

*Н. Е. Вольцингер
К. А. Клеванный
Е. Н. Пелиновский*

Длинноволновая динамика прибрежной зоны



Ленинград Гидрометеиздат 1989

Рецензент чл.-кор. АН СССР С. Л. Соловьев

Содержит физический анализ и методы решения гидродинамических задач расчета колебаний уровня, поля течений и затопления прибрежной зоны. Обсуждаются модели длинноволновых движений, включающие диссипацию и дисперсию. Развивается аналитическая теория наката длинных волн на берег. Основное внимание уделяется методу криволинейных координат, допускающему отображение произвольной области на каноническую, в которой преобразованные уравнения интегрируются с простыми краевыми условиями.

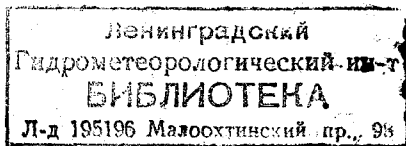
Метод криволинейных координат тестируется на модельных задачах и используется для расчета наводнений, стационарной трехмерной циркуляции, переноса и диффузии примесей и др.

Предназначена для специалистов, связанных с расчетом геофизических явлений, аспирантов и студентов геофизического профиля.

The book «Long-Wave Dynamics of the Coastal Zone» by N. E. Voltzinger, K. A. Klevanny and E. N. Pelinovsky presents a physical analysis and methods for solving hydrodynamical problems concerning calculation of the sea elevation, current field and flooding of the coastal zone. Long-wave models with allowance for dissipative and dispersive effects are discussed. An analytical theory of long-wave run-up is developed. Attention is paid to the method of curvilinear co-ordinates which allows mapping an arbitrary region onto a canonical one in which the transformed equations are integrated using the finite-difference method with simple boundary-value conditions.

The method of curvilinear co-ordinates is tested for model problems and is used for calculating floods, modelling the steady three-dimensional circulation, processes of the transport and diffusion of contaminants, etc.

The book is intended for specialists concerned with computation of geophysical phenomena, post-graduates and students of geophysics.



В 1805040600-042 31-89
069(02)-89

ISBN 5-286-00144-0

© Гидрометеоиздат, 1989 г.

Предисловие

Задачи динамики прибрежной морской зоны включают расчет длинноволновой денивелиации, трехмерного поля течений, затопления берега. Расчет динамики является звеном моделирования связанных с ней процессов — термического режима, переноса примесей, транспорта осаджений и биомассы и пр. Эти расчеты основываются на решении краевых задач для уравнений мелкой воды и трехмерных уравнений в произвольной, возможно неодносвязной и нестационарной, области. В книге рассматриваются постановка и методы решения таких задач. Основное внимание обращается на методы решения уравнений в криволинейных координатах, согласованных с конфигурацией области при отображении ее на фиксированную каноническую область, в которой преобразованные уравнения интегрируются обычными разностными методами с простыми краевыми условиями. Излагаемая аналитическая теория длинноволновых движений позволяет выполнить апробацию алгоритмов и физический анализ простых случаев.

Содержание книги можно разбить на три части. В первой части (главы 1—3) приводятся общие сведения, относящиеся к аппарату теории мелкой воды и разностным методам решения уравнений в декартовых координатах, обобщаемых в дальнейшем на случай криволинейных координат. Здесь рассматриваются различные приемы факторизации двумерных уравнений, сравнивается ряд схем, приводятся элементы теории и примеры устойчивых граничных аппроксимаций.

Расчеты длинноволновой денивелиации осуществляются различными методами, и результаты характеризуются некоторым разбросом. Прежде всего это относится к задаче наката длинной волны на берег, для которой, по-видимому, уже в недалеком будущем можно осуществлять сопоставление и упорядочение моделей и методов. Поэтому весьма желательна проверка методов в простых случаях, допускающих аналитическое решение. Не менее важно, что такие решения формируют качественное представление о явлении. С этой целью систематизируется и развивается аналитическая теория наката длинных волн на берег. Наибольшее внимание уделено задаче в простейшей постановке: накату на плоский неразмывающийся откос по нормали к берегу. Рассматривается взаимодействие римановой волны, ударной волны и солитона с вертикальной стенкой; более подробно изучается накат волны на откос в рамках нелинейной теории мелкой воды. Все аналитические решения здесь получены с помощью преобразования годографа. Установлено соответствие решений линейных и нели-

нейных задач, что позволило обосновать линейный подход к расчету максимальных характеристик наката: высоты подъема и скорости потока. Определены условия применимости теории для обрушивающихся волн; полученный критерий обрушения имеет первостепенное значение. Аналогичный подход развит для волн в каналах и бухтах; в приближении длинных волн здесь также справедливо преобразование годографа. Более фрагментарно рассмотрены неоднородные задачи, а также влияние дисперсии и нелинейности. Полученные результаты позволяют уяснить физическую картину наката и наряду с другими известными аналитическими решениями дают набор тестов для проверки численных алгоритмов.

Во второй части книги (главы 4, 5) излагается методическая сторона используемого в дальнейшем подхода. Сведения, относящиеся к преобразованию уравнений, постановке краевых задач в криволинейных координатах и построению криволинейных сеток, приводятся с подробностью, на наш взгляд достаточной, чтобы уяснить все аспекты метода.

Заключительная часть (главы 6—8) содержит примеры решения задач в криволинейных координатах. Из методов отображения наиболее простым является спрямление лишь одной пары противоположных границ области с отображением ее на прямоугольник; этот способ, как и общий метод, иллюстрируется расчетом наводнения в восточной части Финского залива. Наводнения моделируются также в трехмерной постановке, позволяющей воспроизвести пространственную структуру поля течений и проследить за его перестройкой в различные фазы процесса; приводятся также некоторые результаты расчета переходного режима стационарной трехмерной циркуляции, переноса и диффузии примеси в водоеме. Особое место занимает решение краевых задач с подвижной границей. Расчеты в постановке с вертикальным разрешением позволяют выделить и оценить диссипативный фактор, имеющий первостепенное значение для моделирования процессов вблизи береговой кромки. Наконец, решение плоской задачи с подвижной границей демонстрирует возможности удобной численной реализации такой задачи в рамках единого подхода — отображения нестационарной области на фиксированный прямоугольник.

Рассматриваемые краевые задачи в произвольной, возможно неодносвязной и нестационарной, области относятся к наиболее трудным. Их аналитическое исследование и численное решение на основе эффективного и общего подхода должны служить дальнейшему развитию моделирования сложных процессов в морской прибрежной зоне.

Мы признательны чл.-кор. АН СССР С. Л. Соловьеву за рецензирование книги; с ее отдельными частями ознакомились А. А. Дорфман, М. И. Железняк, Б. А. Каган, Н. Б. Маслова, Л. А. Руховец, замечания которых с благодарностью учтены.

Введение

Согласно статистике стихийных бедствий в мире первое место занимают наводнения, на долю которых приходится около 40% всего ущерба. Морские наводнения вызываются различными причинами: прохождением глубоких циклонов, подводными землетрясениями, извержениями подводных вулканов. Ураганы, тайфуны и волны цунами, обрушивающиеся на атлантическое и тихоокеанское побережье, сопровождаются разрушениями и жертвами, размеры которых при всей их роковой повторяемости неизменно поражают воображение. Катастрофический характер носят подчас и штормовые нагоны на побережьях окраинных морей и протяженных внутренних бассейнов. Но даже и не экстремальные подъемы уровня могут вносить ощутимые осложнения в нормальную жизнедеятельность приморских городов, портов и режим работы гидротехнических сооружений. Все это делает необходимым надежный расчет (прогноз) наводнений. Такой расчет основывается на численном интегрировании уравнений мелкой воды, которыми описываются длинноволновые возмущения уровня поверхности.

Помимо наводнений и цунами, уравнениями мелкой воды описываются приливы, сейши, бор, движение фронтальных разрывов в атмосфере и некоторые другие природные явления. Эти движения имеют непосредственную аналогию в различных областях механики и геофизики: акустике, газовой динамике, сейсмологии, метеорологии, гидрологии и других, в связи с чем расчет длинноволновых процессов представляет общий интерес.

Гидродинамические задачи для уравнений мелкой воды формулируются как некоторые краевые задачи. При этом необходимая информация — морфометрические данные, вынуждающие силы, начальное состояние процесса и условия на границе — задается с достаточной точностью в пространственно-временной области. Требуется также указать метод решения задачи; для имитации реальных процессов привлекаются численные методы, реализуемые на вычислительной машине. Совокупность этих элементов образует то, что принято называть математической моделью изучаемого явления.

Такие модели, возникнув около 30 лет назад, продолжают развиваться в направлении углубления гидродинамического описания,

расширения круга задач, совершенствования методов анализа и расчета.

Классическая теория длинных волн, восходящая к Лагранжу, является приближенной теорией, вытекающей из предположения, что горизонтальный масштаб движения, например длина волны L_0 , много больше вертикального масштаба характерной глубины H_0 . Длительное время эта теория представлялась законченной с той степенью определенности, с которой при возникновении формулировались ее содержание и объект изучения. Вместе с тем еще в конце прошлого века в теории волн на поверхности тяжелой жидкости были получены результаты, относящиеся к волнам, движущимся со скоростью, близкой к лагранжевой $\sqrt{gH}$, — уединенной волне и периодической прогрессивной волне конечной амплитуды, определена их форма и выведены соответствующие уравнения. Эти результаты оказались возможным объединить в рамках единой теории, основанной на разложении по малому параметру краевой задачи для уравнения Лапласа при некоторых граничных условиях на поверхности и на дне — задачи Коши — Пуассона [68]. В качестве параметра берется отношение $\varepsilon = H_0^2/L_0^2$, и его малость позволяет говорить, что вода — мелкая.

Имеется круг задач — в него входят упоминавшиеся выше — для которых уже первое приближение позволяет осуществить анализ и расчет явления. Уравнения второго приближения, возникающие при разложении задачи Коши — Пуассона в ряд по ε и удержании членов $O(\varepsilon^2)$, описывают явления, в которых балансируются нелинейные и дисперсионные эффекты. Соответствующие задачи, относящиеся к кноидальным волнам, гравитационным волнам в потоке со сдвигом скорости, внутренним волнам в стратифицированной жидкости, и многие другие стали развиваться сравнительно недавно и образовали область океанологических приложений теории нелинейных волн в диспергирующих средах [32, 59, 70].

Длинноволновые приближения дают удовлетворительное описание ряда реальных явлений, хотя их адекватность устанавливается лишь принципиально и только сопоставление расчета с натурными данными позволяет судить о степени пригодности. Вместе с тем рассмотрение только потенциальных движений для многих приложений является ограничительным. Процессы, связанные с диссипацией энергии в пограничных слоях жидкости, делают необходимым учет эффекта вихревого трения. Такой учет в рамках теории мелкой воды может быть реализован только параметрически, и этим в известной мере определяется точность моделирования на ее основе. Параметризация вихревого трения в пристеночной области и на границе свободной поверхности явилась предметом многих исследований [10, 30, 122]; для замыкания системы уравнений напряжение трения выражают через интегральную ско-

рость, неявно учитывая эффект ее сдвига по вертикали. Однако диссипация в рамках теории мелкой воды принципиально отличается от того, что во многих случаях действительно требует рассмотрения. Учет диссипации движения в том реалистическом смысле, который навязывается термодинамикой необратимых процессов и выражается вертикальным сдвигом скорости, несовместим с предпосылками теории. С другой стороны, принятый вывод уравнений длинноволнового горизонтального движения из уравнений Навье—Стокса интегрированием их по вертикали с целью явного представления диссипативного фактора влечет ряд дополнительных гипотез и оговорок.

Сказанное выше имеет отношение к расчету явлений, в основе которых лежат длинноволновые возмущения, лишь в той части, которая относится к идеологии моделирования. Сложность задачи ведет к моделям, критерием которых является их пригодность.

Недостатки описания диссипации в рамках плоских задач по-разному сказываются на результатах моделирования. В этом смысле в наиболее благоприятном положении оказались расчеты (прогнозы) морских наводнений — направленного процесса сравнительно небольшой длительности, на точность расчета которого превалирующее влияние оказывает точность метеоинформации и начальных данных. Успехи моделирования морских наводнений на основе численного интегрирования уравнений мелкой воды весьма убедительны [9, 56 и др.]. Вместе с тем следует полагать, что трехмерная задача расчета морских наводнений представляет не только академический интерес. Трехмерная постановка включает принципиальную возможность повышения точности расчета явления; к этому надо добавить, что сами данные о вертикальной структуре штормовых нагонов в прибрежной зоне требуются для обеспечения гидротехнического проектирования и расчета предельных динамических нагрузок на инженерные конструкции.

Моделирование приливов более чувствительно к ограничениям, присущим плоским задачам. Сложная динамика шельфовой зоны, на которую приходится большая часть диссипируемой приливной энергии, заставляет сомневаться в надежности упрощенного учета трения. Действительно, первые попытки реалистического описания диссипации длинноволновых процессов при рассмотрении их вертикальной структуры связаны с изучением приливов (Свердруп, 1926; Фьельстадт, 1931). Последующее развитие методов наблюдения, описания и расчета турбулентного пограничного слоя привело к реализации этого направления на современном уровне [30, 48, 102, 143].

Переход к трехмерным постановкам задач, помимо отмеченного преимущества, связанного с возможностями корректного учета диссипации, позволяет получить более общее, содержательное и взаимосвязанное описание реакции прибрежной зоны на крупномасштабные атмосферные возмущения. Длинноволновая доминанта, характеризующая шторм, сопровождается интенсивным процессом ветрового перемешивания. В слое перемешивания толщи-

ной несколько десятков метров, т. е. по всей глубине прибрежной зоны, возникают сильные сдвиговые течения, ведущие к разрушению короткопериодных внутренних волн, разъеданию термоклина и быстрому перераспределению температуры. Круг задач в трехмерной постановке, помимо расчета штормовой денивеляции, включает описание динамики сдвига, апвеллинга, шельфовой циркуляции, транспорта осаджений и биомассы, термического режима поверхностного слоя и пр.

Еще одной важной задачей, привлекающей в последнее время все большее внимание, является расчет затопления берега. Она ставится как краевая задача с подвижной границей в лагранжевых переменных [41, 92, 93 и др.].

Особенностью всех этих задач, наиболее затрудняющей их решение, является сложная конфигурация области интегрирования уравнений, отвечающая реальным очертаниям береговой линии. Обычный и по существу единственный широко применяемый подход к численному моделированию пространственных движений в областях сложной формы заключается в аппроксимации границы области отрезками (плоскостями), параллельными осям (плоскостям) координат. Это позволяет избежать интерполяции граничных значений и использовать удобные, приспособленные для такой аппроксимации разностные методы на так называемых разнесенных сетках. Недостатком такого подхода является искажение решения в приграничной зоне, т. е. там, где по смыслу задачи к его точности предъявляются наиболее высокие требования. Так, в [142] показано, что при кусочно-линейной аппроксимации границы в наиболее неблагоприятном случае, когда она альтернирует на каждом шаге сетки, краевое условие равенства нулю нормальной к границе скорости интерпретируется как условие равенства нулю вектора скорости. Это ведет к существенной погрешности в ближайших к границе узлах сетки. Возникающая ошибка оказывается совершенно неприемлемой при использовании неявных схем, даже при весьма умеренных числах Куранта.

Для повышения точности решения краевых задач в произвольной области $\Omega(x, y)$ с границей $\partial\Omega$ возможен переход к криволинейным координатам $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$, согласованным с конфигурацией Ω и отображающим ее на простую область Ω^* . При этом одна из координатных линий совпадает с каждым сегментом границы и на нем соответствующая координата фиксирована, а другая распределена произвольно, но монотонно. В плоскости криволинейных координат ξ, η при фиксированном значении одной из них и одинаковом распределении другой на попарно противоположных границах области Ω^* эта область представляет прямоугольник. В трехмерном случае осуществимо аналогичное преобразование $\Omega(x, y, z) \leftrightarrow \Omega^*$; Ω^* , например — куб. Отображение криволинейной сетки в Ω на прямоугольную сетку в Ω^* можно осуществить многими способами, например решением краевой задачи

для системы эллиптических уравнений с граничными условиями, определяемыми соответствием значений декартовых координат на $\partial\Omega$ значениям криволинейных координат на $\partial\Omega^*$. Исходные уравнения, преобразованные к криволинейным координатам, численно интегрируются теперь в канонической области Ω^* с простыми граничными условиями. Допуская зависимость преобразования от времени, можно учесть движение границ. Такой подход, разработанный в вычислительной аэродинамике и доминирующий в расчетах обтекания летательных конструкций сложной формы [15, 116], представляется весьма удобным для решения краевых задач в неодносвязных областях сложной геометрии [8, 28, 56, 76, 103].

Реализация метода криволинейных координат, согласованных с геометрией области, состоит, таким образом, из двух процедур: построения криволинейной сетки, адаптированной к области, а также, возможно, к характеру решения и численного интегрирования уравнений на такой сетке. Способы построения сеток отличаются большим разнообразием и продолжают развиваться. В приводимых расчетах в основном используются упомянутые эллиптические методы генерации сеток — метод Прокопова [15, 62] и Томпсона [137]. Вместе с тем дается широкий обзор других возможностей, приводящих к сеткам желательной структуры, и рассматривается общий вариационный подход, заключающийся в минимизации отклонений от формулируемых требований к сетке [82]. Из различных модификаций уравнений в криволинейных координатах предпочтительной представляется система уравнений для контравариантных составляющих потока. Эти уравнения удобно реализуются полунявным методом, обсуждавшимся для случая декартовых координат в [87, 124]. Расчеты используют также другие формы преобразованных уравнений и некоторые употребительные разностные методы, представленные в предварительном обзоре.

Приводимые результаты демонстрируют возможности метода криволинейных координат для удовлетворения растущих требований к моделированию океанологических процессов в прибрежной зоне.

1

Глава

Нелинейно-дисперсионные модели длинных волн

Для решения задач движения идеальной жидкости интегрирование уравнений Эйлера может оказаться затруднительным и нецелесообразным, если возможно выделение малых параметров, отвечающих различным масштабам движения. В связи с этим исключительное значение получили две приближенные теории, возникающие при разложении уравнений Эйлера — либо эквивалентной задачи Коши — Пуассона — соответственно по малым параметрам

$$\delta = \zeta_0/H_0; \quad \varepsilon = H_0^2/L_0^2,$$

где L_0 — характерный горизонтальный масштаб, например длина волны; H_0 — характерная глубина; ζ_0 — характерное превышение свободной поверхности. Первая из них, обязанная Эри и Стоксу, приводит к линейной теории волн малой амплитуды, вторую приближенную теорию относят к Буссинеску и Рэлею. Ее систематический вывод разложением по ε предложил Фридрихс [68]. Это — теория мелкой воды.

Уравнения мелкой воды первого приближения широко используются для анализа и расчета длинноволновых процессов. В ряде случаев требуется как учет дополнительных факторов, выпадающих из описания в рамках первого приближения, так и феноменологическое включение диссипативного механизма, отвечающее специфике задач.

В настоящей главе кратко приводится вывод уравнений первого приближения и нелинейно-дисперсионных моделей длинноволновых процессов. Границы применимости моделей обсуждаются на основе физических соображений и характерных оценок.

1.1. Нелинейная теория мелкой воды

1.1.1. Уравнения Эйлера. Пусть плоскость горизонтальных координат XoY совпадает с невозмущенной поверхностью воды, ось oZ направлена вертикально вверх, свободная поверхность и дно заданы соответственно уравнениями $\zeta = \zeta(x, y, t)$, $h = h(x, y)$, t — координата времени. Запишем уравнения движения и неразрыв-

ности идеальной жидкости — уравнения Эйлера:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + w\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\nabla p &= \mathbf{F}; \\ \frac{\partial w}{\partial t} + (\mathbf{v}\nabla)w + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g &= 0; \\ \nabla\mathbf{v} + \partial w/\partial z &= 0,\end{aligned}\quad (1.1.1)$$

где $\mathbf{v} = (u, v)$ — горизонтальный вектор скорости; w — ее вертикальный компонент; ρ — плотность воды, предполагаемая постоянной; p — давление; g — ускорение свободного падения; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$; $\mathbf{F}$ — вектор горизонтальных внешних сил. Рассматривая движение в пространственно-временной области $Q_T = \{-\infty \leq x, y < \infty, -h \leq z \leq \xi; t \geq 0\}$, поставим для уравнений (1.1.1) граничные условия по вертикали: кинематические условия на дне и на свободной поверхности

$$(\mathbf{v}\nabla)h + w = 0, \quad z = -h; \quad (1.1.2)$$

$$\partial \xi / \partial t + (\mathbf{v}\nabla)\xi = w, \quad z = \xi; \quad (1.1.3)$$

динамическое условие

$$p = p_a, \quad z = \xi \quad (1.1.4)$$

(p_a — атмосферное давление), а также некоторые начальные условия: $\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^0$; $w|_{t=0} = w^0$; $\xi|_{t=0} = \xi^0$; на бесконечности функции предполагаются ограниченными.

Если движение предполагается безвихревым, то можно ввести потенциал скорости $\Phi(\mathbf{v}, w) = (\nabla\Phi, \Phi_z)$ и сформулировать задачу для двух переменных: Φ, ξ . При этом потенциал скорости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2\Phi + \Phi_{zz} = 0, \quad (1.1.5)$$

а граничными условиями являются кинематические условия

$$\nabla\Phi \cdot \nabla h + \Phi_z = 0, \quad z = -h; \quad (1.1.6)$$

$$\xi_t + \nabla\Phi \cdot \nabla \xi = \Phi_z, \quad z = \xi \quad (1.1.7)$$

и интеграл Бернулли на свободной поверхности

$$\Phi_t + \frac{1}{2}[(\nabla\Phi)^2 + \Phi_z^2] + g\xi + (p_a - p)/\rho = 0, \quad z = \xi. \quad (1.1.8)$$

Уравнение (1.1.5) является уравнением неразрывности, а (1.1.8) — интегралом уравнений движения системы (1.1.1) при наличии потенциала скорости.

Задачу (1.1.5) — (1.1.8) называют задачей Коши — Пуассона. Трудности ее решения связаны с нелинейными граничными условиями в области Q_T , определяемой в процессе решения; кроме того, начиная с некоторого $t > 0$, задача, вообще говоря, может стать некорректной, если волна разрушается; при этом теряется непрерывная зависимость решения от начальных данных. В связи с этим большое значение имеют приближенные теории волн.

1.1.2. Структура линейных поверхностных волн. Прежде чем перейти к рассмотрению моделей волновых движений на основе различных приближений, обсудим структуру волн на поверхности воды. Линеаризованная система уравнений Эйлера, например в виде (1.1.5)–(1.1.8), когда при $h = \text{const}$ условие (1.1.6) заменяется на $\Phi_z = 0$, допускает частные решения в виде разделяющихся переменных, описывающие монохроматические бегущие (прогрессивные) волны:

$$\zeta = ae^{iv}; \quad \Phi = \varphi(z) e^{iv}; \quad u = U(z) e^{iv}; \quad w = W(z) e^{iv}, \quad (1.1.9)$$

где $v = \omega t - kx$; ω — частота волны; k — волновое число, а амплитуды

$$\varphi = \frac{g a \operatorname{ch} \alpha}{\omega \operatorname{ch} \beta}; \quad U = \frac{g k a}{\omega} \frac{\operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{ch} \beta}; \quad w = \frac{i g a k}{\omega} \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\operatorname{ch} \beta},$$

$\alpha = k(h+z)$, $\beta = kh$, $\omega = \pm \sqrt{gk \tanh \beta}$. Как видно из (1.1.9), структура моды, вообще говоря, зависит от частоты (волнового числа). Кроме того, ω не является линейной функцией k , что приводит к различиям между фазовой (ω/k) и групповой ($\partial\omega/\partial k$) скоростями, а также к их зависимости от частоты. Следствием этого является дисперсия волн — расплывание произвольного начального возмущения и превращение его в цуг волн. В случае длинных волн, когда $kh \ll 1$, из (1.1.9) следует

$$\begin{aligned} \omega &= \pm \sqrt{gh} k \left(1 - \frac{1}{6} k^2 h^2 + \dots \right); \\ \varphi(z) &= \frac{i g a}{\omega} \left(1 + k^2 h z + \frac{1}{2} k^2 z^2 + \dots \right); \\ U(z) &= \frac{g k a}{\omega} \left(1 + k^2 h z + \frac{1}{2} k^2 z^2 + \dots \right); \\ W(z) &= i g k^2 a \omega^{-1} (h + z + \dots). \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Итак, в пренебрежении членами $O(kh)$ частота волны связана с волновым числом линейно, поэтому фазовая и групповая скорости совпадают и равны $\sqrt{gh}$; дисперсия волн отсутствует. При этом вертикальный компонент скорости много меньше горизонтального и им можно пренебречь: $W/U \ll 1$. Эпюра скорости, не зависящая от z и ω , представляет однородное по вертикали течение: $U = \sqrt{g/h} a$. Наконец, поправки к первому приближению выражаются степенями h .

Отмеченные черты характеризуют первое приближение задачи Коши — Пуассона, разлагаемой в ряд по степеням $\varepsilon = H_0^2/L_0^2$.

1.1.3. Уравнения мелкой воды. Получим вначале уравнения мелкой воды, используя простейшие соображения. Как отмечалось, в приближении линейных длинных волн $\omega \ll |v|$, причем v не зависит от вертикальной координаты. (Границы применимости этого к нелинейным волнам будут обсуждаться ниже.) Если дополни-

тельно вектор $\mathbf{F}$ и начальные условия также не зависят от z , то и горизонтальные ускорения в уравнениях Эйлера (1.1.1) не зависят от вертикальной координаты, и движение можно рассматривать в плоскости $ХОУ$. Другой формулировкой этого является малость вертикального ускорения сравнительно с горизонтальным и гидростатичность давления. Действительно, с учетом (1.1.4) имеем

$$p = p_a + \rho g (\xi - z). \quad (1.1.11)$$

Подставляя это в первое уравнение системы (1.1.1), видим, что $\nabla p = \rho g \nabla \xi + \nabla p_a$ не зависит от глубины, но тогда от нее не зависят и горизонтальные ускорения, а следовательно, и горизонтальные скорости. Тем самым получаем уравнения движения

$$\partial \mathbf{v} / \partial t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + g \nabla \xi + \rho^{-1} \nabla p_a = \mathbf{F}. \quad (1.1.12)$$

Уравнение неразрывности получим интегрированием третьего уравнения системы (1.1.1) по глубине жидкости

$$\int_{-h}^{\xi} \nabla \mathbf{v} dz + w|_{z=\xi} - w|_{z=-h} = 0. \quad (1.1.13)$$

С учетом кинематических условий (1.1.2), (1.1.3) отсюда имеем

$$\partial \xi / \partial t + \nabla [(h + \xi) \mathbf{v}] = 0. \quad (1.1.14)$$

Уравнения (1.1.12), (1.1.14) образуют систему уравнений мелкой воды.

Уравнения мелкой воды широко используются для расчета приливов, штормовых нагонов, цунами и других природных явлений, генерируемых длинноволновыми возмущениями уровня.

1.2. Краевые задачи для уравнений мелкой воды

1.2.1. Основные положения. Рассмотрим постановку краевых задач для уравнений мелкой воды. Для многих геофизических приложений ускорения частиц жидкости в уравнениях движения относят к системе отсчета, неподвижно связанной с Землей. Удерживая лишь вертикальную составляющую вектора угловой скорости вращения Земли ω : $\omega_z = \omega \sin \varphi$, φ — широта места, запишем систему уравнений (1.1.12), (1.1.14) с учетом силы Кориолиса в виде векторного уравнения для $\mathbf{u} = (u, v, H)$, $H = h + \xi$:

$$L(\mathbf{u}) \equiv \partial \mathbf{u} / \partial t + A \partial \mathbf{u} / \partial x + B \partial \mathbf{u} / \partial y + C \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (1.2.1)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} u & 0 & g \\ 0 & u & 0 \\ H & 0 & u \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & g \\ 0 & H & v \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -l & 0 \\ l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{F} = \{\nabla (gh - p_a/\rho), 0\}; \quad l = 2\omega \sin \varphi.$$

Уравнение (1.2.1) будем считать заданным в некоторой области изменения пространственных переменных: $Q_T = \{x, y \in \Omega, 0 \leq t \leq T\}$, Ω — плоская область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$.

Уравнение (1.2.1) в области существования решения относится к гиперболическому типу. Введем вектор $s = (s_1, s_2)$ и матрицу

$$D(s) = As_1 + Bs_2, \quad -\infty < s_1, s_2 < \infty. \quad (1.2.2)$$

Условие гиперболичности системы уравнений в области Q_T заключается в том, что собственные числа λ матрицы D должны быть вещественны и различны на решениях u в каждой точке Q_T при $s_1^2 + s_2^2 \neq 0$ [136]. Найдем эти собственные числа, полагая, что матрицы A, B зависят от известного вектора u . Имеем

$$D - \lambda E = \begin{pmatrix} vs - \lambda & 0 & gs_1 \\ 0 & vs - \lambda & gs_2 \\ Hs_1 & Hs_2 & vs - \lambda \end{pmatrix},$$

где E — единичная матрица; $v = (u, v)$. Отсюда $\lambda_1 = vs$, $\lambda_{2,3} = vs \pm c|s|$, $c = \sqrt{gH}$, т. е. условие гиперболичности выполнено.

Отсутствие у D кратных собственных чисел позволяет диагонализировать ее; существует невырожденная матрица S такая, что

$$S^{-1}DS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}. \quad (1.2.3)$$

Если при этом нормы матриц S, S^{-1} равномерно ограничены по s :

$$\|S\|, \|S^{-1}\| \leq \tilde{c}, \quad (1.2.4)$$

где $\tilde{c}$ — постоянная, не зависящая от s , то систему уравнений называют сильно гиперболической [136]. Норма матрицы S определяется следующим образом:

$$\|S\| = \{\rho(SS^*)\}^{1/2}. \quad (1.2.5)$$

Здесь $\rho(SS^*)$ — радиус спектра, т. е. наибольшее по модулю собственное число матрицы SS^* ; S^* — матрица, сопряженная S .

Покажем, что система (1.2.1) — сильно гиперболическая. Составим матрицу S , столбцами которой будут собственные векторы матрицы, нормированные удобным образом. Имеем

$$S = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha/\sqrt{2} & \alpha/\sqrt{2} \\ \alpha & \beta/\sqrt{2} & \beta/\sqrt{2} \\ 0 & H/(c\sqrt{2}) & -H/(c\sqrt{2}) \end{pmatrix};$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha & 0 \\ \alpha\sqrt{2} & \beta\sqrt{2} & c/(H\sqrt{2}) \\ \alpha\sqrt{2} & \beta\sqrt{2} & -c/(H\sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$

где $\alpha = s_1/|s|$; $\beta = s_2/|s|$. Матрица S диагонализует D

$$S^{-1}DS = \begin{pmatrix} \mathbf{vs} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{vs} + c|s| & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{vs} - c|s| \end{pmatrix}.$$

Далее, собственными числами SS^* будут: $\lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = H/g$, а собственные числа $S^{-1}S^{*-1} - \lambda_{1,2} = 1$, $\lambda_3 = g/H$, т. е. (1.2.4) тоже выполнено.

Для уравнения (1.2.1) рассмотрим задачу Коши:

$$L(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{u} / \partial t + A \partial \mathbf{u} / \partial x + B \partial \mathbf{u} / \partial y + C \mathbf{u} = \mathbf{F}, \quad (1.2.6)$$

$$\mathbf{u}(x, y, 0) = \mathbf{u}^0.$$

Вектор-функции $\{\mathbf{u}\}$ будем предполагать принадлежащими пространству $L_2(Q_T)$ — множеству функций, интегрируемых с квадратом в области Q_T cL_2 — скалярным произведением и нормой, определяемыми равенствами:

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) = \int_{Q_T} \mathbf{u} \mathbf{u}_1^* dQ_T, \quad \|\mathbf{u}\|^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u}).$$

Для сильно гиперболической — в соответствии с определением (1.2.4) — системы уравнений задача Коши поставлена корректно в линейном случае с матрицами A, B , достаточно гладко зависящими от своих аргументов [136]. Для квазилинейной системы уравнений корректность задачи Коши можно гарантировать лишь на достаточно малом интервале $[0, T]$, зависящем от гладкости $\mathbf{u}$. Что касается линейных уравнений, то решение их также будет разрывным, если разрывны начальные данные. Обычное определение решения при этом лишается смысла, ибо оно уже не удовлетворяет требуемым условиям гладкости.

1.2.2. Обобщенные решения. Дивергентная форма уравнений. Обобщение понятия решения гиперболической системы заключается в том, что искомая вектор-функция и ее производные могут иметь разрывы первого рода на некоторых поверхностях. Такое решение определяют следующим образом [39]. Пусть $\psi(x, y, t)$ — произвольная гладкая финитная функция с компактным носителем $R \subset Q$, т. е. ψ тождественно не равна нулю только в некоторой подобласти R области Q . Применение формулы Гаусса к интегралу

$$\int_Q \psi \{L(\mathbf{u}) - \mathbf{F}\} dQ = 0$$

дает

$$\int_R \{\mathbf{u} [E\psi_t + (A\psi)_x + (B\psi)_y - C\psi] + \mathbf{F}\psi\} dR = 0, \quad (1.2.7)$$

E — единичная матрица. Это выражение не содержит производных искомой функции, сохраняя смысл и для разрывных $\mathbf{u}$. Вектор-функцию $\mathbf{u}$ называют обобщенным — или слабым — решением

348386

уравнения (1.2.1), если (1.2.7) выполняется для любой гладкой финитной функции ψ и всех подобластей $R \subset Q$.

Теория разрывных решений строится для уравнения (1.2.1), записанного в дивергентном виде:

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{P} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{Q} + C\mathbf{U} = H\mathbf{F}, \quad (1.2.8)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ H \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} U^2 H^{-1} + \frac{1}{2} g H^2 \\ UVH^{-1} \\ U \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} UVH^{-1} \\ V^2 H^{-1} + \frac{1}{2} g H^2 \\ V \end{pmatrix},$$

$U = uH$, $V = vH$. Отметим связь оператора L уравнения (1.2.1) со своей дивергентной формой $\mathcal{L}$ (1.2.8). Пусть $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ — матрицы Якоби, получающиеся дифференцированием соответственно $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$ по компонентам вектора $\mathbf{U}$: $\tilde{A} = \partial \mathbf{P} / \partial \mathbf{U}$; $\tilde{B} = \partial \mathbf{Q} / \partial \mathbf{V}$. Матрицы A , B оператора L получаются из $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ преобразованием подобия

$$A = \tilde{S}^{-1} \tilde{A} \tilde{S}; \quad B = \tilde{S}^{-1} \tilde{B} \tilde{S}, \quad (1.2.9)$$

где $\tilde{S} = \partial \mathbf{U} / \partial \mathbf{u}$. Это следует из уравнения (1.2.8), продифференцированного по $\mathbf{u}$ и умноженного слева на $\tilde{S}^{-1}$. Здесь

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{U}} = \tilde{A} = \begin{pmatrix} 2u & 0 & gH - u^2 \\ v & u & -uv \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{V}} = \tilde{B} = \begin{pmatrix} v & u & -uv \\ 0 & 2v & gH - v^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{u}} = \tilde{S} = \begin{pmatrix} H & 0 & u \\ 0 & H & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обобщенное решение $\mathbf{U}$ должно удовлетворять уравнению

$$\int_R (\mathbf{U} \psi_t + \mathbf{P} \psi_x + \mathbf{Q} \psi_y + H\mathbf{F} \psi) dR = 0 \quad (1.2.10)$$

при отмеченных условиях на ψ и R . Легко показать [39], что в линейном случае поверхность разрыва S имеет вид

$$En_t + An_x + Bn_y = 0, \quad (1.2.11)$$

где n_t , n_x , n_y — проекции единичной нормали $\mathbf{n}$ на оси координат. Эта поверхность является характеристической, т. е. на ней по данным Коши нельзя определить все производные функции $\mathbf{U}$.

Существенное отличие нелинейного случая заключается в том, что матрицы A , B , зависящие от $\mathbf{u}$, рвутся на поверхности S , и соотношение, аналогичное (1.2.11), связывает положение поверхности со значением скачка. Поверхность разрыва — «ударная волна» —

уже не будет характеристической. Для дивергентной системы (1.2.8) такая связь

$$[U] n_t + [P] n_x + [Q] n_y = 0, \quad (1.2.12)$$

дополненная физическим условием неубывания энтропии на разрыве, позволяет выделить единственное разрывное решение задачи Коши. Одномерным аналогом связи (1.2.12) и является приведенные условия сохранения массы и импульса (1.1.29) при переходе через фронтальную поверхность S .

1.2.3. Симметризация. Интеграл энергии. Полезным свойством уравнения (1.2.1) является возможность одновременной симметризации матриц A, B подстановкой

$$gH = c^2/4. \quad (1.2.13)$$

В новых переменных уравнение (1.2.1) имеет вид

$$u_t + Au_x + Bu_y + Cu = F, \quad (1.2.14)$$

$$u = \begin{pmatrix} u \\ v \\ c \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} u & 0 & c/2 \\ 0 & u & 0 \\ c/2 & 0 & u \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & c/2 \\ 0 & c/2 & v \end{pmatrix}$$

и относится к классу симметрических положительных гиперболических систем [14].

С уравнением (1.2.14) связано соотношение, называемое интегралом энергии. Для получения его умножим (1.2.14) скалярно на $2u$ и проинтегрируем по пространственно-временной области $Q_T = \{\Omega \times [0, T]\}$ с кусочно-гладкой боковой поверхностью $S_T = \{\partial\Omega \times [0, T]\}$. Имеем

$$\int_{S_T} \{n_t(u, u) + n_x(Au, u) + n_y(Bu, u)\} dS_T = \int_{Q_T} \{(D_0 u, u) + 2(F, u)\} dQ_T, \quad (1.2.15)$$

$D_0 = A_x + B_y$. В цилиндрической области Q_T с нулевой нормальной составляющей скорости u_0 на S_T левая часть (1.2.15)

$$\begin{aligned} \int_{S_T} \{n_t(u, u) + n_x(u^2 + v^2 + 2c^2)u + n_y(u^2 + v^2 + 2c^2)v\} dS_T = \\ = \int_{Q_T} \frac{\partial}{\partial t} (u^2 + v^2 + c^2) dQ_T. \end{aligned}$$

выражает изменение энергии длинных волн.

1.2.4. Постановка краевых задач. Рассмотрим одномерную, отечающую (1.2.1), систему уравнений:

$$-\partial u / \partial t + \tilde{A} \partial u / \partial x = f, \quad (1.2.16)$$

$$u = \begin{pmatrix} u \\ H \end{pmatrix}; \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} u & g \\ H & u \end{pmatrix}; \quad f = \begin{pmatrix} f \\ 0 \end{pmatrix}; \quad f = gh_x + p_{ax}/\rho.$$

Собственные числа матрицы A вещественны и различны: $\lambda_{1,2} = u \pm c$, $c = \sqrt{gH}$. Это позволяет диагонализировать A преобразованием подобия: $S^{-1}AS = \Lambda$, где Λ — диагональная матрица с элементами λ_1, λ_2 , а строками матрицы S^{-1} являются левые собственные векторы χ_1, χ_2 матрицы A ; $\chi_1 = (1, c/H)/\sqrt{2}$; $\chi_2 = (1, -c/H)/2$. Таким образом, (1.2.16) можно записать в виде

$$u_t + SAS^{-1}u_x = f. \quad (1.2.17)$$

Умножая это уравнение слева на S^{-1} и переходя к новой переменной $c = \sqrt{gH}$, имеем характеристическую (нормальную) форму уравнения (1.2.16):

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x} \right\} (u \pm 2c) = f; \quad (1.2.18)$$

функции $V_1 = u + 2c$, $V_2 = u - 2c$ называют инвариантами Римана. Из (1.2.18) следует, что они сохраняют (при $f = 0$) постоянное значение вдоль характеристик c^+ , c^- , задаваемых дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} c^+ : dx/dt &= u + c, \\ c^- : dx/dt &= u - c. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Система (1.2.16) в инвариантах Римана имеет простой вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} = \mathbf{f}, \quad (1.2.20)$$

$\mathbf{V} = (u + 2c, u - 2c)$. Для уравнения (1.2.20) рассмотрим следующую начальную краевую задачу:

$$\mathbf{V}(x, 0) = \mathbf{V}^0(x), \quad 0 \leq x \leq X; \quad (1.2.21)$$

$$\Gamma_0 \mathbf{V}(0, t) = \psi_0(t), \quad \Gamma_1 \mathbf{V}(X, t) = \psi_1(t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (1.2.22)$$

Граничные условия не произвольны. Вид матриц Γ_0, Γ_1 определяется направлением характеристик c^+, c^- на границах области. Для левой границы ($x = 0$) характеристики с положительным наклоном (c^+) называют «уходящими», а с отрицательным наклоном (c^-) — «приходящими»; на правой границе ($x = X$) характеристики с отрицательным наклоном (c^-) — «уходящие», а характеристики (c^+) — «приходящие». Решение первого из уравнений (1.2.20)

$$\partial V_1 / \partial t + \lambda_1 \partial V_1 / \partial x = f$$

определяется начальными данными на $0 \leq x \leq X$ единственным образом в криволинейном треугольнике, ограниченном прямыми $t = 0$, $x = X$ и характеристикой c_0^+ (рис. 1.1а). Для построения решения во всем прямоугольнике надо задать граничное условие

при $x = 0$, которое будет переноситься внутрь области $x - \lambda_1 t < 0$ уходящими с этой границы характеристиками c_1^+ , c_2^+ , Аналогично решение второго уравнения (1.2.20)

$$\partial V_2 / \partial t + \lambda_2 \partial V_2 / \partial x = f$$

в прямоугольнике $0 \leq x \leq X$, $0 \leq t \leq T$ единственным образом определяется начальными данными и условием на границе $x = X$, снимаемым с этой границы уходящими характеристиками c^- (рис. 1.1 б). Постановка задачи (1.2.20) — (1.2.22) требует, чтобы на границе ставилось столько условий, сколько на ней имеется

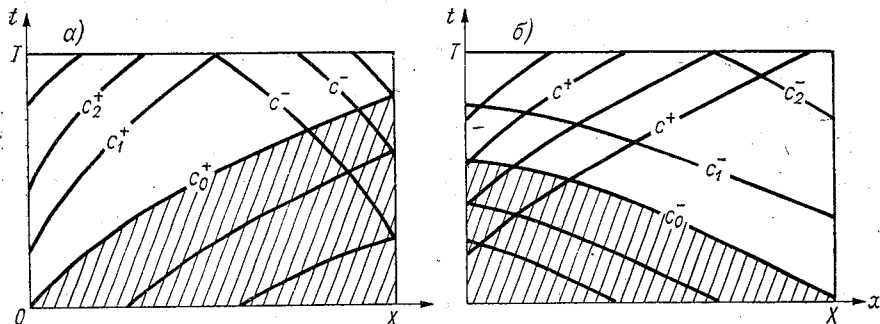


Рис. 1.1. Характеристики на плоскости x, t .

уходящих характеристик, т. е. по одному условию на каждой границе. Слева ставится условие для риманова инварианта $V_1 = u + 2c$, справа — для $V_2 = u - 2c$.

Требования к корректной постановке не исчерпываются ограничением на количество граничных условий. Второе ограничение касается их вида.

Запишем допустимые граничные условия в общей форме:

$$\begin{aligned} V_1(0, t) &= \gamma_0(0, t) V_2(0, t) + \psi_0(t); \\ V_2(X, t) &= \gamma_1(X, t) V_1(X, t) + \psi_1(t), \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

где γ_0, γ_1 выражают связь между инвариантами Римана на границах, играя роль коэффициентов отражения. Поскольку значения V_2 известны на левой границе, а значения V_1 — на правой границе, то (1.2.23) действительно имеет характер граничных условий, однако γ_0, γ_1 не могут выбираться произвольно. Они должны подчиняться некоторым условиям, вытекающим из так называемого требования диссипативности, заключающегося в выполнении неравенств

$$\{(c - u) V_2^2 - (c + u) V_1^2\}_{x=0} \geq 0, \quad \{(c + u) V_1^2 - (c - u) V_2^2\}_{x=X} \geq 0. \quad (1.2.24)$$

Масштабированием римановых инвариантов граничные условия для системы в нормальном виде всегда можно сделать диссипативными [14].

Обратимся к постановке граничных условий для двумерной симметрической системы (1.2.14) в области $Q_T = \{\Omega^*(x, y) \times [0, T]\}$, где Ω^* — прямоугольник. Общий случай произвольной области Ω , как будет показано в главе 4, можно свести к данному путем отображения Ω на Ω^* .

Количество граничных условий для системы (1.2.14) на боковой поверхности S_T определяется рассмотрением на этой поверхности характеристической матрицы, отвечающей (1.2.11):

$$\Gamma = n_y E + n_x A + n_y B. \quad (1.2.25)$$

Число условий на каждой стороне прямоугольника Ω^* , образованного сечением S_T плоскостью $t = \text{const}$, равно числу отрицательных собственных чисел матрицы [39]. Рассмотрим, например, постановку граничных условий на стороне прямоугольника $x = 0$. В этом случае $n_y = 0$, $n_x = -1$, $\Gamma = -A$, $\lambda_1 = -u$, $\lambda_{2,3} = -u \pm \pm c/2$. При $c/2 > 0$ характеристическая матрица имеет два отрицательных собственных числа, если $u > 0$, и одно, если $u \leq 0$. Это означает, что на $x = 0$ надо ставить два условия, если жидкость втекает в Q_T , и одно, если либо она вытекает из области, либо граница — твердая стенка. С такой же ситуацией мы сталкиваемся, рассматривая матрицу Γ на остальных сторонах прямоугольника.

Вид граничных условий определяется требованием неотрицательности квадратичной формы

$$\int_{S_T} (\Gamma u, u) dS_T \geq 0 \quad (1.2.26)$$

[39]. Это условие является обобщением требования диссипативности граничных условий (1.2.24) на случай двух пространственных переменных. Возможный вид граничных условий, подчиненный (1.2.26), приводится, например, в [9, 107, 117].

1.3. Анализ простых решений

1.3.1. Римановы волны. Опуская члены ∇p_a и F , заметим, что в линейном случае система уравнений мелкой воды сводится к волновому уравнению

$$\partial^2 \zeta / \partial t^2 - gh \nabla^2 \zeta = 0, \quad (1.3.1)$$

и скорость распространения волны описывается формулой Лагранжа — Эйри $c = \sqrt{gh}$. В случае одномерного движения решение (1.3.1) представимо в виде суперпозиции встречных волн неизменной формы

$$\begin{aligned} \zeta &= \Phi_1(x - ct) + \Phi_2(x + ct); \\ u &= \sqrt{g/h} [\Phi_1(x - ct) - \Phi_2(x + ct)], \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

где Φ_1 и Φ_2 — произвольные функции, определяемые из начальных условий. После развала начального возмущения волны выходят из очага и в дальнейшем не меняют свою форму (рис. 1.2 а). В случае двумерной задачи структура решения кардинально меняется. В частности, если в начальный момент времени возвышение локализовано в пространстве, то, выходя из области очага, волна имеет сложную структуру: фаза возвышения обязательно сменяется фазой понижения (рис. 1.2 б), в области очага всегда имеется остаточное смещение, затухающее со временем.

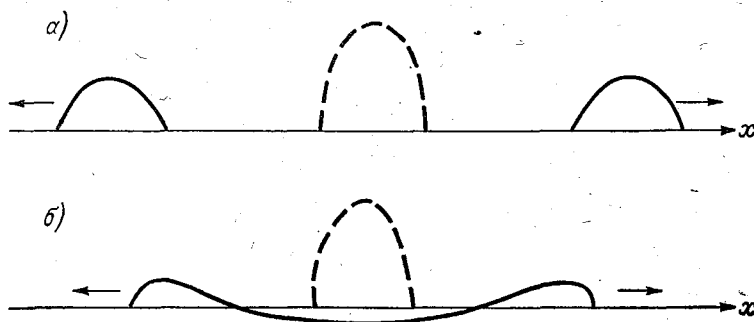


Рис. 1.2. Распад начального возмущения в одномерном (а) и в двумерном (б) случаях.

Рассмотрим нелинейный случай. Для одномерного движения с $h = \text{const}$ уравнения мелкой воды записываются в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + h \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Простейший тип решений этой системы можно найти, если положить $u = u(\xi)$. Из совместимости уравнений (1.3.3) вытекает, что

$$u = \pm 2 [\sqrt{g(h + \xi)} - \sqrt{gh}], \quad (1.3.4)$$

и для ξ получается уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + V(\xi) \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 0, \\ V(\xi) &= \pm [3 \sqrt{g(h + \xi)} - 2 \sqrt{gh}], \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

решение которого представляет собой волну Римана

$$\xi = \xi^0 [x - V(\xi) t], \quad (1.3.6)$$

где функция $\xi^0(x)$ описывает форму волны при $t = 0$. Поскольку для системы (1.3.3) должны быть заданы два начальных условия u^0 , ξ^0 , то решение (1.3.6) возможно, если в начальный момент времени u^0 связано с ξ^0 соотношением (1.3.4).

В сущности мы несколько другим путем получили инварианты Римана $V_{1,2}$, сохраняющиеся на характеристиках $c^\pm$ [см. (1.2.18)].

и (1.2.19)] для случая, когда задана только одна из волн, распространяющаяся вправо или влево; это позволило выразить $u \pm c$ и $u \pm 2c$ через единственную переменную — смещение уровня.

Новым и принципиальным моментом здесь является зависимость скорости распространения волны V от локального значения уровня. В результате вершина волны движется с большей скоростью, чем ложбина, что ведет к деформации профиля волны, укрупнению ее переднего склона (рис. 1.3). Увеличение крутизны волны приводит к возрастанию вертикальной скорости $w = d\xi/dt$; когда она станет достаточно большой, то нарушится условие, при котором выведена система уравнений мелкой воды. Следовательно,

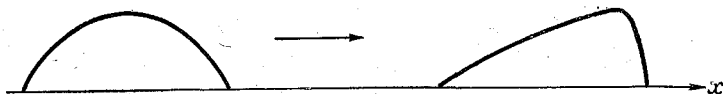


Рис. 1.3. Эволюция простой волны (нелинейная задача).

нелинейные уравнения мелкой воды справедливы только на ограниченных пространственно-временных интервалах. Найдём $\partial\xi/\partial x$ из (1.3.6)

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \frac{d\xi^0/dx}{1 + t(dV/d\xi)(d\xi^0/dx)}, \quad (1.3.7)$$

откуда видно, что $\partial\xi/\partial x$ (а также и $\partial\xi/\partial t$) возрастает неограниченно на временах

$$t_* = -1 / \left(\frac{dV}{d\xi} \frac{d\xi^0}{dx} \Big|_{\text{макс}} \right). \quad (1.3.8)$$

Соответствующая этому времени длина является мерой проявления нелинейных эффектов; $L_* = Vt_*$. В частности, если высота волны мала ($\xi \ll h$), то выражения для скорости распространения и скорости частиц упрощаются:

$$\begin{aligned} V(\xi) &\approx \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\xi}{h} \right); \\ u(\xi) &\approx \sqrt{g/h} \xi \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\xi}{h} \right). \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

При этом длина нелинейности определяется формулой

$$L_* = \frac{2h}{3 |d\xi^0/dx|_{\text{макс}}} \quad (1.3.10)$$

и зависит только от начальной крутизны волны. Если профиль волны можно параметризовать функцией

$$\xi^0(x) = af(x/\lambda), \quad (1.3.11)$$

то аналогичная параметризация возможна и для длины нелинейности

$$L_* = q_* h \lambda / a, \quad (1.3.12)$$

где $q_* = (2/3) f'_{\text{макс}}$ — численный коэффициент, определяемый только формой волны. В частности, для монохроматической волны $q_* = 1/(3\pi) \approx 0,1$. Знание величины L_* на практике важно; ведь если $x \ll L_*$, то нелинейные искажения профиля волны не успеют проявиться, и для нахождения решения можно воспользоваться линейной теорией мелкой воды. На расстояниях $x \sim L_*$ учет нелинейных эффектов является обязательным, а на расстояниях $x > L_*$ уравнения первого приближения вообще перестают быть пригодными и необходимо переходить к моделям следующего уровня, возникающим при разложении в ряд по $\varepsilon = H_0^2/L_0^2$, или учитывать диссипацию.

Выполним некоторые оценки. Если принять $\lambda = 100$ км, $a \simeq 4$ м (средние цифры для параметров цунами в открытом океане), то $L_* \simeq 10$ тыс. км (при $h \simeq 1$ км), следовательно, нелинейные эффекты для волн цунами в открытом океане необходимо учитывать только при их движениях на трансокеанских трассах. В прибрежной зоне $h = 200$ м, $\lambda = 5$ км, $a = 10$ м, тогда $L_* = 10$ км, и нелинейные эффекты существенны на меньших трассах.

В случае сильной нелинейности из представленных формул вытекает, что L_* перестает зависеть от амплитуды волны, и нелинейные эффекты проявляются практически сразу. В этом случае уравнения в данном виде в сущности вообще неприменимы.

1.3.2. Обрушение волны. Как же модифицировать уравнения при $x \gtrsim L_*$? Поскольку (рис. 1.3) эволюция волны приводит к неограниченному возрастанию крутизны переднего склона, то можно полагать, что в дальнейшем передний склон волны обрушится с формированием ударной волны (бора, гидравлического прыжка) — этот процесс часто наблюдается в прибрежной зоне. Для его описания следует заменить небольшую зону, где происходит обрушение, разрывом, на котором, очевидно, должны сохраняться масса и количество движения [70]:

$$\begin{aligned} [cH] &= [Hu], \\ [cHu] &= \left[Hu^2 + \frac{1}{2} g H^2 \right], \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

где c — скорость движения фронта бора и $[\varphi] = \varphi_2 - \varphi_1$ означает разность значений φ по обеим сторонам скачка. В частности, если бор образовался на фронте волны, то скорость распространения волны и скорость потока за фронтом находятся из (1.1.29) в явном виде:

$$\begin{aligned} c &= \{gh(1 + \zeta/h)[1 + \zeta/(2h)]\}^{1/2}; \\ u &= \zeta \{(g/h)[1 + \zeta/(2h)](1 + \zeta/h)^{-1}\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

В случае малых амплитуд эти формулы упрощаются:

$$\begin{aligned} c &\simeq \sqrt{gh} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{\xi}{h}\right); \\ u &\simeq \xi \sqrt{g/h} \left(1 - \frac{1}{4} \frac{\xi}{h}\right). \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Как видим, скорость потока за фронтом совпадает со скоростью частиц в гладкой римановой волне [см. (1.3.9)], а скорость фронта меньше скорости распространения римановой волны, что и приводит к непрерывной диссипации энергии на фронте ударной волны.

Вне области обрушения крутизна волны мала, и здесь применима теория мелкой воды. Таким образом, совместное решение уравнений мелкой воды с граничными условиями на разрыве позволяет описать волновой процесс на расстояниях, больших L_* . На практике, однако, достаточно пользоваться дивергентной формой уравнений мелкой воды, чтобы автоматически получать обобщенные решения, включающие разрывы (см. п. 1.2.2).

1.3.3. Диссипация длинных волн. Кроме обрушения переднего склона волны, важным диссипативным фактором является трение потока о дно. Простейшие оценки показывают, что в длинных волнах течение должно быть турбулентным (при $u \sim 1$ м/с, $\lambda \sim 1$ км число Рейнольдса $Re \sim 10^9$). Поэтому в качестве горизонтальных внешних сил в (1.1.1) необходимо учесть напряжения Рейнольдса

$$F_i = -\frac{\partial}{\partial x} \langle u'_i u'_j \rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \tau_{ij} \quad (1.3.16)$$

и изменить граничные условия на дне (условия прилипания)

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} = 0, \quad z = -h \quad (1.3.17)$$

и свободной поверхности

$$(p - p_a) n_i = (\tau_{ij} - \tau_{ij}^a) n_j, \quad z = \xi, \quad (1.3.18)$$

где индекс «a» указывает на атмосферные величины; n_i — компоненты единичного вектора нормали к свободной поверхности. В частности, при отсутствии атмосферных возмущений из (1.3.18) вытекает следующее граничное условие для давления:

$$p = \tau_{33} - \tau_{13} \partial \xi / \partial x - \tau_{23} \partial \xi / \partial y. \quad (1.3.19)$$

Процедура получения упрощенных уравнений аналогична ранее описанной в п. 1.1.3 (см., например, [25]). Окончательная форма уравнений совпадает с (1.1.12) и (1.1.14), где под F_i необходимо понимать τ_{i3}/H . В длинноволновых моделях общепринятой является следующая аппроксимация $\mathbf{F}$, связанная с донным трением:

$$\mathbf{F} = -\frac{c_h}{H} |\mathbf{V}| \mathbf{V} = -\frac{c_h}{h + \xi} |\mathbf{V}| \mathbf{V}. \quad (1.3.20)$$

Для коэффициента донного трения c_h существует много эмпирических формул, берущих свое начало из задач гидравлики открытых потоков; к этому вопросу мы еще вернемся.

Для демонстрации диссипативных эффектов «в чистом виде» опустим адвективные нелинейные слагаемые в уравнениях мелкой воды:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= -\frac{c_h}{h} |u| u; \\ \partial \zeta / \partial t + h \partial u / \partial x &= 0.\end{aligned}\quad (1.3.21)$$

Легко показать, что решение определяется единственным безразмерным параметром

$$Q = c_h \lambda \zeta^0 / h^2, \quad (1.3.22)$$

где λ — характерная длина волны. В случае $Q \ll 1$ приближенное решение системы (1.1.35) имеет вид (детали его получения приведены в [34])

$$\zeta(x, t) = \frac{\zeta^0(x - \sqrt{gh} t)}{1 + \frac{c_h \sqrt{gh} t}{2h^2} |\zeta^0(x - \sqrt{gh} t)|}. \quad (1.3.23)$$

Здесь $\zeta^0(x)$ — начальная форма волны. Отсюда видно, что поглощение максимально в области больших возмущений (что, впрочем, видно и из исходных уравнений), так что волна любой формы стремится с течением времени иметь плоскую вершину (а также ложбину). Примечательно, что при больших t высота волны перестает зависеть от начальной амплитуды и определяется только глубиной бассейна и коэффициентом донного трения

$$|\zeta(x, t)| \simeq \frac{2h^2}{c_h \sqrt{gh} t} = \frac{2h^2}{c_h x}. \quad (1.3.24)$$

В случае больших значений величины Q (очень малые глубины) решение (1.3.21) определяется автомодельным выражением, которое мы здесь не приводим (см. [34]). Анализ решения показывает, что волна, практически не смещаясь, быстро расплывается диффузионным способом, ее длина растет как $t^{2/3}$.

Эти качественные особенности влияния диссипации, как мы увидим далее, сохраняются и при других аппроксимациях силы трения.

1.4. Второе приближение теории мелкой воды. Дисперсия длинных волн

Первое приближение теории мелкой воды получило широкое распространение для расчетов длинных волн, однако для решения ряда задач традиционного приближения недостаточно. Расширение теории происходит по двум направлениям. Одно из них

связано с учетом вертикальной структуры течений из-за наличия пограничного слоя вблизи дна и будет рассмотрено в главе 7. Другой класс задач связан с распространением длинных волн умеренной длины (не очень большой), когда эффекты дисперсии становятся заметными и сравнимыми с нелинейными. Наиболее известным представителем данного класса являются одиночные волны — солитоны. В этом разделе представлено второе приближение теории мелкой воды, позволяющее учесть дисперсию длинных волн.

1.4.1. Нелинейно-дисперсионные уравнения потенциального движения. Дисперсионные поправки к приближению мелкой воды, как отмечалось в п. 1.1.2, учитываются разложением потенциала в ряд по глубине жидкости. Такой подход обычно применяется для слабонелинейных волн на воде [56, 61, 68]. Однако в прибрежной зоне высота волны сравнима с глубиной, поэтому целесообразно привести здесь вывод уравнений нелинейно-дисперсионной теории, пригодный для любого отношения высоты волны к глубине бассейна (см., например, [25], где приведена подробная библиография по этому вопросу).

В соответствии со сказанным представим потенциал Φ в виде степенного ряда

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(x, y, t) [z + h(x, y)]^n. \quad (1.4.1)$$

Подставляя Φ в уравнение Лапласа (1.1.5), получим рекуррентные соотношения:

$$(n+2)(n+1)[1+(\nabla h)^2]\Phi_{n+2} + (n+1)[2\nabla\Phi_{n+1}\nabla h + \Phi_{n+1}\Delta h] + \Delta\Phi_n = 0. \quad (1.4.2)$$

Для их использования необходимо знать Φ_0 и Φ_1 . Связь между ними получается из граничного условия на дне (1.1.6). Подставляя (1.4.1) в (1.1.6), найдем:

$$\Phi_1 = -\frac{\nabla\Phi_0\nabla h}{1+(\nabla h)^2}. \quad (1.4.3)$$

В результате все члены ряда (1.4.1) определяются через функцию $\Phi_0(x, y, t)$. Ясно, что ряд (1.4.3) имеет смысл, только если его члены достаточно быстро убывают с увеличением номера приближения. Чтобы оценить сходимость ряда, рассмотрим откос постоянного уклона $h = \alpha x$, $\alpha = \text{const}$ и обозначим $\partial\Phi_0/\partial x = u_0$. Тогда из (1.4.2) и (1.4.3) получим

$$\Phi_1 = -\frac{\alpha u_0}{1+\alpha^2}; \quad \Phi_2 = \frac{1-\alpha^2}{2(1+\alpha^2)^2} \frac{\partial u_0}{\partial x}. \quad (1.4.4)$$

В этом случае скорость течения на поверхности воды равна

$$u = \frac{\partial\Phi}{\partial x} \Big|_{z=\zeta} = u_0 - \frac{\alpha}{1+\alpha^2} \left[\frac{\partial u_0}{\partial x} H + \left(\alpha + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) u_0 - \right. \\ \left. - \frac{1-\alpha^2}{2(1+\alpha^2)^2} H \left[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} H + 2 \frac{\partial u_0}{\partial x} \left(\alpha + \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right) \right] + \dots \right] \quad (1.4.5)$$

Как видим, отношение второго слагаемого к первому имеет порядок $\alpha^2/(1 + \alpha^2)$, и оно мало, только если $\alpha^2 \ll 1$. Таким образом, длинноволновое приближение имеет смысл лишь при малых откосах дна. Этот вывод физически очевиден (на крутых откосах велика вертикальная скорость) и должен учитываться при решении конкретных задач с реальным рельефом дна.

Третье слагаемое в (1.4.5) при малых α имеет порядок по (по отношению к первому)

$$\varepsilon = h^2/\lambda^2, \quad (1.4.6)$$

малость которого определяет длинную волну. Таким образом, необходимыми условиями применимости длинноволновых моделей являются условия малости двух параметров: $\varepsilon = h^2/\lambda^2$ и $\alpha = |\nabla h|$ (на высоту волны при этом никаких условий не накладывается). Для дальнейшего необходимо конкретизировать соотношение между этими параметрами. Примем, что $\alpha^2 \sim \varepsilon$, тогда второе и третье слагаемые в (1.4.5) будут одного порядка, хотя их отношение может меняться в широких пределах.

С учетом принятого отношения параметров выпишем ряд (1.4.1), в котором пренебрежем слагаемыми $O(\varepsilon^3)$ [25]:

$$\begin{aligned} \Phi = & \Phi_0 - \nabla \Phi_0 \nabla h [1 - (\nabla h)^2] (z + h) + \\ & + \left[-\frac{\Delta \Phi_0}{2} + \nabla \Phi_0 \nabla h \Delta h + \nabla h \nabla (\nabla \Phi_0 \nabla h) + \frac{1}{2} \Delta \Phi_0 (\nabla h)^2 \right] (z + h)^2 + \\ & + \left[\frac{1}{2} \Delta h \Delta \Phi_0 + \nabla h \Delta \Phi_0 + \Delta (\nabla \Phi_0 \nabla h) \right] \frac{(z + h)^3}{3} + \frac{1}{24} \Delta (\Delta \Phi_0) (z + h)^4. \end{aligned} \quad (1.4.7)$$

Подставив (1.4.7) в граничные условия на свободной поверхности (1.1.7) и (1.1.8), получим искомые уравнения нелинейно-дисперсионной модели для ξ и $\nabla \Phi_0$. Использование этих уравнений осложняется отсутствием физически четкой трактовки скорости $\nabla \Phi_0$ — она соответствует скорости течения на неопределенном горизонте. Естественно ввести среднюю по глубине скорость течения

$$\mathbf{v} = \frac{1}{H} \int_{-h}^{\xi} \nabla \Phi \, dz. \quad (1.4.8)$$

Теперь, используя (1.4.7), можно приближенно вычислить $\nabla \Phi_0$ с точностью до ε^2 :

$$\nabla \Phi_0 \simeq \mathbf{v} + \frac{H}{2} \nabla \Delta h + H (\nabla h \nabla) \mathbf{v} + (\nabla h)^2 \mathbf{v} + \frac{1}{6} H^2 \Delta \mathbf{v}. \quad (1.4.9)$$

Опуская громоздкие выкладки (см. [25]), приведем окончательный вид уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \nabla (H \mathbf{v}) &= 0; \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + g \nabla \xi &= \mathbf{D}, \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \frac{1}{H} \nabla \left(\frac{H^3}{3} R + \frac{H^2}{2} Q \right) - \nabla h \left(\frac{H^2}{2} R + Q \right), \\ R &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla \mathbf{v} + (\mathbf{v} \nabla) \nabla \mathbf{v} - (\nabla \mathbf{v})^2, \\ Q &= \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \nabla h + (\mathbf{v} \nabla) (\mathbf{v} \nabla h). \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

Отличие этих уравнений от рассмотренной в п. 1.1.3 системы уравнений мелкой воды заключается в добавочном слагаемом $\mathbf{D}$, учитывающем малую дисперсию. Нелинейность при этом остается произвольной.

Приведем здесь также выражение для давления в рамках нелинейной дисперсионной теории, вытекающее из второго уравнения (1.1.1.) с учетом (1.1.4):

$$p = p_a + \rho g (\xi - z) + \frac{1}{2} \rho [z^2 + 2h(z - \xi) - \xi^2] R - \rho (\xi - z) Q. \quad (1.4.12)$$

Прежде чем обратиться к физическому анализу нелинейно-дисперсионного приближения, сделаем замечания. Во-первых, полученные уравнения допускают модификации. Действительно, ввиду малости $\mathbf{D}$ в нем можно заменять временные производные на пространственные (и наоборот) в соответствии со связями, вытекающими из уравнений мелкой воды. Рассмотрим, например, плоские волны малой амплитуды в бассейне постоянной глубины. Тогда (1.4.10) и (1.4.11) сводятся к уравнениям

$$\begin{aligned} \partial \xi / \partial t + h \partial u / \partial x &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} &= D = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}. \end{aligned} \quad (1.4.13)$$

С принятой степенью точности для D можно написать ряд выражений

$$D = \frac{h^2}{3} \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} = -\frac{gh^2}{3} \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} = -\frac{h}{3} \frac{\partial^3 \xi}{\partial t^2 \partial x} = \frac{h}{3g} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}. \quad (1.4.14)$$

Ввиду линейности (1.4.13) ее решениями являются монохроматические волны вида $\exp[i(\omega t - kx)]$, где ω и k связаны дисперсионными соотношениями, отвечающими различным выражениям D в (1.4.14). Общим у них является длинноволновой предел

$$\omega \simeq \sqrt{gh} k \left(1 - \frac{h^2 k^2}{6} \right), \quad (1.4.15)$$

а в слагаемых $O(h^4 k^4)$ имеются расхождения. Последнее легко объяснимо, так как исходные уравнения дисперсионной модели выписаны с точностью до $\varepsilon = h^2/\lambda^2 \sim h^2 k^2$. Чтобы приближаться к дисперсионному соотношению для волн на воде $\omega = \sqrt{gk} \operatorname{th}(kh)$ с увеличивающейся точностью, необходимо удерживать все боль-

ше слагаемых в разложении потенциала. Нетрудно видеть, что дисперсионное соотношение, отвечающее последнему из выражений в (1.4.14), наиболее близко к точному (даже в коротковолновой области отличие не превышает 30 %), поэтому можно надеяться, что использование (1.4.13) с

$$D = \frac{h}{3g} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}$$

окажется хорошим приближением исходной краевой задачи во всей области частот без учета в D слагаемых более высокого порядка. Наоборот, использовать

$$D = -\frac{gh^2}{3} \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3}$$

наиболее трудно, ибо при $kh > \sqrt{3}$ частота становится мнимой, и решение системы (1.4.13) будет неустойчивым. Указанное обстоятельство важно для выбора D с целью аналитического и в особенности численного описания волнового процесса в широком диапазоне частот.

Второе замечание касается значения нелинейности. Как упоминалось, уравнения нелинейно-дисперсионной модели получены без использования приближения малости амплитуды волны. Если же такое допущение сделать, то (1.4.11) упрощается:

$$D = \frac{h}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left[\nabla (\nabla h \mathbf{v}) - \frac{h}{3} \nabla (\nabla \mathbf{v}) \right]. \quad (1.4.16)$$

Система (1.4.10) с выражением (1.4.16) известна как система уравнений Перегринна [120]. Разумеется, и здесь, как и в (1.4.11), возможны модификации.

1.4.2. Анализ приближений. Обсудим эффекты совместного действия нелинейности и дисперсии. Для этого рассмотрим плоские волны в бассейне постоянной глубины и перепишем систему (1.4.10) в виде

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Hu) \doteq 0;$$

$$\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + g \partial \zeta / \partial x = D; \quad (1.4.17)$$

$$D = \frac{1}{3H} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ H^3 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right\}.$$

В отсутствие дисперсии ($D = 0$) система (1.4.17) совпадает с (1.1.1), простейшими решениями которой в одноволновом приближении являются волны Римана (1.3.6). Посмотрим, как влияет дисперсия на характер процесса. Как и при выводе (1.3.6), естественно выделить волну, распространяющуюся в одном направлении. Используемая техника в недисперсионном случае не проходит, поэтому приходится прибегнуть к приближенным методам [61]. Введем римановы инварианты, которые мы, в отличие от п. 1.2.4, видоизменим так чтобы в отсутствие волны $V_{\pm} = 0$

$$V_{\pm} = u \pm 2(\sqrt{gH} - \sqrt{gh}) \quad (1.4.18)$$

и перепишем (1.4.17) в новых переменных

$$\frac{\partial V_{\pm}}{\partial t} + \left(\pm \sqrt{gh} + \frac{3}{4} V_{\pm} + \frac{1}{4} V_{\mp} \right) \frac{\partial V_{\pm}}{\partial x} = D(V_{+}, V_{-}), \quad (1.4.19)$$

где в правой части нужно u и ξ выразить через V_{+} и V_{-} . Если $D=0$, то частным решением является $V_{-}=0$ и V_{+} — произвольная функция переменной $x - \sqrt{gh}t - \frac{3}{4} V_{+}t$; легко убедиться, что этому решению и соответствует волна Римана (1.4.18). При $D \neq 0$ функции V_{+} и V_{-} уже не являются независимыми. Однако, если $D \rightarrow 0$, то можно считать, что V_{-} малая величина (пропорциональная D), и оставить в (1.4.19) только первые степени V_{-} :

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{+}}{\partial t} + \left(\sqrt{gh} + \frac{3}{4} V_{+} \right) \frac{\partial V_{+}}{\partial x} &= D(V_{+}, 0) - \frac{1}{4} V_{-} \frac{\partial V_{+}}{\partial x}; \\ \frac{\partial V_{-}}{\partial t} + \left(-\sqrt{gh} + \frac{1}{4} V_{+} \right) \frac{\partial V_{-}}{\partial x} &= D(V_{+}, 0). \end{aligned} \quad (1.4.20)$$

Однако и в таком упрощенном виде система (1.4.20) все еще сложна для аналитического рассмотрения. Поэтому рассмотрим случай слабой нелинейности (нелинейность порядка дисперсии), когда последним слагаемым в первом уравнении (1.4.14) можно пренебречь. Тогда уравнение для V_{+} становится замкнутым, а функция D описывается выражением (1.4.16) или (1.4.14):

$$\frac{\partial V_{+}}{\partial t} + \left(\sqrt{gh} + \frac{3}{4} V_{+} \right) \frac{\partial V_{+}}{\partial x} = \frac{h^2}{6} \frac{\partial^3 V_{+}}{\partial t \partial x^2}. \quad (1.4.21)$$

Воспользуемся заменой

$$y = x - \sqrt{gh} t, \quad t = t, \quad (1.4.22)$$

и, учитывая, что $V_{+} \simeq 2u \simeq 2\xi \sqrt{g/h}$, перепишем окончательно (1.4.21):

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{h}} \xi \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{h^2 \sqrt{gh}}{6} \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3} = 0. \quad (1.4.23)$$

Уравнение (1.4.23) является хорошо известным уравнением Кортевега — де Фриза.

Если пренебречь дисперсией [последним слагаемым в (1.4.23)], то уравнение Кортевега — де Фриза совпадает с уравнением (1.3.5) при разложении $V(\xi)$ в ряд по ξ и переходе к координатам (1.4.22). К чему же приводит дисперсия? Для этого рассмотрим простейший класс решений уравнения (1.4.23), зависящий от $y - bt$, где b — постоянная, подлежащая определению. Тогда (1.4.23) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, которое один раз может быть проинтегрировано:

$$\frac{h^2 \sqrt{gh}}{6} \frac{d^2 \xi}{dy^2} + \frac{3}{4} \sqrt{\frac{g}{h}} \xi^2 - b\xi = A, \quad (1.4.24)$$

A — константа интегрирования. В общем виде решения (1.4.24) выражаются через аналитические функции Якоби — так называемые кноидальные волны. Остановимся здесь только на выражении для уединенных волн, называемых обычно солитонами:

$$\xi = a \operatorname{sch}^2 \sqrt{\frac{3a}{4h}} \frac{x - \sqrt{gh}(1 + a/h)t}{h}. \quad (1.4.25)$$

Таким образом, совместный учет нелинейности и дисперсии приводит к существованию волн установившегося вида, которые не меняются в процессе распространения. Теория солитонов активно развивается во многих разделах физики, в том числе и океанологии, и уравнение Кортевега — де Фриза явилось базовой моделью развития этой теории.

Что же происходит с произвольными начальными возмущениями? Для анализа этого перейдем в уравнении Кортевега — де Фриза к безразмерным переменным:

$$\tilde{\xi} = \xi/a; \quad \tilde{y} = y/\lambda; \quad \tilde{t} = \frac{3}{2} \frac{t\sqrt{gh}}{\lambda} \frac{a}{h}, \quad (1.4.26)$$

в которых оно принимает вид

$$\frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{\xi} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{y}} + \frac{1}{9Ug} \frac{\partial^3 \tilde{\xi}}{\partial \tilde{y}^3} = 0, \quad (1.4.27)$$

где Ug — параметр Урселла

$$Ug = a\lambda^2/h^3, \quad (1.4.28)$$

а a и λ — амплитуда и длина начального возмущения. Итак, волновой процесс определяется только одним безразмерным параметром — числом Урселла, которое есть отношение нелинейности к дисперсии. Если нелинейность превалирует, то $Ug \gg 1$ и последним слагаемым в (1.4.27) можно пренебречь; тогда мы приходим к классической нелинейной теории мелкой воды; для этого случая характерно укрупнение переднего склона волны. Если определяющей является дисперсия, то $Ug \ll 1$ и в (1.4.27) можно пренебречь нелинейностью. Получаемое при этом линейное уравнение имеет точное решение и описывает распывание начального возмущения. В частности, на больших расстояниях максимальной является головная волна, ее амплитуда убывает как $t^{-1/3}(x^{-1/3})$, а длина растет $\lambda \sim t^{1/3}(x^{1/3})$, за головной волной располагается осциллирующий цуг с уменьшающейся амплитудой и периодом.

Для практики важно оценить расстояние, на котором проявляется дисперсия; оно находится из (1.4.23) (численный коэффициент приведен в [59]):

$$L_g \simeq 0,02\lambda^3/h^2. \quad (1.4.29)$$

В частности, при $\lambda \sim 10$ км и $h \sim 100$ м $L_g \sim 2$ тыс. км, а при $\lambda \sim 1$ км дисперсия проявляется практически мгновенно.

Точные решения уравнения Кортевега — де Фриза в случае предельных значений числа Урселла совпадают с описанными здесь на конечных пространственно-временных интервалах; на

больших расстояниях вклады нелинейности и дисперсии оказываются одинаковыми вне зависимости от начальной формы, и произвольное возмущение распадается на солитоны и осциллирующие цуги [27, 32, 59]. Число солитонов при $Ug \gg 1$ грубо можно оценить по тому, какое их количество можно «вписать» в начальное возмущение. Отметим также другой смысл числа Урселла: оно равно квадрату отношения длины начального возмущения к длине солитона той же амплитуды и пропорционально квадрату числа образующихся солитонов. Не останавливаясь более подробно на точных решениях уравнения Кортевега — де Фриза (так как с учетом переменной глубины бассейна многие из них теряют смысл), сошлемся на [27, 59], где приведены рисунки, иллюстрирующие характер волнового процесса при различных значениях параметра Урселла.

Итак, в приближении слабой нелинейности и дисперсии эти эффекты могут полностью уравновешивать друг друга, приводя к установлению волн неизменного профиля. Однако уравнения нелинейно-дисперсионной модели выведены без ограничений на значение нелинейности. Может ли слабая дисперсия противостоять сильной нелинейности? Рассмотрим класс установившихся волн, зависящих от $x - ct$, в рамках системы (1.4.17). Ее решение находится в явном виде [24]:

$$\begin{aligned}\xi &= a \operatorname{sch}^2 \sqrt{\frac{3a}{4(h+a)}} \frac{x - \sqrt{g(h+a)} t}{h}, \\ u &= \xi \sqrt{g/(h+a)}.\end{aligned}\quad (1.4.30)$$

Замечательно, что решение (1.4.30) «устроено» так же, как и решение уравнения Кортевега — де Фриза (1.4.25), с небольшой модификацией коэффициентов. Хотя это решение в рамках (1.4.17) формально справедливо при любой амплитуде, легко видеть, что эффективная длина волны

$$\lambda \sim h \sqrt{(h+a)/a} \quad (1.4.31)$$

при больших высотах сравнима с глубиной бассейна, что ведет к нарушению исходного предположения о малости дисперсии (параметр $\varepsilon = h^2/\lambda^2$). Поэтому при сильной нелинейности необходимо учитывать следующие члены разложения по дисперсии. Точные результаты для краевой задачи (1.1.5) — (1.1.8) показывают, что сильная нелинейность может компенсироваться дисперсией только при $a/h < 0,78$, при больших высотах установившихся волн нет. Таким образом, при изучении установившихся волн в рамках описанной здесь модели нелинейность, строго говоря, должна быть малой. Однако численные эксперименты (см., например, [24]) показывают, что с учетом ограничения $a/h < 0,78$ волновой процесс хорошо описывается уравнениями (1.4.17). Поэтому можно считать, что развитая здесь нелинейно-дисперсионная модель применима для расчетов прибрежной длинноволновой денивелиации.

2

Глава

Накат длинных волн на берег

При изучении динамики морских волн в прибрежной зоне особое место занимает приустьевая область, определяющая в конечном счете разрушительную силу наводнения. Эта область традиционно трудна для исследователя ввиду многообразия определяющих факторов. Далее мы покажем, как задачи наката волн на берег могут быть решены с помощью развиваемого в книге метода «криволинейных координат». Здесь мы рассмотрим аналитические методы расчета зон затопления побережья. Для этого задача, естественно, должна быть схематизирована. В простейшем случае это плоский неразмывающийся откос, волна приходит к берегу по нормали (перпендикулярно изобатам). Следует отметить, что ее первое решение, правда, в линейной постановке, для углов откоса 45° получено еще в довоенные годы М. В. Келдышем, а затем обобщено на более широкий диапазон углов (соответствующие работы цитируются в [68]). При этом рассмотрена весьма трудная для анализа ситуация волн произвольной длины, отвечающая переходу волны с глубокой воды на мелкую. В случае длинных волн, по крайней мере в линейной постановке, ситуация существенно проще: краевая задача заменена на дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами, тем не менее аналитические решения здесь появились только в 60-е годы (см., например, [129, 130]). Разумеется, возможность использования линейного приближения для описания процесса наката вызывает априори возражения, так как в приустьевой области высота волны существенно больше глубины бассейна. Впервые нелинейная задача наката длинных волн на берег была решена в 1958 г. Кэрриером и Гринспаном [85]. Значение этой работы, если ее оценивать с позиций сегодняшнего дня, чрезвычайно велико, так как впервые удалось доказать возможность наката волн без обрушения, которая и используется во всех «линейных» работах по накату волн. Более того, последующие работы [46, 59] показали, что «линейные» формулы для максимума высоты волны на урезе на самом деле и определяют максимум высоты подъема уровня воды на побережье, тем самым оправдывая линейный подход. В результате удалось создать методику предвычисления уровней затопления суши и получить набор тестовых решений, необходимых для отладки вычислительных алгоритмов.

2.1. Взаимодействие длинных волн с вертикальной стенкой

Сначала мы рассмотрим наиболее простую задачу наката — взаимодействие длинной волны с вертикальной стенкой, причем глубину бассейна будем считать всюду постоянной. Помимо практической важности для расчета высоты оградительных стенок в портах и на побережье, эта задача позволит оценить «в чистом виде» эффекты нелинейности и дисперсии, влияющие на характер наката морских волн. Кроме того, решение этой задачи позволит определить предельные формулы для наката в случае стремления угла откоса к $\pi/2$.

2.1.1. Простая волна. На первом этапе пренебрежем влиянием дисперсии и обрушения на взаимодействие волны со стенкой. Тогда процесс описывается в рамках нелинейных уравнений мелкой воды, которые мы здесь для удобства воспроизведем:

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + g \partial \zeta / \partial x &= 0; \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \zeta) u] &= 0. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Решение поставленной задачи в рамках этих уравнений получено С. А. Христиановичем [73]. Оно основано на переходе от переменных u, ζ к инвариантам Римана (см. п. 1.2.4):

$$V_{\pm} = u \pm 2 [\sqrt{g(h + \zeta)} - \sqrt{gh}]. \quad (2.1.2)$$

В этих переменных система (2.1.1) имеет вид

$$\frac{\partial V_{\pm}}{\partial t} + \left(\pm \sqrt{gh} + \frac{3}{4} V_{\pm} + \frac{1}{4} V_{\mp} \right) \frac{\partial V_{\pm}}{\partial x} = 0. \quad (2.1.3)$$

Пусть вертикальная стенка расположена при $x = 0$, волна движется к стенке из области $x < 0$. Тогда процесс распространения и отражения волны может быть представлен рис. 2.1, где изображены характеристики

$$c^{\pm} = \pm \sqrt{gh} + \frac{3}{4} V_{\pm} + \frac{1}{4} V_{\mp}.$$

В линейной теории характеристики всюду являются прямыми линиями (штриховые линии на рисунке), из-за нелинейности характеристики изгибаются в области взаимодействия падающей и отраженной волн вблизи стенки (заштрихованная область). Поскольку из (2.1.3) вытекает, что величины $V_{\pm}$ остаются неизменными на характеристиках $c^{\pm}$, то эффект взаимодействия волн сводится к появлению дополнительных задержек во времени прихода различных фаз отраженной волны. Но нас интересует в первую очередь высота волны у стенки, и ее можно рассчитать точно. Дей-

ствительно, из граничного условия на стенке $u = 0$ вытекает следующая связь между высотой волны у стенки ξ_R и инвариантом V_+ :

$$V_+ = 2 [\sqrt{g(h + \xi_R)} - \sqrt{gh}]. \quad (2.1.4)$$

Вне области взаимодействия волны разделены, и в падающей волне величина V_+ определяется следующим выражением:

$$V_+ = 4 [\sqrt{g(h + \xi_0)} - \sqrt{gh}], \quad (2.1.5)$$

где ξ_0 — амплитуда падающей воды. Приравнявая (2.1.4) и (2.1.5), находим искомую формулу:

$$\xi_R/h = 4 [1 + \xi_0/h - \sqrt{1 + \xi_0/h}]. \quad (2.1.6)$$

В предельном случае очень малых значений ξ_0/h (линейная задача) из (2.1.6) естественно вытекает $\xi_R = 2\xi_0$. Учет нелинейности

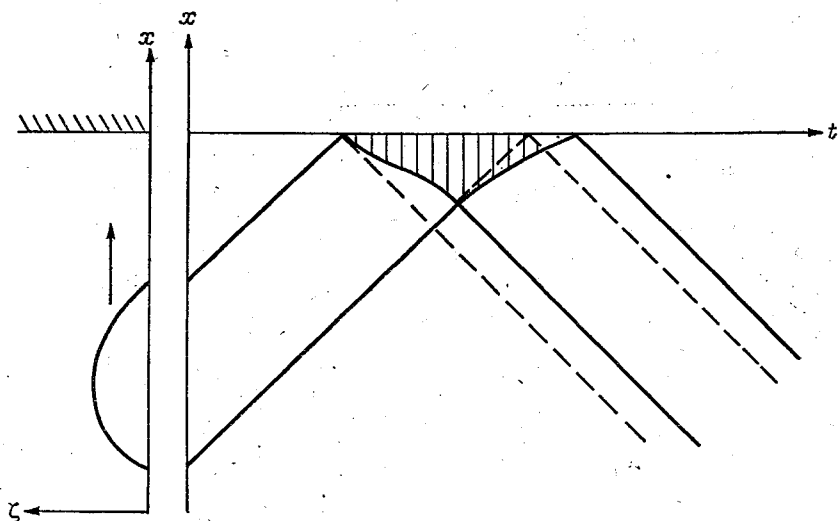


Рис. 2.1. Качественный ход характеристик падающей и отраженной волн. Штриховые линии — характеристики линейной задачи. Слева — геометрия задачи.

приводит к возрастанию высоты подъема воды у стенки; при малых ξ_0/h формула (2.1.6) может быть упрощена:

$$\frac{\xi_R}{\xi_0} = 2 + \frac{1}{2} \frac{\xi_0}{h}. \quad (2.1.7)$$

Из развитой теории удастся получить также условия ее применимости. С увеличением амплитуды уменьшается расстояние, на котором волна превращается в ударную (в рамках бездисперсионной теории). Поэтому при большой амплитуде волны и удаленности источника от вертикальной стенки к ней подойдет ударная волна. Этот эффект, собственно говоря, не связан с наличием стенки и определяется только эволюцией волны по мере ее распространения. Имеется, однако, другой эффект, полностью обусловленный

наличием преграды, и он связан с взаимодействием падающей и отраженной волн. Действительно, отраженная волна вблизи стенки распространяется в поле падающей волны, и, если последняя будет достаточно мощной, то отраженная волна не сможет отойти от стенки и разрушится. Учитывая определение характеристик, получаем условие существования отраженной волны:

$$c^- = -\sqrt{gh} + \frac{1}{4}V_+ \leq 0 \quad (2.1.8)$$

(нам достаточно рассмотреть характеристику, соответствующую началу отражения, на ней $V_- = 0$). Отсюда с помощью (2.1.5) находим

$$\xi_0 \leq 3h. \quad (2.1.9)$$

Таким образом, если $\xi_0 > 3h$, то волна заведомо обрушится, если же (2.1.9) выполняется, и волна подошла к преграде необрушенной, то при отражении она также не обрушится (хотя вдали от стенки она может опрокинуться, так как нелинейные эффекты накапливаются).

2.1.2. Бор. Обсудим теперь влияние обрушения на характеристики заплеска волны на вертикальную стенку. Наиболее простым примером обрушенной волны является бор. В случае его большой протяженности задача сводится к описанию скачка уровня на фронте волны. На скачке выполняются законы сохранения массы и импульса (п. 1.3.2). Так как бор движется в неподвижную воду (рис. 2.2), то законы сохранения имеют вид

$$\begin{aligned} (c - u)(h + \xi_0) &= ch; \\ u(c - u)(h + \xi_0) - \frac{g}{2}(h + \xi_0)^2 &= -\frac{gh^2}{2} \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

и позволяют по заданной высоте волны ξ_0 однозначно определить скорость потока u и скорость движения бора c .

В отраженной волне от стенки скорость потока за фронтом равна нулю (рис. 2.2), поэтому законы сохранения для отраженной волны принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{c}(h + \xi_R) &= (\bar{c} - u)(h + \xi_0); \\ -\frac{g}{2}(h + \xi_R)^2 &= -\frac{g}{2}(h + \xi_0)^2 + u(\bar{c} - u)(h + \xi_0), \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

где $\bar{c}$ — скорость отраженного бора. Из систем (2.1.10) и (2.1.11) можно в принципе найти величину ξ_R (а также c , $\bar{c}$, u). Результаты расчета, приведенные в книге Стокера [68], мы воспроизвели на рис. 2.3. В случае относительно малых высот волн ($\xi_0 < 3h$) высота наката бора хорошо аппроксимируется формулой (2.1.6). При больших значениях высот бора необходимо пользоваться рис. 2.3. Обратим внимание на существенное превышение уровня

воды у стенки над высотой волны. Так, если $\xi_0/h = 10$, то ξ_R/h достигает 40, т. е. $\xi_R \sim 4\xi_0$.

2.1.3. Солитон. Учет теперь влияние дисперсии на характер наката волн цунами на вертикальную стенку. При этом мы сразу же сталкиваемся с проблемой нестационарного поведения волны при подходе к преграде. Действительно, как хорошо известно, совместное влияние нелинейности и дисперсии приводит к появлению ондуляций на теле длинной волны, превращающихся по мере пространства в солитоны. Если длина начального возмущения

больше эффективной длины солитона той же высоты (случай большого числа Урселла), то высота солитона еще на подходе к стенке превышает начальную высоту (но не более, чем в два раза). В другом предельном случае малых чисел Урселла высота солитона будет меньше началь-

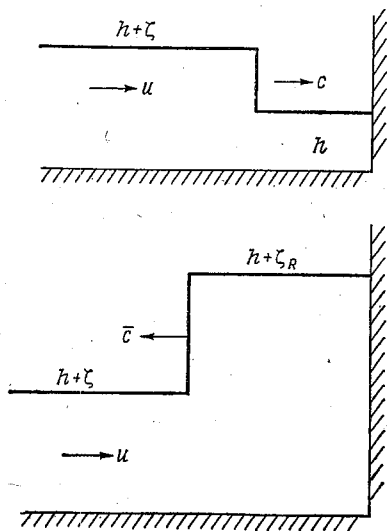


Рис. 2.2. Отражение бора от вертикальной стенки.

Вверху — падающая волна, внизу — отраженная.

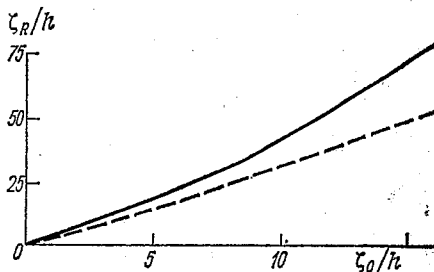


Рис. 2.3. Высота заплеска бора на вертикальную стенку [68].

Штриховая линия — формула (2.1.6) для необрушенной волны.

ной высоты. В результате накат зависит не только от параметров нелинейности ξ_0/h и дисперсии h^2/λ^2 , но и от удаленности источника от стенки и формы начального возмущения. Аналитические оценки в общем случае невозможны, и здесь наиболее подходящим является численный эксперимент. В частности, М. И. Железняк провел соответствующие расчеты для синусоидального гребня, расположенного непосредственно перед стенкой [24], из которых вытекает, что при $\lambda/h > 30 \dots 50$ дисперсионными эффектами можно пренебречь и использовать формулу (2.1.6).

Ряд указанных выше трудностей снимаются при использовании начальных возмущений в виде одиночной волны (солитона), который не трансформируется при движении волны к стенке. Кроме того, для солитона существует жесткая связь между длиной и высотой волны, так что следует ожидать, что высота наката будет зависеть только от одного параметра нелинейности ξ_0/h . Однако, поскольку солитоны произвольной амплитуды «плохо» описывают-

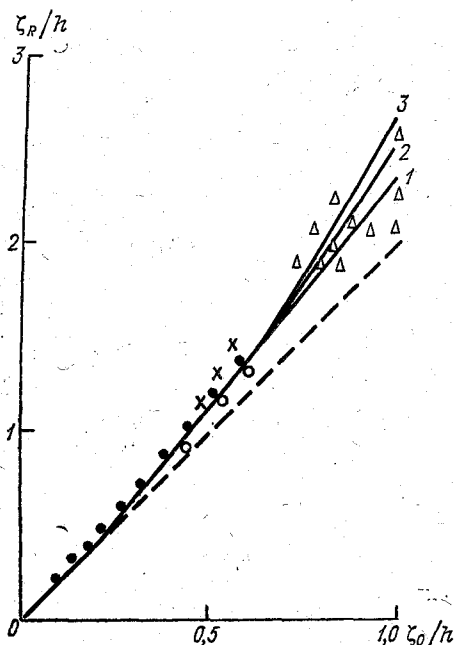


Рис. 2.4. Заплеск солитона на вертикальную стенку.

Штриховая линия — формула линейной теории $\zeta_R = 2\zeta_0$;

1 — формула (2.1.6); 2 — формула (2.1.7); 3 — формула (2.1.12). Данные различных экспериментов суммированы в [24].

ся аналитически, то на простой результат можно рассчитывать только в приближении Кортвега — де Фриза. Такие весьма громоздкие расчеты с помощью теории возмущений выполнялись различными авторами; все они с точностью до квадратичных членов приводят к формуле (2.1.7), так что можно утверждать, что дисперсия слабо сказывается на накат солитона небольшой амплитуды.

Взаимодействие солитона большой амплитуды с вер-

тикальной стенкой изучалось численно в рамках нелинейно-дисперсионной модели (п. 1.4.1) [24]. Численные расчеты приводят к следующей интерполяционной формуле:

$$\zeta_R/\zeta_0 = 1,99 + 0,602\zeta_0/h + 0,039\zeta_0^2/h^2, \quad (2.1.12)$$

пригодной до $\zeta_0/h \sim 0,8$; первые два члена в этой формуле в сущности соответствуют (2.1.7). Результаты сравнения формул (2.1.6), (2.1.7) и (2.1.12) с имеющимися данными лабораторных экспериментов показаны на рис. 2.4 [24]. Как видим, экспериментальные данные хорошо описываются теоретическими зависимостями.

Отметим также, что численные и лабораторные эксперименты (см., например, [24]) свидетельствуют, что волна, отраженная от стенки, уже не является солитоном, на малом расстоянии от стенки за гребнем следует ложбина, на большом — гребень превращается в солитон, за которым тянется осциллирующий хвост.

Итак, для волн различной формы имеющиеся подходы дают примерно одинаковый ответ для высоты заплеска, что свидетельствует о малой роли дисперсии и обрушения в процессе повышения уровня воды у стенки. В то же время для расчета силовых характеристик воздействия (давление, опрокидывающий момент) дисперсия является принципиальной, особенно если длина волны сравнима с глубиной бассейна (такая ситуация имеет место для солитонов большой амплитуды); соответствующие аппроксимационные формулы приведены в [24].

2.2. Набегание длинной волны на плоский откос

2.2.1. Постановка задачи. Критерий подобия. Рассмотрим теперь классическую постановку задачи о накате волны на откос постоянного уклона, так что $h = -\alpha x$, $\alpha = \text{const}$. В пренебрежении дисперсией и диссипацией нелинейные уравнения мелкой воды имеют вид

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t + u \partial u / \partial x + g \partial \xi / \partial x &= 0; \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(-\alpha x + \xi) u] &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Выведем сначала критерий подобия для системы (2.2.1). Введем безразмерные переменные

$$\tilde{t} = \omega t; \quad \tilde{x} = \frac{\alpha x}{\zeta_0}; \quad \tilde{\xi} = \xi / \zeta_0; \quad \tilde{u} = \alpha u / (\omega \zeta_0), \quad (2.2.2)$$

где ζ_0 и ω — характерные высота и частота волны. В этих переменных система (2.2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Br}} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{x}} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} [(-\tilde{x} + \tilde{\xi}) \tilde{u}] &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

и определяется безразмерным параметром [31]

$$\text{Br} = \zeta_0 \omega^2 / (g \alpha^2). \quad (2.2.4)$$

Существование единственного параметра, разумеется, связано с пренебрежением рядом факторов (диссипацией, дисперсией и др.), которые будут учтены позднее. Подчеркнем, что параметр Br не связан с нелинейностью системы (2.2.3), что указывает на определенную взаимосвязь линейной и нелинейной задач, обсуждаемую в п. 2.4. Отметим также, что параметр Br впервые возник при анализе экспериментальных данных [80], где он использован для определения условий обрушения волны; развиваемая здесь теория позволит объяснить эмпирический критерий разрушения.

Ясно, что обезразмеривание уравнений может быть проведено по-разному. В частности, если принять в качестве безразмерных переменных

$$t_* = \alpha t \sqrt{g / \zeta_0}; \quad x_* = \alpha x / \zeta_0; \quad \xi_* = \xi / \zeta_0; \quad u_* = u / \sqrt{g \zeta_0}, \quad (2.2.5)$$

то система (2.2.1) сводится к

$$\begin{aligned} \partial u_* / \partial t_* + u_* \partial u_* / \partial x_* + \partial \xi_* / \partial x_* &= 0; \\ \frac{\partial \xi_*}{\partial t_*} + \frac{\partial}{\partial x_*} [(-x_* + \xi_*) u_*] &= 0, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

которая вообще не содержит безразмерных параметров. Однако при этом масштаб времени начального возмущения изменился по

сравнению с ω^{-1} в $(B\gamma)^{-1/2}$ раз, так что все равно в задаче остается параметр $B\gamma$. Как мы увидим далее, параметр $B\gamma$ имеет фундаментальное значение и определяет критерий разрушения волны.

2.2.2. Метод решения. Вернемся вновь к системе (2.2.1). Удобно ввести полную глубину $H = -\alpha x + \xi$ и переписать систему (2.2.1)

$$\begin{aligned} du/dt + u du/dx + g dH/dx &= -ga; \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(Hu) &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Обратим внимание, что система (2.2.7) не содержит переменных коэффициентов. Для нее можно также ввести сохраняющиеся римановы инварианты [56]

$$V_{\pm} = u \pm 2\sqrt{gH} + gat, \quad (2.2.8)$$

удовлетворяющие уравнениям

$$\frac{\partial V_{\pm}}{\partial t} + \left(\frac{3}{4} V_{\pm} + \frac{1}{4} V_{\mp} - gat \right) \frac{\partial V_{\pm}}{\partial x} = 0. \quad (2.2.9)$$

Именно это обстоятельство и использовано Кэрриером и Гринспаном [85], которые применили к системе (2.2.9) преобразование годографа, т. е. поменяли местами функции V_{+} , V_{-} и аргументы x , t . Такое преобразование возможно, если якобиан преобразования $J = \partial(x, t)/\partial(V_{+}, V_{-}) \neq 0$ (его значение будет подсчитано далее). В результате мы получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial V_{-}} - \left(\frac{3}{4} V_{+} + \frac{1}{4} V_{-} - gat \right) \frac{\partial t}{\partial V_{-}} &= 0; \\ \frac{\partial x}{\partial V_{+}} - \left(\frac{3}{4} V_{-} + \frac{1}{4} V_{+} - gat \right) \frac{\partial t}{\partial V_{+}} &= 0. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Как видим, система (2.2.10), вообще говоря, осталась нелинейной, однако она легко приводится к линейной, если исключить $x(V_{+}, V_{-})$:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial V_{+} \partial V_{-}} + \frac{3}{2(V_{+} - V_{-})} \left(\frac{\partial t}{\partial V_{-}} - \frac{\partial t}{\partial V_{+}} \right) = 0. \quad (2.2.11)$$

Удобно ввести новые переменные

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{2}(V_{+} + V_{-}) = u + gat; \\ \sigma &= \frac{1}{2}(V_{+} - V_{-}) = 2\sqrt{gH}. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Тогда уравнение (2.2.11) принимает вид

$$\sigma \left(\frac{\partial^2 t}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 t}{\partial \sigma^2} \right) - 3 \frac{\partial t}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.2.13)$$

Наконец, выражая из (2.2.12) время

$$t = \frac{\lambda - u}{g\alpha} \quad (2.2.14)$$

и подставляя

$$u = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}, \quad (2.2.15)$$

перепишем (2.2.13) в окончательной форме:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.2.16)$$

Нам необходимо определить через Φ все переменные ξ , x , t , u . Последние две уже определены формулами (2.2.14) и (2.2.15). Функция $x(\sigma, \lambda)$ находится из (2.2.10)

$$x = \frac{1}{2g\alpha} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - u^2 - \frac{\sigma^2}{2} \right). \quad (2.2.17)$$

Наконец, учитывая определение $\sigma^2 = 2gH$, получаем недостающую формулу для уровня воды:

$$\xi = \frac{1}{2g} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - u^2 \right). \quad (2.2.18)$$

Итак, исходная система нелинейных уравнений мелкой воды свелась к линейному волновому уравнению (2.2.16), и все физические переменные находятся через Φ с помощью простых операций. Основное преимущество такой записи исходных уравнений заключается в том, что линии подвижного уреза соответствует $\sigma = 0$ (так как полная глубина $H = 0$) и, следовательно, уравнение (2.2.16) решается в полупространстве $0 \leq \sigma < \infty$ с фиксированной границей, в отличие от исходных уравнений. Представляемые здесь формулы преобразования Кэрриера — Гринспана в принципе позволяют по заданному решению уравнения (2.2.16) однозначно восстановить волновое поле всюду. Фактически это, однако, трудно сделать из-за неявности формул преобразования. Немногочисленные примеры расчета волнового поля с помощью данного метода (ЭВМ при этом применяется только для решения алгебраических уравнений) содержатся в работах [85, 131] (часть из них приведена далее). Трудности расчетов дали основание Меоте, Коху и Хвангу в известном обзоре по накату волн [108], написанному спустя десять лет после работы Кэрриера — Гринспана, сказать: «Основной вклад работы Кэрриера — Гринспана состоит не столько в вычислении заплеска, сколько в показе того, что существуют волны возвышения в нелинейном длинноволновом приближении, которые распространяются по берегу постоянного уклона без обрушения». Именно поэтому преобразования Кэрриера — Гринспана в сущности не нашли должного применения в работах по накату длинных волн. Между тем существует весьма важная практическая ситуация, когда эти преобразования особенно эффективны. Речь идет о накате волны, которую вдали от побережья

можно считать линейной. При этом, если интересоваться только максимальными значениями подъема уровня воды на побережье, то формулы преобразования Кэрриера — Гринспана становятся явными. Обсудим эту ситуацию более подробно [31, 46].

2.2.3. Высота наката монохроматической волны. Рассмотрим здесь частное решение уравнения (2.2.16), отвечающее накату монохроматической волны:

$$\Phi(\sigma, \lambda) = AJ_0(l\sigma) \cos(l\lambda), \quad (2.2.19)$$

где A и l — произвольные константы и J_0 — функция Бесселя. На бесконечности ($\sigma \rightarrow \infty$), очевидно, Φ становится малым, и волна является линейной. В этом случае можно воспользоваться асимптотическим выражением для функции Бесселя и приближенными выражениями, вытекающими из преобразований Кэрриера — Гринспана:

$$\xi = \frac{1}{2g} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda}; \quad u = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}; \quad x = -\frac{\sigma^2}{4ga}; \quad t = \frac{\lambda}{ga}. \quad (2.2.20)$$

В результате волновое поле имеет вид

$$\xi(x, t) \simeq -\frac{A}{g} \sqrt{\frac{l}{4\pi\sqrt{ga}|x|}} \left[\sin\left(lgat + l\sqrt{4ga|x|} - \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(lgat - l\sqrt{4ga|x|} + \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (2.2.21)$$

Естественно переписать это решение в «классических» обозначениях:

$$\xi(x, t) = a(x) \left\{ \sin\left[\omega\left(t - \int \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}\right) - \frac{\pi}{4}\right] + \sin\left[\omega\left(t + \int \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}\right) + \frac{\pi}{4}\right] \right\}; \quad (2.2.22)$$

решение представляет собой суперпозицию двух монохроматических волн с частотой ω и с переменной амплитудой $a(x)$ (из-за изменения глубины), распространяющихся в противоположных направлениях.

Легко видеть из (2.2.21), что $a(x) \sim |x|^{-1/4} \sim h^{-1/4}$ в соответствии с законом Грина, так как угол дна мал. Для определенности в качестве ξ_0 выберем амплитуду волны a на изобате h_0 , удаленной от уреза на расстояние L_R ($h_0 = \alpha L_R$), тогда полностью определены константы l и A :

$$l = \omega/(ga); \quad A = 2g\xi_0 \sqrt{\pi ga \sqrt{ga L_R} / \omega}, \quad (2.2.23)$$

и, следовательно, решение (2.2.19). Не изучая трансформации волны при движении к берегу (это, как говорилось ранее, трудная задача), рассмотрим сразу движение подвижного уреза, что и позволит вычислить характеристики заплеска. Подвижному уре-

зу соответствует $\sigma = 0$, т. е. $\Phi = A \cos(l\lambda)$, и с помощью (2.2.14) и (2.2.17) находим параметрические уравнения движения уреза:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2g\alpha} \left[-Al \sin(l\lambda) - \frac{1}{4} l^4 A^2 \cos^2(l\lambda) \right]; \\ t &= \frac{1}{g\alpha} \left[\lambda + \frac{1}{2} l^2 A \cos(l\lambda) \right]. \end{aligned} \quad (2.2.24)$$

Наиболее просто исследовать экстремум функции $x(t)$, определяющий максимум (минимум) горизонтального заплеска, учитывая связь $h = -\alpha x$ и вертикального заплеска $\zeta_R = Al/(2g)$ или с учетом (2.2.23):

$$\frac{\zeta_R}{\zeta_0} = \left(\frac{\pi\omega}{\alpha} \sqrt{\frac{h_0}{g}} \right)^{1/2} = 2\pi \sqrt{\frac{2L_R}{\lambda_0}}. \quad (2.2.25)$$

где $\lambda_0 = 2\pi \sqrt{gh_0}/\omega$ — длина волны на изобате h_0 . Отметим, что глубина осушения дна в монохроматической волне равна высоте подъема воды на побережье. Таким образом, если волна проходит из области относительно больших глубин, где она линейна и недисперсионна, то высота наката и дальность заплеска находятся в явном виде.

Аналогично рассчитывается скорость движения уреза. С помощью формул (2.2.15), (2.2.19) и (2.2.23) находим

$$u = -\frac{Al^2}{2} \cos(l\lambda) = -\frac{\omega \zeta_R}{\alpha} \cos(l\lambda). \quad (2.2.26)$$

Отсюда вытекает, что максимальная скорость движения уреза равна

$$U = \omega \zeta_R / \alpha, \quad (2.2.27)$$

причем максимальные скорости наката и отката равны между собой. Максимальная скорость достигается при $\lambda = 0$ и π/l , что позволяет из (2.2.24) определить место, где скорости максимальны; оно находится в море на глубине

$$h_* = \omega^2 \zeta_R^2 / (2g\alpha^2). \quad (2.2.28)$$

2.2.4. Условие обрушения волн. Подчеркнем, что полученные здесь формулы носят асимптотический характер и справедливы при $\zeta_R \gg \zeta_0$ (на самом деле, как будет ясно из дальнейшего, достаточно $\zeta_R \geq 2\zeta_0$). С другой стороны, при очень больших высотах должно наступить обрушение волны. Как известно, решение уравнений мелкой воды остается непрерывным, если якобиан преобразований $J = \partial(x, t) / \partial(V_+, V_-) \neq 0$. Элементарный подсчет J с помощью (2.2.10) и (2.2.14) дает

$$J = -\frac{\sigma}{2} \frac{\partial t}{\partial V_+} \frac{\partial t}{\partial V_-} = \frac{\sigma}{8g^2\alpha^2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \sigma} \right)^2 - \left(1 - \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right)^2 \right]. \quad (2.2.29)$$

При малых амплитудах волны $J \neq 0$, однако с увеличением амплитуды наступает момент, когда волна обрушится; очевидно, это

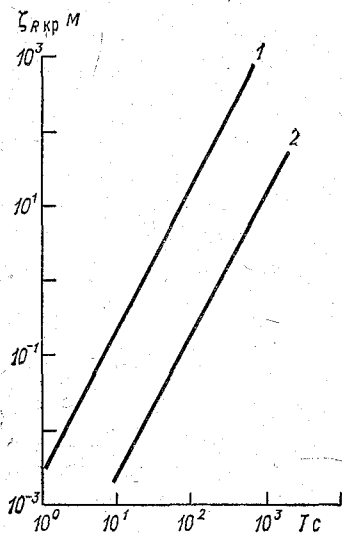


Рис. 2.5. Критическая высота волны, при которой начинается обрушение.

1) $\alpha = 10^{-1}$ ($5,7^\circ$); 2) $\alpha = 10^{-2}$ ($3,4^\circ$).

впервые произойдет на урзе. Критическое значение амплитуды находится из условия

$$\max \left. \frac{\partial u}{\partial \lambda} \right|_{\sigma=0} = 1 \quad (2.2.30)$$

или с учетом (2.2.19) и (2.2.20)

$$\text{Вг} = \omega^2 \zeta_R / (g\alpha^2) = 1. \quad (2.2.31)$$

Таким образом, характер процесса будет различным в зависимости от параметра Вг , выведенного ранее только из соображений размерности [формула (2.2.4)]. Если $\text{Вг} < 1$, то решение остается непрерывным всюду, и волна выходит на берег без обрушения — режим спокойного подтопления берега (наводнение). В случае $\text{Вг} > 1$ в рамках уравнений мелкой воды обязательно наступает градиентная катастрофа, и волна должна разрушиться. На самом деле из-за влияния диссипации и дисперсии процесс формирования ударной волны может замедляться, что приведет к увеличению критического значения числа Вг . И действительно, анализ экспериментальных данных о разрушениях морских волн [80] показывает, что накат волны без разрушения происходит при $\text{Вг} < \pi/2 = 1,57$, т. е. экспериментальное значение критического числа Вг превышает теоретическое примерно на 50 %. Этот факт свидетельствует в пользу развиваемой здесь теории для описания наката волн без обрушения.

Из формулы (2.2.31) вытекает важный вывод, что для каждого участка побережья может быть определено критическое значение высоты подъема уровня воды в зависимости от периода волны, при котором происходит смена типа наката:

$$\zeta_{R\text{кр}} = g\alpha^2 T^2 / (4\pi^2), \quad T = 2\pi / \omega. \quad (2.2.32)$$

Эта зависимость представлена на рис. 2.5. Как видно из рисунка, при $T > 10$ мин критические значения высот велики, так что накат в приливных волнах и волнах цунами, а также штормовых нагонов происходит, как правило, без обрушения. В то же время для ветровых волн ($T \sim 6$ с) типичен процесс обрушения.

2.2.5. Динамика подвижного уреза. Обсудим более подробно динамику подвижного уреза в случае наката монохроматической волны. Если использовать безразмерные переменные (2.2.2) с за-

Рис. 2.6. Динамика подвижного уреза.
Сплошная линия — скорость движения,
штриховая — уровень заплеска. а) $Bg=0$;
б) $Bg=0,5$; в) $Bg=1,0$.

меной ξ_0 на ξ_R , то формулы (2.2.24) и (2.2.26) имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_R &= -\sin \tilde{\lambda} - \frac{1}{2} Bg \cos^2 \tilde{\lambda}; \\ \tilde{u} &= -\cos \tilde{\lambda}; \quad (2.2.33) \\ \tilde{t} &= \tilde{\lambda} - Bg \tilde{u}.\end{aligned}$$

Здесь Bg определен формулой (2.2.31). Из последних двух уравнений можно исключить λ [34]:

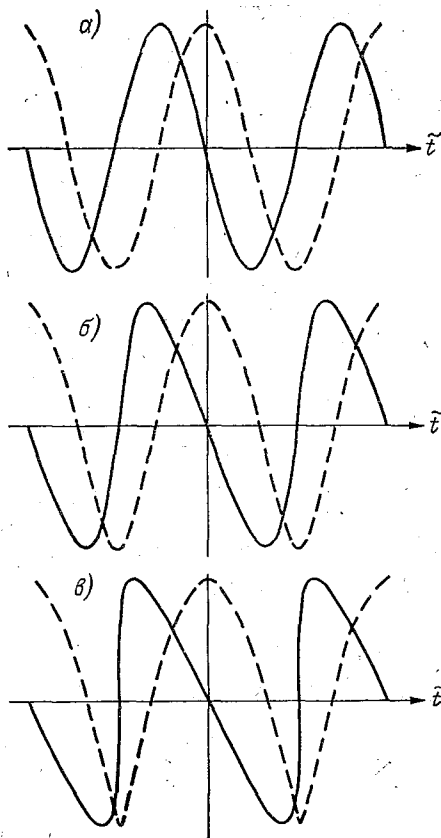
$$\tilde{u} = -\cos(\tilde{t} + Bg \tilde{u}), \quad (2.2.34)$$

правда, при этом для $\tilde{u}$ получается неявная функция времени, которая, однако, легко строится графически (рис. 2.6). С увеличением Bg профиль скорости становится несимметричным, ее передний фронт становится круче, и при $Bg = 1$ волна становится ударной. Теперь уже можно рассчитать $\tilde{\xi}_R(\tilde{t})$ либо с помощью первого уравнения системы (2.2.33), либо интегрированием $\tilde{u}(\tilde{t})$:

$$\tilde{\xi}_R = -\sin(\tilde{t} + Bg \tilde{u}) - \frac{1}{2} Bg \cos^2(\tilde{t} + Bg \tilde{u}). \quad (2.2.35)$$

Эта зависимость также строится графически (рис. 2.6). Как видно из рисунка, профиль высоты заплеска остается симметричным относительно вертикальной оси, причем при $Bg = 1$ (в момент обрушения) график $\tilde{\xi}_R$ содержит излом. Именно поэтому трудно в численных расчетах выделить момент обрушения волны по записям высоты заплеска на урезе, это легче сделать по записям скорости движения уреза. Отметим, что график $\tilde{\xi}_R$ стал несимметричным относительно горизонтальной оси, что соответствует повышению в среднем уровня воды. Этот же вывод вытекает из формулы (2.2.35) после ряда преобразований:

$$\bar{\xi}_R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \xi_R(\tilde{t}) d\tilde{t} = \frac{Bg}{4} > 0. \quad (2.2.36)$$



В результате время заливания суши будет превышать время отлива. Точные выражения для нулей функции $\tilde{\zeta}_R$ получаются из (2.2.33):

$$\tilde{t}_{\text{зал}} = 2\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{1+\text{Br}^2}-1} + 2\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{\text{Br}}\sqrt{\sqrt{1+\text{Br}^2}-1}\right); \quad (2.2.37)$$

$$\tilde{t}_{\text{осуш}} = 2\pi - \tilde{t}_{\text{зал}}.$$

Эти формулы при $\text{Br} \leq 1$ очень хорошо аппроксимируются простыми формулами

$$\begin{aligned} \tilde{t}_{\text{зал}} &= \pi + \text{Br}; \\ \tilde{t}_{\text{осуш}} &= \pi - \text{Br}. \end{aligned} \quad (2.2.38)$$

Описанное здесь поведение подвижного уреза подтверждается результатами численных экспериментов [12, 44].

2.2.6. Экстремальные значения уровня воды и скорости потока. Выше мы рассматривали движение подвижного уреза. Анализ волнового поля вне уреза связан с трудностями неявной формы преобразований Кэрриера — Гринспана. Но для многих практических

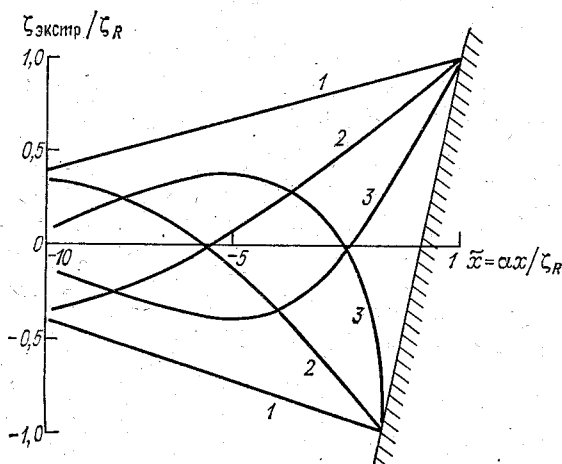


Рис. 2.7. Зависимость экстремальных значений уровня воды от координаты $\tilde{x}$.

1) $\text{Br}=0,06$; 2) $\text{Br}=0,25$;
3) $\text{Br}=0,77$.

задач, в частности, гидротехнического строительства, достаточно найти экстремальные значения уровня воды и скорости потока как функции координаты. Такие характеристики могут быть получены аналитически из формул преобразования Кэрриеса — Гринспана. Опуская громоздкие выкладки, приведем окончательную формулу для зависимости максимальных и минимальных значений уровня воды от координаты [31]:

$$\begin{aligned} \tilde{\zeta}_{\text{экстр}} &= \pm J_0(\sigma); \\ \tilde{x} &= \tilde{\zeta}_{\text{экстр}} - \sigma^2/(4\text{Br}). \end{aligned} \quad (2.2.39)$$

На рис. 2.7 представлены результаты расчета по формуле (2.2.39) [31]. При достаточно малых значениях $B\Gamma$ в приурезовой области $x > 1 - 1/B\Gamma$ из (2.2.39) вытекает простая приближенная формула

$$\tilde{\zeta}_{\text{макс}}^{\text{мин}} = \frac{1 + B\Gamma \tilde{x}}{\pm 1 + B\Gamma}. \quad (2.2.40)$$

Аналогично находятся экстремальные значения скорости потока (рис. 2.8). При малых $B\Gamma$ в приурезовой зоне ($-2/B\Gamma < \tilde{x} < 0$)

$$\tilde{u}_{\text{экстр}} = \pm \left[\left(1 + \frac{3}{8} B\Gamma^2 \right) + \frac{B\Gamma}{2} \tilde{x} + \frac{B\Gamma^2}{12} \tilde{x}^2 \right]. \quad (2.2.41)$$

Представленные здесь формулы полностью описывают изменение экстремальных параметров периодических волн на плоском откосе в зависимости от глубины места как в мористой части, так

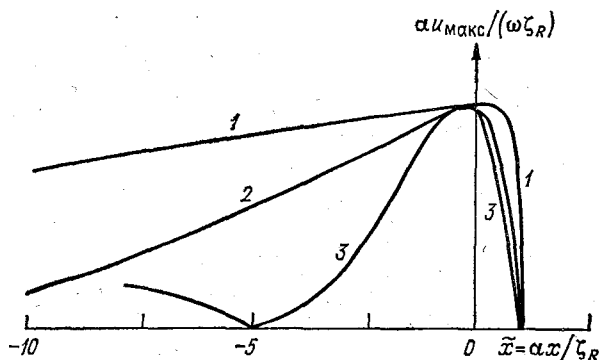


Рис. 2.8. Зависимость максимальных значений скорости потока от координаты $\tilde{x}$.

1) $B\Gamma = 0,06$; 2) $B\Gamma = 0,25$; 3) $B\Gamma = 0,77$.

и на берегу. Полный расчет волнового поля проводится с помощью ЭВМ, численно решаются алгебраические формулы преобразования Кэрриера — Гринспана. Пример расчета наката монохроматической волны на откос с $\alpha = 1/4$ приведен на рис. 2.9, где изображены профили поверхности воды в начальный момент времени и в моменты максимума и минимума заплеска (высота волны 1 м, длина 400 м на глубине 32 м [12]).

2.2.7. Пределы применимости. Обсудим (еще раз) пределы применимости теории необрушенных волн. Оценка сверху — это $B\Gamma = 1$, что с учетом (2.2.35) приводит к максимальному значению коэффициента усиления

$$\max \frac{\zeta_R}{\zeta_0} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{(8\pi^3\sqrt{2})^{1/5}} \left(\frac{h_0}{\zeta_0} \right)^{1/5} \simeq 2,75 \left(\frac{h_0}{\zeta_0} \right)^{1/5}, \quad (2.2.42)$$

так как при обрушении из-за диссипации энергии высота наката будет уменьшаться. Подчеркнем, что максимальная высота относительно слабо зависит от параметра нелинейной падающей воды.

Так, для волн цунами в открытом океане $\xi_0 \sim 1$ м, $h_0 \sim 1$ км, тогда $\max \frac{\xi_R}{\xi_0} \sim 11$. При гидромоделировании обычно получаются большие значения $\xi_0/h_0 \sim 10^{-1}$, тогда $\max \frac{\xi_R}{\xi_0} \sim 4,3$. На важность этого обстоятельства для переноса лабораторных данных на натуру указывается в [36].

Другое ограничение связано с нарушением приближения длинных волн на откосе постоянного уклона, так как при удалении от

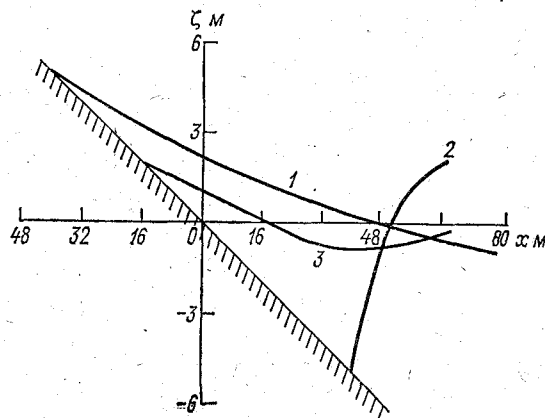


Рис. 2.9. Накат монохроматической волны на берег.

1 — момент максимума наката; 2 — момент минимума наката; 3 — промежуточное положение уровня воды.

берега глубина растет быстрее длины волны и начинает сказываться дисперсия. Условие мелкой воды, как известно, имеет вид $\omega \sqrt{h/g} < 1$. Поэтому, если волна данной частоты задана на глубокой воде, то ее амплитуда не будет меняться до тех пор, пока глубина не будет удовлетворять этому условию. Тогда из (2.2.25) вытекает

$$\xi_R/\xi_0 \sim 1/\sqrt{\alpha}; \quad (2.2.43)$$

такая зависимость характерна для дисперсионных волн (см. п. 3.6).

И третье ограничение связано с малостью уклонов дна: при больших уклонах станут существенны вертикальные скорости, что и приведет к дисперсии волн.

В случае $Bg > 1$ теорией необрушенных волн можно пользоваться вне приурезовой области до глубин, где начинается разрушение. При этом чем выше значение Bg , тем дальше от берега произойдет обрушение. Определение глубин разрушения волны является важной практической задачей. В принципе преобразование Кэрриера — Гринспана вместе с условием $I = 0$ позволяет ее

найти [12], однако логичнее сначала модифицировать решение (2.2.19), добавив второе линейное независимое решение с функцией Неймана, так как нет необходимости рассматривать область $\sigma = 0$ (где волна разрушена) и требовать равенства амплитуд падающей и отраженной волн. Однако «вес» второго решения зависит от того, насколько разрушенная волна диссипировала при движении к берегу и какая ее часть отразится в море; эти характеристики априори неизвестны. При $B\gamma \gg 1$ обрушение происходит вдали от уреза, и эволюция падающей волны происходит независимо от отраженной. Учитывая малость уклонов дна, можно приближенно написать уравнение простой волны типа (1.1.19), включающее эффекты переменности глубины [59], откуда получается следующая формула для нахождения места обрушения волны:

$$\int_0^{x_*} (h/h_0)^{-7/4} dx = L_*, \quad (2.2.44)$$

где длина нелинейности L_* определяется выражением (1.3.10). В случае постоянного уклона дна и монохроматичности волны из (2.2.44) вытекает

$$h_* = \alpha x_* = h_0 \left(1 + \frac{\alpha \lambda_0}{2\pi \zeta_0} \right)^{-4/3}, \quad (2.2.45)$$

при этом высота обрушивающейся волны находится из закона Грина

$$\zeta_* = \zeta_0 \left(1 + \frac{\alpha \lambda_0}{2\pi \zeta_0} \right)^{1/3}. \quad (2.2.46)$$

Эти формулы справедливы, если $h_* > \alpha \lambda_0$, т. е. обрушение происходит вдали от уреза. Дальнейшая эволюция волны описывается в рамках ударных волн, и здесь аналитические результаты отсутствуют.

2.3. Расчеты наката необрушивающихся волн произвольной формы на откос постоянного уклона

2.3.1. Метод решения. В предыдущем параграфе сформулирован общий подход к решению нелинейной задачи о набегании длинной волны на плоский откос, с помощью которого изучен накат монохроматической волны. Здесь мы рассмотрим накат волн произвольной формы. Для этого необходимо использовать общее решение линейного уравнения, которое может быть получено суперпозицией элементарных решений (2.2.19):

$$\Phi(\sigma, \lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) J_0\left(\frac{\omega\sigma}{g\alpha}\right) e^{i\omega\lambda/(g\alpha)}, \quad (2.3.1)$$

причем из действительности Φ вытекает $A(-\omega) = A^*(\omega)$, эта функция определяется из начальных условий. Сначала мы рас-

смотрим ситуацию, когда параметры накатывающейся волны заданы вдали от берега, где волна линейна. Тогда возможно асимптотическое представление для функций Бесселя и формул преобразования Кэрриера — Гринспана [46], что позволяет записать волновое поле в виде

$$\begin{aligned}\zeta(x, t) &= \zeta_+ \left(t - \int \frac{dx}{\sqrt{gh}} \right) + \zeta_- \left(t + \int \frac{dx}{\sqrt{gh}} \right); \\ u(x, t) &= \sqrt{g/h} (\zeta_+ - \zeta_-); \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

$$\begin{aligned}\zeta_{\pm} &= \frac{i}{\sqrt{\pi g \alpha} \sqrt{gh}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) \sqrt{|\omega|} \operatorname{sgn} \omega \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[\omega \left(t \mp \int \frac{dx}{\sqrt{gh}} \right) \pm \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \omega \right] \right\}.\end{aligned}$$

Итак, в самом общем виде волновое поле представимо в виде набегающей ζ_+ и отраженной ζ_- волн. Поэтому, зная форму падающей волны на глубине h_0 , мы можем рассчитать спектр:

$$A(\omega) = \frac{ig \sqrt{g\alpha} \sqrt{gh_0}}{2 \sqrt{\pi} |\omega|} \operatorname{sgn} \omega e^{-\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} \omega} \int \zeta_+(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.3.3)$$

Теперь решение (2.3.1) полностью определено. Как и ранее, будем интересоваться главным образом движением подвижного уреза. Подставляя (2.3.1) в (2.2.14), (2.2.15) и (2.2.17) при $\sigma = 0$, находим параметрическое уравнение уреза

$$x = \frac{1}{2g\alpha} \left[\frac{i}{g\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \omega A(\omega) e^{i\omega\lambda/(g\alpha)} d\omega - u^2 \right]; \quad (2.3.4)$$

$$t = \frac{1}{g\alpha} (\lambda - u);$$

$$u(\lambda) = -\frac{1}{2g^2\alpha^2} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 A(\omega) e^{i\omega\lambda/(g\alpha)} d\omega.$$

Наиболее просто находится максимальная дальность заплеска, так как при этом $u = 0$ [46]:

$$\zeta_R = \frac{1}{2g^2\alpha} \max \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} i\omega A(\omega) e^{i\omega\lambda/(g\alpha)} d\omega \right\}. \quad (2.3.5)$$

Прежде чем проводить конкретные вычисления, параметризуем формулу (2.3.5). Пусть

$$\zeta_+(t) = \zeta_0 f(t/T), \quad (2.3.6)$$

где ξ_0 и T — характерная амплитуда и длительность падающей волны. Тогда формула (2.3.5) записывается в обобщенном виде:

$$\xi_R/\xi_0 = p \sqrt{L_R/\lambda_0}, \quad (2.3.7)$$

где $\lambda_0 = \sqrt{gh_0} T$ — пространственная длительность волны на расстоянии $L_R = h_0/\alpha$ от берега и p — коэффициент формы

$$p = \max \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta d\Omega f(\eta) \sqrt{|\Omega|} \exp \left[i \left[\Omega (\lambda - \eta) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \Omega \right] \right] \right\}. \quad (2.3.8)$$

Итак, высота наката импульса произвольной формы описывается той же формулой, что и высота монохроматической волны, поэтому зависимость высоты наката от длины и амплитуды волны,

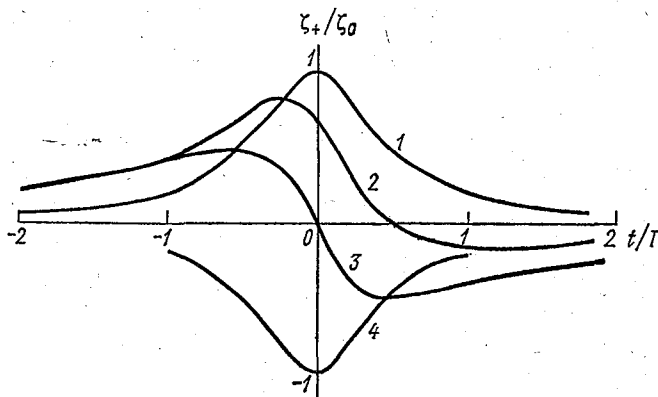


Рис. 2.10. Форма падающей волны в зависимости от параметра θ .

1) $\theta=0$; 2) $\theta=\pi/4$; 3) $\theta=\pi/2$; 4) $\theta=\pi$.

расстояния от берега является универсальной. В то же время конкретная высота наката зависит от формы набегающей волны через параметр p .

2.3.2. Высота наката импульсов лоренцевой формы. В качестве примера рассмотрим накат импульсов лоренцевой формы [45]

$$\xi_+(t) = \frac{\xi_0}{1 + 4t^2/T^2} \left[\cos \theta - \frac{2t}{T} \sin \theta \right], \quad (2.3.9)$$

где θ — произвольный параметр. Спектр этой функции имеет вид

$$A_+(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \xi_+(t) e^{-i\omega t} dt = \frac{\xi_0 T}{4} e^{-(\omega T/2 - i\theta) \operatorname{sgn} \omega}. \quad (2.3.10)$$

Отсюда видно, что, изменяя θ , можно существенно менять форму волны (рис. 2.10), при этом энергия импульса остается неизменной.

Подставляя (2.3.9) в (2.3.8), находим коэффициент формы:

$$p = \pi \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{5}{2} \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]^{5/2}. \quad (2.3.11)$$

Коэффициент p меняется сравнительно слабо. Однако здесь мы сталкиваемся с неоднозначностью интерпретации ξ_0 , в частности в данном примере ξ_0 есть полная высота волны (сумма высоты гребня и глубины ложбины, см. рис. 2.10). Если в (2.3.7) под ξ_0 понимать только высоту гребня (например, при $0 < \theta < \pi$ к берегу движется первый гребень), то это приводит к модификации числа p , которое обозначим как

$$p_+ = \frac{p}{\cos^2(\theta/2)}. \quad (2.3.12)$$

После наката волны наступает фаза отката, максимальная глубина которого определяется той же формулой, что и высота наката, только p_- рассчитывается как минимум выражения (2.3.8). Если ее также нормировать на высоту первого гребня, то коэффициент формы имеет вид

$$p_- = -\pi \sqrt{2} \left[\cos \left(\frac{2}{5} (\pi - \theta) \right) \right]^{5/2} / \cos^2(\theta/2). \quad (2.3.13)$$

В отличие от p , коэффициенты p_+ и p_- существенно зависят от формы волны (параметра θ), несмотря на одинаковую энергию этих сигналов. Таким образом, для интерпретации экспериментальных данных важно знать конкретную форму накатывающей волны. В то же время при использовании в качестве характеристики падающей волны полной ее высоты зависимость от формы становится более слабой. Поэтому для предварительных грубых оценок можно рекомендовать $p = 5$; это значение использовано нами для прогноза наката цунами на Тихоокеанское побережье СССР [59].

Отметим, что фаза отката волны и осушение дна имеет место, даже если накатывается только гребень ($\theta = 0$). При этом глубина осушения достигает почти 50 % высоты наката, но эта цифра также сильно зависит от формы волны (см. главу 8).

2.3.3. Динамика подвижного уреза. Условия обрушения. Для расчета динамики уреза необходимо решить уравнения (2.3.4). Удобно, как и в п. 2.2, перейти к безразмерным переменным

$$\tilde{t} = t/T; \quad \tilde{x} = \alpha x / \xi_R; \quad \tilde{\xi} = \xi / \xi_R; \quad \tilde{y} = \alpha y T / \xi_R, \quad (2.3.14)$$

где ξ_R — высота залеска и T — период длительности волны. Тогда параметр обрушения B_r равен

$$B_r = \xi_R / (g \alpha^2 T^2). \quad (2.3.15)$$

В этих переменных уравнения (2.3.4) имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \bar{\xi}_y(\bar{\lambda}) - \frac{\text{Br}}{2} \bar{u}^2; \\ \bar{t} &= \bar{\lambda} - \text{Br} \bar{u}; \\ \bar{u} &= d\bar{\xi}_y/d\bar{\lambda};\end{aligned}\quad (2.3.16)$$

$$\bar{\xi}_y = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega \tilde{A}(\Omega) e^{i\Omega \bar{\lambda}} d\Omega; \quad \tilde{A} = A/(\alpha T^2 g^2 \zeta_R).$$

Если формально положить $\text{Br} = 0$, то формулы (2.3.16) упрощаются:

$$\bar{x} = \bar{\xi}_y(\bar{t}); \quad \bar{u} = d\bar{\xi}_y/d\bar{t} = \bar{u}_y(\bar{t}). \quad (2.3.17)$$

Назовем этот прием «линеаризацией» задачи, однако сразу подчеркнем, что это формальный прием, так как мы не уменьшили амплитуду волны, а только зачеркнули слагаемое с Br и по начальному возмущению находим $\bar{\xi}_y$ и $\bar{u}_y$ (возможность линеаризации нелинейной задачи будет подробно обсуждаться в следующем параграфе). С помощью найденных функций теперь можно рассчитать динамику подвижного уреза при любом значении числа Br [44]. Действительно, из уравнения (2.3.10) вытекает

$$\bar{u} = \bar{u}_y(\bar{t} + \text{Br} \bar{u}), \quad (2.3.18)$$

и, хотя (2.3.16) определяет $\bar{u}$ как неявную функцию времени, ее нахождение графически производится просто. С учетом этого имеем выражение для заплеска

$$\bar{x} = \bar{\xi}_y(\bar{t} + \text{Br} \bar{u}) - \frac{1}{2} \text{Br} \bar{u}_y^2(\bar{t} + \text{Br} \bar{u}). \quad (2.3.19)$$

Подчеркнем, что в момент максимального заплеска $u = 0$ и $\zeta_R = \max \bar{\xi}_y$ этот интеграл мы вычисляли в (2.3.7). Итак, формулы (2.3.18) и (2.3.19) вместе с выражением для $\bar{\xi}_y$ позволяют однозначно найти все характеристики наката при изменении параметра Br в широких пределах от нуля до критического значения Br_* , превышение которого ведет к обрушению волны (в сущности, мы уже использовали этот прием в п. 2.2 для расчета колебаний уреза при накате монокроматической волны). Предложенная процедура позволяет легко найти значение Br_* , очевидно, различное для разных форм начального возмущения. Для этого вычислим из (2.3.18) временную производную от скорости потока

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} = \frac{d\bar{u}_y/d\bar{t}}{1 - \text{Br} d\bar{u}_y/d\bar{t}}. \quad (2.3.20)$$

Отсюда вытекает, что $\partial \bar{u}/\partial \bar{t}$ становится неограниченной при достижении Br критического значения

$$\text{Br}_* = \left[\max \frac{d\bar{u}_y}{d\bar{t}} \right]^{-1} = \left[\max \frac{d^2 \bar{\xi}_y}{d\bar{t}^2} \right]^{-1}. \quad (2.3.21)$$

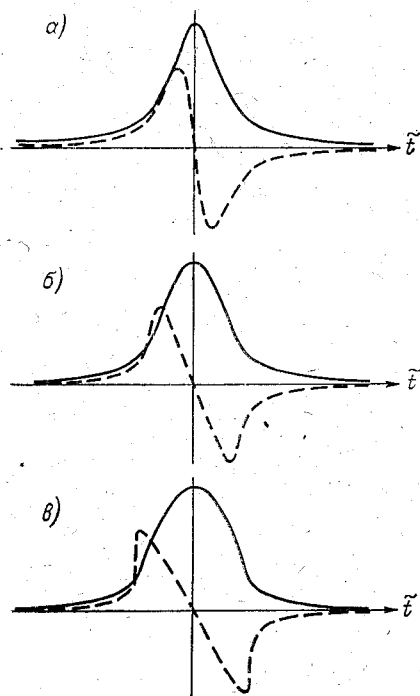


Рис. 2.11. Динамика подвижного уреза при различных значениях параметра обрушения.

Сплошная линия — уровень, штриховая — скорость наката. а) $B\gamma=0$; б) $B\gamma=1$; в) $B\gamma=2$.

Если перейти снова к размерным переменным, то условие (2.3.21) сводится к

$$\max \frac{d^2 \xi_y}{dt^2} = g\alpha^2, \quad (2.3.22)$$

т. е. волна обрушится, если вертикальное ускорение $dw/dt = d^2 \xi_y / dt^2$ на урезе в эквивалентной линейной задаче становится равным $g\alpha^2$. Из (2.3.22) в случае монохроматической волны естественно вытекает условие $B\gamma_* = 1$.

Конкретные расчеты динамики подвижного уреза проведены в [44] и здесь иллюстрируются для случая, когда колебания уреза в эквивалентной задаче имеют вид, изображенный на рис. 2.11.

Тогда с увеличением $B\gamma$ профиль скорости движения уреза приобретает характерную ударную форму, а график $\xi_R(t)$ остается симметричным относительно вертикальной оси (рис. 2.11). Обратим внимание на то, что в этой задаче критическое значение числа $B\gamma$ равно 2.

Мы рассмотрели здесь волны с неограниченными «хвостами» (поле асимптотически уходит к нулю). Аналогично можно рассмотреть импульсные волны, которые вдали от берега локализованы в конечной области. Однако для них условие обрушения приобретает неожиданную форму. Так, если фронт волны $\xi_+(t)$ имеет излом, то ее первая производная (вертикальная скорость) терпит разрыв, а вторая производная (определяющая вертикальное ускорение) становится неограниченной. В этом случае, как известно, теория мелкой воды неприменима. Имеется и еще одно важное обстоятельство: поскольку фронт волны распространяется со скоростью $\sqrt{gh(x)}$ и не зависит от поля, то скорее всего эта особенность сохранится и для волны на урезе, что согласно (2.3.22) приводит к обрушению волны. Более строго это можно показать, исследуя сходимость интегральных выражений для волнового поля. Так, если $\xi_+(t)$ содержит излом, то его спектр на высоких частотах пропорционален ω^{-2} , а функция A согласно

(2.3.3) оказывается пропорциональна $\omega^{-5/2}$. Но тогда подынтегральная функция в выражении для $u(\lambda)$ [формула (2.3.4)] на высоких частотах спадает медленно (как $\omega^{-1/2}$) и не обеспечивает сходимости интеграла. Впервые на принципиальность обрушения в рамках теории мелкой воды на фронте импульсной волны обращено внимание в [29], там же указаны условия на гладкость профиля волны, чтобы обрушения не произошло. Следует, правда, иметь в виду, что вертикальное ускорение достигает больших значений в очень узкой зоне около фронта, поэтому происходит ли там разрушение на самом деле, сказать трудно, так как надо учесть дисперсию на малых масштабах. Однако в численных экспериментах необходимо предпринимать специальные меры для сглаживания поля на фронте. В то же время отметим, что гребень волны остается гладким, и для него при выполнении $Bg < Bg_*$ справедливо приближение необрушивающихся волн.

2.3.4. Отраженная волна. Наряду с динамикой подвижного уреза относительно простые формулы получаются для отраженной от берега волны, если накат произошел без обрушения. Эта задача важна для интерпретации записей самописца уровня моря в прибрежной зоне, который регистрирует сложную суперпозицию падающей, отраженной и дифрагированных волн. Следует заметить, что коэффициенты отражения волн от подводного склона в рамках линейной теории неоднократно рассчитывались [35, 55]. Отражение от берега обычно не рассматривается, хотя эта задача существенно проще и может быть решена даже в нелинейной постановке [59]. Действительно, если диссипацией и обрушением пренебрегаем (а это обычные предположения в задачах такого рода), то вся энергия падающей волны обязана перейти в энергию отраженной волны. Если характеристики отражения изучаются в области, где волны линейны (хотя вблизи уреза они нелинейны), то волновое поле описывается формулой (2.3.2). Из этой формулы видно, что амплитудный Фурье-спектр отраженной волны такой же, как и у падающей волны. Фазовый спектр меняется, что и приводит к различиям в формах падающей и отраженной волн. Коэффициент отражения согласно (2.3.2) есть

$$K(\omega) = \exp \left\{ i \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} \omega + 4\omega \sqrt{\frac{L_R}{g\alpha}} \right] \right\}. \quad (2.3.23)$$

Последний член отвечает времени движения волны до уреза и обратно и легко может быть устранен переопределением нуля времени. Первый член является принципиальным. Применяя Фурье-преобразование, получаем формулы связи между падающей и отраженной волнами, известные как формулы преобразования Гильберта [59, 61]:

$$\xi_-(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi_+(t') dt'}{t' - t + 4 \sqrt{L_R/(g\alpha)}}, \quad (2.3.24)$$

если ζ_+ — импульсная волна, и

$$\zeta_-(t) = \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \zeta_+(t') \operatorname{ctg} \left(\frac{\omega}{2} (t' - t + 4 \sqrt{L_R/(ga)}) \right) dt', \quad (2.3.25)$$

если ζ_+ — периодическая волна несинусоидальной формы. В качестве примера рассмотрим отражение импульса лоренцевой формы (2.3.9). Расчет по формуле (2.3.24) дает [59]

$$\zeta_-(t) = - \frac{\zeta_0}{1 + 4t^2/T^2} \left(\sin \theta + \frac{2t}{T} \cos \theta \right). \quad (2.3.26)$$

На рис. 2.12 изображена форма падающей и отраженной волн в случае $\theta = 0$. Как видим, форма волны существенно изменилась; если падающая волна представляет собой только гребень, то отраженная волна состоит из гребня и ложбины, причем высота

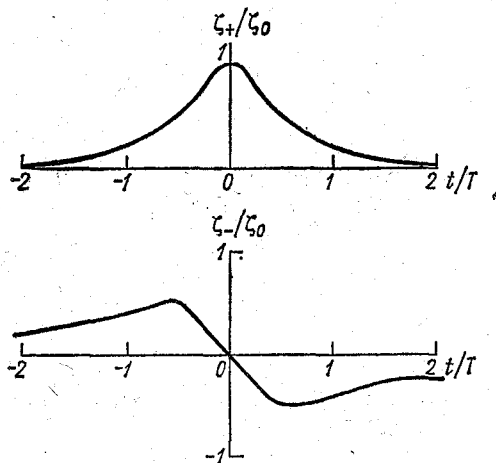


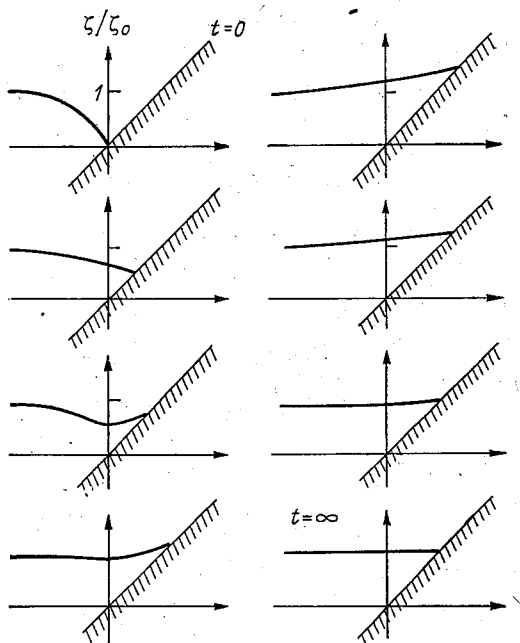
Рис. 2.12. Отражение волны от берега.

Вверху — падающая волна, внизу — отраженная.

гребня в два раза уменьшилась. При расчетах формы отраженной волны (так же как в аналогичных каустических задачах) следует иметь в виду неприменимость формулы (2.3.24) для описания поведения волны при $t \rightarrow -\infty$ (предвестника), что связано с ее непригодностью при $\omega \rightarrow 0$, в этом случае функция Бесселя не может быть заменена асимптотическим представлением, а именно низкие частоты ответственны за формирование предвестника. Корректный учет этого обстоятельства приводит к устранению предвестника, однако он не сказывается на энергонесущей части волны. Поэтому для решения большинства практических задач можно пользоваться формулой (2.3.24), отбрасывая нежелательный предвестник ввиду его малой амплитуды.

2.3.5. Примеры расчета волнового поля. Рассмотрев различные предельные случаи, допускающие аналитическое рассмотрение, перейдем теперь к описанию волнового поля в любой момент времени и на любом расстоянии от уреза. При этом мы сталкиваемся с трудностями вычисления интегралов, содержащих функции Бесселя при неявности формул связи между x , t и σ , λ . Некоторые из них можно снять, если считать в начальный момент времени

Рис. 2.13. Пример расчета нелинейной задачи о накате волны на берег в различные моменты времени [85].



$u(x, 0) = 0$ и задать в явном виде не $\eta(x, 0)$, а $\eta(\sigma, 0)$. В частности, принимая

$$\xi(\sigma, 0) = \xi_0 \left[1 - \frac{5}{2} \frac{d^3}{(d^3 + \sigma^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{d^3}{(d^3 + \sigma^2)^{5/2}} \right], \quad (2.3.27)$$

$$d = 1,5 \sqrt{1 + 0,9 \xi_0 / h_0}$$

и учитывая связь между x , σ и ξ , вытекающую из (2.2.17) и (2.2.18): $\sigma^2 = 2H = 2(\xi - \alpha x)$ легко представить $\xi(x, 0)$; эта величина представляет собой в начальный момент времени понижение уровня воды в приустьевой области. Результаты расчетов волнового поля с применением ЭВМ для решения системы алгебраических уравнений представлены на рис. 2.13, взятом из [85]. Сначала уровень воды на берегу возрастает, достигая максимума, который больше невозмущенного уровня, а затем стремится к нему, при этом волна уходит в открытое море. Другие примеры расчета волнового поля с помощью преобразований Кэрриера — Гринспана содержатся в [131].

2.4. Линейная теория наката длинных волн

2.4.1. Обоснование линейного подхода. Главным результатом решения нелинейной задачи о накате длинных волн на береговой откос является доказательство линейности связи характеристик заплеска (максимальной высоты подъема уровня воды, скорости потока) с амплитудой падающей волны, если последняя задана в области, где она линейна. Это обстоятельство наводит на мысль о возможности использования линейной теории для расчета характеристик заплеска. Впервые это строго доказано в работах Шуго, где рассчитанные характеристики заплеска в линейном приближении в рамках уравнений мелкой воды в лагранжевых переменных сопоставлены с результатами нелинейной теории [129, 130]. Аналогичные данные затем были получены и для уравнений в эйлеровых переменных [45, 46]. Сделанные обоснования линейного подхода позволили распространить его на шельфы сложной геометрии [35, 43].

Рассмотрим здесь линейную систему уравнений мелкой воды

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 0; \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(-\alpha x u) &= 0.\end{aligned}\tag{2.4.1}$$

Прежде чем решать эти уравнения, обсудим взаимосвязь линейной и нелинейной задач. Для этого применим линеаризованную версию преобразований Кэрриера — Гринспана

$$\begin{aligned}\xi &= \frac{1}{2g} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \lambda_0}; \quad u = \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \sigma_0}; \\ x &= -\sigma^2/(4g\alpha); \quad t = \lambda_0/(g\alpha).\end{aligned}\tag{2.4.2}$$

Тогда система (2.4.1) сводится к уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \lambda_0^2} - \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial \sigma_0^2} - \frac{1}{\sigma_0} \frac{\partial \Phi_0}{\partial \sigma_0} = 0.\tag{2.4.3}$$

Здесь $\sigma_0 = 0$ соответствует урезу воды. Как видим, уравнения для функций $\Phi(\sigma, \lambda)$ в нелинейной теории и $\Phi_0(\sigma_0, \lambda_0)$ в линейной теории оказываются одинаковыми. Вдали от уреза $\sigma = \sigma_0$ и $\lambda = \lambda_0$, так что асимптотики Φ и Φ_0 одинаковы и соответствуют одному и тому же начальному условию (мы считаем, что падающая волна задана в области, где она линейна). Но тогда оказываются одинаковыми функции $\Phi(\sigma, \lambda)$ и $\Phi_0(\sigma_0, \lambda_0)$ во всей области изменения своих аргументов, а значит, одинаковы функции $\Phi(0, \lambda)$ и $\Phi_0(0, \lambda_0)$ и их максимумы. Но если первая функция $\Phi(0, \lambda)$ описывает колебания подвижного уреза, то $\Phi_0(0, \lambda)$ — колебания уровня воды на неподвижном урезу ($x = 0$). Аналогичные результаты получаются и для скорости потока. Следовательно, решая линей-

ную задачу и определяя максимум высоты волны и скорости потока на урезе, мы тем самым находим максимум подъема уровня воды на побережье и скорость потока в рамках точных нелинейных уравнений. Именно в этом смысле и можно говорить об обоснованности линейного подхода к расчету максимальных характеристик заплеска. Более того, как мы видели в п. 2.3, линейное решение является базовым для изучения динамики подвижного уреза при учете нелинейности. И наконец, в рамках линейной теории удастся получить также критерий обрушения волны. Для этого рассмотрим решение линейных уравнений (2.4.1), отвечающее монохроматической волне в мористой части:

$$\zeta(x, t) = \zeta_R J_0 \left(\sqrt{\frac{4\omega^2 |x|}{g\alpha}} \right) \sin(\omega t), \quad (2.4.4)$$

и вычислим крутизну волны на урезе (ее максимум)

$$|d\zeta/dx|_{x=0} = \omega^2 \zeta_R / (g\alpha). \quad (2.4.5)$$

Поскольку в линейном приближении урез смещается мало, то по крутизне волны можно судить о возможности пересечения уровня

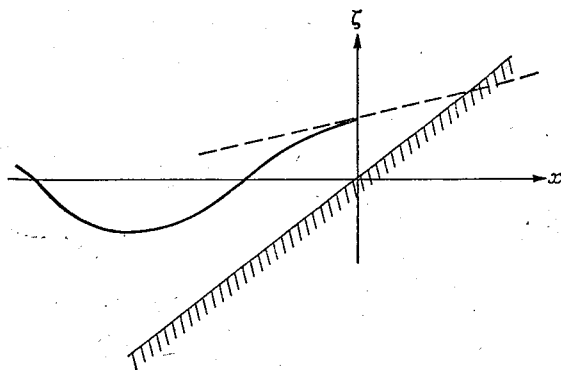


Рис. 2.14. Накат монохроматической волны на откос в линейном приближении.

Штриховая линия — касательная к уровню в точке $x=0$ (крутизна волны).

воды с береговой линией (рис. 2.14). Если крутизна волны меньше уклона дна, то такое пересечение имеет место и соответствует положению подвижного уреза. В противном случае подвижный урез перемещается в бесконечность. Отсюда вытекает условие отсутствия обрушения

$$|d\zeta/dx|_{x=0} < \alpha \quad (2.4.6)$$

или с учетом (2.4.5)

$$\text{Br} = \omega^2 \zeta_R / (g\alpha^2) < 1, \quad (2.4.7)$$

что полностью совпадает с точным критерием в нелинейной теории (впервые это показано Шуто в рамках линейных уравнений в лагранжевых переменных [130]). Отметим, что из (2.4.1) следует

связь между временными и пространственными производными от $\zeta(x, t)$:

$$\partial^2 \zeta / \partial t^2 + g\alpha \partial \zeta / \partial x + g\alpha x \partial^2 \zeta / \partial x^2 = 0, \quad (2.4.8)$$

и на урезе имеем

$$\partial^2 \zeta / \partial t^2 + g\alpha \partial \zeta / \partial x = 0, \quad (2.4.9)$$

что позволяет переписать условие (2.4.6) в виде

$$\max \partial^2 \zeta / \partial t^2|_{x=0} < g\alpha^2, \quad (2.4.10)$$

которое мы уже получали ранее (п. 2.3). В такой форме условие (2.4.10) более удобно для практических вычислений, особенно при накате импульсных волн.

Итак, обосновав линейный подход для вычисления максимальных характеристик заплеска и условия обрушения, естественно использовать его для решения задач о накате волн на откосы произвольной формы. В случае $h(x)$ общего вида нелинейная задача не решается с помощью преобразований Кэрриера — Гринспана (не удается подобрать сохраняющихся инвариантов Римана). Даже если $h(x)$ является кусочно-ломаной функцией и решение нелинейной задачи на каждом отрезке известно, из-за трудностей сшивки их ввиду неявности преобразований Кэрриера — Гринспана вряд ли можно почувствовать получаемое решение. В то же время найти решение линейной задачи удастся для более широкого класса изменения функций $h(x)$ [35, 43].

2.4.2. Накат на откос, сопряженный с ровным дном. Рассмотрим наиболее важную с точки зрения лабораторного моделирования ситуацию наката волны на откос, сопряженный с ровным

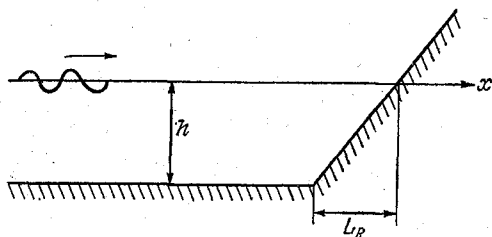


Рис. 2.15. Схема наката волны на откос, сопряженный с ровным дном.

дном (рис. 2.15). В области ровного дна решение, очевидно, имеет вид

$$\zeta(x, t) = \zeta_0 e^{i(\omega t - kx)} + \zeta_- e^{i(\omega t + kx)}. \quad (2.4.11)$$

Здесь ζ_0 и ζ_- — амплитуды падающей и отраженной волн и $k = \omega / \sqrt{gh}$. На плоском откосе решение имеет вид (2.4.4), которое мы напомним также в комплексной форме:

$$\zeta(x, t) = \zeta_R J_0 \left(\sqrt{\frac{4\omega^2 |x|}{g\alpha}} \right) e^{i\omega t}. \quad (2.4.12)$$

В месте сшивки непрерывны уровень воды и скорость потока (или $\partial\zeta/\partial x$), что и позволит однозначно рассчитать ζ_R и ζ_- по заданной высоте падающей волны. Опуская тривиальные выкладки, приведем здесь выражение для высоты наката (фазовый множитель в ζ_R опущен):

$$\frac{\zeta_R}{\zeta_0} = 2 / \sqrt{J_0^2(4\pi L_R/\lambda_0) + J_1^2(4\pi L_R/\lambda_0)}, \quad (2.4.13)$$

где J_1 — функция Бесселя и $\lambda_0 = 2\pi/k$ — длина волны над ровным дном. Как и при отсутствии излома, решение зависит от параметра L_R/λ_0 (или от отношения времени движения волны по откосу к периоду). Эта кривая хорошо аппроксимируется двумя простыми функциями:

$$\frac{\zeta_R}{\zeta_0} = \begin{cases} 2, & L_R < 0,05\lambda_0, \\ 2\pi \sqrt{2L_R/\lambda_0}, & L_R > 0,05\lambda_0, \end{cases} \quad (2.4.14)$$

первая из которых соответствует накату на вертикальную стенку, а вторая — накату на откос постоянного уклона. Сопоставление функций (2.4.13) и (2.4.14) дано на рис. 2.16. Глубина осушения

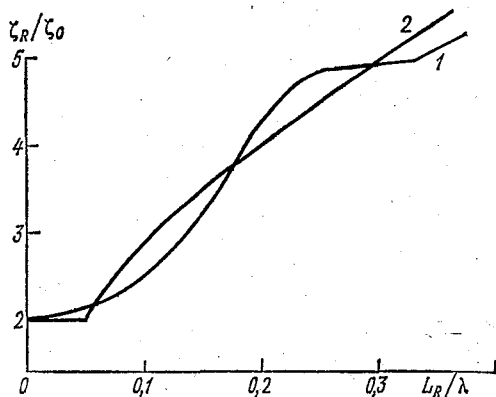


Рис. 2.16. Максимальная высота наката на откос, сопряженный с ровным дном. 1 — точная формула (2.4.13); 2 — аппроксимация (2.4.14).

дна в этом приближении по-прежнему равна высоте наката. Аналогично рассчитывается максимальная скорость наката (и равная ей скорость отката), связь которой с высотой наката не зависит от конкретного вида рельефа дна:

$$U = \omega \zeta_R / \alpha = \omega \zeta_R L_R / h, \quad (2.4.15)$$

и критерий обрушения волны

$$\text{Br} = \frac{\omega^2 \zeta_R}{g \alpha^2} = \frac{\omega^2 \zeta_R L_R^2}{g h^2} < 1. \quad (2.4.16)$$

Обсудим условия применимости полученного решения. Первое ограничение связано с пренебрежением дисперсией, что нарушается при не малых уклонах ($L_R \sim h$). Оценку точности этого приближения еще предстоит сделать. Однако можно заметить, что

ζ_R/ζ_0 при малых L_R/λ практически постоянно и равно двум, так что дисперсия скорее всего не изменит принципиально результат. Другая погрешность возникает в использовании линейного приближения в области, содержащей излом глубины. Если откос достаточно протяженный (излом глубины находится далеко от уреза), то волновое поле вблизи излома становится автоматически линейным и, следовательно, формула (2.4.13) является точной. Если же излом находится вблизи уреза, то здесь необходимо решать нелинейные уравнения и в общем виде ожидать следующей функциональной зависимости для высоты заплеска:

$$\zeta_R/\zeta_0 = f(L_R/\lambda, \zeta_0/h). \quad (2.4.17)$$

В случае волн очень малой амплитуды $\zeta_0/h \rightarrow 0$ функция (2.4.17) совпадает с (2.4.13). В другом предельном случае $L_R \rightarrow 0$ имеем дело с отражением от вертикальной стенки, и в соответствии с результатом п. 2.1 функция (2.4.17) переходит в (2.1.6).

При произвольном соотношении между параметрами L_R/λ и ζ_0/h вид (2.4.17) неизвестен. Готов продел специальный численный эксперимент по определению функции (2.4.17) [92]. Результаты

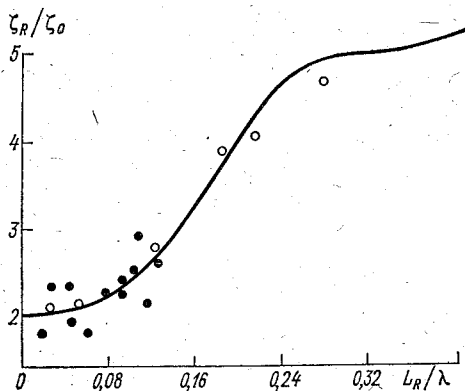


Рис. 2.17. Эксперимент по накату монохроматической волны на откос, сопряженный с ровным дном.

Сплошная линия — формула линейной теории (2.4.13), светлые точки — данные численных экспериментов в рамках нелинейной теории [92], черные — лабораторный эксперимент [36].

расчета представлены на рис. 2.17. Нелинейность приводит к отличиям от линейной теории на 10—20 %, если $\zeta_0/h < 0,1$. Экспериментальное исследование наката периодических волн на плоский откос выполнено в [36]. Отмечается хорошее (в пределах $\pm 6\%$) согласие с теоретической формулой (2.4.14). Эти данные также представлены на рис. 2.17. Таким образом, для практических расчетов высоты наката формула (2.4.14) является вполне пригодной.

2.4.3. Накат на откос с уступом на кромке. Ряд других примеров применения линейной теории к описанию наката длинных волн на шельфе различных геометрий приведен в статье Р. Х. Мазовой [43]. В частности, если шельф кроме откоса содержит также ска-

чок глубины (рис. 2.18), то высота заплеска определяется выражением

$$\xi_R/\xi_0 = 2/\sqrt{J_0^2\left(\sqrt{\frac{4\omega^2 L_R}{g\alpha}}\right) + \frac{h_1}{h_0} J_1^2\left(\sqrt{\frac{4\omega^2 L_R}{g\alpha}}\right)}. \quad (2.4.18)$$

Скачок глубины в этом случае приводит к появлению ярко выраженных резонансных эффектов и общему возрастанию высоты наката волны на побережье. Отметим, что скорость наката и параметр обрушения в этом примере по-прежнему рассчитываются по формулам (2.4.15) и (2.4.16).

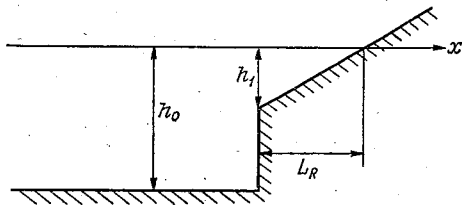


Рис. 2.18. Откос с уступом на кромке.

2.4.4. Откос с изломом на урезе. Совсем другая ситуация реализуется в случае, если откос в приустьевой области нельзя считать плоским, например углы откоса и берега разные. В этом случае у нас нет обоснования в рамках нелинейной задачи, и критерием применимости линейных решений может быть только численный счет в рамках исходных уравнений. Например, при разных уклонах мористой α_1 и сухой α_2 частей профиля $h(x)$ линейная теория приводит к тем же выражениям для ξ_R и U , что и в случае постоянного уклона [с подстановкой в формулы (2.4.13) и (2.4.15) α_1], и другой формуле для критерия обрушения

$$\omega^2 \xi_R / (g\alpha_1\alpha_2) = 1. \quad (2.4.19)$$

Численный счет в рамках исходных нелинейных уравнений с учетом потерь (правда, малых) свидетельствует о зависимости ξ_R от α_2 , однако изменения не превышают 20 % при $\xi_0/h \approx 0,05$ [3], так что можно считать, что линейная теория годится и для этого случая.

2.4.5. «Параболический» откос. Весьма интересный случай в рамках линейной теории изучен С. И. Козловым [35], рассмотревшим профиль изменения глубины $h(x) = h_0(-x/L_R)^\beta$, где β — произвольное положительное число. Расчет показал, что при $\beta < 2$ высота волны на урезе ограничена и определяется выражением

$$\frac{\xi_R}{\xi_0} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2-\beta}\right)} \left(\frac{2\pi}{2-\beta} \frac{L_R}{\lambda_0}\right)^{\beta/[2(2-\beta)]} \quad (2.4.20)$$

Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция. В случае $\beta \rightarrow 0$ отсюда следует $\xi_R = 2\xi_0$, как и следовало ожидать (отражение от вертикальной стенки). При $\beta = 1$ (плоский откос) формула (2.4.20) переходит в (2.2.25). С увеличением β высота наката возрастает и становится

неограниченной при $\beta \rightarrow 2$ (такой же результат вытекает и при $\beta > 2$). Неограниченность ζ_R при $\beta \geq 2$ объясняется малым (нулевым) уклоном дна вблизи уреза, что, согласно (2.4.6) должно приводить к быстрому разрушению волны, и, следовательно, неприменимостью линейного подхода. В случае $\beta < 2$ средний уклон дна в приурезовой области не мал, и решение линейной задачи, по крайней мере при малой высоте волны, дает правильное представление о высоте наката (повторяем, решение нелинейной задачи для этого случая отсутствует).

2.4.6. Накат импульса. Выше мы рассмотрели накат монохроматической волны в рамках линейной теории. Аналогично может быть изучен накат одиночной волны; этот случай особенно важен для проверки выводов теории в гидролотке, так как создавать импульсивные возмущения существенно проще, чем периодические. Мы ограничимся анализом только наиболее распространенной ситуации наката волны на откос, сопряженный с ровным дном (рис. 2.15). В этом случае поле на урезе есть суперпозиция элементарных решений вида (2.4.13), оно равно

$$\zeta_y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2A(\omega) \exp \{ i [\omega(t + L_R/\sqrt{gh}) - \arctg(I_1/I_0)] \}}{\sqrt{J_0^2(\sqrt{4\omega^2 L_R/(g\alpha)}) + J_1^2(\sqrt{4\omega^2 L_R/(g\alpha)})}} d\omega. \quad (2.4.21)$$

Здесь $A(\omega)$ — спектр падающей волны

$$A(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_{\text{пад}}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2.4.22)$$

Интеграл (2.4.21) аналитически не вычисляется. При $L_R/\lambda \gg 1$ [или $4\omega^2 L_R/(g\alpha) \gg 1$] для функции Бесселя можно воспользоваться асимптотическими представлениями, тогда формула (2.4.21) упрощается:

$$\zeta_y(t) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} d\omega A(\omega) \sqrt{\frac{\pi |\omega| L_R}{\sqrt{gh}}} \exp \left\{ i \left[\omega \left(t - \frac{L_R}{\sqrt{gh}} \right) + \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} \omega \right] \right\}, \quad (2.4.23)$$

и она совпадает с линеаризованной версией такой формулы для волны на откосе постоянного уклона (без перехода в ровное дно). Тогда мы можем сразу написать формулу для максимальной высоты заплеска

$$\zeta_R/\zeta_0 = p \sqrt{L_R/\lambda}, \quad (2.4.24)$$

справедливую при $L_R \gg \lambda$. В противоположном случае $L_R \ll \lambda$ разложим функции Бесселя в ряд, и с точностью до L_R^2/λ^2 формула (2.4.2') принимает вид

$$\zeta_y(t) = 2\zeta_{\text{пад}}(t) - \frac{L_R^2}{gh} \frac{\partial^2 \zeta_{\text{пад}}}{\partial t^2}. \quad (2.4.25)$$

В случае симметричных импульсов высота наката описывается формулой, вытекающей из (2.4.25):

$$\zeta_R/\zeta_0 = 2 + p_1 L_R^2/\lambda^2, \quad (2.4.26)$$

где p_1 — коэффициент формы. Например, для лоренцева импульса (2.3.9) при $\theta = 0$ имеем $p_1 = 8$. По аналогии с (2.4.14) примем следующую аппроксимационную формулу для высоты наката:

$$\frac{\zeta_R}{\zeta_0} = \begin{cases} 2 + p_1 L_R^2/\lambda^2, & L_R < L_*, \\ p \sqrt{L_R/\lambda}, & L_R > L_*, \end{cases} \quad (2.4.27)$$

где L_* определяется из условия непрерывности функции ζ_R в этой точке. График функции ζ_R/ζ_0 для $p = 5$ и $p_1 = 8$ представлен на

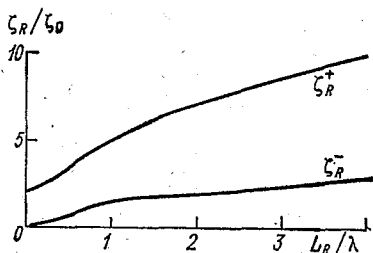


Рис. 2.19. Высота наката ζ_R^+ и отката ζ_R^- для импульсной волны.

рис. 2.19. Подчеркнем, что наша теория справедлива только для необрушенных волн

$$Br = \frac{\zeta_R}{ga^2 T^2} = \frac{\zeta_R L_R^2}{h\lambda^2} < Br_*. \quad (2.4.28)$$

При больших значениях амплитуд падающей волны происходит обрушение, и высота наката будет уменьшаться. Из (2.4.27) и (2.4.28) находится максимальное значение коэффициента усиления ζ_R/ζ_0 и длина шельфа L_R , на котором оно происходит. В частности, если $L_R > L_*$, то расчетные формулы имеют вид

$$\max(\zeta_R/\zeta_0) = (p^4 Br_*)^{1/5} (\zeta_0/h)^{-1/5}; \quad (2.4.29)$$

$$\tilde{L}_R/\lambda = (Br_*/p)^{2/5} (\zeta_0/h)^{-2/5}. \quad (2.4.30)$$

Так, для условий открытого океана $\zeta_0/h \sim 10^{-3}$ и в случае лоренцевой формы ($p = 4$, $Br_* = 2$) имеем $\max(\zeta_R/\zeta_0) \sim 1.4$. Для лабораторных условий $\zeta_0/h \sim 10^{-1}$, тогда $\max(\zeta_R/\zeta_0) \sim 5.5$. Стоит подчеркнуть, что эти цифры сильно зависят от формы падающей волны.

Аналогично рассчитывается максимальная глубина осушения дна. Подчеркнем, что откат воды имеет место даже в том случае, если накатывается только гребень волны. Пусть, например, он имеет лоренцеву форму (2.3.9). Тогда в случае $L_R < L_*$

$$\zeta_R^-/\zeta_0 = 2L_R^2/\lambda^2, \quad (2.4.31)$$

а при $L_R > L_*$ [см. формулу (2.3.13)]

$$\bar{\zeta}_R / \zeta_0 = 1,4 \sqrt{L_R / \lambda}. \quad (2.4.32)$$

График функции $\bar{\zeta}_R / \zeta_0$ также изображен на рис. 2.19.

2.4.7. Интерпретация натуральных и лабораторных данных. В настоящее время накоплен большой экспериментальный материал о накате длинной волны на берег. Натурные данные весьма разнообразны (откос переменного уклона, неоднородные эффекты), тем не менее в среднем рассмотренная теория хорошо их описывает. Так, на рис. 2.20 представлены данные о коэффициенте усиления

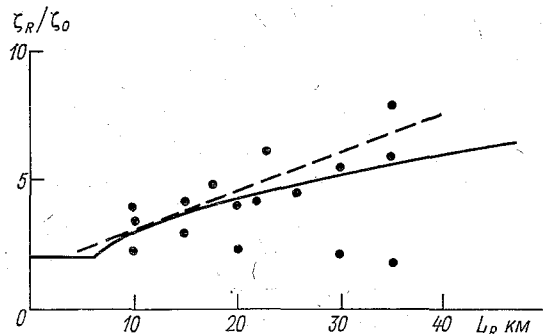


Рис. 2.20. Расчет коэффициента усиления для цунами 26 мая 1983 г. на побережье Японии.

Сплошная линия — формула (2.4.27); точки — данные наблюдений [105]; пунктир — эмпирическая формула (2.4.33).

цунами 26 мая 1983 г. на шельфе Японии (L_R — удаленность 200-метровой изобаты), взятые из [105]. Они хорошо аппроксимируются формулой

$$\frac{\bar{\zeta}_R}{\zeta_0} = \begin{cases} 2, & L_R < 4 \text{ км}, \\ 0,151 L_R + 1,451, & 4 \text{ км} < L_R < 35 \text{ км}. \end{cases} \quad (2.4.33)$$

Характерный период цунами составляет примерно 10 мин. Тогда по (2.4.27) можно построить теоретическую зависимость для коэффициента усиления (принято $p = 5$, $p_1 = 8$). Как видим, теория необрушенных волн в среднем дает правильную оценку коэффициента усиления.

Более точные данные получены в серии многочисленных лабораторных экспериментов по накату импульсов на откос, сопряженный с ровным дном [36, 108]. Эксперименты показывают, что характер процесса действительно определяется параметрами L_R / λ_0 , ζ_0 / h , входящими в обобщенную формулу (2.4.17), а также формой волны и шероховатостью откоса, особенно на стадии обрушенных волн. Кроме того, если волнопродуктор расположен недалеко от откоса, то часто приходится учитывать нестационарные эффекты,

связанные с формированием солитона (солитонов) из начального возмущения, поскольку амплитуда волны меняется еще до подхода к откосу. Поэтому с целью исключения этих эффектов большинство экспериментов проводилось с солитонами, форма которых неизменна и не меняется при движении над ровным дном при движении. Эксперименты подтвердили, что на крутых откосах накат происходит без разрушения, и с уменьшением угла откоса высота заплеска возрастает, при определенном угле начинается разрушение, и с последующим уменьшением угла откоса высота наката также уменьшается. Эта картина иллюстрируется эмпирической формулой Халла — Уотса, приведенной в обзоре [108]:

$$\frac{\xi_R}{h} = \begin{cases} 3,05\alpha^{-0,13} (\xi_0/h)^{1,15\alpha^{0,02}}, & 0,2 < \alpha < 1, \\ 11\alpha^{0,67} (\xi_0/h)^{1,9\alpha^{0,35}}, & 0,09 < \alpha < 0,2. \end{cases} \quad (2.4.34)$$

Максимального значения высота наката достигает при $\alpha = 0,2$ (11°)

$$\max (\xi_R/h) = 3,75 (\xi_0/h)^{1,1}. \quad (2.4.35)$$

Эти данные подтверждены экспериментами Лэнгсхолта при $\alpha > 0,4$, о которых сообщается в [119], а также группы Г. Е. Кононковой [36].

В рамках теории необрушенных волн мы можем интерпретировать только график высоты наката при $\alpha > 0,2$. В частности, хорошо подтверждается критерий обрушения (2.4.28), который с учетом связи между длиной солитона и его высотой имеет вид

$$\alpha \geq 2 (\xi_0/h). \quad (2.4.36)$$

Сходный критерий вытекает и из (2.4.30)

$$\alpha^{10/9} \geq 2 (\xi_0/h). \quad (2.4.37)$$

Отсюда видно, что при $\xi_0/h \sim 0,1$ (а это типичные условия для лабораторных экспериментов) разрушение происходит при $\alpha \sim 11^\circ$ в соответствии с (2.4.34). Кононкова с соавторами [36] и Лэнгсхолт [119] сообщают о хорошем согласии наблюдаемого критерия разрушения с формулой (2.4.37). Более точного обоснования «лотковых» экспериментальных результатов в рамках линейной теории дать не удастся.

Отметим еще эксперименты по изучению переходного режима при накате периодических волн на плоский откос [36]. Они показывают, что высоты и скорости наката установившейся волны выше, чем первой (головной). Этот факт подтверждается теорией, так как значение коэффициента, входящего в (2.4.27), для периодической волны примерно на 40 % выше, чем для синусоидального импульса.

Подведем итоги. Развита здесь теория применима для волн на откосах сложного профиля, если в областях, где происходит скачок глубин или излом откоса, волна имеет малую амплитуду. При этом удастся рассчитать высоту наката, глубину осушения,

скорости наката и отката, параметр обрушения. В случае же волн большой амплитуды задача должна ставиться как нелинейная, и здесь применяются численные методы.

2.5. Неоднородные задачи набегания длинных волн на берег

Для решения практических задач набегания морских волн на берег ввиду изрезанности береговой линии, наличия различного рода береговых сооружений необходимо учитывать трехмерность движения водных масс в приустьевой области. Аналитические возможности решения таких задач, естественно, резко сужаются, и наибольший прогресс здесь достигается только в линейном приближении. Отметим, что береговой склон может приводить к эффективному захвату волновой энергии (возбуждению краевых волн), что приводит к увеличению размеров зоны затопления. Здесь мы ограничимся анализом нескольких типичных неоднородных задач.

2.5.1. Канал. Сначала мы рассмотрим движение длинных волн в каналах переменного сечения, что важно для решения задач вхождения морских волн в устья рек, движения в подводящих к АЭС каналах, проектирования морских каналов в портах. Преимуществом подобного типа задач является возможность использования квазиодномерного приближения. Для простоты ограничимся каналами «параболического» сечения, ось которых наклонена к горизонтали. Невозмущенная глубина канала описывается функцией (рис. 2.21)

$$h(x, y) = h_0(x) - a|y|^m, \quad (2.5.1)$$

где a и m — произвольные положительные постоянные. В этом случае исходные уравнения для волн в каналах имеют вид [73]

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} &= g \frac{dh_0}{dx}; \\ \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{m}{m+1} H \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial H}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

где u — средняя скорость потока в канале; H — полная глубина бассейна на оси канала. Отметим, что уравнения (2.5.2) отличаются от уравнений мелкой воды только множителем $m/(m+1)$ во втором слагаемом уравнения неразрывности и переходят в них при $m \rightarrow \infty$. Естественно поэтому ожидать, что методы, развитые для описания процесса наката длинных волн на плоский откос, окажутся эффективными и при описании наката волн в каналах. Рассмотрим здесь две задачи: отражение от вертикальной стенки и наката в канале постоянного уклона. В первом случае $dh_0/dx = 0$ и естественно, как и в п. 2.1, ввести римановы инварианты

$$V_{\pm} = u \pm \frac{2m+2}{m} (\sqrt{gH} - \sqrt{gh_0}), \quad (2.5.3)$$

которые сохраняются на характеристиках

$$c^{\pm} = \pm \sqrt{gh_0} + \frac{3m+2}{4m+4} V_{\pm} - \frac{m+2}{4m+4} V_{\mp}. \quad (2.5.4)$$

Дальнейшая процедура решения полностью эквивалентна приведенной в п. 2.1. Вдали от вертикальной стенки инвариант падающей волны определяется выражением

$$V_+ = \frac{4m+4}{m} [\sqrt{g(h_0 + \xi_0)} - \sqrt{gh_0}], \quad (2.5.5)$$

а на стенке, где $u = 0$,

$$V_+ = \frac{2m+2}{m} [\sqrt{g(h_0 + \xi_R)} - \sqrt{gh_0}]. \quad (2.5.6)$$

Приравнивая эти выражения, получаем искомую формулу для высоты наката волны на вертикальную стенку:

$$\xi_R/h_0 = 4 [1 + \xi_0/h_0 - \sqrt{1 + \xi_0/h_0}]. \quad (2.5.7)$$

Наконец, из условия «запирания» отраженной волны у стенки

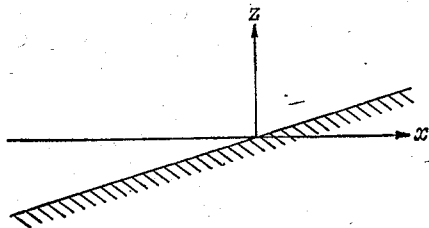
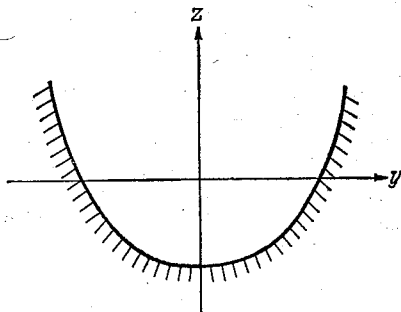


Рис. 2.21. Геометрия канала.



($c^- = 0$ при $V_- = 0$) находим высоту волн, которые обязательно разрушаются на стенке:

$$\xi_0/h_0 \geq (3m^2 + 8m + 4)/m^2 \quad (2.5.8)$$

или для полной глубины

$$H/h_0 \geq 4(1 + 1/m)^2. \quad (2.5.9)$$

При $m \rightarrow \infty$ формула (2.5.8) переходит в (2.1.9).

Итак, высота наката волны на вертикальную стенку в канале не зависит от сечения канала, а условия обрушения определяются

типом канала, в частности в канале треугольного сечения критическое значение высоты волны почти в два раза выше, чем в параболическом. Впервые эти результаты получены С. А. Христиановичем [73].

Изучим теперь накат волн на берег в канале с постоянным уклоном $dh_0/dx = -\alpha = \text{const}$. В этом случае также существуют сохраняющиеся римановы инварианты

$$V_{\pm} = u \pm 2 \sqrt{\frac{m+1}{m}} gH + gat, \quad (2.5.10)$$

что позволяет применить технику преобразований Кэрриера — Гринспана. Соответствующие формулы преобразований получены в [18]:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2g} \left(\frac{m}{m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - u^2 \right); & u &= \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}; \\ x &= \frac{1}{2ga} \left(\frac{m}{m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - u^2 - \frac{m\sigma^2}{2m+2} \right); & t &= \frac{1}{ga} (\lambda - u). \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

С их помощью система нелинейных уравнений (2.5.2) сводится к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \sigma^2} - \frac{m+2}{m} \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.5.12)$$

В результате удается полностью описать волны в канале произвольного сечения, а также провести обоснование линейного подхода к этим задачам. В случае наката монохроматической волны частное решение (2.5.12) имеет вид

$$\Phi = A \frac{J_{1/m}(l\sigma)}{\sigma^{1/m}} \sin(l\lambda), \quad (2.5.13)$$

где $J_{1/m}$ — функция Бесселя. Опуская промежуточные выкладки [18], полностью эквивалентные приведенным в п. 2.2, приведем здесь формулу для высоты заплеска:

$$\frac{\xi_R}{\xi_0} = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)} \left(\frac{2\pi L_R}{\lambda} \right)^{1/2+1/m}, \quad (2.5.14)$$

которая при $m \rightarrow \infty$ переходит в формулу (2.2.25) для плоского откоса. Здесь $\Gamma(z)$ — гамма-функция. График зависимости (2.5.14) для различных m изображен на рис. 2.22. С уменьшением m зависимость ξ_R от L_R становится более резкой. Отсюда вытекает также подтверждение опытным фактам, что дальность заплеска длинных волн, таких, как цунами, в долинах рек больше, чем на плоском откосе. Отметим также, что формула (2.5.14) носит асимптотический характер ($\xi_R \gg \xi_0$), но, как и в аналогичных плоских задачах, ею можно пользоваться, начиная с $\xi_R \geq 2\xi_0$.

Аналогично находятся максимальная скорость потока в накатывающейся волне

$$U = \omega \zeta_R / \alpha \quad (2.5.15)$$

и критерий обрушения волны

$$Br = \omega^2 \zeta_R / (g \alpha^2) = 1. \quad (2.5.16)$$

Обе эти формулы не зависят от величины m .

Таким образом, удастся решить нелинейную задачу о накате длинной волны на берег канала. Отметим, что в данном случае линия подвижного уреза, как и береговая черта, не является прямой, а представляет собой «параболу», так что здесь мы действительно имеем дело с неоднородными движениями воды.

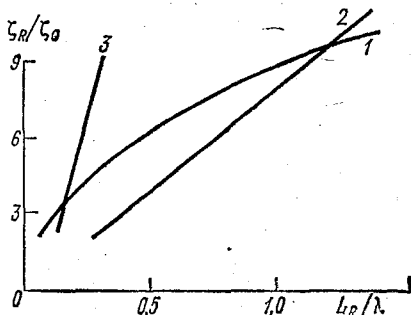


Рис. 2.22. Высота наката волны в наклонном канале.

1) $m = \infty$; 2) $m = 2$; 3) $m = 1$.

С помощью Фурье-суперпозиции решений (2.5.13) можно рассмотреть накат импульсных волн. Самый простой результат, как и ранее, следует для отраженной волны, поскольку для этого необходимо изучить только асимптотику решения (2.5.13) при $\sigma \rightarrow \infty$. В этом случае коэффициент отражения от берега имеет вид

$$K(\omega) = \exp \{ i (\pi/2 + \pi/m) \operatorname{sgn} \omega \}. \quad (2.5.17)$$

Рассматривая, например, отражение лоренцева импульса

$$\zeta_{\text{пад}}(t) = \frac{\zeta_0}{1 + 4t^2/T^2}, \quad (2.5.18)$$

с помощью (2.5.17) находим в явной форме отраженную волну:

$$\zeta_{\text{отр}}(t) = - \frac{\zeta_0}{1 + 4t^2/T^2} \left(\sin \frac{\pi}{m} + \frac{2t}{T} \cos \frac{\pi}{m} \right). \quad (2.5.19)$$

График этой функции при различных m изображен на рис. 2.23. В частности, при $m = 2/3$ отраженная волна полностью повторяет форму падающей, а при $m = 2$ волна «переворачивается»: гребень отражается от берега впадиной. Таким образом, в канале в зависимости от его профиля характер отражения волны от берега кардинально меняется. Уже из этих простых вычислений вытекает, что соотношение между высотой наката и глубиной отката сильно зависит от типа канала. Расчетная схема для импульсных волн в соответствии с преобразованиями Кэрриера — Гринспана включает

два этапа (см. п. 2.3). На первом рассчитывается «линейная» часть заплеска

$$\begin{aligned}\xi_y(\lambda) &= \frac{1}{2g} \frac{m}{m+1} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} \Big|_{\sigma=0}; \\ u_y(\lambda) &= g \frac{d\xi_y}{d\lambda} = \frac{1}{\sigma} \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma} \Big|_{\sigma=0},\end{aligned}\quad (2.5.20)$$

а на втором — полные характеристики заплеска

$$\begin{aligned}u(t) &= u_y[t + u/(g\alpha)]; \\ \xi_R(t) &= \xi_y[t + u/(g\alpha)] - \frac{1}{2g} u_y^2[t + u/(g\alpha)],\end{aligned}\quad (2.5.21)$$

причем максимум этих величин совпадает с максимумами линей-

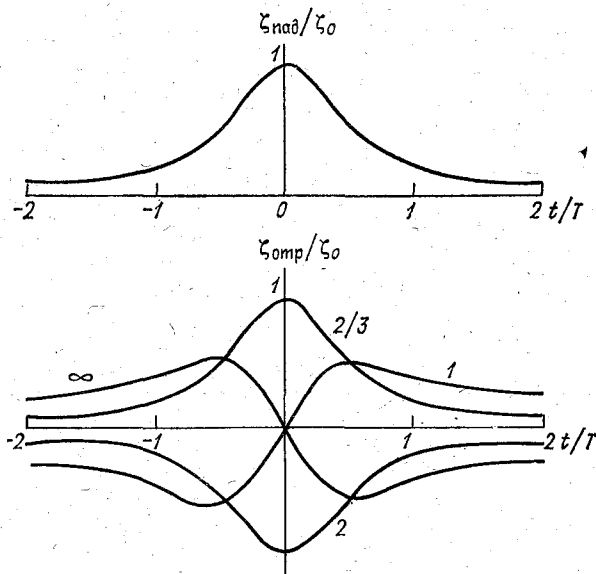


Рис. 2.23. Отражение волны от берега в канале.
Цифры у кривых — значения m .

ных частей. Если $A(\omega)$ — спектр падающей волны, то $\xi_y(t)$ имеет вид

$$\begin{aligned}\xi_y(t) &= \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma(1+1/m)} \left(\frac{L_R}{\sqrt{gh}} \right)^{1/2+1/m} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega) |\omega|^{1/2+1/m} \times \\ &\times \exp \left\{ i \left[\omega t + \left(\frac{\pi}{2m} + \frac{\pi}{4} \right) \operatorname{sgn} \omega \right] \right\} d\omega.\end{aligned}\quad (2.5.22)$$

В частности, при $m = 2/3$ формула (2.5.22) сильно упрощается

$$\xi_y(t) = \frac{8}{3} \left(\frac{L_R}{\sqrt{gh}} \right)^2 \frac{d^2 \xi_{над}}{dt^2}.\quad (2.5.23)$$

График этой функции в случае падения гребня лоренцевой формы (2.5.18) представлен на рис. 2.24. Как мы видим, хотя к берегу движется только одна волна, на берег накатываются две волны с высотами

$$\xi_R^+ = \frac{16}{3} \xi_0 (L_R/\lambda_0)^2, \quad (2.5.24)$$

между которыми дно осушается на глубину

$$\xi_R^- = -\frac{64}{3} \xi_0 (L_R/\lambda_0)^2. \quad (2.5.25)$$

Таким образом, несмотря на накат только гребня, уровень воды главным образом понижается $|\xi_R^-|/\xi_R^+ = 4$. Уже из этого примера видно, что неоднородные эффекты влияют существенно на характеристики заплеска: число волн, соотношение между накатом и

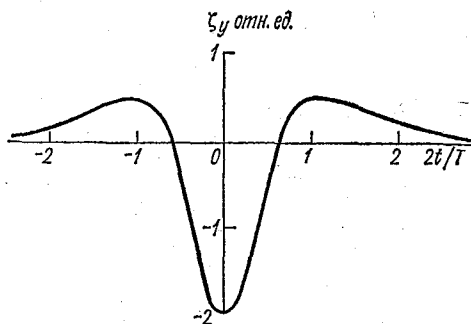


Рис. 2.24. Колебания уреза в канале ($m = 2/3$) при падении лоренцевого импульса.

откатом, и их необходимо принимать во внимание при анализе реальной ситуации наката в бухтах и заливах.

2.5.2. Захваченные волны. Эти волны рассмотрим только в рамках линейной теории. Исходные уравнения теории длинных волн сводятся к волновому уравнению

$$\partial^2 \xi / \partial t^2 - g \nabla [h(x, y) \nabla \xi] = 0, \quad (2.5.26)$$

к которому должны быть поставлены начальные условия $\xi(\mathbf{r}, 0)$ и $\frac{\partial \xi}{\partial t}(\mathbf{r}, 0)$, а также условия ограниченности поля на урезе $h = 0$ и убывания поля на бесконечности (точнее, условия излучения). Конечным результатом расчета для наших целей является $\xi_y(t)$ при $h = 0$, что и позволит найти максимальные характеристики заплеска. Разумеется, аналитические решения могут быть получены только для определенных законов изменения функции $h(x, y)$. В первую очередь обсудим новый класс решений, соответствующий вдольбереговым движениям воды в виде захваченных (краевых) волн. Пусть изобаты параллельны береговой линии, т. е. $h(x)$. Тогда частный класс решений (2.5.26) имеет вид

$$\xi(x, y, t) = \psi(x, k) e^{i(\omega t - ky)}, \quad (2.5.27)$$

где функция ψ определяется краевой задачей

$$g \frac{d}{dx} \left(h \frac{d\psi}{dx} \right) + (\omega^2 - ghk^2) \psi = 0. \quad (2.5.28)$$

Решение уравнения (2.5.28) с условиями ограниченности ψ при $x = 0$ и $x \rightarrow \infty$ существует при определенных связях между ω и k , каждое решение определяет моду краевых волн. Большое число примеров расчета краевых волн для различных профилей глубины приведены в работах [23, 40]. В простейшем случае шельфа-ступеньки

$$h(x) = \begin{cases} h_0, & 0 > x < L, \\ h_1, & x > L \end{cases} \quad (2.5.29)$$

при $h_1 \gg h_0$ из (2.5.28) получаем структуру моды на шельфе

$$\psi_n(x) = \cos \left\{ \frac{\pi x}{2L} (2n+1) \right\}, \quad n = 0, 1, 2 \dots \quad (2.5.30)$$

и дисперсионное соотношение

$$\omega_n^2 = gh_0 \left[k^2 + \frac{\pi^2}{4L^2} (2n+1)^2 \right]. \quad (2.5.31)$$

Уже в этом простейшем случае видно, как «устроены» захваченные волны: они обладают дисперсией, особенно существенной при $\omega \rightarrow 0$ (при более сложном рельефе дисперсия сказывается только в определенной области низких частот). Обратим внимание, что эта дисперсия не связана с конечностью глубины, о которой мы говорили в главе 1; последняя существенна, напротив, на высоких частотах. Здесь же дисперсия связана с наличием характерного масштаба изменения глубины $h(x)$ (в данном случае L), и она, естественно, сказывается на виде волнового поля, приводя к распаду волны на отдельные осциллирующие цуги, соответствующие каждой моде краевой волны, при этом осцилляции возникают впереди основной волны, создавая предвестник. Такая картина эволюции волнового поля следует из интегрального представления волнового поля

$$\xi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int A_n(k) \psi_n(k, x) e^{i(\omega_n t - ky)} dk, \quad (2.5.32)$$

где $A_n(k)$ — коэффициенты возбуждения краевых волн; после применения метода стационарной фазы при $t \rightarrow \infty$

$$\xi(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{d\omega_n/dk}{2\pi |d^2\omega_n/dk^2|}} \frac{A_n(k)}{\sqrt{y}} \psi_n(k, x) \exp[i(\omega_n t - ky)]. \quad (2.5.33)$$

Здесь волновое число является функцией времени (при фиксированном y) и определяется из уравнения

$$\frac{d\omega_n}{dk}(k) = \frac{y}{t}. \quad (2.5.34)$$

Отсюда вытекает осцилляторный характер волнового процесса: впереди бегут высокочастотные компоненты, а затем более низкочастотные. Захват энергии приводит к более медленному затуханию волнового поля (как $y^{-1/2}$ вместо r^{-1}) над ровным дном.

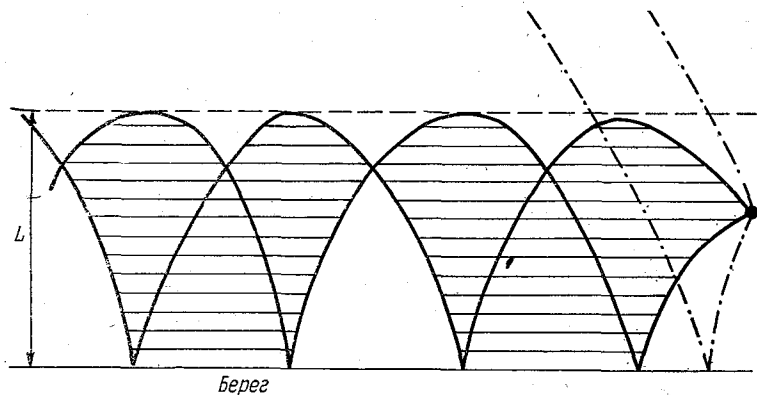


Рис. 2.25. Лучевая картина для источника, расположенного на склоне [47].

Сплошные линии — граничные лучи, отвечающие захвату волновой энергии, штриховые — незахваченные лучи, соответствующие излучению энергии в открытое море. Заштрихована область распространения. Точка — источник.

Максимум амплитуды приходится на волну с волновым числом, определяемым из экстремальности выражения

$$A \sqrt{\frac{d\omega/dk}{d^2\omega/dk^2}},$$

и для каждой моды он разный; с учетом (2.5.34) получаем разную скорость перемещения отдельных цугов.

Суперпозиция большого числа мод краевых волн в случае импульсного возмущения (такие задачи характерны для проблемы цунами) приводит к сложной картине их интерференции, так что вдоль береговой линии изменение высоты наката может происходить немонотонным образом. Проще, однако, этот эффект рассмотреть с помощью не модового (из-за их большого числа), а лучевого подхода. Последний, как известно, особенно эффективен, когда длина волны много меньше размера неоднородностей. Наиболее просто лучи строятся в бассейне постоянной глубины, где они прямые, и на плоском откосе, где траектория луча описывается циклоидой. В частности, если откос переходит в ровное дно и точечный источник расположен на склоне, то лучевая картина для этого случая, построенная в [47], изображена на рис. 2.25. Легко

видеть два разных типа лучей. Первые из них (штриховые линии) сразу или после отражения от берега покидают склон, они соответствуют излучению энергии в открытое море. Вторые (сплошные линии) не выходят из области склона и соответствуют захваченным волнам. Таким образом, отсюда легко видеть соотношение между захваченными и излученными волнами (по количеству захваченных и ушедших лучей). Важно подчеркнуть, что лучи концентрируются неравномерно, и имеются области, где лучей вообще нет (незаштрихованная область на рисунке). Эти эффекты, соответствующие зонам освещенности и тени, хорошо известны в акустике. Такое поведение лучей означает, что распределение высот

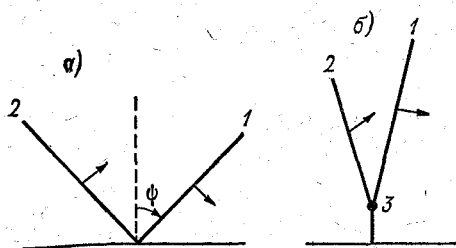


Рис. 2.26. Косой подход волны к вертикальной стенке.

а — большие значения углов ψ ; б — малые значения углов ψ — почти скользящее движение. 1 — падающая волна; 2 — отраженная волна; 3 — ножка Маха.

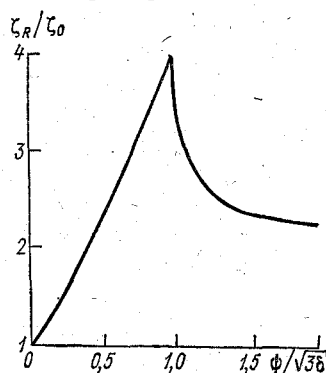


Рис. 2.27. Зависимость высоты подъема уровня воды у вертикальной стенки при косом подходе одиночной волны.

наката волн неравномерно, и имеются области, куда волна вообще не приходит (на самом деле сюда приходят небольшие дифракционные волны, возникающие из-за нарушения лучевого приближения вблизи уреза и излома глубины). Учет размазанности источника также приводит к ослаблению неравномерности изменения высоты волны вдоль побережья. При этом важно подчеркнуть, что в первой «косвенной» зоне максимальной будет первая волна, во второй зоне — вторая волна и так далее. Мы описали здесь этот процесс только качественно, так как построение лучевых картин для размазанных источников затруднено, и аналитическое решение становится плохообозримым. Более подробно он рассмотрен численными методами в [47], где в рамках линейных уравнений мелкой воды изучены характеристики высоты волны вдоль побережья при различных ориентациях источника относительно подводного склона. Отметим, однако, что лучевые картины хотя и имеют относительно малую точность, полезны для предсказания по заданному рельефу дна опасных положений источников (очагов), когда

затопление берега будет наиболее сильным. Именно таким путем исследованы цунамиопасные зоны очагов в Курило-Камчатской зоне, что важно для оперативного прогноза цунами [71]. Наконец, лучевые методы эффективны для анализа структуры захваченных волн на шельфах сложной геометрии [19].

2.5.3. Наклонное падение волны на стенку. В качестве третьей задачи, иллюстрирующей неоднородность, рассмотрим проявление нелинейных эффектов при косом подходе волны к вертикальной стенке в бассейне постоянной глубины. Если в рамках линейной теории следует ожидать выполнения обычных законов отражения, то при почти скользящем движении волны вдоль стенки нелинейность «искривляет» фронт волны, приводя к формированию «ножки Маха» (рис. 2.26); этот эффект особенно заметен, когда угол скольжения ψ оказывается того же порядка, что и нелинейность $\delta = \xi_0/h$. Ножка Маха формируется практически в любом классе волнового движения, но наиболее простые формулы для высоты волны на стенке получаются в случае подхода солитона — они выведены Дж. Майлсом [113]:

$$\frac{\xi_R}{\xi_0} = \begin{cases} \frac{4}{1 + \sqrt{1 - 3\delta/\psi^2}}, & \frac{3\delta}{\psi^2} < 1; \\ (1 + \psi/\sqrt{3\delta})^2, & \frac{3\delta}{\psi^2} > 1. \end{cases} \quad (2.5.35)$$

Эта зависимость изображена на рис. 2.27. При большом угле скольжения ($\psi^2 > 3\delta$) ножки Маха нет и реализуется схема отражения, представленная на рис. 2.26 а. При этом $\xi_R/\xi_0 \rightarrow 2$, на самом деле $\xi_R/\xi_0 > 2$ в соответствии с формулой (2.1.7). Ножка Маха возникает при $\psi^2 < 3\delta$. Отметим, что в случае $\psi^2 = 3\delta$ высота волны на стенке увеличивается в четыре раза и этот результат не зависит от амплитуды волны (но с уменьшением амплитуды увеличивается время возникновения заметной ножки Маха). Отсюда ясно, что неоднородные эффекты могут существенно исказить структуру волнового поля.

2.6. Влияние дисперсии на накат волн на берег

2.6.1. Безразмерные параметры. С учетом дисперсии базовой моделью являются уравнения нелинейно-дисперсионной теории (1.4.17), которые мы приведем в безразмерных переменных (2.2.2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Br}} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{x}} &= \frac{\alpha^2 \tilde{x}^2}{3} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{t} \partial \tilde{x}^2}; \\ \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} [(-\tilde{x} + \tilde{\xi}) \tilde{u}] &= 0. \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Как видим, система (2.6.1) наряду с параметром Br содержит в явном виде уклон дна, именно этот параметр и определяет коэффициент дисперсии. Учитывая малость α , можно полагать, что дис-

персия слабо сказывается в приурезовой области (где $\bar{x}$ ограничено) на стадии необрушенных волн — этот вывод хорошо подтверждается численными экспериментами в рамках (2.6.1). Кроме того, по мере продвижения волны к урезу дисперсия непрерывно уменьшается, так что, возможно, она не сможет конкурировать с диссипацией и на стадии обрушенных волн — но эти соображения еще необходимо проверить.

2.6.2. Переход волны с глубокой воды на мелкую. Из (2.6.1) вытекает, что дисперсия может быть существенной либо на крутонаклонных откосах (α не мало), либо на больших трассах ($\bar{x}$ не мало). Важность учета дисперсии в этих случаях проиллюстрируем на классической задаче о переходе волны с глубокой воды на мелкую; ее решение известно в линейной постановке при постоянном угле откоса [20, 21]. Удобно ввести систему полярных координат r и θ с центром на урезе, $\theta = 0$ соответствует свободной поверхности, $\theta = -\alpha$ — положению дна (отметим, что ранее ввиду малости α мы не делали различий между значениями угла и его тангенсом). В этих переменных линейные уравнения имеют вид

$$\begin{aligned}\Delta\varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = 0; \\ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \frac{g}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} &= 0 \quad (\theta = 0); \\ \partial \varphi / \partial \theta &= 0 \quad (\theta = -\alpha).\end{aligned}\tag{2.6.2}$$

Форма свободной поверхности определяется выражением

$$\xi(x, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad (\theta = 0).\tag{2.6.3}$$

Нашей задачей является расчет $\xi_y(t)$ при $r = 0$, эта функция и определяет уровень наката в линейной теории.

В случае монохроматической волны частоты ω решение естественно искать в виде $\varphi(r, \theta, t) = \Phi(r, \theta) e^{i\omega t}$, тогда получаем следующую краевую задачу для потенциала:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi &= 0, \\ \partial\Phi/\partial\theta - kr\Phi &= 0 \quad (\theta = 0); \\ \partial\Phi/\partial\theta &= 0 \quad (\theta = -\alpha),\end{aligned}\tag{2.6.4}$$

где $k = \omega^2/g$. Как видим, из-за второго уравнения системы (2.6.4) дальнейшее разделение переменных невозможно, и именно с этим связаны трудности нахождения волнового поля у наклонного берега с произвольной дисперсией. Эти трудности преодолены для случая

$$\alpha = \pi/(2m),\tag{2.6.5}$$

где m — целое положительное число. Соответствующие решения имеют вид [68]

$$\Phi = \frac{ig}{\omega} A \sum_n^s b_n \{ e^{-kr \cos(\theta + \alpha + \alpha_n)} \cos[kr \sin(\theta + \alpha + \alpha_n) + a_n] + \\ + e^{-kr \cos(\theta + \alpha - \alpha_n)} \cos[kr \sin(\theta + \alpha - \alpha_n) - a_n] \}. \quad (2.6.6)$$

Здесь в случае $m = 2s + 1$ (нечетное число) сумма начинается с $n = 0$ и $a_n = \pi n/2$, $\alpha_n = 2n\alpha$, а в случае $m = 2s$ (четное число) сумма начинается с $n = 1$ и $a_n = (2n - 1)\pi/4$, $\alpha_n = (2n - 1)\alpha$. В формуле (2.6.6) коэффициенты b_n равны

$$b_n = 2 \prod_{j=1}^{s-n} \operatorname{ctg}(ja) \quad (n \neq 0, s); \quad b_0 = \prod_{j=1}^s \operatorname{ctg}(ja); \\ b_s = 2 \quad (s \neq 0). \quad (2.6.7)$$

Константа A будет определена ниже через начальную амплитуду волны. Нас в первую очередь интересует возвышение уровня воды, для которого выражение (2.6.6) несколько упрощается:

$$\zeta(x) = A \sum_n^s b_n \{ e^{-kx \cos(\alpha + \alpha_n)} \cos[kx \sin(\alpha + \alpha_n) + a_n] + \\ + e^{-kx \cos(\alpha - \alpha_n)} \cos[kx \sin(\alpha - \alpha_n) - a_n] \}. \quad (2.6.8)$$

Здесь x , в отличие от ранее рассмотренных задач, направлено в сторону моря.

2.6.3. Высота наката. Самый простой результат получается в случае $\alpha = \pi/2$ (волна у вертикальной стенки). При этом $m = 1$, $s = 0$, $a_0 = 0$, $\alpha_0 = 0$ и решение (2.6.8) приобретает вид

$$\zeta(x) = 2A \cos(kx), \quad (2.6.9)$$

так что $A = \zeta_0$ есть амплитуда падающей волны. Отсюда мы получаем обычное удвоение высоты у стенки ($x = 0$): $\zeta_R = 2\zeta_0$.

Обсудим более общий случай, когда $\alpha < \pi/2$. Решение (2.6.8) состоит из незатухающей волны ($n = s$) и затухающих компонентов ($n < s$). Тогда вдали от уреза волна описывается асимптотическим выражением

$$\zeta(x) = A \cos(kx + a_s), \quad (2.6.10)$$

причем эта формула справедлива как для четных, так и нечетных значений m . Решение (2.6.10) описывает стоячую волну и $\zeta_0 = A/2$ здесь соответствует амплитуде падающей волны. Высота волны на урезе (высота заплеска) следует из (2.6.8) при

$$\zeta_R = 2A \sum_n^s b_n \cos a_n = 4\zeta_0 \sum_n^s b_n \cos a_n. \quad (2.6.11)$$

Отсюда получаем коэффициент усиления волны на откосе

$$\frac{\xi_R}{\xi_0} = 4 \sum_n^s b_n \cos a_n, \quad (2.6.12)$$

который зависит только от угла заложения откоса. Коэффициент усиления для различных α хорошо описывается формулой (рис. 2.28) [68]

$$\xi_R/\xi_0 = 2\sqrt{\pi/(2\alpha)}. \quad (2.6.13)$$

Итак, в отличие от длинных волн, коэффициент усиления на шельфе не зависит от длины волны. Физическое объяснение этому заключается в следующем. На глубокой воде волна «не чувствует» откоса и распространяется без изменения своей высоты до тех пор,

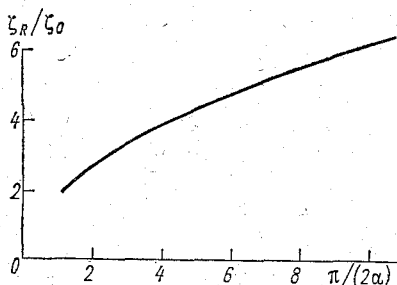


Рис. 2.28. Зависимость высоты заплеска от угла откоса для дисперсионных волн.

пока глубина не сравняется с длиной волны. Далее волна усиливается, становясь длинной. Поэтому основное изменение параметров волны происходит на длине $L_R \sim \lambda_0/\operatorname{tg} \alpha$ и параметр L_R/λ_0 , который является определяющим в теории длинных волн, равен с точностью до константы $(\operatorname{tg} \alpha)^{-1}$ или для малых углов α^{-1} , что и приводит к формуле (2.6.13). Это означает, что формула (2.6.13) для фиксированного α дает предельное значение коэффициента усиления волны на откосе (правда, без учета нелинейности). Отсюда возникает ограничение сверху на коэффициент усиления длинных волн, представленный формулой (2.2.25), или на частоту падающей волны, при которой ее можно считать длинной (при $\alpha \ll 1$):

$$\omega < 2\sqrt{g/h_0} \quad (2.6.14)$$

или

$$\lambda_0 > \pi h_0. \quad (2.6.15)$$

Итак, если $\lambda_0 > \pi h_0$, то волна является длинной, и ее усиление зависит от параметра L_R/λ_0 . В случае $\lambda < \pi h_0$ волна сначала является короткой и распространяется без усиления, а затем становится длинной и усиливается, при этом коэффициент усиления не зависит от параметра L_R/λ_0 и определяется только величиной α .

2.6.4. Волновое поле на откосе 45° . Приведем здесь также вытекающее из (2.6.6) полное выражение для потенциала в случае $\alpha = \pi/4$, чтобы представить себе структуру течения:

$$\Phi = \frac{ig\zeta_R}{\omega\sqrt{2}} \left[e^{kz} \cos\left(kx + \frac{\pi}{4}\right) + e^{-kx} \cos\left(kz - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (2.6.16)$$

Как видим, волновое поле состоит из двух слагаемых, первое из которых описывает классическую волну, правда, имеющую вертикальную структуру, как в короткой волне, хотя частота произвольна. Второе соответствует нераспространяющейся волне, поперечная структура которой является осцилляторной. Каждое из этих решений удовлетворяет уравнению Лапласа, и их связь обусловлена граничным условием на дне бассейна. Существование нераспространяющейся волны типично в случае переменности глубины, в частности над скачком глубины. Их физическая природа обусловлена дифракцией волны на откосе. Отсюда ясна сложность исследования дисперсионных волн на шельфах сложной геометрии, даже для кусочно-ломаного профиля глубины, поскольку в местах излома откоса не удастся сшить решения типа (2.6.16) [точнее (2.6.6)] без учета дополнительных дифракционных поправок, которые, естественно, заранее не известны. Поэтому сейчас еще не ясно, как изучить влияние дисперсии на накат длинных волн на крутонаклонные откосы, переходящие в ровное дно (для этого случая в рамках теории длинных волн мы приводили соответствующие формулы в п. 2.4), и оценить точность приближения мелкой воды.

На основании (2.6.16) легко вычислить горизонтальный и вертикальный компоненты скоростей течения:

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\frac{i\omega\zeta_R}{\sqrt{2}} \left[e^{kz} \sin\left(kx + \frac{\pi}{4}\right) + e^{-kx} \cos\left(kz - \frac{\pi}{4}\right) \right]; \quad (2.6.17)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{i\omega\zeta_R}{\sqrt{2}} \left[e^{kz} \cos\left(kx + \frac{\pi}{4}\right) - e^{-kx} \sin\left(kz - \frac{\pi}{4}\right) \right]. \quad (2.6.18)$$

Отсюда видно, что на крутых откосах, каким является откос с $\alpha = \pi/4$, вертикальный компонент скорости не является малым, в данном случае на урезе

$$|u_{\text{макс}}| = |w_{\text{макс}}| = \omega\zeta_R. \quad (2.6.19)$$

Подсчитаем для случая $\alpha = \pi/4$ критерий обрушения волны, используя соотношение между максимальной крутизной волны на урезе и тангенсом угла откоса [см. формулу (2.4.6)]. Из (2.6.16) форма свободной поверхности находится в виде

$$\zeta(x) = \frac{\zeta_R}{\sqrt{2}} \left[\cos\left(kx + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-kx} \right], \quad (2.6.20)$$

откуда

$$\max \frac{d\zeta}{dx} = k\zeta_R = \frac{\omega^2 \zeta_R}{g}, \quad (2.6.21)$$

и, следовательно, условие обрушения (точнее — необрушения) принимает следующую форму:

$$\omega^2 \zeta_R / g < 1. \quad (2.6.22)$$

Поскольку в данном случае $dh/dx = 1$, то (2.6.22) имеет тот же вид, что и критерий обрушения длинной волны на плоском откосе.

2.6.5. Накат импульсных волн. Выше мы рассмотрели накат монохроматической волны. В случае импульсных возмущений необходимо произвести Фурье-суперпозицию описанных здесь решений либо применить аппарат функции Грина, полученной А. А. Дорфманом [20]. Однако качественно ответ можно предсказать сразу. Из-за дисперсии начальное возмущение еще на глубокой воде трансформируется в квазигармонический цуг, амплитуда которого будет уменьшаться как $\sqrt{\lambda_0/x}$, а затем на откосе амплитуда снова возрастает в M раз, где M определено правой частью формулы (2.6.12). Таким образом, высота наката цуга окажется равной

$$\zeta_R / \zeta_0 \sim M \sqrt{\lambda_0 / L_R}, \quad (2.6.23)$$

и колебания уреза представляют собой квазимонохроматический цуг вне зависимости от формы начального возмущения.

В случае пространственного движения воды наряду с волнами, подходящими к берегу и отражающимися от него, возникают захваченные шельфом волны. В приближении длинных волн они изучены в п. 2.5. Для плоского откоса основную моду захваченных волн можно найти при любой дисперсии [68]:

$$\Phi = A \exp[-kx \operatorname{ctg} \alpha - kz + i(\omega t - ky/\sin \alpha)]; \quad (2.6.24)$$

$$\omega = \sqrt{gk/\sin \alpha},$$

откуда находится смещение уровня воды

$$\zeta(x, y, t) = \zeta_R \exp[-kx \operatorname{ctg} \alpha + i(\omega t - ky/\sin \alpha)]. \quad (2.6.25)$$

Эти волны «прижаты» к урезу и экспоненциально затухают при удалении от него. Аналогичные решения могут быть получены и при плавном изменении берегового откоса с помощью ВКБ-процедуры [19]. С помощью захваченных и излученных волн решаются также задачи об эволюции импульсных возмущений [21].

2.7. Влияние диссипации на накат длинных волн

Выпишем здесь систему уравнений мелкой воды с диссипативным членом в форме (1.3.20) для волн на плоском откосе:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \xi) u] &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} &= - \frac{C_h}{h + \xi} u |u|. \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

Производя обезразмеривание (2.7.1) в соответствии с (2.2.2), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial}{\partial \bar{x}} [(-\bar{x} + \bar{\xi}) \bar{u}] &= 0; \\ \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{1}{\text{Br}} \frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \bar{x}} &= - \frac{C_h}{\alpha^2} \frac{\bar{u} |\bar{u}|}{-\bar{x} + \bar{\xi}}. \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Итак, при учете диссипации возрастает число определяющих параметров, кроме числа Br появляется еще параметр диссипации C_h/α^2 . Как видим, диссипация наиболее существенна на языке наката, где полная глубина мала. Кроме того, диссипация сильно проявляется на пологих откосах.

Рассмотрим здесь автомодельное решение (2.7.1) для переменных u и $H = h + \xi$. Такое решение имеет вид [12]

$$- \alpha (x - ut) = H - \frac{C_h u^2}{g\alpha} \ln \left(1 + \frac{g\alpha H}{C_h u^2} \right), \quad u = \text{const.} \quad (2.7.3)$$

На фронте волны имеется корневая особенность $H \sim \sqrt{x}$, а с удалением от уреза уровень воды медленно (логарифмически) растет (рис. 2.29). Хотя данное решение весьма модельно с физической точки зрения, оно правильно отражает форму волны на языке наката и полезно в качестве тестового решения. Более того, оно важно для проверки правильности выбора диссипативного члена (1.3.20). Так, легко показать [12], что при $u < 0$ (фаза отката) автомодельного решения не существует, что связано с «нефизичностью» выбора (1.3.20) при малых глубинах. Действительно, при $H \rightarrow 0$ естественно считать силу сопротивлений постоянной, т. е. заменить (1.3.20) на следующее выражение:

$$\Gamma = - C_h u |u| \begin{cases} 1/H, & H > z_0, \\ 1/z_0, & H < z_0, \end{cases} \quad (2.7.4)$$

где z_0 — высота шероховатостей.

Такая модификация силы трения практически не меняет автомодельного решения в фазе наката, но допускает существование такого решения и в фазе отката (рис. 2.29) при условии

$$|u| < \sqrt{agz_0}/C_h. \quad (2.7.5)$$

При больших скоростях сила трения как бы «отрывает» хвост потока от основной массы воды, стекающей по откосу [12].

Кроме автомодельных, другие аналитические решения системы (2.7.1) неизвестны. Однако мы уже высказывали соображения

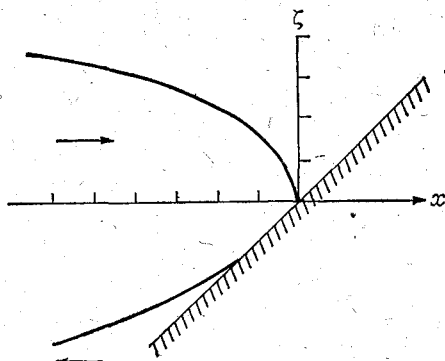


Рис. 2.29. Автомодельное решение уравнений мелкой воды [12]. Вверху — при накате, внизу — при откате.

о применимости линейного подхода к задачам наката. Заменим поэтому систему (2.7.1) на линейную:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} &= -\delta u; \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (hu) &= 0, \end{aligned} \quad (2.7.6)$$

где δ — постоянный коэффициент, отвечающий за затухание волны, на который наложим единственное условие $\delta \ll \omega$. Решение

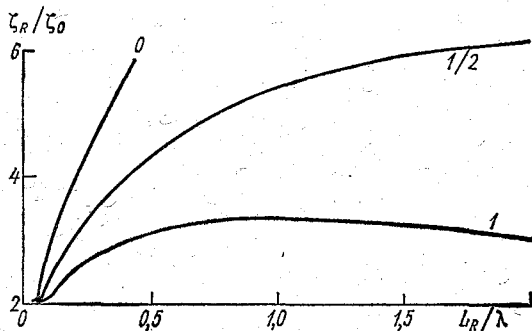


Рис. 2.30. Высота наката волны на плоский откос с учетом диссипации. Цифры у кривой — значения параметра $\sigma \sqrt{\lambda/(g\alpha)}$.

(2.7.6) находится в явном виде ($h = \alpha x$)

$$\zeta = \text{Re} \left\{ \zeta_R J_0 \left[\left(1 - \frac{i\delta}{2\omega} \right) \sqrt{\frac{4\omega^2 x}{g\alpha}} \right] e^{i\omega t} \right\}. \quad (2.7.7)$$

Опуская промежуточные выкладки, полностью эквивалентные проведенным в п. 2.4, выпишем здесь формулу для высоты наката:

$$\zeta_R / \zeta_0 = 2\pi \sqrt{2L_R / \lambda} \exp(-\delta \sqrt{L_R / (g\alpha)}). \quad (2.7.8)$$

В отличие от невязкого случая, формула содержит экспоненциальный фактор, приводящий к уменьшению заплеска, особенно на длинных трассах. Поэтому высота заплеска не может превышать определенного значения (даже в отсутствие обрушения) $\xi_{R \text{ макс}}$:

$$\xi_{R \text{ макс}} = \frac{2\pi\sqrt{2}}{e} \sqrt{\frac{g\alpha}{\delta^2\lambda}} \xi_0, \quad (2.7.9)$$

достигаемой на трассе

$$L_{R*} = \sqrt{g\alpha\lambda}/\delta. \quad (2.7.10)$$

В частности, при $\delta \sim 10^{-3} \text{ с}^{-1}$, $\lambda \sim 1 \text{ км}$, $\alpha \sim 10^{-3}$ имеем $\xi_{R \text{ макс}} \sim 10\xi_0$.

Согласно (2.7.8) ξ_R/ξ_0 является функцией двух параметров: L_R/λ и $g\alpha/(\delta^2\lambda)$; она изображена на рис. 2.30. Как видим, трение о дно может существенно ограничить высоту заплеска длинной волны на берег.

Разностные методы интегрирования уравнений мелкой воды в декартовых координатах

Разностные методы занимают доминирующее положение среди численных методов интегрирования уравнений математической физики. Они применяются для решения широкого круга задач в самой общей постановке.

Среди исследований в различных областях физики и техники, опирающихся на конечноразностную реализацию, видное место занимают задачи, связанные с количественным предсказанием и расчетом процессов в атмосфере и океане. Вместе с тем развитие самой теории разностных методов, направленной и вдохновлявшейся ее приложениями, обязано задачам динамики атмосферы и океана постоянному стимулу к анализу и обоснованию аппарата, расширению представлений о поведении отдельных схем и формах неустойчивости.

Вопросы теории и различные стороны ее связи с приложениями подробно излагаются в обширной литературе по предмету [17, 63, 107 и др.]; обзор теории и анализ ряда разностных аппроксимаций уравнений мелкой воды содержится в [9].

Ниже приводятся основные определения и необходимые сведения, относящиеся к анализу корректности разностных схем, аппроксимирующих задачу Коши и краевые гиперболические задачи. Расчеты длинноволновых движений в произвольной двумерной области, приводимые в главе 6, используют некоторые из рассматриваемых схем — явно-неявную, схему Стрэнга, а также схему Кранка — Николсона в модификации, называемой полунеявной. Круг обсуждающихся схем несколько расширен. Это позволяет увидеть и оценить место методов, использованных для практических расчетов, в общей панораме разностных алгоритмов, широта и разнообразие которой отражают развитие вычислительной гидродинамики.

3.1. Некоторые употребительные аппроксимации гиперболических уравнений

3.1.1. Основные положения. В области $\Omega_T = \{\Omega(x, y) \times [0, T]\}$ рассмотрим решение задачи

$$L(u) = 0; \quad u(x, y, 0) = u^0, \quad (3.1.1)$$

где вектор-функция $\mathbf{u}$ является элементом некоторого нормированного пространства U' .

Зададим пространственно-временную сетку $\Omega_{\tau\Delta} = \{\Omega_{\Delta} \times k\Delta t\}$ с шагами $\Delta = (\Delta x, \Delta y)$ в координатных направлениях, $k = 0, 1, \dots$, $T/\Delta t$, в частности $\Delta = \Delta x = \Delta y$. Область Ω предполагается совпадающей с двумерным евклидовым пространством для задачи Коши либо ограниченной — для периодической задачи. В последнем случае к (3.1.1) присоединяются дополнительные граничные условия на $\partial\Omega$.

Обозначим $w_k(x)$ сеточную функцию, заданную на Ω_{Δ} , $x \in \Omega_{\Delta} = \{x_m = m\Delta x, y_n = n\Delta y; m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, и определим операторы сдвига

$$T_x w(x) = w(x + \Delta x, y); \quad T_y w(x) = w(x, y + \Delta y). \quad (3.1.2)$$

Имеем

$$T_x^i T_y^j w = T_x^i (T_y^j w) = w(x + i_1 \Delta x, y + i_2 \Delta y), \quad i_1, i_2 = 0, \pm 1, \dots; \\ T_x^0 = T_y^0 = E,$$

E — тождественный оператор.

Заменим некоторым способом дифференциальную задачу (3.1.1) системой разностных уравнений — разностной схемой

$$G_1 w^{k+1} = G_2 w^k, \quad (3.1.3)$$

где разностные операторы G_v , $v = 1, 2$ являются многочленами от операторов сдвига

$$G_v = \sum_i A_i^{(v)} T^i, \quad T^i = T_x^{i_1} T_y^{i_2}, \quad i = (i_1, i_2) \quad (3.1.4)$$

с матричными коэффициентами $A_i = A(x, t, \Delta, \Delta t)$, достаточно гладко зависящими от аргументов, и G_1 имеет в некотором смысле ограниченный обратный оператор. Если $G_1^{-1} = E$, то схему (3.1.3) называют явной, в противном случае — неявной.

Обозначая $G_0 = G_1^{-1} G_2$, имеем эквивалентную (3.1.3) двухслойную формулу, связывающую значения сеточных функций на соседних по времени слоях:

$$w^{k+1} = G_0(\Delta t) w^k, \quad k = 0, 1, \dots, [T/\Delta t]. \quad (3.1.5)$$

Говорят, что оператор G согласован с дифференциальным оператором L , если на достаточно гладких решениях $\mathbf{u}(x, t)$ выполняется условие

$$\mathbf{u}(x, t + \Delta t) = G_0 \mathbf{u}(x, t) + O(\Delta t) \quad (3.1.6)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$. Согласованность разностного и дифференциального операторов является одним из условий сходимости w к $\mathbf{u}$ при установлении соответствия $\mathbf{u} \leftrightarrow w$ (например, интерполяцией значений на сетке Ω_{Δ}). Согласованность выражается оценкой в норме

функционального пространства, входящего в определение корректной постановки задачи. Говорят, что схема имеет точность аппроксимации $O(\Delta^{\alpha}, \Delta t^{\beta})$ для достаточно гладких $u(x, t)$, если существует функция $M(t)$, ограниченная на $[0, t]$, такая, что для достаточно малых $\Delta t, \Delta$

$$\|u(x, t + \Delta t) - G_0 u(x, t)\| \leq \Delta t M(\Delta^{\alpha} + \Delta t^{\beta}) \quad (3.1.7)$$

(подразумевается норма L_2 в пространстве функций, интегрируемых с квадратом в Ω_T , либо W_2 — сумма интегрируемых с квадратом функций и их обобщенных производных до некоторого порядка). Аппроксимация согласованной схемы проверяется разложением в ряд Тейлора в окрестности точки (x, t) ; при этом M представляет оценку роста производных в разложении.

Корректность разностной задачи связана с понятием устойчивости схемы. Устойчивость определяется как непрерывная зависимость по норме решения разностной задачи от исходных данных, равномерная относительно шагов сетки:

$$\|G_0^k w^0\| \leq C \|w^0\|, \quad (3.1.8)$$

где $C > 0$ постоянная, не зависящая от $k, \Delta t$.

Пусть $R(t)$ — оператор решения задачи (3.1.1): $u(t) = Ru^0$. Сходимость w к u имеет место, если

$$\|G_0^k w - R(k \Delta t) w\| \rightarrow 0 \quad (3.1.9)$$

при $k \Delta t \rightarrow t, \Delta t \rightarrow 0$.

Связь рассмотренных понятий дается теоремой эквивалентности Лакса: устойчивость разностной аппроксимации, согласованной с корректно поставленной задачей, необходима и достаточна для сходимости.

Устойчивость схемы с постоянными коэффициентами устанавливается, например, использованием преобразования Фурье. Для (3.1.5) имеем

$$F w^{k+1} = G(s) F w^k; \quad G = \sum_j A_j e^{i\theta_j}, \quad (3.1.10)$$

где F — оператор преобразования; $j = (j_1, j_2)$; $\theta = (\theta_1, \theta_2)$; $s = (s_1, s_2)$; $\theta_1 = s_1 \Delta x$; $\theta_2 = s_2 \Delta y$; $A_j = A_{j,j_2}$. Матрица $G(s)$, называемая матрицей перехода (в одномерном случае — множителем перехода), представляет преобразование Фурье оператора G_0 и связывает спектральные образы w на двух соседних слоях по времени. Из (3.1.10) следует, что $G_0 = F^{-1} G F$, т. е. оператор G_0 подобен G и условие устойчивости (3.1.8) переходит в условие ограниченности нормы степеней матрицы перехода

$$\|G^k\| \leq C, \quad k = 1, 2, \dots, k \Delta t \leq T, \quad (3.1.11)$$

C, T — постоянные, не зависящие от $k, \Delta t$.

Норма матрицы G определяется следующим образом:

$$\|G\| = \{\rho(G^*G)\}^{1/2}, \quad (3.1.12)$$

где $\rho(G^*G)$ — радиус спектра, т. е. наибольшее по модулю собственное значение матрицы G^*G . В случае симметричной матрицы

$$\|G\| = \max |\lambda_v| = \lambda_1.$$

Для произвольной матрицы

$$\lambda_1^k \leq \|G^k(s)\| \leq \|G(s)\|^k, \quad (3.1.13)$$

причем точное равенство достигается, например, для симметричных матриц. Отсюда, при выполнении (3.1.11), следует ограничение на собственные значения матрицы G — условие устойчивости фон Неймана

$$|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t). \quad (3.1.14)$$

В общем случае это условие является необходимым для устойчивости. Для матриц, допускающих точное двойное равенство в (3.1.13), оно является и достаточным. Общим классом таких матриц являются нормальные матрицы, определяемые условием: $G^*G = GG^*$; к ним относятся унитарные ($G^*G = E$), эрмитовы ($G = G^*$) и косэрмитовы ($G = -G^*$) матрицы.

Изложенная методика исследования устойчивости обоснована П. Лаксом и Р. Рихтмайером [63]. Однородность уравнения (3.1.1) не является ограничением; теорема Лакса справедлива и для неоднородных задач.

Устойчивость оператора $G_0(x)$ связана с его точностью и спектром $\rho(G)$. Говорят, что G_0 имеет диссипацию порядка $2p$, если

$$|\lambda_1(G(s))| \leq 1 - \delta |s|^{2p}, \quad p = 1, 2, \dots, \quad |s| \leq 2\pi, \quad (3.1.15)$$

где $\delta > 0$ не зависит от s . Если G_0 является $2p$ -диссипативным оператором точности $2p-1$ (для симметричной системы — точности $2p-2$), то он устойчив в L_2 [107].

Схему с $\rho(G) = 1$ всегда можно сделать диссипативной добавлением к G_0 малых слагаемых, не нарушающих согласованности.

Отметим еще один подход к исследованию устойчивости разностной схемы по ее дифференциальному приближению [75]. Для построения первого дифференциального приближения в разложении разностных операторов схемы удерживаются только члены $O(\Delta t)$, $O(\Delta)$ и разложение рассматривается на решениях исходного уравнения. Устойчивость схемы, аппроксимирующей гиперболическую систему первого порядка, в определенных случаях эквивалентно корректности ее первого дифференциального приближения.

Среди разностных аппроксимаций гиперболических систем

$$u_t + \sum_j A_j \partial u / \partial x_j = 0 \quad (3.1.16)$$

с неотрицательными матрицами $A_j = A_j^{(1)}$ [т. е. $\rho(A_j^{(1)}) \geq 0$] особое место занимают двухслойные схемы с односторонними разностями, например направленными разностями первого порядка:

$\partial u / \partial x_j = \Delta^{-1} (E - T_{x_j}^{-1}) \mathbf{w}$; в случае неположительных матриц $A_j = A_j^{(2)}$ [т. е. $\rho(A_j^{(2)}) \leq 0$] для аппроксимации пространственных производных имеем: $\partial u / \partial x_j \simeq \Delta^{-1} (T_{x_j} - E) \mathbf{w}$. Если A_j — знакпеременные матрицы, то схема строится путем разбиения $A_j = A_j^{(1)} + A_j^{(2)}$ с последующей заменой производных, на которые действуют эти матрицы, разностными отношениями в соответствии с наклоном характеристик [1, 90].

Наклон характеристик задает отношение параметров сетки $\kappa = \Delta t / \Delta$, которым характеризуется область влияния начальных данных разностного уравнения. Треугольник определенности дифференциального уравнения высекается характеристиками $dx/dt = \pm \lambda$, и соответствующее неравенство $\kappa \lambda \leq \text{const}$ называют условием устойчивости Куранта — Фридрихса — Леви (короче: условием Куранта).

В случае линейных разностных уравнений с переменными коэффициентами, если оператор G_0 устойчив, условие (3.1.11) выполняется в каждой точке $\mathbf{x}$:

$$\|G^k(\mathbf{x}, \mathbf{s})\| \leq C, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.1.17)$$

3.1.2. Явные схемы. Рассмотрим употребительные схемы для двумерных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{u}) + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{G}(\mathbf{u}) = 0 \quad (3.1.18)$$

или

$$\partial u / \partial t + A \partial u / \partial x + B \partial u / \partial y = 0, \quad (3.1.19)$$

где матрицы A, B являются градиентами векторов $\mathbf{F}, \mathbf{G}$, т. е. матрицами Якоби по компонентам $\mathbf{u}$. При анализе устойчивости разностных аппроксимаций уравнения (3.1.19) предполагаются выполненными условия применимости методики Лакса — Рихтмайера; однородность уравнения при этом не является ограничением.

Воспользуемся следующими обозначениями разностных операторов:

$$\begin{aligned} \delta^+ &= T - E; & \delta^- &= E - T^{-1}; & \delta &= T - T^{-1}; \\ T_x^p u_{m,n} &= u_{m+p,n}; & T_y^p u_{m,n} &= u_{m,n+p} \text{ и т. д.} \end{aligned} \quad (3.1.20)$$

Большое число практических методов расчета длинноволновых процессов использует центрально-разностные схемы. Экспериментальные расчеты по этим схемам и их теоретическое изучение осуществлялись многими авторами [87, 95, 107 и др.]. В результате исследований сформировались представления о приемлемых модификациях аппроксимаций данного типа, точности, поведения коротковолновых компонентов решения, сохранения интегральных

характеристик, возможности интегрирования на длительный срок, нелинейной неустойчивости.

Схема

$$\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^{k-1} - \kappa (A\delta_x + B\delta_y) \mathbf{w}^k, \quad (3.1.21)$$

где δ_x, δ_y — центральноразностные операторы в соответствующих координатных направлениях, модифицируется по расположению компонентов $\mathbf{w}$ в узлах сетки и способам осреднения их по узлам. Первым признаком, вообще говоря, определяется экономичность схемы, вторым — ее способность к сохранению интегральных инвариантов.

Полагая, что (3.1.21) аппроксимирует линейное уравнение с постоянными коэффициентами, отвечающее (3.1.19), подставим в него решение в виде гармоник: $\mathbf{w}_{m,n}^k = \rho^k \exp \{i(s_1 m \Delta + s_2 n \Delta)\}$, $\Delta = \Delta x = \Delta y$, s_1, s_2 — переменные Фурье. Согласно (3.1.10) получим соотношение между амплитудами гармоник ρ^{k+1}, ρ^k с коэффициентом — матрицей перехода G . В силу трехслойности схемы G -матрица шестого порядка, но ее характеристическое уравнение содержит лишь четные степени собственных чисел λ . Для их определения имеем

$$\lambda^3 - a\lambda^2 + a\lambda - 1 = 0, \quad (3.1.22)$$

где a определяется типом центральноразностной аппроксимации. Так, например, когда компоненты $\mathbf{w}$ вычисляются в каждом узле (совмещенная сетка), $a = 3 - 4\kappa^2 c^2 (\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2)$, $\theta_1 = s_1 \Delta$, $\theta_2 = s_2 \Delta$. Один из корней характеристического уравнения $\lambda_1 = 1$, а два других удовлетворяют квадратному уравнению и равны по модулю единице, если дискриминант уравнения не положителен. Это требование приводит к условию Куранта в виде

$$c \Delta t / \Delta \leq 1 / \sqrt{2}. \quad (3.1.23)$$

При перемежающемся расположении компонентов $\mathbf{w}$ в узлах сетки $a = 3 - 4\kappa^2 c^2 (\sin^2 \theta_1 \cos^2 \theta_2 / 2 + \sin^2 \theta_2 \cos^2 \theta_1 / 2)$ и условие устойчивости такой схемы несколько ослабляется. Наибольший предел устойчивости, как и в одномерном случае, будет при $\kappa = 1$, что достигается некоторым осреднением компонентов $\mathbf{w}$ на сетке. Двумерные схемы называют оптимальными, если

$$\kappa \max \{\lambda(A), \lambda(B)\} \leq 1, \quad (3.1.24)$$

где $\lambda(A), \lambda(B)$ — собственные числа соответствующих матриц.

Другой используемый метод, называемый явно-неявным, характеризуется тем, что пространственные производные аппроксимируются центральноразностными отношениями, а производные по времени — разностными отношениями вперед либо назад. Такая схема устойчива при условии Куранта, если, например, уравнение неразрывности аппроксимируется явно, а уравнения движения — неявно [126]. В этом случае характеристическое уравнение

матрицы перехода также имеет вид (3.1.22), где $a = 3 - c^2 \kappa^2 (\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_2)$. Имеем: $\lambda_1 = 1$, $|\lambda_{2,3}| = 1$ при ограничении

$$c \Delta t / \Delta \leq \sqrt{2}. \quad (3.1.25)$$

Для одномерной явно-неявной схемы условие Куранта: $c \Delta t / \Delta \leq 2$. Таким образом, и эта схема не является оптимальной. Как и для центрально-разностной аппроксимации, в двумерном случае правая часть условия устойчивости уменьшается в $\sqrt{2}$ раз.

Оптимальные схемы строятся путем факторизации двумерного оператора. Пусть L_x, L_y — одномерные операторы какой-либо схемы, например схемы Мак-Кормака

$$\mathbf{w}_m^* = (E - \kappa A \delta^+) \mathbf{w}_m^k; \quad \mathbf{w}_m^{k+1} = \frac{1}{2} [\mathbf{w}_m^k + (E - \kappa A \delta^-) \mathbf{w}_m^*] \quad (3.1.26)$$

либо Лакса — Вендрофа

$$\mathbf{w}_m^{k+1} = \left(E - \frac{\kappa}{2} A \delta + \frac{1}{2} \kappa^2 A^2 \delta^+ \delta^- \right) \mathbf{w}_m^k. \quad (3.1.26')$$

Каждая из этих схем устойчива при $\kappa |\lambda_1| \leq 1$, λ_1 — радиус спектра матрицы A , причем $|\lambda_1| = 1 - \delta |\theta|^4$, т. е. схемы имеют четвертый порядок диссипации.

В работе Стрэнга [133] показано, что факторизованная двумерная схема

$$\mathbf{w}^{k+1} = \frac{1}{2} (L_x L_y + L_y L_x) \mathbf{w}^k \quad (3.1.27)$$

либо

$$\mathbf{w}^{k+1} = L_y (\Delta t / 2) L_x (\Delta t) L_y (\Delta t / 2) \mathbf{w}^k, \quad (3.1.28)$$

где $L_y (\Delta t / 2)$ — тот же оператор с уменьшенным вдвое временным шагом, оптимально устойчива. В первом случае $\kappa \max \{ \lambda(A), \lambda(B) \} \leq 1$, что касается (3.1.28), то схема устойчива при $\kappa |\lambda(A)| \leq 1$, $\kappa |\lambda(B)| \leq 2$. Оба условия являются условиями Куранта для соответствующих операторов.

Факторизованные схемы на основе (3.1.26) сохраняют точность $O(\Delta t^2, \Delta^2)$ и легко реализуются. Схема (3.1.28) удобна при дроблении сетки в одном из координатных направлений. Если при этом $\Delta t_y \ll \Delta t_x$, то схему (3.1.28) применяют в виде

$$\mathbf{w}^{k+1} = L_y \left(\frac{\Delta t}{2K} \right)^K L_x (\Delta t) L_y \left(\frac{\Delta t}{2K} \right)^K \mathbf{w}^k,$$

где $\Delta t = \Delta t_x$ и K — ближайшее целое число, превосходящее величину $\Delta t_x / 2 \Delta t_y$ [58].

Схемы второго порядка используются, когда коэффициенты и правая часть уравнения обладают изменчивой структурой, описание которой требует достаточно подробной сетки. Если допустимо более грубое сеточное разрешение, то методы четвертого порядка точности оказываются более предпочтительными, поскольку допу-

скают уменьшение объема вычислений по отношению к достигаемой при этом точности. Простая явная схема точности $O(\Delta t^2, \Delta^4)$, предложенная Крейсом и Олигером [107], имеет вид

$$\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^{k-1} - \frac{\alpha}{6} (A\mathcal{F}_x + B\mathcal{F}_y) \mathbf{w}^k, \quad (3.1.29)$$

где $\mathcal{F}_z = 8(T_z - T_z^{-1}) - (T_z^2 - T_z^{-2})$, $z = (x, y)$. Характеристическое уравнение матрицы перехода этой схемы сохраняет вид (3.1.22), где $a = 3 - \frac{1}{9} \kappa^2 c^2 [\sin^2 \theta_1 (8 - \cos \theta_1)^2 + \sin^2 \theta_2 (8 - \cos \theta_2)^2]$ и необходимое условие устойчивости

$$c \Delta t / \Delta \leq 0,53. \quad (3.1.30)$$

Для расчета гладких течений в простых областях центрально-разностные схемы, по-видимому, наиболее удобны. По вычислительным затратам оптимальной является схема Крейса — Олигера, несмотря на низкий предел устойчивости (3.1.30). Вместе с тем центрально-разностные аппроксимации содержат паразитические моды, обязанные трехслойности схемы, которые требуют отфильтрования, а отсутствие схемной вязкости приводит в определенных случаях к нелинейной неустойчивости и требует искусственного сглаживания [107]. Поэтому для расчета течений с большими градиентами предпочтительнее диссипативные схемы, среди которых наиболее популярны двухшаговые схемы Лакса — Вендрофа и Мак-Кормака. По своим дисперсионным и диссипативным характеристикам, как будет показано ниже, они сравнимы с центрально-разностными схемами.

Увеличение точности схемы до $O(\Delta t^4, \Delta^4)$ ведет к усложненным конструкциям, в связи с чем более целесообразен счет по схемам точности $O(\Delta t^2, \Delta^4)$ либо $O(\Delta t, \Delta^4)$, поскольку основные вычислительные затраты связаны с дроблением пространственного, а не временного шага сетки.

3.1.3. Неявные схемы. Для явных схем в силу локальности оператора G_2 в (3.1.3) число арифметических операций Q , необходимых для перехода $\mathbf{w}^0 \rightarrow \mathbf{w}^k$, пропорционально общему числу узлов сетки

$$Q = qkN,$$

где $q(r)$ — число операций на узел, зависящее от размерности r вектора $\mathbf{w}$ и шаблона сетки. Ограничение на Δt ведет к увеличению числа временных шагов и тем самым к росту Q . Такое ограничение, имеющее вид $\kappa \leq |\lambda_1|^{-1}$, может стать весьма обременительным при необходимости использования малого пространственного шага. Так, при $\Delta = O(10^2 \text{ м})$, $h = O(10 \text{ м})$ допустимое значение Δt составляет лишь несколько секунд.

Непосредственная реализация неявных схем требует обращения на каждом шаге матрицы, содержащей rN элементов. Для обычно используемых алгоритмов $Q = O(N^3)$, $q = O(N^2)$, т. е. число операций на узел растет пропорционально квадрату числа узлов, что неприемлемо.

В одномерном случае локальность обращаемого оператора G_1 позволяет построить метод решения уравнения (3.1.3) — называемый прогонкой — с q , не зависящим от N . Соответствующие абсолютно устойчивые схемы называют экономичными. Методы построения экономичных разностных схем интегрирования двумерных задач опираются на факторизацию G_1 — его замену на произведение операторов $G_1^{(1)}$, $G_1^{(2)}$ таких, что каждое уравнение

$$G_1^{(i)} \tilde{w} = \varphi$$

требует для решения $O(N)$ операций. Вычисление w^{k+1} сводится к последовательному решению этих уравнений; общее число операций будет тоже $O(N)$, и схема с факторизованным оператором оказывается экономичной.

Употребительной неявной аппроксимацией уравнения (3.1.19) является схема

$$w^{k+1} = w^k - \frac{\Delta t}{2} \Lambda (\alpha w^{k+1} + (1 - \alpha) w^k), \quad \Lambda = \frac{1}{2\Delta} (A\delta_x + B\delta_y), \quad (3.1.31)$$

$0 \leq \alpha \leq 1$. При $\alpha = 1$ имеем схему с разностями по времени назад — неявный метод Эйлера, при $\alpha = 1/2$ — схему Кранка — Николсона.

Схема (3.1.31) при $\alpha = 1/2$ недиссипативна, имеет второй порядок точности и абсолютно устойчива. Факторизуем схему, исходя из соотношения

$$u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{k+1} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^k \right] + O(\Delta t^3),$$

которое следует из разложений $u^{k+1} = u^k + u_t \Delta t + u_{tt} \Delta t^2/2 + O(\Delta t^3)$ и $u_t^{k+1} = u_t^k + \Delta t u_{tt}^k$ при исключении u_{tt}^k . Выражая производные по времени через пространственные производные в уравнении (3.1.19), имеем:

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\Delta t}{2} [(Au_x + Bu_y)^{k+1} + (Au_x + Bu_y)^k] + O(\Delta t^3),$$

откуда при аппроксимации пространственных производных центральноразностными отношениями получим

$$\left(E + \frac{\kappa}{4} A\delta_x \right) \left(E + \frac{\kappa}{4} B\delta_y \right) w^{k+1} = \left(E - \frac{\kappa}{4} A\delta_x \right) \left(E - \frac{\kappa}{4} B\delta_y \right) w^k. \quad (3.1.32)$$

Факторизованное уравнение отличается слагаемым, не снижающим точности схемы, и реализуется алгоритмом расщепления

Писмена — Рэчфорда, представляющим одну из форм метода переменных направлений:

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{\kappa}{4} A \delta_x\right) \mathbf{w}^* &= \left(E - \frac{\kappa}{4} B \delta_y\right) \mathbf{w}^k; \\ \left(E + \frac{\kappa}{4} B \delta_y\right) \mathbf{w}^{k+1} &= \left(E - \frac{\kappa}{4} A \delta_x\right) \mathbf{w}^*. \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

Матрица перехода

$$G = \left[\left(E + \frac{1}{2} i \kappa \tilde{A}\right) \left(E + \frac{1}{2} i \kappa \tilde{B}\right) \right]^{-1} \left[\left(E - \frac{1}{2} i \kappa \tilde{A}\right) \left(E - \frac{1}{2} i \kappa \tilde{B}\right) \right],$$

$\tilde{A} = A \sin \theta_1$; $\tilde{B} = B \sin \theta_2$; $\theta_j = s_j \Delta$, $j = 1, 2$. Поскольку $G^* G = E$, то схема абсолютно устойчива.

Другую возможность расщепления (3.1.32) представляет метод приближенной факторизации [22]

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{\kappa}{4} A \delta_x\right) \mathbf{w}^* &= \left(E - \frac{\kappa}{4} A \delta_x\right) \left(E - \frac{\kappa}{4} B \delta_y\right) \mathbf{w}^k; \\ \left(E + \frac{\kappa}{4} B \delta_y\right) \mathbf{w}^{k+1} &= \mathbf{w}^*. \end{aligned} \quad (3.1.34)$$

Этот метод широко используется для решения гиперболических систем [132]. Граничное условие для промежуточного значения $\mathbf{w}^*$ следует из второго уравнения. При задании на границе условия второго рода — соответствующих компонентов $\partial_x \mathbf{w}^{k+1/2}$ — точность схемы понижается в отличие от алгоритма (3.1.33), где значение $\mathbf{w}^*$ на границе согласовано с $(\mathbf{w}^{k+1} + \mathbf{w}^k)/2$ с точностью $O(\Delta t^2)$ [83].

Переобозначая $\mathbf{w}^* = (\mathbf{w}^* + \mathbf{w}^k)/2$, после простых преобразований можно получить эквивалентную (3.1.32) факторизованную схему Дугласа — Гана. Алгоритмы этого типа называют методом стабилизации. Метод покомпонентного расщепления точности $O(\Delta t^2)$ общей структуры, называемый двухциклическим, использует расщепление на удвоенном интервале $[(k-1)\Delta t, (k+1)\Delta t]$ [49]. В задачах, описывающих взаимодействующие физические процессы, расщепление проводится по компонентам процесса. Такой подход, основывающийся на методе слабой аппроксимации, широко используется в океанологии.

При аппроксимации пространственных производных в расщепленной системе центральными разностями процедура решения сводится к обращению блочно-трехдиагональных матриц. Один из методов заключается в представлении обращаемых матриц в виде произведения блочно-двухдиагональных матриц, элементы которых определяются по рекуррентным формулам. Для общего случая криволинейных координат эти формулы приводятся в разделе 6.2.3. Схема недиссипативна и требует искусственной вязкости для подавления высокочастотных осцилляций решения.

Другая возможность заключается в разбиении каждой из матриц A , B на сумму знакоопределенных матриц, что позволяет использовать направленные разности, т. е. обращаемые в случае

разностей первого порядка матрицы являются двухдиагональными. Решение реализуется дальнейшим расщеплением одномерных операторов, например операторов схемы Мак-Кормака (3.1.26) по знакоопределенным матрицам. Остановимся на этом подробнее.

Диагонализируем матрицы A, B :

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \Lambda_A = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u+c & 0 \\ 0 & 0 & u-c \end{pmatrix}; \\ R^{-1}BR &= \Lambda_B = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v+c & 0 \\ 0 & 0 & v-c \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1.35)$$

Здесь S, R — матрицы, столбцы которых являются нормированными правыми собственными векторами матриц A, B :

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & H/c & -H/c \end{pmatrix}; \quad R = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & H/c & -H/c \end{pmatrix}. \quad (3.1.36)$$

Представим матрицу Λ_A в виде суммы знакоопределенных матриц — неотрицательной Λ_A^+ и неположительной Λ_A^- , например следующим образом:

$$\Lambda_A^+ = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u+|u|) & 0 & 0 \\ 0 & u+c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \Lambda_A^- = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u-|u|) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u-c \end{pmatrix}. \quad (3.1.37)$$

Имеем:

$$A = S\Lambda_AS^{-1} = S(\Lambda_A^+ + \Lambda_A^-)S^{-1} = S\Lambda_A^+S^{-1} + S\Lambda_A^-S^{-1} = A^+ + A^-. \quad (3.1.38)$$

Обозначая $(u+|u|)/2 = \lambda_{A1}^+$, $(u-|u|)/2 = \lambda_{A1}^-$, $\lambda_{A2}^+ = \lambda_{A2} = u+c$, $\lambda_{A3}^- = \lambda_{A3} = u-c$, получим:

$$\begin{aligned} A^+ &= \begin{pmatrix} \lambda_{A2}/2 & 0 & \lambda_{A2}c/(2H) \\ 0 & \lambda_{A1}^+ & 0 \\ \lambda_{A2}H/(2c) & 0 & \lambda_{A2}/2 \end{pmatrix}; \\ A^- &= \begin{pmatrix} \lambda_{A3}/2 & 0 & -\lambda_{A3}c/(2H) \\ 0 & \lambda_{A1}^- & 0 \\ -\lambda_{A3}H/(2c) & 0 & \lambda_{A3}/2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Аналогично выполняется разбиение матрицы B : $B = B^+ + B^-$, $B^+ = R\Lambda_B^+$, R^{-1} , $B^- = R\Lambda_B^- R^{-1}$. Обозначая $\lambda_{B1}^+ = (v + |v|)/2$, $\lambda_{B2}^+ = \lambda_{B2} = v + c$; $\lambda_{B1}^- = (v - |v|)/2$, $\lambda_{B3}^- = \lambda_{B3} = v - c$, получим:

$$B^+ = \begin{pmatrix} \lambda_{B1}^+/2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{B2}/2 & c\lambda_{B2}/(2H) \\ 0 & H\lambda_{B2}/(2c) & \lambda_{B2}/2 \end{pmatrix};$$

$$B^- = \begin{pmatrix} \lambda_{B1}^- & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{B3}/2 & -c\lambda_{B3}/(2H) \\ 0 & -H\lambda_{B3}/(2c) & \lambda_{B3}/2 \end{pmatrix}.$$

Заменяя центральноразностные операторы в первом из уравнений системы (3.1.34) на операторы δ^+ , δ^- в соответствии с разбиением (3.1.38), приходим к схеме с направленными разностями:

$$\left[E + \frac{\kappa}{2} (A^+ \delta^- + A^- \delta^+) \right] \mathbf{w}^* = \Phi^k. \quad (3.1.39)$$

Факторизуем эту схему:

$$\left(E + \frac{\kappa}{2} A^+ \delta^- \right) \left(E + \frac{\kappa}{2} A^- \delta^+ \right) \mathbf{w}^* = \Phi^k.$$

Вектор $\mathbf{w}^*$ определяется из системы уравнений

$$\left(E + \frac{\kappa}{2} A^+ \delta^- \right) \mathbf{w}^{**} = \Phi^k; \quad \left(E + \frac{\kappa}{2} A^- \delta^+ \right) \mathbf{w}^* = \mathbf{w}^{**}, \quad (3.1.40)$$

каждое из которых требует обращения блочно-двухдиагональной матрицы. Аналогично факторизуется второе из уравнений (3.1.34) при разбиении B на $B^\pm$ с операторами $\delta^\mp$.

При использовании рассмотренных методов для интегрирования уравнения в консервативной форме необходимо выполнить разбиение векторов $\mathbf{F}(\mathbf{U})$, $\mathbf{G}(\mathbf{U})$ в (3.1.18) на $\mathbf{F}^\pm$, $\mathbf{G}^\pm$, аналогичное разбиению матриц A , B на знакоопределенные матрицы в недивергентном уравнении (3.1.19). Для уравнений газовой динамики такое разбиение основано на том, что соответствующие вектор-функции $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ являются однородными функциями первой степени, т. е.

$$\mathbf{F} = \tilde{A}\mathbf{U}; \quad \mathbf{G} = \tilde{B}\mathbf{U}, \quad (3.1.41)$$

$\tilde{A} = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{U}$, $\tilde{B} = \partial \mathbf{G} / \partial \mathbf{U}$ [132]. Для уравнений мелкой воды эти равенства не выполняются, в чем можно непосредственно убедиться, используя (1.2.9). Однако, если в $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ предполагать величину $c^2 = gH$ «замороженной», $c^2 = c_0^2 = \text{const}$, то эти вектора оказываются однородными функциями $\mathbf{U}$ первой степени, и, выполнив формальное разбиение

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^+ + \mathbf{F}^-; \quad \mathbf{G} = \mathbf{G}^+ + \mathbf{G}^- \quad (3.1.42)$$

(в котором уже $c^2 \neq \text{const}$), можно убедиться, что матрицы $\partial \mathbf{F}^\pm / \partial \mathbf{U}$, $\partial \mathbf{G}^\pm / \partial \mathbf{U}$ знакоопределенны. Для облегчения выкладок воспользуемся уже найденным разбиением $A^\pm$, $B^\pm$. На основании (1.2.9), (3.1.41): $\tilde{A} = \tilde{S} A \tilde{S}^{-1}$, $\tilde{B} = \tilde{S} B \tilde{S}^{-1}$; $\mathbf{F}^\pm = \tilde{S} A^\pm S^{-1} \mathbf{U}$, $\mathbf{G}^\pm = \tilde{S} B^\pm \tilde{S}^{-1} \mathbf{U}$, откуда

$$\mathbf{F}^\pm = \frac{1}{2} (u \pm c) \begin{pmatrix} (u \pm c) H \\ V \\ H \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G}^\pm = \frac{1}{2} (v \pm c) \begin{pmatrix} U \\ (v \pm c) H \\ H \end{pmatrix}. \quad (3.1.43)$$

Рассмотрим аппроксимацию дивергентного уравнения (3.1.18) по схеме Кранка — Николсона

$$\mathbf{w}^{k+1} = \mathbf{w}^k - \frac{\Delta t}{2} (\partial_x \mathbf{F}^{k+1} + \partial_x \mathbf{F}^k + \partial_y \mathbf{G}^{k+1} + \partial_y \mathbf{G}^k). \quad (3.1.44)$$

Точность схемы по пространственному шагу сетки определяется порядком аппроксимации операторов производных ∂_x , ∂_y . Используя разложение

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{k+1} &= \mathbf{F}^k + \tilde{A} (\mathbf{w}^{k+1} - \mathbf{w}^k) + O(\Delta^2); \\ \mathbf{G}^{k+1} &= \mathbf{G}^k + \tilde{B} (\mathbf{w}^{k+1} - \mathbf{w}^k) + O(\Delta^2) \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

и обозначая $\Delta \mathbf{w}^k = \mathbf{w}^{k+1} - \mathbf{w}^k$, получим:

$$\Delta \mathbf{w}^{k+1} + \frac{\Delta t}{2} [\partial_x (\tilde{A} \Delta \mathbf{w}^k) + \partial_y (\tilde{B} \Delta \mathbf{w}^k)] = -\Delta t (\partial_x \mathbf{F}^k + \partial_y \mathbf{G}^k).$$

Факторизуем это уравнение:

$$\left(E + \frac{\Delta t}{2} \partial_x \tilde{A}^k \right) \left(E + \frac{\Delta t}{2} \partial_y \tilde{B}^k \right) \Delta \mathbf{w}^k = -\Delta t (\partial_x \mathbf{F}^k + \partial_y \mathbf{G}^k) \equiv \Phi^k. \quad (3.1.46)$$

При двухшаговой реализации

$$\left(E + \frac{\Delta t}{2} \partial_x \tilde{A} \right) \Delta \mathbf{w}^* = \Phi^k; \quad \left(E + \frac{\Delta t}{2} \partial_y \tilde{B} \right) \Delta \mathbf{w}^k = \Delta \mathbf{w}^* \quad (3.1.47)$$

с разностной аппроксимацией операторов ∂_x , ∂_y находим $\Delta \mathbf{w}^k$ и $\mathbf{w}^{k+1} = \Delta \mathbf{w}^k + \mathbf{w}^k$. При использовании пространственных разностей применяется разбиение правой части согласно (3.1.43). Такую схему называют схемой Бима — Уорминга [141]. Возможны и другие способы решения уравнения (3.1.44), например не использующие разложения (3.1.45), при разбиении $\mathbf{F}^\pm$, $\mathbf{G}^\pm$ в соответствии с (3.1.43) и согласованной с таким разбиением аппроксимацией операторов ∂_x , ∂_y .

Установим связь между центрально-разностной схемой и схемой, использующей направленные разности первого порядка $\delta^\pm \mathbf{F}$ либо

второго $D^\pm \mathbf{F}$, где $D^\pm = \mp \frac{3}{2} E + 2T^{\pm 1} \mp T^{\pm 2}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta} D_x^- \mathbf{F} &= \frac{1}{\Delta} \left(\frac{3}{2} E - 2T^{-1} + \frac{1}{2} T^{-2} \right) \mathbf{F} = \mathbf{F}_x + O(\Delta^2); \\ \frac{1}{\Delta} D_x^+ \mathbf{F} &= \frac{1}{\Delta} \left(-\frac{3}{2} E + 2T - \frac{1}{2} T^2 \right) \mathbf{F} = \mathbf{F}_x + O(\Delta^2).\end{aligned}\quad (3.1.48)$$

Используя разбиение (3.1.43) (в котором согласно сделанной оговорке для правильного представления разностного дифференцирования потока F фазовая скорость c фиксируется на сеточном шаблоне), получим:

$$\frac{1}{\Delta} (\delta_x^- \mathbf{F}^+ + \delta_x^+ \mathbf{F}^-) = \frac{1}{2\Delta} \delta_x \mathbf{F} - \frac{c}{2\Delta} (\delta_x^+ \delta_x^-) \left(\frac{2U}{H} \right) = \mathbf{F}_x + O(\Delta),$$

где $\delta^+ \delta^-$ — оператор разностей второго порядка: $\delta^+ \delta^- = T - 2E + T^{-1}$, $\Delta^{-2} \delta_x^+ \delta_x^- \mathbf{U} = \mathbf{U}_{xx} + O(\Delta^2)$ и

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta} (D_x^- \mathbf{F}^+ + D_x^+ \mathbf{F}^-) &= \frac{1}{\Delta} \left[\delta_x - \frac{1}{4} (T^2 - T^{-2}) \right] \mathbf{F} + \\ &+ \frac{c}{4\Delta} (\delta^+ \delta^-)^2 \left(\frac{2U}{H} \right) = \mathbf{F}_x + O(\Delta^2),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}(\delta^+ \delta^-)^2 &= T^2 - 4T + 6E - 4T^{-1} + T^{-2}; \\ \Delta^{-4} (\delta^+ \delta^-)^2 \mathbf{U} &= \mathbf{U}_{xxxx} + O(\Delta^2).\end{aligned}$$

Таким образом, схему с направленными разностями первого порядка можно интерпретировать как центральноразностную с искусственной вязкостью $K^{(2)} \mathbf{U}_{xx}$, $K^{(2)} = c\Delta/2$, а схему с направленными разностями второго порядка — как аппроксимацию второго порядка с искусственной вязкостью — $K^{(4)} \mathbf{U}_{xxxx}$, $K^{(4)} = c\Delta^3/4$.

В заключение рассмотрим так называемую полуневяную схему, в которой адвективные члены берутся с нижнего слоя по времени, а градиенты уровня — с верхнего:

$$\Delta \mathbf{w}^k + \frac{\kappa}{2} \left\{ \delta_x \left[\frac{1}{2} (\mathbf{F}_1^{k+1} + \mathbf{F}_1^k) + \mathbf{F}_2^k \right] + \delta_y \left[\frac{1}{2} (\mathbf{G}_1^{k+1} + \mathbf{G}_1^k) + \mathbf{G}_2^k \right] \right\} = 0; \quad (3.1.49)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} g H^2 \\ 0 \\ U \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F}_2 = \begin{pmatrix} U^2 H^{-1} \\ UV H^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} g H^2 \\ V \end{pmatrix}; \\ \mathbf{G}_2 &= \begin{pmatrix} UV H^{-1} \\ V^2 H^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Для расчета дозвуковых длинноволновых движений полуневяные схемы, вообще говоря, наиболее удобны, ибо для них условие устойчивости имеет характер $\max(u, v) \leq c$. Действительно, ограничиваясь для простоты одномерным случаем, рассмотрим полуневяную схему

$$u^{k+1} = u^k - \frac{1}{2} \kappa c^2 \delta_x \zeta^{k+1} - \frac{\kappa}{2} U \delta_x u^k;$$

$$\zeta^{k+1} = \zeta^k - \frac{1}{2} \kappa \delta_x u^{k+1}.$$

Собственные числа матрицы перехода этой схемы, являющиеся решением уравнения

$$\lambda^2 - \frac{1}{a} (2 - i\omega) \lambda + \frac{1}{a} (1 - i\omega) = 0,$$

$$a = 1 + \kappa^2 c^2 \sin^2 \theta, \quad \omega = \kappa U \sin \theta, \quad \text{таковы:}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{a} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{2}} + i \left(-\frac{\omega}{2a} \pm \frac{q}{\sqrt{p}} \right),$$

где $p = r + \sqrt{r^2 + q^2}$; $r = a^{-2} (4 - \omega^2 - 4a)$; $q = 4\omega a^{-2} (a - 1)$.

На рис. 3.1, 3.2 представлены $|\lambda_1|$, $|\lambda_2|$ для различных чисел Куранта Cr и значениях $\kappa U = 1,5$ и $\kappa U = 2,5$. При $\kappa U > Cr$

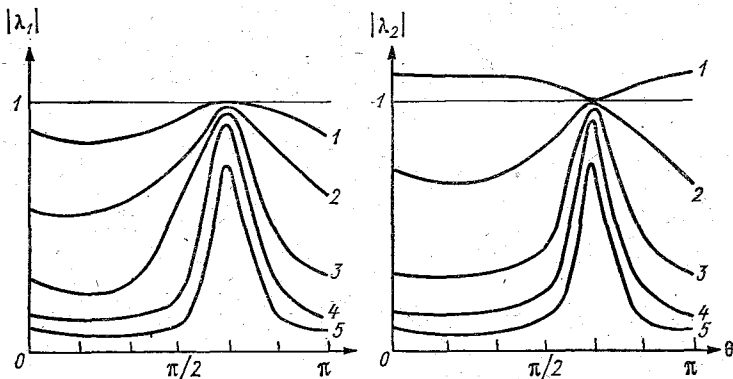


Рис. 3.1. Модули собственных чисел матрицы перехода полуневяные схемы $|\lambda_1(\theta)|$, $|\lambda_2(\theta)|$ при $\kappa U = 1,5$ и различных числах Куранта.

1) $Cr=1$; 2) $Cr=2$; 3) $Cr=5$; 4) $Cr=10$; 5) $Cr=20$.

($U > c$), $|\lambda_2| > 1$ и схема неустойчива, а при $U < c$ — абсолютно устойчива. Аналогичный результат получил Робер [124] при рассмотрении разностных решений некоторой модельной двумерной задачи.

Реализация двумерной схемы проста. Пусть $w = (U, V, \xi)$, f^k — вектор-функция с нижнего временного слоя. Факторизуем (3.1.49):

$$\left(E + \frac{\kappa}{4} A \delta_x\right) \left(E + \frac{\kappa}{4} B \delta_y\right) w^{k+1} = f^k, \quad (3.1.50)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & c^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\left(E + \frac{\kappa}{4} A \delta_x\right) w^* = f^k; \quad \left(E + \frac{\kappa}{4} B \delta_y\right) w^{k+1} = w^*. \quad (3.1.51)$$

Исключая ξ^* на первом полушарии из первого и третьего уравнений, получим уравнение для U^* , решаемое трехточечной прогонкой, после чего по явным формулам определяются ξ^* , V^* . Аналогично

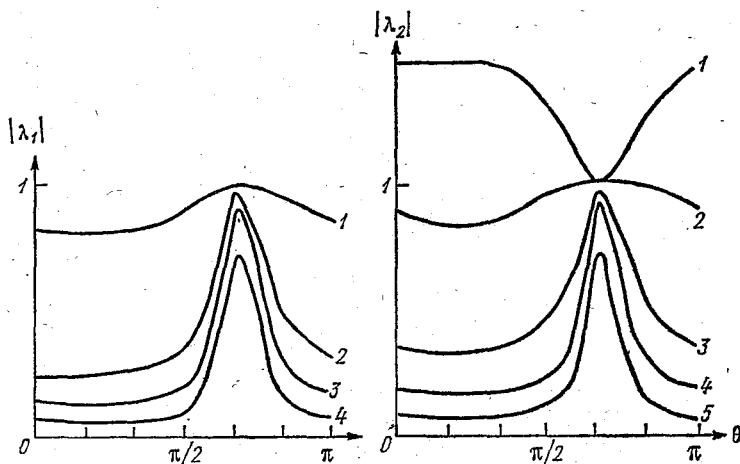


Рис. 3.2. Модули собственных чисел матрицы перехода полунявной схемы $|\lambda_1(\theta)|$, $|\lambda_2(\theta)|$ при $\kappa U = 2,5$ и различных числах Куранта.

1) $Cr=1$; 2) $Cr=2$; 3) $Cr=5$; 4) $Cr=10$; 5) $Cr=20$.

на втором полушарии исключением ξ^{k+1} из последних двух уравнений определяется прогонкой V^{k+1} , после чего непосредственно определяются ξ^{k+1} , U^{k+1} . В главе 6 эта процедура приводится с необходимой подробностью для общего случая криволинейных координат.

Для решения двумерных задач все большее применение находят неявные методы повышенной точности. Реализация их требует значительного объема вычислений. Повышение точности схемы переменных направлений до четвертого порядка по x можно осуществить на основе компактных разностей, сохраняющих трехточный шаблон при аппроксимации $\partial A / \partial x$, $\partial B / \partial y$ с точностью

$O(\Delta^4)$. Для этого на каждом временном шаге дополнительно используется метод обращения соответствующих блочно-трехдиагональных матриц [115].

3.1.4. Сравнение диссипативных и дисперсионных характеристик некоторых схем. Свойства схем удобно изучать на гармонических решениях одномерной системы с диагональной матрицей. Решением задачи

$$u_t + cu_x = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t \geq 0, \quad (3.1.52)$$

$$u(x, 0) = e^{isx}$$

является $u(x, t) = e^{is(x-ct)}$, т. е. начальная конфигурация $u_0 = e^{isx}$ за время t переносится на расстояние ct . Амплитуда решения при этом не меняется $|u(x, t)| = 1$, а фаза ψ_0 равна $-sct$.

Рассмотрим диссипативные и дисперсионные характеристики некоторых численных решений задачи (3.1.52).

Для центральноразностной аппроксимации

$$w^{k+1} = w^{k-1} - \kappa \delta w^k \quad (3.1.53)$$

решение вида $w_m^k = \mu^k e^{im\theta}$, $\theta = s\Delta$ приводит к разностному уравнению

$$\mu^{k+1} - \mu^{k-1} + 2ip \sin \theta \cdot \mu^k = 0,$$

$p = \kappa c$, общее решение которого

$$\mu^k = c_1 \rho_1^k + c_2 \rho_2^k,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные, а ρ_1, ρ_2 — корни характеристического уравнения [или собственные числа матрицы перехода G при введении для трехслойной схемы (3.1.53) вспомогательной переменной $\tilde{w}^k = w^{k-1}$]

$$\rho^2 + 2ip \sin \theta \cdot \rho - 1 = 0.$$

Имеем:

$$\rho_{1,2} = -ip \sin \theta \pm (1 - p^2 \sin^2 \theta)^{1/2} = \pm \cos \omega - i \sin \omega, \quad \omega = \mp \arctg \frac{p \sin \theta}{(1 - p^2 \sin^2 \theta)^{1/2}},$$

т. е. $\rho_1 = e^{i\omega}$, $\rho_2 = -e^{i\omega}$, и решением разностного уравнения (3.1.53) будет

$$w_m^k = [c_1 e^{-i\omega k} + (-1)^k c_2 e^{i\omega k}] e^{im\theta}.$$

Второе слагаемое представляет ложное возмущение; его стремятся отфильтровать гашением коэффициента c_2 за счет выбора дополнительного начального условия, требуемого трехслойной схемой. Точному решению отвечает первое слагаемое $w_m^k = c_1 e^{i(m\theta - \omega k)}$ с фазовым сдвигом ω за шаг Δt

$$\psi_1 = \omega = -\arctg \left(\frac{p \sin \theta}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 \theta}} \right). \quad (3.1.54)$$

Одномерный вариант схемы (3.1.29)—схемы Крейса — Олигера

$$\omega_m^{k+1} = \omega_m^{k-1} - \frac{p}{6} [8(\omega_{m+1}^k - \omega_{m-1}^k) - (\omega_{m+2}^k - \omega_{m-2}^k)] \quad (3.1.55)$$

на решениях $\omega_m^k = \mu^k e^{im\theta}$ приводит к уравнению

$$\mu^{k+1} - \mu^{k-1} + 2iA p \mu^k = 0,$$

$A = \sin \theta (4 - \cos \theta) / 3$, и для фазового сдвига на шаге Δt имеем

$$\psi_2 = -\operatorname{arctg} \left(\frac{Ap}{\sqrt{1 - A^2 p^2}} \right). \quad (3.1.56)$$

Для двухслойных схем значение фазы следует непосредственно из множителя перехода G . Заметим, что для точного решения $\omega_m^k = e^{is(m\Delta - ck\Delta t)}$, $\omega_m^{k+1} = e^{-isc\Delta t} \omega_m^k$, т. е. множитель перехода

$$G_0 = e^{-isc\Delta t} = e^{i\psi_0};$$

$$|G_0| = 1; \quad \psi_0 = -cs\Delta t = \operatorname{Arg}(G_0) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(G_0)}{\operatorname{Re}(G_0)}.$$

Для численного решения с множителем перехода G и фазовым сдвигом ψ имеем

$$G = |G| e^{-i\psi} = |G| e^{-i(\psi/\psi_0)\psi_0}; \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}(G)}{\operatorname{Re}(G)}. \quad (3.1.57)$$

Таким образом, значение $|G|$ представляет меру схемной вязкости, а ψ/ψ_0 — меру дисперсии численного решения.

Множитель перехода схемы Лакса — Вендрофа (3.1.26) (равно и схемы Мак-Кормака при исключении ω^*)

$$G_3 = 1 - p^2(1 - \cos \theta) - ip \sin \theta,$$

$|G_3| \leq 1$ при $p \leq 1$ и

$$\psi_3 = -\operatorname{arctg} \left(\frac{p \sin \theta}{1 - p^2(1 - \cos \theta)} \right). \quad (3.1.58)$$

Обратимся к анализу неявных схем. Для схемы Эйлера (3.1.31, $\alpha = 1$)

$$\omega_m^{k+1} = \omega_m^k - \frac{p}{2} (\omega_{m+1}^{k+1} - \omega_{m-1}^{k+1}) \quad (3.1.59)$$

и Кранка — Николсона (3.1.31, $\alpha = 1/2$) соответственно имеем

$$G_4 = \frac{1}{1 + ip \sin \theta}, \quad |G_4| \leq 1, \quad \psi_4 = -\operatorname{arctg}(p \sin \theta); \quad (3.1.60)$$

$$G_5 = \frac{1 - i(p/2) \sin \theta}{1 + i(p/2) \sin \theta}, \quad |G_5| = 1, \quad \psi_5 = -\operatorname{arctg} \left(\frac{p \sin \theta}{1 - (p^2/4) \sin^2 \theta} \right). \quad (3.1.61)$$

Присоединим сюда еще две неявные схемы, которые используются при знакоопределенном разбиении матриц. Для $c > 0$ за-

пишем аппроксимацию модельного уравнения

$$w_m^{k+1} = w_m^k - p \left[(w_m - w_{m-1})^{k+1} + \frac{1}{2} \beta (w_m - 2w_{m-1} + w_{m-2})^{k+1} \right], \quad (3.1.62)$$

которая при $\beta = 0$ дает неявную схему с пространственными направленными разностями первого порядка, а при $\beta = 1$ — схему с направленными разностями второго порядка. Соответственно имеем

$$G_6 = [1 + p(1 - e^{-i\theta})]^{-1}, \quad |G_6| \leq 1, \quad \psi_6 = -\arctg \left(\frac{p \sin \theta}{1 + p(1 - \cos \theta)} \right); \quad (3.1.63)$$

$$G_7 = \left[1 + \frac{p}{2} (1 - e^{-i\theta}) (3 - e^{-i\theta}) \right]^{-1}, \quad |G_7| \leq 1,$$

$$\psi_7 = -\arctg \left(\frac{p(2 - \cos \theta) \sin \theta}{1 + p(1 - \cos \theta)^2} \right). \quad (3.1.64)$$

Для больших длин волн фазы аналитического и численного решения совпадают с точностью $O(p\theta^3)$: $\psi_i \simeq -p\theta = -cs \Delta t = \psi_0$, $i = 1, 2, \dots, 7$. Вместе с тем ошибки на волнах порядка нескольких шагов сетки велики. На рис. 3.3, 3.4 а, б в степенном масштабе

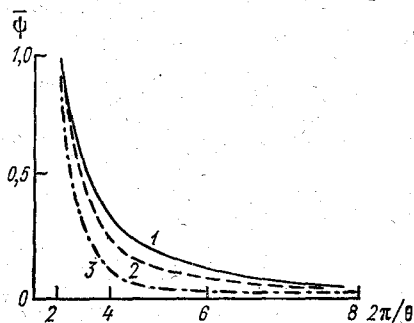


Рис. 3.3. Зависимость относительной фазы $\bar{\psi}$ от длины волны в шагах сетки для явных схем.

1 — центральная разностная; 2 — Мак-Кормака; 3 — Крейса — Олигера.

представлено относительное изменение фазы $\bar{\psi}_i = (\psi_0 - \psi_i)/\psi_0$ на длинах волн $2\pi/\theta$ для обсуждавшихся явных и неявных схем. При фиксированном κ фазовая погрешность численного решения растет с ростом θ , достигая максимума при $\theta = \pi$, т. е. на волнах длины 2Δ . Эти волны стационарны, что является общим недостатком разностных методов. При возрастании числа Куранта фазовая погрешность уменьшается и сдвигается в сторону больших длин волн. Вместе с тем с уменьшением θ дисперсионные ошибки всех схем быстро уменьшаются, т. е., как говорят, тип дисперсии «нормален». Диссипативные свойства обсуждавшихся схем характеризуются изменением $|G_i|$, представленным в полярных координатах на рис. 3.5, 3.6 а, а рис. 3.6 б показывает зависимость от Cg отношения $\chi_i = |G_i(\text{Cg})|/|G_i|_{\text{Cg}=1}$. Подавление гармоник численного решения усиливается с ростом θ , и максимальное угнетение

амплитуды происходит на минимальной длине волны, что является благоприятным фактором, компенсирующим главную часть ошибки фазы. Однако быстрое уменьшение χ_i при возрастании Cr за

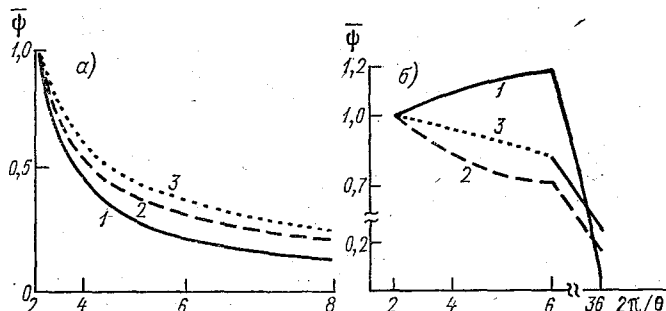


Рис. 3.4. Зависимость относительной фазы $\bar{\Phi}$ от длины волны в шагах сетки для неявных схем.

1 — Кранка — Николсона; 2 — Эйлера; 3 — направленных разностей $O(\Delta)$. а) $Cr=1$; б) $Cr=5$.

Рис. 3.5. Модуль множителя перехода $|G(\theta)|$ для явных схем.

1 — центрально-разностной; 2 — Лакса — Вендрофа, $Cr=0,95$; 3 — Лакса — Вендрофа, $Cr=0,5$; 4 — Лакса — Вендрофа, $Cr=0,75$.

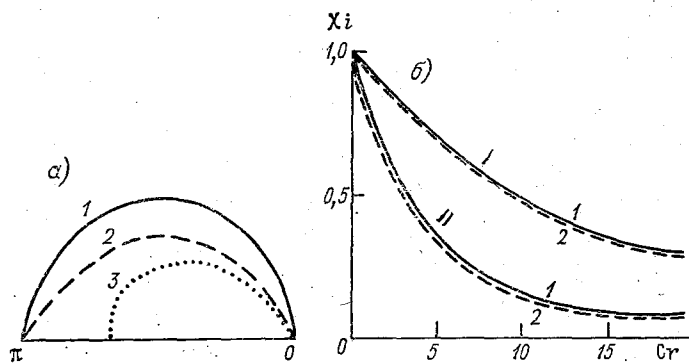
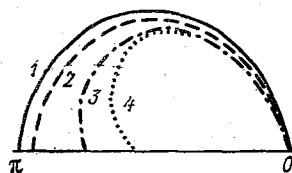


Рис. 3.6. а — модуль множителя перехода $|G(\theta)|$ для неявных схем при $Cr=1$ (1 — Кранка — Николсона; 2 — Эйлера; 3 — направленных разностей $O(\Delta)$); б — убывание $\chi_i(Cr)$ для неявных схем (1 — Кранка — Николсона; 2 — Эйлера).
I) $\theta = \pi/2$ ($L = 4\Delta$); II) $\theta = \pi/20$ ($L = 40\Delta$).

шаг Δt для всех схем, кроме схемы Кранка — Николсона, свидетельствует о том, что при использовании неявных методов $O(\Delta t)$ с фиксированным, достаточно большим Δt потери точности можно избежать лишь при компенсационном дроблении пространственного шага.

На рис. 3.7 приводится расчет одноузловой сейши в канале по схеме Кранка — Николсона при $\Delta t = 0,05$, $Cr = 25$. Аналитическое и численные решения в этом случае с большой точностью совпадают. При счете с удвоенным шагом — $\Delta t = 0,1$, $Cr = 50$ — фазовая погрешность за период составляет 3 %.

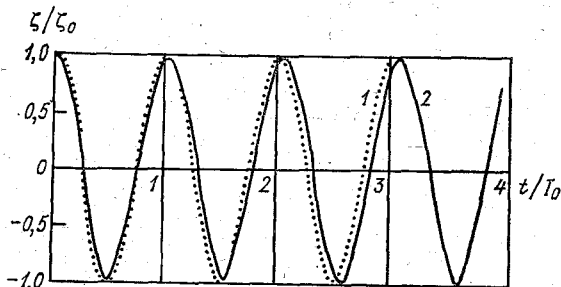


Рис. 3.7. Расчет одноузловой сейши по схеме Кранка — Николсона.

1) $\Delta t = 0,05$, $Cr = 25$; 2) $\Delta t = 0,1$, $Cr = 50$.

Сравнение некоторых из рассмотренных выше схем на решениях уравнения (3.1.52) с начальным условием $u_m^0 = \exp \{-0,0153m^3\}$ приведено на рис. 3.8 а, б.

3.2. Граничные аппроксимации

3.2.1. Спектральное условие Годунова — Рябенко. Развитие разностных методов эволюционных задач в первую очередь относится к решению задачи Коши. Предшествующий раздел содержал краткое изложение результатов в этом направлении. Для задачи Коши существует развитая теория разностных аппроксимаций. Пригодность их определяется удобными критериями локальной устойчивости; трактовка отдельных случаев содержит возможности обобщения. Развитие теории сопровождалось подробным численным экспериментом и сопоставлением методов, в результате чего возникли представления о свойствах ряда схем и возможностях их практической реализации.

Интегрирование двумерных гиперболических краевых задач основывается главным образом на методах расщепления, сводящих эти задачи к локально-одномерным. Приемы анализа устойчивости разностных аппроксимаций таких краевых задач имеют первостепенное значение, ибо именно в решении краевых задач заключаются ценность и смысл большинства практических приложений.

Для краевых задач методика Лакса — Рихтмайера неприменима: наличие (непериодических) граничных условий не позво-

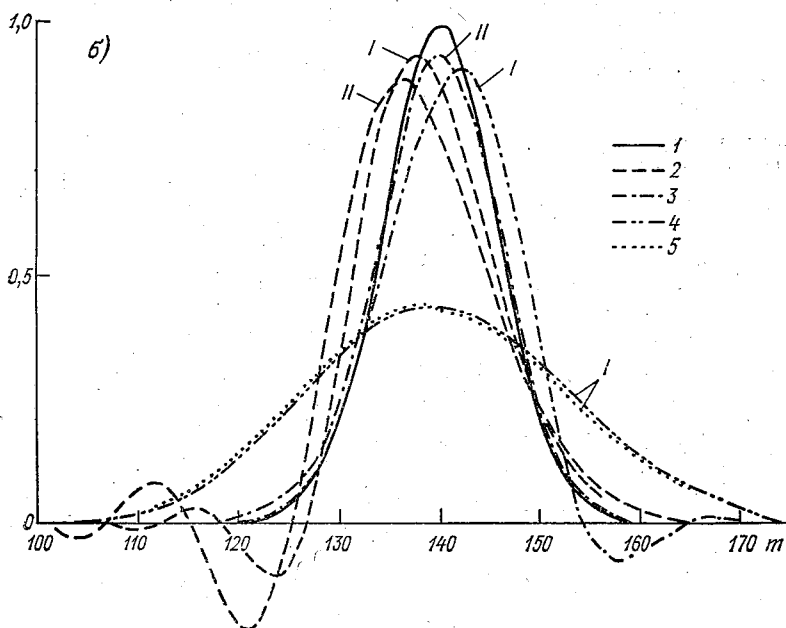
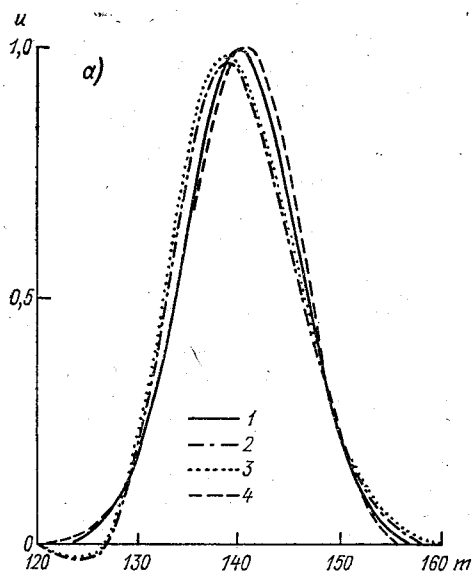


Рис. 3.8. Сравнение схем.

α — явные схемы, $St=0.5$, $T=280\Delta t$; 1 — точное решение; 2 — Лакса — Вендрофа; 3 — центральная разностная; 4 — Крейса — Олигера; β — неявные схемы, 1) $St=1.0$; 2) $St=2.0$. 1 — точное решение; 2 — Кранка — Николсона, центральная разностная; 3 — Кранка — Николсона с направленными разностями $O(\Delta^2)$; 4 — Кранка — Николсона с направленными разностями $O(\Delta)$; 5 — Эйлера.

ляет использовать преобразование Фурье для определения спектра матрицы $G(s)$. Что касается самой матрицы разностной задачи G_0 , то при $\Delta \rightarrow 0$ порядок ее растет и поведение собственных чисел уже не характеризует устойчивость.

Оценка устойчивости по радиусу спектра $\lambda_1 = \rho(G)$ базировалась на неравенстве (3.1.13), где норма матрицы определяется как обычная норма линейного оператора в евклидовом пространстве векторов.

Для задачи Коши норма матрицы $G(s)$ совпадает с ее спектральной нормой, и устойчивость оператора G_0 может характеризоваться спектральным радиусом матрицы $G(s)$. Для граничных задач спектральная норма оператора, как показывают простые примеры [17], оказывается непригодной.

Одна из возможностей распространения теории на граничные задачи заключается в усилении спектрального условия. Альтернативный подход связан с отказом от рассмотрения только гармонических колебаний и использования более общего представления собственных колебаний, вызванного наличием границ:

$$\mathbf{w}_m^k = \mu^k \psi_m, \quad \|\psi\|^2 = \sum_m |\psi_m|^2 \Delta < \infty, \quad (3.2.1)$$

где μ — комплексное число; $\psi(\psi^{(1)}, \psi^{(2)})$. Первая возможность приводит к необходимому спектральному условию Годунова — Рябенского [17], вторая связана с результатами Густафсона, Крейса и Сандстрёма [97, 106].

Обобщение условия фон Неймана (3.1.14) исходит из рассмотрения не одного лишь оператора G_0 , а семейства $\{G_0(\Delta)\}$ при различных Δ . Спектр семейства $\{G_0(\Delta)\}$ определяется как совокупность комплексных чисел λ таких, что при любых $\Delta_0, \varepsilon > 0$ найдется $\Delta < \Delta_0$ такое, что неравенство

$$\|G_0(\Delta) \mathbf{w} - \lambda \mathbf{w}\| < \varepsilon \|\mathbf{w}\|$$

выполняется для $\mathbf{w} \in \Omega_\Delta$. Оказывается, что если хоть одно значение спектра семейства операторов $G_0(\Delta)$ находится вне единичного круга, $|\lambda_0| > 1$, то нельзя найти такую константу, чтобы (3.1.11) выполнялось для всех $\Delta \rightarrow 0$ и $T/\Delta t \rightarrow \infty$. Таким образом, необходимое условие устойчивости должно заключаться в том, чтобы все значения спектра семейства $G_0(\Delta)$ не выходили за пределы единичного круга

$$|\lambda| \leq 1. \quad (3.2.2)$$

Это и есть спектральное условие Годунова — Рябенского [17]. Для случая семейства, состоящего из одного оператора, соответствующий критерий устойчивости фон Неймана: $|\lambda| \leq 1 + O(\Delta t)$, менее ограничен. Усиление его и переход к рассмотрению семейства операторов объясняются расширением класса собственных колебаний из-за наличия границ.

Нахождение спектра семейства операторов использует так называемую процедуру Бабенко — Гельфанда, заключающуюся в рассмотрении вспомогательных операторов, объединение спектров которых приводит к полному спектру семейства операторов $G_0(\Delta)$, связанных с данной краевой задачей.

Как показал Крейс [106], процедуру непосредственного вычисления спектра семейства операторов можно заменить проверкой того, что задача Коши устойчива в l_2 -пространстве с нормой (3.2.1), а соответствующие однородные задачи на полуплоскости только лишь с левой и только лишь с правой границей не имеют решений вида (3.2.1) при

$$|\mu| > 1. \quad (3.2.3)$$

Отсутствие таких решений определяется Крейсом как выполнение условия Годунова — Рябенского.

3.2.2. Детерминантное условие устойчивости. Отметим основные положения теории разностной аппроксимации гиперболических краевых задач с одной пространственной переменной, развитой Густафсоном, Крейсом и Сандстрёмом [97, 106].

Для линейной дифференциальной задачи известны оценки L_2 -нормы решения через начальные и граничные функции. Разностный аналог такой оценки служит определением устойчивости схемы. Алгебраическая форма условия устойчивости получается изучением поведения решений вида (3.2.1). Необходимое условие при этом заключается в отсутствии для резольвентного уравнения*

$$(\mu E - G_0)\psi_m = 0, \quad \psi \in l_2 \quad (3.2.4)$$

собственных чисел μ с $|\mu| > 1$. Действительно, если такое собственное число μ_0 есть, то, очевидно, $w = \mu_0^k \psi_m$ является экспоненциально растущим решением краевой задачи. Общее решение уравнения (3.2.4) — обыкновенного разностного уравнения с постоянными коэффициентами — для задачи на полуплоскости с левой границей имеет вид

$$\psi_m = \sum_{|\rho_j| < 1} c_j \rho_j^m, \quad m = 0, -1, \dots, -l+1, \quad (3.2.5)$$

где $c_j = \text{const}$, а ρ_j — корни характеристического уравнения

$$\det |\mu E - G_0(\rho)| = 0. \quad (3.2.6)$$

При $|\mu| > 1$ характеристическое уравнение не может иметь решений, равных по модулю единице, — это противоречило бы условию Неймана, следующему из устойчивости G_0 для задачи Коши. Если оператор диссипативен, то (3.2.6) не имеет таких решений и при $|\mu| = 1$. Граничные условия позволяют определить произвольные постоянные в общем решении резольвентного уравнения (3.2.5).

* Это уравнение является дискретным преобразованием Лапласа однородной начальной задачи.

Подставляя (3.2.5) в однородные граничные условия левой краевой задачи, имеем систему линейных однородных уравнений:

$$L(\mu)c = 0.$$

Число μ , $|\mu| \geq 1$, $\mu \neq 1$ будет собственным значением оператора в том и только в том случае, если

$$\det |L(\mu)| = 0.$$

При $\mu \rightarrow 1$ общее решение левой краевой задачи (3.2.5) может, вообще говоря, не принадлежать l_2 . Подстановка этого решения в граничные условия позволит определить $\{2c\}$ параметров из системы $\{2c\}$ уравнений тогда и только тогда, когда

$$\det |L(1)| = 0.$$

В этом случае говорят, что $\mu = 1$ является обобщенным собственным значением оператора G_0 .

Необходимым и достаточным условием устойчивости граничной аппроксимации является отсутствие у G_0 собственных значений c $|\mu| \geq 1$, $\mu \neq 1$, причем $\mu = 1$ не должно являться обобщенным собственным значением оператора G_0 .

В силу сказанного условие устойчивости можно представить в виде детерминантного условия

$$\det |L(\mu)| \neq 0, \quad |\mu| \geq 1, \quad \mu \neq 1. \quad (3.2.7)$$

Аналогично рассматривается граничная задача на полуплоскости $x \leq 0$.

В качестве примера рассмотрим устойчивость центральноразностной схемы для краевой задачи, сведенной к модельному уравнению в инвариантах (1.2.18):

$$w_m^{k+1} = w_m^{k-1} - \kappa A \delta_x w_m^k, \quad m = 1, 2, \dots; \quad k = 2, 3, \dots; \quad (3.2.8)$$

$$A = c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad w = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}; \quad p = u + 2c; \quad q = u - 2c;$$

$$w_m^0 = \varphi_m; \quad w_m^1 = \tilde{\varphi}_m; \quad p_0^{k+1} = \gamma_0 q_0^{k+1}. \quad (3.2.9)$$

Схема требует дополнительного граничного условия для q -уравнения, которое возьмем в одном из видов

$$\delta^+ q_0^{k+1} = 0; \quad (3.2.10)$$

$$q_0^{k+1} = q_1^k. \quad (3.2.11)$$

Поскольку в анализируемые дополнительные условия входит только q -составляющая вектора w , то ограничимся рассмотрением решения ψ резольвентного уравнения, отвечающего q -инварианту:

$$(\mu^2 - 1) \psi_m = \kappa \mu (\psi_{m+1} - \psi_{m-1}), \quad (3.2.12)$$

которое имеет общее решение

$$\psi_m = c_1 \rho_1^m + c_2 \rho_2^m,$$

где ρ — корни характеристического уравнения

$$(\mu^2 - 1)\rho = \kappa\mu(\rho^2 - 1). \quad (3.2.13)$$

Корни этого уравнения обладают следующими свойствами [97]: для $|\mu| > 1$, $|\rho_1| < 1$, $|\rho_2| > 1$. Если же $\mu = e^{i\theta}$, т. е. $|\mu| = 1$, то интересующий нас корень ρ_1 , при котором решение резольвентного уравнения принадлежит $l_2(0, \infty)$, может по модулю равняться единице. Тогда граничные условия (3.2.9), (3.2.10) дают

$$c_1 - \gamma_0 c_2 = 0, \quad c_2(\rho_1 - 1) = 0$$

и

$$\det L(\mu) = \begin{vmatrix} 1 & -\gamma_0 \\ 0 & \rho_1 - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3.2.14)$$

Условие (3.2.7) не выполнено, и аппроксимация неустойчива.

Что касается (3.2.11), то из него следует

$$c_2(\mu - \rho_1) = 0.$$

Поскольку $|\mu - \rho_1| > 0$ как при $|\mu| > 1$, так и при $|\mu| = 1$ ($\mu = e^{i\theta}$ и $\rho_1 = 1$ только, когда $\theta = \pi$), то детерминантное условие (3.2.7) выполнено и аппроксимация (3.2.8), (3.2.9), (3.2.11) устойчива.

Отметим, что неустойчивость схемы (3.2.8) с экстраполяцией на границе не есть следствие ее недиссипативности; для схемы Кранка — Николсона (3.1.31), собственные числа которой также по модулю равны единице, экстраполяционное краевое условие $q_0^{k+1} = q_1^{k+1}$ обеспечивает устойчивость [равно как и условие (3.2.11)].

Приведем дополнительные граничные условия вычислительного типа для схемы Мак-Кормака, которые можно использовать в процедуре Стрэнга (3.1.27) — (3.1.28). Для варианта схемы (3.1.26), когда в предикторе берется разность вперед, а в корректоре — назад, вычислительное граничное условие требуется только на втором полушаге, в уравнении для корректора q^{k+1} (при $x \geq 0$). Это условие допустимо взять в виде [94]

$$q_0^{k+1} = q_0^* + \kappa \delta^+ q_0^* \quad (3.2.15)$$

либо

$$q_0^{k+1} = q_1^{k+1}, \quad q_0^{k+1} = 2q_1^{k+1} - q_2^{k+1}; \quad (3.2.16)$$

последние два условия представляют экстраполяцию нулевого и первого порядка точности, соответственно $O(\Delta)$ и $O(\Delta^2)$.

Вычислительные краевые условия определяют не только устойчивость, но и точность схемы в не локальном смысле. Теоретически в работе Густафсона [96] показано, что в гиперболическом случае точность схемы не нарушается, если ее точность на границе на порядок меньше, чем во внутренних точках. В расширенном диапазоне условий это не всегда подтверждается и рекомендуется

согласование точности схемы внутри и на границе. Так, для сохранения общей точности $O(\Delta^2)$ диссипативной схемы Мак-Кормака требуется второе из условий (3.2.16), т. е. не нулевая, а линейная экстраполяция [81].

Что касается характера устойчивости, определяемой граничными вычислительными условиями, то для сохранения абсолютной устойчивости неявных краевых аппроксимаций краевые условия должны быть неявными [86, 144]. Подробнее на этом мы остановимся ниже.

3.2.3. Двумерная задача на полуплоскости. Простейшая возможность обобщения теории Густафсона — Крейса — Сандстрёма на двумерный случай относится к задаче на полуплоскости.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (3.1.19) в области $\Omega_{0T} = \{\Omega_0 \times [0, T]\}$, $\Omega_0 = \{x \geq 0, -\infty < y < \infty\}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} + B \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad x, y, t \in \Omega_{0T}, \quad (3.2.17)$$

$$u(x, y, 0) = u^0, \quad x, y \in \Omega_0;$$

$$u^+(0, y, t) = G_0 u^-(0, y, t), \quad -\infty < y < \infty, t > 0. \quad (3.2.18)$$

На границе $x = 0$ количество условий определяется знаком $u(0, y, t)$. Задаваемые на границе компоненты u , отвечающие уходящим характеристикам, обозначены u^+ ; они выражаются через остальные компоненты — u^- , отвечающие приходящим к границе $x = 0$ характеристикам. При таком задании граничных условий постановка будет корректной в одномерном случае, к которому она сводится, если u^0 не зависит от y . В явном виде условие (3.2.18) выступает при симметризации матриц A, B подстановкой $gH = c^2/2$ [см. (1.2.14)] с последующей диагонализацией матрицы A . Выполним преобразование подобия $S_0^{-1}AS_0 = \Lambda$, где S_0 — матрица, столбцами которой являются нормированные правые векторы симметрической матрицы A ; в отличие от общего случая (3.1.36), $S_0S_0^{-1}$ — постоянные матрицы, если матрица A — симметрическая. Подстановкой $u = S_0 \hat{u}$ в уравнение (3.2.17) с последующим умножением его на S_0^{-1} получим

$$\hat{u}_t + \Lambda \hat{u}_x + S_0^{-1}BS_0 \hat{u}_y = 0; \quad (3.2.19)$$

$$\hat{u} = \begin{pmatrix} v \\ (u+c)/\sqrt{2} \\ (u-c)/\sqrt{2} \end{pmatrix}; \quad \Lambda = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ 0 & u+c/2 & 0 \\ 0 & 0 & u-c/2 \end{pmatrix};$$

$$S_0 = \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Для этого уравнения в характеристических переменных $\hat{u}$ количество краевых условий на границе $x = 0$ определяется знаками элементов матрицы Λ ; в соответствии со сказанным в разделе 1.2.4, при $\lambda_1 = u > 0$ требуется два физических условия, при $\lambda_1 \leq 0$ — одно. Тогда численная реализация требует на границе в первом случае одного вычислительного условия на переменную $u - c/2$, а во втором случае — двух вычислительных условий на $(v, u - c/2)$.

В последующем анализе при рассмотрении допустимых вычислительных краевых условий для какого-либо из уравнений системы (3.2.19) будем предполагать, что оно заменено на модельное уравнение, в котором $\mathcal{B} = S_0^{-1} B S_0$ — диагональная матрица и элементы матриц Λ , $\mathcal{B}$ фиксированы.

Суждение об устойчивости граничных аппроксимаций основывается в данном случае на изучении численных решений вида

$$w_{m,n}^k = \mu^k \psi_m e^{i s n \Delta}; \quad \psi_m = \sum_{|\rho_j| < 1} c_j \rho_j^m; \quad \psi_m \in l_2, \quad (3.2.20)$$

что является обобщением представления (3.2.1) [78]. Как и выше, для устойчивости аппроксимации необходимо и достаточно, чтобы однородная резольвентная граничная задача не имела собственных значений $|\rho| < 1$ при $|\mu| \geq 1$, $\mu \neq 1$. Случай $|\mu| = 1$, $|\rho| = 1$ требует дополнительного выяснения функционального характера возмущения $\mu(\rho)$.

Рассмотрим граничные условия для схемы Кранка — Николсона

$$\left(1 + \frac{a\kappa}{4} \delta_x\right) \left(1 + \frac{b\kappa}{4} \delta_y\right) w^{k+1} = \left(1 - \frac{a\kappa}{4} \delta_x\right) \left(1 - \frac{b\kappa}{4} \delta_y\right) w^k, \quad (3.2.21)$$

где $w_{m,n}^k$ аппроксимирует переменную $(u - c)/\sqrt{2}$ в узлах сетки, т. е. $a < 0$. Уравнение требует вычислительного граничного условия при $x = 0$. Это условие возьмем в одном из видов

$$w_{0,n}^{k+1} = 2w_{1,n}^{k+1} - w_{2,n}^{k+1}, \quad (3.2.22)$$

$$w_{0,n}^{k+1} = 2w_{1,n}^k - w_{2,n}^{k-1}, \quad (3.2.23)$$

$$w_{0,n}^{k+1} = 2w_{1,n+1}^k - w_{2,n+2}^{k-1}, \quad (3.2.24)$$

выражающих экстраполяцию соответственно по одной, двум и трем переменным. Для решений (3.2.20) граничные условия дают:

$$(\rho - 1)^2 = 0, \quad \rho = 1; \quad (3.2.22')$$

$$\mu^{k+1} = 2\mu^k \rho - \mu^{k-1} \rho^2, \quad \rho = \mu; \quad (3.2.23')$$

$$\mu^{k+1} = 2\mu^k \rho e^{i\theta} - \mu^{k-1} \rho^2 e^{2i\theta}, \quad \rho = \mu e^{-i\theta}. \quad (3.2.24')$$

Схеме (3.2.21) отвечает характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \mu \left[1 + \frac{1}{4} a\kappa (\rho - \rho^{-1}) \right] \left[1 + \frac{1}{2} b\kappa i \sin \theta \right] = \\ = \left[1 - \frac{1}{4} a\kappa (\rho - \rho^{-1}) \right] \left[1 - \frac{1}{2} b\kappa i \sin \theta \right]. \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Условие (3.2.22) дает $|\mu| = 1$, и требуется дополнительный анализ, чтобы установить связь возмущения $\mu = \mu(\rho)$. Пусть $\mu = 1 + \varepsilon$, тогда $\rho = 1 + \delta$, ибо при $|\mu| > 1$ не существует решений характеристического уравнения с $|\rho| = 1$. Для волны наименьшей длины, разрешаемой сеткой, $L = 2\Delta$, т. е. $\theta = \pi$, из (3.2.25) имеем: $\varepsilon \simeq |a|\kappa\delta$. Таким образом, решение с $|\mu| > 1$ возникает на решениях резольвентного уравнения, не принадлежащих l_2 , и схема устойчива. Для условия (3.2.23) имеет место та же ситуация. Наконец, в третьем случае, при $\theta = \pi$, $\mu = -\rho$ и надлежит рассмотреть связь между возмущениями $\mu = 1 + \varepsilon$, $\rho = -1 - \delta$. Из (3.2.25) имеем: $\varepsilon \simeq -|a|\kappa\delta$, т. е. для $|\mu| > 1$ $\rho = 1 - \varepsilon/(|a|\kappa)$. Итак, при условии (3.2.24) для $|\mu| > 1$ существует решение резольвентного уравнения с $|\rho| < 1$, т. е. принадлежащее l_2 . Схема с условием (3.2.24) неустойчива на высоких гармониках. Вместе с тем соответствующая одномерная задача, для которой это условие переходит в (3.2.23), — устойчива.

Пример показывает, что для решения двумерной задачи назначение граничных условий по аналогии с одномерным случаем требует осторожности.

Обратимся к анализу устойчивости неявной схемы Эйлера (3.1.31, $\alpha = 1$) для третьего уравнения системы (3.2.19)

$$\left(1 + \frac{\kappa}{2} a \delta_x\right) \left(1 + \frac{\kappa}{2} b \delta_y\right) \omega^{k+1} = \omega^k, \quad (3.2.26)$$

$a < 0$, при условиях (3.2.22) — (3.2.24). На решениях $\omega_{m,n}^k = \mu^k \rho^m e^{in\theta}$ имеем характеристическое уравнение

$$\mu \left[1 + \frac{\kappa}{2} a (\rho - \rho^{-1}) \right] (1 + \kappa b i \sin \theta) = 1, \quad (3.2.27)$$

из которого при условии (3.2.22) следует

$$\mu (1 + \kappa b i \sin \theta) = 1 \quad (3.2.28)$$

и $|\mu| = (1 + b^2 \sin^2 \theta)^{-1/2}$. При $0 < \theta < \pi$ $|\mu| < 1$ и схема устойчива. При $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ для возмущенных решений $\mu = 1 + \varepsilon$, $\rho = 1 + \delta$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ из (3.2.27) следует $\varepsilon = |a|\kappa\delta$, т. е. схема устойчива во всем диапазоне волновых чисел. Аналогично показывается устойчивость этой схемы с условием (3.2.23) и неустойчивость — с (3.2.24).

Эти результаты справедливы и для полунеявного метода, реализуемого по схеме Эйлера либо — в виде (3.1.49) — по схеме Кранка — Николсона.

В заключение остановимся на сохранении граничным вычислительным условием в сочетании с неявной аппроксимацией во внутренних узлах глобального характера безусловной устойчивости схемы. Естественный и наиболее надежный вид вычислительных условий для краевых задач подсказывается уравнениями в характеристической форме на границе. Приведем такую запись для

уравнений (3.1.49). На первом полушаге интегрируются первое и третье уравнения системы. Запишем их в виде

$$\mathbf{w}_t^* + \frac{\kappa}{4} A_0 \partial_x \mathbf{w}^* = \Phi^k; \quad \mathbf{w}^* = \begin{pmatrix} U^* \\ \xi^* \end{pmatrix}; \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & c^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.2.29)$$

Диагонализируя матрицу A_0

$$\Lambda_{A_0} = S^{-1} A_0 S = \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & -c \end{pmatrix}; \quad S^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} c^{-1} & 1 \\ -c^{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad (3.2.30)$$

имеем $S^{-1} A_0 = \Lambda_{A_0} S^{-1}$ и

$$S^{-1} \mathbf{w}_t^* + \frac{\kappa}{4} \Lambda_{A_0} S^{-1} \partial_x \mathbf{w}^* = S^{-1} \Phi^k.$$

Второе из этих уравнений

$$\xi_t - (c^{-1} U)_t - c [\xi_x - (c^{-1} U)_x] = (\varphi_2 - c^{-1} \varphi_1)^k \quad (3.2.31)$$

можно использовать для определения ξ^* из приходящей на границу характеристической комбинации $(\xi - U/c)$, поскольку U^* находится, согласно (3.1.51), предварительно трехточечной прогонкой. Таким образом,

$$\xi_{0,n}^* = \xi_{0,n}^k + \kappa c_{0,n} (\xi_1^k - \xi_0^k)_n + \gamma_{0,n}^*, \quad (3.2.32)$$

где $\gamma_0^* = (\varphi_2 - c^{-1} \varphi_1)^k - \kappa c_{0,n} \delta_x^+ (U/c)_0^*$. Теперь, согласно принятой процедуре расчета, $\xi_{m,n}^*$, $m = 1, 2, \dots, M-1$ определяется непосредственно из разностных уравнений, полученных исключением U^* . Расчеты показывают, однако, что при этом безусловная устойчивость полунейного метода (для дозвуковых течений) нарушается и схема устойчива лишь для чисел Куранта $\text{Cg} = \kappa c \leq 5$. Причина заключается в явном характере граничного условия (3.2.32). В рамках принятой удобной процедуры реализации полунейной схемы (3.1.51) эта причина неустранима, ибо неявный характер аналога условия (3.2.32), возникающего при замене $\delta^+ \xi_0^k$ на $\delta^+ \xi_0^*$, приводит к замене скалярной прогонки для определения U^* на матричную — для определения $\mathbf{w}^* = (U^*, \xi^*)$.

Граничные вычислительные условия явного вида, как, например, (3.2.3) или (3.2.23), применительно к неявным схемам во внутренних точках приводят к ограничению на допустимое значение Cg [144]. Чтобы снять это ограничение, следует использовать неявную форму краевых условий, например неявную экстраполяцию нулевого или первого порядка

$$\xi_0^{k+1} = \xi_1^{k+1}; \quad \xi_0^{k+1} = 2\xi_1^{k+1} - \xi_2^{k+1}. \quad (3.2.33)$$

В качестве примера рассмотрим задачу расчета свободных колебаний в канале с одной открытой границей. Периодическое решение для гармонического колебания с частотой $\omega = 2\pi c/\lambda$ (λ — длина волны) имеет вид

$$\xi(x, t) = \xi_0 \sin(\omega t) \cos[2\pi(L-x)/\lambda] / \cos \frac{2\pi L}{\lambda};$$

$$u(x, t) = \xi_0 \sqrt{g/h_0} \cos(\omega t) \sin[2\pi(L-x)/\lambda] / \cos \frac{2\pi L}{\lambda}.$$

Расчет использует процедуру реализации полунеявного метода (3.1.50) с нулевой адвекцией для возможности сравнения с аналитическим решением. На промежуточном полушаге граничное значение u^* на открытой границе определяется через заданное значение ξ^* . Расчет при $L/\lambda = 1/2$, $\Delta t = 0,05 (= T/20)$ и $Cr = 15$ приводится на рис. 3.9.

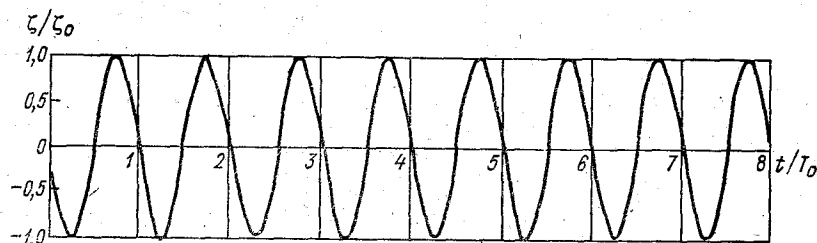


Рис. 3.9. Расчет свободных колебаний в канале с открытой границей полунеявным методом при $\Delta t = 0,05T$, $Cr = 15$.

3.2.4. Заключение. Детерминантное условие (3.2.7) позволяет проверить устойчивость аппроксимаций одномерных краевых задач, содержащих граничные условия вычислительного типа. Примеры употребительных граничных аппроксимаций рассмотрены выше. На конечном интервале, как отмечалось, граничная аппроксимация устойчива, если устойчивы обе задачи на полуплоскости с одной лишь левой и лишь правой границами. При этом оказывается, что использование некоторых схем связано с ограничением на четность числа M внутренних узлов отрезка интегрирования [97, 144]. Так, экстраполяция на границе [условия (3.2.16)] для схемы Кранка — Николсона устойчива, если M — четное число. При условии (3.2.11) с недиссипативными схемами — центральноразностной и Кранка — Николсона — M должно быть четным. Условие (3.2.15) не требует ограничений на M . Не имеет таких ограничений и диссипативная неявная схема Эйлера (3.1.31, $\alpha = 1$) с условием (3.2.10) либо первым из условий (3.2.16). С этими же условиями при M — нечетном возникает ограничение на устойчивость, зависящее от M . То же справедливо и для пространственно-временной интерполяции (3.2.24), однако ограничение оказывается более жестким.

В общем случае произвольной области $\Omega(x, y)$ с границей $\partial\Omega$ результаты для задачи на полуплоскости могут быть использованы при отображении Ω на прямоугольник введением криволинейных координат, согласованных с границей $\partial\Omega$. Рассмотрение такого подхода составляет содержание последующих глав.

4

Глава

Постановка задач в криволинейных координатах

Для интегрирования уравнений в произвольной области Ω с криволинейной границей $\partial\Omega$ удобно перейти к криволинейным координатам, согласованным с конфигурацией Ω . Преобразование, задающее переход, отображает исходную область на параметрический прямоугольник Ω^* . Уравнения, преобразованные к криволинейным координатам, интегрируются в Ω^* с граничными условиями на прямоугольном контуре $\partial\Omega^*$. Тип краевой задачи не меняется, и некоторое усложнение уравнений, коэффициенты которых включают элементы криволинейной метрики, несопоставимо с упрощениями, вытекающими из канонизации области. В этом заключается преимущество перехода к криволинейным координатам, и соответствующие методы оказались исключительно эффективны для решения краевых задач в областях сложной конфигурации [15, 116, 138].

В разделе 4.1 приводятся некоторые основные понятия и соотношения, связанные с криволинейными координатами, а также вид дифференциальных операторов в криволинейных координатах. Этот материал систематизирован здесь для дальнейшего использования. В разделе 4.2 рассматривается постановка в криволинейных координатах краевых задач для уравнений мелкой воды и трехмерных задач.

4.1. Криволинейные координаты

4.1.1. Основные соотношения. Пусть x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты точки трехмерного евклидова пространства E_3 . Введем криволинейные координаты ξ^i , связанные с декартовыми x_i соотношениями

$$\xi^i = \xi^i(x_1, x_2, x_3), \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1.1)$$

Преобразование (4.1.1) предполагается взаимнооднозначным, т. е. якобиан $I = \partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)/\partial(x_1, x_2, x_3)$ не равен нулю и ограничен. Геометрическое место точек, для которых одна из координат, например ξ^i , постоянна, а изменяются координаты ξ^j, ξ^k ($i, j, k = 1, 2, 3; i \neq j \neq k$), представляет координатную ξ^i -поверхность;

пересечение двух поверхностей $\xi^i = \text{const}$, $\xi^j = \text{const}$ образует координатную ξ^k -линию, вдоль которой меняется только координата ξ^k . Координатные поверхности таковы, что через каждую точку проходит одна и только одна поверхность каждого семейства; тогда пересечение поверхностей определяет эту точку однозначно.

В силу предположения относительно (4.1.1) допустимо обратное преобразование

$$x_i = x_i(\xi^1, \xi^2, \xi^3), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.1.2)$$

с якобианом $J = I^{-1} = \partial(x_1, x_2, x_3)/\partial(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$.

Пусть i, j, k — орты декартовой системы координат, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки с координатами x_1, x_2, x_3 . Тогда $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{r}(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$. Векторы

$$\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{r} / \partial \xi^i, \quad (4.1.3)$$

касательные к координатным ξ^i -линиям, называют основными координатными векторами. Локальный базис $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ определяет

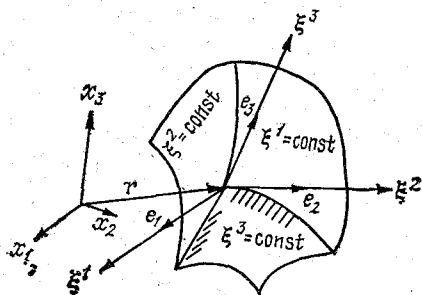


Рис. 4.1. Базис криволинейной системы координат.

направление ξ^i -линий в каждой точке пересечения трех координатных плоскостей (рис. 4.1). Из допустимости преобразования следует, что базисные векторы не компланарны: $\mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3) \neq 0$. В общем случае они не единичны и не ортогональны.

Наряду с основным базисом $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ рассмотрим взаимный $(\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3)$, определяемый соотношениями

$$\mathbf{e}_i \mathbf{e}^k = \delta_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases} \quad (4.1.4)$$

Каждый вектор одного базиса перпендикулярен двум векторам другого, а с третьим вектором, имеющим тот же индекс, составляет острый угол. Для взаимного базисного вектора $\mathbf{e}^i$ первое условие дает: $\mathbf{e}^i = a(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)$, где a — произвольный скаляр, определяется на основании (4.1.4). Имеем: $a = [\mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)]^{-1} = V_0^{-1}$,

$|V_0|$ — объем параллелепипеда, построенного на векторах e_1, e_2, e_3 . Итак,

$$e^i = \frac{e_j \times e_k}{e_i (e_j \times e_k)} = \frac{e_j \times e_k}{V_0}, \quad (4.1.5)$$

где i, j, k составляют циклические перестановки чисел 1, 2, 3.

Аналогично выражаются векторы основного базиса e_i через векторы взаимного e^i

$$e_i = \frac{e^j \times e^k}{e^i (e^j \times e^k)} = \frac{e^j \times e^k}{W_0}, \quad (4.1.6)$$

где $|W_0|$ — объем параллелепипеда, построенного на векторах e^i, e^j, e^k .

Дифференцируя формулы преобразования (4.1.1) по ξ^k , получим:

$$\delta_{ik} = \xi_x^i x_{\xi k} + \xi_y^i y_{\xi k} + \xi_z^i z_{\xi k} = \nabla \xi^i r_{\xi k} = \nabla \xi^i e_k$$

($x = x_1, y = x_2, z = x_3$). Согласно (4.1.4) заключаем, что векторы взаимного базиса являются градиентами преобразования (4.1.1)

$$e^i = \nabla \xi^i. \quad (4.1.7)$$

Векторы $e_i = r_{\xi i}$ и $e^i = \nabla \xi^i$ называют соответственно ковариантными и контравариантными базисными векторами.

Произвольный вектор u можно разложить как по основному (ковариантному) базису e_i , так и по взаимному (контравариантному) — e^i . Пусть U^i — компоненты первого разложения, U_i — второго. Подразумевая здесь и в дальнейшем суммирование в одночленном выражении по повторяющемуся индексу от 1 до 3, имеем:

$$u = U^i e_i; \quad u = U_i e^i. \quad (4.1.8)$$

Согласно (4.1.4)

$$U^i = u e^i; \quad U_i = u e_i. \quad (4.1.9)$$

Компоненты U^i, U_i называют соответственно контравариантными и ковариантными компонентами вектора u . Для определения связи между ними умножим первое из соотношений (4.1.8) на e_i , второе — на e^i :

$$u e_i = U^k (e_i e_k); \quad u e^i = U_k (e^i e^k).$$

Обозначая $e_i e_k = g_{ik}$, $e^i e^k = g^{ik}$, получим с учетом (4.1.9) искомые соотношения:

$$U_i = g_{ik} U^k; \quad U^i = g^{ik} U_k. \quad (4.1.10)$$

Девять величин g_{ik} (соответственно g^{ik}), $i, k = 1, 2, 3$ составляют метрический тензор второго ранга, обозначаемый $G = g_{ik} e^i e^k$, являющийся основной характеристикой пространства E_3 при введении координат с базисом e_i .

Найдем выражение для длины элемента дуги ds в координатах, определяемых преобразованием (4.1.1). Рассмотрим разность

радиусов-векторов dr , проведенных в две бесконечно близкие точки M и M' с координатами соответственно ξ^i и $\xi^i + d\xi^i$. Согласно (4.1.8) имеем

$$ds^2 = |dr|^2 = dr \cdot dr = e_i d\xi^i \cdot e_k d\xi^k = e^i d\xi_i \cdot e^k d\xi_k \quad (4.1.11)$$

или

$$ds^2 = g_{ik} d\xi^i d\xi^k; \quad ds^2 = g^{ik} d\xi_i d\xi_k, \quad (4.1.12)$$

где $d\xi_i$ — ковариантные, $d\xi^i$ — контравариантные компоненты вектора dr , а g_{ik} , g^{ik} — соответственно ко- и контравариантные компоненты метрического тензора G .

Наряду с M' рассмотрим бесконечно близкую к ней точку M'' с координатами $\xi^i + \delta\xi^i$; квадрат расстояния по дуге MM'' : $\delta s^2 = g_{ik} \delta\xi^i \delta\xi^k$. Обозначим $MM'' = dr'$ и найдем косинус угла φ между векторами dr и dr' :

$$\cos \varphi = \frac{dr \cdot dr'}{|dr| \cdot |dr'|} = \frac{e_i d\xi^i \cdot e_k \delta\xi^k}{ds \delta s} = \frac{g_{ik} d\xi^i \delta\xi^k}{ds \delta s}. \quad (4.1.13)$$

Выясним геометрический смысл ковариантных компонентов g_{ik} метрического тензора. Для элемента дуги ξ^1 -линии, на которой $d\xi^2 = d\xi^3 = 0$, из (4.1.12) имеем

$$ds_1 = \sqrt{g_{11}} d\xi^1 \quad (4.1.14)$$

и аналогично

$$ds_2 = \sqrt{g_{22}} d\xi^2; \quad ds_3 = \sqrt{g_{33}} d\xi^3.$$

Для косинуса угла φ_{ik} между ξ^i - и ξ^k -координатными линиями из (4.1.13), (4.1.14) получим

$$\cos \varphi_{ik} = \frac{g_{ik}}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{kk}}}. \quad (4.1.15)$$

Таким образом, $\sqrt{g_{ii}}$ представляет отношение дифференциалов координатных линий к дифференциалам соответствующих криволинейных координат, а g_{ik} пропорциональны косинусам углов между соответствующими координатными линиями. В случае ортогональных координат $g_{ik} = 0$, $i \neq k$.

Найдем связь между ко- и контравариантными компонентами метрического тензора. Для этого разложим взаимные координатные векторы по основным: $e^i = a^{in} e_n$. Умножая разложение скалярно на e^k , согласно (4.1.4) имеем: $g^{ik} = a^{ik}$. Поступая аналогично с разложением основных векторов по взаимным, получим:

$$e^i = g^{ik} e_k; \quad e_i = g_{in} e^n, \quad (4.1.16)$$

откуда

$$e^i e_j = \delta_{ij} = g^{ik} g_{in} e_k e^n = g^{ik} g_{in} \delta_{kn} = g^{ik} g_{ik}.$$

Итак,

$$g_{ik}g^{jk} = \delta_{ij}. \quad (4.1.17)$$

Рассмотрим определители

$$\begin{aligned} \|g_{ij}\| &= \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = g; \\ \|g^{i,j}\| &= \begin{vmatrix} g^{11} & g^{12} & g^{13} \\ g^{21} & g^{22} & g^{23} \\ g^{31} & g^{32} & g^{33} \end{vmatrix} = \hat{g}. \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

Пусть A_{ik} — алгебраические дополнения i -строки определителя $\|g_{ij}\|$; $A_{j,k}$ — алгебраические дополнения его j -строки, $i \neq j$, $i, j, k = 1, 2, 3$. Тогда $g_{ik}A_{ik} = g$, $g_{ik}A_{jk} = 0$. Это и выражает равенство (4.1.17), умноженное на g : $g_{ik}A_{jk} = g\delta_{ij}$. Таким образом, $g^{ik} = A_{ik}g^{-1}$, что можно записать так:

$$g^{im} = g^{-1}(g_{jn}g_{kp} - g_{jp}g_{kn}), \quad (4.1.19)$$

где индексы (i, j, k) , (m, n, p) образуют циклические перестановки чисел 1, 2, 3. Эта формула выражает контравариантные компоненты метрического тензора через его ковариантные компоненты.

Из (4.1.17) также следует, что $g\hat{g} = \|g_{ik}g^{jk}\| = \|\delta_{ij}\| = E$, т. е.

$$\hat{g} = g^{-1}. \quad (4.1.20)$$

Поскольку $g_{ik} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k = \mathbf{r}_{\xi i} \cdot \mathbf{r}_{\xi k}$, то из структуры определителей непосредственно усматривается их связь с якобианами преобразований координат

$$g = J^2; \quad \hat{g} = J^{-2} = J^2. \quad (4.1.21)$$

С учетом (4.1.3), (4.1.7) в случае правой системы векторов имеем $J = |V_0| = \mathbf{e}_i(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)$, $I = |W_0| = \mathbf{e}^i(\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k)$ и соотношения (4.1.5), (4.1.6) перепишутся в виде

$$\mathbf{e}^i = g^{-1/2}(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k); \quad \mathbf{e}_i = g^{1/2}(\mathbf{e}^j \times \mathbf{e}^k). \quad (4.1.22)$$

Эти соотношения устанавливают связь, аналогичную (4.1.19), между компонентами ко- и контравариантных базисных векторов — элементами якобианов J, I , обозначаемых

$$(\mathbf{e}_i)_j = \partial x_j / \partial \xi^i; \quad (\mathbf{e}^i)_j = \partial \xi^i / \partial x_j. \quad (4.1.23)$$

Из (4.1.22) имеем:

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial x_m} = \frac{1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial x_n}{\partial \xi^j} \frac{\partial x_p}{\partial \xi^k} - \frac{\partial x_n}{\partial \xi^k} \frac{\partial x_p}{\partial \xi^j} \right) = \frac{1}{\sqrt{g}} a_{mi}; \quad (4.1.24)$$

$$\frac{\partial x_m}{\partial \xi^i} = \sqrt{g} \left(\frac{\partial \xi^n}{\partial x_j} \frac{\partial \xi^p}{\partial x_k} - \frac{\partial \xi^n}{\partial x_k} \frac{\partial \xi^p}{\partial x_j} \right) = \sqrt{g} b_{mi} \quad (4.1.25)$$

с циклической перестановкой индексов (i, j, k) , (m, n, p) . Величины a_{mi} , b_{mi} являются алгебраическими дополнениями соответствующих элементов определителей — якобианов J , I ; в согласии с (4.1.21) эти соотношения выражают равенство элементов в приравненных определителях

$$\begin{aligned} I &= \|\partial \xi^i / \partial x_j\|^T = \|\partial x_i / \partial \xi^j\|^{-1} = J^{-1}; \\ J &= \|\partial x_i / \partial \xi^j\|^T = \|\partial \xi^i / \partial x_j\|^{-1} = I^{-1}, \end{aligned} \quad (4.1.26)$$

т — означает транспонирование.

Остановимся на частном случае ортогональных криволинейных координат. Основной и взаимный базисы здесь совпадают: $e_i = e^i$, $i = 1, 2, 3$. Условие ортогональности координат можно записать в любой из двух эквивалентных форм:

$$\begin{aligned} e_i e_k &= g_{ik} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^k} = \frac{\partial x_1}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_1}{\partial \xi^k} + \frac{\partial x_2}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_2}{\partial \xi^k} + \frac{\partial x_3}{\partial \xi^i} \frac{\partial x_3}{\partial \xi^k} = 0; \\ e^i e^k &= g^{ik} = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_1} \frac{\partial \xi^k}{\partial x_1} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x_2} \frac{\partial \xi^k}{\partial x_2} + \frac{\partial \xi^i}{\partial x_3} \frac{\partial \xi^k}{\partial x_3} = 0, \end{aligned} \quad (4.1.27)$$

$i \neq k$. Из $g_{ik} = 0$ на основании (4.1.10): $U_i = g_{ii} U^i$, $U^i = g^{ii} U_i$, т. е.

$$\begin{aligned} g_{ii} &= 1/g^{ii}; \quad g = g_{11}g_{22}g_{33}; \\ ds^2 &= g_{11}(d\xi^1)^2 + g_{22}(d\xi^2)^2 + g_{33}(d\xi^3)^2; \end{aligned} \quad (4.1.28)$$

$$g_{ii} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} = \left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi^i} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi^i} \right)^2. \quad (4.1.29)$$

Коэффициенты

$$H_i = \sqrt{g_{ii}} = |e_i|,$$

выражающие отношение приращения дуги ξ^i -линии к приращению ξ^i -координаты, носят название коэффициентов Ламе.

Пусть e_i^0 — единичные орты базиса, так что $e^i = \nabla \xi^i = h_i e_i^0$, $e_i = \partial \mathbf{r} / \partial \xi^i = H_i e_i^0$. Из (4.1.4) $e^i e_i = 1$, $e^i = e_i^0 H_i^{-1}$, $h_i = H_i^{-1}$. Величины h_i называют дифференциальными параметрами первого порядка.

Например, для цилиндрических координат $\xi^1 = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\xi^2 = \varphi = \arctg(y/x)$, $\xi^3 = z$; $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$; $\mathbf{r} = i\rho \cos \varphi + j\rho \sin \varphi + kz$. Основные координатные векторы $e_1 = \partial \mathbf{r} / \partial \rho = i \cos \varphi + j \sin \varphi$, $e_2 = \partial \mathbf{r} / \partial \varphi = \rho(-i \sin \varphi + j \cos \varphi)$, $e_3 = \partial \mathbf{r} / \partial z = k$.

Легко видеть, что векторы ортогональны: $|e_1| = |e_3| = 1$, $|e_2| = \rho$, $e_1(e_2 \times e_3) = \rho$, $e^1 = \rho^{-1}(e_2 \times e_3) = e_1$ и т. д.; $g_{11} = 1$, $g_{22} = \rho^2$, $g_{33} = 1$, т. е. коэффициенты Ламе $H_1 = H_3 = 1$, $H_2 = \rho$.

4.1.2. Операции дифференцирования и интегрирования в криволинейных координатах. 4.1.2.1. Единичный касательный

вектор; единичная нормаль. Пусть $\tau(\xi^i)$ — единичный касательный вектор к ξ^i -линии; согласно (4.1.3)

$$\tau(\xi^i) = \frac{\mathbf{e}_i}{|\mathbf{e}_i|} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^i} \right|^{-1}. \quad (4.1.30)$$

Из (4.1.14): $|\partial \mathbf{r} / \partial \xi^i| = \sqrt{g_{ii}}$, и для составляющих этого вектора имеем

$$(\tau(\xi^i))_j = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial x_i}{\partial \xi^j}. \quad (4.1.31)$$

Напишем выражение для единичной нормали $\mathbf{n}(\xi^i)$ к ξ^i -поверхности, исходя из ортогональности ее к векторам $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k$:

$$\mathbf{n}(\xi^i) = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^j} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^k} \right) \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^j} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi^k} \right|^{-1}. \quad (4.1.32)$$

Согласно (4.1.5) отсюда имеем: $\mathbf{n}(\xi^i) = \mathbf{e}^i |\mathbf{e}^i|^{-1} = \mathbf{e}^i / \sqrt{g^{ii}}$ и компоненты нормали

$$(\mathbf{n}(\xi^i))_m = (\mathbf{e}^i)_m / \sqrt{g^{ii}} = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_m}. \quad (4.1.33)$$

В вычислительных целях удобнее ковариантная метрика; из (4.1.19) найдем $g^{ii} = g^{-1}(g_{jj}g_{kk} - g_{jk}^2)$ и с учетом (4.1.24)

$$(\mathbf{n}(\xi^i))_m = \frac{a_{mi}}{(g_{jj}g_{kk} - g_{jk}^2)^{1/2}}. \quad (4.1.34)$$

4.1.2.2. Ковариантная производная вектора. Символы Кристоффеля. Воспользуемся разложением (4.1.8) вектора $\mathbf{u}$ по его контравариантным составляющим U^i : $\mathbf{u} = U^i \mathbf{e}_i$. Производные от векторов основного базиса $\mathbf{e}_i$ по ξ^j записывают в виде разложения

$$\partial \mathbf{e}_i / \partial \xi^j = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k, \quad (4.1.35)$$

коэффициенты которого Γ_{ij}^k называются символами Кристоффеля II рода. Используя (4.1.35), имеем:

$$\partial \mathbf{u} / \partial \xi^j = (\partial U^i / \partial \xi^j + \Gamma_{kj}^i U^k) \mathbf{e}_i. \quad (4.1.36)$$

Выражение

$$\nabla_j U^i = \partial U^i / \partial \xi^j + \Gamma_{kj}^i U^k \quad (4.1.37)$$

называют ковариантной производной по ξ^j контравариантного компонента U^i вектора $\mathbf{u}$. Аналогично определяется ковариантная производная ковариантного компонента при использовании разложения $\mathbf{u}$ по U_i согласно (4.1.8).

Для дивергенции $\mathbf{u}$ имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla_i U^i = \partial U^i / \partial \xi^i + \Gamma_{ji}^i U^j. \quad (4.1.38)$$

Чтобы упростить выражение, умножим (4.1.35) скалярно на e_m :

$$\frac{\partial e_i}{\partial \xi^j} e_m = g_{mk} \Gamma_{ij}^k. \quad (4.1.39)$$

Правую часть равенства называют символом Кристоффеля I рода и обозначают $\Gamma_{m,ij}$;

$$\Gamma_{m,ij} = g_{mk} \Gamma_{ij}^k, \quad \Gamma_{ij}^k = g^{mk} \Gamma_{m,ij}. \quad (4.1.40)$$

Второе равенство следует из (4.1.17). Продифференцируем равенство $e_i e_k = g_{ik}$ по ξ^i :

$$e_i \partial e_k / \partial \xi^i + e_k \partial e_j / \partial \xi^i = \partial g_{ik} / \partial \xi^i = g_{jm} \Gamma_{ki}^m + g_{km} \Gamma_{ji}^m = \Gamma_{j,ki} + \Gamma_{k,ji}. \quad (4.1.41)$$

Продифференцируем также определитель (4.1.18) с учетом того, что производная определителя по его элементу равна алгебраическому дополнению этого элемента. Используя (4.1.19), (4.1.40), (4.1.41), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \xi^i} &= \frac{\partial g}{\partial g_{jk}} \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^i} = g g^{jk} \frac{\partial g_{jk}}{\partial \xi^i} = \\ &= g g^{jk} (\Gamma_{j,ki} + \Gamma_{k,ji}) = g (\Gamma_{ki}^k + \Gamma_{ji}^j) = 2g \Gamma_{ji}^j. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\Gamma_{ji}^j = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial \xi^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \sqrt{g}. \quad (4.1.42)$$

4.1.2.3. Дивергенция. Выражение для дивергенции (4.1.38) с учетом (4.1.42) имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g} U^i), \quad (4.1.43)$$

$U^i = u e^i$. Согласно (4.1.10) дивергенцию вектора $\mathbf{u}$ можно выразить и через его ковариантные компоненты:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (g^{ik} U_k \sqrt{g}). \quad (4.1.44)$$

Напишем выражение для $\operatorname{div} \mathbf{u}$ в криволинейных ортогональных координатах. Удобно воспользоваться физическими компонентами U_i^* вектора $\mathbf{u}$, совпадающими с ним по размерности и определяемыми как

$$U_i^* = U_i / H_i = U^i H_i.$$

Тогда с учетом того, что $g = g_{11} g_{22} g_{33} = (H_1 H_2 H_3)^2$, имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi^1} (U_1^* H_2 H_3) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} (U_2^* H_1 H_3) + \frac{\partial}{\partial \xi^3} (U_3^* H_1 H_2) \right].$$

В цилиндрических координатах, например, согласно (4.1.29)

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (U_1^* \rho) + \frac{\partial}{\partial \varphi} U_2^* + \rho \frac{\partial}{\partial z} U_3^* \right].$$

Покажем, что

$$(\sqrt{g} \mathbf{e}^i)_{;i} = 0. \quad (4.1.45)$$

Это часто используемое равенство позволяет переходить от консервативной (дивергентной) формы уравнений к неконсервативной [140]. Для доказательства установим равенство нулю производной от j -компонента этого выражения, $j = 1, 2, 3$:

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} (J (\mathbf{e}^i)_j) = \frac{\partial}{\partial \xi^i} a_{ji} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(I^{-1} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \right) = -I^{-1} \left(I^{-1} \frac{\partial I}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \right).$$

Преобразуем первое слагаемое, полагая, например, $j = 1$:

$$\begin{aligned} I^{-1} \frac{\partial I}{\partial x_1} &= J \left\{ \frac{\partial (\partial \xi^1 / \partial x_1, \xi^2, \xi^3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} + \frac{\partial (\xi^1, \partial \xi^2 / \partial x_1, \xi^3)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} + \frac{\partial (\xi^1, \xi^2, \partial \xi^3 / \partial x_1)}{\partial (x_1, x_2, x_3)} \right\} = \\ &= J \begin{vmatrix} \xi_{x_1 x_1}^1 & \xi_{x_2 x_1}^1 & \xi_{x_3 x_1}^1 \\ \xi_{x_1}^2 & \xi_{x_2}^2 & \xi_{x_3}^2 \\ \xi_{x_1}^3 & \xi_{x_2}^3 & \xi_{x_3}^3 \end{vmatrix} + \dots = J \xi_{x_1 x_1}^1 \begin{vmatrix} \xi_{x_2}^2 & \xi_{x_3}^2 \\ \xi_{x_2}^3 & \xi_{x_3}^3 \end{vmatrix} - J \xi_{x_2 x_1}^1 \begin{vmatrix} \xi_{x_1}^2 & \xi_{x_3}^2 \\ \xi_{x_1}^3 & \xi_{x_3}^3 \end{vmatrix} + \\ &+ J \xi_{x_3 x_1}^1 \begin{vmatrix} \xi_{x_1}^2 & \xi_{x_2}^2 \\ \xi_{x_1}^3 & \xi_{x_2}^3 \end{vmatrix} + \dots = (\text{согласно (4.1.25)}) = \\ &= \xi_{x_1 x_1}^1 (x_1)_{;1} + \xi_{x_2 x_1}^1 (x_2)_{;1} + \xi_{x_3 x_1}^1 (x_3)_{;1} + \dots = \\ &= \left[(x_1)_{;1} \frac{\partial}{\partial x_1} + (x_2)_{;1} \frac{\partial}{\partial x_2} + (x_3)_{;1} \frac{\partial}{\partial x_3} \right] \xi_{x_1}^1 + \dots = \frac{\partial}{\partial \xi^1} (\xi_{x_1}^1) + \dots = \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi^1} \left(\frac{\partial \xi^1}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi^2}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^3} \left(\frac{\partial \xi^3}{\partial x_1} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I^{-1} \frac{\partial I}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j}. \quad (4.1.45')$$

На основании (4.1.45) запишем операцию дивергенции в неконсервативной форме

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \nabla = \mathbf{e}^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}. \quad (4.1.46)$$

4.1.2.4. Градиент. Градиент скаляра $\Phi(\xi^1, \xi^2, \xi^3)$ определяется как вектор с ковариантными компонентами $U_i = \partial \Phi / \partial \xi^i$. Используя оператор ∇ (4.1.46), согласно (4.1.8) имеем:

$$\nabla \Phi = \mathbf{e}^i \partial \Phi / \partial \xi^i. \quad (4.1.47)$$

С учетом (4.1.45) дивергентная форма градиента —

$$\nabla \Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g} \mathbf{e}^i \Phi). \quad (4.1.48)$$

В случае криволинейных ортогональных координат с ортами $\mathbf{e}_i^0$ физические компоненты вектора $\nabla\Phi$: $U_i^* = H_i^{-1} \partial\Phi/\partial\xi^i$ и

$$\nabla\Phi = \frac{1}{H_1} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^1} \mathbf{e}_1^0 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^2} \mathbf{e}_2^0 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^3} \mathbf{e}_3^0.$$

В цилиндрической системе координат, например, согласно (4.1.29)

$$\nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \mathbf{e}_1^0 + \frac{1}{\rho} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \mathbf{e}_2^0 + \frac{\partial\Phi}{\partial z} \mathbf{e}_3^0.$$

4.1.2.5. Лапласиан. Для лапласиана скалярной функции Φ имеем $\nabla^2\Phi = \operatorname{div}(\operatorname{grad}\Phi)$ и согласно (4.1.43), (4.1.47)

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial\xi^i} \left[\sqrt{g} \mathbf{e}^i \left(\mathbf{e}^k \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^k} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial\xi^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^k} \right). \quad (4.1.49)$$

Оператор этого выражения называют оператором Лапласа — Бельтрами. Он не зависит от выбора системы координат и в декартовых координатах дает оператор Лапласа. Для $\nabla \cdot (A\nabla)$, $A = A(\xi^i)$ имеем

$$\nabla(A\nabla\Phi) = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial\xi^i} \left(A \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^k} \right). \quad (4.1.50)$$

В случае ортогональных координат: $g^{ii} = 1/g_{ii} = H_i^{-2}$ и

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial\xi^i} \left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i^2} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^i} \right). \quad (4.1.50')$$

В частности, в цилиндрических координатах

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial\Phi}{\partial\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}.$$

4.1.2.6. Производная по направлению. Обратимся к записи производных по характерному направлению. Производная по нормали к ξ^i -поверхности

$$\partial\Phi(\xi^i)/\partial n = \mathbf{n}(\xi^i) \cdot \nabla\Phi. \quad (4.1.51)$$

На основании (4.1.32), (4.1.47)

$$\frac{\partial\Phi(\xi^i)}{\partial n} = \frac{\mathbf{e}^i}{\sqrt{g^{ii}}} \cdot \mathbf{e}^k \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^k} = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} g^{ik} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^k}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.1.52)$$

Для производной по касательной к ξ^i -линии имеем

$$\partial\Phi(\xi^i)/\partial\tau = \boldsymbol{\tau}(\xi^i) \cdot \nabla\Phi \quad (4.1.53)$$

и в силу (4.1.30), (4.1.4), (4.1.47)

$$\frac{\partial\Phi(\xi^i)}{\partial\tau} = \frac{\mathbf{e}_i}{\sqrt{g_{ii}}} \cdot \mathbf{e}^k \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^k} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi^i}. \quad (4.1.54)$$

4.1.2.7. Интегральные операции. Элемент площади $d\Omega(\xi^i)$ на ξ^i -поверхности имеет вид

$$d\Omega(\xi^i) = |\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k| d\xi^j d\xi^k.$$

В силу тождества

$$(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_j)(\mathbf{e}_k \mathbf{e}_k) - (\mathbf{e}_j \mathbf{e}_k)^2$$

получим

$$d\Omega(\xi^i) = [(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)(\mathbf{e}_j \times \mathbf{e}_k)]^{1/2} d\xi^j d\xi^k = (g_{jj}g_{kk} - g_{jk}^2)^{1/2} d\xi^j d\xi^k. \quad (4.1.55)$$

Радикал представляет двумерный, отвечающий (4.1.18), якобиан, составленный из ковариантных компонентов метрического тензора на ξ^i -поверхности.

Объем параллелепипеда $|V_0|$, построенного на базисных векторах, равен их смешанному произведению: $|V_0| = \sqrt{g} = J = \mathbf{e}_1(\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)$. Элемент объема

$$dV = J d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3. \quad (4.1.56)$$

Множители перед дифференциалами в (4.1.55)–(4.1.56) являются коэффициентами искажения соответствующих метрических элементов пространства криволинейных координат при преобразовании их в элементы пространства декартовых координат.

Запишем формулу Гаусса—Остроградского, связывающую тройной интеграл по объему V от дивергенции поля $\mathbf{u}$ с потоком поля через замкнутую поверхность Ω , ограничивающую этот объем:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV = \int_{\Omega} \mathbf{n} \mathbf{u} d\Omega. \quad (4.1.57)$$

При подстановке полученных соотношений эта формула используется в принятой системе координат. Отсюда следует ряд употребительных модификаций. Так, при $\mathbf{u} = \Phi \mathbf{c}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор, имеем: $\operatorname{div} \mathbf{u} = \mathbf{c} \nabla \Phi$ и

$$\int_V \nabla \Phi dV = \int_{\Omega} \mathbf{n} \Phi d\Omega.$$

Положим $\mathbf{u} = \Phi \nabla \psi$, тогда $\operatorname{div} \mathbf{u} = \Phi \nabla^2 \psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \psi$, $\mathbf{n} \Phi \cdot \nabla \psi = \Phi \partial \psi / \partial n$ и из (4.1.57) следует одна из формул Грина

$$\int_V (\Phi \nabla^2 \psi + \nabla \Phi \cdot \nabla \psi) dV = \int_{\Omega} \Phi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\Omega.$$

Аналогично могут быть получены и другие формулы, а также соотношения, связывающие характеристики поля по поверхности и контуру на основе формулы Стокса.

4.1.3. Двумерный случай. Рассмотрим основные соотношения и вид операций в случае плоских криволинейных координат. Пусть декартовы координаты $x_1 = x$, $x_2 = y$ связаны с криволинейными координатами $\xi^1 = \xi$, $\xi^2 = \eta$ соотношениями

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \quad (4.1.58)$$

с якобианом $J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$, $0 \neq J < \infty$; таким образом, допустимо обратное преобразование с якобианом $I = J^{-1}$. Рассматриваемый случай следует из общего, если предположить постоянство координатного вектора, касательного в направлении $\xi^3 = x_3 = z$: $\partial \mathbf{r} / \partial \xi^3 = \mathbf{e}_3 = \mathbf{k}$. Два других основных вектора, касательных к ξ , η -линиям:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_\xi = x_\xi \mathbf{i} + y_\xi \mathbf{j}; \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_\eta = x_\eta \mathbf{i} + y_\eta \mathbf{j}. \quad (4.1.59)$$

Для ковариантных компонентов, $g_{ik} = \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k$, метрического тензора имеем:

$$\begin{aligned} g_{11} &= x_\xi^2 + y_\xi^2; & g_{22} &= x_\eta^2 + y_\eta^2; & g_{33} &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1; \\ g_{12} &= g_{21} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta; & g_{13} &= g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.60)$$

Из (4.1.18), (4.1.21) найдем:

$$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = J^2, \quad (4.1.61)$$

и согласно (4.1.7), (4.1.22) контравариантный базис выражается через ковариантный следующим образом:

$$\mathbf{e}^1 = \nabla \xi = \frac{1}{\sqrt{g}} (iy_\eta - jx_\eta); \quad \mathbf{e}^2 = \nabla \eta = \frac{1}{\sqrt{g}} (-iy_\xi + jx_\xi), \quad \mathbf{e}^3 = \mathbf{k}. \quad (4.1.62)$$

Отсюда [либо из (4.1.19)] определим контравариантные компоненты метрического тензора $g^{ik} = \mathbf{e}^i \mathbf{e}^k$:

$$\begin{aligned} g^{11} &= g^{-1}g_{22}; & g^{12} &= g^{21} = -g^{-1}g_{12}; & g^{22} &= g^{-1}g_{11}; & g^{33} &= 1; \\ g^{13} &= g^{31} = g^{23} = g^{32} = 0. \end{aligned} \quad (4.1.63)$$

Из (4.1.62) также следует двумерный аналог (4.1.24)–(4.1.25)–соотношения между компонентами базисов:

$$\xi_x = J^{-1}y_\eta; \quad \xi_y = -J^{-1}x_\eta; \quad \eta_x = -J^{-1}y_\xi; \quad \eta_y = J^{-1}x_\xi. \quad (4.1.64)$$

Согласно (4.1.12) в двумерном пространстве E_2 метрика устанавливается формулой

$$ds^2 = g_{11}(d\xi)^2 + 2g_{12}d\xi d\eta + g_{22}(d\eta)^2. \quad (4.1.65)$$

Запишем основные дифференциальные операции. Для дивергенции вектора $\mathbf{u} = (u, v)$ на основании (4.1.43), (4.1.62) имеем

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi^i} (\sqrt{g} \mathbf{u} \cdot \mathbf{e}^i) = \frac{1}{\sqrt{g}} \{ (uy_\eta - vx_\eta)_\xi + (-uy_\xi + vx_\xi)_\eta \}. \quad (4.1.66)$$

Отсюда [либо из (4.1.46)] следует неконсервативная форма этой операции

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{\sqrt{g}} (y_\eta u_\xi - x_\eta v_\xi - y_\xi u_\eta + x_\xi v_\eta). \quad (4.1.67)$$

Для градиента согласно (4.1.48), (4.4.62) имеем

$$\begin{aligned}\nabla\Phi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial\xi} (\sqrt{g} e^1\Phi) + \frac{\partial}{\partial\eta} (\sqrt{g} e^2\Phi) \right] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}} \{ [(\Phi y_\eta)_\xi - (\Phi y_\xi)_\eta] i + [(-\Phi x_\eta)_\xi + (\Phi x_\xi)_\eta] j \}. \quad (4.1.68)\end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\Phi_x &= \frac{1}{\sqrt{g}} [(\Phi y_\eta)_\xi - (\Phi y_\xi)_\eta]; \\ \Phi_y &= \frac{1}{\sqrt{g}} [(-\Phi x_\eta)_\xi - (\Phi x_\xi)_\eta].\end{aligned} \quad (4.1.69)$$

Запишем выражение для лапласиана (4.1.49) в двумерном случае:

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \frac{\partial}{\partial\xi} \left[\sqrt{g} \left(g^{11} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + g^{12} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial\eta} \left[\sqrt{g} \left(g^{21} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} + g^{22} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta} \right) \right] \right\} \quad (4.1.70)\end{aligned}$$

или с учетом (4.1.63)

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{\sqrt{g}} \left\{ \left[\frac{1}{\sqrt{g}} (g_{22}\Phi_\xi - g_{12}\Phi_\eta) \right]_\xi + \left[\frac{1}{\sqrt{g}} (-g_{21}\Phi_\xi + g_{11}\Phi_\eta) \right]_\eta \right\}. \quad (4.1.71)$$

Для производных по нормали согласно (4.1.52), (4.1.63) имеем

$$\frac{\partial\Phi^{(\xi)}}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{g^{11}}} (g^{11}\Phi_\xi + g^{12}\Phi_\eta) = \frac{1}{\sqrt{gg_{22}}} (g_{22}\Phi_\xi - g_{12}\Phi_\eta); \quad (4.1.72)$$

$$\frac{\partial\Phi^{(\eta)}}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{g^{22}}} (g^{12}\Phi_\xi + g^{22}\Phi_\eta) = \frac{1}{\sqrt{gg_{11}}} (-g_{12}\Phi_\xi + g_{11}\Phi_\eta). \quad (4.1.73)$$

Тангенциальные производные согласно (4.1.54)

$$\frac{\partial\Phi^{(\xi)}}{\partial\tau} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\Phi}{\partial\xi}; \quad \frac{\partial\Phi^{(\eta)}}{\partial\tau} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial\Phi}{\partial\eta}. \quad (4.1.74)$$

4.1.4. Нестационарные преобразования. В дальнейшем мы будем рассматривать нестационарные преобразования вида

$$\xi^i = \xi^i(x_i, t) \quad \tau = t, \quad (4.1.75)$$

$i = 1, 2, 3$, когда временная координата выделена. Якобиан такого преобразования, равный якобиану I преобразования (4.1.1), предполагается не нулевым и ограниченным, т. е. допустимо обратное преобразование

$$x_i = x_i(\xi^i, \tau), \quad t = \tau \quad (4.1.76)$$

с якобианом $J = I^{-1}$. Координатный базис при этом подвижен и зависит от времени: $\partial\tau/\partial\xi^i = e_i(\tau)$.

Запишем производную по времени от вектор-функции $\mathbf{u}(x_i, t)$ в новых переменных:

$$\left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} \right|_{\xi^1, \xi^2, \xi^3} = \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{x_1, x_2, x_3} + \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right|_{x_j, x_k, t} \left. \frac{\partial x_i}{\partial \tau} \right|_{\xi^1, \xi^2, \xi^3}. \quad (4.1.77)$$

Индексы при производных обозначают фиксированные переменные, а пространственные компоненты $\mathbf{u}_{x_i}$ даются формулой (4.1.48).

Пусть $\mathbf{u} = (u, v, w)$ — вектор скорости. С учетом (4.1.77)

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} - \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \tau} + u_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}$$

или

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \left(u_i - \frac{\partial x_i}{\partial \tau} \right) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i}. \quad (4.1.78)$$

Имеем

$$\mathbf{u}_{x_i} = \mathbf{u}_\xi \cdot \xi_{x_i} + \mathbf{u}_\eta \cdot \eta_{x_i} + \mathbf{u}_\theta \cdot \theta_{x_i}. \quad (4.1.79)$$

Переходя в элементах метрики к контравариантному базису согласно (4.1.24), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} &= J^{-1} \left(\mathbf{u}_\xi \begin{vmatrix} y_\eta & y_\theta \\ z_\eta & z_\theta \end{vmatrix} - \mathbf{u}_\eta \begin{vmatrix} y_\xi & y_\theta \\ z_\xi & z_\theta \end{vmatrix} + \mathbf{u}_\theta \begin{vmatrix} y_\xi & y_\eta \\ z_\xi & z_\eta \end{vmatrix} \right) = \\ &= J^{-1} \begin{vmatrix} \mathbf{u}_\xi & \mathbf{u}_\eta & \mathbf{u}_\theta \\ y_\xi & y_\eta & y_\theta \\ z_\xi & z_\eta & z_\theta \end{vmatrix} = J^{-1} \frac{\partial (\mathbf{u}, y, z)}{\partial (\xi, \eta, \theta)}. \end{aligned} \quad (4.1.80)$$

Аналогично

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = -J^{-1} \frac{\partial (\mathbf{u}, x, z)}{\partial (\xi, \eta, \theta)}; \quad \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = J^{-1} \frac{\partial (\mathbf{u}, x, y)}{\partial (\xi, \eta, \theta)}. \quad (4.1.81)$$

Подставляя найденные выражения для $\mathbf{u}_{x_i}$ в (4.1.78), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + J^{-1} \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi} \left[(u - x_\tau) \frac{\partial (y, z)}{\partial (\eta, \theta)} - (v - y_\tau) \frac{\partial (x, z)}{\partial (\eta, \theta)} + \right. \right. \\ &+ (w - z_\tau) \frac{\partial (x, y)}{\partial (\eta, \theta)} \left. \right] + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \eta} \left[- (u - x_\tau) \frac{\partial (y, z)}{\partial (\xi, \theta)} + (v - y_\tau) \frac{\partial (x, z)}{\partial (\xi, \theta)} - \right. \\ &- (w - z_\tau) \frac{\partial (x, y)}{\partial (\xi, \theta)} \left. \right] + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} \left[(u - x_\tau) \frac{\partial (y, z)}{\partial (\xi, \eta)} - \right. \\ &- (v - y_\tau) \frac{\partial (x, z)}{\partial (\xi, \eta)} + (w - z_\tau) \frac{\partial (x, y)}{\partial (\xi, \eta)} \left. \right] \left. \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.82)$$

С другой стороны,

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial t}, \quad (4.1.83)$$

где $d\xi^i/dt = U^i$ — контравариантные компоненты скорости:

$$\begin{aligned} U &= U^1 = \xi_t + u\xi_x + v\xi_y + w\xi_z; \\ V &= U^2 = \eta_t + u\eta_x + v\eta_y + w\eta_z; \\ W &= U^3 = \theta_t + u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z. \end{aligned} \quad (4.1.84)$$

Сравнивая коэффициенты при производных $\partial u/\partial \xi^i$ в (4.1.82), (4.1.83) и замечая, что согласно (4.1.24): $\partial(y, z)/\partial(\eta, \theta) = a_{11}$, $-\partial(x, z)/\partial(\eta, \theta) = a_{21}$ и т. д., имеем:

$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u - x_\tau \\ v - y_\tau \\ w - z_\tau \end{pmatrix} \quad (4.1.85)$$

и

$$\begin{pmatrix} \xi_t \\ \eta_t \\ \theta_t \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_\tau \\ y_\tau \\ z_\tau \end{pmatrix}. \quad (4.1.86)$$

Остановимся на двумерном случае, когда $z_\theta = 1$, $x_\theta = y_\theta = z_\xi = z_\eta = 0$. Уравнение (4.1.78) и выражения для производных (4.1.80), (4.1.81) имеют вид

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial \tau} + (u - x_\tau) \frac{\partial u}{\partial x} + (v - y_\tau) \frac{\partial u}{\partial y}; \quad (4.1.87)$$

$$u_x = J^{-1}(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi); \quad u_y = -J^{-1}(u_\xi x_\eta - u_\eta x_\xi). \quad (4.1.88)$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial \tau} + J^{-1} \left\{ [(u - x_\tau) y_\eta - (v - y_\tau) x_\eta] \frac{\partial u}{\partial \xi} + \right. \\ &\quad \left. + [-(u - x_\tau) y_\xi + (v - y_\tau) x_\xi] \frac{\partial u}{\partial \eta} \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.89)$$

Для контравариантных компонентов скорости

$$\begin{aligned} U &= \xi_t + u\xi_x + v\xi_y; \\ V &= \eta_t + u\eta_x + v\eta_y \end{aligned} \quad (4.1.90)$$

сравнение коэффициентов при $u_{\xi t}$ в (4.1.89) и двумерном аналоге (4.1.83) дает

$$\begin{aligned} U &= J^{-1}[(u - x_\tau) y_\eta - (v - y_\tau) x_\eta]; \\ V &= J^{-1}[-(u - x_\tau) y_\xi - (v - y_\tau) x_\xi] \end{aligned} \quad (4.1.91)$$

и

$$\begin{aligned} \xi_t &= J^{-1}(-x_\tau y_\eta + y_\tau x_\eta); \\ \eta_t &= J^{-1}(x_\tau y_\xi - y_\tau x_\xi). \end{aligned} \quad (4.1.92)$$

4.2. Постановка задач в криволинейных координатах

4.2.1. Краевая задача для уравнений мелкой воды в произвольной области с движущейся границей. Рассмотрим уравнения (1.2.1), заданные в области $\Omega(t)$ с границей $\partial\Omega(t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u} + A \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{u} + B \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{u} = \Phi, \quad (4.2.1)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ H \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} u & 0 & g \\ 0 & u & 0 \\ H & 0 & u \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & g \\ 0 & H & v \end{pmatrix}; \quad \Phi = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На непроницаемой части контура $\partial\Omega_1$ и проницаемой $\partial\Omega_2$ примем

$$\mathbf{u}_n|_{\partial\Omega_1} = 0; \quad \psi(\mathbf{u}_n, \xi)|_{\partial\Omega_2} = \hat{\psi}(t). \quad (4.2.2)$$

Введем криволинейные координаты, согласованные с конфигурацией Ω :

$$\xi = \xi(x, y, t); \quad \eta = \eta(x, y, t), \quad \tau = t, \quad (4.2.3)$$

с якобианом $I = \partial(\xi, \eta)/\partial(x, y)$, $0 \neq I < \infty$. Таким образом, допустимо обратное преобразование с якобианом $J = I^{-1}$.

Согласно (4.1.89), (4.1.66) для уравнений движения имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} + U \frac{\partial u}{\partial \xi} + V \frac{\partial u}{\partial \eta} + gJ^{-1} \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right) &= \Phi_1; \\ \frac{\partial v}{\partial \tau} + U \frac{\partial v}{\partial \xi} + V \frac{\partial v}{\partial \eta} + gJ^{-1} \left(\frac{\partial H}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} - \frac{\partial H}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) &= \Phi_2, \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

где контравариантные составляющие скорости

$$\begin{aligned} U &= J^{-1} [(u - x_\tau) y_\eta - (v - y_\tau) x_\eta]; \\ V &= J^{-1} [-(u - x_\tau) y_\xi - (v - y_\tau) x_\xi]. \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

Аналогичные преобразования приводят к недивергентной форме уравнения неразрывности

$$H_\tau + UH_\xi + VH_\eta + HJ^{-1}(u_\xi y_\eta - u_\eta y_\xi - v_\xi x_\eta + v_\eta x_\xi) = 0. \quad (4.2.6)$$

Чтобы привести его к дивергентному виду, воспользуемся непосредственно проверяемым тождеством

$$J_\tau + [-x_\tau y_\eta + x_\eta y_\tau]_\xi + [x_\tau y_\xi - y_\tau x_\xi]_\eta = 0 \quad (4.2.7)$$

или

$$J_\tau + (JU)_\xi + (JV)_\eta = u_\xi y_\eta - v_\xi x_\eta - u_\eta y_\xi + v_\eta x_\xi.$$

Умножая на H и складывая с (4.2.6), умноженным на J , получим уравнение неразрывности в дивергентном виде:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} JH + \frac{\partial}{\partial \xi} JHU + \frac{\partial}{\partial \eta} JHV = 0. \quad (4.2.8)$$

Для преобразования $\tau = t$, $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ формула (4.1.43) дает

$$\operatorname{div} (H\mathbf{v}) = J^{-1} \partial (J H U^i) / \partial \xi^i,$$

$\mathbf{v} = (u, v)$, откуда сразу следует (4.2.8). Приведем также вид уравнения неразрывности для ковариантных составляющих вектора $\mathbf{v}$: $U_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$, вытекающий из (4.1.44):

$$J H_{\tau} + [J^{-1} H (g_{22} U_1 - g_{12} U_2)]_{\xi} + [J^{-1} H (g_{11} U_2 - g_{12} U_1)]_{\eta} = 0. \quad (4.2.8')$$

Введем обозначения

$$J^{-1} y_{\eta} = s_1; \quad -J^{-1} x_{\eta} = s_2; \quad -J^{-1} y_{\xi} = r_1; \quad J^{-1} x_{\xi} = r_2 \quad (4.2.9)$$

и запишем преобразованную систему (4.2.4), (4.2.6) в векторном виде:

$$L(\mathbf{u}) = \partial \mathbf{u} / \partial \tau + A \partial \mathbf{u} / \partial \xi + B \partial \mathbf{u} / \partial \eta = \Phi, \quad (4.2.10)$$

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ H \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} U & 0 & g s_1 \\ 0 & U & g s_2 \\ H s_1 & H s_2 & U \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} V & 0 & g r_1 \\ 0 & V & g r_2 \\ H r_1 & H r_2 & V \end{pmatrix}.$$

Обратимся к формулировке граничных условий. Пусть координатные линии $\xi_0 = \text{const}$, $\eta_0 = \text{const}$ представляют уравнения соответствующих границ $\partial \Omega^*$ области Ω^* , задаваемой преобразованием (4.2.3). В точках неподвижной границы $\partial \Omega_1^*$, являющейся отображением $\partial \Omega_1$, скорость частиц жидкости перпендикулярна нормали к границе и на линиях $\xi_0^i(x, y) = \text{const}$ для вектора скорости $\mathbf{v} = (u, v)$ имеем: $\nabla \xi^i \cdot \mathbf{v} = 0$, т. е.

$$\xi_x u + \xi_y v = 0; \quad \eta_x u + \eta_y v = 0 \quad (4.2.11)$$

соответственно на $\xi_0(x, y) = \text{const}$, $\eta_0(x, y) = \text{const}$. Эти условия выражают равенство нулю контравариантных составляющих скорости U, V в (4.1.85), когда $x_{\tau} = y_{\tau} = 0$.

В случае движущейся границы $\partial \Omega_2^*$, являющейся отображением $\partial \Omega_2^*$ на линиях $\xi^i(x, y, t) = \text{const}$, имеем: $\xi_t^i + \nabla \xi^i \cdot \mathbf{v} = 0$, т. е.

$$\xi_t + u \xi_x + v \xi_y = 0; \quad \eta_t + u \eta_x + v \eta_y = 0 \quad (4.2.12)$$

соответственно на $\xi(x, y, t) = \text{const}$, $\eta(x, y, t) = \text{const}$. Эти условия выражают равенство нулю контравариантных составляющих скорости U, V (4.1.84), когда $x_{\tau} \neq 0$, $y_{\tau} \neq 0$. Таким образом, в каждом случае граничное условие для скорости имеет вид

$$\begin{aligned} U &= 0 \quad \text{на} \quad \xi = \text{const}; \\ V &= 0 \quad \text{на} \quad \eta = \text{const}, \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

а факт движения границы учитывается нестационарностью координат в выражении (4.2.5) для U, V .

Дополнительное граничное условие (4.2.2) в точках втока задается, исходя из требований корректности, обсуждавшихся в разделе 3.2.

Задание некоторых начальных условий

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}^0 \quad (4.2.14)$$

завершает постановку задачи.

4.2.2. Консервативная форма. Уравнения для контравариантных составляющих потока. Запишем дивергентную форму уравнения (4.2.1):

$$\mathbf{Q}_t + \mathbf{F}_x + \mathbf{G}_y = \Phi, \quad (4.2.15)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} Hu \\ Hv \\ H \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} Hu^2 + \frac{1}{2} gH^2 \\ Huv \\ Hu \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} Huv \\ Hv^2 + \frac{1}{2} gH^2 \\ Hv \end{pmatrix};$$

$$\Phi = \varphi H.$$

В криволинейных координатах (4.2.3) имеем:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_j}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} = \Phi,$$

$j = 1, 2$; $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}$; $\mathbf{F}_2 = \mathbf{G}$. Умножая на I^{-1} , преобразуем уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (I^{-1} \mathbf{Q}) + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(I^{-1} \mathbf{Q} \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(I^{-1} \mathbf{F}_j \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \right) - \mu \mathbf{Q} - \nu \mathbf{F}_j = I^{-1} \Phi,$$

где

$$\mu = \frac{\partial}{\partial \tau} I^{-1} + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(I^{-1} \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \right); \quad \nu = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(I^{-1} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \right).$$

Согласно (4.1.45') $\mu = \nu = 0$.

Итак, уравнение (4.2.15) в криволинейных координатах имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (J \mathbf{Q}) + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left[J \left(\mathbf{Q} \frac{\partial \xi^i}{\partial t} + \mathbf{F}_j \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \right) \right] = J \Phi. \quad (4.2.16)$$

Обозначим

$$J \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^*; \quad J(\mathbf{Q} \xi_t + \mathbf{F} \xi_x + \mathbf{G} \xi_y) = \mathbf{F}^*; \quad J(\mathbf{Q} \eta_t + \mathbf{F} \eta_x + \mathbf{G} \eta_y) = \mathbf{G}^*$$

и запишем (4.2.16) в виде

$$\mathcal{L}(\mathbf{Q}^*) \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{Q}^* + \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{F}^* + \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{G}^* = J \Phi. \quad (4.2.16')$$

Согласно (4.1.90)

$$\mathbf{F}^* = \begin{pmatrix} JHuU + \frac{1}{2} gH^2 y_\eta \\ JHvU - \frac{1}{2} gH^2 x_\eta \\ JHu \end{pmatrix}; \quad \mathbf{G}^* = \begin{pmatrix} JHvV - \frac{1}{2} gH^2 y_\xi \\ JHvV + \frac{1}{2} gH^2 x_\xi \\ JHv \end{pmatrix}.$$

Уравнение решается при условиях (4.2.13), дополнительном условии в граничных точках втока и начальном условии (4.2.14).

Получим уравнения для контравариантных компонентов потока. Умножая уравнение движения (4.2.1) для $\mathbf{v} = (u, v)$ на $\mathbf{e}^i = \nabla \xi^i$, $i = 1, 2$, имеем:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} \mathbf{e}^i + U^j \frac{\partial v}{\partial \xi^j} \mathbf{e}^i + g \nabla \xi \cdot \mathbf{e}^i = \Phi \cdot \mathbf{e}^i,$$

$j = 1, 2$; $U^1 = U$; $U^2 = V$. Учтывая, что $\nabla \xi = \xi_\xi \cdot \mathbf{e}^1 + \xi_\eta \cdot \mathbf{e}^2$, а также используя определение ковариантной производной контравариантного компонента вектора (4.1.37), получим:

$$\partial U^i / \partial \tau + U^j (\partial U^i / \partial \xi^j + \Gamma_{kj}^i U^k) + g g^{ij} \partial \xi / \partial \xi^j = \Phi \cdot \mathbf{e}^i.$$

Умножая это уравнение на JH и складывая с уравнением неразрывности, третьим уравнением системы (4.2.16), умноженным на U^i , получим уравнения для контравариантных потоков $p = JHU$, $q = JHV$:

$$\begin{aligned} p_\tau + (pU)_\xi + (pV)_\eta + gHJ(g^{11}\xi_\xi + g^{12}\xi_\eta) &= JH(\Phi \cdot \mathbf{e}^1 - U^j \Gamma_{kj}^1 U^k); \\ q_\tau + (qU)_\xi + (qV)_\eta + gHJ(g^{21}\xi_\xi + g^{22}\xi_\eta) &= JH(\Phi \cdot \mathbf{e}^2 - U^j \Gamma_{kj}^2 U^k); \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

$$JH_\tau + p_\xi + q_\eta = 0.$$

При переходе к ковариантной метрике такая форма весьма удобна для численного интегрирования. Один из используемых в дальнейшем методов приводится в п. 6.2.5.

В заключение отметим, что уравнения движения для ковариантных составляющих $U_i = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i$ вектора $\mathbf{v}$ оказываются более простыми, поскольку каждое содержит градиент уровня лишь в одном координатном направлении:

$$\frac{\partial U_i}{\partial \tau} + U^k \left(\frac{\partial U_i}{\partial \xi^k} - U_j \Gamma_{ik}^j \right) + g \frac{\partial \xi}{\partial \xi^i} = \Phi \cdot \mathbf{e}_i.$$

Усложняется, однако, уравнение неразрывности, принимающее вид (4.2.8) и, что еще хуже, утрачивается удобная форма граничных условий (4.2.13).

4.2.3. Связь операторов L и $\mathcal{L}$: диагонализация матриц. Установим связь оператора L (4.2.10) со своей дивергентной формой $\mathcal{L}$ (4.2.16). Пусть $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ — матрицы Якоби, получающиеся дифференцированием соответственно F^* , G^* по компонентам вектора $\mathbf{Q}^*$: $\tilde{A} = \partial F^* / \partial \mathbf{Q}^*$, $\tilde{B} = \partial G^* / \partial \mathbf{Q}^*$. Матрицы A , B оператора L получаются из $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ преобразованием подобия

$$A = \tilde{S}^{-1} \tilde{A} \tilde{S}; \quad B = \tilde{S}^{-1} \tilde{B} \tilde{S}, \quad (4.2.18)$$

где $\tilde{S} = \partial \mathbf{Q}^* / \partial \mathbf{u}$. Это следует из уравнения (4.2.17), продифференцированного по $\mathbf{u}$ и умноженного слева на $\tilde{S}^{-1}$. Равенства (4.2.18)

можно проверить непосредственно, используя явный вид матриц при обозначениях (4.2.9):

$$\frac{\partial F^*}{\partial Q^*} = \hat{A} = \begin{pmatrix} U + us_1 & us_2 & -uU + gHs_1 \\ vs_1 & U + vs_2 & -vU + gHs_2 \\ s_1 & s_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{S} = J \begin{pmatrix} H & 0 & u \\ 0 & H & v \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\frac{\partial G^*}{\partial Q^*} = \tilde{B} = \begin{pmatrix} V + ur_1 & ur_2 & -uV + gHr_1 \\ vr_1 & V + vr_2 & -vV + gHr_2 \\ r_1 & r_2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\tilde{S}^{-1} = J^{-1} \begin{pmatrix} H^{-1} & 0 & -uH^{-1} \\ 0 & H^{-1} & -vH^{-1} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Диагонализируем матрицы A, B . Их собственные числа

$$\begin{aligned} \lambda_{A1} &= U; & \lambda_{A2,3} &= U \pm cs; \\ \lambda_{B1} &= V; & \lambda_{B2,3} &= V \pm cr, \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

где $c = \sqrt{gH}$; $s = (s_1^2 + s_2^2)^{1/2}$; $r = (r_1^2 + r_2^2)^{1/2}$. Составим матрицу S , столбцами которой являются правые нормированные собственные векторы матрицы A :

$$S = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha/\sqrt{2} & \alpha/\sqrt{2} \\ \alpha & \beta/\sqrt{2} & \beta/\sqrt{2} \\ 0 & H/(c\sqrt{2}) & -H/(c\sqrt{2}) \end{pmatrix}, \quad (4.2.20)$$

где $\alpha = s_1/s$, $\beta = s_2/s$. Имеем:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & U + cs & 0 \\ 0 & 0 & U - cs \end{pmatrix} = \Lambda_A. \quad (4.2.21)$$

Матрицу R , столбцами которой являются нормированные собственные векторы матрицы B , получим, положив $\alpha = r_1/r$, $\beta = r_2/r$ в (4.2.20); при этом имеем

$$R^{-1}BR = \begin{pmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & V + cr & 0 \\ 0 & 0 & V - cr \end{pmatrix} = \Lambda_B. \quad (4.2.22)$$

Отсюда $A = S\Lambda_A S^{-1}$, $B = R\Lambda_B R^{-1}$ и уравнение (4.2.10) примет вид

$$\partial \mathbf{u} / \partial \tau + S\Lambda_A S^{-1} \partial \mathbf{u} / \partial \xi + R\Lambda_B R^{-1} \partial \mathbf{u} / \partial \eta = \Phi. \quad (4.2.23)$$

Для такого представления развиты численные методы интегрирования уравнения (4.2.10) при разбиении каждой из матриц Λ_A , Λ_B на сумму двух знакоопределенных матриц [1, 65, 132].

4.2.4. Двумерное спрямляющее преобразование. Частным случаем является преобразование двумерной области $\Omega = \{0 \leq x \leq L, l_1(x) \leq y \leq l_2(x)\}$ с двумя противоположными криволинейными границами. Решение уравнений в такой области, характеризующей типичную реальную конфигурацию, представляет интерес для приложений [7].

Преобразование

$$\xi = x; \quad \eta = (y - l_1)/l; \quad \tau = t, \quad (4.2.24)$$

$l = l_2 - l_1$ с якобианом $J = l(x)$ спрямляет границы, отображая Ω на прямоугольник $\Omega^* = \{0 \leq \xi \leq L, 0 \leq \eta \leq 1\}$. В данном случае метрические коэффициенты: $\xi_x = 1$, $\xi_y = 0$, $\eta_x = -l^{-1}(l_{1x} + \eta l_x) = -l_0$, $\eta_y = l^{-1}$ и контравариантные составляющие скорости

$$U = u, \quad V = l_0 u + l^{-1} v. \quad (4.2.25)$$

Таким образом, преобразованное уравнение (4.2.15) имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} l \mathbf{Q} + \frac{\partial}{\partial \xi} l \mathbf{F} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[l \begin{pmatrix} HuV + \frac{1}{2} g H^2 l_0 \\ HvV + \frac{1}{2} g H^2 l^{-1} \\ HV \end{pmatrix} \right] = l \Phi \quad (4.2.26)$$

и решается при граничных условиях

$$\begin{aligned} u &= 0 \quad \text{при} \quad x=0; L; \\ V &= 0 \quad \text{при} \quad \eta=0; 1. \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

4.2.5. Трехмерный случай. В области $\Omega_3 = \{x, y \in \Omega, -h(x, y) \leq z \leq \xi(x, y, t); t \geq 0\}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{P}_i + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{P}_3 = \frac{\partial}{\partial x_i} \tau_i + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} + \Phi, \quad (4.2.28)$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} u^2 + gH \\ uv \\ u \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} uv \\ v^2 + gH \\ v \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} uw \\ vw \\ w \end{pmatrix},$$

$\tau_i = K \mathbf{v}_{x_i}$, $i = 1, 2$, с кинематическим условием на свободной поверхности

$$\xi_t + u \xi_x + v \xi_y = w, \quad z = \xi, \quad (4.2.29)$$

краевыми условиями по вертикали

$$v=0; \quad w=0 \quad \text{при} \quad z=-h; \quad (4.2.30)$$

$$vv_z = \tau^0/\rho \quad \text{при} \quad z=\xi, \quad (4.2.31)$$

некоторыми краевыми условиями на боковой поверхности S области Ω_3

$$\Gamma(v, \xi) = \psi(x, y, t), \quad x, y \in S \quad (4.2.32)$$

и начальными условиями

$$v|_{t=0} = v^0; \quad \xi|_{t=0} = \xi^0. \quad (4.2.33)$$

Уравнение (4.2.28) при условиях (4.2.29)—(4.2.33) и замыкающем соотношении для коэффициента турбулентности v позволяет определить неизвестные v, W, ξ .

В случае произвольной области Ω_3 для решения задачи (4.2.28)—(4.2.33) удобна криволинейная система координат ξ^i , $i = 1, 2, 3$; $0 \leq \xi^i \leq 1$, согласованная с конфигурацией Ω_3 . В таких координатах область интегрирования Ω_3^* — образ Ω_3 — представится кубом.

Рассмотрим преобразование общего вида

$$\xi^i = \xi^i(x, y, z, t), \quad \tau = t; \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.2.34)$$

($\xi^1 = \xi$, $\xi^2 = \eta$, $\xi^3 = \theta$) с якобианом $I = \partial(\xi, \eta, \theta)/\partial(x, y, z)$, $0 \neq I < \infty$. Умножая уравнение (4.2.28) на $I^{-1} = J$, имеем:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial \tau} (Jv) + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(Jv \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J P_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \right) - \\ & - v \left[\frac{\partial J}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \right) \right] - P_j \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \right) = \mathcal{P} + J\varphi. \end{aligned}$$

В силу (4.1.45')

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \right) = -I^{-1} \left(I^{-1} \frac{\partial I}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j} \right) = 0, \quad (4.2.34')$$

$j = 1, 2, 3$. Выражение в квадратных скобках также равно нулю, ибо приводится к такому же виду (с заменой x_j на t). С учетом $\partial J/\partial t = \partial J/\partial \tau + \partial J/\partial \xi^i (\partial \xi^i/\partial t)$ имеем

$$\frac{\partial J}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \right) = \frac{\partial J}{\partial t} + J \frac{\partial}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial t} = -I^{-1} \left(I^{-1} \frac{\partial I}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \right). \quad (4.2.34'')$$

Таким образом, дивергентная форма уравнения (4.2.28)

$$\frac{\partial}{\partial \tau} Jv + \frac{\partial}{\partial \xi^i} P_i^* = \mathcal{P} + J\varphi, \quad i = 1, 2, 3; \quad (4.2.35)$$

$$P_i^* = J(v \xi_x^i + P_1 \xi_x^i + P_2 \xi_y^i + P_3 \xi_z^i). \quad (4.2.36)$$

Контравариантные составляющие скорости $(\mathbf{v}, \omega)$ согласно (4.1.84)

$$U^i = \xi_t^i + u \xi_x^i + v \xi_y^i + \omega \xi_z^i \quad (4.2.37)$$

$(U^1 = U, U^2 = V, U^3 = W)$ и для векторов $\mathbf{P}_i^*$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_1^* &= J \begin{pmatrix} uU + c^2 \xi_x \\ vU + c^2 \xi_y \\ U - \xi_t \end{pmatrix}; \quad \mathbf{P}_2^* = J \begin{pmatrix} uV + c^2 \eta_x \\ vV + c^2 \eta_y \\ V - \eta_t \end{pmatrix}; \\ \mathbf{P}_3^* &= J \begin{pmatrix} uW + c^2 \theta_x \\ vW + c^2 \theta_y \\ W - \theta_t \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.2.38)$$

Преобразуем правую часть уравнения (4.2.35):

$$\mathcal{P} = J \left(\frac{\partial}{\partial x} K \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} K \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} \right). \quad (4.2.39)$$

В соответствии с (4.1.50) имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= \frac{\partial}{\partial \xi} \{ J [\mathbf{v}_\xi (Kg^{11} + v \xi_z^2) + \mathbf{v}_\eta (Kg^{12} + v \xi_z \eta_z) + \mathbf{v}_\theta (Kg^{13} + v \xi_z \theta_z)] \} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} \{ J [\mathbf{v}_\xi (Kg^{12} + v \xi_z \eta_z) + \mathbf{v}_\eta (Kg^{22} + v \eta_z^2) + \mathbf{v}_\theta (Kg^{23} + v \eta_z \theta_z)] \} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} \{ J [\mathbf{v}_\xi (Kg^{13} + v \xi_z \theta_z) + \mathbf{v}_\eta (Kg^{23} + v \eta_z \theta_z) + \mathbf{v}_\theta (Kg^{33} + v \theta_z^2)] \}, \end{aligned}$$

где $g^{ik} = \nabla \xi^i \nabla \xi^k$, $i, k = 1, 2, 3$, $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$. Обозначив $G^{ik} = = Kg^{ik} + (v \partial \xi^i / \partial z) \partial \xi^k / \partial z$, запишем это выражение короче:

$$\mathcal{P} = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^k} G^{ik} \right). \quad (4.2.40)$$

Для интегрирования уравнения (4.2.35) в трансформированной области — параллелепипеде — Ω_3^* следует выразить метрические коэффициенты $\partial \xi^i / \partial x_j$ через элементы якобиана обратного преобразования $J = \partial(x, y, z) / \partial(\xi, \eta, \theta)$, используя согласно (4.1.26) равенство

$$\|I^T\| = \|J^{-1}\|. \quad (4.2.41)$$

Отсюда:

$$\xi_x = J^{-1} \begin{vmatrix} y_\eta & y_\theta \\ z_\eta & z_\theta \end{vmatrix}; \quad \eta_x = -J^{-1} \begin{vmatrix} y_\xi & y_\theta \\ z_\xi & z_\theta \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

Коэффициенты $\partial \xi^i / \partial t$ определяются из (4.1.86) [либо непосредственно из формул обратного преобразования $x_i = x_i(\xi, \eta, \theta, \tau)$,

продифференцированных по t]

$$\xi_t = J^{-1} \begin{vmatrix} -x_\tau & x_\eta & x_\theta \\ -y_\tau & y_\eta & y_\theta \\ -z_\tau & z_\eta & z_\theta \end{vmatrix}; \quad \eta_t = J^{-1} \begin{vmatrix} x_\xi & -x_\tau & x_\theta \\ y_\xi & -y_\tau & y_\theta \\ z_\xi & -z_\tau & z_\theta \end{vmatrix};$$

$$\theta_t = J^{-1} \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & -x_\tau \\ y_\xi & y_\eta & -y_\tau \\ z_\xi & z_\eta & -z_\tau \end{vmatrix}.$$

Проинтегрируем уравнение неразрывности — последнее в системе (4.2.28) — по вертикали с учетом условий (4.2.29) — (4.2.30). Имеем

$$\partial H / \partial t + \nabla \cdot H \langle \mathbf{v} \rangle = 0, \quad (4.2.42)$$

$\langle \mathbf{v} \rangle = H^{-1} \int_{-n}^{\xi} \mathbf{v} dz$. В новых переменных (4.2.34) это уравнение принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} JH + \frac{\partial}{\partial \xi} JH\bar{U} + \frac{\partial}{\partial \eta} JH\bar{V} + \frac{\partial}{\partial \theta} JH\bar{W} = 0, \quad (4.2.43)$$

где $\bar{U}$, $\bar{V}$ — контравариантные составляющие интегральной скорости $\langle \mathbf{v} \rangle$:

$$\begin{aligned} \bar{U} &= \xi_t + \langle u \rangle \xi_x + \langle v \rangle \xi_y; \\ \bar{V} &= \eta_t + \langle u \rangle \eta_x + \langle v \rangle \eta_y; \\ \bar{W} &= \theta_t + \langle u \rangle \theta_x + \langle v \rangle \theta_y. \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

Уравнения (4.2.35), (4.2.43) решаются при условии непротекания на твердых участках S_1^* граней куба Ω_3^*

$$U = V = W = 0, \quad \xi^i = S_1^*, \quad (4.2.45)$$

условии на свободной поверхности

$$\nu \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^i} \frac{\partial \xi^i}{\partial z} = \tau^0 / \rho; \quad \xi^i = \xi^i(x, y, \xi, t), \quad (4.2.46)$$

некоторых условиях на жидких элементах S_2^* граней Ω_3^* и начальных условиях (4.2.33).

4.2.6. Упрощенное трехмерное преобразование. Преобразование (4.2.34) отвечает общему случаю произвольной трехмерной области с движущейся границей. В случае неподвижных береговых границ целесообразна упрощенная форма преобразования, допускающая, что спрямляемая боковая поверхность S оказывается цилиндрической и горизонтальные координаты ξ , η не зависят от z . Последнее означает отсутствие точек на S , где ξ , η -поверхности

встречаются, т. е. координата θ не вырождается. Такое преобразование имеет вид [8]

$$\xi = \xi(x, y); \quad \eta = \eta(x, y); \quad \theta = (z + h)/(\xi + h); \quad \tau = t. \quad (4.2.47)$$

В этом случае $J = HJ_*$, где $J_* = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$ — плоский якобиан, а контравариантные составляющие скорости в уравнениях (4.2.35), (4.2.43)

$$\begin{aligned} U &= u\xi_x + v\xi_y; & V &= u\eta_x + v\eta_y; \\ W &= \theta_t + u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z; \\ \bar{U} &= \langle u \rangle \xi_x + \langle v \rangle \xi_y; & \bar{V} &= \langle v \rangle \eta_x + \langle v \rangle \eta_y. \end{aligned} \quad (4.2.48)$$

Третье уравнение системы (4.2.35) — уравнение неразрывности — имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \xi^i} J U^i - \frac{\partial}{\partial \theta} J \theta_t = 0.$$

Преобразуем последнее слагаемое. В силу (4.2.34') в данном случае

$$I^{-1} \frac{\partial I}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} \theta_t$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} J \theta_t &= \theta_t \frac{\partial I^{-1}}{\partial \theta} + I^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \theta_t = \theta_t \frac{\partial I^{-1}}{\partial \theta} + I^{-2} \frac{\partial I}{\partial t} = \\ &= \theta_t \frac{\partial I^{-1}}{\partial \theta} - \frac{\partial I^{-1}}{\partial \tau} - \frac{\partial I^{-1}}{\partial \theta} \theta_t = - \frac{\partial I}{\partial \tau} \end{aligned}$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial J}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi^i} J U^i = 0. \quad (4.2.49)$$

С учетом $\xi_z = \eta_z = 0$, $\theta_z = H^{-1}$ выражение (4.2.40) примет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{\partial}{\partial \xi} [JK (g^{11} \mathbf{v}_\xi + g^{12} \mathbf{v}_\eta + g^{13} \mathbf{v}_\theta)] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \eta} [JK (g^{21} \mathbf{v}_\xi + g^{22} \mathbf{v}_\eta + g^{23} \mathbf{v}_\theta)] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial \theta} [JK (g^{31} \mathbf{v}_\xi + g^{32} \mathbf{v}_\eta + g^{33} \mathbf{v}_\theta)] + H^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} J v \frac{\partial v}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Уравнение (4.2.35), таким образом, имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{q}^* + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \mathbf{Q}_i^* = \mathcal{F} + J \Phi, \quad (4.2.50)$$

$$\mathbf{q}^* = \begin{pmatrix} Ju \\ Jv \\ J \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q}_1^* = J \begin{pmatrix} uU + c^2 \xi_x \\ vU + c^2 \xi_y \\ U \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_2^* = J \begin{pmatrix} uV + c^2 \eta_x \\ vV + c^2 \eta_y \\ V \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q}_3^* = J \begin{pmatrix} uW + c^2 \theta_x \\ vW + c^2 \theta_y \\ W \end{pmatrix}.$$

$i, k = 1, 2, 3$. Для интегрирования его в Ω_3^* совместно с интегральной формой уравнения неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial \tau} J^* H + \frac{\partial}{\partial \xi} J^* H \bar{U} + \frac{\partial}{\partial \eta} J^* H \bar{V} = 0, \quad (4.2.51)$$

$$\bar{U} = \langle u \rangle \xi_x + \langle v \rangle \xi_y, \quad \bar{V} = \langle u \rangle \eta_x + \langle v \rangle \eta_y$$

следует выразить метрические коэффициенты $\partial \xi^i / \partial x_j$ через элементы якобиана J в соответствии с (4.2.41), а компоненты тензора g^{ik} через g_{ik} согласно (4.1.19) и использовать граничные условия, обсуждавшиеся выше.

4.2.7. Уравнение переноса и диффузии примеси. В области Ω_3 рассмотрим уравнение переноса и диффузии некоторой субстанции s^* ; пусть $s(x, y, z, t)$ — концентрация субстанции, т. е. отношение массы s^* ко всему объему воды. Удельное содержание s может меняться в силу адвекции, диффузии и действия фактора ψ , куда входят внешние источники и стоки, изменяющие концентрацию, а также, возможно, биологические реакции и химические процессы [57]. Имеем

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \nabla s \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial z} s \bar{w} = (\nabla \cdot K \nabla) s + \frac{\partial}{\partial z} v \frac{\partial s}{\partial z} + \psi, \quad (4.2.52)$$

где $\bar{w} = w - w_0$. Здесь в вертикальном компоненте скорости выделено w_0 — скорость седиментации, т. е. собственный вертикальный перенос субстанции s^* .

Поставим граничные условия по вертикали для уравнения (4.2.52), предполагая здесь $\partial/\partial z \sim \partial/\partial n$

$$\begin{aligned} w_0 s + v \partial s / \partial z &= 0, & z &= \xi(x, y, t); \\ v \partial s / \partial z &= 0, & z &= -h(x, y). \end{aligned} \quad (4.2.53)$$

На боковой поверхности $S_\Gamma = S \times [0, T]$ поставим условие

$$c_1 s + K \partial s / \partial n|_{S_\Gamma} = \psi_1(S_\Gamma), \quad (4.2.54)$$

$c_1 = \text{const}$, ψ_1 — изменение субстанции s^* на S_Γ . Присоединим сюда начальное условие: $s|_{t=0} = s^0$.

В случае сложной конфигурации Ω_3 используем преобразование (4.2.47)

$$\xi = \xi(x, y); \quad \eta = \eta(x, y); \quad \theta = (z + h)/H; \quad \tau = t$$

с якобианом $I = \partial(\xi, \eta, \theta) / \partial(x, y, z)$, $0 \neq I < \infty$, $I = H^{-1} I_*$, $I_* = \xi_x \eta_y - \xi_y \eta_x$. Умножая (4.2.5) на $I^{-1} = J$, получим:

$$\frac{\partial J s}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial \xi^i} (J U^i s) = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J K g^{ik} \frac{\partial s}{\partial \xi^k} \right) + H^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} J v \frac{\partial s}{\partial \theta} + J \psi, \quad (4.2.55)$$

$i, k = 1, 2, 3, g^{ik} = \nabla \xi^i \nabla \xi^k, \nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y),$

$$\begin{aligned} U^1 = U &= u\xi_x + v\xi_y; & U^2 = V &= u\eta_x + v\eta_y; \\ U^3 = W &= \theta_t + u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z. \end{aligned} \quad (4.2.56)$$

Запишем граничные условия (4.2.53)–(4.2.54) в новых переменных:

$$\begin{aligned} s_0 &= 0, & \theta &= 0; \\ w_0 s + H^{-1} v s_0 &= 0, & \theta &= 1. \end{aligned} \quad (4.2.57)$$

Условия на боковых гранях $S_i^t, i = 1, 2$, т. е. на ξ, η -поверхностях в силу (4.1.52)

$$c_1 s \pm \frac{JK}{\sqrt{g^{ii}}} (g^{i1} s_\xi + g^{i2} s_\eta + g^{i3} s_0) = \psi_i(S_i^t), \quad (4.2.58)$$

где знак определяется направлением внешней нормали n^{ξ^i} относительно оси ξ^i .

Остановимся на двумерном случае. В произвольной области $\Omega(x, y)$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u_i \frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} K \frac{\partial s}{\partial x_i} + \varphi, \quad (4.2.59)$$

$i = 1, 2$, с граничными условиями на контуре $\partial\Omega$

$$c_1 s + K \partial s / \partial n|_{\partial\Omega} = \psi. \quad (4.2.60)$$

Преобразование

$$\xi = \xi(x, y); \quad \eta = \eta(x, y); \quad \tau = t \quad (4.2.61)$$

с якобианом $I = \partial(\xi, \eta)/\partial(x, y) = J^{-1}, 0 \neq I < \infty$ отображает область Ω на квадрат Ω^* , в котором уравнение (4.2.59) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial \tau} + U \frac{\partial s}{\partial \xi} + V \frac{\partial s}{\partial \eta} &= J^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \left[JK \left(g^{11} \frac{\partial s}{\partial \xi} + g^{12} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right] + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial \eta} \left[JK \left(g^{21} \frac{\partial s}{\partial \xi} + g^{22} \frac{\partial s}{\partial \eta} \right) \right] \right\} + \varphi, \end{aligned} \quad (4.2.62)$$

где

$$\begin{aligned} U &= u\xi_x + v\xi_y = J^{-1}(u\eta_y - vx_\eta); \\ V &= u\eta_x + v\eta_y = J^{-1}(-u\eta_\xi + vx_\xi); \\ g^{11} &= (\nabla \xi)^2 = J^{-2} g_{22}; & g^{22} &= (\nabla \eta)^2 = J^{-2} g_{11}; \\ g^{12} &= g^{21} = \nabla \xi \cdot \nabla \eta = -J^{-2} g_{12}; \\ g_{22} &= x_\eta^2 + y_\eta^2; & g_{11} &= x_\xi^2 + y_\xi^2; \\ g_{12} &= x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta. \end{aligned}$$

Глава 4. Постановка задач в криволинейных координатах

Запишем в новых переменных граничное условие (4.2.60). Согласно (4.1.72)—(4.1.73) на ξ -линиях границы $\partial\Omega^*$

$$c_1 s \pm \frac{K}{J \sqrt{g_{22}}} (g_{22} s_\xi - g_{12} s_\eta) = \psi(\eta), \quad (4.2.63)$$

на η -линиях

$$c_1 s \pm \frac{K}{J \sqrt{g_{11}}} (-g_{12} s_\xi + g_{11} s_\eta) = \psi(\xi), \quad (4.2.64)$$

причем положительным значениям нормальных производных (4.2.63)—(4.2.64) отвечают соответственно правая и верхняя стороны квадрата Ω^* , а отрицательным — его левая и нижняя стороны.

Методы построения криволинейных сеток

Для интегрирования уравнений в произвольной криволинейной области $\Omega(x, y)$ осуществляется предварительное отображение Ω на какую-либо каноническую область, например прямоугольник Ω^* . При этом криволинейная сетка $\Omega_\Delta = \{x_{m,n}, y_{m,n}\}$ отображается на прямоугольную равномерную сетку $\Omega_\Delta^* = \{\xi_{m,n}, \eta_{m,n}\}^{m=1, 2, \dots, M; n=1, 2, \dots, N}$. Коэффициенты преобразованных гидродинамических уравнений включают метрику преобразования, и для их определения в узлах Ω_Δ^* требуется знать декартовы координаты их прообразов — узлов Ω_Δ . Нахождение декартовых координат в узлах Ω_Δ^* называют построением сетки. Для этого развит ряд методов. Здесь рассматриваются некоторые из них.

В разделе 5.1 приводится обширная группа методов, используемых для построения неортогональных сеток. Наиболее подробно рассматриваются методы, основанные на решении квазилинейных эллиптических уравнений, которые используются в дальнейшем. Методы генерации ортогональных сеток, приводящиеся в разделе 5.2, связаны с некоторыми ограничениями и являются, вообще говоря, более сложными. Вместе с тем интегрирование гидродинамических уравнений на ортогональных сетках значительно упрощается, ибо в преобразованных уравнениях выпадает ряд членов сравнительно с общим, неортогональным, случаем.

5.1. Неортогональные сетки

5.1.1. Построение сетки интегрированием эллиптических уравнений. Задачу нахождения в произвольной области $\Omega(x, y)$ криволинейных координат $\xi(x, y), \eta(x, y)$, согласованных с конфигурацией границы области, можно поставить как краевую задачу для системы эллиптических уравнений с граничными условиями, определяемыми заданным соответствием значений $x, y \in \partial\Omega$ значениям $\xi, \eta \in \partial\Omega^*$. При этом одна из граничных координатных линий совпадает с каждым сегментом границы $\partial\Omega$, и на нем соответствующая криволинейная координата фиксирована, а другая координата распределена произвольно, но монотонно. Такая постановка обеспечивает однолистное отображение исходной области Ω на вычислительную область Ω^* .

В плоскости ξ, η при фиксированном значении одной из координат и одинаковом распределении другой на попарно противоположных границах области Ω^* эта область представляет прямоугольник. Дискретный аналог такого отображения задает отображение

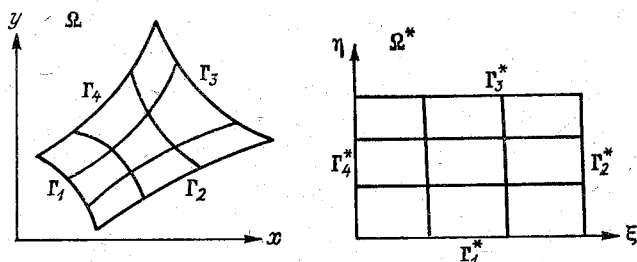


Рис. 5.1. Отображение односвязной криволинейной области Ω на вычислительный прямоугольник Ω^* .

сетки криволинейных координат Ω_Δ на прямоугольную сетку Ω_Δ^* (рис. 5.1).

В случае неодносвязной области Ω вычислительную область Ω^* можно представить конфигурацией прямоугольников той же связности. Можно, однако, соединить внутренние области разрезами и сделать Ω односвязной. Отображаемый контур $\partial\Omega$ проходится по каждому разрезу дважды в противоположных направлениях, и

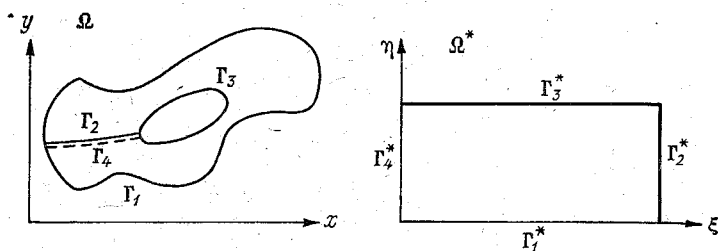


Рис. 5.2. Отображение двусвязной криволинейной области Ω на вычислительный прямоугольник Ω^* .

каждый разрез отображается на два различных участка контура $\partial\Omega^*$ (рис. 5.2).

Еще одним важным случаем, демонстрирующим общность подхода, является случай области с подвижной границей. Положение границы определяется некоторым образом на каждом временном шаге, и на каждом шаге ищется отображение физической области на фиксированный вычислительный прямоугольник, отвечающее измененным значениям координат ξ, η на границе.

Как отмечалось, сетка порождается решением краевой задачи для системы эллиптических уравнений. Простейшими из них и

подходящими для этой цели являются уравнения Лапласа

$$\xi_{xx} + \xi_{yy} = 0; \quad \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0 \quad (5.1.1)$$

с граничными условиями

$$\xi|_{\partial\Omega} = \xi_0; \quad \eta|_{\partial\Omega} = \eta_0.$$

Действительно, эти уравнения обладают принципом максимума, т. е. максимальные и минимальные значения ξ , η достигаются

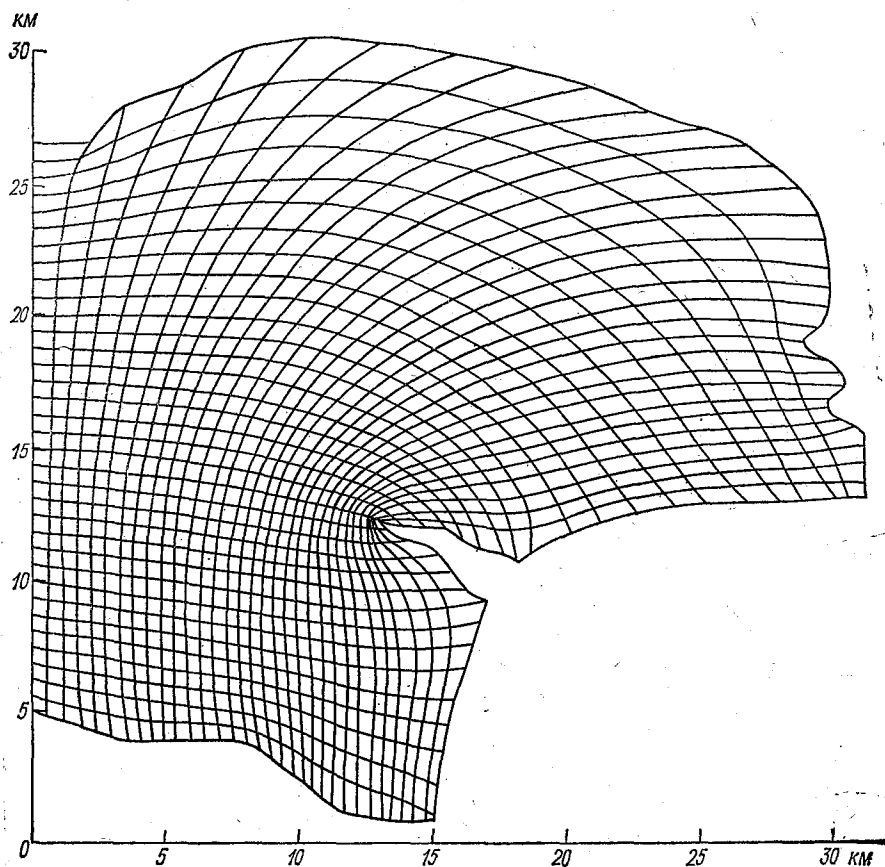


Рис. 5.3. Криволинейная сетка, отвечающая конфигурации части Финского залива. Правая граница области — о. Котлин и сооружения защиты г. Ленинграда от наводнений.

на $\partial\Omega$, что обеспечивает взаимно однозначное соответствие отображения Ω на Ω^* . Другим важным их свойством является сглаживание разрывов граничных значений, что не позволяет разрывам распространяться внутрь области.

В силу связи между производными в физической и вычислительной областях (п. 3.1.3) эквивалентной задачей будет нахождение

декартовых координат $x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ в прямоугольнике Ω^* путем решения обращенных уравнений (5.1.1) при заданных значениях

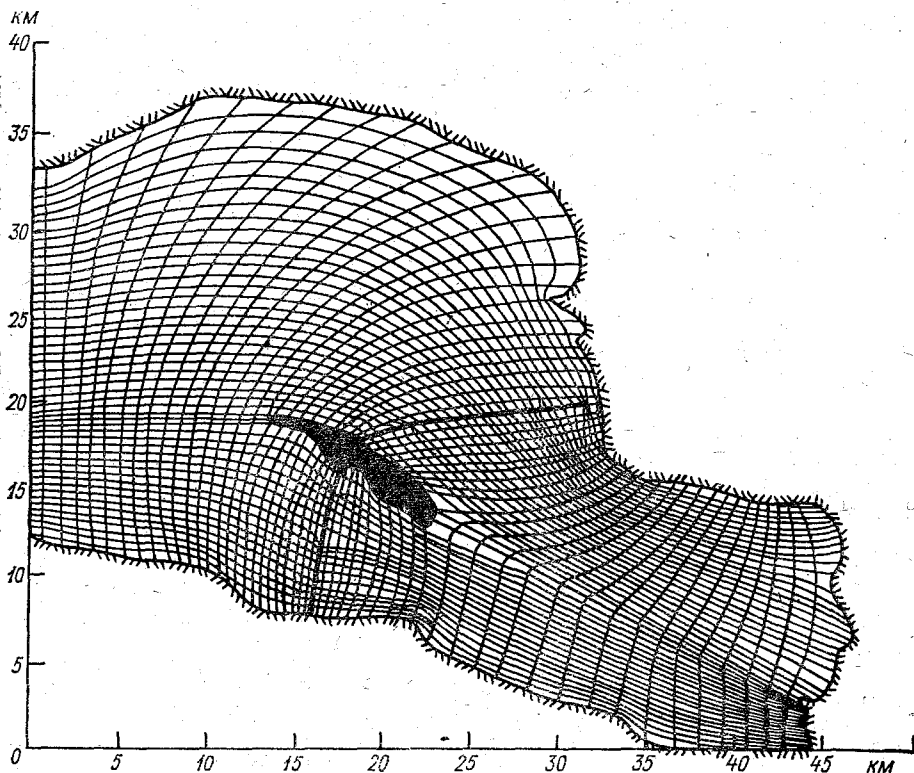


Рис. 5.4. Композиционная сетка для восточной части Финского залива, построенная методом Томпсона.

x, y на $\partial\Omega^*$. Дифференцируя дважды по x и y каждую из формул преобразования

$$x = x(\xi, \eta); \quad y = y(\xi, \eta), \quad (5.1.2)$$

складывая соответствующие результаты, используя соотношения п. 4.1.3 и обращаемое уравнение (5.1.1), получим уравнение для вектора $\mathbf{r} = (x, y)$:

$$L(\mathbf{r}) \equiv g_{22}\mathbf{r}_{\xi\xi} - 2g_{12}\mathbf{r}_{\xi\eta} + g_{11}\mathbf{r}_{\eta\eta} = 0, \quad (5.1.3)$$

где $g_{22} = x_\eta^2 + y_\eta^2 = |\mathbf{r}_\eta|^2$; $g_{12} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = \mathbf{r}_\xi \mathbf{r}_\eta$; $g_{11} = x_\xi^2 + y_\xi^2 = |\mathbf{r}_\xi|^2$. Интегрируя (5.1.3) на прямоугольной сетке в области Ω^* при заданных значениях $\mathbf{r}_{m,n}$ в узлах контура $\partial\Omega^*$, определим координаты (5.1.2) во внутренних узлах сетки.

На рис. 5.3, 5.4 приводятся сетки, построенные интегрированием уравнения (5.1.3).

При желании можно воспользоваться полярными координатами ρ , φ и отобразить односвязную криволинейную область $\Omega(\rho, \varphi)$ на круг (соответственно двухсвязную — на кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями). В этом случае уравнение Лапласа (5.1.1) для вектора координат $\xi = (\xi, \eta)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} \xi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \xi + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \xi = 0.$$

Обращение его приводит к уравнению относительно $\mathbf{r} = (\rho, \varphi)$

$$\alpha \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \mathbf{r} + 2\beta \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} \mathbf{r} + \gamma \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \mathbf{r} = 0$$

с метрическими коэффициентами

$$\alpha = \xi_\rho^2 + (\rho^{-1} \xi_\varphi)^2, \quad \beta = \xi_\rho \eta_\rho + \rho^{-2} \xi_\varphi \eta_\varphi, \quad \gamma = \eta_\rho^2 + (\rho^{-1} \eta_\varphi)^2.$$

5.1.2. Управление сеткой. Точность решения задачи на построенной сетке зависит как от общего количества ее узлов, так и от распределения их. Преимущества использования криволинейных координат должны проявляться в областях сложной конфигурации, в зонах, где решение имеет большие градиенты и существенно определяется локальной геометрией. В таких зонах необходимо сгущение сетки. Сгущение узлов на границах при решении задачи Дирихле для уравнения (5.1.3) не эффективно; в силу сглаживающего эффекта эллиптического оператора такой прием не меняет заметно внутреннюю структуру сетки. Управление сеткой, т. е. подвижку координатных линий, ведущую к перераспределению узлов, можно осуществить, заменив (5.1.1) на уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \xi = P(\xi, \eta); \quad \nabla^2 \eta = Q(\xi, \eta), \quad (5.1.4)$$

в которых правые части P , Q выступают управляющими функциями [15, 138, 139]. Сеточные линии определяются как линии уровня, удовлетворяющие (5.1.4).

Для обращения этих уравнений, т. е. перемены местами зависимых и независимых переменных, продифференцируем дважды первую из формул (5.1.2) по x , y и, складывая результат, с учетом соотношений п. 3.1.3 получим:

$$x_{\xi\xi} g_{22} J^{-2} - 2x_{\xi\eta} g_{12} J^{-2} + x_{\eta\eta} g_{11} J^{-2} + x_{\xi} \nabla^2 \xi + x_{\eta} \nabla^2 \eta = 0, \quad (5.1.5)$$

$J = x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}$. Поступая аналогично со второй формулой преобразования (5.1.2), имеем:

$$y_{\xi\xi} g_{22} J^{-2} - 2y_{\xi\eta} g_{12} J^{-2} + y_{\eta\eta} g_{11} J^{-2} + y_{\xi} \nabla^2 \xi + y_{\eta} \nabla^2 \eta = 0. \quad (5.1.6)$$

С учетом (5.1.6) запишем эту систему уравнений в векторном виде:

$$L(\mathbf{r}) \equiv g_{22} \mathbf{r}_{\xi\xi} - 2g_{12} \mathbf{r}_{\xi\eta} + g_{11} \mathbf{r}_{\eta\eta} = -J^2 (P \mathbf{r}_{\xi} + Q \mathbf{r}_{\eta}). \quad (5.1.7)$$

Действие функций P , Q выражается в том, что они вызывают сдвиг сеточных линий внутри области. Конкретный вид этих функ-

ций определяет характер распределения внутренних узлов. Рассмотрим, например, форму

$$P(\xi, \eta) = - \sum_i a_i \operatorname{sign}(\xi - \xi_i) \exp(-c_i |\xi - \xi_i|) - \sum_j b_j \operatorname{sign}(\xi - \xi_j) \exp(-d_j R_j); \quad (5.1.8)$$

$$Q(\xi, \eta) = - \sum_i a_i \operatorname{sign}(\eta - \eta_i) \exp(-c_i |\eta - \eta_i|) - \sum_j b_j \operatorname{sign}(\eta - \eta_j) \exp(-d_j R_j)$$

[137, 139], где $a, b, c, d - \text{const}$; $R_j = [(\xi - \xi_j)^2 + (\eta - \eta_j)^2]^{1/2}$. В выражении P при $a_i > 0$ слагаемые первой суммы сжимают координатные линии $\xi = \text{const}$ к ξ_i -линиям, а слагаемые второй суммы при $b_j > 0$ — к точке (ξ_j, η_j) ; степень сжатия контролируется коэффициентами в экспонентах. При отрицательных a_i, b_i происходит соответствующее разрежение. Учет знака в разностях $(\xi - \xi_i)$ обеспечивает притягивание (либо отход) относительно ξ_i -линии с обеих сторон. Выражение для Q построено аналогично.

Правую часть уравнения (5.1.7) целесообразно уменьшить по порядку величины, исключив из нее квадрат якобиана. При этом управляющие функции подбираются такими, чтобы для контроля распределения внутренних узлов сетки использовать распределение g на границе области. Рассмотрим метод такого типа, предложенный Томасом и Миддлкофом [135].

Возьмем правые части уравнений (5.1.6) в виде

$$P = J^{-2} g_{22} p(\xi, \eta); \quad Q = J^{-2} g_{11} q(\xi, \eta). \quad (5.1.9)$$

Подставляя в (5.1.7), имеем в области Ω^* обращенные уравнения:

$$g_{22}(\mathbf{r}_{\xi\xi} + p\mathbf{r}_{\xi}) - 2g_{12}\mathbf{r}_{\xi\eta} + g_{11}(\mathbf{r}_{\eta\eta} + q\mathbf{r}_{\eta}) = 0. \quad (5.1.10)$$

Предполагая перпендикулярность координатных линий границе

$$g_{12} = x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} = 0 \quad (5.1.11)$$

и исключая из системы уравнений (5.1.10) функцию q , получим:

$$g_{22}(x_{\xi\xi}y_{\eta} - y_{\xi\xi}x_{\eta} + Jp) = -g_{11}y_{\eta}^2(x_{\eta}/y_{\eta})_{\eta}. \quad (5.1.12)$$

Далее предполагается, что в окрестности границ $\eta = 1$, $\eta = N$ поперечные координатные линии $\xi = \text{const}$ имеют нулевую кривизну. Наклон этих линий к границе выражается отношением $dx/dy = x_{\eta}/y_{\eta}$; предположение о нулевой кривизне семейства координатных линий $\xi = \text{const}$ у границы обращает правую часть уравнения в нуль. Подставляя в уравнение (5.1.12) значение $x_{\eta} = -y_{\xi}y_{\eta}/x_{\xi}$ из условия (5.1.11), найдем:

$$p = -(x_{\xi}x_{\xi\xi} + y_{\xi}y_{\xi\xi})/g_{11}, \quad \eta = 1, \quad \eta = N. \quad (5.1.13)$$

Таким образом, значения $p_{m,1}$, $p_{m,N}$ определены в каждом узле границ, а внутри области Ω^* находятся, например, линейной интерполяцией

$$p_{m,n} = p_{m,1} + (p_{m,N} - p_{m,1}) \frac{n-1}{N-1}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (5.1.14)$$

Аналогично определим функцию q на вертикальных границах $\xi = 1$, $\xi = M$, предполагая перпендикулярность этим границам семейства координатных линий $\eta = \text{const}$ и их нулевую кривизну в окрестности границ

$$q = -(x_\eta x_{\eta\eta} + y_\eta y_{\eta\eta})/g_{22}, \quad \xi = 1, \quad \xi = M, \quad (5.1.15)$$

после чего $q_{m,n}$ внутри области определяется интерполяцией

$$q_{m,n} = q_{1,n} + (q_{M,n} - q_{1,n}) \frac{m-1}{M-1}, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (5.1.16)$$

Остановимся на геометрической интерпретации формул, определяющих функции p , q . Согласно (4.1.14) $\sqrt{g_{11}}$ является производной от длины дуги координатной линии по координате ξ : $s_\xi = (x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2} = |\mathbf{r}_\xi| = \sqrt{g_{11}}$. Для второй производной имеем: $s_{\xi\xi} = (x_\xi x_{\xi\xi} + y_\xi y_{\xi\xi})/\sqrt{g_{11}}$ и

$$p = -s_{\xi\xi}/s_\xi = -(\ln s_\xi)_\xi. \quad (5.1.17)$$

Итак, функция p является логарифмической производной длины дуги по координате ξ вдоль сегмента границы $\eta = \text{const}$. Аналогично q представляет логарифмическую производную длины дуги по координате η вдоль сегмента границы $\xi = \text{const}$. В силу (5.1.17) уравнение (5.1.13) можно записать в виде

$$s_{\xi\xi} + p s_\xi = 0, \quad (5.1.18)$$

откуда видно, что при $p = \text{const}$ оно имеет экспоненциальное решение: $s \sim \exp(-p\xi)$. Отрезками экспоненты при локально постоянных p аппроксимируется изменение длины дуги между узлами на сегментах границы физической области, которые отображаются на прямолинейные участки границы вычислительной области $\partial\Omega^*$: $\eta = 1$, $\eta = N$. Интерполяционное распределение параметра p внутри области отражает характер расстановки граничных узлов (рис. 5.5). Это распределение, аппроксимируемое локальными экспонентами, является регулярным и монотонным, а перпендикулярность сеточных линий к границе облегчает численную реализацию краевых условий.

Другой способ построения ортогональной к границе сетки, близкий к рассмотренному, также исходит из уравнения (5.1.10) при $g_{12} = 0$, которое запишем в виде

$$|\mathbf{r}_\eta|^2 (\mathbf{r}_{\xi\xi} + p \mathbf{r}_\xi) + |\mathbf{r}_\xi|^2 (\mathbf{r}_{\eta\eta} + q \mathbf{r}_\eta) = 0. \quad (5.1.19)$$

Умножая это уравнение скалярно на $\mathbf{r}_\xi$, $\mathbf{r}_\eta$ и используя условие ортогональности $g_{12} = \mathbf{r}_\xi \mathbf{r}_\eta = 0$, получим:

$$p = -\mathbf{r}_\xi \cdot \mathbf{r}_{\xi\xi} / |\mathbf{r}_\xi|^2 - \mathbf{r}_\xi \mathbf{r}_{\eta\eta} / |\mathbf{r}_\eta|^2; \quad q = -\mathbf{r}_\eta \cdot \mathbf{r}_{\eta\eta} / |\mathbf{r}_\eta|^2 - \mathbf{r}_\eta \mathbf{r}_{\xi\xi} / |\mathbf{r}_\xi|^2. \quad (5.1.20)$$

Эти выражения переходят соответственно в (5.1.13), (5.1.15) при дополнительном предположении о нулевой кривизне координатных линий $\xi = \text{const}$, $\eta = \text{const}$ у границы. Если обойтись без такого

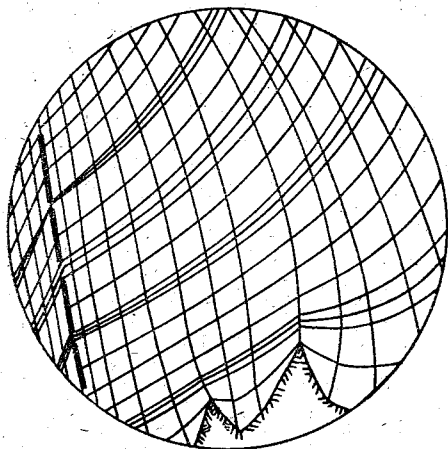


Рис. 5.5. Фрагмент сетки для восточной части Финского залива, построенной методом Томаса—Мидлклофа. Сближение координатных линий в створе дамбы обеспечивается граничным распределением узлов.

предположения, то управляющие функции p , q определяются итерационно. На линиях границы $\eta = \text{const}$ $\mathbf{r}_\xi$, $\mathbf{r}_{\xi\xi}$ известны из граничных условий, а $\mathbf{r}_\eta$, $\mathbf{r}_{\eta\eta}$ аппроксимируются односторонними разностями. Аналогично на линиях границы $\xi = \text{const}$ известны $\mathbf{r}_\eta$, $\mathbf{r}_{\eta\eta}$, а аппроксимация производных по ξ берется с нижней итерации. Найденные у границ значения p^v , q^v на v -итерации интерполируются внутри области по формулам (5.1.14), (5.1.16), после чего решаются уравнения (5.1.10) и определяются p^{v+1} , q^{v+1} по формулам (5.1.20). Процесс продолжается до сходимости управляющих функций с назначенной точностью [135, 139].

5.1.3. Решение уравнений, генерирующих сетку. Рассмотрим краевую задачу для системы двух квазилинейных эллиптических уравнений (5.1.7) либо (5.1.10) в области Ω^* с граничными условиями на $\partial\Omega^*$

$$L(\mathbf{r}) \equiv g_{22} \mathbf{r}_{\xi\xi} - 2g_{12} \mathbf{r}_{\xi\eta} + g_{11} \mathbf{r}_{\eta\eta} = \Phi, \quad g_{11}g_{22} - g_{12}^2 > 0; \quad (5.1.21) \\ \mathbf{r}|_{\partial\Omega^*} = (x^*, y^*),$$

где $\Phi = \Phi^{(1)} = -J^2(P\mathbf{r}_\xi + Q\mathbf{r}_\eta)$ в случае (5.1.7) либо $\Phi = \Phi^{(2)} = -g_{22}p\mathbf{r}_\xi - g_{11}q\mathbf{r}_\eta$ в случае (5.1.10).

Задачу (5.1.21) будем решать на прямоугольной сетке $\Omega_\Delta^*(\xi, \eta)_{m,n}$ $m = 1, 2, \dots, M$; $n = 1, 2, \dots, N$, покрывающей

область Ω^* . Шаги сетки $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ не входят явно в аппроксимацию уравнения (5.1.21); удобно положить $\Delta\xi = \Delta\eta = 1$.

В обозначениях (3.1.20):

$$\delta^+ = T - E; \quad \delta^- = E - T^{-1}, \quad \delta = T - T^{-1}, \quad T_{\xi}^{\pm 1} \mathbf{r}_{m,n} = \mathbf{r}_{m \pm 1, n} \text{ и т. д.,}$$

аппроксимируя уравнение с точностью $O(\Delta^2)$, имеем:

$$L_{\Delta}(\mathbf{r}_{m,n}) = \left\{ (g_{22})_{m,n} \delta_{\xi}^+ \delta_{\xi}^- - \frac{1}{2} (g_{12})_{m,n} \delta_{\xi} \delta_{\eta} + (g_{11})_{m,n} \delta_{\eta}^+ \delta_{\eta}^- \right\} \mathbf{r}_{m,n} = \Phi_{m,n};$$

$$\mathbf{r}|_{\partial\Omega_{\Delta}^*} = (x^*, y^*)_{m,n}. \quad (5.1.22)$$

Одним из широко используемых методов построения сетки является метод последовательной релаксации. Итерационная схема решения задачи (5.1.22) имеет вид

$$\mathbf{r}_{m,n}^{v+1/2} = \frac{1}{2(g_{11} + g_{22})_{m,n}^v} \left\{ a_{m,n}^v \mathbf{r}_{m-1,n}^{v+1} + b_{m,n}^v \mathbf{r}_{m,n-1}^{v+1} + \right.$$

$$+ c_{m,n}^v \mathbf{r}_{m+1,n}^v + d_{m,n}^v \mathbf{r}_{m,n+1}^v -$$

$$\left. - \frac{1}{4} (g_{12})_{m,n}^v (\mathbf{r}_{m+1,n+1}^v + \mathbf{r}_{m-1,n-1}^v - \mathbf{r}_{m+1,n-1}^v - \mathbf{r}_{m-1,n+1}^v) \right\};$$

$$\mathbf{r}_{m,n}^{v+1} = \tau \mathbf{r}_{m,n}^{v+1/2} + (1 - \tau) \mathbf{r}_{m,n}^v, \quad (5.1.23)$$

где $a = g_{22} - \alpha$; $b = g_{11} - \beta$; $c = g_{22} + \alpha$; $d = g_{11} + \beta$; $\alpha = \alpha^{(i)}$; $\beta = \beta^{(i)}$, $i = 1, 2$. Если правая часть уравнения $\Phi = \Phi^{(1)}$ (метод Томпсона), то $\alpha^{(i)} = \alpha^{(1)} = \frac{1}{2} J^2 P$, $\beta^{(i)} = \beta^{(1)} = \frac{1}{2} J^2 Q$; в случае $\Phi = \Phi^{(2)}$ (метод Томаса — Миддлкофа) $\alpha^{(i)} = \alpha^{(2)} = \frac{1}{2} g_{22} p$, $\beta^{(i)} = \beta^{(2)} = \frac{1}{2} g_{11} q$; $0 \leq \tau \leq 2$, $v = 0, 1, \dots$. Перебор узлов в схеме осуществляется по строкам.

Основным вопросом реализации метода является определение оптимального параметра релаксации τ . При $0 < \tau < 1$ релаксация называется нижней, при $1 < \tau \leq 2$ — верхней.

Для назначения оптимального параметра релаксации требуется определить верхнюю границу ρ спектра разностного оператора вспомогательной задачи, что представляет особую проблему, не менее легкую, чем решение самой задачи (5.1.22). В [137] для оценки τ принимается

$$\rho_{m,n} = \frac{1}{(g_{11} + g_{22})_{m,n}} \left\{ (g_{22}^2 - \alpha^2)_{m,n}^{1/2} \cos \frac{\pi}{M-1} + (g_{11}^2 - \beta^2)_{m,n}^{1/2} \cos \frac{\pi}{N-1} \right\}. \quad (5.1.24)$$

Теперь, при $(g_{22})_{m,n} \geq |\alpha|_{m,n}$, $(g_{11})_{m,n} \geq |\beta|_{m,n}$

$$\tau_{m,n} = \frac{2}{1 + (1 - \rho_{m,n}^2)^{1/2}} \quad (5.1.25)$$

(верхняя релаксация), а при $(g_{22})_{m,n} \leq |\alpha|_{m,n}$, $(g_{11})_{m,n} \leq |\beta|_{m,n}$

$$\tau_{m,n} = \frac{2}{1 + (1 + \rho_{m,n}^2)^{1/2}} \quad (5.1.26)$$

(нижняя релаксация).

В общем случае ρ определяется как предел отношения $\|\mathbf{r}^{v+1} - \mathbf{r}^v\| / \|\mathbf{r}^v - \mathbf{r}^{v-1}\|$ при $v \rightarrow \infty$, где в качестве нормы сеточной функции $\mathbf{r}_{m,n}$ принимается сумма модулей ее компонентов в узлах сетки [49].

5.1.4. Композиционные сетки. В области сложной геометрии построение равномерной сетки с использованием управляющих функций может оказаться затруднительным, а иногда и невозможным. В этом случае физическая область Ω разбивается на подобласти, и в каждой из них строится своя сетка с граничными условиями, локализованными частично на внутренних границах, возникших при разбиении Ω . Значения $\mathbf{r} = (x, y)$ в узлах внутренних границ могут быть получены, например, путем предварительного расчета сетки для всей области Ω . При этом важно, чтобы координатные линии, пересекающие внутреннюю границу, обладали в ее узлах достаточной гладкостью. Резкое изменение направления координатных линий в точках стыка на внутренних границах нарушает гладкость вычисляемых метрических коэффициентов на граничных линиях и может послужить источником фиктивных возмущений при интегрировании гидродинамических уравнений.

Удобным методом построения композиционных сеток является метод Томаса — Миддлкофа (п. 5.1.2), поскольку он предоставляет возможность строить управляющие функции p, q такими, чтобы координатные линии пересекали границу под заданным углом θ .

Получим формулы для управляющих функций в общем случае, $\theta \neq \pi/2$. Исключая из уравнений (5.1.10) функцию q , получим на линиях $\eta = \text{const}$:

$$g_{22}(x_{\xi\xi}y_{\eta} - y_{\xi\xi}x_{\eta} + Jp) = 2g_{12}y_{\eta}^2(x_{\eta}/y_{\eta})_{\xi} + g_{11}(x_{\eta}/y_{\eta})_{\eta}. \quad (5.1.27)$$

Как и выше, в предположении локальной кривизны $(x_{\eta}/y_{\eta})_{\eta} = 0$. Для метрического коэффициента g_{12} имеем: $g_{12} = \mathbf{r}_{\xi} \cdot \mathbf{r}_{\eta} = |\mathbf{r}_{\xi}| \times |\mathbf{r}_{\eta}| \cos \theta = |\mathbf{r}_{\xi}| \cdot |\mathbf{r}_{\eta}| \text{ctg} \theta \cdot \sin \theta = |\mathbf{r}_{\xi} \times \mathbf{r}_{\eta}| \text{ctg} \theta = J \text{ctg} \theta$. С помощью этого равенства определим отношение x_{η}/y_{η} через производные по ξ и преобразуем (5.1.27) к виду

$$p = -2(\sin \theta)_{\xi} / \sin \theta - [(x_{\xi} - y_{\xi} \text{ctg} \theta) x_{\xi\xi} + (y_{\xi} + x_{\xi} \text{ctg} \theta) y_{\xi\xi}] / g_{11}. \quad (5.1.28)$$

На линиях $\xi = \text{const}$ для управляющей функции q имеем выражение

$$q = -2(\sin \theta)_{\eta} / \sin \theta - [(x_{\eta} - y_{\eta} \text{ctg} \theta) x_{\eta\eta} + (y_{\eta} + x_{\eta} \text{ctg} \theta) y_{\eta\eta}] / g_{11}. \quad (5.1.29)$$

При $\theta = \pi/2$ эти формулы переходят соответственно в (5.1.13), (5.1.15). Интерполируя полученные значения p, q внутри каждой из подобластей при заданном распределении θ и $\pi - \theta$, получим достаточно гладкое сращение сеточных линий на их общей границе.

5.1.5. Подвижные и адаптирующиеся сетки. Нахождение решения в области $\Omega(x, y, t)$ требует расчета сетки, узлы которой движутся. Перестройка сетки при движении границ области осуществляется следующим образом.

Граничным условием в точках движущейся границы будет условие того, что частица жидкости, находящаяся на границе $\xi^i(x, y, t) = \text{const}$ остается на ней, т. е. условие равенства нулю контравариантных составляющих скорости (4.2.13)

$$U = J^{-1}[(u - x_\tau)y_\eta - (v - y_\tau)x_\eta] = 0 \quad \text{на} \quad \xi = \text{const};$$

$$V = J^{-1}[-(u - x_\tau)y_\xi + (v - y_\tau)x_\xi] = 0 \quad \text{на} \quad \eta = \text{const}.$$

Определяемая постановкой задачи (см. п. 8.1.4) скорость движения границы $v_0 = (u_0, v_0)$ позволяет из уравнения

$$dr/d\tau = v_0(x, y, t) \quad (5.1.30)$$

найти новые значения координат границы $r^{k+1}|_{\partial\Omega}$ и выполнить расчет сетки на шаге $(k+1)\Delta t$, решая задачу (5.1.22).

В ходе решения может происходить значительное изменение границ, и алгоритм перестройки сетки должен исключать неприемлемую деформацию ячеек — их вырождение и перехлест. Улучшение свойств динамических сеток достигается различными вычислительными процедурами [104, 138].

Задача перераспределения узлов в связи с движением границ области является частным случаем более общей задачи расчета сетки, адаптирующейся к характеру решения. Такие сетки строятся исходя из некоторых рациональных требований, формулируемых обычно в виде вариационных принципов. Адаптация сетки сводится к перераспределению плотности узлов и оптимизирует расчет.

Рассмотрим способ сеточной адаптации, начав с одномерного случая [139]. Пусть неравномерное и в некотором смысле оптимальное распределение узлов x_m на отрезке $0 \leq x \leq l$ задается преобразованием $x = x(\xi)$ с равномерным распределением узлов $\xi_m, m = 1, 2, \dots, M; \Delta\xi = 1$. Обозначим через $\omega(x(\xi)) = \omega(\xi) > 0$ некоторую характеристику вариации решения либо меру его погрешности. Ясно, что локальное увеличение ω должно вызывать локальную детализацию сетки, т. е. уменьшение интервалов $x_\xi \Delta\xi = x_\xi$. Таким образом, сеточная адаптация выражается естественным требованием обратной зависимости между вариацией интервалов и вариацией $\omega(\xi)$

$$x_\xi(\xi) = C, \quad (5.1.31)$$

$C = \text{const}$. Это условие можно сформулировать в форме требования минимизации функционала

$$I = \int_0^l \omega(\xi) x_\xi^2 d\xi. \quad (5.1.32)$$

Действительно, уравнение Эйлера — Лагранжа для этого функционала

$$\frac{d}{d\xi} \frac{\partial}{\partial x_\xi} (\omega x_\xi^2) = 0$$

совпадает с (5.1.31). Постоянная C определяется из условия нормировки

$$C = l \int_1^M \omega^{-1} d\xi,$$

и распределение интервалов на оси x дается формулой

$$\Delta x_m = l \left/ \left(\omega \int_1^M \omega^{-1} d\xi \right) \right.$$

Задавая весовую функцию $\omega(\xi)$, будем иметь отвечающее характеру задачи приспособление сетки.

В двумерном случае вариационный принцип формулируется в виде

$$\Phi = \iint_{\Omega^*} \omega q d\xi d\eta, \quad (5.1.33)$$

где весовая функция $\omega(\xi, \eta)$ выражает меру вариации решения, а q — геометрическую характеристику сетки. В частности, когда такой характеристикой является квадрат площади ячейки, $q = J^2$, в одномерном случае имеем: $\mathcal{L} = \omega q = \omega x_\xi^2$, что отвечает лагранжиану (5.1.32). Более общие построения Брэкбилла, Зальцмана [82], Яненко и др. [77] связаны с минимизацией функционала, выражающего ряд конструктивных требований к сетке.

Особенностью океанологических задач является априорно известный характер функции ω . Рост градиентов решения происходит в зонах уменьшения глубин $h(x, y)$ и можно, например, принять

$$\omega = [h_0 + \alpha(h - h_0)]^{-1}, \quad h_0 = \min_{\Omega} h(x, y), \quad \alpha > 0. \quad (5.1.34)$$

При таком задании весовой функции в (5.1.33) с локальным ростом h уменьшается вес требования к сгущению сетки. Задача адаптации упрощается, ибо сетка заранее приспособляется не к решению, а непосредственно к геометрии бассейна.

5.1.6. Трехмерные сетки. Для построения сетки в области $\Omega(x, y, z)$ широко используется обобщение на трехмерный случай эллиптического метода (5.1.6), когда сетка генерируется уравнениями

$$\nabla_3^2 \xi^i = P_i, \quad (5.1.35)$$

$$\nabla_3 = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right); \quad \xi^1 = \xi; \quad \xi^2 = \eta; \quad \xi^3 = \theta;$$

$$P_1 = P; \quad P_2 = Q; \quad P_3 = S.$$

Для обращения уравнений (5.1.35) с целью интегрирования их в вычислительной области $\Omega^*(\xi, \eta, \theta)$ продифференцируем каждую из формул преобразования $x_i = x_i(\xi, \eta, \theta)$ дважды по каждой из переменных x, y, z и сложим результат. Относительно вектора $r = (x, y, z)$ получим уравнение

$$\begin{aligned} & (\xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2) r_{\xi\xi} + (\eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2) r_{\eta\eta} + (\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2) r_{\theta\theta} + \\ & + 2(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y + \xi_z \eta_z) r_{\xi\eta} + 2(\xi_x \theta_x + \xi_y \theta_y + \xi_z \theta_z) r_{\xi\theta} + \\ & + 2(\eta_x \theta_x + \eta_y \theta_y + \eta_z \theta_z) r_{\eta\theta} + r_\xi P + r_\eta Q + r_\theta S = 0. \end{aligned} \quad (5.1.36)$$

Для обращения коэффициентов уравнения воспользуемся формулой (3.1.24): $\partial \xi^i / \partial x_m = J^{-1} a_{mi}$, где a_{mi} являются алгебраическими дополнениями (m, i) -элемента определителя

$$J^T = \begin{vmatrix} x_\xi & x_\eta & x_\theta \\ y_\xi & y_\eta & y_\theta \\ z_\xi & z_\eta & z_\theta \end{vmatrix}.$$

Согласно (3.1.29) $a_{mi} a_{mk} = J^2 g^{ik}$ и коэффициенты уравнения (5.1.36) выражаются через контравариантные компоненты g^{ik} метрического тензора:

$$\begin{aligned} \xi_x^2 + \xi_y^2 + \xi_z^2 &= J^{-2} a_{m_1} a_{m_1} = g^{11}; \quad \eta_x^2 + \eta_y^2 + \eta_z^2 = J^{-2} a_{m_2} a_{m_2} = g^{22}; \\ \theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2 &= J^{-2} a_{m_3} a_{m_3} = g^{33}; \quad \nabla_3 \xi \cdot \nabla_3 \eta = J^{-2} a_{m_1} a_{m_2} = g^{12}; \\ \nabla_3 \xi \cdot \nabla_3 \theta &= J^{-2} a_{m_1} a_{m_3} = g^{13}; \quad \nabla_3 \eta \cdot \nabla_3 \theta = J^{-2} a_{m_2} a_{m_3} = g^{23}. \end{aligned} \quad (5.1.37)$$

Обращенное уравнение (5.1.31) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(r) \equiv & \left\{ g^{11} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + g^{22} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + g^{33} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + 2g^{12} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} + \right. \\ & \left. + 2g^{13} \frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \theta} + 2g^{23} \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \theta} \right\} r = - \frac{\partial r}{\partial \xi^i} P_i. \end{aligned} \quad (5.1.38)$$

На основании (3.1.20) $g^{ik} = J^{-2} A_{ik}$, где A_{ik} — алгебраические дополнения (i, k) -элемента определителя $\|g\|$ (3.1.19). Таким образом: $g^{11} = J^{-2} [(g_{22}g_{33} - (g_{23})^2)]$, $g^{12} = J^{-2} (g_{13}g_{23} - g_{12}g_{33})$ и т. д., что в двумерном случае приводит к уравнению (5.1.7). Уравнение (5.1.38) решается в канонической области Ω^* (при $0 \leq \xi^i \leq 1$,

Ω^* — куб) при заданном соответствии криволинейных и декартовых координат на $\partial\Omega^*$ и $\partial\Omega$.

Рассмотренные выше способы управления сеткой непосредственно переносятся на трехмерный случай. Так, функции $P_i(\xi, \eta, \theta)$ могут представлять набор экспонент. Другой возможности, типа (5.1.9), отвечает представление Томаса — Миддлкофа [128, 135]

$$P = g^{11}p, \quad Q = g^{22}q, \quad S = g^{33}s,$$

что приводит к уравнению

$$g^{11}(r_{\xi\xi} + pr_{\xi}) + g^{22}(r_{\eta\eta} + qr_{\eta}) + g^{33}(r_{\theta\theta} + sr_{\theta}) + 2(g^{12}r_{\xi\eta} + g^{13}r_{\xi\theta} + g^{23}r_{\eta\theta}) = 0. \quad (5.1.39)$$

Выполнение дополнительных требований $g^{ik} = 0$, $i \neq k$ и нулевой локальной кривизны обеспечивает ортогональность соответствующих координатных линий на границе и простую реализацию метода.

Если $\Omega(x, y, t)$ представляет криволинейную цилиндрическую область, то можно ограничиться построением двумерной сетки в каждом сечении цилиндра. Простейшим таким случаем является отображение Ω в параллелепипед Ω^* вида

$$\xi = \xi(x, y, z); \quad \eta = \eta(x, y, z); \quad \theta = z \quad (5.1.40)$$

с якобианом, равным якобиану плоского преобразования $J_* = x_{\xi}y_{\eta} - x_{\eta}y_{\xi}$ [109]. Другим примером является естественная система координат [8].

$$\xi = \xi(x, y); \quad \eta = \eta(x, y), \quad \theta = (z + h)/H \quad (5.1.41)$$

с якобианом $J = HJ_*$.

5.1.7. Другие методы. Поскольку процесс генерирования сетки лишен физического смысла, для этой цели можно использовать как дифференциальные уравнения различного типа, рассматриваемые в качестве инструмента интерполяции граничных значений, так и прямые интерполяционные методы. Ниже обозначаются и сравниваются черты таких подходов.

5.1.7.1. Отображения, задаваемые аналитически. Наиболее просто строится сетка криволинейных координат, когда преобразование задано аналитически. В этом случае требуется лишь разрешить формулы преобразования относительно $\mathbf{r} = (x, y, z)$, поставив в соответствие упорядоченным узлам квадратной сетки Ω_{Δ}^* найденные значения декартовых координат в узлах. Примером могут служить формулы преобразования области, ограниченной попарно противоположными криволинейными и прямыми границами: $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, \gamma_1(x) \leq y \leq \gamma_2(x)\}$ [7]:

$$\xi = x; \quad \eta = (y - \gamma_1)/(\gamma_2 - \gamma_1). \quad (5.1.42)$$

Такое преобразование с якобианом $J = \gamma_2 - \gamma_1 = \gamma$, которое мы назовем спрямляющим, отображает Ω на квадрат $\Omega^* = \{0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$.

В качестве другого примера рассмотрим трехмерную область $\Omega = \{0 \leq x \leq 1, \gamma_1(x, z) \leq y \leq \gamma_2(x, z); -h(x, y) \leq z \leq \xi(x, y, t)\}$.

Спрямляющее преобразование

$$\xi = x; \quad \eta = (y - \gamma_1)/(\gamma_2 - \gamma_1); \quad \theta = (z + h)/(\xi + h) \quad (5.1.43)$$

отображает Ω на куб $\Omega^* = \{0 \leq \xi, \eta, \theta \leq 1\}$.

Управление сеткой, задаваемой аналитически, также не вызывает затруднений. При спрямлении (5.1.42) определяется лишь функция q согласно (5.1.16). Сгущение узлов вдоль координатных η -линий осуществляется их распределением на сегментах границы $\eta = \text{const}$.

5.1.7.2. Гиперболические и параболические методы. Построение сетки можно осуществить также интегрированием уравнений гиперболического либо параболического типа. В первом случае решается система уравнений первого порядка

$$Ar_{\xi} + Br_{\eta} = f$$

с граничными условиями на части контура. К такому виду приводится, например, линеаризованная система уравнений: $g_{12} = 0$ — условие ортогональности, $J = f(\xi, \eta)$ — условие на площади ячеек [139].

Гиперболические методы обеспечивают свойства сетки, определяемые выбором уравнений, и требуют значительно меньшего объема вычислений по сравнению с рассмотренными эллиптическими методами. Их недостатком является неиспользование всей граничной информации и перенесение нерегулярностей границы, выражаемых метрикой, внутрь области по характеристикам. Более того, даже при гладких коэффициентах они могут генерировать возмущения в ходе решения, что приводит в таких случаях к неприемлемым результатам.

Построение сетки можно осуществить также интегрированием параболического уравнения

$$\partial r / \partial \eta = K \partial^2 r / \partial \xi^2 + P; \quad r|_{\eta=1} = r^0; \quad r|_{\xi=1} = r_1; \quad r|_{\xi=M} = r_M,$$

в котором координата η предстает маршевой переменной, аналогичной координате t , P — управляющая функция, $K > 0$. Достоинствами параболического метода является экономичный маршевый алгоритм, как в гиперболическом случае, и сглаживающий эффект, гарантирующий от разрывов решения. Однако здесь не осуществляется непосредственное управление сеткой и основная роль функций P заключается в учете граничной информации на «внешней» границе $\eta = N$ путем интерполяции значений r между текущим маршевым слоем $\eta = n$ и границей $\eta = N$ [114].

5.1.7.3. Алгебраические методы. К алгебраическим методам построения сетки относят различного рода способы интерполяции значений $\mathbf{r}$, заданных на границах и, возможно, на некоторых внутренних линиях области.

Алгебраические методы требуют наименьших вычислительных затрат и реализуются наиболее просто. Однако алгебраические сетки обычно переносят внутрь области нерегулярности границы и оказываются весьма грубыми.

Простейшим таким методом является линейная интерполяция в каждом из координатных направлений. Так, в вычислительном прямоугольнике $\Omega^* = \{0 \leq \xi \leq M, 0 \leq \eta \leq N\}$ интерполяция двух граничных значений $\mathbf{r}(0, \eta) = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}(M, \eta) = \mathbf{r}_M$ вдоль координатной ξ -линии задается формулой

$$\mathbf{r}(\xi) = \varphi_1(\xi/M) \mathbf{r}_1 + \varphi_2(\xi/M) \mathbf{r}_M, \quad 0 \leq \xi \leq M,$$

где $\varphi_1 = 1 - \xi/M$; $\varphi_2 = \xi/M$. В общем случае при задании интерполируемых значений в p узлах, $2 < p < M$, имеем

$$\mathbf{r}(\xi) = \sum_{m=1}^p \varphi_m(\xi/M) \mathbf{r}_m,$$

где базисные функции φ_m таковы, что

$$\varphi_m(\xi_i/M) = \delta_{mi},$$

δ_{mi} — символ Кронекера, $i = 1, 2, \dots, p$. Базисные функции могут задаваться, например, полиномами Лагранжа или кусочно-полиномиальными функциями, которые на каждом интервале $[\xi_m, \xi_{m+1}]$ являются полиномами степени $2k-1$ с производными из $C^{(k-1)}$ -пространства непрерывных на $[\xi_m, \xi_{m+1}]$ функций с непрерывными производными до $(k-1)$ -го порядка. При $k=1$ имеем кусочно-линейный базис, при $k=2$ — кубические полиномы Эрмита; полиномы степени $2k-1$, принадлежащие $C^{(2k-2)}$, образуют подпространство базисных функций, называемых полиномиальными сплайнами, которые отличаются от полиномов Эрмита большей гладкостью в узлах.

При какой-либо из этих форм базиса наиболее удобна так называемая трансфинитная интерполяция [91]

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\xi, \eta) = & \sum_{m=1}^p \varphi_m\left(\frac{\xi}{M}\right) \mathbf{r}(\xi_m, \eta) + \sum_{n=1}^q \psi_n\left(\frac{\eta}{N}\right) \mathbf{r}(\xi, \eta_n) - \\ & - \sum_{m=1}^p \sum_{n=1}^q \varphi_m\left(\frac{\xi}{M}\right) \psi_n\left(\frac{\eta}{N}\right) \mathbf{r}(\xi_m, \eta_n), \end{aligned} \quad (5.1.44)$$

$$\varphi_m(\xi_i/M) = \delta_{m,i}, \quad \psi_n(\eta_j/N) = \delta_{n,j}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad j = 1, 2, \dots, q.$$

Особенность трансфинитной интерполяции в том, что она осуществляет интерполяцию всей совокупности значений на интерпо-

лируемых кривых, в отличие от обычной, осуществляющей интерполяцию значений в узлах пересечения этих кривых.

При $p = q = 2$ с лагранжевым базисом имеем билинейную трансфинитную интерполяцию

$$\begin{aligned} r(\xi, \eta) = & (1 - \xi/M) r(0, \eta) + (\xi/M) r(M, \eta) + (1 - \eta/N) r(\xi, 0) + \\ & + \frac{\eta}{N} r(\xi, N) - \left(1 - \frac{\xi}{M}\right) \left(1 - \frac{\eta}{N}\right) r(0, 0) - \\ & - \left(1 - \frac{\xi}{M}\right) \frac{\eta}{N} r(0, N) - \frac{\xi}{M} \left(1 - \frac{\eta}{N}\right) r(M, 0) - \frac{\xi}{M} \frac{\eta}{N} r(M, N). \end{aligned}$$

Используя базисные функции в узлах середины сторон прямоугольника Ω^* при $p = q = 3$, придем к трансфинитной биквадратичной интерполяции с базисом

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= 2(1 - \xi/M)(1/2 - \xi/M); & \psi_1 &= 2(1 - \eta/N)(1/2 - \eta/N); \\ \varphi_2 &= 4\xi/M(1 - \xi/M); & \psi_2 &= 4\eta/N(1 - \eta/N); \\ \varphi_3 &= 2\xi/M(\xi/M - 1/2), & \psi_3 &= 2\eta/N(\eta/N - 1/2). \end{aligned}$$

Управление сеткой осуществляется увеличением числа опорных линий внутри области. Число слагаемых в интерполяционной формуле при переходе от базиса (p, q) к $(p+1, q+1)$ увеличивается на $p+q+3$. Заметим, что два первых слагаемых в (5.1.44) выражают одномерную интерполяцию в направлениях ξ, η ; если обозначить соответствующие операторы I_ξ, I_η , то формула (5.1.44) представляет булеву сумму этих операторов

$$I_\xi \oplus I_\eta = I_\xi + I_\eta - I_\xi I_\eta. \quad (5.1.45)$$

5.2. Ортогональные сетки

5.2.1. Ортогональные отображения. В случае ортогональной системы координат

$$g_{ik} = g^{ik} = 0, \quad i \neq k. \quad (5.2.1)$$

При этом якобиан $J = \sqrt{g} = (g_{11}g_{22} - g_{12}^2)^{1/2} = \sqrt{g_{11}g_{22}}$. Из (4.1.71), полагая $\Phi = \xi$ и $\Phi = \eta$, соответственно имеем

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \xi} \sqrt{g_{22}/g_{11}}; \quad \nabla^2 \eta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta} \sqrt{g_{11}/g_{22}}. \quad (5.2.2)$$

Отсюда, используя (5.1.5), (5.1.6), получим уравнение для определения декартовых координат $r = (x, y)$ ортогональной сетки в вычислительной области Ω^* :

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\lambda \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\lambda^{-1} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (5.2.3)$$

где $\lambda(\xi, \eta) = \sqrt{g_{22}/g_{11}}$ [139]. Поскольку компоненты метрического тензора $\sqrt{g_{ii}} = ds/d\xi^i$ характеризуют изменение дифференциала дуги в ξ^i -направлении, то функция $\lambda(\xi, \eta)$ представляет

отношение дифференциалов длин сторон сеточных ячеек. Условие $g_{11} = g_{22} = \text{const}$, означающее постоянство растяжения в координатных направлениях, обеспечивает конформность отображения, а при $g_{11} = g_{22} = 1$, т. е. отсутствии растяжения, система координат ξ, η — декартова.

Оператор $\mathcal{L}$ (5.2.3), конечно, не что иное как двумерный аналог оператора Лапласа в ортогональных криволинейных координатах (4.1.50')

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(\frac{H_1 H_2}{H_i^2} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \right), \quad (5.2.4)$$

где коэффициенты Ламе $H_i = \sqrt{g_{ii}}$, $i = 1, 2$.

Из условия ортогональности $g_{12} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$ и соотношений $J = \sqrt{g_{11} g_{22}} = \lambda g_{11} = \lambda^{-1} g_{22}$ нетрудно установить, что

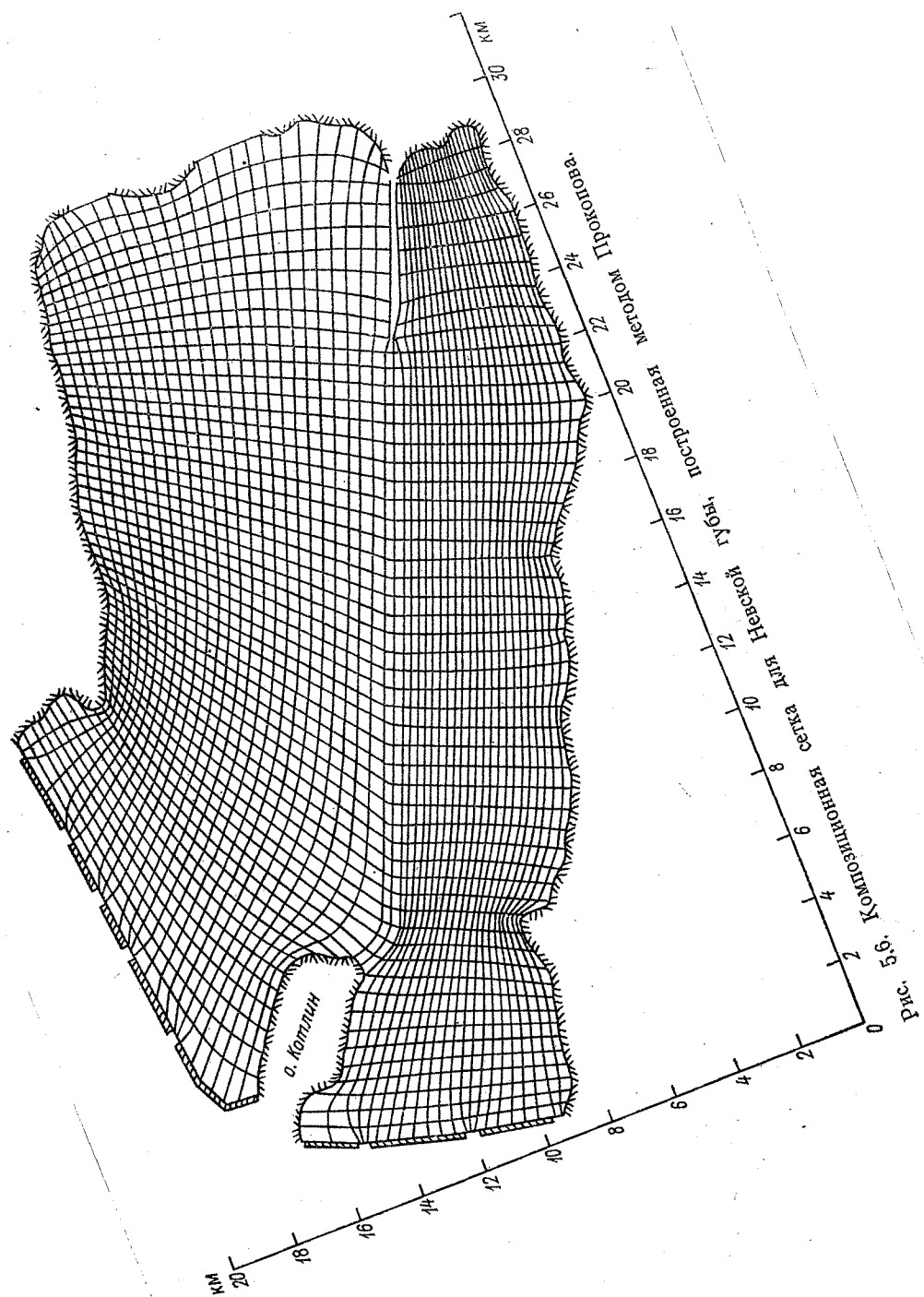
$$\lambda x_\xi = y_\eta; \quad x_\eta = -\lambda y_\xi. \quad (5.2.5)$$

Эти соотношения являются одной из форм условия ортогональности координатных линий. При $\lambda = 1$, т. е. при конформном преобразовании области, они представляют условия Коши — Римана.

Интегрирование уравнения (5.2.3) в Ω^* с целью построения ортогональной сетки требует задания функции $\lambda(\xi, \eta)$ и граничных условий на $\partial\Omega^*$. Условия (5.2.5) выступают как ограничения, следующие из требования ортогональности. Это означает, что если функция $\lambda(\xi, \eta)$ задана в Ω^* , то краевые условия уже нельзя задавать на $\partial\Omega^*$ произвольно. Пусть, например, на границе $\xi = \xi_0$ заданы значения $x(\xi_0, \eta)$; второе из условий (5.2.5) позволяет определить нормаль $y_\xi(\xi_0, \eta)$, и если на этой границе будет задана и сама функция $y(\xi_0, \eta)$, то краевая задача для уравнения (5.2.3) окажется переопределенной.

Рассмотрим назначение граничных условий при априорном задании $\lambda(\xi, \eta)$ [139]. На вертикальных границах ξ_1, ξ_M зададим, например, соответственно $x(\xi_1, \eta)$ и $x(\xi_M, \eta)$, а на горизонтальных границах η_1, η_N — $y(\xi, \eta_1)$ и $y(\xi, \eta_N)$; тогда из (5.2.5) на вертикальных границах определится нормаль y_ξ , а на горизонтальных — нормаль x_η , что обеспечивает корректность краевой задачи для уравнения (5.2.3). Для задания граничных значений можно использовать также условие ортогональности, $x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta = 0$, выполняющееся и на границе.

Другая возможность построения близкой к ортогональной сетки на основе численного интегрирования уравнения (5.2.3) заключается в задании значений x, y на всем контуре $\partial\Omega^*$; при этом функция $\lambda(\xi, \eta)$ внутри области уже не задается, а определяется из краевых условий интерполяцией. Построение сетки использует итерационный процесс, причем на каждом шаге итерации уточняются граничные значения λ , включающие односторонние, нормальные к границе разности. В случае, например, линейной интер-



поляции, когда I_{ξ} , I_{η} — интерполяционные операторы в координатных направлениях, согласно (5.1.45) имеем

$$\begin{aligned} I_{\xi} \lambda_{m,n}^* &= \Phi_1 \lambda_{1,n} + \Phi_2 \lambda_{M,n}; & \Phi_1 &= \frac{M-m}{M-1}; & \Phi_2 &= \frac{m-1}{M-1}; \\ I_{\eta} \lambda_{m,n}^* &= \Psi_1 \lambda_{m,1} + \Psi_2 \lambda_{m,N}; & \Psi_1 &= \frac{N-n}{N-1}; & \Psi_2 &= \frac{n-1}{N-1}; \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

$$\lambda_{m,n} = (I_{\xi} + I_{\eta} - I_{\xi} I_{\eta}) \lambda_{m,n}^*, \quad m=1, 2, \dots, M, \quad n=1, 2, \dots, N.$$

Ряд других процедур построения ортогональных сеток обсуждается в обзоре Томпсона и др. [138].

Алгоритм расчета сетки на основе решения краевой задачи для уравнения (5.2.3) предложен Прокоповым [62] в более общей формулировке нахождения функции $r = (\xi, \eta)$ и некоторого параметра l минимизацией функционала

$$\Phi = \frac{1}{2} \iint_{\Omega^*} [l(x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2) + l^{-1}(x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)] d\xi d\eta. \quad (5.2.7)$$

Легко видеть, что минимум этого функционала при замороженных g_{11} , g_{22} достигается при $l = \sqrt{g_{22}/g_{11}} = \lambda$. Подстановка этого значения в (5.2.7) приводит к функционалу

$$\Phi = \iint_{\Omega^*} \mathcal{L} d\xi d\eta; \quad \mathcal{L} = [(x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2)(x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2)]^{1/2}. \quad (5.2.8)$$

Уравнения Эйлера — Лагранжа для этого функционала

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x_{\xi}} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x_{\eta}} \right) \mathcal{L} = 0; \quad \left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y_{\xi}} - \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y_{\eta}} \right) \mathcal{L} = 0 \quad (5.2.9)$$

и являются уравнениями (5.2.3) в предположении, что λ не варьируется.

Функционал (5.2.8) не выпуклый и для обеспечения необходимых требований к сетке вместо (5.2.8) в [62] рассматривается функционал

$$\Phi = \iint_{\Omega^*} \omega \mathcal{L} d\xi d\eta \quad (5.2.10)$$

с весовой функцией $\omega = |x_{\xi} y_{\eta} - x_{\eta} y_{\xi}|$, минимум которой достигается на решениях уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\omega \lambda \frac{\partial r}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\omega}{\lambda} \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) = 0. \quad (5.2.11)$$

Для численного решения уравнения (5.2.11) с граничными условиями на $\partial\Omega^*$ можно использовать, например, метод последова-

тельной релаксации (раздел 5.1.3). В [15] подробно рассмотрены некоторые близкие эллиптические методы построения сетки и предложены алгоритмы их реализации. Композиционная сетка для Невской губы, построенная методом Прокопова, дана на рис. 5.6.

5.2.2. Конформные и квазиконформные отображения. Взаимно однозначное отображение областей, при котором сохраняются подобие бесконечно малых фигур и их ориентация, называют конформным. При построении сетки конформные отображения обеспечивают ортогональность сетки, подобие сеточных ячеек и их ориентацию. Эти свойства выражаются соотношениями: $g_{ik} = g^{ik} = 0, i \neq k; g_{11} = g_{22} = J \equiv \sqrt{g}$. Таким образом, в данном случае $\lambda = 1$ и из (5.2.5) следует связь между производными координат в вычислительной области Ω^*

$$x_{\xi} = y_{\eta}, \quad x_{\eta} = -y_{\xi}. \quad (5.2.12)$$

В физической области Ω из $g^{ik} = -J^{-2}(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y) = 0, i \neq k$, следует

$$\xi_x = \eta_y, \quad \xi_y = -\eta_x. \quad (5.2.13)$$

Условие (5.2.12) означает, что x, y являются сопряженными гармоническими функциями. Если рассматривать x и y как вещественную и мнимую части функции z комплексного аргумента $\xi = \xi + i\eta$, то (5.2.12) являются условиями Коши — Римана — необходимыми и достаточными условиями аналитичности функции z , т. е. того, что в каждой точке Ω^* функция $z(\xi)$ непрерывна и имеет конечную производную. В силу (5.2.13) аналогичное утверждение справедливо и для функции $\xi = \xi(z)$, заданной в Ω . Модуль производной $|z'(\xi_0)|$ является коэффициентом растяжения в точке ξ_0 при отображении $z = z(\xi)$, причем $|z'(\xi)| = \sqrt{g_{11}} = \sqrt{g_{22}}$, аргумент производной равен углу между касательной в точке ξ_0 к некоторой кривой в Ω^* и касательной в соответствующей точке z_0 к образу этой кривой в Ω .

Допустимость конформного отображения гарантируется теоремой Римана, утверждающей, что если каждая из областей Ω и Ω^* односвязна и не совпадает со всей плоскостью, то отображение всегда возможно. При этом отображение имеет три степени свободы, например можно потребовать, чтобы три граничные точки на $\partial\Omega^*$ перешли в их фиксированные образы на $\partial\Omega$. В случае многосвязных областей по крайней мере необходимо, чтобы они имели одинаковый порядок связности.

В математической физике, в частности в гидродинамике, широко используются конформные отображения, осуществляемые заданными аналитическими функциями, и разработаны методы нахождения аналитических функций, отображающих заданную область на какую-либо каноническую: прямоугольник, круг, полуплоскость. Сюда относятся, например, отображения на круг, использующие экстремальные свойства преобразующих функций, отображение круга на внешность кривой, отображение верхней

полуплоскости на многоугольник (интеграл Кристоффеля — Шварца) и др. При таких отображениях остаются инвариантными наряду с уравнениями Лапласа линии уровня аналитических функций. Это позволяет использовать конформные отображения для построения ортогональной сетки в криволинейной области $\Omega(x, y)$ при отображении на нее канонической области $\Omega^*(\xi, \eta)$ с сеткой Ω_Δ^* [101].

Конформное отображение произвольной односвязной области Ω на прямоугольник, имеющее три степени свободы, не допускает отображения четырех выбранных точек контура $\partial\Omega$ в вершины фиксированного прямоугольника. Одна из сторон прямоугольника, например высота l , должна определяться в процессе отображения. Чтобы отобразить на Ω единичный квадрат $\Omega^* = \{0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$ (уже не конформно), нормируем вертикальную координату: $\bar{\eta} = \eta/l$. Тогда вместо условий Коши — Римана (5.2.12) имеем условия аналитичности функции $z(\xi)$ в квадрате Ω^*

$$lx_\xi = y_\eta; \quad x_\eta = -ly_\xi. \quad (5.2.14)$$

Функция $\mathbf{r} = (x, y)$ удовлетворяет, таким образом, уравнению (5.2.3) с $\lambda = l^2 = \text{const}$

$$l^2 \mathbf{r}_{\xi\xi} + \mathbf{r}_{\eta\eta} = 0. \quad (5.2.15)$$

Для определения l можно воспользоваться одним из условий (5.2.14), интегрируя его вдоль границы, например

$$l = (x_{M,n} - x_{1,n})^{-1} \int_1^M y_\eta(\xi, \eta) d\xi. \quad (5.2.16)$$

Граничные условия для системы уравнений (5.2.15) ставятся в соответствии с положениями п. 5.2.1. Возможно также использование алгоритма фиксации положения свободных узлов ξ_m, η_n на границе $\partial\Omega^*$, при котором обеспечивается конформность отображения [16].

Для отображения всех четырех выбранных точек на контуре физической области Ω в вершины прямоугольника Ω^* с сохранением характера конформности преобразование (5.2.14) обобщается естественным образом. Уравнения (5.2.15) являются частным случаем линейной системы первого порядка

$$\xi_x = \mu(c\eta_y + b\eta_x); \quad \xi_y = -\mu(a\eta_x + b\eta_y), \quad (5.2.17)$$

где a, b, c, d — функции переменных x, y , удовлетворяющие условию $ac - b^2 > 0$ (условию эллиптичности), а μ — инвариант, называемый модулем области. Взаимно однозначное решение этой системы, существование которого устанавливается обобщением теоремы Римана, называют квазиконформным отображением области $\Omega(x, y)$ на $\Omega^*(\xi, \eta)$, причем μ является отношением сторон

прямоугольника Ω^* . В частности, при $ac - b^2 = 1$ система (5.2.17) представляет уравнения Бельтрами [138].

Получим уравнения для генерации криволинейной сетки в Ω на основе преобразования Бельтрами. Исключая ξ из (5.2.17) перекрестным дифференцированием, имеем:

$$\Lambda(\eta) = \left\{ a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + (a_x + b_y) \frac{\partial}{\partial x} + (b_x + c_y) \frac{\partial}{\partial y} \right\} \eta = 0. \quad (5.2.18)$$

Получение уравнения для ξ также не вызывает затруднений. Оказывается, оно имеет аналогичный вид: $\Lambda(\xi) = 0$. Чтобы убедиться в этом, следует составить сумму четырех уравнений: два из них получаются из первого уравнения (5.2.17) умножением на a и c и дифференцированием соответственно по x и y , а два других — умножением второго уравнения (5.2.17) на c и b и дифференцированием соответственно по y и x с использованием условия $ab - c^2 = 1$.

Обратим эти уравнения. Для получения уравнения относительно x -координаты продифференцируем первую из формул преобразования (5.2.17) дважды по x , дважды по y и по x, y ; первое соотношение умножим на a , второе — на c , третье — на $2b$, после чего сложим полученные результаты, используя при этом обращаемые уравнения $\Lambda(\xi) = 0$. Аналогично поступим со второй формулой преобразования (5.1.2). В результате имеем

$$a r_{\xi\xi} - 2\beta r_{\xi\eta} + \gamma r_{\eta\eta} = \Phi, \quad (5.2.19)$$

где

$$r = (x, y); \quad \Phi = \{J^2(a_x + b_y); J^2(b_x + c_y)\};$$

$$\alpha = ay_\eta^2 + cx_\eta^2 - 2bx_\eta y_\eta;$$

$$\beta = ay_\xi y_\eta + cx_\xi x_\eta - b(x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi);$$

$$\gamma = ay_\xi^2 + cx_\xi^2 - 2bx_\xi y_\xi.$$

Подставляя в коэффициент β формулы квазиконформного отображения (5.2.17) ($\mu = 1$), в которых производные ξ_x, ξ_y выражены через r_ξ, r_η

$$y_\eta = (cx_\xi - by_\eta): \quad x_\eta = -ay_\xi + bx_\xi, \quad (5.2.20)$$

и используя условие $ac - b^2 = 1$, получим, что в Ω^* $\beta = 0$. Подставляя (5.2.20) в α , убедимся, что $\alpha = \gamma$, а подставляя (5.2.20) в выражение для якобиана, получим: $J = \gamma$. Таким образом, система уравнений (5.2.19) приобретает простой вид [110]:

$$\begin{aligned} x_{\xi\xi} + x_{\eta\eta} &= J(a_x + b_y); \\ y_{\xi\xi} + y_{\eta\eta} &= J(b_x + c_y). \end{aligned} \quad (5.2.21)$$

Для построения криволинейной сетки интегрированием системы уравнений (5.2.21) можно использовать, например, релаксационный метод (раздел 5.1.3).

5.2.3. Вариационные методы. В п. 5.1.5. упоминалось, что задачу построения криволинейной сетки в Ω можно ставить как вариационную задачу для функционала, выражающего некоторые конструктивные требования к сетке. Если таким требованием является ортогональность координатных линий, то выражение $g^{12} = \nabla \xi \cdot \nabla \eta$ можно рассматривать как меру отклонения от ортогональности. В качестве плотности функции Лагранжа в минимизируемом функционале удобно взять квадрат этой меры по области Ω с весом ω_0 ; таким весом естественно предстает некоторая степень якобиана J , являющегося коэффициентом искажения метрики при преобразовании координат. При $\omega_0 = J^3$ минимизируемый функционал будет иметь в вычислительной области Ω^* наиболее простой вид. Итак, рассмотрим задачу минимизации функционала

$$I_1 = \iint_{\Omega} (\nabla \xi \cdot \nabla \eta)^2 J^3 dx dy. \quad (5.2.22)$$

Согласно (4.1.56), (4.1.63) в вычислительной области Ω этот интеграл имеет вид

$$I_1 = \iint_{\Omega^*} g_{12}^2 d\xi d\eta, \quad (5.2.23)$$

$g_{12} = x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta$. Минимум этого функционала достигается на решениях уравнений Эйлера — Лагранжа

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial x_\xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial x_\eta} - \frac{\partial}{\partial x} \right) g_{12}^2 &= 0; \\ \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial y_\xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial y_\eta} - \frac{\partial}{\partial y} \right) g_{12}^2 &= 0. \end{aligned} \quad (5.2.24)$$

Пропедев выкладки, получим:

$$\begin{aligned} b_1^{(1)} x_{\xi\xi} + b_2^{(1)} x_{\xi\eta} + b_3^{(1)} x_{\eta\eta} + a_1^{(1)} y_{\xi\xi} + a_2^{(1)} y_{\xi\eta} + a_3^{(1)} y_{\eta\eta} &= 0; \\ a_1^{(1)} x_{\xi\xi} + a_2^{(1)} x_{\xi\eta} + a_3^{(1)} x_{\eta\eta} + c_1^{(1)} y_{\xi\xi} + c_2^{(1)} y_{\xi\eta} + c_3^{(1)} y_{\eta\eta} &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.25)$$

где

$$\begin{aligned} a_1^{(1)} &= x_\eta y_\eta; & b_1^{(1)} &= x_\eta^2; & c_1^{(1)} &= y_\eta^2; \\ a_2^{(1)} &= x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi; & b_2^{(1)} &= 2(x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta); & c_2^{(1)} &= 2(x_\xi x_\eta + 2y_\xi y_\eta); \\ a_3^{(1)} &= x_\xi y_\xi; & b_3^{(1)} &= x_\xi^2; & c_3^{(1)} &= y_\xi^2. \end{aligned}$$

Аппроксимируя уравнение (5.2.25) на прямоугольной сетке Ω_Δ^* , определим $\mathbf{r}_{m,n} = (x, y)_{m,n}$ при задании $\mathbf{r}$ на контуре $\partial\Omega_\Delta^*$, например, итерационным методом п. 5.1.3.

Наряду с ортогональностью можно сформулировать и другие требования к сетке в рамках единого метода. Вариационный подход, таким образом, представляется весьма общим, естественным и гибким, поскольку в наборе свойств проектируемой сетки можно

усилить роль наиболее предпочтительных из них. Вместе с тем реализация вариационных методов не требует сколько-нибудь существенных дополнительных затрат.

Простой и эффективный метод, направленный на достижение наряду с ортогональностью гладкости и адаптируемости сетки, предложен Брэкбиллом и Зальцманом [82, 116]. Рассмотрим его, исходя из формулировки двух последних требований в физической области Ω .

Гладкость сетки, т. е. общая в Ω мера вариации градиентов $\nabla \xi$, $\nabla \eta$, выражается интегралом

$$I_2 = \iint_{\Omega} [(\nabla \xi)^2 + (\nabla \eta)^2] d\Omega. \quad (5.2.26)$$

Плотность функции Лагранжа равна здесь сумме диагональных компонентов контравариантного метрического тензора — $g^{11} + g^{22}$ и согласно (5.1.63) является мерой квадрата отношения длины ребра ячейки к ее площади. Минимум интеграла (5.2.26), называемого интегралом Дирихле, достигается на решениях уравнений (5.1.1)

$$\nabla^2 \xi = 0, \quad \nabla^2 \eta = 0.$$

Таким образом, максимально гладкая сетка криволинейных координат такова, что ее линии уровня удовлетворяют уравнениям Лапласа.

Последнее из требований — адаптация сетки к некоторой функции ω — представляется функционалом

$$I_3 = \iint_{\Omega} \omega J d\Omega, \quad (5.2.27)$$

выражающим меру вариации площади ячейки с весовой функцией ω . Площади ячеек должны уменьшаться там, где ω растет. Весовую функцию естественно связать с глубиной: $\omega = \omega(h^{-1})$ и задаться, например, выражением (5.1.34)

$$\omega = [h_0 + \alpha(h - h_0)]^{-1}; \quad h_0 = \min_{\Omega} h(x, y), \quad \alpha = \text{const} > 1. \quad (5.2.28)$$

Согласно (4.1.56), (4.1.63) в области Ω^* эти функционалы имеют вид

$$I_k = \iint_{\Omega^*} q_k d\xi d\eta, \quad k = 2, 3; \quad (5.2.29)$$

$$q_2 = J^{-1}(g_{11} + g_{22}); \quad q_3 = \omega J^2.$$

Минимум их достигается на решениях уравнений Эйлера — Лагранжа (5.2.24) относительно q_2, q_3

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial (x_i)_{\xi}} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial}{\partial (x_i)_{\eta}} - \frac{\partial}{\partial x_i} \right) q_k = 0, \quad k = 2, 3, \quad i = 1, 2. \quad (5.2.30)$$

Для q_1 , проделав выкладки, получим:

$$\begin{aligned} B(\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) - A(\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}) &= 0; \\ -A(\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta}) + C(\alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta}) &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.31)$$

где

$$\begin{aligned} A &= x_{\xi}y_{\xi} + x_{\eta}y_{\eta}; \quad B = y_{\xi}^2 + y_{\eta}^2; \quad C = x_{\xi}^2 + x_{\eta}^2; \\ \alpha &= g_{22}J^{-3}; \quad \beta = g_{12}J^{-3}; \quad \gamma = g_{11}J^{-3}. \end{aligned}$$

Заметим, что систему уравнений (5.2.31) можно записать в виде

$$\begin{aligned} BL(x) - AL(y) &= 0; \\ -AL(x) + CL(y) &= 0, \end{aligned}$$

где $L(\mathbf{r})$ — оператор уравнения (5.1.3), откуда следует

$$(A^2 - BC)L(x)L(y) = 0.$$

Таким образом, если $A^2 - BC \neq 0$, то минимум функционала I_2 достигается на решениях уравнения (5.1.3), что, впрочем, было ясно из его представления (5.2.26) в Ω . Нас интересует, однако, более общий случай, когда гладкость является лишь одним из требований к сетке.

Для этого запишем (5.2.31) в виде, аналогичном (5.2.25):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1^{(2)} \\ a_1^{(2)} \end{pmatrix} x_{\xi\xi} + \begin{pmatrix} b_2^{(2)} \\ a_2^{(2)} \end{pmatrix} x_{\xi\eta} + \begin{pmatrix} b_3^{(2)} \\ a_3^{(2)} \end{pmatrix} x_{\eta\eta} + \begin{pmatrix} a_1^{(2)} \\ c_1^{(2)} \end{pmatrix} y_{\xi\xi} + \\ + \begin{pmatrix} a_2^{(2)} \\ c_2^{(2)} \end{pmatrix} y_{\xi\eta} + \begin{pmatrix} a_3^{(2)} \\ c_3^{(2)} \end{pmatrix} y_{\eta\eta} &= 0, \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

где

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} &= -A\alpha; \quad b_1^{(2)} = B\alpha; \quad c_1^{(2)} = C\alpha; \\ a_2^{(2)} &= 2A\beta; \quad b_2^{(2)} = -2B\beta; \quad c_2^{(2)} = -2C\beta; \\ a_3^{(2)} &= -A\gamma; \quad b_3^{(2)} = B\gamma; \quad c_3^{(2)} = C\gamma. \end{aligned}$$

Адаптируемость сетки к ω выполняется на решениях уравнений (5.2.30) с $q_3 = \omega J^2$. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ 2\omega J \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}_{\eta} \right\} + \frac{\partial}{\partial \eta} \left\{ 2\omega J \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}_{\xi} \right\} = J^2 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix} \quad (5.2.33)$$

или

$$\begin{aligned} 2\omega \left\{ \begin{pmatrix} b_1^{(3)} \\ a_1^{(3)} \end{pmatrix} x_{\xi\xi} + \begin{pmatrix} b_2^{(3)} \\ a_2^{(3)} \end{pmatrix} x_{\xi\eta} + \begin{pmatrix} b_3^{(3)} \\ a_3^{(3)} \end{pmatrix} x_{\eta\eta} + \right. \\ \left. + \begin{pmatrix} a_1^{(3)} \\ c_1^{(3)} \end{pmatrix} y_{\xi\xi} + \begin{pmatrix} a_2^{(3)} \\ c_2^{(3)} \end{pmatrix} y_{\xi\eta} + \begin{pmatrix} a_3^{(3)} \\ c_3^{(3)} \end{pmatrix} y_{\eta\eta} \right\} = -J^2 \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

где

$$\begin{aligned} a_1^{(3)} &= -x_\eta y_\eta; & b_1^{(3)} &= y_\eta^2; & c_1^{(3)} &= x_\eta^2; \\ a_2^{(3)} &= x_\xi y_\eta + x_\eta y_\xi; & b_2^{(3)} &= -2y_\xi y_\eta; & c_2^{(3)} &= -2x_\xi x_\eta; \\ a_3^{(3)} &= -x_\xi y_\xi; & b_3^{(3)} &= y_\xi^2; & c_3^{(3)} &= x_\xi^2. \end{aligned}$$

Сетка со всеми тремя проектируемыми свойствами возникает как решение уравнений Эйлера—Лагранжа, минимизирующее сумму функционалов I_k , $k = 1, 2, 3$, — (5.2.23), (5.2.29)

$$R = \lambda I_1 + I_2 + \mu I_3. \quad (5.2.35)$$

Здесь λ , μ — весовые функции, позволяющие акцентировать предпочтительные свойства сетки. При этом необходимо, чтобы слагаемые имели одинаковый порядок. При $O(\Delta x, \Delta y) = \Delta$, $O(\Delta \xi, \Delta \eta) = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} q_1 &= g_{12}^2 = O(\Delta^4); & q_2 &= J^{-1}(g_{11} + g_{22}) = O(1); \\ q_3 &= \omega J^2 = O(\Delta^4 H_0^{-1}), \end{aligned}$$

H_0 — характерная глубина. Если принять

$$\lambda = \lambda_1 \Delta^{-4}, \quad \mu = \mu_1 H_0 \Delta^{-4}, \quad (5.2.36)$$

$\lambda_1 = O(1)$, $\mu_1 = O(1)$, то слагаемые результирующего функционала (5.2.35) будут иметь одинаковый порядок.

Обозначая

$$\begin{aligned} a_k &= \lambda a_k^{(1)} + a_k^{(2)} + 2\mu \omega a_k^{(3)}; \\ b_k &= \lambda b_k^{(1)} + b_k^{(2)} + 2\mu \omega b_k^{(3)}; & \Phi_1 &= -J^2 \omega_x; \\ c_k &= \lambda c_k^{(1)} + c_k^{(2)} + 2\mu \omega c_k^{(3)}; & \Phi_2 &= -J^2 \omega_y, \end{aligned} \quad (5.2.37)$$

имеем уравнения, отвечающие результирующему функционалу (5.2.35):

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b_1 \\ a_1 \end{pmatrix} x_{\xi\xi} + \begin{pmatrix} b_2 \\ a_2 \end{pmatrix} x_{\xi\eta} + \begin{pmatrix} b_3 \\ a_3 \end{pmatrix} x_{\eta\eta} + \begin{pmatrix} a_1 \\ c_1 \end{pmatrix} y_{\xi\xi} + \\ + \begin{pmatrix} a_2 \\ c_2 \end{pmatrix} y_{\xi\eta} + \begin{pmatrix} a_3 \\ c_3 \end{pmatrix} y_{\eta\eta} = \begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.2.38)$$

Рассмотрим один из возможных методов решения этой системы уравнений. Запишем ее в виде

$$L(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} b_1 a_1 \\ a_1 c_1 \end{pmatrix} \mathbf{r}_{\xi\xi} + \begin{pmatrix} b_2 a_2 \\ a_2 c_2 \end{pmatrix} \mathbf{r}_{\xi\eta} + \begin{pmatrix} b_3 a_3 \\ a_3 c_3 \end{pmatrix} \mathbf{r}_{\eta\eta} = \Phi, \quad (5.2.39)$$

$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, и воспользуемся следующей итерационной процедурой:

$$\nabla^2(\mathbf{r}^{v+1} - \mathbf{r}^v) = -\tau(L(\mathbf{r}^v) - \Phi), \quad (5.2.40)$$

$v = 0, 1, 2, \dots$, τ — релаксационный параметр. При сходимости итераций с заданной точностью $|\mathbf{r}^{v+1} - \mathbf{r}^v| \leq \varepsilon$ получим приближенное решение исходных уравнений.

Численное интегрирование уравнений мелкой воды в произвольной области

Переход к криволинейным координатам, отвечающим конфигурации области, не меняет тип уравнений. Методы, обсуждавшиеся в главе 3, применимы без существенных изменений для интегрирования уравнений мелкой воды в вычислительном прямоугольнике Ω^* , на который отображается произвольная область $\Omega(x, y)$.

Все представленные здесь методы связаны с дискретизацией уравнений в вычислительной области Ω^* . Методы интегрирования уравнений в исходной, физической области Ω не рассматриваются; ознакомиться с ними можно по работе [58].

Модифицированный критерий устойчивости явных схем в криволинейных координатах зависит параметрически не только от глубины жидкости, но и от метрики преобразования. Это накладывает дополнительные ограничения на выбор явной схемы в случае выклинивающихся областей. Удобными методами оказываются такие, которые, сохраняя в двумерном случае оптимальный критерий устойчивости одномерных схем, позволяют использовать различный временной шаг в координатных направлениях.

Обычно применяемые неявные методы приводят к обращению блочно-диагональных матриц. Методы в целом характеризуются тем, что облегчение алгоритма обращения матриц сопровождается усложнением постановки граничных условий для вспомогательных переменных, по которым расщепляется исходная задача. Выбор схемы определяется предпочтением, оказываемым одному из этих факторов перед другим. В крайнем выражении альтернатива выбора выступает в диагональной форме алгоритма факторизации, реализация которого чрезвычайно проста, однако назначение промежуточных краевых условий для переменных, лишенных физического смысла, требует специальных рассуждений.

В такой ситуации особое значение для расчета дозвуковых движений приобретает полунеявный метод, в котором градиенты уровня аппроксимируются неявно, а адвекция — явно. Реализация его сводится к трехточечной прогонке для одной из переменных на каждом временном полушаге и определению двух других переменных по явным формулам. В пренебрежении адвекцией метод абсолютно устойчив, а в общем случае допускает вычисления с числами Куранта достаточно большими, чтобы ограничение на шаг

Δt во многих практических расчетах нестационарных движений определялось уже лишь требованиями точности.

Ниже все эти методы рассматриваются с необходимой подробностью и сопровождаются расчетами длинноволновой денивелиации.

6.1. Явные схемы

6.1.1. Модифицированный критерий устойчивости — модельный пример. В качестве простейшего примера ограничений для явных схем в криволинейных координатах рассмотрим в $\Omega(x, y)$ двумерное уравнение переноса

$$u_t + c(u_x + u_y) = 0, \quad (6.1.1)$$

где $c = \text{const} > 0$. Применяя преобразование $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, $\tau = t$ в области $\Omega^*(\xi, \eta)$, имеем:

$$u_t + c_1 u_\xi + c_2 u_\eta = 0, \quad (6.1.2)$$

$$c_1 = c(s_1 + s_2), \quad c_2 = c(r_1 + r_2); \quad (s_1, s_2) = \nabla \xi, \quad (r_1, r_2) = \nabla \eta.$$

Воспользуемся схемой с направленными разностями. Для уравнения (6.1.1) схема устойчива при

$$\kappa \leq 1/(2c), \quad (6.1.3)$$

$\kappa = \Delta t/\Delta$, $\Delta = \Delta x = \Delta y$. Заметим, что сравнительно с одномерным случаем, когда $\kappa \leq 1$, критерий (6.1.3) не оптимален. Для уравнения (6.1.2) схема устойчива при

$$\kappa \leq 1/(c_1 + c_2). \quad (6.1.4)$$

Понятно, что такое ограничение наиболее обременительно на участках узости. Пусть, например, $\Omega(x, y)$ — клиновидная область: $\alpha x \leq y \leq l - \alpha x$, $0 \leq x \leq l/(\alpha q)$, $\alpha, l, q = \text{const}$, $q > 2$. Спрямяющее преобразование

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y - \alpha x}{l - 2\alpha x} \quad (6.1.5)$$

с якобианом $J = l - 2\alpha x$ отображает Ω в прямоугольник $\Omega^* = \{0 \leq \xi \leq l/(\alpha q), 0 \leq \eta \leq 1\}$. Критерий (6.1.4) имеет вид

$$\kappa \leq 1/(cR^*), \quad (6.1.6)$$

где $R^* = 1 + \eta_x + \eta_y$. В данном случае $R^*|_{\xi=l/(2q)} = 1 + [1 - \alpha(1 - 2\eta)]/[l(1 - 2/q)]$, откуда видно, что при $q \rightarrow 2$, т. е. при выклинивании области, критерий устойчивости схемы быстро ужесточается. Это, конечно, выражает то обстоятельство, что в прямоугольнике Ω^* задается одинаковое сеточное разрешение на всех координатных η -линиях; в местах сужения сетка сгущается, что и регистрирует критерий устойчивости схемы.

В следующем разделе приводится одна из оптимальных явных схем, удобная для интегрирования уравнений в областях со значительной вариацией ширины.

6.1.2. Схема Стрэнга. Рассмотрим уравнение мелкой воды (1.2.8) в области $\Omega = \{0 \leq x \leq L, l_1(x) \leq y \leq l_2(x); t \geq 0\}$ с двумя противоположными криволинейными границами, спрямляемыми преобразованием

$$\xi = x, \quad \eta = (y - l_1)/l, \quad \tau = t, \quad (6.1.7)$$

$l = l_2 - l_1 \neq 0$, $J = l$. В области $\Omega^* = \{0 \leq \xi \leq L, 0 \leq \eta \leq 1, t > 0\}$ согласно (4.2.26) имеем преобразованное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} l \mathbf{Q} + \frac{\partial}{\partial \xi} l \begin{pmatrix} Hu^2 + \frac{1}{2} g H^2 \\ Huv \\ Hu \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial \eta} l \begin{pmatrix} HuV + \frac{1}{2} g H^2 l_0 \\ HuV + \frac{1}{2} g H^2 l^{-1} \\ HV \end{pmatrix} = l \Phi, \quad (6.1.8)$$

где $\mathbf{Q} = (Hu, Hv, H)^T$; $V = l_0 u + l^{-1} v$; $l_0 = -l^{-1} (l_{1x} + \eta l_x)$.

Границу $\partial\Omega^*$ составляют участки твердого контура $\partial\Omega_1^*$ и жидкого — $\partial\Omega_2^*$, приходящегося на открытую границу $\xi = 0$, где ставятся соответствующие граничные условия. На ξ -линиях границы $\partial\Omega_1^*$ ставится условие $u = 0$, на η -линиях — $V = 0$.

Покроем область $\Omega_T^* = \Omega^* \times [0, T]$ равномерной прямоугольной сеткой $\Omega_{TD}^* = \{\xi_{m,n}, \eta_{m,n}, t_k; m = 1, 2, \dots, M; n = 1, 2, \dots, N; k = 0, 1, \dots, K\}$ с шагами $\Delta\xi = L(M-1)^{-1}$, $\Delta\eta = L(N-1)^{-1}$, $\Delta t = T/K$ и рассмотрим аппроксимацию уравнения (6.1.8) относительно сеточной вектор-функции $\mathbf{w} = (\xi, vH)$, $\mathbf{v} = (u, v)$ в виде произведения трех локально одномерных операторов, приводящую к схеме Стрэнга (3.1.28):

$$\mathbf{w}^{k+1} = \mathcal{L}_\eta(\Delta t/2) \mathcal{L}_\xi(\Delta t) \mathcal{L}_\eta(\Delta t/2) \mathbf{w}^k. \quad (6.1.9)$$

Функцию $\mathbf{w}$ будем вычислять на разнесенной сетке. Функции и комбинации функций без индекса относятся к предназначенным для них узлам или сносятся туда линейной интерполяцией. Пусть δ_ξ, δ_η — операторы центральных разностей по соответствующим координатным направлениям: $\delta_\xi u = (u_{2m+1} - u_{2m-1})$ и т. д., σ — оператор осреднения $\kappa_1 = \Delta t / \Delta\xi$, $\kappa_2 = \Delta t / \Delta\eta$. Вычисления на слое $\Delta t/2$ для $\mathbf{w}^* = \mathcal{L}_\eta(\Delta t/2)$ выполним по явно- неявной схеме

$$\begin{aligned} \xi^* &= \xi^k - \frac{\kappa_2}{4} \delta_\eta (HV)^k; \\ (Hu)^* &= (Hu)^k - \frac{\kappa_2}{4} [\delta_\eta (u^k V^k H^*) + g H^* l_0 \delta_\eta \xi^*]; \\ (Hv)^* &= (Hv)^k - \frac{\kappa_2}{4} [\delta_\eta (v^k V^k H^*) + g H^* l^{-1} \delta_\eta \xi^*] + \\ &+ \frac{\Delta t}{2} [-f u H + \tau_\xi^y - \tau_h^y]^k. \end{aligned} \quad (6.1.10)$$

Для вычисления $w^{**} = \mathcal{L}_\xi(\Delta t)w^*$ воспользуемся явно-неявной схемой для $(\xi, uH)^{**}$ и схемой Лакса — для $(vH)^{**}$:

$$\begin{aligned}\xi^{**} &= \xi^* - \frac{\kappa_1}{2} l^{-1} \delta_\xi (lHu)^*; \\ (Hu)^{**} &= (Hu)^* - \frac{\kappa_1}{2} l^{-1} [\delta_\xi (lHu^2)^* + gH^* \delta_\xi^* (l\xi^{**})] + \\ &\quad + \Delta t (fvH + \tau_\xi^* - \tau_h^*); \\ (Hv)^{**} &= \sigma_n (Hv)^* - \frac{\kappa_1}{2} l^{-1} \delta_\xi (l\sigma_{m,n} u^{**} v^* H^{**}).\end{aligned}\quad (6.1.11)$$

Окончательный результат — $w^{k+1} = \mathcal{L}_\eta(\Delta t/2)w^{**}$ — получается из (6.1.10) заменой w^k на w^{**} и w^* на w^{k+1} . Нетрудно убедиться, что схема (6.1.9) аппроксимирует уравнение (6.1.8) с точностью $O(\Delta t, \Delta \xi^2, \Delta \eta^2)$.

Умножая второе уравнение системы (6.1.10) на l_0 , а третье — на l^{-1} и складывая их, получим модельную систему разностных уравнений для спектрального анализа устойчивости при обычных ограничениях:

$$\begin{aligned}\xi^* &= \xi^k - \frac{\kappa_2}{4} h \delta_\eta V^k; \\ V^* &= V^k - \frac{\kappa_2}{4} g (l_0^2 + l^{-2}) \delta_\eta \xi^*,\end{aligned}\quad (6.1.12)$$

условие устойчивости которой

$$\max(l_0^2 + l^{-2})^{1/2} \sqrt{gh} \Delta t / \Delta \eta \leq 4. \quad (6.1.13)$$

При тех же ограничениях третье уравнение системы (6.1.11) устойчиво при $u\Delta t / \Delta \xi \leq 1$, а первые два — при условии

$$\sqrt{gH} \Delta t / \Delta \xi \leq 2. \quad (6.1.14)$$

Отметим, что условия (6.1.3), (6.1.14) являются оптимальными в смысле выполнения критерия сходимости Куранта — Фридрихса — Леви: $\max|\lambda| \leq 1$, где λ — собственные числа матриц перехода соответствующих одномерных задач, ибо при выполнении этих условий для собственных чисел каждой из матриц имеем: $|\lambda| = 1$. Без расщепления двумерного разностного оператора свойство оптимальности утрачивается: в правой части критерия стоит число, меньшее единицы, и вычислительная работа возрастает.

Точность схемы (6.1.9) можно повысить до $O(\Delta t^2, \Delta \xi^2, \Delta \eta^2)$, используя для аппроксимации одномерных операторов $\mathcal{L}_\xi$, $\mathcal{L}_\eta$ какую-либо из схем второго порядка точности, например схему Мак-Кормака (3.1.23) или двухшаговую модификацию Лакса — Вендрофа.

Заметим также, что в силу $\mathcal{L}_\eta(\Delta t/2) \mathcal{L}_\eta(\Delta t/2) = \mathcal{L}_\eta(\Delta t) + O(\Delta t^2)$ эффективность схемы (6.1.9) повышается при использовании ее в форме

$$w^{k+2} = \mathcal{L}_\eta(\Delta t/2) \mathcal{L}_\xi(\Delta t) \mathcal{L}_\eta(\Delta t) \mathcal{L}_\xi(\Delta t) \mathcal{L}_\eta(\Delta t/2) w^k. \quad (6.1.15)$$

При такой организации на промежутке $2\Delta t$ вместо шести привлекаются пять одномерных операторов.

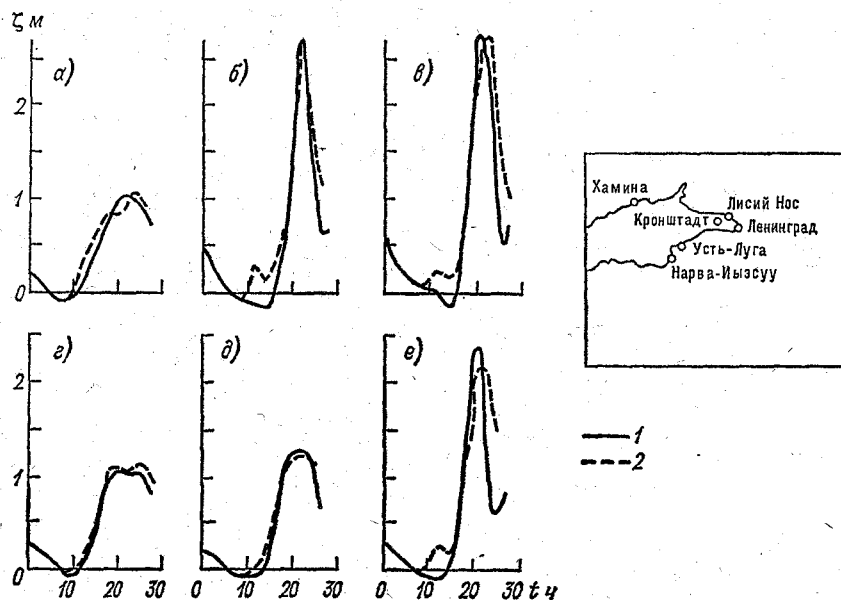


Рис. 6.1. Ход уровня в различных пунктах Финского залива при наводнении 15 октября 1955 г.

а—Хамина; б—Лисий Нос; в—Ленинград-Порт; г—Нарва—Ийэсуу; д—Усть-Луга; е—Кронштадт, 1—наблюдения; 2—численный расчет.

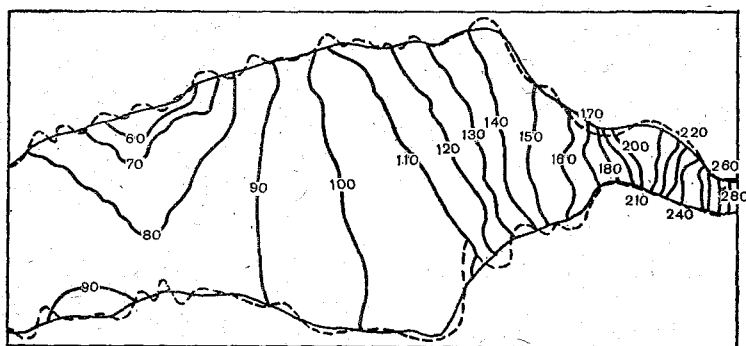


Рис. 6.2. Расчетные изолинии уровня в Финском заливе (см) при наводнении 15 октября 1955 г.

Пунктиром проведена граница области до сглаживания.

Приведем результат моделирования наводнения 15 октября 1955 г. в Ленинграде, вызванного глубоким циклоном, проходившим севернее Финского залива [7]. В расчете принималось: $\Delta \xi =$

$\Delta\eta = 4470$ м, шаг $\Delta\eta$ изменялся от 6510 м в широкой части залива до 750 м в его узкой части; $\Delta t = 120$ с. Коэффициенты придонного трения и поверхностного напряжения задавались равными соответственно $2,0 \cdot 10^{-3}$ и $3,2 \cdot 10^{-6}$. Мелкомасштабные нерегулярности границы предварительно сглаживались при помощи сплайнов. Сравнение фактического и рассчитанного хода уровня в различных пунктах побережья залива представлено на рис. 6.1; на рис. 6.2 приведены изолинии уровня по заливу на 22 ч 24 мин.

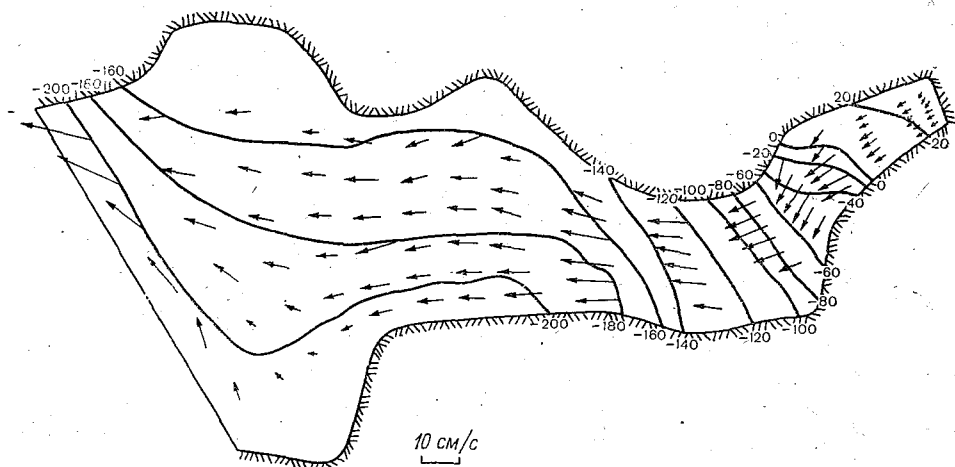


Рис. 6.3. Распределение уровня (см) и скорости течения в момент отлива в Бристольском заливе при наличии плотины в створе Биглей—Эйвонмут.

6.1.3. Явно-неявная схема. Случай более общего преобразования $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ требует предварительного построения сетки каким-либо из методов, обсуждавшихся в главе 5. Если геометрические характеристики мелководного водоема не претерпевают резких изменений, то для интегрирования уравнений удобны простые, не факторизованные схемы. На рис. 6.3 представлен расчет приливных колебаний в Бристольском заливе по явно-неявной схеме (раздел 3.1), матрица перехода которой

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -ig\kappa\alpha \\ 0 & 1 & -ig\kappa\beta \\ -ih\kappa\alpha & -ih\kappa\beta & 1 - \kappa^2 c^2 (\alpha^2 + \beta^2) \end{pmatrix}, \quad (6.1.16)$$

где $\alpha = s_1 \sin \theta_1 \Delta + s_2 \sin \theta_2 \Delta$; $\beta = r_1 \sin \theta_1 \Delta + r_2 \sin \theta_2 \Delta$; $s_1 = \xi_x = J^{-1} y_\eta$; $s_2 = \eta_x = -J^{-1} y_\xi$; $r_1 = \xi_y = -J^{-1} x_\eta$; $r_2 = \eta_y = J^{-1} x_\xi$.

Для собственных чисел λ матрицы G имеем: $|\lambda| = 1$ при $a \leq 2$, где $a = \kappa c (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$, и, таким образом, условием устойчивости схемы является

$$\frac{\Delta t}{\Delta} \leq \frac{2J}{c(g_{11} - 2g_{12} + g_{22})^{1/2}} \quad (6.1.17)$$

— аналог условия (3.1.22) в декартовых координатах.

Для построения сетки в вычислительном прямоугольнике Ω^* , на который отображался Бристольский залив, использовался метод Томпсона (раздел 5.1)

6.2. Неявные схемы

6.2.1. Расщепление двумерного оператора. Рассмотрим систему уравнений (4.2.10) — систему уравнений мелкой воды в криволинейных координатах:

$$L(u) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial \xi} + B \frac{\partial u}{\partial \eta} = \Phi, \quad (6.2.1)$$

$$u = \begin{pmatrix} u \\ v \\ H \end{pmatrix}; \quad A = \begin{pmatrix} U & 0 & gs_1 \\ 0 & U & gs_2 \\ Hs_1 & Hs_2 & U \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} V & 0 & gr_1 \\ 0 & V & gr_2 \\ Hr_1 & Hr_2 & V \end{pmatrix}.$$

Факторизуем двумерный оператор $L(u)$, исходя из соотношения

$$u^{k+1} = u^k + \frac{\Delta t}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{k+1} + \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^k \right] + O(\Delta t^3), \quad (6.2.2)$$

которое следует из разложений $u^{k+1} = u^k + u_t^k \Delta t + u_{tt}^k \Delta t^2/2$ и $u_t^{k+1} = u_t^k + \Delta t u_{tt}^k$ при исключении u_{tt}^k . Выражая производные по времени через пространственные производные из (6.2.1), имеем:

$$u^{k+1} = u^k - \frac{\Delta t}{2} [(Au_\xi + Bu_\eta)^{k+1} + (Au_\xi + Bu_\eta)^k] + \Delta t \Phi^k + O(\Delta t^3) \quad (6.2.3)$$

или

$$\left[E + \frac{\Delta t}{2} \left(A \frac{\partial}{\partial \xi} + B \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] u^{k+1} = \left[E - \frac{\Delta t}{2} \left(A \frac{\partial}{\partial \xi} + B \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \right] u^k + \Delta t \Phi^k,$$

откуда

$$\begin{aligned} & \left(E + \frac{\Delta t}{2} A \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(E + \frac{\Delta t}{2} B \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u^{k+1} = \\ & = \left(E - \frac{\Delta t}{2} A \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(E - \frac{\Delta t}{2} B \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u^k + \Delta t \Phi^k. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Факторизованная форма отличается от уравнения (6.2.3) слагаемым

$$\frac{\Delta t^3}{4} (Au_{\xi t} \cdot Bu_\eta + Au_\xi \cdot Bu_{\eta t}) + O(\Delta t^4).$$

Обозначая правую часть (6.2.4) через Φ , запишем алгоритм расщепления исходной системы, аналогичный (3.1.34), аппроксимирующий ее с точностью $O(\Delta t^3)$:

$$\begin{aligned} & \left(E + \frac{\Delta t}{2} A \frac{\partial}{\partial \xi} \right) u^* = \Phi; \\ & \left(E + \frac{\Delta t}{2} B \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u^{k+1} = u^*. \end{aligned} \quad (6.2.5)$$

Аналогичный алгоритм для уравнения в консервативной форме, приводящий к схеме Бима—Уорминга [141], имеет вид (3.1.47) с матрицами $\tilde{A}$, $\tilde{B}$ (4.2.18').

Для протяженных областей значительной глубины, когда по порядку величины сила Кориолиса не уступает главным членам уравнений, она должна записываться неявно и входить в левую часть одномерных операторов (6.2.5).

Из (6.2.4) следуют также и другие формы расщепления. Не останавливаясь на сделанных замечаниях подробно, приведем диагональную форму алгоритма факторизации (6.2.4). Диагонализировать матрицы A , B преобразованием подобия:

$$\begin{aligned} S^{-1}AS &= \Lambda_A = \begin{pmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & U + cs & 0 \\ 0 & 0 & U - cs \end{pmatrix}; \\ R^{-1}BR &= \Lambda_B = \begin{pmatrix} V & 0 & 0 \\ 0 & V + cr & 0 \\ 0 & 0 & V - cr \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

где

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \begin{pmatrix} -\beta & \alpha & 0 \\ \alpha/\sqrt{2} & \beta/\sqrt{2} & c/(H\sqrt{2}) \\ \alpha/\sqrt{2} & \beta/\sqrt{2} & -c/(H\sqrt{2}) \end{pmatrix}; \\ S &= \begin{pmatrix} -\beta & \alpha/\sqrt{2} & \alpha/\sqrt{2} \\ \alpha & \beta/\sqrt{2} & \beta/\sqrt{2} \\ 0 & H/(c\sqrt{2}) & -H/(c\sqrt{2}) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (6.2.7)$$

$\alpha = s_1/s$; $\beta = s_2/s$; $s = (s_1^2 + s_2^2)^{1/2} = J^{-1}(x_\eta^2 + y_\eta^2)^{1/2}$. Строками матрицы S^{-1} являются нормированные левые собственные векторы матрицы A , столбцами S — нормированные правые собственные векторы матрицы A . Матрицы R^{-1} , R получаются из S^{-1} , S заменой s_i на r_i , $r = (r_1^2 + r_2^2)^{1/2} = J^{-1}(x_\xi^2 + y_\xi^2)^{1/2}$. Из (6.2.6) $A = S\Lambda_A S^{-1}$, $B = R\Lambda_B R^{-1}$ и факторизованный оператор (6.2.4) можно записать в виде

$$\left(SS^{-1} + \frac{\Delta t}{2} S\Lambda_A S^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(RR^{-1} + \frac{\Delta t}{2} R\Lambda_B R^{-1} \frac{\partial}{\partial \eta} \right) u^{k+1} = \Phi \quad (6.2.8)$$

или

$$\left[S \left(E + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_A \frac{\partial}{\partial \xi} \right) S^{-1} \right] \left[R \left(E + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_B \frac{\partial}{\partial \eta} \right) R^{-1} \right] u^{k+1} = \Phi. \quad (6.2.9)$$

Можно показать, что переход к (6.2.9) — перемена мест операторов дифференцирования и матриц S^{-1} , R^{-1} — вносит ошибку $O(\Delta t)$

[121]. Обозначая $\hat{S} = S^{-1}R$, имеем диагональную форму алгоритма факторизации:

$$\begin{aligned} \left(E + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_A \frac{\partial}{\partial \xi}\right) \mathbf{u}^* &= S^{-1} \Phi; & \mathbf{u}^{**} &= \hat{S}^{-1} \mathbf{u}^*; \\ \left(E + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_B \frac{\partial}{\partial \eta}\right) \hat{\mathbf{u}} &= \mathbf{u}^{**}; & \mathbf{u}^{k+1} &= R \hat{\mathbf{u}}, \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

который реализуется чрезвычайно просто: на каждом временном шаге требуются обращение двух диагональных матриц и два перемножения матрицы на вектор. Трудность использования алгоритма заключается в назначении граничных условий для вспомогательных переменных $\mathbf{u}^*$, $\hat{\mathbf{u}}$.

Характер реализации алгоритма (6.2.5) определяется аппроксимацией пространственных производных. В дальнейшем мы остановимся на назначении граничных условий и вычислительных процедурах для неявных схем с центральными и направленными разностями, которые приводят соответственно к блочно-трехдиагональным и блочно-двухдиагональным матрицам.

6.2.2. Граничные условия. Постановка граничных условий для одномерных гиперболических уравнений (6.2.5) осуществляется в соответствии с положениями раздела 3.2. Запишем первое из этих уравнений:

$$\partial \mathbf{u}^* / \partial t + A \partial \mathbf{u}^* / \partial \xi = \Phi^k. \quad (6.2.11)$$

Умножим его слева на матрицу S^{-1} (6.2.7). В силу $S^{-1}A = \Lambda_A S^{-1}$ имеем

$$S^{-1} \mathbf{u}_t^* + \Lambda_A S^{-1} \mathbf{u}_\xi^* = S^{-1} \Phi^k. \quad (6.2.12)$$

Полагая $S^{-1} = \partial \mathbf{w} / \partial \mathbf{u}$, перепишем уравнение в виде

$$\mathbf{w}_t + \Lambda_A \mathbf{w}_\xi = S^{-1} \Phi^k, \quad (6.2.13)$$

показывающем, что на левой границе области Ω^* , $\xi = 1$, число граничных условий должно равняться числу положительных собственных чисел матрицы $\Lambda_A|_{\xi=1}$, а на правой границе, $\xi = M$, — числу отрицательных собственных чисел $\Lambda_A|_{\xi=M}$.

Пусть жидкая часть контура $\partial \Omega_2$ физической области Ω при отображении ее на прямоугольник Ω^* отображается на левую границу прямоугольника $\xi = 1$. Тогда при $U > 0$, т. е. при входе жидкости, на этой границе следует ставить два граничных условия, а при $U < 0$, т. е. на выходе, — одно условие. На твердом контуре, $\partial \Omega_1$, отображающемся на три другие стороны прямоугольника, ставится одно граничное условие, ибо матрица Λ_A имеет там лишь одно знакоопределенное собственное число.

На открытой левой границе, $\xi = \xi_1$, при входе жидкости в Ω^* возьмем граничные условия в виде

$$\begin{aligned} -\beta u_1^* + \alpha v_1^* &= \gamma_1(t); \\ U_1^* + \frac{c}{H} \xi^* &= \gamma_2(t). \end{aligned} \quad (6.2.14)$$

Обозначим собственные векторы A через l_i , $i = 1, 2, 3$; введем матрицу и вектор

$$L_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ l_3 \end{pmatrix}; \quad \gamma^I = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \xi^k/\Delta t \end{pmatrix}$$

и запишем уравнение на границе $\xi = \xi_1$:

$$S^{-1} u_1^* + L_2 A u_\xi^* = \gamma^I.$$

Здесь используется, что $\Lambda_A S^{-1} = S^{-1} A$ и S^{-1} во втором слагаемом заменяется на L_2 . Такая запись системы (6.2.2) позволяет удобно учесть граничные условия (6.2.14) [86]. В третьем уравнении (6.2.5), отвечающем отрицательному собственному числу $\lambda_3 = U - cs$, пространственная производная аппроксимируется разностью вперед. Из (6.2.12) следует связь между неизвестными на левой границе

$$u_1^* = S^I u_2^* + \Gamma^I, \quad (6.2.15)$$

где $S^I = S L_2 A$, $\Gamma^I = S \gamma^I$.

На правой (твердой) границе $\xi = \xi_M$ ставится одно условие, заменяющее третье уравнение системы (6.2.12):

$$U_M^* = (\alpha u^* + \beta v^*)_M = 0 \quad (6.2.16)$$

Если ввести матрицы R_1 , R_2 и вектор γ^{II}

$$R_1 = \begin{pmatrix} -\beta & \alpha & 0 \\ \alpha/\sqrt{2} & \beta/\sqrt{2} & c/(H\sqrt{2}) \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix}; \quad R_2 = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \gamma_2 = \begin{pmatrix} \varphi_1^k + u^k/\Delta t \\ \varphi_2^k + v^k/\Delta t \\ 0 \end{pmatrix},$$

то на правой границе решаемые уравнения и граничное условие (6.2.16) запишутся в виде

$$R_1 u_M^*/\Delta t + R_2 A u_\xi^* = \gamma^{II},$$

причем в первых двух уравнениях, отвечающих неотрицательным собственным числам $\lambda_1 = U$, $\lambda_2 = U + cs$, пространственные производные аппроксимируются разностью назад. Отсюда следует связь между неизвестными на правой границе

$$u_M^* = S^{II} u_{M-1}^* + \Gamma^{II}, \quad (6.2.17)$$

где $S^{II} = \Delta t R_1^{-1} R_2 A$; $\Gamma^{II} = \Delta t R_1^{-1} \gamma^{II}$.

При решении второго из уравнений (6.2.5) на нижней и верхней твердых границах прямоугольника Ω^* ставится условие

$$V^{k+1} = 0, \quad (6.2.18)$$

заменяющее соответственно второе (на линии $\eta = \eta_1$) и третье (на линии $\eta = \eta_N$) уравнение решаемой системы. Связь между неизвестными на этих границах устанавливается аналогично (6.2.17).

6.2.3. Центральноразностная неявная схема. Рассмотрим алгоритм решения системы (6.2.5) при аппроксимации пространственных производных центральноразностными отношениями. Реализация неявной схемы сводится в этом случае к обращению блочно-трехдиагональных матриц с учетом условий на границах.

Схема с центральными разностями не диссипативна, и решение требует сглаживания для предупреждения высокочастотных осцилляций. Если главную часть трехточечного оператора сглаживания аппроксимировать неявно, а смешанные производные — явно, то с учетом (4.1.71) система (6.2.5) примет вид

$$\begin{aligned} \left\{ E + \frac{\Delta t}{2} \left[A \delta_\xi - \frac{1}{2} v J^{-1} \delta_\xi (J^{-1} g_{22} \delta_\xi) \right] \right\} u^k &= F^k; \\ \left\{ E + \frac{\Delta t}{2} \left[B \delta_\eta - \frac{1}{2} v J^{-1} \delta_\eta (J^{-1} g_{11} \delta_\eta) \right] \right\} u^{k+1} &= u^*, \end{aligned} \quad (6.2.19)$$

где

$$\begin{aligned} F^k &= \Phi^k - \Delta t \left\{ v J^{-1} \left[\delta_\xi (J^{-1} g_{12} \delta_\eta) + \delta_\eta (J^{-1} g_{12} \delta_\xi) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{2} \delta_\xi (J^{-1} g_{12} \delta_\xi) + \frac{1}{2} \delta_\eta (J^{-1} g_{11} \delta_\eta) \right] \right\} u^k, \end{aligned}$$

δ_ξ, δ_η — центральноразностные операторы; v — матрица сглаживания; $v = vE$; $v = (v_1, v_2, 0)$.

Для первого из уравнений (6.2.19) имеем:

$$a_m u_{m+1}^* + b_m u_m^* + c_m u_{m-1}^* = \frac{4}{\Delta t} F_m^k, \quad m = 2, 3, \dots, M-1; \quad (6.2.20)$$

$$a_m = A_m - v \rho_m; \quad b_m = \frac{4}{\Delta t} E - a_m - c_m; \quad c_m = -A_m - v \rho_{m-1};$$

$$\rho_m = 2J_m^{-1} (J^{-1} g_{22})_{m+1/2}; \quad \rho_{m-1} = 2J_m^{-1} (J^{-1} g_{22})_{m-1/2}.$$

Для решения системы уравнений (6.2.20) с граничными условиями (6.2.15), (6.2.17)

$$\mathcal{A} u^* = f \quad (6.2.21)$$

представим матрицу $\mathcal{A}$ в виде произведения

$$\mathcal{A} = LR,$$

где L, R — двухдиагональные матрицы. Предварительно модифицируем первое и последнее из уравнений (6.2.20), исключив из

первого $\mathbf{u}_1^*$, а из последнего — $\mathbf{u}_M^*$ с помощью граничных условий. Пусть $a_2 \mathbf{u}_3^* + \bar{b}_2 \mathbf{u}_2^* = \mathbf{f}_2$, $\bar{b}_{M-1} \mathbf{u}_{M-1}^* + c_{M-1} \mathbf{u}_{M-2}^* = \mathbf{f}_{M-1}$ — модифицированные уравнения. Тогда

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \bar{b}_2 a_2 \\ c_3 b_3 a_3 \\ c_4 b_4 a_4 \\ \vdots \\ c_{M-1} \bar{b}_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_2 \\ c_3 p_3 \\ c_4 p_4 \\ \vdots \\ c_{M-1} p_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E q_2 \\ E q_3 \\ E q_4 \\ \vdots \\ E \end{bmatrix}.$$

Элементы p_m, q_m определяются по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} p_2 &= \bar{b}_2; & p_m &= b_m - c_m q_{m-1}, & m &= 3, 4, \dots, M-1; \\ q_2 &= \bar{b}_2^{-1} a_2; & q_m &= p_m^{-1} a_m, & m &= 3, 4, \dots, M-2. \end{aligned} \quad (6.2.22)$$

Система уравнений (6.2.21) эквивалентна следующей:

$$L\mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad R\mathbf{u}^* = \mathbf{w}. \quad (6.2.23)$$

Записывая первое из этих уравнений в развернутом виде

$$\begin{bmatrix} p_2 \\ c_3 p_3 \\ c_4 p_4 \\ \vdots \\ c_{M-1} p_{M-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_4 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{M-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \\ \mathbf{f}_4 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{M-1} \end{bmatrix}, \quad (6.2.24)$$

найдем

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_2 &= p_2^{-1} \mathbf{f}_2; & \mathbf{w}_m &= p_m^{-1} (\mathbf{f}_m - c_m \mathbf{w}_{m-1}), & m &= 3, 4, \dots, M-2; \\ \mathbf{w}_{M-1} &= p_{M-1}^{-1} (\mathbf{f}_{M-1} - c_{M-1} \mathbf{w}_{M-2}). \end{aligned}$$

Второе из уравнений (6.2.23)

$$\begin{bmatrix} E q_2 \\ E q_3 \\ E q_4 \\ \vdots \\ E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}_2^* \\ \mathbf{u}_3^* \\ \mathbf{u}_4^* \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{M-1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_3 \\ \mathbf{w}_4 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{M-1} \end{bmatrix} \quad (6.2.25)$$

позволяет определить неизвестные $\mathbf{u}^*$ по формулам

$$\mathbf{u}_{M-1}^* = \mathbf{w}_{M-1}; \quad \mathbf{u}_m^* = \mathbf{w}_m - q_m \mathbf{u}_{m+1}^*, \quad m = M-1, M-2, \dots, 2. \quad (6.2.26)$$

Неизвестные u^{k+1} определяются из второго уравнения (6.2.5) с граничными условиями (6.2.18) аналогичной процедурой.

6.2.4. Неявная схема с направленными разностями. Схема с направленными против потока разностями строится разбиением матриц A , B на сумму двух знакоопределенных матриц. Диагонализируем матрицы A , B преобразованием подобия (6.2.6):

$$S^{-1}AS = \Lambda_A; \quad R^{-1}BR = \Lambda_B.$$

Выполним разбиение

$$\Lambda_A = \Lambda_A^+ + \Lambda_A^-; \quad \Lambda_B = \Lambda_B^+ + \Lambda_B^-, \quad (6.2.27)$$

такое, что Λ_A^+ , Λ_B^+ отвечают неотрицательным, а Λ_A^- , Λ_B^- — неположительным собственным числам соответствующих матриц. Поскольку в дозвуковом случае $|U| = |u_1 + u_2| \leq cs$, $|V| = |ur_1 + ur_2| \leq cr$, то можно, например, принять

$$\Lambda_A^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(U + |U|) & 0 & 0 \\ 0 & U + cs & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Lambda_A^- = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(U - |U|) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U - cs \end{bmatrix}; \quad (6.2.28)$$

$$\Lambda_B^+ = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(V + |V|) & 0 & 0 \\ 0 & V + cr & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \Lambda_B^- = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(V - |V|) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & V - cr \end{bmatrix}.$$

Разбиение самих матриц A , B строится теперь следующим образом:

$$A = S\Lambda_AS^{-1} = S(\Lambda_A^+ + \Lambda_A^-)S^{-1} = S\Lambda_A^+S^{-1} + S\Lambda_A^-S^{-1} = A^+ + A^-; \quad (6.2.29)$$

$$B = R\Lambda_BR^{-1} = R(\Lambda_B^+ + \Lambda_B^-)R^{-1} = R\Lambda_B^+R^{-1} + R\Lambda_B^-R^{-1} = B^+ + B^-.$$

При этом $A^+A^- = S\Lambda_A^+\Lambda_A^-S^{-1} = 0$, ибо $\Lambda_A^+\Lambda_A^- = 0$, и аналогично $B^+B^- = 0$.

Исходя из алгоритма (6.2.5), напомним схему с операторами направленных разностей $\delta^\pm$ (или $D^\pm$) в соответствии с разбиением $A^\mp$, $B^\mp$. Факторизованная схема, аппроксимирующая первое из уравнений (6.2.5)

$$\left(E + \frac{\kappa}{2} A^+ \delta^-\right) \left(E + \frac{\kappa}{2} A^- \delta^+\right) u^* = \Phi, \quad (6.2.30)$$

реализуется решением систем с двухдиагональными матрицами

$$\left(E + \frac{\kappa}{2} A^+ \delta^-\right) u^{**} = \Phi; \quad \left(E + \frac{\kappa}{2} A^- \delta^+\right) u^* = u^{**} \quad (6.2.31)$$

и аналогично для второго из уравнений (6.2.5).

Для решения уравнений в консервативной форме (3.1.46) по схеме с направленными разностями требуется знакоопределенное разбиение векторов F , G , аналогичное случаю декартовых координат (3.1.43).

Помимо облегченной реализации, схемы с направленными разностями обладают и тем преимуществом, что не требуют добавления искусственной вязкости. Как показано в разделе 3.1, схема с операторами $\delta^\pm$ может интерпретироваться как центрально-разностная со схемной вязкостью второго порядка, а с операторами $D^\pm$ — как аппроксимация второго порядка со схемной вязкостью четвертого порядка.

6.2.5. Полуявная схема. Значительное упрощение алгоритма достигается в случае, когда адвективные члены в уравнениях движения аппроксимируются явно [124]. Приведем такую схему для системы (4.2.17) в ковариантной метрике:

$$\begin{aligned} p_\tau + gHJ^{-1}(g_{22}\xi_\xi - g_{12}\xi_\eta) &= \psi_1; \\ q_\tau + gHJ^{-1}(g_{11}\xi_\eta - g_{12}\xi_\xi) &= \psi_2; \\ H_\tau + J^{-1}p_\xi + J^{-1}q_\eta &= 0. \end{aligned} \quad (6.2.32)$$

Запишем выражение для адвекции, входящей в вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ правой части:

$$\psi_{\text{адв}} = - \begin{pmatrix} (Up)_\xi + (Vp)_\eta + JHU^j \Gamma_{kj}^1 U^k \\ (Uq)_\xi + (Vq)_\eta + JHU^j \Gamma_{kj}^2 U^k \end{pmatrix}. \quad (6.2.33)$$

Последнее слагаемое — квадратичная форма, обязанная локальности базиса при ковариантном дифференцировании, — имеет вид

$$JHU^j \Gamma_{kj}^i U^k = JH(U^2 \Gamma_{11}^i + 2UV \Gamma_{12}^i + V^2 \Gamma_{22}^i).$$

Символы Кристоффеля 2-го рода выражаются через производные компонентов метрического тензора. В данном случае удобнее другое их представление. Согласно определению (4.1.35): $\partial \mathbf{e}_i / \partial \xi^j = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k$. Подставляя сюда $\mathbf{e}_i = \partial \mathbf{r} / \partial \xi^i = (\partial x_l / \partial \xi^i) \mathbf{i}_l$ с учетом $\mathbf{i}_l = (\partial \xi^k / \partial x_l) \mathbf{e}_k$, получим: $[\partial^2 x_l / (\partial \xi^i \partial \xi^j)] (\partial \xi^k / \partial x_l) \mathbf{e}_k = \Gamma_{ij}^k \mathbf{e}_k$, т. е.

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{\partial^2 x_l}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \frac{\partial \xi^k}{\partial x_l}.$$

Таким образом: $\Gamma_{11}^i = x_{\xi\xi} \xi_x + y_{\xi\xi} \xi_y = J^{-1}(x_{\xi\xi} y_\eta - |y_{\xi\xi} x_\eta|)$, $\Gamma_{12}^i = x_{\xi\eta} \xi_x + y_{\xi\eta} \xi_y = J^{-1}(x_{\xi\eta} y_\eta - y_{\xi\eta} x_\eta)$ и т. д.

Выразим силу Кориолиса и напряжение трения на дне, входящие в ψ , через компоненты вектора $\mathbf{w} = (p, q, H)$. Имеем:

$$JH\Phi \cdot \mathbf{e}^i = JH \begin{pmatrix} lv - ru |\mathbf{v}|/H \\ -lu - rv |\mathbf{v}|/H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x^i \\ \xi_y^i \end{pmatrix} = JH \left[l(v \xi_x^i - u \xi_y^i) - \frac{r}{H} U^i |\mathbf{v}| \right].$$

$r, l = \text{const.}$ Теперь следует выразить компоненты вектора $\mathbf{v} = (u, v)$ через его контравариантные компоненты — $u = J(U\eta_y - V\xi_y)$, $v = J(V\xi_x - U\eta_x)$ и перейти к ковариантной метрике. Окончательно получим:

$$JH\Phi \cdot \mathbf{e}^i = J^{-1} \left\{ l \begin{pmatrix} g_{12}p + g_{22}q \\ -g_{11}p - g_{12}q \end{pmatrix} - \frac{r}{H^2} (g_{11}p^2 + 2g_{12}pq + g_{22}q^2)^{1/2} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right\}.$$

Обозначим $gHJ^{-1}g_{22} = \gamma$, $gHJ^{-1}g_{12} = \beta$, $gHJ^{-1}g_{11} = \alpha$ и факторизуем систему уравнений (6.2.32):

$$\begin{aligned} & \left(E + \frac{\Delta t}{2} A\delta_\xi\right) \left(E + \frac{\Delta t}{2} B\partial_\eta\right) \mathbf{w}^{k+1} = \\ & = \left(E - \frac{\Delta t}{2} A\delta_\xi\right) \left(E - \frac{\Delta t}{2} B\partial_\eta\right) \mathbf{w}^k + \Delta t \psi^k, \end{aligned} \quad (6.2.34)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & -\beta \\ J^{-1} & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & \alpha \\ 0 & J^{-1} & 0 \end{pmatrix}; \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Это уравнение является аналогом (3.1.50) в криволинейных координатах. Аппроксимируя дифференциальные операторы $\partial_\xi \sim \delta_\xi$, $\partial_\eta \sim \delta_\eta$, приходим к схеме Кранка—Николсона, реализуемой, например, расщеплением Писмена—Рэчфорда (3.1.33):

$$\begin{aligned} & \left(E + \frac{\gamma}{4} A\delta_\xi\right) \mathbf{w}^* = \left(E - \frac{\gamma}{4} B\delta_\eta\right) \mathbf{w}^k + \psi^k \cdot \frac{\Delta t}{2}; \\ & \left(E + \frac{\gamma}{4} B\delta_\eta\right) \mathbf{w}^{k+1} = \left(E - \frac{\gamma}{4} A\delta_\xi\right) \mathbf{w}^* + \psi^* \cdot \frac{\Delta t}{2}. \end{aligned} \quad (6.2.35)$$

Проверим аппроксимацию схемой (6.2.35) неоднородного факторизованного уравнения (6.2.34). Пусть $\Lambda_1 = A\delta_\xi \sim A\partial_\xi$, $\Lambda_2 = B\delta_\eta \sim B\partial_\eta$. Складывая уравнения системы (6.2.35), получим:

$$\mathbf{w}^{k+1} + \mathbf{w}^k + \frac{\Delta t}{2} \Lambda_2 (\mathbf{w}^{k+1} - \mathbf{w}^k) = 2\mathbf{w}^* + \frac{\Delta t}{2} (\psi^* - \psi^k).$$

Подставляя сюда значение $\mathbf{w}^*$ из первого уравнения системы, имеем:

$$\frac{\mathbf{w}^{k+1} - \mathbf{w}^k}{\Delta t} + \frac{1}{2} \Lambda_1 (\mathbf{w}^{k+1} + \mathbf{w}^k) + \frac{1}{2} \Lambda_2 (\mathbf{w}^{k+1} - \mathbf{w}^k) = \frac{1}{2} (\psi^k + \psi^*) + \mathbf{R},$$

где

$$\mathbf{R} = \frac{\Delta t}{4} [\Lambda_1 (\psi^* - \psi^k) - \Lambda_1 \Lambda_2 (\mathbf{w}^{k+1} - \mathbf{w}^k)] = O(\Delta t^2).$$

Структура матрицы A позволяет исключить ξ^* из первого и третьего уравнений для $\mathbf{w}^*$ и получить уравнение для p^* , которое решается трехточечной прогонкой. Неизвестные ξ^* , q^* определяются теперь явным образом. Аналогично, исключая ξ^{k+1} из пер-

вого и третьего уравнений для w^{k+1} , приходим к краевой задаче относительно q^{k+1} , решаемой трехточечной прогонкой, после чего ξ^{k+1} , p^{k+1} определяются явно.

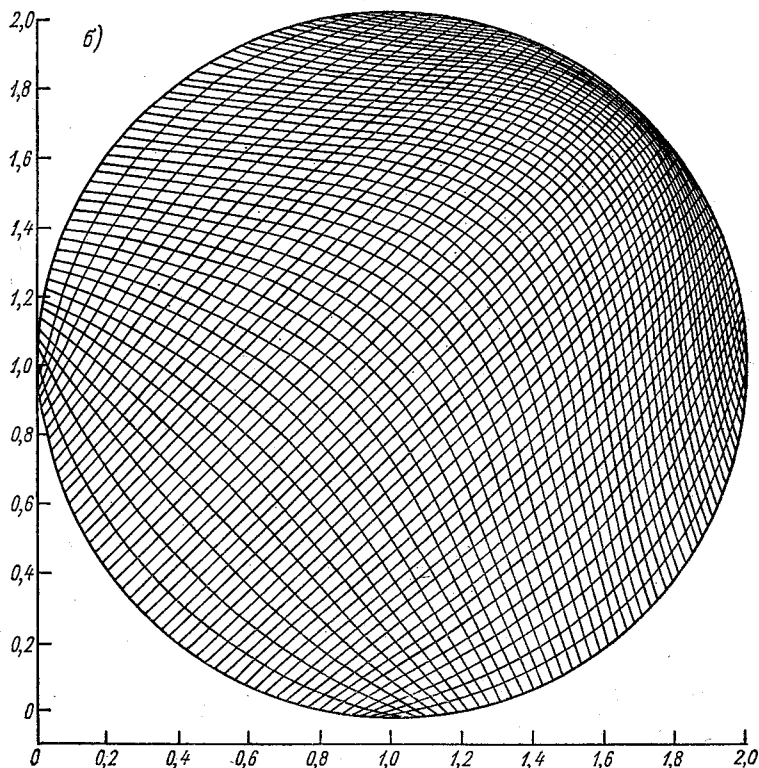
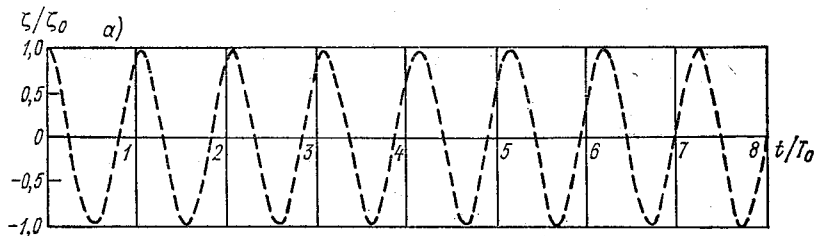


Рис. 6.4. Колебания уровня в центре кругового цилиндрического бассейна (а); сетка, построенная методом Томпсона (б).

На рис. 6.4 а, б приводится пример расчета свободных колебаний по такому алгоритму (с нулевой адвекцией) при $\zeta\Gamma = 10^2$ и сгущающейся расчетной сетке в круге, отображавшемся на прямоугольник. Расчет первой моды колебаний в центре круга сравнивается с аналитическим решением

$$\xi(r, t) = \xi_0 J_0(kr) \cos(\omega t),$$

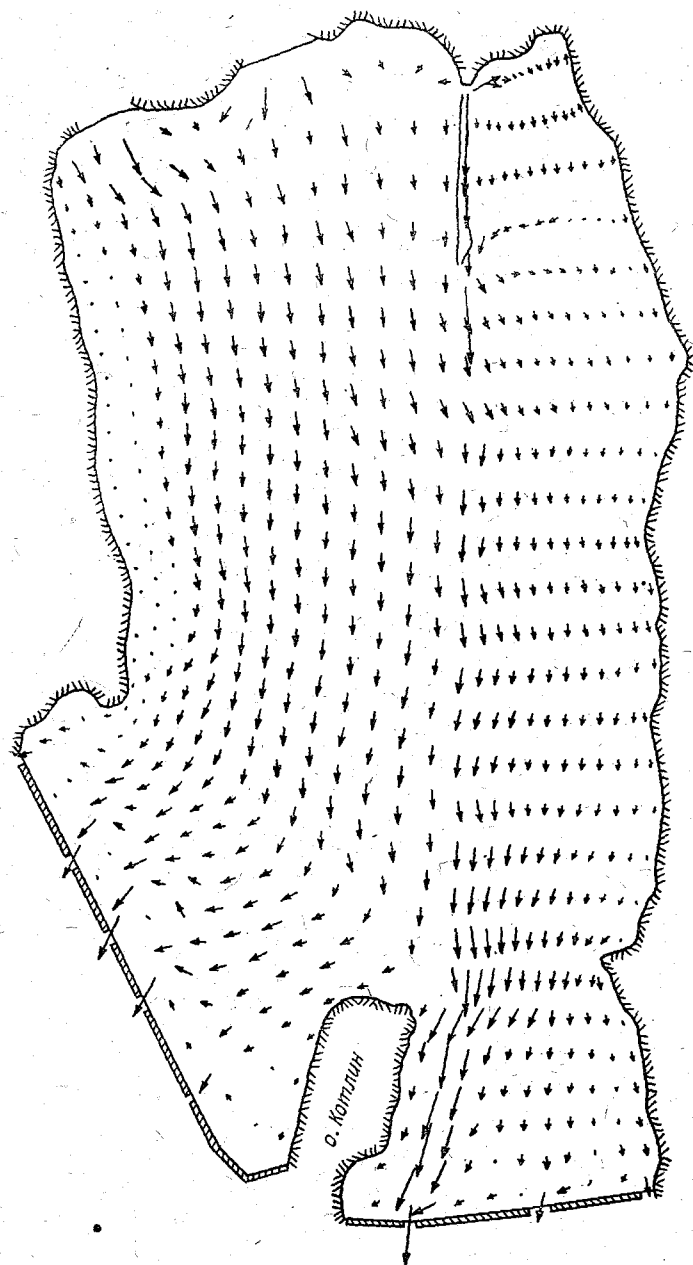


Рис. 6.5. Поле стоковых течений в Невской губе.

где J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $k = 1,21979 \pi/R$; R — радиус бассейна.

Анализ устойчивости схемы (6.2.35) при обычных ограничениях и в пренебрежении адвекцией дает для собственных чисел ее матрицы перехода

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1; \quad \lambda_{2,3} = (1 + \kappa^2 \omega)^{-1}; \\ \omega &= gHJ^{-2} (g_{11} \sin^2 \theta_2 + g_{22} \sin^2 \theta_1 - 2g_{12} \sin \theta_1 \sin \theta_2) = \\ &= gHJ^{-2} [(x_\eta \sin \theta_1 - x_\xi \sin \theta_2)^2 + (y_\eta \sin \theta_1 - y_\xi \sin \theta_2)^2] \geq 0,\end{aligned}$$

т. е. $\lambda_{2,3} \leq 1$ и схема абсолютно устойчива.

В общем случае ограничения на устойчивость, возникающие при достаточно больших значениях числа Куранта $St = \kappa c$, связаны с явной аппроксимацией членов, входящих в правую часть Ψ^* . В частности, при увеличении Δt ухудшается обусловленность матрицы коэффициентов прогоночных уравнений. Во многих случаях ограничения на допустимые значения St диктуются требованием уже не устойчивости схемы, а ее точности.

Воспользуемся полунейвной схемой на сетке Прокопова (рис. 5.6) для расчета стоковых течений в Невской губе. Шаги сетки варьируют на порядок от ~ 100 м в судопропускных и водопропускных отверстиях защитной дамбы до ~ 1 км. При $\Delta t = 2$ мин в судопропускных отверстиях локальные числа $St \approx 10$. На участках открытого контура восточной границы задан сток р. Невы и ее рукавов. На западной границе за дамбой, на значительном удалении от нее, задается условие $\zeta = 0$ (либо непосредственно за дамбой уровень с перепадом вдоль нее в 1 см, понижающийся к югу; каждый из вариантов обеспечивает примерно равное соотношение расходов через северные и южные ворота).

На рис. 6.5 представлено поле стоковых течений в проектных условиях. Картина течений проста, видны зоны относительно слабой проточности. Этот результат используется в главе 7 для расчета переноса и диффузии примеси в Невской губе.

1

Глава

Вертикальная структура длинноволновых процессов

Океанологические задачи теории мелкой воды ставятся как гиперболические краевые задачи для системы уравнений

$$\begin{aligned} L(u) &= \Phi, & x, y, t \in \Omega_T; \\ u(x, y, 0) &= u^0, & x, y \in \Omega; \\ \Gamma u &= \psi, & x, y \in S_T, \end{aligned} \quad (*)$$

где L — оператор уравнения (1.2.1); Γ — оператор граничных условий.

Имеются по крайней мере две причины, побуждающие расширить постановку, включив в нее рассмотрение изменений по вертикали.

Одна из них вызывается неудовлетворительным описанием эффектов трения, и, следовательно, диссипации энергии в придонном пограничном слое для задач, к точности решения которых предъявляются высокие требования. Диссипация в (*) выражается формулой для придонного трения

$$\tau_h/\rho \equiv \mathbf{v}_* h |\mathbf{v}_* h| = C_h \mathbf{v} |\mathbf{v}|. \quad (**)$$

Слабостью формулы является коэффициент C_h , связывающий напряжение Рейнольдса у дна со средним по вертикали квадратом скорости. Согласно [30] значение этого коэффициента (в приливном цикле) отличается в несколько раз от своего среднего значения по данным различных авторов; в отдельных случаях оно может отличаться на порядок. Даже для более надежной связи напряжения $\rho \overline{u'w'}$ с течением на высоте 100 см от дна отношение $C_{100} = -\overline{u'w'}/u_{100}^2$ уменьшается с уменьшением u_{100} , а значение коэффициента трения C_{100} варьирует втрое [102]. Основной порок формулы ** заключается в том, что она может давать в отдельные фазы процесса неверный знак, а при $\mathbf{v} = H^{-1}\langle \mathbf{v} \rangle = 0$ отказывает полностью. Некоторые ее модификации не страдают этим недостатком, однако следует помнить, что они выведены из условия стационарности [5].

Второй причиной является непосредственная необходимость расчета вертикальной структуры течения для решения ряда при-

кладных задач, в первую очередь загрязнения акваторий и оценки надежности гидротехнических сооружений — защитных конструкций, нефтяных платформ, волнопреобразователей и других, функционирующих в районах шельфовой зоны и мелководных морях, при наложении эффектов прилива и штормового нагона.

Таким образом, переход к трехмерным постановкам тех задач, которые традиционно относились к сфере задач теории мелкой воды, диктуется необходимостью совершенствования гидродинамических моделей реальных явлений и ростом требований к исходной информации в экологии и гидропроектировании. Этот переход, наметившийся в 70-е годы, оформился в самостоятельное направление. Естественно, что фактор, определяющий выход за рамки традиционных постановок, занял центральное место в соответствующих исследованиях, и подход к проблеме замыкания является их основной характеристикой.

Ниже отмечаются некоторые возможности, приводящие к замкнутой системе уравнений для расчета длинноволновой денивеляции совместно с динамическими турбулентными характеристиками поля скорости. Рассматривается подход к моделированию вертикальной и трехмерной структуры длинноволновых процессов, использующий отображение произвольной области на параллелепипед, и приводятся результаты расчетов.

7.1. Уравнения трехмерного движения на мелкой воде

7.1.1. Вывод уравнений. Представляя скорость $\mathbf{q} = (u, v, w)$ и давление p в виде суммы их средних значений и пульсаций: $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}} + \mathbf{q}'$, $p = \bar{p} + p'$, запишем уравнение Рейнольдса для несжимаемой жидкости:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{q}} \cdot \nabla_3) \bar{\mathbf{q}} + (2\boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{q}}) = -\frac{1}{\rho} \nabla_3 \bar{p} + \mathbf{g} + \nu_m \nabla_3^2 \bar{\mathbf{q}} + \nabla_3 \Pi_3; \quad (7.1.1)$$

$$\nabla_3 \bar{\mathbf{q}} = 0, \quad (7.1.2)$$

где ν_m — коэффициент молекулярной вязкости; $\rho \Pi_3 = \rho (\mathbf{P}_{(x)}, \mathbf{P}_{(y)}, \mathbf{P}_{(z)})$ — тензор напряжений Рейнольдса:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(x)} &= (-\overline{u'^2}, -\overline{u'v'}, -\overline{u'w'}); & \mathbf{P}_{(y)} &= (-\overline{u'v'}, -\overline{v'^2}, -\overline{v'w'}); \\ \mathbf{P}_{(z)} &= (-\overline{u'w'}, -\overline{v'w'}, -\overline{w'^2}). \end{aligned}$$

Ограничиваясь традиционным приближением для силы Кориолиса — $2\boldsymbol{\omega} = Kl$, K — орт оси oZ , $l = 2\omega \sin \varphi$, φ — широта места, — запишем гидростатическое приближение уравнения (7.1.1):

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} + \bar{\mathbf{w}} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} + lK \times \bar{\mathbf{v}} = -\nabla (g\bar{\zeta} + \bar{p}_a/\rho) + \nu_m \nabla_3^2 \bar{\mathbf{v}} + \nabla_3 \Pi, \quad (7.1.3)$$

где

$$\bar{\mathbf{v}} = (\bar{u}, \bar{v}); \quad d/dt = \partial/\partial t + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla; \quad \Pi = (\mathbf{P}_{(x)}, \mathbf{P}_{(y)}). \quad (7.1.4)$$

Чтобы замкнуть систему, надо выразить турбулентные потоки — компоненты тензора напряжений Рейнольдса Π в уравнении (7.1.3) — через средние поля. Некоторые простые модели замыкания рассматриваются в следующем пункте.

7.1.2. Замыкание. В качестве замыкающих соотношений для (7.1.1) обычно принимают восходящую в Буссинеску простую связь (7.1.5) между турбулентными потоками и градиентами соответствующих средних скоростей:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_{(x)} &= (-\overline{u'^2}, -\overline{u'v'}, -\overline{u'w'}) = \left(K_{(x)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, K_{(y)} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \right); \\ \mathbf{P}_{(y)} &= (-\overline{u'v'}, -\overline{v'^2}, -\overline{v'w'}) = \left(K_{(x)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, K_{(y)} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, \nu \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

Обозначая через $\mathcal{P}$ вектор с суммарными (эффективными) коэффициентами вязкости

$$\mathcal{P} = \left((K_{(x)} + \nu_m) \frac{\partial}{\partial x}, (K_{(y)} + \nu_m) \frac{\partial}{\partial y}, (\nu + \nu_m) \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

перепишем уравнение движения:

$$\frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt} + \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} + l\mathbf{k} \times \bar{\mathbf{v}} = -\nabla(g\bar{z} + \bar{p}_d/\rho) + (\nabla_z \cdot \mathcal{P}) \bar{\mathbf{v}}. \quad (7.1.6)$$

Преобладание горизонтального масштаба над вертикальным имеет следствием малость горизонтальных градиентов сравнительно с вертикальными и несущественность роли горизонтальной турбулентной вязкости сравнительно с вихревой вязкостью в вертикальном направлении. Это позволяет в широком диапазоне условий использовать простейшую модель, полагая коэффициенты $K_{(x)}$, $K_{(y)}$ постоянными и априорно заданными. Для масштаба явления $O(10^2 - 10^3 \text{ км})$ можно принять $K_{(x)} = K_{(y)} = K = O(10^2 - 10^3 \text{ м}^2/\text{с})$.

Что же касается коэффициента вертикальной турбулентной вязкости ν , то для определения его существует ряд схем. Распространенный подход заключается в привлечении уравнения для средней кинетической энергии пульсационного движения $b = |\mathbf{q}'|^2/2$, решение которого — при наличии дополнительных полуэмпирических соотношений — позволяет замкнуть задачу.

Одно из направлений моделирования турбулентности связано с использованием гипотез приближенного подобия Прандтля — Колмогорова, согласно которым кинетическая энергия турбулентности b , коэффициент турбулентности ν и скорость диссипации турбулентной энергии в тепло ε связаны с масштабом турбулентности l соотношениями

$$\nu = l \sqrt{b}; \quad \varepsilon = c_\varepsilon b^2/\nu, \quad (7.1.7)$$

причем $\nu_b = \alpha_b \nu$, α_b , c_ε — const. Уравнение баланса кинетической энергии турбулентности имеет вид [54]

$$\frac{\partial b}{\partial t} - \nu \left| \frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial z} \right|^2 + c_\varepsilon \frac{b^2}{\nu} = \alpha_b \frac{\partial}{\partial z} \nu \frac{\partial b}{\partial z}. \quad (7.1.8)$$

Система уравнений (7.1.2), (7.1.6)—(7.1.8) окажется замкнутой, если к ней присоединить дополнительное выражение для масштаба турбулентности l .

7.1.3. Масштаб турбулентности. Следуя Прандтлю, коэффициент ν и масштаб l («путь смещения») связывают соотношением

$$\nu = l^2 |\partial \bar{v} / \partial z|, \quad (7.1.9)$$

позволяющим обойти уравнение (7.1.8). В придонном турбулентном пограничном слое для достаточно малых значений $z + h + z_h$, $z \geq -h$

$$l = \kappa (z + h + z_h). \quad (7.1.10)$$

Здесь $\kappa \simeq 0,4$ — постоянная Кармана, z_h — параметр шероховатости, характеризующий вертикальный масштаб неровностей дна. Для слоя постоянного напряжения трения, $v_{*h} |v_{*h}| \simeq \text{const}$, и из (7.1.9)—(7.1.10) следует логарифмический закон стенки

$$v = \frac{v_{*h}}{\kappa} \ln \frac{z + h + z_h}{z_h}, \quad (7.1.11)$$

где $|v_{*h}| = |v v_z|^{1/2} \big|_{z=-h+z_h}$ определяет меру касательного напряжения на уровне шероховатости.

Соотношение Прандтля вытекает из уравнения (7.1.8), если в нем удерживать только члены, описывающие генерацию турбулентности за счет сдвига средней скорости и диссипацию.

При интенсивном перемешивании в штормовых условиях на скорость трения v_* оказывают влияние вертикальные градиенты взвешенных отложений, стратифицирующих придонный слой. Градиенты взвеси ослабляют трение и могут уменьшить значение коэффициента турбулентности на несколько десятков процентов. Для учета этого эффекта запишем выражение для распределения придонной скорости модифицированного процессом седиментации [84]:

$$v = \frac{v_*}{\kappa} \int_{z_h}^{z+h+z_h} (1 - \alpha_0 Ri_c)^{-1} \frac{dz}{z},$$

где α_0 — константа; Ri_c — градиентное число Ричардсона для взвеси

$$Ri_c = -g (\rho c_0)^{-1} (\rho_s - \rho) \frac{\partial c}{\partial z} / (\partial |v| / \partial z)^2;$$

ρ_s — плотность суспензии; c — ее концентрация. При $Ri_c = \text{const}$ имеем модифицированный закон стенки

$$v = \frac{v_*}{\kappa} (1 - \alpha_0 Ri_c)^{-1} \ln \frac{z + h + z_h}{z_h}. \quad (7.1.12)$$

Простейшим образом влияние седиментации можно учесть при использовании этого выражения в формуле Прандтля (7.1.9).

Возвратимся к формам задания масштаба турбулентности. При наличии двух пограничных слоев — у дна и у свободной поверхности — естественным обобщением (7.1.10) является формула Монтгомери [122]

$$l = \frac{\kappa}{H} Z_h Z_\zeta, \quad (7.1.13)$$

где $Z_h = z + h + z_h$, $Z_\zeta = -z + \zeta + z_\zeta$, z_ζ — параметр шероховатости свободной поверхности. Формулу Монтгомери целесообразно модифицировать введением «срезки»

$$l = \frac{\kappa}{H} Z_h Z_\zeta Z_0, \quad (7.1.14)$$

$$Z_0 = 1 - \beta_1 H^{-2} Z_h Z_\zeta, \quad 0 \leq \beta_1 \leq 4.$$

Множитель Z_0 сохраняет асимптотику формулы (7.1.13) при приближении к границам: $l_z \rightarrow \kappa (z \rightarrow -h)$, $l_z \rightarrow -\kappa (z \rightarrow \zeta)$ и уменьшает величину l в ядре потока. Наилучшее согласование с данными измерения течения в трубах достигается при $\beta_1 = 1, 2$ [10].

Согласно (7.1.9) v и v_z для конечных l имеют общие нули. Это ограничивает применимость концепции пути перемешивания и побуждает обратиться к более реалистическому описанию, опирающемуся на уравнение (7.1.8).

Непосредственным обобщением формулы Кармана $l = \kappa u_z / u_{zz}$, которая определяет длину пути перемешивания через локальные характеристики среднего течения, является формула [54]

$$l = -\kappa \psi (\partial \psi / \partial z)^{-1}, \quad \psi = \sqrt{b} / l.$$

Градиент средней скорости, фигурирующий в формуле Кармана, заменен здесь на характеристику турбулентности той же размерности.

Приведем также формулу Блэкедара для глубокого моря

$$l = \frac{\kappa Z_h}{1 + \kappa Z_h l_0^{-1}}, \quad l_0 = \gamma \int_{-h}^{\infty} (z + h) \sqrt{b} dz / \int_{-h}^{\infty} \sqrt{b} dz,$$

$\gamma = \text{const}$, использовавшаяся в работах [112, 143 и др.], и ее модификацию для двух пограничных слоев

$$l = \frac{\kappa}{H} \frac{Z_h Z_\zeta}{1 + \kappa Z_h Z_\zeta H^{-1} l_0^{-1}}. \quad (7.1.15)$$

Выражения (7.1.13), (7.1.15) имеют одинаковую асимптотику, однако второе из них обладает тем преимуществом, что масштаб турбулентности в ядре потока определяется не произвольным параметром β_1 , а функционалом от кинетической энергии турбулентности.

В рассмотренных случаях масштаб турбулентности вводился непосредственно как функция вертикальной координаты. Более по-

следовательный подход заключается в использовании дополнительного дифференциального уравнения для масштаба турбулентности l либо для произведения bl , которое выводится из осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье—Стокса при использовании связи между спектром турбулентности и ее масштабом. Модельное уравнение для величины $\psi = bl$ имеет вид [112]

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} - E_1 l P + \frac{b^{3/2}}{B_1} \left[1 + E_2 \left(\frac{l}{\kappa L} \right)^2 \right] = \frac{\partial}{\partial z} \left[S_l l \sqrt{b} \frac{\partial}{\partial z} \psi \right]. \quad (7.1.16)$$

Здесь второй член уравнения описывает генерацию турбулентности, третий — скорость ее диссипации, а правая часть — диффузию величины bl , т. е. интерпретация членов уравнения (7.1.8) и (7.1.16) аналогична; функция L при наличии двух границ задается следующим образом:

$$L^{-1} = Z_h^{-1} + Z_\zeta^{-1}, \quad (7.1.17)$$

а E_1 , E_2 , B_1 , S_l — постоянные, оптимизированные по экспериментальным данным. Оценка показывает, что главными членами уравнения (7.1.16) являются второй и третий в левой части. Приравняв эти члены, можно, не решая дифференциального уравнения, определить вид функции $l(z)$. Полученное выражение будет, по-видимому, достаточно точным везде, за исключением зоны непосредственной близости от границ $z = -h$ и $z = \zeta$, где отброшенный диффузионный член в правой части уравнения (7.1.16) существен. Итак, пренебрегая генерацией энергии за счет сил плавучести и принимая $P = \nu |v_z|^2$, имеем:

$$E_1 l^2 \sqrt{b} |v_z|^2 = \frac{b^{3/2}}{B_1} \left(1 + \frac{E_2}{\kappa^2 L^2} l^2 \right) \quad (7.1.18)$$

или

$$(B_1 E_1 |v_z|^2 - b E_2 H^2 \kappa^{-2} Z_h^{-2} Z_\zeta^{-2}) l^2 = b.$$

Приравнявая главные члены уравнения (7.1.8), получим $|v_z|^2 = c_\epsilon b^2 \nu^{-2} = c_\epsilon b l^{-2}$, и тогда

$$l = \left(\frac{B_1 E_1 c_\epsilon - 1}{E_2 H^2 Z_h^{-2} Z_\zeta^{-2} \kappa^{-2}} \right)^{1/2} = \left(\frac{B_1 E_1 c_\epsilon - 1}{E_2} \right)^{1/2} \frac{\kappa}{H} Z_h Z_\zeta, \quad (7.1.19)$$

что дает формулу Монтгомери (7.1.13), модифицированную множителем $c_l = [(B_1 E_1 c_\epsilon - 1)/E_2]^{1/2}$. Рекомендованные значения констант $c_\epsilon = 0,08$, $B_1 = 16,6$, $E_1 = 1,8$, $E_2 = 1,33$, $S_l = 0,2$ [112] дают $c_l = 1,07^*$. Формула для масштаба турбулентности в этом случае весьма близка к модифицированной форме Монтгомери

* Эти константы найдены калибровкой расчета течений, находящихся в локальном равновесии, т. е. таких, для которых генерация турбулентности в каждой точке балансируется ее диссипацией.

(7.1.14). Вблизи границ формула не утрачивает правильную асимптотику. Можно предполагать, что решение дифференциального уравнения (7.1.16) при соответствующем подборе констант будет обладать хорошими локальными свойствами, подобно тем, которые даются представлениями типа (7.1.14), (7.1.15).

В настоящее время имеется некоторый опыт сравнения представлений масштаба турбулентности в рамках замыкания (7.1.7)—(7.1.8). Он относится к сопоставлению результатов расчета характеристик турбулентности при задании линейной формы масштаба l и его параболического распределения, отвечающего смыкающимся пограничным слоям в мелком водоеме [4]; результатам моделирования пограничного слоя атмосферы с различными формами l , в частности с привлечением уравнения переноса для l , вытекающего из (7.1.16) [112]; использованию ряда форм замыкания для расчета штормовой денивелиации [5]; моделированию турбулентности в эстуариях [125]. Результаты свидетельствуют о приемлемой точности расчета интегральных параметров, даже по весьма грубым моделям. Однако характеристики турбулентности, детали вертикальной структуры и ее общая картина в расчетах по разным моделям могут отличаться значительно. Этим обстоятельством объясняется стремление к использованию более полных и сложных моделей замыкания в геофизических приложениях.

Одно из таких более общих описаний турбулентности использует наряду с b -уравнением аналогичное уравнение для скорости диссипации турбулентной энергии ϵ . Модель « $b\epsilon$ » получила широкое применение в исследовании квазиоднородного слоя океана [37], для изучения реакции океана на проходящий ураган [50], при расчете вертикального турбулентного обмена в океане [38] и других задачах [52, 74].

Универсализация моделей влечет трудности, связанные с увеличением числа эмпирических констант, заданием граничных условий, усложнением численной реализации. Сказанное относится уже к замыканиям, использующим ϕ -уравнение (7.1.16) и ϵ -уравнение. Отмеченные трудности возрастают, если привлекаются $\overline{q'u'}$, $\overline{q'\sigma'}$ -уравнения для компонентов тензора напряжений Рейнольдса.

Все это не означает отказа от расширенного описания, но следует иметь в виду, что приемлемую точность расчета геофизических явлений во многих случаях обеспечивают и простые возможности, отмеченные выше.

7.1.4. Уравнения в естественной криволинейной системе координат. В случае сложной трехмерной области $\Omega_3 = \{x, y \in \Omega(z), -h \leq z \leq \zeta, t \geq 0\}$ удобно перейти к криволинейным координатам, связанным с конфигурацией Ω_3 .

В предположении, что вертикальная координата не вырождается, воспользуемся преобразованием (4.2.47)

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y), \quad \theta = (z + h)/H, \quad \tau = t. \quad (7.1.20)$$

Согласно (4.2.50) в области $\Omega_3^* = \{x, y \in \Omega^*, 0 \leq \theta \leq 1, t \geq 0\}$ система уравнений (7.1.2), (7.1.6) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{q}^* + \frac{\partial}{\partial \xi^i} \mathbf{Q}_i^* = \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(JK g^{ik} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \xi^k} \right) + H^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} J \mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} - l \mathbf{k} \times \mathbf{q}^*,$$

$$i, k = 1, 2, 3; \quad (7.1.21)$$

$$\mathbf{q}^* = \begin{pmatrix} Ju \\ Jv \\ J \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q}_1^* = J \begin{pmatrix} uU + c^2 \xi_x \\ vU + c^2 \xi_y \\ U \end{pmatrix}; \quad \mathbf{Q}_2^* = J \begin{pmatrix} uV + c^2 \eta_x \\ vV + c^2 \eta_y \\ V \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Q}_3^* = J \begin{pmatrix} uW + c^2 \theta_x \\ vW + c^2 \theta_y \\ W \end{pmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix};$$

$$U = u \xi_x + v \xi_y; \quad V = u \eta_x + v \eta_y;$$

$$W = \theta_t + u \theta_x + v \theta_y + w \theta_z.$$

Присоединим сюда интегральное уравнение неразрывности (4.2.51)

$$\frac{\partial}{\partial t} J + \frac{\partial}{\partial \xi} J \bar{U} + \frac{\partial}{\partial \eta} J \bar{V} = 0, \quad (7.1.22)$$

где $\bar{U}, \bar{V}$ — контравариантные составляющие средней по вертикали скорости $\langle \mathbf{v} \rangle$.

Уравнения (7.1.21) — (7.1.22) с замыканием, определяющим $\mathbf{v}$, позволяют найти неизвестные $\mathbf{q}^*$ при заданных условиях прилипания на твердых участках S_1^* граней параллелепипеда Ω_3^*

$$\mathbf{q} = 0, \quad \xi^i \in S_1^*, \quad (7.1.23)$$

условиях на свободной поверхности

$$\mathbf{v} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} = \tau_z / \rho, \quad \theta = 1, \quad (7.1.24)$$

некоторых условиях на жидких элементах S_2^* граней Ω_3^* и начальных условиях.

Остается выразить метрические коэффициенты $\partial \xi^i / \partial x_k$ и g^{ik} через коэффициенты обратного преобразования $\partial x_i / \partial \xi^k$ и g_{ik} . Используя (4.1.26), (4.1.19), имеем:

$$J = H J_*; \quad J_* = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi; \quad \xi_x = J_*^{-1} y_\eta; \quad \eta_x = -J_*^{-1} y_\xi \text{ и т. д.}$$

Выражения для θ_{x_i}, θ_t следуют непосредственно из явного представления для θ в (7.1.20).

7.2. Интегрирование уравнений в произвольной трехмерной области

7.2.1. Структура метода. Предварительным этапом интегрирования уравнений (7.1.21) является построение сетки в Ω_3 каким-либо из методов главы 5. Согласно (7.1.20) искомые координаты

узлов сетки $\{x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\}$ не зависят от вертикальной координаты. Рассмотрим в Ω_3^* горизонтальное прямоугольное сечение Ω^* с контуром $\partial\Omega^*$; прообразами их в физическом пространстве являются сечение Ω области Ω_3 с границей $\partial\Omega$, лежащей на боковой поверхности S . В области Ω^* декартовы координаты x, y определим, например, эллиптическим методом (5.1.7) (рис. 7.1) и, вычислив в узлах обращенные метрические коэффициенты, перейдем к интегрированию задачи (7.1.21)–(7.1.24) в параллелепипеде

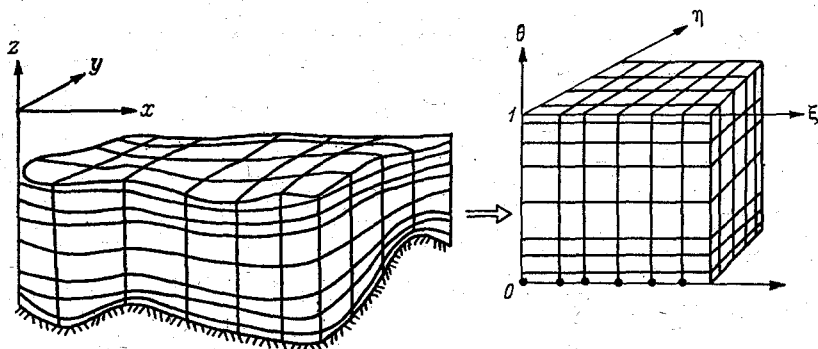


Рис. 7.1. Отображение трехмерной области с цилиндрической боковой поверхностью в куб.

Ω_3^* разностным методом. Воспользуемся гибридной явно-неявной схемой на разнесенной по v, ξ сетке [8]. Запишем уравнения (7.1.21) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} J_* H v + \frac{\partial}{\partial \xi^j} P_j = H^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} J v \frac{\partial v}{\partial \theta} + \Phi, \quad j = 1, 2; \quad (7.2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} J_* H + \frac{\partial}{\partial \xi^i} J U^i = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.2.2)$$

где

$$P_1 = gH \begin{pmatrix} y_\eta \\ -x_\eta \end{pmatrix}; \quad P_2 = gH \begin{pmatrix} -y_\xi \\ x_\xi \end{pmatrix}$$

и вектор Φ включает остальные адвективные и диффузионные члены уравнений движения.

Уравнение (7.2.1) интегрируется прогонками по θ_s ($s = 1, 2, \dots, \bar{s}$; $\theta_1 = 0, \theta_{\bar{s}} = 1$) при центрально-разностной аппроксимации пространственных производных на несовмещенной по m, n и перемажающейся по k сетке ($m = \xi_m / \Delta \xi, n = \eta_n / \Delta \eta, k = t_k / \Delta t, m = 1, 2, \dots, M, n = 1, 2, \dots, N, k = 0, 1, \dots, \bar{k}$).

Схема имеет вид

$$J^k (v^{k+1} - v^k) / \Delta t + \frac{1}{2\Delta \xi^j} \delta_{\xi^j} P^{k+1/2} = R_\Delta^{k+1} + \Phi_\Delta^k; \quad (7.2.3)$$

$$J_* (\xi^{k+3/2} - \xi^{k+1/2}) / \Delta t + \frac{1}{2\Delta \xi^i} \delta_{\xi^i} (J U^i)^{k+1} = 0.$$

где R_Δ — аппроксимация вектора вертикального турбулентного обмена, Φ_Δ — суммарная аппроксимация адвекции и членов горизонтального турбулентного обмена. Неявная часть алгоритма состоит из потоковой прогонки относительно напряжения трения

$$\tau^{k+1}/\rho = \mathbf{v}^k D_{+\theta} \mathbf{v}_s^{k+1} / (\Delta\theta_s H^k),$$

после чего находится распределение $\mathbf{v}^{k+1}$ и из второго уравнения (7.2.3) определяется $\xi^{k+3/2}$. Схема не имеет ограничений на выбор $\Delta\theta$, а плоское разрешение подчинено критерию Куранта.

Редукция метода применительно к двумерной в плоскости (ξ, θ) задаче осуществляется непосредственно и не требует пояснений.

Устойчивость такой схемы рассмотрим на модельной системе уравнений, полученной аналогично (6.2.32), исходя из уравнений движения (7.2.1) (при $\Phi = 0$) и интегрального уравнения неразрывности:

$$\begin{aligned} p_t + J^{-1} c^2 (g_{22} \xi_\xi - g_{12} \xi_\eta) &= h^{-2} \nu p_{\theta\theta}; \\ q_t + J^{-1} c^2 (g_{11} \xi_\eta - g_{12} \xi_\xi) &= h^{-2} \nu q_{\theta\theta}; \\ \xi_t + J^{-1} (\langle p \rangle_\xi + \langle q \rangle_\eta) &= 0, \end{aligned} \quad (7.2.4)$$

$\mathbf{p} = (p, q) = JH(U, V)$. Воспользуемся гибридной явно-неявной схемой

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}^{k+1} - \mathbf{p}^k) / \Delta t + J^{-1} c^2 \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_\xi \xi^k \\ \delta_\eta \xi^k \end{pmatrix} &= \frac{\nu}{h^2} \delta_\theta^+ \delta_\theta^- \mathbf{p}^{k+1}; \\ (\xi^{k+1} - \xi^k) / \Delta t + J^{-1} (\delta_\xi \langle p \rangle^{k+1} + \delta_\eta \langle q \rangle^{k+1}) &= 0. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{m, n, s}^k &= (\mu_1, \mu_2)^k \exp \{i(m \Delta \xi l_1 + n \Delta \eta l_2 + s \Delta \theta l_3)\}; \\ \xi_{m, n}^k &= \rho^k \exp \{i(m \Delta \xi l_1 + n \Delta \eta l_2)\}, \end{aligned}$$

где l_1, l_2, l_3 — волновые числа в соответствующих координатных направлениях; $m, n, s = 1, 2, \dots, k = 0, 1, \dots, \bar{k}$, при этом

$$\langle \mathbf{p} \rangle_{m, n}^k = (\mu_1, \mu_2)^k \exp \{i(m \Delta \xi l_1 + n \Delta \eta l_2)\}.$$

Последнее представление следует из того, что $\langle e^{i l_3 \theta} \rangle = 0$ для волновых чисел $l_3 = 2\pi/L_\theta$, $L_\theta = h/s$, s — целое. Для решения в гармониках с амплитудой $\mu = (\mu_1, \mu_2, \rho)$ имеем

$$\mu^{k+1} = G \mu^k, \quad (7.2.5)$$

где матрица перехода

$$G = \begin{pmatrix} A & 0 & -Bie^{-i s \nu c^2 G_1} \\ 0 & A & -Bie^{-i s \nu c^2 G_2} \\ -Bi \sin \alpha & -Bi \sin \beta & 1 - R \end{pmatrix}.$$

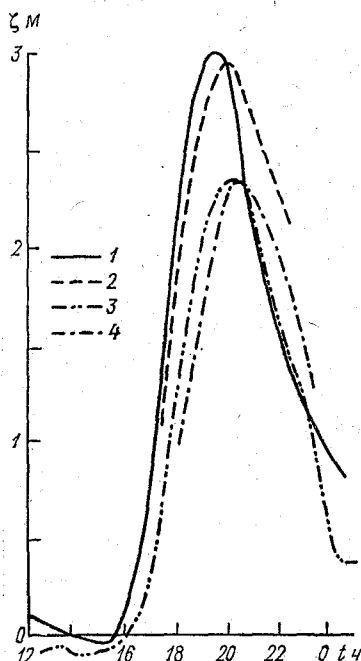


Рис. 7.2. Сравнение расчетного и фактического хода уровня в п. Ленинград-Порт и п. Ломоносов 15 октября 1955 г.

1—Ленинград-Порт, наблюдения; 2—Ленинград, расчет; 3—Ломоносов, наблюдения; 4—Ломоносов, расчет.

Здесь

$$A = \frac{1}{1 + a^2}, \quad a^2 = \frac{2\Delta t}{\Delta\theta^2 h^2} v(1 - \cos \gamma),$$

$$B = AJ^{-1}\kappa;$$

$$\kappa = \Delta t / \Delta\xi; \quad \Delta\eta = \Delta\xi; \quad \alpha = l_1 \Delta\xi;$$

$$\beta = l_2 \Delta\eta; \quad \gamma = l_3 \Delta\theta;$$

$$G_1 = g_{22} \sin \alpha - g_{12} \sin \beta;$$

$$G_2 = g_{11} \sin \beta - g_{12} \sin \alpha;$$

$$R = A^{-1} B^2 e^{-is\gamma} c^2 G_3;$$

$$G_3 = G_1 \sin \alpha - G_2 \sin \beta.$$

Для характеристических чисел λ матрицы перехода имеем уравнение

$$(A - \lambda) \{ (A - \lambda)(1 - \lambda - R) + AR \} = 0, \quad (7.2.6)$$

один корень которого

$$\lambda_1 = A = \frac{1}{1 + a^2} \leq 1, \quad (7.2.7)$$

а два других удовлетворяют квадратному уравнению

$$\lambda^2 - (1 + A - R)\lambda + A = 0. \quad (7.2.8)$$

Таким образом, на шаг по вертикали $\Delta\theta$ с принятым Δt ограничений нет. Что касается горизонтального разрешения, то следует рассмотреть случай, когда корни уравнения (7.2.8) комплексные

$$(1 + A - R)^2 - 4A < 0, \quad (7.2.9)$$

ибо тогда $|\lambda|^2 = A \leq 1$. Из (7.2.9) следует

$$|R| < (1 + \sqrt{A})^2$$

и

$$\kappa c \leq J / \sqrt{g_{11} - 2g_{12} + g_{22}}. \quad (7.2.10)$$

7.2.2. Расчет трехмерного поля течений. Метод тестировался на модельной задаче расчета сейшевых колебаний в круглом цилиндре, отображавшемся в куб. При задании начального возму-

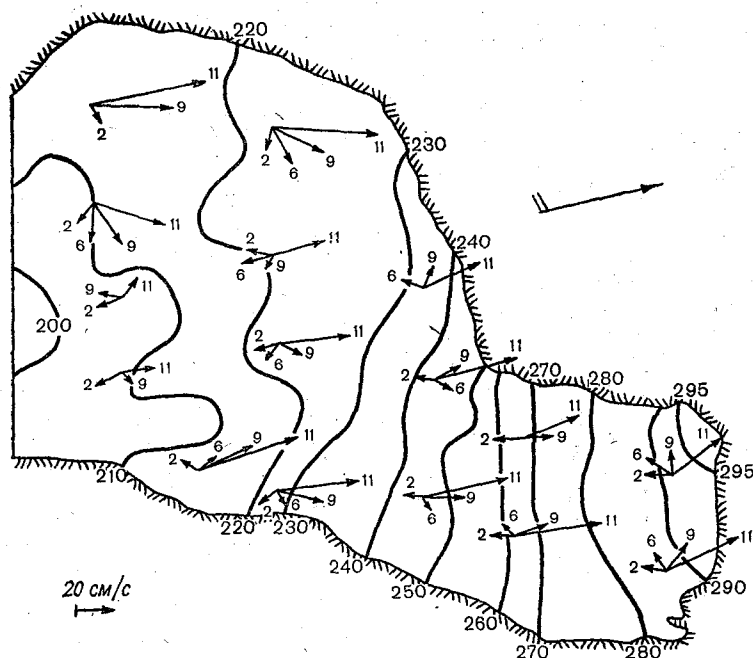


Рис. 7.3. Наводнение 15 октября 1955 г. в восточной части Финского залива. Изолинии уровня (см) и годографы скорости на 21 ч 48 мин.

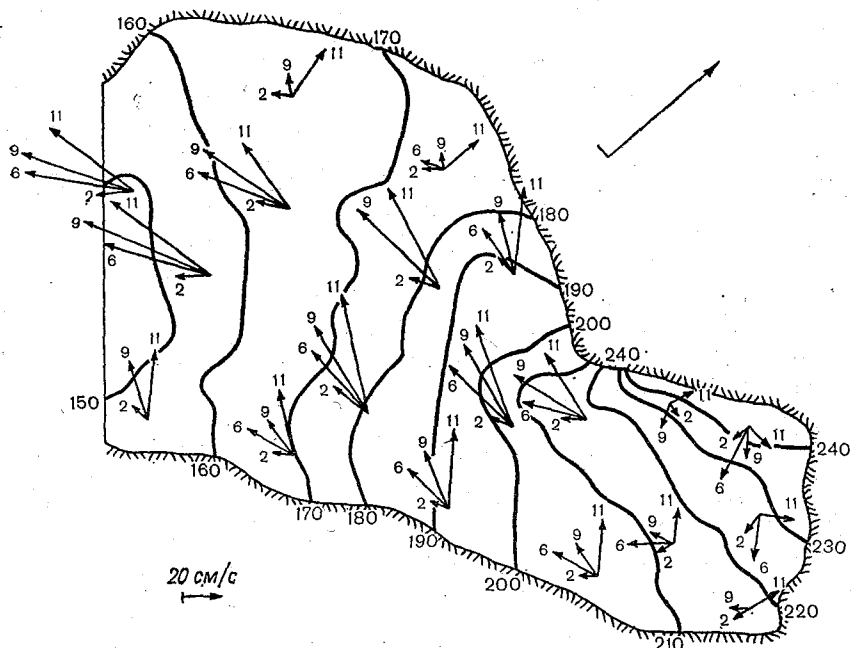


Рис. 7.4. Наводнение 15 октября 1955 г. в восточной части Финского залива. Изолинии уровня (см) и годографы скорости на 23 ч 36 мин.

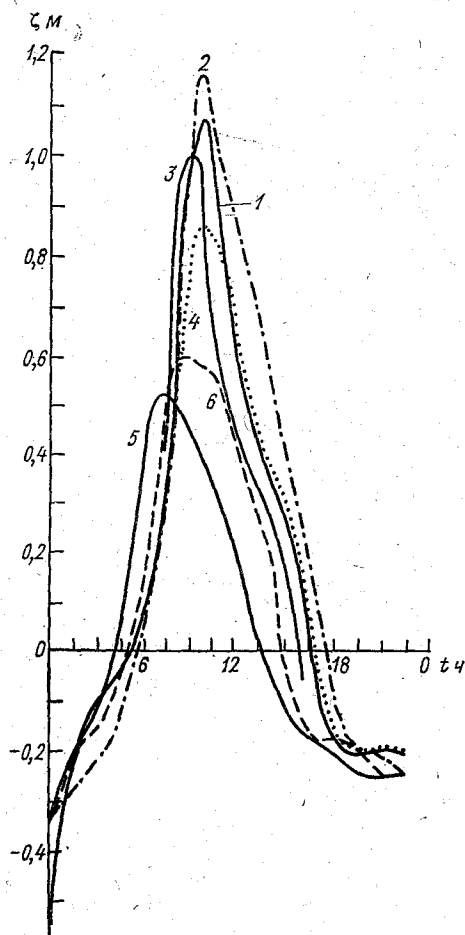


Рис. 7.5. Сравнение расчетного и фактического хода уровня в п. Ленинград, Стрельна, Кронштадт 22 сентября 1981 г.

1—Ленинград, Большая Нева, наблюдения; 2—Ленинград, расчет; 3—Стрельна, наблюдения; 4—Стрельна, расчет; 5—Кронштадт, наблюдения; 6—Кронштадт, расчет.

щения в виде $\xi^0 = \xi_0 J_0(ar)$, J_0 — функция Бесселя нулевого порядка, $a = 1,2197\pi/R$, что отвечает первой моде, R — радиус цилиндра, критерием оценки метода служило сравнение амплитуды колебаний с аналитическим решением; отклонение на интервале нескольких периодов не превысило 4 % начальной амплитуды. Расчет вертикальной структуры проверялся на задаче о дрейфовом течении в канале (п. 8.3.3).

Обратимся к расчету наводнения 15 октября 1955 г. в Ленинграде — одного из крупнейших в истории города — вызванного глубоким циклоном, проходившим севернее Финского залива. В качестве краевых на открытой границе в 15 км западнее о. Котлин и начальных условий использовались значения ξ и v , полученные

интегрированием уравнений мелкой воды при отображении конфигурации всего Финского залива на прямоугольник (п. 6.1.2). Распределение $v(\theta)$ принималось таким, чтобы средние по вертикали значения скорости на открытой границе и в начальный момент равнялись соответствующим значениям $\langle v \rangle$ из решения плоской задачи. Расчетная область содержала 2299 узлов: 11 — по вертикали и 19×11 — по горизонтали. Узлы по вертикали располагались неравномерно, сгущаясь в пограничных слоях у дна и поверхности. Шаг по вертикали менялся от 2 см в пограничных слоях на мелководье до 4 м в середине слоя на больших глубинах, шаг по горизонтали — от 1,2 до 7,5 км. С шагом $\Delta t = 2$ мин процесс наводнения рассчитан в интервале с 18 до 24 ч 15 октября 1955 г. На рис. 7.2 сопоставляется наблюдаемый и вычисленный ход уровня в пунктах Ленинград-Порт и Ломоносов. На рис. 7.3, 7.4

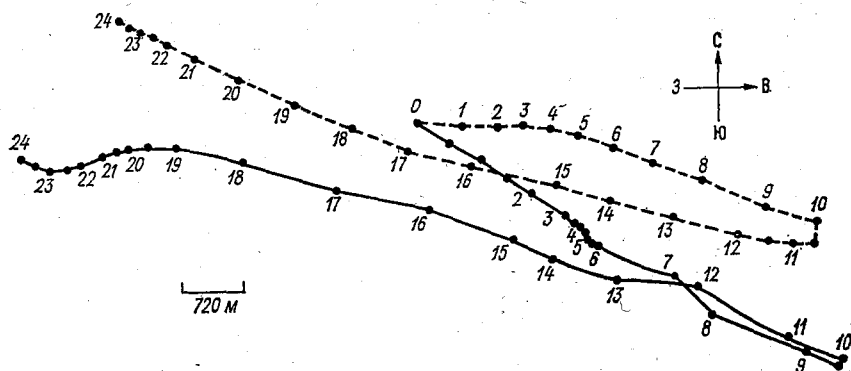


Рис. 7.6. Сравнение фактической (сплошная линия) и рассчитанной прогрессивно-векторных диаграмм 22 сентября 1981 г. на одной из станций в восточной части Финского залива на расстоянии 90 см от дна.

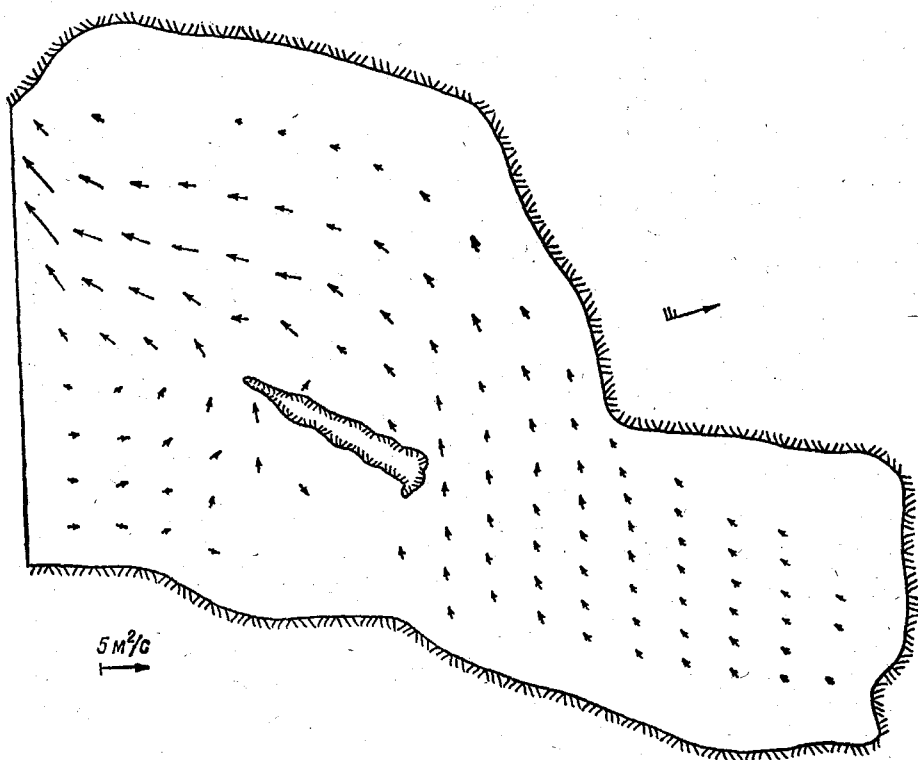


Рис. 7.7. Поле полных потоков в восточной части Финского залива 22 сентября 1981 г. в 12 ч 55 мин.

показаны изолинии уровня и годографы скорости в некоторых пунктах на 21 ч 48 мин — время, близкое к моменту максимального подъема уровня в Ленинграде, и на 23 ч 36 мин — момент спада уровня. Цифры на стрелках указывают номер горизонта, начиная от дна, в соответствии с принятой зависимостью. Приводимые горизонты располагаются на нормированном интервале

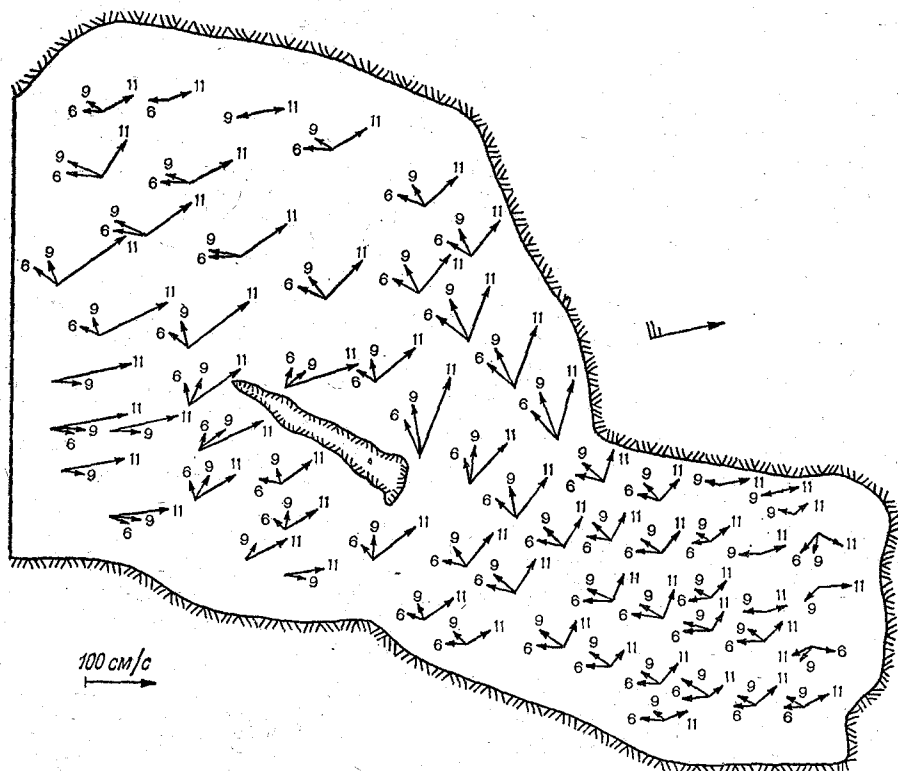


Рис. 7.8. Годографы скорости в восточной части Финского залива 22 сентября 1981 г. в 12 ч 55 мин.

Цифры у стрелок — номера горизонтов.

$0 \leq \theta \leq 1$ и отвечают следующим значениям θ : 2 — 0,02, 6 — 0,5, 9 — 0,92, 11 — 1,0 (поверхность). Достаточная точность расчета хода уровня по амплитуде и несущественное отклонение по фазе убедительно свидетельствуют в пользу метода. Наряду с достоверным воспроизведением этой основной интегральной характеристики процесса расчет выявляет локальную эволюцию трехмерного поля скорости. Штормовой поток характеризуется направленной эпюрой скорости, и веера годографов на рис. 7.3, 7.4 в данном случае, когда влияние силы Кориолиса мало, вскрывают динамическую структуру приспособления поля потока к изменению поля

ветра. Течение при нагоне, достаточно однородное по области, было направлено на восток, юго-восток. Приблизительно за 30 мин до начала спада уровня в Ленинграде направление течения стало меняться на северо-западное. Поворот скорости в поверхностном слое совершался против часовой стрелки в течение 2 ч, а в придонном — быстрее и в различных направлениях, определяемых из-

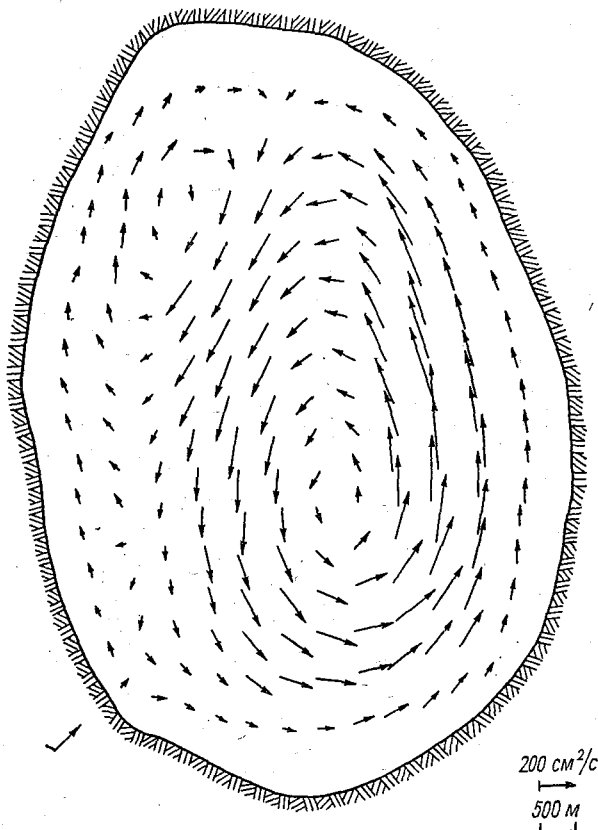


Рис. 7.9. Поле полных потоков в оз. Плещеево при южном ветре силой 4 м/с.

менениями локальных градиентов уровня и топографией дна. Определенные из модели значения коэффициента придонного трения C_h оказались в среднем (если исключить моменты смены знака скорости течения) лежащими в пределах $4 \cdot 10^{-3}$ — $8 \cdot 10^{-3}$, однако в вершине залива и в прибрежных зонах изменение C_h значительнее.

Результаты выявляют сложную пространственно-временную структуру течений при штормовом нагоне.

Обсуждавшиеся расчеты относились к экстремальной гидродинамической ситуации. Вместе с тем интересно выяснить возмож-

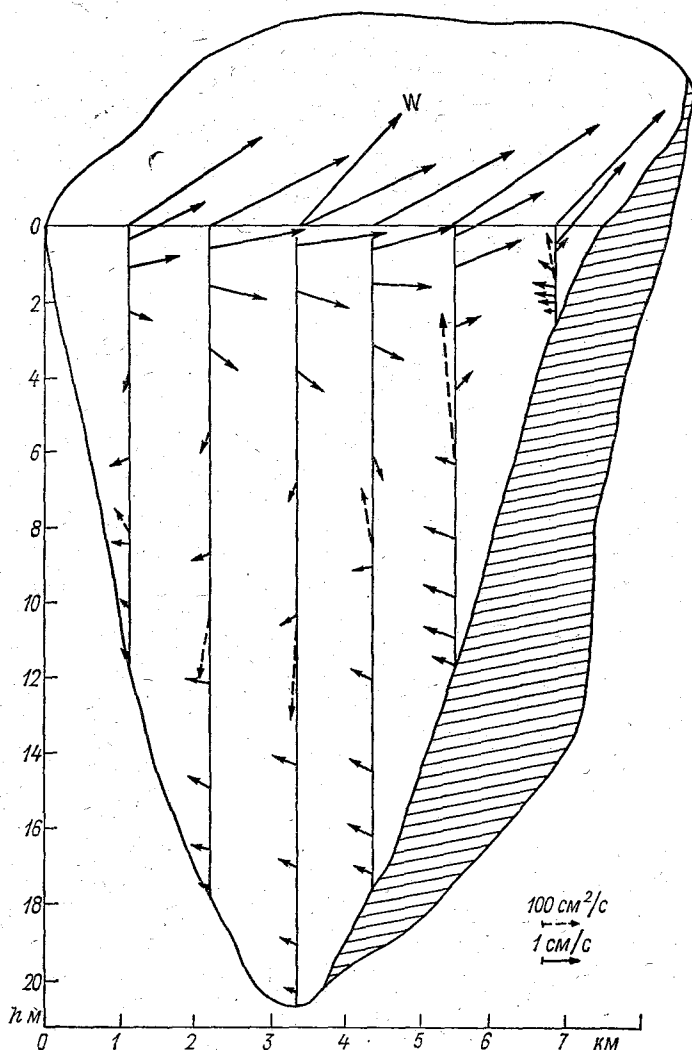


Рис. 7.10. Распределение скоростей на разрезе через малую ось оз. Плесеево при южном ветре силой 4 м/с.

Стрелки, направленные вверх, соответствуют течению на север, вправо — на восток и т. д. Пунктир — полные потоки.

ности моделирования условий, близких к повседневным, с характерными слабыми течениями и относительно малой денивеляцией. Расчет таких типичных ситуаций важен для ряда приложений.

В качестве примера рассмотрим имитацию одного дня жизни Финского залива — от 0 до 24 ч 22 сентября 1981 г. В Ленинграде

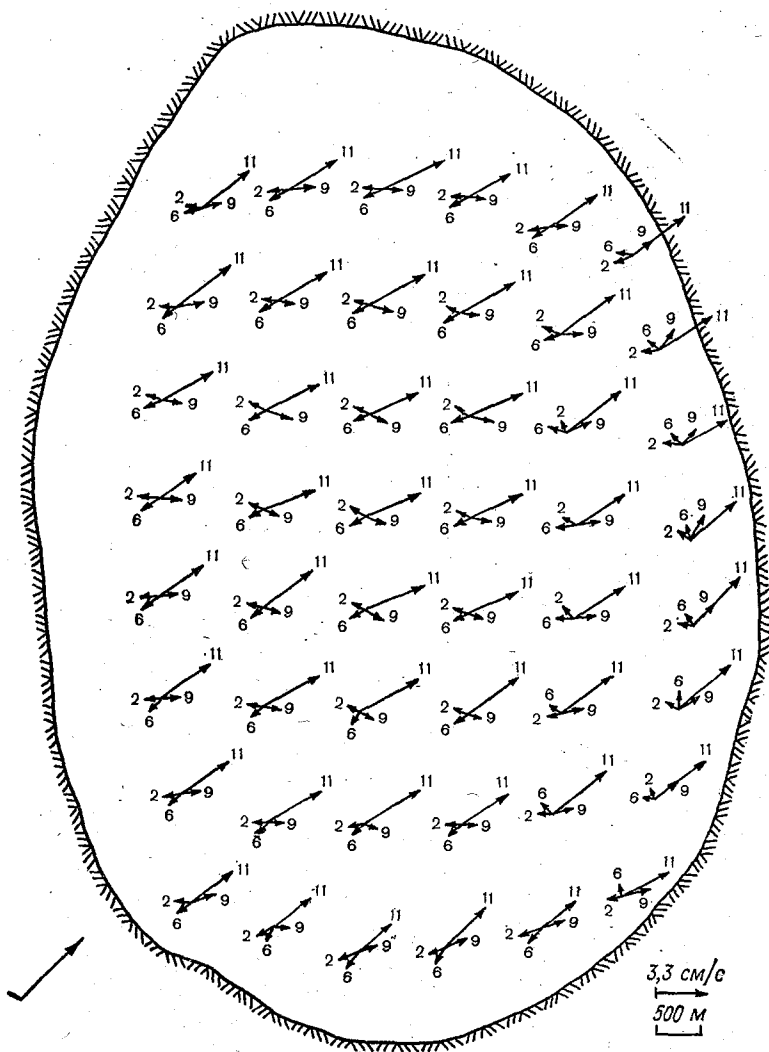


Рис. 7.11. Годографы скорости в оз. Плещеево при южном ветре силой 4 м/с.

Цифры у стрелок — номера горизонтов.

в этот день наблюдался подъем уровня 106 см при юго-западном ветре до 15 м/с.

В расчетах учитывался сток Невы путем соответствующей модификации уравнения неразрывности. При отображении области — восточной части Финского залива с выделением о. Котлин — на вычислительный прямоугольник учитывалась ее двусвязность. Ветер задавался по наблюдениям на дамбе Морского канала с интер-

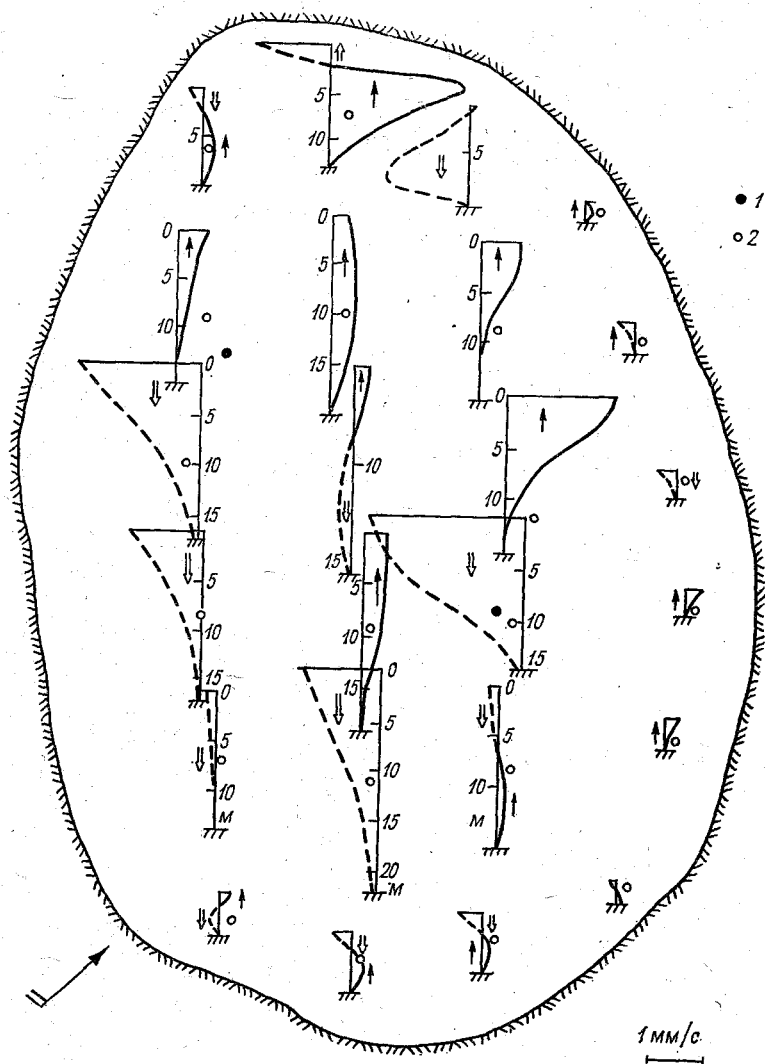


Рис. 7.12. Распределение вертикальных составляющих скорости течения в оз. Плесеево при южном ветре 10 м/с.

1—центры циркуляций; 2—положение станций.

валом 30 мин и принимался линейно изменяющимся за этот интервал над всей акваторией.

На рис. 7.5 приводится сравнение расчетного и фактического хода уровня в пунктах Ленинград, Стрельна, Кронштадт. Сравнительно со случаем экстремальной штормовой денивеляции относительная ошибка здесь несколько выше, что естественно связать, в частности, с относительной ошибкой в принятой интегральной

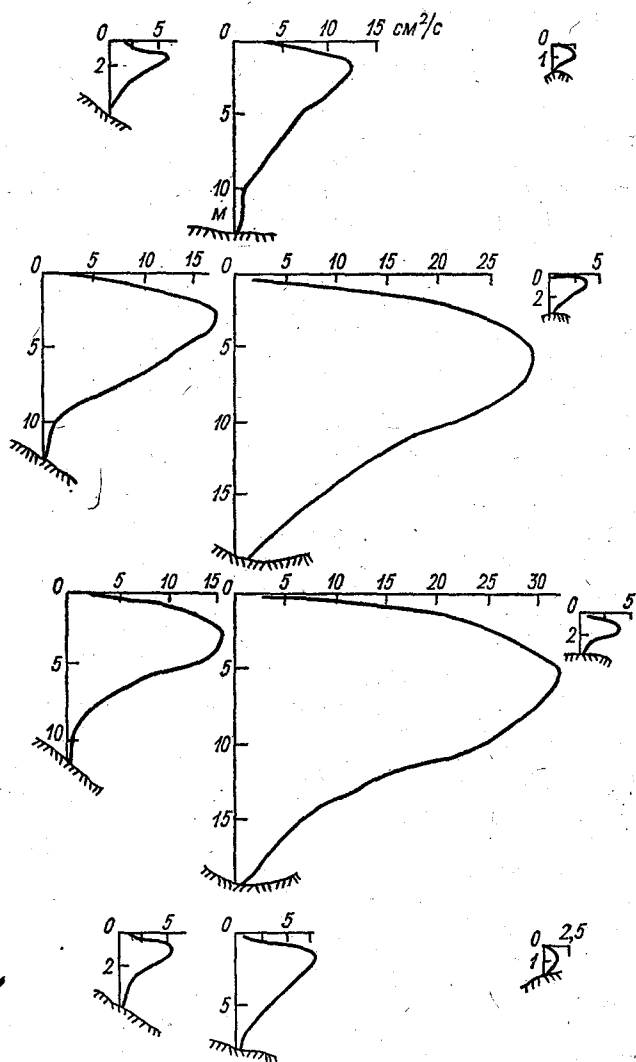


Рис. 7.13. Вертикальные профили коэффициента турбулентной вязкости в различных пунктах оз. Плещеево при южном ветре силой 4 м/с.

характеристике ветрового поля. При штормовом нагоне ветер более устойчив и однороден.

Эти соображения подтверждаются сравнением физической и вычисленной прогрессивно-векторных диаграмм на некотором горизонте (рис. 7.6). Расчетная траектория сразу отклоняется от истинной, что свидетельствует о необходимости коррекции информации. Вместе с тем модель поразительно точно воспроизводит качественную картину течения, вплоть до совпадения момента

рециркуляции. На рис. 7.7, 7.8 приводятся поле полных потоков по акватории залива и развертка течений по глубине на трех горизонтах на 12 ч 55 мин — момент, выбранный произвольно, — для иллюстрации сложной картины адаптации трехмерного поля течений.

В качестве третьего примера рассмотрим формирование поля течений в замкнутом бассейне — в озере Плещеево площадью 50 км². Дно озера имеет форму котловины с глубиной до 25 м.

Расчеты выполнены на сетке, состоящей из 2772 узлов (18 × 14 по горизонтали и 11 по вертикали) с шагом $\Delta t = 30$ с, параметр шероховатости задавался равным 1 см, масштаб турбулентности l определялся по формуле (7.1.14), а коэффициент турбулентной вязкости — по формуле (7.1.9).

Интегральная циркуляция при однородном ветре определяется, как известно, рельефом дна. В озере после выхода на квази-установившийся режим интегральная циркуляция — так называемые топографические вихри — состоит из двух вихрей, изображенных для ветра южного направления на рис. 7.9. Изменение скорости ветра влияет на интенсивность общей циркуляции, не меняя ее структуры. При повороте ветра происходит перестройка поля полных потоков — центры вихрей перемещаются так, чтобы в середине озера потоки были направлены навстречу ветру. Характерное время перестройки — 1 ч.

Интегральная циркуляция складывается из движений на различных горизонтах. На рис. 7.10 представлена проекция трехмерной картины течений при южном ветре 4 м/с на разрезе, проходящем через малую ось озера. Там же приведены соответствующие полные потоки (пунктир). Скорости быстро уменьшаются в верхнем однометровом слое от 4—5 до 0,5—1 см/с, совершая разворот по часовой стрелке, и дальше вглубь уже не уменьшаются. Вертикальные годографы скорости подобны (рис. 7.11), и центры циркуляций не являются зонами «застоя».

Амплитуда сейшевых колебаний в озере при заданном постоянном ветре меньше 1 см, и, в отличие от бассейна с ровным дном, настоящего нагона не возникает — поле отклонений уровня имеет сложную, медленно затухающую структуру.

Важной характеристикой для экологических задач являются скорости подъема и опускания вод. Расчеты показывают, что в озере вертикальные скорости имеют порядок 1 мм/с (рис. 7.12).

Профили коэффициента турбулентной вязкости ν в различных пунктах озера при южном ветре средней силы приведены на рис. 7.13.

7.3. Перенос и диффузия примесей

7.3.1. Постановка задачи. Изучение распространения примесей в прибрежной зоне является важной задачей, связанной прежде всего с проблемой охраны среды. Развитие методов расчета поля

примесей, позволяющих выполнить анализ эволюции поля при вариации параметров сброса отходов в меняющихся гидрометеорологических условиях, необходимо для оценки экологических последствий функционального режима прибрежной акватории.

Для описания поля некоторой субстанции s^* обычно используется адвективно-диффузионное уравнение [57]

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla s + \bar{w} \frac{\partial s}{\partial z} = K_s \nabla^2 s + \frac{\partial}{\partial z} v_s \frac{\partial s}{\partial z} + \psi, \quad (7.3.1)$$

где $s(x, y, z, t)$ — концентрация субстанции s^* , т. е. отношение массы s^* ко всему объему воды ($[s] = M \cdot L^{-3}$); $\mathbf{v} = (u, v)$; $\bar{w} = w - w_0$; w_0 — скорость седиментации диффундирующих частиц; K_s, v_s — коэффициенты горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии; ψ — функция внешних источников и стоков, изменяющих концентрацию. Примесь предполагается пассивной, т. е. задаваемое поле скорости (u, v, w) не зависит от s и уравнение (7.3.1) — линейное.

Рассмотрим краевую задачу для уравнения (7.3.1) в области $Q = \{\bar{\Omega}(x, y, z), -h \leq z \leq \xi; t \geq 0\}$, где боковая поверхность $\bar{\Omega}$ является объединением двух частей: $\bar{\Omega} = \Omega_1 \cup \Omega_2$; $\Omega_1(x, y, z)$ — поверхность дна, $\Omega_2(x, y, z)$ — боковая цилиндрическая поверхность. Запишем граничные условия по вертикали

$$\begin{aligned} w_0 s + v_s \partial s / \partial n &= 0; \quad z = \xi(x, y, t); \\ v_s \partial s / \partial n &= 0; \quad z = -h(x, y), \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

n — внешняя нормаль. На боковой поверхности Ω области Q примем

$$\bar{\varphi} s + K_s \partial s / \partial n = \varphi(x, y, z, t). \quad (7.3.3)$$

Функция φ задает источники и стоки на Ω ; $\bar{\varphi} = \varphi = 0$ соответствует случаю непроницаемой для примеси стенки, $\bar{\varphi} = \infty$, $\varphi \simeq 0$ — случаю поглощения примеси стенкой. Начальное состояние характеризуется фоном $s^0 = s|_{t=0}$.

Локализованные источники выброса примеси задаются произведением δ -функций. Мгновенный точечный источник мощности $\bar{s}$ в точке (x_0, y_0, z_0) в момент t_0 имеет вид

$$\varphi^0 = \bar{s} \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \delta(t - t_0). \quad (7.3.4)$$

При отсутствии внешних факторов интегрирование уравнения (7.3.1) по области Q с краевыми условиями

$$K_s \frac{\partial s}{\partial n} \Big|_{\Omega} = 0; \quad v_s \frac{\partial s}{\partial n} \Big|_{\partial \Omega_1} = 0; \quad s w_n \Big|_{\bar{\Omega}} = 0, \quad (7.3.5)$$

где w_n — проекция вектора скорости $\mathbf{w} = (u, v, w)$ на нормаль, с использованием формул Гаусса и Грина дает закон сохранения концентрации примеси

$$\int_Q s \, dt = \int_Q s^0 \, dt. \quad (7.3.6)$$

Остановимся на двумерном случае. В области $Q_2 = \{x, y \in \Omega, t \geq 0\}$ поле концентрации примеси описывается уравнением

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle s \rangle + \frac{\partial}{\partial x} \langle us \rangle + \frac{\partial}{\partial y} \langle vs \rangle = K_s \nabla^2 \langle s \rangle, \quad (7.3.7)$$

$$\langle s \rangle = \int_{-h}^{\xi} s(x, y, z, t) dz = \bar{s} H,$$

которое получается интегрированием по вертикали трехмерного уравнения (7.3.1) с условием $\partial s / \partial \eta|_{\partial \Omega} = 0$ и кинематическими условиями на свободной поверхности и на дне. Недивергентная форма этого уравнения

$$\frac{\partial \bar{s}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{s}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{s}}{\partial y} = K_s H^{-1} \nabla^2 (\bar{s} H).$$

Иногда его используют в виде

$$\partial s / \partial t + u \partial s / \partial x + v \partial s / \partial y = K_s \nabla^2 s, \quad (7.3.8)$$

$s = \bar{s}$, $\mathbf{v} = (u, v) = \bar{\mathbf{v}}$. Отметим, что при выводе, помимо предположения, согласующегося с допущениями теории мелкой воды: $\langle \mathbf{v} s \rangle = \langle \mathbf{v} \rangle \langle s \rangle H^{-1}$, предполагается и малость слагаемых $\nabla(s|_{\xi} \cdot \nabla \xi)$, $\nabla(s|_{-h} \cdot \nabla h)$.

Уравнение решается при краевом условии (4.2.60) и некотором начальном условии.

7.3.2. Коэффициенты турбулентной диффузии. Для оценки коэффициента горизонтального турбулентного обмена K_s используются соображения, связанные с распределением энергии турбулентных пульсаций по волновым числам. Согласно схеме, предложенной Озмидовым [57], выделяются три линейных масштаба l_i с разными значениями скорости диссипации турбулентной энергии ϵ_i ; в каждом из интервалов между зонами энергоснабжения коэффициент горизонтального турбулентного обмена описывается законом «степени 4/3», т. е. имеет вид $K_{s_i} = K_{s_i}(\epsilon_i, l_i^{4/3})$. Так, для явлений масштаба $O(10^2 - 10^4 \text{ м})$ и $\epsilon = O(10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}^3)$ получим $K_s = O(1 - 10^2 \text{ м}^2/\text{с})$.

Оценка для коэффициентов вертикального турбулентного обмена следует из соотношений

$$K_s / v_s = O(l_x^2 / l_z^2),$$

где l_x, l_z — масштабы процесса в соответствующих координатных направлениях. Значение l_z может варьировать от $l_z^{\text{мин}}$ (масштаб Колмогорова), характеризующего турбулентные вихри наименьшего масштаба, до $l_z^{\text{макс}}$, при котором диффузия облака примеси по вертикали прекращается, продолжаясь лишь в горизонтальных

направлениях. Коэффициент обмена связан с масштабом l_z соотношением

$$v_s = c_1 \varepsilon^{1/3} l_z^{4/3},$$

где c_1 — универсальная безразмерная постоянная. Для средних значений на основании градиентных наблюдений иногда принимают $l_x/l_z = O(10^3)$. Все приведенные оценки являются ориентировочными и дают лишь общее представление о значениях коэффициентов турбулентного обмена для процесса определенного масштаба.

При локализованных источниках скорость распыливания пятна примеси оказывается неравномерной, увеличиваясь с ростом размера диффундирующего облака. Это должно означать, что коэффициенты обмена зависят и от времени. Конструктивный подход к определению коэффициента вертикального обмена, учитывающий такую зависимость, заключается в данном случае в учете типичных условий береговой зоны — пристеночной турбулентности и развитой трехмерной турбулентности. Этому отвечают функциональные формы коэффициентов

$$v_s \sim \kappa u_* z; \quad v_s \sim \varepsilon^{1/3} z^{4/3}. \quad (7.3.9)$$

В предположении, что число Прандтля $\alpha_s = \nu/v_s = O(1)$, в первом случае можно воспользоваться значениями ν , в динамической задаче вычисляемыми на основании концепции Прандтля (7.1.9) с масштабом турбулентности (7.1.14):

$$l = \frac{\kappa}{H} Z_h Z_\xi Z_0, \quad (7.3.10)$$

$$Z_h = z + h + z_h, \quad Z_\xi = -z + \xi + z_\xi, \quad Z_0 = 1 - \beta_1 H^{-2} Z_h Z_\xi, \\ 0 \leq \beta_1 \leq 4.$$

Второй случай — $v_s = c_s \varepsilon^{1/3} z^{4/3}$ — прямо следует из гипотез приближенного подобия Прандтля — Колмогорова в форме (7.1.7) с коэффициентом $c_s = c_\varepsilon^{-1/3}$. Таким образом,

$$v_s = l \sqrt{b}$$

при использовании уравнения баланса кинетической энергии турбулентности (7.1.8) и формулы (7.3.10).

7.3.3. Преобразование к криволинейным координатам. В случае сложной геометрии области Q используем преобразование

$$\xi = \xi(x, y); \quad \eta = \eta(x, y), \quad \theta = (z + h)/H; \quad \tau = t, \quad (7.3.11)$$

согласованное с границей области. Преобразование предполагается допустимым. Оно задает отображение Q в Q^* , стороны которого являются координатными плоскостями. В криволинейной системе координат (ξ, η, θ) область Q^* представляет параллелепипед.

Преобразуем задачу (7.3.1) — (7.3.3) к новым переменным:

$$\partial s / \partial t + U \partial s / \partial \xi + V \partial s / \partial \eta + W \partial s / \partial \theta = D_{\xi, \eta} s + D_{\theta} s + \psi, \quad (7.3.12)$$

где

$$U = U^1 = u\xi_x + v\xi_y; \quad V = U^2 = u\eta_x + v\eta_y; \quad (7.3.13)$$

$$W = U^3 = \theta_t + u\theta_x + v\theta_y + w\theta_z;$$

$$D_{\xi, \eta} = J^{-1} K_s \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J \nabla \xi^i \cdot \nabla \xi^k \frac{\partial}{\partial \xi^k} \right); \quad D_\theta = J^{-1} H^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(J v_s \frac{\partial}{\partial \theta} \right),$$

$$i, k = 1, 2, 3; \quad (7.3.14)$$

$$\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y), \quad J = HJ_*; \quad J_* = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi.$$

В дивергентной форме уравнение (7.3.12) имеет вид (4.2.55). Эту форму можно получить сложением уравнения (7.3.12) с уравнением неразрывности (4.2.29), умноженным на s .

Согласно (4.1.52) на верхней и нижней гранях параллелепипеда

$$Q^* = \{\xi_1 \leq \xi \leq \xi_M, \eta_1 \leq \eta \leq \eta_N, 0 \leq \theta \leq 1\} \text{ имеем}$$

$$w_0 s + \frac{v_s}{\sqrt{g^{33}}} \left(g^{31} \frac{\partial s}{\partial \xi} + g^{32} \frac{\partial s}{\partial \eta} + g^{33} \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) = 0, \quad \theta = 1; \quad (7.3.15)$$

$$\frac{v_s}{\sqrt{g^{33}}} \left(g^{31} \frac{\partial s}{\partial \xi} + g^{32} \frac{\partial s}{\partial \eta} + g^{33} \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) = 0, \quad \theta = 0. \quad (7.3.16)$$

В соответствии с характером преобразования боковая цилиндрическая поверхность с вертикальной образующей отображается на боковые грани ∂Q^* параллелепипеда Q^* . Запишем условия (7.3.3) на этих гранях:

$$\bar{\varphi} s + \frac{K_s}{\sqrt{g^{11}}} \left(g^{11} \frac{\partial s}{\partial \xi} + g^{12} \frac{\partial s}{\partial \eta} + g^{13} \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) = \varphi, \quad \xi = \xi_1; \quad \xi = \xi_M; \quad (7.3.17)$$

$$\bar{\varphi} s + \frac{K_s}{\sqrt{g^{22}}} \left(g^{21} \frac{\partial s}{\partial \xi} + g^{22} \frac{\partial s}{\partial \eta} + g^{23} \frac{\partial s}{\partial \theta} \right) = \varphi, \quad \eta = \eta_1; \quad \eta = \eta_N, \quad (7.3.18)$$

где

$$g^{ik} = \nabla_3 \xi^i \cdot \nabla_3 \xi^k; \quad \nabla_3 = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z), \quad \text{причем} \quad \xi_z^j = 0, \quad j = 1, 2.$$

Перепишем задачу (7.3.12)—(7.3.18) в ковариантной метрике. Согласно (4.1.24) для горизонтальных ковариантных составляющих скорости получим

$$U = J^{-1} \left\{ u \begin{vmatrix} y_\eta & y_\theta \\ z_\eta & z_\theta \end{vmatrix} - v \begin{vmatrix} x_\eta & x_\theta \\ z_\eta & z_\theta \end{vmatrix} \right\};$$

$$V = J^{-1} \left\{ -u \begin{vmatrix} y_\xi & y_\theta \\ z_\xi & z_\theta \end{vmatrix} + v \begin{vmatrix} x_\xi & x_\theta \\ z_\xi & z_\theta \end{vmatrix} \right\}. \quad (7.3.19)$$

Поскольку

$$x_\theta = J \begin{vmatrix} \xi_y & \xi_z \\ \eta_y & \eta_z \end{vmatrix} = 0; \quad y_\theta = -J \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_z \\ \eta_x & \eta_z \end{vmatrix} = 0,$$

то

$$\begin{aligned} U &= J^{-1} z_0 (uy_\eta - vx_\eta) = J_*^{-1} (uy_\eta - vx_\eta); \\ V &= J^{-1} z_0 (-uy_\xi + vx_\xi) = J_*^{-1} (-uy_\xi + vx_\xi) \end{aligned} \quad (7.3.20)$$

и

$$W = H^{-1} [-\theta H_t + u(h_x - \theta H_x) + v(h_y - \theta H_y) + w]. \quad (7.3.21)$$

Контравариантные компоненты тензора g^{ik} , входящие в выражения операторов диффузии и граничные условия, преобразуются по формулам (4.1.19).

В двумерном случае для задачи (7.3.7), (7.3.8) в области $\Omega_T = \{x, y \in \Omega, t \geq 0\}$ воспользуемся преобразованием

$$\xi = \xi(x, y); \quad \eta = \eta(x, y); \quad \tau = t, \quad (7.3.22)$$

согласованным с конфигурацией $\Omega(x, y)$. В прямоугольной области $\Omega^* = \{\xi_1 \leq \xi \leq \xi_M, \eta_1 \leq \eta \leq \eta_N\}$ недивергентная форма уравнения (7.3.7) имеет вид

$$\frac{\partial s}{\partial t} + U \frac{\partial s}{\partial \xi} + V \frac{\partial s}{\partial \eta} = J^{-1} \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(JK_s g^{ik} \frac{\partial s}{\partial \xi^k} \right) + \psi, \quad (7.3.23)$$

где $s = \bar{s} = \langle s \rangle H^{-1}$;

$$\begin{aligned} U &= u\xi_x + v\xi_y = J^{-1} (uy_\eta - vx_\eta); \\ V &= u\eta_x + v\eta_y = J^{-1} (-uy_\xi + vx_\xi); \end{aligned} \quad (7.3.24)$$

$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$; $g^{ik} = \nabla \xi^i \cdot \nabla \xi^k$, $i, k = 1, 2$. Запишем граничное условие (7.3.8) в новых переменных:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}s + \frac{K_s}{\sqrt{g^{11}}} g^{1i} \frac{\partial}{\partial \xi^i} &= \varphi; \\ \bar{\varphi}s + \frac{K_s}{\sqrt{g^{22}}} g^{2i} \frac{\partial s}{\partial \xi^i} &= \varphi \end{aligned}$$

($i = 1, 2$), или, с учетом (4.1.63), в ковариантной метрике:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s}{\partial t} + U \frac{\partial s}{\partial \xi} + V \frac{\partial s}{\partial \eta} &= \\ = J^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi} [J^{-1} K_s (g_{22} s_\xi - g_{12} s_\eta)] + \frac{\partial}{\partial \eta} [J^{-1} K_s (-g_{21} s_\xi + g_{11} s_\eta)] \right\} + \psi; \end{aligned} \quad (7.3.25)$$

$$\bar{\varphi}s + \frac{K_s}{J \sqrt{g^{22}}} (g_{22} s_\xi - g_{12} s_\eta) = \varphi(\eta), \quad \xi = \text{const}; \quad (7.3.26)$$

$$\bar{\varphi}s + \frac{K_s}{J \sqrt{g^{11}}} (-g_{12} s_\xi + g_{11} s_\eta) = \varphi(\xi), \quad \eta = \text{const}. \quad (7.3.27)$$

Задача (7.3.25—7.3.27) интегрируется на сетке Ω_Δ^* , построенной одним из методов главы 5 при задании правой части ψ и начального условия $s|_{t=0} = s^0$.

7.3.4. Численная реализация. Для решения трехмерной адвективно-диффузионной краевой задачи можно воспользоваться гибридной схемой, структурно аналогичной схеме, применявшейся для решения динамических уравнений в п. 7.2.1. Запишем уравнение (7.3.12) в виде

$$\begin{aligned} s_t &= Rs + F; \\ R &= J^{-1} H^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(J v_s \frac{\partial}{\partial \theta} \right); \\ F &= D_{\xi, \eta} s - U s_{\xi} - V s_{\eta} + \psi. \end{aligned} \quad (7.3.28)$$

Горизонтальные операторы аппроксимируются явно, оператор R — неявно; решение s^{k+1} определяется вертикальными прогонками из уравнения

$$(1/\Delta t - R) s^{k+1} = s^k/\Delta t + F^k. \quad (7.3.29)$$

На сетке $Q_{\Delta}^* = \{(\xi, \eta, \theta)_{m, n, p}\}$ горизонтальную адвекцию аппроксимируем направленными разностями второго порядка согласно (3.1.48):

$$\begin{aligned} U s_{\xi} &= \frac{1}{2\Delta} [(U + |U|) D_m^- + (U - |U|) D_m^+] s; \\ V s_{\eta} &= \frac{1}{2\Delta} [(V + |V|) D_n^- + (V - |V|) D_n^+] s, \end{aligned}$$

а вертикальную адвекцию — направленными разностями первого порядка

$$W s_{\theta} = \frac{1}{2\Delta} [W + |W|) \delta_p^- + (W - |W|) \delta_p^+] s,$$

где

$$D^{\pm} = \mp \frac{3}{2} E \pm 2T^{\pm 1} \mp T^{\pm 2}; \quad \delta^{\pm} = (-1)^{\pm 1} (E - T).$$

Диффузионные члены аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} \gamma \frac{\partial s}{\partial \xi} &= \frac{1}{\Delta^2} [\gamma_{m+1/2} s_{m+1} - (\gamma_{m+1/2} + \gamma_{m-1/2}) s_m + \gamma_{m-1/2} s_{m-1}]_{n, p}; \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \beta \frac{\partial s}{\partial \eta} &= \frac{1}{4\Delta} (\beta_{m+1, n, p} \delta_n s_{m+1, p} - \beta_{m-1, n, p} \delta_n s_{m-1, p}), \end{aligned}$$

$\delta_n s = s_{n+1} - s_{n-1}$, и т. д. Схема имеет точность $O(\Delta t, \Delta \theta, \Delta^2)$ и устойчива при ограничении, налагаемом явной аппроксимацией горизонтальных операторов. Для ориентировочной оценки Δt можно принять

$$\Delta t \leq \min_{m, n \in Q_{\Delta}^*} \frac{\Delta^2}{2(g_{11} + g_{22}) J^{-2} K_s + (|U| + |V|) \Delta}. \quad (7.3.30)$$

На вертикальное разрешение сетки ограничений нет.

Полностью неявная схема строится на основе факторизации уравнения (7.3.12) и расщепления его по координатным направлениям. Обозначая

$$J^{-1}K_s \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(Jg^{ik} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \right) = \Lambda_{ik}, \quad U^i \frac{\partial}{\partial \xi^i} = \Lambda_i,$$

$i, k = 1, 2, 3$ (суммирование нет) и

$$J^{-1}H^{-2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(J^{-1}v_s \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \Lambda_{33},$$

рассмотрим схему Дугласа — Гана

$$s^* - s^k = \Delta t [(\Lambda_{11} - \Lambda_1)s^* + (\Lambda_{22} - \Lambda_2)s^k + (\Lambda_{33} - \Lambda_3)s^k + ps^k + \psi^k]; \quad (7.3.31)$$

$$s^{**} - s^* = \Delta t [(\Lambda_{22} - \Lambda_2)(s^{**} - s^k)] = \Delta t p_2;$$

$$s^{k+1} - s^{**} = \Delta t [(\Lambda_{33} - \Lambda_3)(s^{k+1} - s^k)] = \Delta t p_3,$$

где

$$p = \Lambda_{12} + \Lambda_{13} + \Lambda_{21} + \Lambda_{23} + \Lambda_{31} + \Lambda_{32}.$$

Для определения порядка аппроксимации выразим промежуточные значения s^* , s^{**} через s^k , s^{k+1} :

$$\begin{aligned} s^* &= s^{k+1} - \Delta t (p_2 + p_3); \\ s^{**} &= s^{k+1} - \Delta t p_3. \end{aligned} \quad (7.3.32)$$

Обозначая $\Lambda^{(i)} = \Lambda_{ii} - \Lambda_i$, $i = 1, 2, 3$ и складывая уравнения (7.3.31), получим:

$$(s^{k+1} - s^k)/\Delta t = \Lambda^{(1)}s^* + \Lambda^{(2)}s^{**} + \Lambda^{(3)}s^{k+1} + ps^k + \psi^k$$

или с учетом (7.3.32)

$$(s^{k+1} - s^k)/\Delta t = (\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)} + \Lambda^{(3)})s^{k+1} + ps^k + \psi^k + f,$$

где

$$f = -\Delta t [\Lambda^{(1)}(p_2 + p_3) + \Lambda^{(2)}p_3].$$

Поскольку

$$p_3 = \Lambda^{(3)}(s^{k+1} - s^k); \quad p_2 = \Lambda^{(2)}(s^{**} - s^k) = (\Lambda^{(2)} - \Delta t \Lambda^{(2)}\Lambda^{(3)})(s^{k+1} - s^k),$$

то

$$f = -\Delta t (\Lambda^{(1)}\Lambda^{(2)} + \Lambda^{(1)}\Lambda^{(3)} + \Lambda^{(2)}\Lambda^{(3)} - \Delta t \Lambda^{(1)}\Lambda^{(2)}\Lambda^{(3)})(s^{k+1} - s^k).$$

Таким образом,

$$f = O(\Delta t^2). \quad (7.3.33)$$

Установим устойчивость разностных уравнений (7.3.31). Для решения в гармониках $s_{m,n,p}^k = \rho^k \exp \{i(\alpha_1 m + \alpha_2 n + \alpha_3 p)\}$ имеем

$$\begin{aligned} (1 + A_1)\rho^* &= (1 - A_2 - A_3 + \lambda)\rho^k; \\ (1 + A_2)\rho^{**} &= \rho^* + A_2\rho^k; \\ (1 + A_3)\rho^{k+1} &= \rho^{**} + A_3\rho^k. \end{aligned} \quad (7.3.34)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A_k &= a_k + ib_k; \quad a_k = 2\Delta t (1 - \cos \alpha_k); \\ b_k &= \Delta t U^k \sin \alpha_k; \quad \lambda = \sum \lambda_{jk}; \\ \lambda_{jk} &= \Delta t \sin \alpha_j \sin \alpha_k; \quad j, k = 1, 2, 3; \quad \Delta \xi = \Delta \eta = \Delta \theta = 1. \end{aligned}$$

Исключая из уравнений гармоник на промежуточных слоях, получим:

$$\rho^{k+1} = G \rho^k;$$

$$G = \frac{p + \lambda}{(1 + A_1)(1 + A_2)(1 + A_3)}; \quad |G|^2 = \frac{(p_1 + \lambda)^2 + p_2^2}{r_1^2 + r_2^2}, \quad (7.3.35)$$

где

$$\begin{aligned} p &= 1 + A_1 A_2 + A_1 A_3 + A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3 = p_1 + ip_2; \\ q &= A_1 + A_2 + A_3 = q_1 + iq_2, \quad p_1 + q_1 = r_1; \quad p_2 + q_2 = r_2. \end{aligned}$$

Условие устойчивости $|G|^2 \leq 1$ приводит к неравенству

$$0 \leq \left(\sin \frac{\alpha_1}{2} - \sin \frac{\alpha_2}{2} \right)^2 + \left(\sin \frac{\alpha_1}{2} - \sin \frac{\alpha_3}{2} \right)^2 + \left(\sin \frac{\alpha_2}{2} - \sin \frac{\alpha_3}{2} \right)^2,$$

которое всегда выполнено. Однако на практике при решении третьей краевой задачи (7.3.12)—(7.3.18) (или задачи Неймана с условием $\partial s / \partial n|_{\partial Q^*} = 0$) возникает ограничение на устойчивость, ибо в краевых условиях на гранях ∂Q^* производные в касательных направлениях аппроксимируются явно.

В двумерном случае схема Дугласа — Гана имеет вид

$$(s^{k+1} - s^{k+1/2}) / \Delta t = \Lambda^{(1)} s^{k+1/2} + (\Lambda^{(2)} + \Lambda_{12} + \Lambda_{21}) s^k + \psi^k; \quad (7.3.36)$$

$$(s^{k+1} - s^{k+1/2}) / \Delta t = \Lambda^{(2)} (s^{k+1} - s^k);$$

$$\Lambda_{ik} = J^{-1} K_s \frac{\partial}{\partial \xi^i} \left(J g^{ik} \frac{\partial}{\partial \xi^k} \right);$$

$$\Lambda_i = U^i \frac{\partial}{\partial \xi^i}, \quad \Lambda^{(i)} = \Lambda_{ii} - \Lambda_i.$$

Следуя приведенному анализу, можно убедиться в безусловной устойчивости схемы и найти погрешность аппроксимации:

$$(s^{k+1} - s^k) / \Delta t = (\Lambda^{(1)} + \Lambda^{(2)}) s^{k+1} + (\Lambda_{12} + \Lambda_{21}) s^k + \psi^k + O(\Delta t^2).$$

Приведем еще одну схему решения двумерной задачи — схему Яненко — Сучкова — Погодина:

$$\begin{aligned} (s^{k+1/2} - s^k) / \Delta t &= \Lambda^{(1)} s^{k+1/2} + \Lambda_{12} s^k + \psi; \\ (s^{k+1} - s^{k+1/2}) / \Delta t &= \Lambda^{(2)} s^{k+1} + \Lambda_{21} s^k. \end{aligned} \quad (7.3.37)$$

Схема абсолютно устойчива; она несколько проще, но имеет точность $O(\Delta t)$.

7.3.5. Тестирование схем. Пример расчета. Приведенные численные схемы тестировались на аналитических решениях модельных задач.

В качестве первого примера рассмотрим задачу о двумерной диффузии в неограниченном цилиндре поля примеси, в начальный момент имеющего вид

$$s^0 = s_0 e^{-\beta (r/R)^2}, \quad r^2 = x^2 + y^2. \quad (7.3.38)$$

На боковой поверхности цилиндра $r = R$ ставится условие отсутствия потока примеси $\partial s / \partial n = 0$. Аналитическое решение этой задачи имеет вид

$$s(r, t) = \frac{2s_0}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ e^{-k\mu_n^2 t / R^2} \frac{J_0(\mu_n r / R)}{J_0^2(\mu_n)} \int_0^R \rho e^{-\beta (\rho/R)^2} J_0(\mu_n \rho / R) d\rho \right\}, \quad (7.3.39)$$

где J_0 — функция Бесселя нулевого аргумента; μ_n — положительные корни уравнения $J'_0(\mu) = 0$. Численное интегрирование этой

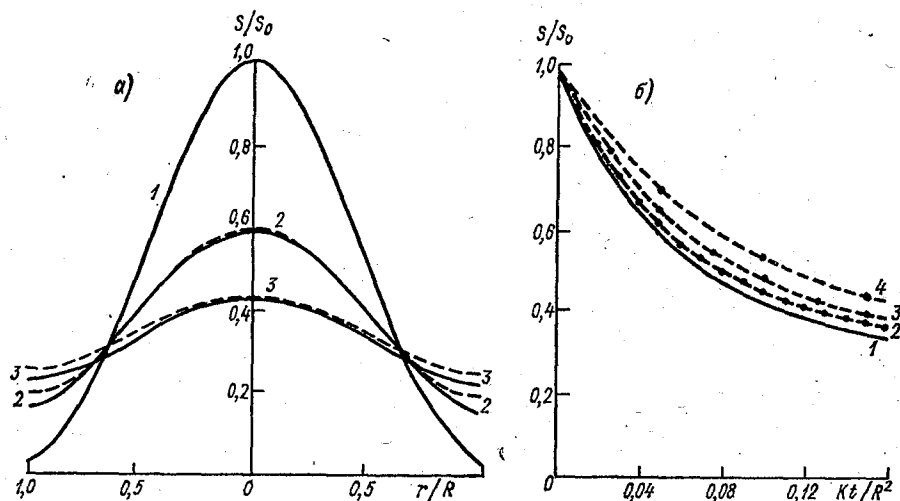


Рис. 7.14. Диффузия примеси в цилиндрической области.

Сплошная кривая — точное решение; пунктир — численное решение. а — профили концентрации примеси в сечении цилиндра; $K_s \Delta t / R^2 = 10^{-3}$: 1) $t=0$; 2) $t=0.05R^2K_s^{-1}$; 3) $t=0.1R^2K_s^{-1}$; б) — изменение концентрации в центре цилиндра: 1) точное решение и расчет при $K_s \Delta t / R^2 = 10^{-3}$; 2) $K_s \Delta t / R^2 = 10^{-2}$; 3) $K_s \Delta t / R^2 = 0.025$; 4) $K_s \Delta t / R^2 = 0.05$.

задачи проводилось на сетке, состоящей из 23×23 узлов. Параметр β брался равным 3,4539. Сопоставление результатов приведено на рис. 7.14 а. Как видно, профили концентрации практически во всей области совпадают. Некоторое отклонение происходит только на границе, что связано с аппроксимацией граничного условия; эксперименты показали, что при дроблении шага сетки эти отклонения уменьшаются. Для неявной схемы Дугласа — Гана

(7.3.36) была проведена проверка влияния шага Δt при значениях параметра устойчивости $K_s \Delta t / \Delta z_{\text{мин}}^2$ от 0,25 до 15 (рис. 7.14 б). При абсолютной устойчивости схемы значительные увеличения Δt приводят к уменьшению скорости диффузии.

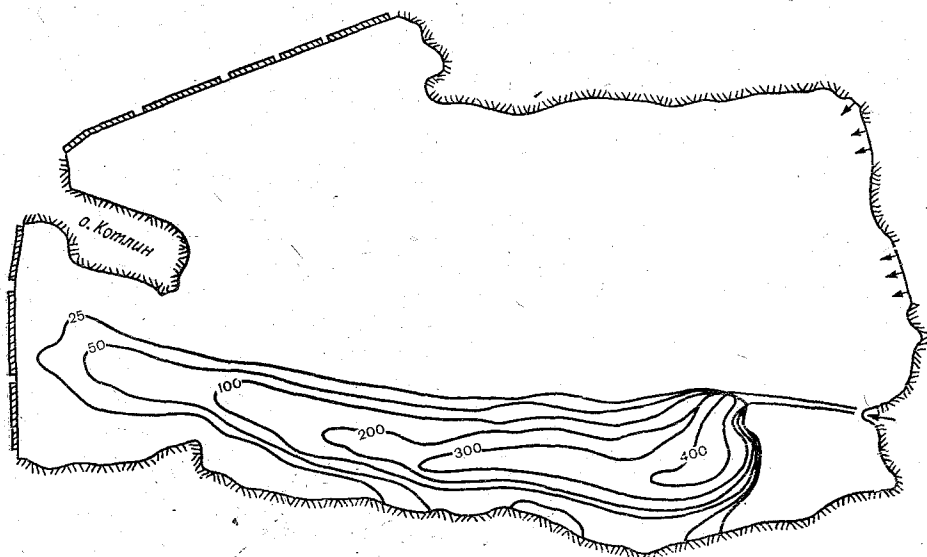


Рис. 7.15. Поле концентрации примеси при расположении источника к югу от устья Морского канала.

Расчет вертикальной диффузии в трехмерной модели проверялся с помощью тестовой задачи

$$s_t = \nu s_{zz}; \quad (7.3.40)$$

$$\nu s_z|_{z=0, z=h} = 0; \quad s|_{t=0} = s_0 \cos(\pi z/h),$$

решение которой дает

$$s(z, t) = s_0 e^{-\pi^2 \nu t / h^2} \cos(\pi z/h). \quad (7.3.41)$$

Отличие расчетных значений s от точного решения (7.3.41) при $\Delta z/h \simeq 0,1$ и $\nu \Delta t / \Delta z_{\text{мин}}^2 \simeq 10$ составило менее 1 %.

Наконец, горизонтальная адвекция тестировалась при задании вращения жидкости в цилиндре с угловой скоростью ω : $v = \omega r$. Начальное поле примеси имеет вид (7.3.38). Численное решение в этом случае практически не отличается от точного.

Схема Дугласа — Гана (7.3.36) с направленными разностями первого порядка для адвекции использовалась для расчетов распространения примеси в Невской губе при наличии комплекса защитных сооружений. Точечный источник условной мощностью

$\sim 10^5$ ед/с помещался в различных точках губы. Расчет велся на сетке, состоящей из 55×51 узлов и изображенной на рис. 5.6. Средние по вертикали скорости течений рассчитывались с помощью полунявной схемы п. 6.2.5. Коэффициент горизонталь-

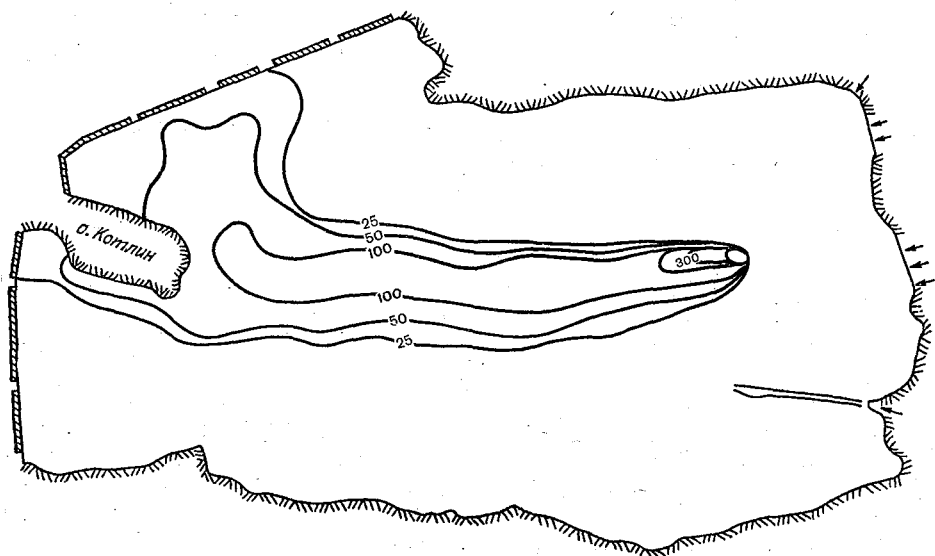


Рис. 7.16. Поле концентрации примеси при расположении источника севернее устья Морского канала.

ного турбулентного обмена определялся по формуле Обухова, учитывающей градиенты скорости и масштаб турбулентности, который считался равным шагам сетки. Значения коэффициента имели порядок $1-0,01 \text{ м}^2/\text{с}$. При стоковом течении (рис. 6.5) полученные поля концентрации примеси (ед./ м^3) для двух местоположений точек выброса через 6 сут действия источника приведены на рис. 7.15, 7.16. В первом случае источник располагался с южной стороны устья Морского канала, откуда в соответствии с рассчитанной схемой течений примесь в значительном количестве проникает к южному побережью Невской губы. Во втором случае источник помещался в 5 км к западу от Васильевского острова и на 4 км севернее устья Морского канала. При этом стоковое течение проносит примесь посередине между северным и южным побережьями. Количество примеси в прибрежной полосе южного побережья уменьшается по сравнению с первым источником в 10^5 раз.

8

Глава

Численное моделирование затопления прибрежной зоны

В главе 2 затопление прибрежной зоны исследовалось аналитическими методами. При этом, как правило, рассматривалась идеализированная постановка: движение одномерное и бездиссипативное, откос плоский. Применение единого вычислительного подхода, развитого в предыдущих главах, позволяет существенно расширить класс решаемых задач по оценке характеристик затопления прибрежной зоны, а также выяснить пределы применимости аналитических решений. Результаты расчетов могут быть использованы при уточнении предварительной схемы цунамирайонирования Тихоокеанского побережья СССР.

8.1. Исходные предпосылки

8.1.1. Обзор численных методов расчета наката. Задача расчета затопления береговой зоны при накате длинной волны ставится как гиперболическая краевая задача в области с подвижной границей. Фронтальная граница при накате является огибающей семейства сходящихся характеристик, пересечение которых локализует разрушение волны. Метод характеристик удобен для качественного анализа процесса и широко применяется в одномерных расчетах [68, 89]. При движении волны по сухому берегу фазовая скорость в точках $\xi = -h$ равна нулю, и положительная характеристика сливается с отрицательной, что заставляет использовать на расчетной сетке дополнительное экстраполяционное граничное условие. Преимущества метода связаны в основном с возможностью расчета обрушенных волн — этот процесс регистрируется пересечением соседних положительных характеристик, одна из которых перестает учитываться в расчете. К недостаткам метода относится понижение точности вблизи границы, где характеристики пересекаются под малым углом, а также усложненность процедуры расчета.

Методы расчета затопления в областях реальной конфигурации первоначально строились на основе уравнения мелкой воды в эйлеровых координатах, т. е. на неподвижной разностной сетке.

Основная трудность такой задачи заключается в нахождении устойчивых граничных аппроксимаций. Здесь можно выделить несколько подходов. Один из них, называемый обычно экстраполяционным, использует экстраполяцию скорости в граничные узлы разнесенной сетки [99, 127]. Другой подход, называемый камерным, интерпретирует ячейки сетки как камеры с вертикальными стенами. Если отметка уровня граничной ячейки превышает отметку дна соседней «сухой» ячейки, то стенка убирается, и поток на грани ячеек определяется по эмпирической формуле [88, 123, 134, 145]. Движение границы здесь происходит скачкообразно, и точность метода относительно невелика. Достоинством его является возможность расчета в многосвязных областях с помощью простых алгоритмов. Третий подход характеризуется методами сквозного счета, не требующими дополнительного условия на урезе воды, ибо суша предполагается покрытой тонким слоем воды, и урез не выделяется [26, 47, 72]. Сопоставление результатов с аналитическим решением [79] свидетельствует о значительном росте отклонения при определенном ограничении на тип аппроксимации. Четвертый подход связан с явными формулами преобразования переменных, отображающих движущуюся область на простую расчетную область. Эти методы обеспечивают достаточную точность в одномерном случае [41, 42, 47, 53, 69]. Наконец, последнюю, пятую группу методов объединяет использование лагранжева описания, связанного с частицами жидкости. В одномерном случае соответствующие схемы предложены в [13, 98, 118, 119]. Двумерная модель наката на основе нелинейно-дисперсионных уравнений предложена в [93]; отмечается высокая точность схемы.

В настоящей главе рассматриваются постановка и решение краевых задач с подвижной границей на основе единого подхода — отображения физической области на фиксированную вычислительную область.

Центральное место в разделе 8.2 занимает решение двумерной задачи в произвольной области; в случае движущейся границы методика отображения, использовавшаяся в предшествующих главах, может трактоваться как описание в лагранжевых координатах. В разделе 8.3 подробно анализируется двумерная задача наката с вертикальным разрешением, позволяющая корректно учесть диссипацию турбулентной энергии — доминирующий фактор в процессе затопления береговой зоны.

8.1.2. Безразмерные параметры наката. При обработке и сопоставлении данных лабораторных и вычислительных экспериментов, которые проводятся для создания эффективной упрощенной методики расчета наката, важное значение приобретает выбор определяющих безразмерных параметров. Как и в других физических задачах, поиск определяющих параметров наката длительное время проводился как на основе больших массивов экспериментальных данных, так и с помощью анализа параметров подобия и реализации моделей наката. Чтобы выделить только физически значимые параметры, рассмотрим максимально простую

геометрию задачи: плоский откос без изломов, фронт волны параллелен изобатам. Даже в этом случае число определяющих параметров велико. Рассмотрим, например, уравнения нелинейно-дисперсионной теории длинных волн с учетом диссипации, выведенные в главе 1:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (Hu) &= 0; \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \xi}{\partial x} &= D + f; \\ D &= \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{H^3}{3} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\alpha H^2}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\} + \\ &+ \alpha \left\{ \frac{H}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] - \alpha \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

где f — сила трения, для которой возможны разные аппроксимации; α — угол заложения откоса. Используем естественные безразмерные параметры, введенные в главе 2:

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= \omega t, \quad \tilde{x} = \alpha x / \xi_0, \quad \tilde{\xi} = \xi / \xi_0; \\ \tilde{u} &= \alpha u / (\omega \xi_0), \quad \tilde{H} = -\tilde{x} + \tilde{\xi}, \quad \tilde{D} = D / (\omega^2 \xi_0). \end{aligned} \quad (8.1.2)$$

Тогда система (8.1.1) запишется в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} (\tilde{H} \tilde{u}) &= 0; \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{t}} + \tilde{u} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{x}} + \frac{1}{\text{Br}} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial \tilde{x}} &= \alpha^2 \tilde{D} + \alpha f / (\omega^2 \xi_0). \end{aligned} \quad (8.1.3)$$

Отсюда видно, что имеются три определяющих параметра: параметр обрушения $\text{Br} = \omega^2 \xi_0 / (\alpha^2 g)$ (в определении Br , выведенном в главе 2, в качестве амплитуды использована высота наката ξ_R), параметр дисперсии — угол наклона дна α и параметр диссипации $\tilde{f} = \alpha f / (\omega^2 \xi_0)$. Первый из них активно изучался в главе 2, он позволяет выяснить, разрушится ли волна при движении по откосу. В случае необрушенных волн и пренебрежении другими факторами высота наката параметризуется формулой

$$\xi_R / \xi_0 = p \sqrt{L_R / \lambda}, \quad (8.1.4)$$

где λ — длина волны с амплитудой ξ_0 на расстоянии L_R от уреза; p — численный коэффициент, зависящий от формы подходящей к берегу волны. Если волна обрушится, то естественно ожидать, что из-за потерь на обрушение высота наката окажется меньше, чем предсказанная по (8.1.4). Однако этот режим реализуется на относительно пологих откосах, на которых волна движется долго, так что трением и дисперсией пренебрегать нельзя. При этом ξ_R определяется многими параметрами, и для нее не существует простых формул. Для грубой оценки формула (8.1.4) является оценкой «сверху» на высоту наката обрушенной волны.

В безразмерных переменных (8.1.2) дисперсия характеризуется уклоном дна; в этом можно убедиться также обезразмериванием ранее введенного параметра дисперсии $\varepsilon = h^2/\lambda^2$.

Если крутизна волны быстро не нарастает (волна с гладким профилем, длина откоса мала), то $\tilde{D}$ остается ограниченным, и при малых α дисперсией можно пренебречь. В этом случае высота наката по-прежнему определяется формулой (8.1.4). На длинных откосах и при большой начальной амплитуде крутизна волны сильно возрастает, и $\tilde{D}$ также возрастает. Но длинным откосам соответствуют малые углы откосов, так что $\alpha^2 \tilde{D}$ может меняться не очень сильно (по крайней мере при небольших $B\gamma$). Поэтому здесь также можно ожидать малого влияния дисперсии, о чем свидетельствуют отдельные, немногочисленные численные расчеты в рамках дисперсионных моделей (см., например, [119]). Однако в целом вопрос о влиянии дисперсии на высоту наката нельзя считать решенным, и здесь нужны специальные численные эксперименты. Далее в главе 8 будем полагать $D = 0$.

Трение о дно характеризуется безразмерной силой трения

$$\tilde{f} = \alpha f / (\omega^2 \xi_0). \quad (8.1.5)$$

При решении практических задач пользуются различными аппроксимациями, описанными в главах 1, 2 и 7. Так, если воспользоваться простейшей аппроксимацией $f = -\delta u$ с постоянным коэффициентом трения δ , то

$$\tilde{f} = -\frac{\delta}{\omega} \tilde{u}, \quad (8.1.6)$$

и трение характеризуется безразмерным параметром $\tilde{\delta} = \delta/\omega$. В этом случае высота заплеска монохроматической волны параметризуется формулой (см. раздел 2.7).

$$\frac{\xi_R}{\xi_0} = 2\pi \sqrt{\frac{2L_R}{\lambda}} \exp \left[-\delta \sqrt{\frac{L_R}{g\alpha}} \right], \quad (8.1.7)$$

которая при $\delta = 0$ переходит в (8.1.4), а при $\delta \neq 0$ приводит к немонотонной зависимости ξ_R от L_R . Рассмотренная аппроксимация имеет, однако, слишком модельный характер. Наибольшее распространение в гидродинамических расчетах получила квадратичная аппроксимация силы трения

$$f = -C_h u |u|. \quad (8.1.8)$$

Переходя к безразмерным переменным (8.1.2) в (8.1.8), имеем:

$$\tilde{f} = -\frac{C_h}{\alpha} \tilde{u} |\tilde{u}|. \quad (8.1.9)$$

В данном случае трение характеризуется безразмерным параметром C_h/α , и видно, что оно наиболее существенно на пологих откосах, как это и следовало ожидать из физических соображений.

Аналитической формулы для высоты заплеска пока еще не существует, а результаты численных экспериментов, иллюстрирующие влияние параметров Bg и C_h/α , описаны в п. 8.2.1.

Обсудим теперь безразмерные параметры в задачах наката с вертикальным разрешением. В этом случае

$$\tilde{f} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\bar{v} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \quad (8.1.10)$$

и $\bar{v}$ является функцией глубины и энергии турбулентности.

Переходя к переменным (8.1.2) при $\tilde{z} = z/\zeta_0$, получаем:

$$\tilde{f} = \frac{\partial}{\partial \tilde{z}} \left(\tilde{\bar{v}} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{z}} \right); \quad \tilde{\bar{v}} = \bar{v}/(\omega \zeta_0^2). \quad (8.1.11)$$

Итак, диссипация определяется параметром

$$\tilde{\bar{v}} = \frac{\bar{v}}{\omega \zeta_0^2} = \frac{E}{(\zeta_0/h_0)^2}, \quad (8.1.12)$$

где E — число Экмана. Для типичных значений длинных волн на шельфе $E \approx 0,01-1$, поэтому отношение числа Экмана к параметру нелинейности $(\zeta_0/h_0)^2$ может меняться в широких пределах. Это же сохраняется и в случае коэффициента турбулентного обмена, зависящего от глубины. Заметим, что диссипация особенно существенна при малых амплитудах — этому случаю соответствуют малые значения чисел Рейнольдса.

Результаты расчетов характеристик наката в рамках модели с вертикальным разрешением приведены в разделе 8.3.

8.2. Краевые задачи для уравнений мелкой воды с подвижной границей

8.2.1. Одномерная модель наката. Рассмотрим одномерные уравнения мелкой воды в области с подвижной границей $Q = \{0 \leq x \leq F(t), t \geq 0\}$. Преобразование

$$\xi = x/F(t), \quad \tau = t \quad (8.2.1)$$

(см., например, [41, 51]) отображает Q в неподвижную область $Q^* = \{0 \leq \xi \leq 1, t \geq 0\}$. Уравнения (8.1.3) при $D = 0$ в новых переменных и аппроксимации (8.1.8) примут вид (тильды опущены)

$$u_t + F^{-1}(u - \xi F_t) u_\xi + (Bg F)^{-1} \xi_\xi = -\mu H^{-1} u |u| + F^{-2} Re_x^{-1} u_{\xi\xi}; \quad (8.2.2)$$

$$\xi_t + F^{-1} [(Hu)_\xi - \xi F_t \xi_\xi] = 0,$$

где F — уже безразмерная величина, нормированная аналогично координате x ; $\mu = C_h/\alpha$; $Re_x = \omega_0 \lambda^2 K^{-1}$, K — коэффициент гори-

горизонтального турбулентного обмена, вводимый для параметризации обрушения. Для уравнений (8.2.2) ставится следующая начально-краевая задача:

$$u|_{t=0} = u^0(\xi), \quad \xi|_{t=0} = \xi^0(\xi); \quad (8.2.3)$$

$$\xi|_{\xi=0} = \xi_0(t); \quad u|_{\xi=1} = F_t(t). \quad (8.2.4)$$

Для численного интегрирования задачи (8.2.2)–(8.2.4) воспользуемся сеткой $Q_\Delta^* = \{\xi_m, t_k\}$, $m = 1, 2, \dots, 2M$; $k = 0, 1, \dots, \bar{k}$, с шагами $\Delta = (2M-1)^{-1}$, $\Delta t = T/\bar{k}$. Функции u_m вычисляются в четных узлах, ξ_m — в четных узлах по схеме

$$\begin{aligned} (u_m^{k+1, v+1} - u_m^k)/\Delta t + (\text{Br } F)^{-1} D_0 \xi_m^k / (2\Delta) &= \Phi_m^{k, v}; \\ F^{k+1} &= F^k + \Delta t u_{2M-1}^{k+1}; \\ (\xi_m^{k+1, v+1} - \xi_m^k)/\Delta t + \frac{1}{2\Delta F^{k+1}} \left[D_0 (H_m^{k, v} u_m^{k+1}) - \right. & \\ \left. - \frac{\xi_m}{\Delta t} (F^{k+1} - F^k) D_0 \xi_m^{k, v} \right] &= 0, \end{aligned} \quad (8.2.5)$$

где $D_0 \Phi_m = \Phi_{m+1} - \Phi_{m-1}$; v — номер итерации; Φ — суммарная аппроксимация адвективных членов, трения и горизонтального турбулентного обмена. Аппроксимация адвективного члена имеет вид

$$\frac{1}{F} \left[\frac{1}{4\Delta} D_0 (u_m^2)^{k, v} - \frac{1}{\Delta t} \xi_m D_0 u_m^{k, v} (F^k - F^{k-1}) \right]. \quad (8.2.6)$$

Для расчета в точке $m = 2M-1$ необходимо задание скорости в фиктивной точке $2M+1$, обращающее адвективный член в нуль, ибо урез движется со скоростью частиц жидкости. Это достигается экстраполяцией

$$u_{2M+1} = 2u_{2M-1} - u_{2M-3}. \quad (8.2.7)$$

Вычислительным условием для ξ на урезе является требование равенства высоты точки фронта и высоты рельефа

$$\xi_{2M}^{k+1} = -h(F^{k+1}). \quad (8.2.8)$$

Схема имеет второй порядок точности; необходимым условием устойчивости линейного аналога (8.2.5) является условие Куранта.

Алгоритм расчета проверялся на точном решении нелинейной задачи о накате на плоский откос волны, заданной (2.3.27):

$$\xi^0 = \delta \left[1 - \frac{5}{2} \frac{d^3}{(d^2 + \sigma^2)^{3/2}} + \frac{3}{2} \frac{d^5}{(d^2 + \sigma^2)^{5/2}} \right];$$

$$x = -\sigma^2/16 + \xi^0; \quad d = 1,5(1 + 0,9\delta)^{1/2}; \quad \delta = \xi_0/h_0; \quad u^0 = 0. \quad (8.2.9)$$

Точное решение нелинейной бездиссипативной задачи для начального условия (8.2.9) получено Кэрриером и Гринспаном с помощью преобразования годографа [85], оно уже обсуждалось в разделе 2.3. При тестировании диссипативные блоки отключались ($\mu = 0$, $\text{Re}_x^{-1} = 0$), и с уменьшением шага сетки численное

решение стремится к аналитическому. В частности, при $\delta = 0,1$ и $\Delta = 2 \cdot 10^{-2}$ результаты численного интегрирования отличаются от точного не более чем на 1 % (рис. 8.1).

Как отмечалось, при подходе волны к берегу может произойти ее обрушение, сопровождающееся диссипацией волновой энергии.

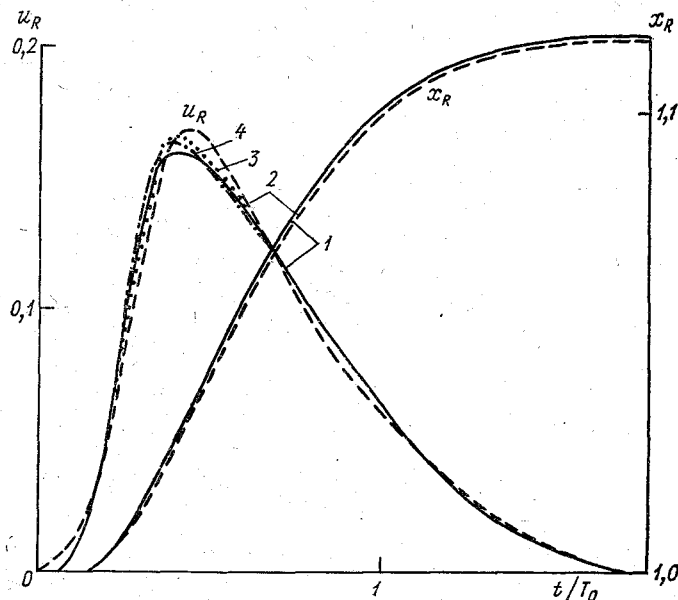


Рис. 8.1. Скорость на урзе волны u_R и горизонтальный заплеск x_R как функция времени.

1—аналитическое [85] и численное решения при $\Delta = 2,5 \cdot 10^{-3}$; 2—4—численные решения при $\Delta = 10^{-2}$, $5 \cdot 10^{-3}$, $3,3 \cdot 10^{-3}$ соответственно, $\delta = 0,1$.

Для коротких (ветровых) волн обрушение является важным фактором, но с увеличением длины волны его роль падает. Можно полагать, что в рассматриваемых длинноволновых процессах основным механизмом диссипации является трение о дно, а не обрушение. Однако для ряда практических задач необходим корректный учет обрушения. Диссипация энергии при обрушении параметризуется диффузионным членом в уравнении движения системы (8.2.2) с коэффициентом обмена $K = C \Delta x u$, $C = \text{const}$ [2].

Расчеты показывают, что для волны типа цунами ($\xi_0 = 4$ м, $\lambda = 5$ км), значение заплеска практически не зависит от коэффициента горизонтального турбулентного обмена. Этот результат получен для задачи наката одиночной волны на плоский откос, сопряженный с участком ровного дна (рис. 2.15), при $L_R = 1,5$ км (что соответствует критерию обрушения $Bg = 1,9$) при изменении K от 1 до $300 \text{ м}^2/\text{с}$ (рис. 8.2).

Придонное трение, напротив, оказывает существенное влияние на значение заплеска и другие характеристики волны. Например, при угле откоса $\alpha = 3,3^\circ$ ($L_R = 0,5$ км) и при $C_h = 0,005$ высота заплеска за счет трения уменьшается на 18 %, а при $C_h = 0,025$ — на 45 %. При уменьшении крутизны откоса влияние диссипации, как и ожидалось, растет. В связи с важностью этого фактора задержимся на возможностях представления придонного трения в рамках рассматриваемой модели.

Для развитого течения в одномерном канале, когда градиент уровня балансируется трением, скорость трения записывается в

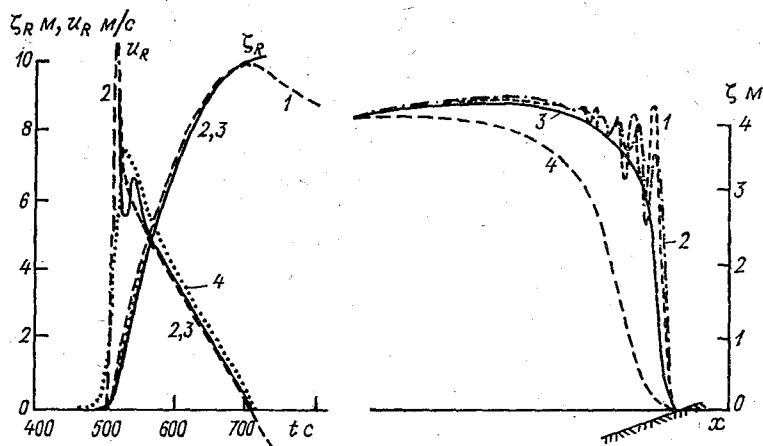


Рис. 8.2. Мареограммы вертикального заплеска ζ_R и скорости на урезе u_R при K , равном 1(1), 10(2), 100(3), 300(4) $\text{м}^2/\text{с}$. Справа — соответствующие профили передней части волны при подходе к урезу. $L_R = 1,5$ км, $\lambda = 5$ км, $\zeta_0 = 4$ м.

виде $u_* = C_h u$, где C_h — коэффициент придонного трения. Для его нахождения можно использовать формулу Миннинга

$$C_h = gn^2/H^{1/3} \quad (8.2.10)$$

(H — в метрах) с коэффициентом n , эквивалентным параметру шероховатости z_h . Сопоставление этих и других эмпирических формул показывает, что в среднем они обладают одинаковой степенью соответствия эксперименту. Используемый при этом параметр шероховатости $z_h = O(10^{-3} - 10^{-2})$ [48] характеризует масштаб турбулентных вихрей на элементах шероховатости и определяется как глубина, на которой придонная скорость равна нулю. Из логарифмического распределения скорости в придонном слое следует

$$C_h = \kappa^2 \left(\ln \frac{z + h + z_h}{z_h} \right)^{-2}, \quad -h \leq z \leq \zeta, \quad \kappa = 0,4. \quad (8.2.11)$$

Известно, что коэффициент трения C_h является функцией ряда параметров. Применяются различные формы зависимости C_h от

касательного напряжения ветра, от модифицированного числа Россби $Ro = u_0 / (\omega_0 z_h)$, относительной шероховатости дна и пр. В океа-

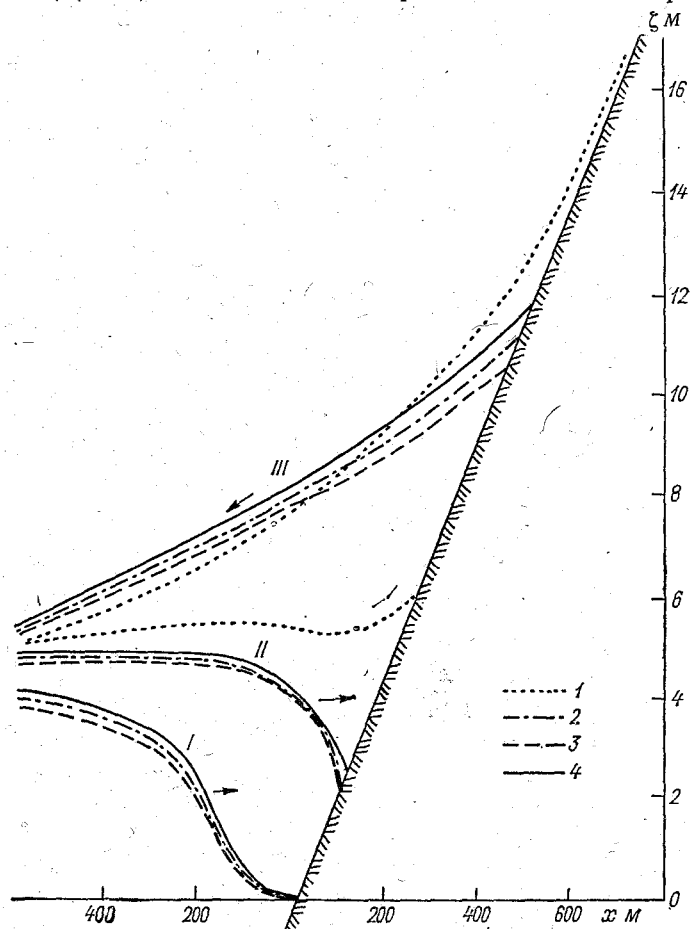


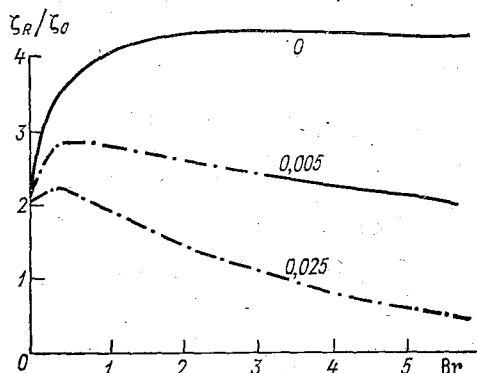
Рис. 8.3. Влияние коэффициента придонного трения на накат волны типа цунами на откос. $L_R = 1$ км, $\lambda = 5$ км, $\xi_0 = 4$ м.

I — волна на урезе ($t=0$); II — момент максимума скорости наката ($t=40$ с); III — момент максимума заплеска ($t=170$ с). 1 — расчет без учета диссипации ($C_h=0$); 2 — C_h определяется по относительной шероховатости дна при $z_h=10$ см; 3, 4 — C_h определяется по относительной шероховатости дна и числу Россби при z_h , равном 10 и 2 см соответственно [33].

нологии обычно принимают $C_h = 2,6 \cdot 10^{-3}$. Такому значению соответствует скорость потока на расстоянии от дна, определяемом из (8.2.11): $\ln(h_0/z_h) = 8$. Эта глубина чувствительна к параметру z_h , и следует ожидать, что учет трения с коэффициентом C_h в (8.2.2) удовлетворителен лишь в среднем.

Рассмотрим, как сказывается различие в способе задания C_h на характеристики заплеска длинной волны. Пусть волна, имеющая форму одиночного синусоидального импульса высотой 4 м и длиной 5 км, накатывается на плоский берег с углом заложения $\alpha = 1,1^\circ$. Результаты расчета при z_h , равном 10 и 2 см, представлены на рис. 8.3. Уменьшение шероховатости до 2 см приводит к увеличению заплеска на 10 %, а максимальной скорости наката на 18 %. Вблизи фронта волны, где диссипация максимальна, C_h определяется относительной шероховатостью, но по мере удаления от берега учет зависимости C_h от числа Ro приводит к увеличению коэффициента придонного трения в несколько раз. На высоте заплеска, как видно из рис. 8.3, это сказывается мало, так как сама

Рис. 8.4. Относительный вертикальный заплеск (ζ_R/ζ_0) как функция параметра $B\gamma$ при различных значениях коэффициента придонного трения C_h (цифры у кривых).



роль диссипации в мористой части уменьшается. В случае больших потерь ($C_h = 1$), как и для известного автомодельного решения при постоянной глубине, описанного в п. 1.3.3, происходит быстрое распыливание волны без смещения ее вершины.

На рис. 8.4 представлена зависимость относительного заплеска ζ_R/ζ_0 от значения параметров $B\gamma$ и C_h . Видно, что точки перегиба кривых лежат в области $B\gamma < 1$, т. е. уменьшение значения заплеска для пологих откосов вызвано придонным трением, а не обрушением, которое начинается при $B\gamma > 1$.

Обсудим теперь влияние нелинейности падающей волны на высоту заплеска. При этом потери на трение о дно были отключены ($C_h = 0$), чтобы выделить в чистом виде «адвективную» нелинейность. Результаты расчетов представлены на рис. 8.5. Как видим, нелинейность начинает сказываться при относительно больших уровнях нелинейности ($\zeta_0/h_0 > 0,01$). При меньших амплитудах численные расчеты хорошо описываются формулой

$$\frac{\zeta_R}{\zeta_0} = \begin{cases} 2 + 14L_R^2/\lambda^2, & L_R/\lambda < 0,15, \\ 6\sqrt{L_R/\lambda}, & L_R/\lambda > 0,15, \end{cases} \quad (8.2.12)$$

которая совпадает с формулой линейной теории (2.4.27).

При проектировании берегозащитных и других сооружений в зонах, подверженных затоплению, важно знать распределение

экстремальных уровней, скоростей и ускорений при накате и откате волны, начиная от глубины 10 м и до верхней границы затопления. Пример расчета одной из таких характеристик — скорости — приведен на рис. 8.6.

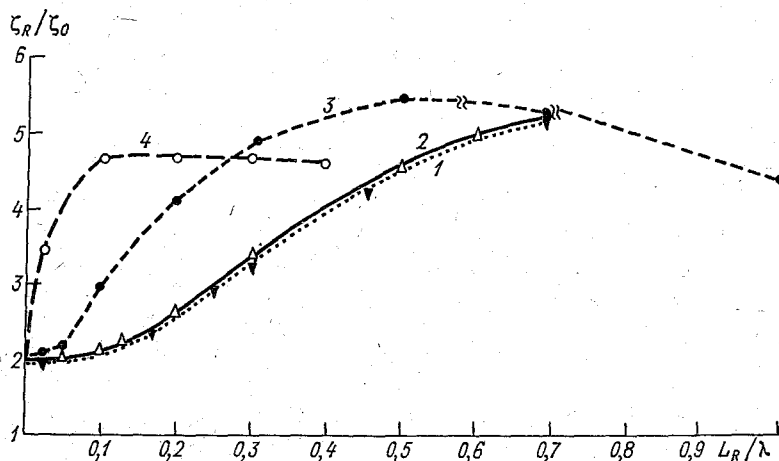


Рис. 8.5. Влияние нелинейности на накат синусоидального импульса на откос, сопряженный с ровным дном. Трение отсутствует ($C_R = 0$).

1) $\zeta_0/h_0 = 0,001$; 2) $\zeta_0/h_0 = 0,005$; 3) $\zeta_0/h_0 = 0,2$; 4) $\zeta_0/h_0 = 0,5$. Параметры расчета: $\lambda = 5$ км, $h_0 = 20$ м.

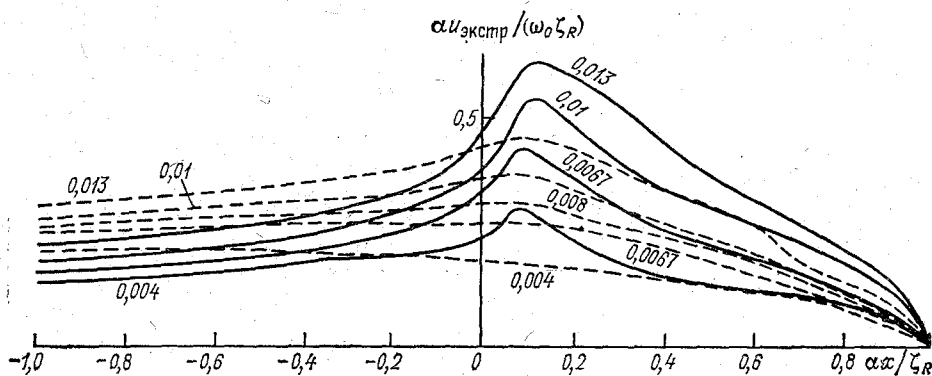


Рис. 8.6. Распределение экстремальной скорости наката вдоль профиля для различных углов откоса (цифры у кривых).

Сплошные линии — при $C_R = 0,005$, пунктир — при $C_R = 0,025$. $\zeta_0 = 4$ м, $\lambda = 5$ км.

Численное моделирование наката в рамках осредненных по вертикали уравнений мелкой воды с использованием квадратичного закона трения показывает, что диссипация является существенным фактором, уменьшающим высоту заплеска на пологие откосы в несколько раз. В разделе 8.3 исследуются влияние дисси-

пации на накат и вертикальная структура потока на основе более адекватных моделей турбулентности.

8.2.2. Численное интегрирование двумерных уравнений в произвольной области с подвижной границей. При решении краевых задач для уравнений мелкой воды разностным методом границу области обычно регуляризуют. Аппроксимация границы ведет к искажению решения в пограничной зоне, часто наиболее важной для приложений. Особенности геометрии области могут иметь определяющее влияние и на общий характер решения. Это делает необходимым использование граничных условий непосредственно в узлах криволинейной границы области без их интерполяции и сноса в граничные узлы регулярной сетки. В случае движущихся границ, когда конфигурация области меняется со временем, выделение границы диктуется уже не только требованиями точности, но и существом дела.

Описание геометрии некоторой произвольной, возможно многосвязной, двумерной области Ω естественно осуществить, приняв ее границы за координатные линии криволинейной системы координат. Формулы преобразования задают отображение области Ω на прямоугольнике Ω^* . Преобразованные уравнения интегрируются в Ω^* на регулярной сетке Ω_Δ^* . Если конфигурация области Ω меняется, то ее метрика, задаваемая на Ω_Δ^* , зависит от времени, но расчет можно выполнить на фиксированной сетке. Применительно к уравнениям мелкой воды такой подход выступает как обобщение существующих методов расчета наката на берег необрушивающихся длинных волн. Расчет на фиксированной сетке, узлы и участки границы которой являются лагранжевыми элементами, сочетает преимущества эйлерова и лагранжева описания.

Ниже рассматриваются постановка задачи распространения длинных волн в произвольной области с подвижной границей и метод решения в криволинейных координатах, отвечающих конфигурации Ω . Приводятся результаты тестовых расчетов.

Постановка задачи заключается в следующем. В области $\Omega(x, y, t)$ рассмотрим дивергентную форму уравнений мелкой воды:

$$\begin{aligned} U_t + P_x + Q_y &= \Phi = (\varphi_1, \varphi_2, 0)^*, \\ U &= \begin{pmatrix} Hu \\ Hv \\ H \end{pmatrix}; \quad P = \begin{pmatrix} u^2H + \frac{1}{2}gH^2 \\ uvH \\ uH \end{pmatrix}; \\ Q &= \begin{pmatrix} uvH \\ v^2H + \frac{1}{2}gH^2 \\ vH \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (8.2.13)$$

где u, v — компоненты вектора скорости; $Hv = H(\bar{u}, \bar{v}) = V$; $H = h + \xi$ — глубина; $\xi(x, y, t)$ — отклонение уровня от среднего;

$\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 + gHh_x$; $\varphi_2 = \tilde{\varphi}_2 + gHh_y$; $\tilde{\varphi}_1$, $\tilde{\varphi}_2$ содержат компоненты силы Кориолиса и компоненты разности касательных напряжений на свободной поверхности и на дне.

На границе $\partial\Omega_1$, состоящей из участков неподвижного контура $\partial\Omega_1$ и подвижного $\partial\Omega_2$, примем

$$u_n|_{\partial\Omega_1} = 0; \quad H|_{\partial\Omega_2} = 0, \quad (8.2.14)$$

где u_n — скорость, нормальная к $\partial\Omega_1$. Присоединение начальных условий

$$\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}^0; \quad H|_{t=0} = H^0 \quad (8.2.15)$$

завершает постановку задачи в декартовых координатах.

Выполним теперь преобразование к криволинейным координатам, согласованным с конфигурацией Ω :

$$\xi = \xi(x, y, t); \quad \eta = \eta(x, y, t); \quad \tau = t, \quad (8.2.16)$$

с якобианом $I = \partial(\xi, \eta)/\partial(x, y)$. Так как $0 \neq I < \infty$, то допустимо обратное преобразование

$$x = x(\xi, \eta, \tau); \quad y = y(\xi, \eta, \tau); \quad t = \tau \quad (8.2.17)$$

с якобианом $J = I^{-1}$. Преобразование (8.2.16) задает отображение физической области Ω на прямоугольник $\Omega^*(\xi, \eta)$. В новых переменных уравнение (8.2.13) примет вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{U}^* + \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{P}^* + \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{Q}^* = J\Phi \quad (8.2.18)$$

$$\mathbf{U} = J\mathbf{U}; \quad \mathbf{P}^* = \begin{pmatrix} JHuU + \frac{1}{2}gH^2y_\eta \\ JHvU - \frac{1}{2}gH^2x_\eta \\ JHU \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{Q}^* = \begin{pmatrix} JHuV - \frac{1}{2}gH^2y_\xi \\ JHvV + \frac{1}{2}gH^2x_\xi \\ JHV \end{pmatrix};$$

$$\varphi_1 = \tilde{\varphi}_1 + gHJ^{-1}\partial(h, y)/\partial(\xi, \eta) + K\nabla_{\xi, \eta}^2 \eta;$$

$$\varphi_2 = \tilde{\varphi}_2 - gHJ^{-1}\partial(h, x)/\partial(\xi, \eta) + K\nabla_{\xi, \eta}^2 \eta V,$$

где контравариантные составляющие скорости

$$\begin{aligned} U &= J^{-1}[(u - x_\tau)y_\eta - (v - y_\tau)x_\eta]; \\ V &= J^{-1}[-(u - x_\tau)y_\xi + (v - y_\tau)x_\xi], \end{aligned} \quad (8.2.19)$$

и в правую часть включен оператор сглаживания $\nabla_{\xi, \eta}^2$.

Обратимся к формулировке граничных условий. Пусть координатные линии $\xi^i = \text{const}$ ($i = 1, 2$, $\xi^1 = \xi$; $\xi^2 = \eta$) представляют уравнения соответствующих границ $\partial\Omega^*$. В точках неподвижной твердой границы $\partial\Omega_1^*$, являющейся отображением $\partial\Omega_1$, скорость частиц жидкости перпендикулярна нормали к границе, и на линиях $\xi^i(x, y, t) = \text{const}$ имеем $\nabla \xi^i \cdot \mathbf{V} = 0$ или

$$u\xi_x^i + v\xi_y^i = 0. \quad (8.2.20)$$

В точках движущейся границы $\partial\Omega_2^*$, являющейся отображением $\partial\Omega_2$, граничным условием будет условие того, что частица жидкости, находящаяся на границе $\xi^i(x, y, t) = \text{const}$, остается на ней:

$$\xi_t^i + u\xi_x^i + v\xi_y^i = 0. \quad (8.2.21)$$

С учетом соотношений между производными в декартовых и криволинейных координатах

$$\begin{aligned} \xi_x &= J^{-1}y_\eta; & \xi_y &= -J^{-1}x_\eta; \\ \eta_x &= -J^{-1}y_\xi; & \eta_y &= J^{-1}x_\xi; \\ \xi_t &= -J^{-1}(x_\tau y_\eta - y_\tau x_\eta); & \eta_t &= J^{-1}(x_\tau y_\xi - y_\tau x_\xi) \end{aligned} \quad (8.2.22)$$

условие (8.2.20) выражает равенство нулю контравариантных составляющих скорости U , V на твердой границе, когда $x_\tau = y_\tau = 0$. Условие (8.2.21) выражает равенство нулю U , V на границе при

$$x_\tau = u; \quad y_\tau = v. \quad (8.2.23)$$

При наличии движущихся границ удобно лагранжево представление, когда координаты ξ , η задают начальное положение жидкости, а текущие координаты x , y определяются преобразованием (8.2.17). В силу (8.2.22) при лагранжевой интерпретации криволинейных координат контравариантные составляющие скорости равны нулю и внутри области. Тогда из третьего уравнения системы сразу следует уравнение неразрывности в форме Лагранжа

$$(JH)_\tau = 0, \quad (8.2.24)$$

а уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} u_t + gJ^{-1}\partial(\xi, y)/\partial(\xi, \eta) &= H^{-1}(\bar{\varphi}_1 + KV_{\xi\eta}^2 u); \\ v_t - gJ^{-1}\partial(\xi, x)/\partial(\xi, \eta) &= H^{-1}(\bar{\varphi}_2 + KV_{\xi\eta}^2 v). \end{aligned} \quad (8.2.25)$$

Уравнения (8.2.24), (8.2.25) решаются в прямоугольнике Ω^* при граничных условиях (8.2.14).

Уравнения (8.2.24), (8.2.25) будем интегрировать разностным методом на сетке $\Omega_\Delta^* = \{\xi_m, \eta_n\}$, $m = 1, 2, \dots, M$; $n = 1, 2, \dots, N$, построенной в Ω^* . Коэффициенты уравнений содержат элементы метрики преобразования, и для определения их в узлах Ω_Δ^* требуется знать декартовы координаты узлов сетки $\Omega_\Delta(x_{m,n}, y_{m,n})$. Для определения координатного вектора $\mathbf{g}(x, y)$ в

узлах Ω_Δ^* воспользуемся эллиптическим методом раздела 5.1, приводящим к интегрированию системы квазилинейных эллиптических уравнений:

$$g_{22}r_{\xi\xi} - 2g_{12}r_{\xi\eta} + g_{11}r_{\eta\eta} = 0, \quad (8.2.26)$$

где $g_{22} = |r_\eta|^2$; $g_{12} = r_\xi r_\eta$; $g_{11} = |r_\xi|^2$. Уравнения интегрируются на Ω_Δ^* при заданном соответствии значений декартовых координат в узлах границы $\partial\Omega_\Delta$ значениям криволинейных координат в узлах границы $\partial\Omega_\Delta^*$.

Уравнения (8.2.24), (8.2.25) аппроксимируем по явно-неявной схеме на разнесенной сетке; векторы $\mathbf{v}$, $\mathbf{r}$ будем определять в точ-

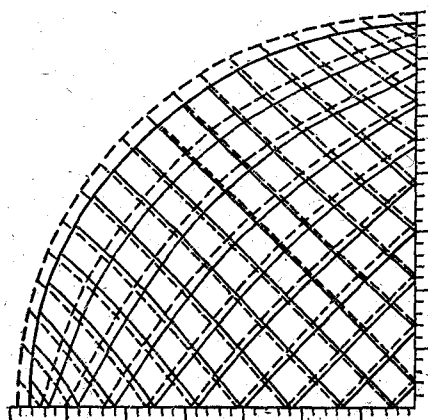


Рис. 8.7. Фрагмент расчетной области и сетки при $t = 0$ (сплошные линии) и $t = T/2$ (пунктир) для задачи о свободных колебаниях жидкости в параболоиде вращения.

ках с целыми, а ξ — с полуцелыми индексами. На шаге $t_{k+1} = (k+1)\Delta t$ разностные уравнения имеют вид

$$\mathbf{v}_{m,n}^{k+1} = \mathbf{v}_{m,n}^k - \Delta t g [J^{-1}]_{m,n}^k \{ \partial([\xi], [\mathbf{r}^*]/\partial[\xi], [\eta]) \}_{m,n}^k + [\Phi H^{-1}]_{m,n}^k, \\ \mathbf{r}_{m,n}^{k+1} = \mathbf{r}_{m,n}^k + \frac{\Delta t}{2} (\mathbf{v}_{m,n}^{k+1} + \mathbf{v}_{m,n}^k), \quad m = 1, 2, \dots, M, \quad n = 1, 2, \dots, N; \quad (8.2.27)$$

$$\{[J][H]\}_{m+1/2, n+1/2}^{k+1} = \{[J][H]\}_{m+1/2, n+1/2}^k = M_{m+1/2, n+1/2}^0,$$

$$m = 1, 2, \dots, M-1, \quad n = 1, 2, \dots, N-1,$$

где $\mathbf{r}^* = (y, -x)$, а квадратные скобки выражают аппроксимацию соответствующих выражений. Перемещение граничных ξ -точек определяется как среднее от перемещения отстоящих от них на половину шага граничных $\mathbf{v}$ -точек.

Удобным тестом для проверки разработанного метода расчета волновых движений в области с подвижной границей является задача о свободных колебаниях жидкости в параболоиде вращения $h(r) = h_0(1 - r^2/R_0^2)$, $r^2 = x^2 + y^2$, имеющая аналитическое решение [79], которое здесь кратко воспроизводится. В полярной си-

стеме координат уравнения движения и неразрывности имеют вид:

$$\begin{aligned}\partial u / \partial t + u \partial u / \partial r - v^2 / r + g \partial H / \partial r &= g dh / dr; \\ \partial v / \partial t + u \partial v / \partial r + uv / r &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial t} (Hr) + \frac{\partial}{\partial r} (Hur) &= 0,\end{aligned}\quad (8.2.28)$$

• где $H = h + \xi$; u и v — радиальный и тангенциальный компоненты скорости. Легко показать, что система (8.2.28) имеет автомо-

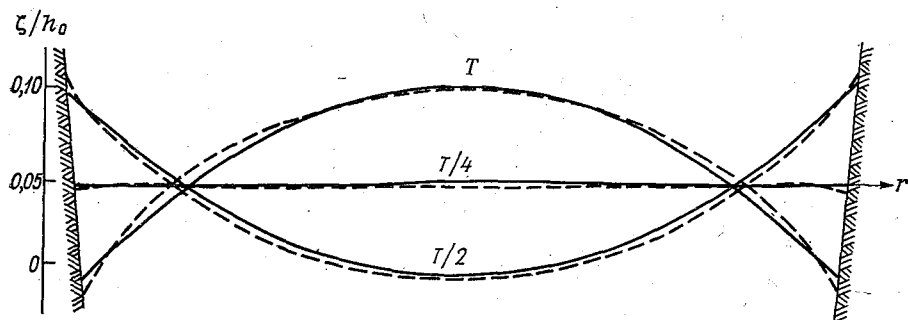


Рис. 8.8. Профили свободной поверхности в различные моменты времени. Сравнение точного (сплошные линии) и численного (пунктир) решений.

дельное решение, отвечающее естественному условию сохранения объема жидкости

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{\varphi^2(t)} \Phi \left[\frac{r}{\varphi(t)} \right]; \\ u &= \frac{r}{\varphi} \frac{d\varphi}{dt}; \\ v &= Qr/\varphi^2,\end{aligned}\quad (8.2.29)$$

где Q — произвольное число и для функций Φ и φ получаются обыкновенные дифференциальные уравнения, решения которых выписаны в [79]. В частном случае только радиальных колебаний ($v \equiv 0$) решение (8.2.29) имеет вид

$$\begin{aligned}H(r, t) &= \frac{H_0}{\varphi^2(t)} \left[1 - \frac{r^2}{\varphi^2(t) R_0^2} \right]; \\ \varphi^2(t) &= 1 + \frac{\xi_0}{2h_0} \left(1 - \cos \frac{\sqrt{8gh_0} t}{R_0} \right)\end{aligned}\quad (8.2.30)$$

и представляет собой пульсации куполообразной поверхности.

Расчеты выполнены при $\xi_0/h_0 = 0,1$ и $h_0/R_0 = 7,14 \cdot 10^{-3}$, что соответствует откосу дна у невозмущенного уреза $1/70$; область содержит 400 узлов сетки (20×20), $\Delta t = T/300$, где $T = 2\pi R_0 / \sqrt{8gh_0}$ — период колебаний.

На рис. 8.7 дается расположение расчетных узлов при $t = 0$ и $t = T/2$; на рис. 8.8, 8.9 показаны профили свободной поверхности

и поле скоростей. Соответствие между численными и аналитическими результатами представляется вполне удовлетворительным.

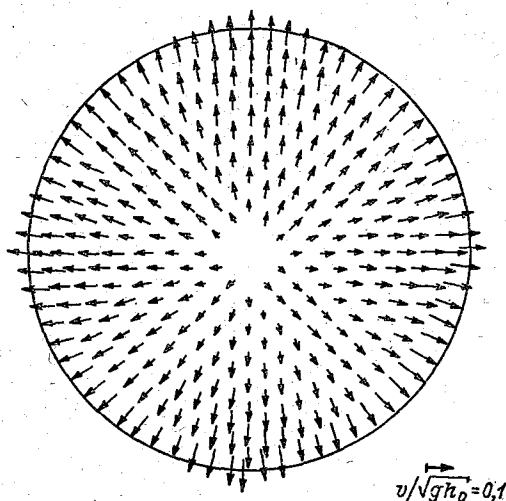


Рис. 8.9. Поле скоростей при $t = T/4$. Численный расчет.

8.3. Вертикальная структура наката

Изучение вертикальной структуры течений при накате обуславливается, как отмечалось в главе 7, неудовлетворительным, вообще говоря, описанием диссипации в рамках уравнений мелкой воды, задачами расчета переноса примесей, необходимостью расчетов воздействия потока на сооружения, берега и др. Результаты, полученные при параметризации диссипации через среднюю по вертикали скорость (раздел 8.2), свидетельствует о важной роли турбулентного пограничного слоя в определении характеристик накатывающейся волны.

Ниже рассматриваются методы расчета наката, позволяющие получить вертикальную структуру потока на основе некоторых форм замыкания, приводятся результаты расчетов.

8.3.1. Постановка задачи. Для расчета вертикальной структуры наката длинных волн на берег рассмотрим в области $\Omega = \{0 \leq x \leq F(t), -h \leq z \leq \zeta, t \geq 0\}$ задачу в приближении пограничного слоя:

$$u_t + uu_x + wu_z + g\zeta_x = [(v + v_M)u_z]_z + Ku_{xx}, \quad (8.3.1)$$

$$u_x + w_z = 0; \quad (8.3.2)$$

$$u|_{z=-h} = w|_{z=-h} = 0; \quad (v + v_M)u_z|_{z=\zeta} = \tau_t/\rho; \quad (8.3.3)$$

$$\zeta_t + u|_{\zeta} \cdot \zeta_x = w|_{z=\zeta}; \quad (8.3.4)$$

$$\zeta|_{x=0} = \zeta_0(t); \quad \bar{u}|_{x=F} = F_t; \quad (8.3.5)$$

$$u|_{t=0} = u^0(x, z); \quad \zeta|_{t=0} = \zeta^0(x). \quad (8.3.6)$$

Основной вклад в продукцию энергии турбулентности в длинных волнах вносит вертикальный градиент скорости, поэтому в следующих пунктах сопоставляются различные схемы замыкания для коэффициента вертикальной турбулентной вязкости ν . Последний член в правой части (8.3.1) вводится, как отмечалось в разделе 8.2, для параметризации обрушения.

Перейдем к новым переменным:

$$\xi = x/F(t); \quad \theta = (z + h)/H, \quad (8.3.7)$$

отображающим область Q в прямоугольную область $Q_* = \{0 \leq \xi, \theta \leq 1, t \geq 0\}$. Преобразование (8.3.7) для вертикальной координаты использовалось, например, в [6, 102].

В новой, естественной системе координат имеем

$$\begin{aligned} u_t + F^{-1}(u - \xi F_t) u_\xi + \hat{w} u_\theta + g F^{-1} \zeta_\xi &= \\ &= H^{-2}[(\nu + \nu_M) u_\theta]_\theta + F^{-2} K u_{\xi\xi}; \end{aligned} \quad (8.3.8)$$

$$\zeta_t + F^{-1} \left[\left(H \int_0^1 u d\theta \right)_\xi - \xi F_t \zeta_\xi \right] = 0. \quad (8.3.9)$$

где удержана лишь главная часть оператора горизонтальной вязкости и

$$\hat{w} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{HF} \left[\theta \int_0^1 (Hu)_\xi d\theta - \int_0^\theta (Hu)_\xi d\theta \right]. \quad (8.3.10)$$

Введем безразмерные переменные, характерные масштабы и соотношения между ними:

$$\begin{aligned} t &= \omega_0^{-1} \tilde{t}; \quad F = \tilde{F} \zeta_R / \alpha; \quad \zeta = \zeta_R \tilde{\zeta}; \quad h = \zeta_R \tilde{h}; \\ u &= \tilde{u} \zeta_R \omega_0 / \alpha; \quad \nu = \nu_0 \tilde{\nu}; \quad \text{Br} = \zeta_R \omega_0^2 / (g \alpha^2); \\ \mu &= \nu_0 / (\omega_0 \zeta_R^2); \quad \text{Re}_x^{-1} = \mu \alpha^2 K / \nu_0; \quad \varepsilon_0; \quad \varepsilon_0 = \nu_M / \nu_0, \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

и перепишем уравнения в безразмерном виде, опустив тильду:

$$\begin{aligned} u_t + F^{-1}(u - \xi F_t) u_\xi + \hat{w} u_\theta + (\text{Br} \cdot F)^{-1} \zeta_\xi &= \\ &= \mu H^{-2}[(\nu + \varepsilon_0) u_\theta]_\theta + \text{Re}_x^{-1} F^{-2} u_{\xi\xi}; \end{aligned} \quad (8.3.12)$$

$$\zeta_t + F^{-1} \left[\left(H \int_0^1 u d\theta \right)_\xi - \xi F_t \zeta_\xi \right] = 0; \quad (8.3.13)$$

$$\zeta|_{\xi=0} = \zeta_0(t); \quad \tilde{u}|_{\xi=1} = F_t; \quad u|_{\theta=0} = 0; \quad (8.3.14)$$

$$\begin{aligned} (\nu + \varepsilon_0) u_\theta|_{\theta=1} &= \tau_\xi \alpha / (\rho \omega_0 \nu_0); \\ \zeta|_{t=0} &= \zeta^0(\xi); \quad u|_{t=0} = u^0(\xi, \theta). \end{aligned} \quad (8.3.15)$$

8.3.2. Метод решения. Краевая задача (8.3.12)–(8.3.15) интегрируется на сетке

$$Q_{\Delta} = \{\xi_m, \theta_s; t^k, m = 1, 2, \dots, 2M; s = 1, 2, \dots, \bar{s}; \\ k = 0, 1, \dots, K\},$$

равномерной по ξ, t , с шагами $\Delta = (2M - 1)^{-1}$, Δt и неравномерной по θ в соответствии с заданным разбиением. Например, при наличии одного придонного пограничного слоя можно использовать

$$\theta_s = [(s - 1)/(\bar{s} - 1)]^2, \quad (8.3.16)$$

а в случае двух пограничных слоев — придонного и поверхностного —

$$\theta_s = \begin{cases} 2 \left[\frac{s-1}{\bar{s}-1} \right]^2, & s = 1, 2, \dots, (\bar{s} + 1)/2, \\ 1 - \theta_{\bar{s}+1-s}, & s = (\bar{s} + 3)/2, \dots, \bar{s}. \end{cases} \quad (8.3.17)$$

Разбиение (8.3.17) обеспечивает степенное уменьшение шага сетки по мере приближения как к верхней, так и к нижней границе.

Уравнение движения будем интегрировать методом потоковой прогонки по s относительно искомой функции $u_{m,s}^{k+1,\alpha}$, $m = 3, 5, \dots, 2M - 1$; $s = 1, 2, \dots, \bar{s}$ с итерациями по α при использовании центрально-разностной аппроксимации системы (8.3.12)–(8.3.15) на несовмещенной по m и перемежающейся по k сетке: значения u_m вычисляются в нечетных узлах, ζ_m — в четных узлах. Схема имеет вид

$$\frac{u_{m,s}^{k+1,\alpha+1} - u_{m,s}^k}{\Delta t} + \frac{\text{Br}^{-1}}{2 \Delta F^{k+1/2}} D_0 \zeta_m^{k+1/2} = \\ = \mu H^{-2} \sigma_s^{-1} \left\{ \frac{v_{s+1/2}^\alpha + \varepsilon_0}{\Delta_s} (u_{s+1} - u_s) - \right. \\ \left. - \frac{v_{s-1/2}^\alpha + \varepsilon_0}{\Delta_{s-1}} (u_s - u_{s-1}) \right\}_m^{k+1,\alpha+1} + \Phi_{m,s}^{k+1,\alpha}; \quad (8.3.18)$$

$$F^{k+3/2} = F^{k+1/2} + \bar{u}_{2M-1}^{k+1} \Delta t; \quad (8.3.19)$$

$$\zeta_{2M}^{k+3/2} = -h(F^{k+3/2}); \quad (8.3.20)$$

$$\frac{\zeta_m^{k+3/2} - \zeta_m^{k+1/2}}{\Delta t} + \frac{1}{2 \Delta F^{k+3/2}} D_0 (H^{k+1/2} J^{k+1})_m - \\ - \frac{\xi_m (F^{k+3/2} - F^{k+1/2})}{2 \Delta t \Delta F^{k+3/2}} D_0 \zeta_m^{k+1/2} = 0, \quad (8.3.21)$$

где $D_0 \Phi_m = \Phi_{m+1} - \Phi_{m-1}$; $\Delta_s = \theta_{s+1} - \theta_s$, $\sigma_s = \frac{1}{2} (\Delta_s + \Delta_{s-1})$; Φ — суммарная аппроксимация адвективных членов и горизонтального турбулентного обмена; J — аппроксимация интеграла в (8.3.13).

Неявная часть алгоритма состоит из потоковой прогонки относительно напряжения трения

$$\tau_{s+1/2}^{k+1, \alpha+1} = \rho \left[\frac{v_{s+1/2}^{\alpha} + \varepsilon_0}{H \Delta_s} (u_{s+1} - u_s) \right]^{k+1, \alpha+1}$$

до сходимости по α , определяемой условием

$$\max_{m, s} \left| \tau_{s+1/2}^{k+1, \alpha+1} - \tau_{s+1/2}^{k+1, \alpha} \right| < \varepsilon.$$

Схема имеет второй порядок точности по всем переменным относительно точки, в которой центрируется искомым вектор $\mathbf{u} = (u, \zeta)$. Аппроксимация адвективных членов имеет тот же вид, что и в одномерной задаче (раздел 8.2). Условие устойчивости линейного аналога схемы связано лишь с горизонтальным разрешением

$$\Delta t \leq F(t) / \sqrt{g h} \Delta. \quad (8.3.22)$$

На вертикальное разрешение ограничение отсутствует, и схема устойчива при любых значениях $v \Delta t / \Delta_s^2$. Анализ уравнений, учитывающих движение границы, обнаруживает, что без учета горизонтальной вязкости может возникнуть неустойчивость.

Схема расчета горизонтального движения в этой модели аналогична описанной в разделе 8.2 для уравнений мелкой воды, поэтому результаты сравнения с решением [85] — рис. 8.1 — приложимы и к схеме (8.3.18) — (8.3.21) при отбрасывании вертикальной вязкости; граничные условия (8.3.14) заменяются на условие идеальной жидкости

$$(v + \varepsilon_0) u_0|_{\theta=0} = 0. \quad (8.3.23)$$

Результаты проверки схем расчета вертикальной структуры потока рассматриваются ниже для конкретных схем замыкания. Контроль за балансом объема жидкости в расчетной области и ее энергией показывает, что дисбаланс массы практически отсутствует, а дисбаланс энергии не превосходит 1 % общей энергии волны.

8.3.3. Расчет наката на основе формулы Прандтля. Приемлемую точность расчета геофизических процессов в пограничных слоях обеспечивает во многих случаях, как отмечалось в главе 7, зависимость Прандтля для коэффициента турбулентности (7.1.9)

$$v = l^2 \left| \partial u / \partial z \right|,$$

в которой масштаб турбулентности l определяется по формуле Монтгомери (7.1.13) или по формуле (7.1.14). Переходя к безразмерным переменным, имеем: $l = \tilde{\zeta}_R \tilde{l}$; $v_0 = \tilde{\zeta}_R^2 \omega_0 / \alpha$; $\mu = \alpha^{-1}$; $\text{Re}_x^{-1} = K \alpha^2 / (\tilde{\zeta}_R^2 \omega_0)$ и

$$v = H^{-1} l^2 \left| \partial u / \partial \theta \right|; \quad (8.3.24)$$

$$l = \kappa (\theta + \theta_h) (1 - \theta + \theta_c), \quad (8.3.25)$$

где $\theta_c = z_c / \tilde{\zeta}_R$; $\theta_h = z_h / \tilde{\zeta}_R$.

Проверка численной схемы для расчета вертикальной структуры выполнялась сопоставлением с аналитическим решением задачи о дрейфовом течении в канале бесконечной длины

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(v \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) = 0; \quad (8.3.26)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial \theta} \Big|_{\theta=1} = u_*^2, \quad u|_{\theta=0} = 0,$$

где v определяется по (8.3.24), (8.3.25) и $\theta_c = \theta_h = \theta_0 \neq 0$. Решение (8.3.24)–(8.3.26) дает

$$\frac{u(\theta)}{u_*} = \frac{1}{\kappa \chi} \ln \frac{(\chi - 1 + 2\theta)(\chi + 1)}{(\chi + 1 - 2\theta)(\chi - 1)}, \quad (8.3.27)$$

где $\chi = (1 + 4\theta_0 + 4\theta_0^2)^{1/2}$.

Результаты представлены на рис. 8.10 для различных значений параметров шероховатости θ_0 и числа расчетных узлов при использовании формулы (8.3.17). Достаточная точность достигается уже при $\bar{S} = 11$.

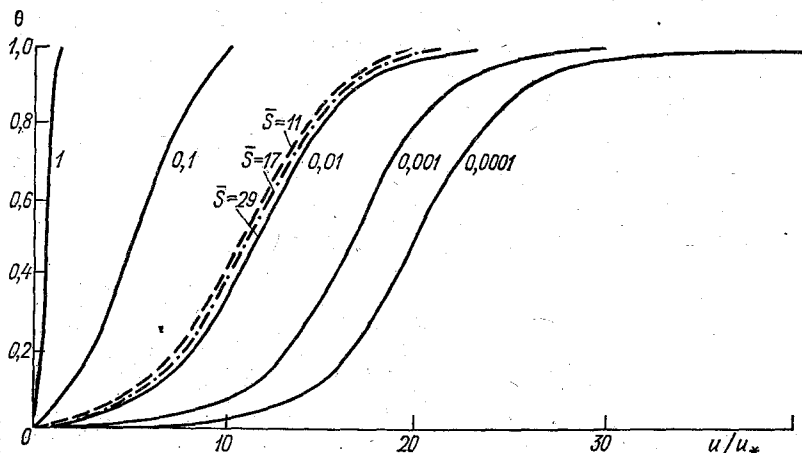


Рис. 8.10. Стационарное дрейфовое течение в канале бесконечной длины при различных значениях параметра шероховатости θ_0 (цифры у кривых). Сравнение аналитического (сплошные линии) — формула (8.3.27) — и численного (пунктир) решений. $\bar{S}$ — число расчетных точек.

Рассмотрим некоторые результаты расчетов наката длинной волны на плоские откосы. На глубине $h_0 = 20$ м откос сочленяется с участком ровного дна длиной λ_0 , равной длине набегающей волны (рис. 2.15).

Условие на морской границе области ($\xi = 0$) имело вид

$$\xi_0(t) = \begin{cases} \xi_0 \sin(\pi t/T_0), & 0 \leq t \leq T_0; \\ -\sqrt{h_0 g} u(0, t), & t > T_0 \end{cases} \quad (8.3.28)$$

Зададим масштаб турбулентности по формуле (8.3.25) и возьмем $\theta_0 = z_h/H = 0,005$.

В экспериментах варьировались угол откоса α , высота волны ζ_0 (или соответственно параметр нелинейности $\delta = \zeta_0/h_0$) и длина волны λ_0 . Параметры расчетов и полученные характеристики наката приведены в табл. 8.1.

Таблица 8.1

Параметры расчетов и характеристики наката

№ варианта	ζ_0 , м	λ_0 , км	α°	Длина откоса L_R , м	Верти- кальный заплеск ζ_R , м	Максимальная высота в точке невозмущенного уреза, м	Максимальная скорость наката на урезе, м/с
1	1	5	63,5	10	1,82	1,82	0
2	1	5	2,31	500	2,15	2,0	0,86
3	1	5	1,10	1000	2,49	2,21	1,23
4	1	5	0,76	1500	2,66	2,13	1,52
5	1	5	0,57	2000	2,54	2,06	1,66
6	1	5	0,46	2500	2,36	1,93	1,74
7	4	5	4,60	250	7,56	7,50	2,34
8	4	5	2,30	500	8,56		
9	4	5	1,52	750	10,04	8,00	4,50
10	4	5	1,10	1000	10,20	7,60	4,93
11	4	5	0,46	2500	7,24		
12	4	5	0,23	5000	4,40		
13	8	5	63,5	10	13,36	13,36	0
14	8	5	4,60	250	15,20		
15	8	5	3,10	375	17,44	14,91	
16	8	5	2,31	500	17,44	13,40	6,14
17	8	5	1,52	750	16,32	12,35	6,47
18	8	5	1,10	1000	15,84	11,42	8,54
19	20	5	2,31	500	46,20		
20	4	2,5	9,10	125	7,96	7,76	2,09

Расчеты показывают сильное влияние диссипации на значение заплеска и другие характеристики наката. Хорошей иллюстрацией этому является рис. 8.11, на котором сопоставляются расчеты с учетом диссипации и без ее учета. Значение заплеска в данном случае уменьшилось в 5,6 раза. Без учета турбулентных потерь волна при накате на пологий откос стремится распластаться вдоль рельефа в виде тонкой пленки, что при больших скоростях движения должно приводить к мощной диссипации. Численные эксперименты подтверждают это. Рисунок 8.11 относится к очень пологому откосу ($\alpha = 0,23^\circ$). Для более крутых откосов влияние диссипации уменьшается. На рис. 8.12 представлены профили передней части накатывающейся волны при угле откоса $2,3^\circ$. В данном случае заплеск уменьшился за счет диссипации на 10 %.

Рассмотренные эксперименты проводились при малой шероховатости откосов z_h , которая задается в формуле для масштаба турбулентности и определяется высотой элементов шероховатости и их формой (п. 8.2.1). На рис. 8.13 кривые 2—4 представляют макрограммы движения уреза при накате на гладкий откос ($z_h = 0$)

и на откосы с z_h , равным 2 и 20 см. Последнее значение можно считать предельным и соответствующим поверхности, покрытой рас-

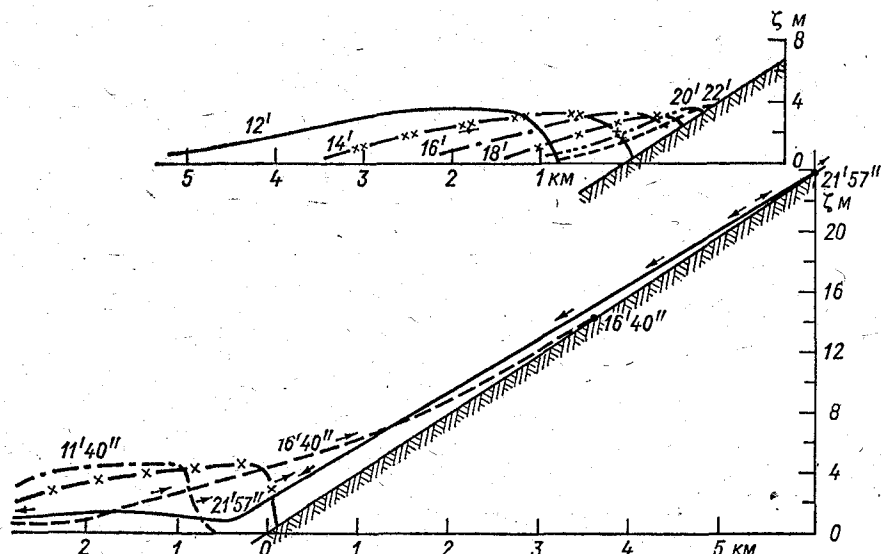


Рис. 8.11. Профили волны при накате на пологий откос ($\alpha = 0,23^\circ$). Сравнение расчетов с учетом диссипации (вверху) и без учета (внизу). Вариант № 12 табл. 8.1.

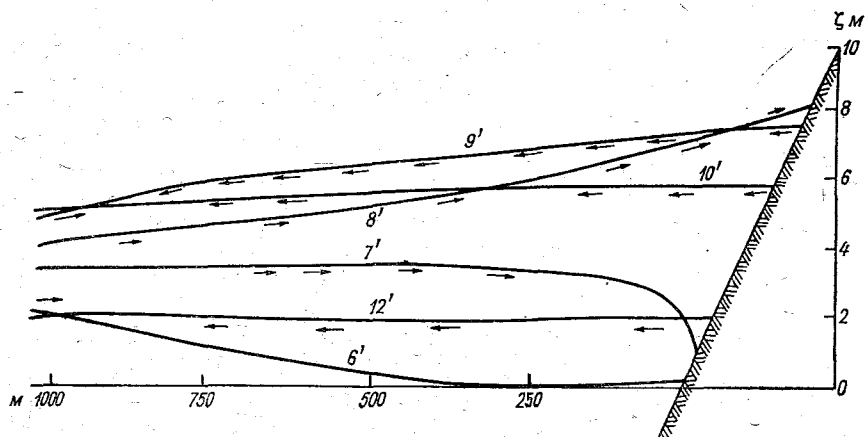


Рис. 8.12. Профили фронтальной части волны при накате на откос с $\alpha = 2,3^\circ$. Стрелки — направления средней по глубине скорости. Вариант № 8 табл. 8.1.

тительностью. Диссипация при гладком откосе уменьшила заплеск в данном случае на 35 %, при $z_h = 2$ см заплеск уменьшился на 40 %, а при $z_h = 20$ см — на 55 %. На вставке рис. 8.13 отображена эта зависимость заплеска от z_h . Видно, что влияние шерохо-

ватости на высоту наката может быть весьма существенным. На рис. 8.14 кривые 2, 3, 5 показывают влияние шероховатости на распределение экстремальных за время наводнения значений высоты волны вдоль профиля, начиная с глубины 10 м. Видно, что влияние шероховатости растет по мере приближения к фронту волны.

Масштаб турбулентности l в ядре потока мало сказывается на характеристиках наката. Сопоставление кривых 1 и 3 на рис. 8.14

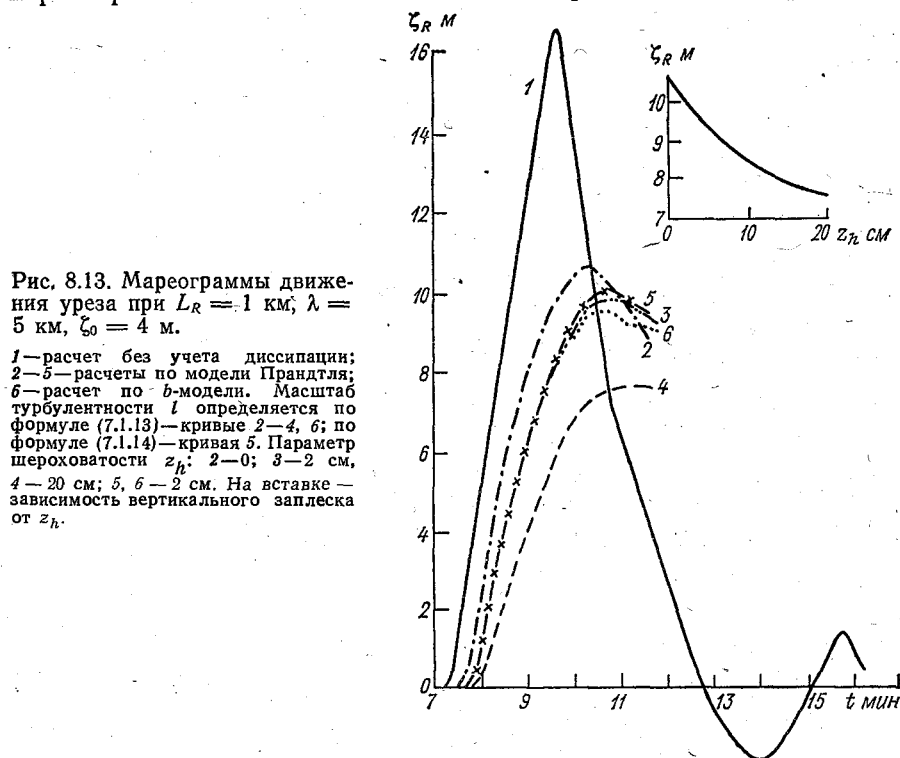


Рис. 8.13. Мареограммы движения уреза при $L_R = 1$ км, $\lambda = 5$ км, $\zeta_0 = 4$ м.

1—расчет без учета диссипации; 2—5—расчеты по модели Прандтля; 6—расчет по b -модели. Масштаб турбулентности l определяется по формуле (7.1.13)—кривые 2—4, 6; по формуле (7.1.14)—кривая 5. Параметр шероховатости z_R : 2—0; 3—2 см, 4—20 см; 5, 6—2 см. На вставке — зависимость вертикального заплеска от z_R .

показывает, что при использовании формулы (7.1.14) вместо (7.1.13) при $\beta_1 = 1,2$, т. е. при уменьшении масштаба в центре потока на 32 %, заплеск увеличился всего на 3 %. Степень диссипации зависит главным образом от масштаба l в придонной части потока, для которой l определяется достаточно надежно.

Обратимся к вертикальной структуре потока при накате и откате длинной волны. Эксперименты показывают, что откат всегда начинается в придонной части потока, а затем охватывает вышележащие слои. При этом в случае относительно крутых откосов откат начинается во фронтальной части волны, а для относительно пологих — наоборот, в тылу волны. В промежуточном случае откат начинается у дна во всей волне одновременно. Рисунок 8.15 иллюстрирует один из моментов отката для относительно крутого

откоса. Видна широкая (в несколько километров) зона противотечений. В таких условиях параметризация трения через среднюю по вертикали скорость теряет смысл.

К относительно крутым относятся откосы, на которых высота заплеска волн увеличивается по мере уменьшения крутизны откоса. Дальнейшее уменьшение крутизны откоса приводит к уменьшению значений вертикального заплеска из-за возрастания роли

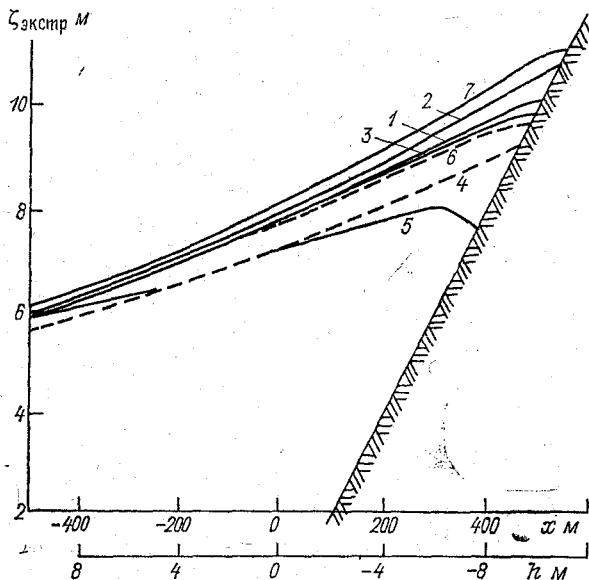


Рис. 8.14. Распределение экстремальных значений уровня вдоль профиля при $L_R = 1$ км, $\lambda = 5$ км, $\zeta_0 = 4$ м.

1—5—модель Прандтля: 1) $z_h = 2$ см, l определяется по (7.1.14); 2—5—определяется по (7.1.13): 2) $z_h \approx 0$; 3) $z_h = 2$ см; 4) $z_h = 0,01H$; 5) $z_h = 20$ см; 6) b -модель, $z_h = 2$ см; 7) b -модель, l определяется по формуле Блэкадара (7.1.15) при $z_h = 2$ см.

диссипации (рис. 8.16). Отметим, что точки перегиба кривых на рис. 8.16 соответствуют значениям критерия обрушения меньше единицы (0,3—0,6).

На рис. 8.17 собраны результаты численных расчетов разных авторов по различным моделям для случая $\delta = 0,2$. При движении волны через область с постоянной глубиной диссипация не учитывалась. Для относительно крутых откосов результаты примерно совпадают. Для пологих откосов различие возрастает, что обусловлено разными моделями описания диссипации. Отметим лишь, что модель с вертикальным разрешением и гидравлическая модель с постоянным $C_h = 0,005$ (кривые 2 и 3 на рис. 8.17) приводят к почти одинаковым результатам.

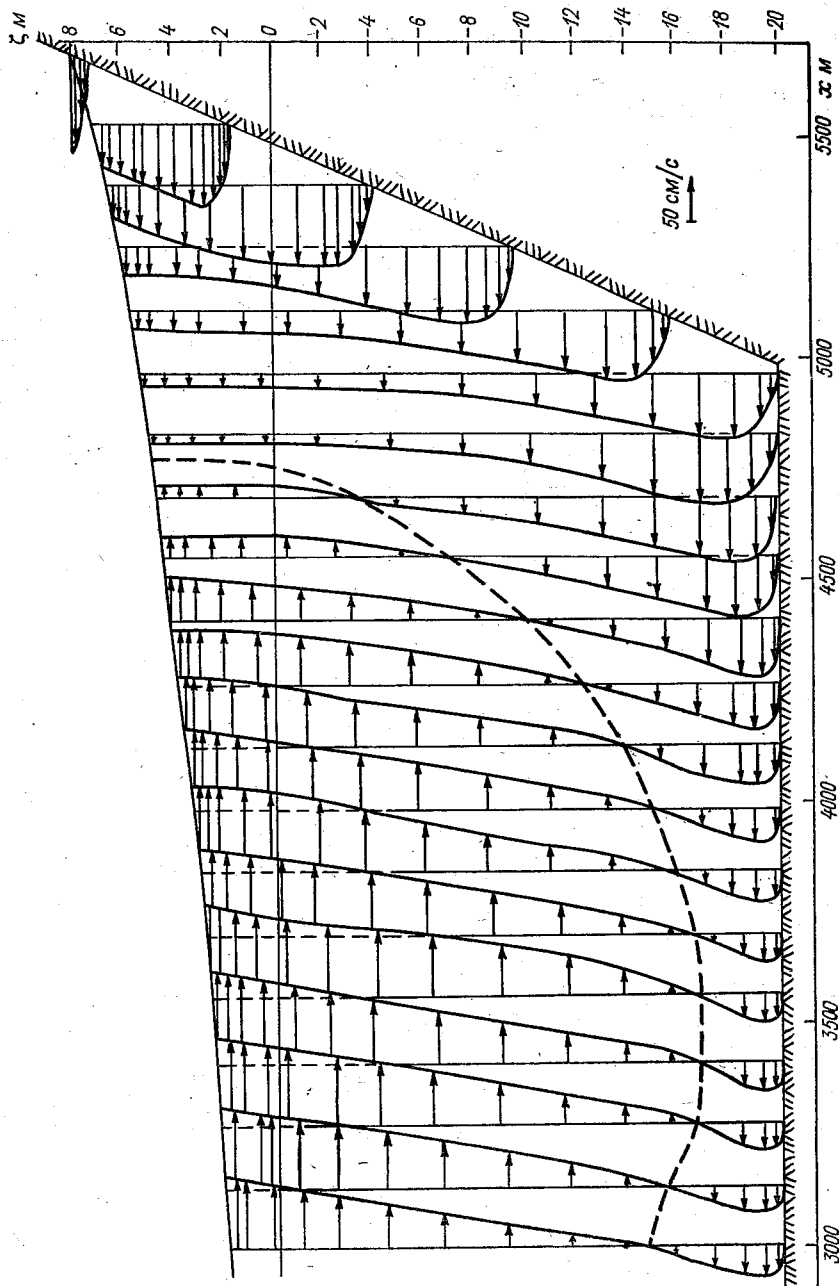


Рис. 8.15. Вертикальная структура потока в начальной стадии отката. Вариант № 8 табл. 8.1.

Как уже отмечалось, для проектирования в зоне возможного затопления важно знать распределение экстремальных характеристик вдоль профиля, начиная от глубин порядка 10 м до верхней

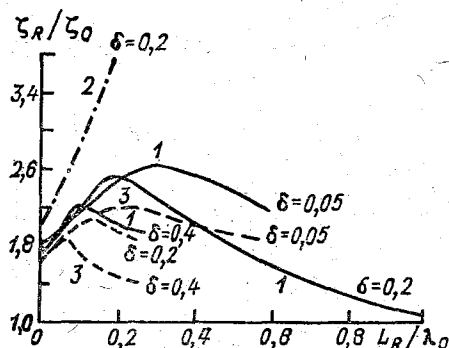


Рис. 8.16. Зависимость вертикального заплеска (ζ_R/ζ_0) и высоты волны на урезе (пунктир) от крутизны откоса при различных значениях параметра нелинейности δ . Штрих-пунктирная линия — расчет без учета диссипации.

границы зоны затопления. Графики распределения уровня, скорости и ускорения для вариантов расчета табл. 8.1 приведены на

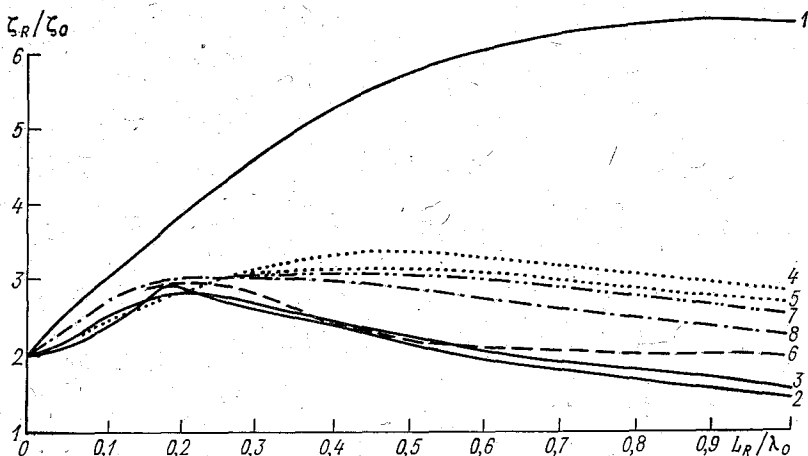


Рис. 8.17. Зависимость вертикального заплеска от крутизны откоса при $\delta = 0,2$.

1 — расчет без учета диссипации; 2 — расчет по модели Прандтля при $z_h = 0,01H$; 3 — расчет по уравнениям мелкой воды при $C_h = 0,005$; 4, 5 — результат М. С. Сладкевича при коэффициенте Маннинга $n = 0,02$ и $n = 0,035$; 6 — результат В. М. Ляхтера и А. Н. Милитеева; 7 — результат М. И. Железняка; 8 — результат В. Г. Бухтеева и А. Н. Петрова при $z_h = 0$ [33].

рис. 8.18—8.20. Видно, что наиболее опасная зона находится, согласно расчетам, на берегу в окрестности точки

$$x_0 = (0,2 - 0,3) \zeta_R/\alpha. \quad (8.3.29)$$

8.3.4. Использование транспортных моделей турбулентности.

Более общий подход к проблеме замыкания связан, как известно,

с привлечением полуэмпирических уравнений для характеристик турбулентности, что позволяет учитывать влияние нестационарности энергии турбулентности, диффузию и адвекцию. Определим роль этих факторов в изучаемом процессе.

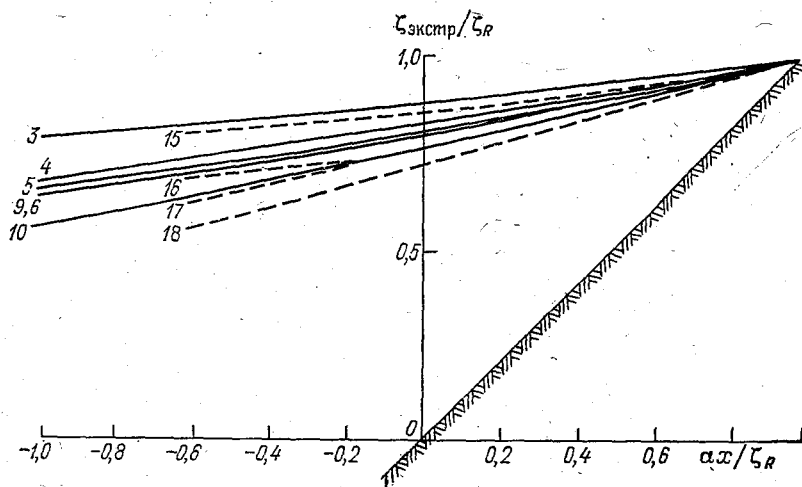


Рис. 8.18. Распределение экстремальных значений уровня вдоль профиля для различных вариантов расчета (табл. 8.1).

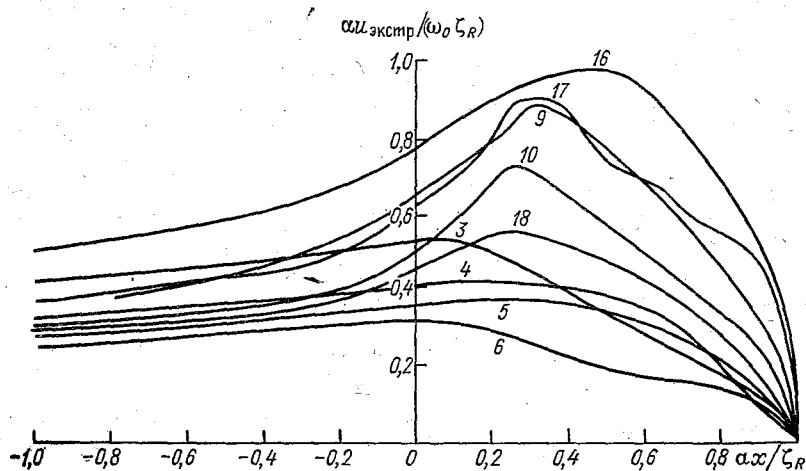


Рис. 8.19. Распределение экстремальных значений скорости наката вдоль профиля для различных вариантов расчета (табл. 8.1).

Для кинетической энергии турбулентных пульсаций скорости гипотезы Прандтля — Колмогорова ведут к уравнению (7.1.8), которое вместе с соотношениями (7.1.7) и (7.1.14) позволяет замк-

нуть задачу. В переменных (ξ, θ) и в безразмерной форме $(b_0 = \xi_R^2 \omega_0^2 / \alpha^2)$ имеем

$$b_t + F^{-1}(u - \xi F_t) b_\xi + \hat{w} b_\theta = \mu (H^{-2} v (u_\theta)^2 + \alpha_b H^{-2} [(v + \varepsilon_0) b_\theta]_\theta - c_\varepsilon b^{3/2} l^{-1}) + \alpha F^{-2} v (u_\xi)^2, \quad (8.3.30)$$

$$v = l \sqrt{b}. \quad (8.3.31)$$

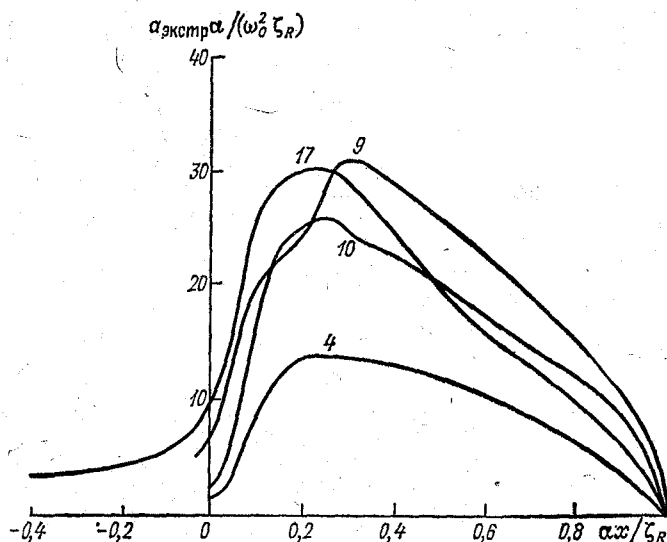


Рис. 8.20. Распределение экстремальных значений ускорения ($a_{\text{экстр}}$) вдоль профиля для различных вариантов расчета (табл. 8.1).

Граничные условия имеют вид

$$v b_\theta|_{\theta=0} = v b_\theta|_{\theta=1} = 0. \quad (8.3.32)$$

Решение (8.3.30)–(8.3.32) определялось с помощью явной по ξ и неявной по θ схеме с итерациями по нелинейности. Диссипативный член записывался в виде

$$b^2/v = [2b^{\alpha+1} b^\alpha - (b^2)^\alpha]/v^\alpha. \quad (8.3.33)$$

В разностной форме (8.3.30) приводится к виду

$$(A_s b_{s-1}^{\alpha+1} - C_s b_s^{\alpha+1} + B_s b_{s+1}^{\alpha+1})_m^{k+1} = \psi_{m,s}^{k,\alpha}, \quad (8.3.34)$$

где

$$C_s = A_s + B_s + H^2 \sigma_s \mu^{-1} (\Delta t^{-1} + c_{\varepsilon} \mu \cdot 2b_s^{\alpha} / v_s^{\alpha});$$

$$A_s = (v_{s-1/2}^{\alpha} + \varepsilon_0) / \Delta_{s-1}; \quad B_s = (v_{s+1/2}^{\alpha} + \varepsilon_0) / \Delta_s;$$

$$\psi_{m,s}^{k,\alpha} = [F^{-1} (u^k - \xi (F^{k+3/2} - F^{k+1/2}) / \Delta t) D_0 b_{m,s}^k + \varpi [b_{\theta}]^{\alpha} -$$

$$- \mu H^{-2} v^{\alpha} [u_0^2]^k - \alpha F^{-2} v^{\alpha} D_0^2 u_{m,s}^k - c_{\varepsilon} \mu (b^2)^{\alpha} / v^{\alpha} - b^k / \Delta t] H^2 \sigma_s \mu^{-1}.$$

Задача (8.3.34) совместно с граничными условиями (8.3.32) решается прогонкой. Итерации по α ведутся до сходимости, определяемой условием

$$\max_{m,s} |(b^{\alpha+1} - b^{\alpha}) / b^{\alpha}| < 0,01.$$

Схема апробировалась на аналитическом решении модельной задачи о стационарировании уровня турбулентности при заданном градиенте скорости потока и пренебрежении диффузией энергии турбулентности

$$b_t = v u_z^2 - c_{\varepsilon} b^{3/2} / l;$$

$$b|_{t=0} = b_0. \quad (8.3.35)$$

Решение (8.3.35) дает

$$b(t) = \frac{l^2 u_z^2}{c_{\varepsilon}} \left(\frac{e^{\beta t} - \gamma}{e^{\beta t} + \gamma} \right)^2, \quad (8.3.36)$$

где $\gamma = (1 - \varphi) / (1 + \varphi)$; $\varphi = \sqrt{c_{\varepsilon} b_0} / (l u_z)$; $\beta = \sqrt{c_{\varepsilon}} |u_z|$. Сравнение показало сходимость численного решения к формуле (8.3.36) при дроблении шага сетки.

Сопоставим результаты расчета наката волн на откос, полученные по b -модели (7.1.7), (7.1.8) и модели Прандтля (п. 8.3.3) на примере варианта № 10 табл. 8.1 ($\alpha = 1,1^\circ$, $L_R = 1$ км, $\xi_0 = 4$ м). На рис. 8.21 приведен пример вертикального распределения различных характеристик (энергии турбулентности, скорости ее продукции, диссипации, диффузии и адвекции) вблизи фронта волны (в 23 м от него) в момент максимума скорости наката. Продукция и диссипация энергии турбулентности находятся примерно в состоянии локального равновесия. Адвекция, направленная в тыл волны, и диффузия, направленная вверх, имеют значения на два порядка меньше, чем продукция и диссипация. Расчет показывает, что эффекты нестационарности, диффузии и адвекции энергии турбулентности мало влияют на характеристики наката длинных волн. Об этом свидетельствует сравнение с расчетом по модели Прандтля (пунктирные линии на рис. 8.21). Высота заплеска по b -модели составила 9,7 м, а по модели Прандтля — 9,9 м (кривые 6 и 3 на рис. 8.14).

С помощью b -модели определено влияние вертикальной стратификации вод на накат длинных волн. Устойчивая стратификация приводит к уменьшению коэффициента вертикальной турбулентной вязкости и к увеличению тем самым скорости потока. Как

и предполагалось, расчет (выполненный при $L_R = 1000$ м, $\zeta_0 = 4$ м, $\Delta\rho/\rho_0 = 1,03$) показал, что стратификация практически не влияет на характеристики наката. Для данного примера значение заплеска в устойчиво стратифицированной среде увеличилось на 12 см, или на 1 %.

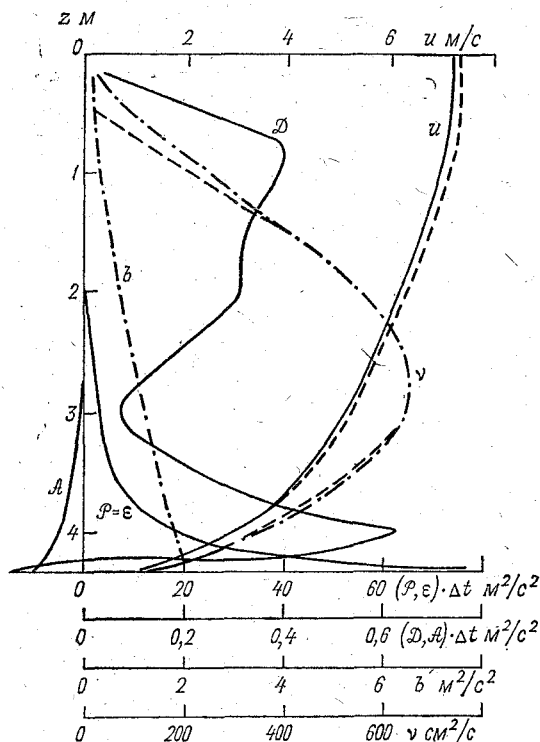


Рис. 8.21. Вертикальное распределение характеристик турбулентности и скорости в момент максимума скорости наката.

$L_R = 1$ км, $\lambda = 5$ км, $\zeta_0 = 4$ м, $z_h = 2$ см; сплошная линия для u — расчет по b -модели, пунктир — по модели Прандтля, A — адвекция, D — диффузия, P — продукция.

Результаты численных экспериментов, описанных в этом разделе, свидетельствуют, что усложнение моделей замыкания не оказывает существенного влияния на характеристики наката. Вместе с тем использование b -модели позволило проанализировать качественный характер процесса, оценить влияние дополнительных факторов и обосновать априорные представления о применимости более простого подхода.

8.3.5. Тестовые решения. Для тестирования моделей с вертикальным разрешением может быть использована линейная система

уравнений со специфическим законом изменения коэффициента турбулентного обмена:

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t + g \partial \xi / \partial x &= \nu \partial^2 u / \partial z^2; \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{-h}^0 u dz &= 0; \end{aligned} \quad (8.3.37)$$

$$h = -\alpha x; \quad \nu = \nu_0 h^2 = \nu_0 \alpha^2 x^2.$$

Данная система допускает разделение переменных для монохроматических волн частоты ω

$$u(x, t, z) = U(x) W(\theta) e^{i\omega t}; \quad \theta = z/h = -z/\alpha x, \quad (8.3.38)$$

причем вертикальная структура течения остается такой же, как на ровном дне, и описывает структуру пограничного слоя в волне:

$$W(\theta) = 1 - \frac{\text{Ch} \sqrt{i\omega/\nu_0} \theta}{\text{Ch} \sqrt{i\omega/\nu_0}}. \quad (8.3.39)$$

При этом $U(x)$ и $\xi(x)$ удовлетворяют системе уравнений мелкой воды

$$\begin{aligned} i\omega U + g d\xi/dx &= 0; \\ i\omega \xi + \alpha p \frac{d}{dx}(xU) &= 0 \end{aligned} \quad (8.3.40)$$

с комплексным коэффициентом

$$p = \int_{-1}^0 W(\theta) d\theta = 1 - \sqrt{\frac{\nu_0}{i\omega}} \text{th} \sqrt{\frac{i\omega}{\nu_0}}. \quad (8.3.41)$$

В частности, при $\nu_0 \rightarrow 0$ получаем $p \rightarrow 1$, и из (8.3.40) вытекает невязкий случай, рассмотренный в разделе 2.4. В случае произвольного p решение (8.3.40) также находится в бесселевых функциях. Опуская промежуточные выкладки, приведем формулу для высоты наката:

$$\frac{\xi_R}{\xi_0} = \left(\frac{\pi\omega}{\alpha} \sqrt{\frac{h}{g|p|}} \right)^{1/2} \exp \left[-2\omega \sqrt{\frac{h}{g|p|}} \sin \frac{\varphi}{2} \right], \quad (8.3.42)$$

где $|p|$ и φ — модуль и аргумент числа p . Основное отличие (8.3.42) от (2.2.25) в экспоненциальном множителе, особенно существенном на больших трассах (ее длина $L_R = h/\alpha$). Отметим, что даже без учета обрушения, т. е. в рамках только линейной теории, выражение (8.3.42) имеет абсолютный максимум

$$\max \frac{\xi_R}{\xi_0} = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha e \sin(\varphi/2)}} \quad (8.3.43)$$

достигаемый на трассе длиной $L_R = g|p|/[16\omega^2\alpha \sin(\varphi/2)]$. Полученный ход зависимости высоты наката от длины откоса находится в хорошем согласии с результатами расчетов по более точным моделям с вертикальным расширением и может быть использован при тестировании алгоритмов расчета этих моделей.

8.4. Накат цунами на берег и цунамирайонирование

Методы расчета наката длинных волн на берег активно используются в проблеме оценки разрушительной силы волн цунами. Цунами — гигантские морские волны, возникающие в результате подводных землетрясений, извержений подводных вулканов, оползней и ряда других причин, — издавна являются грозным стихийным бедствием для многих участков побережья Мирового океана. Так, в Тихом океане цунами с высотой волны 2—4 м возникают ежегодно, с высотой 4—8 м — один раз в три года, со средней высотой более 8 м — один раз в 10 лет (см., например, [59, 66]). Огромные бедствия, приносимые цунами жителям прибрежных районов, давно уже поставили перед человечеством вопрос о мерах защиты против цунами. В ряде стран Тихоокеанского бассейна созданы специальные службы предупреждения о волнах цунами, позволяющие оперативно судить о характере приближающихся к берегу волн цунами. Наряду с оперативным (краткосрочным), прогнозом важное место имеет долгосрочный прогноз параметров цунами, что необходимо при принятии решений о строительстве в цунамиопасной зоне. Районирование по степени цунамиопасности включает в себя широкий комплекс проблем: сейсморайонирование океанов и морей, нахождение гидродинамических характеристик очагов цунами, расчеты движения волн цунами в океане с реальной батиметрией, оценка интенсивности проявления волн цунами на берегу. Здесь мы кратко опишем принципы, положенные в основу предварительной схемы цунамирайонирования Тихоокеанского побережья СССР [11, 60, 67].

Изучая исторические данные о курило-камчатских цунами, С. Л. Соловьев и А. А. Поплавский сформулировали так называемый обобщенный очаг цунами для проведения последующих гидродинамических расчетов. Очаг принят в форме длинной полосы, вытянутой вдоль островной дуги на расстоянии около 70 км от берега (ось очага удалена на расстояние 115 км) и имеющей 90 км в ширину. Начальное возмущение водной поверхности произвольно выбрано в виде возвышения, имеющего форму положительной полусинусоиды с высотой 2 м вдоль всего источника (начальное поле скоростей принято равным нулю). Выбор начального смещения уровня воды, равного 2 м, обусловлен следующими обстоятельствами. При распаде начального возмущения к берегу будет двигаться волна высотой 1 м, на которую удобно нормировать значение заплеска. Если учесть близость очага к побережью, то можно ожидать линейность связи высоты заплеска с амплитудой волны (см. раздел 2.4). Поэтому расчеты цунами от такого очага будут в какой-то мере нормированными и позволяют в сущности рассчитать коэффициенты усиления волн цунами при движении от очага до берега. Соответствующие расчеты выполнены в рамках уравнений мелкой воды.

Знание коэффициентов усиления вместе с анализом натуральных данных о проявлениях цунами на берегу позволяет составить долгосрочный прогноз цунами. Учитывая, что цунами является редким событием и главным фактором, влияющим на высоту заплеска, является прибрежный рельеф, кривые повторяемости цунами можно представить в обобщенном виде:

$$N/T = A \cdot 10^{-\xi_R/K}, \quad (8.4.1)$$

где N — число цунами с высотами заплеска, большими ξ_R , за период времени T ; A — частота возникновения сильных цунами и K — коэффициент усиления цунами при движении волны от обобщенного очага до берега. Эта формула проверена по всем пунктам бассейна Тихого океана, где есть обеспеченные данные наблюдений (около 30 пунктов). Хорошее совпадение данных расчетов и наблюдений позволяет использовать формулы (8.4.1) и для тех пунктов побережья, для которых имеются единичные данные.

Таблица 8.2

Прогнозируемые уровни затопления на 100 лет для Тихоокеанского побережья СССР

Пункт	Высота, м	Пункт	Высота, м
Командорские острова		Малая Курильская гряда	
о. Медный	2,5	о. Полонского	5,0
о. Беринга	8,0	о. Зеленый	7,0
Камчатка		о. Танфильева	3,5
п. Усть-Камчатск	9,5	о. Юрий	3,0
м. Кроноцкий	16,5	о. Сахалин	
п. Жупаново	8,0	г. Холмск	1,0
бух. Моржовая	18,0	г. Невельск	1,0
м. Шипунский	20,5	г. Корсаков	2,0
р. Халактырка	8,5	м. Крильон	1,0
м. Маячный	11,0	г. Первомайск	1,5
г. Петропавловск-Камчатский	2,5	п. Катангли	1,0
м. Изменный	9,0	Приморье	
м. Лопатка	17,5	п. Терней	1,0
о. Шумшу		п. Рудная Пристань	1,5
п. Бабушкино	9,0	г. Находка	1,0
п. Козыревск	11,0	о. Шнишкотан	13,5
п. Байково	17,0	о. Матуа	10,5
о. Парамушир		о. Симушир	8,5
г. Северо-Курильск	18,0	о. Уруп	
м. Васильева	11,0	м. Кастрикум	8,0
Средние Курильские острова		п. Подгорное	8,0
о. Онекотан	12,0	м. Ван-дер-Линда	17,0
о. Кунашир		о. Итуруп	
п. Южно-Курильск	4,5	п. Курильск	1,0
п. Головинно	2,5	п. Сентябрьский	10,5
о. Шикотан		п. Буревестник	7,5
п. Малокурильское	7,0	г. Владивосток	1,0
п. Крабозаводское	7,0	п. Посыет	0,5
бух. Церковная	13,0		

Глава 8. Численное моделирование затопления прибрежной зоны

В табл. 8.2 приведены данные об уровнях затопления для пунктов Тихоокеанского побережья СССР, рассчитанные по формуле (8.4.1) для периода времени 100 лет. Такой период соответствует принятому в практике гидротехнического и сейсмостойкого строительства масштабу времени, используемому в СНиП по сейсмостойкому строительству.

Таблица 8.3

Прогноз скорости потока и параметра обрушения

Пункт	Уровень затопления, м	Скорость потока, м/с	Параметр обрушения B_r
п. Усть-Камчатск	9,5	7	0,5
р. Халактырка	8,5	4	0,2
м. Маячный	11,5	10	0,8
Вилуй	11,0	10	0,7
г. Северо-Курильск	18,0	19	2,0
о. Матуа	10,0	4,6	0,2
о. Симушир	8,5	2,2	0,06
м. Кастрикум (о. Уруп)	8,0	2,6	0,1
м. Ван-дер-Линда (о. Уруп)	17,0	3,5	0,1
зал. Касатка (о. Итуруп)	7,5	1,9	0,05
п. Южно-Курильск	4,5	4,5	0,47
бух. Малокурильская	7,0	2,6	0,1
г. Находка	1,0	0,6	0,04
г. Владивосток	1,0	0,6	0,04
п. Посьет	0,5	1,1	0,33

Используя формулы главы 2, можно провести также цунами-районирование по скоростям потока и параметру обрушения (табл. 8.3), однако построение таких схем требует знания не только высот заплеска, но и периодов волн цунами с нужной обеспеченностью, поэтому схемы цунамирайонирования по скоростям потока и параметру обрушения обладают меньшей надежностью. Отметим, что практически во всех случаях $B_r < 1$, и цунами в среднем подтапливают берег без обрушения. Исключение составляет г. Северо-Курильск, для которого $B_r > 1$, и это соответствует данным наблюдений во время цунами 5 ноября 1952 г.

В конечном счете схемы цунамирайонирования Тихоокеанского побережья СССР должны принимать вид нормативных документов, обязательных для организаций, ведущих проектирование и строительство в цунамиопасной зоне. Для этого необходимо провести работу по оценке значимости каждой цифры (проверка достоверности исходного материала, определение доверительных интервалов и т. п.); такая работа еще только начинается.

Заключение

Содержание книги составляет анализ длинноволновых процессов и численное решение краевых задач динамики и загрязнения прибрежной зоны моря.

Предметом аналитического исследования в рамках нелинейной теории мелкой воды является накат волны на берег. Подробно обсуждены физические аспекты процесса затопления берега: характеристики заплеска, обрушение волны, влияние нелинейности диссипации и дисперсии. Результаты классифицируются по типу возмущений и элементам геометрии берега; они относятся к развитию аналитического аппарата, углублению физических представлений, обоснованию методики расчета экстремальных характеристик наката и критерия обрушения, нахождению тестовых решений для проверки численных алгоритмов.

Численная реализация краевых задач использует переход к криволинейным координатам, согласованным с конфигурацией области. Исходная область отображается при этом на каноническую, в которой преобразованные уравнения интегрируются разностным методом. Преимущество такого подхода заключается в простой постановке краевых задач при более точном описании границы, сравнительно с обычной кусочно-линейной ее аппроксимацией.

Изложению метода согласованных координат предшествует обзор разностных методов интегрирования гиперболических краевых задач, подробное обсуждение элементов теории криволинейных координат и способов построения криволинейных сеток. Это позволяет оценить место используемого аппарата в общей панораме методов вычислительной гидродинамики.

Расчеты, тестировавшиеся на аналитических решениях, использовали различные формы преобразованных уравнений и различные схемы; в этом ряду привлекательна форма для контравариантных составляющих потока, эффективно реализуемая полунейным методом, абсолютно устойчивым в дозвуковом случае. Представленные результаты охватывают широкую сферу приложений: расчеты поля скорости и денивеляции уровня в двумерных и трехмерных областях сложной геометрии, расчеты адвективно-диффузионного переноса примесей, расчет динамики в области с подвижной границей.

Summary

The book is concerned with analysis of long-wave processes and numerical solution to initial boundary-value problems of the dynamics and pollution in the coastal zone.

The subject of analytical research within the framework of the shallow water equations is the wave run-up to shore. Physical aspect of the processes of coastal zone flooding are discussed in detail, namely: characteristics of the run-up, conditions of breaking and influence of nonlinear, dissipative and dispersive effects. The results are classified according to the type of disturbances and elements of the coastal geometry; they belong in the development of analytical researches, extension of physical concepts, formulation of procedures for extremal run-up calculations and wave-breaking criterion, and the finding of a test solution for approbation of the numerical algorithms.

The numerical realization of the initial boundary-value problems uses the transfer to the boundary-fitted curvilinear coordinates. In this connection the domain given is mapped onto a canonical one in which the transformed equations are integrated by the difference method. The advantage of this approach is simple formulation of the boundary conditions for a more exact description of the boundary compared with the usual piecewise linear boundary approximation.

The review of the difference methods for the hyperbolic initial-value problems, detailed discussion of the curvilinear coordinate theory and the methods of curvilinear grids generation precedes presentation of the concordant-coordinate method. This allows one to estimate the place of the apparatus used in the general panorama of the difference algorithms is computational fluid dynamics.

The calculations tested on the analytical solutions have used different forms of the transformed equations and various schemes; in that range one may prefer the form for contravariant components of the flux, effectively realizable by the semi-implicit method which is absolutely stable in the subsonic case. The results presented cover a wide range of applications such as calculations of the current field and sea-level elevation in two dimensional and three dimensional complicates domains, calculations of the transport and diffusion of contaminants, and dynamics calculation in the region with a moving boundary.

Список литературы

1. Анучина Н. Н. Некоторые разностные схемы для систем гиперболических уравнений. — Тр. МИАН, 1966, т. 74, с. 5—15.
2. Баренблатт Г. И., Шапиро Г. И. К теории структуры волновых фронтов в диспергирующих средах с диссипацией. — Изв. АН СССР, ФАО, 1984, т. 20, № 3, с. 277—284.
3. Бухтеев В. Г., Макаров В. А., Некрасов А. В., Плинка Н. Л. Трансформация цунами на шельфе и в прибрежной зоне. — В кн.: Структура и динамика вод Мирового океана. Л., ЛПИ, 1983, с. 115—126.
4. Вагер Б. Г., Вольцингер Н. Е., Руденко Э. П. Расчет вертикальной структуры ветровых нагонов. — Числ. мет. в задачах мат. физ. Межвуз. тем. сб. трудов, ЛИСИ, 1983, с. 79—87.
5. Вольцингер Н. Е. Длинные волны на мелкой воде. — Л.: Гидрометеоздат, 1985. — 160 с.
6. Вольцингер Н. Е., Клеванный К. А. Вертикальная структура цунами при накате на берег. — Изв. АН СССР, ФАО, 1985, т. 21, № 10, с. 1078—1085.
7. Вольцингер Н. Е., Клеванный К. А. Моделирование длинноволновых движений с использованием спрямляющего отображения области. — Изв. АН СССР, ФАО, 1986, т. 22, № 8, с. 844—849.
8. Вольцингер Н. Е., Клеванный К. А. Интегрирование уравнений трехмерного движения в произвольной области для расчета наводнений. — Изв. АН СССР, ФАО, 1987, т. 23, № 5, с. 462—469.
9. Вольцингер Н. Е., Пясковский Р. В. Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. — Л.: Гидрометеоздат, 1977. — 207 с.
10. Вольцингер Н. Е., Тузова О. И. О расчете вертикальной структуры течений при штормовых нагонах. — Изв. АН СССР, ФАО, 1983, т. 19, № 5, с. 524—532.
11. Го Ч. Н., Кайстренко В. М., Симонов К. В. О возможности локального долгосрочного прогноза цунами. — В кн.: Оперативный и долгосрочный прогноз цунами. Южно-Сахалинск, ИМГГ, 1983, с. 160—162.
12. Гогодзе И. К., Попов Ю. П., Хуцишвили В. В. Непрерывные автомодельные и периодические решения уравнений мелкой воды. — В кн.: Накат цунами на берег. Горький, ИПФ АН СССР, 1985, с. 64—74.
13. Гогодзе И. К., Хуцишвили В. В. Численный метод исследования взаимодействия морских волн с берегом. — Сообщ. АН ГрузССР, 1983, вып. 112, № 2, с. 249—252.
14. Годунов С. К. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1971. — 416 с.
15. Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я. и др. Численное решение многомерных задач газовой динамики. — М.: Наука, 1976. — 400 с.
16. Годунов С. К., Прокопов Г. П. О расчетах конформных отображений и построении разностных сеток. — Ж. В. М. и М. Ф., 1967, 7, № 5, с. 1031—1059.

Список литературы

17. Годунов С. К., Рябенкий В. С. Разностные схемы.— М.: Наука, 1973. — 400 с.
18. Голинько В. И., Пелиновский Е. Н. Накат длинных волн на берег в каналах переменного сечения.— Метеорология и гидрология, 1988, № 6, с. 107—112.
19. Доброхотов С. Ю., Жевандров П. Н. Расчет волновых движений в океане над переменным дном методом Маслова.— Исследования цунами, 1986, № 1, с. 73—79.
20. Дорфман А. А. Плоская задача о неустановившихся волнах над наклонным дном.— Исследования цунами, 1986, № 1, с. 102—109.
21. Дорфман А. А. Пространственная задача Коши—Пуассона для области переменной глубины.— ДАН СССР, 1986, т. 286, № 2, с. 321—323.
22. Дьяконов Е. Г. Разностные методы решения краевых задач. Вып. 2. Нестационарные задачи.— М.: МГУ, 1972. — 227 с.
23. Ефимов В. В., Куликов Е. А., Рабинович А. Б., Файн И. В. Волны в пограничных областях океана.— Л.: Гидрометеониздат, 1985. — 280 с.
24. Железняк М. И. Воздействие длинных волн на сплошные вертикальные преграды.— В кн.: Накат цунами на берег. Горький, ИПФ АН СССР, 1985, с. 122—139.
25. Железняк М. И., Пелиновский Е. Н. Физико-математические модели наката цунами на берег.— В кн.: Накат цунами на берег. Горький, ИПФ АН СССР, 1985, с. 8—33.
26. Железняк М. И., Сидорчук В. Н. К численному расчету трансформации волнения в прибрежной зоне.— В кн.: Волны в сплошных средах. Киев, 1978, с. 13—19.
27. Захаров В. Е., Манакон С. В., Новиков С. П., Питаевский Л. П. Теория солитонов. Метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980. — 319 с.
28. Иваненко С. А. Построение криволинейных сеток и их использование в методе конечных элементов для решения уравнений мелкой воды.— Сообщ. по прикл. мат., 1985, М., ВЦ АН СССР. — 61 с.
29. Иванов В. В., Пономарева Н. А. О накате импульсной волны на берег.— В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования длинноволновых процессов. Владивосток, ДВНЦ, 1985, с. 73—77.
30. Каган Б. А. Динамика придонного пограничного слоя океана.— Итоги науки и техники. ВИНТИ, Океанология, 1981, т. 6, с. 81—189.
31. Кайстренко В. М., Пелиновский Е. Н., Симонов К. В. Накат и трансформация волн цунами на мелководье.— Метеорология и гидрология, 1985, № 10, с. 68—75.
32. Карпман В. И. Нелинейные волны в диспергирующих средах.— М.: Наука, 1973. — 175 с.
33. Клеванный К. А. Влияние диссипации на распространение и накат цунами.— Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. Горький—Ленинград, ААНИИ, 1985. — 20 с.
34. Клеванный К. А., Пелиновский Е. Н. Влияние нелинейной диссипации на распространение волн цунами.— Изв. АН СССР, ФАО, 1978, т. 14, № 10, с. 1074—1078.
35. Козлов С. И. О накате волны цунами на берег без обрушения.— Изв. АН СССР, ФАО, 1981, т. 17, № 9, с. 996—1000.
36. Кононкова Г. Е., Показеев К. В. Динамика морских волн.— М.: МГУ, 1985. — 297 с.
37. Кочергин В. П., Климок В. И., Сухоруков В. А. Турбулентная модель экмановского слоя океана.— В сб.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1976, т. 7, № 1, с. 72—84.
38. Кочергин В. П., Сухоруков В. А., Цветова Е. А. Моделирование процессов вертикальной турбулентной диффузии в океане.— В сб.: Численные методы расчета океанических течений. Новосибирск, ВЦ СО АН СССР, 1974, с. 129—152.

39. Курант Р. Уравнения с частными производными. Пер. с англ. — М.: Мир, 1964. — 830 с.
40. Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Пер. с англ. — М.: Мир, 1981. Т. 1. — 480 с. Т. 2. — 365 с.
41. Лятхер В. М., Милитеев А. Н. Расчет наката длинных гравитационных волн на откос. — Океанология, 1974, т. 14, № 1, с. 37—42.
42. Лятхер В. М., Мишуев А. В., Милитеев А. Н., Сладкевич М. С. Численный метод расчета наката длинных волн на берег. — В кн.: Процессы возбуждения и распространения цунами. М., ИОАН СССР, 1982, с. 103—108.
43. Мазова Р. Х. Линейная теория наката волн цунами на шельфы различных геометрий. — В кн.: Накат цунами на берег. Горький, ИПФ АН СССР, 1985, с. 48—63.
44. Мазова Р. Х., Осипенко Н. Н., Пелиновский Е. Н. Влияние нелинейности на характеристики наката длинных волн. — Изв. АН СССР, ФАО, 1987, т. 23, № 9, с. 950—955.
45. Мазова Р. Х., Пелиновский Е. Н. Линейная теория набегания волн цунами на берег. — Изв. АН СССР, ФАО, 1982, т. 18, № 2, с. 166—171.
46. Мазова Р. Х., Пелиновский Е. Н., Шаврацкий С. X. Одномерная теория наката необрушивающихся волн цунами на берег. — В кн.: Процессы возбуждения и распространения цунами. М., ИОАН СССР, 1982, с. 98—103.
47. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. — М.: Наука, 1980. — 535 с.
48. Марчук Г. И., Каган Б. А. Динамика океанских приливов. — Л.: Гидрометеиздат, 1983. — 359 с.
49. Марчук А. Г., Чубаров Л. Б., Шокин Ю. И. Численное моделирование волн цунами. — Новосибирск, Наука, 1983. — 175 с.
50. Марчук Г. И., Кочергин В. П., Климок В. И., Сухоруков В. А. Динамика однородного слоя океана. — Препринт ВЦ СО АН СССР, 1976, № 11. — 18 с.
51. Масс Е. И., Судобичер В. Г. Численный метод расчета наката волн в прибрежной зоне крупных водоемов. — Водные ресурсы, 1980, № 3, с. 143—148.
52. Математические модели циркуляции в океане. Под ред. Г. И. Марчука, А. С. Саркисяна. — Новосибирск: Наука, 1980. — 288 с.
53. Милитеев А. Н., Сладкевич М. С. Численный метод расчета наката длинных волн на берег. — В кн.: Вопросы долгосрочного и оперативного прогноза цунами. Владивосток, ДВНЦ АН СССР, 1981, с. 48—49.
54. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Ч. I. — М.: Наука, 1965. — 639 с.
55. Некрасов А. В., Пясковский Р. В., Бухтеев В. Г. Исследование распространения и трансформации волн цунами методом расчета. — В кн.: Волны цунами. Южно-Сахалинск, Тр. СахКНИИ, 1972, вып. 29, с. 107—116.
56. Оганесян Л. А., Сивашинский С. В. Диагностические расчеты штормовых нагонов. — Л.: Гидрометеиздат, 1983. — 120 с.
57. Озмидов Р. В. Диффузия примесей в океане. — Л.: Гидрометеиздат, 1986. — 280 с.
58. Пейре Р., Тейлор Т. Д. Вычислительные методы в задачах механики жидкости. Пер. с англ. — Л.: Гидрометеиздат, 1986. — 352 с.
59. Пелиновский Е. Н. Нелинейная динамика волн цунами. — Горький, ИПФ АН СССР, 1982. — 226 с.
60. Пелиновский Е. Н., Плинка Н. Л. Предварительная схема цунами-районирования побережья Курило-Камчатской зоны на основе одномерных расчетов (модельный очаг). — Препринт № 5, Горький, ИПФ АН СССР, 1980. — 21 с.
61. Пелиновский Е. Н., Фридман В. Е., Энгельбрехт Ю. К. Нелинейные эволюционные уравнения. — Таллин, Валгус, 1984. — 154 с.
62. Прокопов Г. П. О расчете разностных сеток, близких к ортогональным в областях с криволинейными границами. — М.: Препринт ИПМ АН СССР, 1974, № 17. — 36 с.

Список литературы

63. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. Пер. с англ. — М.: Мир, 1972. — 418 с.
64. Селезов И. Т., Железняк М. И., Ткаченко В. А., Яковлев В. В. О численном моделировании генерирования и распространения волн цунами. — В кн.: Эволюция цунами от очага до выхода на берег. М., Радио и связь, 1982, с. 6—15.
65. Сивашинский С. В. Конечно-разностный метод решения смешанной задачи для линейных систем первого порядка. — Вестник ЛГУ, 1967, № 19, с. 69—82.
66. Соловьев С. Л. Методы предсказания цунами. — Вестник АН СССР, 1972, № 5, с. 72—81.
67. Соловьев С. Л., Некрасов А. В., Бухтеев В. Г., Пяковский Р. В. Предварительное цунамирование Курило-Камчатского побережья на основе гидродинамических расчетов. — В кн.: Теоретические и экспериментальные исследования по проблеме цунами. М., Наука, 1977, с. 131—139.
68. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. Пер. с англ. — М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959. — 618 с.
69. Судобичер В. Г., Шугрин С. М. Движение потока воды по сухому руслу. — Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1968, вып. 3, № 13, с. 116—122.
70. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. — 622 с.
71. Файн И. В., Шевченко Г. В., Куликов Е. А. Исследование лучевым методом эффекта захвата волн цунами Курильским шельфом. — Океанология, 1983, т. 23, № 1, с. 23—26.
72. Федотова З. И. О применении инвариантной разностной схемы к расчету колебаний жидкости в бассейне. — Числ. мет. мех. сплошн. среды, Новосибирск, 1978, т. 9, № 3, с. 137—146.
73. Христианович С. А. Отражение длинной волны конечной амплитуды, распространяющейся в призматическом канале. — В кн.: IV Гидрол. конф. балт. стран. Л., 1933, с. 1—12.
74. Цветова Е. А. Математическое моделирование циркуляции вод озера. — В кн.: Течения в Байкале. Новосибирск, Наука, 1977, с. 63—81.
75. Шокин Ю. И. Метод дифференциального приближения. — Новосибирск: Наука, 1979. — 221 с.
76. Шугрин С. М. Двумерные (плановые) неустановившиеся течения воды. — В кн.: Динам. задачи мех. сплошн. сред. Новосибирск, ИГД, СО АН СССР, 1978, вып. 35, с. 141—172.
77. Яненко Н. Н., Данаев Н. Т., Лисейкин В. Д. О вариационном методе построения сеток. — Числ. мет. мех. сплошной среды, Новосибирск, 1977, т. 8, № 4, с. 157—163.
78. Abarbanel S. S., Murman E. M. Stability of two-dimensional hyperbolic initial boundary value problems for explicit and implicit schemes. — J. Comp. Phys., 1982, vol. 48, N 2, p. 160—167.
79. Ball F. K. An exact theory of simple finite shallow-water oscillation of a rotating Earth. — In: Proc. I Austral. Conf. Hydr. Fl. Mech., 1964, p. 293—305.
80. Balsillie J. H. Redefinition of shore-breaker classification as a numerical continuum and a design shore-breaker. — J. Coast. Res., 1985, vol. 1, N 3, p. 247—254.
81. Blottner F. G. Influence of boundary approximations and conditions on finite-difference solutions. — J. Comp. Phys., 1982, vol. 48, N 2, p. 246—259.
82. Brackbill J. U., Saltzman J. S. Adaptive zoning for singular problems in two dimensions. — J. Comp. Phys., 1982, vol. 46, p. 342.
83. Briley W. R., McDonald H. On the structure and use of linearised block implicit schemes. — J. Comp. Phys., 1980, vol. 34, N 1, p. 54—73.

84. Caccione D. A., Drake D. E. Measurements of storm-generated bottom stresses on the continental shelf. — *J. Geophys. Res.*, 1982, vol. 87, B c3, p. 1952—1960.
85. Carrier G. F., Greenspan H. P. Water waves of finite amplitude on a sloping beach. — *J. Fluid Mech.*, 1958, vol. 4, N 1, p. 97—109.
86. Chakravarthy S. Euler equations — implicit schemes and implicit boundary conditions. — *AIAA Paper*, 82—0228, 1982.
87. Elvius T., Sundström A. Computationally efficient schemes and boundary conditions for a fine-mesh barotropic model based on the shallow-water equations. — *Tellus*, 1973, vol. 15, p. 132—156.
88. Falconer R. A. A mathematical model study of the flushing characteristics of a shallow tidal bay. — *Proc. Inst. Civ. Eng.*, 1984, vol. 77, N 9, p. 311—332.
89. Freeman J. C., Le Mehaute B. Waves breakers on a beach and surges on a dry bed. — *J. Hydr. Div. ASCE*, 1964, vol. 90, N 2, p. 187—216.
90. Friedrichs K. O. Symmetric hyperbolic linear differential equation. — *Comm. Pure Appl. Math.*, 1954, vol. 7, p. 345—392.
91. Gordon W. J., Thiel L. C. Transfinite mappings and their application to grid generation. — In: *Numerical grid generation. Appl. Math. Comp.*, 1982, vol. 10—11, p. 171—192.
92. Goto C. Nonlinear equations of long waves in the Lagrangian description. — *Coast. Eng. Japan*, 1979, vol. 22, p. 1—9.
93. Goto C., Shuto N. Run-up of tsunamis by linear and nonlinear theories. — *Proc. 17 Coast. Eng. Conf. Sydney*, vol. 1, 1981, p. 695—707.
94. Gottlieb D., Turkel E. Boundary conditions for multistep finite difference methods for time-dependent equations. — *J. Comp. Phys.*, 1978, vol. 26, p. 181—196.
95. Grammelvedt A. A survey of finite-difference schemes for the primitive equations for a barotropic fluid. — *Month. Wea. Rev.*, 1969, vol. 97, p. 384—404.
96. Gustafsson B. The convergence rate for difference approximations to mixed initial boundary value problems. — *Math. Comp.*, 1975, vol. 29, N 130, p. 396—406.
97. Gustafsson B., Kreiss H.-O., Sundström A. Stability theory of difference approximation for mixed initial boundary-value problem. II. — *Math. Comp.*, 1972, vol. 25, p. 649—686.
98. Heitner K. L., Housner G. W. Numerical model for tsunami run-up. — *J. Waterways Harb. Div. ASCE*, 1970, vol. 96, N 3, p. 701—719.
99. Hibberd S., Peregrine D. H. Surf and run-up on a beach: uniform bore. — *J. Fluid Mech.*, 1979, vol. 95, N 2, p. 323—345.
100. Hindmarsh A. C., Gresho P. M., Griffiths D. F. The stability of explicit Euler time-integration for certain finite difference approximation of the multi-dimensional advection-diffusion equation. — *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 1984, vol. 4, p. 853—897.
101. Ives D. C. Conformal grid generation. — In: *Numerical grid generation. Appl. Math. Comp.*, 1982, vol. 10—11, p. 107—136.
102. Johns B. The modelling of tidal flow in a channel using a turbulent energy closure scheme. — *J. Phys. Oceanogr.*, 1978, vol. 8, N 6, p. 1042—1049.
103. Johnson B. H. Numerical modeling of estuarine hydrodynamics on a boundary-fitted coordinate system. — In: *Numerical grid generation. Appl. Math. Comp.*, 1982, vol. 10—11, p. 409—436.
104. Kennon S., Dulikravich G. A posteriori optimisation of computational grid. — *AIAA Paper* 85—0483, 1985.
105. Kinoshita T., Konishi T., Tsuji Y. Magnification factor for tsunami risk evaluation. — *Tsunami Newsletters*, 1985, vol. 18, N 1, p. 16—19.
106. Kreiss H.-O. Stability theory for difference approximation of mixed initial boundary-value problems. I. — *Math. Comp.*, 1968, vol. 22, p. 703—714.
107. Kreiss H.-O., Oliger J. Methods for the approximate solution of time-dependent problems. — *GARP Publications*, 1973, ser. 10. — 107 p.
108. Le Mehaute B., Koh R. C., Hwang L. S. A synthesis of wave run-up. — *J. Waterways Harb. Div. ASCE*, 1968, vol. 94, N 1, p. 77—92.

Список литературы

109. Maliska C. R., Raithby G. D. A method for computing three dimensional flows using non-orthogonal boundary-fitted coordinates. — *Int. J. Numer. Meth. Fl.*, 1984, vol. 4, p. 519—537.
110. Mastin C. W., Thompson J. F. Quasiconformal mappings and grid generation. — *SIAM J. Scient. and Statist. Comp.*, 1984, vol. 5, p. 305—310.
111. Matsutomi H. Numerical analysis of run-up of tsunami on dry bed. — In: *Tsunamis* (Ed. K. Iida, T. Iwasaki), 1983, Tokyo, p. 479—493.
112. Mellor G. L., Yamada T. Development of a turbulence closure model for geophysical fluid problems. — *Rev. Geophys. Space Phys.*, 1982, vol. 20, N 4, p. 851—875.
113. Miles J. W. Resonantly interacting solitary waves. — *J. Fluid Mech.*, 1977, vol. 79, pt. 1, p. 171—179.
114. Nakamura S. Marching grid generation using parabolic partial differential equations. — In: *Numerical grid generation. Appl. Math. Comp.*, 1982, vol. 10—11, 775—786.
115. Navon I. M., Riphagen H. A. An implicit compact fourth-order algorithm for solving the shallow-water equations in conservation law form. — *Month. Wea. Rev.*, 1979, vol. 107, p. 1107—1127.
116. Numerical grid generation. *Appl. Math. Comp.*, 1982, vol. 10—11, ed. J. F. Thompson. — 910 p.
117. Oliger J., Sundström A. Theoretical and practical aspects of some initial boundary value problems in fluid dynamics. — *SIAM J. Appl. Math.*, 1978, vol. 35, N 3, p. 412—446.
118. Pearson C. E. A numerical method for shallow-water motion onto a beach. — *Comp. Meth. in Nonlinear Mech. Proc. TICOM 2 Int. Conf.*, 1980, p. 379—391.
119. Pedersen G. P., Gjevik B. Run-up of solitary waves. — *J. Fluid Mech.*, 1983, vol. 135, p. 283—299.
120. Peregrine D. H. Long waves on a beach. — *J. Fluid Mech.*, 1967, vol. 27, N 4, p. 815—827.
121. Pulliam T. H., Ghaussee D. S. A diagonal form of an implicit approximate-factorization algorithm. — *J. Comp. Phys.*, 1981, vol. 39, p. 347—363.
122. Reid R. O. Modification of the quadratic bottom-stress law for turbulent channel flow in the presence of surface wind-stress. — *V. S. Army Corps of Engineers, Beach Erosion Board. Tech. Memor.*, 1957, N 93. — 33 p.
123. Reid R. O., Bodine B. R. Numerical model for storm surges in Galveston Bay. — *J. Waterways Harb. Div. ASCE*, 1968, vol. 94, N 1, p. 33—57.
124. Rober A. Semi-implicit method. — *Numerical methods used in atmospheric models. GARP Publ. Ser.* 2, 1979, N 17, p. 419—437. Пер. Робер А. Полуявный метод. — В кн.: *Численные методы, используемые в атмосф. моделях*. Ред. В. П. Садоков. Л., Гидрометеоиздат, 1982, с. 302—315.
125. Rodi W. Mathematical modelling of turbulence in estuaries. — *Lect. Note on Coast. Estuar. Stud.*, 1980, vol. 1, p. 15—26.
126. Sielecki A. An energy-conserving difference scheme for the storm surge equations. — *Month. Wea. Rev.*, 1968, vol. 99, p. 150—156.
127. Sielecki A., Wurtele M. The numerical integration of the non-linear shallow-water equations with sloping boundaries. — *J. Comp. Phys.*, 1970, vol. 6, p. 219—236.
128. Shich C. F. Three-dimensional grid generation using elliptic equations with direct grid distribution control. — *AIAA J.*, 1984, vol. 22, N 3, p. 351—364.
129. Shuto N. Run-up of long waves on a sloping beach. — *Coast. Eng. Japan*, 1967, vol. 10, p. 24—38.
130. Shuto N. Standing waves in front of a sloping dike. — *Coast. Eng. Japan*, 1972, vol. 15, p. 14—23.
131. Spielvogel L. Q. Single wave run-up on sloping beach. — *J. Fluid Mech.*, 1975, vol. 74, N 4, p. 685—694.

132. Steger J., Warming R. F. Flux vector splitting of the inviscid gas-dynamic equations with application to finite-difference methods. — *J. Comp. Phys.*, 1981, vol. 40, p. 263—293.
133. Strang G. On the construction and comparison of difference schemes. — *J. SIAM Numer. Anal.*, 1968, vol. 5, p. 506—517.
134. Tanaka T., Ono Y., Ishise T. Open boundary value problems in ocean dynamics by finite elements. — *Adv. Water Resour.*, 1982, vol. 5, N 1, p. 21—28.
135. Thomas P. D., Middlecoff J. F. Direct control of the grid point distribution in meshes generated by elliptic systems. — *AIAA J.*, 1980, vol. 18, N 6, p. 652—656. (Томас П. Д., Миддлкоф Дж. Ф. Прямое управление распределением узловых точек в сетках, порождаемых решениями эллиптических уравнений. — *Ракетн. техн. и косм.*, 1980, т. 18, № 7, с. 55—61).
136. Thomée V. Stability theory for partial difference operators. — *SIAM Rev.*, 1969, vol. 11, N 1, p. 152—195.
137. Thompson J. F., Thames F. C., Mastin C. W. TOMCAT — A code for numerical generation of boundary-fitted curvilinear coordinate systems on fields containing any number of arbitrary two-dimensions bodies. — *J. Comp. Phys.*, 1977, vol. 24, N 3, p. 274—302.
138. Thompson J. F., Warsi Z. U. A., Mastin C. W. Boundary-fitted coordinate systems for numerical solution of partial differential equation. A review. — *J. Comp. Phys.*, 1982, vol. 47, N 2, p. 1—108.
139. Thompson J. F., Warsi Z. U. A., Mastin C. W. Numerical grid generation foundation and application. — North-Holl, 1985. — 483 p.
140. Viviani H. Conservation forms of gas dynamics equations. — *La recherche aerospatiale*, 1974, 1, p. 65—68.
141. Warming R. F., Beam R. M. On the construction and application of implicit factored schemes for conservation laws. — *Comp. Fl. Dyn. SIAM — AMS Proc.* 1978, vol. 11, p. 85—129.
142. Weare T. J. Errors arising from irregular boundaries in ADI solutions of the shallow-water equations. — *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, 1979, vol. 14, N 6, p. 921—931.
143. Weatherly G. L. A numerical study of time-dependent turbulent Ekman layers over horizontal and sloping bottom. — *J. Phys. Oceanogr.*, 1975, vol. 5, N 2, p. 288—299.
144. Yee H. C., Beam R. M., Warming R. F. Stable boundary approximations for a class of implicit schemes for the one-dimensional inviscid equations of gas dynamics. — *AIAA 5 Comp. Fl. Dyn. Conf.*, 1981, Palo Alto, Cal., p. 125—135.
145. Yeh G. E., Chou F. K. Moving boundary numerical surge model. — *J. Waterways Harb. Div. ASCE*, 1979, vol. 105, N 3, p. 247—263.

Предметный указатель

Граничные условия
диссипативные 19, 20
для схемы:

Кранка — Николсона 111, 113, 114
Мак-Кормака 111, 112
полунеявной 114
центрально-разностной 110, 180
Эйлера 114, 115
неявного типа 112, 115, 183

Длина нелинейности 22

Длинной волны

дисперсия 26, 29, 31, 37, 48, 77, 224
диссипация 24, 25, 83, 85, 190, 225, 226, 228, 238, 243
обрушение 23, 36, 39, 43, 45, 50, 52, 59, 222, 224, 227, 228
отражение 34, 36, 56, 77

Заплеск 38, 58, 62, 63, 64, 69, 72, 78

Инварианты Римана 18, 21, 29, 34, 40, 68, 70

Коэффициент

донного трения 24, 83, 190, 205, 225, 229, 230, 248
усиления
волн цунами 255
монохроматической волны 47, 80

Матрица

перехода 118
характеристическая 16, 20, 88

Матрицы

норма 14, 88
радиус спектра 14, 89

Метод построения сетки

алгебраический 160
Брэкбилла—Зальцмана 156, 169
Прокопова 163, 165
Томаса—Миддлхофа 150, 152, 153, 158
Томпсона 148, 153, 178, 198, 236

Накат монохроматической волны 42, 44, 58, 60, 62, 70, 79, 84, 225, 253

Отображение области

квазиконформное 166
конформное 165
Кристоффеля—Шварца 166
на вычислительный

параллелепипед 8, 138, 140
прямоугольник 8, 117, 138

Параметр

обрушения волны 39, 44, 52, 53, 59, 61, 63, 66, 71, 82, 224, 257
Урселла 31, 37

Преобразование

Гильберта 55
годографа 40, 227
Кэрриера—Гринспана 33, 40, 42, 46, 48, 58, 60, 70
подобия 16, 18, 88, 112, 135, 184
спрямляющее 138, 158, 173, 174
упрощенное трехмерное 141, 158, 196

Скорость

групповая 12
движения уреза воды 43
максимальная наката 71
фазовая 12, 23, 24

Схема разностная

Бима—Уорминга 98, 179
диссипативная 89, 92
Дугласа—Гана 95, 280, 282
компактных разностей 101
Кранка—Николсона 94, 98, 103, 106, 186
Крейса—Олигера 93, 103
Лакса 175
Лакса—Вендрофа 92, 103, 175
Мак-Кормака 92, 96, 103, 175
полунеявная 100, 172, 185
расщепления
двухциклическая 95
диагональной формы 178
Дьяконова 95, 178, 182
Писмена—Рэчфорда 95, 186
с направленными разностями
первого порядка 89, 97, 104, 184
второго порядка 99, 104, 184
неявная 184
Стрэнга 92, 174
центрально-разностная 90, 98, 102, 183
Эйлера 94, 103
явно-неявная 91, 174, 175, 177, 236
гибридная 198, 216, 248
Яненко—Сучкова—Погодина 218

Тестирование численных решений 4, 33, 106, 115, 187, 200, 219, 227, 236, 242, 251, 252

Уравнение

в форме
дивергентной 15, 16, 125, 134, 138
симметрической 17
характеристической 18, 110
Кортевега—де Фриза 30, 77
Лапласа 11, 147
Перегрина 29
переноса и диффузии примеси 142, 210
Пуассона 149
Эйлера 11

Предметный указатель

Уравнения

Бельтрами 167

для потоков

ковариантных 133, 135

контравариантных 135

Условие

гиперболичности 14

сильной гиперболичности 14, 15

устойчивости

Годунова—Рябенского 108

Крейса—Густафсона—Сандстрёма 108, 109, 112

Куранта—Фридрихса—Леви 90, 91, 93, 175

фон Неймана 89, 108

Условия Коши—Римана 165, 166

Формула

Грина 42

Блэкедара 194, 246

Кармана 194

Монтгомери 194, 195, 241, 242, 245, 246

Прандтля 193, 241, 251, 252

Халла—Уотса 67

Оглавление

Предисловие	3
Введение	5
Глава 1. Нелинейно-дисперсионные модели длинных волн	10
1.1. Нелинейная теория мелкой воды	10
1.1.1. Уравнения Эйлера. 1.1.2. Структура линейных поверхностных волн. 1.1.3. Уравнения мелкой воды.	
1.2. Краевые задачи для уравнений мелкой воды	13
1.2.1. Основные положения. 1.2.2. Обобщенные решения. Дивергентная форма уравнений. 1.2.3. Симметризация. Интеграл энергии. 1.2.4. Постановка краевых задач.	
1.3. Анализ простых решений	20
1.3.1. Римановы волны. 1.3.2. Обрушение волны. 1.3.3. Диссипация длинных волн.	
1.4. Второе приближение теории мелкой воды. Дисперсия длинных волн	25
1.4.1. Нелинейно-дисперсионные уравнения потенциального движения. 1.4.2. Анализ приближений.	
Глава 2. Накат длинных волн на берег	33
2.1. Взаимодействие длинных волн с вертикальной стенкой	34
2.1.1. Простая волна. 2.1.2. Бор. 2.1.3. Солитон.	
2.2. Набегание длинной волны на плоский откос	39
2.2.1. Постановка задачи. Критерий подобия. 2.2.2. Метод решения. 2.2.3. Высота наката монохроматической волны. 2.2.4. Условие обрушения волн. 2.2.5. Динамика подвижного уреза. 2.2.6. Экстремальные значения уровня воды и скорости потока. 2.2.7. Пределы применимости.	
2.3. Расчеты наката необрушивающихся волн произвольной формы на откос постоянного уклона	49
2.3.1. Метод решения. 2.3.2. Высота наката импульсов лоренцевой формы. 2.3.3. Динамика подвижного уреза. Условия обрушения. 2.3.4. Отраженная волна. 2.3.5. Примеры расчета волнового поля.	
2.4. Линейная теория наката длинных волн	58
2.4.1. Обоснование линейного подхода. 2.4.2. Накат на откос, сопряженный с ровным дном. 2.4.3. Накат на откос с уступом на кромке. 2.4.4. Откос с изломом на урезе. 2.4.5. «Параболический» откос. 2.4.6. Накат импульса. 2.4.7. Интерпретация натурных и лабораторных данных	
2.5. Неоднородные задачи набегания длинных волн на берег	68
2.5.1. Канал. 2.5.2. Захваченные волны. 2.5.3. Наклонное падение волны на стенку.	

2.6. Влияние дисперсии на накат волн на берег	77
2.6.1. Безразмерные параметры. 2.6.2. Переход волны с глубокой воды на мелкую. 2.6.3. Высота наката. 2.6.4. Волновое поле на откосе 45°. 2.6.5. Накат импульсных волн.	
2.7. Влияние диссипации на накат длинных волн	83
Глава 3. Разностные методы интегрирования уравнений мелкой воды в декартовых координатах	87
3.1. Некоторые употребительные аппроксимации гиперболических уравнений	87
3.1.1. Основные положения. 3.1.2. Явные схемы. 3.1.3. Неявные схемы. 3.1.4. Сравнение диссипативных и дисперсионных характеристик некоторых схем.	
3.2. Граничные аппроксимации	106
3.2.1. Спектральное условие Годунова — Рябенского. 3.2.2. Детерминантное условие устойчивости. 3.2.3. Двумерная задача на полуплоскости. 3.2.4. Заключение.	
Глава 4. Постановка задач криволинейных координатах	117
4.1. Криволинейные координаты	117
4.1.1. Основные соотношения. 4.1.2. Операции дифференцирования и интегрирования в криволинейных координатах. 4.1.3. Двумерный случай. 4.1.4. Нестационарные преобразования.	
4.2. Постановка задач в криволинейных координатах	132
4.2.1. Краевая задача для уравнений мелкой воды в произвольной области с движущейся границей. 4.2.2. Консервативная форма уравнений. Уравнения для контравариантных составляющих потока. 4.2.3. Связь операторов L и $\mathcal{L}$; диагонализация матриц. 4.2.4. Двумерное спрямляющее преобразование. 4.2.5. Трехмерный случай. 4.2.6. Упрощенное трехмерное преобразование. 4.2.7. Уравнение переноса и диффузии примеси.	
Глава 5. Методы построения криволинейных сеток	145
5.1. Неортогональные сетки	145
5.1.1. Построение сетки интегрированием эллиптических уравнений. 5.1.2. Управление сеткой. 5.1.3. Решение уравнений, генерирующих сетку. 5.1.4. Композиционные сетки. 5.1.5. Подвижные и адаптирующиеся сетки. 5.1.6. Трехмерные сетки. 5.1.7. Другие методы.	
5.2. Ортогональные сетки	161
5.2.1. Ортогональные отображения. 5.2.2. Конформные и квазиконформные отображения. 5.2.3. Вариационные методы.	
Глава 6. Численное интегрирование уравнений мелкой воды в произвольной области	172
6.1. Явные схемы	173
6.1.1. Модифицированный критерий устойчивости — модельный пример. 6.1.2. Схема Стрэнга. 6.1.3. Явно-неявная схема.	
6.2. Неявные схемы	178
6.2.1. Расщепление двумерного оператора. 6.2.2. Граничные условия. 6.2.3. Центральноразностная неявная схема. 6.2.4. Неявная схема с направленными разностями. 6.2.5. Полу неявная схема.	
Глава 7. Вертикальная структура длинноволновых процессов	190
7.1. Уравнения трехмерного движения на мелкой воде	191
7.1.1. Вывод уравнений. 7.1.2. Замыкание. 7.1.3. Масштаб турбулентности. 7.1.4. Уравнения в естественной криволинейной системе координат.	

7.2. Интегрирование уравнений в произвольной трехмерной области	197
7.2.1. Структура метода. 7.2.2. Расчет трехмерного поля течений.	
7.3. Перенос и диффузия примесей	210
7.3.1. Постановка задачи. 7.3.2. Коэффициенты турбулентной диффузии. 7.3.3. Преобразование к криволинейным координатам. 7.3.4. Численная реализация. 7.3.5. Тестирование схем. Пример расчета.	
Глава 8. Численное моделирование затопления прибрежной зоны	222
8.1. Исходные предпосылки	222
8.1.1. Обзор численных методов расчета наката. 8.1.2. Безразмерные параметры наката.	
8.2. Краевые задачи для уравнений мелкой воды с подвижной границей	226
8.2.1. Одномерная модель наката. 8.2.2. Численное интегрирование двумерных уравнений в произвольной области с подвижной границей.	
8.3. Вертикальная структура наката	238
8.3.1. Постановка задачи. 8.3.2. Метод решения. 8.3.3. Расчет наката на основе формулы Прандтля. 8.3.4. Использование транспортных моделей турбулентности. 8.3.5. Тестовые решения.	
8.4. Накат цунами на берег и цунамирайонирование	254
Заключение	257
Summary	258
Список литературы	259
Предметный указатель	266

Монография

**Наум Евсеевич Вольцингер,
Константин Алексеевич Клеванный,
Ефим Наумович Пелиновский**

**Длинноволновая
динамика
прибрежной зоны**

Редактор З. И. Мироненко. Художник Е. Е. Городная. Художественный редактор Б. А. Денисовский. Технический редактор Г. В. Ивкова. Корректор И. А. Динабург. ИБ № 1816. Сдано в набор 29.09.88. Подписано в печать 16.02.89. М-17533. Формат 60×90^{1/16}. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 17,0. Кр.-отт. 17,0. Уч.-изд. л. 17,61. Тираж 900 экз. Индекс ОЛ-88. Заказ № 1191. Цена 3 р. Гидрометеиздат. 199226. Ленинград, ул. Беринга, д. 38.

Ленинградская типография № 2 головное предприятие ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 198052, г. Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29.

Отпечатано с набора в Ленинградской типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 190000, Ленинград, Прачечный переулок, 6.