

Министерство высшего и среднего специального образования РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Г. Р. РЕХТЗАМЕР.

ОСНОВЫ КАРТОГРАФИИ

(учебное пособие)

278978

Ленинградский
Гидрометеорологический ин-т
БИБЛИОТЕКА

ЛЕНИНГРАД
1974

УДК 528.2+528.9

Одобрено Ученым советом

Ленинградского гидрометеорологического института

Изложены основы теории искажения, общая теория картографических проекций, вопросы картоведения и прикладной картометрии.

Учебное пособие предназначено для студентов-океанологов гидрометеорологических институтов и государственных университетов.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРОВ

При жизни Г. Р. Рехтзамера не удалось издать составленное им учебное пособие «Основы картографии». Настоящее издание подготовлено кафедрой методов океанологических исследований ЛГМИ, сотрудником которой Гай Родионович являлся многие годы, и посвящено его памяти.

В согласии с намерением автора редактирование учебного пособия было поручено профессору, доктору технических наук К. А. Звонареву. В подготовке рукописи к печати приняли также участие доцент кафедры МОИ А. В. Некрасов и сотрудник кафедры Н. С. Новикова.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Учебное пособие «Основы картографии» составлено на основании курса лекций, читаемых студентам-океанологам Ленинградского гидрометеорологического института.

Изданные до этого времени фундаментальные учебники и учебные пособия по картографии В. В. Каврайского, А. В. Граура, К. А. Звонарева, Н. А. Урмаева и А. П. Ющенко в основном предназначены для студентов-картографов, гидрографов и геодезистов, являются очень сложными и, как правило, имеют большой объем. Кроме того, ни один из перечисленных учебников не учитывает специфику океанологической специальности.

В настоящее время океанологам все больше и больше приходится иметь дело с различными морскими картами, атласами и другими картографическими пособиями, в которых дается географическое распределение гидрометеорологических элементов, а также производить самые разнообразные измерения и работы, связанные с картированием гидрологических процессов, происходящих в морях и океанах. Все эти обстоятельства заставили несколько изменить программу ранее читавшегося курса картографии и приблизить его к нуждам океанологии.

Особенностью настоящего учебного пособия является то, что в нем основное внимание уделяется тем картографическим проекциям и практическим вопросам, которые получили наибольшее распространение в океанологии. Составлена специальная глава VIII о географических картах, применяемых в морской гидрометеорологии. В последней главе книги, посвященной картометрическим работам, рассматриваются способы определения длин и площадей по картам в тех проекциях, с которыми работают океанологи, а также приводятся методы вычисления основных морфометрических характеристик водных объектов. В приложении дается классификация морских карт, рассказывается об их назначении и содержании. С целью облегчения самостоятельной работы студентов при изучении картографии наиболее важные разделы курса иллюстрируются примерами и задачами.

В заключение автор считает своим долгом выразить искреннюю благодарность проф. Ю. А. Гордееву, доц. С. И. Запасскому, бывшему нач. отдела картографии Государственного гидрологического института ГУГМС Е. П. Сенкову за ряд ценных замечаний и пожеланий, сделанных при подготовке рукописи к изданию.

ВВЕДЕНИЕ

Картография — наука об отображении и исследовании пространственного размещения, сочетания и взаимосвязей явлений природы и общества (и их изменений во времени) посредством образно-знаковых моделей (картографических изображений), воспроизводящих те или иные части и стороны действительности в обобщенной и наглядной форме*. Картографические изображения, с одной стороны, суммируют наши знания об изучаемой действительности, с другой стороны, они служат для ее дальнейшего углубленного изучения.

Нас интересуют явления, связанные с поверхностью Земли, а соответственно и картографические изображения ее поверхности. Картографические изображения земной поверхности могут быть трехмерными и плоскими.

Подобное изображение криволинейной земной поверхности, т. е. изображение земной поверхности в постоянном масштабе, можно получить только на трехмерной модели — глобусе. Глобусы делают только сферическими. Однако малое сжатие земного эллипсоида позволяет считать контуры изображений на шаровом глобусе практически подобными соответствующим контурам на земной поверхности. Глобусы делают малых размеров, а потому земная поверхность на них может изображаться только в мелких масштабах. Изготовление больших глобусов нецелесообразно, так как практическое их использование невозможно.

В практике используются плоские модели земной поверхности — географические карты. Для построения карты надо сферическую земную поверхность изобразить на плоскости. Известно, что поверхность эллипсоида вращения, и в частности, шара, не может быть развернута на плоскости — «распластана». Если представить себе поверхность глобуса твердой, например, целлулоидной, то при ее распластывании она расколется на мелкие части, совмещенные с плоскостью. Соответственно, небольшие участки земной поверхности можно принимать за плоские и изображать на топографических планах с соблюдением подобия, в постоянном масштабе. Однако соединить планы отдельных участков в сплошную карту

* Салищев К. А. Картография. М., изд. «Высшая школа», 1971, стр. 4—5.

объединяющей эти участки обширной территории невозможно, как нельзя соединить без разрывов осколки целлулоида.

Пример получения сплошного плоского изображения поверхности глобуса дан на рис. 1.

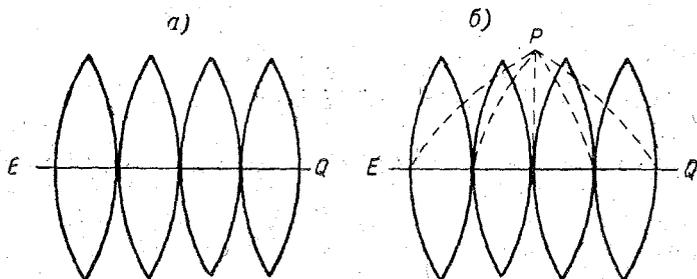


Рис. 1. Пример изображения поверхности глобуса на плоскости:
а—с разрывами; б—без разрывов.

Если разрезать глобус по меридианам так, что из-за незначительности протяжения по долготе каждой части их можно практически считать плоскими (рис. 1,а) и соединить по экватору, то по мере удаления от экватора EQ разрывы между этими частями увеличиваются все больше и больше. Для сохранения непрерывности и получения сплошного плоского изображения поверхности глобуса необходимо проделать дополнительные построения, например, такие, как на рис. 1б. Какие бы ни были сделаны построения (приведенный пример не является единственным), во всех случаях появятся искажения, т. е. масштабы длин не будут постоянными на всех участках и по всем направлениям.

Для изображения на плоскости поверхности земного эллипсоида или шара применяются картографические проекции.

Картографической проекцией называется всякий математически выражаемый способ изображения поверхности эллипсоида вращения (или шара) на плоскости так, что всякой точке M изображаемой поверхности соответствует взаимно однозначная точка M' на плоскости, называемая изображением точки M , а непрерывному перемещению точки M соответствует непрерывное, вообще говоря, перемещение точки M' .

Положение точки M определяется в натуре в какой-либо системе координат, например, географической. Системы линий, точки которых имеют одну из координат постоянной, называются координатными линиями. Например, меридианы и параллели являются координатными линиями географической системы координат.

Изображение системы координатных линий в проекции называется картографической сеткой. Основой для построения изображений земной поверхности является картографическая сетка, изображающая географические меридианы и параллели.

Сплошное уменьшенное изображение части или всей земной поверхности в определенной картографической проекции носит название географической карты. На карте в соответствии с ее целевым назначением показывается размещение и связи природных, экономических и общественно-политических явлений.

Для создания географических карт предложено много картографических проекций. Раздел картографии, занимающийся вопросами математической основы карт, называется математической картографией.

В математической картографии на основе применения математического анализа, астрономии и геодезии рассматриваются:

1) теория картографических проекций;

2) методы и приемы использования астрономических пунктов и геодезической сети для создания математической основы карты.

Математическое обоснование получения по картам длин, углов, площадей и ряда морфометрических характеристик (объемов, углов наклона и т. п.) составляет предмет особого раздела картографии — картометрии.

Раздел картографии, изучающий свойства, виды, элементы и способы применения географических карт, называется картоведением.

В остальных разделах картографии: составлении, оформлении, редактировании и издании карт на основе выбранной картографической проекции и масштаба — изучаются вопросы заполнения карты ее содержанием в соответствии с теми требованиями, которые предъявляются к данной географической карте.

В настоящем учебном пособии рассматриваются только два раздела этой науки: теория картографических проекций и картометрия, и только в том плане, который необходим для будущих инженеров-океанологов при выполнении ими натуральных и камеральных работ при гидрологических исследованиях в море.

Глава I

ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ГЕОДЕЗИИ И ТЕОРИИ ИСКАЖЕНИЙ

§ 1. Фигура Земли

Земля имеет форму геоида. Геоидом называется фигура, ограниченная средней уровенной поверхностью. Под уровенной поверхностью понимается такая поверхность, в любой точке которой нормаль совпадает с отвесной линией, проходящей через эту точку. Таких поверхностей можно выбрать очень много. Средней уровенной поверхностью является поверхность морей и океанов в спокойном состоянии, мысленно продолженная под сушей. Полученная таким образом замкнутая уровенная поверхность принимается за поверхность Земли, а ограничиваемое этой поверхностью тело носит название геоида. Поскольку направление отвесных линий совпадает с направлением силы тяжести, а сила тяжести, вследствие неравномерности распределения масс в теле Земли, имеет различные величины, то геоид имеет очень сложную и неправильную форму. Поэтому при решении геодезических и картографических задач Земля принимается за эллипсоид вращения (сфероид), поверхность которого близко подходит к поверхности геоида.

Эллипсоидом вращения называется тело, получающееся от вращения эллипса вокруг его малой оси. Эта ось, если речь идет о земном эллипсоиде, является осью вращения Земли PP_1 .

Земной эллипсоид характеризуется величиной его элементов: большой полуосью a , малой полуосью b и зависящими от них сжатием

$$\alpha = \frac{a-b}{a}; \quad (1,1)$$

1-м эксцентриситетом меридианного эллипса

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}; \quad (1,2)$$

2-м эксцентриситетом меридианного эллипса

$$e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}. \quad (1,3)$$

Размеры земного эллипсоида вычисляются на основании геодезических, астрономических и гравиметрических измерений. В разных государствах используются различные размеры элементов эллипсоида. Наиболее употребляемые приведены в табл. 1.

Таблица 1

Эллипсоид	Год	Большая полуось <i>a</i> , км	Малая полуось, <i>b</i> км	Сжатие, α
Бесселя	1841	6 377 397	6 356 079	1 : 299,2
Кларка	1866	6 378 206	6 356 584	1 : 295,0
Кларка	1880	6 378 249	6 356 515	1 : 293,5
Хейфорда	1924	6 378 388	6 356 912	1 : 297,0

В Советском Союзе, начиная с 1946 г., для всех геодезических и картографических работ постановлением правительства был введен референц-эллипсоид Красовского. До этого в СССР применялся эллипсоид Бесселя.

Референц-эллипсоид Красовского определяется следующими параметрами:

большая полуось $a = 6\,378\,245,000$ м,

сжатие $\alpha = 1 : 298,3$;

Производные от них:

малая полуось $b = 6\,356\,863,0188$ м,

квадрат 1-го эксцентриситета $e^2 = 0,00669342$,

радиус шара одинаковой поверхности с земным эллипсоидом $R' = 6\,371\,116,1$ м,

радиус шара одинакового объема с земным эллипсоидом

$R'' = 6\,371\,109,7$ м.

§ 2. Географические координаты. Нормальные сечения

Точки, полученные при пересечении малой оси с поверхностью эллипсоида, называются полюсами: Северным и Южным.

Окружность, которая является следом пересечения земного сфероида плоскостью, перпендикулярной к оси вращения и проходящей через его центр, называется земным экватором. Радиус экватора равен большой полуоси a .

Окружности сечения эллипсоида плоскостями, параллельными земному экватору, носят название географических параллелей.

Эллипсы, получающиеся при сечении эллипсоида плоскостями, проходящими через земную ось вращения, называются меридианами. Один из меридианов, а именно меридиан, проходящий через Гринвич, условно считается начальным. Двугранный угол между плоскостями начального меридиана и меридиана точки A называется географической долготой точки A и обозначается буквой λ или L .

Угол между нормалью, проведенной из точки A , расположенной на поверхности эллипсоида, и плоскостью экватора носит название географической широты точки A и обозначается буквой φ или B . Широта φ и долгота λ являются географическими координатами и определяют положение точки на референц-эллипсоиде.

В любой точке эллипсоида A через нормаль можно провести бесчисленное количество плоскостей, которые называются нормальными сечениями, или вертикалами. Радиусы кривизны различных нормальных сечений, проведенных в какой-либо точке, не равны между собой. Исследование кривизны нормальных сечений дает возможность определять кривизны эллипсоида в данной точке. Как известно, кривизна окружности обратно пропорциональна радиусу этой окружности; поэтому можно написать, что

$$\frac{1}{R} = \frac{\alpha}{S}, \quad (1.4)$$

где R — радиус; S — длина дуги окружности; α — центральный угол, стягиваемый дугой S .

Но формула (1.4) справедлива только для окружности; применять ее для определения радиуса кривизны кривых, образованных нормальными сечениями, можно только для бесконечно малых элементов кривой. В этом случае формуле (1.4) следует придать вид:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{dS}, \quad (1,5)$$

где ρ — радиус кривой в данной точке; dS — бесконечно малый элемент дуги кривой при данной точке; $d\alpha$ — бесконечно малый угол, стягиваемый дугой dS .

Для характеристики кривизны эллипсоида в данной точке вполне достаточно определить радиусы кривизны двух взаимно-перпендикулярных сечений, меридианного M и перпендикулярного к нему нормального сечения по первому вертикалу N , которые называются главными нормальными сечениями (рис. 2).

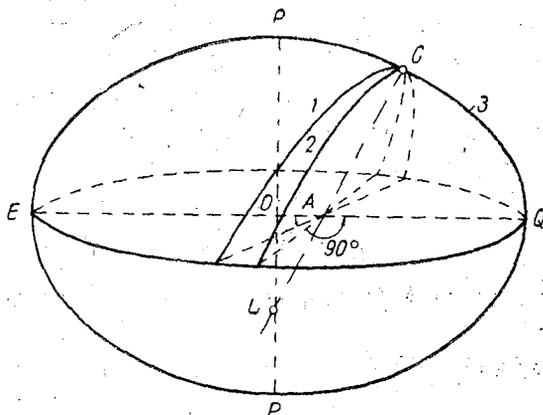


Рис. 2. Нормальные сечения земного эллипсоида:
1—главное нормальное сечение по первому вертикалу; 2—произвольное нормальное сечение; 3—главное нормальное сечение по меридиану.

Основное свойство главных нормальных сечений заключается в том, что радиусы кривизны у них являются наибольшим и наименьшим из всех возможных в данной точке.

Главные радиусы кривизны могут быть выражены через элементы сфероида и широту точки, для которой они определяются следующими формулами:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}}; \quad (1,6)$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}. \quad (1,7)$$

Радиус кривизны N представляет собою длину нормали от точки на поверхности эллипсоида до пересечения с осью вращения.

За величину среднего радиуса кривизны поверхности в этой точке принимается среднее геометрическое из радиусов кривизны главных нормальных сечений

$$R = \sqrt{MN} = \frac{a\sqrt{1-e^2}}{1-e^2\sin^2\varphi}, \quad (1.8)$$

где a — большая полуось эллипсоида; e — эксцентриситет; φ — широта точки, для которой вычисляются M , N и R .

Из формул (1.6), (1.7) и (1.8) видно, что радиусы кривизны зависят только от широты, так как остальные величины, входящие в эти формулы, являются постоянными.

Если разделить (1.7) на (1.6), то можно видеть, что радиус кривизны по первому вертикалу будет наибольшим, а по меридиану наименьшим

$$\frac{N}{M} = \frac{a(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}a(1-e^2)} = \frac{1-e^2\sin^2\varphi}{1-e^2} > 1.$$

Кроме того, подставив в уравнения (1.6) и (1.6) значения $\varphi=0^\circ$ и $\varphi=90^\circ$, имеем:

$$\text{для экватора } \varphi=0^\circ, N_0=a, M_0=a(1-e^2);$$

$$\text{для полюсов } \varphi=90^\circ, N_{90}=M_{90}=\frac{a}{\sqrt{1-e^2}}.$$

Полученные данные позволяют сделать вывод о том, что, во-первых, радиусы кривизны увеличиваются по мере удаления точки от экватора к полюсу, а, во-вторых, на полюсе они будут равны между собой, что вполне естественно, так как оба являются радиусами меридианных сечений.

Знание величин M , N и R необходимо при картографических и геодезических вычислениях. С помощью радиуса кривизны M вычисляются разности широт (РШ) и длины дуг меридианов; N — используется при расчетах разности долгот (РД), длин дуг параллелей и сближения меридианов γ . Средний радиус кривизны R употребляется в тех случаях, когда поверхность эллипсоида заменяется в картографических работах поверхностью шара.

Значения M , N и R выбираются из Картографических таблиц по аргументу φ .

§ 3. Вычисление длины дуг меридианов и параллелей

Предположим, что необходимо вычислить длину дуги меридиана между точками A и B (рис. 3).

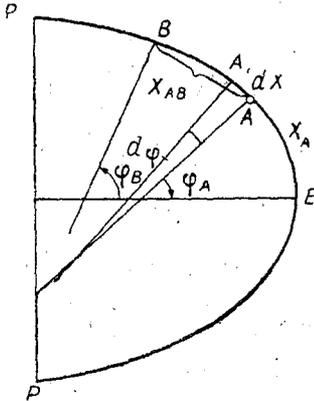


Рис. 3. Определение длины дуги меридиана.

Сначала определим, чему равняется бесконечно малый отрезок дуги меридиана $AA_1 = dX$, который можно принять за дугу окружности с радиусом кривизны, равным M . Тогда получим

$$dX = M d\varphi. \quad (1.9)$$

Отсюда дугу меридиана $AB = X_{AB}$ можно вычислить, проинтегрировав выражение (1.9) в пределах от φ_A до φ_B ,

$$X_{AB} = \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} M d\varphi.$$

Длина дуги меридиана от экватора до данной параллели φ будет равна

$$X = \int_0^{\varphi} M d\varphi. \quad (1.10)$$

Для вычисления дуги L меридиана между двумя любыми параллелями φ_2 и φ_1 следует определить длины дуг меридиана от экватора до параллелей φ_2 и φ_1 по формуле (1.10), а затем взять их разность

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = X_2 - X_1, \quad (1.11)$$

где L — длина дуги меридиана в натуре.

Длина дуги параллели P для разности долгот $\lambda_2 - \lambda_1$, как длина дуги окружности, вычисляется по формуле

$$P = rl,$$

где $l = \lambda_2 - \lambda_1$, а r — радиус данной параллели. На шаре

$$r = R \cos \varphi. \quad (1.12)$$

На земном эллипсоиде радиус параллели r можно определить из треугольника AOD (рис. 4), откуда

$$r = N \cos \varphi, \quad (1.12')$$

где $N=AD$ — радиус кривизны по первому вертикалу; φ — широта точки А. Следовательно,

$$P=N \cos \varphi \cdot l$$

или

$$P=N \cos \varphi (\lambda_2 - \lambda_1), \quad (1.13)$$

где l и $(\lambda_2 - \lambda_1)$ должны быть выражены в радианной мере.

Для практического применения формуле (1.13) придают вид

$$P=N \cos \varphi \cdot \text{arc } l' \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)'. \quad (1.13')$$

Длины дуг меридианов и параллелей на эллипсоиде Красовского даются в Картографических таблицах.

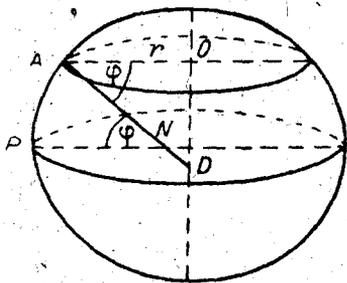


Рис. 4. Определение длины дуги параллели на земном эллипсоиде

§ 4. Масштабы и увеличения

При составлении планов небольших участков местности все объекты природы переносятся на бумагу с полным сохранением подобия, но в уменьшенном виде. В этом случае под масштабом понимают отношение длины линии на плане к соответствующему горизонтальному проложению длины этой же линии на местности.

При изображении значительных территорий такое определение масштаба будет неверным.

Масштаб, в котором рассчитывается проекция карты, называется главным или общим масштабом карты. Именно главный масштаб μ_0 , показывающий общее уменьшение всех элементов, и приводится на картах:

$$\mu_0 = \frac{ds_0}{dS} \quad \text{или} \quad ds_0 = \mu_0 dS. \quad (1.14)$$

В этой формуле dS — бесконечно малый отрезок в натуре, а ds_0 — его изображение в проекции в главном масштабе μ_0 .

На самом же деле, как об этом уже писалось ранее, развернуть на плоскости поверхность эллипсоида невозможно, а это означает, что в действительности масштаб карты является величиной переменной и непрерывно изменяется при переходе от точки к точке, т. е. зависит от положения точки и направления с нее.

Масштаб карты в данной точке по заданному направлению называется частным масштабом и обозначается буквой μ .

Частный масштаб представляет собой отношение бесконечно малого отрезка на карте ds к соответствующему бесконечно мало-

му горизонтальному отрезку dS на земной поверхности и выражается формулой:

$$\mu = \frac{ds}{dS}. \quad (1,15)$$

Таким образом, на карте различают два вида масштабов: главный и частные. Главный масштаб сохраняется только в некоторых точках и направлениях, во всех остальных частях карты масштабы больше или меньше главного.

Одной из важнейших задач математической картографии является отыскание таких проекций, во всех точках которых было бы наименьшее уклонение частных масштабов от главного.

Отношение частного масштаба μ к главному μ_0 называется увеличением масштаба или увеличением длин в данной точке по данному направлению и обозначается буквой c :

$$c = \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{ds}{dS} : \frac{ds_0}{dS} = \frac{ds}{ds_0} = \frac{ds}{\mu_0 dS}, \quad (1,16)$$

где $\mu_0 dS$ — длина отрезка dS , выраженная в главном масштабе.

Из приведенных формул видно, что c представляет собой коэффициент, на который следует умножить μ_0 , чтобы получить частный масштаб. Уклонение v увеличения масштаба c от единицы носит название искажения длин:

$$v = c - 1. \quad (1,17)$$

§ 5. Эллипс искажений

Возьмем на поверхности изображаемого эллипсоида бесконечно малый круг, описанный около точки O . Во всякой проекции, в общем случае, этот круг изобразится некоторым эллипсом. Докажем, что это действительно так.

Обозначим радиус изображаемой окружности через r , а координаты любой точки M этой окружности, отнесенные к любым двум взаимноперпендикулярным направлениям, например, меридиану и параллели, через x , y (рис. 5,а). В проекции (рис. 5,б) меридиан и параллель изобразятся, вообще говоря, не взаимно перпендикулярными прямыми, и прямоугольным координатам x , y в проекции будут соответствовать косоугольные координаты x' , y' точки M' .

Если увеличения по меридиану и по параллели обозначим соответственно m и n , то

$$\left. \begin{aligned} x' &= mx, \\ y' &= ny. \end{aligned} \right\} \quad (1,18)$$

Если в уравнение изображаемой окружности

$$x^2 + y^2 = r^2$$

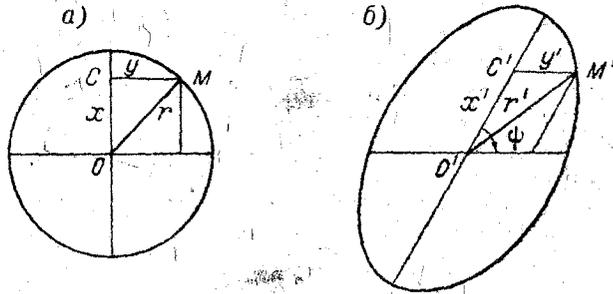


Рис. 5. Бесконечно малый круг на земном эллипсоиде (а), изображение этого круга в проекции (б).

подставить вместо координат x , y их выражения из (1.18): $x = \frac{x'}{m}$, $y = \frac{y'}{n}$, то получим уравнение кривой, изображающей в проекции окружность бесконечно малого радиуса

$$\left(\frac{x'}{m}\right)^2 + \left(\frac{y'}{n}\right)^2 = r^2$$

или

$$\left(\frac{x'}{m \cdot r}\right)^2 + \left(\frac{y'}{n \cdot r}\right)^2 = 1. \quad (1.19)$$

Уравнение (1.19) есть уравнение эллипса, вообще говоря, в координатах, оси которых направлены по двум взаимно сопряженным диаметрам эллипса. Значит, бесконечно малый круг на изображаемой поверхности во всякой проекции изображается бесконечно малым эллипсом, а любые два взаимно перпендикулярные направления в круге изображаются парой взаимно сопряженных диаметров эллипса; наоборот, всякой паре взаимно сопряженных диаметров в эллипсе соответствует пара взаимно перпендикулярных направлений в круге. Следовательно, оси эллипса (пара взаимно перпендикулярных сопряженных диаметров) являются изображением также взаимно перпендикулярных направлений в круге.

Отношение

$$\frac{r'}{r} = c \quad \text{или} \quad r' = cr \quad (1.20)$$

показывает, что радиусы-векторы r' эллипса, изображающего в проекции круг, пропорциональны увеличениям c по соответствующим направлениям, а при $r=1$ численно равны увеличениям по соответствующим направлениям.

Полуоси эллипса, в проекции изображающего круг, являются наибольшим и наименьшим радиусами-векторами эллипса; следовательно, они выражают наибольшее увеличение a и наименьшее увеличение b . Осям эллипса, как взаимно сопряженным диаметрам, соответствуют взаимно перпендикулярные направления в натуре. В эллипсе, если он не обращается в круг, существует только одна пара взаимно перпендикулярных сопряженных диаметров. Поэтому, если в проекции изображения меридиана и параллели взаимно перпендикулярны, то увеличения по ним являются наибольшим и наименьшим, т. е. из увеличений m и n наибольшее есть увеличение a , наименьшее — увеличение b .

Направления наибольшего и наименьшего увеличений, т. е. осей эллипса, изображающего круг, называются главными и направлениями в данной точке.

Эллипс конечных размеров, подобный и одинаково ориентированный с эллипсом, изображающим при данной точке проекции бесконечно малый круг, носит название эллипса искажений.

§ 6. Увеличение длин в данной точке по данному направлению

Если известны масштабы по главным направлениям (а их, как увидим ниже, легко определить), то всегда можно вычислить частные масштабы (или увеличения) по любому заданному направлению.

В бесконечно малом круге, построенном радиусом r , выраженном в главном масштабе (рис. 6,а), и изображающем его эллипсе (рис. 6,б) направления координатных осей x , y , и x' , y' примем по главным направлениям, взаимно перпендикулярным в натуре и в проекции. Точки M и M' — соответствующие точки. Ставим задачей определение увеличения по направлению $O'M'$. Согласно определению, увеличение масштаба по данному направлению $c = \frac{r'}{r}$.

Из треугольника COM следует, что

$$x = r \cdot \cos u;$$

$$y = r \cdot \sin u,$$

где u — угол, отсчитываемый от главного направления по ходу часовой стрелки до произвольного направления OM . Умножив x и y на увеличения по главным направлениям, получим $x' = ax$, $y' = by$.

Тогда уравнения примут вид:

$$x' = ar \cos u;$$

$$y' = br \sin u.$$

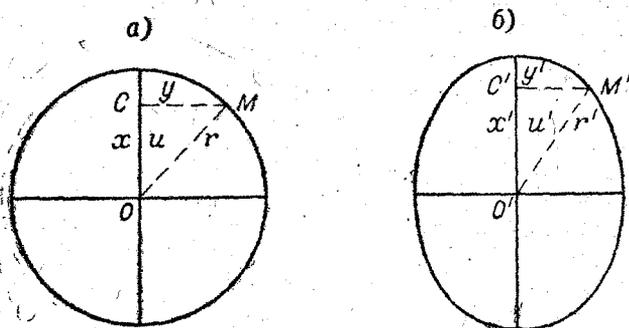


Рис. 6. Бесконечно малый квадрат на земном эллипсоиде (а), изображение этого квадрата на плоскости (б).

В треугольнике $C'O'M'$ гипотенуза $r' = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. Заменим x' и y' их значениями. Тогда имеем:

$$r' = \sqrt{a^2 r^2 \cos^2 u + b^2 r^2 \sin^2 u}.$$

Вынесем r за знак радикала

$$r' = r \sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}.$$

Разделим правую и левую часть этого уравнения на r . Тогда

$$\frac{r'}{r} = \sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}.$$

Но $\frac{r'}{r} = c$. Отсюда окончательно получим

$$c = \sqrt{a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u}. \quad (1,21)$$

Уравнение (1,21) дает возможность найти увеличение в данной точке по направлению, заданному дирекционным углом u .

§ 7. Искажения направлений и углов

Для определения искажения направления и углов воспользуемся снова рис. 6, а и б.

Из треугольника $C'O'M'$ следует, что $\operatorname{tg} u' = \frac{y'}{x'}$, где u' — угол на

проекция, отсчитываемый по ходу часовой стрелки от главного направления до заданного направления $O'M'$.

Подставим вместо x' и y' их значения, тогда

$$\operatorname{tg} u' = \frac{br \sin u}{ar \cos u}.$$

После сокращения

$$\operatorname{tg} u' = \frac{b}{a} \operatorname{tg} u. \quad (1,22)$$

Вычтем из $\operatorname{tg} u$ правую и левую части уравнения (1,22)

$$\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} u' = \operatorname{tg} u - \frac{b}{a} \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} u \left(1 - \frac{b}{a}\right). \quad (1,22')$$

Прибавим $\operatorname{tg} u$ к правой и левой частям уравнения (1,22)

$$\operatorname{tg} u + \operatorname{tg} u' = \operatorname{tg} u + \frac{b}{a} \operatorname{tg} u = \operatorname{tg} u \left(1 + \frac{b}{a}\right). \quad (1,22'')$$

Из тригонометрии известно, что сумма и разность тангенсов равна

$$\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}.$$

Следовательно, уравнения (1,22')—(1,22'') можно переписать в следующем виде:

$$\frac{\sin(u-u')}{\cos u \cdot \cos u'} = \operatorname{tg} u \left(1 - \frac{b}{a}\right)$$

$$\frac{\sin(u+u')}{\cos u \cdot \cos u'} = \operatorname{tg} u \left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\frac{\sin(u-u')}{\sin(u+u')} = \frac{a-b}{a+b}, \quad (1,23)$$

откуда

$$\sin(u-u') = \frac{a-b}{a+b} \cdot \sin(u+u'). \quad (1,24)$$

Разность $u-u'$ носит название искажения направления в данной точке проекции. Формула (1,24) показывает, что искажение

направления зависит от суммы $u+u'$ и наибольшее абсолютное искажение будет в том случае, если $u+u'=90^\circ$, т. е. $\sin(u+u')=1$.

Обозначим эти величины буквами U и U' , а разность $U-U'=\frac{\omega}{2}$, где $\frac{\omega}{2}$ — наибольшее искажение направления. Тогда

$$\frac{\omega}{2} = \arcsin \frac{a-b}{a+b}. \quad (1,25)$$

Наибольшее искажение направления можно получить и в другом виде. Для этого перепишем формулу (1,25) так:

$$\begin{aligned} \cos \frac{\omega}{2} &= \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\omega}{2}} = \sqrt{1 - \left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2} = \\ &= \frac{2\sqrt{ab}}{a+b}. \end{aligned} \quad (1,26)$$

Разделив (1,25) на (1,26), получим

$$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right). \quad (1,27)$$

Так как $U' = 90^\circ - U$, а $U = 90^\circ - U'$, на основании уравнения (1,22) можно написать

$$\operatorname{ctg} U = \frac{b}{a} \operatorname{tg} U$$

и

$$\operatorname{tg} U' = \frac{b}{a} \operatorname{ctg} U'.$$

Следовательно, наиболее искажаемое направление на эллипсоиде и на карте выразится следующими формулами:

$$\operatorname{tg} U = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad (1,28)$$

$$\operatorname{tg} U' = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}. \quad (1,29)$$

Вследствие того, что $U+U'=90^\circ$ и $U-U'=\frac{\omega}{2}$, взяв полусумму этих равенств, получим $U=45^\circ + \frac{\omega}{4}$, а на основании предыдущих формул будем иметь

$$\operatorname{tg} U = \operatorname{ctg} U' = \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{4} \right) = \pm \sqrt{\frac{a}{b}}. \quad (1,30)$$

Поскольку любой угол представляет собой разность двух направлений, то, если составить угол из двух наиболее искажаемых направлений, наибольшее искажение этого угла ω будет равно $2(U - U')$.

Таким образом, максимальная величина искажения угла в данной точке проекции равна двойному наибольшему искажению направления.

§ 8. Масштабы и увеличения площадей

Возьмем бесконечно малый прямоугольник (рис. 5,а) со сторонами x и y , направленными по взаимно перпендикулярным направлениям меридиана и параллели на эллипсоиде вращения, уменьшенном в главном масштабе μ_0 . Следовательно, этот прямоугольник в главном масштабе μ_0 имеет площадь $df_0 = xy$, а в натуре — площадь $dF = \frac{df_0}{\mu_0^2} = \frac{xy}{\mu_0^2}$.

В любой проекции прямоугольник изображается бесконечно малым параллелограммом (рис. 5,б) со сторонами $x' = mx$, $y' = ny$, где m и n — увеличения по изображениям меридиана и параллели, и углом ψ между изображениями меридиана и параллели. Площадь этого параллелограмма $df = x'y' \sin \psi = mx \cdot ny \cdot \sin \psi$. Следовательно, масштаб площадей в данной точке равен

$$P = \frac{df}{dF} = \frac{mx \cdot ny \cdot \sin \psi \cdot \mu_0^2}{xy} = mn \sin \psi \cdot \mu_0^2, \quad (1,31)$$

а увеличение площадей в этой точке

$$p = \frac{df}{df_0} = \frac{x'y' \sin \psi}{xy} = \frac{mx \cdot ny \cdot \sin \psi}{xy} = mn \sin \psi. \quad (1,32)$$

В частности, если $\psi = 90^\circ$, т. е. меридиан и параллель являются главными направлениями в данной точке, а увеличения по ним m и n наибольшее и наименьшее, формула (1.32) переписется в виде

$$p = ab. \quad (1,32')$$

Уклонение $v = p - 1$ называется искажением площадей в данной точке проекции.

§ 9. Элементы эллипса искажений

Свойства проекции в каждой ее точке характеризуются эллипсом искажений. Эллипс искажений определяется его элементами.

Элементами эллипса искажений, определяющими его размер и ориентирование, являются его большая и малая полуоси и угол между положительными направлениями меридиана и большой полуоси. Эллипсы искажений, построенные на карте, позволяют судить о величинах искажений в отдельных точках и их распределении на различных участках карты.

При выводе формулы для определения размеров эллипса искажений воспользуемся теоремами Аполлония из аналитической геометрии.

Теорема 1-я: сумма квадратов двух сопряженных полудиаметров эллипса есть величина постоянная и равная сумме квадратов его полуосей (рис. 7, а и б)

$$k^2 + l^2 = q^2 + p^2. \quad (1,33)$$

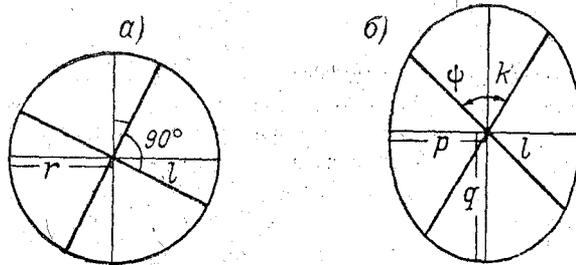


Рис. 7. К определению размеров эллипса искажений:
а—взаимно перпендикулярные диаметры окружности; б—сопряженные диаметры эллипса.

Теорема 2-я: площадь треугольника, построенного на двух сопряженных полудиаметрах эллипса, есть величина постоянная и равная площади треугольника, построенного на его полуосях

$$\frac{1}{2} kl \sin \psi = \frac{1}{2} qp. \quad (1,34)$$

Обозначим через m и n масштабы по двум сопряженным направлениям: меридиану и параллели. На рис. 7,б отрезки k , l , q и p представляют собой изображение на проекции двух взаимно перпендикулярных радиусов бесконечно малого круга на земном эллипсоиде. Поэтому можно написать, что k , l , q и p равны радиусам, умноженным на масштабы по соответствующим направлени-

ям, т. е. $k=r \cdot m$, $l=r \cdot n$, $q=r \cdot a$, $p=r \cdot b$. Подставив эти значения в формулы (1.33) и (1.34), получим

$$(rm)^2 + (rn)^2 = (ra)^2 + (rb)^2;$$

$$\frac{1}{2} r^2 mn \sin \psi = \frac{1}{2} r^2 ab.$$

Сократив первое выражение на r^2 , а второе на $\frac{1}{2} r^2$, будем иметь

$$m^2 + n^2 = a^2 + b^2; \quad (1.35)$$

$$mn \sin \psi = ab. \quad (1.36)$$

Уравнения (1.35) и (1.36) дают возможность вычислить размеры эллипса искажений, т. е. величины его полуосей a и b , если известны: m — увеличение масштаба по меридиану; n — увеличение масштаба по параллели; ψ — угол между меридианом и параллелью на проекции. Для этого умножим обе части уравнения (1.36) на два, а затем сложим и вычтем полученную величину из уравнения (1.35)

$$m^2 \pm 2mn \sin \psi + n^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Отсюда

$$a \pm b = \sqrt{m^2 + n^2 \pm 2mn \sin \psi}. \quad (1.37)$$

Таким образом, вычислив $(a+b)$ и $(a-b)$, можно очень легко получить каждую из этих величин в отдельности.

Ориентирование главных направлений эллипса искажений возможно тогда, когда будет определено значение азимута на карте β' , который соответствует азимуту главного направления в натуре β (рис. 8, а и б). Азимут β' представляет собой угол между меридианом данной точки и большой полуосью эллипса искажений.

Напишем выражение увеличения по меридиану m по формуле (1.21), заменив в ней c буквой m , а угол u углом β . Тогда формула (1.21) примет вид

$$m^2 = a^2 \cos^2 \beta + b^2 \sin^2 \beta. \quad (1.38)$$

Вследствие того, что меридиан перпендикулярен параллели, уравнение (1.38) можно использовать для определения увеличения по параллели

$$n^2 = a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta. \quad (1.39)$$

Заменив в выражении (1.38) $\sin^2 \beta = 1 - \cos^2 \beta$, а в выражении (1.39) $\cos^2 \beta = 1 - \sin^2 \beta$, получим для увеличения по меридиану:

$$m^2 = a^2(1 - \sin^2 \beta) + b^2 \sin^2 \beta = a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \beta;$$

$$m^2 = a^2 \cos^2 \beta + b^2(1 - \cos^2 \beta) = b^2 + (a^2 - b^2) \cos^2 \beta$$

для увеличения по параллели:

$$n^2 = a^2(1 - \cos^2 \beta) + b^2 \cos^2 \beta = a^2 - (a^2 - b^2) \cos^2 \beta;$$

$$n^2 = a^2 \sin^2 \beta + b^2(1 - \sin^2 \beta) = b^2 + (a^2 - b^2) \sin^2 \beta.$$

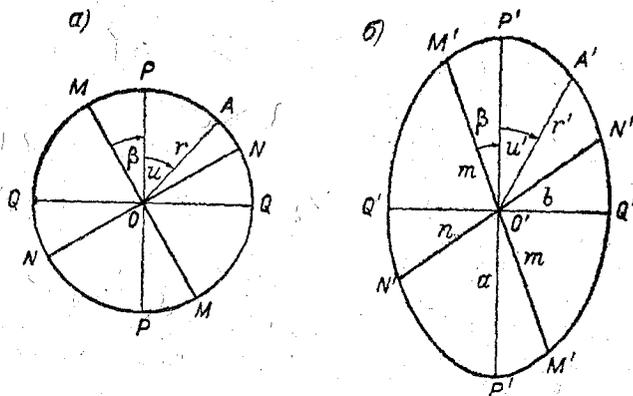


Рис. 8. Эллипс искажений и его элементы:
a—бесконечно малый круг на земном эллипсоиде;
b—соответствующий этому кругу эллипс искажений.

Путем несложных преобразований из этих выражений можно определить $\sin \beta$, $\cos \beta$ и $\operatorname{tg} \beta$:

$$\left. \begin{aligned} \sin \beta &= \sqrt{\frac{a^2 - m^2}{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{n^2 - b^2}{a^2 - b^2}}, \\ \cos \beta &= \sqrt{\frac{m^2 - b^2}{a^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - n^2}{a^2 - b^2}}, \\ \operatorname{tg} \beta &= \sqrt{\frac{a^2 - m^2}{m^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{n^2 - b^2}{a^2 - n^2}}. \end{aligned} \right\} (1,40)$$

Для определения азимута β' на проекции (рис. 8,б) воспользуемся ранее выведенным уравнением (1,22), заменив в нем u и u' соответственно на β и β' :

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \beta, \quad (1,41)$$

Подставив в (1,41) значение $\operatorname{tg} \beta$ из уравнения (1,40), получим

$$\operatorname{tg} \beta' = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2 - m^2}{m^2 - b^2}} = \pm \frac{b}{a} \sqrt{\frac{n^2 - b^2}{a^2 - n^2}} \quad (1,42)$$

Выведенные формулы дают возможность вычислить элементы и построить эллипс искажений на карте.

Задача. На листе карты полушарий в главном масштабе 1:80 000 000 с сеткой меридианов и параллелей через 10° в точке M ($\varphi = 60^\circ \text{N}$ и $\lambda = 170^\circ \text{O}^{\text{st}}$) определить увеличение масштабов m и n , острый угол между меридианом и параллелью ψ и элементы эллипса искажения (рис. 9). Построить эллипс искажений в данной точке.

Для решения задачи требуется:

1. Измерить на карте: а) длины дуг меридианов и б) длины дуг параллелей (рис. 9,а) — $AB = l$ мм и $CD = p$ мм; в) угол ψ между касательными к меридиану и параллели в точке M .

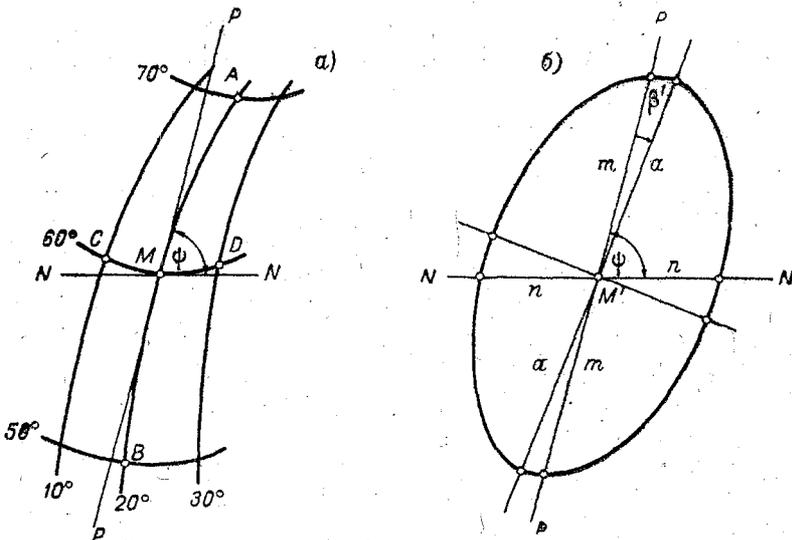


Рис. 9. Определение элементов (а) и построение (б) эллипса искажений.

2. Вычислить по формулам длину дуги меридиана L и длину дуги параллели P в натуре:

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = X_2 - X_1;$$

$$P = N \cos \varphi \Delta\lambda = N \cos \varphi \operatorname{arс} I' \Delta\lambda',$$

где X — расстояние по меридиану от экватора до данной параллели; φ_1 и φ_2 — крайние параллели дуги AB ;

$N \cos \varphi = r$ — радиус параллели на широте φ ;

$N \cos \varphi \cdot \operatorname{arс} I'$ — длина одной минуты дуги параллели на широте φ (эти величины выбираются из Картографических таблиц).

3. Определить частные масштабы:

а) по меридиану $\mu_m = \frac{l}{L}$;

б) по параллели $\mu_n = \frac{p}{P}$.

4. Вычислить увеличение масштабов по меридиану (m) и параллели (n), для чего необходимо знать главный масштаб карты μ_0 :

а) $m = \frac{\mu_m}{\mu_0}$;

б) $n = \frac{\mu_n}{\mu_0}$.

5. Для определения элементов эллипса искажений и других характеристик искажений в данной точке следует вычислить:

а) размеры эллипса искажений, т. е. величины его полуосей

$$a + b = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \sin \psi};$$

$$a - b = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \sin \psi};$$

где ψ — угол между меридианом и параллелью в точке M ;

б) ориентирный угол в натуре:

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{a^2 - m^2}{m^2 - b^2}} = \sqrt{\frac{n^2 - b^2}{a^2 - n^2}};$$

в) ориентирный угол в проекции

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \beta;$$

г) наиболее искажаемое направление.

$$\operatorname{tg} U = \sqrt{\frac{a}{b}}; \quad \operatorname{tg} U' = \sqrt{\frac{b}{a}};$$

где U — направление на земном эллипсоиде; U' — направление на проекции;

д) наибольшее искажение направления

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b}; \quad \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}};$$

е) наибольшее искажение угла ω ;

ж) увеличение масштаба площадей

$$p = m \sin \psi = ab.$$

6. Построение эллипса искажений делается следующим образом (рис. 9,б):

а) от направления касательной к меридиану откладывают ориентирный угол β' в сторону острого угла между меридианом и параллелью карты — получают направление большой оси эллипса искажений;

б) задавшись какой-либо линейной величиной для выражения одной единицы увеличения (1, 2, 3 и т. д. см, в зависимости от размеров увеличений и желательных размеров эллипса искажений), складывают от точки M в обе стороны по направлению большой оси эллипса искажений величину a ; по направлению, к нему перпендикулярному, — величину b , по направлениям касательных к меридиану и параллели — величины m и n соответственно;

в) соединив полученные восемь точек плавной кривой, получают эллипс искажений (рис. 9,б).

Пример.

1. Применительно к рис. 9,а имеем результаты измерений до 0,01 см:

а) длина дуги меридиана $AB = l = 3,87$ см;

б) длина дуги параллели $CD = p = 1,12$ см;

в) измеренный транспортиром угол между касательными к меридиану и параллели $\psi = 76^\circ,5$ (расположен к востоку от меридиана).

2. По формулам вычислены:

а) длина дуги меридиана в натуре между параллелями $\varphi_N = 70^\circ N$ и $\varphi_S = 50^\circ N$

$$L = X_{70} - X_{50} = 7769,1 - 5540,9 = 2228,2 \text{ км};$$

$$\text{Контроль: } L \approx 6371 \cdot \frac{20^\circ}{57^\circ,296} = 2223,9 \text{ км};$$

б) длина дуги параллели на широте $\varphi = 60^\circ$ для разности долгот $\Delta\lambda = 20^\circ$

$$P = N \cos \varphi \operatorname{arc} 1' \cdot 1200' = 1116,0 \text{ км};$$

$$\text{контроль: } P \approx N \cos \varphi \frac{20^\circ}{57^\circ,296} \approx 3197,2 \cdot \frac{20^\circ}{57^\circ,296} = 1116,0 \text{ км}.$$

3. Частные масштабы:

а) по меридиану $\mu_m = \frac{l}{L} = \frac{1}{2228,2 \cdot 10^5} \approx 3,87 = \frac{1}{57\,580\,000}$;

б) по параллели $\mu_n = \frac{p}{P} = \frac{1}{1116,0 \cdot 10^5} \approx 1,12 = \frac{1}{99\,640\,000}$;

4. Увеличения масштабов:

а) по меридиану $m = \frac{\mu_m}{\mu_0} = \frac{80\,000\,000}{57\,580\,000} = 1,3894$;

б) по параллели $n = \frac{\mu_n}{\mu_0} = \frac{80\,000\,000}{99\,640\,000} = 0,8029$.

5. Размеры, ориентировка эллипса искажений и величины, характеризующие проекцию в данной точке карты, приведены в табл. 2.

Таблица 2

m	1,3894	m^2	1,9304	a^2	1,9808
n	0,8029	n^2	0,6446	b^2	0,5941
$\sin \psi$	0,9724	$a^2 - m^2$	0,0504	$n^2 - b^2$	0,0505
$p = mn \sin \psi$	1,0848	$m^2 - b^2$	1,3363	$a^2 - n^2$	1,3364
$2mn \cdot \sin \psi$	2,1696	$\operatorname{tg}^2 \beta$	0,0377	$\operatorname{tg}^2 \beta$	0,0378
$(a+b)^2$	4,7446	$\operatorname{tg} \beta$	0,1942	$b : a$	0,5477
$(a-b)^2$	0,4054	β	11°00'	$\operatorname{tg} \beta'$	0,1064
$a+b$	2,1782	β'	6°04'	$a : b$	1,8259
$a-b$	0,6367	$\sin \frac{\omega}{2}$	0,2923	$\operatorname{tg} U$	1,3513
a	1,4074	$\operatorname{tg} \frac{\omega}{2}$	0,3056	$\operatorname{tg} U'$	0,7004
b	0,7708	$\frac{\omega}{2}$	17°00'	U	53°30'
$p=ab$	1,0848	ω	34°00'	U'	36°30'

Совпадение величин p и $\operatorname{tg}^2 \beta$, вычисленных различными методами, дает возможность предположить, что все вычисления сделаны правильно.

6. По полученным данным строим на карте эллипс искажений (рис. 9,б).

§ 10. Основные формулы из геодезии и теории искажений

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ — уравнение меридианного эллипса;}$$

$$\alpha = \frac{a-b}{a} \text{ — сжатие меридианного эллипса;}$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \text{ — первый эксцентриситет меридианного эллипса;}$$

$$e' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}} \text{ — второй эксцентриситет меридианного эллипса;}$$

$$M = \frac{a(1-e)^2}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \text{ — радиус кривизны меридиана;}$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}} \text{ — радиус кривизны 1-го вертикала (нормаль);}$$

$$R = \sqrt{MN} = \frac{a \cdot \sqrt{1-e^2}}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \text{ — радиус средней кривизны;}$$

$$X = \int_0^\varphi M d\varphi \text{ — длина дуги меридиана от экватора до широты } \varphi;$$

$$L = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M d\varphi = X_2 - X_1 \text{ — длина дуги меридиана от широты } \varphi_1 \text{ до широты } \varphi_2;$$

$$r = N \cos \varphi \text{ — радиус параллели;}$$

$$P = N \cos \varphi \operatorname{arc} l'(\lambda_2 - \lambda_1) \text{ — длина дуги параллели;}$$

$$c^2 = a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u \text{ — увеличение масштаба по любому направлению } u;$$

$$a \pm b = \sqrt{m^2 + n^2 \pm 2mn \cdot \sin \psi} \text{ — для вычисления наибольшего и наименьшего увеличения масштабов (полуосей эллипса искажений);}$$

$$\text{где } a = \frac{(a+b) + (a-b)}{2} \text{ и } b = \frac{(a+b) - (a-b)}{2};$$

$$\operatorname{tg} \beta = \sqrt{\frac{n^2 - b^2}{a^2 - n^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - m^2}{m^2 - b^2}} \text{ — для вычисления ориентирного угла в натуре;}$$

$$\operatorname{tg} \beta' = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \beta \text{ — для вычисления ориентирного угла на проекции;}$$

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} \text{ или } \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} =$$

$$= \frac{a-b}{2\sqrt{ab}} = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{b}{a}} \right) \text{ — для вычисления наибольшего искажения направления;}$$

где $\omega = 2 \cdot \frac{\omega}{2}$ — наибольшее
искажение угла;

$$\operatorname{tg} U = \pm \sqrt{\frac{a}{b}};$$

$\operatorname{tg} U' = \pm \sqrt{\frac{b}{a}}$ — для определения наиболее иска-
жаемых направлений;

$p = ab = mn \cdot \sin \psi$ — увеличение масштаба площадей.

Постоянные величины

$$\operatorname{Mod} = 0,4342945$$

$$\rho^{\circ} = 57,29578$$

$$\rho' = 3437,748$$

$$\rho'' = 206264,8$$

$$\operatorname{arc} 1^{\circ} = 0,01745329$$

$$\operatorname{arc} 1' = 0,0002908882$$

$$\operatorname{arc} 1'' = 0,000004848137$$

$$e = 2,718282$$

$$\pi = 3,141593$$

$$\operatorname{lg} \operatorname{Mod} = 9,6677843$$

$$\operatorname{lg} \rho^{\circ} = 1,7581226$$

$$\operatorname{lg} \rho' = 3,5362739$$

$$\operatorname{lg} \rho'' = 5,3144251$$

$$\operatorname{lg} (1:\rho^{\circ}) = 8,2418774$$

$$\operatorname{lg} (1:\rho') = 6,4637211$$

$$\operatorname{lg} (1:\rho'') = 4,6855749$$

$$\operatorname{lg} e = 0,4342945$$

$$\operatorname{lg} \pi = 0,4971499$$

Глава II

КЛАССИФИКАЦИЯ КАРТОГРАФИЧЕСКИХ ПРОЕКЦИЙ

§ 11. Общие сведения

В начале настоящего пособия было указано, что изобразить поверхность земного эллипсоида на карте без искажений нельзя и что каждый бесконечно малый круг на проекциях изображается различными как по форме, так и по величине эллипсами. Поэтому какая бы ни применялась картографическая проекция (а их может быть бесчисленное множество), на карте все равно имеют место искажения.

Для того, чтобы каким-либо образом систематизировать все проекции, которые созданы в настоящее время или будут предложены впоследствии, необходимо создать такую стройную классификацию проекций, которая давала бы возможность четко отобразить основные свойства каждой проекции и представить в одной группе такие проекции, которые имели бы одинаковые признаки. Независимых признаков для классификации существует несколько, так что одни и те же проекции, благодаря наличию ряда признаков, принадлежат разным классификационным группам.

Все картографические проекции принято классифицировать по двум главным и не зависящим друг от друга признакам:

- а) по характеру искажения или свойствам изображения;
- б) по виду меридианов и параллелей нормальной сетки.

§ 12. Классификация проекций по характеру искажений

Все картографические проекции по характеру искажений делятся на равноугольные (конформные), равновеликие (эквивалентные) и произвольные.

Равноугольными, или конформными, называются такие проекции, в каждой точке которых углы не искажаются.

Условие равноугольности выражается следующими формулами, справедливыми для каждой точки проекции:

$$a = b = c = m = n,$$

т. е. масштаб по всем направлениям постоянен. На этом основании формулы искажений для равноугольных проекций значительно упрощаются:

$$p = a^2 = b^2 = m^2 = n^2; \quad \psi = 90^\circ; \quad U - U' = \frac{\omega}{2} = 0. \quad (2,1)$$

На картах в равноугольной проекции бесконечно малые круги на эллипсоиде изобразятся на проекции кругами, отсюда сохранение подобия бесконечно малых фигур в проекции и натуре. При переходе в другую точку масштаб изменяется. Это значит, что эллипс искажений в разных точках карты будет изображаться кругами разных размеров (рис. 10, а).

Поскольку на картах в равноугольных проекциях сохраняются размеры углов, то в этих проекциях можно измерять углы (углы между касательными к сторонам угла при его вершине) и направления с помощью транспортира или протрактора. Кроме того, на этих картах по сравнению с другими проекциями легче измерять расстояния.

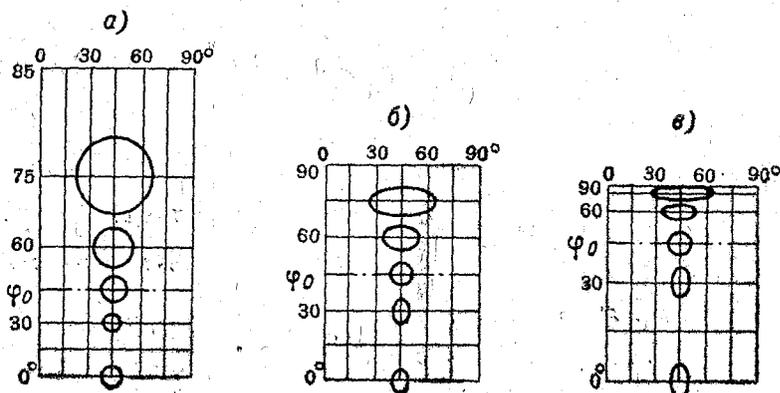


Рис. 10. Изображение эллипса искажений в равноугольной (а), равнопромежуточной (б) и равновеликой (в) цилиндрических проекциях.

Равновеликими, или эквивалентными, называются такие проекции, на которых площади на картах пропорциональны соответствующим площадям на поверхности эллипсоида.

Площади в равноугольных проекциях принимают равными площадям в натуре, уменьшенным в главный масштаб, т. е. полагают увеличение площади $p = 1$. Отсюда условие равновеликости

может быть выражено на основании формулы (1,32) следующим равенством:

$$p = ab = 1 = mn \sin \psi,$$

или

$$b = \frac{1}{a} \quad \text{и} \quad a = \frac{1}{b}. \quad (2,2)$$

Условия равновеликости и равноугольности несовместимы.

Всякий бесконечно малый круг на эллипсоиде в равновеликой проекции изобразится эллипсом, равным по площади кругу. Для разных точек карты форма этих эллипсов будет различна (рис. 10, в). На картах в равновеликих проекциях искажаются углы и не сохраняется подобие фигур.

На основании формулы (2,2) можно сделать заключение, что в равновеликих проекциях наибольший масштаб во столько раз больше главного, во сколько раз главный масштаб больше наименьшего. Раз это так, то формула (1,28) примет вид:

$$\operatorname{tg} U = a = \frac{1}{b}.$$

Подставив эти значения a и b в (1,21), получим

$$c^2 = \operatorname{tg}^2 U \cdot \cos^2 U + \operatorname{ctg}^2 U \cdot \sin^2 U = 1. \quad (2,3)$$

Из выражения (2,3) видно, что в равновеликих проекциях отрезки линий по наиболее искажаемым направлениям U не изменяют своей длины ($c=1$).

На картах в равновеликих проекциях можно измерять и сопоставлять площади, используя для получения площади в натуре только квадраты главного масштаба.

Произвольными называются такие проекции, в которых не сохраняется ни равенство углов, ни пропорциональность площадей.

Бесконечно малые круги, взятые на эллипсоиде в этих проекциях, в общем случае изобразятся на карте в виде эллипсов различной формы и площади. По свойствам изображения произвольные проекции, в зависимости от задач, которые поставлены перед создателями карты, могут либо быть близки к равноугольным или равновеликим, либо обладать другими нужными качествами.

Из этого типа проекций наибольшее распространение имеют равнопромежуточные и ортодромические проекции.

Равнопромежуточные проекции обладают тем свойством, что масштаб по одному из главных направлений равен единице: $a=1$ или $b=1$ (рис. 10, б).

В некоторых случаях к равнопромежуточным проекциям причисляют такие проекции, у которых масштаб a или b не равен единице, а является постоянной величиной. По характеру искажений равнопромежуточные проекции занимают среднее положение между равноугольными и равновеликими проекциями. Равнопромежуточность несовместима ни с равноугольностью, ни с равновеликостью.

§ 13. Классификация проекций по виду меридианов нормальной сетки

Рис. 11 показывает перспективное изображение шара на картинной плоскости $K-K$ параллельным пучком лучей, перпендикулярным картинной плоскости (ортографическую проекцию). Как видно из этого рисунка, географические меридианы и параллель, т. е. координатные линии системы с полюсом P , в ортографической проекции изображаются картографическими сетками разного вида, из которых сетка на рис. 12,а имеет наиболее простой вид. Этот вид изображения географических меридианов и параллелей имеет в том случае, когда полюс P географической системы совмещен с точкой Z пересечения изображаемого шара центральным проектирующим лучом. Иначе говоря, сеткой наиболее простого вида изображаются координатные линии системы с полюсом в точке Z .

Из данного частного случая ортографической проекции сделаем обобщения для всех проекций вообще. Сетка наиболее простого вида из всех, свойственных данной проекции, называется нормальной сеткой этой проекции. Та система координатных линий которой изображаются нормальной сеткой, называется системой нормальной для данной проекции. Иначе, системой координат, нормальной для данной проекции, называется та, в функции от координат которой выражаются плоские координаты изображений точек в проекции.

Применительно к ортографической проекции нормальной системой сферических координат является система с полюсом в точке Z , а сетка на рис. 12,а является нормальной сеткой ортографической проекции. В случае совмещения полюса P географической системы с полюсом Z нормальной системы плоские полярные координаты (ρ, ω) изображения M' выражаются следующей функцией от географических координат (φ, λ) , являющихся нормальными для изображаемой точки M :

$$\rho = R \cos \varphi; \quad \omega = \lambda,$$

где R — радиус изображаемого шара.

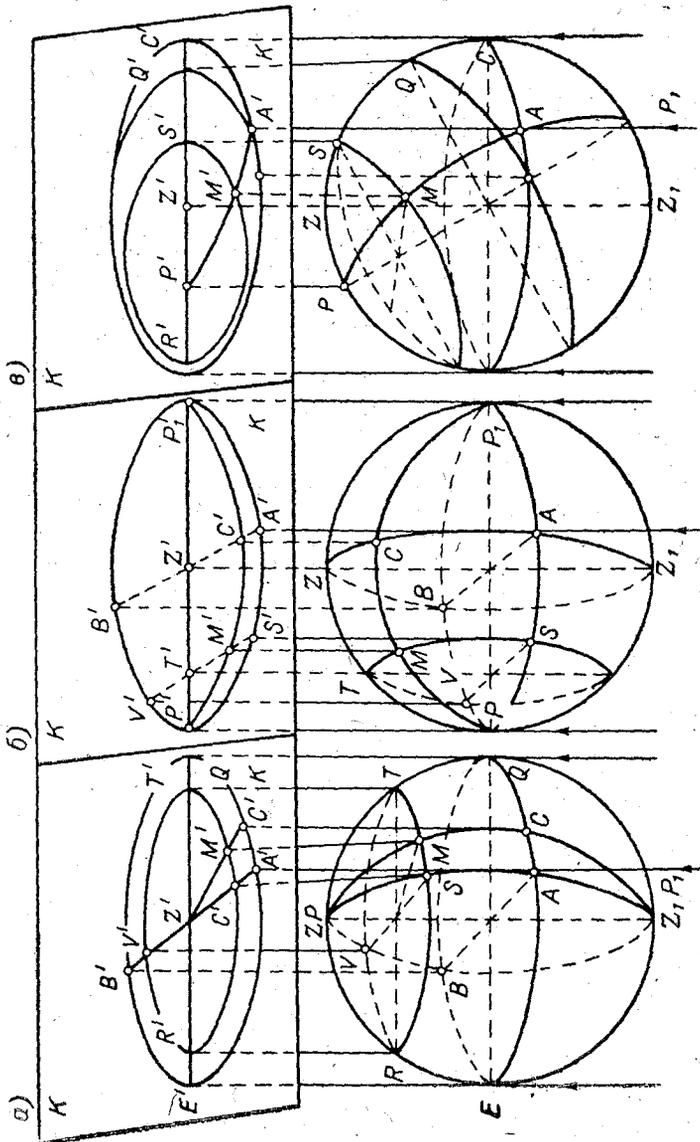


Рис. 11. Применение ортогографической проекции в нормальном (а), поперечном (б) и косом (в) положениях.

Вообще, если полюс P географической системы совмещен с полюсом Z нормальной системы, то географические меридианы и параллели изображаются в проекции нормальной (прямой) сеткой этой проекции (рис. 12,а).

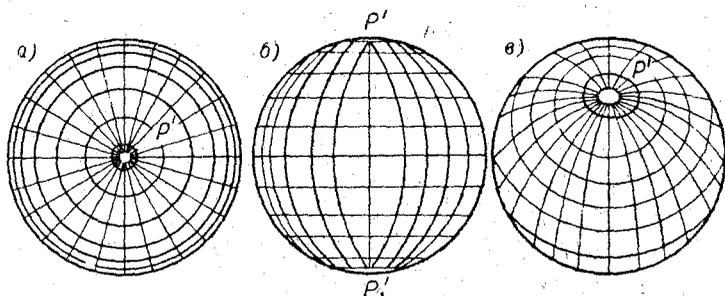


Рис. 12. Нормальная (а), поперечная (б), косая (в) сетки ортографической проекции.

Если $PZ=90^\circ$, то географические меридианы и параллели изображаются в проекции поперечной сеткой этой проекции (рис. 12,б).

Если $0 < PZ < 90^\circ$, то географические меридианы и параллели изображаются в проекции косой сеткой этой проекции (рис. 12,в).

Соответственно говорят о применении проекции в нормальном (прямом), поперечном или косом положениях.

Как видно из рис. 11, бесконечно малая (а практически просто малая) область вокруг точки Z параллельна соответствующей области вокруг точки Z' , т. е. изображается в ортографической (и вообще любой другой перспективной) проекции без искажений. Следовательно, выбором положения точек Z можно достичь изображения области вокруг нее с малыми искажениями. В зависимости от положения точки Z относительно полюса P географической системы приходится применять проекции в нормальном, поперечном или косом положениях.

Заметим, что точки P и Z могут служить полюсами совершенно аналогичных систем координат только на шаре; поэтому только шар можно изобразить в проекциях, применяя их в поперечном и косом положениях.

В основу классификации картографических проекций кладут вид нормальной сетки.

По виду нормальной картографической сетки все проекции делятся на следующие классы: круговые, конические, псевдоконические, поликонические, цилиндрические, псевдоцилиндрические,

азимутальные (частным случаем которых являются перспективные) и производные.

Круговые проекции. В этих проекциях меридианы и параллели нормальной сетки являются окружностями. Средний меридиан и экватор — прямые взаимно перпендикулярные линии, делящие изображение шара на четыре равные части.

Наибольшее распространение из круговых проекций получила шаровая, или глобулярная, проекция (рис. 13).

Из других круговых проекций для построения мировых карт применяются равноугольные проекции Лагранжа и Гринтена (рис. 14).

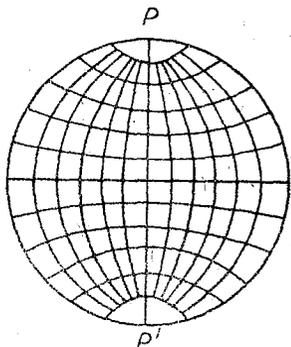


Рис. 13. Картографическая сетка в глобулярной проекции.

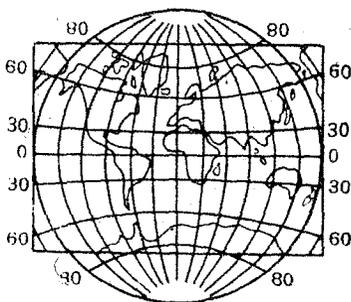


Рис. 14. Картографическая сетка в проекции Гринтена.

Конические проекции. В конических проекциях параллели нормальной сетки являются дугами одноцентренных окружностей, меридианы — радиусы этих окружностей, сходящиеся в центре под углами, пропорциональными соответствующим разностям долгот (рис. 15).

Вид сетки конических проекций вызывает представление об их получении в результате развертки на плоскость разрезанной по образующей поверхности конуса, на которую предварительно спроектировали географические меридианы и параллели изображаемого тела. Употребительные конические проекции все не получают через перспективы на конус, заимствуя, однако, их терминологию. Так, говорят о проекциях на касательный ко-

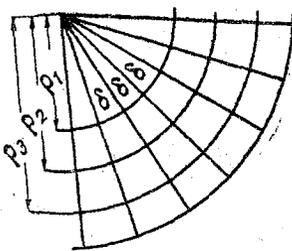


Рис. 15. Вид картографической сетки в прямой конической проекции.

нус, когда наименьшее увеличение по параллели, называемой условно параллелью касания, равно единице (рис. 16,а). Говорят о проекциях на секущий конус, когда наименьшее увеличение по параллели меньше единицы, а по двум параллелям, называемым условно параллелями сечения, равно единице (рис. 16,б).

Мы знаем, что географические меридианы и параллели изображаются нормальной сеткой проекции тогда, когда полюсы географической системы совмещены с полюсами системы координат, нормальной для данной проекции. По рис. 16 видно, что в виде

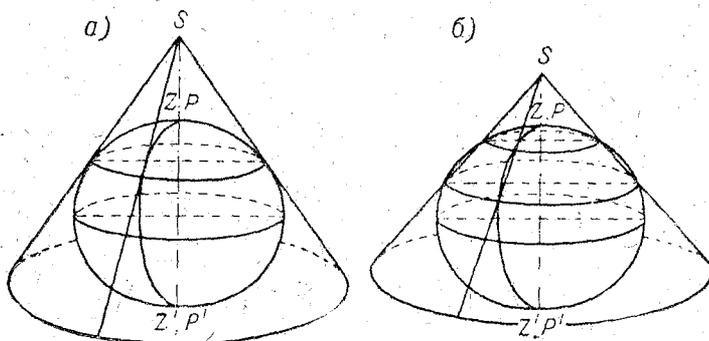


Рис. 16. Геометрическое представление конических проекций: а—на „касательном конусе“; б—на „секущем конусе“.

нормальной сетки конической проекции изображаются координатные линии системы с полюсами в точках Z и Z' пересечения шара с осью конуса. Соответственно говорят о нормальной (пря-

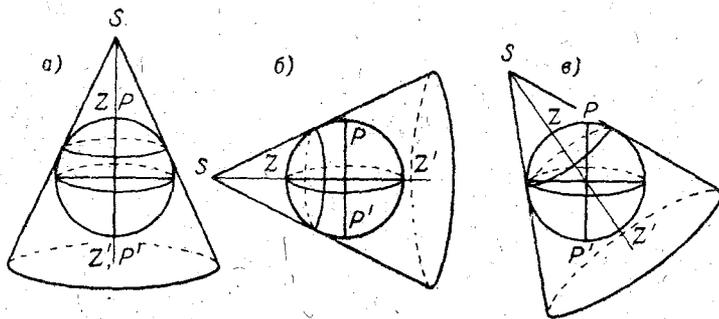


Рис. 17. Прямая (а), поперечная, (б) и косая (в) коническая проекции.

мой) проекции эллипсоида вращения или шара, а также о поперечной или косой конической проекции шара (рис. 17).

По характеру искажения конические проекции могут быть равноугольными, равновеликими и произвольными.

Конические проекции имеют большое практическое значение при создании очень многих карт, в основном мелкого масштаба (от 1 : 2 500 000 до 1 : 4 000 000).

В равноугольной конической проекции составлены карты Карского и Баренцева морей в Большом Советском атласе, физическая и политическая карты Европы. Большинство научно-справочных и учебных карт частей СССР и отдельных зарубежных стран составлены в равноугольных, равнопромежуточных и равновеликих конических проекциях.

В равнопромежуточной проекции В. В. Каврайского построены карты СССР масштаба 1 : 2 500 000, гипсометрические, физические, климатические и другие карты Советского Союза, Европы и Северной Америки.

Псевдоконические проекции. В этих проекциях параллели изображаются дугами одноцентренных окружностей, а меридианы — кривыми линиями. Средний (осевой) меридиан сетки, к востоку и западу от которого ведется счет долгот, — изображается прямой.

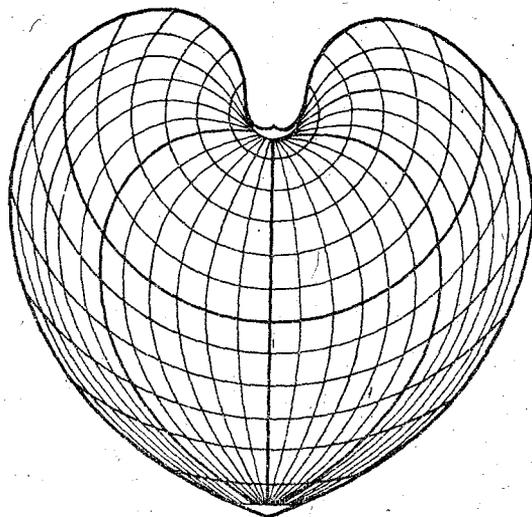


Рис. 18. Вид картографической сетки в псевдоконической проекции Бонна.

По характеру искажения псевдоконические проекции подразделяются на равновеликие и произвольные. Для построения карт в этих проекциях поверхность Земли принимается за поверхность шара.

Наибольшее распространение из этого класса проекций имеет равновеликая проекция Бонна (рис. 18). В проекциях Бонна в свое время была составлена трехверстная карта Европейской части России. В этой же проекции построены топографические карты Франции масштаба 1 : 80 000.

Поликонические проекции. В поликонических проекциях параллели нормальной сетки являются дугами окружностей, центры которых расположены на среднем прямолинейном (осевом) меридиане сетки, от которого ведется счет долгот. Остальные меридианы — кривые.

Простая поликоническая проекция (рис. 19) по свойствам изображения является произвольной. Главный масштаб сохраняется по среднему меридиану ($m_0=1$) и по всем параллелям ($n=1$). По мере удаления от среднего меридиана искажения увеличиваются, поэтому проекция выгодна для изображения стран, вытянутых по меридиану.

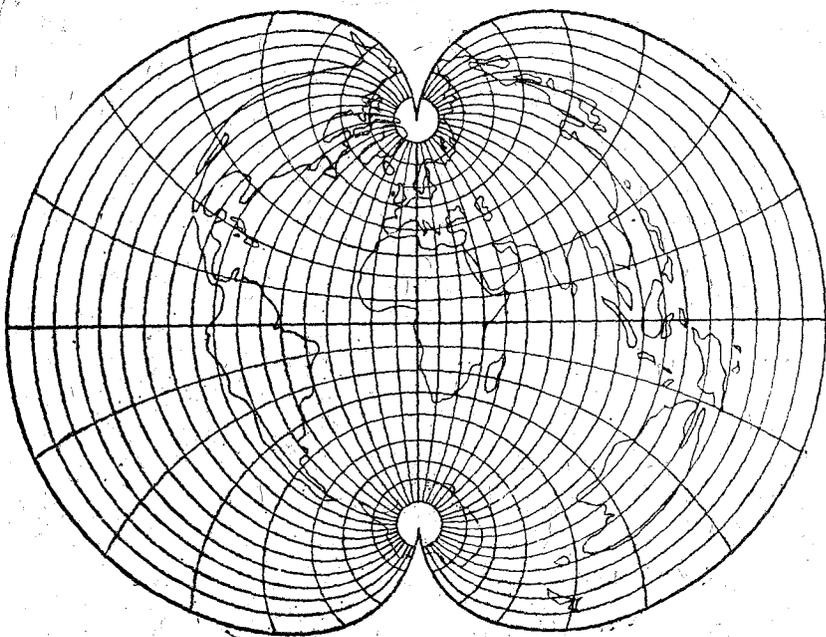


Рис. 19. Картографическая сетка в простой поликонической проекции.

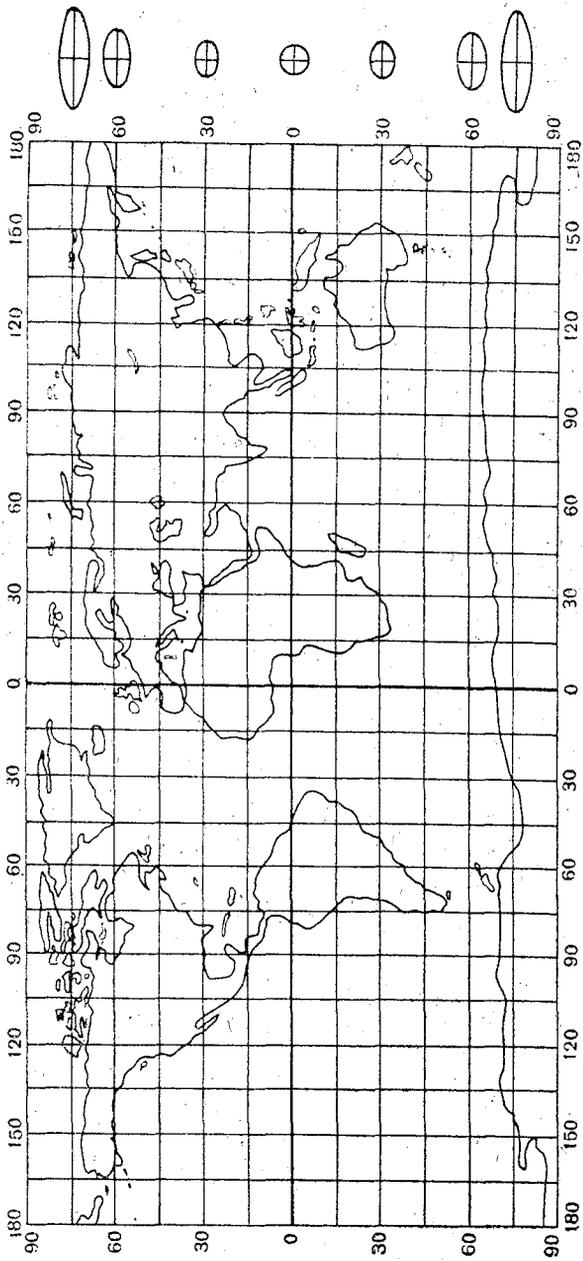


Рис. 20. Картографическая сетка в цилиндрической проекции.

В простой поликонической проекции составляются крупномасштабные морские и топографические карты в США. Эта проекция положена также в основу при построении карт масштаба 1 : 1 000 000. Для составления карт мира используется поликоническая проекция ЦНИИГАиК.

Цилиндрические проекции. В этих проекциях параллели нормальной сетки — прямые линии, параллельные экватору. Меридианы также прямые, перпендикулярные параллелям. Расстояния между меридианами пропорциональны разностям долгот (рис. 20).

Сказанное в отношении конических проекций справедливо и в отношении цилиндрических. Наиболее употребительные цилиндрические проекции вовсе не получают через перспективы на цилиндр, хотя и заимствуют их терминологию.

Проекциями на касательный цилиндр условно называются такие цилиндрические проекции, у которых наименьшее увеличение по параллелям, имеющее место по экватору, равно единице (рис. 21,а). Проекциями на секущий цилиндр называются такие цилиндрические проекции, у которых наименьшее увеличение по параллелям (на экваторе) меньше единицы, а увеличение равно единице на двух параллелях, условно называемых параллелями сечения (рис. 21,б).

Из рис. 21 следует, что в виде нормальной сетки цилиндрической проекции изображается система координатных линий с полюсами в точках Z и Z' пересечения шара осью цилиндра. В зави-

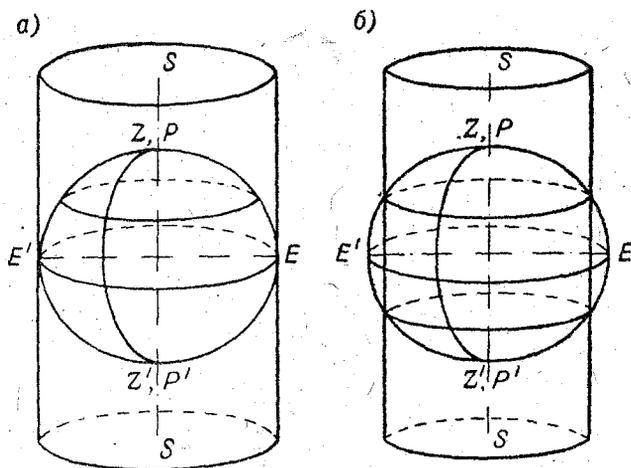


Рис. 21. Геометрическое представление цилиндрической проекции, а—на „касательном цилиндре“; б—на „секущем цилиндре“.

симости от расположения точек Z и P получают нормальную (прямую) цилиндрическую проекцию эллипсоида вращения или шара (рис. 22,а), или поперечную (рис. 22,б), или косую (рис. 22,в) цилиндрические проекции шара.

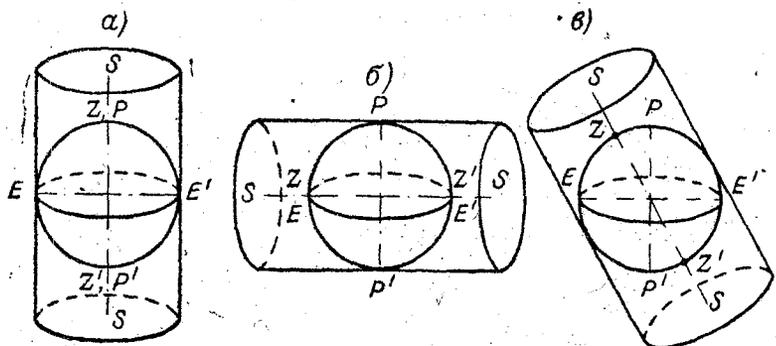


Рис. 22. Прямая (а), поперечная (б) и косая (в) цилиндрические проекции.

По характеру искажения цилиндрические проекции могут быть равноугольными, равновеликими и произвольными. Сравнивая конические и цилиндрические проекции, можно видеть, что последние являются частным случаем конических проекций, когда углы между меридианами обращаются в нуль, а меридианы и параллели обращаются в системы взаимно перпендикулярных прямых.

Из большого количества цилиндрических проекций наибольшее распространение получили морские карты в прямой равноугольной цилиндрической проекции Меркатора.

Необходимо отметить, что подавляющее большинство проекций карт I и II томов Морского атласа составлены именно в проекции Меркатора.

Не меньшее практическое применение имеет проекция эллипсоида вращения, которая, будучи применена для шара, обращается в поперечную равноугольную цилиндрическую проекцию. Она называется проекцией Гаусса. В этой проекции строятся все трапецик топографических карт СССР в масштабах крупнее 1 : 500 000. Проекция Гаусса лежит в основе применяемой в геодезии системы плоских прямоугольных координат.

Псевдоцилиндрические проекции. Здесь параллели нормальной сетки являются параллельными прямыми, а меридианы, за исключением прямолинейного осевого, представляют собой кривые.

Из этого класса проекций широко применяются для составления мировых карт равновеликие и произвольные проекции. Например, равновеликая синусоидальная проекция

Сансона (рис. 23), равновеликая эллиптическая проекция Мольвейде (рис. 24), произвольная псевдоцилиндрическая проекция ЦНИИГАиК (рис. 25), равновеликие проекции Эккерта, произвольные проекции Каврайского, Урмаева и многие другие.

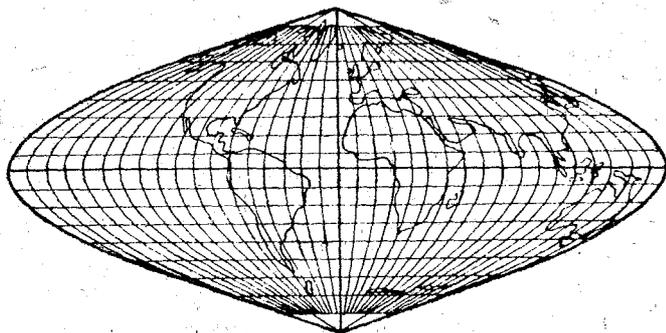


Рис. 23. Картографическая сетка проекции Сансона.

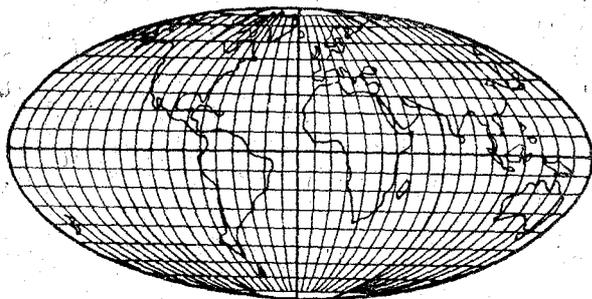


Рис. 24. Картографическая сетка проекции Мольвейде.

Азимутальные проекции. В этих проекциях параллели нормальной сетки являются одноцентренными окружностями; меридианы— радиусы этих окружностей, сходящиеся в центре под углами, равными разностям соответствующих долгот в натуре.

Эти проекции являются частными случаями конических проекций.

На практике часто применяются азимутальные проекции в поперечном положении (экваториальные) и в косом положении (горизонтные). В поперечных и косых сетках меридианы и параллели в общем случае кривые линии.

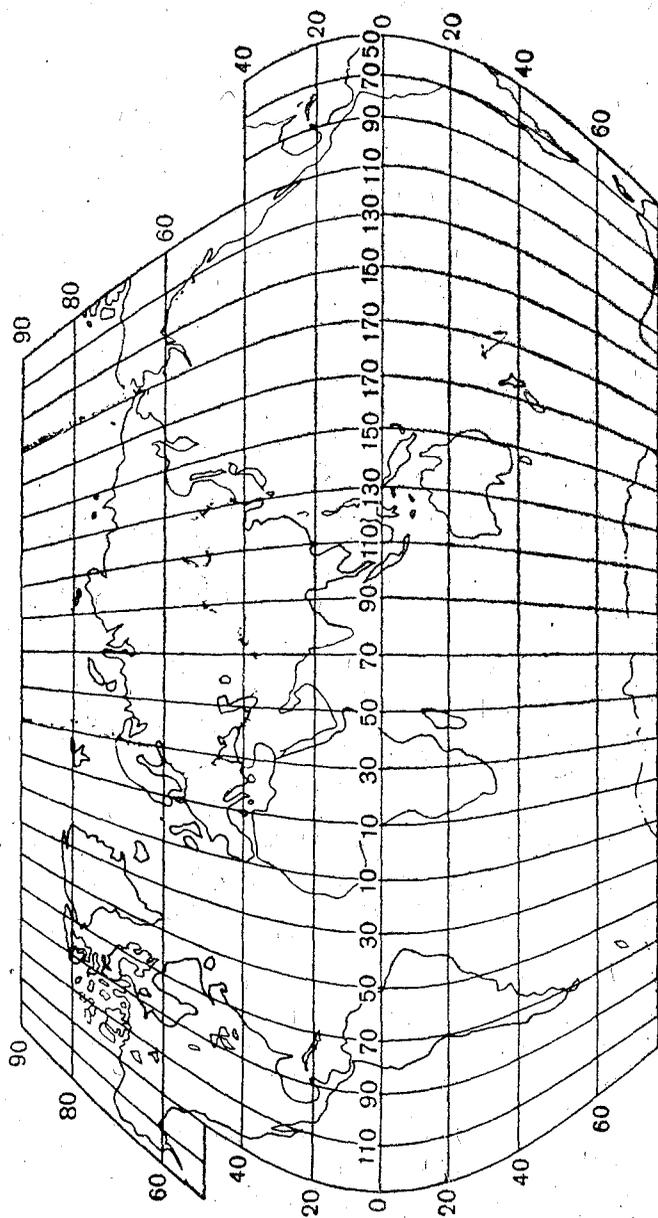


Рис. 25. Картографическая сетка проекции ЦНИИГАи К.

Азимутальные проекции имеют широкое применение в картографии, особенно это относится к равноугольной (стереографической) проекции, равновеликой проекции Ламберта и равнопромежуточной азимутальной проекции Постеля.

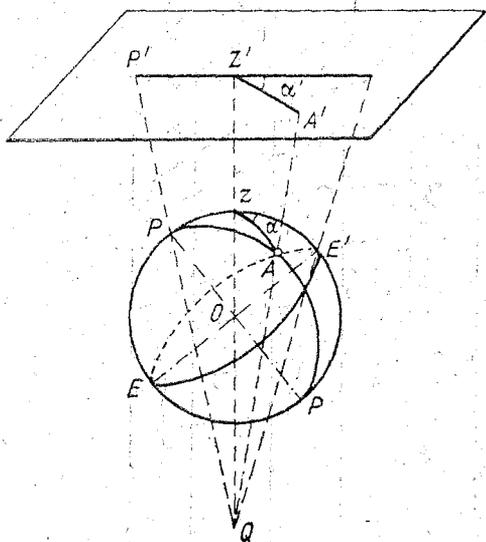


Рис. 26. Геометрическое представление перспективных проекций.

1) прямые, нормальные или полярные, в которых картинная плоскость параллельна земному экватору;

2) поперечные или экваториальные проекции, у которых картинная плоскость параллельна плоскости любого из меридианов;

3) косые или горизонтные проекции, у которых картинная плоскость параллельна горизонту какой-нибудь точки на шаре.

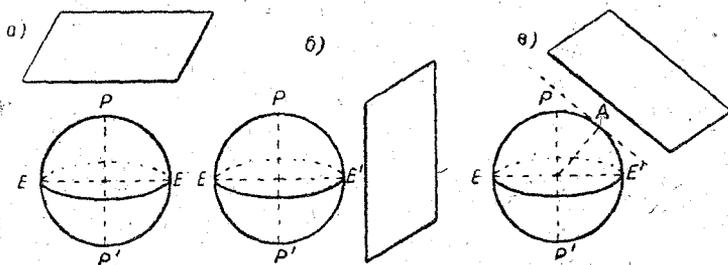


Рис. 27. Полярная (а), экваториальная (б) и горизонтная (в) перспективные проекции.

Перспективные проекции. Это азимутальные проекции, которые получаются путем перспективного проектирования шаровой поверхности земли на картинную плоскость; лучами из постоянной точки зрения.

Точка зрения лежит на перпендикуляре к картинной плоскости, проходящим через центр шара (рис. 26).

В зависимости от размещения картинной плоскости относительно изображаемого шара перспективные проекции делятся на три группы (рис. 27а, б, в):

1) прямые, нормальные или полярные, в которых картинная плоскость параллельна земному экватору;

2) поперечные или экваториальные проекции, у которых картинная плоскость параллельна плоскости любого из меридианов;

3) косые или горизонтные проекции, у которых картинная плоскость параллельна горизонту какой-нибудь точки на шаре.

В зависимости от положения точки зрения перспективные проекции делятся на четыре вида:

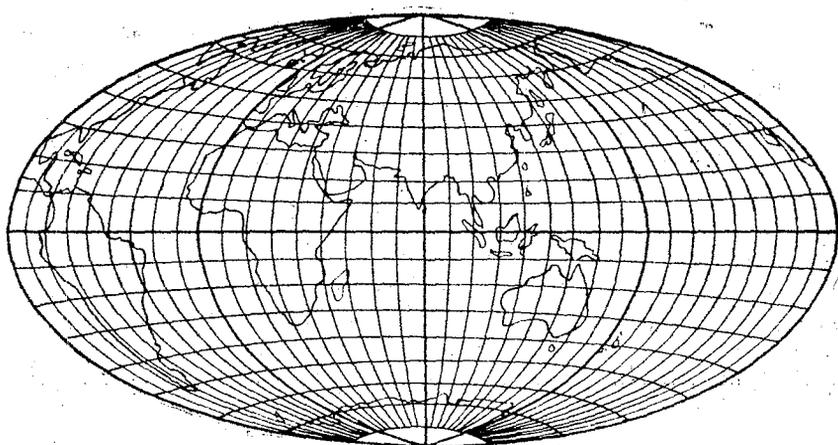


Рис. 28. Картографическая сетка в производной проекции (проекция Аитова—Гаммера).

1) ортографическая проекция, у которой точка зрения удалена в бесконечность;

2) внешние проекции, у которых точка зрения находится на конечном расстоянии;

3) стереографическая проекция, у которой точка зрения находится на проектируемой поверхности;

4) центральная или гномоническая проекция, у которой точка зрения расположена в центре изображаемого шара.

По характеру искажений перспективные проекции могут быть равноугольными и произвольными.

Наибольшее применение из перспективных проекций имеют центральная и стереографическая проекции в прямом, а также поперечном и косом положениях.

Производные проекции. Эти проекции и создаются на основе одной или нескольких типовых проекций.

Характерными примерами этого класса проекций могут служить равновеликая проекция Аитова—Гаммера, которая получается из поперечной равновеликой азимутальной проекции удвоением всех долгот и ординат (рис. 28), или равноугольно-равнопромежуточная цилиндрическая проекция Каврайского, составленная из двух цилиндрических проекций — равноугольной и равнопромежуточной.

КНИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

§ 14. Общая теория

Изображения точек в конических проекциях удобно определять в плоской полярной системе координат: полярным углом δ и радиусом-вектором ρ ; полюсом системы плоских полярных координат принимается точка S схождения меридианов (рис. 29).

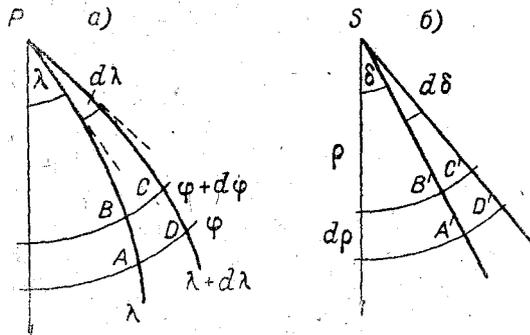


Рис. 29. Трапеция на земном эллипсоиде $ABCD$ (а), изображение $A'B'C'D'$, этой трапеции в конической проекции (б).

Плоские полярные координаты определяются уравнениями их зависимости от координат в нормальной системе, каковыми при проекции в нормальном положении (рис. 29) являются географические координаты φ и $\lambda = L - L_0$, где λ — приращение долготы L меридиана изображаемой точки M относительно долготы L_0 меридиана, начального для счета долгот

$$\delta = \alpha\lambda, \quad (3.1)$$

где δ — угол между изображениями меридианов L_0 и L ; α — коэффициент пропорциональности долгот, постоянный для

каждой проекции; радиус-вектор ρ является функцией широты, поэтому можно написать

$$\rho = f(\varphi). \quad (3.2)$$

Вместе с тем ρ — радиус окружности, изображающий параллель с широтой φ .

Вид функции $\rho = f(\varphi)$ зависит от того, какую проекцию необходимо построить: равноугольную, равновеликую или произвольную.

Выведем формулы масштабов по меридианам и параллелям, общие для всех конических проекций. Для этого рассмотрим на земном эллипсоиде бесконечно малую трапецию $ABCD$ (рис. 29,а), которая в проекции (рис. 29,б) изобразится плоской трапецией $A'B'C'D'$. Точка A на местности будет иметь координаты φ и λ . Идентичная ей точка A' на плоскости имеет координаты δ и ρ .

Известно, что отношение сторон плоской трапеции $A'B'C'D'$ к соответствующим сторонам сфероидической трапеции $ABCD$ дает частные масштабы проекции.

Из определения частного масштаба следует, что масштаб по меридиану будет равен

$$\mu_m = \frac{A'B'}{AB}, \quad (3.3)$$

где $A'B'$ — линейное приращение радиуса параллели $d\rho$; AB — длина дуги меридиана, которая, согласно формуле (1,9), равна $Md\varphi$. Подставив значения $A'B'$ и AB в формулу масштаба по меридиану, получим

$$\mu_m = -\frac{d\rho}{M d\varphi}. \quad (3.3')$$

В формуле (3,3) поставлен знак минус из-за того, что с увеличением широты φ радиус параллели ρ будет уменьшаться, т. е. положительному приращению $d\varphi$ соответствует отрицательное приращение $-d\rho$.

Из гл. I § 9 известно, что увеличение масштаба по меридиану m равно отношению частного масштаба μ_m к главному μ_0 . Поэтому можно написать

$$m = -\frac{d\rho}{\mu_0 M d\varphi}, \quad (3.4)$$

Масштаб по параллели представим как отношение

$$\mu_n = \frac{A'D'}{AD},$$

где $A'D'$ — дуга окружности радиуса ρ , которая стягивает угол $\alpha\delta$. Следовательно,

$$A'D' = \rho\alpha\delta.$$

AD представляет собой дугу параллели и на основании формулы (1,13) будет равна

$$AD = N \cos \varphi d\lambda.$$

Подставив значения $A'D'$ и AD в формулу масштаба по параллели, получим

$$\mu_n = \frac{\rho\alpha\delta}{N \cos \varphi d\lambda}, \quad (3,5)$$

но $\delta = \alpha\lambda$; тогда уравнение (3,5) можно переписать в следующем виде

$$\mu_n = \frac{\alpha\rho d\lambda}{N \cos \varphi d\lambda}.$$

Сократив на $d\lambda$, окончательно имеем

$$\mu_n = \frac{\alpha\rho}{N \cos \varphi}. \quad (3,6)$$

Увеличение масштаба по параллели n по аналогии с (3,6) будет равно

$$n = \frac{\alpha\rho}{\mu_0 N \cos \varphi}$$

или

$$n = \frac{\alpha\rho}{\mu_0 r}, \quad (3,7)$$

так как

$$r = N \cos \varphi.$$

В конических проекциях меридианы и параллели взаимно перпендикулярны, поэтому главные направления совпадают с направлениями меридианов и параллелей и масштабы по ним будут иметь наибольшее и наименьшее значения из всех возможных в данной точке. Тогда и увеличение площадей будет выражено следующим уравнением:

$$p = mn, \quad (3,8)$$

а наибольшее искажение углов ω определится из выражения

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) = \sqrt{\frac{a}{b}}, \quad (3,9)$$

где при $n > m$ $a = n$, $b = m$ или при $n < m$ $a = m$, $b = n$.

Как было сказано в § 13, если наименьшее увеличение по параллелям $n_0 = 1$ соблюдается по некоторой параллели φ_0 , то проекция называется проекцией на касательный конус, а параллель φ_0 называется параллелью касания. Если наименьшее из увеличений по параллелям $n_0 < 1$ соблюдается на параллели φ_0 , существуют две параллели φ_1 и φ_2 , по которым увеличения $n_1 = n_2 = 1$, называемые параллелями сечения, то проекция называется проекцией на секущий конус.

Определим значение коэффициента пропорциональности при условии, чтобы масштаб по заданной параллели φ_0 был бы наименьшим.

Продифференцируем уравнение (3,7) по X . Это можно сделать, так как ρ и r зависят от широты, а следовательно, и от $X = \int_0^\varphi M d\varphi$.

Тогда получим

$$\frac{dn}{dX} = \frac{\alpha}{\mu_0} \frac{\frac{d\rho}{dX} \cdot r - \rho \frac{dr}{dX}}{r^2}$$

Из рис. 30 видно, что $\frac{dr}{dX} = -\sin \varphi$. Знак минус перед $\sin \varphi$ поставлен из-за того, что положительному приращению dX соответствует отрицательное приращение $d\rho$. На основании (3,7) можно написать, что $m\mu_0 = \frac{d\rho}{M d\varphi}$ или, что то

же самое, $m\mu_0 = \frac{d\rho}{dX}$; поэтому

$\frac{d\rho}{dX} = -\mu_0 m$. Откуда

$$\frac{dn}{dX} = \frac{\alpha}{\mu_0} = \frac{-\mu_0 m r + \rho \sin \varphi}{r^2}$$

Приравняем эту производную нулю, для чего достаточно, чтобы числитель был равен нулю. Тогда получим для параллели φ_0 :

$$\mu_0 m r_0 = \rho_0 \sin \varphi_0,$$

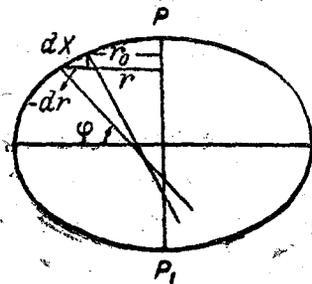


Рис. 30. Приращение радиуса параллели на эллипсоиде.

где индекс «ноль» означает функции от широты φ_0 . Отсюда

$$\rho_0 = \frac{\mu_0 m_0 r_0}{\sin \varphi_0}.$$

Но $r = N \cos \varphi$; следовательно;

$$\rho_0 = \mu_0 m_0 N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0. \quad (3,10)$$

Из уравнения (3,7) определим величину α :

$$\alpha = \frac{\mu_0 n N \cos \varphi}{\rho}.$$

Подставив (3,10) в последнее выражение, окончательно получим

$$\alpha = \frac{n_0}{m_0} \cdot \sin \varphi_0. \quad (3,11)$$

Наоборот, наименьшее увеличение n_0 имеет место по параллели φ_0 , определяемой условием

$$\sin \varphi_0 = \frac{m_0}{n_0} \alpha. \quad (3,12)$$

В случае изображения шара формулы масштабов и увеличений примут следующий вид:

$$\text{масштаб по меридиану} \quad \mu_m = \frac{d\rho}{R d\varphi}; \quad (3,13)$$

$$\text{увеличение масштаба по меридиану} \quad m = \frac{d\rho}{\mu_0 R d\varphi}; \quad (3,14)$$

$$\text{масштаб по параллели} \quad \mu_n = \frac{\alpha \rho}{R \cos \varphi} = \frac{\alpha \rho}{r}; \quad (3,15)$$

$$\text{увеличение масштаба по параллели} \quad n = \frac{\alpha \rho}{\mu_0 r} = \frac{\alpha \rho}{\mu_0 R \cos \varphi}; \quad (3,16)$$

$$\text{параллель } \varphi_0 \text{ с наименьшим увеличением } \sin \varphi_0 = \frac{m_0}{n_0} \alpha. \quad (3,17)$$

Определение конкретной конической проекции — равноугольной, равнопромежуточной, равновеликой — требует знания двух произвольных постоянных. Одна из них α — коэффициент пропорциональности долгот на карте и в натуре; вторая получается в ре-

результате интегрирования уравнения, получаемого из (3,2), а именно:

$$d\rho = f'(\varphi) d\varphi.$$

Произвольные постоянные находятся, исходя из условий, предъявляемых к проекции: прежде всего устанавливают — выбирается проекция на касательный или секущий конус.

Дело в том, что полоса вдоль параллели φ_0 изображается в постоянном масштабе, так как вблизи минимума функция (масштаб, увеличение) меняется медленно. Поэтому, если принять $n_0=1$, то пояс по обе стороны от параллели φ_0 изобразится с малыми искажениями. Значит, проекции на касательный конус выгодны для изображения узких полос, вытянутых вдоль параллели, если параллель φ_0 выбрать между крайними параллелями φ_N и φ_S полосы. Произвольные постоянные при этом определяются условиями:

1) $n_0=1$ и заданием значения параллели φ_0 , взяв, например, $\varphi_0 = \frac{1}{2} (\varphi_N + \varphi_S)$; при округлении полученного при этом значения φ_0 его следует взять ближе к северной параллели

2) $n_0=1$, но значение параллели касания φ_0 не задается, а подчиняется требованию равенства $n_N = n_S$ увеличений на крайних параллелях φ_N и φ_S .

В проекциях на касательный конус разность между наибольшим увеличением n_{max} (на крайних параллелях полосы) и наименьшим $n_0=1$ может превысить допустимую величину при значительной ширине $n_N - n_S$ полосы. Разность $n_{max} - n_{min}$ можно уменьшить, распределив ее по обе стороны от единицы и применив проекцию на секущий конус, т. е. взяв $n_0 < 1$.

Произвольные постоянные проекции на секущий конус определяются условиями:

1) заданными значениями φ_1 (северной) и φ_2 (южной) параллелей сечения, по которым $n_1 = n_2 = 1$; параллели сечения выбираются на одинаковом удалении по широте от крайних параллелей;

$$\varphi_1 = \varphi_N - \frac{\Delta}{K};$$

$$\varphi_2 = \varphi_S + \frac{\Delta}{K},$$

где $\Delta = \varphi_N - \varphi_S$; $\frac{1}{K}$ — доля разности широт Δ , для вытянутых полос принимаемая $\frac{1}{K} = \frac{1}{7}$;

2) равенства увеличений $n_N = n_S$ на крайних параллелях и равенства уклонений от единицы наибольших и наименьшего увеличений; второе условие можно выразить по-разному:

$$a) n_N - 1 = n_S - 1 = 1 - n_0$$

или

$$б) \frac{n_N}{1} = \frac{n_S}{1} = \frac{1}{n_0}.$$

§ 15. Равноугольные конические проекции

Условие равноугольности — равенство наибольшего a и наименьшего b увеличений в каждой точке проекции — применительно к коническим проекциям, у которых меридианы и параллели — главные направления, выражается равенством $m = n$. Поэтому на основании формул (3,4) и (3,7) можно написать

$$m = n = -\frac{d\rho}{\mu_0 M d\varphi} = \frac{\alpha\rho}{\mu_0 N \cos \varphi}. \quad (3,18)$$

Найдем из этого выражения, чему равняется радиус параллели ρ на проекции. Для этого уравнение (3,18) запишем в следующем виде:

$$-\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \frac{M d\varphi}{N \cos \varphi}.$$

Подставим вместо M и N их значения из формул (1,6 и 1,7)

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \frac{(1-e^2)(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

После сокращения будем иметь

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi},$$

где $d\rho$ — бесконечно малое изменение радиуса параллели, соответствующее бесконечно малому изменению широты $d\varphi$.

Преобразуем правую часть этого выражения, умножив в числителе e^2 на $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{\rho} &= -\frac{\alpha[1-e^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)]}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \\ &= \left[-\frac{\alpha(1-e^2 \sin^2 \varphi)}{1-e^2 \sin^2 \varphi} + \frac{\alpha e(e \cos^2 \varphi)}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \right] \frac{d\varphi}{\cos \varphi}. \end{aligned}$$

После сокращения подобных членов можно написать

$$\frac{d\rho}{\rho} = - \left(\frac{\alpha}{\cos \varphi} - \frac{\alpha e^2 \cos \varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi} \right) d\varphi.$$

Проинтегрируем это уравнение

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} + \alpha e \int \frac{e \cos \varphi d\varphi}{1 - e^2 \sin^2 \varphi}. \quad (3,19)$$

Обозначим:

$$e \sin \varphi = \sin \psi.$$

Продифференцировав это выражение и заменив значение функции φ на ψ , получим

$$e \cos \varphi d\varphi = \cos \psi d\psi.$$

Возведем $e \sin \varphi$ в квадрат и вычтем найденную величину из единицы

$$1 - e^2 \sin^2 \varphi = 1 - \sin^2 \psi = \cos^2 \psi.$$

Заменяем в уравнении (3,19) величины $e \cos \varphi d\varphi$ и $1 - e^2 \sin^2 \varphi$ их выражениями через ψ . Тогда

$$\int \frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \int \frac{d\varphi}{\cos \varphi} + \alpha e \int \frac{d\psi}{\cos \psi}. \quad (3,20)$$

Интегралы правой части уравнения (3,20) можно брать как табличные типа

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right).$$

В результате интегрирования получим:

$$\ln \rho = -\alpha \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) + \alpha e \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right) + \ln k,$$

где $\ln k$ — постоянная интегрирования.

Так как разность логарифмов равна логарифму частного, то

$$\ln \frac{\rho}{k} = -\alpha \ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{tg}^e \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right)}.$$

Обозначим

$$\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{tg}^e \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right)} = U,$$

тогда

$$\ln \frac{\rho}{k} = -\alpha \ln U = \ln U^{-\alpha}.$$

После потенцирования будем иметь

$$\frac{\rho}{k} = U^{-\alpha} = \frac{1}{U^{\alpha}},$$

откуда радиус параллели*

$$\rho = \frac{k}{U^{\alpha}} \quad (3,21)$$

Для экватора $\varphi = \psi = 0$, $U = 1 = U^{\alpha}$, так что для изображения экватора $\rho_{\text{э.кв.}} = k$; иначе говоря, постоянная интегрирования есть радиус экватора. Поэтому формулу (3,21) можно переписать в виде

$$\rho = \frac{\rho_{\text{э.кв.}}}{U^{\alpha}}. \quad (3,21')$$

Величины U , $\lg U$, $|\lg U|$ берутся из Картографических таблиц по аргументу φ .

Для вывода формулы увеличения масштаба возьмем уравнение (3,7) и подставим в него значение ρ :

$$m = n = \alpha \frac{\rho_{\text{э.кв.}}}{\rho_0 N \cos \varphi U^{\alpha}}. \quad (3,22)$$

Увеличение площадей в равноугольной конической проекции

$$\rho = n^2. \quad (3,23)$$

Величина коэффициента пропорциональности α вследствие равенства m и n на основании формулы (3,12) равна

$$\alpha = \sin \varphi_0. \quad (3,24)$$

Для построения сетки в равноугольной конической проекции, кроме α , необходимо определить величину постоянной $\rho_{\text{э.кв.}}$.

При изображении на конус с заданной широтой φ_0 параллели касания увеличение по параллели касания $n_0 = 1$. Подставим в формулу (3,22) вместо n_0 единицу

$$\frac{\alpha \rho_{\text{э.кв.}}}{\rho_0 N_0 \cos \varphi_0 U_0^{\alpha}} = 1.$$

* При $\varphi = 90^\circ$ $\rho = 0$, т. е. в равноугольной конической проекции полюс изображается точкой схождения меридианов.

Заменим α его значением из уравнения (3,24), тогда

$$\frac{\sin \varphi_0 \rho_{\text{экв}}}{\mu_0 N_0 \cos \varphi_0 U_0^\alpha} = 1.$$

Отсюда

$$\rho_{\text{экв}} = \frac{\mu_0 N_0 \cos \varphi_0 U_0^\alpha}{\sin \varphi_0}$$

или

$$\rho_{\text{экв}} = \mu_0 N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0 U_0^\alpha. \quad (3,25)$$

В случае секущего конуса с заданными параллелями сечения φ_1 (северной) и φ_2 (южной) увеличение масштаба по каждой из этих параллелей должно быть равно единице. Тогда формула (3,24) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \frac{\alpha \rho_{\text{экв}}}{\mu_0 N_1 \cos \varphi_1 U_1^\alpha} = 1; \\ n_2 &= \frac{\alpha \rho_{\text{экв}}}{\mu_0 N_2 \cos \varphi_2 U_2^\alpha} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (3,26)$$

Вследствие равенства правых частей уравнения (3,26) можно переписать

$$\frac{\alpha \rho_{\text{экв}}}{\mu_0 N_1 \cos \varphi_1 U_1^\alpha} = \frac{\alpha \rho_{\text{экв}}}{\mu_0 N_2 \cos \varphi_2 U_2^\alpha}.$$

После сокращения и преобразования получим

$$\left(\frac{U_1}{U_2} \right)^\alpha = \frac{N_2 \cos \varphi_2}{N_1 \cos \varphi_1}. \quad (3,27)$$

Логарифмируя выражение (3,27), определим α :

$$\alpha = (\lg U_1 - \lg U_2) = \lg(N_2 \cos \varphi_2) - \lg(N_1 \cos \varphi_1).$$

Окончательно

$$\alpha = \frac{\lg(N_2 \cos \varphi_2) - \lg(N_1 \cos \varphi_1)}{\lg U_1 - \lg U_2}. \quad (3,28)$$

Постоянная $\rho_{\text{экв}}$ может быть определена из уравнений (3,26)

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\text{экв}} &= \frac{\mu_0 N_1 \cos \varphi_1 U_1^\alpha}{\alpha}; \\ \rho_{\text{экв}} &= \frac{\mu_0 N_2 \cos \varphi_2 U_2^\alpha}{\alpha}. \end{aligned} \right\} \quad (3,29)$$

Выведенные формулы дают возможность построить равноугольную коническую проекцию.

Ниже приводятся номера формул, необходимых для расчета:

(3,1) — долгота на карте,

(3,21) — радиус параллели,

(3,22) — увеличение масштаба по меридиану и параллели,

(3,23) — масштаб площади

при «касательном конусе» с заданной широтой φ_0 параллели касания:

(3,24) — коэффициент пропорциональности,

(3,25) — постоянная интегрирования

при «секущем конусе» с заданными параллелями φ_1 и φ_2 сечения:

(3,28) — коэффициент пропорциональности,

(3,29) — постоянная интегрирования.

Не следует думать, что если даны формулы для определения постоянных величин α и $\rho_{экв}$, то они известны. Эти величины надо задать и, в зависимости от условий, будут получаться те или иные виды равноугольной конической проекции. Например, если $\rho_{экв} = \infty$, то получим проекцию Меркатора, при $\alpha = 1$ — стереографическую проекцию (эти проекции являются частным случаем равноугольных конических проекций). При $\alpha < 1$ получаются различные типы равноугольных конических проекций.

Постоянные проекции α и $\rho_{экв}$ определяются принятием какого-либо из тех условий, какие были указаны в конце предыдущего параграфа. Пример определения α и $\rho_{экв}$ для двух условий задания проекций на касательный и секущий конусы были только что рассмотрены.

При изображении в равноугольной конической проекции шара выведенные ранее формулы для определения m , n , ρ и $\rho_{экв}$ будут выражены более простыми уравнениями.

Для вывода формулы радиуса параллели воспользуемся уравнениями увеличения масштабов по меридиану и параллели (3,14) и (3,16). Поскольку проекция равноугольная, то $m = n$, т. е.

$$-\frac{d\rho}{\mu_0 R d\varphi} = \frac{\alpha \rho}{\mu_0 R \cos \varphi},$$

отсюда

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \frac{\mu_0 d\varphi}{\mu_0 \cos \varphi}.$$

После сокращения получим

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

Проинтегрируем правую часть уравнения от экватора до заданной широты φ , а левую от ρ до $\rho_{\text{ЭКВ}}$:

$$\int_{\rho_{\text{ЭКВ}}}^{\rho} \frac{d\rho}{\rho} = -\alpha \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

После интегрирования имеем

$$\ln \frac{\rho_{\text{ЭКВ}}}{\rho} = -\alpha \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right).$$

или

$$\frac{\rho_{\text{ЭКВ}}}{\rho} = \left[\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right]^\alpha.$$

Отсюда радиус параллели будет равен

$$\rho = \frac{\rho_{\text{ЭКВ}}}{\operatorname{tg}^\alpha \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)}. \quad (3,30)$$

Для определения увеличения масштаба $m = n$ и постоянных α и $\rho_{\text{ЭКВ}}$ воспользуемся уравнениями (3,22), (3,24), (3,25) и (3,29), заменив в них величины N_1 , N_0 и U^α соответственно величинами R и $\operatorname{tg}^\alpha \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)$. Тогда

$$\alpha = \sin \varphi_0; \quad (3,31)$$

$$m = n = \alpha \frac{\rho_{\text{ЭКВ}}}{\mu_0 R \cos \varphi \operatorname{tg}^\alpha \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right)}; \quad (3,32)$$

для конуса с заданной широтой φ_0 параллели касания

$$\rho_{\text{ЭКВ}} = \mu_0 R \operatorname{ctg} \varphi_0 \operatorname{tg}^\alpha \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right); \quad (3,33)$$

для секущего конуса с заданными параллелями φ_1 и φ_2 сечения

$$\alpha = \frac{\lg \cos \varphi_2 - \lg \cos \varphi_1}{\lg \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2} \right) - \lg \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2} \right)};$$

$$\left. \begin{aligned} \rho_{\text{экр}} &= \frac{\mu_0 R \cos \varphi_1 \operatorname{tg}^{\alpha} \left(45^{\circ} + \frac{\varphi_1}{2} \right)}{\alpha}, \\ \rho_{\text{экр}} &= \frac{\mu_0 R \cos \varphi_2 \operatorname{tg}^{\alpha} \left(45^{\circ} + \frac{\varphi_2}{2} \right)}{\alpha}. \end{aligned} \right\} (3,34)$$

Пример 1. Вычисление равноугольной конической проекции на касательном конусе.

Условия вычисления проекции: главный масштаб карты $M_0 = 1 : 5\,000\,000$, территория ограничена меридианами $\lambda_W = 70^{\circ} \text{O}^{\text{st}}$ и $\lambda_{\text{Ost}} = 120^{\circ} \text{O}^{\text{st}}$, параллелями $\varphi_S = 30^{\circ} \text{N}$, $\varphi_N = 70^{\circ} \text{N}$, параллель касания $\varphi_0 = 50^{\circ} \text{N}$, средний меридиан карты $\lambda_0 = 95^{\circ} \text{O}^{\text{st}}$. Меридианы и параллели провести через 5° .

Решение.

1. Вычислим постоянную проекции α , которая для случая касательного конуса равна: $\alpha = \sin \varphi_0 = \sin 50^{\circ}$; $\lg \alpha = \lg \sin 50^{\circ} = 9,884254$; $\alpha = 0,766045$.

2. Рассчитаем вторую постоянную проекции $\rho_{\text{экр}}$:

$$\begin{aligned} \rho_{\text{экр}} &= N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0 U_0; & \lg U_0 &= 0,436704; \\ \lg \rho_{\text{экр}} &= \lg(N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0) + \alpha \lg U_0; & \alpha &= 0,766045; \\ & \lg(N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0) &= 6,729369 \\ & \alpha \lg U_0 &= 0,334534 \end{aligned}$$

$$\lg \rho_{\text{экр}} = 7,063903$$

при выражении $\rho_{\text{экр}}$ в м.

Для получения всех радиусов параллелей в см и в масштабе карты $\rho_{\text{экр}}$ следует разделить на знаменатель численного масштаба и умножить на 100:

$$\begin{aligned} \lg \rho_{\text{экр}} &= 7,063903 \\ \lg 2 \cdot 10^{-5} &= 5,301030 \end{aligned}$$

$$\lg \rho_{\text{экр}} = 2,364933.$$

3. Рассчитаем полярную координату $\delta = \alpha \lambda$, где λ — заданная разность долгот, в нашем случае $\lambda = 5^{\circ} = 18\,000''$; $\lg \delta = \lg \alpha + \lg \lambda''$;

$$\begin{aligned} \lg \alpha &= 9,884254 \\ \lg \lambda'' &= 4,255272 \end{aligned}$$

$$\lg \delta'' = 14,139526$$

$$\delta'' = 13799'' \text{ или } \delta = 3^{\circ}49'59''.$$

Получив полярную координату δ , определим $n\delta$ и $\frac{n\delta}{2}$, необходимые для вычисления прямоугольных координат x и y . Данные сведем в табл. 3.

Таблица 3

λ	$n\delta$	$\frac{n\delta}{2}$
5°	3°49'59"	1°55'00"
10°	7°39'58"	3°49'59"
15°	11°29'57"	5°44'58"
20°	15°19'56"	7°39'58"
25°	19°09'55"	9°34'58"

4. Вычислим полярную координату ρ по формуле $\rho = \frac{\rho_{экр}}{U^\alpha}$ или $\lg \rho = \lg \rho_{экр} - \alpha \lg U$. Данные вычисления сведем в табл. 4.

5. Вычислим увеличения $m=n$ и увеличения площадей p по формулам:

$$\rho = n^2 \quad \text{и} \quad n = \frac{\alpha \rho_{экр}}{N \cos \varphi U^\alpha};$$

$$\lg n = \lg a + \lg \rho_{экр} + \text{доп.} \lg N \cos \varphi + \text{доп.} (\alpha \lg U)$$

для всех широт φ (табл. 5).

6. Рассчитаем прямоугольные координаты x и y точек пересечения меридианов и параллелей по формулам, общим для всех конических проекций:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos n\delta = \rho - 2\rho \sin^2 \frac{n\delta}{2}, \\ y &= \rho \cdot \sin n\delta. \end{aligned} \right\} \quad (3,35)$$

при начале координат в точке схождения меридианов, оси абсцисс по направлению меридиана $\lambda_0 = 95^\circ$ с положительным направлением вниз.

Вычисление производится на арифмометре. Для вычисления x на барабан арифмометра ставят 2ρ и последовательно умножают на $\sin^2 \frac{n\delta}{2}$. При вычислении y на барабан арифмометра ставят значение ρ и умножают последовательно на все значения $\sin n\delta$. Значения x и y сведены в табл. 6.

Таблица 4

Формулы	Ш и р о т а ф									
	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	
$\lg U$	0,237106	0,281855	0,329457	0,380718	0,436704	0,498893	0,569427	0,651605	0,750944	
$\alpha \lg U$	0,181636	0,215914	0,252379	0,291647	0,334535	0,382174	0,436206	0,499159	0,575257	
$\lg p_{\text{экв}}$	2,364933	2,364933	2,364933	2,364933	2,364933	2,364933	2,364933	2,384933	2,364933	
$\lg p$	2,183299	2,149019	2,112554	2,073296	2,030398	1,982759	1,928727	0,865774	0,789676	
$p, \text{ с.м}$	152,510	140,935	129,585	118,382	107,250	96,108	84,865	73,413	61,652	

Таблица 5

Формулы	Ш и р о т а ф									
	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°	
$\lg \alpha + \lg p_{\text{экв}}$	6,948157	6,948157	6,948157	6,948157	6,948157	6,948157	6,948157	6,948157	6,948157	
доп. $\lg (N \cos \varphi)$	3,257404	3,954456	3,310444	3,345086	3,386377	3,435730	3,495236	3,568153	3,659960	
доп. $(\alpha \lg U)$	9,818366	9,784086	9,747621	9,708353	9,665465	9,617826	9,563794	9,500841	9,424743	
$\lg n$	0,023927	0,013699	0,006222	0,001596	9,999999	0,001713	0,007187	0,017151	0,032760	
n	1,057	1,032	1,014	1,001	1,000	1,004	1,017	1,040	1,079	
p	1,112	1,065	1,028	1,002	1,000	1,008	1,034	1,082	1,164	

$$\lg \alpha = 9,884254$$

$$\lg p_{\text{экв}} = 7,063903$$

$$\lg \alpha + \lg p_{\text{экв}} = 6,948157$$

Пример 2. Вычисление равноугольной конической проекции на секущем конусе

Условие вычисления: главный масштаб 1 : 5 000 000, территория ограничена меридианами $\lambda_W = 70^\circ$, $\lambda_{Ost} = 120^\circ$ и параллелями $\varphi_S = 30^\circ$ и $\varphi_N = 70^\circ$; параллели сечения $\varphi_1 = 40^\circ$, $\varphi_2 = 60^\circ$, осевой меридиан 95° ; разность широт и долгот сетки равна 5° .

Решение.

1. Вычислим постоянную проекции α по формуле:

$$\alpha = \frac{\lg(N_1 \cos \varphi_1) - \lg(N_2 \cos \varphi_2)}{\lg U_2 - \lg U_1} = \frac{A}{B};$$

$$\begin{array}{ll} \lg(N_1 \cos \varphi_1) = 6,689\,556 & \lg U_2 = 0,569\,426 \\ \lg(N_2 \cos \varphi_2) = 6,504\,764 & \lg U_1 = 0,329\,457 \end{array}$$

$$A = 0,184792 \quad B = 0,239969$$

$$\lg \alpha = \lg A - \lg B;$$

$$\lg A = 9,2666832$$

$$\lg B = 9,3801552$$

$$\lg \alpha = 9,8865280$$

$$\alpha = 0,770066$$

2. Рассчитаем постоянную проекции $\rho_{экв}$ по формулам:

$$\rho_{экв} = \frac{N_1 \cos \varphi_1 U_1^\alpha}{\alpha} = \frac{N_2 \cos \varphi_2 U_2^\alpha}{\alpha};$$

$$\lg \rho_{экв} = \lg(N_1 \cos \varphi_1) + \alpha \lg U_1 + \text{доп.} \lg \alpha = \lg(N_2 \cos \varphi_2) + \alpha \lg U_2 + \text{доп.} \lg \alpha.$$

Для определения $\rho_{экв}$ найдем сначала значение $\alpha \lg U_1$ и $\alpha \lg U_2$:

$$\begin{array}{ll} \lg U_1 = 0,329\,457 & \lg U_2 = 0,569\,426 \\ \alpha = 0,770\,066 & \alpha = 0,770\,066 \end{array}$$

$$\alpha \lg U_1 = 0,253\,703, \quad \alpha \lg U_2 = 0,438\,496$$

Вычислив значение $\alpha \lg U$, определим $\lg \rho_{экв}$ в метрах:

$$\begin{array}{ll} \lg(N_1 \cos \varphi_1) = 6,689\,556 & \lg(N_2 \cos \varphi_2) = 6,504\,764 \\ \alpha \lg U_1 = 0,253\,703 & \alpha \lg U_2 = 0,438\,496 \\ \text{доп.} \lg \alpha = 0,113\,472 & \text{доп.} \lg \alpha = 0,113\,472 \end{array}$$

$$\lg \rho_{экв} = 7,056\,731 - \lg \rho_{экв} = 7,056\,732$$

Таблица 6

φ	Координаты	Д о л г о т а λ						2φ и ρ
		0°	5°	10°	15°	20°	25°	
		90—100°	85—105°	80—110°	75—115°	70—120°		
30°	x ±y	152,510 0	152,168 10,195	151,146 20,345	149,450 30,493	147,084 40,326	144,058 50,065	303,020 152,510
35°	x ±y	140,935 0	140,619 9,412	139,675 18,801	138,107 28,086	135,923 37,265	133,125 46,268	281,870 140,935
40°	x ±y	129,585 0	129,295 8,653	128,427 17,287	126,985 25,823	124,977 34,264	122,403 42,542	259,170 129,585
45°	x ±y	118,382 0	118,118 7,904	117,324 15,792	116,006 23,590	114,172 31,302	111,822 38,865	236,764 118,382
50°	x ±y	107,250 0	107,010 7,160	106,292 14,307	105,098 21,371	103,432 28,359	101,306 35,209	214,500 107,250
55°	x ±y	96,108 0	95,892 6,425	95,248 12,821	94,180 19,150	92,688 25,412	90,782 31,552	192,216 96,108
60°	x ±y	85,060 0	84,870 5,686	84,300 11,347	83,352 16,947	82,032 22,491	80,346 27,925	170,120 85,060
65°	x ±y	73,413 0	73,249 4,908	72,757 9,783	71,939 14,636	70,801 19,412	69,345 24,101	146,826 73,413
70°	x ±y	61,652 0	61,114 4,121	60,700 8,224	60,014 12,291	59,058 16,302	57,836 20,240	123,304 61,652
$\sin^2 \frac{n\delta}{2}$	—	—	0,001119	0,204469	0,010036	0,017796	0,027711	
$\sqrt{\sin n\delta}$	—	—	0,066850	0,133400	0,199366	0,264416	0,328294	

Примечание: величины $\lg U$, $\lg N \cos \varphi$ и $\lg N \operatorname{ctg} \varphi$ выбираются соответственно из Картографических таблиц.

Для получения всех радиусов параллелей в масштабе карты k в сантиметрах надо $\rho_{\text{ЭКВ}}$ разделить на знаменатель численного масштаба и умножить на 100:

$$\lg \rho_{\text{ЭКВ}} = 7,056\ 732$$

$$\lg 2 \cdot 10^{-5} = 5,301\ 030$$

$$\lg \rho_{\text{ЭКВ}} = 2,357\ 762$$

3. Вычислим полярную координату δ по формуле $\delta = \alpha \lambda$, где λ — заданная разность долгот. В нашем случае $\lambda = 5^\circ = 18000''$

$$\begin{array}{r} \lg \alpha = 9,886\,5282 \\ \lg \lambda = 4,255\,273 \\ \hline \lg \delta'' = 4,141\,801 \\ \delta'' = 138\,61'' \text{ или } \delta = 3^\circ 51' 01'' \end{array}$$

Зная значения δ , определим величины $n\delta$ и $\frac{n\delta}{2}$, которые необходимы для вычисления прямоугольных координат x и y . Данные сведем в табл. 7.

Таблица 7

λ	$n\delta$	$\frac{n\delta}{2}$
5°	$3^\circ 51' 01''$	$1^\circ 55' 30''$
10°	$7^\circ 42' 02''$	$3^\circ 51' 01''$
15°	$11^\circ 33' 03''$	$5^\circ 46' 32''$
20°	$15^\circ 24' 04''$	$7^\circ 42' 02''$
25°	$19^\circ 15' 05''$	$9^\circ 37' 32''$

4. Вычислим полярную координату ρ по формуле $\rho = \frac{\rho_{\text{ЭКВ}}}{U^\alpha}$, отсюда $\lg \rho = \lg \rho_{\text{ЭКВ}} - \alpha \lg U$. Данные вычисления сведем в табл. 8.

5. Вычислим увеличения $m=n$ и увеличения площадей p по формулам

$$m=n = \frac{\alpha \rho_{\text{ЭКВ}}}{N \cos \varphi U^\alpha} \text{ и } p = n^2;$$

отсюда

$$\begin{array}{r} \lg n = \lg \alpha + \lg \rho_{\text{ЭКВ}} + \text{доп.} \lg (N \cos \varphi) + \text{доп.} (\alpha \lg U), \\ \lg \alpha = 9,886\,528 \\ \lg \rho_{\text{ЭКВ}} = 7,056\,731 \\ \hline \lg \alpha + \lg \rho_{\text{ЭКВ}} = 6,943\,259 \end{array}$$

Данные сведем в табл. 9.

Таблица 8

Формулы	Ш и Р О Т а Ф								
	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
$Ig U$	0,237106	0,281855	0,329457	0,380718	0,436704	0,498893	0,569426	0,651605	0,750944
$\alpha Ig U$	0,182587	0,217047	0,253703	0,293118	0,336291	0,384180	0,438496	0,501779	0,578276
$Ig \rho_{\text{ЭКВ}}$	2,357762	2,357762	2,357762	2,357762	2,357762	2,357762	4,357762	2,357762	2,357762
$Ig p$	2,175175	2,140715	2,104059	2,064644	2,021471	1,973582	1,919266	1,855983	1,779486
p	149,684	138,266	127,066	115,783	105,069	94,098	83,036	71,777	60,185

Таблица 9

Формулы	Ш и Р О Т а Ф								
	30°	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°	70°
$Ig \alpha + Ig \rho_{\text{ЭКВ}}$	6,943259	6,943259	6,943259	6,943259	6,943259	6,943259	6,943259	6,943259	6,943259
доп. $Ig (N \cos \varphi)$	3,257404	3,281456	3,310444	3,345086	3,386377	3,435730	3,495236	3,568153	3,659960
доп. $(\alpha Ig U)$	9,817413	9,782953	9,746297	9,706882	9,663709	9,615820	9,561504	9,498221	9,421724
$Ig n$	0,018076	0,007668	0,000000	9,995227	9,993345	9,994809	9,999999	0,009633	0,024943
n	0,044	0,018	1,000	0,999	0,985	0,988	1,000	1,022	1,059
p	0,087	0,036	1,000	0,978	0,970	0,976	1,000	1,045	1,122

6. Рассчитаем прямоугольные координаты x и y точек пересечения меридианов и параллелей по формулам (3,35):

Вычисление производится на арифмометре. Для вычисления x на барабан арифмометра ставят величину 2ρ и последовательно умножают на все значения $\sin^2 \frac{\pi\delta}{2}$. При вычислении y на барабан арифмометра ставят значение ρ и умножают последовательно на все значения $\sin \pi\delta$. Значения x и y сведем в табл. 10.

§ 16. Равнопромежуточные и равновеликие конические проекции

Равнопромежуточные конические проекции

В этих проекциях масштаб по меридианам равен единице, т. е. $m=1$. Радиусы ближайших друг от друга параллелей будут отличаться на величину, равную спрямленной дуге меридиана между этими параллелями (рис. 31).

Приняв главный масштаб $\mu_0 = 1$, на основании формулы (3,14) получим для проекции эллипсоида вращения:

$$m = - \frac{d\rho}{M d\varphi},$$

но так как $m=1$, то

$$1 = - \frac{d\rho}{M d\varphi}.$$

Отсюда

$$d\rho = -M d\varphi.$$

Проинтегрировав это выражение, будем иметь для проекции сфероида

$$\rho = -X + \rho_{\text{экв}} = \rho_{\text{эв}} - X, \quad (3,36)$$

где $\rho_{\text{экв}}$ — постоянная интегрирования, а величина X представляет собой длину дуги меридиана от экватора до параллели φ .

Вторая полярная координата $\delta = \alpha\lambda$. Масштаб вдоль параллели в равнопромежуточных конических проекциях, согласно формуле (3,16), в которой $\mu_0=1$, будет

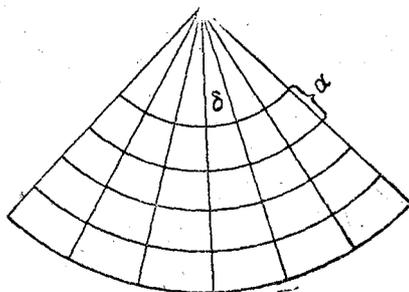


Рис. 31. Вид картографической сетки в равнопромежуточной конической проекции.

Таблица 10

φ	Координаты	Д о л г о т а λ						2ρ и ρ
		0°	5°	10°	15°	20°	25°	
		95°	90—100°	85—105°	80—110°	75—115°	70—120°	
30°	x $\pm y$	149,684 0	149,346 10,051	148,334 20,057	146,652 29,972	144,310 39,752	141,314 49,353	299,369 149,684
35°	x $\pm y$	138,266 0	137,954 9,284	137,020 18,527	135,466 27,696	133,302 36,720	130,534 45,588	276,532 138,266
40°	x $\pm y$	127,066 0	126,780 8,532	125,920 17,026	124,492 25,443	122,504 33,746	119,960 41,895	254,132 127,066
45°	x $\pm y$	115,783 0	115,521 7,775	114,739 15,514	113,439 23,184	111,625 30,749	109,309 38,175	231,566 115,783
50°	x $\pm y$	105,069 0	104,831 7,055	104,121 14,079	102,941 21,039	101,297 27,904	99,193 34,643	210,138 105,069
55°	x $\pm y$	94,098 0	93,886 6,318	93,250 12,609	92,192 18,842	90,720 24,990	88,896 31,025	188,196 94,098
60°	x $\pm y$	83,036 0	82,848 5,576	82,288 11,126	81,354 16,627	80,054 22,052	78,392 27,378	166,072 83,036
65°	x $\pm y$	71,777 0	71,615 4,820	71,129 9,618	70,323 14,372	69,199 19,062	67,763 23,666	143,554 71,777
70°	x $\pm y$	60,185 0	60,049 4,041	59,643 8,064	58,967 12,051	58,023 15,884	56,819 10,844	120,370 60,185
$\sin^2 \frac{n\delta}{2}$	—	—	0,001129	0,004509	0,010127	0,017954	0,027959	—
$\sin n\delta$	—	—	0,067149	0,133996	0,200237	0,165575	0,329714	—

$$n = \frac{\alpha\rho}{N \cos \varphi} = \frac{\alpha\rho}{r} \quad (3,37)$$

или, подставив вместо ρ его значение из уравнения (3,36), окончательно получим:

$$n = \frac{\alpha(\rho_{\text{вв}} - X)}{N \cos \varphi} \quad (3,38)$$

Увеличение площадей, вследствие того, что $m=1$, равно

$$\rho = n. \quad (3.39)$$

Для проекции на конус касательный по параллели φ_0 будем иметь при $m = n_0 = 1$ из формулы (3.17):

$$\alpha = \sin \varphi_0, \quad (3.40)$$

как и для всех проекций на касательный конус.

По формуле (3.38), написанной для параллели касания, имеем

$$\frac{\alpha(\rho_{\text{эКВ}} - X_0)}{N_0 \cos \varphi_0} = \frac{\sin \varphi_0(\rho_{\text{эКВ}} - X_0)}{N_0 \cos \varphi_0} = 1.$$

Отсюда получает выражение постоянная интегрирования

$$\rho_{\text{эКВ}} = N_0 \operatorname{ctg} \varphi_0 + X_0. \quad (3.41)$$

Для проекции на конус секущий сфероид по параллелям φ_1 и φ_2 , по формуле (3.38), заменив в ней для краткости $N \cos \varphi = r$, можем написать для параллелей сечения

$$\frac{\alpha(\rho_{\text{эКВ}} - X_1)}{r_1} = \frac{\alpha(\rho_{\text{эКВ}} - X_2)}{r_2} = 1.$$

Значит,

$$r_2(\rho_{\text{эКВ}} - X_1) = r_1(\rho_{\text{эКВ}} - X_2)$$

или

$$\rho_{\text{эКВ}}(r_2 - r_1) = r_2 X_1 - r_1 X_2$$

Таким образом:

$$\rho_{\text{эКВ}} = \frac{r_2 X_1 - r_1 X_2}{r_2 - r_1}. \quad (3.42)$$

После этого

$$\alpha = \frac{r_1}{\rho_{\text{эКВ}} - X_1} = \frac{r_2}{\rho_{\text{эКВ}} - X_2}. \quad (3.43)$$

Таковы формулы равнопромежуточных конических проекций сфероида, не более сложные, чем формулы проекций шара, так как величины X и r даются в Картографических таблицах по аргументу широты $-\varphi^*$.

Для проекций шара применимы эти же формулы, если подставить $N = M = R$; $X = R \cdot \varphi$; $r = R \cdot \cos \varphi$, причем для вычисления X широту φ надо выразить в радианной мере, т. е.

* Заметим, что при $\varphi = 90^\circ$ $\rho > 0$, т. е. в равнопромежуточных конических проекциях полюс изображается «полярной дугой».

$$X = R \frac{\varphi^{\circ}}{\rho^{\circ}}.$$

Для вычисления сетки в равнопромежуточной конической проекции необходимо вычислить постоянные проекции и определить полярные координаты ρ и δ . В этих проекциях, как и во всех конических, выгодно строить карты территорий, вытянутых по параллелям. Наиболее употребительными равнопромежуточными коническими проекциями являются проекция В. В. Каврайского и проекция Ф. Н. Красовского.

Равновеликие конические проекции шара

Равновеликие проекции характеризуются тем, что отношение площади на карте к площади на изображаемой поверхности, есть величина постоянная; ее принимают равной μ_0^2 . Тогда для равновеликих конических проекций можно написать, что

$$\rho = m n = \text{const} = 1.$$

Подставим в формулу (3,43) значение величин m и n из уравнения (3,14) и (3,16) и, считая $\rho = 1$, получим

$$\frac{d\rho}{R d\varphi} \cdot \frac{\alpha\rho}{R \cdot \cos \varphi} = 1.$$

Отсюда

$$\alpha\rho d\rho = -R^2 \cos \varphi d\varphi.$$

Интегрируя это выражение, будем иметь:

$$\frac{\alpha}{2} \rho^2 - R^2(-\sin \varphi + d) = R^2(d - \sin \varphi),$$

где d — постоянная интегрирования, размерность которой такая же, как у $\sin \varphi$, т. е. нулевая.

Учитывая главный масштаб μ_0 , окончательно получим:

$$\rho = \mu_0 R \sqrt{\frac{2}{\alpha} (d - \sin \varphi)}. \quad (3,44)$$

Для определения масштаба по параллели воспользуемся формулой (3,16), подставив в нее значение ρ из формулы (3,44).

Тогда

$$n = \frac{\alpha\rho}{\mu_0 R \cos \varphi} = \frac{\alpha\mu_0 R \sqrt{\frac{2}{\alpha} (d - \sin \varphi)}}{\mu_0 R \cos \varphi}$$

* При $\varphi = 90^\circ$ $\rho > 0$, т. е. в равновеликих конических проекциях полюс изображается «полярной дугой».

или после сокращения получим

$$\frac{1}{m} = n = \frac{\alpha}{\cos \varphi} \sqrt{\frac{2}{\alpha} (d - \sin \varphi)}. \quad (3,45)$$

Из формулы (3,17), после подстановки в нее выражений увеличений m и n из (3,45), получаем

$$\sin^2 \varphi_0 - 2d \sin \varphi_0 + 1 = 0$$

Это уравнение имеет корни $\sin \varphi_0 = d \pm \sqrt{d^2 - 1}$. Из двух значений корня реальное значение имеет только один, при $d > 1$, определяющий параллель с наименьшим увеличением n_0 и наибольшим m_0 :

$$\sin \varphi_0 = d - \sqrt{d^2 - 1} \quad (3,46)$$

Наибольшее распространение из равновеликих конических проекций имеют проекции Цингера, Эйлера (Альберса), Тиссо.

§ 17. Построение картографических сеток в конических проекциях

Построение картографических сеток в конических проекциях производится в основном двумя способами.

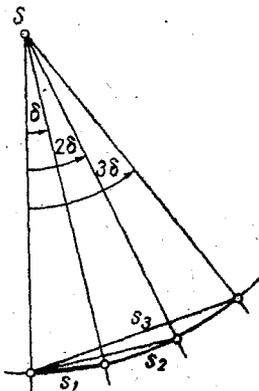


Рис. 32. Построение сетки конической проекции с помощью циркуля и линейки.

Первый способ применяется при построении карт в мелком масштабе и заключается в вычислении полярных координат ρ и δ по выведенным ранее уравнениям.

Параллели проводят циркулем или штангенциркулем (рис. 32) радиусами ρ , вычисленными для различных широт. Углы $n\delta$ между начальным меридианом ($\delta = 0$) и изображаемым строятся проведением прямых через центр параллелей и засечки из точки пересечения начального меридиана любой параллели же хордами

$$s_n = 2\rho \sin^2 \frac{n\delta}{2}. \quad (3,47)$$

Второй способ употребляется для построения крупномасштабных карт. В этом случае картографические сетки наносят по пря-

моугольным координатам точек x и y пересечения меридианов и параллелей. Для этого заранее на макете карты устанавливают размеры рамки карты a и b (рис. 33). Проводят осевой меридиан $O'C$, определяемый долготой λ_0 и отрезком $OO' = p$.

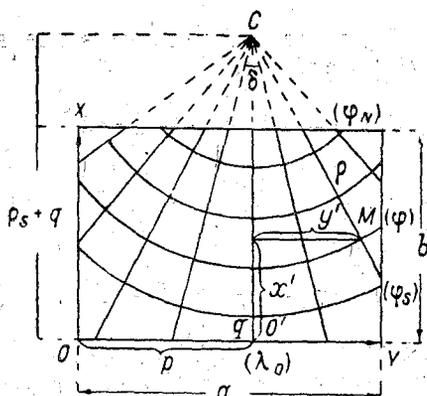


Рис. 33. Построение картографической сетки конической проекции по координатам узловых точек.

Если за начало системы координат принять точку O' , средний меридиан $O'C$ за ось x , а нижнюю рамку карты за ось y , то прямоугольные координаты какой-то точки M , находящейся на пересечении меридиана и параллели, можно определить по следующим формулам:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \rho_s + q - \rho \cos n\delta, \\ y' &= \rho \sin n\delta \end{aligned} \right\} \quad (3,48)$$

где ρ_s — радиус самой южной параллели карты, а q — расстояние по среднему меридиану от точки O' до параллели с широтой ϕ_s .

В этом случае достаточно вычислить координаты x и y только для половины сетки, так как средний меридиан $O'C$ является осью симметрии и другая половина будет строиться по тем же значениям x и y , только ординаты будут со знаком минус. Но обычно для удобства начало координат переносят в точку O (юго-западный угол рамки), и тогда формулы (3,48) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho_s + q - \rho \cos n\delta, \\ y &= \rho \pm \rho \sin n\delta, \end{aligned} \right\} \quad (3,49)$$

где $\rho = OO'$ (рис. 33),

Глава IV

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

§ 18. Общая теория

Цилиндрическими проекциями называются такие, у которых параллели нормальной сетки прямые линии, параллельные экватору. Меридианы также прямые, перпендикулярные параллелям. Расстояния между меридианами пропорциональны разностям долгот.

Согласно определению цилиндрических проекций, изображение точки (φ, λ) будет иметь в любой цилиндрической проекции плоские координаты x, y , которые могут быть выражены уравнениями следующего вида:

$$x = f(\varphi); \quad (4.1)$$

$$y = C\lambda, \quad (4.2)$$

где x — расстояние параллелей от экватора, абсцисса; y — расстояние меридианов от начального меридиана, ордината; C — коэффициент пропорциональности.

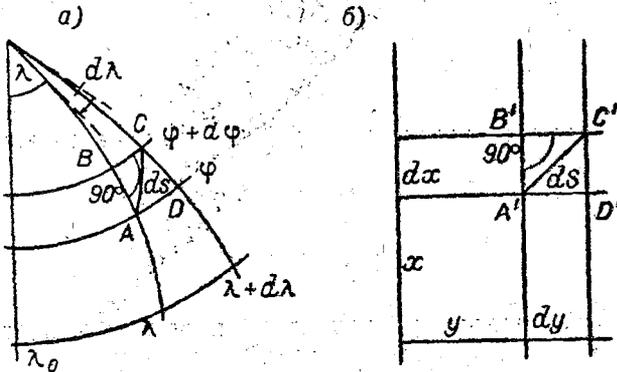


Рис. 34. Трапеция на земном эллипсоиде $ABCD$ (а), изображение $A'B'C'D'$ этой трапеции в цилиндрической проекции (б).

Вид функции $x = f(\varphi)$ определяется условиями равноугольности, равнопромежуточности или равновеликости проекции.

Выведем формулы масштабов по меридианам и параллелям, общие для всех цилиндрических проекций. Возьмем на эллипсоиде бесконечно малую трапецию $ABCD$; при перенесении на проекцию она изобразится плоской трапецией $A'B'C'D'$ (рис. 34, *a* и *б*).

В треугольнике ABC угол $B = 90^\circ$. На проекции, согласно условию, в треугольнике $A'B'C'$ угол $B' = 90^\circ$.

На эллипсоиде точка A имеет координаты φ и λ , точка C — $(\varphi + d\varphi)$ и $(\lambda + d\lambda)$. Соответственно на проекции точка A' (x, y), а точка C' ($x + dx$) и $(y + dy)$.

Определим масштаб по меридиану. Из определения частного масштаба следует, что масштаб по меридиану будет равен

$$\mu_m = \frac{A'B'}{AB}, \quad (4,3)$$

где $A'B'$ — линейное приращение dx , AB — длина дуги меридиана $Md\varphi$. Подставив значения $A'B'$ и AB в формулу масштаба по меридиану, получим

$$\mu_m = \frac{dx}{Md\varphi}. \quad (4,3')$$

Увеличение масштаба по меридиану m будет равно отношению частного масштаба μ_m к главному μ_0 . Отсюда:

$$m = \frac{dx}{\mu_0 Md\varphi}. \quad (4,4)$$

По аналогии с предыдущим масштаб по параллели можно представить как отношение

$$\mu_n = \frac{A'D'}{AD},$$

где $A'D'$ — линейное приращение dy , AD — длина дуги параллели, равная $N \cos \varphi d\lambda$.

Заменив $A'D'$ и AD их значениями, будем иметь

$$\mu_n = \frac{dy}{N \cos \varphi d\lambda}, \quad (4,5)$$

но dy является разностью ординат на проекции и поэтому соответствует разности долгот $d\lambda$ на эллипсоиде. Тогда

$$dy = Cd\lambda. \quad (4,6)$$

Подставим значение dy из формулы (4,6) в уравнение (4,5).

Следовательно,

$$\mu_n = \frac{C d_\lambda}{N \cos \varphi d_\lambda}$$

или после сокращения

$$\mu_n = \frac{C}{N \cos \varphi} = \frac{C}{r}. \quad (4.7)$$

На основании (4.7) можно написать, что увеличение масштаба по параллели будет равно:

$$n = \frac{C}{\mu_0 N \cos \varphi} = \frac{C}{\mu_0 r}. \quad (4.8)$$

Для определения коэффициента пропорциональности C воспользуемся формулой (4,8) для случая, когда частный масштаб на некоторой параллели φ_0 будет равен главному, т. е. увеличение $\mu_0 = 1$. Эта параллель называется главной. Тогда

$$\frac{C}{\mu_0 N_0 \cos \varphi_0} = 1,$$

отсюда

$$C = \mu_0 N_0 \cos \varphi_0,$$

или

$$C = \mu_0 r_0, \quad (4.9)$$

т. е. постоянная проекции C есть радиус r_0 главной параллели, выраженный в главном масштабе.

Подставив C в выражение (4,8), окончательно получим

$$n = \frac{\mu_0 N_0 \cos \varphi_0}{\mu_0 N \cos \varphi} = \frac{N_0 \cos \varphi_0}{N \cos \varphi} = \frac{r_0}{r}, \quad (4.10)$$

где r_0 и r — радиусы главной и заданной параллели.

Наименьшее из увеличений по параллелям — по экватору, так как r_{max} при $\varphi = 0$.

Заменив в формуле (4,2) величину C ее значением, найдем

$$y = \mu_0 N_0 \cos \varphi_0 \lambda$$

или

$$y = \mu_0 r_0 \lambda, \quad (4.11)$$

но практическое пользование этой формулой неудобно, так как она требует выражения λ в радианной мере, поэтому рациональнее выразить долготу в угловых минутах

$$y = \mu_0 r_0 \operatorname{arc} 1' \lambda'. \quad (4.12)$$

Кроме того, не следует забывать, что меридианы и параллели в этой проекции перпендикулярны друг другу, а раз это так, то они совпадают с главными направлениями эллипса искажений. Поэтому увеличение масштабов наибольшее будет a , а наименьшее b .

На этом основании можно написать, что увеличение площадей

$$p = ab = mn. \quad (4.13)$$

Наибольшее искажение углов и наиболее искажаемые направления

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) = \operatorname{tg} U = \operatorname{ctg} U' = \sqrt{\frac{a}{b}}. \quad (4.14)$$

Если принять землю за шар радиуса R , то формулы увеличений масштабов переписутся следующим образом:

$$\text{увеличение по меридиану} - m = \frac{dx}{\mu_0 R d\varphi}, \quad (4.15)$$

$$\text{увеличение по параллели} - n = \frac{C}{\mu_0 R \cos \varphi}. \quad (4.16)$$

Из выражения (4.16) определим, чему равен коэффициент пропорциональности C для случая, когда частный масштаб на главной параллели φ_0 будет равен главному, т. е. $n=1$. Отсюда:

$$C = \mu_0 R \cos \varphi_0. \quad (4.17)$$

Подставив в (4.16) значение C из (4.17), окончательно получим:

$$n = \frac{\mu_0 R \cos \varphi_0}{\mu_0 R \cos \varphi} = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi} = \cos \varphi_0 \operatorname{sec} \varphi. \quad (4.18)$$

Из уравнения (4.18) наглядно видно, что с увеличением широты $\operatorname{sec} \varphi$ будет увеличиваться до бесконечности, а это значит, что в цилиндрической проекции нельзя изображать районы, близкие к полюсам; так как увеличение масштаба по параллели также стремится к бесконечности.

Выведенные формулы цилиндрической проекции показывают, что в нормальном положении эти проекции выгодны для картирования территорий, вытянутых вдоль экватора. Но вследствие того, что любой большой круг может быть принят за экватор, в поперечном положении цилиндрическая проекция выгодна для стран, расположенных вдоль меридиана, а в косом — для территорий, расположенных вдоль произвольно ориентированного большого круга.

Если изображается узкая полоса вдоль экватора нормальной системы координат, выгодно принять увеличение по изображению экватора, т. е. наименьшее $n_{\text{экр}} = 1$, тогда $C = \mu_0 r_{\text{экр}}$.

Для проекции в нормальном положении эллипсоида вращения

$$C = \mu_0 a,$$

где a — радиус экватора, являющийся большей полуосью эллипсоида вращения.

Для проекции шара

$$C = \mu_0 R,$$

где R — радиус изображаемого шара.

В этом случае условно говорят о проекции на «касательный цилиндр» (касание может быть только по большому кругу), где увеличение по параллелям $n \geq 1$.

При изображении полосы значительной ширины, вытянутой вдоль экватора, следует принять наименьшее увеличение вдоль экватора $n_{\text{экр}} < 1$ и взять главные параллели $\pm \varphi_0$ где-либо между экватором и крайними параллелями изображаемого пояса. Тогда в пределах изображения этого пояса разница между наибольшим увеличением n_{max} на краях изображаемой полосы и наименьшим $n_{\text{экр}}$ по экватору распределится по обе стороны от единицы. В этом случае говорят о проекции на цилиндр, «секущий» изображаемую поверхность по главным параллелям.

§ 19. Равноугольная цилиндрическая проекция (проекция Меркатора)

Равноугольная цилиндрическая проекция была предложена в 1569 г. голландским картографом Меркатором (иначе Кремером) и является до настоящего времени основной проекцией для построения морских навигационных карт среднего и крупного масштабов.

Условия равноугольности, как уже известно, заключаются в том, что масштабы по главным, а следовательно, и по всем направлениям равны $a = b = m = n = c = \text{const}$, а поэтому угловых искажений нет и $\omega = 0$. Главными направлениями являются меридианы и параллели.

Эти обстоятельства дают возможность написать условие равноугольности: увеличения масштабов по меридианам и параллелям равны между собой. Тогда на основании формул (4,4) и (4,8) можно написать:

$$m = n = \frac{dx}{\mu_0 M d\varphi} = \frac{C}{\mu_0 N \cos \varphi}. \quad (4,19)$$

Определим из (4,19) вид функции (4,1)

$$dx = \frac{C \mu_0 M d\varphi}{\mu_0 N \cos \varphi} = \frac{CM d\varphi}{N \cos \varphi}, \quad (4,20)$$

где dx — элементарный отрезок абсциссы.

Заменим в выражении (4,20) M и N их значениями из формул (1,6 и 1,7)

$$dx = \frac{Ca(1-e^2)(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi}{a(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} \cos \varphi}$$

и, сократив, получим:

$$dx = C \frac{1-e^2}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi}. \quad (4,21)$$

Преобразуем правую часть уравнения (4,21), умножив в числителе e^2 на $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$:

$$dx = \frac{C[1-e^2(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi)]}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi}$$

или

$$dx = \left[\frac{C(1-e^2 \sin^2 \varphi)}{1-e^2 \sin^2 \varphi} - \frac{Ce(e \cos^2 \varphi)}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \right] \frac{d\varphi}{\cos \varphi}.$$

Отсюда можно написать, что

$$dx = \left(\frac{C}{\cos \varphi} - \frac{Ce^2 \cos \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} \right) d\varphi. \quad (4,22)$$

Для получения абсциссы x проинтегрируем выражение (4,22) в пределах от экватора $\varphi = 0$ до заданной широты φ :

$$x = C \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - Ce \int_0^\varphi \frac{e \cos \varphi}{1-e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi. \quad (4,23)$$

Обозначим:

$$e \sin \varphi = \sin \psi, \quad (4,24)$$

где e — первый эксцентриситет меридианного эллипса.

Дифференцируя выражение (4,24), найдем:

$$e \cos \varphi d\varphi = \cos \psi d\psi \quad (4,25)$$

Возведем (4,24) в квадрат и вычтем из единицы; тогда получим:

$$1 - e^2 \sin^2 \varphi = 1 - \sin^2 \psi = \cos^2 \psi \quad (4,26)$$

Подставив (4,25) и (4,26) в уравнение (4,23), будем иметь:

$$x = C \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos \varphi} - Ce \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\cos \psi}.$$

В результате интегрирования

$$x = C \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - Ce \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right).$$

Так как разность логарифмов равна логарифму частного, то

$$x = C \ln \frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{tg}^e \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right)}. \quad (4,27)$$

Вследствие того, что

$$\frac{\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{\operatorname{tg}^e \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\psi}{2} \right)} = U,$$

то формула для вычисления абсциссы x будет иметь следующий вид:

$$x = C \ln U, \quad (4,28)$$

или в десятичных логарифмах

$$x = \frac{C}{\operatorname{Mod}} \lg U. \quad (4,29)$$

Заменив коэффициент пропорциональности C его значением из формулы (4,9), окончательно получим:

$$x = \frac{\mu_0 r_0}{\operatorname{Mod}} \lg U, \quad (4,30)$$

где $\mu_0 r_0 = \mu_0 N_0 \cos \varphi_0 = C$; Mod — модуль перехода от натуральных логарифмов к десятичным, $\operatorname{Mod} = 0,4342945$; $\lg U$ берется из Картографических таблиц по аргументу φ .

Ордината y вычисляется по общей для всех цилиндрических проекций формуле (4,12).

Вычислив абсциссы x для всех широт от экватора и определив ординату y , можно построить картографическую сетку в проекции Меркатора (рис. 35).

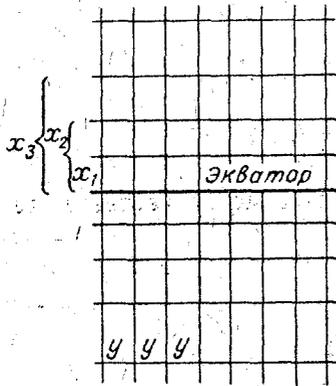


Рис. 35. Картографическая сетка в проекции Меркатора.

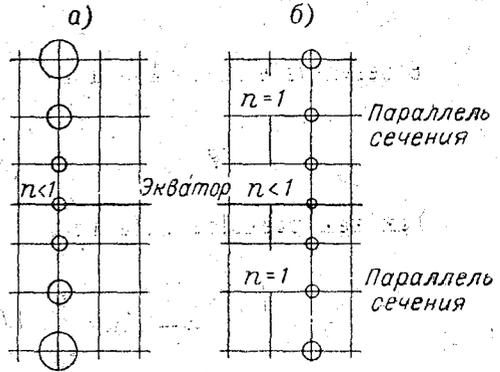


Рис. 36. Графическое представление искажений в проекции Меркатора; а—на «касательный цилиндр»; б—на «секущий цилиндр».

Увеличение масштабов, согласно общим формулам цилиндрических проекций, определяется по формуле (4,10):

Масштаб площадей, благодаря равенству m и n экстремальным a и b , примет вид

$$p = n^2 = m^2. \quad (4,31)$$

На рис. 36 наглядно показано изменение масштабов проекции Меркатора при проектировании на «касательный» и «секущий» цилиндры.

Таблица 11

φ	$m=n$	p
0°	1,000	1,000
10°	1,015	1,031
20°	1,064	1,133
30°	1,155	1,333
40°	1,305	1,704
50°	1,556	2,420
60°	2,000	4,000
70°	2,924	8,548
80°	5,759	33,160
90°	∞	∞

Для большей убедительности в табл. 11 приводятся изменения масштабов $m = n$ и p для различных широт от экватора до полюса при $n_{\text{экв}} = 1$.

На основании формул увеличения масштабов, табл. 11 и рис. 36, а и б можно сделать два основных вывода: во-первых, что карты в проекции Меркатора для районов, близких к полюсам, строить нельзя и, во-вторых, при работе с картами в этой проекции необходимо выбирать такие широтные зоны, в которых практически изменениями масштаба можно пренебречь. (Более подробно вопрос учета искажений и измерения на картах в равноугольной цилиндрической проекции рассматривается в главе IX).

Если принять землю за шар, то многие формулы, применяемые в проекции Меркатора, будут выглядеть значительно проще. Например, формулы увеличения масштабов (4,15) и (4,16).

Поскольку проекция равноугольная, то $m = n$. Отсюда

$$\frac{dx}{\mu_0 R d\varphi} = \frac{C}{\mu_0 R \cos \varphi}.$$

Найдем, чему равняется бесконечно малый отрезок абсциссы dx :

$$dx = \frac{C \mu_0 R d\varphi}{\mu_0 R \cos \varphi}.$$

После сокращения

$$dx = C \frac{d\varphi}{\cos \varphi}. \quad (4,32)$$

Для получения значения абсциссы x проинтегрируем выражение (4,32) от экватора ($\varphi = 0^\circ$) до заданной широты φ .

$$x = \int_0^\varphi C \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = C \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi}. \quad (4,33)$$

После интегрирования

$$x = C \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (4,34)$$

Или, заменив C его значением и перейдя от натуральных логарифмов к десятичным, окончательно получим:

$$x = \frac{\mu_0 r_0}{\operatorname{Mod}} \lg \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (4,35)$$

Вычисление ординаты y производится по формуле (4,12).

Для определения увеличения масштабов используется формула (4,18). В случае «касательного цилиндра», когда «параллелью касания» является экватор и $\cos \varphi_0 = 1$, формула (4,18) примет вид:

$$n = m = \frac{1}{\cos \varphi} = \sec \varphi. \quad (4,36)$$

Масштаб площади $p = n^2$. В случае «касательного цилиндра»

$$p = \sec^2 \varphi \quad (4,37)$$

Меридиональные части.

Единица карты

Ранее было установлено, что x — расстояние от экватора до параллели с широтой φ и y — расстояние от начального меридиана до заданного с долготой λ — могут быть вычислены с помощью формул (4,30) и (4,11), которые напомним иначе:

$$x = \mu_0 r_0 \operatorname{arc} l' \cdot \frac{\lg U}{\operatorname{Mod} \operatorname{arc} l'}; \quad (4,38)$$

$$y = \mu_0 r_0 \operatorname{arc} l' \lambda' \quad (4,39)$$

Здесь величина $r_0 \operatorname{arc} l'$ — длина l' дуги главной параллели, т. е. сохраняющей главный масштаб; $\mu_0 r_0 \operatorname{arc} l'$ — длина той же дуги в главном масштабе; эту величину, равную e , называют единицей карты. Если обозначить x_0 величину, соответствующую удалению x параллели с широтой φ от экватора в проекции Меркатора, т. е. если написать

$$x_0 \mu_0 e = x = \mu_0 r_0 \operatorname{arc} l' \cdot \frac{\lg U}{\operatorname{Mod} \cdot \operatorname{arc} l'}, \quad (4,40)$$

то

$$\frac{\lg U}{\operatorname{Mod} \cdot \operatorname{arc} l'} = \frac{x_0}{r_0 \operatorname{arc} l'} = \frac{x}{\mu_0 r_0 \operatorname{arc} l'} = D'. \quad (4,41)$$

Следовательно, величина D' выражает, сколько в абсциссе x содержится длин l' главной параллели. Величины D' называются меридиональными частями, про них говорят, что они выражены в длинах одной минуты дуги главной параллели или просто в минутах. $D' = f(\varphi)$ и даются в Картографических таблицах по аргументу φ . С учетом сказанного, формула (4,30) переписется в следующем рабочем виде:

$$x = eD', \quad (4,42)$$

а ордината

$$y = e\lambda'. \quad (4,43)$$

В Картографических таблицах приводятся:

1) значения меридиональных частей D в минутах дуги для всех широт от 0 до 90° ;

2) величины единицы карты для стандартных параллелей в миллиметрах в зависимости от главного масштаба μ_0 .

Для нестандартных параллелей определение единицы карты может производиться следующим образом: по аргументу φ_0 берется значение P_0 — длины дуги l' параллели в натуре. Умножив выбранную величину P_0 на главный масштаб, получим значение e ($e = \mu_0 r_0 \operatorname{arc} l' = P_0 \mu_0$).

Главные и стандартные параллели

Для уменьшения искажений на картах в проекции Меркатора удобнее принимать главный масштаб не по экватору, а по какой-то параллели, проходящей по середине данного моря, что и делается на практике.

Для карт каждого моря или части океана установлены свои стандартные параллели, вдоль которых сохраняют главный масштаб. В соответствии с этим для всех морских навигационных карт, издаваемых в Советском Союзе, установлены стандартные (главные) параллели (табл. 12).

Иногда удобно сохранить главный масштаб не по стандартной, а по некоторой другой параллели, которую называют главной.

Но даже и в этих случаях, когда главные масштабы отнесены к стандартным или главным параллелям, расхождение между главными и частными масштабами может достигать довольно большой величины. Например, на картах полярных морей эти отклонения доходят до 33% .

Модуль параллели

Для нахождения частного масштаба по параллели на карте в проекции Меркатора, когда главный масштаб, применяя формулу (4,36), считается не по экватору, а по некоторой главной параллели, служит модуль параллели. Модулем параллели называется коэффициент, на который нужно помножить знаменатель главного масштаба, чтобы получить знаменатель частного масштаба на заданной параллели карты. Исходя из определения модуля параллели, можно написать, что

$$\nu = \frac{M}{M_0}, \quad (4,44)$$

Таблица 12

Название моря или района	Пределы широт в градусах от—до	Широта стандартной параллели в градусах
Восточно-Китайское море	22—35	30
Средиземное море	30—46	40
Японское море с Татарским проливом	30—45	40
Каспийское море	36—47	42
Черное и Азовское моря	41—47	44
Татарский пролив	45—52	52
Схотское море	42—63	52
Берингово море	53—66	59
Северное море	51—62	60
Балтийское море	54—66	60
Белое море	64—69	66
Берег Норвегии	58—65	60
Берег Норвегии	65—71	69
Баренцево море: Мурманский берег	68—70	69
Карское море: Обь-Енисейский район	67—74	70
Северный Ледовитый океан	70—82	75
	0—10	0
	10—33	25
	33—46	40
Остальные моря	46—56	52
	56—65	60
	65—72	69
	72—78	75
	78—82	80

где ν — модуль параллели, M_0 — знаменатель главного масштаба, M — знаменатель частного масштаба заданной параллели карты.

Модуль параллели можно представить как отношение длины P_0 дуги главной параллели к длине P дуги параллели, для которой определяется частный масштаб:

$$\nu = \frac{P}{P_0} \quad (4,45)$$

Определив модуль параллели, можно, зная M_0 , найти величину частного масштаба

$$\mu = \frac{1}{M} = \frac{1}{\nu M_0} \quad (4,46)$$

Модуль параллели на основании (4,45) определяется по Картографическим таблицам.

§ 20. Вычисление картографической сетки в проекции Меркатора

Вычисление картографической сетки в равноугольной цилиндрической проекции может производиться по формулам, выведенным в предыдущем параграфе. Но в связи с тем, что эти вычисления очень сложные и трудоемкие, созданы специальные таблицы, во много раз упрощающие расчет картографических сеток в проекции Меркатора. За основу при вычислении таблиц приняты формулы (4,42) и (4,43). Если эти формулы ограничить определенными, заранее заданными значениями широт и долгот, то их можно представить в следующем виде:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= e(D - D_S); & y_1 &= e(\lambda - \lambda_W), \\ x_2 &= e(D_N - D); & y_2 &= e(\lambda_{Ost} - \lambda); \end{aligned} \right\} \quad (4,47)$$

где x_1 и x_2 — расстояния от заданной параллели φ до южной и северной рамок, являющихся изображением параллелей: южной φ_S и северной φ_N ;

y_1 и y_2 — расстояния от заданного меридиана λ до западной и восточной рамок, являющихся изображением крайних меридианов: западного λ_W и восточного λ_{Ost} ; D , D_N и D_S — меридиональные части, соответствующие широтам φ_S , φ_N и φ .

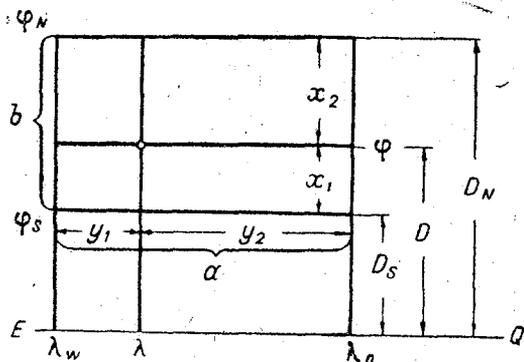


Рис. 37. Построение картографической сетки в проекции Меркатора.

Формулы (4,47) применяются как для вычисления размеров рамки карты, так и для расчета картографической сетки. За начало координат во всех случаях берут юго-западный угол рамки (рис. 37).

При определении координат x и y и построении сетки следует соблюдать определенный порядок действия, а именно:

1) определение главного масштаба карты μ_0 по стандартной или главной параллели с широтой φ_0 , установленной для данной части акватории;

2) установление интервалов между соседними параллелями с таким расчетом, чтобы практически масштаб между ними был бы постоянным;

3) определение по Картографическим таблицам единицы карты, т. е. $e = \frac{P_0}{M_0}$ или $e = P_0\mu_0$, где P_0 — длина 1' дуги параллели φ_0 , выбранная из Картографических таблиц; M_0 — знаменатель главного масштаба; μ_0 — главный масштаб. (Если φ_0 является стандартной параллелью, то единица карты выбирается непосредственно из Картографических таблиц по аргументам φ_0 и μ_0 , а если нет, то рассчитывается таким образом, как указано выше).

4) выборка из Картографических таблиц значения меридиональных частей для каждой параллели φ_i , подлежащей изображению;

5) вычисление по формуле $a = e(\lambda_{Ost} - \lambda_W)$ горизонтальных размеров рамки, для чего разность $(\lambda_{Ost} - \lambda_W)$ выражают в минутах;

6) определение по формуле $b = e(D_N - D_S)$ вертикальных размеров рамки;

7) проверка правильности вычисления размеров рамки, для чего надо определить величину диагонали $d = \sqrt{a^2 + b^2}$;

8) по формулам (4,47) расчет значения разностей $(x - x_1)$, $(x_2 - x)$, $(y - y_1)$ и $(y_2 - y)$ — расстояний промежуточных параллелей и меридианов от рамок;

9) контроль полученных величин по формулам:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + x_2 &= b; \\ y_1 + y_2 &= a. \end{aligned} \right\} \quad (4,48)$$

Расхождение допускается не более 0,001 см.

По полученным значениям x и y очень просто построить картографическую сетку. Для этого на ватмане проводят произвольную горизонтальную линию, представляющую собой южную параллель. Из условно выбранного начала координат на этой линии откладывают расстояния, равные y , и по ним проводят перпендикулярные прямые — меридианы. Затем на меридианах откладывают отрезки, равные x , и через полученные точки прочерчивают прямые, параллельные основной линии, которые и являются искомыми параллелями.

Пример. Вычислить рамку и картографическую сетку карты в проекции Меркатора по следующим данным: $\varphi_S = 44^\circ 40' N$; $\lambda_W = = 35^\circ 00' 16'' O^{st}$; $\varphi_N = 45^\circ 12' N$; $\lambda_{O^{st}} = 35^\circ 31' 01'' O^{st}$.

Масштаб: $\mu_0 = 1:50\,000$ по главной параллели $\varphi_0 = 45^\circ$. Меридианы и параллели провести через $5'$.

Решение.

1. По картографическим таблицам рассчитаем единицу карты $e = P_{0\mu_0}$; $e = 13\,141\,136 \times 0,00002 = 26,28272$ мм.

2. Вычислим размеры рамки карты: $\lambda_{O^{st}} - \lambda_W = 30',75$;

$$a = e(\lambda_{O^{st}} - \lambda_W) = 26,28272 \times 30,75 = 808,19 \text{ мм};$$

$$b = e(D_N - D_S) = 26,28272 \times 45,051 = 1184,06281 \text{ мм}.$$

3. Контроль: $d = \sqrt{a^2 + b^2} = 1433,29$.

4. По формулам (4,47) и по заданным интервалам между меридианами и параллелями определим x и y . Расчет удобно производить по предлагаемой табл. 13.

Таблица 13

Параллели	Меридиональные части, D	Расстояние в мм		Меридианы	Расстояние в мм	
		от южной рамки x_1	от северной рамки x_2		от западной рамки y_1	от восточной рамки y_2
1	2	3	4	5	6	7
S рамка				W рамка		
44°40'	2985,543	—	1184,05	35°00'16"	—	808,19
44°45'	2992,555	184,29	999,77	35°05'	124,84	683,35
44°50'	2999,576	368,82	815,24	35°10'	256,26	551,94
44°55'	3006,608	553,64	630,42	35°15'	387,67	420,52
45°00'	3013,650	738,41	445,33	35°20'	519,08	289,11
45°05'	3020,703	924,10	259,96	35°25'	650,50	157,70
45°10'	3027,766	1107,09	74,33	35°30'	790,91	26,28
N рамка				O st рамка		
45°12'	3030,594	1184,05	—	35°31'	808,19	—

Пояснения к таблице 13

1. В столбцы 1 и 5 заносятся соответственно φ и λ с заданным интервалом.

2. В столбце 2 меридиональные части D по заданной широте выбираются из Картографических таблиц.

3. Данные в столбце 3 получаются последовательным вычитанием $(D - D_S)$ и умножением на единицу карты e .

4. Данные в столбце 4 получаются последовательным вычитанием $(D_N - D)$ и умножением на единицу карты e .

5. Значения y_1 и y_2 в столбцах 6 и 7 определяются последовательным вычитанием $(\lambda - \lambda_W)$ и $(\lambda_0 - \lambda)$ и умножением на единицу карты e .

6. Контролем правильности вычисления служат формулы $x_1 + x_2 = b$ и $y_1 + y_2 = a$. Для этого на схеме для каждого значения x_1 и x_2 , y_1 и y_2 , находящихся соответственно на одной и той же φ и λ , следует подсчитать их сумму; она должна быть равна в первом случае вертикальному размеру рамки (b), во втором — горизонтальному размеру рамки (a).

7. Получив значения x и y в мм для каждой φ и λ с выбранным интервалом, строим картографическую сетку. За начало координат принимается юго-западный угол рамки карты.

§ 21. Локсодромия и ортодромия в проекции Меркатора

Уравнение локсодромии. Широкое применение карт в проекции Меркатора для нужд кораблевождения и океанологии объясняется тем, что это единственная проекция, в которой линия постоянного курса — локсодромия — изображается прямой. Для соблюдения этого требования проекция должна быть равноугольной и иметь изображение меридианов в виде параллельных прямых линий; все это соблюдается в проекции Меркатора.

На поверхности земного эллипсоида локсодромия представляет собой линию двоякой кривизны — спираль, пересекающую меридианы под одним и тем же углом. Локсодромия стремится к полюсам, но никогда их не достигает. Длина отрезка локсодромии, по которому перемещается судно по заданному курсу, называется плаванием. В связи с тем, что на картах в проекции Меркатора локсодромия — прямая, то плавание по этой прямой наиболее удобное, так как значительно упрощает все штурманские расчеты и позволяет просто и быстро с помощью измерителя и транспортира прокладывать на карте различные направления и курсы судна. Основным недостатком локсодромии является то, что она не представляет собой наиболее короткого расстояния между двумя точками на земной поверхности.

Для того чтобы яснее представить, что такое локсодромия, рассмотрим рис. 38, на котором отрезки CN и BL — меридианы, соответствующие долготам λ_1 и λ . Отрезок дуги экватора $NL = e(\lambda - \lambda_1)$, где e — единица карты, λ_1 — долгота начальной точки A локсодромии, а λ — долгота ее произвольной точки B . Прямая AB курс судна — локсодромия. Предположим, что точка A лежит на параллели с широтой φ_1 , а точка B — на параллели с широтой φ . Угол K — истинный курс судна. Для определения рас-

стояния точек A и B от экватора достаточно найти их меридиональные части D_1 и D и умножить их на e .

Из прямоугольного треугольника ACB получим $CB = AC \cdot \operatorname{tg} K$, но $CB = NL = e(\lambda - \lambda_1)$; $AC = (D - D_1)e$. Отсюда

$$\lambda - \lambda_1 = (D - D_1) \operatorname{tg} K \quad (4,49)$$

Тогда на основании формулы для определения D можно написать, что

$$\lambda - \lambda_1 = \operatorname{tg} K \left[\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} \right) \right]. \quad (4,50)$$

Выражение (4,50) представляет собой уравнение локсодромии в общем виде, если принять поверхность Земли за поверхность шара.

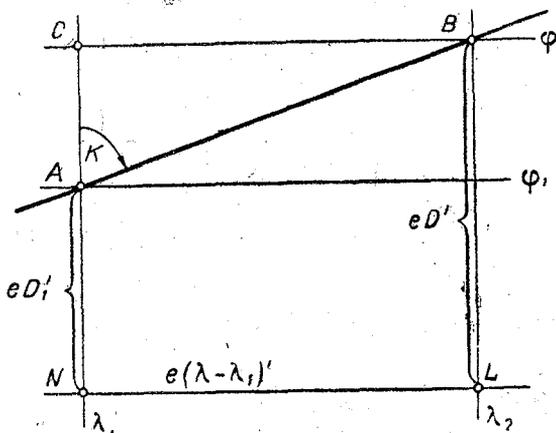


Рис. 38. К выводу уравнения локсодромии.

Проанализируем уравнение локсодромии на некоторых курсах между точками $A(\varphi_1, \lambda_1)$ и $B(\varphi_2, \lambda_2)$.

При курсах судна 0° и 180° $K = 0$, когда $\lambda_2 - \lambda_1 = 0$ или $\lambda_2 = \lambda_1$, т. е. долгота не изменяется; это значит, что локсодромия на курсах N и S проходит через географические полюсы и превращается в меридиан.

Решая уравнение (4,50) относительно $\operatorname{tg} K$, получим

$$\operatorname{tg} K = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2} \right)}$$

Полагая K равным 90° или 270° , формула примет вид

$$\infty = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_2}{2} \right) - \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi_1}{2} \right)}$$

Поскольку $\lambda_2 - \lambda_1$ не может быть равно бесконечности, то, следовательно, знаменатель правой части уравнения равен 0. Тогда $\varphi_1 = \varphi_2$, т. е. широта не меняется и локсодромия превращается в параллель. Если положить $\varphi_1 = 0^\circ$, то точка A локсодромии будет находиться на экваторе, уравнение локсодромии примет более простой вид:

$$\lambda = \lambda_1 + \operatorname{tg} K \ln \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right). \quad (4,51)$$

или

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) = e^{(\lambda - \lambda_1) \operatorname{ctg} K}, \quad (4,51')$$

где e — основание натуральных логарифмов.

По формулам (4,51) или (4,51') легко определить точки пересечения локсодромии с любым меридианом λ или параллелью с широтой φ . Кроме того, из уравнения (4,51) видно, что если долготу λ давать значения λ , $\lambda + 2\pi$, $\lambda + 4\pi$ и т. д., то в каждом случае широта φ имеет новые все увеличивающиеся значения, а долгота останется без изменения, т. е. будет соответствовать тому же меридиану. Отсюда становится ясно, что локсодромия действительно пересекает каждый меридиан бесконечное количество раз в точках, широта которых непрерывно возрастает. Таким образом, как уже указывалось, локсодромия стремится к полюсам, но никогда их не достигает, за исключением случаев, когда она совпадает с меридианом.

Уравнение ортодромии. Известно, что кратчайшим расстоянием между двумя точками на земном эллипсоиде является геодезическая линия, ортодромия; на шаре — это дуга большого круга. При переходе от точки к точке ортодромия составляет различные углы с меридианами и в проекции Меркатора изображается кривой, обращенной выпуклостью к ближайшему географическому полюсу. Поэтому плавание по ортодромии имеет ряд неудобств и требует предварительного вычисления как положения самой ортодромии на навигационной карте, так и курсов, по которым должно идти судно, плавая по дуге большого круга.

Положение дуги ортодромии AB на поверхности земного шара определяется двумя величинами: долготой пересечения продолжения дуги ортодромии с экватором — λ_0 и углом K_0 между меридианами.

дианом и дугой большого круга при пересечении ее с экватором. Для определения этих параметров рассмотрим два прямоугольных сферических треугольника MAA_1 и MVB_1 (рис. 39). Для первого из них можем написать

$$\operatorname{tg} K_0 = \operatorname{ctg} \varphi_1 \cdot \sin (\lambda_1 - \lambda_0). \quad (4.52)$$

Формула (4,52) называется уравнением ортодромии. По аналогии, из треугольника MVB_1

$$\operatorname{tg} K_0 = \operatorname{ctg} \varphi_2 \cdot \sin (\lambda_2 - \lambda_0) \quad (4.53)$$

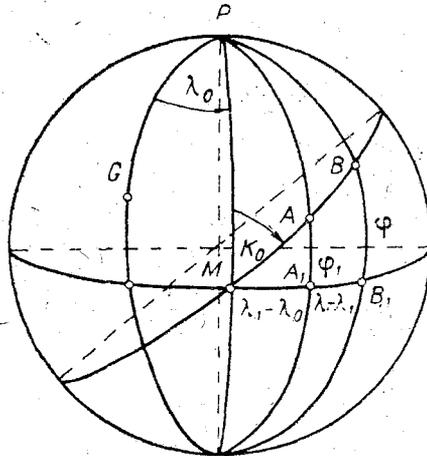


Рис. 39. К выводу уравнения ортодромии.

Решая уравнения (4,52) и (4,53) относительно φ , получим

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_1 &= \operatorname{ctg} K_0 \sin (\lambda_1 - \lambda_0) \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \operatorname{ctg} K_0 \sin (\lambda_2 - \lambda_0) \end{aligned} \right\} \quad (4.54)$$

Определим из формул (4,54) значение λ_0 . Для этого разделим второе уравнение на первое

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} = \frac{\sin (\lambda_2 - \lambda_0)}{\sin (\lambda_1 - \lambda_0)}$$

Представим это уравнение в виде производной пропорции

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\sin (\lambda_2 - \lambda_0) - \sin (\lambda_1 - \lambda_0)}{\sin (\lambda_2 - \lambda_0) + \sin (\lambda_1 - \lambda_0)}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \varphi_2 - \operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_1 + \operatorname{tg} \varphi_2} = \frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Можно написать, что

$$\begin{aligned} & \frac{\sin (\lambda_2 - \lambda_0) - \sin (\lambda_1 - \lambda_0)}{\sin (\lambda_2 - \lambda_0) + \sin (\lambda_1 - \lambda_0)} = \\ &= \frac{2 \cos \frac{\lambda_2 - \lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_0}{2} \cdot \sin \frac{\lambda_2 - \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_0}{2}}{2 \sin \frac{\lambda_2 - \lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_0}{2} \cdot \cos \frac{\lambda_2 - \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_0}{2}} \end{aligned}$$

Произведя некоторые преобразования и сокращения, имеем

$$\frac{\sin (\lambda_2 - \lambda_0) - \sin (\lambda_1 - \lambda_0)}{\sin (\lambda_2 - \lambda_0) + \sin (\lambda_1 - \lambda_0)} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda_0 \right) \cdot \operatorname{tg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2};$$

откуда

$$\frac{\sin (\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin (\varphi_1 + \varphi_2)} = \operatorname{ctg} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda_0 \right) \operatorname{tg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}.$$

или окончательно

$$\operatorname{tg} \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda_0 = \sin (\varphi_1 + \varphi_2) \operatorname{cosec} (\varphi_2 - \varphi_1) \operatorname{tg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2}. \quad (4,55^*)$$

Таким образом, уравнения (4,52) и (4,55) дают возможность определить параметры λ_0 и K_0 , а, зная эти величины, — рассчитать направление ортодромии в любой заданной точке.

Ортодромическая поправка. Угол между локсодромией на карте в проекции Меркатора и касательной к ортодромии, проведенной из той же точки, называется ортодромической поправкой. Ортодромическую поправку можно представить себе как разность локсодромического и ортодромического азимутов или пеленгов. При плавании по дуге большого круга или при определении места судна по радиопеленгам, когда разность направлений между локсодромией и ортодромией достигает практически ощутимых величин, необходимо учитывать ортодромическую поправку. При разности долгот концов отрезка ортодромии менее 30° обычно пользуются приближенной формулой

* При определении величины λ_0 формулу (4,55) следует исследовать на знаки.

$$\psi = \frac{1}{2} (d\lambda \cdot \sin \varphi_m), \quad (4,56)$$

где $\lambda_2 - \lambda_1 = d\lambda = \text{РД}$ — разность долгот, а $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$.

Если разность долгот более 30° , то в этом случае следует применять следующую формулу:

$$\text{tg } \psi = \text{tg } \frac{d\lambda}{2} \cdot \sin \varphi_m. \quad (4,56')$$

Долготы считаются положительными к востоку. Соответственно знак ортодромической поправки определяется как разность

$$\psi = \text{Лок. П} - \text{Орт. П}, \quad (4,57)$$

так что при курсах $0 < K < 180^\circ$ $\psi > 0$; при курсах $180^\circ < K < 360^\circ$ $\psi < 0$.

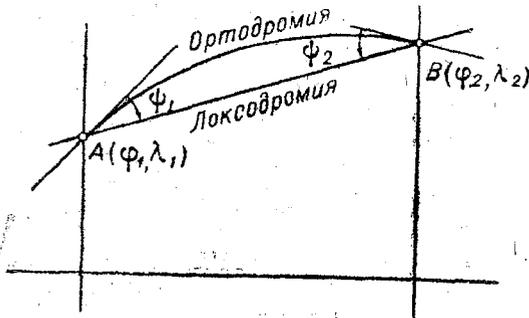


Рис. 40. Ортодромическая поправка.

В формуле (4,57) Лок. П означает азимут (пеленг) локсодромии, а Орт. П — азимут (пеленг) ортодромии в данной точке (см. рис. 40).

Ортодромическая поправка имеет большое значение при определении места судна по радиопеленгам. На карту в проекции Меркатора наносят локсодромические пеленги (Лок. П), а по радиопеленгатору получают ортодромические пеленги (Орт. П). Поэтому для построения на карте нужного направления локсодромии необходимо исправить Орт. П ортодромической поправкой

$$\text{Лок. П} = \text{Орт. П} + \psi, \quad (4,57')$$

считая в правой части сумму алгебраической, учитывая знак ψ .

или

$$\operatorname{ctg} K = \frac{D_2 - D_1}{\text{РД}}$$

Плавание по локсодромии в морских милях:

$$S_{\text{лок}} = \text{РШ} \cdot \sec K. \quad (4,58)$$

Плавание по ортодромии легко определяется по формуле косинуса стороны из рассмотрения сферического треугольника $P_N AB$ (рис. 41).

$$\cos S_{\text{орт}} = \cos(90^\circ - \varphi_1) \cos(90^\circ - \varphi_2) + \sin \times \\ \times (90^\circ - \varphi_1) \sin(90^\circ - \varphi_2) \cdot \cos \text{РД}.$$

или

$$\cos S_{\text{орт}} = \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \text{РД}. \quad (4,59)$$

Формула (4,59) громоздкая, нелогарифмического вида и требует исследования ее на знаки, как и в случае применения этой формулы для вычисления элементов параллактического треугольника в астрономии. Для упрощения определения $S_{\text{орт}}$ можно воспользоваться астрономическими таблицами высот и азимутов светила (ТВА). Аргументами для входа в таблицы являются: $\varphi = \varphi_1$, $\delta = \varphi_2$ и $t = \text{РД}$. Выбранную из ТВА высоту светила h_c принимают за расстояние $S_{\text{орт}}$, предварительно вычитая полученную величину из 90° , так как эта сторона параллактического треугольника является не высотой, а дополнением высоты светила до 90° , т. е. зенитным расстоянием. Таким образом, разность длин локсодромии и ортодромии находится из выражения

$$\Delta S = S_{\text{лок}} - S_{\text{орт}}. \quad (4,60)$$

Пример. Определить разность длин локсодромии и ортодромии, если координаты пункта отхода: $\varphi_1 = 49^\circ 30' \text{N}$ и $\lambda_1 = 10^\circ 19' \text{W}$, а пункта прихода: $\varphi_2 = 38^\circ 10' \text{N}$ и $\lambda_2 = 72^\circ 39' \text{W}$.

Решение.

1. Вычислим длину локсодромии:

$\lambda_2 = 72^\circ 39'$	$\varphi_2 = 38^\circ 10'$	$D_2 = 2466,734$
$\lambda_1 = 10^\circ 19'$	$\varphi_1 = 49^\circ 30'$	$D_1 = 3410,522$
$\text{РД} = 62^\circ 20'$	$\text{РШ} = -11^\circ 20'$	$D_2 - D_1 = -943,788$
$\text{РД} = 3740'$	$\text{РШ} = -680'$	
$\lg \text{РД} = 3,57287$	$\lg \text{РШ} = 2,83251$	
$\lg(D_2 - D_1) = 2,97534n$	$\lg \sec K = 0,61099$	
$\lg \operatorname{tg} K = 0,59753n$	$\lg S_{\text{лок}} = 3,44350$	
$K = 75^\circ 49' 4 \text{ SO}^{\text{st}}$	$S_{\text{лок}} = 2776,5 \text{ мор. миль}$	
$K = 104^\circ 10' 6$		

2. Вычислим длину ортодромии

$$\cos S_{\text{орт}} = \sin^+ \varphi_1 \sin^+ \varphi_2 + \cos^+ \varphi_1 \cos^+ \varphi_2 \cos^+ \text{РД} = \text{I} + \text{II},$$

$\varphi_1 = 49^\circ 30' N$	$\lg \sin \varphi_1 = 9,88105$	$\lg \cos \varphi_1 = 9,81254$
$\varphi_2 = 38^\circ 10' N$	$\lg \sin \varphi_2 = 9,79095$	$\lg \cos \varphi_2 = 9,89554$
$\text{РД} = 62^\circ 20' W$	$\lg \text{I} = 9,67200$	$\lg \cos \text{РД} = 9,66682$
$\text{I} = 0,46989$		$\lg \text{II} = 9,37490$
		$\text{II} = 0,23708$

$$\cos S_{\text{орт}} = 0,70697$$

$$\lg \cos S_{\text{орт}} = 9,84940$$

$$S_{\text{орт}} = 45^\circ 00' 7 = 2700,7 \text{ мор. миль}$$

3. Определим разность длин локсодромии и ортодромии:

$$\Delta S = 2776,5 - 2700,7 = 75,8 \text{ мор. миль.}$$

Нанесение ортодромии на карту в проекции Меркатора. При плавании по дуге большого круга во время гидрологических экспедиционных работ в море возникает необходимость нанести ортодромию на навигационную карту и определить по ней координаты гидрологических станций. Для построения ортодромии на карте в проекции Меркатора достаточно знать географические координаты нескольких промежуточных точек этой дуги между двумя заданными пунктами. Координаты промежуточных точек ортодромии могут быть: 1) сняты с карты в центральной или гномонической проекции; 2) вычислены по формулам или выбраны из таблиц; 3) определены с помощью ортодромической поправки.

Рассмотрим коротко каждый из этих способов.

1. *Нанесение ортодромии по точкам, координаты которых сняты с карты в центральной проекции.* Как увидим, на картах в центральных (гномонических) проекциях любая дуга большого круга изображается прямой линией. Значит, если на карте в этой проекции соединить прямой пункты отхода и прихода и снять координаты необходимого количества промежуточных точек и построить их на карте в проекции Меркатора, соединив плавной кривой, получим дугу большого круга — ортодромию. Обычно для сокращения объема работ промежуточные точки выбираются на пересечении ортодромии с параллелями или меридианами карты, в зависимости от ее расположения, и тогда ограничиваются снятием только одной координаты. При построении ортодромии таким способом необходимо помнить, что карты в центральной или гномонической проекции составляются, как правило, в мелком масштабе и, следовательно, координаты точек снимаются с них с довольно значительными ошибками. Поэтому этот метод нанесения ортодро-

ми на навигационную карту является менее точным, чем два остальных, но в связи с простотой на практике употребляется довольно часто.

2. *Нанесение ортодромии по точкам, координаты которых вычислены по формулам или выбраны из таблиц.* Вычислив по формулам (4,52) и (4,55) значения параметров λ_0 и K_0 , определяют значения φ_i выбранных промежуточных точек с заданными долготами λ_i по формуле (4,54).

При $K_0 < 20^\circ$ по заранее заданным φ_i рассчитывают долготы λ_i промежуточных точек. Для этого формула (4,54) решается относительно λ_i , т. е.

$$\sin(\lambda_i - \lambda_0) = \operatorname{tg} \varphi_i \operatorname{tg} K_0. \quad (4,61)$$

Вычисление координат промежуточных точек дуги большого круга по формулам является наиболее точным из всех существующих методов, но одновременно с этим этот способ самый сложный и трудоемкий.

Пример. Определить широты промежуточных точек, в которых пересекаются меридианы, взятые через 10° , дугой ортодромии, соединяющей Нью-Йорк ($\varphi_1 = 40^\circ 30' N$; $\lambda_1 = 73^\circ 50' W$) и Кейптаун ($\varphi_2 = 33^\circ 40' S$; $\lambda_2 = 18^\circ 10' O^{st}$);

$$\lambda_2 - \lambda_1 = 92^\circ 00' 0; \quad \lambda_1 + \lambda_2 = -55^\circ 40';$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 = +6^\circ 50'; \quad \varphi_2 - \varphi_1 = -74^\circ 10'.$$

Решение.

1. Вычислим λ_0 и K_0 по формулам (4,55) и (4,52):

$$\lg \operatorname{tg} \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} = \lg \operatorname{tg} 46^\circ 00' = 0,0152$$

$$\lg \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = \lg \sin 6^\circ 50' = 9,0755$$

$$\lg \operatorname{cosec}(\varphi_1 - \varphi_2) = \lg \operatorname{cosec}(-74^\circ 10') = 0,0168 W$$

$$\lg \operatorname{tg} \left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} - \lambda_0 \right) = 9,1075 n$$

$$(-27^\circ 50' - \lambda_0) = -7^\circ 18'$$

$$\lambda_0 = -20^\circ 32' = 20^\circ 32' W$$

$$\lg \operatorname{tg} \varphi_1 = \lg \operatorname{tg} 40^{\circ}30' = 0,9315$$

$$\lg \operatorname{cosec} (\lambda_1 - \lambda_0) = \lg \operatorname{cosec} (-53^{\circ}18') = 0,0960n$$

$$\lg \operatorname{ctg} K_0 = 0,0275n$$

$$K_0 = 43^{\circ}11'SO^{st}$$

$$K_0 = 136^{\circ}49'$$

2. Определить широты промежуточных точек, расположенных по ортодромии с интервалом по долготе через 10° . Для этого по $K_0 = 43^{\circ}11'$ (берем дополнение до 180° , от этого изменится только знак) и $\lambda_i - \lambda_0$ находим φ (табл. 14).

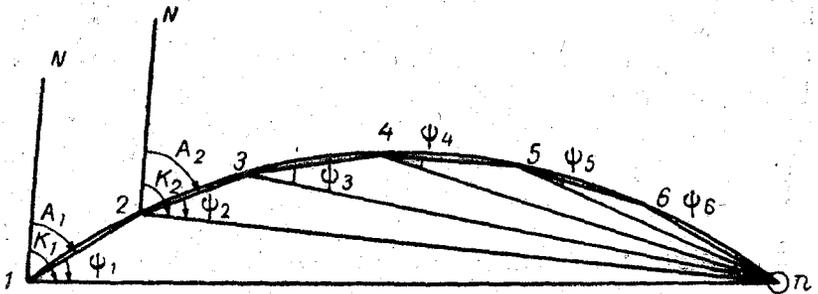


Рис. 42. Нанесение ортодромии на карту в проекции Меркатора с помощью ортодромической поправки.

Таблица 14

$\lambda_i - \lambda_0$	λ_i	φ_i
-50°	$-70^{\circ}32'W$	$+39^{\circ}13'N$
-40°	$-60^{\circ}32'W$	$+34^{\circ}24'N$
-30°	$-50^{\circ}32'W$	$+28^{\circ}03'N$
-20°	$-40^{\circ}32'W$	$+20^{\circ}01'N$
-10°	$-30^{\circ}32'W$	$+10^{\circ}29'N$
0°	$-20^{\circ}32'W$	$0^{\circ} 0'$
10°	$-10^{\circ}38'W$	$-10^{\circ}29'S$
20°	$0^{\circ}32'W$	$-20^{\circ}01'S$
30°	$9^{\circ}28'O^{st}$	$-28^{\circ}03'S$

3. Нанесение ортодромии на карту с помощью ортодромической поправки. Для построения дуги большого круга в проекции Меркатора с применением ортодромической поправки делают следующие построения и расчеты. Соединяют прямой линией на-

чальную и конечную точки и измеряют локсодромический курс K_1 судна (рис. 42). Как известно

$$A = K - \psi,$$

где A — угол между истинным меридианом и направлением ортодромии (ортодромический курс судна); K — локсодромический курс судна; ψ — ортодромическая поправка.

Знак ортодромической поправки берется согласно правил, изложенных выше в этом параграфе, формула (4,57).

Практически построение ортодромии производится так: вычислив величину ψ_1 для начальной точки и отложив эту поправку от локсодромии, наносят, в сторону к ближайшему полюсу, направление касательной к дуге большого круга в виде прямой под углом A_1 из точки 1. Отрезок касательной к ортодромии принимают за дугу ортодромии. Затем на полученном отрезке ортодромии откладывают 200—300 миль (расстояние определяется в зависимости от скорости судна). Полученную точку 2 соединяют прямой с конечной точкой, и измеряют локсодромический курс K_2 этой прямой. Рассчитывают ортодромическую поправку ψ_2 и проводят второй отрезок ортодромии под углом $A_2 = K_2 - \psi_2$. Снова откладывают на отрезке ортодромии 200—300 миль и т. д. до тех пор, пока не будет проведен отрезок ортодромии с предпоследней точки на конечную. Проведя плавную кривую через все точки, получим изображение дуги большого круга.

§ 22. Равнопромежуточные и равновеликие цилиндрические проекции

Равнопромежуточная цилиндрическая проекция шара.

Основное условие равнопромежуточных цилиндрических проекций заключается в том, что увеличение масштаба по меридианам равно единице ($m = 1$).

Самой простой проекцией этого вида является простая или квадратная проекция, являющаяся проекцией шара на «касательный цилиндр». В этой проекции $C = R$ и расстояние y между меридианами начальным и изображаемым равно выпрямленной дуге экватора для соответствующей разности долгот λ , а расстояние x от экватора до изображаемой параллели φ равно выпрямленной дуге меридиана от экватора до параллели φ . Поэтому, если задать одинаковые разности широт и долгот, то получится квадратная сетка (рис. 43).

Для вычисления координат x и y примем Землю за шар с ра-

диусом R . В этом случае дуга экватора, которая представляет собой ординату y , будет

$$y = R\lambda. \quad (4,62)$$

Абсцисса x соответственно

$$x = R\varphi. \quad (4,63)$$

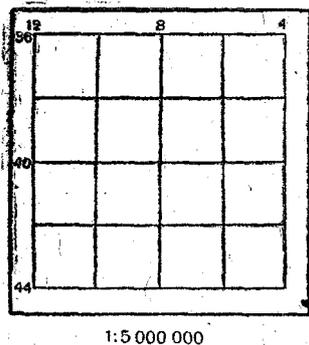


Рис. 43. Картографическая сетка равнопромежуточной цилиндрической (квадратной) проекции.

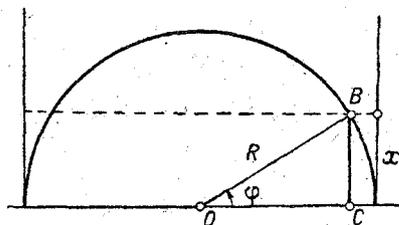


Рис. 44. Определение координаты x в изоцилиндрической проекции Ламберта.

В формулах (4,62) и (4,63) λ и φ выражены в радианной мере. Если φ и λ выразить в градусах и умножить на главный масштаб проекции, то получим

$$\left. \begin{aligned} x &= R\mu_0 \frac{\varphi^\circ}{\rho^\circ}, \\ y &= R\mu_0 \frac{\lambda^\circ}{\rho^\circ}. \end{aligned} \right\} \quad (4,64)$$

При построении картографической сетки удобнее, чтобы величины x и y были даны в сантиметрах, поэтому, если R взять в метрах, формулы (4,64) примут вид

$$\left. \begin{aligned} x &= 100\mu_0 R \frac{\varphi^\circ}{\rho^\circ} \text{ см.}, \\ y &= 100\mu_0 R \frac{\lambda^\circ}{\rho^\circ} \text{ см.} \end{aligned} \right\} \quad (4,65)$$

Обычно вычисление картографической сетки производится при помощи логарифмов. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \lg x &= \lg 100 + \lg \mu_0 + \lg R + \lg \varphi^\circ + \lg \frac{1}{\rho^\circ}, \\ \lg y &= \lg 100 + \lg \mu_0 + \lg R + \lg \lambda^\circ + \lg \frac{1}{\rho^\circ}. \end{aligned} \right\} \quad (4,66)$$

Для определения искажений в квадратной проекции, выведем формулы увеличения масштабов по параллелям. Известно, что

$$n = \frac{C}{r} = \frac{R}{R \cos \varphi} = \sec \varphi,$$

т. е.

$$n = \sec \varphi. \quad (4,67)$$

Вследствие того, что $m = 1$, увеличение площадей будет

$$p = ab = mn = \sec \varphi.$$

Наибольшее искажение углов ω определим по формуле

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{a-b}{a+b} = \frac{n-1}{n+1} = \frac{\sec \varphi - 1}{\sec \varphi + 1} = \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}. \quad (4,68)$$

Таблица 15

φ	m	n	p	ω
90°	1	∞	∞	180°00'
75°	1	3,864	3,864	72°09'
60°	1	2,000	2,000	38°51'
45°	1	1,414	1,414	19°45'
30°	1	1,155	1,155	8°15'
15°	1	1,035	1,035	1°58'
0°	1	1,000	1,000	0°00'

Для большей наглядности изменения увеличения масштабов и искажения углов приводится табл. 15, из которой видно, что в квадратной проекции не сохраняется ни равенство углов, ни равенство площадей. Из-за того, что масштаб по меридианам равен единице, эта проекция равнопромежуточная.

Искажение углов ω очень резко увеличивается по мере приближения к полюсам. Поэтому вполне понятно, что эти проекции наиболее выгодно применять для стран, расположенных вблизи экватора.

Пример. Вычислить картографическую сетку в квадратной проекции. Условия вычисления проекции: главный масштаб $\mu_0 = 1:5\,000\,000$; территория ограничена меридианами $\lambda_{Ost} = 12^\circ O^{st}$ $\lambda_W = 4^\circ O^{st}$ и параллелями $\varphi_S = 36^\circ N$ и $\varphi_N = 44^\circ N$; меридианы и параллели провести через 2° .

Вычисление. В связи с тем, что $\Delta\varphi^\circ = \Delta\lambda^\circ = 2^\circ$, рассчитаем длину дуги экватора в 2° , т. е. $\Delta y = \Delta x$, по формуле и для контроля $y = x$ для $\lambda_{Ost} - \lambda_W = \varphi_N - \varphi_S = 8^\circ$:

$\lg 100 \mu_0 = 4,69897$	$\lg 100 \mu_0 = 4,69897$
$\lg R = 6,80422$	$\lg R = 6,80422$
$\lg 2^\circ = 0,30103$	$\lg 8^\circ = 0,90309$
$\lg \frac{1}{\rho^\circ} = 8,24188$	$\lg \frac{1}{\rho^\circ} = 8,24188$
-10	-10

$\lg \Delta y = 0,04610$	$\lg y = 0,64816$
$\Delta y = 1,112 \text{ см}$	$y = 4,448 \text{ см}$

Получив значение y , строим сетку квадратов со стороной $1,112 \text{ см}$.

На рис. 43 изображена картографическая сетка, построенная согласно условиям настоящего примера.

Равновеликая цилиндрическая проекция шара

В равновеликих проекциях увеличение площадей есть величина постоянная и равная единице, т. е. для цилиндрических проекций

$$p = ab = mn = 1.$$

Наибольшее применение из этого вида цилиндрических проекций имеет изоцилиндрическая проекция, проекция на касательный цилиндр, предложенная в XVIII веке Ламбертом. Свойство равновеликости изоцилиндрической проекции основано на том, что поверхность шарового пояса равна поверхности касательного цилиндра, имеющего ту же высоту с основанием, равным большому кругу шара.

Будем считать ординаты от осевого меридиана по формуле (4,62). Величину абсциссы x можно легко вывести на основании рис. 44 из треугольника OBC

$$x = R \sin \varphi. \quad (4,69)$$

Для того, чтобы x и y были выражены в сантиметрах и масштабе карты, необходимо правые части уравнений (4,62) и (4,69)

умножить на главный масштаб μ_0 и на 100, а величину долготы λ° , выраженной в градусах, разделить на число градусов в радиане. Тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= 100\mu_0 R \sin \varphi \text{ см;} \\ y &= 100\mu_0 R \frac{\lambda^\circ}{\rho^\circ} \text{ см.} \end{aligned} \right\} \quad (4,70)$$

Уравнения (4,70) являются рабочими формулами, по которым рассчитывается картографическая сетка в равновеликой цилиндрической проекции Ламберта.

Увеличение масштаба по параллели рассчитывается точно так же, как и для равнопромежуточных цилиндрических проекций, по формуле (4,67). Увеличение масштаба по меридиану можно получить на основании свойства равновеликости, т. е.

$$m = \frac{1}{n} = \frac{1}{\sec \varphi} = \cos \varphi. \quad (4,71)$$

Наибольшее искажение направления вычисляется по формуле

$$\sin \frac{\omega}{2} = \frac{n-m}{n+m}. \quad (4,72)$$

Характер искажения длин и углов показан в табл. 16, из которой видно, что искажение длин и углов по мере приближения к полюсам резко увеличивается. Обычно эта проекция употребляется для мелкомасштабных карт, на которых показывают распределение географических объектов по зонам в зависимости от изменения широты φ (этнографические, геоботанические и другие карты).

Вычисление картографической сетки в изоцилиндрической проекции, в мелких масштабах, производится следующим образом: меридиан разбивают на отрезки, равные выбранной разности широт в градусах, а параллели проводят перпендикулярно меридиану через полученные точки (рис. 45).

Таблица 16

φ	m	n	ω
0°	1,000	1,000	$0^\circ 00', 0$
10°	0,985	1,015	$1^\circ 45', 0$
20°	0,940	1,064	$7^\circ 7', 4$
30°	0,866	1,155	$16^\circ 25', 6$
40°	0,766	1,308	$30^\circ 11', 2$
50°	0,643	1,556	$49^\circ 2', 0$
60°	0,500	2,000	$73^\circ 44', 6$
70°	0,342	2,924	$104^\circ 28', 4$
80°	0,174	5,759	$140^\circ 35', 8$

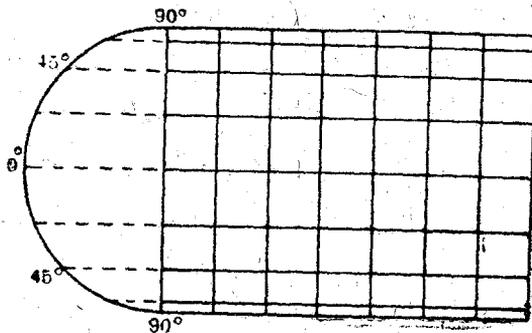


Рис. 45. Построение изоцилиндрической проекции Ламберта.

§ 23. Проекция Гаусса

В основе применяемой в СССР системы плоских прямоугольных координат лежит равноугольная проекция, предложенная в начале XIX века знаменитым немецким математиком Гауссом и носящая его имя. В этой проекции составляются топографические карты СССР в масштабах 1 : 500 000 и крупнее.

Проекция Гаусса определяется следующими условиями, иллюстрируемыми рис. 46:

1) меридиан, принятый за начальный для счета долгот λ_0 , изображается прямой линией, принимаемой за ось абсцисс плоской прямоугольной системы координат с началом в точке O' пересечения с изображением экватора;

2) увеличение длин по оси абсцисс постоянно; в СССР принимается равным единице, т. е.

$$O'A' = OA; O'B' = OB; \dots; O'P' = O'P'_1 = OP = OP_1;$$

3) проекция равноугольная, т. е. бесконечно малый круг при точке M изображается бесконечно малым кругом при точке M' .

Проекция Гаусса, будучи применена для шара, т. е. для эллипсоида вращения с сжатием $\alpha = 0$, обращается в поперечную равноугольную цилиндрическую проекцию, что до некоторой степени оправдывает название проекции Гаусса, проекции эллипсоида вращения, «поперечно-цилиндрической».

В проекции Гаусса точка $M(\varphi, l = \lambda - \lambda_0)$ изображается точкой $M'(x, y)$, причем $x = f_1(\varphi, l)$; $y = f_2(\varphi, l)$.

Положительным (северным) широтам φ соответствуют в проекции положительные абсциссы x ; положительным (к востоку от

начального меридиана) приращениям долготы l соответствуют положительные ординаты y (рис. 47).

Проекция симметрична относительно изображения начального меридиана и экватора, так что для точек $M_1(\varphi, l)$ и $M_2(\varphi, -l)$ их изображения M_1' и M_2' имеют координаты: $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$; для точек $M_3(-\varphi, l)$ и $M_4(-\varphi, -l)$ их изображения M_1' и M_2' имеют координаты: $x_3 = x_4 = -x_1$; $y_3 = -y_4 = y_1$. Чтобы соблюсти эти требования, т. е. чтобы при равных широтах и противоположных по знаку приращениях долготы абсциссы изображений были одинаковы, а ординаты имели знак l , нужно, чтобы абсцисса была функцией четных степеней l , а ордината — функцией нечетных степеней.

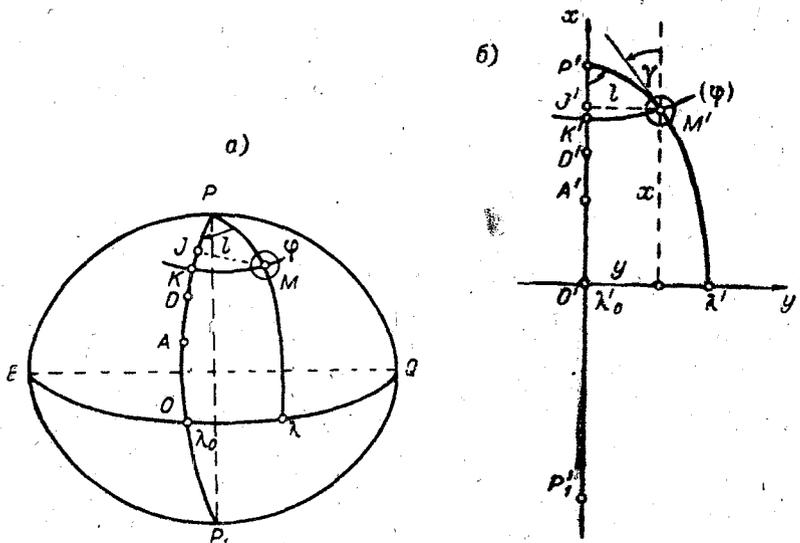


Рис. 46. Эллипсоид вращения (а), его изображение в проекции Гаусса (б).

СССР расположен в северном полушарии, поэтому при изображении его территории в проекции Гаусса абсциссы положительны.

Из определения проекции выводятся следующие формулы точки в проекции Гаусса, определяющие для точки M' , изображающей точку $M(\varphi, l = \lambda - \lambda_0)$, плоские прямоугольные координаты x, y ; сближение меридианов γ , т. е. угол при точке M' между касательной к изображению меридиана и осью абсцисс, и масштаб проекции в функции φ и l . Для формул даем приближенные выражения:

$$x = X + \frac{l}{2\rho^2} N \sin \varphi \cos \varphi + \dots \approx 111 \cdot \varphi^\circ \text{ км}; \quad (4.73)$$

$$y = \frac{l}{\rho} N \cos \varphi + \frac{l^3}{6\rho^3} N \cos^3 \varphi + \dots \approx 111 \cos \varphi \cdot l^\circ \text{ км}; \quad (4,74)$$

$$\gamma = l \cdot \sin \varphi + \frac{l^3}{3\rho^2} \sin \varphi \cos^2 \varphi + \dots \approx l \cdot \sin \varphi; \quad (4,75)$$

$$m = 1 + \frac{l^2}{2\rho^2} \cos^2 \varphi + \dots \approx 1 + \frac{y^2}{2R^2}. \quad (4,76)$$

В этих формулах: X — длина дуги меридиана от экватора до параллели φ ; 111 км — примерная длина 1° земного экватора и меридиана; N — наибольший из главных радиусов кривизны изображаемого эллипсоида; $111 \cos \varphi$ — примерная длина 1° параллели с широтой φ в км; ρ — выражение радиана в тех единицах, в каких взята величина l ; $R = \sqrt{MN}$ — средний радиус кривизны на широте φ .

Искажение длин в проекции равно

$$m - 1 = \frac{y^2}{2R^2}. \quad (4,77)$$

Координатные зоны

Масштаб в проекции Гаусса увеличивается по мере удаления от начального меридиана. Чтобы уменьшить искажение масштаба, при составлении карт и применении в геодезии плоских прямоугольных координат в этой проекции земная поверхность разбивается на меридиональные, или так называемые координатные зоны. Зоны по широте простираются от полюса до полюса, а по долготе — на 6° . Иногда для составления ведомственных крупномасштабных съемок применяются трехградусные зоны.

Для стандартной шестиградусной зоны наибольшее линейное искажение на экваторе достигает величины $1/750$. В трехградусных зонах эти искажения значительно меньше и не превышают $1/3230$.

Меридианы и параллели в проекции Гаусса представляют собой кривые линии, за исключением осевого для данной зоны меридиана, являющегося в ней начальным, который изображается прямой линией, перпендикулярной экватору (рис. 48).

Каждая зона имеет свою систему координат.

Вся поверхность земного эллипсоида делится на 60 шестиградусных зон. Счет зон ведется от Гринвичского меридиана к востоку. Каждая зона имеет свой номер (n).

Долгота осевого меридиана зоны L_0 определяется по формуле

$$L_0 = 6n - 3^\circ. \quad (4,78)$$

Зная L_0 , можно определить номер зоны

$$n = \frac{L_0 + 3^\circ}{6}. \quad (4,79)$$

Координаты x и y измеряются в метрах. На практике для получения всех ординат со знаком плюс их значения увеличивают

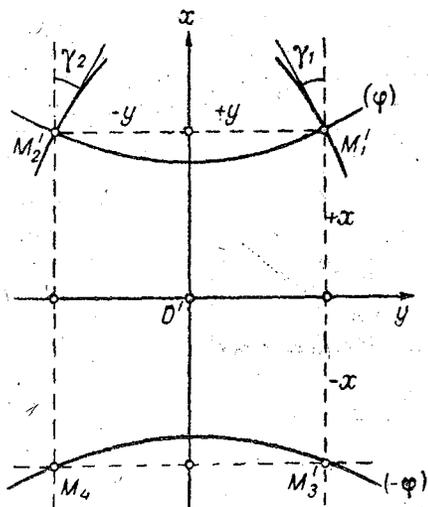


Рис. 47. Правила знаков в проекции Гаусса.

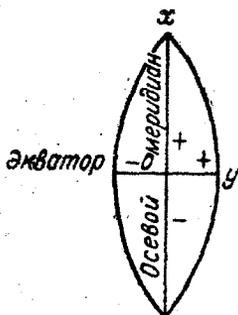


Рис. 48. Меридиональная зона в проекции Гаусса.

на 500 000 м и, кроме того, перед значением ординаты ставят номер зоны. Записанные таким образом координаты называются условными. Например: условная ордината равна 5 400 000 м. Это означает, что $n = 5$, а $y = -100\,000$ м.

Сближение меридианов и дирекционные углы

В проекции Гаусса все меридианы, за исключением осевого, совпадающего с осью Ox , представляют собой кривые линии (рис. 49). Из рисунка видно, что меридианы PM составляют с осью Ox некоторый угол γ , который, как было сказано, называется сближением меридианов.

Как известно, в геодезии направление любой линии определяется азимутом A . Азимутом называется угол между северным направлением меридиана и направлением горизонтальной проекции линии на местности, отсчитываемый по ходу часовой стрелки.

В проекции Гаусса направление любой линии определяется углом, образованным положительным направлением оси абсцисс и данной линией, отсчитываемым по часовой стрелке. Этот угол называется дирекционным углом и обозначается буквой T или α . Поэтому для связи направлений в натуре и на проекции Гаусса следует пользоваться формулами, которые легко выводятся из рис. 49

$$A = \alpha + \gamma \quad (4,80)$$

Выражение (4,80) представляет собою сумму алгебраическую. Величина сближения меридианов γ берется из Картографических таблиц по аргументам φ и l .

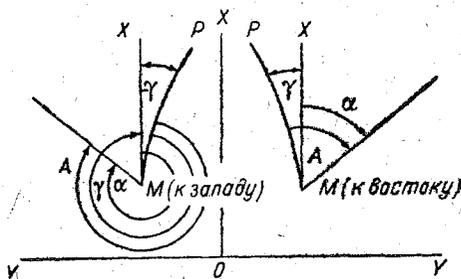


Рис. 49. Сближение меридианов и дирекционные углы.

Километровые линии

Для удобства пользования картами в проекции Гаусса, а также картами и в других проекциях (например, Меркатора) очень часто наряду с меридианами и параллелями наносят координатные линии системы прямоугольных координат, которые называются километровой сеткой. Километровая сетка состоит из километровых линий.

Километровые линии представляют собой прямые, параллельные осям координат со значениями абсцисс и ординат, равными определенному числу километров. Сетка квадратов, образуемая двумя системами равноотстоящих километровых линий, и носит название километровой сетки.

На поверхности эллипсоида километровым линиям соответствуют сферические кривые, очень близкие к геодезическим линиям, нормальным и параллельным к осевому меридиану.

Расчет километровой сетки производится по Картографическим таблицам, которые дают возможность получить долготы и широты точек пересечения километровых линий с параллелями и меридианами.

§ 24. Вычисление картографической сетки в проекции Гаусса

При вычислении картографической сетки в проекции Гаусса необходимо, в первую очередь, установить значения географических координат (φ и λ) углов рамки карты, далее определить долготы меридианов и широты параллелей, которые должны быть нанесены на карту, и составить схему карты. На схеме следует обозначить рамки карты и точки пересечения меридианов и параллелей (рис. 50). При этом надо помнить, что меридианы и параллели наносятся на проекцию Гаусса только для ориентирования.

Выполнив эти несложные построения, приступают к вычислению картографической сетки, для чего:

1) определяют координатную зону и значение осевого меридиана по формулам (4,78) и (4,79);

2) назначают условные начальные координаты, абсциссу x_0 южной и ординату y_0 западной или восточной рамок, относительно которых будут производиться все дальнейшие вычисления;

3) по известным географическим координатам рамки карты, точек пересечения меридианов и параллелей и опорных пунктов рассчитывают плоские прямоугольные координаты этих точек, а также расстояния $x - x_0$, $y - y_0$ их до южной и западной (восточной) рамок.

Перевод географических координат в плоские прямоугольные координаты может быть выполнен по:

а) Таблицам вычисления прямоугольных и географических координат. Изд. ГУВМС, 1948;

б) Таблицам координат Гаусса — Крюгера для широт от 32° до 80° через $5'$ и для долгот от 0° до 6° через $7\frac{1}{2}'$ и таблицам размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок. Эллипсоид Красовского. 3-е изд. М., Госгеолтехиздат, 1963;

в) Таблицам прямоугольных координат углов рамок, размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок масштаба $1:5000$ для широт от 36° до 68° . Эллипсоид Красовского. М., Геодезиздат, 1953;

4) устанавливают интервал, с которым будут проведены километровые линии, и вычисляют их расстояния до южной и западной рамок;

5) по полученным значениям расстояний от x_0 и y_0 строят километровую сетку и наносят опорные пункты.

Пример.* Вычислить рамку карты и картографическую сетку для составления карты в проекции Гаусса в масштабе $1:50000$.

Дано: $\varphi_N = 58^\circ 55' N$; $\varphi_S = 58^\circ 38' N$; $\lambda_W = 3^\circ 36' W$; $\lambda_{0st} = 3^\circ 00' W$.

* Пример взят из книги: Глинков Е. Г. Навигационные пособия. Л., изд. УНГС ВМФ, 1960.

Начальная абсцисса $x_0 = 6\,500\,000,0$ м; начальная ордината $y_0 = 1\,500\,000,0$ м.

Километровые линии провести через 5 км, параллели — через 5' по широте, меридианы — через 10' по долготе.

Схема точек пересечения меридианов и параллелей и углов рамки устанавливается по рис. 50.

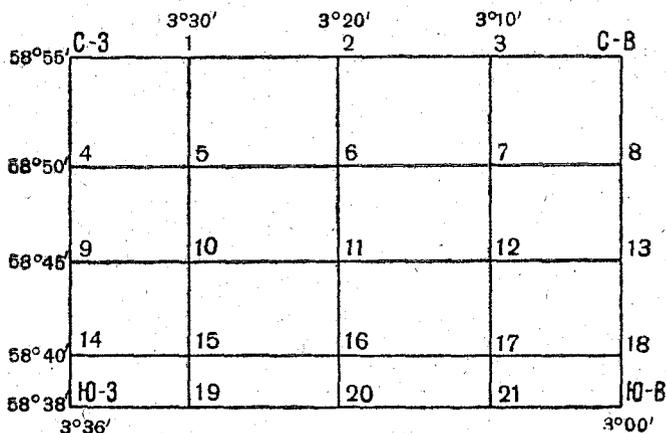


Рис. 50. Схема рамки карты в проекции Гаусса.

Решение.

1. Определяем координатную зону $n = \frac{3^\circ + 3^\circ}{6} = 1$.
2. Осевой меридиан $L_0 = 6n - 3^\circ = 3^\circ \text{W}$.
3. За начало координат возьмем Ю.—В. угол рамки в связи с тем, что осевой меридиан зоны совпадает с восточной рамкой. Но вообще x_0 и y_0 могут быть выбраны совершенно произвольно.
4. Вычисляем прямоугольные координаты углов рамки карты и точек пересечения меридианов и параллелей (табл. 17).
5. Вычисляем километровую сетку (табл. 18).
6. По полученным данным строим картографическую и километровую сетки карты в проекции Гаусса.

Таблица 17

На именованье точки или пункта	Широта φ	λ —долгота, l —долгота от осевого меридиана	x	y	Расстояние в см	
					от x_0	до y_0
С—З угол	58°55'	—3°36' —0°36'	6 533 655,3	—34 598,4 1 465 401,6	67,311	—69,197
С—В угол	58°55'	—3°00' 0°00'	6 533 500,5	0,0 1 500 000,0	67,001	0,00
Ю—З угол	58°38'	—3°36' —0°36'	6 502 094,7	—34 880,8 1 465 119,2	4,189	—69,761
Ю—В угол	58°38'	—3°00' 0°00'	6 501 939,1	0,0 1 500 000,0	3,878	0,00
Точка 1	58°55'	—3°30' —0°30'	6 533 608,1	—28 834,5	67,216	—57,669
Точка 21	58°38'	—3°10' —0°10'	6 501 951,1	—9 681,6	3,902	—19,363

Таблица 18

Наименование километровой линии x	Расстояние от x_0 в $см$	Условные ординаты километро- вых линий y	Расстояние от y_0 в $см$	Наименование километровой линии y
6 500	0,00	1 500	0,00	0
6 505	10,00	1 495	10,00	-5
6 510	20,00	1 490	20,00	-10
6 515	30,00	1 485	30,00	-15
6 520	40,00	1 480	40,00	-20
6 525	50,00	1 475	50,00	-25
6 530	60,00	1 470	60,00	-30
6 535	70,00	1 465	70,00	-35
		1 460	80,00	-40

АЗИМУТАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИИ

§ 25. Общая теория

Согласно определению, азимутальные проекции выражаются уравнениями следующего вида:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= f(\varphi), \\ \delta &= \lambda, \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

где ρ — радиус параллели на карте; δ — угол между меридианами.

Из формул (5.1) видно, что азимутальные проекции являются частным случаем конических проекций, когда коэффициент пропорциональности $\alpha = 1$.

Вид функции $\rho = f(\varphi)$ зависит от того, какую азимутальную проекцию следует получить: равноугольную, равновеликую или произвольную.

Зная полярные координаты ρ и δ , можно построить картографическую сетку в любой азимутальной проекции.

Меридианы и параллели в азимутальных проекциях пересекаются под прямым углом, а отсюда следует, что меридианы и параллели совпадают с главными направлениями эллипса искажений. Поэтому масштабы по меридианам и параллелям являются наименьшим и наибольшим из всех возможных, а увеличения масштабов m и n будут численно равны полуосям эллипса искажений a и b .

Выведем формулы масштабов по меридианам и параллелям в азимутальных проекциях шара. Возьмем на шаре бесконечно малую трапецию $ABCD$; в проекции она изобразится плоской трапецией $A'B'C'D'$ (рис. 51, а и б). Частный масштаб по меридиану будет равен

$$\mu_m = \frac{A'B'}{AB}, \quad (5.2)$$

где $A'B'$ — линейное приращение радиуса параллели $d\rho$; AB — длина дуги меридиана на шаре, равная $Rd\varphi$. Подставив

значения $A'B'$ и AB в формулу (5,2), окончательно получим

$$\mu_m = -\frac{d\rho}{Rd\varphi}. \quad (5,3)$$

Знак минус в уравнении (5,3) поставлен вследствие того, что с увеличением широты φ радиус параллели ρ будет уменьшаться.

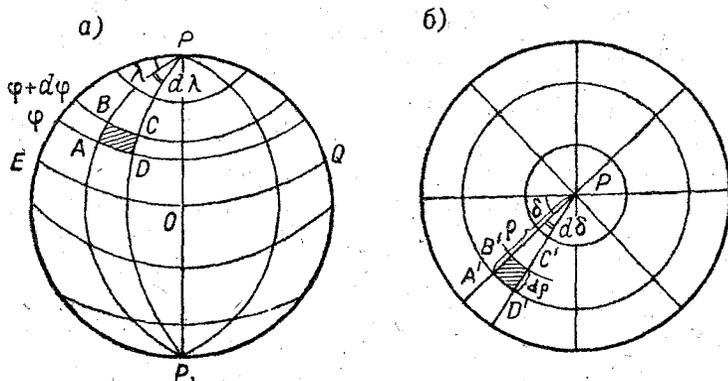


Рис. 51. Трапеция на земном эллипсоиде $ABCD$ (а), изображение этой трапеции $A'B'C'D'$ в азимутальной проекции (б).

Зная, что увеличение масштаба равно отношению частного масштаба к главному, получим

$$m = -\frac{d\rho}{\mu_0 R d\varphi}. \quad (5,4)$$

Масштаб по параллели можно представить, как отношение

$$\mu_n = \frac{A'D'}{AD},$$

где $A'D'$ — равно $\rho d\delta$ (см. § 15); AD — дуга параллели на шаре, равная $R \cos \varphi d\lambda = rd\lambda$. Отсюда

$$\mu_n = \frac{\rho d\delta}{R \cos \varphi d\lambda}. \quad (5,5)$$

Но, согласно формуле (5,1), $\delta = \lambda$. Тогда окончательно получим

$$\mu_n = \frac{\rho}{R \cos \varphi} = \frac{\rho}{r}. \quad (5,6)$$

Увеличение масштаба по параллели

$$n = \frac{\rho}{\mu_0 R \cos \varphi} = \frac{\rho}{\mu_0 r}. \quad (5,7)$$

Поскольку меридианы и параллели совпадают с главными направлениями, то выражение для масштаба площадей и формулы для наибольшего искажения углов будут такими же, как и в конических проекциях (см. формулы (3,8) и (3,9) в гл. III).

Нормальные сетки азимутальных проекций применяются при построении карт северного и южного полушарий, или полярных областей.

Для построения картографической сетки в нормальном положении радиусы параллелей ρ вычисляются по формуле (5,1). Меридианы $n\delta$ рассчитываются по формуле

$$K = 2\rho \sin \frac{n\delta}{2}, \quad (5,8)$$

где K — хорда, стягивающая отрезки параллели между начальным и данным меридианами (см. рис. 32).

Построение сетки производится с помощью циркуля и линейки.

§ 26. Азимутальные проекции в косом и поперечном положениях

Для изображения восточного и западного полушарий или областей, близких по своей форме к кругу и находящихся в районе экватора, употребляются поперечные сетки. Карты материков и территорий, имеющих округлую форму и расположенных в средних широтах, строят на сетке в косом положении.

В этих случаях в виде нормальной сетки изобразятся координатные линии системы с полюсом в точке Z , выбираемой в центре изображаемой области. Координатными линиями являются вертикалы ZZ_1 (аналогичные географическим меридианам), определяемые азимутами a , отсчитываемыми по часовой стрелке от направления на географический полюс P , и альмукантараты (малые круги, аналогичные географическим параллелям), определяемые зенитными расстояниями z , отсчитываемыми от точки Z (рис. 52). Так что формулы азимутальных проекций в общем виде будут

$$\left. \begin{aligned} \rho &= f(z), \\ n\delta &= a. \end{aligned} \right\} \quad (5,9)$$

В выражениях (5,9), сравнительно с (5,1), географические координаты φ и λ заменены сферическими координатами z и a в нормальной системе.

Для того чтобы построить сетку, например в косом положении, необходимо найти сферические координаты z и a в нормальной системе любой точки M (рис. 53) через φ и λ по формулам сферической тригонометрии.

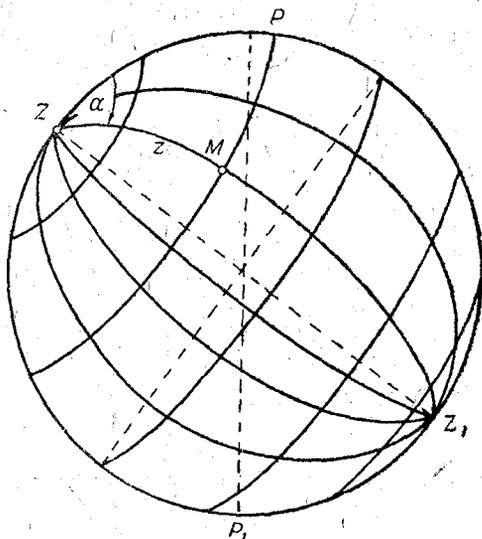


Рис. 52. Координатные линии системы, нормальной для данной проекции.

Из сферического треугольника MZP , где Z — полюс нормальной системы координат с широтой φ_0 и долготой λ_0 , получим

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0), \\ \sin z \cos a &= \cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0), \\ \sin z \sin a &= \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0). \end{aligned} \right\} (5,10)$$

Для решения этих уравнений должны быть выбраны широта φ_0 и долгота λ_0 полюса Z нормальной системы.

Если необходимо построить сетку в поперечном положении, т. е. когда $\varphi_0 = 0$, то формулы (5,10) примут вид

$$\left. \begin{aligned} \cos z &= \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0), \\ \operatorname{tg} a &= \operatorname{ctg} \varphi \sin (\lambda - \lambda_0). \end{aligned} \right\} (5,11)$$

Картографическая сетка в поперечном и косом положениях строится по прямоугольным координатам точек пересечения меридианов и параллелей, так как в этих проекциях меридианы и параллели представляют собой кривые линии. Поэтому, получив полярные координаты (ρ, δ) этих точек, необходимо вычислить их прямоугольные координаты. Связь между прямоугольными и полярными координатами может быть получена на основании следующих несложных выводов. Из рис. 54 видно, что

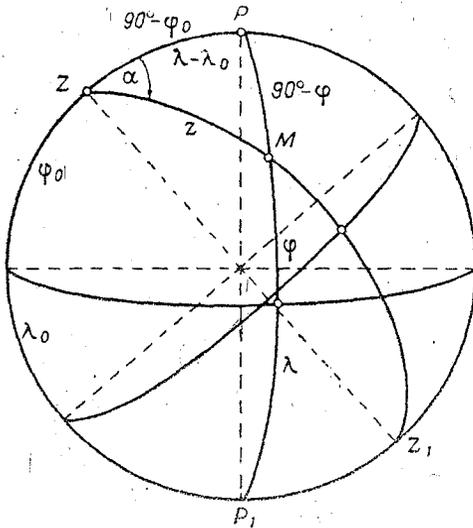


Рис. 53. Связь между координатами в географической и нормальной системах.

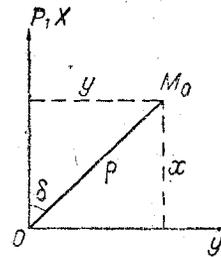


Рис. 54. Связь между полярными и прямоугольными координатами.

$$\left. \begin{aligned} y &= \rho \sin \delta, \\ x &= \rho \cos \delta, \end{aligned} \right\} \quad (5,12)$$

Но, как известно из формулы (5,9), $\delta = a$, отсюда

$$\left. \begin{aligned} y &= \rho \sin a, \\ x &= \rho \cos a, \end{aligned} \right\} \quad (5,13)$$

В общем виде, учитывая, что $\rho = f(z)$, связь между прямоугольными и нормальными сферическими координатами можно записать в таком виде:

$$\left. \begin{aligned} x &= f_1(z, a), \\ y &= f_2(z, a). \end{aligned} \right\} \quad (5,14)$$

Величины z и a выбираются из Картографических таблиц по аргументам φ и λ .

§ 27. Равновеликая азимутальная проекция Ламберта

Равновеликая азимутальная проекция была предложена в 1772 г. немецким ученым Ламбертом.

Условие равновеликости для азимутальных проекций, как известно, заключается в том, что $mn = 1$. Тогда на основании общих формул увеличения масштабов по меридианам и параллелям азимутальных проекций, считая $\mu_0 = 1$, можно написать

$$-\frac{d\rho}{Rd\varphi} \cdot \frac{\rho}{R \cos \varphi} = 1$$

или

$$\frac{d\rho}{Rd\vartheta} \cdot \frac{\rho}{R \sin \vartheta} = 1, \quad (5,15)$$

где $\vartheta = 90^\circ - \varphi$ и с ростом полярного расстояния ϑ растет и ρ . Перепишем уравнение (5,15) в следующем виде:

$$\rho d\rho = R^2 \sin \vartheta \cdot d\vartheta.$$

После интегрирования получим

$$\int_0^\rho \rho d\rho = R^2 \int_0^\vartheta \sin \vartheta d\vartheta; \quad \frac{\rho^2}{2} = R^2 (-\cos \vartheta + 1).$$

Отсюда

$$\rho^2 = 2R^2(1 - \cos \vartheta). \quad (5,16)$$

Заменим

$$1 - \cos \vartheta = 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2},$$

следовательно,

$$\rho^2 = 4R^2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \quad (5,17)$$

или

$$\rho = 2R \sin \frac{\vartheta}{2}. \quad (5,18)$$

Выведем формулы увеличения масштабов по меридианам и параллелям. Для этого воспользуемся уравнениями (5,4) и (5,7), приняв $\mu_0 = 1$.

Увеличение по меридиану

$$m = -\frac{d\rho}{Rd\varphi} = \frac{d\rho}{Rd\vartheta}. \quad (5,19)$$

Взяв вместо ρ его значение из формулы (5,18), получим

$$d\rho = 2R \cos \frac{\vartheta}{2} d \frac{\vartheta}{2} = R \cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta.$$

Отсюда можно написать, что

$$m = \frac{R \cos \frac{\vartheta}{2} d\vartheta}{R d\vartheta} = \cos \frac{\vartheta}{2}$$

или

$$m = \cos \frac{90^\circ - \varphi}{2}. \quad (5,20)$$

Увеличение по параллели

$$n = \frac{\rho}{R \cos \varphi} = \frac{\rho}{R \sin \vartheta} = \frac{2R \sin \frac{\vartheta}{2}}{2R \sin \frac{\vartheta}{2} \cos \frac{\vartheta}{2}} = \sec \frac{\vartheta}{2}. \quad (5,21)$$

Масштаб площади будет

$$p = mn = \cos \frac{\vartheta}{2} \cdot \sec \frac{\vartheta}{2} = 1.$$

Наибольшее искажение углов можно вычислить, подставив в формулу (3,9) значения m и n :

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) = \sqrt{\frac{m}{n}} = \sqrt{n^2} = n = \sec \frac{\vartheta}{2}. \quad (5,22)$$

Мелкомасштабная картографическая сетка в равновеликой азимутальной проекции может быть выполнена графическими построениями (рис. 55). Параллели проводят циркулем, радиусом $\rho =$

$= 2 \sin \frac{\vartheta}{2}$, равным хорде от полюса

Z до соответствующего значения ϑ

на вспомогательном круге, а меридианы — по формуле $K = 2\rho \sin \frac{n\lambda}{2}$,

где K — хорда, стягивающая дуги $n\lambda$ между начальными и изображаемыми меридианами (рис. 55).

Характер искажения масштабов и углов в равновеликой азимутальной проекции наглядно виден из табл. 19.

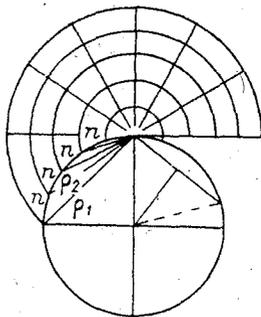


Рис. 55. Построение картографической сетки в проекции Ламберта.

ϑ	m	n	p	ω
0°	1,000	1,000	1	$0^\circ 00'$
15°	0,991	1,009	1	$0^\circ 59'$
30°	0,996	1,035	1	$3^\circ 00'$
45°	0,924	1,082	1	$9^\circ 04'$
60°	0,866	1,155	1	$16^\circ 26'$
75°	0,793	1,260	1	$26^\circ 17'$
90°	0,707	1,414	1	$38^\circ 57'$

Картографическая сетка в прямой равновеликой азимутальной проекции представлена на рис. 56.

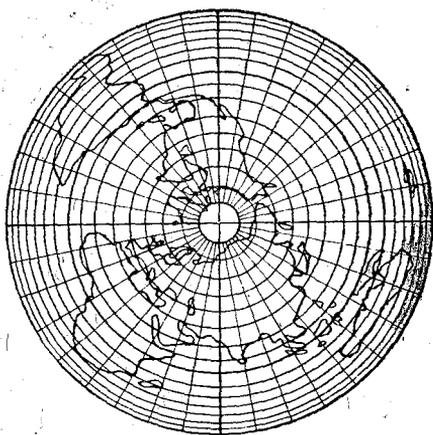


Рис. 56. Картографическая сетка в прямой равновеликой азимутальной проекции.

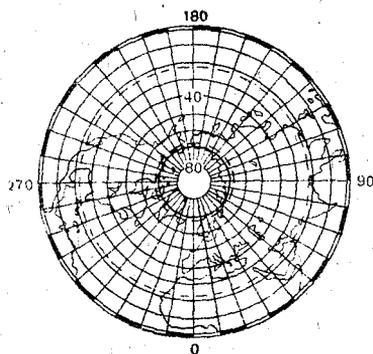


Рис. 57. Картографическая сетка в прямой равнопромежуточной азимутальной проекции.

§ 28. Равнопромежуточная азимутальная проекция Постеля

Равнопромежуточная азимутальная проекция была предложена в XVI веке французским математиком Постелем.

Согласно условию равнопромежуточности, увеличение масштаба по меридианам m равно единице. Для определения значения радиуса ρ воспользуемся формулой (5,4), приняв $\mu_0 = 1$:

$$-\frac{d\rho}{Rd\varphi} = 1.$$

Решив это уравнение относительно $d\rho$, получим

$$d\rho = -Rd\varphi.$$

После интегрирования будем иметь

$$\rho = -R \int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi} d\varphi = R \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right). \quad (5,23)$$

Заменяв $\frac{\pi}{2} - \varphi$ полярным расстоянием ϑ , можно написать:

$$\rho = R\vartheta. \quad (5,24)$$

Вторая полярная координата $\delta = \lambda$.

Увеличение масштаба по параллели легко определить из формулы (5,7)

$$n = \frac{\rho}{R \cos \varphi} = \frac{R\vartheta}{R \sin \vartheta} = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta}. \quad (5,25)$$

Масштаб площади, вследствие того, что $m = 1$, будет равен

$$p = n = \frac{\vartheta}{\sin \vartheta}. \quad (5,26)$$

Наибольшее искажение углов можно получить на основании формулы (3,9)

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) = \sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{n}. \quad (5,27)$$

Характер искажения масштабов и углов в проекции Постеля можно видеть из табл. 20.

Таблица 20

ϑ	$n=p$	m	ω
0°	1,000	1	0°00'
15°	1,012	1	0°39'
30°	1,047	1	2°39'
45°	1,111	1	6°01'
60°	1,209	1	10°52'
75°	1,355	1	17°21'
90°	1,571	1	25°40'

Построение картографической сетки производится графически по тем же формулам, как и в равновеликой проекции Ламберта.

Проекция Постеля используется для карт северного и южного полушарий. На рис. 57 представлена картографическая сетка в равнопромежуточной азимутальной проекции в прямом положении.

В проекциях Ламберта и Постеля можно изобразить весь шар от $0 \leq \vartheta \leq \pi$, причем полюс $\vartheta = \pi$ изобразится окружностью конечного радиуса.

Глава VI

ПЕРСПЕКТИВНЫЕ ПРОЕКЦИИ

§ 29. Общая теория

В § 13 говорилось о том, что перспективными называются азимутальные проекции, которые получаются при проектировании поверхности Земли, принимаемой за шар, на картинную плоскость из постоянной точки зрения, лежащей на перпендикуляре к картинной плоскости, проходящем через центр изображаемого шара.

Перспективные проекции применяются как в нормальном положении, так в поперечном и косом.

В тех случаях, когда полюс нормальной системы сферических координат совпадает с географическим полюсом, общие уравнения перспективных проекций имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= f(\varphi) = F(\vartheta), \\ \delta &= \lambda, \end{aligned} \right\} \quad (6,1)$$

где ϑ — полярное расстояние в географической системе сферических координат.

Для проекций в косых и поперечных положениях общие уравнения перспективных проекций выражаются в функции координат в нормальной системе, а именно:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= f(z), \\ \delta &= a, \end{aligned} \right\} \quad (6,2)$$

где z — зенитное расстояние; a — азимут.

Координаты z и a узловых точек картографической сетки с заданными значениями φ и $(\lambda - \lambda_0)$ вычисляют по формулам (5,10) и (5,11), в которых φ_0 , λ_0 — географические координаты полюса Z нормальной системы координат, выбранного в зависимости от расположения на земной поверхности изображаемой области.

Для определения величины полярной координаты ρ , общего для всех перспективных проекций, рассмотрим рис. 58, где: M — точка, проектируемая на картинную плоскость; φ и λ — географические

координаты точки M ; z и a — азимутальные координаты точки M ; C_0 — центр земного шара; O — точка зрения, откуда производится проектирование; D — расстояние от точки зрения до центра шара; K — расстояние от точки зрения до картинной плоскости (картинное расстояние); Z — полюс нормальной системы координат; M' — проекция точки M на картинной плоскости; x, y — прямоугольные координаты точки M' ; ρ, A — полярные координаты точки M' ; P — географический полюс; EE — плоскость экватора; MQ — перпендикуляр, опущенный из точки M на центральный проектирующий луч OC_0ZZ' .

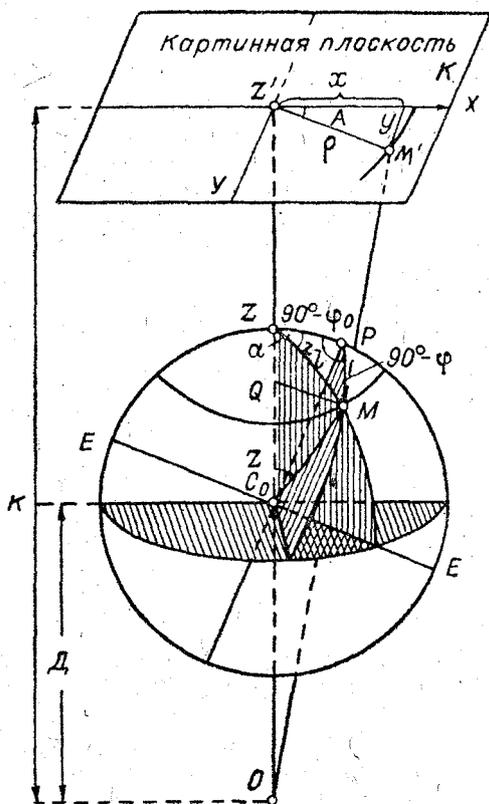


Рис. 58. К выводу формулы радиуса параллели в перспективных проекциях.

Из подобия треугольников $OZ'M'$ и QMO (рис. 58) можно написать, что $\frac{\rho}{QM} = \frac{OZ'}{OQ}$, отсюда

$$\rho = \frac{OZ'}{OQ} QM. \quad (6,3)$$

Для определения C_0Q и QM рассмотрим прямоугольный треугольник QC_0M . Гипотенуза $C_0M = R$ (радиусу изображаемого шара), угол $QC_0M = ZM = z$. Тогда катет $QC_0 = R \cos z$, а катет $QM = R \sin z$. Отсюда $OQ = D + R \cos z$.

Подставив в уравнение (6,3) значения $OZ' = K$, $QM = R \sin z$, $OQ = D + R \cos z$ и считая $\mu_0 = 1$, окончательно получим

$$\rho = \frac{KR \sin z}{D + R \cos z}. \quad (6,4)$$

Выведем формулы для увеличения масштабов по меридианам и параллелям, являющимся главными направлениями.

В случае нормальной сетки можно пользоваться уравнениями (5,4) и (5,7), но для косых и поперечных перспективных проекций их следует преобразовать. Найдем увеличение масштаба вдоль меридиана из выражения (5,4)

$$m = - \frac{d\rho}{R d\varphi}.$$

Но так как общие уравнения для косых и поперечных сеток имеют вид формул (6,2), то

$$m = \frac{d\rho}{R dz}. \quad (6,5)$$

Подставим в формулу (6,5) значение ρ и продифференцируем это выражение

$$m = \frac{(D + R \cos z) dKR \sin z - KR \sin z d(D + R \cos z)}{R^2 (D + R \cos z)^2}$$

или

$$m = \frac{(D + R \cos z) KR \cos z + KR^2 \sin^2 z}{R^2 (D + R \cos z)^2}$$

Отсюда

$$m = \frac{DKR \cos z + KR^2 (\cos^2 z + \sin^2 z)}{R (D + R \cos z)^2};$$

сократив, окончательно получим

$$m = \frac{K(D \cos z + R)}{(D + R \cos z)^2} \quad (6,6)$$

Увеличение масштаба по параллели можно вывести из формулы (5,7)

$$n = \frac{\rho}{R \cos \varphi} = \frac{\rho}{R \sin z}$$

Подставим вместо ρ его значение. Тогда

$$n = \frac{KR \sin z}{(D + R \cos z)R \sin z} = \frac{K}{D + R \cos z} \quad (6,7)$$

Масштаб площади

$$p = mn = \frac{K^2(R + D \cos z)}{(D + R \cos z)^3} \quad (6,8)$$

Наибольшее искажение углов ω определяется по формуле (3,9)

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{m}{n}}$$

Косые и поперечные перспективные проекции вычисляются по прямоугольным координатам. Для вывода формул x и y воспользуемся уравнениями (5,13). Подставив вместо ρ его значение в общем виде, получим

$$\left. \begin{aligned} x &= \rho \cos a = \frac{KR \sin z}{D + R \cos z} \cos a, \\ y &= \rho \sin a = \frac{KR}{D + R \cos z} \sin z \sin a. \end{aligned} \right\} \quad (6,9)$$

Для того чтобы вычислить x и y в косых перспективных проекциях, следует подставить вместо $\sin z \cos a$, $\cos z$ и $\sin z \sin a$ их значения из формул (5,10). Тогда

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{KR [\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)]}{D + R [\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)]}, \\ y &= \frac{KR \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0)}{D + R [\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)]}. \end{aligned} \right\} \quad (6,10)$$

Если в уравнениях (6,10) положить $\varphi_0 = 90^\circ$ (или $\varphi = 0^\circ$), то получим формулы координат для вычисления нормальной сетки

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{KR \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)}{D + R \sin \varphi}, \\ y &= \frac{KR \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0)}{D + R \sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (6,11)$$

Знак минус у абсциссы x ставится потому, что счет долгот противоположен счету азимутов.

Соответственно поставленным условиям изменятся и формулы увеличения масштабов по меридианам и параллелям

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{K(R + D \sin \varphi)}{(D + R \sin \varphi)^2}, \\ n &= \frac{K}{D + R \sin \varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (6,12)$$

При $\varphi_0 = 0$ (или $\vartheta = 90^\circ$) получим формулы координат для расчета поперечных сеток

$$\left. \begin{aligned} x &= \frac{KR \sin \varphi}{D + R \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)}, \\ y &= \frac{KR \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0)}{D + R \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)}; \end{aligned} \right\} \quad (6,13)$$

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{K[R + D \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)]}{D + R \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)}, \\ n &= \frac{K}{D + R \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)}. \end{aligned} \right\} \quad (6,14)$$

Вычисление картографических сеток в перспективных проекциях производится в следующем порядке:

1) по географическим координатам φ и λ узловых точек сетки рассчитываются их координаты z и a в нормальной системе;

2) вычисляются прямоугольные координаты x и y точек пересечения меридианов и параллелей (узловых точек) картографической сетки.

Все формулы, выведенные в этом параграфе, являются общими для вычисления картографических сеток любых перспективных проекций.

§ 30. Ортографические проекции

Перспективные проекции, у которых точка зрения удалена в бесконечность, называются ортографическими проекциями ($K = D = \infty$). В этом случае проектирование производится параллельными лучами, перпендикулярными к картинной плоскости, так что изображено может быть только полушарие.

По положению картинной плоскости относительно полюса сферической системы координат Z ортографические проекции разделяются на прямые (полярные), поперечные (экваториальные) и косые (горизонтные) (рис. 11).

Формулы ортографических проекций выводятся на основе общих уравнений перспективных проекций.

Найдем выражение для полярной координаты ρ из формулы (6,4), которую представим в следующем виде:

$$\rho = \frac{KR \sin z}{D \left(1 + \frac{R}{D} \cos z \right)}.$$

Но вследствие того, что $K = D = \infty$, сократив на $K = D$ и считая $\frac{R}{D} \cos z = 0$ получим

$$\rho = R \sin z. \quad (6,14')$$

Увеличение масштаба вдоль меридиана и параллели определим из формул (6,6) и (6,7). Прделав в этих формулах те же преобразования, какие были сделаны с формулой (6.4), можно написать, что

$$m = \cos z; \quad (6,15)$$

$$n = 1. \quad (6,16)$$

Из уравнения (6,16) видно, что ортографические проекции являются равнопромежуточными по параллелям проекциями.

Формулы для определения x и y выводятся на основании уравнений (6.10) при $D = K = \infty$:

$$\left. \begin{aligned} x &= R[\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos(\lambda - \lambda_0)], \\ y &= R \cos \varphi \sin(\lambda - \lambda_0). \end{aligned} \right\} \quad (6,17)$$

Увеличение площадей из формул (6,15) и (6,16) равно

$$\rho = mn = \cos z. \quad (6,18)$$

Наибольшее искажение углов на основании формулы (3,9)

$$\operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) = \sqrt{\frac{n}{m}} = \sqrt{\frac{1}{\cos z}} = \sqrt{\sec z}. \quad (6,19)$$

Формулы (6,14) — (6,19) являются общими для всех ортографических проекций, и одновременно с этим они служат для вычисления сеток в косо́й (горизонтной) ортографической проекции. В этой проекции меридианы и параллели имеют вид эллипсов (рис. 12,в).

Для вычисления прямой ортографической проекции, т. е. имеющей нормальную сетку, следует принять $\varphi_0 = 90^\circ$. Тогда формулы (6,14) — (6,19) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= R \cos \varphi, \\ m &= p = \sin \varphi, \\ n &= 1, \\ x &= -R \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0), \\ y &= R \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0), \\ \operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) &= \sqrt{\operatorname{cosec} \varphi}. \end{aligned} \right\} (6,20)$$

В прямых ортографических проекциях параллели нормальной сетки изображаются концентрическими окружностями, а меридианы — прямыми, исходящими из одной точки полюса. Углы между меридианами на проекции и в натуре равны между собой (рис. 59, а также 12,а).

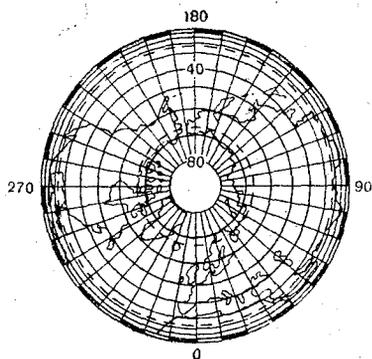


Рис. 59. Макет карты в прямой ортографической проекции.

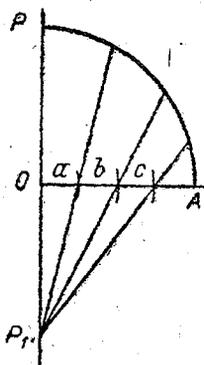


Рис. 60. Построение картографической сетки в прямой стереографической проекции.

Вычисление поперечных (экваториальных) ортографических проекций производится по тем же формулам (6,14) — (6,19), если принять $\varphi_0 = 0^\circ$:

$$\begin{aligned}
 \rho &= R \sin z \\
 m &= \rho \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0), \\
 n &= 1, \\
 x &= R \sin \varphi, \\
 y &= R \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0), \\
 \operatorname{tg}\left(45^\circ + \frac{\omega}{4}\right) &= \sqrt{\sec \varphi \cdot \sec (\lambda - \lambda_0)}.
 \end{aligned}
 \tag{6,21}$$

В экваториальных ортографических проекциях меридианы представляют собой дуги эллипсов, а параллели — параллельные прямые (рис. 12, б).

Следует отметить, что ортографические проекции применяются на практике очень редко. Чаще всего их используют для астрономических карт, при изображении планет — Луны, Марса и т. п.

§ 31. Стереографические проекции

Стереографическими называются перспективные проекции, у которых точка зрения помещается на поверхности изображаемого шара ($D = R$).

Стереографические проекции — равноугольные и, кроме того, обладают очень важным свойством изображать на проекции кругами круги любого размера на шаре.

В зависимости от положения географического полюса относительно полюса нормальной системы координат, все стереографические проекции делятся на прямые (полярные), поперечные (экваториальные) и косые (горизонтные).

Для вывода формул стереографической проекции можно воспользоваться общими уравнениями перспективных, либо равноугольных азимутальных проекций, приняв в последнем случае $m = n$.

Поскольку в настоящем пособии эти проекции рассматриваются как перспективные, все выводы будут делаться на основе теорий перспективных проекций, принимая $D = R$ и $K = 2R$ (проекция на касательную плоскость).

Для определения величины полярной координаты ρ возьмем формулу (6,4)

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{KR \sin z}{D + R \cos z} = \frac{2R^2 \sin z}{R + R \cos z} = \frac{2R^2 \sin z}{R(1 + \cos z)} = \\
 &= \frac{2R \sin z}{1 + \cos z} = 2R \operatorname{tg} \frac{z}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{6,22}$$

При $z = \pi$ $\rho = \infty$, т. е. второй полюс изображается окружностью бесконечно большого радиуса.

Увеличение масштаба вдоль меридиана и параллели найдем по формулам (6,6) и (6,7)

$$\begin{aligned}
 m &= \frac{K(D \cos z + R)}{(D + R \cos z)^2} = \frac{2R^2 (\cos z + 1)}{R^2 (\cos z + 1)^2} = \\
 &= \frac{2}{\cos z + 1} = \sec^2 \frac{z}{2}, \\
 n &= \frac{K}{D + R \cos z} = \frac{2R}{R(\cos z + 1)} = \frac{2}{\cos z + 1} = \sec^2 \frac{z}{2}.
 \end{aligned}
 \tag{6,23}$$

Из уравнений (6,23) видно, что m и n равны, а это обстоятельство подтверждает, что стереографические проекции являются равноугольными (конформными).

Преобразуя уравнения (6,10), получим формулы для определения x и y :

$$\begin{aligned}
 x &= 2R \frac{\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)}{1 + \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)}, \\
 y &= 2R \frac{\cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0)}{1 + \sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)}.
 \end{aligned}
 \tag{6,24}$$

Формулы (6,22) — (6,24) являются общими для всех стереографических проекций и одновременно с этим они являются формулами для вычисления сеток в косо́й стереографической проекции.

В косо́й стереографической проекции картинная плоскость параллельна горизонту в какой-либо точке. Меридианы и параллели изображаются дугами окружностей.

В прямых стереографических проекциях картинная плоскость параллельна экватору. Меридианы изображаются прямыми линиями, сходящимися в одной точке — полюсе. Параллели представляют собой концентрические окружности с центром в точке схода меридианов. По мере удаления от полюса расстояние между параллелями увеличивается.

Для вычисления нормальных сеток следует преобразовать уравнения (6,22) — (6,24), считая $\varphi_0 = 90^\circ$:

$$\rho = 2R \operatorname{tg} \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = 2R \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}; \tag{6,25}$$

$$m = n = \sec^2 \left(45^\circ - \frac{\varphi}{2} \right) = \sec^2 \frac{\vartheta}{2};$$

так как $45^\circ - \frac{\varphi}{2} = \frac{\vartheta}{2}$;

$$\left. \begin{aligned} x &= -\frac{2R \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)}{1 + \sin \varphi}, \\ y &= \frac{2R \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0)}{1 + \sin \varphi}. \end{aligned} \right\} (6,25')$$

Если картинная плоскость параллельна плоскости какого-нибудь меридиана, то получим поперечную стереографическую проекцию. В этом случае меридианы изображаются дугами окружностей. Средний меридиан прямой. Расстояния между меридианами на карте при одинаковой разности долгот не равны между собой, а возрастают по мере удаления от среднего меридиана. Параллели — дуги окружностей, и при одинаковой разности широт расстояние между ними увеличивается при удалении от экватора к полюсам.

Вычисление поперечных сеток производится по формулам (6,22) — (6,24) при $\varphi_0 = 0^\circ$:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= 2R \operatorname{tg} \frac{z}{2}, \\ m &= n = \sec^2 \frac{z}{2}, \\ x &= \frac{2R \sin \varphi}{1 + \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)}, \\ y &= \frac{2R \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0)}{1 + \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)}. \end{aligned} \right\} (6,26)$$

Изменения искажений масштабов в стереографической проекции приведены в табл. 21, которая вычислена при $R = 1$.

Из табл. 21 видно, что в общем искажения в этой проекции невелики, особенно вблизи от центра карты, где увеличения длин и площадей мало отличаются от единицы. По мере удаления от центра искажения медленно увеличиваются и на изображении экватора в проекции достигают величин $m = n = 2$, $p = 4$. При $\vartheta > 90^\circ$ увеличения растут еще больше и при $\vartheta = 180^\circ$ достигают бесконечности.

Стереографические проекции широко применяются на практике при построении карт Арктики и Антарктики в прямом, поперечном и косом положениях для изображения полушарий. Кроме того, благодаря незначительным искажениям, которые дают сте-

реографические проекции, они используются при построении карт отдельных стран и территорий округлых форм в крупном и среднем масштабах.

Таблица 21

z	$m=n$	p	ω
0°	1,000	1,000	$0^\circ 00'$
15°	1,017	1,035	$0^\circ 00'$
30°	1,072	1,149	$0^\circ 00'$
45°	1,172	1,373	$0^\circ 00'$
60°	1,333	1,778	$0^\circ 00'$
75°	1,589	2,524	$0^\circ 00'$
90°	2,000	4,000	$0^\circ 00'$

Свойство этой проекции изображать круг конечных размеров кругом дает возможность применять стереографические проекции для решения задач сферической геометрии, астрономии и радионавигации.

Картографические сетки стереографических проекций строятся в мелком масштабе — графическим путем, а в крупном масштабе — с помощью прямоугольных координат. Графическое построение сетки в прямой стереографической проекции можно видеть на рис. 60.

Из точки O (центра карты) произвольным радиусом проводят окружность. Дуга PA делится на равные части и точки деления соединяются с противоположным полюсом P_1 . Отрезки O_a , O_b , O и т. д. являются радиусами параллелей. Параллели проводятся радиусами в заданном масштабе из точки O . Меридианы строят в виде прямых линий под углами, равными разности долгот из той же точки O .

§ 32. Центральные или гномонические проекции

В центральных или гномонических проекциях точка зрения находится в центре шара ($D = 0$), а картинная плоскость является касательной к поверхности шара, т. е. $K = R$.

По свойствам искажений эти проекции произвольные, но обладают одним очень важным свойством: любая дуга большого круга изображается на них прямой линией. Это объясняется тем, что при проектировании из центра шара дуги больших кругов проходят через центр и дают на проекции прямую линию. А так как сферодомия представляет собой дугу большого круга, то она изображается прямой. Благодаря этому ценному свойству центральная проекция находит широкое применение в морской и аэронавигации и для построения карт звездного неба.

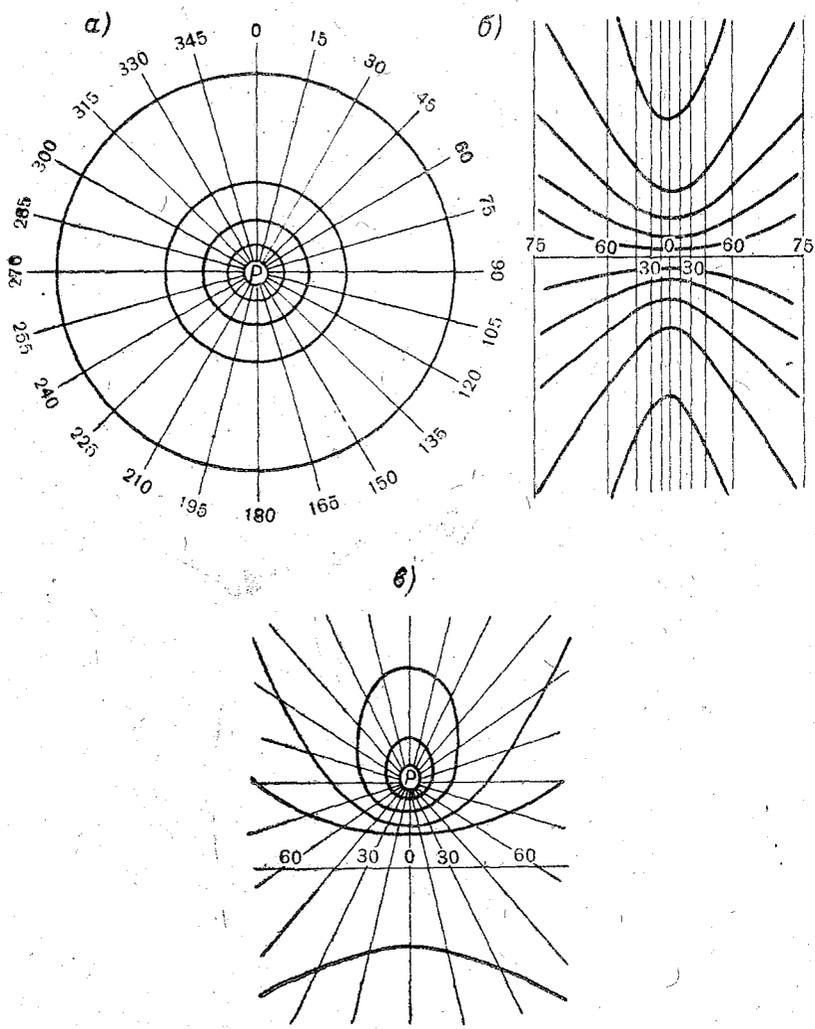


Рис. 61. Картографическая сетка в центральной проекции: в прямом (а), поперечном (б) и косом (в) положениях.

В зависимости от положения картинной плоскости относительно полюса сферической системы все центральные проекции делятся на прямые (полярные), поперечные (экваториальные) и косые (горизонтные).

В прямых центральных проекциях географическая сетка совпадает с сеткой нормальной сферической системы. Меридианы — прямые, сходящиеся в одной точке — центре карты — под равными углами. Параллели изображаются концентрическими окружностями. Расстояние между параллелями при постоянной разности широт неодинаково и увеличивается при удалении от полюса (центра карты) к экватору (рис. 61,а).

Поперечными или экваториальными центральными проекциями называются такие, у которых картинная плоскость касается земного шара в какой-то точке экватора. Меридианы представляют собой прямые параллельные линии, перпендикулярные плоскости экватора. При постоянной разности долгот расстояние между меридианами неодинаково и увеличивается от осевого меридиана к востоку и западу. Параллели изображаются кривыми линиями — гиперболами (рис. 61,б).

В косых (горизонтных) проекциях картинная плоскость может касаться земного шара в любой выбранной точке. Меридианы являются на карте прямыми, сходящимися в одной точке — географическом полюсе. Экватор — прямая линия, перпендикулярная осевому меридиану. Параллели изображаются гиперболами (если параллель имеет значение меньше $90^\circ - \varphi_0$ (где φ_0 — параллель точки горизонта), параболом если широта параллели равна $90^\circ - \varphi_0$, и эллипсами, если широта параллели больше $90^\circ - \varphi_0$ (рис. 61,в).

Для вывода формул центральных проекций воспользуемся общими уравнениями перспективных проекций, считая при этом $K = R$ и $D = 0$. Тогда на основании формул (6,4) — (6,10) для косой проекции получим

$$\rho = R \operatorname{tg} z,$$

$$m = \sec^2 z,$$

$$n = \sec z,$$

$$p = \sec^3 z,$$

$$x = \frac{R [\cos \varphi_0 \sin \varphi - \sin \varphi_0 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)]}{\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)}, \quad (6,27)$$

$$y = \frac{R \cos \varphi \sin (\lambda - \lambda_0)}{\sin \varphi_0 \sin \varphi + \cos \varphi_0 \cos \varphi \cos (\lambda - \lambda_0)},$$

$$\operatorname{tg} \left(45^\circ + \frac{\omega}{4} \right) = \sqrt{\sec z}.$$

При $z = 90^\circ$ $\rho = \infty$, т. е. в центральной проекции можно изобразить лишь полушарие, но и то теоретически, так как экватор изобразится окружностью бесконечно большого радиуса.

Формулы (6,27) являются общими для всех центральных проекций.

Для расчета сеток в нормальном положении при $\varphi_0 = 90^\circ$ и поперечном положении при $\varphi_0 = 0^\circ$ изменятся только формулы для определения x и y , а именно:

для нормальных сеток

$$\left. \begin{aligned} x &= -R \operatorname{ctg} \varphi \cos(\lambda - \lambda_0), \\ y &= R \operatorname{ctg} \varphi \sin(\lambda - \lambda_0); \end{aligned} \right\} \quad (6,28)$$

для поперечных сеток

$$\left. \begin{aligned} x &= R \operatorname{tg} \varphi \sec(\lambda - \lambda_0), \\ y &= R \operatorname{tg}(\lambda - \lambda_0). \end{aligned} \right\} \quad (6,29)$$

Максимальные искажения масштабов и углов в центральной проекции приводятся в табл. 22, из которой видно, что по мере

Таблица 22

z	m	n	p	ω
0°	1,000	1,000	1,000	$0^\circ 00'$
15°	1,072	1,035	1,110	$1^\circ 59'$
30°	1,333	1,155	1,540	$8^\circ 14'$
45°	2,000	1,414	2,828	$19^\circ 45'$
60°	4,000	2,000	8,000	$38^\circ 57'$
75°	14,928	3,854	57,676	$72^\circ 09'$
90°	∞	∞	∞	180°

удаления от центра карты искажения длин, площадей и углов очень быстро возрастают и на краю сетки достигают бесконечности.

Центральные проекции строят по прямоугольным координатам.

Глава VII

ПРОЕКЦИИ ТОПОГРАФИЧЕСКИХ КАРТ

§ 33. Номенклатура топографических карт

Топографические карты крупного и среднего масштабов относятся к номенклатурным картам, т. е. картам, имеющим определенное обозначение. Это объясняется тем, что карты стандартных масштабов: 1:1 000 000, 1:500 000, 1:300 000, 1:200 000, 1:100 000 и крупнее представляют собой серию листов, которую для практического использования необходимо привести в единую стройную систему, позволяющую быстро подобрать для определенной территории нужные листы карты. Одной из таких систем является номенклатурная разграфка.

Номенклатурной разграфкой называется система разбивки земного сфероида на ряд трапеций в зависимости от масштаба карты.

За основу деления границ листов принята Международная карта мира в масштабе 1:1 000 000. Согласно номенклатурной разграфке, каждая трапеция миллионной карты имеет по широте 4° , а по долготе 6° , за исключением листов карт, расположенных выше параллели 60° . Листы карт* в широтах от 60° до 76° имеют протяженность по долготе 12° , а от широты 76° до 88° — протяженность 24° .

На рис. 62 показана номенклатурная разграфка листов карты масштаба 1:1 000 000 для северного полушария. Ряды листов, вытянутых вдоль параллелей, составляют ряд или пояс. Ряды считаются от экватора до параллелей $\pm 88^\circ$ и обозначаются заглавными латинскими буквами от *A* до *V*. Листы рядов северного полушария снабжаются буквой *N*, южного — буквой *S*. Зоны по меридианам называются колоннами и обозначаются цифрами от 1 до 60. Счет колонн начинается от меридиана 180.

Таким образом, каждый лист карты в масштабе 1:1 000 000 имеет определенное обозначение — номенклатуру, например: 0—46

* Каждая трапеция земного эллипсоида изображается на отдельном листе карты в проекции, рассмотренной в § 34.

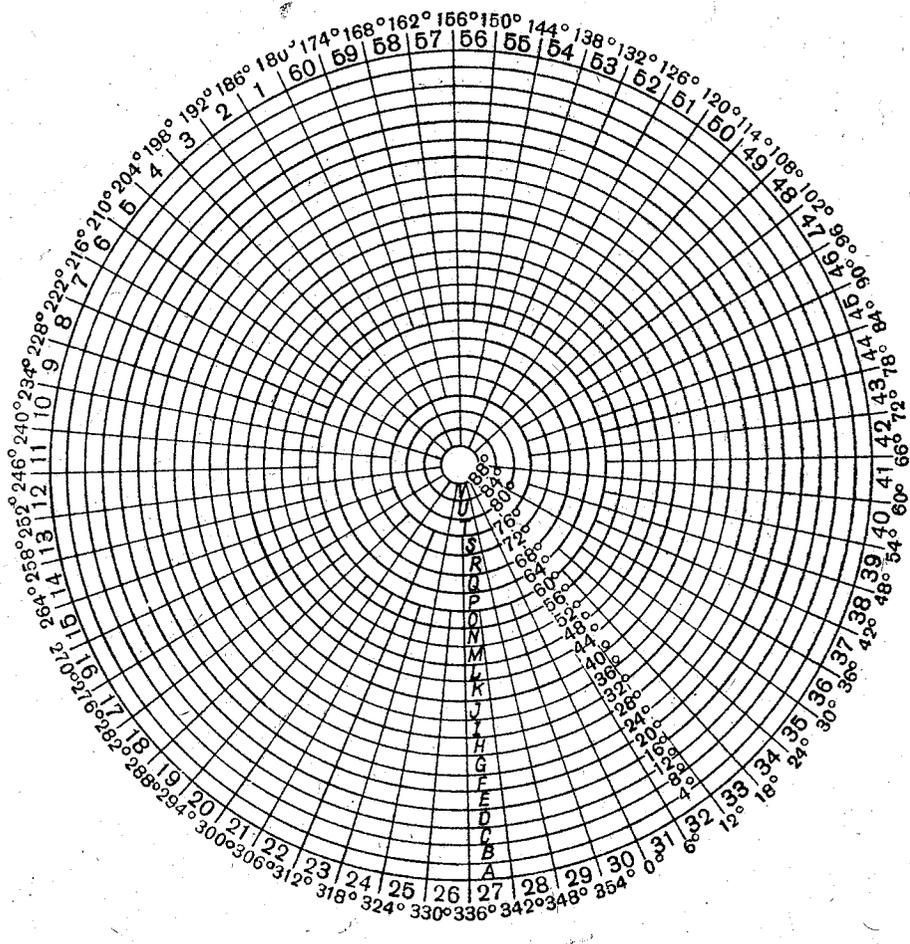


Рис. 62. Международная разграфка листов карты масштаба 1:1 000 000 (для одного полушария).

или L-41. Буквы ряда и номер колонны дают возможность не только определить номенклатуру листа карты, но и получить ее точное положение на поверхности земного эллипсоида.

Листы карты в масштабе 1:1 000 000 являются основой для разбивки их на более мелкие по площади трапеции, изображаемые в масштабах крупнее 1:1 000 000. В обозначение проекций более крупных масштабов обязательно входит номенклатура миллионного листа карты.

Трапеция карты масштаба 1:1 000 000 разбивается на четыре трапеции, изображаемые в масштабе 1:500 000. Листы карт масштаба 1:500 000 обозначаются номенклатурой миллионного масштаба с добавлением заглавных букв русского алфавита — А, Б, В, Г (рис. 63, а).

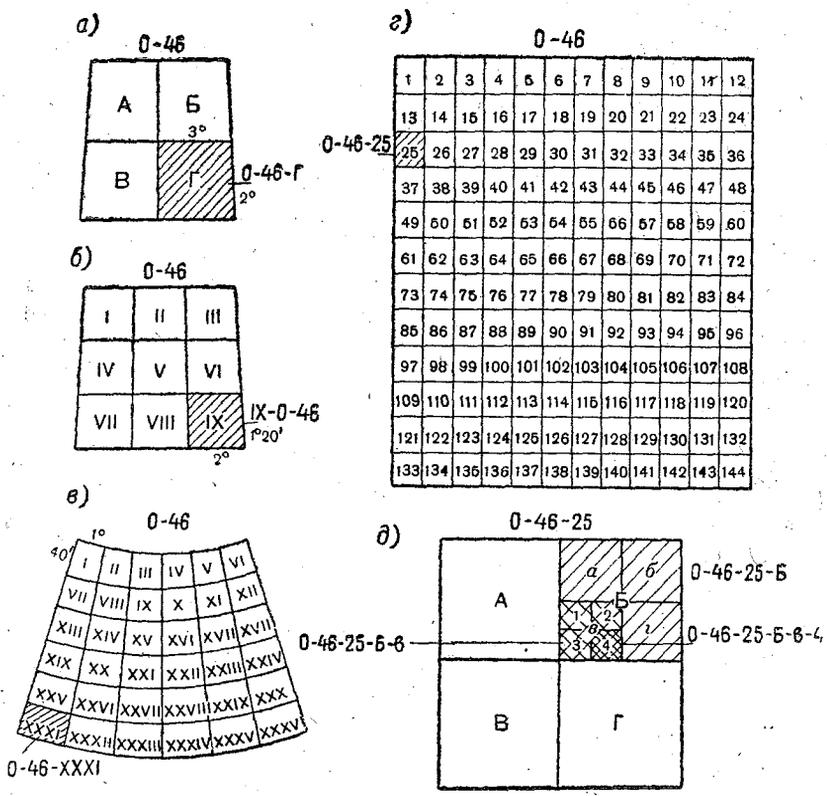


Рис. 63. Номенклатура топографических карт в масштабах:
 а—1:500 000; б—1:300 000; в—1:200 000; г—1:100 000; д—1:50 000.

Если трапецию карты миллионного масштаба разделить на 9 частей, то получим трапеции карты в масштабе 1:300 000. Карты в этом масштабе обозначаются римскими цифрами (I—IX), которые пишутся перед номенклатурой миллионного листа (рис. 63,б).

Трапеция карты миллионного масштаба делится на 36 частей, изображаемых на листах карты масштаба 1:200 000. Каждая карта обозначается римскими цифрами от I до XXXVI. В отличие от карт масштаба 1:300 000, цифры пишутся после номенклатуры миллионного листа (рис. 63,в).

Трапеция карты масштаба 1:1 000 000 делится на 144 части, изображаемые на листах карты масштаба 1:100 000. Карты в масштабе 1:100 000 нумеруются цифрами от 1 до 144. Схема деления листа миллионной карты на трапеции сотысячной карты показана на рис. 63,г.

Трапеция карты в масштабе 1:100 000 служит основой для разграфки на трапеции масштаба 1:50 000, 1:25 000 и 1:10 000. Разграфка карт этих масштабов представлена на рис. 63,д, причем, заштрихованные трапеции имеют номенклатуру.

§ 34. Проекция Международной карты мира в масштабе 1:1 000 000

В 1891 году по предложению географа А. Пенка Международным географическим конгрессом было принято решение о создании единой Международной карты мира в масштабе 1:1 000 000. Разработка условий, которым должна удовлетворять эта карта, продолжалась очень долго и закончилась только в 1928 году.

В качестве основы для построения карты выбрана видоизмененная поликоническая проекция, причем проекция применяется как многогранная, а это означает следующее.

Представим себе, что поверхность земного сфероида с помощью проведенных на ней меридианов и параллелей разделена на сфе-

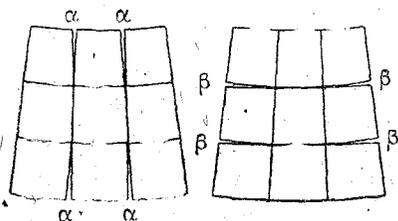
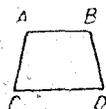
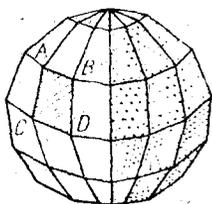


Рис. 64. Изображение сферической трапеции в многогранной проекции.

Рис. 65. Соединение листов Международной карты мира в масштабе 1:1 000 000.

роидические трапеции. Проведем через центр каждой трапеции плоскость, касательную к поверхности, и спроектируем каждую трапецию на грань полученного многогранника. В результате вся поверхность Земли будет изображена на описанном вокруг земного сфероида многограннике (рис. 64).

Любая проекция может быть применена для изображения на отдельных листах карты отдельных сфероидических трапеций. В таких случаях говорят, что проекция применена как многогранная. Чем меньше размеры сфероидической трапеции, тем меньше будут проявляться особенности той или иной проекции и тем больше ее изображение на плоскости будет приближаться к плану.

Согласно положению о проекции Международной карты мира в масштабе 1 : 1 000 000, каждый лист карты изображает сфероидическую трапецию в 4° по широте и 6° по долготе, как о том говорилось в предыдущем параграфе. Следовательно, проекция применяется как многогранная.

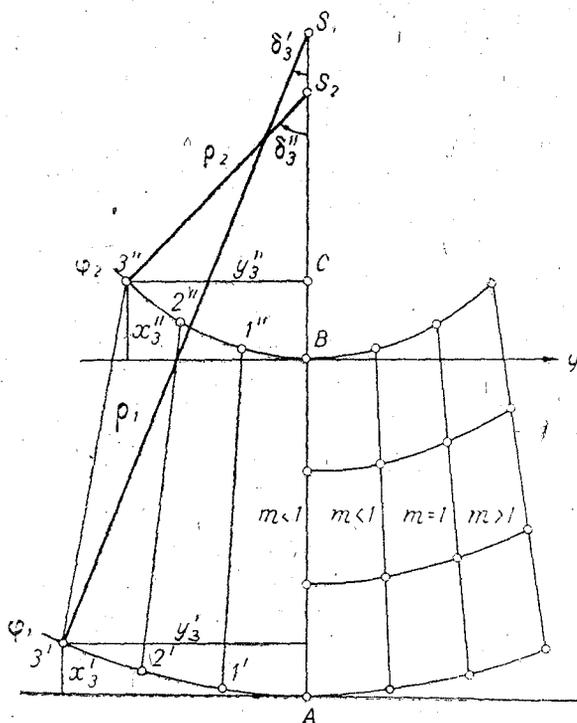


Рис. 66. Построение сетки на листе Международной карты мира в масштабе 1 : 1 000 000.

Каждая трапеция изображается на плоскости по следующему закону построения картографической сетки, определяющему проекцию: меридианы и параллели проводятся через 1° ; крайние параллели трапеции с широтами φ_1 и φ_2 изображаются дугами окружностей, описанными радиусами ρ_1 и ρ_2 из центров, находящихся на продолжении среднего меридиана; радиусы параллелей

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 &= N_1 \operatorname{ctg} \varphi_1, \\ \rho_2 &= N_2 \operatorname{ctg} \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (7,1)$$

Увеличение масштабов по крайним параллелям φ_1 и φ_2 $n_1 = n_2 = 1$, что определяет точки пересечения их меридианами.

Меридианы прямолинейны. Увеличение по меридианам с долготами относительно среднего, равными $\pm 2^\circ$, равно единице. Отсюда следует, что увеличение по среднему меридиану $m_0 < 1$, а по крайним меридианам с долготами относительно среднего $\pm 3^\circ$ $m > 1$.

Укорочение среднего меридиана против величины в натуре, выраженной в главном масштабе, может быть вычислено. Величина отрезка среднего меридиана определяет точки пересечения его крайними параллелями, центры параллелей и само их изображение. Через точки деления крайних параллелей проводятся прямолинейные меридианы. Промежуточные параллели φ проводятся через точки деления меридианов на части, пропорциональные разностям широт ($\varphi - \varphi_1$). Таким образом, промежуточные параллели, строго говоря, не являются дугами окружностей, но отличаются от них на величины, лежащие за пределами графической точности.

Искажения на проекции очень небольшие. Максимальные искажения углов в пределах листа карты не более $7'$, а длин $0,14\%$, т. е. по существу эти карты представляют собой план.

В связи с тем, что проекция Международной карты мира в масштабе $1:1\,000\,000$ построена в многогранной проекции, без разрыва можно сложить только два соседних листа. Также отсутствуют разрывы, если сложить листы одного ряда и колонны. Но если сложить 4 или 9 листов, то появляются разрывы (рис. 65). Практически разрывы α и β между отдельными листами почти незаметны. Если соединить четыре смежных листа, имеющих одну общую угловую точку, то наибольший угловой разрыв будет равен $24',1 \cdot \cos \varphi_m$, где φ_m — средняя широта четырех листов.

Построение сетки листа Международной карты мира в масштабе $1:1\,000\,000$ иллюстрирует рис. 66.

Прежде всего строится средний меридиан листа; на нем точка A (или B) берется произвольно и от нее откладывается отрезок

$$AB = \mu_0 (X_2 - X_1) - \kappa, \quad (7,2)$$

где X_2 и X_1 — длины дуг меридиана от экватора до крайних параллелей карты φ_2 и φ_1 ; таким образом, $(X_2 - X_1)$ — длина дуги меридиана между параллелями φ_1 и φ_2 на земном эллипсоиде, а $\mu_0(X_2 - X_1)$ — то же, но выраженное в главном масштабе $\mu_0 = 1 : 1\,000\,000$; κ — укорочение отрезка $\mu_0(X_2 - X_1)$, определяемое из условия равенства единице увеличения на меридианах карты с долготами $\pm 2^\circ$, даваемое в специальных таблицах для расчета сетки карт в проекции Международной карты мира по аргументам φ_1 и φ_2 .

Построение точек A и B определяет положение центров S_1 и S_2 крайних параллелей

$$\left. \begin{aligned} AS_1 &= \rho_1 = N_1 \operatorname{ctg} \varphi_1, \\ BS_2 &= \rho_2 = N_2 \operatorname{ctg} \varphi_2. \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

Точки деления крайних параллелей на части, соответствующие одному градусу по долготе в натуре, стягивают углы

$$\left. \begin{aligned} \delta_1 &= \pm 1^\circ \sin \varphi, \\ \delta_2 &= \pm 2^\circ \sin \varphi, \\ \delta_3 &= \pm 3^\circ \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Эти углы рассчитывают для каждой параллели; на рис. 66 они обозначены $\pm \delta'$ для параллели φ_1 ; $\pm \delta''$ — для параллели φ_2 .

Точки деления крайних параллелей строятся по прямоугольным координатам, рассчитанным для каждой параллели. Для построения этих точек деления за ось абсцисс принимается средний меридиан, а за ось ординат для построения абсцисс точек деления принимается касательная к окружности параллели в точке на среднем меридиане, т. е. перпендикуляры к среднему меридиану в точках A и B .

Как видно по рис. 66, например, для точки $3''$:

$$\left. \begin{aligned} y_3'' &= \rho_2 \sin \delta_3'' \\ x_3'' &= S_2B - S_2C = \rho_2 - \rho_2 \cos \delta_3'' = \rho_2 (1 - \cos \delta_3'') \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Наконец,

$$x_3'' = 2\rho \sin^2 \frac{\delta_3''}{2}. \quad (7.6)$$

Подобные расчеты производятся для всех δ'' и δ' и обеих параллелей φ_1 и φ_2 .

Через построенные точки, принадлежащие одной параллели, проводятся плавные кривые, которые являются дугами окружностей и изображают крайние параллели листа карты.

Соответствующие точки деления параллелей φ_1 и φ_2 соединяются прямыми, изображающими меридианы.

Отрезки меридианов между крайними параллелями делятся согласно отношению $\frac{X - X_1}{X_2 - X_1}$, где X относится к каждой промежуточной параллели; практически, это $1/3$ и $2/3$ отрезка меридиана между крайними параллелями. Точки деления меридианов соединяются плавными кривыми, которые принимают за изображения промежуточных параллелей.

Глава VIII

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ КАРТ В ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ

§ 35. Географические карты, применяемые в океанологии

Океанологам приходится работать в море, производить камеральную обработку материалов натуральных исследований или заниматься чисто теоретическими вопросами, связанными с физическими процессами в морях и океанах. Во всех случаях они имеют дело с каким-то реальным водным объектом. Поэтому, как правило; всегда, какой бы работой ни занимался океанолог, он в той или иной мере имеет дело с географической картой. И действительно, изучение любого водного объекта без географической карты немыслимо.

Карты дают возможность установить связь, размещение и закономерности изучаемых явлений в данном море. Но в каждом отдельном случае следует подходить критически к выбору самой карты; необходимо, чтобы карта давала возможность не только более наглядно, но и с большей достоверностью и точностью изучить нужное море или океан.

Все эти обстоятельства обязывают океанологов грамотно пользоваться географическими картами и не только различать ее особенности, но и уметь производить по ней нужные измерения и правильно наносить на карту необходимые гидрологические данные.

Пользоваться картографическим материалом океанологам приходится на следующих этапах работы:

- 1) предварительное ознакомление с водным объектом перед началом экспедиционных работ;
- 2) детальное изучение района работ, составление плана и программы научных исследований на конкретном море или части океана;
- 3) производство дополнительных навигационных определений, дублирование и проверка графической прокладки, ведущейся штурманским составом на экспедиционном судне;

- 4) пользование справочным картографическим материалом во время экспедиционных и камеральных работ;
- 5) пользование синоптическими картами;
- 6) картирование гидрологических характеристик и составление прогностических карт.

Для получения хороших результатов в каждом отдельном случае следует со знанием дела отнестись к выбору не только масштаба карты, но и к особенностям той или иной картографической проекции. В какой проекции выбрать карту для данного района работ и как ею пользоваться, необходимо твердо знать каждому океанологу.

В настоящее время для своих исследований океанологи в основном пользуются морскими картами, составленными в меркаторской, стереографической и центральной проекциях. В некоторых случаях применяются карты в равноугольной конической проекции и проекции Гаусса. Перед тем как пользоваться картами, необходимо предварительно знать, какую информацию и с какой достоверностью может дать та или иная карта. Для океанологов наибольший интерес представляют морские карты. Как известно (см. приложение 1), морские карты делятся на две основные группы: навигационные и справочно-вспомогательные. Рассмотрим эти две группы карт с точки зрения применения их для океанологических исследований как во время экспедиционных работ в море для сбора основных гидрологических сведений, так и для нанесения результатов камеральной обработки материалов.

Навигационные морские карты

В основном все навигационные морские карты у нас в Советском Союзе и за границей составлены в проекции Меркатора. Масштаб навигационных карт от 1:10 000 до 1:500 000 и мельче. При пользовании навигационными картами для океанологических исследований в первую очередь следует обратить внимание на достоверность данных, помещенных на карте, т. е. следует брать для работы карту, откорректированную на дату ее использования. Пользоваться старыми картами, не прошедшими корректуру, не рекомендуется. Это обстоятельство особенно важно в тех случаях, когда по картам производится изучение района моря или океана до или во время экспедиционных работ. При гидрологических исследованиях в море исключительно важное значение для океанолога, помимо общих навигационных сведений, имеют такие данные, как нуль глубин, течения, рельеф дна и некоторые другие гидрологические характеристики. Поэтому необходимо знать, по каким материалам и как на навигационных картах наносятся эти элементы нагрузки.

Нуль глубин. Для морей СССР приняты следующие нули глубин. На бесприливных морях и океанах, в которых средняя величина прилива менее 50 см, принимается средний многолетний уровень моря. На морях с приливами более 50 см нулем глубин является наименьший теоретический уровень моря*; при этом, поскольку в разных участках моря наблюдаются различные величины прилива, нули глубин для таких участков различны. Границы участков устанавливаются таким образом, чтобы ошибка при приведении измеренных глубин к назначенному нулю в пределах каждого участка была не более ошибки измерения самих глубин.

На советских навигационных картах, составленных на иностранные воды, за высотную основу принимают тот нуль глубин, который указан на иностранных картах для этих морей или частей океана.

Приливы и течения. На навигационных картах СССР (для иностранных вод) данные о приливах приводятся в виде таблиц на свободных от нагрузки участках карты. Эти таблицы содержат сведения о скорости и направлении приливных течений с точностью до 0,1 узла по отношению к моменту полной воды основного порта.

Постоянные течения обозначаются на картах в виде стрелки (вектора) с обозначением скорости течения в узлах, с ошибкой 0,25 узла. Следует отметить, что на большинстве навигационных карт условными знаками показываются водовороты, приливо-отливные течения, сулои и спорные течения. На генеральных картах с масштабами менее 1:1 000 000 скорости течения не приводятся.

Рельеф дна. Рельеф морского дна на навигационных картах дается на основании измерения глубин с определенной частотой промерных галсов. Поэтому получить исчерпывающую картину рельефа дна практически пока не представляется возможным. Отсюда следует, что достоверность нанесения на карту морского дна зависит от степени гидрографической изученности данного района моря или океана, а также от грунтов, слагающих дно (вид и характер грунтов показывается на карте).

На навигационных картах подводный рельеф изображается отметками глубин и изобатами (линиями равных глубин). Изобаты в совокупности с отметками глубин дают картину рельефа дна. Изобаты, как правило, проводятся через глубины 20, 50, 100 и 200 м. В мелководных районах дополнительно наносится десятиметровая изобата, в глубоководных морях даются изобаты для глубин 500, 1000, 2000 и далее через 1000 метров.

* Иногда в связи с отсутствием данных наблюдений за нуль глубин могут приниматься и другие уровни моря.

Справочными и вспомогательными морскими картами океанологи пользуются, пожалуй, даже чаще, чем навигационными картами. Из этих карт наибольший интерес для океанологов представляют: бланковые карты, карты гидрометеорологических элементов, морские атласы и обзорные карты.

Бланковые карты. Эти карты составляются в масштабах от 1 : 200 000 до 1 : 50 000 000 и могут употребляться для нанесения на них результатов гидрологических исследований. Карты издаются в проекции Меркатора, а для полярных областей — в центральной проекции. На бланковые карты нанесены основные элементы общегеографической нагрузки: очертания береговой линии, крупные населенные пункты, реки, озера, дороги, иногда проведены основные изобаты, но так бледно, чтобы они не мешали построению специального содержания.

Карты гидрометеорологических элементов. Как и предыдущие, эти карты в большинстве случаев составлены в проекции Меркатора, а для полярных областей — в стереографической и центральной проекциях. Карты гидрометеорологических элементов представляют собой бланковые двухсторонние карты с нанесенной сеткой меридианов и параллелей. Они дают в графической форме основные сведения о гидрологическом и метеорологическом режиме морей и океанов на каждый месяц года. Лицевая сторона карты составлена в масштабах от 1 : 10 000 000 до 1 : 50 000 000 и применяется для изображения на ней на те же сроки основных гидрометеорологических элементов: постоянных и приливо-отливных течений, прозрачности и цвета морской воды, распределения льдов, давления, ветра, температуры воздуха и воды, туманов, облачности и т. п. На оборотной стороне карты в более мелком масштабе порядка 1 : 60 000 000—1 : 80 000 000 на отдельных схемах приводятся данные о волнении, зыби, штормах, ходе ураганов и т. п.

Морские атласы. Морские атласы представляют собой комплект морских карт, объединенных единым содержанием или назначением и служат пособием для изучения морей и океанов. Кроме этого, фундаментального, атласа, существует еще много самых разнообразных по содержанию гидрометеорологических атласов для отдельных морей, океанов или их частей. Обычно гидрометеорологические атласы состоят из обзорных и специальных карт, на которых представлены либо комплекс гидрометеорологических элементов, либо один из элементов, например волнение, течение, приливы, распределение льдов, температуры воды, плотности воды, давления и т. п. В общем случае эти атласы служат для ознакомления с основными гидрометеорологическими условиями водного объекта и содержат карты (графики и таблицы), в которых

показано распределение типичных, средних и экстремальных значений основных гидрологических, метеорологических и аэрологических элементов по месяцам или сезонам. Карты и графики, помещенные в атласе, дополняются пояснениями и табличными данными.

Подобных атласов, как уже говорилось, очень много и они издаются многими организациями, и в частности научно-исследовательскими институтами и местными управлениями Главного управления гидрометслужбы при Совете Министров СССР (ГУГМС).

Обзорные морские карты. Эти карты предназначены для общегеографического изучения морей и океанов и также в основном составляются в проекции Меркатора или, для полярных районов, в стереографической проекции. Масштабы обзорных карт могут быть от 1:500 000 до 1:20 000 000. Из гидрометеорологических элементов на обзорные карты наносятся скорость и направление течений и границы распределения льдов.

Карты в центральной проекции. Как уже указывалось, карты в центральной проекции применяются для изображения полярных областей и составлены в основном в масштабе 1:10 000 000. Но не следует забывать, что карты в этих проекциях могут быть также с успехом использованы океанологами для определения координат гидрологических станций при плавании судна по дуге большого круга.

Карты в равноугольной конической проекции и проекции Гаусса. При плавании во внутренних морях, кроме карт в проекции Меркатора, в некоторых случаях можно пользоваться картами в равноугольной конической проекции.

При гидрологических изысканиях на морях в прибрежной зоне, включая сюда и полевые работы под гидротехнические сооружения, выгоднее всего применять проекцию Гаусса, а также равноугольную коническую проекцию.

Перечисленные выше советские карты и картографические пособия в основном удовлетворяют нужды океанологии, но следует оговориться, что в отдельных случаях не исключена необходимость применения географических карт и в других проекциях. Например, в специальных работах, связанных с измерением площадей водной поверхности, ограниченных изотермами, изобатами и другими изолиниями, пользуются равновеликими проекциями. Определение площадей в этих проекциях наиболее простое.

Несколько слов о масштабах карт. Выбор масштаба географических карт, в первую очередь, зависит от размеров исследуемой

акватории и той подробности, с какой необходимо нанести гидрологические элементы на карту. При этом надо помнить, что чем меньше масштаб карты, тем более сказывается картографическая генерализация, т. е. объекты наносятся на карту все с большим и большим обобщением, а некоторые исчезают вообще.

Справочные и вспомогательные иностранные морские карты

На практике океанологам иногда приходится пользоваться морскими картами издания зарубежных государств. При их применении следует иметь в виду, что, кроме обычных навигационных карт, о которых говорить не имеет смысла, так как они ни в принципе, ни по содержанию почти не отличаются от советских навигационных карт, в некоторых странах составляются справочные и вспомогательные карты. Эти карты могут быть также широко использованы при исследовании морей и океанов. Поэтому ниже дается краткая характеристика иностранных карт этого типа.

Английские морские карты. Из справочно-вспомогательной группы этих карт, которые называются «Non-navigational charts», океанологов могут интересовать метеорологические, ледовые, батиметрические и бланковые карты. Большинство справочных и вспомогательных английских карт составлено в проекции Меркатора, некоторые в поликонической, а для полярных областей — в стереографической и центральной проекциях. Кроме карт, гидрографический департамент английского адмиралтейства выпускает морские атласы. Наибольшее распространение из них получили «Атлас приливов и приливо-отливных течений Британских островов и прилегающих вод» и так называемые карманные атласы приливо-отливных течений.

Американские морские карты. Из большого количества различных американских справочных и вспомогательных карт следует отметить: Outline charts (бланковые карты) и Oceanographic charts (океанографические карты).

Бланковые карты в основном составляются в проекции Меркатора, а для некоторых морей — в центральной, поликонической и равновеликой конической проекциях. Масштабы бланковых карт колеблются в пределах от 1 : 2 500 000 до 1 : 20 000 000. К океанографическим картам относятся карты постоянных течений, температуры поверхностного слоя, грунтов и т. д. Все эти карты мелко-масштабные и составлены в проекции Меркатора.

Немецкие морские карты. Справочные и вспомогательные немецкие карты представлены картами двух типов: Leerkarten (бланковые карты), которые составлены в масштабах от 1 : 300 000 до 1 : 40 000 000, и Verschiedenekarten (карты разного содержания),

куда входит и группа гидрологических карт. Подавляющее большинство таких карт издается в проекции Меркатора.

Морские карты других стран почти не имеют справочных и вспомогательных карт с отображением гидрометеорологических элементов, поэтому их описание не дается.

Приведенная краткая характеристика морских карт показывает, что выбор таких карт довольно обширный и они позволяют получить вполне удовлетворительный материал для общей гидрометеорологической характеристики района работ. Но кроме умения получить с карты интересующие океанолога сведения, необходимо еще и уметь из различных измерений на картах получать различные числовые характеристики объектов в натуре. Поэтому в главе IX излагаются методы и приемы получения из измерений по картам в различных проекциях длин линий, площадей и основных морфометрических характеристик водных объектов.

§ 36. Географические карты, применяемые в морской метеорологии

При экспедиционных работах и при анализе гидрологических процессов, происходящих в море, океанологи не могут обойтись без метеорологических данных. Это обязывает океанологов уметь пользоваться всеми метеорологическими пособиями, в том числе синоптическими картами и картами метеорологических элементов. Поскольку эти материалы излагаются в специальных курсах, то в настоящем параграфе приводятся только сведения о картографических проекциях и масштабах, в которых составлены синоптические карты, а также дается краткое описание основных картографических пособий по морской метеорологии.

Для составления синоптических карт за основу следует принимать такие картографические проекции, которые давали бы возможность как можно проще и без существенных искажений наносить на карты ветер и другие метеорологические элементы. Такими свойствами обладают равноугольные проекции, у которых меридианы представляют собой прямые линии. Исходя из этих соображений Международный метеорологический комитет в 1937 г. рекомендовал для составления синоптических карт следующие проекции:

1) стереографическую проекцию с главным масштабом по параллели с широтой 60° для полярных областей;

2) равноугольную коническую проекцию на секущий конус с главным масштабом по параллелям с широтой 30° и 60° для средних широт;

3) меркаторскую проекцию с главным масштабом по параллелям с широтами $\pm 22^\circ,5$ для областей, находящихся вблизи экватора.

Кроме того, необходимо, чтобы масштаб карты давал возможность разместить на синоптическую карту все данные метеорологических станций, которые, как правило, располагаются одна от другой на расстоянии 100—150 км. Поэтому в зависимости от характера синоптических данных применяются карты различных масштабов.

В Советском Союзе при составлении синоптических карт применяются бланковые карты масштабов:

для основных синоптических карт 1 : 10 000 000;

для карт барической топографии 1 : 20 000 000;

для карт погоды северного полушария 1 : 30 000 000;

для мировых карт погоды 1 : 40 000 000.

При составлении карт-кольцовок используются бланковые карты в масштабе 1 : 5 000 000, а для некоторых районов даже в масштабе 1 : 2 000 000.

Помимо синоптических карт для ознакомления с общим характером метеорологического режима для отдельных морей и океанов составляются специальные метеорологические пособия. Большинство таких пособий представлено в виде карт гидрометеорологических элементов и морских атласов (описание этих пособий излагается в § 35).

Глава IX

ОСНОВЫ КАРТОМЕТРИИ

§ 37. Общие сведения

Картометрия — это раздел картографии, который занимается изучением приемов определения по картам длин линий, площадей и морфометрических характеристик в натуре. Под морфометрическими характеристиками понимают такие величины, как средняя высота, средняя глубина, площади физических поверхностей, объем, крутизна, уклоны поверхности, изрезанность рельефа и т. п. Определение этих понятий будет дано ниже.

Определение длин линий и площадей внутри криволинейных контуров на карте выполняется в два этапа: а) измерение изображений объектов на карте и б) установление их действительного значения в натуре.

Первый этап работы не зависит от характера искажений и масштаба карты, в его задачу входит только измерение объекта с помощью определенных инструментов и принятой методики измерения.

Задачей второго этапа является учет всех особенностей картографической проекции и масштаба карты для перехода к соответствующим величинам в натуре.

На точность результатов измерения изображений объектов на географических картах влияют два вида ошибок: картографические и технические.

Картографические ошибки вызываются: 1) погрешностями при составлении карты; 2) влиянием деформации бумаги, на которой напечатана карта, и 3) свойствами картографической проекции карты.

К техническим ошибкам относятся: 1) ошибки инструментов, которыми производятся измерения, и 2) ошибки методики измерения искомых величин на картах.

Таким образом, определение любых величин по географическим картам является в общем довольно сложным и трудоемким процессом, а окончательные результаты и их точность во многом за-

висят от технических приемов измерения и от правильного учета характерных особенностей и свойств использованной географической карты.

Коротко рассмотрим все перечисленные выше вопросы.

Оценка точности карт

Точность результатов любого измерения на картах в первую очередь зависит от тех ошибок в положении точек и контуров, которые возникают при составлении самой карты. Поскольку процесс составления карты очень сложный, то и учет ошибок при оценке точности карты необходимо рассматривать последовательно, начиная с полевых топографических работ и кончая оттиском карты, на котором производятся картометрические работы. Ошибку положения контурной точки, которая получается в результате составления карты и которая определяет ошибку нанесения на карту каждого контура или линии, называют общей и выражают величиной средней квадратической ошибки.

Положение контурной точки на карте зависит от точности полевых съемочных материалов, от ошибок нанесения точки на оригинал карты и ошибок при печати оттиска. Рассмотрим причины появления ошибок в положении контурной точки в зависимости от последовательных операций при изготовлении карты.

Точность полевых топографических работ определяется ошибками определения и нанесения опорных точек геодезической сети m_1 и ошибками нанесения на планшет контурных точек относительно опорной сети m_2 . Тогда ошибку положения точки на съемочном планшете можно выразить следующим уравнением:

$$m_3 = \pm \sqrt{m_1^2 + m_2^2}. \quad (9,1)$$

При изготовлении оригинала карты возникает ошибка съемочного материала m_3 , которая уменьшается пропорционально отношению масштабов съемочного планшета и карты в n раз, и ошибка перенесения точек со съемочного планшета на карту m_4 .

Таким образом, ошибка в положении точек на оригинале карты равна

$$m_5 = \pm \sqrt{m_4^2 + \left(\frac{m_3}{n}\right)^2}. \quad (9,2)$$

Окончательная общая ошибка в положении контурной точки на оттиске карты m_7 включает в себя ошибку m_5 и ошибку m_6 , которые возникают при печати. Следовательно,

$$m_7 = \pm \sqrt{m_5^2 + m_6^2}. \quad (9,3)$$

Подставляя в выражение (9,3) значение ошибок m_1 , m_2 и т. д., можно получить ошибку в положении контурной точки на карте. Например, по данным проф. Н. М. Волкова, для карты масштаба 1 : 500 000 ошибка $m_7 = \pm 1,2$ мм.

Влияние картографической генерализации на точность карты

Содержание нагрузки карты зависит от назначения карты. В зависимости от тех задач, которые стоят перед составителями карты, определяется отбор и обобщение элементов содержания карты и особенности их отображения. Карты одного и того же масштаба, но разного назначения, могут отличаться одна от другой по содержанию и полноте отображения одних и тех же элементов. Но, кроме специализации карты, на детальность содержания в очень большой степени влияет масштаб карты, так как не все то, что можно изобразить на картах крупного масштаба, удается показаться на картах более мелкого масштаба. Поэтому при уменьшении масштаба приходится отбирать не только те элементы, которые необходимо отобразить на карте, но и одновременно с этим производить обобщение, т. е. картографическую генерализацию.

Генерализация проводится при составлении всех географических карт. Основная ее задача заключается в отборе и обобщении элементов содержания карты с целью правильной передачи характерных особенностей территории или акватории, которая в уменьшенном виде и в условных обозначениях изображается на карте. Поэтому очень часто, даже если позволяет масштаб карты, но не требуется ее назначением, излишняя детализация изображения не нужна, так как она мешает и затрудняет выявление наиболее важных особенностей элементов карты. Например, при изображении береговой черты, как правило, приходится исключать некоторую часть мелких бухт, заливов, мысов, чтобы сконцентрировать внимание на наиболее важных и характерных очертаниях береговой линии. То же можно сказать и о генерализации извилистых линий (рек и т. п.), которые в результате обобщения и выделения основных характерных особенностей объектов спрямляются и тем самым уменьшаются их действительные размеры, что приводит к ошибкам при определении длин и площадей этих объектов по измерениям их изображения на карте. Отсюда можно сделать вывод, что картографическая генерализация находится в обратной зависимости от масштаба карты. Чем крупнее масштаб карты, тем меньше обобщений и тем с большей точностью можно определять положение точек, длин линий и площадей контуров на картах.

Проф. Н. М. Волковым были вычислены средние квадратические ошибки в положении контурных точек на картах за счет ге-

нерализации: при масштабе карты 1 : 100 000 ошибки в положении точки равны $\pm 0,39$ мм, при масштабе 1 : 200 000 ошибки $\pm 0,67$ мм, при масштабе 1 : 1 000 000 ошибки $\pm 0,82$ мм.

Эти данные показывают, что ошибка из-за генерализации карты составляет значительную часть общей ошибки в положении контурной точки и тогда общая ошибка с учетом генерализации карты, по расчетам Н. М. Волкова, может быть выражена величиной $m_5 \sqrt{2}$.

Деформация бумаги и ее учет при измерениях на картах

Большое влияние на точность картометрических работ, помимо других ошибок, оказывают ошибки за счет деформации бумаги, на которой напечатана карта. Несмотря на то, что для печатания карты употребляется специальная картографическая бумага, которую предварительно подвергают акклиматизации (ее выдерживают некоторое время при определенной температуре и влажности, после чего ее деформация становится наименьшей), но она все же деформируется и это безусловно сказывается на результатах определений по данным измерений. Бумага чувствительна к прокату, влажности воздуха и изменению температуры. Различные краски, которыми печатают карты, также по-разному влияют на деформацию бумаги.

Исследования Н. М. Волкова показали, что деформация бумаги колеблется в пределах 0,8% по направлению, перпендикулярному к прокату бумаги, и порядка 0,5% по направлению, совпадающему с прокатом, а искажение площадей за счет деформации бумаги достигает 0,4%.

Поэтому для уменьшения влияния деформации бумаги измерение объектов рекомендуется производить на участках карты размером не более 10×10 см, в пределах которых деформацию можно считать постоянной. При определении объектов, выходящих за пределы этого квадрата, измерение делают по частям. Например, при измерении длин для каждой части следует вычислить новое значение цены растворения циркуля, а при определении площадей — цену деления планиметра.

§ 38. Измерение длин линий на картах

Общие сведения

Для измерения прямых и малоизогнутых линий применяются различные циркули-измерители, микрометричные циркули. Для измерения длинных прямых линий — штангенциркуль и женеvская линейка. Приближенное измерение прямых, кривых и извилистых линий производится с помощью обычных курвиметров. Чтобы по-

лучить величину извилистой линии (береговую черту, длину реки и т. п.) наиболее точно, применяют специальные циркули с постоянным малым растворением и специальные курвиметры. Применение циркулей-измерителей и других инструментов безусловно вносит ошибки в результаты измерения линий. Величины средних квадратических ошибок одного измерения прямых линий наглядно видны из табл. 23.

Таблица 23

Инструмент	Длина, см	Средняя квадратическая ошибка, см
Обычный циркуль-измеритель	До 10	0,03
Укороченный циркуль	6—8	0,025—0,030
Циркуль с микрометрическим винтом	4—5	0,025—0,030
Штангенциркуль	100	0,025
Женевская линейка	100	0,010
Курвиметр	В пределах карт	1:50—1:100 (относительная ошибка)

При пользовании циркулем с постоянным растворением перед началом работ определяют расстояние между иглками циркуля в миллиметрах, которое называется величиной растворения циркуля.

Кроме этого, необходимо знать цену растворения циркуля. Ценой растворения циркуля называется число метров или километров, соответствующее этому растворению на данном участке карты, с учетом ее частного масштаба и деформации бумаги.

Цена растворения циркуля и определяется путем его откладывания на прямолинейном отрезке меридиана или параллели, лежащем в пределах трапеции (на которой находится извилистая линия, подлежащая измерению), и сравнения его с длиной этого же отрезка меридиана ΔX или параллели ΔP , взятых из Картографических таблиц. Такая операция дает возможность учесть одновременно частный масштаб карты, деформацию бумаги и ошибки построения картографической сетки.

Обозначив число отложений циркуля по меридиану через n_m^0 а по параллели через n_n^0 , получим, что цена растворения циркуля будет равна

$$\mu_m = \frac{\Delta X}{n_m^0} \text{ или } \mu_n = \frac{\Delta P}{n_n^0} \quad (9.4)$$

Найденное значение μ_m или μ_n служит для нахождения искомой длины L извилистой линии, изображение которой содержит n растворений циркуля, по формулам:

$$L = n \rho_m \text{ или } L = n \rho_n \quad (9,5)$$

Если измерить на карте циркулем прямую линию l в сантиметрах и одновременно с этим измерить в сантиметрах отрезок меридиана Δx или отрезок параллели $\Delta \rho$ и взять натуральное значение этих же отрезков ΔX и ΔP из Картографических таблиц, то длина L определяемой линии в натуре, соответствующая длине l на карте, равна

$$L = l \frac{\Delta X}{\Delta x} \text{ или } L = l \frac{\Delta P}{\Delta \rho} \quad (9,5')$$

Учет непостоянства масштабов на картах в различных проекциях

Масштабы длин в различных картографических проекциях не являются постоянными в пределах данной карты. Они изменяются при переходе от точки к точке и зависят от направления. Следовательно, при измерении длин линий на картах в той или иной проекции необходимо учесть характерные особенности этой проекции, установить значение среднего масштаба данной линии и, умножив вычисленный знаменатель масштаба на величину измеренного отрезка, получить длину линии в натуре. В каждой проекции средний масштаб определяется по-разному. Не следует забывать, что изменение масштаба в пределах листа карты может быть довольно значительным. Поэтому ошибки определения длин из-за изменения масштаба карты стараются сделать такими, чтобы они лежали за пределами графической точности снятия длин с карты. Для достижения этого следят, чтобы изменение масштаба в пределах измеряемого отрезка не превышало инструментальной ошибки измерения, т. е. 1:300. Соблюдение этого условия заставляет разбивать линию на отдельные части, определяя для каждой из них средний масштаб или свою цену деления инструмента.

Рассмотрим более подробно, как это делается в наиболее употребительных картографических проекциях.

Равноугольная цилиндрическая проекция (проекция Меркатора)

В проекции Меркатора масштаб длин по любому направлению из точки с широтой φ для шара определяется уравнением

$$m = n = \sec \varphi.$$

Для получения приращения масштаба с изменением широты продифференцируем это выражение

$$dm = \sin \varphi \sec^2 \varphi d\varphi.$$

Поделив dm на m , найдем относительное увеличение масштаба при изменении широты на величину $d\varphi$:

$$\frac{dm}{m} = \frac{\sin \varphi \sec^2 \varphi}{\sec \varphi} d\varphi = \operatorname{tg} \varphi d\varphi.$$

Переходя к конечным приращениям, последнее выражение можно представить в следующем виде:

$$\frac{\Delta m}{m} = \operatorname{tg} \varphi \cdot \Delta \varphi, \quad (9,6)$$

а приняв отношение $\frac{\Delta m}{m} = \frac{1}{300}$ и решив уравнение относительно $\Delta \varphi$, окончательно получим

$$\Delta \varphi' = \frac{1}{300} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\operatorname{arc} 1}. \quad (9,7)$$

Полученная величина $\Delta \varphi'$ дает возможность вычислить в зависимости от широты места значения широтных зон, в пределах которых изменение масштаба не будет меняться более чем на 1:300.

Приведем значения $\Delta \varphi'$ для широт от 5 до 80°:

φ	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\Delta \varphi'$	2' 12"	1' 15"	31'	20'	14'	10'	7'	4'	2'

Из этих данных видно, что по мере удаления от экватора широтные зоны резко уменьшаются. Это вполне понятно и объясняется тем, что в проекции Меркатора масштаб изменяется пропорционально $\sec \varphi$. Кроме того, при измерении кривых и изогнутых линий в этой проекции следует разбивать их на части таким образом, чтобы каждый из отрезков не выходил за пределы своей зоны и имел бы свою цену растворения циркуля μ . При измерении прямых линий (локсодромий) можно пользоваться средним масштабом, независимо от величины широтной зоны, так как практически масштабы изменяются по закону, близкому к пропорциональности, и поэтому значение масштаба посередине между концами отрезка линии и среднее арифметическое из масштабов измерений линии очень близки между собой.

Пример. Главный масштаб карты 1:250 000 по стандартной параллели 40°. Определить расстояние по локсодромии между точками А и В. Координаты точки А ($\varphi = 34^\circ 43' 4'' \text{ N}$; $\lambda = 129^\circ 26' 6'' \text{ O}^{\text{st}}$). Координаты точки В ($\varphi = 34^\circ 10' 4'' \text{ N}$; $\lambda = 129^\circ 52' 4'' \text{ O}^{\text{st}}$).

Способы решения. Определить длину локсодромии между двумя точками из измерения длины ее изображения на карте в проекции Меркатора можно несколькими способами: 1) по среднему масштабу линии, 2) путем совмещения с вертикальной рамкой карты, 3) с помощью средней длины меркаторской мили, 4) аналитическим путем по формулам навигационного счисления.

Определение длины прямой AB *первым способом*, кроме решения основной задачи, попутно знакомит студентов с определением частного масштаба в любой точке карты. Для определения длины прямой AB необходимо для измеряемой линии найти увеличения масштаба в конечных точках A и B по формуле $n = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi}$ и среднее значение $n_{cp} = \frac{n_A + n_B}{2}$.

Зная n_{cp} и главный масштаб карты μ_0 , легко определить и среднее значение частного масштаба: $\mu_{cp} = n_{cp} \mu_0$. После этого, измерив прямую AB с помощью линейки в сантиметрах, получим длину локсодромии в натуре: $S = l : \mu_{cp}$.

Вторым способом прямая AB определяется измерителем, а полученная величина откладывается на шкале вертикальной рамки карты симметрично относительно широты средней точки линии; разность отсчетов по рамке даст расстояние в единицах, в каких нанесена шкала.

Третий способ предусматривает измерение длины AB по частям. Для этого на вертикальной рамке карты на широте средней точки линии измерителем измеряется расстояние, равное одной или нескольким милям и откладывается целое число раз на отрезке AB , затем по рамке карты определяют величину остатка и прибавляют его к количеству отложений, умноженному на число миль.

Для вычисления AB *четвертым* — аналитическим *способом* применяются следующие формулы:

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{(\varphi_B - \varphi_A)'}{\cos K}, \\ \operatorname{tg} K &= \frac{(\lambda_B - \lambda_A)'}{D_B - D_A}, \end{aligned} \right\} \quad (9,8)$$

где S — расстояние в милях; $(\varphi_B - \varphi_A)'$ — разность широт точек A и B в минутах; K — локсодромический курс; $(\lambda_B - \lambda_A)'$ — разность долгот между точками A и B в минутах; D_A и D_B — меридиональные части.

Аналитический способ является наиболее точным из всех имеющихся приемов измерения прямых линий на картах в проекции Меркатора.

Решение.

1. Измеряем AB по среднему масштабу линии:

а) с помощью циркуля и масштабной линейки измеряем длину линии AB : $l = 27,18$ см;

б) определяем широту середины линии $\varphi_{cp} = 34^\circ 26' 9''$;

в) вычисляем увеличение масштаба на концах линии

$$n_A = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_A} = \frac{\cos 40^\circ}{\cos 34^\circ 43',4} = \frac{0,76604}{0,82191} = 0,9322,$$

$$n_B = \frac{\cos \varphi_0}{\cos \varphi_B} = \frac{\cos 40^\circ}{\cos 34^\circ 10',4} = \frac{0,76604}{0,82734} = 0,9281;$$

г) определяем среднее значение увеличения масштаба и средний частный масштаб

$$n_{\text{ср}} = \frac{0,9322 + 0,9281}{2} = 0,9301,$$

$$\mu_{\text{ср}} = n_{\text{ср}} \cdot \mu_0 = \frac{0,9301}{250\,000} = \frac{1}{268\,816};$$

д) расстояние AB в натуре равно

$$S = \frac{l}{\mu_{\text{ср}}} = \frac{27,18 \times 268\,816 \text{ см}}{1} = 73,05 \text{ км}$$

или в морских милях

$$S = \frac{73,05}{1,852} = 39,42 \text{ мор. мили.}$$

2. Измеряем AB путем совмещений с вертикальной рамкой:

$$S = 34^\circ 46',7 - 34^\circ 07',2 = 39,5 \text{ мор. мили.}$$

3. Измеряем AB с помощью средней длины меркаторской мили:

$$S = 4 \times 9 + 3,4 = 39,4 \text{ мор. мили.}$$

4. Измеряем AB аналитическим путем по формулам навигационного счисления:

а) определяем величину курса

$$\operatorname{tg} K = \frac{\lambda_B - \lambda_A^*}{D_B - D_A} = \frac{25',8}{-30,835} = -0,6477,$$

$$K = (180^\circ - 32^\circ 56') = 147^\circ 04';$$

б) вычисляем величину AB

$$S = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\cos K} = \frac{-33'}{\cos(147^\circ 04')} = \frac{-33'}{-0,839} = 39,39 \text{ мор. мили.}$$

* D_A и D_B берутся из табл. 1 Приложения 3 интерполяцией со вторыми разностями, как это показано в объяснении к таблицам.

Поперечная цилиндрическая равноугольная проекция (проекция Гаусса)

Масштабы в проекции Гаусса изменяются только по мере удаления от осевого меридиана, а разность долгот $\Delta\lambda_{max} = 3^\circ$. Поэтому наибольшее увеличение масштаба даже на краю зоны очень мало и им практически можно пренебречь. Считая в пределах карты масштаб величиной постоянной, при измерении длин в этой проекции необходимо учитывать только деформацию бумаги. Для этого в пределах области постоянной деформации масштаб определяется по километровой сетке — сравнением длин на карте с их размерами в натуре.

Равноугольная коническая проекция

В прямых конических проекциях при проекции на касательный конус главный масштаб сохраняется только по параллели касания. В обе стороны от параллели касания масштабы больше единицы и увеличиваются по мере приближения к полюсам. При секущем конусе главные масштабы сохраняются по параллелям сечения. Между параллелями сечения масштабы меньше единицы, причем наименьший масштаб около середины. По мере удаления от параллелей сечения масштабы больше единицы и становятся тем больше, чем ближе к полюсам.

Масштабы длин зависят только от широты. Поэтому для измерения длин в этих проекциях следует применять общий прием: измерить отрезок на карте и разделить его на средний масштаб, который выводится из увеличений на концах отрезка. Не следует забывать, что чем длиннее линия, тем больше изменяется масштаб в пределах этой линии. Благодаря этому расстояние необходимо измерять по частям так, чтобы изменение масштабов в каждой части отрезка не превышало бы 1 : 300.

Экспериментальные расчеты, проведенные с целью определения разности широт, в пределах которой масштаб длин равноугольной конической проекции меняется до 1 : 300 своей величины, показывают, что разность широт концов отрезков не должна превышать следующих величин: при удалении от средней параллели на 10° — не более $2'$ в обе стороны; на 15° — не более $5'$ в обе стороны; на 20° — не более $20'$ в обе стороны.

За границы отрезков удобнее всего принимать параллели и меридианы, а измерения вести по отдельным трапециям, что позволит учесть одновременно и деформацию бумаги.

Равнопромежуточные конические проекции

В прямых равнопромежуточных конических проекциях масштабы вдоль меридианов равны. Масштабы по параллели, оставаясь одинаковыми на одной параллели, изменяются при переходе на другую параллель. Отсюда нетрудно понять, что линии, совпадающие с меридианами и параллелями, имеют постоянный масштаб и измерение их весьма просто. Для этого, измерив отрезок, его умножают на соответствующий знаменатель масштаба. Во всех остальных случаях измерение прямых очень сложно. Еще труднее измерить извилистую линию, так как от изменения азимута меняются и масштабы. В двух соседних точках извилистой линии разность масштабов может доходить до величин разности экстремальных значений. Практически измерение линий возможно только для тех частей карты, в которых экстремальные масштабы отличаются один от другого на величину не более 1:300, т. е. не дальше 4—5° от средней параллели.

Равноугельная азимутальная (стереографическая) проекция

Из формулы увеличений в стереографической проекции

$$m=n=\sec^2 \frac{z}{2} = \frac{1}{\cos^2 \frac{z}{2}}$$

может быть установлена ширина Δz пояса, в пределах которого увеличение меняется на 1/300 своей величины и практически может считаться постоянным. Для этого воспользуемся методикой, использованной для решения того же вопроса в проекции Меркатора. Дифференцируем формулу увеличения

$$dm = + \frac{2 \cos \frac{z}{2} \sin \frac{z}{2} \cdot dz}{2 \cos^4 \frac{z}{2}},$$

отсюда

$$\frac{dm}{m} = \frac{\cos \frac{z}{2} \sin \frac{z}{2} \cdot \cos^2 \frac{z}{2} \cdot dz}{\cos^4 \frac{z}{2}} = \operatorname{tg} \frac{z}{2} dz.$$

Для конечных приращений последняя формула переписывается в виде

$$\frac{\Delta m}{m} = \operatorname{tg} \frac{z}{2} \cdot \Delta z. \quad (9,9)$$

Искомая величина в минутах выражена формулой

$$\Delta z' = \frac{\Delta m}{m} \cdot \operatorname{ctg} \frac{z}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{arc} 1'}. \quad (9,10)$$

Для заданной величины $\frac{\Delta m}{m} = \frac{1}{300}$ можем окончательно написать

$$\Delta z' = \frac{1}{300 \operatorname{arc} 1'} \cdot \operatorname{ctg} \frac{z}{2} = 11',46 \operatorname{ctg} \frac{z}{2}. \quad (9,11)$$

Приведем значения допустимых Δz для различных значений $0 < z < 90^\circ$:

z	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
Δz	$4'22'$	$2'11'$	$1'05'$	$43'$	$31'$	$25'$	$20'$	$16'$	$14'$	$11'$

Для учета искажений из-за изменения масштаба следует определять длину отрезка по масштабу, расположенному на том полярном расстоянии z , в котором находится середина измеренного отрезка.

Центральная или гномоническая проекция

Обычно карты в центральной проекции составляются в масштабе от $1:500\,000$ и мельче. Определение длины линии по этим картам производится по меридианной шкале для средней широты измеряемой линии и исправляется поправкой, которая выбирается из «Таблиц для перевода истинных направлений в гномонические».

Если карта составлена в косоj центральной проекции с центральной точкой посредине листа, то длины отрезков измеряют так же, как описано выше, только вместо средней широты измеряемой линии берут ее среднее полярное расстояние z .

Проекция Международной карты мира в масштабе $1:1\,000\,000$

По характеру искажений проекция Международной карты мира в масштабе $1:1\,000\,000$ является произвольной, но изменение масштабов в пределах одного листа карты настолько незначительно, что ее практически можно принимать за план, учитывая при измерении только деформацию бумаги.

Примечание. Измерение длин линий и площадей, как правило, производится только на картах крупного и среднего масштабов, поэтому здесь нет ссылок на проекции карт, составленных в мелком масштабе.

Особенности измерения береговой линии моря и длин рек

Береговая линия морей и океанов не является чем-то постоянным, ее положение под воздействием многих причин непрерывно изменяется и делает береговую черту настолько подвижной, что учесть все ее изменения практически почти невозможно. Особенно неустойчиво положение береговой линии на морях с приливами.

В инструкциях по топосъемкам нет четких указаний, к какому уровню моря должна быть приведена береговая линия и поэтому на картах она наносится относительно наинизшего теоретического уровня и наинизшего сизигийного уровня, а иногда даже приводится к мгновенному уровню моря. Площадь, занятая «осушкой», дается только для морей с очень хорошо изученными приливами. Все эти обстоятельства вносят довольно большую путаницу при нанесении положения береговой линии на картах для морей с приливами.

На бесприливных морях береговая линия приводится к среднему многолетнему уровню моря. Вследствие картографической генерализации, за счет отбора элементов, которые находят отражение на географической карте, и обобщения из-за уменьшения масштаба, береговая линия спрямляется и становится более короткой. Таким образом, подвижность береговой линии в натуре и обобщение ее при генерализации вносят некоторую неопределенность в результаты определения длин береговых линий морей и океанов по измерениям на картах.

Береговая линия на картах наносится чаще всего одной тонкой линией толщиной от 0,1 до 0,15 мм. В некоторых случаях ее наносят одной линией, но с утолщениями, которые достигают 0,4—0,5 мм.

Реки представляют собой очень важный гидрологический объект, имеющий большое народнохозяйственное значение. Поэтому каждому гидрологу необходимо не только знать, как изображаются реки на картах, но и уметь по ним правильно определять все нужные ему характеристики реки: длину, ширину, координаты истока, устья и т. д.

Реки на картах в зависимости от их ширины обозначаются либо одной, либо двумя линиями толщиной 0,1 мм каждая. При этом следует иметь в виду, что при изображении рек двумя линиями минимальное расстояние между ними на карте равно 0,4 мм, а считая толщину линии, река займет ширину 0,6 мм, что может

превысить ее истинную ширину. В связи с этим ширину рек можно измерять на картах с достаточной степенью точности в том случае, когда на карте ее ширина не менее 2—3 мм. Согласно инструкции по топографическим съемкам, реки с небольшой шириной снимаются по одному берегу, а именно: при масштабе карты 1 : 50 000 ширина должна быть до 50 м, в масштабе 1 : 100 000 — до 200 м и т. д.

За длину реки принимают расстояние между ее истоком и устьем. Длина реки, если она нанесена двумя линиями, измеряется по средней линии, являющейся наиболее стабильной по сравнению с другими линиями. В некоторых случаях измерения делают по фарватеру или по судовому ходу.

Если принять измерение по средней линии за 100%, то расхождения в длинах рек при измерении их по фарватеру или судовому ходу могут достигать 4—7% всегда в сторону увеличения длины. Кроме того, при определении длин рек по картам большую роль играет картографическая генерализация, которая приводит к спрямлению длин рек и уменьшению их длин при изображении на карте, т. е. с рекой происходит то же, что и с береговой линией; поэтому при измерении рек по картам эти факторы следует иметь в виду.

Измерение береговой линии и длин рек на картах. Картометрические работы по измерению береговых линий и длин рек проводились А. Пенком, Ю. М. Шокальским, Н. М. Волковым и рядом других ученых, а в последние годы отделом картографии Государственного гидрологического института (ГГИ). Многолетний опыт таких измерений показывает, что принципиального различия между измерением по картам береговой линии и длин рек нет. Основываясь на опыте ГГИ, можно рекомендовать измерение извилистых линий производить на картах масштаба 1 : 100 000 и крупнее, а в крайнем случае использовать карты масштаба 1 : 300 000. Работая на картах такого масштаба и применяя предложенную ГГИ методику измерения, можно получить длины береговых линий и длины рек с ошибкой до 2%. Измерение длин в различных картографических проекциях следует производить по частям с учетом изменения масштабов и деформации бумаги.

Для измерения извилистых линий следует применять либо циркуль с постоянным растворением, равным 1 мм, лучше с приспособлением В. В. Никольского, позволяющим быстро и точно установить нужную величину растворения циркуля, либо усовершенствованный курвиметр КС, созданный ГГИ в 1956 году.

Измерение извилистых линий циркулем производится по участкам одинаковой извилистости, на которые разбивается измеряемая линия, дважды — прямым и обратным ходом. Расхождение между количеством n отложений циркуля в прямом и обратном ходе на

каждом участке не должно превышать 2%. Определив длины участков извилистой линии и умножив их на знаменатель среднего масштаба зоны, установленного из измерений по карте, учитывая деформацию бумаги, а также умножив на свою для каждого участка величину коэффициента извилистости k , которая выбирается по образцам, предложенным ГГИ (рис. 67), получаем натуральную длину участков. Сумма длин всех участков будет длиной всей извилистой кривой — береговой линии или реки в натуре.

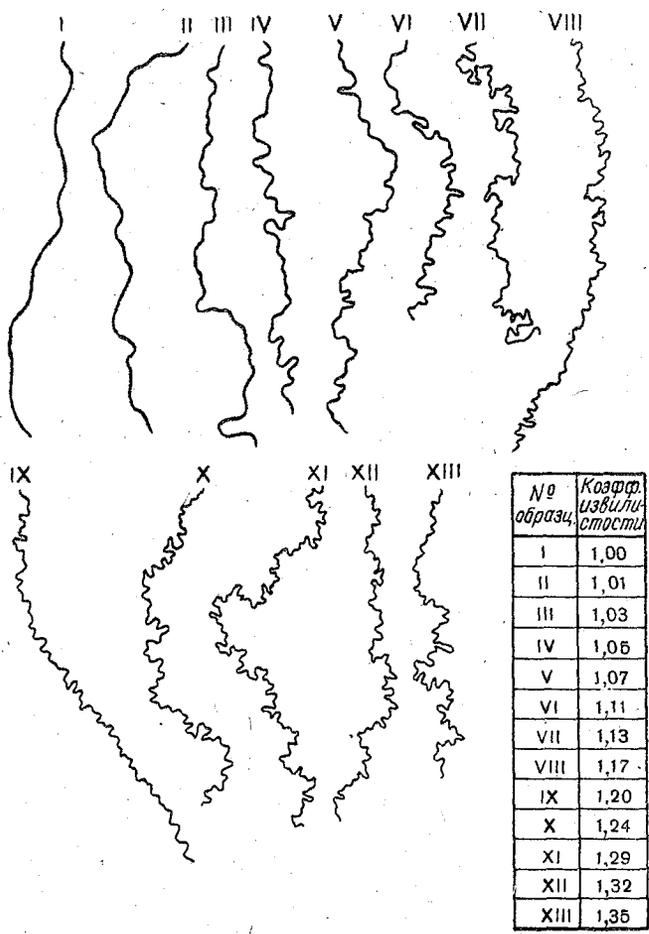


Рис. 67. Образцы извилистости рек

При измерении извилистой линии курвиметром КС предварительно следует определить поправку курвиметра ($\pm \Delta l$), определяемую следующим образом. С помощью женеvской линейки или штангенциркуля на ватмане откладывается отрезок прямой, равный 50 см, и измеряется курвиметром 10 раз. Отсчет, полученный по прибору после 10-кратных измерений, вычитается из 500, а полученная разность делится на 500. Зная поправку курвиметра, можно рассчитать и длину измерений линии по формуле

$$L = a \pm a\Delta l, \quad (9,12)$$

где a — отсчет по курвиметру.

Измерение извилистой линии курвиметром проводится также по частям прямым и обратным ходом. Расхождение между отсчетами не должно превышать при длине линии 10 см — 0,1—0,2 деления, при длине линии 25 см — 0,3—0,4 деления, при длине линии 50 см — 0,5—0,7 деления.

После измерения длины отрезка извилистой линии по формуле (9,12) рассчитывают длину участка в сантиметрах, и, умножая L на знаменатель среднего масштаба широтной зоны, получают длину участка в натуре. Суммируя длины отдельных участков, находят длину береговой линии или длину реки в натуре.*

§ 39. Определение площадей по картам

Общие сведения

Измерение площадей на картах производится в основном с помощью планиметров различных систем и специальных палеток. Описание этих приборов, а также подробная техника измерения площадей приводится в любом курсе геодезии и поэтому здесь не рассматривается.

Основное внимание в этом параграфе уделяется техническим ошибкам, возникающим при измерении площадей планиметром и палетками, а также ошибкам, зависящим от свойств картографических проекций карт, на которых производятся эти измерения.

При измерении площадей планиметром сначала делают проверку планиметра, вычисляют цену деления при избранной длине обводного рычага и выбирают точку установки полюса планиметра с таким расчетом, чтобы при обводе фигуры не было углов между рычагами менее 30° и более 150° . После проведения этих подготовительных работ приступают к измерению площади. Обычно, согласно рекомендациям, обводка каждого контура планиметра делается прямым и обратным ходом при двух положениях полюса.

* Подробные сведения о методике измерения длин рек приводятся в Методических указаниях ГГИ, № 56, Л., Гидрометеоназдат, 1960.

Расхождение между результатами обводов не должно быть больше указанных в табл. 24.

Таблица 24

Число делений планиметра (площадь в делениях планиметра)	Допустимое расхождение в числе делений планиметра между прямой и обратной обводками
до 150	1
от 150 до 600	2
от 600 до 1 000	3
от 1 000 до 1 400	4
от 1 400 до 1 800	5
от 1 800 до 2 200	6

Если при измерениях расхождение получается больше указанного в табл. 24, то измерение делается заново до тех пор, пока результаты не будут в допустимых пределах.

Ошибки при измерении площадей планиметром m_F зависят от измеряемой площади и вычисляются по формуле

$$m_F = 0,02 \sqrt{F} \text{ см}^2.$$

Чем больше площадь, тем меньше относительная ошибка измерения. Изменения средних квадратических ошибок измерения площадей планиметром, по Н. М. Волкову, представлены в табл. 25.

Таблица 25

Число делений планиметра в измеряемой фигуре	Средняя квадратическая ошибка измерения в %
0— 20	5,20
20— 50	1,85
50— 100	1,00
100— 200	0,61
200— 300	0,43
300— 500	0,31
500— 750	0,24
750— 1 000	0,19
1 000— 1 500	0,16
1 500— 2 000	0,13

Из табл. 25 также следует, что площадь малых размеров при измерении планиметром получается довольно грубо. Поэтому для измерения площадей малых и внутри сильно извилистых контуров применяются палетки. Ошибка измерения палеткой особенно малых площадей значительно меньше, чем планиметром.

Палетка представляет собой прозрачную целлулоидную или из органического стекла пластинку с вычерченной на ней сеткой малых и больших квадратов или прямоугольников. Малые ячейки имеют размер от 1 до 4 мм², а большие — 100 мм². Размер палетки 10 × 10 см.

Перед началом работ определяется цена деления палетки, которая выражается в м² или мм². Измерение площади производится дважды. Площадь на карте будет равна общему количеству клеток, которые помещаются в контуре, умноженному на цену деления палетки.

Исследования Н. М. Волкова, а позже Ф. А. Черняевой показали, что малые площади измеряются палеткой, как уже указывалось, более точно. Это наглядно иллюстрирует заимствованная из работы Ф. А. Черняевой табл. 26, в которой приведены ошибки измерения площадей фигур планиметром и палеткой.

Таблица 26

Площадь в мм ²	Средние ошибки измерения в %	
	палеткой	планиметром
0— 100	3,48	4,49
100— 200	2,94	3,32
200— 500	1,60	2,15
500— 1 000	1,11	0,94
1 000— 5 000	0,41	0,49
5 000—10 000	0,20	0,31
> 10 000	0,11	0,13

На основании табл. 26 можно было бы рекомендовать измерять площади не планиметром, а палеткой. Но измерения палеткой требуют не только большого напряжения, но и значительной затраты времени. Поэтому их следует применять для измерения площадей малых и внутри сильно изрезанных контуров, а также при работе с листами карты, бывшими в употреблении.

Независимо от того, каким прибором измеряется площадь на карте, измерение площадей рациональнее производить по широтным поясам поскольку в употребительных проекциях увеличения площадей, как и увеличения длин, являются функцией широты. Для этого на карте должны быть нанесены меридианы и параллели. Размер образуемых трапеций не должен быть больше 10 × 10 см. Площади полных трапеций, входящих в измеряемый контур, не измеряются, а выбираются из Картографических таблиц. В каждой неполной трапеции измеряются ее обе части — в контуре и вне контура — и суммируются. Площадь всей трапеции сравнивается с теоретической площадью, взятой из тех же Карто-

графических таблиц, полученная невязка разбрасывается пропорционально площадям.

Учет непостоянства масштабов на картах в различных проекциях

Карты средних и крупных масштабов, по которым можно измерять площадь, за небольшим исключением составляют в равноугольных и произвольных проекциях. Поэтому при работе с этими картами необходимо, как и при измерении длин, учитывать изменчивость масштабов площадей.

Основным прибором для измерения площадей, как известно, служит планиметр. Ошибку планиметра для площадей средних размеров принято считать равной 1 : 1000. Тогда поставим условие, что и изменение масштабов площадей в проекции не должно превышать инструментальной ошибки прибора; т. е. 1 : 1000. Исходя из этих условий, можно рассчитать величину размера трапеции на карте, на которой можно работать с одной ценой деления планиметра. Если заданная площадь больше этой трапеции, то площадь делится на трапеции, не большие установленной предельной; измерение планиметром делается по частям и для каждой из частей определяется своя цена деления.

Когда цена деления планиметра C вычисляется в $см^2$, требуется переход от выражения площади каждого участка в делениях планиметра к выражению ее в $см^2$ умножением на C . Полученный результат нужно умножить также и на знаменатель увеличения масштаба площади, вычисленного для данной трапеции. Сумма частей контуров даст площадь контура в натуре.

При измерении площадей на картах в равновеликих проекциях, вследствие постоянства масштаба площадей, на всем листе карты цена деления планиметра также была бы постоянной. Поэтому размеры площадей могли бы быть неограниченными, если бы не приходилось учитывать влияние деформации бумаги. Последнее обстоятельство вынуждает производить измерение площадей в равновеликих проекциях на трапециях размером не более 10×10 см. Из всех карт в других проекциях наибольшее практическое применение для измерения площадей имеют карты в проекции Меркатора, Гаусса, в равноугольных и равнопромежуточных конических проекциях и проекции Международной карты мира в масштабе 1 : 1.000.000. Поэтому рассмотрим влияние масштабов на измерение площадей в этих проекциях более подробно.

Равноугольная цилиндрическая проекция шара (проекция Меркатора)

Увеличение масштаба площади p равно квадрату увеличения масштаба по меридиану или параллели. Для проекции на «касательный цилиндр»

$$p = m^2 = \sec^2 \varphi.$$

Для получения приращения масштаба с изменением широты продифференцируем это уравнение

$$dp = d \sec^2 \varphi = 2 \sec^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi d\varphi.$$

Найдем относительное изменение масштаба площади при изменении широты на $d\varphi$:

$$\frac{dp}{p} = \frac{2 \sec^2 \varphi \operatorname{tg} \varphi d\varphi}{\sec^2 \varphi} = 2 \operatorname{tg} \varphi d\varphi. \quad (9,13)$$

Примем $\frac{dp}{p} = \frac{1}{1000}$ и, переходя к конечным приращениям, определим величину широтной зоны, в пределах которой масштаб площадей не будет изменяться более чем на 1:1000. Тогда получим

$$\Delta\varphi = \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{2000 \operatorname{arc} 1'}. \quad (9,14)$$

На основании формулы (9,14) можно вычислить предельные размеры широтных зон, в пределах которых масштаб площади не будет меняться больше чем на 1:1000:

φ . . .	5°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°
$\Delta\varphi$. .	19',6	9',7	4',7	3',0	2',0	1',4	1',0	0',6	0',3

Из этих данных следует, что если измеряемая площадь выходит за пределы указанных широтных зон, то эту площадь надо разделить на части путем проведения дополнительных параллелей. Размер трапеции не должен превышать 10×10 см.

Пример. Измерить площадь внутри криволинейного контура (изотермы) на карте № 403 в масштабе $\mu_0 = 1:200\,000$ по главной параллели 60° . Площадь, подлежащая измерению, заштрихована. Границы трапеции: по меридиану от $27^\circ 30' \text{O}^{\text{st}}$ до $28^\circ 00' \text{O}^{\text{st}}$; по параллели от $59^\circ 45' \text{N}$ до $60^\circ 00' \text{N}$ (рис. 68).

Условия решения.

1. Для измерения площади криволинейного контура, ограниченного любой изолинией (изобатой, изотермой и т. п.) или береговой чертой, необходимо разбить эту площадь на широтные зоны, в которых ошибка изменения масштаба будет меньше или равна 0,001 инструментальной ошибки планметра или палетки, которыми измеряется площадь. В каждой широтной зоне определяется средняя широта $\varphi_{\text{ср}}$ и по ней рассчитывается среднее увеличение масштаба площади зоны p .

2. Определение цены деления планиметра C в сантиметрах производится обводкой квадрата со стороной 10 см.

$$C = \frac{F_0}{f},$$

где F_0 — известная площадь, т. е. площадь квадрата, равная 100 см²; f — разность отсчетов планиметра после и до обводки.*

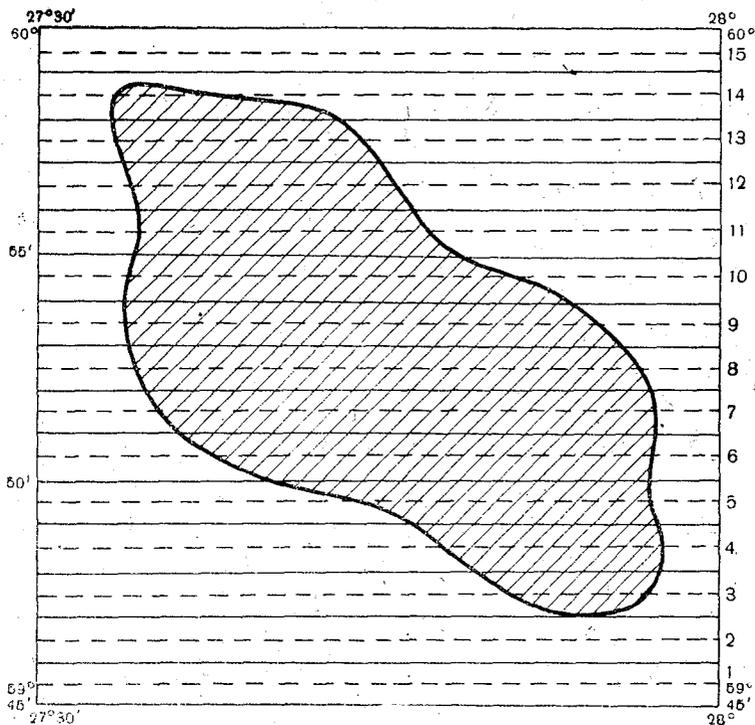


Рис. 68. К измерению площади криволинейного контура в проекции Меркатора.

3. С помощью планиметра в каждой широтной зоне измеряется прямым и обратным ходом площадь части контура, попавшая в эту зону, и площадь вне контура этой же зоны, т. е. в результате должна быть измерена площадь всей трапеции.

* Разность отсчетов планиметра прямым и обратным ходом не должна превышать двух делений планиметра.

4. Площадь внутри всего контура в натуре вычисляется по формуле

$$\Pi_1 = \frac{C}{P_0} \sum \frac{n}{p} \text{ см}^2 = \frac{C}{P_0} \sum \frac{n}{p} 10^{-10} \text{ км}^2,$$

где C — цена деления планиметра; n — число делений планиметра в обводке; P_0 — главный масштаб площади, $P_0 = \mu^2$; p — среднее увеличение масштаба площади зоны.

По этой же формуле определяется площадь Π_2 вне криволинейного контура.

5. Сумма площадей $\Pi = \Pi_1 + \Pi_2$ должна быть равна теоретической площади Π_T трапеции, взятой из Картографических таблиц. Невязка может получаться в пределах до 1 км^2 ;

$$\Pi_1 + \Pi_2 = \Pi; \quad \Pi - \Pi_T = \Phi,$$

где Π — измеренная площадь трапеции; Π_T — теоретическая площадь трапеции; Φ — невязка.

6. Результаты измерения исправляются пропорционально площадям на величину невязки с обратным знаком.

Решение.

1. Разбиваем трапецию, в которой расположен контур, на широтные зоны. Согласно формуле (9,14), для $\varphi = 60^\circ$ широтная зона равна $1'$.

2. Определяем $\varphi_{\text{ср}}$ для каждой широтной зоны и нанесем их на трапецию (рис. 68), средние параллели зоны нанесены пунктиром.

3. Определяем цену деления планиметра

$$C = \frac{F_0}{f} = \frac{100}{1035} = 0,0966 \text{ см}^2.$$

4. Вычисляем площадь криволинейного контура

$$\Pi = \frac{C}{P_0} \sum \frac{n}{p} 10^{-10} \text{ км}^2.$$

Для решения примера по этой формуле составляем специальную табл. 27.

5. Приведенная площадь криволинейного контура на карте

$$\Pi_1' = 751 \times 0,0966 = 72,548 \text{ см}^2.$$

6. Приведенная площадь вне криволинейного контура на карте

$$\Pi_2' = 1269 \times 0,0966 = 122,580 \text{ см}^2.$$

Таблица 27

№ зоны	ϕ _{ср} зоны	cos ϕ _{ср}	$\frac{\cos \varphi_{ср}}{\cos \varphi_0} = \frac{1}{m}$	$\frac{1}{p} = \frac{1}{m^2}$	Площадь по показаниям планиметра, <i>n</i>		Площадь по показаниям планиметра, приведенным к главной параллели, <i>n</i>	
					внутри контура	вне контура	внутри контура	вне контура
1	59°45'30"	0,5036	1,0072	1,0145	—	130	—	132
2	59°46'30"	0,5034	1,0068	1,0136	—	129	—	131
3	59°47'30"	0,5031	1,0062	1,0124	21	113	21	115
4	59°48'30"	0,5029	1,0058	1,0116	45	92	45	93
5	59°49'30"	0,5026	1,0052	1,0104	50	84	50	85
6	59°50'30"	0,5024	1,0048	1,0096	92	45	93	45
7	59°51'30"	0,5021	1,0042	1,0084	94	38	95	38
8	59°52'30"	0,5019	1,0038	1,0076	97	32	98	32
9	59°53'30"	0,5016	1,0032	1,0064	92	39	93	39
10	59°54'30"	0,5014	1,0028	1,0056	78	60	78	60
11	59°55'30"	0,5011	1,0022	1,0044	57	77	57	77
12	59°56'30"	0,5009	1,0018	1,0036	53	84	53	84
13	59°57'30"	0,5006	1,0012	1,0024	44	96	44	96
14	59°58'30"	0,5004	1,0008	1,0016	24	112	24	112
15	59°59'30"	0,5001	1,0002	1,0004	—	130	—	130
					747	1261	751	1269

Примечания. В столбцах 4 и 5 вычислены величины, обратные увеличению масштабов *m* и *p* для средних широт зон, для замены деления умножением при получении столбцов 8 и 9. Величины в столбцах 8 и 9 получаются умножением данных столбцов 6 и 7 на величину $\frac{1}{p}$ каждой широтной зоны.

7. Площадь криволинейного контура в натуре

$$П_1 = 72,548 \times 200\,000^2 = 72,548 \times 4 \times 10^{10} = 290,19 \text{ км}^2.$$

8. Площадь вне криволинейного контура в натуре

$$П_2 = 122,580 \times 200\,000^2 = 122,580 \times 4 \times 10^{10} = 490,32 \text{ км}^2.$$

9. Общая измеренная площадь всей трапеции в натуре

$$П = П_1 + П_2 = 780,51 \text{ км}^2.$$

10. Теоретическая площадь в натуре той же трапеции

$$П_т = 780,00 \text{ км}^2.$$

11. Невязка измерения

$$\delta = П - П_т = 0,51 \text{ км}^2.$$

12. Исправленная на величину невязки площадь криволинейного контура в натуре

$$290,19 - 0,19 = 290,00 \text{ км}^2.$$

13. Исправленная на величину невязки площадь вне контура в натуре

$$490,32 - 0,32 = 490,00 \text{ км}^2.$$

14. Исправленная на величину невязки общая площадь трапеции

$$290,00 \text{ км}^2 + 490,00 \text{ км}^2 = 780,00 \text{ км}^2.$$

В Приложениях, в конце книги даются поверхности градусных трапеций. Для определения поверхностей долей градусных трапеций удобны «Таблицы координат Гаусса — Крюгера для широт от 32 до 80° через 5' и для долгот от 0 до 6° через 7¹/₂' и таблицы размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок. Эллипсоид Красовского». 3-е изд. М., Госгеолтехиздат, 1963. Из них для трапеций карт масштаба 1 : 10 000, имеющих протяжение по широте 2',5, по долготе — 3',75, установили, что сумма площадей трапеций от 59°45' до 60°00' составляет 97,50 км². Трапеция с той же разностью широт параллелей и в 30' по долготе имеет поверхность, равную $97,50 \times \frac{30'}{3',75} = 97,50 \times 8 = 780,00 \text{ км}^2$.

Проекция Гаусса

В проекции Гаусса масштаб площадей равен квадрату масштаба длин. Известно, что в этой проекции масштабы вообще, а масштабы площади в частности, возрастают по мере удаления от осевого меридиана зоны. Максимальное удаление от осевого меридиана равно 3°. Поэтому, если при измерении длин искажениями линейного масштаба можно было пренебречь, то при измерении площадей это удастся сделать только при определенных условиях.

Величина колебаний масштаба в пределах листа карты зависит, главным образом, от разности ординат восточной и западной рамок листа. Эта разность зависит от широты (к северу меридианы сближаются) и от разности долгот рамок, зависящей от масштаба карты: колебание масштаба будет тем меньше, чем больше широта, и тем меньше, чем крупнее масштаб карты. Например, на карте в масштабе 1 : 500 000 наибольшая разность масштабов (в южных широтах СССР) достигает 0,18% и при измерении площадей с одной ценой деления планиметра ошибка в измеренной площади может быть порядка 1 : 500, т. е. вдвое больше предельной, установленной нами выше. Значит, при работах с картами в проекции

Гаусса в масштабе 1 : 500 000 следует определять цену деления планиметра по обводам той трапеции, на которые делится карта, где производятся измерения площади.

На картах масштаба 1 : 200 000 наибольшая разность масштабов в пределах листа достигает только 0,1%. Поэтому на картах этого масштаба и крупнее при измерении площадей следует учитывать только деформацию бумаги, т. е. производить измерения на трапециях размером не более 10 × 10 см. Если на картах нет для этой цели достаточного количества меридианов и параллелей, их необходимо нанести.

Равноугольная коническая проекция

Изменение масштаба площадей в этой проекции возрастает от параллели с наименьшим масштабом φ_0 к северу и югу, причем более интенсивно к северу. Эти положения легко подтверждаются табл. 28, в которой показывается изменение масштаба площади в равноугольной конической проекции с минимальным увеличением $\mu_0 = 1$ по параллели с широтой $\varphi_0 = 50^\circ$ (параллель касания).

Из табл. 28 видно, что уже при удалении от φ_0 на 2° по широте масштаб площади изменяется более чем на 0,1% (т. е. 1 : 1000). Дальнейший анализ подобных исследований дает возможность установить, что при измерении площадей с ошибками менее или равными 1 : 1000 можно пользоваться следующими трапециями:

Таблица 28

Удаление от параллели φ_0 к северу	Масштаб площади, ρ	Искажение площадей в %	Удаление от параллели φ_0 к югу	Масштаб площади, ρ	Искажение площадей в %
20°	1,1634	16,34	20°	1,1165	11,65
16°	1,0954	9,54	16°	1,0741	7,41
12°	1,0499	4,99	12°	1,0417	4,17
10°	1,0337	3,37	10°	1,0291	2,91
8°	1,0210	2,10	8°	1,0187	1,87
6°	1,0115	1,15	6°	1,0106	1,06
4°	1,0050	0,50	4°	1,0047	0,47
2°	1,0012	0,12	2°	1,0011	0,11
0°	1,0000	0,00	0°	1,0000	0,00

двуградусными трапециями в двух поясах, ближайших к φ_0 ;
одноградусными трапециями при удалении от φ_0 до 4° ;
полуградусными трапециями при удалении от φ_0 до 6° ;
двадцатиминутными трапециями при удалении от φ_0 до $8-9^\circ$;
десятиминутными трапециями при удалении от φ_0 до $12-13^\circ$.

При удалении трапеции на величину более указанной ошибки измерения площадей превысят 1 : 1000.

Равнопромежуточная коническая проекция

Произведенные расчеты, подобные сделанным для равноугольных конических проекций, показывают, что для обеспечения ошибки в измеренных площадях, равной 1 : 1000, следует пользоваться: двухградусными трапециями в двух поясах, ближайших к φ_0 ; одноградусными трапециями при удалении от φ_0 до 5—6°; полуградусными трапециями при удалении от φ_0 до 8°; двадцатиминутными трапециями при удалении от φ_0 до 12°; десятиминутными трапециями при удалении от φ_0 до 14—15°.

Приведенные данные показывают, что для измерения площадей равнопромежуточные, по сравнению с равноугольными коническими проекциями, более выгодны.

Проекция Международной карты мира в масштабе 1 : 1 000 000

Исследования масштаба площадей показали, что при измерении площадей на листе карты в этой проекции можно пользоваться общей ценой деления планиметра и при этом точность измерения будет в пределах допустимой, т. е. 1 : 1000. Но, чтобы учесть деформацию бумаги, измерения следует делать по частям на трапециях не более 10×10 см.

§ 40. Вычисление основных морфометрических характеристик водных объектов

При исследовании многих вопросов у океанологов очень часто возникает необходимость знать объем массы морской воды, ограниченной какими-нибудь изолиниями, величину уклона дна, а также иметь и некоторые другие сведения о состоянии подводного рельефа. Все эти задачи относятся к морфометрии и обычно решаются по географическим картам.

Не рассматривая, особенности измерения этих величин на картах в разных проекциях, что уже сделано ранее, обратимся к выводу основных формул и зависимостей, которые позволяют вычислить наиболее важные для практики морфометрические характеристики.

Вычисление объемов воды

Вычисление объемов воды по изобатам. Наиболее распространено вычисление объема воды по формуле

$$V=PZ, \quad (9,15)$$

где P — поверхность воды (площадь зеркала); Z — средняя глубина водоема.

Задача заключается в измерении с помощью планиметра площади зеркала воды и умножением ее на среднюю глубину водного объекта. Под средней глубиной понимается среднее из глубин всех элементарно малых площадок p_1, p_2, p_3 и т. д., взятых на поверхности водоема с карты и ограниченных соседними изобатами. Средняя глубина может быть определена уравнением

$$Z = \frac{p_1 z_1 + p_2 z_2 + \dots + p_n z_n}{P}, \quad (9,16)$$

где z_1, z_2, \dots, z_n — средние глубины между изобатами в метрах; p_1, p_2, \dots, p_n — частные площади водного объекта, заключенные между изобатами в км^2 ; P — также в км^2 .

Таким образом, чтобы определить Z следует измерить площади между изобатами, умножить их на среднюю глубину каждой ступени между изобатами, сложить полученные произведения и разделить их на общую площадь зеркала воды (рис. 69). Определив Z и общую поверхность водоема P , по формуле (9,15) легко определить объем воды.

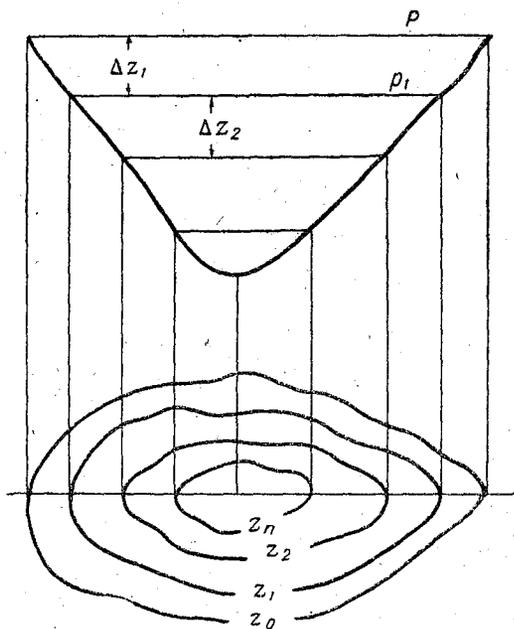


Рис. 69. К определению средней глубины водоема.

Определение объема воды по батиграфической кривой. Вычисление объемов воды этим способом основано на построении батиграфической кривой. Для этого планиметром или палеткой измеряют площади имеющихся на карте изобат, т. е. глубинных слоев, и, принимая эти площади абсциссами, а соответствующие им глубины — ординатами, наносят эти точки в выбранном масштабе на миллиметровую бумагу. Выбор масштаба зависит от глубины и общей площади водного объекта. Полученные точки соединяют линией, которая и представляет собой батиграфическую кривую (рис. 70). Конечными точками батиграфической кривой будут максимальная глубина и нуль глубины. Объем воды

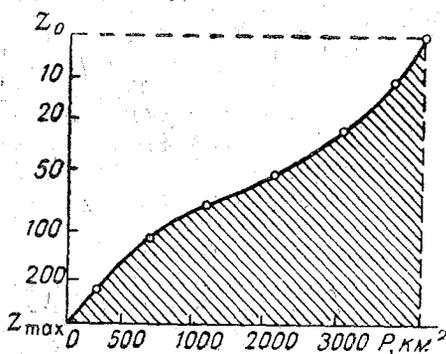


Рис. 70. Батиграфическая кривая.

подсчитывается измерением площади, ограниченной батиграфической кривой и осью абсцисс. Для получения объема в натуре полученная величина умножается на знаменатель масштаба площади.

Кроме получения объема воды батиграфическая кривая дает возможность вычислить и среднюю глубину водоема. Для этого измеренная площадь делится на длину ее основания, снятой с графика

$$Z = \frac{V}{P}. \quad (9,17)$$

Определение объема водного объекта по вычислению отдельных слоев. В некоторых случаях вычисляют объемы отдельных слоев воды между изобатами, результаты суммируют и определяют объем воды объекта в целом. Каждый из водных слоев в зависимости от его формы может приближенно приниматься за объем

усеченного конуса, призмы, шарового сегмента и т. п., и тогда общий объем воды будет выражаться следующей формулой:

$$V = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_{n-1} + v_n,$$

где v_1, v_2, \dots, v_n — объемы отдельных глубинных слоев.

Рассмотрим глубинный слой как имеющий вид усеченного конуса; тогда объем этого слоя может быть вычислен на основании формулы

$$v_i = \frac{\Delta z}{3} (p_1 + p_2 + \sqrt{p_1 p_2}), \quad (9,18)$$

где Δz — сечение изобат; p_1 и p_2 — площади верхнего и нижнего основания слоя или, что то же самое, площади, ограниченные верхней и нижней изобатами.

Общая формула объема воды, если водоем состоит из нескольких таких слоев, соответствует уравнению

$$V = \frac{\Delta z_0}{3} (p_0 + p_1 + \sqrt{p_1 p_0}) + \frac{\Delta z_1}{3} (p_1 + p_2 + \sqrt{p_1 p_2}) + \dots + \frac{\Delta z_n}{3} p_n, \quad (9,19)$$

где p_i — площадь внутри изобаты с порядковым номером i .

Если изобаты нанесены с одним сечением, то формула (9,19) примет вид

$$V = \frac{\Delta z}{3} (p_0 + \sqrt{p_0 p_1} + 2p_1 + \sqrt{p_1 p_2} + 2p_2 + \sqrt{p_2 p_3} + \dots + p_n). \quad (9,20)$$

Рассматривая глубинный слой как призму, получим при тех же обозначениях

$$v_m = \frac{p_m + p_{m-1}}{2} \Delta z_{m-1}. \quad (9,21)$$

Суммируя объемы слоев и принимая объем водного объекта фигурой, состоящей из нескольких призм, стоящих одна на другой, можно написать, что

$$V = \frac{p_0 + p_1}{2} \Delta z_0 + \frac{p_1 + p_2}{2} \Delta z_1 + \dots + \frac{p_{n-1} + p_n}{2} \Delta z_{n-1}, \quad (9,22)$$

а при одинаковом сечении изобат будем иметь

$$V = \frac{\Delta z}{2} (p_0 + 2p_1 + 2p_2 + \dots + p_n). \quad (9,23)$$

Если чаша водного объекта имеет вид шарового сегмента, то в этом случае для вычисления ее объема можно применить формулу

$$V = \frac{\Delta z}{3} p_n + \frac{\pi \Delta z^2}{3}, \quad (9,24)$$

где p_n — площадь нижней изобаты.

Таким образом, в зависимости от вида того или иного глубинного слоя объем водного объекта в общем случае равен

$$V = \sum_{i=1}^{i=n} v_n.$$

Все предложенные здесь формулы одинаково пригодны как для определения объема воды, так и для вычисления объемов различных форм рельефа суши.

Вычисление средних углов наклона дна

Определение среднего угла наклона дна. Способов измерения среднего угла наклона линии имеется несколько. Рассмотрим наиболее простой. Предположим, требуется определить средний угол наклона дна вдоль какой-то линии ab , горизонтальное проложение которой a_0b_0 (рис. 71,а). Пусть глубина точки $a = z_1$, а глубина точки $b = z_2$. Развернем полученный профиль a_0abb_0 на плоскость, тогда получим фигуру A_0ABV_0 (рис. 71,б), длина горизонтального

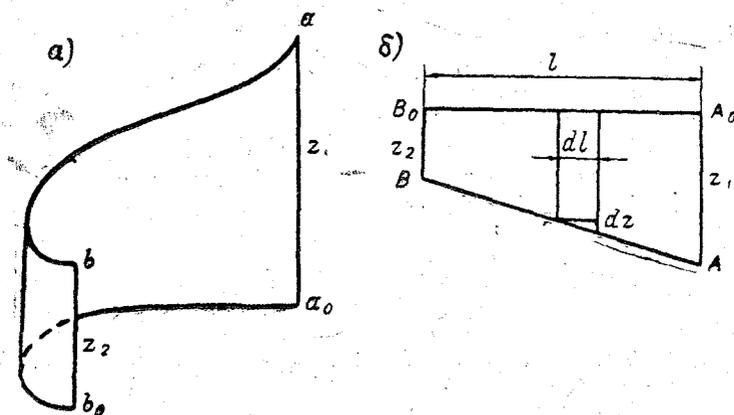


Рис. 71. К определению среднего угла наклона дна.

проложения которой $A_0B_0 = a_0b_0 = l$. Если бы линия AB была прямой, то средний угол наклона этой линии

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{z_1 - z_2}{l}.$$

Но так как линия AB представляет собой кривую, то написанная зависимость будет неверна. Для определения угла наклона кривой линии разделим A_0B_0 на бесконечно малые и равные элементы dl , в пределах которых глубины изменятся на величину dz . Тогда тангенс угла наклона элемента линии AB окажется равным

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dl},$$

а средний угол наклона линии ab можно представить как

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\Sigma dz}{\Sigma dl}.$$

Заменим dz его значением из предыдущей формулы, тогда

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{\Sigma (dl \operatorname{tg} \alpha)}{\Sigma dl}. \quad (9,25)$$

Таким образом, средний угол наклона линии равен взвешенному среднему из тангенсов углов наклона отдельных элементов этой линии, весами которых приняты длины горизонтальных проложений соответствующих элементов dl .

Вычисление среднего угла наклона поверхности дна. Задача получения среднего угла наклона поверхности дна решается следующим образом. Выберем на участке карты площадь между двумя изобатами с глубинами z и $z + dz$ (рис. 72). Разделим эту поверхность на бесконечно большое число элементарных площадок. Площадь каждой элементарной площадки на основании рис. 72 будет

$$dp = dl \cdot ds.$$

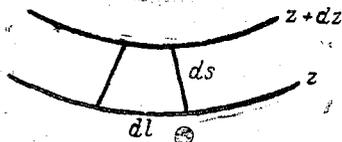


Рис. 72. К определению среднего угла наклона поверхности дна.

Если разность глубин между изобатами равна dz , то угол наклона элементарной площадки определится соотношением

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{ds}.$$

Умножим числитель и знаменатель правой части этого уравнения на dl и, заменив произведение $dsdl$ через dp , получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dzdl}{ds dl} = \frac{dz dl}{dp}.$$

Тогда средний угол A наклона всей поверхности участка дна в пределах заданных между изобатами глубин z и $z + dz$ окажется равным

$$\operatorname{tg} A = \frac{\Sigma (dz dl)}{\Sigma dp}. \quad (9,26)$$

При постоянной величине dz сечения изобат формула (9,26) переписывается в виде

$$\operatorname{tg} A = \frac{dz \cdot \Sigma dl}{\Sigma dp}. \quad (9,27)$$

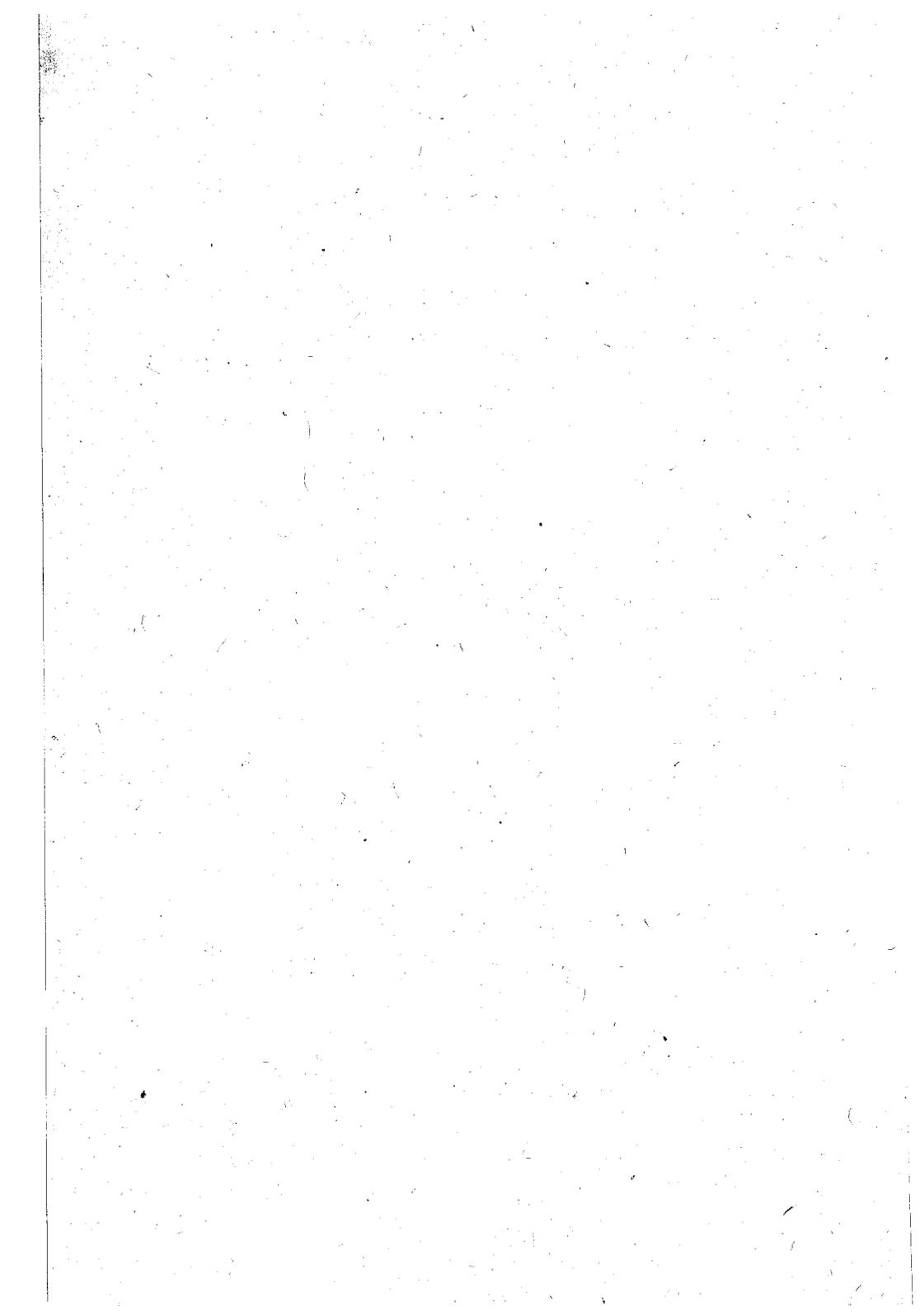
В этой формуле $dz = \Delta z$ — сечение изобат; $\Sigma dl = \Sigma l = L$ — сумма длин изобат всех наименований в пределах поверхности $P = \Sigma dp$ дна, для которой ищется средний угол наклона. Поэтому формулу (9,27) можно выразить так:

$$\operatorname{tg} A = \frac{\Delta z \cdot L}{P}. \quad (9,28)$$

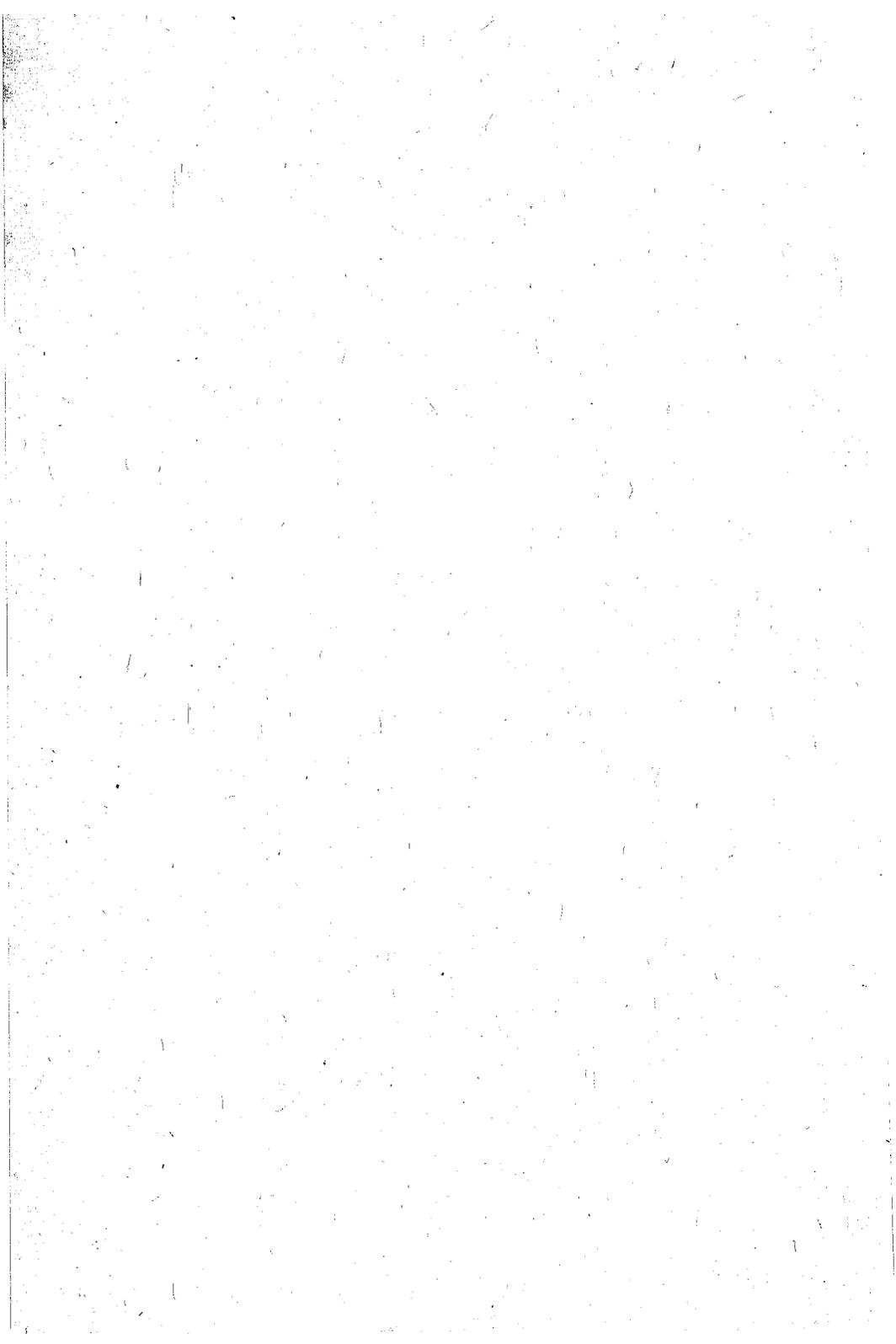
Формулу (9,27) можно выразить следующими словами: тангенс среднего угла наклона поверхности дна равен отношению суммы вертикальных площадей к сумме горизонтальных площадок, образующих ступени между изобатами.

ЛИТЕРАТУРА

1. Белобров А. П. Гидрографические работы (дополнительные вопросы). Л., изд. ГУ ВМС, 1951.
2. Волков Н. М. Принципы и методы картометрии. М.—Л., изд. АН СССР, 1950.
3. Гараевская Л. С. Картография. М., Гедезиздат, 1955.
4. Глинков Е. Г. Навигационные пособия. Л., изд. УНГС ВМФ, 1960.
5. Граур А. В. Математическая картография. Изд. ЛГУ, 1956.
6. Каврайский В. В. Избранные труды, том II, вып. 1, 2, 3. М., изд. УНГС ВМФ, 1958—1960.
7. Запасский С. И. Картография. Методические указания и контрольные задания для студентов-заочников по специальности «Гидрометеорология». М., изд. «Морской транспорт», 1958.
8. Звонарев К. А. Картография. М., Углетехиздат, 1951.
9. Таблицы для построения рамок трапеций топографических съемок масштабов 1 : 5000 и 1 : 2000. М., 1951.
10. Таблицы координат Гаусса — Крюгера для широт от 32° до 80° через $5'$ и для долгот от 0° до 6° через $7\frac{1}{2}'$ и таблицы размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок. Эллипсоид Красовского. 3-е изд. М., Госгеолтехиздат, 1963.
11. Картографические таблицы. Эллипсоид Красовского. 2-е изд. М., Гедезиздат, 1953 (Труды ЦНИИГАНК, вып. 97).
12. Таблицы вычисления прямоугольных и географических координат. Изд. ГУВМС, 1948.
13. Таблицы прямоугольных координат углов рамок, размеров рамок и площадей трапеций топографических съемок масштаба 1 : 5000 для широт от 36° до 68° . Эллипсоид Красовского. М., Гедезиздат, 1953 (ГУГК).
14. Таблицы для вычисления высоты и азимута (ТВА-57). Изд. УНГС ВМФ, 1957.
15. Таблицы для вычисления плоских конформных координат Гаусса в пределах широт от 30° до 80° . Эллипсоид Красовского. М., Гедезиздат, 1958.
16. Максимов Г. С. Гидрографическая опись. М.—Л., изд. Главсевморпути, 1949.



ПРИЛОЖЕНИЯ



МОРСКИЕ КАРТЫ

Морскими картами называются карты, предназначенные для решения задач кораблевождения, изучения района плавания, а также для других целей, связанных с исследованием морей и океанов. Некоторые морские карты дают возможность получить общегеографический и справочный материал по распределению различных элементов, нанесенных на карту.

Кроме обычных требований, предъявляемых ко всем другим видам географических карт, морские карты должны:

1) состояться в таких проекциях, которые давали бы возможность просто и легко делать на карте разнообразие графические построения и другие расчеты в условиях плавания;

2) с большей степенью подробности, чем это делается на обычных картах, отображать элементы водного пространства;

3) иметь удобный формат для пользования картой на корабле и печататься на плотной бумаге с незначительной деформацией.

Содержание морских карт. Совокупность элементов, наносимых на географическую карту, называется содержанием карты. Общий объем всех элементов содержания, которые графически изображены на карте, носит название нагрузки карты. Нагрузка карты зависит от назначения и масштаба карты. Содержание морских карт можно подразделить на четыре основные группы:

1) математическая основа карты — геодезическая и высотная основа, картографическая сетка, масштаб и внутренние рамки карты;

2) элементы специальной морской обстановки — характер береговой линии, рельеф дна, грунты, средства навигационного оборудования и береговые ориентиры, гидрометеорологические данные и т. д.;

3) общегеографические элементы — береговая линия, рельеф суши, гидрография суши, населенные пункты и т. п.;

4) элементы оформления карты — заголовок, номер карты, наружные рамки карты, пояснительные надписи и рисунки.

Соответствие содержания морских карт их назначению и масштабам определяется отбором, обобщением и выделением наиболее важных объектов, которые наносятся на карту (картографической генерализацией). Поскольку все объекты не могут быть изображены в масштабе карты, их наносят условными знаками.

Граница района, охватываемого данной картой, называется нарезкой карты. Советские морские карты издаются на отдельных листах трех форматов: лист (100 × 75 см), половина листа (75 × 50 см) и четверть листа (50 × 38 см).

Классификация морских карт. По своему назначению все морские карты подразделяются на две основные группы: 1) морские навигационные карты; 2) морские справочные и вспомогательные карты.

Морские навигационные карты являются основным пособием для мореплавания и употребляются для графической прокладки и других расчетов в море. Поэтому на этих картах наиболее полно отображается навигационная и общегеографическая нагрузка. Навигационные карты для моря имеют такое же значение, как топографические карты для территории суши. Эти карты составляются, как правило, в проекции Меркатора, что дает возможность изображать прямой линией курс судна и наносить измеренные углы на карту для определения места корабля в море. Очень важным требованием для правильного использования навигационных карт является выбор масштаба карты. В зависимости от условий и особенностей плавания навигационные карты издаются в различных масштабах и делятся на следующие четыре подгруппы:

1. *Генеральные карты* — изображают отдельные моря, океаны или их части и служат для общего изучения условий плавания, предварительной прокладки, общих навигационных расчетов, а также для графической прокладки пути судна при следовании в открытом море вдали от берегов. Эти карты составляются в масштабах от 1 : 500 000 до 1 : 5 000 000 по главной параллели моря.

2. *Путевые карты* — служат для обеспечения плавания в значительном расстоянии от береговой черты и вне видимых берегов. На этих картах наносятся все знаки навигационного оборудования и фарватеры. Изобаты проводятся по глубинам 5, 10, 20, 50 и 100 м, в зависимости от имеющихся в данной акватории глубин, крутизны подводных склонов. Карты составляются в масштабах от 1 : 100 000 до 1 : 500 000 по главной параллели моря.

3. *Частные карты* — используются для обеспечения плавания в непосредственной близости берегов и в трудных навигационных условиях: шхерах, узкостях, при подходе к порту и т. д. На частные карты наносятся все знаки навигационного оборудования. Изобаты проводятся через те же глубины, как и на путевых картах. Масштабы этих карт 1 : 50 000—1 : 75 000 по главной параллели моря.

4. *Планы* — предназначены для обеспечения входа в бухты, гавани, рейды, порты, якорные стоянки и т. п., и в большинстве случаев представляют собой копии съёмочных и промерных планшетов. Планы составляются в масштабах от 1 : 1 000 до 1 : 25 000.

Специальные навигационные карты являются в основном картами, на которых нанесена дополнительная нагрузка в виде сетки изолиний для определения места судна различными радионавигационными и гидроакустическими методами.

Справочные морские карты, как правило, составляются в мелком масштабе и служат для изучения физико-географических данных и других элементов, которые не могут быть показаны на навигационных картах. На них изображаются отдельные моря, океаны, полушария и даже весь земной шар. К этой группе относятся обзорные карты, карты радиомаяков и радиостанций, часовых поясов, звездного неба, грунтов, элементов земного магнетизма, карты гидрометеорологических элементов, батиметрические карты, морские атласы и сборные листы. Большинство справочных карт составлено в проекции Меркатора, часть из них издана в центральной и стереографической проекциях. Подробное описание справочных карт и наставления для пользования ими приведены в логиях. Описание справочных карт, необходимых при производстве океанологических исследований, дано в § 35 главы VIII. Остальные справочные карты имеют значение только для навигационных целей и поэтому их описание не приводится.

Вспомогательные морские карты в основном предназначены для специальных навигационных расчетов и графических построений. Эта группа карт довольно разнообразна по своему содержанию и состоит из карт-сеток, кодированных и бланковых карт, а также карт для расчета плавания по дуге большого круга. Вспомогательные карты составляются в различных масштабах и в основном имеют чисто навигационный характер; исключением могут служить бланковые карты и карты для расчета плавания по дуге большого круга, которые нашли также довольно широкое применение в океанологии.

Оценка достоинства морских навигационных карт. При практическом использовании морской карты необходимо определить степень ее пригодности и достоверности. Оценка достоинства карты состоит в тщательной проверке карты. Для этого следует внимательно прочесть все данные о карте, помещенные в заголовке. Заголовок карты определяет ее название, номер, уточняет изображенный на ней район моря, указывает численный масштаб карты по главной параллели моря, дает сведения о магнитном склонении и нуле глубин. Отсутствие сведений о нуле глубин обязывает критически отнестись к достоверности, особенно малых глубин, так как неизвестно, к какому уровню моря эти глубины приведены. Кроме того, следует внимательно прочитать все предупреждения и

примечания, о которых говорится в заголовке карты, чтобы знать, в каких районах моря можно плавать и при каких условиях. Далее необходимо ознакомиться с разбивкой внутренней рамки карты. Особое внимание следует обратить на зарамочные подписи, которые позволяют судить о точности и современности карты. Указание о геодезической основе карты дает представление о геометрической точности и достоверности размещения объектов на карте. Например, надпись «Основа карты — геодезические координаты в системе 1942 г.» говорит о сравнительно высокой точности основы карты, а ссылка на местную систему координат показывает на возможность получения невязки даже при определении места судна. Даты издания карты, большой и малой корректуры также указывают на точность и достоверность карты. Причем следует иметь в виду, что малая корректура к основе карты никакого отношения не имеет и ссылка на нее указывает только на исправление положения навигационных элементов карты.

По элементам содержания карты также можно иметь представление о ее точности. Например, если на карте промерные галсы нанесены редко, глубин мало, то надо быть осторожным, так как гидрографическая изученность этого района моря явно недостаточна. То же можно сказать и о других элементах содержания карты.

Точность положений контурных точек на карте зависит, как это указывалось в § 37, от многих причин. На основании исследований, проведенных Н. М. Волковым, средняя квадратическая ошибка положения контурной точки на оттиске карты может быть принята равной ± 1 мм. Отсюда, зная масштаб карты, легко получить величину этой ошибки в метрах. Например, для навигационной карты с масштабом 1 : 200 000 она равна 200 м, для карты в масштабе 1 : 50 000 — 50 м и т. д.

Каталоги карт и книг. Морские карты и другие руководства для плавания принято систематизировать по географическому признаку: по морям и океанам. Основным пособием для нахождения нужного картографического материала является книга «Каталоги морских карт и книг», которая содержит подробные сведения о картах и книгах, предназначенных для целей кораблевождения и других исследований.

Советский каталог карт и книг издается по мере накопления нового материала и состоит из двух самостоятельных разделов: «Карты» и «Книги». Раздел каталога «Карты» содержит четыре отдела: Отдел I — Морские навигационные карты. Отдел II — Озерные и речные карты. Отдел III — Справочные карты. Отдел IV — Специальные карты.

Каждый отдел состоит из секций, а секция — из коллекции карт. Например: Отдел I подразделен на следующие секции: Атлантический океан, Каспийское море, Индийский океан, Тихий океан и Северный Ледовитый океан. В каждой секции даются генеральные карты, а затем следуют коллекции путевых, частных карт и планов; перед коллекцией приведен сборный лист, на котором указаны все карты, включенные в данную коллекцию. Пользуясь таким каталогом, всегда легко найти нужную морскую карту.

ОСНОВНЫЕ УСЛОВНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ НА МОРСКИХ КАРТАХ

I. Средства навигационного оборудования:

Аэромаяк	Аэро М ^к
Гидроакустическая и звукоопосредованная станция	Г
Гидрологическая станция	гидр. ст.
Ледовая станция	лед. ст.
Гидрометеорологическая станция	гм. ст.
Лоцманская станция	л. ст.
Метеорологическая станция	мет. ст.
Маяк	М ^к
Плавающий маяк	Пл. М ^к
Радиодальномерная станция	РДС
Радиолокационная станция	РЛС
Радиолокационный отражатель	РЛ
Радиомаяк кругового излучения	РМ ^к
Радиомаяк направленного излучения	РМ ^к н
Радиомаяк секторный	РМ ^к скт
Радиомаяк створный	РМ ^с ств.
Радиопеленгаторная станция	РПС
Радиотехнические средства	РТС
Радиотелеграфная станция	РТФ
Радиотелефонная станция	РТН
Створ	Ств
Створный знак	Ств. зн.
Сигнальная станция	с. ст.
Служба погоды	Сл. Пог.
Спасательная станция	сп. ст.
Станция штормовых сигналов	шт. ст.
Телеграфная станция	тф. ст.
Телефонная станция	тн. ст.

II. Характер огней и их характеристика:

Вертящийся	В
Группо-затмевающийся	Гр. Зтм.
Группо- проблесковый	Гр. Пр.
Затмевающийся	Зтм.
Переменный	Пер.
Переменный проблесковый	Пер. Пр.
Постоянный	П
Постоянный с группой проблесков	П. Гр. Пр.
Постоянный с проблесками	П. Пр.
Прерывистый часто- проблесковый	Прер. ЧПр.
Проблесковый	Пр
Смешанный	Смш.
Часто- проблесковый	Ч. пр.
Дальность видимости в милях	20М, 10М
Количество проблесков (затмений) в группе	(4), (2)
Необслуживаемый маяк (огонь)	(U)
Период огня	(20°), (10°)
Резервный	Резерв
Секторный	Скт.
Створный	Ств.

III. Характер звукоцигнальных и гидроакустических средств:

Взрыв	(в)	Подводный колокол	(Пк)
Гидрофон	(гф)	Подводный осциллятор	(П. О.)
Гонг	гонг	Пушка	(П)
Горн	(г)	Ревун	(рев)
Гудок	(рев)	Свисток	(рев)
Диафон	(д)	Сирена	(с)
Колокол	(к)	Тайфон	(т)
Наутофон	(н)		

IV. Гидрологические элементы:

Грунт	г	Полная вода	ПВ
Квадратура	квадр.	Пресная вода	Пресн.
Малая вода	МВ	Прилив	прил.
Нуль карты	Н. К.	Сизигия	Сиз.
Отлив	отл.	Теоретический нуль	
Отличительный		глубин	ТНГ
цвет вод	отл. цв.	Уровень	ур.

V. Грунты:

Валуны	В	Гравий, дресва	Гр
Водоросли	Вд	Губка	Гбк
Галька	Гк	Диатомовый	Дт
Глина	Гл	Известь	Изн.
Глинистый ил	ГлИ	Изгарь	Изг
Глобигерин	Глоб	Ил	И
Илистый песок	ИП	Плита	Пл
Камень	К	Радиолярий	Рад
Коралл	Кор	Ракушка	Р
Литотамий	Лт	Скалистый, скала	Ск
Мел	М	Сланец	С
Мергель	Мг	Туф	Т
Мирабилит	Мр	Устрицы	Ус
Орешек	Ор	Фораминифера	Фор
Пемза	Пм	Хрящ	Хр
Песок	П	Щебень	Щ
Песчанистый ил	ПИ		

Характеристика

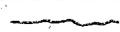
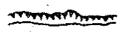
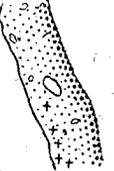
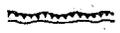
Битый	б	Крупный	к	Полужидкий	пж
Вязкий	в	Мелкий	м	Пористый	пор
Вулканический	вулк	Мягкий	мг	Разрушенный	р
Жесткий	жс	Отдельный	отд	Средний	срд
Жидкий	ж	Плотный	ил	Твердый	тв

Цвет

Белый	бл.	Коричневый	кч	Светлый	св
Бурый	бр	Красный	кр	Серый	ср
Голубой	гл	Оранжевый	ор	Синий	сн
Желтый	жл	Пятнистый	пт	Темный	тм
Зеленый	зл	Розовый	рз	Черный	чр

Условные знаки морских карт

Характер берега

1		Береговая линия достоверная	7		Берег каменистый
2		Береговая линия недостоверная	8		Берег глинистый (низменный)
3		Берег скалистый	9		Берег опасный
4		Берег обрывистый с пляжем	10		Берег осушной
5		Берег обрывистый без пляжа			
6		Берег песчаный (или землистый)			

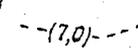
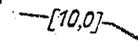
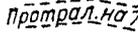
Изобаты (в метрах)

1	1 м	10 м	100 м
2	2	20	200
3	3	30	300
4	4	40	400
5	5	50	500
6	6	60	600
7	7	70	700
8	8	80	800
9	9	90	900
	1000 м		11 м
	2000		12
	3000		13
	4000		14
	5000		15
	6000		16
	7000		17
	8000		18
	9000		19

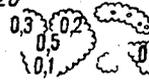
Линия отличительных глубин Граница опасной в навагац, отношении зоны.

Примечание: Размеры условных обозначений изобат сохраняются для всех масштабов

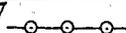
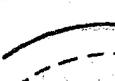
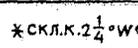
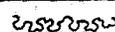
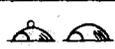
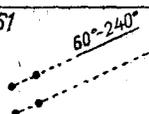
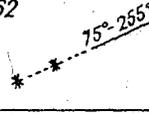
Фарватеры

12		Без указания глубин
13		С наименьшей глубиной 7 м
14		Протраленный на 10 м
15		Границы протраленных площадей
16		Запретные зоны, районы учений и т.д.

Характер морского дна

17		Камень надводный Камень подводный с указанием глубины под ним Камень осыхающий и бурун Положение сомнительное Существование сомнительное Скалы	С пунктирным контуром — место определено Без контура — не определено	23		Острова, не выражающиеся в масштабе
18				24		Отдельные отличительные глубины и банки малого размера
19				25		Осередиши и отсыхающие отмели в реках
20				26		Коралловые рифы
21				27		Подводные препятствия
22						

Обозначения на воде

28		Якорные стоянки д. больших и малых судов, необорудованный рейд	46 	Затонувшее судно с глубиной над ним б. 18м
29		Изогоны	47 	Палы
			48 	Шест, ледовый буй, ледовая вежа
30		Граница магнитной аномалии. Граница магнитной аномалии недостоверная	49 	Телеграфная вежа
			50 	N-ая вежа
31		Значения магн. склон. в аномалий. точке на воде или на берегу	51 	S-ая вежа
			52 	W-ая вежа
32		Границы льдов	53 	O-ая вежа
33		Подводный кабель	54 	Крестовая вежа
34		Электро-лоцман, ведущий кабель	55 	Морской канал и его ограждения
35		Спорные течения, толчея, сулой.	56 	Плывучий маяк
36		Водоворот	57 	Бочка
37		Вулканич. проявл. подв. (1908-год, 27-глубина)	58 	Буй, бакан
38		Водоросли	59 	Буй, бакан с топовой фигурой
39		Стамуха	60 	Освещаемый бакан или буй.
40		Глубины	61 	Створ знаков
41		Глубина при которой не достали дна (пронесли)	62 	Створ огней
42		Глубина недостоверн.		
43		Высота осушки над нулем карты	63 	Постоянное течение
44		Затонувшее судно с частями над водой	64 	Переменное течение
45		То же с глубиной над ним меньше 18м		

Обозначения на воде (продолжение)

65		Прилива-отливные течения (с оперением приливы, без оперения отлив)	71		Гавани
66		Закол для рыбной ловли	72		Волнолом, брекватер
67		Рыболовные сети	73		Пристань
68		Подводный звуковой сигнал, связанный с берегом	74		Плывучий док
69		Подводный звуковой сигнал, не связанный с берегом	75		Эллинг
70		Мол	76		Сухой док

Мельницы, колодцы и др. объекты

77		Мельницы на судах	86		Ключи, источники родники
78		Водяные мельницы	87		Артезианские колодцы
79		Водяные лесопилки	88		Минеральные источники
80		Чигири	89		Колодцы с журавл.
81		Колодцы с ветр двигателем	90		Дождевые ямы (в Ср. Азии)
82		Колодцы	91		Дождевые ямы (в Ср. Азии)
83		Колодцы сухие	92		Труба
84		Наблюдат. вышка	93		Церковь
85		Парашют. вышка	94		Мечеть

КАРТОГРАФИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ

Прилагаемые картографические таблицы распространены в некоторых случаях (табл. 1) лишь для широт Советского Союза. Аргументом для выборки из таблиц интересующих величин обычно является широта φ .

В случаях, когда требуется найти функцию широты для ее значения, выражающегося не целым числом градусов, приходится применять интерполяцию. Приведем некоторые примеры.

1. В общем случае линейная интерполяция неприменима и приходится делать интерполяцию с учетом разностей высших порядков по формуле

$$y=f(\varphi+\delta\varphi)=f(\varphi+h)=x_1+h\cdot\Delta_1+\frac{h(h-1)}{1\cdot 2}\cdot\Delta_2+\frac{h(h-1)(h-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\Delta_3+\dots$$

Здесь $h=\frac{\delta\varphi}{\Delta\varphi}$, т. е. выражение приращения аргумента $\delta\varphi$ в долях табличного интервала $\Delta\varphi$; в наших таблицах $\Delta\varphi=1^\circ=60'$; $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \dots$ — разности первого, второго, третьего и т. д. порядков.

В качестве иллюстрации возьмем нахождение меридиональных частей для аргументов $\varphi_A=34^\circ 43',4=34^\circ,723$ и $\varphi_B=34^\circ 10',4=34^\circ,173$, данных в примере на определение длины локсодромии по меркаторской карте (см. § 38). Поскольку функции широт $34^\circ, 35^\circ$ и т. д. отсутствуют в табл. 1, они взяты из других таблиц, где меридиональные части даны для широт через 1° в интервале $0^\circ < \varphi < 90^\circ$.

Приводим выписку из таблиц и составляем разности Δ :

φ	D	Δ_1	Δ_2
33°	2086,986		
34°	2158,604	71,618	
35°	2231,079	72,475	0,857
36°	2304,453	73,374	0,899

$$D_A=2158,604+0,723\times 72,475-\frac{0,723\times 0,277}{2}\times$$

$$\times 0,899=2158,604+52,399-0,090=2210,913;$$

$$D_B=2158,604+0,173\times 72,475-\frac{0,173\times 0,827}{2}\times$$

$$\times 0,899=2158,604+12,538-0,064=2171,078;$$

$$D_A-D_B=39,835.$$

2. Величина $\lg U$ быстро меняется с широтой, поэтому линейная интерполяция при отыскании $\lg U$ для промежуточных между табличными значений широты недопустима. Поэтому приходится прибегать к приему, вытекающему из следующих рассуждений:

$$\lg U=\lg \operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)+\lg\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{e/2}=\lg \operatorname{tg}\left(45^\circ+\frac{\varphi}{2}\right)+\lg E,$$

где функция широты

$$\lg E = \lg \left(\frac{1 - e \sin \varphi}{1 + e \sin \varphi} \right)^{e/2}$$

с широтой меняется медленно и может быть выбрана из табл. 1 линейной интерполяцией.

Найдем, для примера, $\lg U$ для широты $\varphi = 58^{\circ}34'19'',65 = 58^{\circ}34',3275 = 58^{\circ},572$;

$$\lg \operatorname{tg} \left(45^{\circ} + \frac{\varphi}{2} \right) = \lg \operatorname{tg} (45^{\circ} + 29^{\circ}17'09'',82) = \lg \operatorname{tg} (74^{\circ}17'09'',82) = 0,5507534$$

$$\lg E = 0,0024692 + 266 \times 0,572 = 0,0024692 + 0,0000152 = 0,0024844$$

$$\lg U = 0,5532378.$$

Таблица I

Основные величины

φ°	Основные величины					lg U	lg E	φ°
	X в м	Меридиональные части, D	Длина 1' дуги параллели в м.м.	Длина 1' дуги меридиана в м.м.	6			
1	2	3	4	5	6	7	8	
0	0	0,000	1 855 356	1 842 938	0,000 0000	0,000 0000	0	
10	1 105 875	599,074	1 827 354	1 843 496	0,075 6817	0,000 5048	10	
20	2 212 406	1 217 267	1 744 148	1 845 104	0,153 7787	0,000 9945	20	
30	3 320 172	1 876,864	1 608 132	1 847 573	0,237 1064	0,001 4542	30	
40	4 429 607	2 607,886	1 423 255	1 850 609	0,329 4572	0,001 8703	40	
41	4 540 654	2 686,487	1 402 277	1 850 930	0,339 3870	0,001 9089	41	
42	4 651 719	2 766,300	1 359 039	1 851 253	0,349 4698	0,001 9471	42	
43	4 762 804	2 847,386	1 336 792	1 851 578	0,359 7135	0,001 9846	43	
44	4 873 908	2 929,813	1 314 136	1 851 903	0,370 1266	0,002 0215	44	
45	4 985 032	3 013,650	1 291 077	1 852 228	0,380 7179	0,002 0578	45	
46	5 096 176	3 098,974	1 267 621	1 852 554	0,391 4970	0,002 0934	46	
47	5 207 339	3 185,865	1 243 777	1 852 879	0,402 4739	0,002 1286	47	
48	5 318 521	3 274,408	1 219 550	1 853 204	0,413 6596	0,002 1630	48	
49	5 429 723	3 364,694	1 194 949	1 853 527	0,425 0657	0,002 1966	49	
50	5 540 944	3 456,823	1 169 981	1 853 849	0,436 7044	0,002 2297	50	
51	5 652 185	3 550,899	1 144 653	1 854 170	0,448 5891	0,002 2622	51	
52	5 763 445	3 647,036	1 118 972	1 854 487	0,460 7343	0,002 2938	52	
53	5 874 723	3 745,357	1 092 948	1 854 803	0,473 1553	0,002 3218	53	
54	5 986 021	3 845,994	1 066 507	1 855 115	0,485 8688	0,002 3552	54	
55	6 097 337	3 949,089	1 039 897	1 855 424	0,498 8929	0,002 3848	55	
56	6 208 672	4 054,798	1 012 887	1 855 729	0,512 2473	0,002 4137	56	
57	6 320 025	4 163,292	985 564	1 856 029	0,525 9534	0,002 4418	57	
58	6 431 395	4 274,753	957 938	1 856 325	0,540 0344	0,002 4692	58	
59	6 542 783	4 389,384	930 015	1 856 617	0,554 5159	0,002 4958	59	
60	6 654 189	4 507,407	901 806	1 856 903	0,569 4259	0,002 5216	60	
61	6 765 612	4 629,066	873 319	1 857 183	0,584 7952	0,002 5467	61	
62	6 877 051	4 754,630	844 561	1 857 457	0,600 6578	0,002 5711	62	
63	6 988 506	4 884,398		1 857 725	0,617 0516	0,002 5947	63	

1	2	3	4	5	6	7	8
64	7 099 978	5018,703	815 524	1 857 987	0,634 0185	0,002 6174	64
65	7 211 465	5157,915	780 272	1 858 241	0,651 6054	0,002 6394	65
66	7 322 967	5302,909	756 758	1 858 488	0,669 8649	0,002 6606	66
67	7 434 483	5452,784	727 010	1 858 728	0,688 8565	0,002 6809	67
68	7 546 014	5609,443	697 037	1 858 960	0,708 6473	0,002 7004	68
69	7 657 558	5773,034	666 848	1 859 183	0,729 3139	0,002 7192	69
70	7 769 116	5944,253	636 453	1 859 398	0,750 9442	0,002 7370	70
71	7 880 686	6123,901	605 860	1 859 604	0,773 6394	0,002 7541	71
72	7 992 268	6312,911	575 080	1 859 802	0,797 5172	0,002 7703	72
73	8 103 862	6512,373	544 122	1 859 990	0,822 7155	0,002 7856	73
74	8 215 467	6723,579	512 994	1 860 168	0,849 3974	0,002 8001	74
75	8 327 082	6948,056	481 708	1 860 337	0,877 7572	0,002 8177	75
76	8 438 707	7187,695	450 272	1 860 496	0,908 0297	0,002 8265	76
77	8 550 341	7444,737	418 597	1 860 645	0,940 5021	0,002 8384	77
78	8 661 984	7722,010	386 991	1 860 784	0,975 5303	0,002 8495	78
79	8 773 635	8023,069	355 166	1 860 912	1,013 5634	0,002 8597	79
80	8 885 293	8352,487	323 230	1 861 030	1,055 1792	0,002 8690	80
81	8 996 958	8716,287	291 194	1 861 137	1,101 1384	0,002 8774	81
82	9 108 629	9122,622	259 067	1 861 233	1,152 4713	0,002 8850	82
83	9 220 306	9582,928	226 860	1 861 318	1,210 6223	0,002 8916	83
84	9 331 987	10113,95	194 583	1 861 391	1,277 7068	0,002 8974	84
85	9 443 673	10741,65	162 245	1 861 454	1,357 0046	0,002 9023	85
86	9 555 362	11509,51	129 856	1 861 505	1,454 0099	0,002 9063	86
87	9 667 053	12499,08	97 428	1 861 545	1,579 0227	0,002 9094	87
88	9 778 747	13893,8	64 969	1 861 574	1,755 1669	0,002 9116	88
89	9 890 442	16276,50	32 489	1 861 591	2,056 2286	0,002 9130	89
90	10 002 137	∞	0 000	1 861 597	—	0,002 9134	90

Таблица 2

Единица карты в миллиметрах

Масштаб	Широта %					
	25°	30°	40°	42°	44°	52°
1 : 25 000 = 0,00004000000	67,30120	64,32528	56,93020	55,23476	53,47168	45,78612
1 : 50 000 = 0,00002000000	33,65060	32,16264	28,46510	27,61738	26,73584	22,89306
1 : 75 000 = 0,00013333333	22,43373	21,44175	18,97673	18,41158	17,82389	15,26204
1 : 100 000 = 0,00010000000	16,82530	16,08132	14,23255	13,80869	13,36792	11,44653
1 : 150 000 = 0,00006666666	11,21687	10,72088	9,48837	9,20579	8,91195	7,63102
1 : 200 000 = 0,00005000000	8,41265	8,04066	7,11628	6,90434	6,68396	5,72326
1 : 250 000 = 0,00004000000	6,73012	6,43253	5,69302	5,52348	5,34717	4,57861
1 : 300 000 = 0,00003333333	5,60843	5,36043	4,74418	4,60289	4,45597	3,81551
1 : 350 000 = 0,0000285714	4,80722	4,59466	4,06644	3,94534	3,81940	3,27043
1 : 400 000 = 0,00002500000	4,20632	4,02033	3,55814	3,45217	3,34198	2,86163
1 : 500 000 = 0,00002000000	3,36506	3,21626	2,84651	2,76174	2,67358	2,28931
1 : 600 000 = 0,00001666666	2,80421	2,68021	2,37208	2,30144	2,22798	1,90775
1 : 700 000 = 0,0000142857	2,40361	2,29733	2,03322	1,97267	1,90970	1,63522
1 : 750 000 = 0,0000133333	2,24337	2,14417	1,89767	1,84115	1,78238	1,52620
1 : 800 000 = 0,00001250000	2,10316	2,01016	1,77907	1,72609	1,67099	1,43082
1 : 86948 = 0,00001111111	1,86948	1,78681	1,58139	1,53430	1,48532	1,27184
1 : 1 000 000 = 0,00001000000	1,68253	1,60813	1,42326	1,38087	1,33679	1,14465
1 : 1 500 000 = 0,00000666666	1,12169	1,07209	0,94884	0,92058	0,89119	0,76310
1 : 2 000 000 = 0,00000500000	0,841265	0,804066	0,711628	0,690434	0,668396	0,572326
1 : 3 000 000 = 0,00000333333	0,560843	0,536043	0,474418	0,460289	0,445597	0,381551
1 : 5 000 000 = 0,00000200000	0,336506	0,321626	0,284651	0,276174	0,267358	0,228931

Масштаб	Широта φ ₀						
	59°	60°	66°	69°	70°	75°	80°
1: 25 000 = 0,00004000000	38,31752	37,20060	30,27032	26,67392	25,45812	19,26832	12,92920
1: 50 000 = 0,00002000000	19,15876	18,60030	15,13516	13,33696	12,72906	9,63416	6,46460
1: 75 000 = 0,00001333333	12,77250	12,40020	10,09010	8,89130	8,48604	6,42277	4,30973
1: 100 000 = 0,00001000000	9,57938	9,30015	7,56758	6,66848	6,36453	4,81708	3,23230
1: 150 000 = 0,00006666666	6,38625	6,20010	5,04505	4,44565	4,24302	3,21139	2,15487
1: 200 000 = 0,00005000000	4,78969	4,65008	3,78379	3,33424	3,18226	2,40854	1,61615
1: 250 000 = 0,00004000000	3,83175	3,72006	3,02703	2,66739	2,54581	1,92683	1,29292
1: 300 000 = 0,00003333333	3,19312	3,10005	2,52252	2,22282	2,12151	1,60569	1,07743
1: 350 000 = 0,0000285714	2,73696	2,65718	2,16216	1,90528	1,81844	1,37631	0,92351
1: 400 000 = 0,00002500000	2,39484	2,32504	1,89190	1,66712	1,59113	1,20427	0,80808
1: 500 000 = 0,00002000000	1,91588	1,86003	1,51352	1,33370	1,27291	0,96342	0,64646
1: 600 000 = 0,00001666666	1,59656	1,55002	1,26126	1,11141	1,06075	0,80284	0,53871
1: 700 000 = 0,0000142857	1,36848	1,32859	1,08109	0,95264	0,90922	0,68815	0,46176
1: 750 000 = 0,0000133333	1,27725	1,24002	1,00901	0,88913	0,84860	0,64228	0,43097
1: 800 000 = 0,00001250000	1,19742	1,16232	0,94595	0,83356	0,79557	0,60214	0,40404
1: 900 000 = 0,000011111	1,06437	1,03335	0,84084	0,74094	0,70717	0,53523	0,35914
1: 1 000 000 = 0,00001000000	0,95794	0,93002	0,75676	0,66685	0,63645	0,48171	0,32323
1: 1 500 000 = 0,00006666666	0,63862	0,62001	0,50450	0,44456	0,42430	0,32114	0,21549
1: 2 000 000 = 0,00005000000	0,478969	0,465008	0,378379	0,333424	0,318226	0,240854	0,161615
1: 3 000 000 = 0,00003333333	0,319312	0,310005	0,252252	0,222282	0,212151	0,160569	0,107743
1: 5 000 000 = 0,00002000000	0,191588	0,186003	0,151352	0,133370	0,127291	0,096342	0,064646

Логарифмы радиусов кривизны

φ	$\lg M$		Δ		$\lg N$		Δ		$\lg R$		Δ		$\lg N \operatorname{ctg} \varphi$		$\lg N \cos \varphi$	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9							
0°	6,8017 845		3	6,8047 012	1	6,8032 428	3								6,804 7012	
0°30'	17 848		10	47 013	3	32 431									8,863 8429	
1°	17 858		17	47 016	6	32 437									8,562 7802	
1°30'	17 875		23	47 022	8	32 448									8,386 6313	
2°	17 898		30	47 030	10	32 464									8,261 6192	
2°30'	17 928		37	47 040	12	32 484									8,161 6109	
3°	17 965		43	47 052	14	32 508									8,085 3094	
3°30'	18 008		49	47 066	17	32 537									8,018 2205	
4°	18 057		57	47 083	18	32 570									7,960 0645	
4°30'	18 114		62	47 101	21	32 607									7,908 7260	
5°	18 176		70	47 122	24	32 649									7,8(2 7605	
5°30'	18 246		76	47 146	25	32 696									7,821 1377	
6°	18 322		82	47 171	27	32 746									7,783 0969	
6°30'	18 404		89	47 198	30	32 801									7,748 0603	
7°	18 493		95	47 228	32	32 860									6,801 9191	
7°30'	18 588		102	47 260	34	32 924									6,801 4735	
8°	18 690		108	47 294	36	32 992									6,800 9945	
8°30'	18 798		114	47 330	38	33 064									6,800 4821	
9°	18 912		121	47 368	40	33 140									6,799 9362	
9°30'	19 033		127	47 408	42	33 220									6,799 3567	
10°	19 160		133	47 450	45	33 305									6,798 7435	
10°30'	19 293		140	47 495	46	33 394									6,798 0965	
11°	19 433		145	47 541	49	33 487									6,797 4156	
11°30'	19 578		152	47 590	50	33 584									6,796 7007	
12°	19 730		158	47 640	53	33 685									6,795 9517	
12°30'	19 888		164	47 693	55	33 790									6,795 1684	
13°	20 052		170	47 748	56	33 900									6,794 3503	
13°30'	20 222		176	47 804	59	34 013									6,793 4987	
14°	20 398		181	47 863	60	34 130									6,792 6119	
14°30'	20 579		188	47 923	63	34 251									6,791 6904	
															7,392 1343	

6,789 7424
6,788 7155
6,787 6533
6,786 5554
6,785 4218
6,784 2522
6,783 0464
6,781 8042
6,780 5254
6,779 2098
6,777 8571
6,776 4672
6,775 0397
6,773 5744
6,772 0711
6,770 5295
6,768 9493
6,767 3392
6,765 6719
6,763 9742
6,762 2367
6,760 4590
6,758 6409
6,756 7818
6,754 8818
6,752 9402
6,750 9567
6,748 9319
6,746 8623
6,744 7507
6,742 5955
6,740 3963
6,738 1527
6,735 8642
6,733 5302
6,731 1504
6,728 7242
6,726 2510

7,376 7461
7,361 8167
7,347 3132
7,333 2136
7,319 4865
7,306 1104
7,293 0640
7,280 3277
7,267 8835
7,255 7145
7,243 8054
7,232 1419
7,220 7105
7,209 4990
7,198 4957
7,187 6898
7,177 0713
7,166 6305
7,156 3586
7,146 2472
7,136 2884
7,126 4746
7,116 7989
7,107 2545
7,097 8351
7,088 5346
7,079 3474
7,070 2680
7,061 2911
7,052 4119
7,043 6255
7,034 9274
7,026 3133
7,017 7790
7,009 3205
7,000 9839
6,992 6154
6,984 3615

129
133
136
140
144
147
151
155
158
161
165
168
172
175
178
181
184
187
190
194
196
198
202
204
207
209
212
214
217
219
221
223
226
227
230
231
233
235

34 376
34 505
34 638
34 774
34 914
35 058
35 205
35 356
6,8035 511
35 669
35 830
35 995
36 163
36 335
36 510
36 688
36 869
37 053
37 240
37 430
37 624
37 820
38 018
38 220
38 424
38 631
38 840
39 052
39 266
39 483
39 702
39 923
40 146
40 372
40 599
41 829
41 060
41 293

64
67
68
70
72
73
76
77
79
81
82
84
86
88
89
90
92
94
95
96
98
100
101
102
103
105
106
107
108
110
110
112
113
113
115
116
116
118

47 986
48 050
48 117
48 185
48 255
48 327
48 400
48 476
6,8048 553
48 632
48 713
48 795
48 879
48 965
49 053
49 142
49 232
49 324
49 418
49 513
49 609
49 707
49 807
49 908
50 010
50 113
50 218
50 324
50 431
50 539
50 649
50 759
50 871
50 984
51 097
51 212
51 328
51 444

193
199
204
210
216
221
227
231
238
242
247
252
258
262
267
272
276
281
285
290
294
298
302
306
311
314
317
322
325
328
332
335
338
341
344
347
350
352

20 767
20 960
21 159
21 363
21 573
21 789
22 010
22 237
6,8022 468
22 706
22 948
23 195
23 447
23 705
23 967
24 234
24 506
24 782
25 063
25 348
25 638
25 932
26 230
26 532
26 838
27 149
27 463
27 780
28 102
28 427
28 755
29 087
29 422
29 760
30 101
30 445
30 792
31 142

15°
15°30'
16°
16°30'
17°
17°30'
18°
18°30'
19°
19°30'
20°
20°30'
21°
21°30'
22°
22°30'
23°
23°30'
24°
24°30'
25°
25°30'
26°
26°30'
27°
27°30'
28°
28°30'
29°
29°30'
30°
30°30'
31°
31°30'
32°
32°30'
33°
33°30'

1	2	3	4	5	6	7	8	9
34°	6,8031 494	355	6,8051 562	118	6,8041 528	236	6,976 1687	6,723 7304
31°30'	31 849	357	51 680	119	41 764	238	6,968 0337	6,721 1617
35°	32 206	360	51 799	120	42 002	240	6,959 9531	6,718 5444
35°30'	32 566	361	51 919	120	42 242	241	6,951 9239	6,715 8779
36°	32 927	364	52 039	122	42 483	244	6,943 9429	6,713 1616
36°30'	33 291	366	52 161	122	42 726	244	6,936 0072	6,710 3948
37°	33 657	367	52 283	122	42 970	245	6,928 1138	6,707 5769
37°30'	34 024	370	52 405	123	43 215	246	6,920 2600	6,704 7072
38°	34 394	371	52 528	124	43 461	247	6,912 4130	6,701 7850
38°30'	34 765	372	52 652	124	43 708	248	6,904 6600	6,698 8096
39°	35 117	374	52 776	125	43 956	250	6,896 9084	6,695 7802
39°30'	35 511	375	52 901	125	44 206	250	6,889 1876	6,692 6961
40°	35 886	376	53 026	125	44 456	251	6,881 4890	6,689 5665
40°30'	36 262	378	53 151	126	44 707	251	6,873 8162	6,686 3606
41°	36 640	378	53 277	126	44 958	253	6,866 1645	6,683 1075
41°30'	37 018	379	53 403	126	45 211	252	6,858 5319	6,679 7964
42°	37 397	380	53 529	127	45 463	252	6,850 9155	6,676 4264
42°30'	37 777	381	53 656	127	45 717	254	6,843 3131	6,672 9965
43°	38 158	381	53 783	127	45 970	253	6,835 7224	6,669 5057
43°30'	38 539	381	53 910	127	46 224	254	6,828 1410	6,666 9532
44°	38 920	382	54 036	128	46 479	255	6,820 5655	6,662 3378
44°30'	39 302	382	54 164	128	46 733	254	6,812 9967	6,658 6585
45°	39 684	382	54 291	128	46 987	255	6,805 4291	6,654 9141
45°30'	40 065	381	54 419	127	47 242	254	6,797 8515	6,651 1037
46°	40 447	381	54 546	127	47 496	254	6,790 2918	6,647 2259
46°30'	40 828	382	54 673	127	47 751	255	6,782 7173	6,643 2795
47°	41 210	380	54 800	127	48 005	254	6,755 1359	6,639 2633
47°30'	41 590	380	54 927	127	48 259	253	6,767 5452	6,635 1760
48°	41 970	380	55 054	127	48 512	253	6,759 9428	6,631 0163
48°30'	42 350	379	55 180	126	48 765	253	6,752 3264	6,626 7826
49°	42 729	377	55 306	126	49 018	251	6,744 6937	6,622 4736
49°30'	43 106	377	55 432	126	49 269	252	6,737 0421	6,618 0877

50°	43 483	376	55 558	49 521	6 729 3693	6 613 6233
50°30'	43 859	374	55 683	49 771	6,721 6728	6,609 0788
51°	44 233	373	55 808	50 021	6,713 9500	6,604 4526
51°30'	44 606	372	55 932	50 269	6,706 1984	6,599 7428
52°	44 978	370	56 056	50 517	6,698 4155	6,594 9476
52°30'	45 348	368	56 180	50 764	6,690 5984	6,590 0651
53°	45 716	366	56 302	51 009	6,682 7446	6,585 0932
53°30'	46 082	365	56 424	51 253	6,674 8513	6,580 0300
54°	46 447	362	56 546	51 496	6,666 9156	6,574 8733
54°30'	46 809	361	56 667	51 738	6,658 9347	6,569 6207
55°	47 170	358	56 787	51 978	6,650 9055	6,564 2700
55°30'	47 528	355	56 906	52 217	6,642 8249	6,558 8186
56°	47 883	353	57 025	52 454	6,634 6899	6,553 2641
56°30'	48 236	351	57 142	52 689	6,626 4972	6,547 6037
57°	48 587	348	57 259	52 923	6,618 2433	6,541 8347
57°30'	48 935	345	57 375	53 155	6,609 9248	6,535 9540
58°	49 280	342	57 490	53 385	6,601 5382	6,529 9587
58°30'	49 622	339	57 604	53 613	6,593 0798	6,523 8455
59°	49 961	336	57 717	53 839	6,584 5455	6,517 6111
59°30'	50 297	333	57 829	54 063	6,575 9314	6,511 2518
60°	50 630	330	57 940	54 285	6,567 2334	6,504 7640
60°30'	50 960	326	58 050	54 505	6,558 4471	6,498 1438
61°	51 286	322	58 159	54 722	6,549 5679	6,491 3871
61°30'	51 608	319	58 266	54 937	6,540 5910	6,484 4895
62°	51 927	316	58 373	55 150	6,477 4466	6,477 4466
62°30'	52 243	311	58 478	55 360	6,531 5116	6,470 2534
63°	52 554	308	58 582	55 568	6,522 3245	6,462 9049
63°30'	52 862	303	58 684	55 773	6,503 6047	6,453 3958
64°	53 165	300	58 785	55 975	6,494 0603	6,447 7205
64°30'	53 465	295	58 885	56 175	6,484 3846	6,439 8729
65°	53 760	291	58 984	56 372	6,474 5709	6,431 8466
65°30'	54 051	286	59 081	56 566	6,464 6121	6,423 6350
66°	54 337	282	59 176	56 757	6,454 5007	6,415 2309
66°30'	54 619	278	59 270	56 945	6,444 2289	6,406 6267
67°	54 897	273	59 363	57 130	6,433 7882	6,397 8143
67°30'	55 170	268	59 454	57 312	6,423 1697	6,388 7850
68°	55 438	264	59 543	57 491	6,412 3639	6,379 5297
68°30'	55 702	258	59 631	57 666	6,401 3606	6,370 0385

1	2	3	4	5	6	7	8	9
69°	6,8055 960	254	6,8059 717	85	6,8057 839	169	6,390 1491	6,360 3009
69°30'	56 214	248	59 882	82	58 008	165	6,378 7178	6,350 3055
70°	56 462	244	59 884	82	58 173	163	6,340 0401	6,340 0401
70°30'	56 706	238	59 966	79	58 336	159	6,355 1452	6,329 4918
71°	56 944	233	60 045	78	58 495	155	6,342 9764	6,318 6464
71°30'	57 177	228	60 123	76	58 650	152	6,330 5321	6,307 4887
72°	57 405	222	60 199	74	58 802	148	6,317 7959	6,296 0022
72°30'	57 627	217	60 273	72	58 950	144	6,304 7496	6,284 1691
73°	57 844	211	60 345	70	59 094	141	6,291 3735	6,271 9698
73°30'	58 055	206	60 415	69	59 235	137	6,277 6464	6,259 3833
74°	58 261	200	60 484	67	59 372	134	6,263 5448	6,246 3865
74°30'	58 461	194	60 551	64	59 506	129	6,249 0434	6,232 9539
75°	58 655	189	60 615	63	59 635	126	6,234 1140	6,219 0578
75°30'	58 844	183	60 678	61	59 761	122	6,218 7259	6,204 6775
76°	59 027	177	60 739	59	59 883	118	6,202 8450	6,189 7491
76°30'	59 204	170	60 798	57	60 001	114	6,186 4336	6,174 2651
77°	59 374	165	60 855	56	60 115	110	6,169 4496	6,158 1735
77°30'	59 539	159	60 910	55	60 225	106	6,151 8462	6,141 4278
78°	59 698	153	60 963	53	60 331	101	6,133 5708	6,123 9752
78°30'	59 851	146	61 014	51	60 432	98	6,114 5640	6,105 7567
79°	59 997	141	61 063	49	60 530	94	6,094 7585	6,086 7051
79°30'	60 138	134	61 110	47	60 624	89	6,074 0779	6,066 7440
80°	60 272	128	61 154	44	60 713	85	6,052 4342	6,045 7856
80°30'	60 400	121	61 197	43	60 798	81	6,029 7262	6,023 7289
81°	60 521	115	61 237	40	60 879	77	6,005 8362	6,000 4562
81°30'	60 636	109	61 276	39	60 856	73	5,980 6264	5,975 8297
82°	60 745	103	61 312	36	61 029	68	5,953 9337	5,949 6865
82°30'	60 848	95	61 346	34	61 097	64	5,925 5637	5,921 8323
83°	60 943	90	61 378	32	61 161	59	5,895 2816	5,892 0323
83°30'	61 033	83	61 408	30	61 220	56	5,862 8003	5,859 9996
84°	61 116	76	61 435	28	61 276	51	5,827 7638	5,825 3781
84°30'	61 192	70	61 461	25	61 327	46	5,789 7230	5,787 7190

85°
85°30'
86°
86°30'
87°
87°30'
88°
88°30'
89°
89°30'
90°

61 262
61 325
61 382
61 432
61 475
61 512
61 542
61 565
61 582
61 592
61 595

63
57
50
43
37
30
23
17
10
3

61 484
61 505
61 524
61 541
61 555
61 568
61 578
61 585
61 591
61 594
61 595

21
19
17
14
13
10
7
6
3
1

61 373
61 415
61 453
61 486
61 515
61 540
61 560
61 575
61 586
61 593
61 595

42
38
33
29
25
20
15
11
7
2

5,748 1002
5,702 1347
5,650 7962
5,592 6402
5,525 5513
5,446 2499
5,349 2416
5,224 2264
5,048 0806
4,747 0013

5,746 4444
5,700 7938
5,649 7369
5,591 8294
5,524 9557
5,445 8363
5,348 9, 69
5,224 0776
5,048 0144
4,747 0013

Таблица 4

Радиусы кривизны

φ	M	N	R	N ctg φ	N cos φ
	В М	В М	В М	В КМ	В КМ
1	2	3	4	5	6
0°	6335 553	6378 245	6356 863	∞	6378,245
0° 30'	6335 558	6378 247	6356 866	730 874,7	6378,004
1°	6335 572	6378 252	6356 876	365 409,8	6377,280
1° 30'	6335 596	6378 260	6356 892	243 575,9	6376,074
2°	6335 630	6378 271	6356 915	182 649,8	6374,385
2° 30'	6335 674	6378 286	6356 944	146 086,8	6372,215
3°	6335 727	6378 304	6356 980	121 705,3	6369,562
3° 30'	6335 790	6378 325	6357 022	104 284,7	6366,428
4°	6335 862	6378 349	6357 070	91 214,64	6362,812
4° 30'	6335 944	6378 376	6357 125	81 044,96	6358,714
5°	6336 036	6378 407	6357 186	72 905,53	6354,135
5° 30'	6336 137	6378 441	6357 254	66 242,64	6349,076
6°	6336 248	6378 478	6357 328	60 687,17	6343,536
6° 30'	6336 368	6378 519	6357 408	55 983,54	6337,516
7°	6336 498	6378 562	6357 495	51 949,22	6331,017
7° 30'	6336 637	6378 609	6357 588	48 450,34	6324,039
8°	6336 785	6378 658	6357 687	45 386,51	6316,582
8° 30'	6336 943	6378 711	6857 793	42 680,95	6308,647
9°	6337 110	6378 767	6357 904	40 273,95	6300,234
9° 30'	6337 286	6378 826	6358 022	38 118,36	6291,345
10°	6337 471	6378 889	6358 146	36 176,48	6281,979
10° 30'	6337 666	6378 954	6358 276	34 417,76	6272,138
11°	6337 869	6379 022	6358 412	32 817,22	6261,822
11° 30'	6338 082	6379 094	6358 555	31 354,25	6251,031
12°	6338 303	6379 168	6358 703	30 011,63	6239,768
12° 30'	6338 534	6379 245	6358 857	28 774,92	6228,031
13°	6338 773	6379 325	6359 017	27 631,89	6215,824
13° 30'	6339 021	6379 409	6359 183	26 572,15	6203,145
14°	6339 277	6379 495	6359 354	25 586,76	6189,996
14° 30'	6339 542	6379 584	6359 532	24 668,02	6176,379
15°	6339 816	6379 675	6359 714	23 809,27	6162,293
15° 30'	6340 098	6379 770	6359 903	23 004,71	6147,740
16°	6340 388	6379 867	6360 097	22 249,24	6132,722
16° 30'	6340 687	6379 968	6360 297	21 538,41	6117,229
17°	6340 994	6380 070	6360 502	20 868,27	6101,292
17° 30'	6341 309	6380 176	6360 713	20 235,33	6084,882
18°	6341 632	6380 284	6360 929	19 636,50	6068,011
18° 30'	6341 962	6380 395	6361 150	19 068,99	6050,680
19°	6342 301	6380 509	6361 376	18 530,34	6032,890
19° 30'	6342 647	6380 625	6361 608	18 018,33	6014,642
20°	6343 001	6380 743	6361 844	17 530,95	5995,938
20° 30'	6343 362	6380 865	6362 086	17 066,40	5976,778
21°	6343 731	6380 988	6362 332	16 623,04	5957,166
21° 30'	6344 107	6381 114	6362 583	16 199,40	5937,101
22°	6344 490	6381 242	6362 840	15 794,13	5916,585
22° 30'	6344 879	6381 373	6363 100	15 406,00	5895,620
23°	6345 276	6381 506	6363 366	15 033,89	5874,208
23° 30'	6345 680	6381 642	6363 636	14 676,77	5852,349

Продолжение таблицы 4

1	2	3	4	5	6
24°	6346 090	6381 779	6363 910	14333,71	5830,046
24° 30'	6346 507	6381 919	6364 188	14003,84	5807,299
25°	6346 931	6382 061	6364 472	13686,37	5784,112
25° 30'	6347 360	6382 205	6364 759	13380,57	5760,484
26°	6347 796	6382 351	6365 050	13085,76	5736,419
26° 30'	6348 238	6382 499	6365 346	12801,31	5711,918
27°	6348 686	6382 649	6365 645	12526,65	5686,982
27° 30'	6349 139	6382 801	6365 948	12261,25	5661,614
28°	6349 598	6382 955	6366 255	12004,59	5636,815
28° 30'	6350 063	6383 111	6366 566	11756,23	5609,587
29°	6350 533	6383 268	6366 879	11515,72	5582,932
29° 30'	6351 008	6383 427	6367 197	11282,67	5555,852
30°	6351 488	6383 588	6467 518	11056,70	5528,349
30° 30'	6351 974	6383 751	6368 843	10837,46	5500,426
31°	6352 464	6383 915	6368 170	10624,62	5472,083
31° 30'	6352 958	6384 081	6368 500	10417,87	5443,324
32°	6353 457	6384 248	6363 834	10216,93	5414,149
32° 30'	6353 961	6384 416	6369 170	10021,53	5384,562
33°	6354 468	6384 586	6369 510	9831,401	5354,565
33° 30'	6354 980	6384 758	6369 851	9646,317	5324,159
34°	6355 495	6334 930	6370 196	9466,048	5293,347
34° 30'	6356 014	6385 104	6370 543	9290,384	5262,132
35°	6356 537	6385 279	6370 892	9119,124	5230,514
35° 30'	6357 064	6385 455	6371 244	8952,079	5198,498
36°	6357 593	6385 633	6371 597	8789,069	5166,085
36° 30'	6358 126	6385 811	6371 953	8629,928	5133,278
37°	6358 661	6385 990	6372 311	8474,495	5100,079
37° 30'	6359 199	6386 170	6372 671	8322,619	5066,490
38°	6359 740	6386 351	6373 032	8174,157	5032,514
38° 30'	6360 283	6386 533	6373 395	8028,973	4998,153
39°	6360 829	6386 716	6373 759	7886,937	4963,410
39° 30'	6361 376	6386 899	6374 125	7747,928	4928,288
40°	6361 926	6387 083	6374 492	7611,829	4892,790
40° 30'	6362 477	6387 267	6374 860	7478,529	4856,916
41°	6363 030	6387 452	6375 230	7347,924	4820,671
41° 30'	6363 584	6387 638	6375 600	7219,911	4784,058
42°	6364 140	6387 824	6375 971	7094,397	4747,078
42° 30'	6364 697	6388 010	6376 343	6971,290	4709,735
43°	6365 254	6388 197	6376 715	6850,502	4672,031
43° 30'	6365 813	6388 384	6377 088	6731,951	4633,970
44°	6366 372	6388 571	6377 462	6615,559	4595,553
44° 30'	6366 931	6388 758	6377 835	6501,247	4556,784
45°	6367 491	6388 945	6378 209	6388,945	4517,666
45° 30'	6368 051	6389 132	6378 583	6278,583	4478,202
46°	6368 611	6389 319	6378 957	6170,094	4428,394
46° 30'	6369 170	6389 506	6379 330	6063,415	4398,246
47°	6369 729	6389 693	6379 703	5958,485	4357,760
47° 30'	6370 287	6389 880	6380 076	5855,246	4316,940
48°	6370 845	6390 066	6380 449	5753,642	4275,789
48° 30'	6371 402	6390 252	6380 820	5653,618	4234,309

1	2	3	4	5	6
49°	6371 957	6390 438	6381 191	5555,123	4192,505
49° 30'	6372 512	6390 624	6381 561	5458,108	4150, 378
50°	6373 065	6390 808	6381 930	5362,525	4107,933
50° 30'	6373 616	6390 993	6382 298	5268,328	4065,171
51°	6374 165	6391 176	6382 665	5175,473	4022,098
51° 30'	6374 713	6391 359	6383 031	5083,917	3978,715
52°	6375 258	6391 542	6383 395	4993,620	3935,026
52° 30'	6375 801	6391 723	6383 757	4904,542	3891,034
53°	6376 342	6391 904	6384 118	4816,645	3846,744
53° 30'	6376 880	6392 083	6384 477	4729,893	3802,157
54°	6377 415	6392 262	6384 834	4644,250	3757,278
54° 30'	6377 947	6392 440	6385 190	4559,683	3712,109
55°	6378 476	6392 617	6385 543	4476,159	3666,654
55° 30'	6379 002	6392 793	6385 894	4393,645	3620,918
56°	6379 525	6392 967	6386 242	4312,111	3574,902
56° 30'	6380 044	6393 140	6386 589	4231,527	3528,611
57°	6380 559	6393 312	6386 932	4151,866	3482,047
57° 30'	6381 070	6393 483	6387 273	4073,098	3435,216
58°	6381 577	6393 652	6387 612	3995,197	3388,120
58° 30'	6382 080	6393 820	6387 947	3918,138	3340,762
59°	6382 578	6393 987	6388 280	3841,895	3293,147
59° 30'	6383 072	6394 152	6388 609	3766,443	3245,277
60°	6383 561	6394 315	6388 936	3691,759	3197,158
60° 30'	6384 045	6394 477	6389 259	3617,821	3148,791
61°	6384 525	6394 637	6389 579	3544,605	3100,182
61° 30'	6384 999	6394 795	6389 895	3472,090	3051,333
62°	6385 468	6394 952	6390 208	3400,256	3002,248
62° 30'	6385 932	6395 106	6390 517	3329,082	2952,932
63°	6386 389	6395 259	6390 823	3258,547	2903,387
63° 30'	6386 842	6395 410	6391 125	3188,634	2853,618
64°	6387 288	6395 559	6391 422	3119,323	2803,629
64° 30'	6387 729	6395 706	6391 716	3050,595	2753,423
65°	6388 163	6395 851	6392 006	2982,434	2703,003
65° 30'	6388 591	6395 994	6392 291	2914,822	2652,376
66°	6389 012	6396 135	6392 572	2847,743	2601,542
66° 30'	6389 427	6396 273	6392 849	2781,179	2550,508
67°	6389 836	6396 410	6393 122	2715,115	2499,276
67° 30'	6390 237	6396 544	6393 390	2649,535	2447,851
68°	6390 632	6396 675	6393 653	2584,425	2396,237
68° 30'	6391 020	6396 805	6393 911	2519,768	2344,437
69°	6391 400	6396 932	6394 165	2455,552	2292,455
69° 30'	6391 774	6397 056	6394 414	2391,761	2240,296
70°	6392 139	6397 178	6394 658	2328,382	2187,964
70° 30'	6392 498	6397 298	6394 897	2265,402	2135,462
71°	6392 848	6397 415	6395 131	2202,806	2082,794
71° 30'	6393 192	6397 529	6395 360	2140,583	2029,966
72°	6393 527	6397 641	6395 584	2078,720	1976,980
72° 30'	6393 854	6397 750	6395 802	2017,203	1923,841
73°	6394 173	6397 856	6396 015	1956,021	1870,552
73° 30'	6394 484	6397 960	6396 222	1895,162	1817,119

1	2	3	4	5	6
74°	6394 787	6398 061	6396 424	1834,615	1763,545
74° 30'	6395 082	6398 160	6396 621	1774,367	1709,834
75°	6395 368	6398 255	6396 811	1714,407	1655,990
75° 30'	6395 646	6398 348	6396 997	1654,725	1602,018
76°	6395 915	6398 437	6397 176	1595,310	1547,922
76° 30'	6396 175	6398 524	6397 350	1536,149	1493,706
77°	6396 427	6398 608	6397 518	1477,235	1439,374
77° 30'	6396 670	6398 689	6397 679	1418,555	1384,930
78°	6396 904	6398 767	6397 835	1360,100	1330,378
78° 30'	6397 129	6398 842	6397 985	1301,859	1275,724
79°	6397 344	6398 914	6398 129	1243,823	1220,970
79° 30'	6397 551	6398 983	6398 267	1185,981	1166,122
80°	6397 749	6399 049	6398 399	1128,325	1111,183
80° 30'	6397 937	6399 111	6398 524	1070,844	1056,158
81°	6398 116	6399 171	6398 644	1013,529	1001,051
81° 30'	6398 286	6399 228	6398 757	956,371	945,866
82°	6398 446	6399 281	6398 864	899,360	890,608
82° 30'	6398 597	6399 331	6398 964	842,488	835,280
83°	6398 738	6399 379	6399 058	785,745	779,888
83° 30'	6398 870	6399 423	6399 146	729,122	724,435
84°	6398 992	6399 463	6399 228	672,611	668,926
84° 30'	6399 105	6399 501	6399 303	616,202	613,365
85°	6399 208	6399 535	6399 371	559,887	557,756
85° 30'	6399 301	6399 566	6399 433	503,657	502,104
86°	6399 384	6399 594	6399 489	447,503	446,413
86° 30'	6399 458	6399 618	6399 538	391,417	390,687
87°	6399 522	6399 640	6399 581	335,391	334,931
87° 30'	6399 576	6399 658	6399 617	279,415	279,149
88°	6399 620	6399 673	6399 646	223,481	223,345
88° 30'	6399 654	6399 684	6399 669	167,582	167,524
89°	6399 679	6399 692	6399 686	111,707	111,690
89° 30'	6399 694	6399 697	6399 696	55,849	55,847
90°	6399 699	6399 699	6399 699	0	0

Таблица 5

Дуги параллелей, дуги меридианов и поверхности трапеций

φ°	1° дуги параллели в км	Δ	φ°	1° дуги меридиана в км	Δ	Поверхность одно- градусной трапеции в км ²
1	2	3	4	5	6	7
0	111,3214	— 169	0— 1	110,5764	+6	12308,89
1	111,3045	505	1— 2	110,5770	14	12305,24
2	111,2540	842	2— 3	110,5784	20	12297,95
3	111,1698	1178	3— 4	110,5804	27	12287,00
4	111,0520	1514	4— 5	110,5831	34	12272,42
5	110,9006	1850	5— 6	110,5865	40	12254,19
6	110,7156	2185	6— 7	110,5905	47	12232,32
7	110,4971	2519	7— 8	110,5952	53	12206,82
8	110,2452	2854	8— 9	110,6005	60	12177,70
9	109,9598	3186	9—10	110,6065	67	12144,96
10	109,6412	3518	10—11	110,6132	72	12108,61
11	109,2894	3849	11—12	110,6204	79	12068,66
12	108,9045	4179	12—13	110,6283	85	12025,11
13	108,4866	4508	13—14	110,6368	91	11977,98
14	108,0358	4835	14—15	110,6459	97	11927,27
15	107,5523	5161	15—16	110,6556	103	11873,01
16	107,0362	5486	16—17	110,6659	108	11815,20
17	106,4876	5808	17—18	110,6767	114	11753,86
18	105,9068	6130	18—19	110,6881	120	11688,99
19	105,2938	6449	19—20	110,7001	125	11620,63
20	104,6489	6767	20—21	110,7126	130	11548,78
21	103,9722	7083	21—22	110,7256	135	11473,45
22	103,2639	7396	22—23	110,7391	139	11394,68
23	102,5243	7708	23—24	110,7530	145	11312,48
24	101,7535	8017	24—25	110,7675	149	11226,86
25	100,9518	8324	25—26	110,7824	153	11137,85
26	100,1194	8628	26—27	110,7977	157	11045,48
27	99,2566	8931	27—28	110,8134	161	10949,75
28	98,3635	9230	28—29	110,8295	165	10850,71
29	97,4405	9526	29—30	110,8460	169	10748,37
30	96,4879	9820	30—31	110,8629	171	10642,76
31	95,5059	1 0112	31—32	110,8800	176	10533,90
32	94,4947	1 0399	32—33	110,8976	177	10421,83
33	93,4548	1 0685	33—34	110,9153	181	10306,58
34	92,3863	1 0966	34—35	110,9334	183	10188,16
35	91,2897	1 1245	35—36	110,9517	185	10066,62
36	90,1652	1 1520	36—37	110,9702	188	9941,98
37	89,0132	1 1793	37—38	110,9890	189	9814,29
38	87,8339	1 2060	38—39	111,0079	191	9683,56
39	86,6279	1 2326	39—40	111,0270	192	9549,84
40	85,3953	1 2587	40—41	111,0462	193	9413,17
41	84,1366	1 2845	41—42	111,0655	194	9273,58
42	82,8521	1 3098	42—43	111,0849	195	9131,10

Продолжение таблицы 5

1	2	3	4	5	6	7
43	81,5423	1 3348	43—44	111,1044	195	8985,79
44	80,2075	1 3593	44—45	111,1239	194	8837,67
45	78,8482	1 3836	45—46	111,1435	195	8686,79
46	77,4646	1 4073	46—47	111,1630	195	8533,19
47	76,0573	1 4307	47—48	111,1825	194	8376,92
48	74,6266	1 4536	48—49	111,2019	194	8218,01
49	73,1730	1 4761	49—50	111,2213	193	8056,52
50	71,6969	1 4981	50—51	111,2406	191	7892,49
51	70,1988	1 5196	51—52	111,2597	190	7725,96
52	68,6792	1 5409	52—53	111,2787	188	7556,99
53	67,1383	1 5614	53—54	111,2975	187	7385,62
54	65,5769	1 5817	54—55	111,3162	184	7211,92
55	63,9952	1 6014	55—56	111,3346	182	7035,91
56	62,3938	1 6206	56—57	111,3528	179	6857,67
57	60,7732	1 6394	57—58	111,3707	176	6677,23
58	59,1338	1 6575	58—59	111,3883	173	6494,66
59	57,4763	1 6754	59—60	111,4056	170	6310,02
60	55,8009	1 6925	60—61	111,4226	166	6123,34
61	54,1084	1 7093	61—62	111,4392	163	5934,71
62	52,3991	1 7254	62—63	111,4555	159	5744,16
63	50,6737	1 7411	63—64	111,4714	155	5551,76
64	48,9326	1 7563	64—65	111,4869	150	5357,57
65	47,1763	1 7708	65—66	111,5019	146	5161,66
66	45,4055	1 7849	66—67	111,5165	142	4964,06
67	43,6206	1 7984	67—68	111,5307	136	4764,87
68	41,8222	1 8113	68—69	111,5443	132	4564,12
69	40,0109	1 8237	69—70	111,5575	126	4361,90
70	38,1872	1 8356	70—71	111,5701	121	4158,26
71	36,3516	1 8468	71—72	111,5822	116	3953,26
72	34,5048	1 8575	72—73	111,5938	110	3746,97
73	32,6473	1 8676	73—74	111,6048	104	3539,47
74	30,7797	1 8772	74—75	111,6152	99	3330,80
75	28,9025	1 8862	75—76	111,6251	92	3121,05
76	27,0163	1 8945	76—77	111,6343	86	2910,28
77	25,1218	1 9023	77—78	111,6429	80	2698,55
78	23,2195	1 9095	78—79	111,6509	74	2485,94
79	21,3100	1 9162	79—80	111,6583	67	2272,51
80	19,3938	1 9222	80—81	111,6650	61	2058,34
81	17,4716	1 9276	81—82	111,6711	55	1843,50
82	15,5440	1 9324	82—83	111,6766	47	1628,04
83	13,6116	1 9366	83—84	111,6813	41	1412,05
84	11,6750	1 9403	84—85	111,6854	34	1195,60
85	9,7347	1 9433	85—86	111,6888	28	978,76
86	7,7914	1 9457	86—87	111,6916	20	761,59
87	5,8457	1 9476	87—88	111,6936	14	544,17
88	3,8981	1 9487	88—89	111,6950	7	326,58
89	1,9494	1 9494	89—90	111,6957		108,87
90	0,0000					

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редакторов	3
Предисловие автора	4
Введение	5
<i>Глава I. Основные сведения из геодезии и теории искажений</i>	8
§ 1. Фигура Земли	8
§ 2. Географические координаты. Нормальные сечения	10
§ 3. Вычисление длины дуг меридианов и параллелей	13
§ 4. Масштабы и увеличения	14
§ 5. Эллипс искажений	15
§ 6. Увеличение длин в данной точке, по данному направлению	17
§ 7. Искажения направлений и углов	18
§ 8. Масштабы и увеличения площадей	21
§ 9. Элементы эллипса искажений	22
§ 10. Основные формулы из геодезии и теории искажений	28
<i>Глава II. Классификация картографических проекций</i>	31
§ 11. Общие сведения	31
§ 12. Классификация проекций по характеру искажений	31
§ 13. Классификация проекций по виду меридианов нормальной сетки	34
<i>Глава III. Конические проекции</i>	48
§ 14. Общая теория	48
§ 15. Равноугольные конические проекции	54
§ 16. Равнопромежуточные и равновеликие конические проекции	67
§ 17. Построение картографических сеток в конических проекциях	71
<i>Глава IV. Цилиндрические проекции</i>	73
§ 18. Общая теория	73
§ 19. Равноугольная цилиндрическая проекция (проекция Меркатора)	77
§ 20. Вычисление картографической сетки в проекции Меркатора	85
§ 21. Локсодромия и ортодромия в проекции Меркатора	88
§ 22. Равнопромежуточные и равновеликие цилиндрические проекции	99
§ 23. Проекция Гаусса	104
§ 24. Вычисление картографической сетки в проекции Гаусса	109
<i>Глава V. Азимутальные проекции</i>	113
§ 25. Общая теория	113
§ 26. Азимутальные проекции в косом и поперечном положениях	115
§ 27. Равновеликая азимутальная проекция Ламберта	118
§ 28. Равнопромежуточная азимутальная проекция Постеля	120
<i>Глава VI. Перспективные проекции</i>	123
§ 29. Общая теория	123
§ 30. Ортографические проекции	127
§ 31. Стереографические проекции	130
§ 32. Центральные или гномонические проекции	133
<i>Глава VII. Проекции топографических карт</i>	137
§ 33. Номенклатура топографических карт	137
§ 34. Проекция Международной карты мира в масштабе 1:1 000 000	140
<i>Глава VIII. Применение географических карт в гидрометеорологии</i>	145
§ 35. Географические карты, применяемые в океанологии	145
§ 36. Географические карты, применяемые в морской метеорологии	151

Глава IX. Основы картометрии	153
§ 37. Общие сведения	153
§ 38. Измерение длин линий на картах	156
§ 39. Определение площадей по картам	158
§ 40. Вычисление основных морфометрических характеристик водных объектов	178
Литература	185
Приложения	187

Рехтзамер Гай Родионович

Основы картографии

(учебное пособие)

Редактор *Ю. П. Андрейков*

М-06305. Подп. к печ. 29/V 1974 г. Печ. л. 13⁹/₁₆. Тир. 600. Зак. 315. Цена 95 коп.
 Типография ВВМУПП им. Лен. комсомола

