоты для термически неустойчивой стратификации приземного слоя

- 1 - концентрация ионов определяется выражением  $n_i / n_e = 1 - (\frac{Z}{2})^{1/2}$
- 2 - концентрация ионов определяется выражением (13) [Кунових и др. 1998]
- 3 - концентрация ионов при  $N = 10^{10} \text{ м}^{-3}$

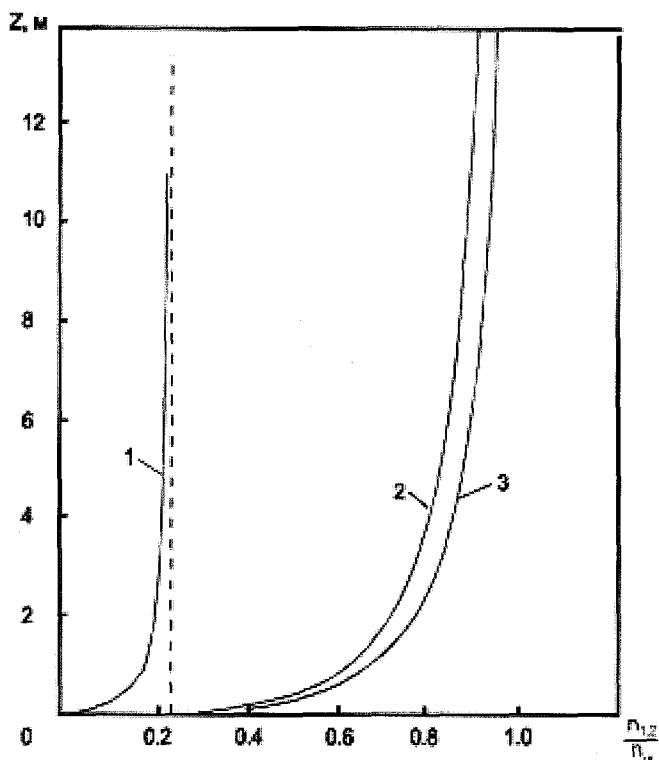


Рис. 6

Распределение  $\rho_p / \rho_a$  по высоте для приземного слоя с нейтральной стратификацией

- 1 - при  $D_0 = 0,2$  м/с и концентрации аэрозольных частиц  $Z = 10^{-6} \text{ м}^{-3}$ ;
- 2 - при  $D_0 = 0,2$  м/с,  $N = 0$ ;
- 3 - при  $D_0 = 0,1$  м/с,  $N = 0$ .

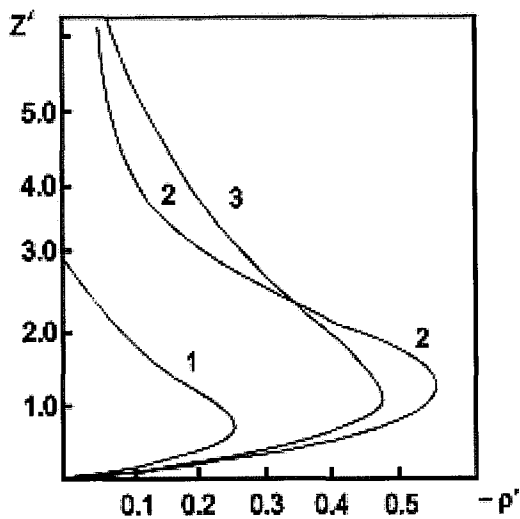


Рис. 7  
 Зависимость плотности зряда для устойчивой стратификации  
 приземного слоя.

1 – распределение, соответствующее концентрации взвешенных частиц  $N = 10^{18} \text{ м}^{-3}$   
 2,3 – согласно расчетам, проведенным в [Кузовых и др., 1998] при  $N=0$ .

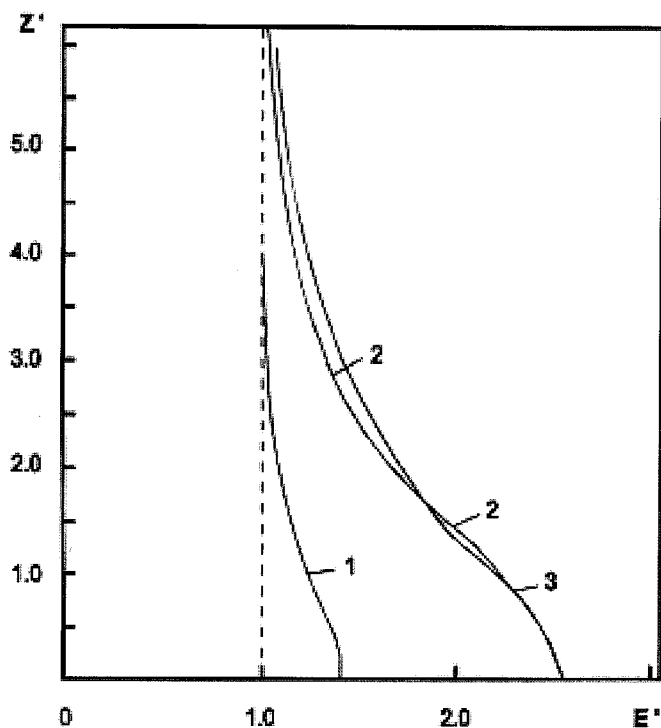


Рис. 8

Зависимость напряженности электрического поля от высоты для устойчивой стратификации приземного слоя.

- 1- распределение, соответствующее концентрации аэрозольных частиц  $N = 10^{10} \text{ м}^{-3}$   
 2,3 – согласно расчетам проведенным в [Кузюных и др., 1998 ] при  $N=0$

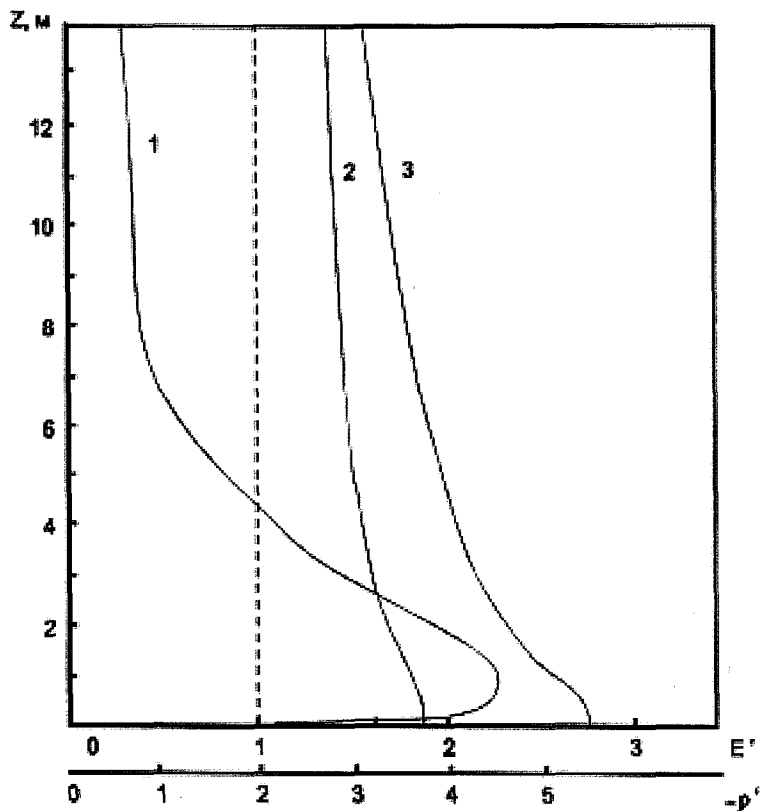


Рис. 9 ...

Зависимость плотности электрического заряда (кривая 1) и напряженности электрического поля (кривая 2) от высоты в приземном слое при наличии аэрозольных частиц ( $N = 10^{-7} \text{ м}^{-3}$ ,  $D = 0,2 \text{ м/с}$ );

3 - распределение напряженности электрического поля в отсутствие аэрозольных частиц при  $D = 0,2 \text{ м/с}$

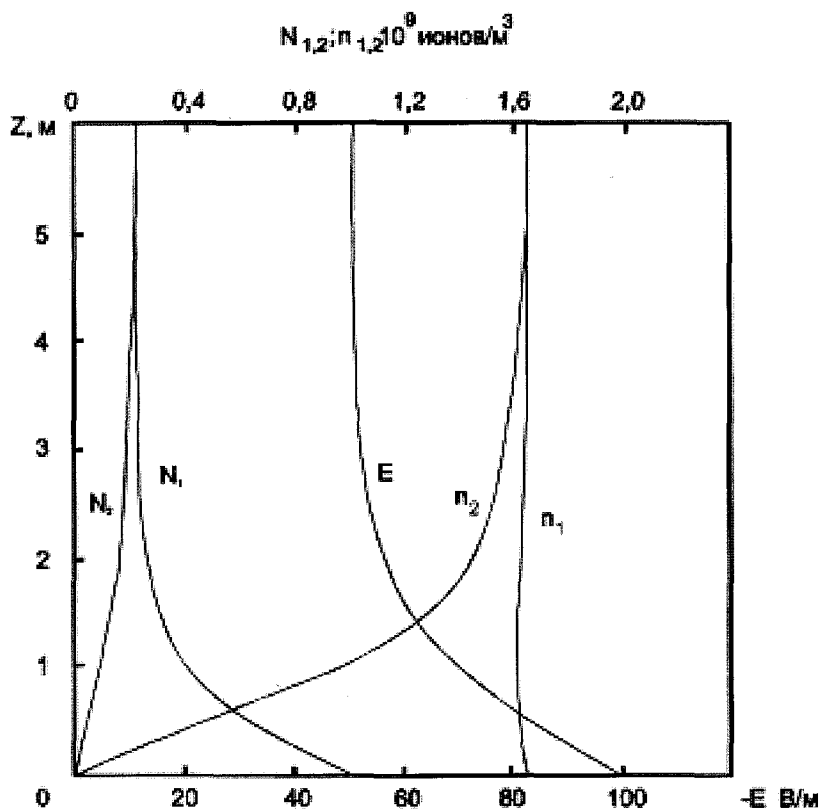


Рис. 10  
 Распределение  $n_{1,2}$  и  $E$  в электродном слое при  $N = 10^{18} \text{ м}^{-3}$  и  $E_0 = -100 \text{ В/м}$



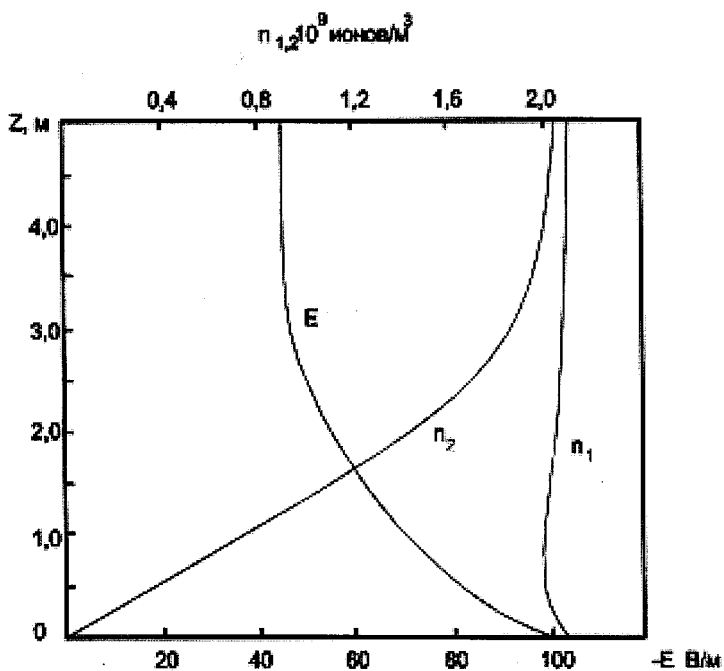
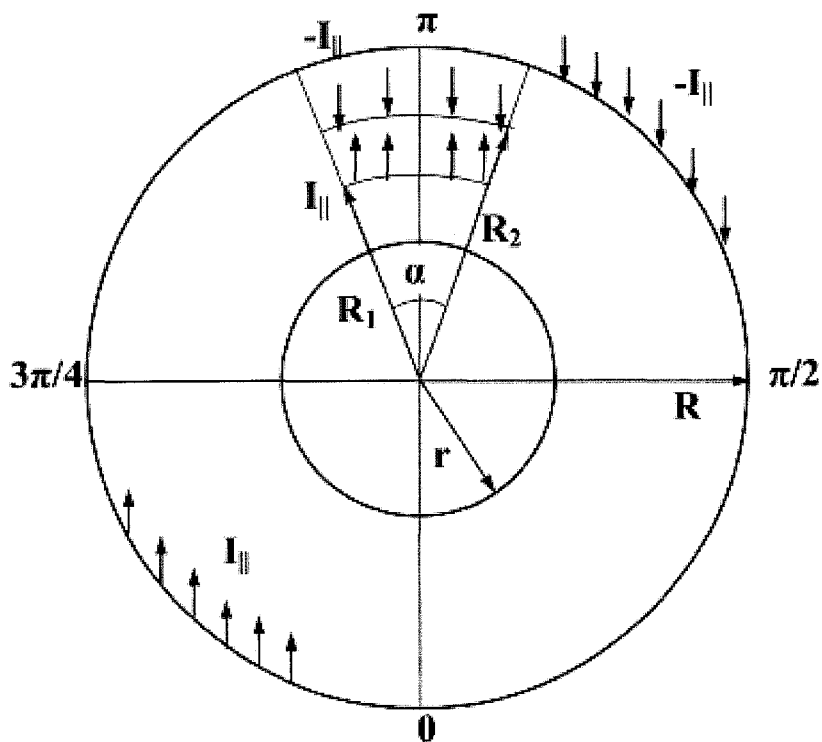


Рис. 11

Распределение концентраций положительных ( $n_1$ ) и отрицательных ( $n_2$ ) легких ионов, и электрического поля ( $E$ ) в нетурбулентном случае при значении  $E_0 = -100$  В/м.



**Рис.12**  
**Распределение продольных токов  $I_{\parallel}$  вдоль аврорального овала**  
**и дневного каспа**

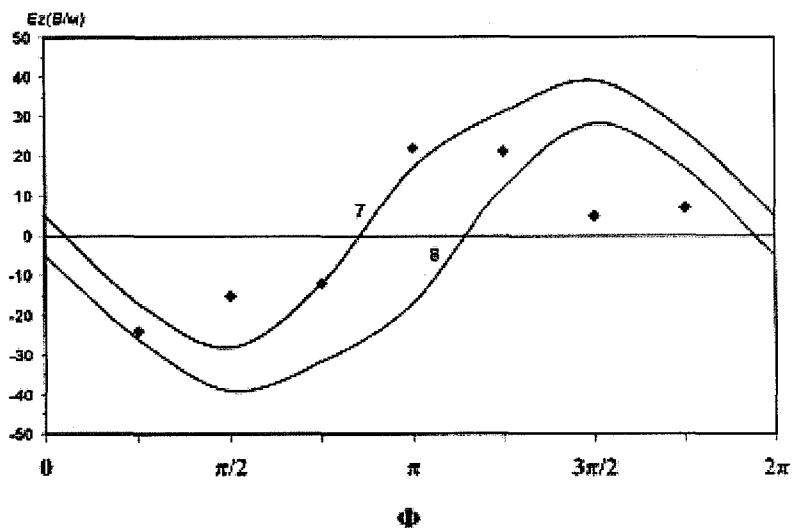
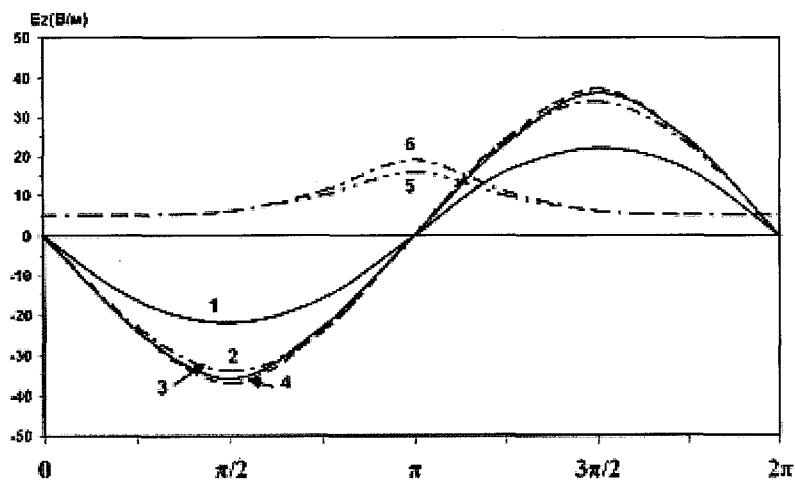
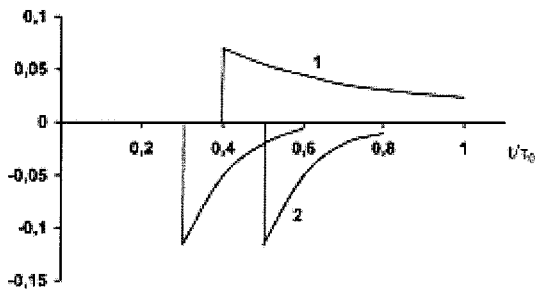


Рис.13

Напряженность атмосферного электрического поля вблизи земной поверхности, связанная с областью аврорального овала (модели 1 и 2) и областью дневного каспа (модель 3)

$$\frac{\Delta\varphi_{\infty}^{cb}}{\varphi_{\infty}^0} \cdot \frac{\Delta\varphi_{\infty}^{cc}}{\varphi_{\infty}^0}$$



$$\frac{\varphi_{\infty}(t)}{\varphi_{\infty}^0} \cdot \frac{E_z}{E_{z0}}$$

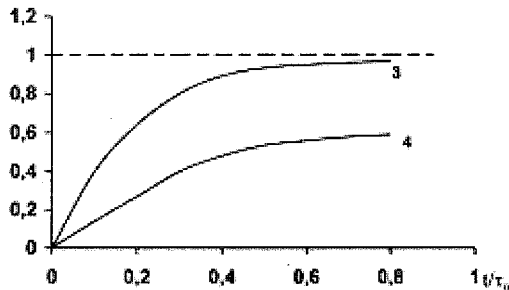


Рис.14

Изменение во времени вариаций потенциала ионосферы  $\Delta\varphi_{\infty}^{cc}$ , обусловленных разрядами облако-земля грозных генераторов, рассчитанное по формуле (2.7.45),  $n=1$   $\frac{T_0}{\tau_0} = \frac{T_0}{\tau_0} = 0,4$ ;  $N_1 = N$ ;  $\varphi_{\infty}^0 = 330 \text{ kВ}$ ;  $\Delta Q_{cb} = 10 \text{ Кл}$  (1). Изменение со временем вариаций потенциала ионосферы  $\Delta\varphi_{\infty}^{cb}$ , обусловленных внутрияблочными разрядами грозных генераторов, рассчитанное по формуле (2.7.39) при  $n=1$ , 2;  $\frac{T_1}{\tau_2} = \frac{T_1}{\tau_0} = 0,3$ ; (2).

Изменение со временем потенциала ионосферы  $\varphi_{\infty}(t)$  при включении в момент  $t=0$   $N$  грозных генераторов при  $\varphi_{\infty}^0 = 330 \text{ kВ}$ ;  $\Delta Q_{cb} = 30 \text{ Кл}$ ;  $|\Delta Q_{cb}| = 180 \text{ Кл}$  (3). Изменение со временем вертикальной составляющей напряженности электрического поля вблизи земной поверхности при включении в момент  $t=0$   $N$  грозных генераторов (4)

## Содержание

1.	Введение.....	1
1.	Математическое моделирование электродного приземного слоя с учетом влияния аэрозольных частиц и радиоактивных веществ.....	3
1.1.	Экспериментальные данные о влиянии аэрозольных частиц и радиоактивных веществ на электрическое состояние атмосферы.....	3
1.1.1	Экспериментальные данные о влиянии аэрозольных частиц и радиоактивных веществ на экологию человека.....	10
1.1.2	Экспериментальные основы экологического влияния ионного состава атмосферы и атмосферных электрических полей.....	10
1.2.	Математические модели кинетики ионообразования в приземном слое атмосферы.....	12
1.3.	Математические модели взаимодействия аэроионов с аэрозольными частицами.....	13
1.3.1	Вычисление коэффициентов, определяющих взаимодействие ионов с аэрозольными частицами.....	13
1.3.2	Вычисление коэффициентов $\beta_{ij}^{(k)}$ и электрических зарядов на аэрозольных частицах в диффузионном приближении.....	21
1.3.3	Влияние формы аэрозольных частиц на их зарядение в ионизированной среде.....	37
1.3.4	Моделирование зарядения аэрозольных частиц в ионосфере.....	38
1.4	Влияние радиоактивных веществ на ионный состав атмосферы.....	42

1.5.	Математические модели переноса ионов в приземном слое атмосферы. Классический и турбулентный электродный эффекты. ....	43
1.5.1	Классический электродный эффект .....	45
1.5.2	Турбулентный электродный эффект. ....	47
1.5.3	Основные уравнения, описывающие влияние аэрозольных частиц на электрические характеристики приземного слоя .....	51
1.5.4.	Приближение сильного турбулентного перемешивания в задаче. Моделирования электродного приземного слоя. ....	54
1.5.5	Моделирование влияния аэрозольных частиц на электрическую структуру электродного приземного слоя в приближении сильного турбулентного перемешивания. ....	60
1.5.6.	Моделирование влияния аэрозольных частиц на электрическую структуру электродного приземного слоя в случае классического электродного эффекта. ....	68
1.5.7.	Влияние радиоактивных веществ на электрическую структуру электродного приземного слоя .....	69
2.	Математическое моделирование глобальной электрической цепи (ГЭЦ) в атмосфере. ....	75
2.1	Основные уравнения ГЭЦ. Стационарное и нестационарное приближения .....	75
2.2	Влияние аэрозольных частиц и радиоактивных веществ на глобальную электрическую цепь. ....	82
	Заключение. ....	85
	Приложение 2.1. Вывод основных выражений для электрических величин в модели Вильсона. ....	87
	Приложение 2.2. Основные сведения о сферических функциях (гармониках) .....	89
	Приложение 2.3. Функция Грина для стационарного токового источника в сферической геометрии. ....	95

Приложение 2.4. Модель квазистационарного электрического поля атмосферы с учетом действия грозových токовых источников и влияние космических факторов на электрическое поле атмосферы .....	99
Приложение 2.5 Нестационарная модель электрического поля атмосферы. ....	123
2.5.1 Задача о временных изменениях электрического поля в атмосфере в одномерном случае. ....	125
2.5.2. Задача об установлении стационарного электрического состояния атмосферы при включении источников электрического поля .....	131
Приложение 2.5.1 .....	148
Приложение 2.5.2 .....	150
Приложение 2.6. Напряженность электрического поля, как индикатор глобального аэрозольного загрязнения. ....	152
Приложение 2.7. Нестационарная модель электрического поля в нижней атмосфере .....	155
Приложение 2.8 Расчет электрических полей грозových облаков, необходимых для инициирования разрядов облаковерхние слои атмосферы. ....	180
Приложение 2.9. Распределение электрического поля, создаваемого нестационарным током заряжения грозového облака в атмосфере с неоднородной электрической проводимостью.....	202
Приложение 2.10. Функции Бесселя .....	218
Приложение 2.11. Гипергеометрическая функция. ....	224
Список литературы .....	226
Рисунки .....	238

Подписано к печати 30.01.2011  
Формат 60x90/16. Гарнитура Times New Roman. Объем 16 усл.п.л.  
Тираж 200 экз. Заказ № 149 от 28.10.2010 г.

Отпечатано в ООО «КРОМ»  
195112, Санкт-Петербург, Новочеркасский пр., 1  
тел.: 495-69-44; 907-2345. e-mail: [spbkrom@rambler.ru](mailto:spbkrom@rambler.ru)  
<http://spbkrom.ru>