

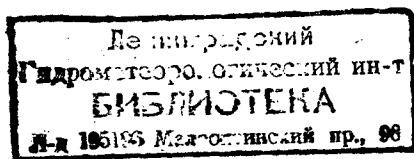
И. Н. Давидан
Л. И. Лопатухин
В. А. Рожков

22.4.562

Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс



Гидрометеиздат
Ленинград
1978



11.03.2013

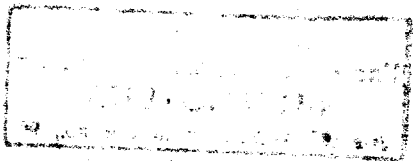
11.03.2013

В книге обобщены результаты теоретических, экспериментальных и натурных исследований ветрового волнения как вероятностного гидродинамического процесса. Она охватывает обширный круг вопросов от методов вероятностного анализа записей волнения до наиболее современных решений статистической гидромеханики. Особое внимание уделено прикладным аспектам рассматриваемых вопросов и в первую очередь тем результатам, которые авторы получили за последние 15 лет.

Монография рассчитана на широкий круг специалистов: океанологов, метеорологов, геофизиков, моряков, гидротехников, работников научно-исследовательских институтов, конструкторских бюро и других организаций, связанных со строительством морских судов и обеспечением их эффективной и безопасной эксплуатации. Книга также может служить учебным пособием для студентов университетов и гидрометеорологических институтов.

The book shows generalized results of theoretical, experimental and field investigations of wind waves as a probabilistic hydrodynamic process. It includes a wide scope of questions from techniques of wave records probabilistic analysis up to modern solutions of statistical hydrodynamics. Special attention is paid to applied questions and in first turn to the results, obtained by authors during the last 15 years.

The monograph is intended for oceanographers, meteorologists, geophysicists, seamen, hydrotechnicians, workers of scientific institutes, construction bureaux and other organizations, dealing with shipbuilding and ensuring effective and safe exploitation of ships. The book may also serve as textbook for students of Universities and Hydrometeorological Institutes.



Оглавление

Предисловие	5
Введение	9

Часть I

Вероятностные свойства волновой поверхности	15
---	----

Глава 1

Вероятностные характеристики волнения и их статистические оценки; методы анализа натурных данных	—
--	---

1.1. Вероятностные характеристики волнения	—
1.2. Статистические оценки вероятностных характеристик	18
1.3. Спектральный анализ записей волнения в одной точке	19
1.4. Спектральный анализ планшетов стереосъемки волнения	33
1.5. Спектральный анализ синхронных записей возвышений и пространственных производных волновой поверхности в фиксированной точке	38
1.6. Спектральный анализ синхронных записей волнения в нескольких точках	41
1.7. Статистический анализ выборочной совокупности элементов волн	46

Глава 2

Вероятностные гидродинамические модели волновой поверхности	61
---	----

2.1. Линейные модели	62
2.2. Нелинейные модели	67
2.3. Косвенная проверка вероятностных гидродинамических моделей по натурным данным	71

Глава 3

Частотный спектр ветрового волнения	81
---	----

3.1. Ветровые волны	83
3.2. Волны зыби	112
3.3. Смешанное волнение	116

Глава 4

Пространственный и частотно-направленный спектры ветрового волнения	122
---	-----

4.1. Функция углового распределения энергии	130
4.2. Частотно-направленный спектр волн	141
4.3. Спектр уклонов волновой поверхности	142

Глава 5

Статистические распределения элементов волн	151
5.1. Высоты волн	—
5.2. Периоды волн	158
5.3. Длины волн и их гребней	160
5.4. Условные распределения и их моменты	161
5.5. Двумерные распределения	163
5.6. Крутизна и показатель трехмерности	169
5.7. Последовательности волн	171
5.8. Группы волн	—

Часть II

Развитие, распространение и затухание волн	180
--	-----

Глава 6

Спектральная теория развития ветрового волнения	187
6.1. Передача энергии ветра волнам	—
6.2. Нелинейные взаимодействия	195
6.3. Диссипация энергии	199
6.4. Уравнение баланса волновой энергии в спектральной форме	202

Глава 7

Оценка отдельных составляющих баланса волновой энергии по натурным данным	209
---	-----

Глава 8

Метод расчета вероятностных характеристик волнения	217
8.1. Правая часть уравнения баланса волновой энергии в спектральной форме	218
8.2. Аналитические решения уравнения баланса волновой энергии	222
8.3. Численное решение уравнения баланса	230
8.4. Примеры расчета	240

Часть III

Статистические характеристики многолетнего распределения ветра и волн	251
---	-----

Глава 9

Функции распределения ветра и волн	—
9.1. Распределение ветра	252
9.2. Распределение волн	253
9.3. Совместные распределения ветра и волн	257
9.4. Межгодовая изменчивость ветра и волнения	260

Заключение	262
----------------------	-----

Summary	267
-------------------	-----

Список литературы	271
-----------------------------	-----

Предметный указатель	286
--------------------------------	-----

Предисловие

«... где на поверхности происходит игра случая, там сама эта случайность всегда оказывается подчиненной внутренним, скрытым законам. Все дело лишь в том, чтобы открыть эти законы».

Ф. Энгельс

(Маркс К. и Энгельс Ф. Соч., т. 21, с. 306)

«Пожалуй, нет более общеизвестного и на первый взгляд банального явления, чем волны, образуемые ветром в луже, озере или в море. С какой легкостью и изяществом порождает природа это явление, и как трудно дается человеку детальное изучение его механизма».

А. Лакомб

(Лакомб А. Энергия моря. Л., Гидрометеониздат, 1972, с. 74)

Волны, возникающие на водной поверхности под воздействием ветра, — это такой физический процесс, с которым человек встречается при первом же знакомстве с любым водоемом.

Процесс зарождения и развития волн настолько сложен, что, несмотря на огромные усилия исследователей, до сих пор еще не удалось разработать общепризнанной его теории. Физика процесса непосредственного взаимодействия воздушного потока с водной поверхностью еще далеко не ясна, так как основные особенности этого процесса формируются в очень тонком пограничном слое, мало доступном для исследователя в природных условиях. Трудности изучения ветровых волн обусловлены, кроме того, их нерегулярностью и исключительной изменчивостью. Достаточно взглянуть на последовательность фотографий волновой поверхности, чтобы убедиться в том, насколько сложна ее конфигурация и насколько быстро она изменяется во времени даже при устойчивом ветре одного и того же направления. Исследования показали, что конкретные величины возвышения волновой поверхности в фиксированной точке лишь статистически связаны с параметрами ветра. Ветровое волнение является процессом вероятностным: особенности распределения волновых аппликат на сравнительно небольших участках волновой поверхности и их изменения за сравнительно небольшие промежутки времени носят случайный характер и их невозможно заранее предсказать. Лишь интегральные характеристики волнения (средняя энергия, средние значения скоростей движения частиц воды) однозначно связаны с основными факторами волнообразования. Фиксированные значения аппликат и скоростей частиц, а также размеры отдельных волн связаны

с интегральными характеристиками волнения через законы распределения вероятностей или их моментные функции.

Движение частиц воды на волне подчиняется основным законам гидромеханики, и процесс зарождения и развития ветрового волнения является не только вероятностным, но и гидродинамическим. Теория этого процесса должна базироваться на решениях уравнений статистической гидромеханики. Точные решения этих уравнений пока еще не получены как по причине недостаточной изученности физики развития ветрового волнения, так и по причине многочисленных математических трудностей. Нет еще полного согласия между результатами теоретических исследований, экспериментальными и натурными данными. В то же время уже сделано немало в области изучения волнения как вероятностного гидродинамического процесса и возникла необходимость обобщить результаты, полученные отдельными исследователями и опубликованные главным образом в различных научных журналах.

В связи с отсутствием общепризнанной теории ветрового волнения как вероятностного гидродинамического процесса, в публикуемой монографии главное внимание обращено на результаты анализа натурных данных и их сопоставление с различными моделями и теоретическими решениями.

Книга разделена на три части. В части I изложены методы количественной характеристики волнения как вероятностного процесса. Показано, что в промежутке квазистационарности и на участке квазиоднородности процесса наиболее общей его характеристикой является двумерная функция спектральной плотности волновых аппликат, которая связана с моментами распределения максимумов и минимумов волновой поверхности и элементов видимых волн. Приведены аппроксимации одномерной и двумерной функций спектральной плотности и дана их физическая трактовка в рамках различных гидродинамических моделей реальной волновой поверхности. В связи с большой прикладной значимостью сведений о распределении элементов видимых волн и их групп этому вопросу посвящена специальная достаточно обширная глава.

В начале части I книги обращено значительное внимание на методы вероятностного анализа волнения. Это вызвано недостаточной освещенностью вопроса в научной литературе и большим влиянием, которое оказывает выбор метода обработки и анализа информации на достоверность и однозначность конечных результатов экспериментальных и натурных исследований ветрового волнения. Целый ряд расхождений между выводами отдельных исследователей безусловно связан с недостатками методов наблюдений, обработки и анализа исходной информации. Авторы сочли необходимым сформулировать ряд общих принципов вероятностного анализа волнения и оценить достоверность расчета различных статистических характеристик процесса. Единые методы и приемы, изложенные в главе I, были использованы во всех расчетах, резуль-

таты которых приводятся в книге. Основное содержание части I книги базируется на результатах, полученных ее авторами.

В части II книги рассмотрены вероятностные гидродинамические модели процесса зарождения, развития и распространения ветровых волн. Центральное место здесь занимают результаты аналитического и численного решения уравнения баланса волновой энергии в спектральной форме; приведены методы расчета волн, основывающиеся на этих решениях. Уточнена правая часть уравнения баланса волновой энергии, разработаны алгоритмы расчета вероятностных характеристик волнения по параметрам ветра. На отдельных примерах дано сопоставление расчетов с натурными данными.

Часть III содержит описание разработанных авторами методов расчета функций многолетнего распределения волн. Сведения по статистике волн в океанах и морях, получаемые с использованием этих методов, содержатся в работе [10].

По причине ограниченности объема книга содержит сведения только по гравитационным ветровым волнам на глубокой воде (удвоенная глубина больше длины волны). Не рассмотрены вопросы развития и трансформации гравитационных волн на мелководье, а также закономерности развития капиллярно-гравитационных и капиллярных ветровых волн. Кроме того, в ряде разделов приведены лишь конечные результаты исследований с указанием на ранее опубликованные работы авторов, в которых соответствующие вопросы рассмотрены более детально.

В книге приняты термины и определения, установленные в ГОСТе 18455-73. Для удобства изложения сделано лишь отступление в термине «волны». В книге под этим словом объединены два термина ГОСТа: «волна» и «волновое колебание». Для терминов, которые до сих пор еще не включены в Государственный стандарт (например, по спектральным характеристикам волн), в книге даны наиболее распространенные определения, в том числе расширено понятие «статистические характеристики волн», которое в книге относится не только к статистическим характеристикам выборочной совокупности волн, но и к спектральным характеристикам волнения. Во всех случаях, когда авторы используют аппарат теории вероятностей, математической статистики и гидромеханики, сохраняются терминология и определения, принятые в этих разделах науки. Наконец, представляется целесообразным особо подчеркнуть смысл следующих терминов, которые приняты в книге в соответствии с ГОСТом, но которые ранее в широкой литературе были недостаточно четко определены. Это относится в первую очередь к разделению понятий «ветровое волнение» и «ветровые волны». Первый термин употребляется в том случае, когда речь идет о волнах, возникших благодаря воздействию ветра на водную поверхность, второй — когда необходимо разделить понятия «ветровые волны», «збыль» и «смешанное волнение». Под ветровыми волнами следует понимать лишь тот случай ветрового волнения когда волны, вызванные ветром, находятся под его непосредственным

воздействием и когда это воздействие определяет все особенности развития и распространения волн. Ко второй паре терминов, которую следует особо отметить, относятся термины «регулярное волнение» и «нерегулярное волнение». В морях и океанах практически не бывает регулярного волнения и этот термин ГОСТа применяется в книге только в том случае, когда необходимо подчеркнуть, что те или иные выводы теории получены для случая, когда форма и элементы всей последовательности волн одинаковы. В естественных условиях, как уже указывалось, волнение всегда нерегулярно, очень изменчиво и строго может быть описано только в терминах статистической гидромеханики. Разделить волновую поверхность на отдельные волны можно только условно, и это делается для того, чтобы как-то связать несколько абстрактную, но более полно характеризующую процесс функцию спектральной плотности с математически менее определенным, но реально воспринимаемым понятием волны. При этом приходится принимать во внимание то обстоятельство, что наиболее полная информация о волнении базируется на визуальных наблюдениях и относится к элементам отдельно взятых волн. Кроме того, нельзя забывать, что отдельно взятая волна при всей сложности и изменчивости ее конфигурации является той физической реальностью, которая непосредственно воздействует на суда и сооружения. Вот почему в книге наряду с результатами изучения волнения как вероятностного гидродинамического процесса уделено достаточно много внимания статистике отдельно взятых волн.

Введение

До недавнего времени исследования реального ветрового волнения базировались на выводах теории регулярных гравитационных волн, распространяющихся по поверхности жидкости. Краеугольными камнями этой теории являются два основных закона гидромеханики [67, 142, 144, 151]:

закон сохранения количества движения (импульса)

$$\rho_w \frac{du}{dt} + \rho_w \Omega u + \nabla p - \rho_w g = f, \quad (1)$$

закон сохранения массы

$$\frac{d\rho_w}{dt} + \rho_w \nabla u = 0. \quad (2)$$

где ρ_w — плотность воды; u — скорость движения частиц жидкости; Ω — удвоенная угловая скорость вращения Земли; p — давление; g — ускорение свободного падения; f — равнодействующая всех остальных сил.

Решение уравнений (1), (2) для вынужденных волн в вязкой жидкости связано с большими трудностями, и наиболее полные результаты получены в области изучения установившегося двумерного волнового движения в идеальной несжимаемой жидкости, вызванного действием мгновенных сил и находящегося под влиянием силы тяжести. В этом случае задача сводится к решению уравнения Лапласа

$$\nabla^2 \phi = 0, \quad (3)$$

где ϕ — потенциал скорости, отвечающий условию

$$\nabla \phi = u \quad (4)$$

и представляющий гармоническую функцию, которая должна удовлетворять условию непротекания через дно (H — глубина воды)

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = -H, \quad (5)$$

где z — вертикальная координата, ось z направлена вверх, кинематическому граничному условию на поверхности

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } z = \xi \quad (6)$$

и динамическому граничному условию на свободной поверхности

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 = \frac{\rho}{\rho_w} \quad \text{при } z = \zeta, \quad (7)$$

где ζ — аппликата волновой поверхности; x, y — горизонтальные координаты. Система координат XOY расположена в плоскости совпадающей со свободной поверхностью жидкости в ее невозмущенном состоянии.

Сложность решения (3) заключается в том, что обе функции $\zeta(x, y, z)$ и Φ априори неизвестны и нелинейны. Обычно используется путь разложения Φ и ζ по степеням малого параметра ε порядка крутизны волн h/λ (h — высота, λ — длина), например

$$\Phi = \varepsilon \Phi_1 + \varepsilon^2 \Phi_2 + \varepsilon^3 \Phi_3 + \dots, \quad (8)$$

и последующей подстановки рядов вида (8) в (3) — (7).

Приближенные решения (8) были получены Стоксом [299, 300] и Рэлеем [282—284]. Доказательство существования установившихся волн конечной амплитуды на поверхности тяжелой жидкости дали А. И. Некрасов [105], Леви-Чевита [238], Струик [301], Ю. П. Красовский [68, 69]. А. И. Некрасов привел задачу о волнах конечной амплитуды к решению нелинейного интегрального уравнения, которое строится в виде ряда по степеням малого положительного безразмерного параметра μ' . Алгоритм этого решения численно реализован на ЭВМ Томасом [304]. Строго математически параметр μ' является неопределенным, но Я. Н. Секерж-Зенькович [137] показал, что если исходить из физического смысла задачи, решенной А. И. Некрасовым, то μ' надо брать в промежутке $(0, \mu)$, где μ — значение μ' при котором крутизна волн достигает своего максимального значения.

Для ряда задач на практике используются хорошо известные решения (8) в приближении первого порядка, составляющие основу так называемой линейной теории плоских волн. Согласно этой теории дисперсионное соотношение имеет вид

$$\omega^2 = gk \tanh kH; \quad (9)$$

для глубокой воды (при $kH \gg 1$) соотношение (9) приводится к виду

$$\omega^2 = gk, \quad (10)$$

уравнение свободной поверхности — косинусоида

$$\zeta = a \cos(kx - \omega t); \quad (11)$$

потенциал Φ скорости u равен

$$\Phi = \frac{\omega a \operatorname{ch} k(z+H)}{k \operatorname{sh} kH} \sin(kx - \omega t); \quad (12)$$

частицы на волне движутся по эллиптическим орбитам с горизонтальной r_x и вертикальной r_z полуосями

$$r_x = \frac{a \operatorname{ch}(z_0 + H)}{k \operatorname{sh} kH} \sin(kx - \omega t); \quad (13)$$

на глубокой воде движение частиц происходит с частотой ω по окружностям радиусом $a \exp kz_0$;

кинетическая энергия E_k на единицу поверхности равна потенциальной E_n и задана выражением

$$E_k = E_n = \frac{1}{4} \rho \omega g a^2 = \frac{1}{2} \rho \omega g \bar{z}^2. \quad (14)$$

В соотношениях (9) — (14) приняты следующие обозначения: частота $\omega = 2\pi/\tau$; волновое число $k = 2\pi/\lambda$; τ — период волны; a — ее амплитуда; sh , ch , th — гиперболические функции (синус, косинус тангенс); z_0 — вертикальная координата частицы в невозмущенной жидкости.

Решения (8) последовательных приближений и точные решения для потенциальных волн конечной амплитуды выявляют ряд свойств волнения, отличных от линейных волн. Основные отличия заключаются в следующем: существует предельная крутизна волн, которая по Мичелу [255] примерно равна 0,142, орбиты частиц незамкнуты и волновое течение уменьшается с глубиной по экспоненциальному закону, частота волн зависит не только от волнового числа, но и от крутизны волн, увеличиваясь с ростом последней; кинетическая энергия не равна, а больше потенциальной.

Однако даже для волн предельной крутизны количественные различия между соотношениями линейной теории и соотношениями волн конечной амплитуды сравнительно невелики. Так, например, фазовая скорость линейных волн примерно на 10% меньше, чем фазовая скорость предельной мичеловской волны, а кинетическая энергия этой волны больше потенциальной на величину четвертого порядка малости. Этим можно объяснить то, что на практике очень часто используются более простые зависимости теории линейных волн. Следует, однако, иметь в виду, что ряд свойств регулярных волн и в особенности их взаимодействие невозможно объяснить в рамках линейной теории волн [106].

Учет вязкости жидкости приводит к некоторой деформации потенциального волнового движения и появлению периодической и стационарной завихренности поля скорости.

Возникающие при этом периодический вихрь и волновые напряжения Рейнольдса быстро затухают с глубиной, стационарные возмущения охватывают более значительный слой жидкости [223]. Однако эффекты, связанные с действием сил вязкости, сравнительно малы и в основном не учитываются в различных моделях зарождения и распространения волн.

При переходе от регулярных к нерегулярным детерминированным волнам функцию $\xi(x, y, t)$ удобно представить в виде интеграла Фурье [114]

$$\xi(x, y, t) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\infty} \left\{ a(\omega, \theta) \cos \left[\frac{\omega^2}{g} (x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t \right] + \right. \\ \left. + b(\omega, \theta) \sin \left[\frac{\omega^2}{g} (x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t \right] \right\} d\omega d\theta \quad (15)$$

и интерпретировать как результат суммирования большого числа гармонических прогрессивных волн $\cos \left[\frac{\omega^2}{g} (x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t \right]$ с амплитудами $\frac{a}{b}(\omega, \theta)$, зависящими от частоты ω и направления распространения θ .

Реальное ветровое волнение, как уже указывалось в предисловии, является вероятностным процессом, поэтому в интеграле (15) функции $a(\omega, \theta)$ и $b(\omega, \theta)$ необходимо рассматривать как случайные функции. Стохастический интеграл вида (15) удовлетворяет системе уравнений (3) — (7) и в этом смысле он может служить вероятностной гидродинамической моделью реальной волновой поверхности, свойства которой будут определяться видом функции спектральной плотности $S_{\xi}(\omega, \theta)$ — математическим ожиданием суммы $[a^2(\omega, \theta) + b^2(\omega, \theta)]$.

Вероятностные гидродинамические модели, описывающие реальное ветровое волнение, и результаты аппроксимации спектральных функций, определяющих вероятностные характеристики волновой поверхности, обсуждаются в части I книги.

Следует отметить, что как в случае регулярных волн, так и в случае нерегулярных случайных волн линейные решения уравнений (3) — (7) описывают с достаточной точностью основные свойства стационарной волновой поверхности. В отдельных работах [29, 234] показано, что в реальном спектре ветровых волн соотношение между энергией и частотой спектральных составляющих примерно в 50 раз меньше, чем в предельных мичеловских регулярных волнах и каждая из этих составляющих может с достаточной степенью приближения рассматриваться как линейная плоская волна. Это подтверждается также результатами сопоставления линейных вероятностных гидродинамических моделей волновой поверхности с натурными данными (см. главу 2). Однако при переходе к нестационарным задачам учет нелинейности начинает играть очень большую, а иногда и определяющую роль (см. главу 6).

Решение уравнений движения для нестационарных вынужденных волн связано с большими трудностями и поэтому наиболее известные детерминистические решения получены на основе закона сохранения полной средней энергии. Первым использовал этот

путь В. М. Маккавеев [91], записав уравнение баланса волновой энергии для ветрового волнения в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho_w a_0^2}{2g} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\rho_w a_0^2 v}{2g} \right) - \overline{W}_U + \overline{W}_\mu = 0, \quad (16)$$

где v — групповая скорость волн; $\overline{W}_U$ — мощность, передаваемая ветром волне; $\overline{W}_\mu$ — мощность, теряемая из-за диссипаций энергии.

Для решения (16) необходимо не только знать вид функций $\overline{W}_U$ и $\overline{W}_\mu$ или их аппроксимации, но иметь еще одно уравнение, связывающее между собой амплитуду и групповую скорость волн.

Принимая различные механизмы передачи энергии от ветра волнам и ее диссипации, а также различный вид соотношений между амплитудой волн и другими ее элементами, исследователи получили ряд детерминистических решений, определяющих зависимость размеров ветровых волн от ветра [72, 91, 138, 159]. Эти соотношения отражают наши знания об изменении энергии ветровых волн при воздействии на водную поверхность устойчивого во времени и однородного по пространству воздушного потока. Решить более общую задачу развития и затухания ветрового волнения при нестационарном и неоднородном воздушном потоке можно лишь при переходе от (16) к уравнению баланса волновой энергии в спектральной форме, учитывающего случайный нерегулярный характер реального волнения.

Основные результаты анализа решений уравнения баланса волновой энергии обобщены в части II книги. Одним из преимуществ спектрального представления (16) является то, что для его решения не требуется второго уравнения, связывающего элементы волн, которое за редким исключением определяется эмпирическим путем.

Многие недостатки детерминистических решений уравнения (16) остаются и в случае его вероятностных решений. В первую очередь это относится к представлению правой части уравнения, так как по-прежнему недостаточно изучены физические процессы, определяющие передачу энергии от ветра волнам и ее диссипацию. Однако совместный анализ взаимодействия ветра и волнения как случайных функций позволил существенно продвинуть наши знания в области изучения ветрового волнения и наметить более перспективные пути дальнейшего изучения явления.

Модели ветрового волнения, базирующиеся на решениях уравнения баланса волновой энергии в спектральной форме, послужили основой для разработки новых методов расчета вероятностных характеристик волн по диагностическим и прогностическим полям ветра. Анализ этих методов и частичная их проверка по натурным данным выполнены в части II книги. Иногда эти методы используются также для расчета волн по синоптическим картам за длительный предшествующий период с целью получения данных для изучения режима волнения в том или ином районе океана [225].

Путь этот является достаточно трудоемким и не всегда оправданным. В части III книги показано, что для изучения режима волнения значительно проще воспользоваться общими статистическими закономерностями многолетнего распределения волн, но оба эти приема расчета режимных характеристик волн не исключают, а дополняют друг друга, так как по многолетним функциям распределения волн нельзя получить статистику спектров, необходимую для решения ряда важных практических задач.

Следует считать общепризнанным [165, 213], что в настоящее время основная трудность исследования волнения как вероятностного гидродинамического процесса заключается в недостатке экспериментальных и натурных данных, необходимых для проверки основополагающих научных гипотез. Учитывая это обстоятельство, авторы книги уделяют основное внимание не столько отдельным теоретическим разработкам, сколько анализу натурных данных, тем более что эти вопросы наиболее близки им по тематике собственных исследований.

Часть I

Вероятностные свойства волновой поверхности

Одним из наиболее характерных свойств волн, развивающихся под воздействием ветра, является их нерегулярность. При фиксированных условиях волнообразования и одинаковых статистических характеристиках волновая поверхность состоит из последовательности волн, нерегулярно меняющейся во времени и в пространстве.

Анализ натурных данных показывает, что зависимость можно установить лишь между статистическими характеристиками (а не мгновенными значениями!) ветра и волнения. Это фактически означает признание того, что процесс волнения является вероятностным и аппликаты $\zeta(x, y, t)$ волновой поверхности — случайная функция координат x, y и времени t .

Глава I

Вероятностные характеристики волнения и их статистические оценки; методы анализа натурных данных

При изучении волнения как вероятностного процесса основное внимание уделяют тем характеристикам, которые позволяют выявить закономерность в повторяемости характерных размеров волн и оценить их возможное разнообразие, а также выявить цикличность волновых движений и получить представление о средних величинах их энергии.

1.1. Вероятностные характеристики волнения

Реальное ветровое волнение является нестационарным и неоднородным вероятностным процессом, и лишь в отдельных случаях (при определенных условиях волнообразования) его можно с из-

вестной степенью приближения отнести к классу стационарных и однородных случайных функций. Однако при анализе экспериментальных данных для упрощения расчетов вероятностных характеристик, как правило, допускается стационарность (однородность) волнового процесса в пределах определенного промежутка времени (пространства). Нестационарный (неоднородный) процесс представляется как бы состоящим из дискретных квазистационарных (квазиоднородных) участков, на каждом из которых процесс считается эргодичным в том смысле, что вероятностным характеристикам отдельных его реализаций придается известная степень общности с вероятностными характеристиками гипотетического (полученного при аналогичных условиях) ансамбля выборочных функций.

Допустимость принятых выше предположений для многих прикладных задач неоднократно подтверждена экспериментальными данными. На экспериментальном материале показано [9, 126], что если выбрать сравнительно небольшие отрезки времени, порядка 20—40 мин, и участки поверхности моря протяженностью 5—10 км (в направлении распространения волн), то погрешности статистических характеристик волнения, обусловленные нестационарностью и неоднородностью волнового процесса, будут значительно меньше, чем выборочная изменчивость статистических оценок, обусловленная ограниченностью реализаций процесса и недостатками принятой методики расчета вероятностных характеристик волнения.

Эргодичность волнового процесса обычно подтверждается путем сопоставления статистических характеристик волнения, зарегистрированного при идентичных условиях волнообразования, а также путем сопоставления результатов измерения волн, выполненных в одном и том же районе при помощи волнографов синхронно со стереосъемкой волн с самолетов.

Сравнительно небольшие различия между результатами таких измерений указывают на допустимость принятия эргодической гипотезы.

Любой стационарный однородный случайный процесс $\zeta(x, y, t)$ с конечной дисперсией можно представить в виде [160]

$$\zeta(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(k_x x + k_y y + \omega t)] d^3 \hat{Y}(k_x, k_y, \omega), \quad (1.1.1)$$

где $\hat{Y}(k_x, k_y, \omega)$ — процесс с некоррелированными (по всем переменным) приращениями; k_x, k_y — проекции волнового числа k на оси координат.

Из выражения (1.1.1) следует, что моменты распределения вероятностного процесса $\zeta(x, y, t)$ могут быть выражены через соответствующие моменты распределения вероятностей процесса

$\hat{Y}(k_x, k_y, \omega)$; например, корреляционная функция равна [171]
 $K_{\xi}(\xi, \eta, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \int \exp[i(k_x \xi + k_y \eta + \omega \tau)] M\{|d^3 \hat{Y}(k_x, k_y, \omega)|^2\}; \quad (1.1.2)$

$$M\{|d^3 \hat{Y}(k_x, k_y, \omega)|^2\} = d^3 \hat{P}(k_x, k_y, \omega), \quad (1.1.3)$$

где $P(k_x, k_y, \omega)$ — трехмерная спектральная функция; $M\{\cdot\}$ — оператор математического ожидания.

Аналогичным образом определяются соотношения между третьим, четвертым и другими моментами распределения $\xi(x, y, t)$ и их преобразованиям Фурье — би-спектрами (три-спектрами и др.) [174, 216].

Как частный случай из (1.1.2) могут быть получены временные $K_{\xi}(\tau)$ и пространственные $K_{\xi}(\xi, \eta)$ корреляционные функции.

Для гауссовских случайных функций $\xi(x, y, t)$ математическое ожидание m_{ξ} , корреляционная функция (1.1.2) являются исчерпывающими вероятностными характеристиками, а с учетом соотношений (1.1.1) — (1.1.3) к числу таких характеристик должна быть причислена* и спектральная функция $\hat{P}(k_x, k_y, \omega)$ или, если процесс непрерывен и дифференцируем, спектральная плотность $\Pi(k_x, k_y, \omega)$, равная

$$d^3 \hat{P}(k_x, k_y, \omega) = \Pi(k_x, k_y, \omega) dk_x dk_y d\omega. \quad (1.1.4)$$

Для волнового процесса $\xi(x, y, t)$, удовлетворяющего основной системе уравнений гидромеханики (3) — (7), будут справедливы дисперсионные соотношения вида**

$$f(k, \omega) = 0. \quad (1.1.5)$$

Следовательно, спектральная плотность $\Pi(k_x, k_y, \omega)$ будет функцией только двух независимых переменных***; эту функцию [9] обозначают $S_{\xi}(k_x, k_y)$ или $S_{\xi}(\omega, \theta)$.

С учетом указанных допущений квазистационарности, локальной однородности, эргодичности волнового процесса и соотношения (1.1.5) наибольший интерес с теоретической и практической точек зрения представляют такие вероятностные характеристики, как

— временная $K_{\xi}(\tau)$ и пространственная $K_{\xi}(\xi, \eta)$ корреляционные функции;

— частотные $S_{\xi}(\omega)$ и пространственные $S_{\xi}(k_x, k_y)$ или $S_{\xi}(\omega, \theta)$ спектральные плотности.

* Для гауссовских процессов би-спектр и три-спектр могут быть вычислены по спектральной функции.

** Частным случаем (1.1.5) являются соотношения (9) и (10).

*** Более подробно методы оценивания этих функций изложены в разделах 1.4., 1.5, а их свойства — в главе 3; якобианы преобразования из $S_{\xi}(k_x, k_y)$ в $S_{\xi}(\omega, \theta)$ и $S_{\xi}(k, \theta)$ — в главе 4.

Кроме перечисленных функций, характеризующих волнение как случайную функцию времени и пространственных координат, традиционно волновую поверхность рассматривают еще как совокупность видимых волн, а волну — как геометрический объект, который можно описать с помощью системы случайных величин: высоты h , длины λ , периода τ и длины гребня L . При таком подходе вероятностными характеристиками волнения будут совместное распределение

$$F(h, \lambda, L, \tau) = P\{h_i < h, \lambda_i < \lambda, L_i < L, \tau_i < \tau\} \quad (1.1.6)$$

и любые маргинальные и условные распределения компонент системы $\{h, \lambda, L, \tau\}$ и их сочетаний, а также моменты этих распределений.

Нестационарному неоднородному вероятностному процессу $\xi(x, y, t)$, характеризующему корреляционной функцией $K_\xi(x_1, x_2, y_1, y_2, t_1, t_2)$ шести переменных, можно поставить в соответствие с учетом дисперсионного соотношения (1.1.5) пятимерную спектральную плотность $S_\xi(x, y, t, \omega, \theta)$, интерпретируемую как изменение двумерного спектра волн $S_\xi(\omega, \theta)$ по пространственным координатам x, y и во времени t .

Распределение элементов волн за длительные промежутки времени описывается функцией типа (1.1.6) с зависимостью от времени. Однако традиционно рассматривается распределение порядковых или моментных статистик, взятых из отдельных выборочных совокупностей на промежутке квазистационарности, последовательность которых образует временной ряд.

Волнение как стационарный, однородный вероятностный процесс, характеризующий частотным и пространственным спектром, а также распределениями элементов волн на промежутке квазистационарности, рассмотрено в части I книги; как нестационарный, неоднородный вероятностный процесс, характеризующий спектральной плотностью $S_\xi(x, y, t, \omega, \theta)$ — в части II; распределение элементов волн за длительные промежутки времени — в части III книги.

1.2. Статистические оценки вероятностных характеристик

Теоретически для определения указанных выше вероятностных характеристик волнения необходимо иметь ансамбль реализации процесса $\xi(x, y, t)$ или генеральную совокупность элементов волн. Фактически по данным натурных измерений волнения при фиксированном комплексе условий можно получить одну или несколько синхронных записей волнения $\xi(t)$ ограниченной продолжительности $t \in [0, T]$, или данные о волнении на участке волновой поверхности $\xi(x, y)$ ограниченной протяженности $x \in [0, X]$, $y \in [0, Y]$.

Замена ансамбля реализации $\xi(t, \hat{w})$, $\hat{w} \in \hat{W}$ единственной реализацией $\xi(t) = \xi(t, \hat{w}_0)$, а следовательно, и замена генеральной совокупности элементов волн выборочной совокупностью suggests возможность вероятностного анализа, приводит к необходимости использования вместо истинных вероятностных характеристик их статистических оценок, вычисляемых при определенных предположениях о степени соответствия оценок вероятностным характеристикам.

Следуя [84], под статистической оценкой B^* вероятностной характеристики B будем понимать функцию значений случайной величины (из выборочной совокупности) или случайной функции (из участка реализации). Правило оценивания указывает конкретные действия над элементами выборочной совокупности (над реализацией случайного процесса), приводящие к вычислению B^* . Значения B^* являются случайными величинами; меру близости B^* к B можно установить лишь в вероятностном смысле. Если B^* — случайная величина, например оценка математического ожидания или дисперсии, то распределение вероятностей ее значений $F_{B^*}(x)$ характеризует степень отклонения B^* от B . Если под B^* понимается оценка корреляционной функции или спектральной плотности, то B^* необходимо рассматривать как нестационарную случайную функцию, свойства которой описываются с помощью первых двух моментов распределений.

Таким образом, практически для выполнения анализа натурных данных необходимо:

- для каждой из вероятностных характеристик B определить вид формулы для расчета статистической оценки B^* , т. е. указать правило оценивания;

- сформулировать на основе изучения статистических свойств оценки B^* такие рекомендации для ее вычисления, при которых оценка наименее отклоняется от истинной вероятностной характеристики B ;

- дать алгоритм и программу для ЭВМ вычислительного процесса, приводящего к получению достоверных значений статистических оценок вероятностных характеристик.

В этом плане рассмотрим основные вопросы анализа натурных данных волновых измерений.

1.3. Спектральный анализ записей волнения в одной точке

В подавляющем большинстве случаев для получения записей волнения в точке (с судна или свайного основания) в нашей стране используются волнографы ГМ-16, ГМ-32, ГМ-61, ГМ-62 [21, 31, 111]. Не останавливаясь на анализе погрешностей этих приборов (они подробно обсуждаются в работах [2, 9, 31]), будем условно

считать, что волнограмма дает адекватное представление о фактических свойствах зарегистрированного волнения.

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что, в самом общем случае, волнение необходимо рассматривать как нестационарный вероятностный процесс негауссовского типа*, однако (как было подчеркнуто в разделе 1.1) при анализе натурных данных, полученных в течение ограниченных промежутков времени, вполне допустимо [9, 130] принять, что волнограмма — реализация стационарного, эргодического, гауссовского случайного процесса $\zeta(t)$ при $t \in [0, T]$.

В соответствии с принятыми допущениями стационарности, эргодичности определим оценки m_{ζ}^* математического ожидания m_{ζ} и $K_{\zeta}^*(\tau)$ корреляционной функции $K_{\zeta}(\tau)$ в виде **

$$m_{\zeta}^* = \frac{1}{T} \int_0^T \zeta(t) dt, \quad (1.3.1)$$

$$K_{\zeta}^*(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} \zeta^0(t) \zeta^0(t+\tau) dt, \quad (1.3.2)$$

где

$$\zeta^0(t) = \zeta(t) - m_{\zeta}^*. \quad (1.3.3)$$

По форме записи (1.3.1), (1.3.2) и согласно общему определению статистической оценки, m_{ζ}^* необходимо рассматривать как случайную величину, а $K_{\zeta}^*(\tau)$ — как случайную функцию. Математическое ожидание $m_{m_{\zeta}^*}$ оценки m_{ζ}^* равно [11]

$$m_{m_{\zeta}^*} = m_{\zeta}, \quad (1.3.4)$$

а ее дисперсия $D_{m_{\zeta}^*}$ зависит от корреляционной функции процесса

$$D_{m_{\zeta}^*} = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) K_{\zeta}(\tau) d\tau. \quad (1.3.5)$$

В ряде работ показано, что оценка $K_{\zeta}^*(\tau)$ смещена относительно истинной корреляционной функции $K_{\zeta}(\tau)$ на величину [71, 84]

$$\varepsilon_{K_{\zeta}^*}(\tau) \equiv m_{K_{\zeta}^*}(\tau) - K_{\zeta}(\tau) = -\frac{1}{T(T-\tau)} \times$$

* Эти вопросы более подробно обсуждаются в главах 2 и 6.

** Изменения средней волновой линии на волнограмме, обусловленные различными причинами, могут быть устранены по методике, изложенной в § 6 работы [9].

$$\times \left\{ 2 \int_0^T \left(1 - \frac{\nu}{T} \right) [\tau K_{\xi}(\nu) + T K_{\xi}(\nu - \tau)] d\nu - \int_0^{\tau} (T + \tau - 2\nu) \times \right. \\ \left. \times [K_{\xi}(\nu) + K_{\xi}(\nu - \tau)] d\nu \right\}; \quad (1.3.6)$$

для вычисления дисперсии $D_{K_{\xi}^*}(\tau)$ и корреляционной функции $K_{\xi}^*(\tau, \tau_1)$ оценок $K_{\xi}^*(\tau)$ могут быть использованы, с учетом гаус-

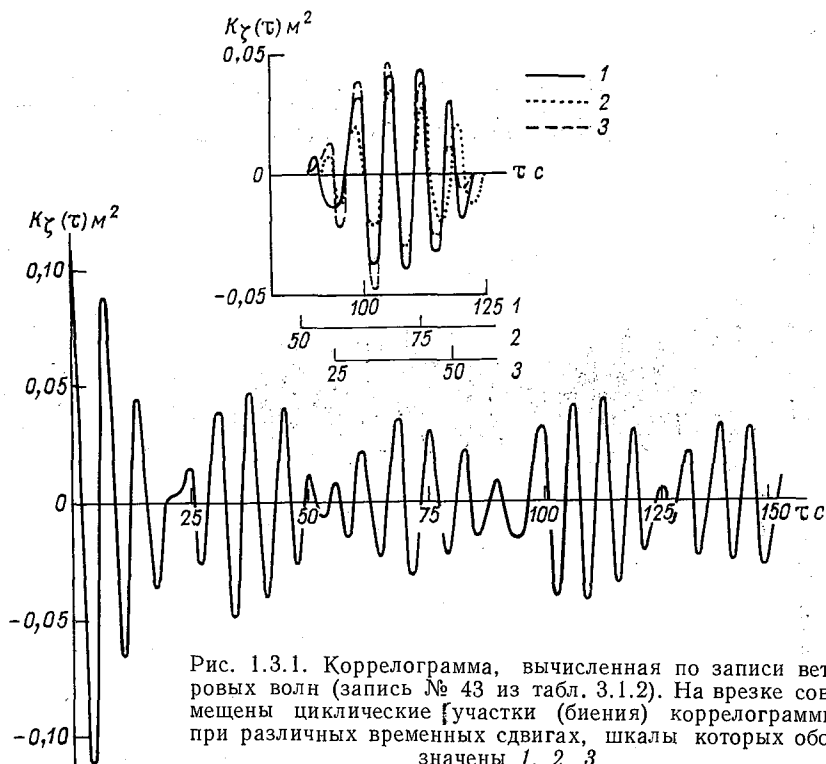


Рис. 1.3.1. Коррелограмма, вычисленная по записи ветровых волн (запись № 43 из табл. 3.1.2). На врезке совмещены циклические участки (биения) коррелограммы при различных временных сдвигах, шкалы которых обозначены 1, 2, 3

совости процесса $\xi(t)$, следующие соотношения [11, 42, 71, 125]:

$$D_{K_{\xi}^*}(\tau) = \frac{2}{T - \tau} \int_0^{T - \tau} \left(1 - \frac{\nu}{T - \tau} \right) [K_{\xi}^2(\nu) - K_{\xi}(\tau - \nu) K_{\xi}(\tau + \nu)] d\nu; \quad (1.3.7)$$

$$K_{K_{\xi}^*}(\tau, \tau_1) = \frac{1}{T - \tau} \left\{ 2 \int_0^{T - \tau} \left(1 - \frac{\nu}{T - \tau} \right) [K_{\xi}(\nu) K_{\xi}(\nu + \tau_1 - \tau) + \right. \\ \left. + K_{\xi}(\nu - \tau) K_{\xi}(\nu + \tau_1)] d\nu + \int_0^{\tau_1 - \tau} [K_{\xi}(\nu) K_{\xi}(\nu - \tau_1 + \tau) + \right. \\ \left. + K_{\xi}(\nu - \tau_1) K_{\xi}(\nu + \tau)] d\nu \right\}. \quad (1.3.8)$$

Из соотношений (1.3.6) — (1.3.8) видно, что математическое ожидание $m_{K_{\xi}^*}(\tau)$, дисперсия $D_{K_{\xi}^*}(\tau)$ зависят от τ , а корреляционная функция $K_{K_{\xi}^*}(\tau, \tau_1)$ зависит от двух аргументов τ и τ_1 коррелируемых величин $K_{\xi}^*(\tau)$ и $K_{\xi}^*(\tau_1)$, т. е. для описания свойств

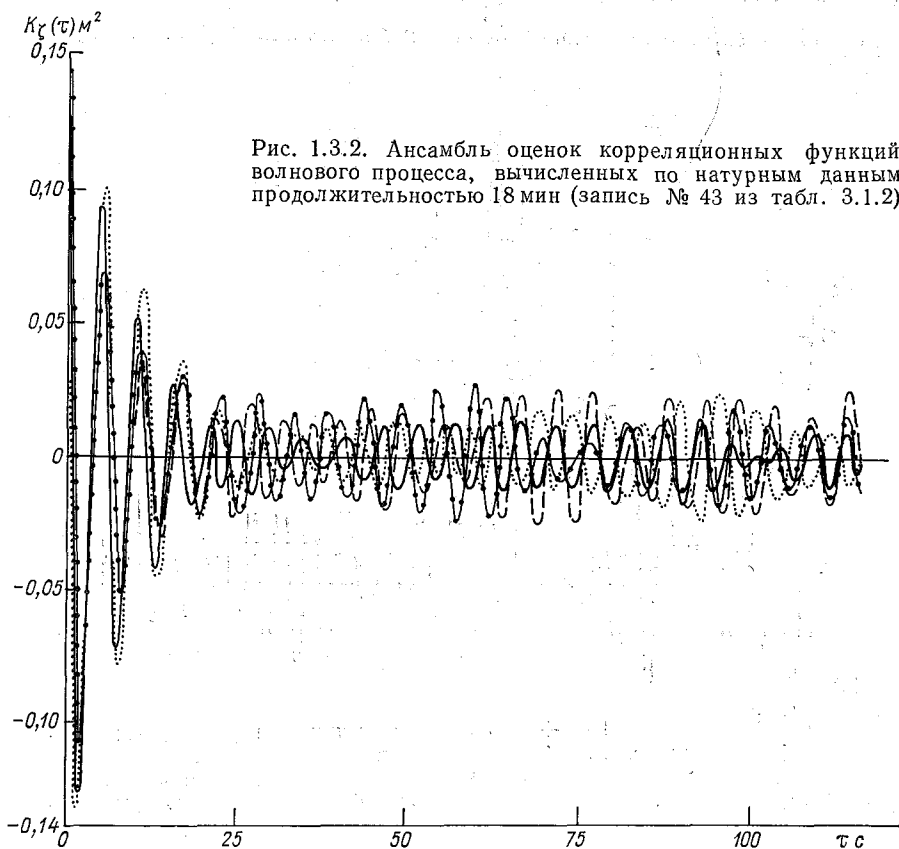


Рис. 1.3.2. Ансамбль оценок корреляционных функций волнового процесса, вычисленных по натурным данным продолжительностью 18 мин (запись № 43 из табл. 3.1.2)

оценки $K_{\xi}^*(\tau)$ стационарного процесса $\xi(t)$ необходимо считать $K_{\xi}^*(\tau)$ неоднородной (по τ) случайной функцией. Свойства $K_{\xi}^*(\tau)$ существенно зависят от вида истинной корреляционной функции $K_{\xi}(\tau)$.

Сочетание непараметрического метода оценивания $K_{\xi}^*(\tau)$ с параметрическим описанием свойств оценки $K_{\xi}^*(\tau)$ заставляет обратить особое внимание на согласованность выводов о виде $K_{\xi}^*(\tau)$ и закономерностях выборочной изменчивости оценок $K_{\xi}^*(\tau)$. Характерной особенностью ветрового волнения на стадии его развития и затухания является то, что корреляционная функция $K_{\xi}(\tau)$

имеет вид флуктуирующего процесса (рис. 1.3.1) с «биениями», обусловленными групповой структурой волнения [9, 89, 125].

Основными характерными особенностями выборочной изменчивости оценок $K_{\xi}^*(\tau)$ являются (как показано в работах [125, 126] и, в частности, видно на рис. 1.3.2):

— наличие в ансамбле $K_{\xi}^*(\tau)$ участка (протяженность которого зависит от T), где $K_{\xi}^*(\tau)$ можно считать достоверными оценками $K_{\xi}(\tau)$, поскольку на этом участке $K_{\xi}^*(\tau)$ когерентны и имеют малый коэффициент вариации;

— достоверность оценок $K_{\xi}^*(\tau)$ существенно уменьшается с увеличением τ и при больших сдвигах τ оценка становится недостоверной;

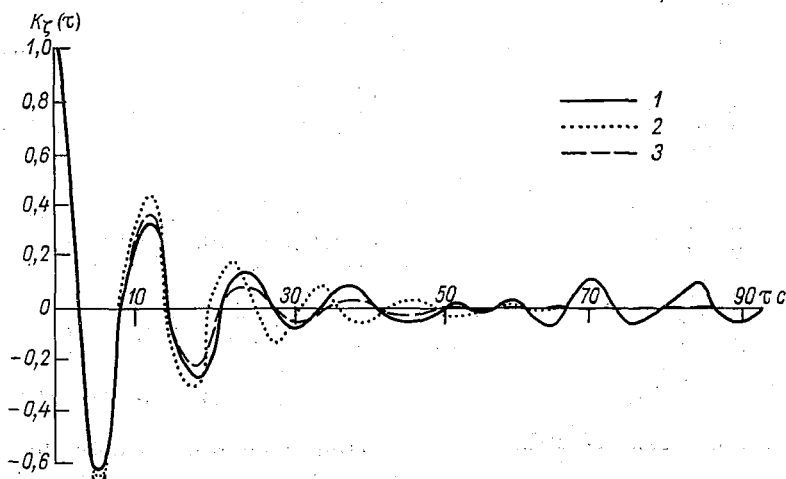


Рис. 1.3.3. Нормированная на дисперсию коррелограмма ветровых волн (1), вычисленная по натурным данным (запись № 7 из табл. 3.1.2) и ее аппроксимации выражением (1.3.10) (2), (1.3.9) (3)

— зависимость свойств оценок $K_{\xi}^*(\tau)$ (например, среднего и дисперсии по ансамблю коррелограмм при фиксированном τ) от временного сдвига τ наглядно свидетельствует о необходимости использования для описания этих свойств теории нестационарных процессов и, в частности, соотношений (1.3.6) — (1.3.8).

На начальном участке (до первого минимума огибающей) корреляционную функцию $K_{\xi}(\tau)$ можно аппроксимировать экспоненциально-косинусной функцией вида

$$K_{\xi}(\tau) = D_{\xi} \exp \{ -\alpha(\tau) |\tau| \} \cos [\beta(\tau) |\tau|] \quad (1.3.9)$$

с параметрами α и β , зависящими от τ . Здесь уместно отметить (этот факт будет использован в дальнейших рассуждениях), что

корреляционной функции $K_{\zeta}(\tau)$ вида (1.3.9) соответствует одновершинная спектральная плотность $S_{\zeta}(\omega)$ вида (3.1.37).

Аналитически установить соответствие преобразований Фурье (1.3.9) и (3.1.37) не удается [235], однако численные расчеты показали (типичные результаты приведены на рис. 1.3.3, 1.3.4), что спектральной плотности (3.1.37) соответствует корреляционная функция экспоненциально-косинусного вида с убывающим по τ декрементом затухания $\alpha(\tau)$ и увеличивающимся по τ флуктуационным периодом $\beta^{-1}(\tau)$.

Кроме того, на рис. 1.3.3 видно, что в первом приближении для описания свойств корреляционной функции можно принять аппроксимацию * вида (1.3.9) с параметрами α и β , не зависящими от τ :

$$K_{\zeta}(\tau) = D \exp \{-\alpha |\tau|\} \cos \beta \tau. \quad (1.3.10)$$

Этой аппроксимации $K_{\zeta}(\tau)$ соответствует одновершинная спектральная плотность

$$S_{\zeta}(\omega) = \frac{D_{\zeta} \alpha}{2\pi} \sum_{k=1}^2 [\alpha^2 + (\beta + (-1)^k \omega)^2]^{-1}. \quad (1.3.11)$$

При соответствующем выборе параметров α и β графики функций (1.3.11) и (3.1.37) будут иметь максимум на одинаковой частоте (рис. 1.3.4) и различаться лишь остротой вершины и быстротой изменения по ω восходящей и нисходящей ветвей спектра. Принятие

Рис. 1.3.4. Оценка спектральной плотности (1), вычисленная по натурным данным (запись № 8 из табл. 3.1.2) и ее аппроксимации: 2 — по (1.3.11), 3 — преобразованием Фурье выражения (1.3.9)

аппроксимативного выражения (1.3.10) позволяет, пользуясь соотношениями (1.3.6)—(1.3.8), найти [71; 125] аналитические зависимости для $\epsilon_{K_{\zeta}}^*(\tau)$, $D_{K_{\zeta}}^*(\tau)$, $K_{K_{\zeta}}^*(\tau, \tau_1)$ и объяснить на их основе многие свойства оценок $K_{\zeta}^*(\tau)$. В частности, в работах [71, 125] показано, что при обычно используемых длинах реализаций

* Для выполнения условий дифференцируемости необходимо, чтобы аргумент экспоненциальной функции в (1.3.10) имел вид $(-\alpha |\tau|^{1+\varepsilon})$, где ε — малая положительная величина, которой в практических расчетах при изучении свойств статистических оценок можно пренебречь [9]. Аналогичное замечание можно сделать и по отношению к аппроксимации (1.3.12).

оценки $K_{\xi}^*(\tau)$ можно считать (из-за малых значений $\xi_{K_{\xi}^*}$) практически несмещенными, но значения $K_{\xi}^*(\tau)$ и $K_{\xi}^*(\tau_1)$ сильно коррелированы и поэтому коррелограммы будут иметь при больших сдвигах τ незатухающие колебания.

Аппроксимации (1.3.9) и (1.3.10) не учитывают наличие биений на коррелограммах. Эти биения являются весьма характерным признаком корреляционных функций ветрового волнения и зыби; при совмещении различных участков коррелограмм с биениями, как, например, на рис. 1.3.1 б, они почти совпадают.

В работах [9, 125, 126] предпринята попытка аппроксимировать такие коррелограммы (рис. 1.3.1) выражением

$$K_{\xi}(\tau) = D_{\xi} \exp \{ -\gamma |\tau| \} \cos \beta \tau \cos B \tau, \quad (1.3.12)$$

где D_{ξ} — дисперсия процесса $\xi(t)$; γ — декремент огибающей корреляционной функции; B — групповая частота; β — частота флуктуационных колебаний.

Корреляционной функции (1.3.12) соответствует спектральная плотность

$$S_{\xi}(\omega) = \frac{D_{\xi} \gamma}{4\pi} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \{ \gamma^2 + [B + (-1)^i \beta + (-1)^j \omega]^2 \}^{-1}. \quad (1.3.13)$$

График функции (1.3.13) характеризует двувершинную спектральную плотность с максимальными значениями на частотах, близких к *

$$\omega_{\max}^{(1)} = \beta - B, \quad \omega_{\max}^{(2)} = \beta + B. \quad (1.3.14)$$

Такое распределение энергии в спектре ветрового волнения весьма сложно объяснить физически (наличие минимума энергии на частотах, близких к средней частоте волнового процесса), а также использовать в различного рода приложениях, например при расчетах качки и прочности судов [146].

Кроме того, из-за большой выборочной изменчивости оценок корреляционных функций $K_{\xi}^*(\tau)$ при больших временных сдвигах «биения» могут иметь далеко не всегда столь хорошее совпадение друг с другом, как на рис. 1.3.1 б, и чередоваться не в строгой последовательности друг за другом, а с некоторым опережением или запаздыванием.

В результате при вычислении оценки $\tilde{S}_{\xi}^*(\omega)$ спектральной плотности $S_{\xi}(\omega)$ по участку коррелограмм, содержащему 4—5 и более биений, вместо гладкой кривой с раздвоенной вершиной получается, как это показано на рис. 1.3.5 а, полоса, внутри которой разбросаны многочисленные случайные пики. При уменьшении

* Предполагается, что из-за малости γ по сравнению с $(\beta \pm B)$ ею можно [141] пренебречь при расчетах $\omega_{\max}^{(1)}$, $\omega_{\max}^{(2)}$. График функции (1.3.13) приведен на рис. 18 работы [9].

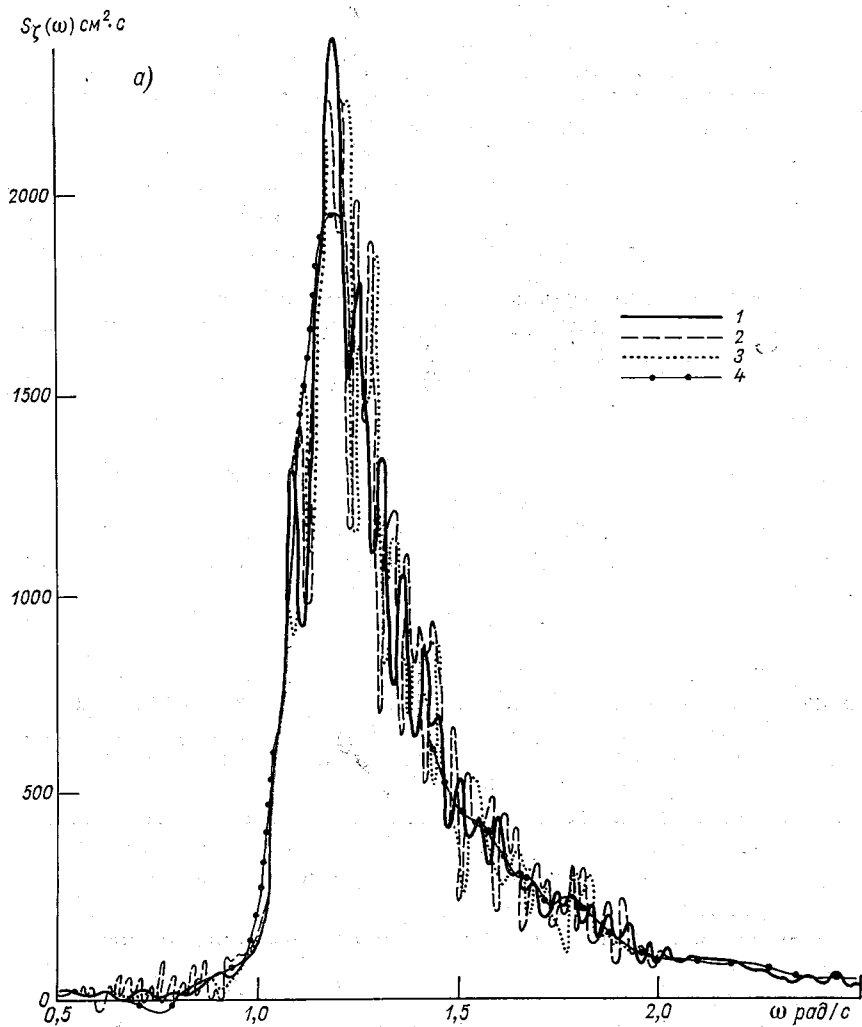
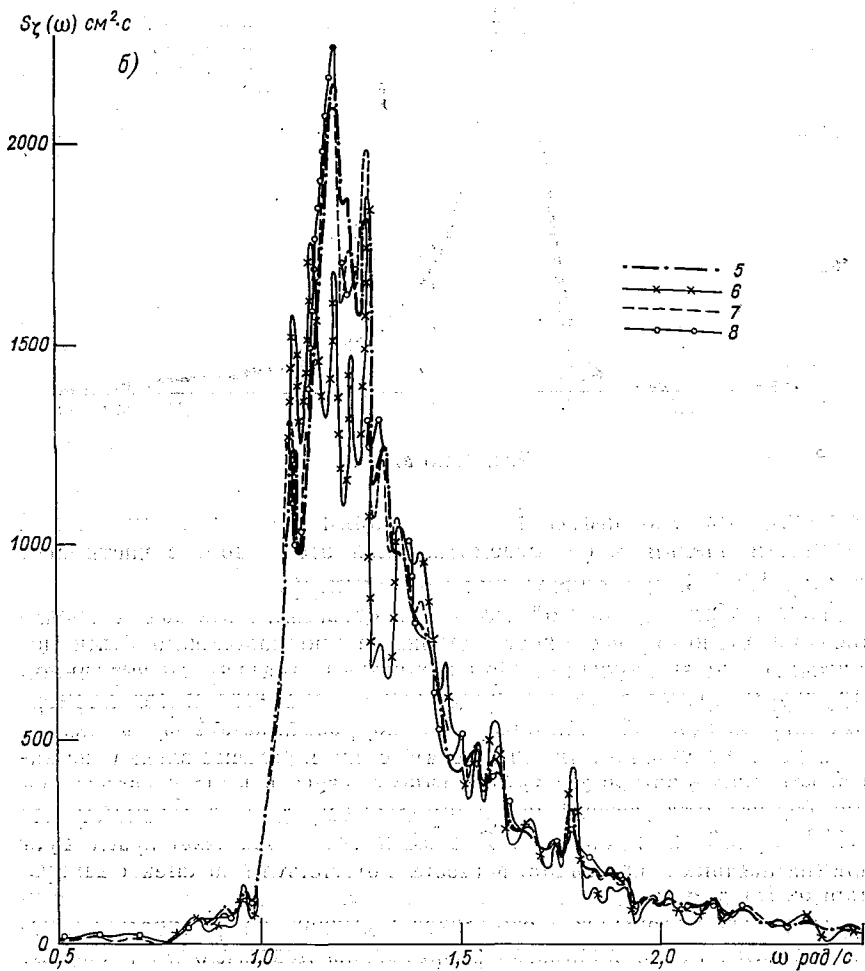


Рис. 1.3.5. Оценки спектральной плотности, вычисленные по коррелограмме; $\tau_{\max} = 148$ с; 2 — $\tau_{\max} = 242$ с; 3 — $\tau_{\max} = 199$ с; 4 — $\tau_{\max} = 40$ с); (1.3.25), 7 — (1.3.24), 8 — (1.3.24)); σ — усеченной при $\tau_{\max} = 40$ с



a — усеченной при различных сдвигах и весовой функции (1.3.25) (1 — b — усеченной при $\tau_{\max} = 380$ с и различных λ ($5 \rightarrow (1.3.23)$, $6 \rightarrow$ и различных λ (τ): $9 \rightarrow (1.3.23)$, $10 \rightarrow (1.3.25)$, $11 \rightarrow (1.3.24)$).

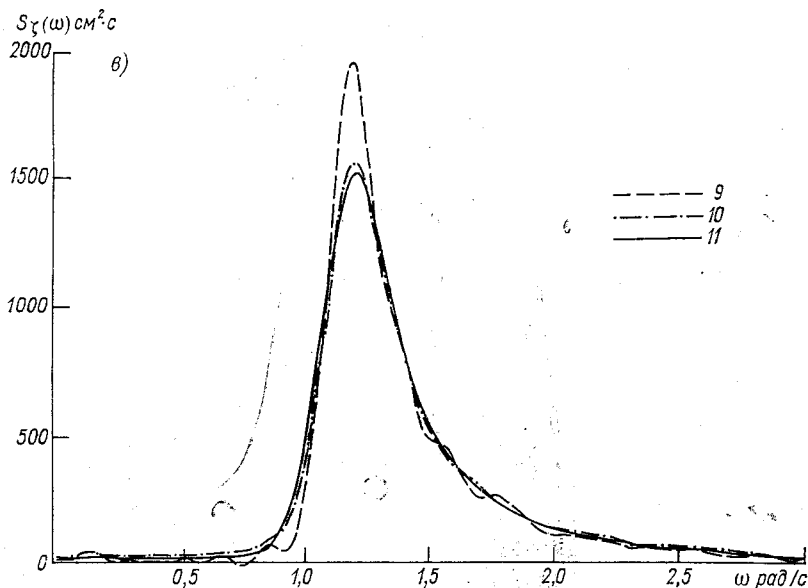


Рис. 1.3.5 б.

усечения коррелограммы и сглаживании оценок спектральной плотности оценки $S_z^*(\omega)$ стремятся (как это видно, в частности, из рис. 1.3.5 б, в) к одновершинному спектру.

Таким образом, пока объектом исследования являлась корреляционная функция, все ранее сделанные предположения были достаточны для ее изучения. При переходе к анализу спектральной структуры процесса весьма существенное значение имеет априорная информация об истинном виде корреляционной функции.

Строго рассуждая, по внешнему виду корреляционных функций ветровое волнение и зыбь можно отнести к классу периодически (точнее циклически) коррелированных, т. е. нестационарных [118] случайных процессов. В этом классе процессов существует принципиальная возможность (через двухчастотную спектральную плотность) для изучения волнения с учетом его групповой структуры, однако методы статистического оценивания вероятностных характеристик таких процессов разработаны недостаточно и еще во многом дискуссионны [39, 89, 128]. С позиций стационарных случайных процессов, необходимо разделять изучать спектральную структуру волн (по записи волн и по коррелограмме без учета биений) и групп волн (по огибающей волн). Именно такой путь анализа, с вытекающими отсюда методическими рекомендациями, и принят в дальнейшем.

Оценку $\tilde{S}_z^*(\omega)$ спектральной плотности $S_z(\omega)$ стационарного эргодического случайного процесса $\xi(t)$ можно записать в виде

[125, 170]

$$\tilde{S}_{\xi}^*(\omega) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\tau_{\max}} \lambda(\tau) K_{\xi}^*(\tau) \cos \omega \tau d\tau \quad (1.3.15)$$

или [208]

$$\hat{S}_{\xi}^*(\omega) =$$

$$= \int_0^{\infty} \Phi(\omega_1) S_{\xi}^*(\omega - \omega_1) d\omega_1, \quad (1.3.16)$$

где

$$S_{\xi}^*(\omega) = \frac{1}{2\pi T} \left| \int_0^T \xi^0(t) \times \exp(-i\omega t) dt \right|^2, \quad (1.3.17)$$

($\lambda(\tau)$ и $\Phi(\omega)$ — весовая и сглаживающая функции, связанные между собой преобразованием Фурье).

В работах [9, 197] показано, что оба определения оценки $S_{\xi}^*(\omega)$ эквивалентны и приводят к близким (с учетом выборочной изменчивости) результатам. В качестве примера, подтверждающего эти выводы, на рис. 1.3.6 приведены результаты оценивания спектра ветрового волнения по двум указанным выше методам.

Обе оценки $\tilde{S}_{\xi}^*(\omega)$ являются случайными функциями, близость которых к $S_{\xi}(\omega)$ можно установить, лишь зная математическое

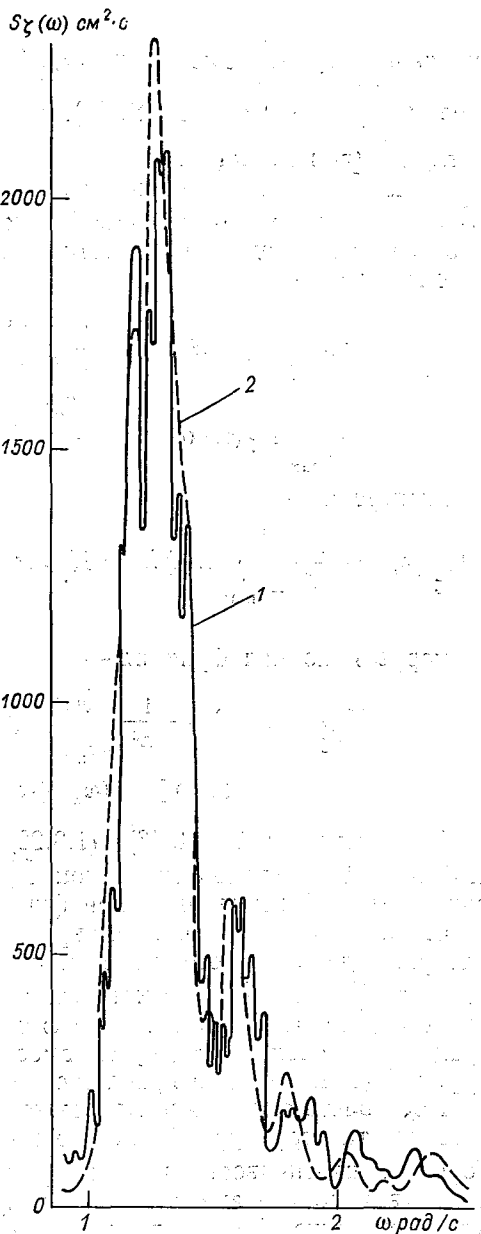


Рис. 1.3.6. Оценки спектральной плотности ветрового волнения (запись № 42 из табл. 3.1.2), вычисленные по 18-минутной реализации

1 — по корреляционному методу (1.3.9) (программа РТМ из [130]; 2 — по быстрому преобразованию Фурье (1.3.10), (1.3.11) ординат реализации (программа по алгоритму [117])

ожидание $m_{S_{\zeta}^*}(\omega)$, дисперсию $D_{S_{\zeta}^*}(\omega)$ и корреляционную функцию $K_{S_{\zeta}^*}(\omega_1, \omega_2)$ оценок $\tilde{S}_{\zeta}^*(\omega)$. Эти характеристики зависят от $T, \tau_{\max}, \lambda(\tau)$ или $\Phi(\omega)$.

В дальнейшем, при анализе записей волнения в качестве оценки $\tilde{S}_{\zeta}^*(\omega)$ выбрано выражение (1.3.15); основные свойства этой оценки определяются следующими соотношениями * [71, 118, 119]:

смещение —

$$\varepsilon_{S_{\zeta}^*}(\omega) \equiv m_{S_{\zeta}^*}(\omega) - S_{\zeta}(\omega) = \frac{1}{\pi} \left\{ \int_0^{\tau_{\max}} [\lambda(\tau) - 1] K_{\zeta}(\tau) \cos \omega \tau d\tau - \right. \\ \left. - \int_{\tau_{\max}}^{\infty} K_{\zeta}(\tau) \cos \omega \tau d\tau + \int_0^{\tau_{\max}} \lambda(\tau) \varepsilon_{K_{\zeta}^*}(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right\}; \quad (1.3.18)$$

дисперсия —

$$D_{S_{\zeta}^*}(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\tau_{\max}}^{\tau_{\max}} \lambda(\tau) \lambda(\tau_1) K_{K_{\zeta}^*}(\tau, \tau_1) \exp[-i\omega(\tau + \tau_1)] d\tau d\tau_1; \quad (1.3.19)$$

корреляционная функция —

$$K_{S_{\zeta}^*}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\tau_{\max}}^{\tau_{\max}} \lambda(\tau) \lambda(\tau_1) K_{K_{\zeta}^*}(\tau, \tau_1) \times \\ \times \exp[-i(\omega_1 \tau + \omega_2 \tau_1)] d\tau d\tau_1. \quad (1.3.20)$$

Из соотношений (1.3.18)—(1.3.20) видно, что закономерности выборочной изменчивости оценок $\tilde{S}_{\zeta}^*(\omega)$ существенно зависят от вида истинной корреляционной функции $K_{\zeta}(\tau)$.

Сложность выполнения эмпирического спектрального анализа натуральных данных состоит в том, что необходимо по результатам расчета $K_{\zeta}^*(\tau)$ и $\tilde{S}_{\zeta}^*(\omega)$, в которых закономерные изменения вероятностных характеристик по τ и ω затухиваются случайными флуктуациями оценок, найти путем выбора оптимальных значений $T, \tau_{\max}$ и $\lambda(\tau)$ наилучшее приближение к $S_{\zeta}(\omega)$.

Преодолеть эту сложность можно, лишь учитывая характерные особенности структуры волнового процесса и закономерности выборочной изменчивости оценок $K_{\zeta}^*(\tau)$ и $\tilde{S}_{\zeta}^*(\omega)$. Принимая, в соответствии со сделанными выше допущениями в качестве $K_{\zeta}(\tau)$ аппроксимацию (1.3.10), в работах [71, 102, 125, 126] получены выражения для $\varepsilon_{S_{\zeta}^*}(\omega)$, $D_{S_{\zeta}^*}(\omega)$, $K_{S_{\zeta}^*}(\omega_1, \omega_2)$ и на основе анализа этих выражений исследованы свойства оценок $S_{\zeta}^*(\omega)$. В частности,

* Применительно к оценке (1.3.16) — (1.3.17) аналогичные соотношения приведены в работе [24].

показано, что смещение $\varepsilon_{S_{\zeta}^*}(\omega)$ оценки $S_{\zeta}^*(\omega)$ существенно зависит от выбора $\lambda(\tau)$ и точки усечения $\tau_{\max}$ коррелограммы $K_{\zeta}^*(\tau)$. Уменьшение $\tau_{\max}$ и использование «сильных» весовых функций приводит к искаженной оценке спектра с заниженным максимумом, отрицательными значениями $S_{\zeta}^*(\omega)$; из-за коррелированности значений $S_{\zeta}^*(\omega_1)$ и $S_{\zeta}^*(\omega_2)$ на нисходящей ветви спектра появляются пики, величина и положение которых случайны.

Одной из задач эмпирического спектрального анализа волнограмм является различение смешанного волнения, для которого характерна (в большинстве случаев) многовершинная спектральная плотность. Типичный график корреляционной функции смешанного волнения, состоящего из ветрового волнения и одной системы зыби, приведен на рис. 1.3.7. Такие корреляционные функции можно представить в виде

$$K_{\zeta}(\tau) = \sum_i D_i \times \exp \times (-\alpha_i |\tau|) \cos \beta_i \tau, \quad (1.3.21)$$

где D_i , α_i , β_i — параметры аппроксимации коррелограмм волновых систем в поле смешанного волнения.

Путем модельных расчетов величин $K_{S_{\zeta}^*}(\omega_1, \omega_2)$ для процессов с корреляционными функциями (1.3.10) и (1.3.21) в работах [71, 102] показано, что при изменении $\tau_{\max}$ случайные пики на графиках $S_{\zeta}^*(\omega)$ меняют свое положение, неслучайные остаются неизменными. Отсюда, в частности, вытекает рекомендация о вычислении оценки спектра при нескольких точках усечения коррелограммы.

Анализ многочисленных записей волнения [9] и результатов модельных расчетов свойств оценок $K_{\zeta}^*(\tau)$ и $S_{\zeta}^*(\omega)$ позволяет сформулировать следующие рекомендации по вычислению достоверных значений оценок корреляционных функций и спектральных плотностей волнового процесса.

Оптимальная длина T реализации для расчета $K_{\zeta}^*(\tau)$ и $S_{\zeta}^*(\omega)$ установившегося волнения должна удовлетворять неравенству [125]

$$T > \frac{2\alpha^2 + \beta^2}{2\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} [1 + \exp(2\alpha\tau_T)] + 2\tau_T, \quad (1.3.22)$$

где τ_T — длина участка достоверности ансамбля коррелограмм

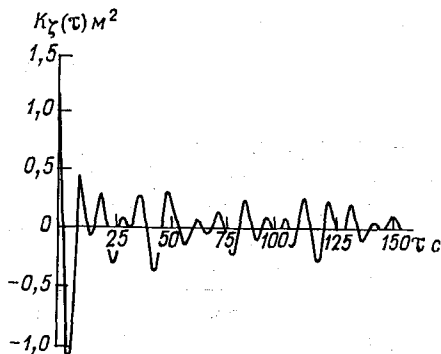


Рис. 1.3.7. Коррелограмма, вычисленная по записи смешанного волнения (запись № 6 из табл. 5.1.1)

осям абсцисс и ординат*. Оценка (1.4.1) получена как обобщение на двумерный случай выражения (1.3.2). Статистические свойства этой оценки по существу ничем не отличаются от рассмотренных в разделе 1.3 свойств оценки $K_{\xi}^*(\tau)$, однако выражения для смещения $\epsilon_{K_{\xi}^*}(\xi, \eta)$, дисперсии $D_{K_{\xi}^*}(\xi, \eta)$ и корреляционной функции $K_{K_{\xi}^*}(\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2)$ будут большей мерности.

Планшеты АФС имеют весьма ограниченные размеры, например, по данным работы [9]: $0,7 \times 0,5$; $0,5 \times 0,3$ или $0,35 \times 0,25$ км. При этом в генеральном направлении распространения волн на планшете будут зарегистрированы 5—10, а в направлении фронта волн — всего лишь 1,5—2 волны.

В таких условиях дисперсия оценок $K_{\xi}^*(\xi, \eta)$, вычисленных по индивидуальным планшетах, будет велика. В качестве примера в табл. 1.4.1 приведены значения оценок дисперсии D_{ξ}^* для трех групп планшетов, две (I и II) из которых характеризуют штормовое волнение, а третья (III) — слабое волнение. Из таблицы видно, что D_{ξ}^* , вычисленные по отдельным планшетах, существенно различаются, например, выборочный стандарт $\sqrt{D_{D_{\xi}^*}}$ распределения оценок D_{ξ}^* достигает почти 1/3 от среднего значения $m_{D_{\xi}^*}$. При осреднении нескольких значений оценок D_{ξ}^* , полученных при одинаковых условиях волнообразования (например, планшеты I и II групп в табл. 1.4.1), разброс осредненных значений существенно уменьшается. Например, в табл. 1.4.1 величины $m_{D_{\xi}^*}$ для первой и второй групп (1,69 и 1,70 м²) отличаются всего лишь на 0,01 м², в то время как исходные значения D_{ξ}^* (1,03 и 2,81 м²) отличались почти на 1,8 м².

Исследование свойств ансамбля сечений $K_{\xi}^*(\xi, \eta)$, выполненное в работе [9], показало, что с увеличением числа осредняемых оценок расширяется область (ξ, η) , в пределах которой оценки $K_{\xi}^*(\xi, \eta)$ могут считаться достоверными**. Оценка спектральной плотности $\tilde{S}_{\xi}^*(k_x, k_y)$ определяется [126] как двойное преобразование Фурье с весовой функцией $\lambda(\xi, \eta)$ выборочной корреляционной поверхности (1.4.1)

* Обычно применяемое [130, 180] центрирование $\xi(x, y)$ относительно плоскости $m_{\xi}(x, y) = ax + by + c$, параметры (a, b, c) которой находятся путем минимизации отклонений $\xi(x, y)$ от $m_{\xi}(x, y)$, обусловлено особенностями горизонтирования планшетов, принятого при их стереофотограмметрической обработке.

** По способу вычисления $K_{\xi}^*(\xi, \eta)$ область их достоверности (независимо от количества осредненных величин) не может превысить размеры исходного планшета.

Таблица 1.4.1

Значение оценок дисперсии D_{ξ}^* волновых колебаний, по данным АФС волн

Группы планшетов	D_{ξ}^* м ² по отдельным планшетам	$m_{D_{\xi}^*}$	Выборочная дисперсия $D_{D_{\xi}^*}^*$ и стандарт $\sqrt{D_{D_{\xi}^*}^*}$ оценок D_{ξ}^*	
			$D_{D_{\xi}^*}^*$	$\sqrt{D_{D_{\xi}^*}^*}$
I	1,62, 2,81, 1,87, 1,57, 1,65, 1,03, 1,37, 2,08	1,69	0,29	0,53
II	1,46, 1,65, 1,82, 1,89, 1,47, 1,96, 1,72, 1,53, 1,23, 1,99, 1,49, 2,14	1,70	0,16	0,60
III	0,163, 0,136, 0,151, 0,181, 0,169, 0,175, 0,187	0,17	0,0003	0,017

$$\tilde{S}_{\xi}^*(k_x, k_y) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\xi_{\max}} \int_{-\eta_{\max}}^{\eta_{\max}} \lambda(\xi, \eta) K_{\xi}^*(\xi, \eta) \cos(k_x \xi + k_y \eta) d\xi d\eta, \quad (1.4.2)$$

где $\xi_{\max}$, $\eta_{\max}$ — точки усечения функции $K_{\xi}^*(\xi, \eta)$ по осям абсцисс и ординат. Оценка (1.4.2) получена как обобщение на двумерный случай выражения (1.3.15).

Одной из основных задач эмпирического спектрального анализа планшетов АФС является вычисление оценки $\tilde{S}_{\xi}^*(u, v)$ с наименьшими величинами смещения $\varepsilon_{S_{\xi}^*}(k_x, k_y)$ и дисперсии $D_{S_{\xi}^*}(k_x, k_y)$.

Учитывая ограниченные размеры X и Y планшета, уменьшение значений $\varepsilon_{S_{\xi}^*}(k_x, k_y)$ достигается выбором [9]

$$\xi_{\max} > \frac{1}{2} X, \quad \eta_{\max} \approx Y.$$

Уменьшение дисперсии $D_{S_{\xi}^*}(k_x, k_y)$ достигается главным образом путем осреднения значений $S_{\xi}^*(k_x, k_y)$, вычисленных по отдельным планшетам, и частично за счет введения в анализ весовой функции $\lambda(\xi, \eta)$. Обычно функцию $\lambda(\xi, \eta)$ задают в виде произведения весовых функций Хэмминга [180]:

$$\lambda(\xi, \eta) = \left(0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi \xi}{\xi_{\max}}\right) \left(0,54 + 0,46 \cos \frac{\pi \eta}{\eta_{\max}}\right). \quad (1.4.3)$$

Функция (1.4.3) не сильно увеличивает $\varepsilon_{S_{\xi}^*}(k_x, k_y)$ и в то же время уменьшает влияние на $\tilde{S}_{\xi}^*(k_x, k_y)$ выборочной изменчивости $K_{\xi}^*(\xi, \eta)$ при ξ и η , близких к $\xi_{\max}$ и $\eta_{\max}$.

Наиболее часто [130, 180] расчет значений $S_{\xi}^*(k_x^{(\lambda)}, k_y^{(\mu)})$ проводится при

$$k_x^{(\lambda)} = \lambda \Delta k_x, \quad \Delta k_x = \frac{\pi}{\xi_{\max}}, \quad \lambda = 0, 1, \dots, \\ k_y^{(\mu)} = \mu \Delta k_y, \quad \Delta k_y = \frac{\pi}{\eta_{\max}}, \quad \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.4.4)$$

Поскольку $\xi_{\max}$, $\eta_{\max}$ относительно малы, то значения $S_{\xi}^*(k_x^{(\lambda)}, k_y^{(\mu)})$ получаются вычисленными на довольно редкой сетке. Для облегчения последующего анализа $S_{\xi}^*(k_x, k_y)$ необходимо сгустить сетчатую область $(k_x^{(\lambda)}, k_y^{(\mu)})$, например, путем замены целочисленных значений λ и μ в (1.4.4) дробными.

Как уже было отмечено в разделе 1.1, наряду с $S_{\xi}(k_x, k_y)$ для изучения пространственных свойств волнового поля используется (см. главу 4) спектральная плотность $S_{\xi}(k, \theta)$. Оценка $\tilde{S}_{\xi}^*(k, \theta)$ этой вероятностной характеристики имеет вид

$$\tilde{S}_{\xi}^*(k, \theta) = \frac{1}{2\pi^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r_{\max}(\varphi_1)} \lambda(r, \varphi_1) K_{\xi}^*(r, \varphi_1) \cos[rk \cos(\theta - \varphi_1)] \times \\ \times r dr d\varphi_1. \quad (1.4.5)$$

Оценка (1.4.5) получена из (1.4.2) путем перехода от декартовых систем координат (ξ, η) , (k_x, k_y) к полярным (r, φ_1) , (k, θ) . При таком преобразовании параметры $\xi_{\max}$ и $\eta_{\max}$ заменяются функцией $r_{\max}(\varphi_1)$.

Выведем формулу численного интегрирования для выражения вида (1.4.5). Пусть

$$I \equiv \int \int f(r, \varphi_1) r dr d\varphi_1 \quad (1.4.6)$$

и при каждом фиксированном φ_1 функция $f(r, \varphi_1)$ задана своими значениями $f_i = f(r_i)$ ($i = 1, 2, \dots$). Аппроксимируем $f(r, \varphi_1)$ на промежутке (r_i, r_{i+1}) прямой линией, проходящей при $r = r_i$ и $r = r_{i+1}$ через точки f_i и f_{i+1} , т. е.

$$f - f_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{r_{i+1} - r_i} (r - r_i) \quad (1.4.7)$$

или

$$\hat{f} = a_i (r - r_i) + f_i,$$

где

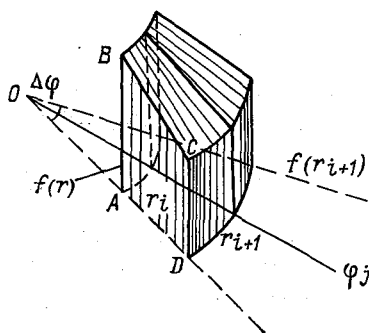
$$a_i = \frac{f_{i+1} - f_i}{r_{i+1} - r_i}.$$

Величина I в (1.4.6) может быть интерпретирована геометрически как объем тела, имеющего высоту $f(r, \varphi_i)$ и элемент площади $rdrd\varphi_i$. За приближенное значение I примем сумму элементарных объемов I_{ij} фигур, образованных вращением трапеции $ABCD$ (рис. 1.4.1) на угол $d\varphi_1$. Учитывая аппроксимацию (1.4.7), вычислим

$$I_{ij} = \int_{\varphi_j}^{\varphi_{j+1}} d\varphi_1 \int_{r_i}^{r_{i+1}} [a_i(r-r_i) - f_i] r dr = \left[\frac{a_i}{3} (r_{i+1}^3 - r_i^3) + \right. \\ \left. + \frac{a_i r_i + f_i}{2} (r_{i+1}^2 - r_i^2) \right] (\varphi_{j+1} - \varphi_j). \quad (1.4.8)$$

В большинстве случаев используются равноотстоящие значения $r_i = i\delta r$, $\varphi_j = j\delta\varphi$. Тогда формула (1.4.8) будет иметь вид

$$I_{ij} = \left\{ \frac{(f_{i+1} - f_i)}{3} (3i^2 + 3i + 1) + \right. \\ \left. + \frac{(f_{i+1} - f_i) i + f_i}{2} \times \right. \\ \left. \times (2i + 1) \right\} (\delta r)^2 \delta\varphi = \\ = \frac{(\delta r)^2 \delta\varphi}{6} [f_{i+1} (12i^2 + 9i + 5) - \\ - f_i (12i^2 + 3i - 1)]. \quad (1.4.9)$$



В рассматриваемом случае

$$f(r_i, \varphi_j) \equiv \lambda(r_i, \varphi_j) \times \\ \times K_{\xi}^*(r_i, \varphi_j) \cos[r_i k \cos(\theta - \varphi_j)]$$

и окончательно формула численного интегрирования выражения (1.4.5) примет вид

$$\tilde{S}_{\xi}^*(k, \theta) = \frac{(\delta r)^2 \delta\varphi}{12\pi^2} \sum_{i=-l}^l \sum_{j=0}^{m_j} \{f_{i+1}, d_i^{(1)} - f_i, d_i^{(2)}\} \quad (1.4.10)$$

при $d_i^{(1)} = 12i^2 + 9i + 5$, $d_i^{(2)} = 12i^2 + 3i - 1$.

Подробные методические рекомендации по вычислению оценок $K_{\xi}^*(\xi, \eta)$ и $\tilde{S}_{\xi}^*(k, \theta)$ приведены в работе [130]. Значения $K_{\xi}^*(r_i, \varphi_j)$ удобно вычислять по значениям $K_{\xi}^*(\xi_i, \eta_j)$ по интерполяционной схеме при $\xi = r \cos \varphi$, $\eta = r \sin \varphi$. Для уменьшения смещения $\varepsilon_{S_{\xi}^*}(k, \theta)$ оценок $\tilde{S}_{\xi}^*(k, \theta)$ в ряде случаев целесообразно

экстраполировать значения $K_{\xi}^*(r_i, \varphi_j)$ за пределы области $r_{\max}(\varphi)$.

Вследствие того что оценки $\tilde{S}_{\xi}^*(k, \theta)$, вычисленные по индивидуальным планшетам, обладают значительной выборочной измен-

чивостью (см. рис. 5.7, 5.8 работы [9]), при расчете различных числовых характеристик по $\tilde{S}_\zeta^*(k, \theta)$ полученные результаты необходимо усреднять (как это, например, сделано в главе 4).

1.5. Спектральный анализ синхронных записей возвышений и пространственных производных волновой поверхности в фиксированной точке

Для получения данных, необходимых для расчета двумерного спектра $S_\zeta(\omega, \theta)$ волн, в открытом море наряду с аэростереофото-съемкой используются специальные буи [78, 177, 264], позволяющие синхронно измерять возвышение $\zeta(t)$ и пространственные производные

$$\zeta_{x^p y^q}(t) = \frac{\partial^{p+q} \zeta(x, y, t)}{\partial x^p \partial y^q}.$$

По данным таких измерений можно вычислить коэффициенты a_n, b_n разложения двумерной спектральной плотности в ряд Фурье

$$S_\zeta(\omega, \theta) = \frac{1}{2} a_0(\omega) + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n(\omega) \cos n\theta + b_n(\omega) \sin n\theta]. \quad (1.5.1)$$

М. С. Лонге-Хиггинсом [247] и А. А. Свешниковым [135] предложен метод расчета коэффициентов частных сумм ряда Фурье (1.5.1). Согласно этому методу, коэффициенты

$$c_n = a_n - ib_n \quad (1.5.2)$$

определяются через частотные авто- (при $r = j$) или взаимные (при $r \neq j$) спектральные плотности $S_{\zeta_{x^p y^q} \zeta_{x^r y^j}}(\omega)$

возвышений (при $p = q = 0$) и пространственных производных (при $p + q > 0$) волновой поверхности в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, т. е.

$$c_n = c_n \left\{ S_{\zeta_{x^p y^q} \zeta_{x^r y^j}}(\omega) \right\}. \quad (1.5.3)$$

Конкретный вид соотношений (1.5.3) для a_n, b_n при $n = 0, 1, 2, 3, 4$ приведен в табл. 1.5.1, а для произвольного n — в работе [148]. Из таблицы видно, что по данным измерений возвышений $\zeta(t)$ и пространственных производных $\zeta_x(t), \zeta_y(t)$ первого порядка можно получить через спектральные плотности $S_\zeta(\omega), S_{\zeta_x}(\omega), S_{\zeta_y}(\omega), S_{\zeta_x \zeta_x}(\omega), S_{\zeta_x \zeta_y}(\omega), S_{\zeta_y \zeta_y}(\omega)$ пять коэффициентов a_0, a_1, a_2, b_1, b_2 разложения (1.5.1). При наличии, кроме перечисленных, еще и данных измерений пространственных производных $\zeta_{x^2}(t), \zeta_{y^2}(t), \zeta_{x,y}(t)$ второго порядка можно вычислить с использованием спектров $S_{\zeta_{x^2} \zeta_{x^2}}(\omega), S_{\zeta_{x^2} \zeta_{y^2}}(\omega), S_{\zeta_{x^2} \zeta_{x,y}}(\omega), S_{\zeta_{x^2} \zeta_{y^2}}(\omega)$ все девять коэффициентов a_n, b_n .

Таблица 1.5.1

Коэффициенты $a_n(\omega)$, $b_n(\omega)$ разложения (1.5.1) двумерной спектральной плотности $S_\xi(\omega, \theta)$ в ряд Фурье при различных n^* (по работе [148])

a_n, b_n	Вычислительная формула по данным ξ, ξ_x, ξ_y	Вычислительная формула по данным $\xi, \xi_{x^p y^q}, p=0, 1, 2; q=0, 1, 2$
$a_0(\omega)$	$\frac{1}{\pi} S_\xi(\omega);$ $\frac{1}{\pi k^2} [S_{\xi_x}(\omega) + S_{\xi_y}(\omega)]$	$\frac{1}{\pi k^2} [C_{\xi \xi_{x^2}}(\omega) + C_{\xi \xi_{y^2}}(\omega)]$
$a_1(\omega)$	$\frac{1}{\pi k} Q_{\xi \xi_x}(\omega)$	$\frac{1}{\pi k^3} [Q_{\xi_{x^2} \xi_x}(\omega) + Q_{\xi_y \xi_y}(\omega)]$
$b_1(\omega)$	$\frac{1}{\pi k} Q_{\xi \xi_y}(\omega)$	$\frac{1}{\pi k^3} [Q_{\xi_{k^2} \xi_y}(\omega) + Q_{\xi_y \xi_y}(\omega)]$
$a_2(\omega)$	$\frac{1}{\pi k^2} [S_{\xi_x}(\omega) - S_{\xi_y}(\omega)]$	$\frac{1}{\pi k^2} [C_{\xi \xi_{x^2}}(\omega) - C_{\xi \xi_{y^2}}(\omega)]$
$b_2(\omega)$	$\frac{2}{\pi k^2} C_{\xi_x \xi_y}(\omega)$	$\frac{2}{\pi k^4} [C_{\xi_{x^2} \xi_{xy}}(\omega) + C_{\xi_{y^2} \xi_{xy}}(\omega)]$
$a_3(\omega)$		$\frac{2}{\pi k^3} [3Q_{\xi_x \xi_{y^2}}(\omega) - Q_{\xi_x \xi_{x^2}}(\omega)]$
$b_3(\omega)$		$\frac{1}{\pi k^3} [Q_{\xi_y \xi_{y^2}}(\omega) - 3Q_{\xi_y \xi_{x^2}}(\omega)]$
$a_4(\omega)$		$\frac{1}{\pi k^4} [S_{\xi_{x^2}}(\omega) - 6C_{\xi_{x^2} \xi_{y^2}}(\omega) + S_{\xi_{y^2}}(\omega)]$
$b_4(\omega)$		$\frac{4}{\pi k^4} [C_{\xi_{x^2} \xi_{xy}}(\omega) - C_{\xi_{y^2} \xi_{xy}}(\omega)]$

* В таблицу включены соотношения, зависящие от пространственных производных не выше второго порядка.

Согласно табл. 1.5.1, коэффициент a_0 можно вычислить тремя способами — по $S_\xi(\omega)$, $S_{\xi_x}(\omega)$ и $S_{\xi_y}(\omega)$, а также по $S_{\xi \xi_{x^2}}(\omega)$ и $S_{\xi \xi_{y^2}}(\omega)$; коэффициенты a_1, a_2, b_1, b_2 — двумя способами, a_3, a_4, b_3, b_4 — одним способом.

Вполне естественно, что при вычислении всех этих величин по записям $\xi(t)$ и $\xi_{x^p y^q}(t)$ ограниченной продолжительности, $t \in [0, T]$ вместо истинных авто- и взаимных спектральных плотностей $S(\omega)$ будут получены их статистические оценки $S^*(\omega)$, а через них оценки a_n^*, b_n^* и $S_\xi^*(\omega, \theta)$. Принципиально возможно, как это показано в следующем разделе, разработать методические

рекомендации по эмпирическому спектральному анализу этих данных путем подробного рассмотрения смещений $\varepsilon_{S_{\zeta_x p y q}}^*(\omega)$, $\varepsilon_{C_n}^*(\omega)$, $\varepsilon_{S_{\zeta}}^*(\omega, \theta)$ и корреляционных функций $K_{S_{\zeta_x p y q}}^*(\omega_1, \omega_2)$, $K_{C_n}^*(\omega_1, \omega_2)$,

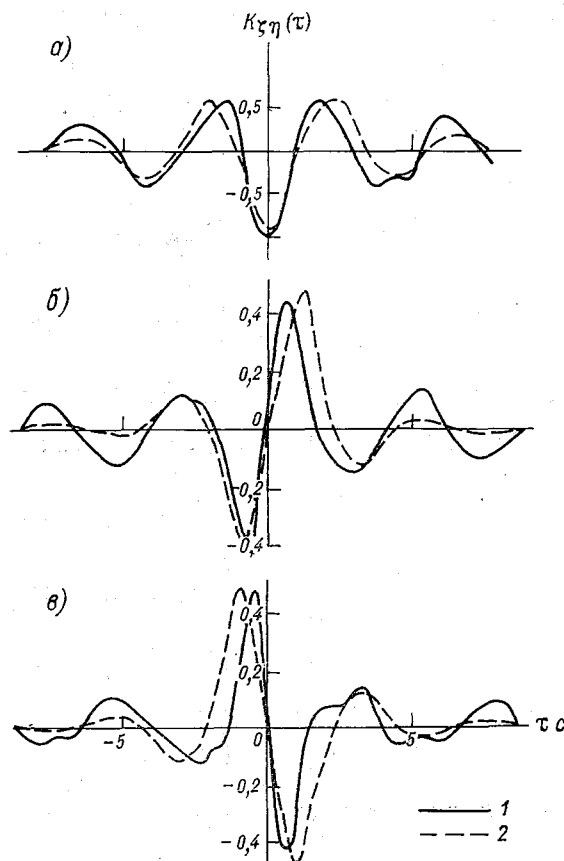


Рис. 1.5.1. Взаимные корреляционные функции возмущений пространственной производной взволнованной поверхности моря (1) и их аппроксимация (1.5.4) (2)

а) $K_{\zeta_x \zeta_y}(\tau)$; б) $K_{\zeta \zeta_x}(\tau)$; в) $K_{\zeta \zeta_y}(\tau)$

$K_{S_{\zeta}}^*(\omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2)$ всех вышеупомянутых оценок. В настоящее время разработка таких рекомендаций еще только начата [131]. В основу этих разработок положены для автокорреляционных функ-

ций процессов $\zeta_{x^p y^q}$ аппроксимативная зависимость (1.3.10), а для взаимных корреляционных функций аппроксимация

$$K_{\xi\eta}(\tau) = D_{\xi\eta} \exp \{ -\alpha_{\xi\eta} |\tau - \delta\tau_1| \} \cos \beta_{\xi\eta} (\tau - \delta\tau_2), \quad (1.5.4)$$

где $D_{\xi\eta}$, $\alpha_{\xi\eta}$, $\beta_{\xi\eta}$, $\delta\tau_1$, $\delta\tau_2$ — параметры.

На рис. 1.5.1 в качестве примера приведены аппроксимации взаимных корреляционных функций $K_{\xi_x \xi_y}(\tau)$, $K_{\xi_x \xi_x}(\tau)$, $K_{\xi_y \xi_y}(\tau)$ выражением (1.5.4).

Из рисунка видно, что (1.5.4) может использоваться для аппроксимации перечисленных корреляционных функций.

Расчеты, выполненные по алгоритмам из работы [101] применительно к процессам с корреляционными функциями (1.3.10) и (1.5.4), позволили сделать вывод [131], что при выборе параметров T , $\tau_{\max}$, $\lambda(\tau)$ в соответствии с принципами, сформулированными в разделе 1.3, удается получить достоверные оценки

$$\tilde{S}_{\xi}^*(\omega), \tilde{S}_{\xi_{x^p k_y q_k} \xi_{x^p j_y q_j}}^*(\omega), a_n^*(\omega), b_n^*(\omega), \tilde{S}_{\xi}^*(\omega, \theta).$$

1.6. Спектральный анализ синхронных записей волнения в нескольких точках

Для получения данных о двумерном спектре $S_{\xi}(\omega, \theta)$ волн в районах мелководий, в прибрежной зоне, а также с платформ и свайных оснований часто используются синхронные записи волн $\xi(x_i, y_i, t)$ в нескольких точках (x_i, y_i) волнового поля*.

Одной из самых простых является схема расположения датчиков треугольником; такая схема, в частности, была реализована В. Ф. Цыплухиным [155], С. Масселем [252], Ю. А. Трапезниковым [149] в прибрежной зоне и на полигоне в открытом море [209]. По схеме «треугольник» можно вычислить $\xi(t)$, $\xi_x(t)$, $\xi_y(t)$, а по их авто- и взаимным спектрам (согласно табл. 1.5.1) — первые пять коэффициентов разложения (1.5.1).

Для вычисления производных более высокого (чем первого) порядка необходимо использовать схемы с большим (чем 3) количеством датчиков.

Рассмотрим схему вычисления пространственных производных $\xi_{x^p y^q}$ по результатам синхронной регистрации волн девятью датчиками, расположенными (см. рис. 1.6.1) в центре, в углах и на сторонах прямоугольника.

Обозначим возвышения волновой поверхности $\xi(x_i, y_i)$ в точках T_i^0 , $i = 1, 2, 3, \dots, 9$ через ξ_i соответственно. Тогда прост-

* Обзор применяемых в настоящее время методов получения двумерного спектра волн по натурным данным приведен в работе [100].

пространственные производные в центральной точке примут следующий вид:

$$\zeta_x = \frac{x_1}{x_2(x_1 + x_2)} \zeta_2 + \frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2} \zeta_4 - \frac{x_2}{x_1(x_1 + x_2)} \zeta_5; \quad (1.6.1)$$

$$\zeta_y = \frac{y_1}{y_2(y_1 + y_2)} \zeta_1 - \frac{y_2}{y_1(y_1 + y_2)} \zeta_3 - \frac{y_2 - y_1}{y_1 y_2} \zeta_4; \quad (1.6.2)$$

$$\zeta_{x^2} = \frac{2}{x_2(x_1 + x_2)} \zeta_2 - \frac{2}{x_1 x_2} \zeta_4 + \frac{2}{x_1(x_1 + x_2)} \zeta_5; \quad (1.6.3)$$

$$\zeta_{y^2} = \frac{2}{y_2(y_1 + y_2)} \zeta_1 - \frac{2}{y_1(y_1 + y_2)} \zeta_3 - \frac{2}{y_1 y_2} \zeta_4; \quad (1.6.4)$$

$$\zeta_{xy} = \frac{1}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)} (-\zeta_6 + \zeta_7 - \zeta_8 + \zeta_9). \quad (1.6.5)$$

Обозначения в (1.6.1) — (1.6.5) для конечно-разностных значений пространственных производных первого ζ_x , ζ_y и второго ζ_{x^2} , ζ_{y^2} , ζ_{xy} порядка сохранены такими же, как и для соответствующих производных в разделе 1.5. Наименьшие погрешности аппроксимации производных будут при $x_2 = x_1$ и $y_2 = y_1$, т. е. когда точки T_1^0 , T_2^0 , T_3^0 , T_5^0 находятся на середине соответствующих сторон прямоугольника.* Величины (1.6.1) — (1.6.5) позволяют вычислить, пользуясь формулами из табл. 1.5.1, девять коэффициентов a_n , b_n ($n = 0, 1, \dots, 4$) разложения (1.5.1).

Выполненное Ю. А. Трапезниковым разложение в ряд Фурье наиболее распространенных (см. главу 4) аппроксимативных вы-

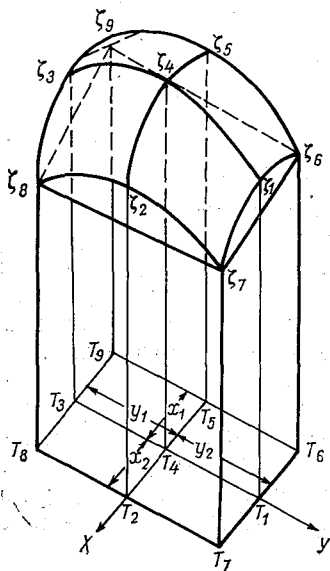


Рис. 1.6.1. Схема расположения девяти датчиков многострунных волнографов

ражений для $S_\zeta(\omega, \theta)$ показало, что использование девяти коэффициентов разложения гарантирует не менее чем 80%-ную точность приближения к $S_\zeta(\omega, \theta)$. Вычисления по указанной схеме весьма трудоемки и в ряде случаев для получения предварительных результатов можно ограничиться более простыми, но менее точными схемами, к ним относятся «треугольник» и пятиточечная (когда датчики расположены на пересечении и концах двух взаимно перпендикулярных отрезков). Следует отметить, что трехточечная схема не позволяет с одинаковой точностью вычислять уклоны

* Подробно вопросы выбора расстояний между волнографами и влияние ошибок измерений рассмотрены в работе [148].

в двух взаимно перпендикулярных плоскостях и это ухудшает точность вычисления a_n, b_n [148]. Для устранения отмеченного недостатка необходимо использовать указанную выше пятиточечную схему.

Для разработки единого алгоритма вычисления пространственных производных $\zeta_{x^p y^q}$ любого порядка $p + q$ по данным синхронных измерений волн в нескольких точках представим $\zeta_{x^p y^q}$ в виде линейной комбинации

$$\zeta_{x^p y^q} = \sum_{i=1}^n \alpha_{pq}^i \zeta_i \quad (1.6.6)$$

значений ζ_i функции $\zeta(x_i, y_i)$ с определенными коэффициентами $\alpha_{p,q}^i$, которые зависят от порядка (p и q) производной, расположения датчиков, а также от принятой схемы вычисления производной. Значения величин α_{pq}^i для трех-, пяти- и девятиточечных схем приведены в табл. 1.6.1. Обозначим через $S_{\zeta_r}(\omega)$ и $S_{\zeta_r \zeta_l}(\omega) = C_{\zeta_r \zeta_l}(\omega) - iQ_{\zeta_r \zeta_l}(\omega)$ авто- и взаимные спектральные плотности возвышений волнового поля в точках k и l . Тогда авто- (при $p_1 = p_2, q_1 = q_2$) и взаимные $S_{\zeta_{x^{p_1} y^{q_1}} \zeta_{x^{p_2} y^{q_2}}}(\omega)$ спектральные плотности пространственных производных (1.6.6) могут быть представлены в виде [148]

$$C_{\zeta_{x^{p_1} y^{q_1}} \zeta_{x^{p_2} y^{q_2}}}(\omega) = \sum_{r=0}^n \alpha_{p,q}^{(r)} \alpha_{p_2,q_2}^{(r)} S_{\zeta_r}(\omega) + \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{l=r+1}^n (\alpha_{p_1 q_1}^{(r)} \alpha_{p_2 q_2}^{(l)} + \alpha_{p_1 q_1}^{(l)} \alpha_{p_2 q_2}^{(r)}) C_{\zeta_r \zeta_l}(\omega); \quad (1.6.7)$$

$$Q_{\zeta_{x^{p_1} y^{q_1}} \zeta_{x^{p_2} y^{q_2}}}(\omega) = \sum_{r=1}^{n-1} \sum_{l=r+1}^n (\alpha_{p_1 q_1}^{(r)} \alpha_{p_2 q_2}^{(l)} - \alpha_{p_1 q_1}^{(l)} \alpha_{p_2 q_2}^{(r)}) Q_{\zeta_r \zeta_l}(\omega). \quad (1.6.8)$$

По соотношениям (1.5.1), (1.6.7), (1.6.8) с учетом табл. 1.5.1 и 1.6.1 можно вычислить по данным синхронной регистрации волнения в нескольких точках пространственный спектр $S_{\zeta}(\omega, \theta)$.

При вычислении $S_{\zeta_r}(\omega)$, $S_{\zeta_r \zeta_l}(\omega)$ по записям ζ_i ограниченной продолжительности $t \in [0, T]$ вместо истинных авто- и взаимных спектральных плотностей будут получены их статистические оценки $S_{\zeta_r}^*(\omega)$ и $S_{\zeta_r \zeta_l}^*(\omega)$. Учитывая соотношения (1.6.7), (1.6.8) и соотношения табл. 1.5.1, оценки a_n^* , b_n^* коэффициентов разложения можно [131] представить в виде

$$\begin{pmatrix} a_n^*(\omega) \\ b_n^*(\omega) \end{pmatrix} = \sum_{r=1}^N \sum_{l=1}^N \begin{pmatrix} A_{rl}^{(n)} \\ B_{rl}^{(n)} \end{pmatrix} \hat{S}_{\zeta_r \zeta_l}^*(\omega), \quad (1.6.9)$$

где $A_{r,l}^{(n)}$, $B_{r,l}^{(n)}$ — числовые коэффициенты, зависящие от $\alpha_{pq}^{(i)}$ (из табл. 1.6.1).

Таблица 1.6.1

Таблица коэффициентов $\alpha'_{p,q}$ при представлении производных процесса в виде (1.5.27) для 3, 5, 9-точечных схем

$\xi_{x^p y^q}$	N	r					Примечание
		1	2	3	4	5	
ξ	3	$\frac{y_1}{y_1 + y_2}$	$\frac{x_1 y_2}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}$	$\frac{x_2 y_2}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}$	—	—	$\alpha_1^{(3)} = \alpha_1^{(9)}$; $\alpha_2^{(3)} = \alpha_8^{(9)}$;
	5; 9	0					$\alpha_3^{(3)} = \alpha_9^{(9)}$; $\alpha_6^{(9)} = \alpha_7^{(9)} =$ $= \alpha_8^{(9)} = \alpha_9^{(9)} = 0$
ξ_x	3	0	$\frac{1}{x_1 + x_2}$	$\frac{-1}{x_1 + x_2}$	—	—	
	5; 9	0	$\frac{x_1}{x_2(x_1 + x_2)}$	0	$\frac{x_2 - x_1}{x_1 x_2}$	$\frac{-x_2}{x_1(x_1 + x_2)}$	$\alpha_6^{(9)} = \alpha_7^{(9)} =$ $= \alpha_8^{(9)} = \alpha_9^{(9)} = 0$
ξ_y	3	$\frac{1}{y_1 + y_2}$	$\frac{-x_1}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}$	$\frac{-x_2}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}$	—	—	

ζ_y	5, 9	$\frac{y_1}{y_2(y_1 + y_2)}$	0	$\frac{-y_2}{y_1(y_1 + y_2)}$	$\frac{y_2 - y_1}{y_1 y_2}$	0	$\alpha_6^{(9)} = \alpha_7^{(9)} =$ $= \alpha_8^{(9)} = \alpha_9^{(9)} = 0$
ζ_{x^2}	5, 9	0	$\frac{2}{x_2(x_1 + x_2)}$	0	$\frac{-2}{x_1 x_2}$	$\frac{2}{x_1(x_1 + x_2)}$	$\alpha_6^{(9)} = \alpha_7^{(9)} =$ $= \alpha_8^{(9)} = \alpha_9^{(9)} = 0$
ζ_{y^2}	5, 9	$\frac{2}{y_2(y_1 + y_2)}$	0	$\frac{2}{y_1(y_1 + y_2)}$	$\frac{-2}{y_1 y_2}$	0	$\alpha_6^{(9)} = \alpha_7^{(9)} =$ $= \alpha_8^{(9)} = \alpha_9^{(9)} = 0$

$\zeta_{x^p y^q}$	N	r					Примечание
		5	6	7	8	9	
ζ_{xy}	9	0	$\frac{-1}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}$	$\frac{1}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}$	$\frac{-1}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}$	$\frac{1}{(x_1 + x_2)(y_1 + y_2)}$	$\alpha_1^{(9)} = \alpha_2^{(9)} =$ $= \alpha_3^{(9)} = \alpha_4^{(9)} = 0$

Пусть (как уже было показано в разделе 1.3) свойства оценки $S^*(\omega)$ характеризуют смещение $\varepsilon_{S^*}(\omega)$ и корреляционная функция $K_{S^*}(\omega_1, \omega_2)$. Пользуясь (1.6.9), можно найти величины смещения $\varepsilon_{a_n^*}(\omega)$, $\varepsilon_{b_n^*}(\omega)$ и корреляционных функций $K_{a_n^*}(\omega_1, \omega_2)$, $K_{b_n^*}(\omega_1, \omega_2)$ оценок a_n^* , b_n^* , а через соотношения (1.5.1) — величины $\varepsilon_{S_\xi^*}(\omega, \theta)$ и $K_{S_\xi^*}(\omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2)$ оценок $S_\xi^*(\omega, \theta)$.

В работе [147] показано, что

$$\varepsilon_{S_\xi^*}(\omega, \theta) = \sum_{m=0}^n \sum_{r=0}^N \sum_{l=0}^N \varepsilon_{S_{\xi_r \xi_l}^*}(\omega) [A_{rl}^{(m)} \cos m\theta + B_{rl}^{(m)} \sin m\theta]; \quad (1.6.10)$$

$$K_{S_\xi^*}(\omega_1, \omega_2, \theta_1, \theta_2) = \sum_{m_1 m_2 r_1 r_2 l_1 l_2} K_{S_{\xi_{r_1} \xi_{l_1}}^* S_{\xi_{r_2} \xi_{l_2}}^*}(\omega_1, \omega_2) \times \\ \times [A_{r_1 l_1}^{(m_1)} \cos m_1 \theta_1 + B_{r_1 l_1}^{(m_1)} \sin m_1 \theta_1] [A_{r_2 l_2}^{(m_2)} \cos m_2 \theta_2 + \\ + B_{r_2 l_2}^{(m_2)} \sin m_2 \theta_2]. \quad (1.6.11)$$

Из (1.6.10), (1.6.11) видно, что смещение оценки $S_\xi^*(\omega, \theta)$ определяется смещением оценок $S_{\xi_r \xi_l}(\omega)$ авто- (при $r = l = 0$) и взаимных (при $r \neq l$) спектров записей волн в точках r, l , а корреляционная функция (и, следовательно, дисперсия) оценок $S_\xi^*(\omega, \theta)$ зависит от корреляционной функции оценок $S_{\xi_r \xi_l}^*(\omega)$. Таким образом, улучшая свойства оценок $S_{\xi_r \xi_l}^*(\omega)$ за счет выбора оптимальных $T, \tau_{\max}, \lambda(\tau)$ — в соответствии с рекомендациями раздела 1.3, можно получить достоверную оценку $S_\xi^*(\omega, \theta)$ двумерного спектра волн при его расчете по данным многострунных волнографов.

1.7. Статистический анализ выборочной совокупности элементов волн

Волновой поверхности моря свойственны многообразие и изменчивость форм, вследствие которых отдельные волны и их элементы целесообразно рассматривать как случайные величины, характеризующиеся многомерным распределением вида (1.1.6). Технические средства, применяемые в настоящее время для измерения волнения, как правило*, не позволяют одновременно регистрировать все элементы волн. Кроме того, анализ многомерных распределений элементов волн встречает значительные практические трудно-

* Исключением являются измерения волн с помощью радиолокационных систем, позволяющих «следить» за распространением отдельных волн и их групп [50].

сти. В дальнейшем при анализе волновой информации рассматриваются двумерные $F(x, y)$ и одномерные — маргинальные $F(x)$, $F(y)$ и условные $F(x/y)$, $F(y/x)$ функции распределения элементов волн. В настоящем разделе все выводы относятся к одномерным распределениям вероятностей.

Рассмотрим, кроме того, моменты распределений — начальные ν_i и центральные μ_i i -го порядка, а также стандарт

$$\sigma = \sqrt{\mu_2} \quad (1.7.1)$$

и коэффициенты изменчивости (вариации) C_V , асимметрии C_A , эксцесса C_E , равные

$$C_V = \sigma/\nu_1; \quad C_A = \mu_3/\sigma^3; \quad C_E = (\mu_4/\sigma^4) - 3. \quad (1.7.2)$$

Вследствие ограниченности объемов выборочной совокупности, по которым считаются распределения элементов волн, мы имеем только оценки $F^*(x)$. Примем следующее определение [23]:

$$F^*(x) = n(x)/N, \quad (1.7.3)$$

где $n(x)$ — число элементов, обладающих признаком $P\{X \geq x\}$; N — объем выборки. При использовании выборок большого объема наиболее часто оценки (1.7.3) и их моменты вычисляются по данным, сгруппированным в последовательности непересекающихся промежутков равной длины Δx (интервалы Дирихле); в оценки моментов, кроме того, вводятся поправки на смещение и группировку [8]. При расчете распределений элементов волн Δx выбиралось в зависимости от интенсивности волнения: для высот 0,2—0,5 м (при $\bar{h} \geq 0,2$ м), периодов 0,5—1 с (при $\bar{\tau} \geq 2$ с), длин волн и гребней 5—10 м (при $\bar{\lambda} \geq 30$ м), крутиз $5 \cdot 10^{-4}$ — 10^{-3} (при $\bar{\delta} \sim 3 \cdot 10^{-3}$), показателя трехмерности 0,2—0,8 (при $\bar{\gamma} \sim 2,0$).

Для определения достоверности оценок (1.7.3) необходимо знать их закон распределения $F_{F^*(x)}(\eta)$, который может быть получен [38] путем учета вида асимптотического распределения $F(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$ и принятия гипотезы о том, что эмпирическое распределение $F^*(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$ спрямляется на функциональной сетке асимптотического. При этих допущениях [38]

$$F_{F^*(x)}(\eta) \equiv P\{F(x) < \eta\} = \int_D \dots \int \frac{\partial F(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n)}{\partial \hat{\theta}_1, \dots, \partial \hat{\theta}_n} \times \\ \times d\hat{\theta}_1 \dots d\hat{\theta}_n, \quad (1.7.4)$$

где область интегрирования D задается неравенством

$$F(x, \theta_1, \dots, \theta_n) < \eta,$$

$F(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_n)$ — закон распределения оценок θ_i^* параметров θ . Подынтегральное выражение в соотношении (1.7.4) через соответствующие моментные функции исследуемого процесса учитывает связность исходного временного ряда.

Для семейства распределений Вейбулла (1.7.17), которое, как показано в главе 5, аппроксимирует распределение элементов волн

на промежутке квазистационарности и участке квазигомогенности волнового процесса, выражение (1.7.4) приводится [38, 126] к виду

$$F_{F^*}(x)(\eta) = N \left\{ \frac{\frac{x}{\sigma_x} \left(\frac{A}{\ln \eta} \right)^{1/k} - m_x}{\sigma_x} \right\}, \quad (1.7.5)$$

где $N(\cdot)$ — интеграл Лапласа; m_x и σ_x — параметры нормального распределения среднего значения элементов волн. Последовательность элементов волн на промежутке квазистационарности волнового процесса является связной и аппроксимируется экспоненциально-косинусной корреляционной функцией вида (1.3.10) с параметрами α и β [87]. Тогда σ_x в (1.7.5) равно [87]

$$\sigma_x = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{N}} \left[\frac{1 - \exp(-2\alpha)}{1 - 2 \exp(-\alpha) \cos \beta + \exp(-2\alpha)} \right]^{1/2}. \quad (1.7.6)$$

Выражение (1.7.6) достаточно хорошо [87] учитывает наличие корреляционной зависимости между элементами последовательности волн. В работе [87] показано, что для высот и длин волн, $\alpha = 0,64$, $\beta = 0,65$, для периодов $\beta = 1,1$, $\alpha = 0,75$. Доверительные интервалы, рассчитанные по (1.7.5) с учетом (1.7.6) и указанных значений α и β , приведены в работах [9, 10, 87].

Если в (1.7.4) подставить выражение для логарифмического нормального закона (1.7.20), который, как показано в главе 9, описывает режимные распределения элементов волн, то с учетом предположения о нормальном распределении оценок μ^* и σ^* функция (1.7.4) записывается в виде [25, 28]

$$F_{F^*}(x)(\eta) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\mu^*}\sigma_{\sigma^*}} \int \int \exp \left[\frac{\hat{\theta}_1 - \mu}{2\sigma_{\mu^*}^2} - \frac{\hat{\theta}_2 - \mu}{2\sigma_{\sigma^*}^2} \right]^2 d\hat{\theta}_1 d\hat{\theta}_2, \quad (1.7.7)$$

где σ_{μ^*} и σ_{σ^*} — стандарты распределения оценок μ^* и σ^* , зависящие от корреляционной функции (типичный пример коррелограммы приведен на рис. 1.7.1).

Расчеты по (1.7.5), (1.7.7) позволяют определить доверительный интервал ΔF для оценок $F^*(x)$. Для решения некоторых прикладных задач (например, для расчета межгодовой изменчивости режима ветров и волнения, см. главу 9) можно, как показано в работах [25, 28], с достаточной точностью (для заданной квантили x_{P_H} доверительной вероятности P_H) определять ΔF по простому соотношению *

$$\Delta F(x) = \left(\frac{x_{P_H}}{\sqrt{N}} \right) \sqrt{F(x)(1-F(x))}, \quad (1.7.8)$$

* Значения ΔF , вычисленные по (1.7.8) при различных N : 50, 100, 200, 300, 500 и доверительных вероятностях, равных 0,9 и 0,99, приведены в табл. 9 работы [9], значения x_{P_H} — в табл. 3 работы [8]. Формула (1.7.8) не справедлива при значениях F , близких к 0 и 1, и при малых N .

полученному [84] в предположении нормальности распределения P_n оценок $F^*(x)$. Поскольку наши исходные ряды являются связными, необходимо при расчетах по (1.7.8) уменьшить объем N исходной выборочной совокупности путем перехода (через интервал корреляции или средний спектральный период) к выборке, состоящей из независимых членов.

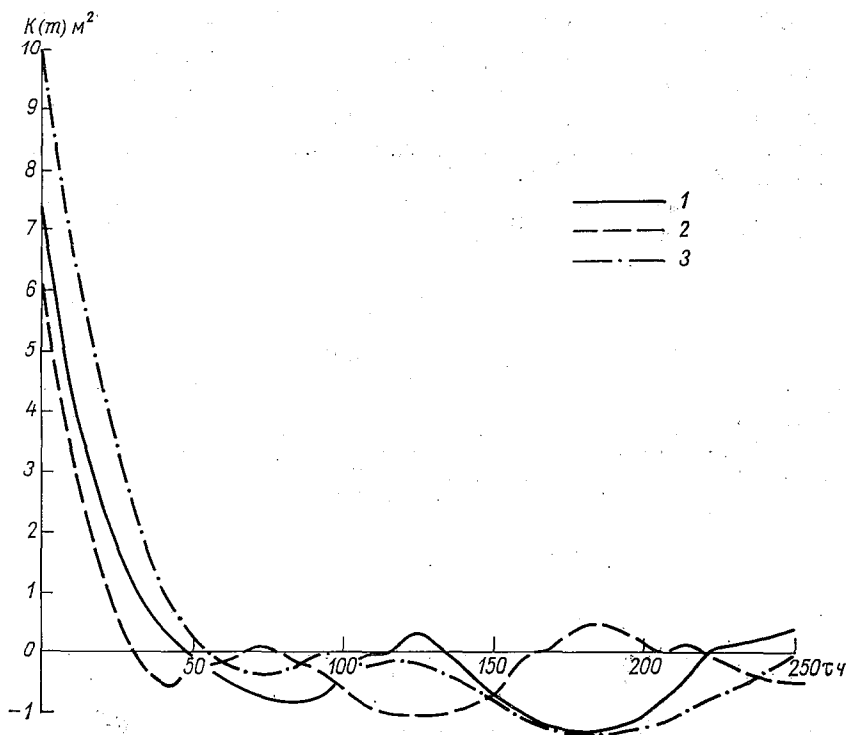


Рис. 1.7.1. Коррелограммы, вычисленные по последовательности элементов волн за длительные промежутки времени (преобладающие высоты волн на станциях погоды А (1), С (2), J (3))

Для определения достоверности оценок моментов v_i , μ_i и числовых характеристик (1.7.1), (1.7.2) распределения необходимо использовать соотношения, учитывающие коррелированность между элементами выборочной совокупности. В наиболее общем случае эти соотношения имеют довольно сложный вид. Например, дисперсия $D_{v_i^*}$ оценки начального момента i -того порядка определена в виде

$$D_{v_i^*} \equiv M \{v_i^*\}^2 - v_i^2, \quad (1.7.9)$$

где

$$M \{ (v_i^*)^2 \} = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n M \{ \zeta_k^i \zeta_j^i \}. \quad (1.7.10)$$

Таким образом, для вычисления $D_{v_i^*}$ необходимо знать, кроме v_i^2 , еще и $M \{ \zeta_k^i \zeta_j^i \}$ — корреляционную функцию i -того порядка. Для практических расчетов v_i^2 можно (учитывая поправку на смещение) заменить его оценкой $(v_i^*)^2$, однако вычисление значений $M \{ \zeta_k^i \zeta_j^i \}$ по анализируемой последовательности значений $\{ \zeta_i \}$ весьма трудоемко. Поэтому в большинстве случаев приходится ограничиваться различными предположениями, основными из которых являются допущения:

— независимости членов временного ряда, что приводит, например, выражение (1.7.9) к виду

$$D_{v_i^*} = \frac{v_{2i} - v_i^2}{N}; \quad (1.7.11)$$

— гауссовости распределения значений этого ряда, что позволяет заменить $M \{ \zeta_k^i \zeta_j^i \}$ суммой произведений корреляционных функций $K(m)$, $m = k-j$.

На основе последнего допущения в работе [38] вычислены значения σ_{σ^*} в (1.7.7) и получены выражения

$$\sigma_{\sigma^*} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_{\sigma_i^*}^2}, \quad (1.7.12)$$

$$\sigma_{\sigma_i^*} = \sqrt{\sqrt{\sigma^4 + \frac{1}{2} \frac{2\alpha_i^2 + \beta_i^2}{\alpha_i T (\alpha_i^2 + \beta_i^2)}} - \sigma^2}, \quad (1.7.13)$$

где α_i и β_i — параметры аппроксимации коррелограммы последовательности элементов волн выражением (1.3.21).

Средние значения $\bar{x}$ элементов волн, вычисленные по выборочной совокупности объема N , имеют дисперсию *

$$D_{\bar{x}} = \frac{2}{N} \sum_{m=0}^N \left(1 - \frac{m}{N} \right) K(m). \quad (1.7.14)$$

В качестве примера в табл. 1.7.1. приведены значения $D_{\bar{x}}/D_x$ для последовательности высот (при $\bar{h} = 1$ м) и периодов волн (при $\tau = 4,8$ с), вычисленные по формуле (1.7.11) при $i = 1$ (гипотеза независимости) и по формуле (1.7.14) при $K(m)$ вида (1.3.10) с ука-

* Выражение (1.7.14) аналогично (1.3.5) для оценок математического ожидания. Формула (1.7.6) получена из (1.7.14) через подстановку вместо $K(m)$ функции (1.3.10).

занными выше параметрами α и β . Из таблицы видно, что гипотеза независимости может быть принята лишь при достаточно большом количестве членов выборочной совокупности.

Таблица 1.7.1

Значения отношения $\frac{D_x^-}{D_x}$ для последовательности высот и периодов волн								
N	5	10	20	50	100	200	500	1000
Гипотеза независи- мости	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,005	0,002	0,001
Высоты волн	0,634	0,399	0,187	0,076	0,038	0,019	0,008	0,004
Периоды волн . . .	0,239	0,121	0,064	0,026	0,013	0,004	0,003	0,001

При анализе эмпирических функций распределения $F^*(x)$ одной из основных задач является нахождение теоретического закона, наилучшим образом описывающего $F^*(x)$. Такая процедура называется [138] проверкой гипотезы соответствия. Из множества методов проверки гипотезы соответствия нами выбран метод спрямленных диаграмм, применимый для последовательности зависимых случайных величин, а также для цензурированных выборок. Этот метод заключается в построении специальной функциональной сетки (спрямленной диаграммы), при нанесении на которую эмпирические распределения в случае согласия с теоретической моделью должны аппроксимироваться прямой линией.* Принципы построения вероятностных шкал следуют из теории порядковых статистик [8, 152, 153].

Рассмотрим этот метод применительно к конкретным распределениям. Функциональную сетку (спрямленная диаграмма) для распределения Вейбулла в виде

$$F(x) = \exp \left[- \left(\frac{x}{\beta} \right)^k \right] \quad (1.7.15)$$

строим, используя преобразование

$$\ln(-\ln F) = k \ln \left(\frac{x}{\beta} \right); \quad (1.7.16)$$

для распределения Вейбулла в виде

$$F(x) = \exp \left[- A \left(\frac{x}{x} \right)^k \right] \quad (1.7.17)$$

функциональную сетку строим, используя преобразование

$$\ln(-\ln F) = \ln A + k \ln \left(\frac{x}{x} \right). \quad (1.7.18)$$

* Использование математических методов для аппроксимации графического представления эмпирического распределения сопряжено с громоздкими вычислениями, как правило, не дающими существенного выигрыша по сравнению с принятым «на глаз» решением.

Здесь k , β — параметры формы и масштаба, $\beta = e^{-1}$, $A = \Gamma^k (1 + 1/k)$, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция; при $k < 0$ соотношения (1.7.15), (1.7.17) называются распределением Фреше, при $k = 2$ — Рэлея.

Для более детального анализа семейства (1.7.17) целесообразно преобразовать шкалу только переменной F , оставляя шкалу x линейной, т. е.

$$\frac{x}{A} = A^{1/k} \ln(-F)^{1/k}, \quad (1.7.19)$$

при этом константа A может не учитываться, так как в зависимости от желаемого размера графика вводится масштабный множитель*. Для построения спрямленной диаграммы логарифмически-нормального закона в виде [152, 153, 161]

$$F(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_x^\infty \xi^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln \xi - \mu)^2 \right] d\xi \quad (1.7.20)$$

или [33, 161]

$$F(x) = \frac{s}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty y^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2} \ln y^{-s} \right] dy, \quad (1.7.21)$$

где μ , σ — параметры распределений, $s = 1/\sigma$, $y = x/x_{0.5}$, $x_{0.5}$ — медиана, одну из шкал берут по значениям функции, обратной интегралу Лапласа, другую — по значениям логарифмов x .

Статистические оценки $F^*(x)$ распределения $F(x)$, нанесенные на спрямленную диаграмму, будут (в случае справедливости выдвинутой гипотезы соответствия) располагаться вдоль прямой линии. Отклонения от прямой считаются допустимыми, если они не выходят за доверительные интервалы испытуемого асимптотического закона.

После принятия гипотезы соответствия эмпирического распределения $F^*(x)$ асимптотическому семейству $F(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$ (для распределений элементов волн — это законы Вейбулла или логарифмически-нормальный) необходимо оценить его параметры θ , которые являются случайными величинами.

В табл. 1.7.2. приводятся соотношения между параметрами и числовыми характеристиками распределения Вейбулла и логарифмически-нормального.

Оценки параметров распределения обычно рекомендуют рассчитывать по методу наибольшего правдоподобия, так как дисперсия оценок будет наименьшей по сравнению с другими методами

* Таблицы для построения вероятностных сеток вида (1.7.19) приведены в работе [87].

Таблица 1.7.2

Соотношения для расчета числовых характеристик распределений Вейбулла и логарифмически-нормального через параметры этих распределений (по работам [139, 153, 161])

Числовые характеристики	Распределение Вейбулла	Логарифмически-нормальное распределение
Математическое ожидание ν_1	$\Gamma\left(\frac{1}{k} + 1\right)$	$e^{\mu + \sigma^2/2}$
Дисперсия D	$\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)$	$e^{2\mu + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1)$
Коэффициент изменчивости C_V	$\left\{ \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) / \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right] - 1 \right\}^{\frac{1}{2}}$	$(e^{\sigma^2} - 1)^{\frac{1}{2}}$
Коэффициент асимметрии C_A	$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{3}{k}\right) - 3\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) + 2\Gamma^3\left(1 + \frac{1}{k}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right]^{3/2}}$	$(e^{\sigma^2} - 1)^{\frac{1}{2}} (e^{\sigma^2} + 2)$

Числовые характеристики	Распределение Вейбулла	Логарифмически-нормальное распределение
Коэффициент C_E эксцесса	$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{4}{k}\right) - 4\Gamma\left(1 + \frac{3}{k}\right)\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right) + 6\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) \times}{\times \left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]^2 - 3\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]^4} \times$ $\frac{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]^2}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right]}$	$3 + (e^{\sigma^2} - 1)(e^{3\sigma^2} + 3e^{\sigma^2} + 6e^{\sigma^2} + 6)$
Квантиль x_P	$\frac{1}{\beta (\ln P)^{\frac{1}{k}}}$	$\frac{\mu + x_P \sigma}{e^{\frac{\mu + x_P \sigma}{\sigma}}}$
Медиана $x_{0.5}$	$\frac{1}{\beta (0.693)^{\frac{1}{k}}}$	$e^{\frac{\mu}{\sigma}}$
Мода m_0	$\beta \Gamma\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{k}} \text{ для } k > 1,0$	$e^{\frac{\mu - \sigma^2}{\sigma}}$
Примечание	$\beta = x_P = e^{-1}$	$C_A = 3C_V + C_V^3, \quad v_1/x_{0.5} = (1 + C_V^2)^{\frac{1}{2}},$ $v_1^2 m_0 = (x_{0.5})^3,$ $\sigma_{\ln x}^2 = \ln(1 + C_V^2) = 2 \ln(v_1/x_{0.5})$

(квантилей, моментов и т. д.). Однако для больших выборок различия в дисперсиях оценок, вычисленных разными методами, малы. Например [88], при $N = 100$ стандарты ошибок оценивания параметра $k = 2$ распределения (1.7.17) по методу наибольшего правдоподобия ($\sigma_{\hat{k}^*} = 0,16$) и по методу квантилей ($\sigma_{\tilde{k}^*} = 0,19$) различаются лишь вторым знаком. Из этого, хотя и частного, но типичного примера видно, что при больших объемах выборок (используемых, например, в главах 5 и 9) можно не стремиться к выбору оптимального метода оценивания, а применять наиболее простой и удобный. В частности, для параметра k — через коэффициент вариации C_V (таблица значений C_V при различных k приводится во многих работах, например [87, 158]).

Обычно для этого определяют моменты v_i и μ_i , а для распределений (1.7.15), (1.7.17), (1.7.20), (1.7.21) также параметры k , β , μ , σ .

Для распределения (1.7.14) параметры μ и σ легко определяются по формулам [161]

$$\begin{aligned}\mu^* &= 2 \log l_1 - \frac{1}{2} \log l_2, \\ \sigma^* &= 2 \log l_2 - \log l_1,\end{aligned}\tag{1.7.22}$$

где $l_1 = \exp \left[v_1^* + \frac{1}{2} \mu_2^* \right]$, $l_2 = \exp [2 (v_1^* + \mu_2^*)]$. Параметры v_1^* и μ_2^*

вычисляются по переменной x (а не по ее логарифмам).

Если распределение $F^*(x, \theta_1, \dots, \theta_n)$ содержит несколько параметров, то их оценки, как правило, будут коррелированы (а следовательно, менее точная оценка будет искажать более точную), поэтому необходимо использовать такой метод, при котором корреляция наименьшая. В частности [194], оценки параметров β и k по квантилям распределения (1.7.15) имеют наименьшую ковариацию $\text{cov}(\beta^*, k^*) = 1,49 (\beta^2/N)$ при использовании квантилей для $P_1 = 0,761$ и $P_2 = 0,073$.

Некоторые соотношения, употребляемые в дальнейшем для оценки параметров распределений (1.7.15), (1.7.20), приводятся в табл. 1.7.3, 1.7.4. Для определения достоверности найденных оценок параметров необходимо знать их закон распределения. Обычно [138] его можно считать асимптотически-нормальным со средним, равным оцениваемому параметру θ , и дисперсией D_{θ^*} , равной

$$D_{\theta^*} = \frac{c^2}{N} \theta,\tag{1.7.23}$$

где c — постоянная, зависящая от вида асимптотического закона, способа определения параметров θ и вида корреляционной зависимости между членами выборочной совокупности.

В табл. 1.7.3, 1.7.4 приводятся выражения для дисперсий оценок параметров распределений (1.7.15), (1.7.20), определяемых по методам квантилей и наибольшего правдоподобия.

Таблица 1.7.3

Соотношения для оценки параметров и их дисперсий распределения Вейбулла (1.7.15) (по работе [194])

Метод оценки	Формула оценивания	Минимальная дисперсия вида (1.7.23)	Примечание
Наибольшего правдоподобия	$\hat{k}^* = \frac{\frac{1}{\ln x + (\ln x^2 + 4v_{k-1})^2}}{2v_{k-1}}$	$D_{\hat{k}^*} = 0,532k^2/N$ $D_{\hat{k}^*} = 0,602k^2/N$	При известном β При неизвестном β
Квантилей	$\hat{k}^* = \frac{\ln(-\ln P_2) - \ln(-\ln P_1)}{\ln x_{P_1} - \ln x_{P_2}}$	$D_{\hat{k}^*} = 0,916k^2/N$	При $P_1 = 0,026$, $P_2 = 0,833$
Наибольшего правдоподобия	$\hat{\beta}^* = \sum_{i=1}^N (x_i^k/N)^{1/k}$	$D_{\hat{\beta}^*} = \frac{1}{N} \left(\frac{\beta}{k} \right)^2$	При известном k
		$D_{\hat{\beta}^*} = \frac{1,11}{N} \left(\frac{\beta}{k} \right)^2$	При неизвестном k
Квантилей	$\hat{\beta}^* = \exp [\chi \ln x_{P_1} - (1 - \chi) \ln x_{P_2}],$ $\chi = -\ln d_1/d, \quad d_1 = -\ln(1 - P_1),$ $d = \ln d_1 - \ln d_2$	$D_{\hat{\beta}^*} = 1,359k^2/N$	При $P_1 = 0,602$, $P_2 = 0,179$

Таблица 1.7.4

Соотношения для оценки параметров и их дисперсий логарифмически-нормального распределения (1.7.20)
(по работе [161])

Метод оценки	Формула оценивания	Минимальная дисперсия вида (1.7.23)	Примечание
Наибольшего прав- доподобия	$\hat{\sigma}^* = \sum_{i=1}^N (\ln x_i - \overline{\ln x})/N,$ $\check{\sigma}^* = (\ln x_{P_2} - \ln x_{P_1}) / (x_{P_1}^{(1)} - x_{P_1}^{(2)})$	$D_{\hat{\sigma}^*} = [2\sigma^4/(N-1)]^{1/2}$	
Квантилей	Для симметричных квантилей $\check{\sigma}^* = (1/2x_{P_H}) (\ln x_{1-P_1} - \ln x_{P_1})$	$D_{\check{\sigma}^*} = 1,54\sigma^2/N$	При $P_2 = 0,07$ $P_1 = 0,93$
Наибольшего прав- доподобия	$\hat{\mu}^* = (1/N) \sum_{i=1}^N \ln x_i,$ $\check{\mu}^* = (x_{P_H}^2 \ln x_{P_2} - x_{P_H}^{(1)} \ln x_{P_1}) / (x_{P_H}^{(1)} - x_{P_H}^{(2)})$	$D_{\check{\mu}^*} = 2,85\sigma^2/N$	При $P_2 = 0,75$ $P_1 = 0,25$
Квантилей	Для симметричных квантилей $\check{\mu}^* = \frac{1}{2} (\ln x_{1-P_1} - \ln x_{P_1})$	$D_{\check{\mu}^*} = \sigma^2/N$	При $P_1 = 0,27$ $P_2 = 0,73$ x_{P_H} — квантиль нор- мального распределения заданной вероятности

При анализе эмпирических распределений не всегда можно подобрать аппроксимативное семейство, на функциональной сетке которого $F^*(x)$ спрямлялось бы во всем диапазоне изменения переменной x . Однако (как показано на рис. 9.2.1, 9.2.2, а также на рис. 7.1 и 7.2 работы [10]), можно выбрать такие два распределения $F_1(x)$ и $F_2(x)$, которые аппроксимируют $F^*(x)$ на различных участках $x \in [a, b]$ и $x \in [c, d]$, охватывающих весь диапазон изменения x . Тогда $F(x)$ представляется как

$$F(x) = \begin{cases} F_1(x, \theta_{11}, \dots, \theta_{1n}) & \text{при } x \in [a, b], \\ F_2(x, \theta_{21}, \dots, \theta_{2n}) & \text{при } x \in [c, d], \end{cases} \quad (1.7.24)$$

где $[a, b]$ и $[c, d]$ — пересекающиеся (или имеющие хотя бы одну общую точку) интервалы; $[c, b]$ область пересечения.

Естественно предположить, что внутри этой области

$$\begin{cases} F_1(x, \theta_{1i}) = F_2(x, \theta_{2i}), \\ \hat{f}_1(x, \theta_{1i}) = \hat{f}_2(x, \theta_{2i}), \end{cases} \quad (1.7.25)$$

где $\hat{f}(x, \theta)$ — плотность распределения. Задача «склейки» распределений состоит в том, чтобы подобрать такие параметры θ_{ij} , чтобы соотношения (1.7.24), (1.7.25) выполнялись путем нахождения зависимостей вида

$$\theta_{1i} = \theta(\theta_{2j}), \quad i = 1, \dots, n; \quad j = 1, \dots, m; \quad (1.7.26)$$

учетом условия нормировки *

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(x) dx = 1. \quad (1.7.27)$$

Метод «склейки» распределений используется в дальнейшем для анализа режимных распределений: ветра и элементов волн. Совпадение распределений $F_1(x)$ и $F_2(x)$ на участке $[c, b]$ понимается в смысле принадлежности пересечению их доверительных интервалов. Оценка параметров эмпирических распределений выполняется по методу квантилей (метод моментов не может быть использован из-за цензурирования распределений [161]), для этого внутри интервала $[c, b]$ выбираются три квантили, соответствующие вероятностям P_1, P_2, P_0 . Вероятности P_1 и P_2 не должны выходить за границы спрямления $F^*(x)$ на обеих функциональных сетках — $F_1(x)$ и $F_2(x)$; вероятность P_0 выбирается внутри промежутка $[P_1, P_2]$ обычно в точке пересечения $F_1(x)$ и $F_2(x)$.

* Из условий $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}_i(x) dx = 1, i = 1, 2$ еще вовсе не следует, что равенство (1.7.27) справедливо, необходимо по крайней мере вычислить сумму $\int_{-\infty}^b \hat{f}_1(x) dx + \int_b^{\infty} \hat{f}_1(x) dx = c$ и, если $c \neq 1$, то перейти к плотностям, $\hat{f}_i(x) = \hat{f}_i^*(x)/c$.

Рассмотрим случай, когда в (1.7.24) в качестве асимптотических законов использованы распределения Вейбулла (1.7.15) и логарифмически-нормальное (1.7.20). Тогда

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} y^{-1} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma^2} (\ln y - \mu)^2 \right] dy & \text{при } x \in [a, b], \\ \exp \left(-\frac{x}{\beta} \right)^k & \text{при } x \in [c, d]. \end{cases} \quad (1.7.28)$$

Выразим параметры одного распределения через параметры другого, тогда соотношение (1.7.26) имеет вид

$$\begin{cases} \frac{e^\mu}{\beta} = (0,693)^{1/k}, \\ 1 = \frac{e^\mu \left(e^{x_{P_1}^{(1)\sigma}} - e^{x_{P_2}^{(2)\sigma}} \right)}{\beta [(-\ln P_1)^{1/k} - (-\ln P_2)^{1/k}]} \end{cases} \quad (1.7.29)$$

Первое из уравнений системы (1.7.29) получено путем приравнивания медианных значений распределений F_1 и F_2 ; в общем случае для произвольной квантили x_P оно имеет вид

$$e^{\mu + \sigma x_{P_H}} = \beta (\ln P)^{1/k}. \quad (1.7.30)$$

Второе уравнение системы (1.7.29) получено путем приравнивания квантильных разностей логарифмически-нормального

$$x_{P_1} - x_{P_2} = e^\mu \left(e^{x_{P_1}^{(1)\sigma}} - e^{x_{P_2}^{(2)\sigma}} \right) \text{ и вейбулловского } x_{P_1} - x_{P_2} = \beta [(-\ln P_1)^{1/k} - (-\ln P_2)^{1/k}] \text{ распределений.}$$

Решение этой системы уравнений дает возможность получить зависимости вида

$$\begin{cases} k = k(\sigma, P_1, P_2, P), \\ \beta = \beta(\mu, k) = \beta(\mu, \sigma, P, P_1, P_2). \end{cases} \quad (1.7.31)$$

По постановке и решению сформулированной задачи соотношения (1.7.31) можно трактовать как функциональную зависимость вида (1.7.26) между параметрами распределений $F_1(x)$ и $F_2(x)$. Особенность этих соотношений состоит в том, что величины k и β зависят не только от μ и σ , но и от выбора квантилей $x_{P_0}, x_{P_1}, x_{P_2}$.

Рассмотрим метод склейки распределений законов Вейбулла и Фреше [88, 122].

Для этих законов (1.7.24) имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} \exp \left[-\left(\frac{x}{\beta} \right)^k \right] & \text{для } x \in [a, b], \\ 1 - \exp \left[-\left(\frac{x}{B} \right)^{-\gamma} \right] & \text{для } x \in [c, d]. \end{cases} \quad (1.7.32)$$

Пусть квантили распределения Вейбулла $x_P^{(B)}$ и Фреше $x_P^{(\Phi)}$ совпадают при $P = P_0$, т. е. $x_{P_0}^{(B)} = x_{P_0}^{(\Phi)}$, а при вероятностях P_1 и P_2 они принадлежат обоим распределениям. Тогда имеем

$$x_{P_0}^{(B)} = \beta (-\ln P_0)^{1/k}, \quad x_{P_0}^{(\Phi)} = B [-\ln (1 - P_0)]^{1/\gamma}, \quad (1.7.33)$$

и

$$x_{P_1}^{(B)} - x_{P_2}^{(B)} = \beta [(-\ln P_1)^{1/k} - (-\ln P_2)^{1/k}],$$

$$x_{P_1}^{(\Phi)} - x_{P_2}^{(\Phi)} = b \{ [-\ln (1 - P_1)]^{-1/\gamma} - [-\ln (1 - P_2)]^{-1/\gamma} \}. \quad (1.7.34)$$

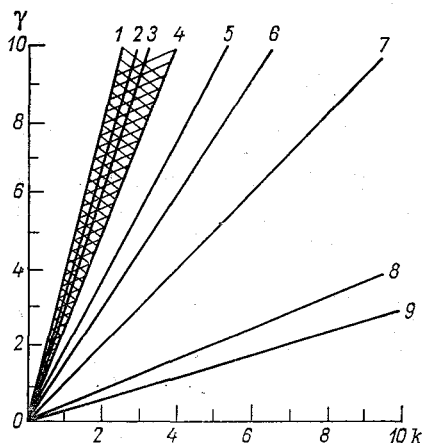


Рис. 1.7.2. Соотношения между параметрами k и γ распределений Вейбулла и Фреше для различных квантилей (заштрихована область значений, наиболее часто встречающихся в Мировом океане),

- 1) $P_0 = 0,01, P_1 = 0,03, P_2 = 0,05$; 2) $P_0 = 0,05, P_1 = 0,01, P_2 = 0,10$; 3) $P_0 = 0,05, P_1 = 0,03, P_2 = 0,07$; 4) $P_0 = 0,01, P_1 = 0,05, P_2 = 0,01$; 5) $P_0 = 0,30, P_1 = 0,10, P_2 = 0,30$; 6) $P_0 = 0,50, P_1 = 0,03, P_2 = 0,83$; 7) $P_0 = 0,50, P_1 = 0,25, P_2 = 0,25$; 8) $P_0 = 0,90, P_1 = 0,80, P_2 = 0,95$; 9) $P_0 = 0,95, P_1 = 0,90, P_2 = 0,99$

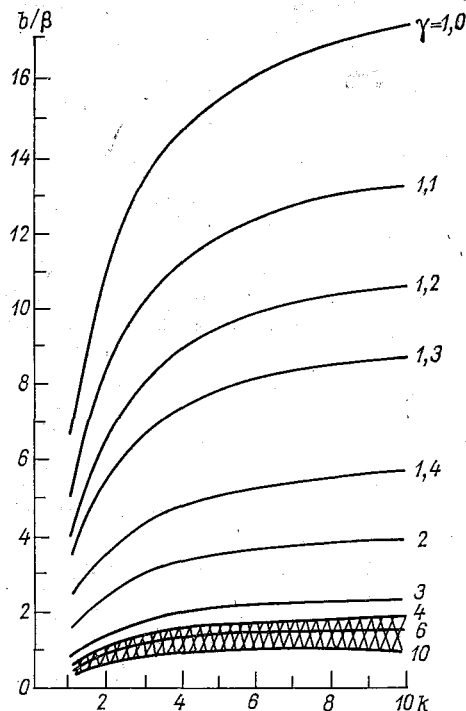


Рис. 1.7.3. Соотношения между параметрами β и b при различных значениях k и γ для $P_0 = 0,05, P_1 = 0,01, P_2 = 0,10$

Заштрихована область значений, наиболее часто встречающихся в Мировом океане

Из соотношений (1.7.33), (1.7.34) можно по аналогии с (1.7.29) составить систему

$$\frac{\beta}{b} = \frac{[-\ln (1 - P_0)]^{1/\gamma}}{(-\ln P_0)^{1/k}},$$

$$1 = \frac{\beta}{b} \frac{[(-\ln P_1)^{1/k} - (-\ln P_2)^{1/k}]}{[-\ln (1 - P_1)]^{-1/\gamma} - [-\ln (1 - P_2)]^{-1/\gamma}}. \quad (1.7.35)$$

Решение системы (1.7.35) дает возможность получить зависимость

$$\begin{cases} \gamma = \gamma(k, P_1, P_2), \\ B = B(k, \beta, P_0, P_1, P_2), \end{cases} \quad (1.7.36)$$

которая для некоторых квантилей представлена на рис. 1.7.2, 1.7.3. Из рисунков видно, что зависимость между k и γ , а также B/β определяется, в основном выбором P_0 и в меньшей степени P_1 и P_2 .

Системы уравнений (1.7.31), (1.7.36) использованы в главе 9 для определения параметров распределения $F_2(x)$ по параметрам распределения $F_1(x)$. Там же приводятся конкретные значения квантилей P_0, P_1, P_2 и аппроксимативные соотношения для зависимостей между параметрами k и γ , k и σ .

Таким образом, процедура анализа выборочной совокупности элементов волн (или скоростей ветра) сводится к следующему:

- расчету оценок функций распределения;
- проверке гипотезы соответствия эмпирического распределения заданному теоретическому (по спрямленности на функциональной сетке и принадлежности заданному доверительному интервалу);
- определению параметров эмпирического распределения (по методу моментов, квантилей и в случае необходимости используя соотношения для «склейки» распределений);
- определению достоверности параметров распределений (используя соотношения из табл. 1.7.3, 1.7.4).

Методы анализа двумерных распределений элементов волн ввиду их специфики изложены в разделе 5.5 на примере конкретных данных натурных измерений.

Заканчивая изложение вопросов методики анализа экспериментальных данных, отметим, что многие практические рекомендации даны в специальном методическом пособии [130]. Математическое обеспечение расчетов в виде алгоритмов и программ рассмотренных выше методов подробно изложено в работах [9, 57, 62, 127, 130].

Глава 2

Вероятностные гидродинамические модели волновой поверхности

Для описания вероятностных свойств ветрового волнения как стационарного однородного процесса $\zeta(x, y, t)$ предложены различные математические модели. Основой для построения моделей волнения как вероятностного процесса служит интегральное представ-

ление * вида (1.1.1), удовлетворяющее системе гидродинамических уравнений (3) — (7). Эта система включает и нелинейные уравнения (6), (7), поэтому в общем случае модели ветрового волнения являются нелинейными. Однако многие вероятностные свойства волнения описываются с достаточной точностью линейными моделями (удовлетворяющими системе линеаризованных уравнений).

2.1. Линейные модели

В линейных моделях волновая поверхность представляется в виде суперпозиции комплексных экспонент $\exp[i(k_x x + k_y y + \omega t)]$ со случайными амплитудами или косинусоид $\cos(k_x x + k_y y + \omega t + \varepsilon)$ со случайными амплитудами и фазами.

Пирсон [114] предложил линейную модель в виде

$$\xi(x, y, t) = \int_0^\infty \int_{-\pi}^\pi \cos \left[\frac{\omega^2}{g} (x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t + \varepsilon \right] \times \\ \times \sqrt{S_\xi(\omega, \theta)} d\omega d\theta, \quad (2.1.1)$$

где ε — фаза, случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(0, 2\pi)$. Он показал, что $\xi(x, y, t)$ вида (2.1.1) — трехмерный стационарный однородный эргодический гауссов процесс. В модели Пирсона, являющейся вероятностным аналогом представления $\xi(x, y, t)$ интегралом Фурье, случайной является только фаза ε , амплитуды $\sqrt{S_\xi(\omega, \theta)} d\omega d\theta$ элементарных волн $\cos \left[\frac{\omega^2}{g} (x \cos \theta + y \sin \theta) - \omega t + \varepsilon \right]$ не случайны. Эти амплитуды однозначно определяются двумерным спектром $S_\xi(\omega, \theta)$ волнового процесса.

Более строго (без искусственного привлечения вероятностной трактовки решения) модель волнения получена Розенблаттом [287]. Согласно этой модели, волновая поверхность имеет следующий вид:

$$\xi(re^{i\psi}, t) = \int_{-\infty}^\infty \int_0^{2\pi} \exp(-i\omega t) H_0 \left[\frac{\omega}{g} |re^{i\psi} - \rho e^{i\theta}| \right] d\hat{Y}(\omega, \theta), \quad (2.1.2)$$

где $H_0(x)$ — функция Ханкеля; r , ρ и ψ , θ — полярные координаты.

Несколько позднее [135] модель волнения предложил А. А. Свешников на основе решения системы (3) — (7) линеаризи-

* Часто (1.1.1) называют спектральным представлением случайной функции [20].

рованных уравнений при условии, что потенциал ϕ и его изменение во времени $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ являются известными случайными функциями $f_j(x, y)$.

Согласно А. А. Свешникову,

$$\zeta(x, y, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i(k_x x + k_y y - \sqrt{gk} t)] i \sqrt{\frac{k}{g}} d^2 \hat{Y}(k_x, k_y), \quad (2.1.3)$$

где

$$d^2 \hat{Y}(k_x, k_y) = \frac{i}{\sqrt{gk}} d^2 \hat{Y}_2(k_x, k_y) + d^2 \hat{Y}_1(k_x, k_y); \quad \hat{Y}_1(k_x, k_y), \quad \hat{Y}_2(k_x, k_y)$$

— процессы с независимыми приращениями, которые определяются через спектральное представление функций $f_j(x, y)$.

Пирсон [273] построил линейную вероятностную модель, удовлетворяющую уравнениям движения в форме Лагранжа, принимая, что положение частиц жидкости в волне является векторным гауссовым процессом.

Наиболее полно исследованы свойства случайной движущейся волновой поверхности, представленной в виде

$$\zeta(x, y, t) = \sum_n a_n \cos(k_x^n x + k_y^n y + \omega_n t + \varepsilon_n) \quad (2.1.4)$$

суммы гармоник со случайными амплитудами $[a_n]$ и фазами ε_n . Лонге-Хиггинс показал [87], что (2.1.4) является гауссовским случайным процессом, характеризующимся через соотношение

$$\sum \frac{1}{2} a_n^2 = S_{\zeta}(k_x, k_y) dk_x dk_y \quad (2.1.5)$$

спектральной плотностью $S_{\zeta}(k_x, k_y)$. Используя понятие моментов спектра

$$m_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\zeta}(k_x, k_y) k_x^{\alpha} k_y^{\beta} dk_x dk_y; \quad (2.1.6)$$

$$m'_{\alpha\beta} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(k_x, k_y) \omega k_x^{\alpha} k_y^{\beta} dk_x dk_y;$$

$$m_{\alpha}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (k_x \cos \theta + k_y \sin \theta)^{\alpha} S_{\zeta}(k_x, k_y) dk_x dk_y;$$

$$m_{\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \omega^{\alpha} S_{\zeta}(\omega) d\omega, \quad (2.1.7)$$

он получил следующие основные соотношения, связывающие вероятностные характеристики волновой поверхности с моментами функции спектральной плотности процесса [87, 121]:

— для плотности распределения аппликат

$$\hat{f}(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi m_{00}}} \exp\left[-\frac{\zeta^2}{2m_{00}}\right]; \quad (2.1.8)$$

$$\hat{f}(\xi_1, \dots, \xi_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \Delta_M^{1/2}} \exp \left(-\frac{1}{2} M_{ij} \xi_i \xi_j \right), \quad (2.1.9)$$

где M_{ij} — матрица, обратная матрице $M \{ \xi_i \xi_j \}$; Δ_M — определитель последней матрицы;

— для плотности распределения максимумов ξ_m централизованной волновой поверхности

$$\begin{aligned} \hat{f}(h_1) = & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{h_1^2}{\varepsilon^2} \right) + \sqrt{1 - \varepsilon^2} h_1 \exp \left(\frac{1}{2} h_1^2 \right) \times \\ & \times \left[\frac{1}{2} + \operatorname{erf} \left(h_1 \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon} \right) \right], \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

где $h_1 = \frac{\xi_m}{m_{00}^{1/2}}$, $\operatorname{erf}(\xi) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \int_0^\xi e^{-\frac{1}{2} x^2} dx$, $\varepsilon^2 = 1 - \frac{m_2^2}{m_0 m_4}$ — ширина спектра;

— для плотности распределения уклонов η

$$\hat{f}(\eta) = \eta (\gamma + \gamma^{-1}) \exp \left[-\frac{\eta^2 (\gamma + \gamma^{-1})}{4} \right] I_0 \left[\frac{\eta^2 (\gamma^{-2} - \gamma^2)}{4} \right], \quad (2.1.11)$$

где

$$\begin{aligned} \eta = & \frac{\Gamma}{(m_{20} - m_{02})^{1/2}}; \quad \Gamma = \sqrt{\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2}; \\ \gamma^{-1} = & \sqrt{\frac{m_{20}}{m_{02}}}; \quad I_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(-z \sin \theta) d\theta; \end{aligned}$$

— для числа N_0 пересечений волновой поверхности нулевой линией на единицу расстояния

$$N_0 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_2(\theta)}{m_0(\theta)}}; \quad (2.1.12)$$

— для числа N_1 гребней и впадин на единицу расстояния

$$N_1 = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{m_4(\theta)}{m_2(\theta)}}; \quad (2.1.13)$$

— для плотности распределения периодов [245]

$$\hat{f}(\tau) = \frac{1}{2(1 + r^2)^{3/2}}, \quad (2.1.14)$$

где $r = \frac{\tau - \bar{\tau}}{v}$, $v = \left(\frac{m_2}{m_0} \right)^{1/2} \frac{\bar{\tau}}{2\pi}$ (для узкого спектра $v \approx \frac{\varepsilon}{2}$);

— для совместной плотности распределения амплитуды a («полувысоты») и периода τ волн

$$\hat{f}(\xi, r) = \frac{\xi^2}{\sqrt{2\pi}} \exp[-\xi^2(1 + r^2)/2], \quad (2.1.15)$$

где

$$\zeta = \frac{a}{\sqrt{m_0}};$$

— для условной плотности распределения (2.1.15)

$$\hat{f}_\zeta(r) = \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\zeta^2 r^2/2). \quad (2.1.16)$$

Получены также выражения для ряда других вероятностных характеристик волновой поверхности [87].

Гауссовость распределений аппликат (2.1.8), (2.1.9) дает основание представить многомерное распределение значений случайного процесса $\zeta(x, y, t)$ в виде произведений двумерных, каждое из которых определяется через математическое ожидание и корреляционную функцию значений волнового процесса. Таким образом, простые моментные функции первых двух порядков определяют одну из наиболее полных характеристик вероятностного процесса.

Для изучения групповых свойств волнения Лонге-Хиггинсом используется огибающая, записанная в виде

$$\rho \exp(i\bar{\varphi}) = \sum c_n \exp\{i(k_x^{(n)} - \bar{k}_x)x + (k_y^{(n)} - \bar{k}_y)y + (\omega_n - \bar{\omega})t - \varepsilon_n\}, \quad (2.1.17)$$

где $\bar{k}_x$, $\bar{k}_y$, $\bar{\omega}$ — значения переменных k_x , k_y , ω , определяющие так называемую «несущую» волну

$$\exp\{i(\bar{k}_x x + \bar{k}_y y + \bar{\omega} t)\}.$$

Лонге-Хиггинсом показано, что:

— спектральная плотность огибающей имеет тот же вид, что и у волнового процесса $\zeta(x, y, t)$, но по отношению к началу координат в точке $(\bar{k}_x, \bar{k}_y)$;

— двумерное распределение

$$\hat{f}(\rho, \bar{\varphi}) = \frac{1}{2\pi m_{00}} \rho \exp\left(-\frac{\rho^2}{2m_{00}}\right) \quad (2.1.18)$$

не зависит от $\bar{\varphi}$, а маргинальное имеет вид

$$\hat{f}(\rho) = \frac{1}{m_{00}} \rho \exp\left(-\frac{\rho^2}{2m_{00}}\right); \quad (2.1.19)$$

— среднее число волн в группе, определяемое как отношение числа N_0 прохождений через нуль ζ в направлении θ к числу N прохождений огибающей через произвольный уровень C_1 , на единицу длины равно (при $C_1 = m_{00}^{1/2}$)

$$\frac{N_0}{N} = \left(\frac{C}{2\pi}\right) \frac{m_{20} \cos^2 \theta + 2m_{11} \cos \theta \sin \theta + m_{02} \sin^2 \theta}{\mu_{20} \cos^2 \theta + 2\mu_{11} \cos \theta \sin \theta + \mu_{02} \sin^2 \theta}, \quad (2.1.20)$$

где $\mu_{pq} = \int \int_{-\infty}^{\infty} S(k_x, k_y) (k_x - \bar{k}_x)^p (k_y - \bar{k}_y)^q dk_x dk_y$.

Дэч [41] показал, что понятие «несущей» волны в определении (2.1.17) введено достаточно произвольно. Строгое и вместе с тем наглядное определение огибающей вводится следующим образом. Любому случайному процессу $\xi(t)$ можно поставить в соответствие с помощью преобразования Гильберта

$$\hat{\xi}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi(\tau)}{t - \tau} d\tau \quad (2.1.21)$$

сопряженный $\xi(t)$ процесс $\hat{\xi}(t)$.

В то же время процессы $\xi(t)$ и $\hat{\xi}(t)$ могут быть представлены в виде

$$\left. \begin{aligned} \xi(t) &= O(t) \cos \hat{\Phi}(t); \\ \hat{\xi}(t) &= O(t) \sin \hat{\Phi}(t), \end{aligned} \right\} \quad (2.1.22)$$

причем

$$O(t) = \sqrt{\xi^2(t) + \hat{\xi}^2(t)} \quad (2.1.23)$$

называют огибающей, а

$$\hat{\Phi}(t) = \arctg [\hat{\xi}(t)/\xi(t)] \quad (2.1.24)$$

фазой случайного процесса $\xi(t)$.

Согласно (2.1.22) процесс $\xi(t)$ рассматривается как колебание, модулированное по амплитуде и фазе случайными функциями $O(t)$ и $\hat{\Phi}(t)$. Из (2.1.23) видно, что $O(t) \geq |\xi(t)|$,

т. е. функция $\xi(t)$ нигде не пересекает функцию $O(t)$.

Кроме того [136], $O(t) O'(t) = \xi(t) \xi'(t) + \hat{\xi}(t) \hat{\xi}'(t)$,

поэтому в точках, где $\xi(t) = O(t)$, имеют место равенства $\hat{\xi}(t) = 0$ и $O'(t) = \xi'(t)$, т. е. в точках соприкосновения функции $O(t)$ и $\xi(t)$ имеют общие касательные. Указанные свойства объясняют смысл принятого для $O(t)$ названия огибающей $\xi(t)$.

Принятые определения (2.1.21), (2.1.22) дают возможность вычислить по вероятностным характеристикам процесса $\xi(t)$ вероятностные характеристики процессов $O(t)$ и $\hat{\Phi}(t)$. Например, если $\xi(t)$ — узкополосный нормальный случайный процесс, то между дисперсиями процессов $O(t)$ и $\xi(t)$ существует соотношение

$$D_O = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) D_{\xi}, \quad (2.1.25)$$

корреляционные функции огибающей $O(t)$ и косинуса фазы равны [136]

$$K_O(\tau) = D_{\xi} \left[2I_2(1-p^2) - p^2 I_1^2(1-p^2) - \frac{\pi}{2} \right]; \quad (2.1.26)$$

$$K_{\cos \Phi}(\tau) = \frac{r}{2(1-p^2)} [I_2(1-p^2) - p^2 I_1(1-p^2)], \quad (2.1.27)$$

где I_1, I_2 — полные эллиптические интегралы первого и второго рода; r и p — параметры, зависящие от τ и вычисляемые [136] через корреляционную функцию $K_{\xi}(t)$ или спектральную плотность $S_{\xi}(\omega)$ процесса $\xi(t)$.

Отметим, что соотношения (2.1.25) — (2.1.27) получены не из модели (2.1.5), но так как они справедливы для любого узкополосного гауссовского процесса, то использование их для практических расчетов вполне допустимо наряду с соотношениями (2.1.8) — (2.1.16) и (2.1.18) — (2.1.20).

Вопрос о том, в какой степени некоторые из перечисленных соотношений согласуются с экспериментальными данными, рассмотрен в разделе 2.3. Здесь следует лишь отметить, что линейные гидродинамические модели волновой поверхности с достаточной для практики точностью описывают основные вероятностные свойства ветрового волнения на участках квазистационарности (квазигомогенности) процесса. Ряд свойств волновой поверхности, например опрокидывание гребней волн, наличие равновесного участка в спектре и другие, не описывается линейными гидродинамическими моделями волнения.

2.2. Нелинейные модели

Лонге-Хиггинсом показано, что можно построить нелинейную модель случайного процесса $\xi(x, y, t)$, допустив, что он представим в виде

$$\xi(x, y, t) = \sum_i \alpha_i \xi_i + \sum_{i,j} \alpha_{i,j} \xi_i \xi_j + \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j,k} \xi_i \xi_j \xi_k + \dots, \quad (2.2.1)$$

где $\alpha_i, \alpha_{i,j}, \alpha_{i,j,k}$ — постоянные; ξ_i — независимые случайные переменные со средним, равным нулю, и дисперсиями D_i , имеющие симметричное распределение.

Для процесса вида (2.2.1) можно доказать [242], что плотность распределения вероятностей $\hat{f}(\xi)$ будет иметь вид ряда Грамма-Шарлье типа A в форме Эджворта

$$\hat{f}(\xi) = (2\pi\kappa_2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\psi^2}{2}\right) \left[1 + \frac{1}{6} \lambda_3 H_3 + \right. \\ \left. + \left(\frac{1}{24} \lambda_4 H_4 + \frac{1}{72} \lambda_3^2 H_6 \right) + \dots \right], \quad (2.2.2)$$

где $H_n(x)$ — полиномы Эрмита; $\lambda_n = \frac{\kappa_n}{\kappa_2^{1/2n}}$, $\psi = \frac{\xi - \kappa_1}{\kappa_2^{1/2}}$,

κ_n — семиинварианты.

В столь же общей форме можно построить и нелинейную вероятностную модель векторного процесса (каким, например, являются уклоны волновой поверхности), допустив, что каждая из компонент (η_x, η_y) этого процесса имеет вид (2.2.1), и доказать, что плотность распределения вероятностей будет представима в форме

$$\hat{f}(\xi, \eta) = \{2\pi(\kappa_{20}\kappa_{02} - \kappa_n)^{1/2}\} \exp \left[-\frac{1}{2} (\psi_1^2 - 2\lambda_{11}\psi_1\psi_2 + \psi_2^2) \times \right. \\ \left. \times (1 - \lambda_{11}^2) \right] \cdot \left[1 + \frac{1}{6} (\lambda_{30}H_{30} + 3\lambda_{21}H_{21} + \dots) + \dots \right], \quad (2.2.3)$$

где $H_{i,j}(x, y)$ — двумерные полиномы Эрмита; $\kappa_{i,j}$ — семиинварианты $\psi_1 = \frac{\eta_x}{\kappa_{20}^{1/2}}$, $\psi_2 = \frac{\eta_y}{\kappa_{02}^{1/2}}$, $\lambda_{ij} = \frac{\kappa_{ij}}{(\kappa_{20}^i \kappa_{02}^j)^{1/2}}$.

Из выражений (2.2.2) и (2.2.3) видно, что распределения ординат (или аппликат) нелинейных вероятностных процессов вида (2.2.1) отличаются от гауссовских.

Для конкретизации вида процесса необходимо задать вид переменных ξ в (2.2.1). Лонге-Хиггинс [242], развивая модель (2.1.5), задал

$$\xi_i = a_i \cos(k_x^{(i)}x + k_y^{(i)}y + \omega_i t + \varepsilon_i) \quad (2.2.4)$$

и представил взволнованную поверхность моря

$$\xi(x, y, t) = \xi^{(1)}(x, y, t) + \xi^{(2)}(x, y, t) + \dots \quad (2.2.5)$$

где $\xi^{(1)}$ — процесс вида (2.1.5); $\xi^{(2)}$ — процесс, содержащий попарные произведения переменных (2.2.4), остальные обозначения $(\alpha_i, k_x^{(i)}, k_y^{(i)}, \omega_i, \varepsilon_i)$ те же, что и в (2.1.5).

Процесс $\xi^{(1)}(x, y, t)$ удовлетворяет (как уже отмечалось выше) линеаризированной системе уравнений волнового движения. Сохраняя между переменными ω и k соотношение (10), уместно потребовать, чтобы процесс $\xi^{(2)}(x, y, t)$ удовлетворял следующей системе нелинейных уравнений:

$$\nabla \Phi^{(2)} = 0; \\ \nabla \Phi^{(2)} \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow \infty; \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial z} \right) \Phi^{(2)} = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \Phi^{(1)})^2 - \xi \frac{\partial}{\partial z} \times \\ \times \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + g \frac{\partial}{\partial t} \right) \Phi^{(1)} \quad \text{при } z = 0, \quad (2.2.6)$$

где $\Phi(x, y, z, t)$ — потенциал скорости, записанный, как и $\xi(x, y, t)$, в виде (2.2.1), $\Phi = \Phi^{(1)} + \Phi^{(2)} + \dots$, причем $\Phi^{(1)}(x, y, z, t) = \sum_i b_i \exp(k_i z) \sin(k_x^{(i)}x + k_y^{(i)}y + \omega_i t + \varepsilon_i)$, $b_i = \frac{c_i \omega_i}{k_i}$.

На основе решения уравнений (2.2.6) Лонге-Хиггинс показал, что семиинварианты $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3$ могут быть выражены через спек-

тральную плотность процесса следующим образом:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 0; \\ \kappa_2 &= \iint S(k_x, k_y) dk_x dk_y; \\ \kappa_3 &= \iiint R(k, k') S(k) S(k') dk dk', \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

где

$$R(k, k') = (kk') \left[\frac{(\hat{r}-1)(1+\hat{c})}{(\hat{r}-1) - \left(\hat{r}^2 - \frac{1}{2} - \frac{\hat{c}}{2} \right)^{1/2}} - \frac{(\hat{r}+1)(1-\hat{c})}{(\hat{r}+1) - \left(\hat{r}^2 - \frac{1}{2} + \frac{\hat{c}}{2} \right)^{1/2}} + (2\hat{r}-\hat{c}) \right], \quad \hat{c} = \cos \gamma, \quad \hat{r} = \frac{(k+k')}{2(kk')^{1/2}},$$

γ — угол между векторами волновых чисел k и k' . Выражение (2.2.2) свидетельствует о том, что модель второго порядка отличается от гауссова распределения (2.1.8) на множитель $1 + \frac{1}{6} \lambda_3 H_3 + \dots$, причем коэффициент асимметрии λ_3 всегда положителен. Этот результат согласуется с аппроксимацией распределения волновых аппликат, полученной Кинсменом.

На основе теоретического изучения свойств уклонов волновой поверхности вида (2.2.5) Лонге-Хиггинсом [242] показано, что их распределение (2.2.3) будет асимметричным, и средний уклон отличен от нуля.

Скорость $u = (u_x, u_y, u_z)$, ускорение $a \equiv (a_x, a_y, a_z)$ волновых движений, а также динамическое давление $p(x, y, t)$ на подповерхностных горизонтах являются нелинейными функциями гауссовского процесса $\xi(x, y, t)$, поэтому их распределения будут не гауссовыми. В работе [310] теоретически показано, что средние значения a_x, u_z равны нулю и их распределения симметричны; a_z, u_x, p имеют асимметричные распределения со средними, отличными от нуля. Экспериментальные данные [263] подтверждают негауссовость распределений u_z и a_z .

Л. Дж. Тик [306], учитывая нелинейные члены в уравнениях (6) и (7), построил модель второго порядка для двумерного волнения. Исходя из линеаризированной системы уравнений движения и учитывая при решении ее методом возмущений лишь два члена ряда, он получил выражение для $\xi(x, t)$ в виде

$$\xi(x, t) = \xi^{(1)}(x, t) + \xi^{(2)}(x, t), \quad (2.2.8)$$

где

$$\xi^{(1)}(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left[i \left(| \omega | \frac{\omega x}{g} - \omega t \right) \right] d\hat{Y}(\omega); \quad (2.2.9)$$

$$\zeta^{(2)}(x, t) = \frac{1}{g} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left[(|\omega| |\omega'| + |\omega'| |\omega|) \frac{x}{g} - (\omega + \omega') t \right] \right\} \times \\ \times \hat{\Phi}(\omega, \omega') d\hat{Y}(\omega) d\hat{Y}(\omega'); \quad (2.2.10)$$

$$\hat{\Phi}(\omega, \omega') = -2i - \frac{\omega\omega' - |\omega\omega'|}{(\omega + \omega')^2 + ||\omega|/\omega + |\omega'|/\omega|} (\omega + \omega') - \\ - \frac{1}{2} \omega\omega' + \frac{1}{2} |\omega\omega'| - \omega^2,$$

$\hat{Y}(\omega)$ и $\hat{Y}(\omega')$ — процессы с независимыми приращениями.

Если принять предположение, что $\zeta^{(1)}$ имеет гауссово распределение, то модели (2.1.4) и (2.2.9) эквивалентны.

Во втором приближении распределение уже будет отличаться от гауссового и $\zeta^{(2)}$ удобно рассматривать как некоторое «возмущение» процесса $\zeta^{(1)}$, которое имеет корреляционную функцию

$$K_{\zeta^{(2)}}(\tau) = \frac{1}{g^2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp [i(\omega + \omega') \tau] \hat{F}(\omega, \omega') S_{\zeta^{(1)}}(\omega) \times \\ \times S_{\zeta^{(1)}}(\omega') d\omega d\omega', \quad (2.2.11)$$

где $\hat{F}(\omega, \omega') = \hat{\Phi}^2(\omega, \omega') \hat{\Phi}(\omega', \omega)$, и спектральную плотность

$$S_{\zeta^{(2)}}(\omega) = \frac{1}{g^2} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(\omega, \omega') S_{\zeta^{(1)}}(\omega - \omega') S_{\zeta^{(1)}}(\omega') d\omega' \quad (2.2.12)$$

при $\hat{F}(\omega, \omega') = \hat{F}(\omega, \omega' - \omega)$, где $S_{\zeta^{(1)}}(\omega)$ — спектральная плотность процесса $\zeta^{(1)}$.

Позднее [307] Тиком была проделана численная проверка модели, которая подтвердила справедливость аппроксимации волновой реализации выражением (2.2.8) с учетом соотношений (2.2.9) — (2.2.12).

Пирсоном [273] построена модель второго порядка на основе решения уравнений волновых движений в форме Лагранжа. Интересно отметить, что некоторые отклонения от гауссова процесса (эффект заострения гребней и уменьшения глубины ложбины) можно проследить не только на моделях второго порядка, но даже на модели первого порядка в лагранжевых переменных [37].

Таким образом, нелинейные гидродинамические модели второго порядка приводят к волновой поверхности, аппликаты которой представляют стационарный негауссов процесс. Свойства этого процесса достаточно полно описываются [как это видно из соотношений (2.2.7) и (2.2.10)] через двумерную спектральную плотность $S_{\zeta}(k_x, k_y)$, что дает возможность считать $S_{\zeta}(k_x, k_y)$ одной из основных вероятностных характеристик.

Вопрос о том, в какой степени некоторые из соотношений, вытекающих из нелинейных моделей, согласуются с экспериментальными данными, рассмотрен в разделе 2.3.

Нелинейные вероятностные гидродинамические модели третьего и более высокого порядков, предложенные Филлипсом [151], Хассельманом [211] и другими исследователями [37], характеризуют волнение как нестационарный вероятностный процесс, в связи с тем что эти модели в условиях резонанса приводят к непрерывному перераспределению энергии между различными спектральными составляющими. По этой причине основные свойства нелинейных моделей третьего и более высоких порядков рассмотрены в части II книги.

2.3. Косвенная проверка вероятностных гидродинамических моделей по натурным данным

Проверка по натурным данным справедливости теоретических результатов является основой для их практического использования. Не имея возможности детального рассмотрения всей совокупности вопросов, ниже обсудим лишь некоторые из них, прямо подтверждающие справедливость отдельных теоретических положений, а косвенно — устанавливающие степень соответствия вероятностных гидродинамических моделей волновой поверхности натуре.*

2.3.1. Аппликаты волновой поверхности

Согласно линейной гидродинамической модели морского волнения, аппликаты волновой поверхности распределены по нормальному закону, а по нелинейной модели распределение аппликат должно иметь положительную асимметрию. Проверка этих предположений по натурным данным, выполненная различными исследователями, показала, что в некоторых случаях распределение волновых ординат довольно хорошо аппроксимируется нормальным законом [14, 143], а в других случаях — незначительно отличается (например, имеет малую положительную асимметрию [65, 233]).

Эти результаты дают основание считать, что нелинейная модель приводит к более точной аппроксимации распределения волновых ординат. Однако отклонения от гауссовости, обусловленные нелинейностью модели, в довольно большом числе случаев малы и допустимо (с определенной степенью приближения) использование нормального закона в качестве аппроксимации распределения волновых ординат. По-видимому, такие отклонения не имеют большого значения для решения инженерных и прогностических задач, но они могут играть существенную роль при интерпретации

* Некоторые вопросы о соотношении линейной и нелинейной моделей частично рассмотрены также в главе 3.

спутниковой информации, расшифровке отраженных радиолокационных сигналов или изучении нелинейных явлений в ветровом волнении.

Для подтверждения сделанного выше вывода на рис. 2.3.1 б приведены на функциональной сетке нормального закона значения эмпирического распределения ординат, вычисленного по данным измерений волнения емкостными волнографами. Из рисунка видно, что распределение хорошо спрямляется на функциональной сетке, и, следовательно, допустимо принятие гипотезы о нормаль-

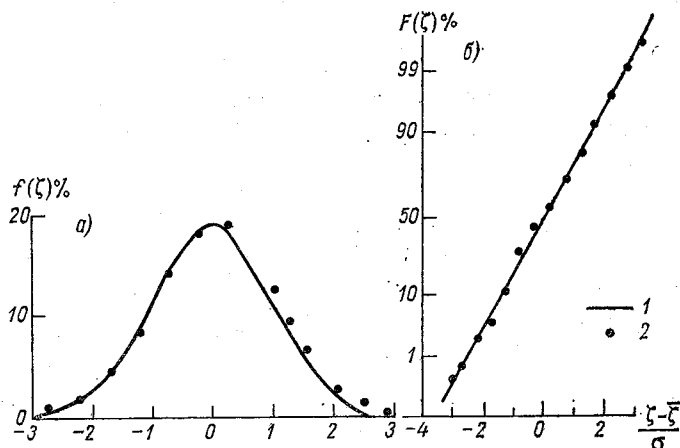


Рис. 2.3.1. Плотность вероятности (а) и функция распределения (б) ординат, вычисленные по записи ветровых волн
1 — нормальное распределение, 2 — натурные данные

ном законе распределения волновых ординат.

В то же время анализ гистограммы (рис. 2.3.1 б) показал, что существует положительная асимметрия $\hat{f}(\xi)$, равная 0,16, т. е. распределение незначительно отличается от гауссова закона. Таким образом, приведенный пример, вычисленный по выборочной совокупности большого объема — свыше 32 тысяч значений ординат, подтверждает сделанный выше вывод.

2.3.2. Уклоны волновой поверхности

Согласно линейной гидродинамической модели волнения, уклоны волновой поверхности $\eta_x \equiv \frac{\partial \xi}{\partial x}$, $\eta_y \equiv \frac{\partial \xi}{\partial y}$ распределены по двумерному нормальному закону

$$\hat{f}(\eta_x, \eta_y) = \frac{1}{2\pi\Delta_2^{1/2}} \exp \left[-\frac{m_{02}\eta_x^2 - 2m_{11}\eta_x\eta_y + m_{20}\eta_y^2}{2\Delta_2} \right], \quad (2.3.1)$$

а по нелинейной модели — распределение уклонов (2.2.3) отличается от нормального закона.

Проверка по натурным данным, выполненная различными исследователями, показала, что в некоторых случаях распределение уклонов довольно хорошо аппроксимируется нормальным законом [10, 95, 122, 155], а в других случаях [64, 132, 114] незначительно отличается от него (средние значения проекций уклонов и коэффици-

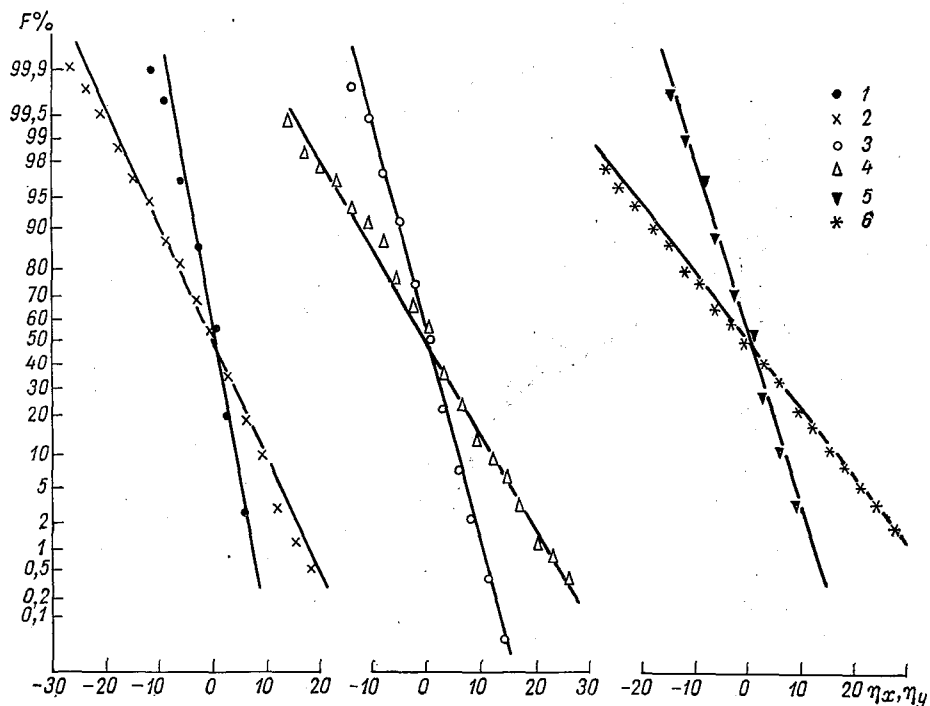


Рис. 2.3.2. Распределения (на сетке нормального закона) проекций уклонов η_x , η_y в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, вычисленные по данным аэростереофотоъемки сильного (1, 2), умеренного (3, 4) волнения на море и слабого волнения (5, 6) на озере

1, 3, 5 — $F(\eta_x)$; 2, 4, 6 — $F(\eta_y)$

циент асимметрии не равны нулю). Как и при обсуждении вида распределения ординат, по-видимому, имеются основания считать, что более общая нелинейная модель приводит к более точной аппроксимации распределения уклонов волновой поверхности. Однако отклонения от гауссовости, обусловленные нелинейностью модели, в довольно большом числе случаев малы и допустимо (с определенной степенью точности) использование в качестве аппроксимации для распределения уклонов нормального закона. Для подтверждения этого вывода рассмотрим распределения уклонов, вы-

численные по данным аэростереофотосъемки волновой поверхности. В качестве исходных данных для расчета служили волновые аппликаты $\zeta_{i,j} \equiv \zeta(x_i, y_j)$, снятые с планшетов АФС волн в узлах сетчатой области $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$. Для вычисления производных ζ_x , ζ_y использовались следующие формулы численного дифференцирования:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \zeta}{\Delta x} &= \frac{1}{2\Delta x} (\zeta_{i+1, j} - \zeta_{i-1, j}); \\ \frac{\Delta \zeta}{\Delta y} &= \frac{1}{2\Delta y} (\zeta_{i, j+1} - \zeta_{i, j-1})\end{aligned}\quad (2.3.2)$$

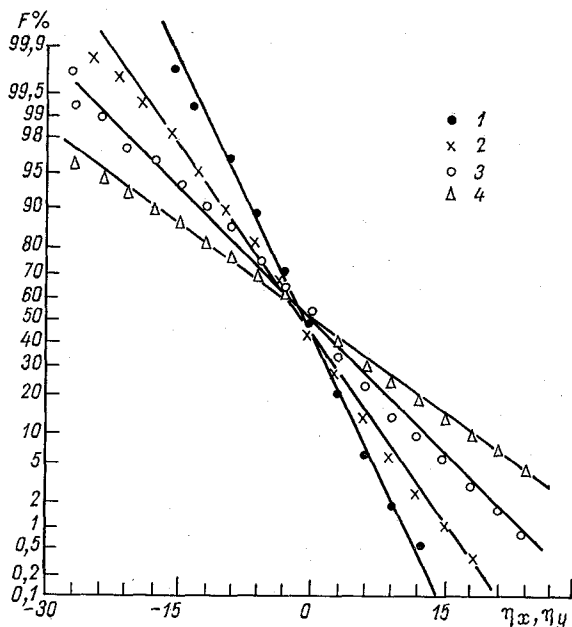


Рис. 2.3.3. Распределения (на сетке нормального закона) проекций η_x (1, 2) и η_y (3, 4) уклонов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, вычисленные по натурным данным по схеме (2.3.2) (1, 3), (2.3.3) (2, 4)

или

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \zeta_{ij}}{\Delta x} &= \frac{2}{3\Delta x} (\zeta_{i+1, i} - \zeta_{i-1, j}) - \frac{1}{12\Delta x} (\zeta_{i+2, j} - \zeta_{i-2, j}); \\ \frac{\Delta \zeta_{ij}}{\Delta y} &= \frac{1}{3\Delta y} (\zeta_{i, j+1} - \zeta_{i, j-1}) - \frac{1}{12\Delta x} (\zeta_{i, j+2} - \zeta_{i, j-2}).\end{aligned}\quad (2.3.3)$$

На рис. 2.3.2 и 2.3.3 приведены на функциональной сетке нормального закона значения эмпирических распределений проекций

уклонов в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях. Представленные на рис. 2.3.2 распределения относятся к волнению различной интенсивности (штормовое, умеренное, слабое) и разным географическим районам. Из рисунка видно, что все испытываемые распределения, независимо от интенсивности волнения и географического района, хорошо спрямляются на функциональной сетке нормального закона.

Таким образом, допустимо принять гипотезу о нормальном законе распределения проекций уклонов. Такой же вывод можно сделать и по данным рис. 2.3.3. Эмпирические распределения, представленные на этом рисунке, вычислены по величинам $(\Delta\zeta/\Delta x, \Delta\zeta/\Delta y)$, полученным по разным конечно-разностным схемам.

Выше были проверены на нормальность только маргинальные распределения проекции уклонов в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Из (2.3.1) следует, что при $m_{11} = 0$ двумерное нормальное распределение $f(\eta_x, \eta_y)$ будет равно произведению маргинальных $f(\eta_x) f(\eta_y)$.

Это достигается в том случае, когда за оси координат выбраны генеральное и перпендикулярное к нему направления [85]. Представленные на рис. 2.3.3 данные относятся именно к такой ситуации. Учитывая отмеченное выше свойство распределения (2.3.1) и допустимость аппроксимации нормальным законом эмпирических распределений, представленных на рис. 2.3.3, можно сделать вывод о допустимости принятия гипотезы и о двумерном нормальном распределении проекций уклонов.

В табл. 2.3.1 приведены значения оценок числовых характеристик уклонов волновой поверхности, вычисленные по натурным данным, относящимся к различным условиям волнообразования. Большинство значений из табл. 2.3.1 вычислено по схеме (2.3.2); для выявления возможных расхождений за счет изменения вычислительной схемы по планшету № 721 (вторая строка таблицы) были рассчитаны аналогичные оценки по соотношениям (2.3.3). В первых же строках этой же таблицы приведены оценки, вычисленные по выборочным совокупностям, относящимся к различным планшетам АФС (№ 721, 722, 723), но характеризующим близлежащие участки волновой поверхности, и поэтому эти данные можно считать статистическими оценками единых вероятностных характеристик. Выборочные совокупности, полученные по каждому планшету, составляли 5—10 тысяч значений проекций уклонов.

Для нормальной выборки объемом 5 тысяч значений допустимы на 1%-ном уровне значимости отклонения в асимметрии не более чем на 0,081, а в эксцессе — не более чем на 0,15. Таким образом, по этому критерию практически во всех представленных в табл. 2.3.1 случаях необходимо считать, что существует асимметрия $C_{A\eta_y}$ в направлении ветра, в большинстве случаев — положительный эксцесс.

Указанный критерий справедлив для независимых случайных величин. Уклоны волновой поверхности, объединенные в выбо-

Таблица 2.3.1

Значения статистических характеристик уклонов взволнованной поверхности (по натурным данным)

Район измерения и дата	Условный номер планшета	Среднее (10^{-4})		Дисперсия (10^{-4})		Асимметрия		Экссесс		Мода (10^{-4})	
		$\bar{h}_x'$	$\bar{h}_y'$	D_{h_x}	D_{h_y}	C_{Ah_x}	C_{Ah_y}	C_{Eh_x}	C_{Eh_y}	$M_0(h_x)$	$M_0(h_y)$
Озеро 23/IX 1965 г.	721	-19	1	21	38	0,048	0,003	0,604	0,783	-27	0
	721 *	-31	-4	44	91	0,068	0,016	0,555	0,700	-48	-9
	722	-17	-28	29	54	-0,019	-0,297	1,87	0,457	-14	63
	723	-2	-38	20	40	0,012	-0,329	0,978	1,182	-4	28
Озёрс 22/IX 1965 г.	418	-7	-1	19	34	0,062	-0,192	1,11	0,047	-15	55
Море 3/X 1964 г.	4331	—	—	35	74	-0,147	-0,012	0,184	0,104	54	31
	4581	—	—	20	86	-0,024	-0,174	0,527	1,13	-19	41
Море 20/IX 1963 г.	1394	—	—	16	42	-0,080	-0,128	-0,037	-0,252	11	13
	1492	12	20	6	48	0,010	0,061	-0,124	-0,020	11	-1

* Вычисления выполнены по схеме (2.2.3).

рочную совокупность (как это показано в разделе 4.3), коррелированы.

Один из возможных способов учета этой коррелированности состоит в том, чтобы вычислить так называемое эквивалентное число независимых (точнее, некоррелированных) значений выборочной совокупности к радиусу корреляции. Общий объем выборочной совокупности (№ 721, 722, 723) составляет 26 тысяч значений, радиус корреляции этой последовательности равен 6, т. е. эквивалентное число независимых данных — 4,6 тысячи значений при средней величине $\bar{C}_{A_{\eta}}^*$, равной 0,2. Из этого следует, что гипотеза о нали-

чии асимметрии распределения должна быть принята. Рассуждая аналогичным образом, по данным табл. 2.3.1 можно сделать выводы о том, что в распределении уклонов есть незначительный эксцесс, наиболее вероятные и средние значения проекции уклонов не равны нулю. Эти выводы справедливы (как видно из данных табл. 2.3.1) независимо от вида конечно-разностной схемы, принятой для вычисления.

Таким образом, выполненный анализ натурных данных подтвердил сделанный выше вывод о наличии в распределении уклонов незначительных отклонений от нормального закона и в то же время о возможности использования этого закона для практических расчетов.

2.3.3. Экстремумы волновых колебаний

Семейство распределений (2.1.10) экстремумов случайной функции зависит от среднеквадратичной ширины спектра ε ; с увеличением ε распределение изменяется от рэлеевского (при $\varepsilon \rightarrow 0$) до нормального (при $\varepsilon \rightarrow 1$). Между средним значением m_{ζ_m} максимумов ζ_m и величиной ε существует соотношение

$$m_{\zeta_m} = \left[\left(\frac{\pi D \zeta}{2} \right) (1 - \varepsilon^2) \right]^{1/2}. \quad (2.3.4)$$

Возможность аппроксимации эмпирических распределений максимумов на волнограммах теоретическим распределением (2.1.10) была подтверждена в работах [143, 233]. В работе [21] по данным обработки 22 продолжительных волнограмм подтверждена при ε от 0,2 до 0,9 зависимость (2.3.4).

Эти исследования подтвердили, таким образом, справедливость использования линейной модели при описании вероятностных свойств волнения.

Распределение (2.1.10) послужило теоретической основой аппроксимации распределения высот волн распределением Рэлея. Принятый в океанологии способ выделения волн без учета вторичных экстремумов реализации дает возможность рассматривать волнение как узкополосный случайный процесс [21]. Для таких процессов Лонге-Хиггинс доказал [241], что рэлеевский закон харак-

теризует (при $\varepsilon \rightarrow 0$) распределение размахов, т. е. расстояний от средней линии до максимума и минимума случайной функции. Как показано в главе 5 на основе анализа многочисленных натуральных данных, распределение высот волн хорошо аппроксимируется распределением Рэлея.

Неоднократно подтверждались экспериментальными данными [9, 10, 21, 76] следующие зависимости, вытекающие из линейной модели волнения:

$$\bar{h} = \sqrt{2\pi D_{\zeta}}; \quad (2.3.5)$$

$$\bar{\tau} = 2\pi \left(\frac{m_2}{m_0} \right). \quad (2.3.6)$$

2.3.4. Огибающая волнового процесса

Согласно линейной модели, вероятностные свойства верхней $O_{\text{в}}^{\text{max}}(t)$ и нижней $O_{\text{н}}^{\text{max}}(t)$ огибающих волнового процесса $\zeta(t)$ должны быть одинаковы. На примере продолжительной записи

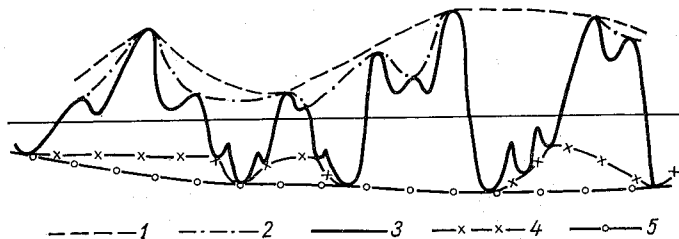
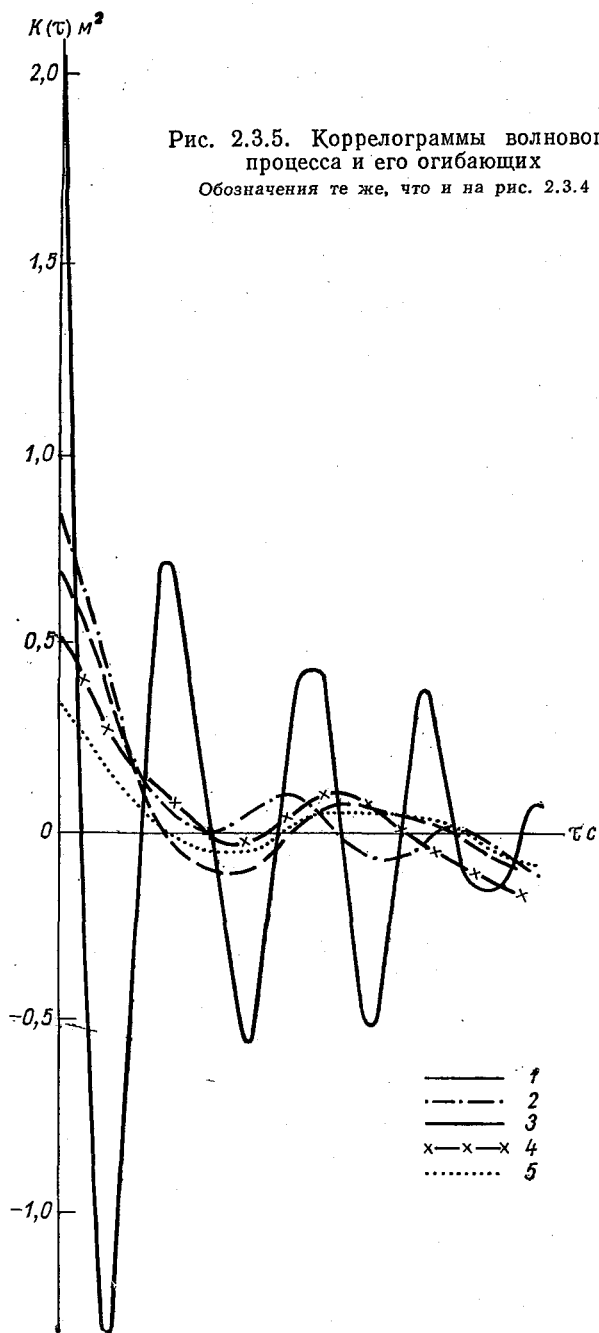


Рис. 2.3.4. Участок реализации штормового волнения и его огибающие

1 — $O_{\text{в}}(t)$; 2 — $O_{\text{в}}^{\text{max}}(t)$; 3 — $\zeta(t)$; 4 — $O_{\text{н}}^{\text{max}}(t)$; 5 — $O_{\text{н}}(t)$

штормового волнения в работе [89] показано, что $O_{\text{в}}(t)$ и $O_{\text{н}}(t)$ флуктуируют почти в противофазе, спектральные плотности, $S_{O_{\text{в}}}(\omega)$, $S_{O_{\text{н}}}(\omega)$ по внешнему виду близки, когерентность колебаний $O_{\text{в}}(t)$ и $O_{\text{н}}(t)$ на частоте максимума спектра достигает 0,8. Перечисленные свойства подтверждают справедливость линейной теории. Однако на этом же примере показано, что площадь под спектром верхней огибающей примерно на 20% больше соответствующей площади у нижней огибающей; кроме того, существует, хотя и незначительная по величине, квадратурная составляющая взаимной спектральной плотности $S_{O_{\text{в}}O_{\text{н}}}(\omega)$. Эти свойства можно объяснить, исходя только из нелинейной модели. Попутно рассмотрим на основе анализа натуральных данных некоторые соотношения, непосредственно не вытекающие из гидродинамических моделей. На рис. 2.3.4 даны огибающие, проведенные с учетом всех экстре-



мумов функции $\xi(t)$ (они обозначены $O_{\text{в}}^{\text{max}}(t)$, $O_{\text{н}}^{\text{max}}(t)$), и огибающие $O_{\text{в}}(t)$, $O_{\text{н}}(t)$, проведенные только по основным волнам.

На рис. 2.3.5 показаны коррелограммы волнового процесса и его огибающих. Из рисунка видно, что дисперсия процесса более чем в два раза превышает любую из дисперсий огибающих. Дисперсии огибающих $O_{\text{в}}(t)$ и $O_{\text{в}}^{\text{max}}(t)$ всегда больше, чем дисперсии огибающих $O_{\text{н}}(t)$ и $O_{\text{н}}^{\text{max}}(t)$ соответственно; кроме того,

$$D_{O_{\text{в}}^{\text{max}}} > D_{O_{\text{в}}}; \quad D_{O_{\text{н}}^{\text{max}}} > D_{O_{\text{н}}}; \quad D_{O_{\text{в}}} > D_{O_{\text{н}}}. \quad (2.3.7)$$

Для сопоставления с соотношением (2.1.27) в табл. 2.3.2 приведены значения $D_{O_{\text{в}}}$ и D_{ξ} , вычисленные по натурным данным. Соотношение (2.1.25), предложенное для узкополосного процесса $\xi(t)$ и огибающей $O_{\text{в}}^{\text{max}}(t)$, приводит к величине 0,43 для отношения $D_{O_{\text{в}}}/D_{\xi}$. Из таблицы видно, что для реального волнового процесса $D_{O_{\text{в}}}/D_{\xi}$ мало отличается от 0,43.

Таблица 2.3.2

Значения $D_{O_{\text{в}}}$ и D_{ξ} , по натурным данным

Волнение	$D_{\xi} \text{ м}^2$	$D_{O_{\text{в}}} \text{ м}^2$	$D_{O_{\text{в}}}/D_{\xi}$
Ветровые волны:			
$\bar{h} = 3,7 \text{ м}, \bar{\tau} = 8,6 \text{ с} \dots\dots\dots$	2,4	0,9	0,38
$\bar{h} = 3,2 \text{ м}, \bar{\tau} = 8,4 \text{ с} \dots\dots\dots$	2,1	0,9	0,43
Зыбь: $\bar{h} = 0,8 \text{ м}, \bar{\tau} = 6,5 \text{ с} \dots\dots\dots$	0,85	0,3	0,36

На рис. 2.3.5 также видно, что средние флуктуационные периоды (по первым нулям коррелограмм) процессов $O_{\text{в}}(t)$ и $O_{\text{н}}(t)$, а также $O_{\text{в}}^{\text{max}}(t)$ и $O_{\text{н}}^{\text{max}}(t)$ попарно равны между собой.

На рис. 2.3.6 приведены оценки взаимных корреляционных функций процесса $\xi(t)$ и его огибающих. Из рисунка видно, что все взаимные характеристики обнаруживают общие флуктуации с процессом $\xi(t)$, однако уровень взаимной общности достаточно мал: при общей дисперсии процесса $D_{\xi} = 2,3 \text{ м}^2$ любая из взаимных дисперсий не превышает $0,3 \text{ м}^2$. Взаимная коррелированность процесса $\xi(t)$ с его огибающими по максимумам больше, чем с огибающими $O_{\text{н}}(t)$ и $O_{\text{в}}(t)$ без учета вторичных максимумов. Процессы $\xi(t)$ и $O_{\text{н}}(t)$ практически не коррелированы.

Таким образом, волновая огибающая может рассматриваться как случайный процесс $O(t)$, дисперсия которого не превышает половины дисперсии исходного процесса $\xi(t)$; взаимная коррелированность $\xi(t)$ и $O(t)$ достаточно мала; спектральная плотность $S_o(\omega)$ имеет резко выраженный максимум и сосредоточена в достаточно узкой низкочастотной области.

На основе рассмотренных выше примеров отметим, что натурные данные подтверждают свойства, характерные для нелинейной модели волновой поверхности. Однако эти же данные показывают, что степень отклонения от аппроксимаций вероятностных характеристик, полученных на основе линейной модели, как правило, не очень велика. При этом подчеркнем, что использование соотношений линейной модели целесообразно лишь тогда, когда в каждом

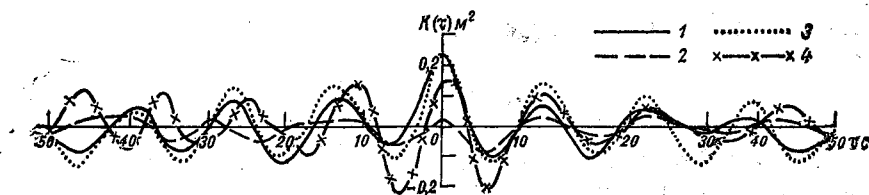


Рис. 2.3.6. Оценки взаимных корреляционных функций процесса и его огибающих

$$1 - K_{\zeta O_B}; \quad 2 - K_{\zeta O_H} \quad 3 - K_{\zeta O_B}^{\max}; \quad 4 - K_{\zeta O_B}^{\min}$$

конкретном случае, применительно к каждой решаемой задаче дана оценка допустимости пренебрежения нелинейными эффектами.

Глава 3

Частотный спектр ветрового волнения

¶ Подавляющая часть инструментальных измерений волн выполнена при помощи волнографов, регистрирующих изменение во времени возвышений волновой поверхности в фиксированной точке или очень ограниченной области, отождествляемой с точкой. Наиболее общей статистической характеристикой волнения, которую можно определить по результатам таких измерений, является одномерная функция спектральной плотности волновых аппликат $S_{\zeta}(\omega)$, именуемая частотным спектром волнения. Функция $S_{\zeta}(\omega)$ характеризует распределение дисперсий волновых аппликат по частотам колебаний. Ее физический смысл становится более определенным в вероятностных гидродинамических моделях, представляющих волновую поверхность как результат наложения плоских волн, распространяющихся в одинаковом направлении. В этом случае частотный спектр характеризует распределение по частотам квадратов амплитуд гармоник. За направление распространения элементарных спектральных составляющих принимается генеральное

направление распространения волн, наблюдаемых на морской поверхности.

Энергия E , как известно, пропорциональна квадрату амплитуды волны и по частотному спектру можно определить как ее среднюю величину

$$E = \rho_{\omega} g \int_0^{\infty} S_{\xi}(\omega) d\omega, \quad (3.1)$$

так и ее величину в заданном интервале частот

$$\Delta E = \rho_{\omega} g \int_{\omega}^{\omega + \Delta \omega} S_{\xi}(\omega) d\omega. \quad (3.2)$$

В главе 2 было показано, что в рамках линейной гидродинамической модели волнения можно по частотному спектру определить основные вероятностные характеристики волновой поверхности. Функция $S_{\xi}(\omega)$ является интегралом от более общей функции $S_{\xi}(\omega, \theta)$, получившей наименование «частотно-направленный спектр» и рассмотренной в главе 4 книги.

Частотный спектр формируется в результате воздействия турбулентного воздушного потока на водную поверхность и изменяется по мере развития и затухания волнения в зависимости от сочетания главным образом следующих факторов: количества энергии, передаваемой воздушным потоком волнам в различных диапазонах частот, внутреннего энергообмена, диссипации энергии и дисперсии фазовых скоростей спектральных составляющих.

На форму частотного спектра существенно сказывается также влияние ряда других факторов и в первую очередь наложения волновых систем разного происхождения, например вынужденных ветровых волн на волны зыби, свободно распространяющиеся из районов, находящихся на разном удалении от места наблюдений над волнением. При существенном различии в частотных диапазонах систем зыби и ветровых волн спектр суммарного волнения будет многовершинным. Если же частотные характеристики основных волновых систем, составляющих волнение, сравнительно близки между собой, частотный спектр может быть одновершинным, но спектральная функция будет иметь довольно сложный вид.

Наиболее простой вид имеет частотный спектр ветровых волн, развивающихся при так называемых «идеальных» условиях волнообразования: устойчивом по скорости и направлению ветра и отсутствии волн зыби, а также спектр затухающего ветрового волнения, когда ветер внезапно прекратился или ослаб, не изменяя своего направления. В обоих этих случаях частотный спектр имеет один четко выраженный главный максимум на частоте, несколько меньшей средней частоты волнения, а для ветровых волн, кроме того, ряд вторичных существенно менее значительных максимумов спектральной плотности на нисходящей ветви графика функции $S_{\xi}(\omega)$.

В последнее время высказано предположение [76], что в частотном спектре ветрового волнения при устойчивом ветре и достаточно большой глубине всегда должны наблюдаться два максимума, характеризующих две системы ветровых волн: дорезонансную и резонансную. Первая система имеет фазовую скорость, которая быстро увеличивается по мере удаления от подветренного берега и достигает энергетического насыщения при фазовой скорости, несколько меньшей скорости ветра на верхней границе турбулентного пограничного слоя; вторая система имеет фазовую скорость, постоянную и равную скорости ветра на указанном горизонте. При анализе многочисленных натурных данных авторам книги не удалось обнаружить спектры, о которых говорится в работе [76]; пики на частотах, меньших частоты основного максимума спектра, обычно были связаны с наличием волн зыби в поле ветрового волнения или с недостаточно обоснованным выбором параметров эмпирического спектрального анализа при расчете спектра по волнограмме. Указанное явление не было также обнаружено во время международного эксперимента в Северном море [213], несмотря на то, что особое внимание было уделено анализу ветрового волнения, развивающегося при устойчивых ветрах. Возможно, что авторы работы [76] имеют в виду явление, наблюдающееся очень редко (о чем они сами указывают в своей книге) и не характерное для процесса развития ветрового волнения.

Статистические оценки частотного спектра, как уже указывалось в главе 1, определяются по данным измерений волн за сравнительно небольшие промежутки времени (промежутки квазистационарности) в предположении эргодичности волнового процесса. Выполнено немалое число расчетов статистических оценок функции $S_{\xi}(\omega)$ для волнения разного типа и интенсивности. Данные, опубликованные отдельными исследователями, более или менее различаются между собой, главным образом по причине различий в точностях измерений волн волнографами разных типов, методах и продолжительности измерений, приемах расчета вероятностных характеристик и анализа полученных результатов. В последующих разделах предпринята попытка обобщить наиболее значимые результаты, опубликованные ранее в нашей стране и за рубежом, и сопоставить их с новыми расчетами частотного спектра, выполненными авторами специально для этой книги.

3.1. Ветровые волны

Характерными особенностями частотного спектра ветровых волн являются резкое возрастание спектральной плотности от низких частот к частоте максимума, более медленное ее убывание при переходе к высоким частотам и смещение максимума спектра к меньшим частотам по мере развития волнения. Частотный спектр ветровых волн обычно делят на ряд интервалов, различающихся

между собой по своим свойствам и факторам, обуславливающим их формирование. К основным относятся гравитационный интервал, на который падает преобладающая часть волновой энергии, гравитационно-капиллярный, капиллярный и вязкий интервалы. Последние три интервала, как уже указывалось в предисловии, нами не рассматриваются. Они играют довольно существенную роль в формировании шероховатости волновой поверхности и определяют в значительной степени условия отражения от нее и рассеяния электромагнитных волн. В связи с прикладным значением вопросов изучения спектра очень мелких волн они в последние годы достаточно широко освещены в научной литературе [82, 181, 253, 262, 274, 277, 308, 311].

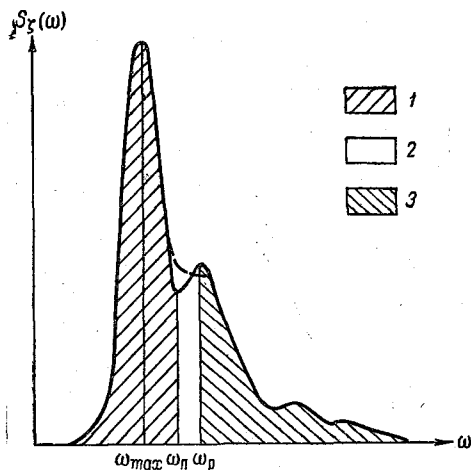


Рис. 3.1.1. Границы областей гравитационного интервала частотного спектра

1 — область основного максимума; 2 — переходная; 3 — равновесная. Пунктир — недостаточно четко выраженная переходная область

Гравитационный интервал частотного спектра можно разделить на три области: область охватывающую восходящую ветвь спектра и основной максимум спектральной плотности, которая в дальнейшем именуется нами областью основного максимума спектра, равновесную область и очень небольшой участок спектра, разделяющий указанные выше области и именуемый нами переходной областью спектра.

На эмпирических спектрах граница между различными его областями выражена не всегда достаточно отчетливо, что зависит, по-видимому,

от достоверности статистических оценок спектральной плотности. Для случая, когда графики $S_{\xi}^*(\omega)$ получены по продолжительным волнограммам, на которых зафиксированы ветровые волны, развивающиеся при очень устойчивом однородном ветровом поле, границы между тремя областями гравитационного интервала спектра проходят так, как это схематически показано сплошной линией на рис. 3.1.1.

Как видно из рисунка, граница между областью основного максимума и переходной областью определяется минимумом, а между переходной и равновесной областями — вторичным максимумом функции $S_{\xi}^*(\omega)$. В отдельных случаях эти вторичные минимум и максимум на границах переходной области спектра выражены недостаточно определенно, а иногда вместо них на графиках $S_{\xi}^*(\omega)$

отмечается лишь заметное нарушение плавного хода изменений величин спектральной плотности (рис. 3.1.1, пунктир). Более подробно этот вопрос рассмотрен на стр. 92—106.

По мнению большинства исследователей, область основного максимума спектра является главным аккумулятором энергии, поступающей волнам от воздушного потока. Предполагается, что непосредственная передача энергии происходит в очень узкой области частот в районе спектрального максимума, и отсюда она перераспределяется по другим частотам, по-видимому, благодаря механизму слабого нелинейного взаимодействия [213] между спектральными составляющими.* Переход энергии к более низким частотам считается причиной, обуславливающей смещение основного максимума спектральной плотности по мере роста ветровых волн. В отличие от области основного максимума спектра, в равновесной области происходит главным образом диссипация энергии по причине сильных нелинейных взаимодействий между спектральными составляющими, приводящих к неустойчивости волнового движения, которая проявляется внешне в форме опрокидывания гребней волн.

На гравитационный интервал частотного спектра падает более 99% общей волновой энергии, из которой 70—80% приходится на область основного максимума энергии, несколько процентов на переходную область спектра и 20—30% на его равновесную область [29].

3.1.1. Область основного максимума спектра

Исходя из общего вида графика $S_{\zeta}^*(\omega)$ (рис. 3.1.1), можно принять следующую зависимость для аппроксимации частотного спектра в области его основного максимума [29]:

$$S_{\zeta}(\omega) = A\omega^{-k} \exp(-B\omega^{-n}), \quad 0 < \omega < \omega_n, \quad (3.1.1)$$

где A , k , B и n — параметры аппроксимации.

Для определения параметров запишем вначале нулевой m_0 и второй m_2 моменты усеченного спектра (3.1.1). Исходя из того что

$$m_r(\omega) = \int_0^{\omega} \omega^r S_{\zeta}(\omega) d\omega, \quad (3.1.2)$$

получаем

$$m_0(\omega_n) = \int_0^{\omega_n} A\omega^{-k} \exp(-B\omega^{-n}) d\omega; \quad (3.1.3)$$

$$m_2(\omega_n) = \int_0^{\omega_n} A\omega^{2-k} \exp(-B\omega^{-n}) d\omega \quad (3.1.4)$$

* Более подробно этот вопрос обсуждается в главе 6.

и после подстановки $t = B\omega^{-n}$

$$m_0(\omega_n) = \frac{AB \frac{1-k}{n}}{n} \int_{B\omega_n^{-n}}^{\infty} t^{\frac{k-n-1}{n}} \exp(-t) dt; \quad (3.1.5)$$

$$m_2(\omega_n) = \frac{AB \frac{3-k}{n}}{n} \int_{B\omega_n^{-n}}^{\infty} t^{\frac{k-n-3}{n}} \exp(-t) dt. \quad (3.1.6)$$

Нетрудно заметить, что

$$\int_{B\omega_n^{-n}}^{\infty} t^{\frac{k-n-1}{n}} \exp(-t) dt = \Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right) - \gamma\left(\frac{k-1}{n}, B\omega_n^{-n}\right); \quad (3.1.7)$$

$$\int_{B\omega_n^{-n}}^{\infty} t^{\frac{k-n-3}{n}} \exp(-t) dt = \Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right) - \gamma\left(\frac{k-3}{n}, B\omega_n^{-n}\right), \quad (3.1.8)$$

где $\Gamma(x)$ — полная гамма-функция, а $\gamma(x, y)$ — неполная гамма-функция.

Обозначая далее разность полной и неполной гамма-функции через $\hat{\gamma}$, получаем

$$m_0(\omega_n) = \frac{AB \frac{1-k}{n}}{n} \hat{\gamma}\left(\frac{k-1}{n}, B\omega_n^{-n}\right); \quad (3.1.9)$$

$$m_2(\omega_n) = \frac{AB \frac{3-k}{n}}{n} \hat{\gamma}\left(\frac{k-3}{n}, B\omega_n^{-n}\right). \quad (3.1.10)$$

Нулевой и второй моменты спектра связаны следующим соотношением со средней частотой $\bar{\omega}(\omega_n)$ усеченного спектра:

$$\bar{\omega}(\omega_n) = \left(\frac{m_2(\omega_n)}{m_0(\omega_n)}\right)^{1/2}. \quad (3.1.11)$$

С другой стороны, из условия, что в точке $\omega = \omega_{\max}$ производная функции спектральной плотности по частоте становится равной нулю, получаем по (3.1.1)

$$\frac{dS_{\xi}(\omega)}{d\omega} = A(nB\omega_{\max}^{-k-n-1} - k\omega_{\max}^{-k-1}) \exp(-B\omega_{\max}^{-n}) = 0, \quad (3.1.12)$$

что может иметь место только при условии

$$nB\omega_{\max}^{-k-n-1} = k\omega_{\max}^{-k-1},$$

т. е. когда

$$B_i = \frac{k}{n} \omega_{\max}^n. \quad (3.1.13)$$

После подстановки (3.1.13) в (3.1.9)

$$A = m_0(\omega_n) \frac{n \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k-1}{n}} \omega_{\max}^{k-1}}{\hat{\gamma} \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_n} \right)^n \right]}. \quad (3.1.14)$$

И тогда

$$\Omega(\omega_n) = \frac{\omega_{\max}}{\omega(\omega_n)} = \frac{\sqrt[n]{\frac{k}{n}}}{\sqrt{\frac{\hat{\gamma} \left[\frac{k-3}{n}, \frac{k}{n} \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_n} \right)^n \right]}{\hat{\gamma} \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_n} \right)^n \right]}}, \quad (3.1.15)$$

а

$$\kappa(\omega_n) = \frac{S_{\max} \omega_{\max}}{m_0(\omega_n)} = \frac{n \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k-1}{n}} \exp \left[-\frac{k}{n} \right]}{\hat{\gamma} \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_n} \right)^n \right]}. \quad (3.1.16)$$

Таким образом, получено четыре соотношения (3.1.13) — (3.1.16), содержащих четыре искомого параметра аппроксимации (3.1.1).

Для расчета величин $\omega_{\max}$, $S_{\max}$, ω_n , $m_0(\omega_n)$, $m_2(\omega_n)$, $\Omega(\omega_n)$ и $\kappa(\omega_n)$ и последующего решения уравнений (3.1.13) — (3.1.16) в работе [29] использованы статистические оценки функции спектральной плотности, полученные по 41 записи ветровых волн. В результате определены средние величины и соотношения для оценки параметров в аппроксимации (3.1.1):

$$k=6, \quad n=5, \quad B=1,2\omega_{\max}^5,$$

$$A = m_0(\omega_n) \frac{6\omega_{\max}^5}{\hat{\gamma} \left[1; 1,2 \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_n} \right)^5 \right]} = \frac{6m_0(\omega_n) \cdot \omega_{\max}^5}{\exp \left[-1,2 \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_n} \right)^5 \right]},$$

и следующее общее выражение для функции спектральной плотности в области основного максимума частотного спектра:

$$S_{\xi}(\omega) = 6m_0(\omega_n) \omega_{\max}^5 \omega^{-6} \exp \left\{ -1,2 \left[\left(\frac{\omega_{\max}}{\omega} \right)^5 - \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_n} \right)^5 \right] \right\}, \quad 0 < \omega < \omega_n. \quad (3.1.17)$$

Из (3.1.17) видно, что в области максимума частотного спектра величина $S_{\xi}(\omega)$ зависит от частоты максимума, частоты, определяющей границу области, и нулевого момента усеченного спектра. Все эти характеристики, как это показано далее, тесно связаны с элементами видимых волн и основными факторами волнообразования.

Сопоставление (3.1.17) с натурными данными выполнено таким образом, чтобы по возможности избежать влияния выборочной изменчивости статистических оценок спектральной плотности на результаты сравнения аппроксимативных и эмпирических спектров. Для этой цели вместо отдельных значений $S_{\xi}^*(\omega)$, содержащих более или менее существенные погрешности (особенно на частоте $\omega_{\max}$), сопоставлялись значения нормированного интегрального спектра вида

$$\hat{L}(\omega) = \frac{\int_0^{\infty} A \omega^{-k} \exp[-B \omega^{-n}] d\omega}{\int_0^{\omega} A \omega^{-k} \exp[-B \omega^{-n}] d\omega} \quad (3.1.18)$$

Нормировка (3.1.18), кроме того что она позволяет перейти от изменчивых отдельных оценок $S_{\xi}(\omega)$ к более устойчивым их интегральным значениям, выбрана еще и потому, что для полученных нами значений коэффициентов аппроксимации $k = 6$ и $n = 5$, т. е. для случая, когда $n = k - 1$, функция $\hat{L}(\omega)$ спрямляется* на билогарифмической сетке по закону

$$\ln \ln \hat{L}(\omega) = \ln B - n \ln \omega, \quad (3.1.19)$$

что делает возможным представить наглядно результаты сопоставления. Единственная возникающая при этом трудность заключается в необходимости при экспериментальном определении числового значения $\tilde{D} = \int_0^{\infty} A \omega^{-k} \exp[-B \omega^{-n}] d\omega$ вычислить величину $\Delta \tilde{D} = \tilde{D} - m_0(\omega_n)$ по соотношению (3.1.17), так как по натурным данным известна лишь величина $m_0(\omega_n)$. В противном случае пришлось бы строить для каждого случая отдельную сетку с учетом нормировки

$$\hat{L}(\omega, \omega_n) = \frac{\int_0^{\omega_n} A \omega^{-k} \exp[-B \omega^{-n}] d\omega}{\int_0^{\omega} A \omega^{-k} \exp[-B \omega^{-n}] d\omega}, \quad (3.1.20)$$

* При $n = k - 1$ можно путем подстановки в (3.1.18) $t = \omega^{1-k}$ показать, что $\hat{L}(\omega) = \exp[B \omega^{-n}]$.

из которой следует соотношение

$$\ln \ln \hat{L}(\omega, \omega_n) = \ln B + \ln(\omega^{-n} - \omega_n^{-n}). \quad (3.1.21)$$

На рис. 3.1.2 приведены результаты сопоставления (3.1.18) с натурными данными для пяти случаев, охватывающих широкий диапазон условий волнообразования. Три из этих случаев относятся к океанскому волнению, а два — к волнению на внутренних водоемах. Как видно из рисунка, значения $\hat{L}(\omega)$ по натурным данным хорошо спрямляются на функциональной сетке вида (3.1.18); прямые линии параллельны между собой и удовлетворяют аппроксимации (3.1.17) при $n = 5$ и $B = 1,2 \omega_{\max}^5$, что указывает на вполне удовлетворительное согласие этой аппроксимации с натурными данными.

Необходимо обратить внимание на то обстоятельство, что аппроксимация (3.1.17) получена главным образом по результатам измерений штормового волнения в океане. На ранних стадиях развития волнения спектральная плотность в области основного максимума спектра изменяется по частоте более резко, чем это следует из аппроксимации (3.1.17). Нередко ее значения на частоте максимума и вблизи нее превышают предельные величины, определенные Филлипсом для границы устойчивости волнового движения (см. стр. 92). Однако при довольно близких условиях волнообразова-

ния величина спектральной плотности в области максимума колеблется в значительных пределах, что затрудняет точную аппроксимацию функции спектральной плотности при малых разгонах ветра. Так, например, при анализе записей ветрового волнения, выполненных со специального основания, установленного на глубине 40 м, емкостными волнографами (при скорости ветра 10—12 м/с), оказалось, что на частотных спектрах, рассчитанных по трем последовательным участкам непрерывной записи волнения со средней дисперсией 100 см^2 ($\bar{h} = 25 \text{ см}$), в одном случае (начальный участок записи волнения) вблизи максимума отмечалась область, в которой величины $S_{\xi}(\omega)$ превышали равновесные значения (до 20%), в другом (средний участок записи) максимум спектральной плотности был меньше равновесного значения, а в конце записи — снова больше равновесного значения (до 70%). По

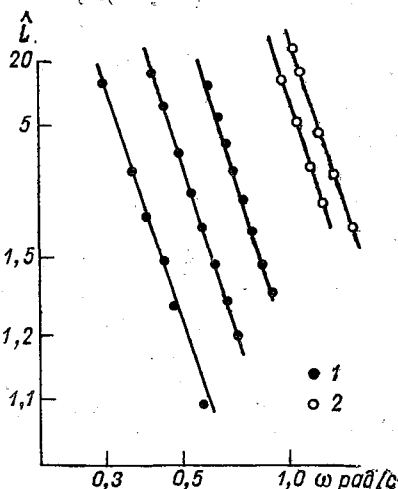


Рис. 3.1.2. Сопоставление расчетных спектров (3.1.18) с натурными данными для волнения в океане (1) и волнения при ограниченном разгоне (2)

записи волнения, которая была выполнена через два часа ($\bar{h} = 142$ см), спектральная плотность на частоте максимума не превышала своего равновесного значения.

На основе анализа данных международного эксперимента «JONSWAP» [213] группа исследователей под руководством Хассельмана предложила следующую аппроксимацию частотного спектра с целью уточнения спектральной плотности на частоте максимума в условиях ограниченных разгонов ветра:

$$S_{\zeta}(\omega) = \hat{\alpha} g^2 \omega^{-5} \exp \left[-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega} \right)^4 \right] \gamma \exp \frac{-(\omega - \omega_{\max})^2}{2\sigma^2 \omega_{\max}^2}, \quad (3.1.22)$$

где γ и σ — константы, а $\hat{\alpha}$ зависит от скорости ветра и его разгона. Эта аппроксимация является как бы дальнейшим развитием аппроксимации, полученной Пирсоном и Московитцем для условий полностью развитого волнения:

$$S_{\zeta}(\omega) = 8,1 \cdot 10^{-3} g^2 \omega^{-5} \exp \left[-\frac{5}{4} \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega} \right)^4 \right]. \quad (3.1.23)$$

В более поздней работе [215] Хассельман и его соавторы на основе не очень строгого анализа данных измерений волн в Атлантическом океане (значительная часть этих данных недостаточно обоснованно отброшена) пришли к выводу, что аппроксимацию (3.1.22), которая была получена для малых «разгонов» ветра, можно в первом приближении рекомендовать для более широкого диапазона условий.

На рис. 3.1.3 сопоставлены результаты расчета максимума спектральной плотности по соотношениям (3.1.17), (3.1.22) и (3.1.23) и натурным данным, относящимся к почти полностью развитому волнению. Из рисунка видно, что (3.1.17) и (3.1.23) достаточно хорошо согласуются с натурными данными для условий почти полностью развитого волнения, а (3.1.22) значительно завышает величину $S_{\max}$ для этих условий. Это указывает на то, что предположение, высказанное в работе [215] о возможности использования (3.1.22) для океанских условий, нельзя считать достаточно обоснованным. Что же касается ограниченных разгонов, результаты, полученные в работе [213], безусловно, представляют значительный научный и практический интерес. Слабость аппроксимации (3.1.22) заключается в том, что в ней четко не разграничены различные области спектра. Стремясь уточнить значения спектральной плотности в области максимума, авторы работы [213] одновременно искажают величины спектральной плотности в равновесной области спектра (см. стр. 105, 106).

По всей видимости, дальнейшее уточнение аппроксимации частотного спектра ветровых волн возможно на пути сочетания принятой авторами монографии раздельной аппроксимации различных областей спектра и учета результатов работы [213] по уточ-

нению вида спектральной функции в области ее максимума для условий ограниченных разгонов ветра.

Приближенно можно учесть большее заострение основного максимума частотного спектра на начальных стадиях развития волнения путем перехода в аппроксимации (3.1.1) и соотношениях (3.1.13), (3.1.14) от фиксированных значений k и n к значениям этих величин как функции от безразмерной частоты $\omega = U\omega_{\max}/g$.

Оставляя полученное ранее соотношение $k = n + 1$, можно записать

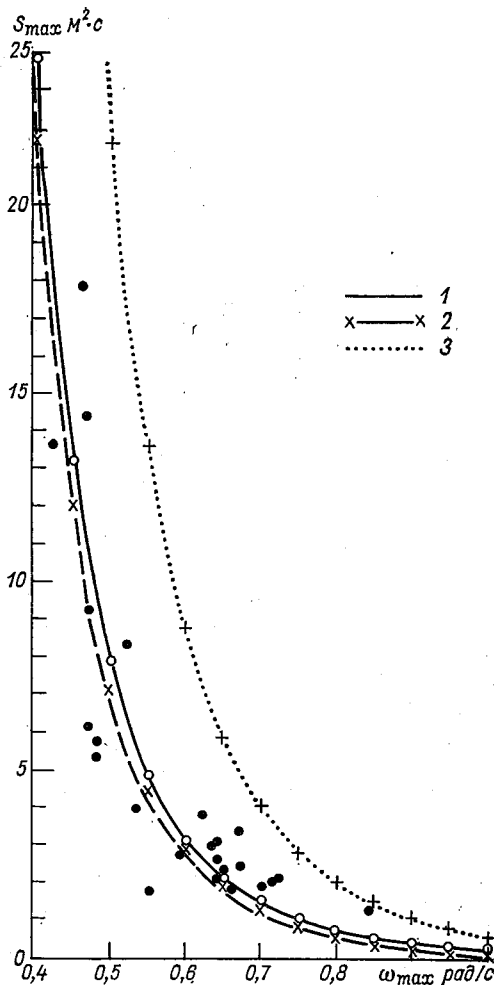
$$S(\omega) = (n+1) m_0 (\omega_{\pi}) \times \\ \times \omega_{\max}^n \omega^{-(n+1)} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{n+1}{n} \times \right. \\ \times \left[\left(\frac{\omega_{\max}}{\omega} \right)^n - \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\pi}} \right)^n \right] \left. \right\}. \quad (3.1.24)$$

По натурным данным величина n по мере развития волнения довольно быстро уменьшается от 10—12 до 5. Изменение этой величины можно очень приближенно аппроксимировать следующим соотношением:

$$n = 5 \exp \left(\frac{\omega_{\max} U}{2g} - 0,4 \right)^2 \\ \text{при } (\omega_{\max} U/g) \geq 0,8. \quad (3.1.25)$$

Рис. 3.1.3. Соотношение между $S_{\max}$ и $\omega_{\max}$ по аппроксимативным зависимостям и натурным данным для почти полностью развитых ветровых волн

1 — зависимость (3.1.17); 2 — зависимость (3.1.23); 3 — зависимость (3.1.22); точки — натурные данные



Величины спектрального максимума, рассчитанные по (3.1.24), (3.1.25), для начальных стадий развития, как это видно из табл. 3.1.1, довольно хорошо согласуются с данными измерений, приведенными в табл. 3.1.2, и расходятся с расчетами (по 3.1.22).

Таблица 3.1.1

Значения $S_{\max}$ м²·с по натурным данным и аппроксимациям (3.1.22) и (3.1.24) на ранних стадиях развития ветровых волн

№ п/п	№ из табл. 3.1.2	$\omega_{\max}$ рад/с	$S_{\max}$	$S_{\max}$ по (3.1.24)	$S_{\max}$ по (3.1.22)
1	42	1,23	0,097	0,094	0,465
2	43	1,20	0,210	0,206	0,664
3	44	2,65	0,003	0,0019	0,013
4	45	2,35	0,0064	0,0048	0,022
5	46	1,40	0,066	0,060	0,24
6	47	1,05	0,28	0,29	0,84
7	49	1,10	0,22	0,17	0,68
8	53	2,30	0,011	0,006	0,02
9	55	1,82	0,019	0,016	0,08
10	56	1,82	0,019	0,020	0,07
11	57	1,80	0,023	0,018	0,07
12	59	1,91	0,012	0,017	0,05
13	60	2,0	0,016	0,009	0,41
14	61	1,22	0,077	0,06	0,48
15	62	1,55	0,045	0,028	0,12
16	63	1,75	0,032	0,017	0,07
17	64	3,12	0,0025	0,0009	0,0056
18	66	3,24	0,0017	0,0006	0,0046

3.1.2. Равновесная область спектра

На нисходящей ветви графика функции $S_{\xi}^*(\omega)$ в значительном интервале частот, границы которого определяются различно у отдельных авторов, спектральная плотность сравнительно мало изменяется в процессе развития волнения. Это обстоятельство побудило Филлипса [150] предположить, что на всей нисходящей ветви частотного спектра вплоть до границы капиллярных волн величина спектральной плотности волнения определяется только частотой и не зависит от внешних факторов. При этом Филлипс исходит из следующих общих соображений: ветровые волны растут не беспрестанно и так как скорость передачи энергии из одной области спектра в другую на стадии развития волнения меньше, чем скорость передачи энергии от ветра волнам, и диссипация энергии за счет вязкости невелика, то рост волн может быть ограничен только по причине локальной неустойчивости волнового движения (опрокидывания гребней волн). Для стоковских стационарных двумерных волн неустойчивость волнового движения наступает, когда ускорение частиц жидкости на заостренном гребне волны становится равным $1/2 g$.* В связи с нерегулярным характером реального ветрового волнения точный критерий локальной неустой-

* В работе [217] принимается по лабораторным данным, что для реальных волн неустойчивость волнового движения наступает при ускорении частиц, равном $0,3g$.

чивости может отличаться от критерия для стоковских волн, но в общем можно предположить, что вероятность обрушения волн в данной точке является некоторым функционалом от локального ускорения частиц воды, составляющего часть ускорения свободного падения. Таким образом, ветровые волны могут достигать состояния энергетического насыщения, при котором наступает статистическое равновесие между скоростью передачи энергии от ветра волнам и скоростью потерь энергии при опрокидывании гребней. В частотном спектре волн должна быть такая область, в которой верхний предел спектральной плотности определяется требованиями устойчивости волнового движения. Эту область спектра Филлипс назвал равновесной. Предельная конфигурация волновой поверхности (если гребни не сдуваются ветром), а значит, и энергия в равновесной области спектра определяются предельным ускорением частиц жидкости, пропорциональным ускорению свободного падения g , плотностью воздуха ρ_a и воды ρ_w и частотой ω . Так как размерность массы может встречаться только в комбинации ρ_a/ρ_w , величина которой мала и практически постоянна, то функция $S_\zeta(\omega)$ в равновесной области спектра должна по соображениям подобия иметь следующий вид:

$$S_\zeta(\omega) = \hat{\alpha} g^2 \omega^{-5}, \quad \omega < \omega_v, \quad (3.1.26)$$

где $\hat{\alpha}$ — константа; ω_v — частота, определяющая нижнюю границу области капиллярных волн.*

Путем осреднения экспериментальных данных Пирсона [273], Барлинга [175], Хикса [219], Кинсмана [233], Лонге-Хиггинса и других [247] Филлипс принял значение $\hat{\alpha}$ в (3.1.26) равным $1,17 \cdot 10^{-2}$.

Позднее Лонге-Хиггинс [244] предпринял попытку оценить величину $\hat{\alpha}$, исходя из закона распределения амплитуд волн и соотношений, определяющих приток энергии от ветра к волнам. Он получил, что $\hat{\alpha} \simeq 1,35 \cdot 10^{-2}$. Однако эта величина не может считаться достаточно достоверной, так как расчеты Лонге-Хиггинса основываются на ряде очень приближенных оценок.

Предположение Лонге-Хиггинса [244] о зависимости $\hat{\alpha}$ от безразмерного разгона побудило М. М. Заславского и С. А. Китайгородского [52] исследовать влияние на величину $\hat{\alpha}$ того обстоятельства, что короткие обрушивающиеся волны движутся по поверхности более крупномасштабных составляющих спектра волн и как бы находятся в случайно ускоренной системе координат.

Введя для коротких волн вместо ускорения g величину

$$\tilde{g} = g + \tilde{a},$$

где $\tilde{a}$ — переносное ускорение для системы координат, в которых

* В области капиллярных волн преобладающее значение приобретают силы поверхностного натяжения и молекулярная вязкость.

распространяются короткие волны, Заславский и Китайгородский получили оценку $\hat{\alpha}$ и показали, что для реального волнения различия между $\hat{g}$ и g не могут оказать существенного влияния на величину $\hat{\alpha}$. Поправки могут в лучшем случае достигать 4—5%.

На графиках частотных спектров ветрового волнения, построенных по экспериментальным данным, нетрудно заметить множество вторичных максимумов и минимумов спектральной плотности, положение и величина которых существенно изменяются от случая к случаю. Появление этих максимумов и минимумов частично можно объяснить выборочной изменчивостью статистических оценок функции спектральной плотности, обусловленной недостаточной продолжительностью записей волнения, по которым рассчитан спектр, а также циклическостью волнового процесса и связанной с ней сложностью правильного выбора параметров эмпирического спектрального анализа волнения (см. главу 1).

Однако в работе [29] было высказано предположение, что максимумы и минимумы спектральной плотности в равновесной области спектра могут быть обусловлены также физическими причинами и, в частности, периодичностью опрокидывания гребней волн. При разрушении гребня волн теряется значительное количество энергии и должно пройти немало времени, прежде чем реальные волны фиксированной частоты снова достигнут предела их гидродинамической устойчивости. В каждый определенный отрезок времени (период записи волнения) спектральная плотность может на разных участках равновесной области спектра с определенной вероятностью соответствовать различному физическому состоянию системы, определяемому величиной сброса энергии за счет обрушения реальных гребней волн.

Позднее Мантон [251] пришел к такому же выводу не из общих соображений, а решая уравнение волновой энергии в спектральной форме. Учитывая потери энергии за счет обрушения гребней и принимая ее равной

$$E_{\mu} = S_{\xi}(\omega, t) \int_0^{\omega} d\omega' k^2 S_{\xi}(\omega', t) \beta_{\mu}(\omega, \omega'), \quad (3.1.27)$$

где β_{μ} — коэффициент, Мантон получил, что спектральная плотность на частотах, больших, чем частота $\omega_{\max}$, должна изменяться во времени по периодическому закону. При этом амплитуда колебаний величин $S_{\xi}(\omega)$ тем меньше, чем меньше ω , и на частоте $\omega = 1,3\omega_{\max}$ она уже приближается к нулю. Период колебаний спектральной плотности оказался очень значительным, до 20 000 с, т. е. измеряется часами. Последнее делает практически невозможным проверку выводов Мантона по натурным данным, так как трудно предположить, что ветровое волнение может считаться квазистационарным в течение очень многих часов. Это же обстоятельство согласуется с тем, что положение и величина вторичных мак-

еимумов и минимумов на спектрах, полученных по ограниченным записям волнения, носят случайный характер.

В работе [29] было, однако, показано, в отличие от Мантона, что на низкочастотной границе равновесной области спектра часто отмечается довольно устойчивый по положению вторичный максимум спектральной плотности волнения, который при очень больших реализациях процесса не исчезает (в отличие от других вторичных максимумов) даже при использовании для сглаживаний статистических оценок $S_{\xi}^*(\omega)$ весовых функций с достаточно большим порядком убывания. При более коротких реализациях и менее достоверных оценках $S_{\xi}^*(\omega)$ указанный вторичный максимум выражен менее отчетливо и даже становится совсем незаметным, но каждый раз на том месте, где можно было бы предположить его появление, заметна резкая смена в ходе функции $S_{\xi}(\omega)$ — на небольшом участке резко меняется величина производной спектральной плотности по частоте. Указания на наличие устойчивого вторичного максимума на нисходящей ветви спектра содержатся также в ряде работ других авторов [281, 308]. Кроме того, такой максимум хорошо заметен на отдельных графиках спектральной плотности, приведенных в работах [189, 261, 303], хотя сами авторы этих работ особо не отмечают это обстоятельство.

Возможность более объективно определить границу равновесной области, используя в качестве критерия положение устойчивого вторичного максимума функции $S_{\xi}(\omega)$ или резкое изменение в ходе сглаженного графика спектральной плотности, позволяет получить более достоверную аппроксимацию этой области частотного спектра. Можно полагать, что различия в параметрах аппроксимации $S_{\xi}(\omega)$ для равновесной области, по данным разных исследователей, безусловно, частично связаны с неопределенностью выбора границ этой области.

В работе [29] была предпринята первая попытка аппроксимации равновесной области спектра с учетом указанного выше критерия определения ее низкочастотной границы. Было показано, что наиболее подходящей аппроксимацией $S_{\xi}(\omega)$ является соотношение Филлипса при $\hat{\alpha} = 7,8 \cdot 10^{-3}$

$$S_{\xi}(\omega) = 7,8 \cdot 10^{-3} g^2 \omega^{-5}. \quad (3.1.28)$$

После опубликования работы [29] появилось множество публикаций, в которых частично подвергается сомнению правомерность аппроксимации вида (3.1.26).

Отдельные исследователи считают, что коэффициенты в (3.1.26) не универсальны, что $\hat{\alpha}$ зависит от безразмерного разгона [213], частоты [292], скорости ветра [189, 308] и что степень при ω отличается от 5 [45].

Некоторые исследователи накладывают довольно жесткие условия на высокочастотную границу равновесной области спектра.

Так, например, по Пирсону и Стаси [277] эта граница, определенная на основе анализа отраженных радиолокационных сигналов, выражается соотношением

$$k_1 = k_2 u_{*m}^2 / u_*^2, \quad (3.1.29)$$

где $k_2 \cong 0,359$; $u_{*m} = 12$ см/с, u_* — динамическая скорость.

Если перейти в (3.1.29) от волновых чисел к частотам по дисперсионному соотношению линейной теории волн $\omega^2 = gk$, то получим приближенно (с ошибкой не более 10%)

$$\omega_1 = \omega_2 u_{*m} / u_*, \quad (3.1.30)$$

где $\omega_2 \cong 1,87$. Для скорости ветра, равной 20 м/с, на высоте 10 м над уровнем моря приближенное значение u_* составляет около 100 см/с по работе [3] и около 75 см/с, если принять коэффициент сопротивления $C_U = 1,5 \cdot 10^{-3}$ вместо $2,5 \cdot 10^{-3}$, принятого в упомянутой работе. Даже для $u_* = 75$ см/с по (3.1.30) получается, что $\omega_1 \approx 0,3$ рад/с, т. е. что при скорости ветра 20 м/с нет равновесной области в спектре волн.

На зависимость высокочастотной области спектра от динамической скорости указывает также Тоба [308], который предложил следующую аппроксимацию:

$$S_c(\bar{f}, u_*) = 0,02 (2\pi^{-3}) g u_* \bar{f}^{-4}, \quad (8.1.31)$$

где $\bar{f} = \omega/2\pi$.

После появления работы [213], в которой обобщены результаты измерений волн в Северном море, а также данные, опубликованные в ряде других работ, в литературе появились утверждения об ошибочности предположений Филлипса по вопросу генезиса равновесной области частотного спектра. Так, например, в обобщающей статье Барнетта и Кеньона [165] утверждается, что предположения Филлипса об определяющей роли диссипации энергии за счет обрушения гребней волн в формировании нисходящей ветви спектра правомерны лишь начиная с частот, в три раза превышающих частоту максимума спектра. Между этой областью и частотой максимума баланс энергии определяется главным образом соотношением между энергией, поступающей от ветра, и энергией, теряемой по причине нелинейного энергообмена с более высокими частотами, и поэтому простые соотношения Филлипса здесь не должны иметь место.

В связи с указанной выше дискуссией по вопросу существования равновесной области в частотном спектре ветровых волн авторы публикуемой монографии снова вернулись к анализу выполненных ими измерений волн с целью проверки ранее полученных результатов [29]. Был выполнен тщательный анализ наиболее достоверных 66 статистических функций спектральной плотности ветровых волн, охватывающих широкий диапазон средних высот волн (от 0,1 до 4,5 м), скоростей ветра (от 5 до 29 м/с) и длины их разгона (от 1,2

до 1500 км). Основные сведения об этих 66 записях волнения, полученных при помощи судовых и струнных волнографов, приведены в табл. 3.1.2. В таблице указаны координаты и время измерений, скорость ветра U на высоте 10 м над морской поверхностью, длина разгона ветра X , определенная по синоптическим картам, средняя высота $\bar{h}$ и средний период $\bar{\tau}$ волн.

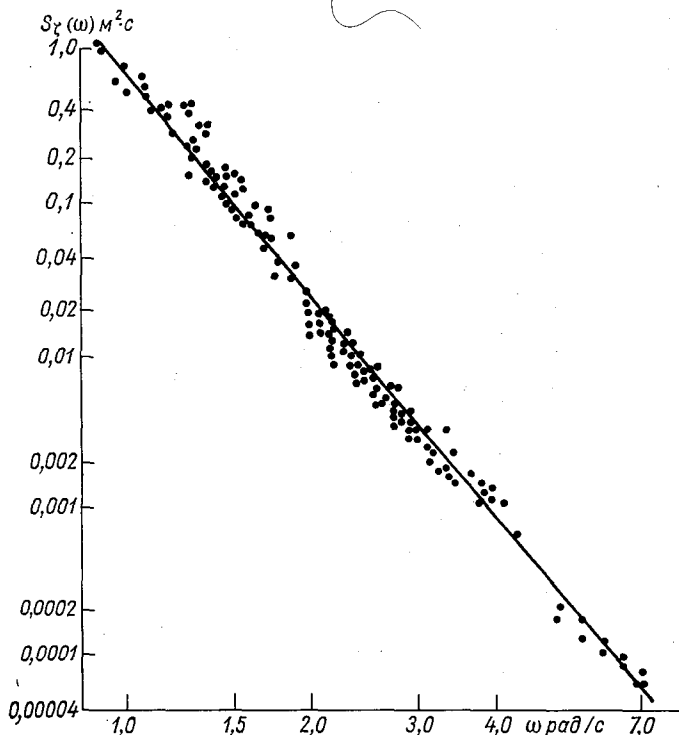


Рис. 3.1.4. Значения оценок спектральной плотности в границах равновесной области (записи № 4—10, 41—66 из табл. 3.1.2). Прямая линия — аппроксимация (3.1.28)

Статистические оценки функции спектральной плотности, рассчитанные по единой методике, изложенной в главе 1, наносились для каждой записи волнения на графики, построенные в логарифмическом масштабе. На нисходящей ветви спектра отыскивалась область, пропорциональная $\hat{\alpha}\omega^{-\hat{k}}$, определялись нижняя ω_p и верхняя $\omega_{\hat{\alpha}}$ границы этой области, а также величины $\hat{\alpha}$ и $\hat{k}$. Указанные сведения приведены в табл. 3.1.3. Значения $\hat{\alpha}$ даны только в том случае, когда величина $\hat{k}$ равна или близка к 5. Для этих же случаев приведено отношение ω_p к $\omega_{\max}$.

8 Таблица 3.1.2

Характеристика записей волнения, использованных для аппроксимации частотного спектра

№ п/п	Условный номер волнограммы	Год	Дата	Время (гринвичское), ч мин		U м/с	X км	$\bar{h}_m$	$\bar{T}_c$
				начало	конец				
1	A-31-II	1964	24/IV	16 32	17 40	20,0	200	2,1	7,0
2	A-33	1964	24/IV	19 35	20 20	17,4	500	2,1	7,2
3	A-60	1964	8/V	17 00	17 48	12,9	—	2,3	7,1
4	A-61	1964	9/V	06 03	08 49	20,9	700	3,0	8,0
5	A-62	1964	9/V	10 50	14 09	21,7	700	3,4	9,3
6	A-63	1964	9/V	16 30	19 30	20,0	500	3,7	8,9
7	A-64	1964	10/V	04 20	07 30	21,6	500	3,7	8,6
8	A-65	1964	10/V	09 30	10 54	22,5	500	4,4	9,8
9	A-66	1964	10/V	13 50	15 52	20,5	500	4,5	10,5
10	A-67	1964	10/V	17 11	18 20	18,5	700	4,1	10,0
11	A-70	1964	12/V	07 20	09 30	15,0	1200	2,7	7,8
12	A-71	1964	12/V	12 45	14 45	25—94	1200	2,7	8,1
13	A-72	1964	12/V	16 40	18 30	16—22	1200	4,0	8,9
14	A-73	1964	12/V	20 40	21 40	17—22	1200	3,5	8,8
15	A-101	1964	31/V	17 06	18 10	13,3	—	1,7	5,1
16	A-102	1964	1/V	05 20	06 33	14,5	—	1,7	6,0
17	A-130	1964	13/VI	19 05	20 30	15,8	500	1,7	5,9
18	A-131	1964	13/VI	22 00	23 10	13,0	500	1,8	6,7
19	A-132	1964	14/VI	14 15	04 43	15,5	1000	1,9	6,2
20	A-134-I	1964	14/VI	12 40	15 00	19,0	1000	3,2	8,4
21	A-134-II	1964	14/VI	15 20	18 00	19,0	1000	3,2	8,4
22	II-128	1965	12/VI	14 30	15 30	13,0	1000—1500	1,7	5,5

4* Продолжение табл. 3.1.2

№ п/п	Условный номер волнограммы	Год	Дата	Время (гринвичское), ч мин		U м/с	X км	h м	τ с
				начало	конец				
23	II-182	1965	18/III	13 00	14 00	15,0	—	2,3	7,7
24	II-207	1965	24/VIII	16 00	17 00	16,1	1000	2,3	7,2
25	II-220	1965	8/IX	16 00	17 00	17,0	400	1,7	6,1
26	III-O-8a	1966	14/VII	10 20	11 00	13,5	1000	1,6	5,7
27	III-O-9	1966	14/VII	13 10	14 20	13,5	1000	1,9	6,6
28	III-O-11	1966	14/VII	19 00	20 00	11,3	1000	0,8	4,5
29	III-O-47	1966	24/VIII	09 50	11 00	12,5	200	1,2	5,4
30	III-O-50	1966	25/VIII	13 20	15 40	17,5	600	1,0	5,1
31	III-O-52	1966	26/VIII	09 30	11 20	12,5	600	1,8	6,6
32	III-O-53	1966	26/VIII	12 30	14 00	13,2	600	1,8	6,4
33	III-A-60-II	1966	23/VIII	18 40	21 00	13,5	—	1,9	6,0
34	III-A-61-I	1966	24/VIII	02 50	04 50	16,0	—	2,0	6,0
35	III-A-61-II	1966	24/VIII	04 50	08 40	16,0	—	2,0	6,0
36	III-A-62	1966	24/VIII	06 20	06 50	16,2	—	2,0	6,0
37	III-A-63	1966	24/VIII	11 12	13 00	15,0	—	2,1	6,3
38	III-A-64-II	1966	24/VIII	15 00	20 00	16,5	—	2,2	6,6
39	III-A-66-II	1966	24/VIII	09 15	16 10	14,0	—	2,0	6,2
40	III-A-68	1966	26/VIII	06 57	10 00	6	—	1,7	7,5
41	Aл-12	1963	20/IX	08 45	—	22,5	1000	3,8	8,8
42	B-22	1963	22/X	12 30	—	14,0	40	0,8	4,1
43	B-28	1963	28/X	10 05	14 10	21,0	25	0,8	4,5
44	6.02	1976	8/VII	05 58	06 10	10,0	110	0,2	1,8

Продолжение табл. 3.1.2

№ п/п	Условный номер волнограммы	Год	Дата	Время (гринвичское), ч мин		U м/с	X км	h м	τ с
				начало	конец				
45	6.18	1976	8/VII	06 10	06 25	10,2	110	0,3	2,1
46	7.22	1976	8/VII	07 12	07 32	12,4	110	0,8	3,6
47	9.15	1976	8/VII	09 05	09 25	12,5	110	1,5	4,8
48	Б-61	1964	27/IX	12 22	12 51	11,2	140	0,7	2,6
49	ПМО-2	1966	12/IX	12 30	13 00	13,0	80	1,2	5,8
50	ПМО-9	1966	23/IX	14 00	14 30	9,0	55	0,8	3,9
51	Рут-3	1966	16/VIII	13 18	14 18	11,0	7,5	0,3	3,3
52	Рут-17	1966	12/IX	14 40	14 52	13,4	7,5	0,8	4,1
53	Рут-24	1966	14/IX	12 30	12 45	8,2	7,5	0,3	2,8
54	Рут-31	1966	16/IX	10 15	12 15	12,6	5	0,5	3,6
55	Л-8	1971	7/X	11 10	11 28	10,3	12	0,5	3,0
56	Д-22	1971	7/X	11 15	11 58	10,3	12	0,5	3,0
57	Д-23	1971	7/X	12 35	13 00	10,2	13	0,6	3,2
58	П-2	1974	16/VIII	18 00	18 20	11,8	12	0,5	3,2
59	К6	1963	27/V	08 56	09 10	9,8	20	0,4	2,8
60	К8	1963	27/V	12 55	13 05	9,1	20	0,4	2,8
61	К13	1963	29/V	02 00	02 10	14,8	20	0,7	3,6
62	К18	1963	29/V	09 00	09 10	9,1	20	0,5	3,2
63	К19	1963	29/V	11 00	11 10	8,9	20	0,5	3,0
64	PJ	1967	28/IX	16 30	17 00	8,0	45	0,2	1,8
65	18	1970	29/X	18 35	18 55	5,0	1,2	0,1	1,5
66	19	1970	29/X	19 22	20 52	8,0	1,2	0,2	1,6

Таблица 3.1.3

Частоты начала (ω_p) и конца ($\omega_{\hat{\alpha}}$) равновесного участка и значения коэффициентов k и α (при $\hat{k} = 5$) для волнограмм, указанных в табл. 3.1.1

№ п/п	ω_p	$\omega_{\hat{\alpha}}$	$\hat{k}$	$\hat{\alpha} \cdot 10^3$	$\omega_{\max}$	$\frac{\omega_p}{\omega_{\max}}$
1	1,00	2,20	5,0	7,0	0,60	1,61
2	1,10	1,70	5,0	7,0	0,70	1,58
3	1,25	2,3	5,0	8,2	0,56	2,24
4	1,00	1,9	5,0	7,5	0,62	1,61
5	1,00	1,9	5,0	7,8	0,53	1,89
6	1,1	1,9	5,0	9,0	0,47	2,34
7	1,3	2,0	5,0	13,0	0,48	2,7
8	1,2	2,0	4,8	9,8	0,46	2,18
9	0,85	1,9	5,0	7,8	0,42	2,02
10	0,9	1,5	4,5	7,5	0,46	1,96
11	1,3	2,0	5,0	7,0	0,67	1,94
12	1,05	2,0	5,0	8,6	0,62	1,69
13	1,15	2,2	5,0	10,0	0,58	1,99
14	1,05	1,6	5,0	7,0	0,61	1,74
15	1,20	2,0	5,0	6,4	0,77	1,56
16	1,20	2,4	5,0	6,4	0,80	1,50
17	1,1	2,1	4,5	8,5	0,85	1,29
18	1,4	2,1	5,5	5,2	0,72	1,95
19	1,2	2,5	5,0	8,4	0,64	1,88
20	1,2	1,8	5,0	7,0	0,50	2,31
21	1,2	2,0	5,0	7,8	0,48	2,50
22	1,1	2,8	5,0	7,5	0,60	1,83
23	1,0	2,2	4,8	7,0	0,59	1,70
24	1,0	1,9	4,8	7,5	0,64	1,56
25	1,2	2,0	4,5	7,5	0,71	1,68
26	1,3	2,5	4,9	6,8	0,72	1,81
27	1,5	2,5	4,1	8,0	0,64	2,34
28	1,55	3,0	4,5	8,4	0,70	2,22
29	1,5	3,0	4,5	6,0	0,70	2,14
30	1,2	2,2	5,0	7,5	0,62	1,94
31	1,8	3,0	5,0	8,0	0,68	2,65
32	1,5	3,0	5,0	9,5	0,65	2,31
33	1,6	2,4	4,4	10,0	0,69	2,31
34	—	—	4,2	—	0,83	—
35	1,4	2,7	5,0	11,0	0,83	1,68
36	1,5	2,6	5,0	9,0	0,80	1,88
37	1,35	2,0	5,0	8,0	0,76	1,78
38	1,3	2,0	5,0	8,0	0,70	1,86
39	—	—	4	—	0,68	—
40	—	—	4	—	0,56	—
41	1,1	1,9	5	7,4	0,55	2,0
42	2,0	3,0	5,0	7,5	1,23	1,63
43	1,8	2,8	5,4	10,8	1,20	1,50
44	3,0	3,7	5,0	5,0	2,65	1,13
45	2,7	4,0	5,0	6,5	2,35	1,15
46	2,0	4,0	5,0	7,8	1,40	1,43
47	2,0	4,0	5,0	8,5	1,05	2,0
48	1,8	3,0	4,5	7,8	1,32	1,36
49	1,2	1,7	5,0	7,8	1,1	1,1
50	1,8	2,5	5,0	9,0	1,28	1,40

№ п/п	ω_p	$\omega_{\hat{\alpha}}$	$\hat{k}$	$\hat{\alpha} \cdot 10^3$	$\omega_{\max}$	$\frac{\omega_p}{\omega_{\max}}$
51	2,0	3,5	4,0	6,4	1,57	1,28
52	2,0	3,0	5,0	6,4	1,19	1,68
53	2,7	3,8	5,0	10,0	2,2	1,23
54	2,0	3,0	4,5	6,4	1,20	1,66
55	2,0	3,0	5,0	7,8	1,9	1,05
56	2,1	2,6	6,5	7,8	1,92	1,12
57	2,0	2,5	5,5	9,0	1,90	1,05
58	1,5	2,5	5,0	9,8	1,20	1,25
59	2,0	3,0	6,2	9,0	1,91	1,04
60	2,1	3,3	5,5	10,0	2,0	1,05
61	1,5	3,0	5,0	7,8	1,22	1,23
62	1,8	2,5	5,0	8,0	1,55	1,15
63	1,84	3,1	5,0	7,8	1,75	1,05
64	3,7	4,4	6,0	10,4	3,1	1,18
65	4,8	7,0	5,0	9,4	3,8	1,25
66	4,0	7,0	5,0	7,8	3,2	1,23

Из таблицы видно, что во всех 66 случаях на нисходящей ветви спектра имелась область частот, в которой функция спектральной плотности пропорциональна $\hat{\alpha} \omega^{-\hat{k}}$ и что в подавляющем числе случаев коэффициент $\hat{k}$ был равен 5 или очень близок к этой величине. Границы равновесной области охватывают достаточно большой диапазон частот, а отношение $\omega_p/\omega_{\max}$ находится в интервале от 1 до 2,7. Последнее указывает на то, что граница филлипсовской равновесной области начинается на частотах, более близких к частоте максимума спектральной плотности, чем это предполагается в работах [165, 277, 308] и др.

На рис. 3.1.4 представлены графически статистические оценки спектральной плотности для слабого и сильного волнения в границах равновесной области. Из рис. 3.1.4 видно, что аппроксимация (3.1.28) в среднем вполне согласуется с данными анализа измерений волн, а из рис. 3.1.5 и 3.1.6, на которых показана зависимость $\hat{\alpha}$ от безразмерного возраста $\omega_{\max} U/g$ и безразмерного разгона gX/U^2 , следует, что величина коэффициента $\hat{\alpha}$ не зависит от скорости ветра и практически не изменяется с разгоном ветра и разрастом ветровых волн, за исключением области самых начальных стадий развития волнения.

На рис. 3.1.7 нанесены статистические оценки функции спектральной плотности, полученные по 20-минутным участкам одной продолжительной записи штормового волнения в Северной Атлантике, выполненной в условиях локальной стационарности процесса. Прямая линия соответствует аппроксимации (3.1.28), которая в среднем хорошо согласуется с данными наблюдений. Однако, если рассматривать в отдельности каждый эмпирический спектр,

то нетрудно заметить, что параметры аппроксимации в (3.1.26) будут в каждом отдельном случае более или менее отличаться от их средних величин. Это указывает на то, что основной причиной колебаний величин $\hat{\alpha}$ и $\hat{k}$ в табл. 3.1.3 является выборочная изменчивость статистических оценок спектральной плотности волнения. Исключение, как уже указывалось, составляют данные, относящиеся к самым начальным стадиям развития волнения, когда $\hat{\alpha}$

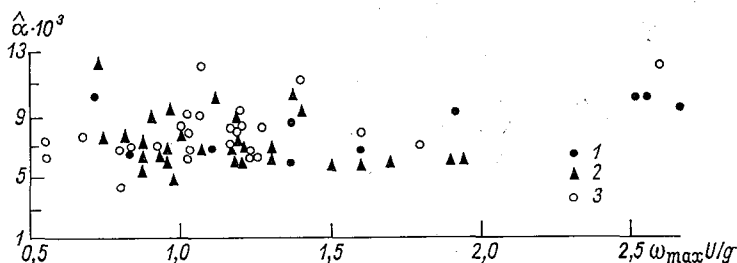


Рис. 3.1.5. Зависимость $\hat{\alpha}$ от безразмерного возраста волн (по записям из табл. 3.1.2)

1 — скорости ветра < 10 м/с, 2 — 10–15 м/с, 3 — > 15 м/с

может достигать значений порядка $10 \cdot 10^{-3}$. Интересно отметить, что если при расчете $\hat{\alpha}$ определять границы равновесной области так, как это сделано в табл. 3.1.3, то величина $\hat{\alpha}$ для самых на-

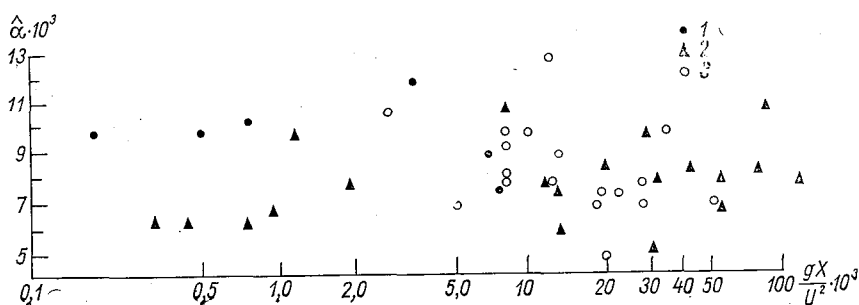


Рис. 3.1.6. Зависимость $\hat{\alpha}$ от безразмерного разгона (по записям из табл. 3.1.2)

1 — скорости ветра < 10 м/с, 2 — 10–15 м/с, 3 — > 15 м/с

чальных стадий развития волнения окажется равной по натурным спектрам, опубликованным в работе [261], $8,5 \cdot 10^{-3}$, а в работе [303] — $8,1 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, можно считать, что для широкого диапазона условий развития ветровых волн, за исключением самых начальных стадий их развития, параметр $\hat{\alpha}$ в аппроксимации (3.1.26) практически можно считать не зависящим от факторов, определяющих развитие волнения. От последних зависит лишь, как это видно и

рис. 3.1.8, положение границ равновесной области спектра. По мере развития ветрового волнения нижняя граница равновесной области все более и более смещается от основного максимума в сторону больших частот. Если на начальных стадиях развития волнения равновесная область начинается с частот, в 1,12 раза превышающих частоту максимума, то в случае очень сильного штормового волнения отношение $\omega_p/\omega_{\max}$ доходит в среднем до 2.4. Зави-

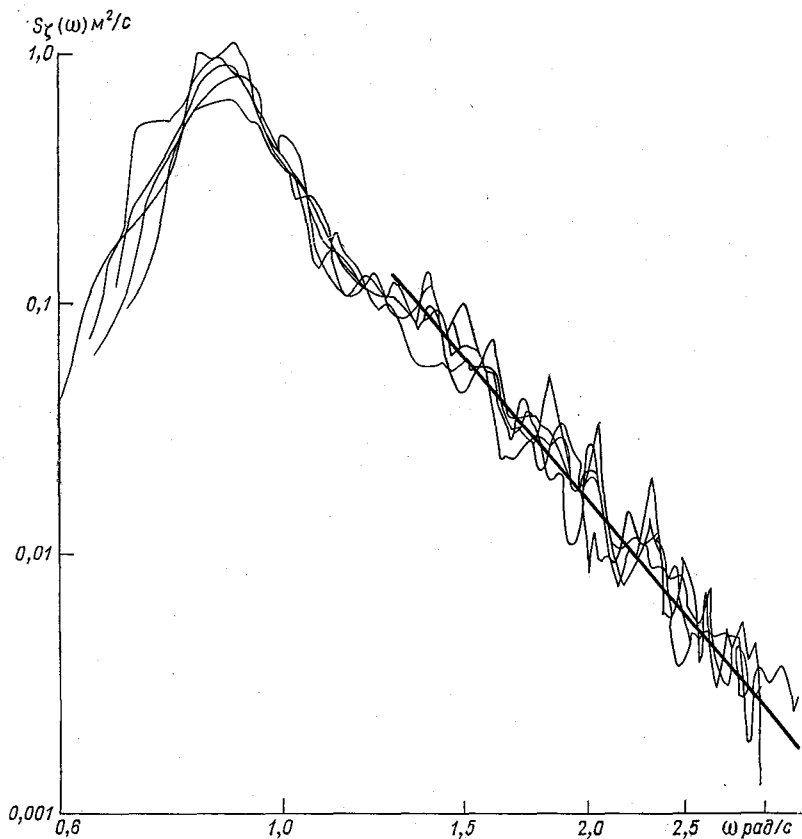


Рис. 3.1.7. Оценки функций спектральной плотности, рассчитанные по 20-минутным участкам записей № 34, 35 из табл. 3.1.2. Прямая линия — аппроксимация (3.1.28)

симость $\omega_p/\omega_{\max} = f(\omega_{\max} U/g)$, графически представленная на рис. 3.1.8 сплошной линией, можно аппроксимировать соотношением

$$\frac{\omega_p}{\omega_{\max}} = 2 (\omega_{\max} U/g)^{-0.7} \quad \text{при } (\omega_{\max} U/g) \leq 2.3. \quad (3.1.32)$$

При $(\omega_{\max} U/g) > 2.3$ можно в первом приближении принять, что $\omega_p/\omega_{\max} = 1.12$. Тем самым существенно уточнены границы

равновесной области спектра, приближенно определенные в [29].

Из рис. 3.1.4 следует, что с достаточной для практики точностью можно в общем принять для условий, наиболее часто встречающихся в океанах и морях, что $\hat{\alpha}$ является константой, равной $7,8 \cdot 10^{-3}$, как это было получено в работе [29]. Вопрос о величине $\hat{\alpha}$ на начальных стадиях развития волнения нуждается в дальнейшей проработке, однако совершенно очевидно, что она намного меньше отличается от среднего значения $7,8 \cdot 10^{-3}$, чем предполагается в ряде работ. Ее значения колеблются от $5 \cdot 10^{-3}$ до $13 \cdot 10^{-3}$. Полученное нами значение коэффициента $\hat{\alpha}$ существенно отличается

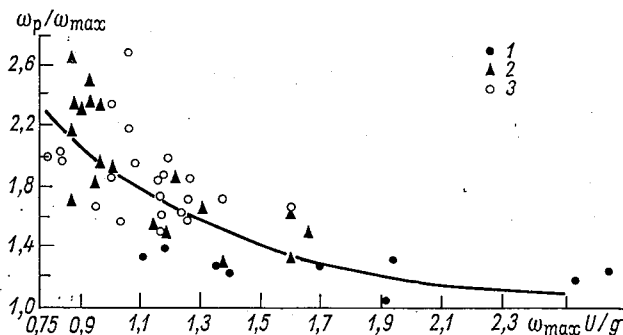


Рис. 3.1.8. Зависимость границы равновесной области спектра от условного возраста волн. Сплошная линия — аппроксимация (3.1.32)

1 — скорости ветра < 10 м/с; 2 — $10-15$ м/с; 3 — > 15 м/с

от его значений, представленных в работе [217] и аппроксимированных соотношением

$$\hat{\alpha} = 0,076 \left(\frac{gX}{U^2} \right)^{0,22}. \quad (3.1.33)$$

Различия обусловлены главным образом тем, что в работе [213] придано слишком большое значение оценкам $\hat{\alpha}$ по лабораторным данным. Лабораторные данные оказали определяющее влияние на определение параметров аппроксимации. Между тем лабораторная оценка $\hat{\alpha}$ колеблется в исключительно большом диапазоне — от $14 \cdot 10^{-3}$ в работе [111] и $20 \cdot 10^{-3}$ в работе [217] до $90 \cdot 10^{-3}$ в работе [262] и $500 \cdot 10^{-3}$ в работе [302]. Столь значительные колебания оценок $\hat{\alpha}$ по лабораторным данным связаны главным образом с влиянием на результаты условий эксперимента и в первую очередь, как это указывается в работе [217], с влиянием на период волн возникающих в лотке течений. При очень малой высоте волн в лотках не отмечается обрушения гребня волн и вообще не право-

мерна аппроксимация вида (3.1.26). Кроме того, в работе [217] на один график нанесены данные непосредственного определения $\hat{\alpha}$ по конкретным эмпирическим спектрам в предположении, что равновесная область охватывает значительный участок нисходящей ветви графика функции спектральной плотности, и данные определения $\hat{\alpha}$ в предположении, что частотный спектр описывается функцией вида (3.1.22), не учитывающего наличие в спектре различных областей. Эти данные более или менее сопоставимы между собой только на очень высоких частотах, когда произведение экспоненты на величину γ в (3.1.22) приближается к 1. В общем случае параметры в (3.1.22) и в (3.1.26) не должны совпадать, и нанесение их значений на один график нельзя считать правомерным. Так, например, в работе [296] показано, что по одним и тем же данным $\hat{\alpha}$, если принять аппроксимацию (3.1.26), равно $7,3 \cdot 10^{-3}$, что очень близко к принятой нами величине, а в аппроксимации (3.1.22) — $2,8 \cdot 10^{-3} - 24 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, можно рекомендовать для определения низкочастотной границы * равновесной области соотношение (3.1.32), а величину $\hat{\alpha}$ в формуле Филиппса считать равной $7,8 \cdot 10^{-3}$.

3.1.3. Переходная область спектра

Граница равновесной области одновременно является высокочастотной границей переходной области спектра. Нижнюю границу этой области невозможно определить точно. Приближенно можно считать [29], что

$$\omega_{\pi} \approx 0,9\omega_p. \quad (3.1.34)$$

Это соотношение было использовано в работе [29], в частности, при определении параметров аппроксимации частотного спектра в области его основного максимума.

В связи с тем, что переходная область занимает очень небольшой участок частотного спектра, вполне допустимо принять для ее аппроксимации следующее линейное соотношение:

$$S_{\xi}(\omega) = S_{\xi}(\omega_{\pi}) + \frac{S_{\xi}(\omega_p) - S_{\xi}(\omega_{\pi})}{\omega_p - \omega_{\pi}} (\omega - \omega_{\pi}), \quad \omega_{\pi} < \omega < \omega_p, \quad (3.1.35)$$

где $S_{\xi}(\omega_p)$ определяется по (3.1.28), а $S_{\xi}(\omega_{\pi})$ для открытого моря—

* Вопрос о высокочастотной границе равновесной области является более сложным. При сильном волнении ее трудно экспериментально определить из-за малой точности оценок спектральной плотности на высоких частотах, при очень слабом волнении достаточно сложно определить момент, когда в развитии ветровых волн начинает играть большую роль диссипация энергии за счет опрокидывания гребней волн. Не исключено, что на начальной стадии развития волнения филлипповская аппроксимация не очень правомерна. В этом смысле возможно, что отклонение величин $\hat{\alpha}$ на рис. 3.1.5 в области самых начальных стадий развития волнения косвенно указывает на верхнюю границу равновесной области. Однако это относится к категории предположений.

по (3.1.17) с учетом (3.1.34), а для начальных условий развития волнения или ограниченных разгонов — по (3.1.24), (3.1.25).

Объединяя полученные выше результаты, можно записать общую аппроксимацию гравитационного интервала частотного спектра ветровых волн в следующем виде:

$$S(\omega) = \begin{cases} (n+1) m_0 (\omega_n) \omega_{\max}^n \omega^{-(n+1)} \exp \left\{ \frac{-n+1}{n} \left[\left(\frac{\omega_{\max}}{\omega} \right)^n - \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega_n} \right)^n \right] \right\} & \text{при } \omega < \omega_n, \\ S(\omega_n) + \frac{S(\omega_n) - S(\omega_p)}{\omega_n - \omega_p} (\omega - \omega_n) & \text{при } \omega_n < \omega < \omega_p, \\ 7,8 \cdot 10^{-3} g^2 \omega^{-5} & \text{при } \omega \geq \omega_p, \end{cases} \quad (3.1.36)$$

где $n \approx 5 \exp \left(\frac{\omega_{\max} U}{2g} - 0,4 \right)^2$.

Величины $m_0(\omega_n)$ и $\omega_{\max}$ можно приближенно определить по следующим эмпирическим соотношениям, взятым из работы [30]:

$$\begin{aligned} \frac{\omega_{\max} U}{g} &\simeq 11,7 \left(\frac{gX}{U^2} \right)^{-0,26} & \text{для } \frac{\omega_{\max} U}{g} \geq 0,8, \\ \frac{m_0 g^2}{U^4} &\simeq 3,4 \cdot 10^{-7} \left(\frac{gX}{U^2} \right)^{0,87} & \text{для } \frac{m_0 g^2}{U^4} < 0,22 \cdot 10^{-2}, \\ \frac{m_0}{m_0(\omega_n)} &\simeq 1,18 \left(\frac{\omega_{\max} U}{g} \right)^{0,25} & \text{для } \frac{\omega_{\max} U}{g} \leq 2,4. \end{aligned}$$

Они получены для условий, когда ветровое волнение развивается на глубокой воде под воздействием ветра, устойчивого по скорости и направлению, продолжительность которого достаточна для полного развития волн при заданном разгоне ветра (см. главу 6). Если ветер неустойчив и не однороден, то расчет частотного спектра выполняется по алгоритмам, приведенным в части II книги.

Первые два соотношения довольно близки к результатам, полученным в нашей стране другими исследователями (если перейти от средней высоты волн к m_0 по линейной вероятностной модели волнения и от среднего периода к $\omega_{\max}$ по эмпирическим зависимостям работы [10], но расходятся более существенно со следующими аппроксимациями, опубликованными в работе [213]:

$$\begin{aligned} \frac{U \omega_{\max}}{g} &= 22 \left(\frac{gX}{U^2} \right)^{-0,33}, \\ m_0 g^2 / U^4 &= 1,6 \cdot 10^{-7} gX / U^2. \end{aligned}$$

Причина этих расхождений пока еще не совсем ясна.

3.1.4. Приближенные аппроксимации частотного спектра

Опубликовано значительное число приближенных аппроксимаций функции $S_{\zeta}(\omega)$ без разделения гравитационного интервала частотного спектра на отдельные области. В основном это аппроксимации вида

$$S_{\zeta}(\omega) = A\omega^{-k} \exp[-B\omega^{-n}], \quad (3.1.37)$$

где A , k , B , n — параметры, из которых k и n обычно считаются константами, а A и B связываются с основными факторами волнообразования или средними значениями элементов видимых волн. Значения параметров в аппроксимации (3.1.37) по разным авторам перечислены в табл. 3.1.4.

Наряду с аппроксимацией частотного спектра вида (3.1.37) предложены другие аппроксимации. Так, например, Дербишайр [40] принимает, что $S_{\zeta}(\omega)$ является функцией разности $\omega - \omega_{\max}$; подобную аппроксимацию, но в несколько другой форме принимает Загер [289]. Разновидностью приближенных аппроксимаций является также рассмотренное выше соотношение (3.1.22).

Как будет показано дальше, при описании приемов нормировки частотного спектра, предложенных Китайгородским, в аппроксимации, полученной Пирсоном и Московицем для полностью развитого волнения, нетрудно перейти от скорости ветра к частоте максимума спектра и записать аппроксимацию этих авторов в виде (3.1.23).

При определении параметров приближенных аппроксимаций частотного спектра отдельные исследователи [213, 261, 276] использовали безразмерные соотношения, предложенные С. А. Китайгородским [58].

Сделав ряд предположений о характере волнового движения и механизме взаимодействия ветра с волнами, Китайгородский принял, что частотный спектр ветровых волн определяется следующими четырьмя размерными величинами:

ω , g , U_{∞} , T — когда продолжительность ветра T ограничивает развитие волн;

ω , g , U_{∞} , X — когда разгон ветра X ограничивает развитие волн.

U_{∞} — скорость ветра на верхней границе пограничного слоя, принимаемая не зависящей от времени t и вертикальной координаты z . Вместо обычно неизвестного значения U_{∞} можно в первом приближении использовать динамическую скорость u_* , определяемую непосредственно по данным пульсационных измерений скорости ветра или по ее среднему значению на фиксированной высоте в случае принятия логарифмического вертикального профиля ветра.

При таком ограниченном количестве размерных параметров можно на основе гипотез подобия получить, что

$$\tilde{S}_{\zeta}(\omega) = f_1(\tilde{\omega}, \tilde{T}, \tilde{X}), \quad (3.1.38)$$

где

$$\tilde{S}_\zeta(\omega) = S_\zeta(\omega) g^3/U_\infty^5, \quad \tilde{\omega} = \omega U_\infty/g, \quad \tilde{T} = gT/U_\infty, \quad \tilde{X} = gX/U_\infty^2.$$

Из (3.1.38) следуют, в частности, соотношения для дисперсии и частоты максимума спектра $\omega_{\max}$

$$\tilde{D} = f_2(\tilde{T}, \tilde{X}), \quad \tilde{\omega}_{\max} = f_3(\tilde{T}, \tilde{X}), \quad (3.1.39)$$

где

$$\tilde{D} = \frac{gD}{U_\infty^2}, \quad \tilde{\omega}_{\max} = \frac{\omega_{\max} U_\infty}{g}.$$

Для полностью развитого волнения, зависящего только от скорости ветра

$$\tilde{S} = f_4(\tilde{\omega}), \quad \tilde{D} = \text{const} = c_1, \quad \tilde{\omega}_{\max} = \text{const} = c_2, \quad (3.1.40)$$

где c_1 и c_2 — универсальные постоянные.

Соотношение $\tilde{\omega}_{\max} = \text{const}$ позволяет во всех аппроксимациях частотного спектра полностью развитого волнения перейти от скорости ветра U_∞ к частоте максимума спектра $\omega_{\max}$. Так сделано, например, при получении (3.1.23) и в ряде других случаев.

Используя сведения из работ [58, 60, 61, 175, 218, 272], а также материалы экспедиции на э/с «Академик Вавилов» в Средиземном море в 1965 г., С. А. Китайгородский [59] пришел к выводу, что нормировка (3.1.38) в принципе не противоречит экспериментальным данным.

Следует отметить, что при сопоставлении приближенных аппроксимаций частотного спектра с эмпирическими спектрами, полученными по натурным данным, возможны более или менее существенные расхождения, обусловленные как приближенностью аппроксимаций, в которых спектр не разделен на отдельные области, так и трудностью установления типа волнения (ветровые волны, зыбь, смешанное волнение). Неслучайно в двух работах [207, 221], в которых для проверки аппроксимации $S_\zeta(\omega)$, принятой Вторым международным конгрессом по конструкции и прочности судов, использованы практически одни и те же исходные данные (измерения волн на станции погоды «Индия»), получены различные оценки степени согласия между аппроксимацией и эмпирическими спектрами. Несомненно, что отклонения эмпирических спектров от аппроксимации связаны в работах [207, 221] с попыткой распространить аппроксимации, относящиеся к ветровым волнам, на случаи смешанного волнения, а также с тем обстоятельством, что в этой аппроксимации не учитывается изменение удельного веса энергии равновесной области частотного спектра на различных стадиях развития волнения. Выполненная нами оценка величин параметров k и n в аппроксимации (3.1.37) по натурным данным показала, что разброс этих величин значительно превышает их разброс в аппроксимации (3.1.36), учитывающей

Таблица 3.1.4

Параметры в (3.1.37), принятые отдельными исследователями

Автор, год	A	B	k	n	Примечание
Нейман [267], 1953	$\frac{3,05 \pi}{2}$	$\frac{2g^2}{U^2}$	6	2	Для полностью развитого волнения* по визуальным наблюдениям, приняв некоторые достаточно произвольные предположения
Ролл и Фишер [286], 1956	Константа	$\frac{2g^2}{U^2}$	5	2	Путем уточнения аппроксимации Неймана, исходя из пропорциональности средней высоты полностью развитого волнения квадрату скорости ветра
С. С. Стрекалов [145], 1961	$\frac{1,2 \cdot 10^{-2} g^3}{U}$	$\frac{0,88 g}{U}$	6	2	Полностью развитое волнение, уточнение аппроксимации Неймана по большому числу записей волнения
Бретшнейдер [276], 1961	αg^2	$0,675 \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^4$	5	4	По данным о распределении видимых волн в предположении, что

Пирсон и Московиц [292], 1964	$16,2 \cdot 10^{-3} g^2$	$0,74 \left(\frac{g}{U} \right)^4$	5	4	распределение по частотам энергии внутренних волн тождественно ее распределению по функции спектральной плотности волновых аппликат
Приняты на Втором международном конгрессе по конструкции и прочности судов [225], 1964	$0,28 (2\pi)^4 \bar{h}^3 \tau^{-4}$	$0,44 (2\pi)^4 \tau^{-4}$	5	4	Для полностью развитого волнения по данным инструментальных измерений
А. И. Вознесенский, Ю. А. Невцагев [15], 1966	$\frac{9,43}{2\pi} m_0 \tau \omega_{\max}^6$	$1,5 \omega_{\max}^4$	6	4	На основе аппроксимации, полученной Пирсоном и Московицем
Ю. М. Крылов [73], 1966	$0,0795 \bar{h}^2 \frac{(2\pi)^7}{\tau^5}$	$0,785 \left(\frac{2\pi}{\tau} \right)^4$	7	4	По данным инструментальных измерений Уточнение аппроксимации Стрелкова в предположении $\omega/\omega_{\max} = \cos \theta$ и с учетом соотношений, основывающихся на линейной гидродинамической веерчатностной модели волновой поверхности

* Понятие «полностью развитое волнение» является по отношению к спектру волн условным и дискуссионным. Теоретически спектр полностью развитого волнения (для заданной средней скорости ветра) может иметь место только при $X \rightarrow \infty$ и $T \rightarrow \infty$. Однако можно ограничиться практически значимой частотной областью спектра, и тогда понятие «полностью развитое волнение» становится реальным.

наличие различных областей в частотном спектре. Это же подтверждает рис. 2.7 из работы [213], на котором приведены оценки параметра $\hat{\alpha}$ в обобщенной аппроксимации (3.1.22). Если на рис. 3.1.5 филлипсовская константа при разделении спектра на отдельные области колеблется от $5 \cdot 10^{-3}$ до $13 \cdot 10^{-3}$, то на упомянутом выше рисунке из работы [213] эта константа, по данным эксперимента в Северном море, колеблется от $5 \cdot 10^{-3}$ до $7 \cdot 10^{-2}$. Значительно больший диапазон колебаний $\hat{\alpha}$ в работе [213], безусловно, связан с тем, что принятая в этой работе аппроксимация не учитывает наличие в спектре различных областей.

Результаты сопоставления тех приближенных аппроксимаций частотного спектра, которые базируются на значительном числе измерений волн с аппроксимацией (3.1.36) при $n = 5$, показали [10], что имеют место более или менее значительные расхождения, которые нельзя игнорировать при изучении закономерностей развития ветрового волнения и решении некоторых прикладных задач. Однако эти расхождения не настолько велики, чтобы исключить возможность практического использования отдельных приближенных аппроксимаций частотного спектра при решении задач, не требующих точных сведений о спектральной плотности в частотной области $\omega > \omega_{\max}$.

3.2. Волны зыби

При ослаблении ветра начинается процесс затухания ветровых волн и их переход из категории вынужденных в категорию свободных волн. Этот переход не охватывает одновременно все составляющие спектра. В то время, когда в высокочастотной части спектра ослабленный воздушный поток еще полностью поддерживает общий баланс энергии, составляющие спектра в области более низких частот могут уже рассматриваться как свободные волны. Равновесная область спектра сокращается, но не исчезает. Положение ее границы зависит от скорости ветра. Общая энергия волн уменьшается, и так как затухание волн происходит пропорционально их частоте, то максимум спектра постепенно смещается в сторону меньших частот. После полного прекращения ветра начинается резкое уменьшение энергии в равновесной области, и спектр становится уже. По мере уменьшения энергетической насыщенности спектра на частотах, которые ранее относились к равновесной области, уменьшается значимость нелинейного взаимодействия между отдельными составляющими спектра и вероятностные характеристики волновой поверхности все более и более приближаются к их значениям в линейной гидродинамической модели. Это означает, что при переходе от ветрового волнения к пологой мертвой зыби в частотном спектре постепенно исчезают равновесная и переходная области и остается лишь область основного максимума

спектральной плотности процесса, для описания которой, как это было показано выше, вполне приемлемы соотношения линейной гидродинамической модели поверхности моря. Таким образом, при аппроксимации пологой мертвой зыби можно (3.1.1) распространить на весь спектр и, используя полные моментные соотношения, записать, что

$$m_0 = AB^{\frac{1-k}{n}} \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right); \quad (3.2.1)$$

$$m_2 = AB^{\frac{3-k}{n}} \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right); \quad (3.2.2)$$

$$B = \left[\frac{m_2}{m_0} \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right)} \right]^{\frac{n}{2}}; \quad (3.2.3)$$

$$A = n \left[\frac{m_2}{\Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right)} \right]^{\frac{k-1}{n}} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}{m_0} \right]^{\frac{k-3}{n}}; \quad (3.2.4)$$

$$S_{\max} = m_0 \sqrt{\frac{m_0}{m_2} \frac{n}{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}} \cdot \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{n}} \times \\ \times \exp\left[-\frac{k}{n}\right]; \quad (3.2.5)$$

$$\omega_{\max} = \sqrt{\frac{m_2}{m_0} \frac{n}{k}} \sqrt{\frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{n}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-3}{n}\right)}}, \quad (3.2.6)$$

где $\Gamma(x)$ — полная гамма-функция.

Введя обозначение $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{\tau}$, получаем следующие зависимости между безразмерными соотношениями $\kappa = \frac{f S_{\max} \omega_{\max}}{m_0}$ и $\Omega = \frac{\omega_{\max}}{\bar{\omega}}$

и константами k и n :

$$\kappa = \frac{n \left(\frac{k}{n} \right)^{\frac{k-1}{n}}}{\Gamma \left(\frac{k-1}{n} \right)} \exp \left[-\frac{k}{n} \right]; \quad (3.2.7)$$

$$\Omega = \sqrt[n]{\frac{n}{k}} \sqrt[n]{\frac{\Gamma \left(\frac{k-1}{n} \right)}{\Gamma \left(\frac{k-3}{n} \right)}}. \quad (3.2.8)$$

Для определения κ и Ω использованы две записи пологой зыби и одна запись крутой, но крупной зыби, для которой влияние не-

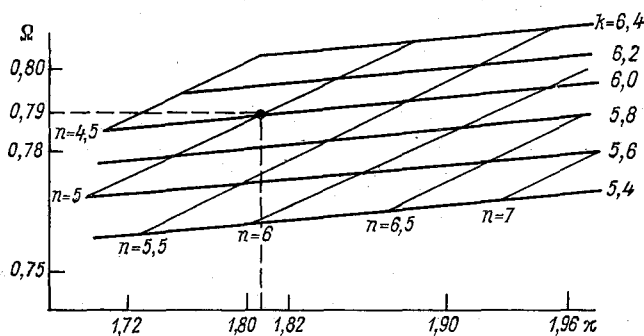


Рис. 3.2.1. Соотношение между безразмерными параметрами κ и Ω и константами k и n (кружок — соотношение по натурным данным)

линейных эффектов в области высоких частот сравнительно мало сказывается на общие вероятностные характеристики волнения. Данные по этим записям волнения, выполненным э/с «Айсберг» в Северной Атлантике, приведены в табл. 3.2.1. После подстановки средних значений $\kappa = 1,81$ и $\Omega = 0,79$ в (3.2.7) и (3.2.8) получаем два уравнения с двумя неизвестными k и n . Совместное решение этих уравнений выполнено графически. Для этого вначале была рассчитана функциональная сетка $n, k = f(\kappa, \Omega)$, на которую (см. рис. 3.2.1) были нанесены указанные выше средние значения κ и Ω . Как видно из рис. 3.2.1, при $\kappa = 1,81$ и $\Omega = 0,79$ $n \approx 5$, а $k \approx 6$. Таким образом, получено, что для «мертвой» зыби соотношение (3.1.1) описывает частотный спектр волнения при $k \approx 6$ и $n \approx 5$ и

$$S(\omega) = 6m_0 \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega} \right)^5 \omega^{-1} \exp \left[-1,2 \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega} \right)^5 \right]. \quad (3.2.9)$$

Подставляя в (3.2.9) соотношение $m_0 = \hbar^2/2\pi$ из линейной модели волновой поверхности и $(\omega_{\max}/\bar{\omega}) = \Omega = 0,79$ по данным табл. 3.2.1, получаем статистическую аппроксимацию «мертвой» зыби в следующем виде:

$$S(\omega) \approx 2,87 \cdot 10^3 \hbar^2 \tau^{-5} \omega^{-6} \exp[-3,6 \cdot 10^3 \tau^{-5} \omega^{-5}]. \quad (3.2.10)$$

Следует иметь в виду, что даже для «мертвой» зыби (3.2.10) действительно для всего диапазона спектральных частот только в том случае, если зыбь достаточно пологой. В других случаях в области высоких частот отмечаются более или менее существенные отклонения эмпирических спектров от (3.2.10). Величина этих отклонений уменьшается по мере затухания зыби. Это хорошо видно из рис. 3.2.2, на котором расчетные спектры по (3.2.10) сопоставлены с эмпирическими спектрами крупной зыби. Сопоставление выполнено на функциональной сетке вида (3.1.19). Точками на графике показаны величины, относящиеся к крупной пологой зыби (запись номер 1 в табл. 3.2.1), а кружками — величины, относящиеся к крупной, но крутой зыби (запись номер 3 в табл. 3.2.1).

Из рисунка видно, что для крупной пологой зыби с соотношением $g\tau^2/\hbar = 800$ линейная аппроксимация (3.2.10) хорошо согласуется с натурными данными во всем диапазоне частот спектра. Для крупной, но крутой зыби в области высоких частот отмечаются

отклонения расчетного спектра от эмпирического, которые растут с увеличением частоты. В то же время рис. 3.2.2 показывает, что для крупной зыби область спектра, где отклонение расчетов от природы становится заметным, незначительна и включает лишь 6% общей энергии волн. Для решения практических задач можно принять, что при $g\tau^2/\hbar \geq 350$ аппроксимация (3.2.10) хорошо согласуется с данными наблюдений, по крайней мере для крупной мертвой зыби.

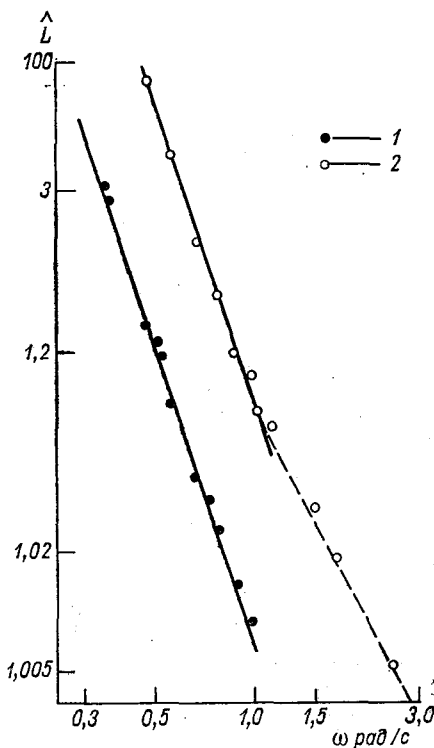


Рис. 3.2.2. Сопоставление эмпирических спектров (1—2—записи 1 и 2 из табл. 3.2.1) с расчетом по (3.2.10)

Таблица 3.2.1

Характеристика записей мертвой зыби

№ п/п	Дата и время начала записи (по Гринвичу)	Координаты	Сред- няя высо- та, м	Сред- ний пери- од, с	$\frac{\tau^2 g}{h}$	Дис- персия про- цесса, м ²	$\omega_{\max}$	κ	Ω
1	24/V 1964 г. 20 ч 30 мин	$\varphi = 57^\circ 16' \text{ с. ш.}$ $\lambda = 11^\circ 08' \text{ з. д.}$	1,8	12,0	800	0,50	0,40	1,35	0,78
2	6/VII 1965 г. 11 ч 00 мин	$\varphi = 40^\circ 33' \text{ с. ш.}$ $\lambda = 17^\circ 32' \text{ з. д.}$	0,8	7,1	600	0,11	0,68	1,80	0,77
3	25/VII 1966 г. 12 ч 50 мин	$\varphi = 61^\circ 19' \text{ с. ш.}$ $\lambda = 08^\circ 02' \text{ з. д.}$	2,0	8,0	320	0,67	0,64	1,79	0,81

В случаях, когда высота волн зыби невелика, (3.2.10) описывает хорошо эмпирические спектральные функции на всем диапазоне частот спектра только при малой крутизне волн.

Таким образом, можно сделать вывод, что спектр пологой зыби хорошо аппроксимируется (3.2.10); на всех других стадиях затухания ветрового волнения аппроксимация частотного спектра изменяется от (3.1.36) в начальный момент затухания ветрового волнения до (3.2.9) в случае пологой «мертвой» зыби.

3.3. Смешанное волнение

Согласно определению [110], смешанным волнением называется «волнение, образующееся в результате взаимодействия ветровых волн и зыби». Типичные частотные спектры смешанного волнения приведены на рис. 3.3.1. В простейшем случае смешанное волнение состоит из двух систем волн — ветрового волнения и зыби (рис. 3.3.1 а); в более сложных случаях в поле смешанного волнения могут наблюдаться несколько волновых систем. В качестве примера в табл. 3.3.1 приведены результаты визуальных оценок различных волновых систем в поле смешанного волнения. Наблюдения проводились с английского судна погоды «Weather Reporter». Из таблицы видно, что волновое поле в океане довольно часто, кроме ветровых волн, содержит три (четыре) системы зыби, легко различаемые наблюдателями.

Спектральная структура смешанного волнения будет довольно сложной и разнообразной (рис. 3.3.1 б). Аналитическое описание частотных спектров, характеризующих волнение, состоящее из нескольких систем волн, возможно лишь для некоторых наиболее простых случаев. Одним из таких случаев является образование смешанного волнения при уменьшении скорости ветра

без изменения его направления. При этом на разных частотах составляющие спектра волн будут находиться под разным влиянием ветра. Однако спектр волн остается одновершинным.

Такой процесс наблюдался авторами 26/VIII 1966 г. в Атлантическом океане при ослаблении ветра неизменного направления (180°) от 19 до 5 м/с. На рис. 3.3.2 показаны два частотных спектра, один из которых характеризует ветровое волнение при ветре 19 м/с — начальная стадия затухания волн, а другой — спектр

смешанного волнения через 3 ч после начала ослабления ветра. Из рисунка видно, что, в отличие от исходного спектра ветровых волн, второй спектр, по существу, уже имеет вид спектра зыби.

Построение аппроксимативного выражения для $S_{\xi}(\omega)$ допустимо в этом случае в виде (3.1.36) на начальной стадии затухания (кривая 2 рис. 3.3.2) и (3.1.37) на последующей стадии затухания (кривая 1 рис. 3.3.2).

При изменении направления ветра независимо от его усиления

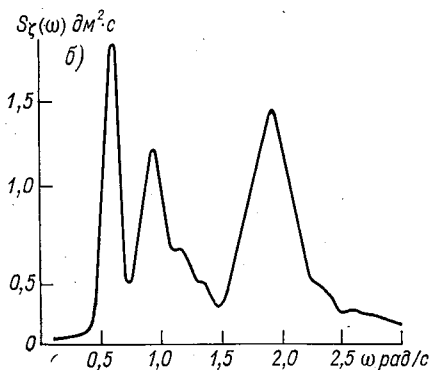
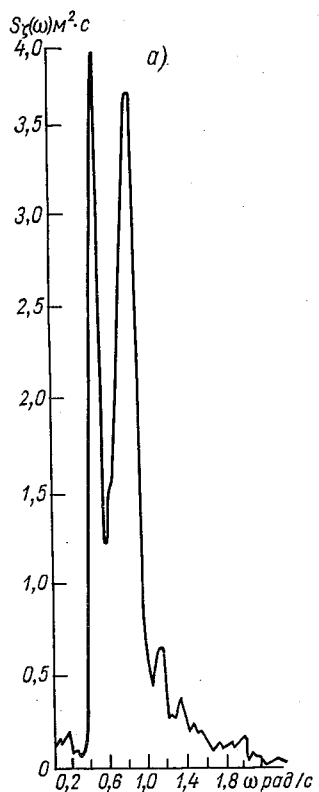


Рис. 3.3.1. Частотные спектры смешанного волнения, полученные по данным измерения в Атлантическом океане. Условия волнообразования приведены в табл. 5.1.1 под № 5 (а), 71 (б)

или ослабления ветровое волнение переходит в смешанное, спектральные компоненты которого, совпадающие с новым направлением ветра, развиваются, а остальные будут в той или иной мере затухать.

Таблица 3.3.1

Различные сочетания ветровых волн и зыби в поле смешанного волнения, по данным визуальных определений

Судно	Дата	Время, ч	Координаты		Ветер		Ветровые волны		Зыбь								
									I			II			III		
			φ	λ	направление, град.	скорость, м/с	высота, м	период, с	направление, град.	высота, м	период, с	направление, град.	высота, м	период, с	направление, град.	высота, м	период, с
WR	6/IX 1969	09	59°	19°	160	8	1,5	3	310	3,3	8	270	2,7	7	140	2,4	8*
WR	6/IX	17	59	19	210	4	0,5	1	280	2,4	8	160	2,4	5	130	1,8	5**
WR	9/IX	18	59	19	270	10	0,5	2	320	3,5	8	280	2,8	8	230	2,0	7
WR	12/IX	19	59	19	170	7	1,5	3	110	1,8	8	90	1,2	7	30	1,2	6
WR	13/IX	09	59	19	170	15	3,0	7	110	2,0	7	210	1,8	7	80	1,5	5
WR	13/IX	19	59	19	200	3,5	1,2	3	230	3,0	9	180	2,5	8	140	2,0	7

Примечание. WR — судно погоды «Weather Reporter»

* Наблюдалась IV система зыби 210°, с h ~ 1,8 м, τ ~ 6 с.

** Наблюдалась IV система зыби 230°, с h ~ 1,5 м, τ ~ 7 с.

Описание такого процесса возможно лишь с использованием методов, изложенных в части II книги.

Другим не менее типичным случаем образования смешанного волнения является приход зыби в район, где ветер создал ветровое волнение. Типичные частотные спектры такого волнения приведены на рис. 3.3.3, 3.3.4. Из рисунка видно, что графики спектральной плотности имеют две вершины, одна из которых (высокочастотная) соответствует компонентам ветрового волнения, а другая (низко-частотная) — компонентам зыби.*

Когда смешанное волнение состоит из волновых систем с различными средними периодами волн, удастся получить приемлемое приближение частотного спектра $\hat{S}_{\text{св}}(\omega)$ смешанного волнения в виде суммы спектров $S_i(\omega)$ систем ветрового волнения и зыби

$$\hat{S}_{\text{св}}(\omega) = \sum_i S_i(\omega), \quad (3.3.1)$$

аналитические выражения которых даются формулами (3.1.36) и (3.2.9).

Одним из примеров довольно удачной аппроксимации вида (3.3.1) приведен на рис. 3.3.4. Следует отметить, что для вычисления спектра по формулам (3.1.36), (3.2.9) и (3.3.1) необходимо задавать средние высоты ветровых волн $\bar{h}_{\text{вв}}$ и зыби $\bar{h}_3$, а также средние периоды ветровых волн $\bar{\tau}_{\text{вв}}$ и зыби $\bar{\tau}_3$.

Наиболее просто определить эти параметры, когда спектры компонент ветровых волн $S_{\text{вв}}(\omega)$ и зыби $S_3(\omega)$ имеют (полностью или почти) непересекающиеся частотные области (рис. 3.3.3, 3.3.4). В этом случае допустимо планиметрирование площадей под кривой спектральной плотности каждой компоненты, т. е. определение дисперсий (моментов нулевого порядка) и вычисление $\bar{h}_{\text{вв}}$ и $\bar{h}_3$ по формуле (2.3.5); ве-

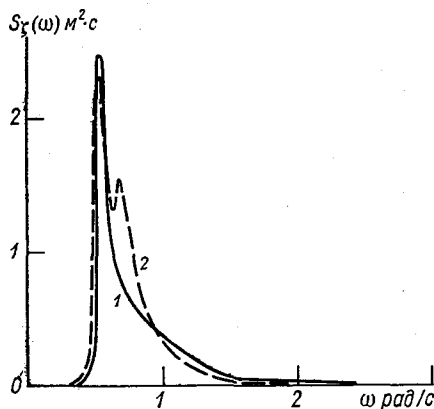


Рис. 3.3.2. Частотные спектры на различных стадиях перехода ветровых волн (2) в зыбь (1) 26/VIII 1966 г. с 7 до 10 ч в точке 59° с. ш., 19° з. д.; ветровое волнение $h = 1,88$ м, $\bar{\tau} = 6,6$ с при скорости ветра 19 м/с, 180°; зыбь $h = 1,33$ м, $\bar{\tau} = 8,4$ с через 3 ч после начала ослабления ветра

* Еще более наглядную картину дает в этом случае график двумерной спектральной плотности $S_{\zeta}(\omega, \theta)$, поскольку на нем видны не только различия в высотах и периодах волновых систем, но и различие в направлениях их распространения.

личина $\bar{\tau}_3$ находится по частоте $\omega_{\max}$ максимума спектра [зыби по формуле [9]

$$\bar{\tau}_3 = 0,79 \cdot 2\pi / \omega_{\max}, \quad (3.3.2)$$

а $\bar{\tau}_{\text{ВВ}}$ — по соотношению [26]

$$\bar{\tau}_{\text{ВВ}} = 4,8 \sqrt{\bar{h}_{\text{ВВ}}}. \quad (3.3.3)$$

Не вызывает особых трудностей вычисление параметров $\bar{h}_{\text{ВВ}}$, $\bar{\tau}_{\text{ВВ}}$, $\bar{h}_3$, $\bar{\tau}_3$, а также аппроксимативного выражения $\hat{S}_{\text{св}}(\omega)$ по указанным выше формулам, в случае когда спектры компонент $S_{\text{ВВ}}(\omega)$ и $S_3(\omega)$ имеют пересекающиеся частотные области, но на частотном

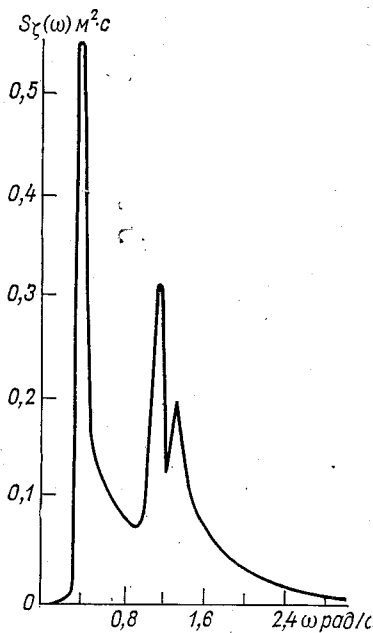


Рис. 3.3.3. Частотные спектры волнения, образованного приходом зыби в район, где наблюдаются ветровые волны. Условия волнообразования приведены в табл. 5.1.1 под № 4

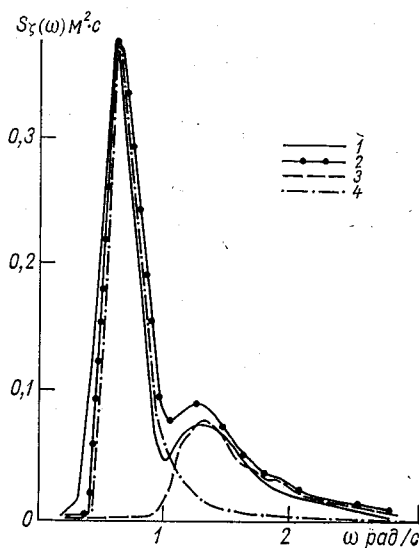


Рис. 3.3.4. Частотный спектр смешанного волнения (1) по записи № 53 из табл. 5.1.1 и его аппроксимация (2), полученная по методу (3.3.2) — (3.3.6); 3, 4 — спектральная плотность компоненты ветровых волн (3) и зыби (4) в поле смешанного волнения

спектре $S_{\text{ВВ}}(\omega)$ различима частота $\omega_{\max}^{\text{ВВ}}$ максимума спектра $S_{\text{ВВ}}(\omega)$. Находя по данным эмпирического анализа $\omega_{\max}^{\text{ВВ}}$, а также нулевой $m_0^{\text{св}}$ и второй $m_2^{\text{св}}$ моменты спектра $S_{\text{св}}(\omega)$, параметры аппроксимации $\hat{S}_{\text{св}}(\omega)$ можно вычислить следующим образом:

m_0^{BB} через $\omega_{\max}^{BB}$ по формуле [10]

$$m_0^{BB} = 0,148 (\omega_{\max}^{BB})^{-4} + 0,02; \quad (3.3.4)$$

$\bar{h}_{BB}$ — по m_0^{BB} через соотношение (2.3.5) линейной модели;

$\bar{\tau}_{BB}$ — по $\bar{h}_{BB}$ с помощью эмпирической зависимости (3.3.3);

$\bar{h}_3$ и $\bar{\tau}_3$ — по заданным m_0^{CB} , m_2^{CB} и найденным значениям $\bar{h}_{BB}$, $\bar{\tau}_{BB}$ путем решения системы двух уравнений

$$\bar{h}_{BB}^2 + \bar{h}_3 = 2\pi m_0^{CB}; \quad (3.3.5)$$

$$\frac{\bar{h}_{BB}^2}{\bar{\tau}_{BB}^2} + \frac{\bar{h}_3^2}{\bar{\tau}_3^2} = \frac{m_2^{CB}}{2\pi}, \quad (3.3.6)$$

полученных из (3.3.1) с использованием соотношений (2.3.5), (2.3.6) линейной модели.

Строго рассуждая, интересные величины можно определить даже тогда, когда $\omega_{\max}^{BB}$ не задано, а исходными данными являются лишь $S_{CB}(\omega)$ и его моменты m_0^{CB} и m_2^{CB} . Этот вариант отличается от предыдущего тем, что величины $\bar{h}_{BB}$, $\bar{\tau}_{BB}$, $\bar{h}_3$, $\bar{\tau}_3$ находятся из системы следующих четырех уравнений: трех прежних (3.3.3), (3.3.5), (3.3.6) и четвертого, записанного в виде

$$V = \sum_i [S_{CB}(\omega_i) - \hat{S}_{CB}(\omega_i)]^2 = \min. \quad (3.3.7)$$

В такой постановке задача аппроксимации спектра смешанного волнения сводится к выбору из возможного семейства спектров $\hat{S}_{CB}(\omega)$ с фиксированной общей энергией m_0^{CB} и средним периодом $\bar{\tau}_{CB} = \sqrt{\frac{m_0^{CB}}{m_2^{CB}}}$ такого $\hat{S}_{CB}(\omega)$, чтобы сумма (3.3.7) квадратов отклонений его ординат от ординат $S_{CB}(\omega)$, найденных по экспериментальным данным, была минимальной.

После подстановки в (3.3.7) выражений для частотного спектра волнения на стадии развития и для зыби и выражений (3.3.3) — (3.3.6) получим одно нелинейное уравнение с одним неизвестным $\bar{h}_{BB}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \bar{h}_{BB}} = 2 \left\{ \sum_i [S_{BB}(\omega_i) + S_3(\omega_i)] \frac{\partial}{\partial \bar{h}_{BB}} [S_{BB}(\omega_i) + S_3(\omega_i)] - \right. \\ \left. - \sum_i S_{CB}(\omega_i) \frac{\partial}{\partial \bar{h}_{BB}} [S_{BB}(\omega_i) + S_3(\omega_i)] \right\} = 0. \quad (3.3.8) \end{aligned}$$

Уравнение (3.3.8) решается численно (методом дробных шагов), при этом решение $\bar{h}_{BB}$ может быть и не единственным. После того как $\bar{h}_{BB}$ найдено, остальные параметры вычисляются тем же путем, как в предыдущем случае.

Иногда в океане наблюдаются случаи, когда одновременно существуют две или несколько систем зыби. Типичные примеры частотных спектров, характерных для таких ситуаций, приведены на рис. 4.11 *а, б* работы [10]. Если смешанное волнение состоит из двух систем зыби, средние высоты и периоды которых различны, то можно построить аппроксимативное выражение $S_{\Sigma}(\omega)$ с помощью модификации вышеизложенного метода путем замены компоненты ветрового волнения на компоненту зыби. В других более сложных случаях вряд ли целесообразно стремиться найти аппроксимацию частотного спектра. Следует отметить, что представление спектра $S_{\text{св}}(\omega)$ в виде (3.3.1) означает, что волновые системы, формирующие поле смешанного волнения, не взаимодействуют друг с другом (поэтому их частотные спектры складываются). Согласно теории ветровых волн (см. главу 6), существуют процессы нелинейных взаимодействий между спектральными составляющими (см. раздел 6.2), приводящие к перестройке частотного спектра. Поэтому более общим представлением будет

$$\hat{S}_{\text{св}}(\omega) = \sum_i a_i S_i(\omega) + \sum_{ij} b_{ij} S_i(\omega) S_j(\omega) + \dots, \quad (3.3.9)$$

где a_i , b_{ij} — «весовые» множители.

На основании приведенных рассуждений можно утверждать, что построение аппроксимативного выражения для частотного спектра смешанного волнения является весьма сложной задачей, поскольку представления (3.3.1) применимо лишь для весьма ограниченного числа случаев, а более общее представление (3.3.9) содержит много неизвестных параметров (средние высоты и периоды волновых систем и весовые множители a_i , b_{ij}).

Наиболее перспективным общим методом описания спектральной структуры волнения любого типа (ветрового, смешанного и зыби) является решение уравнения баланса волновой энергии в спектральной форме (см. часть II).

Глава 4

Пространственный и частотно-направленный спектры ветрового волнения

Волновая поверхность является, как известно, трехмерной и отличается, как уже указывалось, многообразием форм. Волновые гребни и ложбины существенно различаются между собой по очертаниям, размерам и взаимному расположению. На сравнительно небольших участках волновой поверхности распределение волновых аппликат может с определенной погрешностью считаться ста-

статистически однородным. Размеры таких участков зависят от заданной допустимой погрешности определения статистических характеристик, интенсивности и стадии развития волнения. При больших скоростях ветра и малых его «разгонах» область, для которой допустимо предположение статистической квазиоднородности волнения, будет меньше, чем при слабых ветрах и больших его «разгонах».

В предположении гауссовости процесса статистические характеристики волновых аппликат на участке квазиоднородности достаточно полно описываются функцией спектральной плотности $S_{\xi}(k)$, аргументами которой являются в декартовой системе координат проекции k_x и k_y волнового числа k на оси OX и OY , а в полярных координатах — волновое число k как радиус-вектор и полярный угол $\theta = \arctg \frac{k_x}{k_y}$. Функция $S_{\xi}(k)$, которую назы-

вают пространственным спектром волн, определяет распределение дисперсии амплитуд гармоник, случайное наложение которых как бы формирует изменчивую волновую поверхность на участке квазиоднородности процесса. С точностью до постоянного множителя интеграл от $S_{\xi}(k)$ равен волновой энергии спектральных составляющих в заданных пределах проекций волновых чисел.

В связи с эргодичностью ветрового волнения как вероятностного процесса пространственный спектр волн можно определить по отдельно взятой реализации, например по аппликатам волновой поверхности, зафиксированной на планшетах стереофотосъемки волнения. Методика расчета пространственного спектра волн и достоверность полученных результатов детально рассмотрены в главе 1.

Принятие линейной гидродинамической вероятностной модели ветрового волнения позволяет придать пространственному спектру волн более определенный физический смысл, так как в этом случае спектральные составляющие могут рассматриваться как элементарные плоские линейные волны, для которых волновое число связано с частотой дисперсионным соотношением (10). В полярных координатах пространственный спектр волновой поверхности характеризует распределение дисперсии элементарных волн в зависимости от их волнового числа и угла распространения. При переходе от волнового числа к частоте получаем функцию $S_{\xi}(\omega, \theta)$,* которую будем в дальнейшем именовать частотно-направленным спектром в отличие от функции $S_{\xi}(k)$, расчет которой не требует допущения линейности вероятностной гидродинамической модели волновой поверхности. Для непосредственного определения функции $S_{\xi}(\omega, \theta)$ обычно служат данные об изменении во времени аппликат волновой поверхности в ряде отдельно взятых точек или

* В предположении линейности вероятностной гидродинамической модели волновой поверхности функция $S_{\xi}(\omega, \theta)$ является наиболее полной вероятностной характеристикой процесса.

данные об изменении аппликат и волновых уклонов в одной точке. Методика расчета частотно-направленного спектра изложена в главе 1.

Функции $S_{\xi}(k_x, k_y)$, $S_{\xi}(k, \theta)$ и $S_{\xi}(\omega, \theta)$ связаны между собой следующей зависимостью:

$$S_{\xi}(p, q) dpdq = S_{\xi}[p(r, n), q(r, n)] I(r, n) drdn, \quad (4.1)$$

где p, q и r, n — соответствующие пары аргументов спектра, а $I(r, n)$ — якобиан взаимного преобразования координат, конкретные значения которого для различных сочетаний пар аргументов спектров приведены в табл. 4.1. В табл. 4.2 показана зависимость между аргументами пространственного и частотно-направленного спектров.

Таблица 4.1

Якобианы взаимного преобразования пространственного и частотно-направленного спектров волнения к различным переменным

Спектр	$S_{\xi}(k_x, k_y)$	$S_{\xi}(\omega, \theta)$	$S_{\xi}(k, \theta)$
$S_{\xi}(k_x, k_y)$	1	$\frac{2\omega^3}{g^2}$	k
$S_{\xi}(\omega, \theta)$	$\frac{g^{1/2}}{2} (k_x^2 + k_y^2)^{-3/4}$	1	$\frac{1}{2} \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2}$
$S_{\xi}(k, \theta)$	$(k_x^2 + k_y^2)^{-1/2}$	$\frac{2\omega}{g}$	1

По данным о пространственном спектре легко определить спектр волновых чисел $S(k)$

$$S_{\xi}(k) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_{\xi}(k, \theta) d\theta, \quad (4.2)$$

а по данным о частотно-направленном спектре — частотный спектр $S(\omega)$

$$S_{\xi}(\omega) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_{\xi}(\omega, \theta) d\theta. \quad (4.3)$$

Спектр волновых чисел дает распределение дисперсии гармоник спектральных составляющих в предположении, что направление векторов волновых чисел совпадает с генеральным направлением распространения волн. Его можно рассчитать по аппликатам волнового профиля, представляющего след пересечения волновой поверхности вертикальной плоскостью в сторону распространения волн. Полный интеграл по спектру волновых чисел равен диспер-

Таблица 4.2

Зависимость между переменными в пространственном
и частотно-направленном спектрах

Спектр	$S_{\xi}(k_x, k_y)$	$S_{\xi}(\omega, \theta)$	$S_{\xi}(k, \theta)$
$S_{\xi}(k_x, k_y)$	1	$k_x = \frac{\omega^2 \cos \theta}{g}$ $k_y = \frac{\omega^2 \sin \theta}{g}$	$k_x = k \cos \theta$ $k_y = k \sin \theta$
$S_{\xi}(\omega, \theta)$	$\omega = g^{1/2} (k_x^2 + k_y^2)^{1/4}$ $\theta = \arctg \frac{k_y}{k_x}$	1	$\omega = (kg)^{1/2}$ $\theta = \theta$
$S_{\xi}(k, \theta)$	$k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ $\theta = \arctg \frac{k_y}{k_x}$	$k = \frac{\omega^2}{g}$ $\theta = \theta$	1

сии процесса

$$\int_0^{\infty} S_{\xi}(k) dk = \int_0^{\infty} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} S_{\xi}(k, \theta) dk d\theta = D_{\xi}. \quad (4.4)$$

Для линейной вероятностной гидродинамической модели функции $S_{\xi}(\omega)$ и $S_{\xi}(k)$ связаны следующей зависимостью:

$$S_{\xi}(p) = S_{\xi}[p(r)] I(r), \quad (4.5)$$

где p и r — аргументы спектров, а $I(r)$ — якобиан преобразования координат, конкретный вид которого приведен в табл. 4.3.

Таблица 4.3

Якобианы взаимного преобразования одномерных спектров
как функций частоты или волнового числа

Спектр	$S_{\xi}(\omega)$	$S_{\xi}(k)$
$S_{\xi}(\omega)$	1	$\frac{1}{2} \left(\frac{g}{k} \right)^{1/2}$
$S_{\xi}(k)$	$\frac{2\omega}{g}$	1

Пространственный и частотно-направленный спектры, а также спектр волновых чисел изучены значительно менее детально, чем частотный спектр. Это связано с трудностями получения исходных данных для расчета функций $S_{\xi}(k_x, k_y)$, $S_{\xi}(\omega, \theta)$ и $S_{\xi}(k)$ и их последующей аппроксимации.

Одна из первых попыток расчета пространственного спектра волн была предпринята в США в период с 1953 по 1959 г. [180]. Исходными данными для расчета функции $S_{\xi}(k, \theta)$ послужили два планшета стереофотосъемки волн, выполненной с двух самолетов 25/X 1954 г. в северной части Атлантического океана, вблизи побережья США при ветре 9,6 м/с. На планшетах было зафиксировано смешанное волнение средней высотой 0,9 м. С них было снято 50×70 и 40×90 высотных отметок с интервалом дискретности 9×9 м. Единственный спектр был получен путем усреднения преобразований Фурье двух корреляционных поверхностей (оценки спектральной плотности имели 19 степеней свободы).

В 1963—1965 гг. сотрудниками Ленинградского отделения Государственного океанографического института были выполнены стереофотосъемки ветрового волнения, позволившие рассчитать 66 пространственных спектров волнения.

Фотографирование поверхности моря проводилось при помощи аэрофотоаппаратов АФА-37, установленных на двух самолетах ЛИ-2, которые во время съемки располагались строем «фронт».

Во время съемки самолеты с большой точностью выдерживали заданную высоту и базисное расстояние полета. Высота полета фиксировалась радиовысотомерами типа РВ; базис съемки измерялся при помощи специальной визирной линейки. Синхронность срабатывания фотоаппаратов обеспечивалась радиосинхронизатором, гарантировавшим точность срабатывания затворов аэрофотоаппаратов в пределах 0,01—0,005 с.

Съемка волнения производилась сериями по 15—30 снимков, интервал между которыми задавался в зависимости от скорости полета, исходя из расчета 40—50% перекрытия между соседними снимками. Экспозиция колебалась от 1/50 до 1/130 с и устанавливалась по показанию экспонометра. Продолжительность одного цикла съемки 3 с. Выбор высоты полета съемки был ограничен нижней границей облачности или необходимой точностью съемки, а базис фотографирования определялся по высоте полета, исходя из требования, чтобы поперечное перекрытие снимков в стереопаре составляло 65—70% их площади. Фотографирование волн производилось на маршрутах, проложенных по или против генерального направления распространения волнения. Однако, как показали результаты последующей обработки материалов, это удалось не во всех случаях.

Стереофотограмметрическая обработка материалов выполнена на стереомере Дробышева и стереопроекторе Романовского, которые позволяют определить высотные отметки с достаточно большой точностью. Вопросы точности аэростереофотосъемки волнения и сте-

реофотограмметрической ее обработки подробно рассмотрены в работе [157].

Координатные оси стереомодели выбраны таким образом, чтобы ось ординат совпадала с полосами пены, хорошо видимыми на снимках, так как эти полосы обычно совпадают с направлением ветра. Согласовать ось ординат стереомодели непосредственно с генеральным направлением распространения волн возможно лишь при повторном обмере модели, т. е. после того как это направление уже определено по результатам первого обмера модели. Однако в связи с тем, что повторный обмер стереомодели в два раза увеличивает объем работ, ось ординат на стереомодели ориентировалась по направлению ветра. По этой причине угол между осью ординат стереомодели и максимальным градиентом корреляционной поверхности волнения достигал иногда $25-30^\circ$.

Материалы стереофотограмметрической обработки снимков волнения получены в основном в виде планшетов, на которых проведены изолинии, соединяющие точки с равными высотными отметками. Планшеты наглядно показывают рельеф волновой поверхности моря и позволяют снимать высотные отметки с интервалом, зависящим как от масштаба съемки, так и от разрешающей способности стереофотограмметрического прибора.

В результате стереофотограмметрической обработки материалов было получено 66 планшетов и таблиц высотных отметок.

Съемка волн, в первом случае зафиксировала сильное волнение, вызванное штормовыми ветрами ($20-22$ м/с) почти северного направления. Развитие волн, максимальная высота которых достигала 12 м, было ограничено разгоном ветра (размерами тыловой части циклона). На протяжении всей съемки интенсивность волнения почти не изменилась, т. е. имел место случай стационарного штормового волнения.

Вторая стереофотосъемка волн зафиксировала волнение, которое развивалось под воздействием северо-западных ветров в тыловой части циклона, центр которого медленно перемещался. Скорость ветра составляла $14-16$ м/с. На основе анализа синоптических условий можно принять, что было заснято полностью развитое ветровое волнение для такой скорости ветра. Третья съемка производилась вдоль разгона ветра, от берега до берега. За период съемки были получены данные, относящиеся к волнению, развивающемуся под воздействием ветров скоростью $9-11$ м/с при разгонах от 25 до 140 км. Максимальная высота волн 3 м.

Таким образом, на 66 планшетах стереофотосъемки были получены данные об изменении рельефа волновой поверхности моря при переходе от слабого до штормового ветрового волнения. Перечень планшетов стереофотосъемки, использованных в дальнейшем при анализе пространственной структуры волнового поля, приведен в табл. 4.4. Из таблицы видно, что на планшетах зафиксировано волнение со средними высотами от 1 до 3 м и средними длинами от 30 до 120 м. Для каждой съемки планшеты сгруппированы в

Таблица 4.4

Основные характеристики исходных данных, по которым были рассчитаны пространственные спектры волнения

Номер съемки	№ груп- пы	Коли- чество планше- тов	Глу- бина, м	Интервал дискретности определения высотных отметок, м		Размеры планшета, м		Характеристика волнения				
				ось ОУ	ось ОХ	длина	ширина	D _ζ м ²	h̄ м	λ м	k _{max} рад/м	S _ζ max м ² ·м
Первая съемка	I.1	6	55	6—24	6	670—859	360—460	1,63	3,25	117	0,036	2,22
	I.2	8	120	6—24	6—12	610—970	270—460	1,86	3,41	123	0,036	3,48
Вторая съемка	II.1	5	100	8	4	400—480	220—290	0,97	2,46	89	0,060	3,22
	II.2	3	100	8	4	400—480	240—280	1,14	2,67	96	0,052	2,28
	II.3	3	150	8	4	480	240	0,84	2,29	82	0,034	2,34
	II.4	8	150	8	4	360—400	230—290	1,65	3,12	112	0,033	2,74
	II.5	2	150	8	4	400	200—260	1,57	3,25	117	0,034	1,16
	II.6	3	150	8	4	400	200—260	1,50	3,06	110	0,062	3,80
Третья съемка	III.0	3	3	3	3	260—300	130—140	0,16	1,0	36	0,129	0,27
	III.1	5	50	3—4	2—4	280—300	150	0,18	1,05	38	0,143	0,27
	III.2	3	50	2,4	3,7	370	250	0,15	0,98	35	0,120	0,37
	III.3	4	12	3	3	240—260	130—170	0,18	1,05	38	0,128	0,31
	III.4	3	60	3	1,5—3	210—270	100—140	0,12	0,88	32	0,141	0,10
	III.5	4	60	3—3,5	3—3,5	240—310	140—190	0,09	0,75	27	0,134	0,21
	III.6	2	50	3	3	240—270	100—160	0,14	0,93	33	0,122	0,17
	III.7	4	12	2,4—3	1,2—2,5	170—240	90—150	0,16	1,01	36	0,15	0,11

таблице по условиям волнообразования. По высотным отметкам, снятым с планшетов, были рассчитаны корреляционные поверхности и пространственные спектры (преобразованием Фурье). Расчет статистических оценок $S_{\xi}^*(k_x, k_y)$ выполнен по методике, изложенной в главе 1.

Параметры эмпирического спектрального анализа выбирались таким образом, чтобы смещение оценок $S_{\xi}^*(k_x, k_y)$ было наименьшим. Все последующие расчеты параметров аппроксимированных выражений вычислялись по значениям этих оценок и затем полученные величины определялись по ансамблю планшетов, принадлежащих одной группе. Отдельные пространственные спектры волнения, главным образом в прибрежных районах, были также получены другими исследователями [75].

Наибольшее число частотно-направленных спектров было рассчитано по результатам измерений волн с судов, выполненных советскими исследователями, сотрудниками Национального института океанографии Великобритании и Японского исследовательского института прикладной механики при помощи специальных буюв, позволяющих одновременно фиксировать изменение во времени возвышения волновой поверхности и уклонов в двух взаимно перпендикулярных плоскостях [77, 78, 200]. Полученные данные [в общей сложности около 40 определений функций $S_{\xi}(\omega, \theta)$, в том числе 20 спектров, выполненным в нашей стране] характеризуют ветровое, смешанное волнение и зыбь средней высоты от 0,3 до 2 м, наблюдавшиеся при ветрах от 4 до 15 м/с. Продолжительность использованных записей волнения колебалась от 15 до 90 мин, а дискретность съема данных о возвышении поверхности и уклонов 0,25—0,50 с.

Небольшое число частотно-направленных спектров было рассчитано другими методами по данным измерений волн главным образом в прибрежных районах: при помощи датчиков, установленных в одну линию, в углах треугольника или многоугольника, [73, 206], путем измерений орбитальных скоростей [230], радиолокационным и другим методами [50, 277, 298].

В связи с тем что достоверных данных о частотном спектре волн значительно больше, чем данных о пространственном и частотно-направленном спектрах, полученные до сих пор статистические оценки функций $S_{\xi}(k_x, k_y)$ и $S_{\xi}(\omega, \theta)$ использованы лишь для определения так называемой функции углового распределения энергии $Q(\omega, \theta)$, которая связана с частотно-направленным спектром соотношением

$$S_{\xi}(\omega, \theta) = S_{\xi}(\omega) Q(\omega, \theta). \quad (4.6)$$

Функция $Q(\omega, \theta)$ определяет, в каком соотношении волновая энергия, содержащаяся в заданном диапазоне частот, распределена по направлениям распространения элементарных волновых со-

ставляющих частотно-направленного спектра. Поскольку частотный спектр связан с частотно-направленным спектром соотношением (4.3), функция углового распределения энергии должна удовлетворять условию

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} Q(\omega, \theta) d\theta = 1. \quad (4.7)$$

4.1. Функция углового распределения энергии

В 1947 г. Артур [4], изучая закономерности распространения волн из области шторма, сделал предположение, что высота волн зыби пропорциональна квадрату косинуса угла между генераль-

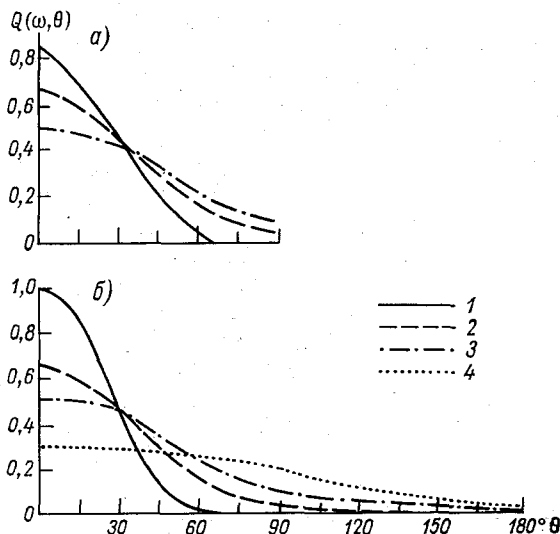


Рис. 4.1.1. Вид различных аппроксимаций функций углового распределения энергии: а — по формуле (4.1.2) [1] $\omega U/g = 0,5$, 2) 1,0, 3) 4; б — по формуле (4.1.3) [1] 1) $s = 12$, 2 — $s = 6$, 3) $s = 3$, 4) $s = 1$

ным направлением ветрового волнения в области шторма и направлением распространения зыби. Это послужило основанием для принятия Пирсоном, Нейманом и Джеймсом [115] функции углового распределения энергии в виде

$$Q(\theta) = \frac{2}{\pi} \cos^2 \theta. \quad (4.1.1)$$

Согласно (4.1.1), угловое распределение энергии не зависит от частоты.

Позднее группа американских исследователей [180] показала, что угловое распределение энергии зависит не только от угла рас-

пространения волн, но и от их частоты (рис. 4.1.1 а). Для частного случая умеренного смешанного волнения они получили следующую аппроксимацию функции $Q(\omega, \theta)$:

$$Q(\omega, \theta) = \frac{1}{\pi} \left\{ 0,50 \left[1 - \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega U}{g} \right)^4 \right\} \right] + \right. \\ \left. + \left[1,0 - 0,92 \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left(\frac{\omega U}{g} \right)^4 \right\} \cos^2 \theta \right] + \right. \\ \left. + 2,56 \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{\omega U}{g} \right)^4 \right] \cos^4 \theta \right\}. \quad (4.1.2)$$

Основным недостатком (4.1.2) является гипотетичность принятой параметрической зависимости $Q(\omega, \theta)$ от скорости ветра, так как исходные данные о пространственном спектре, положенные в основу этих аппроксимаций, относятся к одному значению скорости ветра при наличии зыби в волновом поле.

Английские исследователи [200, 247] предложили аппроксимативное выражение для функции $Q(\omega, \theta)$, согласно которому угловое распределение энергии пропорционально косинусу угла $\theta/2$ в степени $2s$, убывающей с увеличением частоты волновой составляющей:

$$Q(\tilde{f}, \theta) = \hat{G}(s) \left(\cos \frac{\theta}{2} \right)^{2s}, \quad (4.1.3)$$

где $\hat{G}(s) = 2^{2s-1} \Gamma^2(s+1) / \Gamma(2s+1)$ — нормирующая функция, определяемая из условия (4.7); Γ — гамма-функция; $\tilde{f} = \omega/2\pi$. Зависимость s от $\tilde{f}$ представлена на рис. 4.1.2.

В 1971 г. [9] закономерности углового распределения энергии были существенно уточнены на основе анализа упомянутых выше 66 планшетов стереофотосъемки волнения, охватывающих более широкий диапазон условий волнообразования, чем все ранее полученные пространственные и частотно-направленные спектры, вместе взятые.

Расчет оценок корреляционных функций и пространственных спектров производился отдельно по данным отдельных планшетов, поскольку каждый из них имел различную ориентацию координатных осей относительно генерального направления распространения волн. Для примера на рис. 4.1.3, см. вклейку, 4.1.4 приведены планшет стереосъемки волнения и три пространственных спектра слабого, умеренного и штормового волнения. Для уменьшения смещения оценок спектральной плотности значения $S_{\xi}^*(k_x, k_y)$ рассчитывались по корреляционным поверхностям $K_{\xi}^*(\xi, \eta)$ с максимальным сдвигом $\eta_{\max}$ в направлении оси абсцисс, почти равным

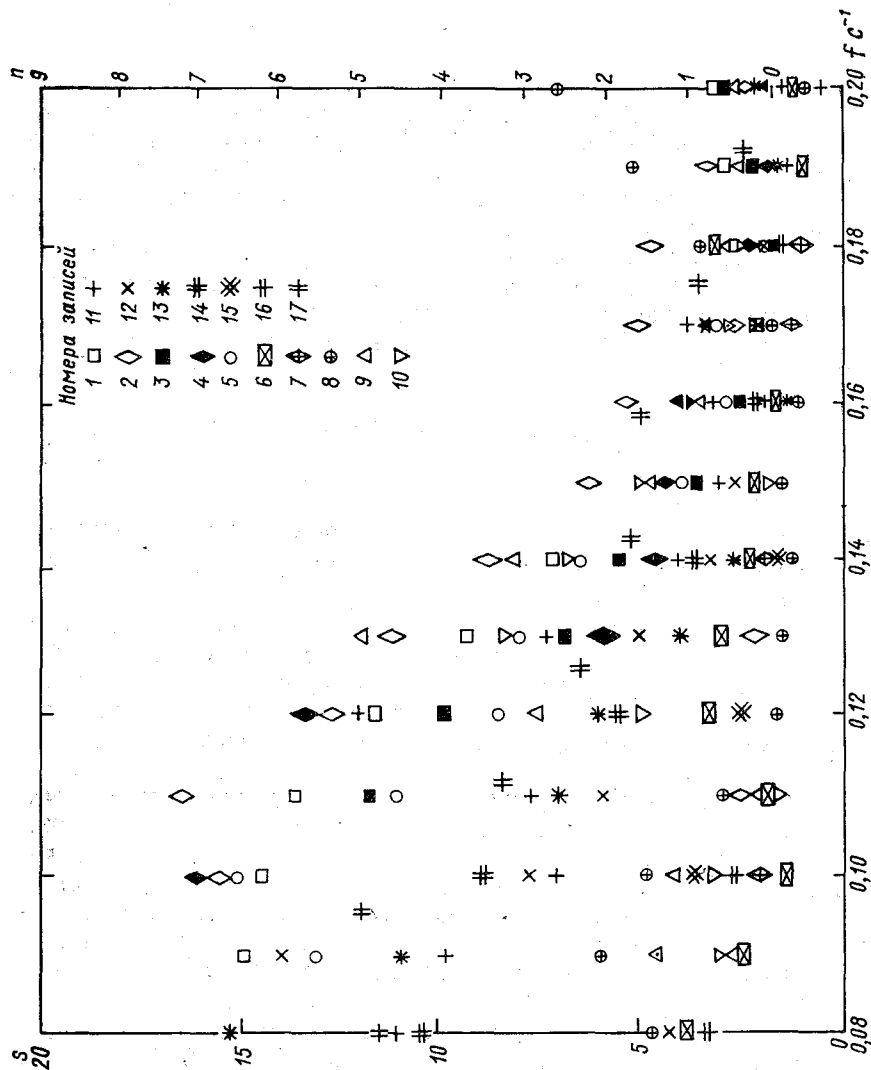


Рис. 4.1.2. Зависимость показателя степени s углового распределения энергии от частоты f [225]

ширине исходного планшета, а в направлении оси ординат со сдвигом $\xi_{\max}$, равным половине длины исходного планшета.

Вполне естественно, что при таком способе вычисления оценки спектральной плотности имели существенную выборочную изменчивость (см. рис. 57 работы [9]). Однако ареалы пространственного распределения волновой энергии и сечения оценок $S_{\xi}^*(k_x, k_y)$,

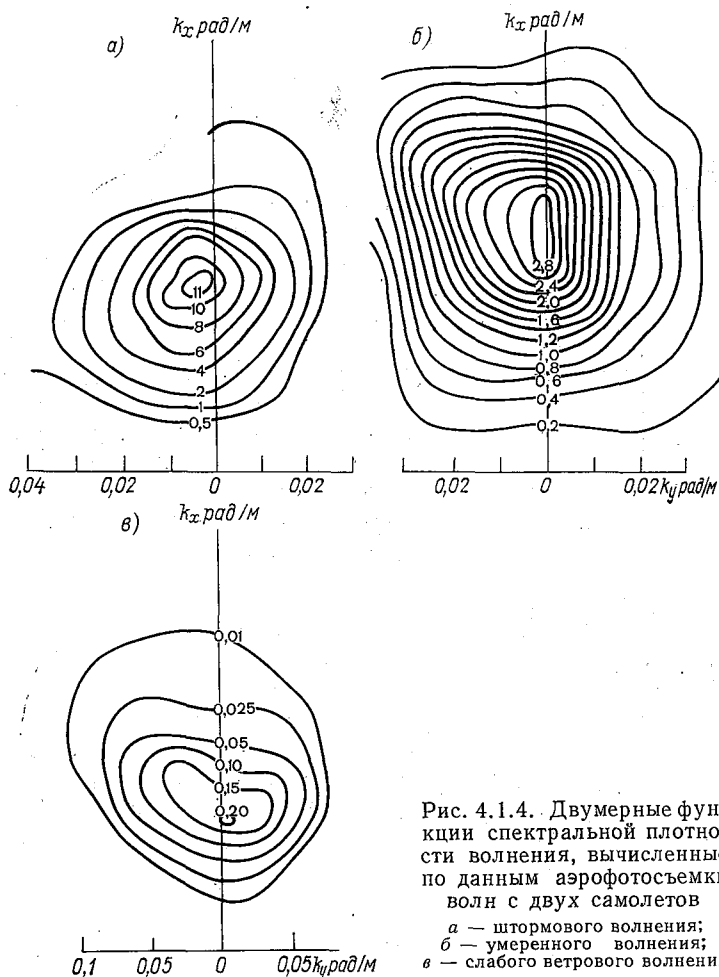


Рис. 4.1.4. Двумерные функции спектральной плотности волнения, вычисленные по данным аэрофотосъемки волн с двух самолетов
 а — штурмового волнения;
 б — умеренного волнения;
 в — слабого ветрового волнения

полученные по соседним планшетам, имеют достаточно близкие очертания.

Для увеличения достоверности статистических оценок функции углового распределения энергии результаты расчета ее значений, полученные по отдельным спектрам, были сгруппированы по ком-

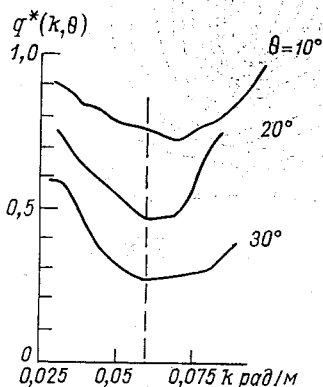
плексам условий волнообразования. Вначале была исследована функция углового распределения волновой энергии $Q(k, \theta)$, определение которой, в отличие от функции $Q(\omega, \theta)$, не предполагает априорного принятия линейной гидродинамической вероятностной модели волновой поверхности. Аппроксимация функции, $Q(k, \theta)$ искалась в виде произведения двух функций

$$Q(k, \theta) = \hat{G}(k) q(k, \theta), \quad (4.1.4)$$

причем в соответствии с условием (4.7)

$$\hat{G}(k) = 1 / \int_{-\pi/2}^{\pi/2} q(k, \theta) d\theta. \quad (4.1.5)$$

При расчете $Q(k, \theta)$ за нулевое направление радиуса-вектора принималось направление луча, проходящего через начало координат пространственного спектра



$S_{\xi}^*(k_x, k_y)$ и максимальную апплику оценку спектральной плотности. Следует отметить, что положение максимальной апплику $S_{\xi}^*(k_x, k_y)$ является более достоверным, чем ее величина. Это непосредственно следует из того, что дисперсия оценок корреляционных функций меньше в ее нулях, чем в экстремумах (см. раздел 1.2). Статистические оценки $Q^*(k, \theta)$ можно определить непосредственно по соотношению

$$Q^*(k, \theta) = S_{\xi}^*(k, \theta) / S_{\xi}^*(k), \quad (4.1.6)$$

Рис. 4.1.5. Значения функций $q^*(k, \theta)$, вычисленные по данным аэрофотосъемки волнения (дисперсия процесса 1 м^2)

идентичному соотношению (4.6). Такой путь является, однако, недостаточно удобным для обобщения массового материала, и он использован далее лишь для проверки результатов, полученных на основе соотношения

$$\frac{S_{\xi}^*(k, \theta)}{S_{\xi}^*(k, 0)} = \frac{Q(k, \theta)}{Q(k, 0)} = \frac{q(k, \theta)}{q(k, 0)}. \quad (4.1.7)$$

Основные достоинства (4.1.7) состоят в том, что при условии

$$q(k, 0) \equiv 1 \quad (4.1.8)$$

и замене значений $S_{\xi}^*(k, \theta)$ и $S_{\xi}^*(k, 0)$ их оценками $S_{\xi}^*(k, \theta)$ и $S_{\xi}^*(k, 0)$ это соотношение можно переписать в виде

$$q^*(k, \theta) = S_{\xi}^*(k, \theta) / S_{\xi}^*(k, 0), \quad (4.1.9)$$

который позволяет вычислить значения $q^*(k, \theta)$ непосредственно по данным расчета пространственной спектральной плотности без их предварительного численного интегрирования по θ .

На рис. 4.1.5 приведен пример расчета $q^*(k, \theta)$, который показывает, что нормированное значение функции углового распределения энергии изменяется по волновым числам по закону, отличному от полученного ранее (см. рис. 4.1.2). При изменении k от 0 до $k_{\max}$ значения $q^*(k, \theta)$ уменьшаются, при $k = k_{\max}$ имеют минимум и при дальнейшем увеличении k возрастают. Этот принципиально новый результат указывает на то, что поток энергии ветровых волн является наиболее узким на частоте (волновом числе) основного максимума спектральной плотности и расширяется как в сторону уменьшающихся, так и в сторону увеличивающихся частот (волновых чисел). Это означает, что функция углового распределения энергии в спектре ветровых волн зависит не столько от абсолютного значения частоты, сколько от его отношения к частоте максимума или от разности этих частот.

Второй принципиально новый результат анализа 66 пространственных спектров был получен при расчете так называемого интегрального распределения энергии

$$I(\theta) = \left[\int_{-\theta}^{\theta} \int_0^{\infty} S_{\xi}(k, \theta) k dk d\theta \right] / D_{\xi}, \quad (4.1.10)$$

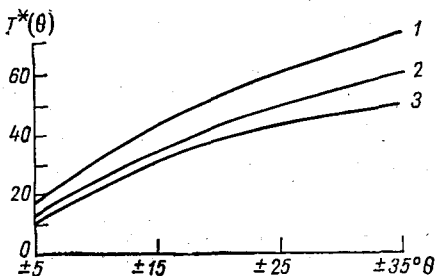


Рис. 4.1.6. Значения функции $I^*(\theta)$, вычисленной по данным аэрофотосъемки волнения. Дисперсия процесса $> 1,6 \text{ м}^2$ (1), $0,8-1,5 \text{ м}^2$ (2), $< 0,23 \text{ м}^2$ (3)

Статистические оценки $I^*(\theta)$ определялись для каждого спектра по следующему соотношению:

$$I_j^* = \frac{\sum_{r=-j}^j \sum_{i=0}^n \lambda_r S_{i, 2r}^* (2i+1)}{\sum_{r=-m}^m \sum_{i=0}^n \lambda_r S_{i, 2r}^* (2i+1)}, \quad (4.1.11)$$

где $S_{i, r}^* = S^*(k_i, \theta_r)$; $k_i = i\delta k$; $i = 0, 1, \dots, n$; $\theta_r = r\delta\theta$, $r = -m, -m+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, (m-1), m$;

$$\lambda_r = \begin{cases} 1 & \text{при } r = -m, m, \\ 2 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

Результаты усреднения $I^*(\theta)$ по трем группам спектров представлены на рис. 4.1.6, на котором видно, что для одних и тех же углов θ величина $I^*(\theta)$ увеличивается с ростом интенсивности

(дисперсии) волн. Это означает, что угловое распределение энергии зависит не только от θ и k , но и от дисперсии волновых аппликат. Чем сильнее волнение, тем меньше угловое рассеивание энергии в пространственном спектре. Так, например (см. табл. 4.1.1), количество энергии в области пространственного спектра, ограниченной углом $\pm 35^\circ$ от генерального направления распространения волн, составляет 70% общей энергии при сильном волнении (дисперсия более $1,6 \text{ м}^2$) и только 50% при сравнительно слабом волнении (дисперсия менее $0,23 \text{ м}^2$).

Указанные выше особенности в угловом распределении энергии были учтены в аппроксимации функции $Q(\omega, \theta)$, опубликованной в работе [9]:

$$Q(\omega, \theta) = \frac{0,5\omega_0 \frac{\bar{\omega}}{(\bar{\omega} + 1)^2}}{1 - \exp\left\{-\frac{\omega_0 \pi}{2} \frac{\bar{\omega}}{(\bar{\omega} + 1)^2}\right\}} \exp\left\{-\omega_0 |\theta| \frac{\bar{\omega}}{(\bar{\omega} + 1)^2}\right\}, \quad (4.1.12)$$

где $\bar{\omega} = \omega/\omega_{\text{max}}$, а ω_0 изменяется от 3 до 8 при переходе от слабого к сильному волнению. В табл. 4.1.1 показано, что рассчитанные по (4.1.12) интегральные значения углового распределения волновой энергии хорошо согласуются с натурными данными по крайней мере в пределах углов до $\pm 35^\circ$.

Таблица 4.1.1

Значения интегрального углового распределения волновой энергии, вычисленные по натурным данным и по аппроксимативному выражению

Характеристика	Угол θ°			
	5	15	25	35
Дисперсия более $1,6 \text{ м}^2$				
$I^*(\theta)$ по натурным данным	0,17	0,43	0,59	0,71
$I(\theta)$ по аппроксимативному выражению (4.1.12) при $\omega_0 = 8$	0,15	0,38	0,58	0,69
Дисперсия от 0,8 до $1,5 \text{ м}^2$				
$I^*(\theta)$	0,13	0,34	0,49	0,59
$I(\theta)$ при $\omega_0 = 5$	0,11	0,31	0,52	0,59
Дисперсия менее $0,23 \text{ м}^2$				
$I^*(\theta)$	0,11	0,31	0,43	0,50
$I(\theta)$ при $\omega_0 = 3$	0,11	0,29	0,44	0,51

Закономерности изменения углового распределения энергии по волновым числам (частотам), выявленные на основе анализа планшетов стереосъемки ветровых волн, были позднее подтверждены рядом исследователей по данным, полученным другими методами. Так, например, результаты анализа 20 частотно-направленных спектров, опубликованные в работе [77] и представленные частично на рис. 4.1.7, показывают, что степень s в формуле (4.1.3) вна-

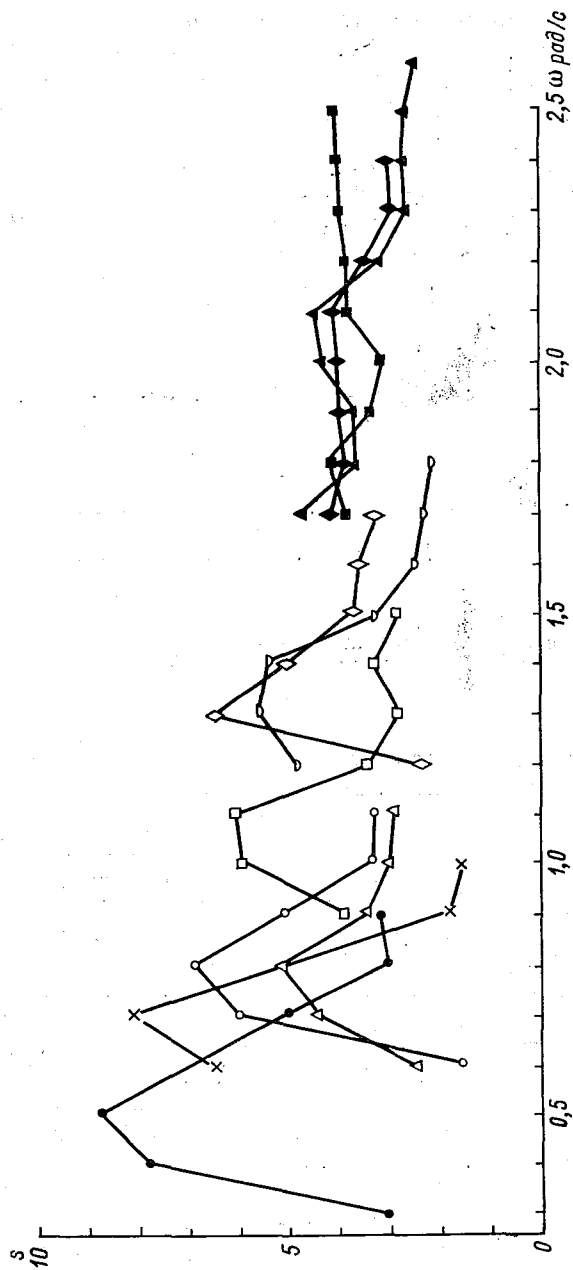


Рис. 4.1.7. Зависимость показателя степени s от частоты ω для волнения различной интенсивности

чале, увеличивается с увеличением частоты, достигает наибольшего значения на частоте основного максимума спектра, а затем снова уменьшается. Данные рис. 4.1.7 подтверждают также и другую отмеченную выше закономерность распределения волновой энергии в спектре волн: при увеличении $\omega_{\max}$ (с ослаблением волнения) уменьшается величина s , т. е. увеличивается угловое рассеивание энергии.

Интересно отметить, что результаты, приведенные на рис. 4.1.7, получены при помощи прибора, однотипного с прибором, по данным которого получена аппроксимация (4.1.3). Это позволяет предположить, что ошибочность выводов английских исследователей связана главным образом с недостаточно тщательным анализом

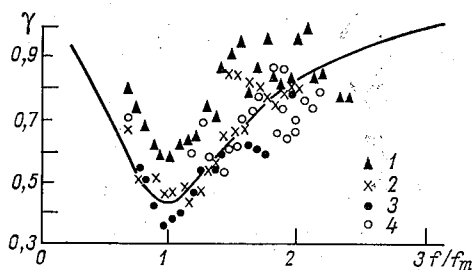


Рис. 4.1.8. Значения коэффициента трехмерности волнения по различным (1—4) экспериментальным данным [229]

исходной информации. Из-за большой выборочной изменчивости оценок $Q^* \times \times (\omega, \theta)$, полученных по небольшим реализациям процесса, в результате грубого осреднения данных им не удалось выявить действительный характер зависимости показателя s от ω и $\omega_{\max}$.

Приведенные выше результаты анализа аэрофотоосъемки волнения косвенно подтверждают также измерения, выполненные японским исследователем Иватой [229] и канадским исследователем Джилкристом [206]. Первый из них обработал результаты измерений орбитальных скоростей частиц в двух взаимно перпендикулярных плоскостях, выполненных при помощи ультразвуковых измерителей течений (средняя высота волн 0,4—1,1 м, глубина места 22 м), и получил зависимость коэффициента трехмерности волнения γ от частоты, представленную на рис. 4.1.8. Так как коэффициент трехмерности волнения γ связан со степенью s в формуле (4.1.3) соотношением (4.3.12), то данные рис. 4.1.8 полностью подтверждают вывод о том, что угловое распределение энергии зависит не от абсолютного значения величины ω , а от того насколько и с каким знаком она отличается от частоты $\omega_{\max}$.

Джилкрист выполнил синхронные измерения возвышения волновой поверхности в семи точках, расположенных в одну линию в районе с глубиной 7 м, при ветре 4—8 м/с и средней высоте волн 0,5 м. По этим данным он рассчитал частотно-направленный спектр, опубликованный в работе [206]. Вычисленные нами по этому спектру согласно соотношению (4.6) оценки $Q^*(\omega, \theta)$ приведены на рис. 4.1.9. Несмотря на большую выборочную изменчивость оценок $Q^*(\omega, \theta)$, графики на рис. 4.1.9 также подтверждают за-

висимость углового распределения энергии не только от частоты, но и от частоты максимума спектра.

Зависимость углового распределения энергии от частоты максимума спектра подтверждена также в работе [264], опубликованной недавно японскими исследователями, которые предложили следующее соотношение для расчета s в формуле (4.1.3):

$$s = \begin{cases} 11,5 \tilde{f}_{\max}^{-7,5} \tilde{f}^{5,5} & \text{для } \tilde{f} \leq \tilde{f}_{\max}, \\ 11,5 \tilde{f}^{-2,5} & \text{для } \tilde{f} > \tilde{f}_{\max}, \end{cases} \quad (4.1.13)$$

где $\tilde{f} = \frac{2\pi f U}{g}$, $\tilde{f}_{\max} = \frac{2\pi f_{\max}}{g}$.

На рис. 4.1.10 аппроксимация функции углового распределения энергии, полученная по данным стереофотосъемки волнения (4.1.12), сопоставлена с аппроксимацией (4.1.3), предложенной английскими исследователями, при значениях s , в одном случае взятых с графика 4.1.2 (взято среднее соотношение между s и $\tilde{f}$, если отбросить на графике случаи, когда такая зависимость не отмечалась), а в другом рассчитанных по (4.1.13). Сопоставление выполнено для сильного ($\omega_{\max} = 0,5$ рад/с) и умеренного волнения ($\omega_{\max} = 0,8$ рад/с) и трех различных частот ($\omega = \omega_{\max}$, $\omega = 1/2 \omega_{\max}$ и $\omega = 2\omega_{\max}$). Графики на рис. 4.1.10 даны в безразмерном виде — значение функции углового распределения в генеральном направлении распространения волн принято равным единице. Из рисунка видно, что на частоте максимума спектра различия в аппроксимациях функции углового распределения энергии невелики; на более высоких частотах отмечаются существенные расхождения, а на более низких частотах различия становятся очень значительными. В области $\omega < \omega_{\max}$ аппроксимация, предложенная англичанами, сильно занижает степень анизотропности энергетического спектра, а японская аппроксимация, наоборот, слишком завышает ее.

Выше уже указывалось, что аппроксимация (4.1.12) хорошо

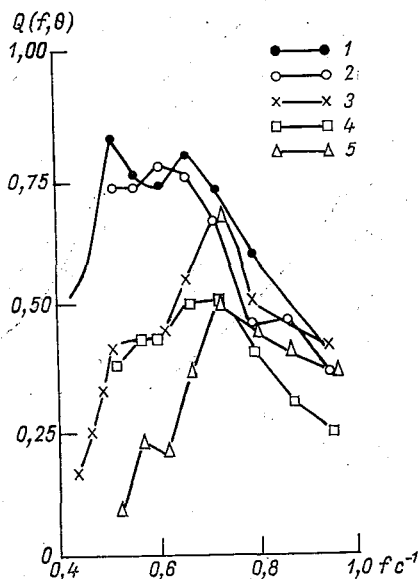


Рис. 4.1.9. Значения функции углового распределения, вычисленные по данным работы [206]

- 1) $\theta = 0^\circ$; 2) $\theta = 20^\circ$; 3) $\theta = -20^\circ$;
4) $\theta = 40^\circ$; 5) $\theta = -40^\circ$

согласуется с натурными данными при углах до 35° . При больших углах, как показали наши дальнейшие исследования, отклонения от (4.1.12) становятся более существенными. Так, например, результаты измерений ветровых волн многострунным волнографом показали, по расчетам Ю. А. Трапезникова, что функция углового распределения энергии, пропорциональная $\cos^n \theta$, при углах $\theta > 35^\circ$ лучше согласуется с натурными данными, чем (4.1.12).

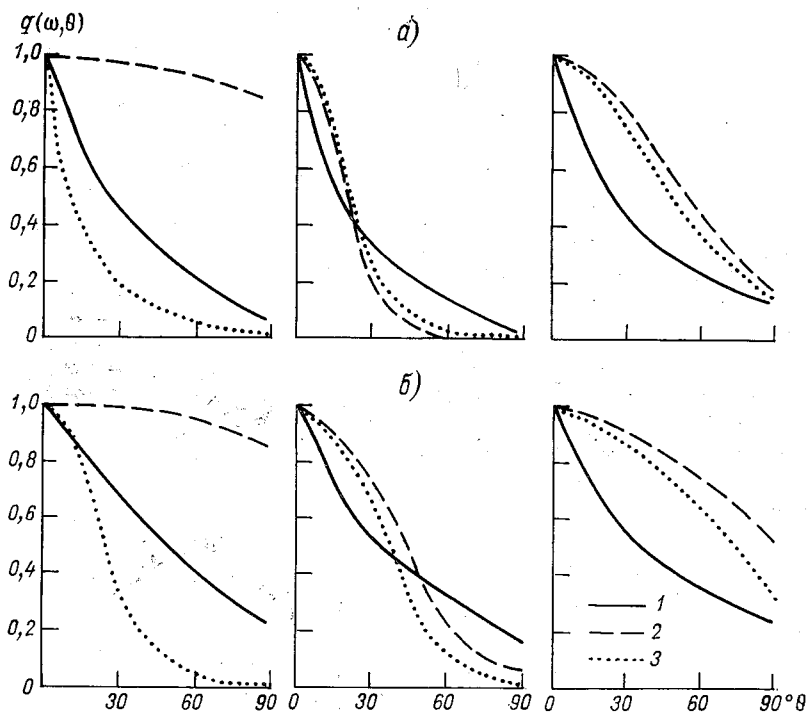


Рис. 4.1.10. Сопоставление нормированных функций углового распределения $q(\omega, \theta)$ для сильного ветрового волнения (а) ($\omega_{\max} = 0,5$ рад/с), умеренного (б) ($\omega_{\max} = 0,8$ рад/с) на частотах $\omega = \omega_{\max}$ (в середине), $\omega = 0,5 \omega_{\max}$ (слева) и $\omega = 2\omega_{\max}$ (справа)

1 — аппроксимативное выражение (4.1.12), 2 — (4.1.13), 3 — (4.1.3)

При осреднении результатов измерений, охватывающих волнение в диапазоне $\omega_{\max} = 1,0 \div 1,8$ рад/с, величина степени n оказалась в среднем равной 4,0 на частоте максимума, 2,2 — на частоте $\omega = 1,5 \omega_{\max}$, 1,5 при $\omega = 2\omega_{\max}$ и 2,5 на частоте $\omega = 0,8\omega_{\max}$. В другом случае при $\omega_{\max} = 4,1$ величина n в среднем составила 3,3 на частоте $\omega_{\max}$, 1,6 на частоте $\omega = 1,3 \omega_{\max}$ и 2,9 на частоте $\omega = 0,95 \omega_{\max}$.

Таким образом, новые данные, подтверждая в общем закономерности углового распределения энергии, полученные по планше-

там стереофотосъемки [зависимость n не только от ω , но и от $\omega_{\max}$; увеличение функции $Q(\omega, \theta)$ с увеличением ω на участке $\omega < \omega_{\max}$ и ее уменьшение с увеличением ω на участке $\omega > \omega_{\max}$], позволяют предположить, что для ориентировочных расчетов во всем диапазоне углов θ можно принять

$$Q(\omega, \theta) = 2^n \frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)} \cos^n \theta. \quad (4.1.14)$$

Средние значения n по данным анализа планшетов стереосъемки и измерений многострунным волнографом приведены в табл. 4.1.2.

Таблица 4.1.2

Значения параметра n в (4.1.14) по обобщенным натурным данным

$\omega_{\max}$	$\omega/\omega_{\max}$								
	$\omega > \omega_{\max}$						$\omega < \omega_{\max}$		
	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	0,9	0,8	0,7
4,0	3,5	2,8	2,0	1,6	1,2	1,0	2,8	2,0	1,8
3,0	3,6	2,8	2,2	1,6	1,4	1,0	2,8	2,2	2,0
2,0	3,8	3,0	2,4	2,0	1,6	1,0	3,0	2,2	2,0
1,5	4,0	3,0	2,5	2,2	1,6	1,0	3,0	2,5	2,0
1,0	4,5	4,0	3,0	2,5	2,0	1,5	3,5	2,5	2,2
0,8	5,0	4,0	3,0	2,5	2,2	2,0	4,0	3,0	2,5
0,5	8,0	5,0	3,0	2,5	2,2	2,0	4,0	3,0	2,5

Угловое распределение энергии на стадии затухания ветрового волнения, а тем более для смешанного волнения изучено совершенно недостаточно.

4.2. Частотно-направленный спектр волн

Каждому конкретному комплексу условий волнообразования соответствует определенная двумерная спектральная плотность $S_{\zeta}(\omega, \theta)$. Как уже указывалось, для расчета функции $S_{\zeta}(\omega, \theta)$ используется произведение вида (4.6). От того какие аппроксимативные выражения принимаются для описания частотного спектра и функции углового распределения энергии, зависит общая аппроксимация функции $S(\omega, \theta)$. Приведем некоторые из наиболее распространенных аппроксимаций:

1) в работе [225]

$$S(\tilde{f}, \theta) = \frac{8}{3\pi} \cos^4(\theta - \theta_0) S(\tilde{f}); \quad (4.2.1)$$

2) в работе [74]

$$S(\omega, \theta) = 0,32 \frac{\hbar g \rho_w}{\omega} \hat{\omega}^{-6} \exp(-0,785 \hat{\omega}^{-4}) (\cos \theta)^{\frac{1,8}{\hat{\omega}}}; \quad \hat{\omega} = \omega/\bar{\omega}; \quad (4.2.2)$$

3) по нашим исследованиям

$$S(\omega, \theta) = S(\omega) Q(\omega, \theta), \quad (4.2.3)$$

где $Q(\omega, \theta)$ определяется по (4.1.12) или (4.1.14) и табл. 4.1.2, а $S(\omega)$ — по (3.1.36).

4.3. Спектр уклонов волновой поверхности

Уклон волновой поверхности $\zeta(x, y, t)$ в заданном направлении l определим через производную $\partial\zeta/\partial l$, поверхности ζ в направлении вектора l

$$\frac{\partial\zeta}{\partial l} \equiv \frac{\partial\zeta}{\partial x} \cos(\hat{l}x) + \frac{\partial\zeta}{\partial y} \cos(\hat{l}y) \quad (4.3.1)$$

или в векторной форме

$$\frac{\partial\zeta}{\partial l} = l \cdot \text{grad } \zeta \equiv l \cdot \eta = \text{grad}_l \zeta, \quad (4.3.2)$$

где $\text{grad}_l \zeta$ — проекция вектора η на направление l .

В определении (4.3.2) характеристика поля $\eta \equiv \text{grad } \zeta$ и характеристика направления l разделены. Согласно (4.3.2), в любой точке (x, y) волнового поля $\zeta(x, y, t)$ существует наклон $\partial\zeta/\partial l$ в направлении l . В этом смысле математическое определение (4.3.2) совпадает с определением [110] уклона волновой поверхности как угла между горизонтальной прямой и касательной к волновому профилю в некоторой его точке.

Одновременно определение (4.3.2) дает возможность ввести соответствие между случайным скалярным полем $\zeta(x, y, t)$ и случайным векторным полем $\eta(x, y, t)$. Если принять допущение стационарности и однородности $\zeta(x, y, t)$, векторная случайная функция $\eta(x, y, t)$ также будет стационарной и однородной. Свойства случайного поля η можно характеризовать через математическое ожидание m_η , корреляционную функцию $K_\eta(\tau, \xi, \nu)$ и спектральную плотность $S_\eta(k, \theta)$.*

Необходимо отметить, что для векторных процессов математическое ожидание является вектором, а корреляционная функция

* Понижение мерности функции $S_\eta(k, \theta)$ по сравнению с $K_\eta(\tau, \xi, \nu)$ обусловлено наличием дисперсионного соотношения (1.1.5), аналогично рассмотренному в разделе 1.1 переходу от функции $\Pi(k_x, k_y, \omega)$ к функции $S_\zeta(k, \theta)$.

и спектральная плотность — тензорами [5, 122, 183] вида

$$K_{\eta}(\cdot) \equiv \begin{pmatrix} K_{\xi_x}(\cdot), & K_{\xi_x \xi_y}(\cdot) \\ K_{\xi_y \xi_x}(\cdot), & K_{\xi_y}(\cdot) \end{pmatrix}; \quad (4.3.3)$$

$$S_{\eta}(\cdot) \equiv \begin{pmatrix} S_{\xi_x}(\cdot), & S_{\xi_x \xi_y}(\cdot) \\ S_{\xi_y \xi_x}(\cdot), & S_{\xi_y}(\cdot) \end{pmatrix}, \quad (4.3.4)$$

где ξ_x, ξ_y — производные волновой поверхности ξ по переменным x и y соответственно.

Рассмотрение вероятностных характеристик $K_{\eta}(\cdot)$ и $S_{\eta}(\cdot)$ как тензоров (4.3.3) и (4.3.4) обусловлено необходимостью определить [5] функцию $K_{\eta}(\cdot)$ как математическое ожидание тензорного произведения векторов $\eta(x, y, t)$ и $\eta(x + \xi, y + \nu, t + \tau)$, а спектральную плотность $S_{\eta}(\cdot)$ — как преобразование Фурье тензора $K_{\eta}(\cdot)$. Одним из удобств такого рассмотрения является возможность найти характеристики — инварианты тензоров (4.3.3) и (4.3.4), — которые не зависят от выбора координатных осей.

Выше было показано, что для волнового процесса $\xi(x, y, t)$ достаточно полной характеристикой является спектральная плотность $S_{\xi}(k, \theta)$, поскольку через эту характеристику можно описать многие свойства $\xi(x, y, t)$, а также определить другие используемые в практических расчетах величины. Поэтому одной из наиболее важных задач при изучении уклонов волновой поверхности является установление зависимости между $S_{\eta}(k, \theta)$ и $S_{\xi}(k, \theta)$.

Рассмотрим вначале некоторые соотношения, следующие из линейной гидродинамической модели волновой поверхности моря. Тензор спектральной плотности $S_{\eta}(k, \theta)$ уклонов волновой поверхности на основе выражения (2.1.4) можно записать в виде [5]

$$S_{\eta}(k, \theta) = k^2 S_{\xi}(k, \theta) \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.3.5)$$

Из (4.3.5) видно, что $S_{\eta}(k, \theta)$ равен произведению функции $k^2 S_{\xi}(k, \theta)$, зависящей от условий волнообразования, на тензор, не зависящий от условий волнообразования, т. е. изучение $S_{\eta}(k, \theta)$ равносильно изучению $S_{\xi}(k, \theta)$. Однако геометрическая трактовка $S_{\eta}(k, \theta)$ более сложна, чем $S_{\xi}(k, \theta)$, так как при каждом фиксированном (k, θ) выражению (4.3.5) можно поставить в соответствие эллипс (в частном случае — окружность или прямые), большая ось которого характеризует величину и направление наибольших изменений уклонов, малая — наименьших. Наиболее наглядно эти закономерности видны и легко интерпретируются по моментным характеристикам. Дисперсия уклонов волновой поверхности в направлении θ может быть отождествлена [85] со вторым моментом $m_2(\theta)$ спектральной плотности в направлении θ .

Согласно [85],

$$m_2(\theta) = m_{20} \cos^2 \theta + 2m_{11} \cos \theta \sin \theta + m_{02} \sin^2 \theta. \quad (4.3.6)$$

Экстремальные значения $m_{2 \max}$, $m_{2 \min}$ момента $m_2(\theta)$ вычисляются по формуле *

$$m_{2 \min}^{\max} = \frac{1}{2} \left[(m_{02} + m_{20}) \pm \sqrt{(m_{20} - m_{02})^2 + 4m_{11}^2} \right]. \quad (4.3.7)$$

Из (4.3.7) видно, что $m_{2 \max}$ и $m_{2 \min}$ равны m_{20} и m_{02} соответственно только в том случае, если $m_{11} = 0$; следовательно, дисперсии уклонов волновой поверхности, взятые в двух произвольных взаимно перпендикулярных направлениях, в общем случае, не совпадают с инвариантными характеристиками дисперсий уклонов в генеральном и перпендикулярном ему направлениях распространения волн. Эти главные направления определяются через

$$\operatorname{tg} 2\theta_m = \frac{2m_{11}}{m_{20} - m_{02}}. \quad (4.3.8)$$

Согласно линейной модели (2.1.5), средняя длина волн $\bar{\lambda}$ и средняя длина гребней волн $\bar{L}$ связаны с моментами (4.3.7) соотношениями

$$\bar{\lambda} = 2\pi \left(\frac{m_{00}}{m_{2 \max}} \right)^{1/2}; \quad (4.3.9)$$

$$\bar{L} = 2\pi \left(\frac{m_{00}}{m_{2 \min}} \right)^{1/2}. \quad (4.3.10)$$

Величина

$$\gamma \equiv \left(\frac{m_{2 \max}}{m_{2 \min}} \right)^{1/2} = \frac{\bar{L}}{\bar{\lambda}} \quad (4.3.11)$$

характеризует трехмерность волнового поля и в простейшем случае, когда функция углового распределения имеет вид косинусоиды в степени n , может быть вычислена [72] через этот показатель

$$\gamma = (n+1)^{1/2}. \quad (4.3.12)$$

Как было показано в главе 2, многие свойства волновой поверхности согласуются со свойствами линейной модели (2.1.5), что дает возможность рассматривать (4.3.5) и другие связанные с ним соотношения как аппроксимативные. Однако сам факт существования нелинейных моделей волновой поверхности приводит к необходимости определить по натурным данным границы применимости соотношений, основывающихся на (2.1.5).

Для получения сведений об уклонах волновой поверхности в большинстве случаев используются данные измерения производных ξ_x и ξ_y с помощью волномерных буюв, многострунных волнографов или аэростереосъемки (АФС) волн (см. разделы 1.4—1.6).

* В работе [5] получены соотношения аналогичного вида для инвариантов симметричной части тензоров (4.3.3) и (4.3.4).

При вычислении уклонов по натурным данным всегда возникает вопрос о правомерности замены производной $\partial \xi / \partial l$ конечной разностью. При такой замене уклон будет обязательно искажен, и тем больше, чем больше расстояние между точками, в которых берутся разности.

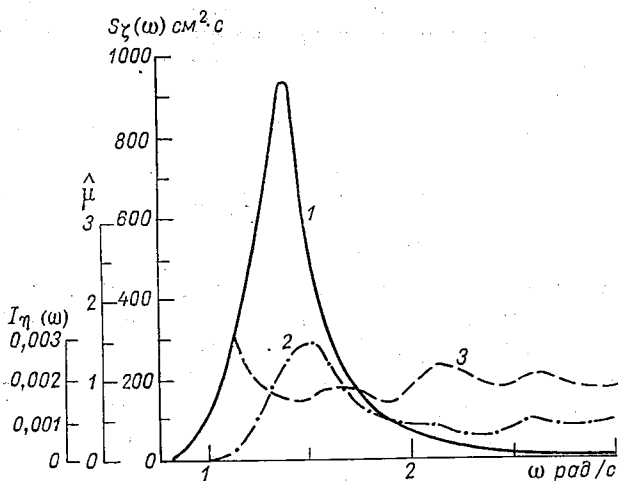


Рис. 4.3.1. Спектр возвышений $S_{\xi}(\omega)$ (1), $I_{\eta}(\omega)$ (2) волновой поверхности и значения $\hat{\mu}$ (3), вычисленные по (4.3.17) по измерениям многострунным волнографом

Соотношения между компонентами $S_{\xi_x}(\cdot)$, $S_{\xi_y}(\cdot)$ тензора спектральной плотности уклонов и их конечно-разностными аналогами $\hat{S}_{\xi_x}(\cdot)$, $\hat{S}_{\xi_y}(\cdot)$ имеют вид [97]

$$\begin{aligned}\hat{S}_{\xi_x}(k, \theta) &= S_{\xi_x}(k, \theta) \left(\frac{\sin \alpha_1}{\alpha_1} \right)^2; \\ \hat{S}_{\xi_y}(k, \theta) &= S_{\xi_y}(k, \theta) \left(\frac{\sin \alpha_2}{\alpha_2} \right)^2; \\ \hat{S}_{\xi_x \xi_y}(k, \theta) &= S_{\xi_x \xi_y}(k, \theta) \left(\frac{\sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\alpha_1 \alpha_2} \right),\end{aligned}\quad (4.3.13)$$

где

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{2} k \Delta x \cos \theta, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{2} k \Delta y \sin \theta.\end{aligned}\quad (4.3.14)$$

Поэтому многие из результатов, которые получены по натурным данным, существенно зависят от интервала дискретности. Г. В. Ма-

тушевским выполнены модельные расчеты, на основе которых показано [97], что при отношениях интервала дискретности Δx к средней длине волны $\bar{\lambda}$, меньших $1/15$, спектр $\hat{S}_{\xi_x}(\omega)$ близок к $S_{\xi_x}(\omega)$; при увеличении этого отношения от 0,1 до 0,4 высокочастотные составляющие $\hat{S}_{\xi_x}(\omega)$ исчезают, максимум $\hat{S}_{\xi_x}(\omega)$ имеет тенденцию к смещению влево и уменьшению величины по сравнению с $S_{\xi_y}(\omega)$.

Таким образом, через соотношения (4.3.13), (4.3.14) каждому интервалу дискретности $(\Delta x, \Delta y)$ можно поставить в соответствие определенный диапазон частот, где $\hat{S}_{\xi_x}(\omega)$ и $\hat{S}_{\xi_y}(\omega)$ будут мало отличаться от $S_{\xi_x}(\omega)$ и $S_{\xi_y}(\omega)$; этот диапазон будет тем шире, а искажение тем меньше, чем меньше $\frac{\Delta x}{\bar{\lambda}}, \frac{\Delta y}{\bar{\lambda}}$.

Необходимо отметить, что частотные и тем более пространственные спектры уклонов изучены мало. В этом смысле представляет интерес сопоставление (см. рис. 4.3.1) частотных спектров возвышений $S_{\xi}(\omega)$ и уклонов $S_{\xi_x}(\omega), S_{\xi_y}(\omega)$ волновой поверхности по данным измерений волнения многострунными волнографами, выполненных Ю. А. Трапезниковым. Введем в рассмотрение сумму

$$I_{\eta}(\omega) = S_{\xi_x}(\omega) + S_{\xi_y}(\omega) \quad (4.3.15)$$

диагональных элементов тензора (4.3.4), которая является инвариантной для любых двух взаимно перпендикулярных направлений.

Из (4.3.5) следует, что

$$\kappa(\omega) \equiv \sqrt{\frac{I_{\eta}(\omega)}{S_{\xi}(\omega)}} = k. \quad (4.3.16)$$

Для линейной модели с учетом дисперсионного соотношения (10) величина

$$\hat{\mu} = \frac{\kappa(\omega)}{\omega^2/g} \quad (4.3.17)$$

должна быть постоянной.

Значения $\hat{\mu}$, вычисленные по (4.3.15) — (4.3.17) и по экспериментальным данным, приведены также на рис. 4.3.1. Из рисунка видно, что значения $\hat{\mu}$ колеблются (в пределах выборочной изменчивости оценок) около 1 в довольно широком диапазоне частот. Это означает, что вытекающие из линейной модели соотношения вполне пригодны для описания спектральной структуры уклонов волновой поверхности.

Рассмотрим теперь некоторые экспериментальные оценки инвариантных величин, характеризующих дисперсии уклонов (интегралы от соответствующих спектров) в двух главных взаимно перпендикулярных направлениях.

Пользуясь определениями авто- и взаимных дисперсий уклонов с учетом предположений об однородности волновой поверхности, можно для конечно-разностной аппроксимации (2.3.2) показать, что

$$\begin{aligned} D \frac{\Delta \xi}{\Delta x} &= \frac{1}{2(\Delta x)^2} (K_{0,0} - K_{2,0}); \\ D \frac{\Delta \xi}{\Delta y} &= \frac{1}{2(\Delta y)^2} (K_{0,0} - K_{0,2}); \\ D \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \frac{\Delta \xi}{\Delta y} &= \frac{1}{2\Delta x \Delta y} (K_{1,-1} - K_{1,1}), \end{aligned} \quad (4.3.18)$$

а для вычислительной схемы (2.3.3)

$$\begin{aligned} D \frac{\Delta \xi}{\Delta x} &= \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[\frac{8}{9} (K_{0,0} - K_{2,0}) + \frac{1}{72} (K_{0,0} - K_{4,0}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{9} (K_{1,0} - K_{3,0}) \right]; \\ D \frac{\Delta \xi}{\Delta y} &= \frac{1}{(\Delta y)^2} \left[\frac{8}{9} (K_{0,0} - K_{0,2}) + \frac{1}{72} (K_{0,0} - K_{0,4}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{9} (K_{0,1} - K_{0,3}) \right]; \\ D \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \frac{\Delta \xi}{\Delta y} &= \frac{1}{\Delta x \Delta y} \left[\frac{8}{9} (K_{1,-1} - K_{1,1}) - \frac{1}{9} (K_{2,-1} + K_{1,-2} - \right. \\ &\quad \left. - K_{2,1} - K_{1,2}) + \frac{1}{72} (K_{2,-2} - K_{2,2}) \right], \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

где $K_{\lambda,\mu}$ — значения корреляционной функции.

Таким образом, элементы тензора дисперсии уклонов могут быть вычислены по значениям корреляционной функции волновой поверхности $\xi(x, y, t)$; при этом приближение (4.3.18) требует знания 5 значений ($K_{0,0}, K_{0,2}, K_{2,0}, K_{1,1}, K_{1,-1}$), а приближение (4.3.19) — 17 значений ($K_{0,0}, K_{0,1}, K_{1,0}, K_{1,1}, K_{1,-1}, K_{2,0}, K_{0,2}, K_{2,1}, K_{2,-1}, K_{2,-2}, K_{2,2}, K_{1,2}, K_{-1,-2}, K_{3,0}, K_{0,3}, K_{4,0}, K_{0,4}$) корреляционной функции.

Величины $D \frac{\Delta \xi}{\Delta x}, D \frac{\Delta \xi}{\Delta y}, D \frac{\Delta \xi}{\Delta x} \frac{\Delta \xi}{\Delta y}$ имеют смысл величин $m_{0,2}, m_{2,0}, m_{1,1}$ в формуле (4.3.7) и служат для вычисления инвариантов $m_{2\max}, m_{2\min}$. Расчет этих инвариантов с использованием величин (4.3.18) и (4.3.19) позволил установить, что значения $m_{2\max}$ и $m_{2\min}$, вычисленные по разностным аппроксимациям (2.3.2) и (2.3.3), связаны между собой линейными зависимостями

$$\begin{aligned} m_{2\max}^{(2.3.3)} &= 1,25 m_{2\max}^{(2.3.2)}; \\ m_{2\min}^{(2.3.3)} &= 1,56 m_{2\min}^{(2.3.2)}, \end{aligned} \quad (4.3.20)$$

где номера аппроксимативных формул указаны в скобках.

Таким образом, несмотря на различия в исходной информации, соотношения (4.3.20) дают возможность пользоваться любой из вычислительных схем. Для удобства сопоставления с данными других авторов далее будут использоваться значения уклонов, соответствующие формулам (2.3.2). Значения $m_{2 \max}$, $m_{2 \min}$, вычисленные по данным АФС волнения различной интенсивности, приведены в табл. 4.3.1, а по данным судовой стереофотосъемки [1] — в табл. 4.3.2.

Таблица 4.3.1

Результаты расчета дисперсий проекций уклонов в генеральном $m_{2 \max}$ и перпендикулярном $m_{2 \min}$ направлениях при разных средних значениях элементов волн по данным аэрофотосъемки волн с двух самолетов

Δx м	Δy м	$m_{2 \max}$	$m_{2 \min}$	$m_{2 \max} + m_{2 \min}$	$m_{2 \max} / m_{2 \min}$	D м ²	$\bar{h}$ м	$\bar{\lambda}_p$ м	$\bar{L}_p$ м
3	3	0,00474	0,00142	0,00616	3,3	0,16	1,0	34	61
3	3	0,00484	0,00197	0,00681	3,4	0,17	1,0	37	60
7,4	3,7	0,00317	0,00071	0,00388	4,5	1,15	1,0	45	92
24	6	0,00530	0,00070	0,00600	7,5	1,56	3,1	106	292
6	6	0,00502	0,00177	0,00679	2,8	1,87	3,4	123	213
8	4	0,00977	0,00248	0,01245	3,9	1,27	2,8	72	146
8	4	0,01109	0,00208	0,01317	4,8	0,96	2,4	59	136
8	4	0,00847	0,00346	0,01193	2,4	1,14	2,7	72	115
8	4	0,00932	0,00185	0,01116	5,0	0,96	2,4	64	143
8	4	0,00657	0,00274	0,00932	2,4	0,84	2,3	71	110

Таблица 4.3.2

Значения $\bar{h}$, $\bar{\lambda}$, $m_{2 \max}$, вычисленные по данным работы [1] при $\Delta y = 11,1$ м

№ планшетов	$\bar{h}$ м	$\bar{\lambda}$ м	$\bar{h}/\bar{\lambda}$	$m_{2 \max}$
1—10	2,6	112	0,023	0,0045
11—38	2,8	98	0,028	0,0071
39—48	2,1	79	0,0265	0,0054

Из соотношения (4.3.9) с учетом (2.3.5) можно получить зависимость между средней крутизной волн и среднеквадратичным уклоном в виде

$$m_{2 \max} = 2\pi \left(\frac{\bar{h}}{\bar{\lambda}} \right)^2. \quad (4.3.21)$$

Для проверки соотношения (4.3.21) на рис. 4.3.2 приведена зависимость между $m_{2 \max}$ и $\bar{h}/\bar{\lambda}$, полученная путем раздельного определения по данным стереофотосъемки величины $m_{2 \max}$ по ординатам,

$\bar{h}$ и $\bar{\lambda}$ — по сечениям планшетов. Кроме данных из табл. 4.3.1 и 4.3.2, на рисунке нанесены также данные, вычисленные по корреляционной поверхности, опубликованной в работе [180]. Из рисунка видно, что зависимость (4.3.21), полученная на основе линейной модели, достаточно хорошо подтверждается натурными данными. Попытка найти зависимость вида

$$m_{2\min} = \text{const} \left(\frac{\bar{h}}{\bar{\lambda}} \right)^2 \quad (4.3.22)$$

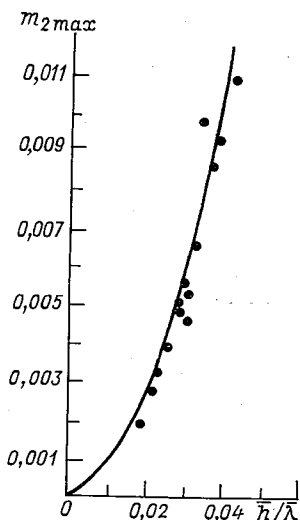


Рис. 4.3.2. Дисперсия уклонов $m_{2\max}$ в генеральном направлении распространения волн в зависимости от условной крутизны волн

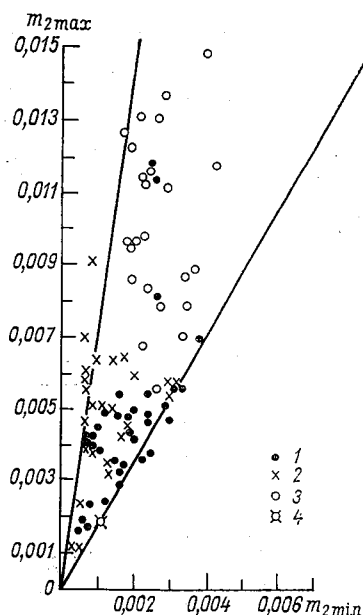


Рис. 4.3.3. Соотношение между дисперсиями уклонов в генеральном $m_{2\max}$ и перпендикулярном к нему $m_{2\min}$ направлениях по данным аэрофотосъемки слабого волнения (1), штормового (2) и умеренного (3) волнения, 4 — смешанное волнение в Атлантическом океане по данным работы [180]

не увенчалась успехом (см., например, рис. 4.18 работы [10]).

Отношение $m_{2\max}/m_{2\min}$ не должно оставаться постоянным, а

должно зависеть от вида функции углового распределения.

По Ювингу [225], соотношение

$$\gamma \equiv \frac{m_{2\max}}{m_{2\min}} = \frac{d}{1-d} \quad (4.3.23)$$

зависит от величины d , связанной с показателем s степени функции углового распределения (4.1.3);

$$d = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + 3s + 1}. \quad (4.3.24)$$

Величина d меняется от 0,5 до 1; по данным Дарбишайра [40] $\gamma = 3$, по оценкам Марцинкевич [96] — 1,75.

На рис. 4.3.3 представлены соотношения между величинами $m_{2\max}$ и $m_{2\min}$ по данным АФС волн. Из рисунка видно, что:

— значения соотношений между $m_{2\max}$ и $m_{2\min}$ обладают достаточно большой изменчивостью;

— величина 1,75 является нижней границей отношения $\frac{m_{2\max}}{m_{2\min}}$, верхняя граница этого отношения близка к 7,5.

При обсуждении этих данных следует еще раз отметить весьма существенное влияние на $m_{2\min}^{\max}$ различий в интервалах дискретности исходных данных. Проиллюстрируем это влияние на примере трех групп данных АФС, каждая из которых содержит по три планшета. Оценки величин $m_{2\max}$ и $m_{2\min}$, вычисленные по этим данным с различной дискретностью, приведены в табл. 4.3.3.

Таблица 4.3.3

Значения оценок $m_{2\max}$ и $m_{2\min}$ по натурным данным

$m_2(\theta)$	$\Delta x, \Delta y, m$		
	6	12	24
$m_{2\max}$	0,0056 $\pm 0,0007$	0,0038 $\pm 0,0003$	—
$m_{2\min}$	0,0030 $\pm 0,0001$	0,0015 $\pm 0,0002$	0,0007 $\pm 0,0001$

Принимая для рассматриваемого в таблице случая $\bar{\lambda} = 100$ м, $\bar{L} = 150$ м и учитывая соотношения (4.3.13), (4.3.14), можно показать, что коррекция дисперсий уклонов сближает данные расчета, но не приводит к их совпадению. Поэтому верхняя граница 7,5 на рис. 4.3.3 является завышенной вследствие существенного влияния дискретности данных. Заметим также, что высокие значения $m_{2\max}/m_{2\min}$ могут иметь место при показателе s в (4.3.1), большем 12; такие значения наблюдаются лишь на отдельных частотах.

Таким образом, знание спектральной структуры уклонов волновой поверхности существенно зависит, в силу соотношения (4.3.5), от знания пространственного спектра $S_{\xi}(\omega, \theta)$ волн. Линейная модель волновой поверхности позволяет вычислить по известным $S_{\xi}(\omega, \theta)$ или $S_{\xi}(k, \theta)$ (с достаточной для решения многих практических задач точностью) многие важные характеристики уклонов $S_{\eta_x}(\omega)$, $S_{\eta_y}(\omega)$, $m_{2\min}^{\max}$.

Дальнейший прогресс наших знаний о спектре уклонов и его вариантах требует использования новых, обладающих большой разрешающей способностью, методов и технических средств измерений пространственных производных волновой поверхности в широком диапазоне условий волнообразования.

Глава 5

Статистические распределения элементов волн

Изучение спектральной структуры волнения не снимает вопроса об исследовании вероятностных характеристик реальных объектов из которых состоит волновая поверхность, подразделяемая на отдельные волны с различными элементами: высотами, длинами, периодами и т. д. [110].

В этой главе основное внимание уделяется результатам, полученным путем анализа экспериментальных данных; сопоставление аппроксимативных зависимостей с модельными соотношениями обсуждается в главе 2. Решение ряда практических задач судостроения и гидротехники требуют задания распределения вероятности не в терминах функции спектральной плотности, а через параметры видимых волн. Последнее обстоятельство в значительной степени стимулирует изучение эмпирических распределений элементов волн.

5.1. Высоты волн

Высота волн является, пожалуй, единственным элементом, о распределении которого имеется достаточно единодушное мнение. Большинство авторов считает, что на глубокой воде независимо от стадии развития, типа и интенсивности волнения высоты волн распределены (на участке квазиоднородности или промежутке квазистационарности волнового процесса) по закону Рэлея, который является частным случаем распределения Вейбулла (1.7.17) при $k = 2$.

Справедливость (1.7.17) доказана теоретически и подтверждена натурными наблюдениями советских и зарубежных исследователей [9, 13, 21, 22, 66, 72, 173, 225].

Для расчета и анализа распределений высот волн в точке (на промежутке квазистационарности), помимо волнограмм, описанных в табл. 3.1.2, нами использованы другие записи ветровых волн, а также зыби и смешанного волнения, характеристика которых дана в табл. 5.1.1; данные табл. 3.1.2 и 5.1.1 обобщены в табл. 5.1.2. Расчеты распределения высот волн по пространству (на участке

Таблица 5.1.1

Характеристика записей волнения, использованных (помимо данных табл. 3.1.2) для анализа эмпирических распределений элементов волн

№ п/п	Условный номер волнограммы	Год	Дата	Время (гринвичское (начало), ч мин)	Число волн	U м/с	X км	$\bar{h}$ м	τ с	Тип волнения
1	A-1	1964	22/III	14 20	696	10,2	200	0,8	2,1	ВВ
2	A-8	1964	29/III	19 30	587	13,9	300	1,9	6,2	»
3	A-12	1964	3/IV	08 25	690	8,7	—	1,0	4,5	СВ
4	A-13a	1964	3/IV	15 02	209	5,8	—	0,7	4,8	»
5	O-19	1964	24/IV	18 50	335	16,2	250	1,8	6,7	ВВ
6	A-19a	1964	7/IV	18 30	200	10,0	—	1,1	3,9	СВ
7	A-20	1964	7/IV	19 00	281	8,0	—	1,8	6,7	»
8	O-20	1964	24/IV	16 40	226	16,2	—	2,0	7,7	ВВ
9	O-21	1964	24/IV	18 28	300	13,9	—	1,7	7,4	»
10	O-22	1964	25/IV	03 55	534	2,0	—	1,1	7,2	»
11	A-37	1964	26/IV	08 07	480	8,2	—	1,3	5,6	»
12	A-38	1964	28/IV	08 09	425	12,4	300	1,4	4,2	»
13	A-39	1964	28/IV	10 38	316	16,0	—	1,4	6,0	СВ
14	A-42	1964	29/IV	11 08	415	8,7	—	1,2	6,3	»
15	O-44	1964	9/V	10 30	459	17,2	300	2,6	8,1	ВВ
16	O-45	1964	9/V	13 30	456	13,9	300	2,4	8,6	»
17	O-46	1964	9/V	16 30	439	14,8	300	2,2	7,8	»
18	O-47	1964	10/V	308	308	17,2	300	2,7	8,3	»
19	O-49	1964	3/VI	10 30	568	7,3	300	0,8	6,1	»
20	A-50	1964	4/V	06 15	356	9,8	—	2,2	8,2	СВ
21	A-54	1964	4/V	18 00	630	14,0	—	2,2	8,2	»

Продолжение табл. 5.1.1

№ п/п	Условный номер волнограммы	Год	Дата	Время (гринвич- ское) (начало), ч мин	Число волн	U м/с	X км	$\bar{h}$ м	$\bar{\tau}$ с	Тип волнения
22	A-57	1964	5/V	15 15	300	15,0	—	2,6	8,4	CB
23	A-59	1964	8/V	11 31	234	16,3	—	1,8	3,4	»
24	A-83	1964	16/V	12 45	468	11,2	200	1,7	6,8	BB
25	A-90	1964	19/V	16 26	292	10,7	—	1,2	6,4	CB
26	A-97	1964	24/V	20 30	254	7,0	—	1,8	12,7	3
27	A-106	1964	2/V1	16 37	748	12,3	500	1,6	5,8	BB
28	A-108	1964	3/V1	16 35	692	13,0	500	1,6	5,9	»
29	A-123	1964	10/V1	09 40	225	6,2	—	1,5	6,6	CB
30	A-128	1964	13/V1	09 36	1042	6,0	—	0,8	6,1	»
31	A-129	1964	13/V1	16 25	670	15,0	—	1,1	5,0	»
32	II-2	1965	4/V1	07 00	769	11,8	300	1,0	2,3	»
33	II-3	1965	4/V1	10 30	1000	12,6	300	1,1	2,9	»
34	II-12	1965	9/V1	13 08	600	12,5	600	1,4	2,5	BB
35	II-24	1965	12/V1	13 00	440	9,5	800	1,2	2,9	»
36	II-30	1965	13/V1	13 06	769	3,0	—	0,8	6,4	3
37	II-31	1965	13/V1	16 00	556	2,0	—	0,8	6,5	»
38	II-33	1965	15/V1	13 00	685	8,9	—	0,7	4,6	CB
39	II-35	1965	15/V1	17 00	769	11,0	—	0,9	4,9	»
40	II-36	1965	15/V1	20 00	702	6,1	—	0,8	4,8	»
41	II-38	1965	16/V1	13 04	2500	14,0	—	1,0	5,0	»
42	II-43	1965	17/V1	03 00	652	11,3	1000	1,4	2,8	BB
43	II-45	1965	17/V1	05 00	634	12,5	1000	1,2	5,5	»
44	II-52	1965	18/V1	18 00	480	10,0	—	1,6	3,3	CB
45	II-57	1965	19/V1	14 00	588	13,0	500	1,5	4,6	BB
46	II-75	1965	22/V1	19 40	527	11,8	500	1,3	6,2	»
47	II-76	1965	23/V1	06 14	163	14,0	500	1,9	6,5	»

Продолжение табл. 5.1.1

№ п/п	Условный номер волнограммы	Год	Дата	Время (Гринвич- ское) (начало), ч мин	Число волн	U м/с	X км	$\bar{h}$ м	τ с	Тип возвращения
48	II-79	1965	23/VI	09 00	544	16,0	500	2,2	6,6	ВВ
49	II-80	1965	23/VI	12 00	103	16,0	500	2,3	6,7	»
50	II-83	1965	23/VI	15 00	444	14,5	500	2,4	7,2	ВВ
51	II-84	1965	23/VI	18 00	930	14,5	500	2,4	7,4	»
52	II-101	1965	5/VII	11 05	615	4,0	—	0,7	5,7	СВ
53	II-109	1965	6/VII	14 00	256	7,0	—	1,1	6,0	»
54	II-135	1965	14/VII	11 00	520	2,5	—	0,8	7,1	3
55	II-160	1965	29/VII	12 30	553	15,5	500	2,5	7,6	ВВ
56	II-176	1965	17/VIII	13 25	350	14,5	300	1,5	3,1	»
57	II-213	1965	28/VIII	10 00	445	16,4	500	0,7	6,0	»
58	II-224	1965	10/IX	18 15	495	7,5	—	1,2	3,2	СВ
59	II-228	1965	15/IX	16 00	500	14,0	500	1,6	0,4	ВВ
60	III-O-18	1966	18/VII	18 50	850	9,5	400	0,7	5,0	»
61	III-A-21	1966	17/VII	16 00	164	3,7	—	1,4	6,4	»
62	III-A-28	1966	20/VII	07 30	508	1,8	—	0,7	7,0	3
63	III-A-29	1966	20/VII	09 30	508	4,0	—	0,7	7,2	»
64	III-A-30	1966	20/VII	13 00	891	3,0	—	0,6	5,9	СВ
65	III-A-33	1966	25/VII	12 50	194	2,4	—	2,0	8,0	3
66	III-A-36	1966	10/VIII	08 00	752	16,0	300	2,4	6,2	ВВ
67	III-A-38	1966	10/VIII	13 10	488	12,5	300	2,2	6,9	»
68	III-O-38	1966	10/VIII	06 00	522	18,0	300	2,7	6,8	»
69	III-O-49	1966	25/VIII	09 35	1121	15,0	600	2,4	6,8	»
70	III-O-51	1966	26/VIII	09 30	832	12,5	600	1,8	6,6	»
71	III-A-58-II	1966	22/VIII	16 17	640	7,3	—	0,7	4,2	СВ

Продолжение табл. 5.1.1

№ п/п	Условный номер волнограммы	Год	Дата	Время (гринвич- ское) (начало), ч мин	Число волн	U м/с	X км	h м	τ с	Тип волнения
72	IIIA-59	1966	23/VIII	08 02	545	11,0	—	1,0	5,2	CB
73	IIIA-60-1	1966	23/VIII	17 40	933	13,5	—	1,9	6,0	»
74	IIIO-60	1966	23/VIII	18 30	504	5,6	—	1,0	5,5	»
75	IIIO-68	1966	26/VIII	06 10	443	6,0	—	1,7	5,5	з
76	IIIO-76	1966	15/IX	18 20	207	11,0	200	1,5	5,5	ВВ
77	IIIA-99	1966	9/X	11 07	170	2,1	—	0,5	7,8	з
78	«Ленинец-3»	1961	26/VII	18 17	413	8,6	—	0,3	2,8	CB
79	«Лени- нец-3а»	1961	26/VII	19 58	401	8,4	—	0,3	2,9	»
80	«Лени- нец-12»	1961	26/VII	09 36	323	10,8	—	0,4	3,0	»
81	«Лени- нец-29»	1961	27/VII	14 08	505	8,3	—	0,4	3,0	»
82	«Лени- нец-30»	1961	27/VII	18 05	333	12,1	—	0,3	3,0	»
83	Б-77	1967	28/IX	16 30	310	4,5	—	0,7	6,0	з
84	Б-98	1967	28/IX	10 20	450	1,3	—	0,3	4,0	»
85	«Э. Крен- кель»	1974	21/IX	13 28	245	1	—	0,7	6,1	зыбь (не- скольکو систем)
86	То же	1974	21/IX	19 25	197	2	—	0,6	5,8	»
87	»	1974	22/IX	1 53	209	1	—	0,6	6,2	»
88	«Порыв»	1974	21/IX	13 30	284	2	—	0,7	6,2	»
89	»	1974	21/IX	16 30	199	3	—	0,7	5,7	»
90	»	1974	22/IX	4 00	307	3	—	0,7	5,7	»
91	«Океан»	1974	21/IX	16 30	92	3	—	0,6	6,5	»

Таблица 5.1.2

Обобщенные характеристики волнографных наблюдений

Район наблюдений	Тип волнения	Интенсивность волнения	Диапазон изменения средних элементов волн по записи волнения		Диапазон изменения			
			высота, м	период, с	числа волн на волнограммах	скорости ветра, м/с	продолжительность действия, ч	разгона, км
Океан	Ветровое	Штормовое	2,8—4,5	7,3—10,5	440—2400	15,0—22,5	10—30	300—900
Моря	»	Сильное	1,0—2,8	2,4—8,6	103—1121	8,0—29,0	6—20	150—1500
		Умеренное и слабое	0,7—1,0	2,1—6,1	300—1042	6,0—17,2	9—12	100—1000
Озера, водохранилища	»	Штормовое	3,8	8,8	300	23	12	400
		Сильное	1,0—2,1	4,5—7,7	226—1500	8,2—21,0	7—14	20—1000
Океан, моря, озера	»	Умеренное и слабое	0,2—0,8	2,1—0,5	200—1500	9,5—14,0	5—15	20—1000
		»	0,1—0,8	1,5—5,5	151—685	1,2—11,2	4—24	1,2—100
Океан	Зыбь (одна система)	Умеренная и слабая	0,3—1,8	4,0—12,7	170—769	1,3—7,0	—	—
		Умеренная	0,6—0,8	5,7—6,5	92—307	1—3	—	—
»	Смешанное	Сильное и умеренное	1,0—2,6	2,3—8,4	225—2500	5,6—16,3	—	—
		Умеренное и слабое	0,7—1,0	2,4—5,7	640—1042	4,0—11,0	—	—
Моря	»	Умеренное и слабое	0,6—1,8	3,2—8,1	200—891	3,0—16,0	—	—
		Умеренное и слабое	0,3—0,4	2,8—3,0	323—505	8,3—12,1	—	—

квазиоднородности) выполнены по данным четырех аэрофотостереосъемок волнения с двух самолетов, характеристика которых приводится в табл. 4.4.

Результаты вычислений эмпирических распределений высот волн по указанным натурным данным, приведенные в работах [9, 32, 87], показали, что распределения высот волн, рассчитанные как по волнографным данным, так и по сечениям планшетов стереосъемки,* подчиняются закону Рэлея.

При расчете и анализе данных волновых измерений могут наблюдаться случаи, когда волновой процесс претерпевает достаточно быстрые изменения и условия квазистационарности или квазиоднородности не выполняются. Такие явления наблюдаются при внезапном усилении ветра, прохождении ураганов и т. д. Тогда функции распределения $F(h)$ при достаточно больших N отклоняются от (1.7.17) в сторону увеличения разнообразия волн. Этот вывод иллюстрируется на рис. 5.1.1, где показаны результаты расчетов функций распределения высот волн при развитии волнения на озере (за 17 мин скорость ветра возросла с 2 до 12 м/с, а средняя высота волн — с 2 до 23 см).

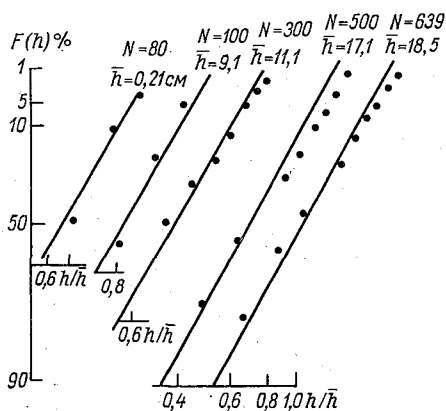


Рис. 5.1.1. Функции распределения высот волн при развитии ветровых волн на озере. Прямая линия — распределение Рэлея

Из рисунка видно, что нестационарность волнения увеличивает разнообразие высот волн, которое заметно в области малых обеспеченностей эмпирической функции распределения. Так, если согласно закону Рэлея $F(h) = 1\%$, то влияние нестационарности может увеличить ее до 5%.

Учет влияния нестационарности на $F(h)$ приведен в работе [172]; для этого в распределение (1.7.17) введено число волн $N(t) = \Delta t / \tau(t)$, проходящих за интервал $\Delta t = t_a - t_b$, и зависимость $\bar{h}$ от времени t . Тогда интегральное распределение высот волн за-

* Сечение планшетов выполнялось в направлении генерального распространения волн. Расстояние между волновыми профилями примерно равно 0,25 средней длины волн, изменяется от 5 для слабого до 35 м для сильного волнения и выбирается так, чтобы коэффициент корреляции r между аппликатами на соседних профилях не превышал среднее значение r (равное примерно 0,6) между последовательными волнами на профиле.

писывается в виде

$$F(h) \simeq \int_{t_a}^{t_b} \ln \exp \left[-\frac{\pi}{4} \left(\frac{h}{\bar{h}(t)} \right)^2 \right] \frac{dt}{\tau(t)}. \quad (5.1.1)$$

Справедливость распределения (5.1.1) подтверждена также в работе [196] при анализе записи волнения (полученной 17/VIII, 1969 г. при прохождении в Мексиканском заливе урагана Камилла), на которой в течение 10 ч средняя высота волн изменилась более чем в 2 раза, а максимальная волна составила 23,6 м.

Иногда при использовании данных стереосъемок волнения анализируется распределение высот волновых холмов [72, 73], границы которых проходят по подошвам, оконтуривающим отдельные волны на планшете. Тогда в качестве высоты волн берут вертикальное расстояние между вершиной и подошвой волны в плоскости, проведенной в любом заданном направлении. В работе [87] по данным стереосъемки 1965 г. (см. ее характеристику в табл. 4.4) приводятся эмпирические распределения высот в направлении генерального распространения волн h_1 , противоположном h_2 , а также перпендикулярном к нему — h_3 , h_4 . Эмпирические распределения для h_1 , h_2 , h_3 , h_4 при их нормировке на соответствующую $\bar{h}$ одинаковы и принадлежат закону Рэлея (1.7.17). Распределение Максвелла, которому, согласно работам [72, 73], должны принадлежать распределения высот волновых холмов, хотя формально не противоречит натурным данным, описывает поле эмпирических точек хуже, чем (1.7.17) при $k = 2$. Расчет средних элементов волн показал [87], что $\bar{h}_1 \approx h_2 = 1,3 \bar{h}_3 = 1,3 \bar{h}_4$; сопоставление с высотами $\bar{h}$, получаемыми по сечениям планшетов, позволяет считать, что $\bar{h}_1 = \bar{h}_2 = 1,2 \bar{h}$.

Таким образом, высоты волн на глубокой воде, независимо от вида информации (записи волнения, сечения планшетов, обмер волновых холмов), по которой получены их выборочные совокупности, распределены на промежутке квазистационарности и участке квазиоднородности волнового процесса по закону Рэлея. В случае ярко выраженной нестационарности волнения распределение отличается от (1.7.17) и близко к распределению типа (5.1.1).

5.2. Периоды волн

В настоящее время имеется достаточное количество публикаций, в которых приводится аппроксимация функции распределения периодов волн $F(\tau)$. Многие авторы, например в работах [6, 21, 72, 173], базируясь на предположении справедливости детерминистического соотношения классической гидромеханики (без его проверки по натурным данным) между длинами и периодами волн и полагая, что длины (или квадраты периодов), так же как высоты,

должны принадлежать распределению Рэлея, считают, что $F(\tau)$ подчиняются распределению (1.7.17) с параметром $k = 4$. Такой же вывод делается, без должного обоснования, в ряде статей при обобщении натуральных данных, хотя при более тщательном анализе этих же данных оказывается, что $k < 4$. Например, у эмпирических функций распределения, приведенных в работах [13, 66], величины коэффициентов изменчивости таковы, что k должны быть 3,1 и

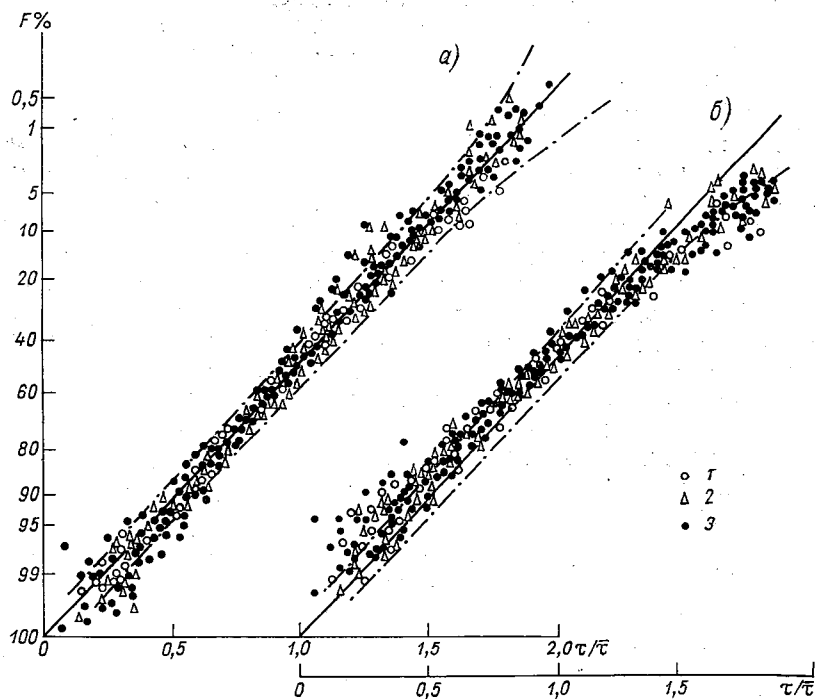


Рис. 5.2.1. Эмпирические распределения периодов ветровых волн [и зыби на функциональных сетках распределения Вейбулла при $k = 3$ (а) и $k = 4$ (б)

1 — умеренное волнение, 2 — сильное волнение, 3 — штормовое волнение. Знак, внутри заполненный, — ветровое волнение. Знак, внутри пустой, — зыбь. Штрих-пунктир — доверительные интервалы, рассчитанные по (1.7.5) при $k = 3$ и $k = 4$, доверительной вероятности 0,95 и $N = 300$

3,4. При использовании квантилей $F(\tau)$, опубликованных в работе [12], в среднем получается, что $k = 3$.

То обстоятельство, что в отдельных работах, базирующихся на натуральных данных, допускается возможность аппроксимации $F(\tau)$ распределением (1.7.17) при $k = 4$, объясняется недостаточной тщательностью определения параметра k . В частности, при использовании сетки (1.7.18) трудно различить функции распределения (1.7.17) с $k = 3$ и $k = 4$. Построение сетки (1.7.19), справедливое для фиксированного k , позволяет это сделать. На рис. 5.2.1

приводятся эмпирические распределения периодов ветровых волн и зыби (состоящей из одной системы волн); рассчитанные по данным, приведенным в табл. 3.1.2, 5.1.1, 5.1.2. Одни и те же $F(\tau)$ показаны на сетке (1.7.19) для $k = 3$ и $k = 4$. Из рисунка видно, что значение параметра k для периодов волн значительно ближе к 3, чем к 4; поэтому можно считать, что $F(\tau)$ принадлежит асимптотическому закону (1.7.17) при $k = 3$ и $A = 0,712$. Этот вывод, полученный в работах [32, 87] и подтвержденный исследованиям других авторов [14], является достаточно обоснованным, что послужило основанием для включения аппроксимации (1.7.17) при $k = 3$ в Океанографические таблицы [109].

Аппроксимация $F(\tau)$ в виде (1.7.17) при $k = 3$ справедлива для ветровых волн и зыби, состоящей из одной волновой системы. Если наблюдаются смешанное волнение или несколько систем зыби, то $F(\tau)$ зависят от средних периодов различных волновых систем. Если периоды отличаются не больше чем на 1—2 с, то в первом приближении можно использовать указанное распределение. При более существенных расхождениях следует искать другие соотношения. Анализ распределений периодов волн смешанного волнения по натурным данным из табл. 5.1.1 позволил найти осредненную аппроксимацию [9], приведенную в табл. 5.2.1. Эта таблица может служить только для ориентировочных расчетов, так как получена путем осреднения эмпирических распределений, относящихся к волнению, состоящему из волновых систем с различными средними периодами.

Таблица 5.2.1

Осредненные значения функции распределения периодов волн смешанного волнения

$\tau/\bar{\tau}$	0,25	0,50	0,75	1,0	1,25	1,50	1,75	2,0	2,25	2,5
$F(\tau)\%$	99	84	75	50	27	11	5	3	2	1

При ярко выраженной нестационарности ветровых волн распределение периодов волн, так же как высот, отклоняется от асимптотического закона Вейбулла, однако эти отклонения недостаточно изучены.

5.3. Длины волн и их гребней

Наиболее надежным источником информации о распределении длин волн и их гребней являются данные аэрофотосъемки волнения. До недавнего времени такая информация была крайне скудной. Из-за отсутствия экспериментального материала распределение длин определялось косвенно: на основе допущения линейности соотношений между высотой и длиной волн [21] или в предположении, что формулы классической теории волн, связывающие период волн с длиной, остаются в первом приближении верными для каждой отдельно взятой волны [72, 173]. При этих предположе-

ниях (не подтверждающихся натурными данными [32]) распределение длин должно описываться рэлеевским законом (1.7.17) при $k = 2$.

Анализ распределений длин волн $F(\lambda)$ по сечениям планшетов стереосъемки, характеристика которых приведена в табл. 4.4, показал (см. рис. 2 работы [32]), что только в диапазоне длин волн $\lambda/\bar{\lambda} \in [0,5 \div 2,0]$ можно допустить рэлеевость распределений, $F(\lambda)$. В области малых вероятностей (при $\lambda/\bar{\lambda} > 2$) экспериментальные данные лежат в основном выше асимптотической прямой, а в области больших вероятностей (при $\lambda/\bar{\lambda} < 0,5$) — ниже. Эти отклонения нельзя объяснить тем, что длины волн определены по измерениям планшетов в дискретных точках, так как отклонения оценок $F(\lambda)$ от (1.7.17) при $k = 2$ существенно превышают те различия, которые могут быть обусловлены усеченностью распределений. Аппроксимативным законом, наилучшим образом описывающим эмпирические распределения длин волн, является соотношение (1.7.17) при $k = 2,3$ и $A = 0,757$. Этому же закону подчиняются распределения длин волновых холмов и длин L их гребней [10, 87].

Полученное аппроксимативное распределение относится к ветровым волнам; оно не будет справедливо при наличии нескольких систем зыби и смешанного волнения, а также при ярко выраженной нестационарности или неоднородности волнения. Однако в настоящее время отсутствует натурный материал, позволяющий описать распределения длин волн и их гребней при этих условиях волнообразования.

5.4. Условные распределения и их моменты

Для решения различных прикладных задач часто необходимы сведения об условных распределениях элементов волн. На рис. 5.4.1 приводятся функции условных распределений периодов волн фиксированной высоты $F(\tau/h)$ на функциональной сетке распределения Вейбулла. Из рисунка следует, что в первом приближении эмпирические условные распределения принадлежат закону Вейбулла. В работах [10, 90] показано, что с такой же достоверностью можно считать, что $F(h|\tau)$, $F(h|\lambda)$, $F(\lambda|h)$, $F(\lambda|L)$, $F(L|\lambda)$ принадлежат этому же семейству (1.7.17), которое для ансамбля условных распределений записывается в виде

$$F(y|x) = \exp \left[-A_x \left(\frac{y}{\bar{y}_x} \right)^{k_x} \right], \quad (5.4.1)$$

где k_x , A_x — параметры формы и масштабы; $\bar{y}_x$ — регрессия (т. е. условное среднее) y на x .

На рис. 5.4.2 приведены рассчитанные по экспериментальным данным (см. табл. 3.1.2, 4.4) условные средние, дисперсии и коэффициенты изменчивости различных пар элементов волн. Из рисунков видно, что между h и τ , h и λ , λ и L имеется достаточно тесная связь.

Таблица 5.4.1

Параметры условных распределений высот h , периодов τ , длин λ и длин гребней L волн

Условные распределения и их параметры												
Нормированные значения элементов волн	$F\left(\frac{h}{\bar{h}} \middle \frac{\tau}{\bar{\tau}}\right)$		$F\left(\frac{h}{\bar{h}} \middle \frac{\tau}{\bar{\tau}}\right)$		$F\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \middle \frac{L}{\bar{L}}\right)$		$F\left(\frac{\tau}{\bar{\tau}} \middle \frac{h}{\bar{h}}\right)$		$F\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}} \middle \frac{h}{\bar{h}}\right)$		$F\left(\frac{L}{\bar{L}} \middle \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)$	
	$\frac{\tau}{\bar{\tau}} \middle \frac{h}{\bar{h}}$	k	A	$\frac{\bar{h}}{\bar{h}} \middle \frac{\lambda}{\bar{\lambda}}$	k	A	$\frac{\tau}{\bar{\tau}} \middle \frac{h}{\bar{h}}$	k	A	$\frac{\bar{h}}{\bar{\lambda}} \middle \frac{h}{\bar{h}}$	k	A
0,1	0,14	1,3	0,902	0,10	2,0	0,785	0,44	2,5	0,742	0,44	2,0	0,785
0,3	0,34	1,4	0,877	0,29	2,1	0,775	0,56	2,5	0,742	0,58	2,0	0,785
0,5	0,54	1,8	0,810	0,47	2,4	0,749	0,69	2,7	0,728	0,69	2,4	0,745
0,7	0,74	2,2	0,761	0,66	2,7	0,728	0,82	3,0	0,712	0,82	2,6	0,735
0,9	0,94	2,5	0,742	0,84	2,8	0,728	0,94	3,2	0,703	0,94	2,8	0,723
1,1	1,14	2,7	0,728	1,03	2,8	0,723	1,06	3,6	0,687	1,06	3,0	0,712
1,3	1,19	2,9	0,717	1,13	2,9	0,717	1,10	4,0	0,675	1,12	3,3	0,698
1,5	1,23	3,0	0,712	1,20	3,0	0,712	1,11	4,0	0,664	1,19	3,7	0,682
1,7	1,26	3,6	0,687	1,26	3,1	0,707	1,13	4,8	0,656	1,25	4,2	0,668
1,9	1,30	4,0	0,675	1,33	3,3	0,698	1,14	5,3	0,647	1,32	4,9	0,653
2,1	1,34	4,1	0,674	1,39	3,5	0,695	1,16	6,0	0,638	1,38	5,3	0,647
2,3	—	—	—	1,45	3,8	0,681	1,18	7,4	0,622	1,44	6,2	0,636
2,5	—	—	—	1,52	4,0	0,675	1,19	10,0	0,606	1,51	7,5	0,621

Примечание. Возможна линейная интерполяция для определения параметров условных распределений в случае, когда нормированные значения элементов волн находятся в интервале между указанными в таблице.

Для аппроксимации регрессии элементов волн в работе [89] использована кусочно-линейная функция

$$\bar{y}_x = ax + b \quad (5.4.2)$$

в виде отрезков двух прямых, одна для $x \leq 1,0$, другая для $x > 1,0$. Параметры аппроксимации (5.4.2) для различных условных распределений приведены в табл. 1 работы [90].

Значения параметров условных распределений элементов волн для нормированных аргументов приводятся в табл. 5.4.1. В этой таблице для каждого распределения приводятся значения условного среднего, параметров k и A . (Например, у распределения $F\left(\frac{h}{\bar{h}} \mid \frac{\tau}{\bar{\tau}}\right)$ при $\tau/\bar{\tau} = 0,9$ среднее $h/\bar{h} = 0,94$, $k = 2,5$, $A = 0,74$; у распределения $F\left(\frac{\tau}{\bar{\tau}} \mid \frac{h}{\bar{h}}\right)$ при $h/\bar{h} = 0,9$ среднее $\tau/\bar{\tau} = 0,94$, $k = 3,2$, $A = 0,723$ и т. д.)

В табл. 3.8 работы [10] по параметрам из табл. 5.4.1 вычислены значения соответствующих условных функций распределения элементов волн.

Данные рис. 5.4.2 позволяют также косвенно определить осредненное соотношение между длинами и периодами волн путем сопоставления нормированных моментов для условных распределений $F(\tau/\bar{\tau})$ и $F(\lambda/\bar{\lambda})$, рассчитанных по волнографным записям и планшетам для одинаковых значений нормированных высот волн $h/\bar{h}$. Полученное таким образом соотношение между $\lambda/\bar{\lambda}$ и $(\tau/\bar{\tau})^2$ приведено в табл. 5.4.2.

Таблица 5.4.2

Приближенное соотношение между нормированными значениями $\lambda/\bar{\lambda}$ и $(\tau/\bar{\tau})^2$

$h/\bar{h}$	0,2	0,5	0,75	1,5	2,2
$\lambda/\bar{\lambda}$	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5
$\tau/\bar{\tau}$	0,27	0,55	1,05	1,30	1,40
$\sigma^2_{(\tau/\bar{\tau})^2}$	0,12	0,14	0,15	0,14	0,14

Из табл. 5.4.2 видно, что для принятия допущения о линейности соотношения между λ и τ^2 нет достаточных оснований (по крайней мере для больших и малых значений $h/\bar{h}$).

5.5. Двумерные распределения

При изучении вероятностных свойств волновой поверхности часто требуется знание более полной вероятностной характеристики, чем одномерные (маргинальные или условные) функции распределения. В качестве таких характеристик рассмотрим двумерные распределения элементов волн $F(x, y)$ (анализ распределений боль-

шей мерности в силу причин, указанных в разделе 1.1, встречается значительные практические трудности).

По определению $F(x, y)$ можно записать через маргинальные $F(x)$ и условные $F(y|x)$ распределения в виде [90] *

$$F(x, y) = \int_x^{\infty} F(y|x=x') dF(x'). \quad (5.5.1)$$

Выражения для маргинальных и условных распределений, полученные в разделах 5.1—5.4, позволяют искать аппроксимацию двумерных законов. Поскольку маргинальные распределения элементов волн при нормировке на $\bar{x}$ приводятся к единому закону для каждого элемента волны, то при такой нормировке «края» двумерных законов должны быть также едины (независимо от интенсивности волнения). Однако для аппроксимации $F(x, y)$ необходимо выяснить, одина ли зависимость между переменными x и y , так как в противном случае двум маргинальным законам может соответствовать множество двумерных.

Для проверки гипотезы о единстве зависимости между элементами волн на рис. 5.5.1 приведены результаты вычислений распределений $F(h, \tau)$ по четырем продолжительным волнограммам (№ 5,

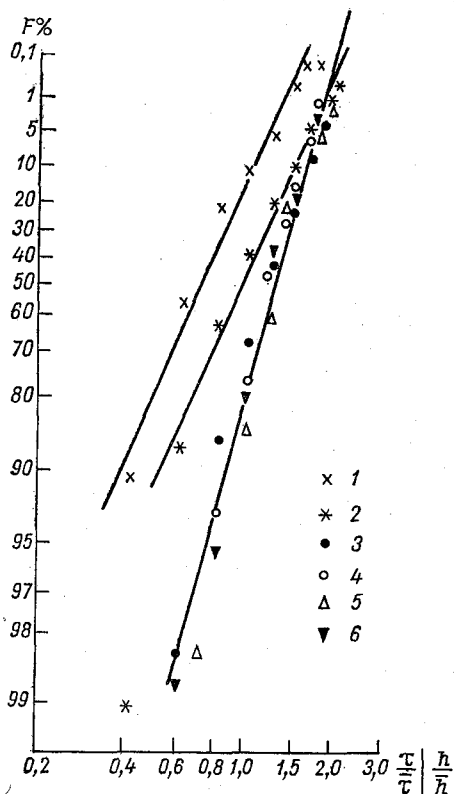


Рис. 5.4.1. Условные распределения периодов ветровых волн на функциональной сетке закона Вейбулла

1) $h/\bar{h} \in [0,2, 0,4]$; 2) $h/\bar{h} \in [0,6, 0,8]$; 3) $h/\bar{h} \in [1,0, 1,2]$; 4) $h/\bar{h} \in [1,4, 1,6]$; 5) $h/\bar{h} \in [1,8, 2,0]$; 6) $h/\bar{h} \in [2,2, 2,4]$

7, 20, 43 из табл. 3.1.2) ветровых волн. На этом же рисунке показаны крайние положения изолиний равной вероятности в случае

* В некоторых работах, например [139], вместо (5.5.1) используется выражение $F(x, y) = F(x) \cdot F(y|x)$, которое справедливо только, если $\int_x^{\infty} F(y|x) dF(x) = F(y|x) \int_x^{\infty} dF(x)$, т. е. когда условные распределения для всех x одинаковы. В общем случае для элементов волн такое предположение не справедливо.

независимости переменных (отрезки окружностей) и наличия функциональной зависимости (пересекающиеся прямые) Из рисунка видно, что изолинии, полученные по натурным данным, располагаются между указанными крайними положениями, что свидетельствует о стохастической связи между элементами волн, а близость изолиний означает наличие единой зависимости между h и τ . Сказанное относится также и к другим элементам волн [90].

Таким образом, принадлежность маргинальных распределений к единому семейству и универсальность зависимости между переменными позволяет путем нормировки осей двумерных распределений объединять в одну выборку данные, относящиеся к ветровым волнам различной интенсивности. Такой прием существенно улучшает статистическую достоверность получаемых выводов. Результаты вычислений таких «единых» распределений элементов волн приведены на рис. 3.3 и в табл. 3.9 работы [10], на рис. 2 работы [90] и в Океанографических таблицах [109]. Сопоставим только результаты натурных расчетов $F(h, \tau)$ с широко используемой аппроксимацией через произведение маргинальных законов, т. е. в предположении независимости элементов волн. В табл. 5.5.1 приводятся значения коэффициента коллигации K (взаимосвязи), который определяется как $K = F(h, \tau) / F(h) F(\tau)$.

Таблица 5.5.1

Значения коэффициентов коллигации для распределений высот и периодов волн по экспериментальным данным

$\tau/\bar{\tau}$	$h/\bar{h}$					
	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75
0,5	1,0	1,1	1,2	1,1	1,1	1,0
0,75	1,1	1,2	1,3	1,4	1,3	1,1
1,0	1,2	1,3	1,5	1,7	1,8	1,6
1,25	1,2	1,3	1,5	1,8	1,8	1,5
1,5	1,0	1,1	1,1	1,1	1,1	1,0

Из табл. 5.5.1 видно, что значения двумерных распределений могут отличаться от произведения маргинальных почти в два раза. Такие закономерные различия связаны с существованием достаточно тесной зависимости между элементами волн. Следовательно, для аппроксимации $F(x, y)$ необходимо использовать соотношение (5.5.1). Подставив в (5.5.1) выражение (1.7.17) для маргинальных законов и (5.4.1) для условных, имеем [90]

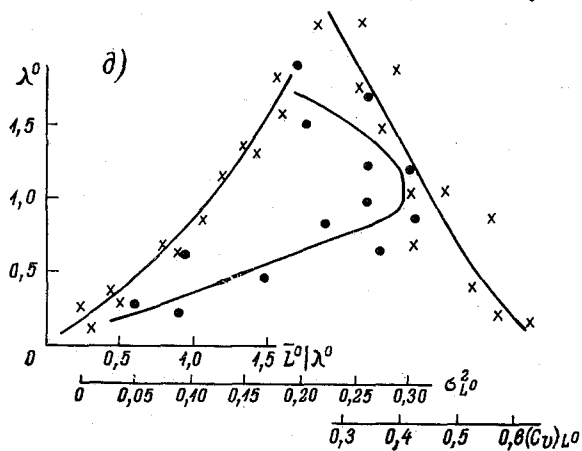
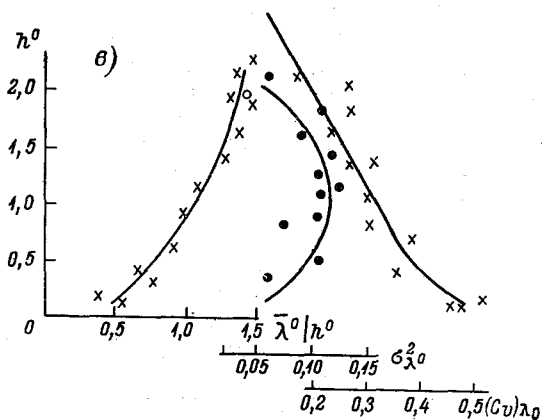
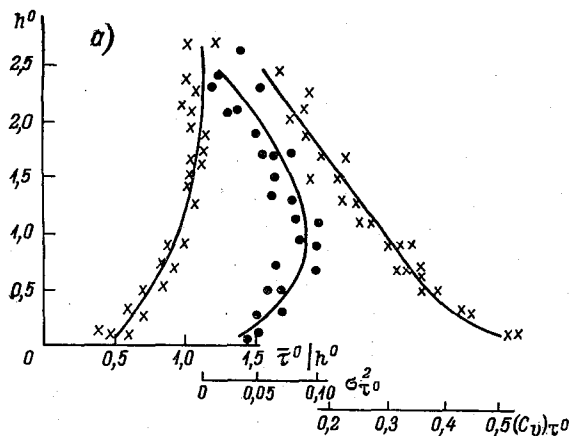
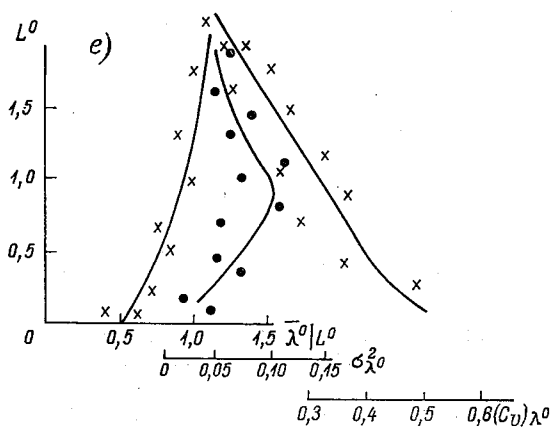
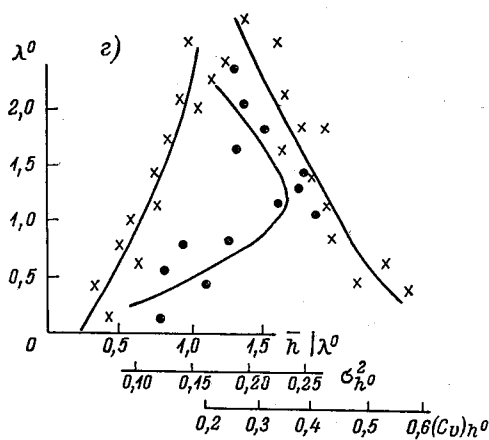
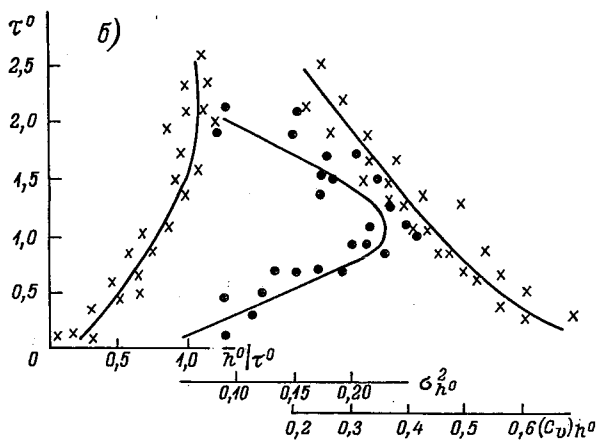


Рис. 5.4.2. Характеристики моментов условных распределений высоты $h^0 = h/\bar{h}$; б — h^0 при фиксированном τ^0 ; в — для $\lambda^0 =$ — для гребней $L^0 = L/\bar{L}$ при фикс.



элементов волн: а — периодов $\tau^0 = \tau/\bar{\tau}$ при фиксированной $\lambda/\bar{\lambda}$ при фиксированном h^0 ; г — h^0 при фиксированной λ^0 ; е — λ^0 при фиксированной L^0

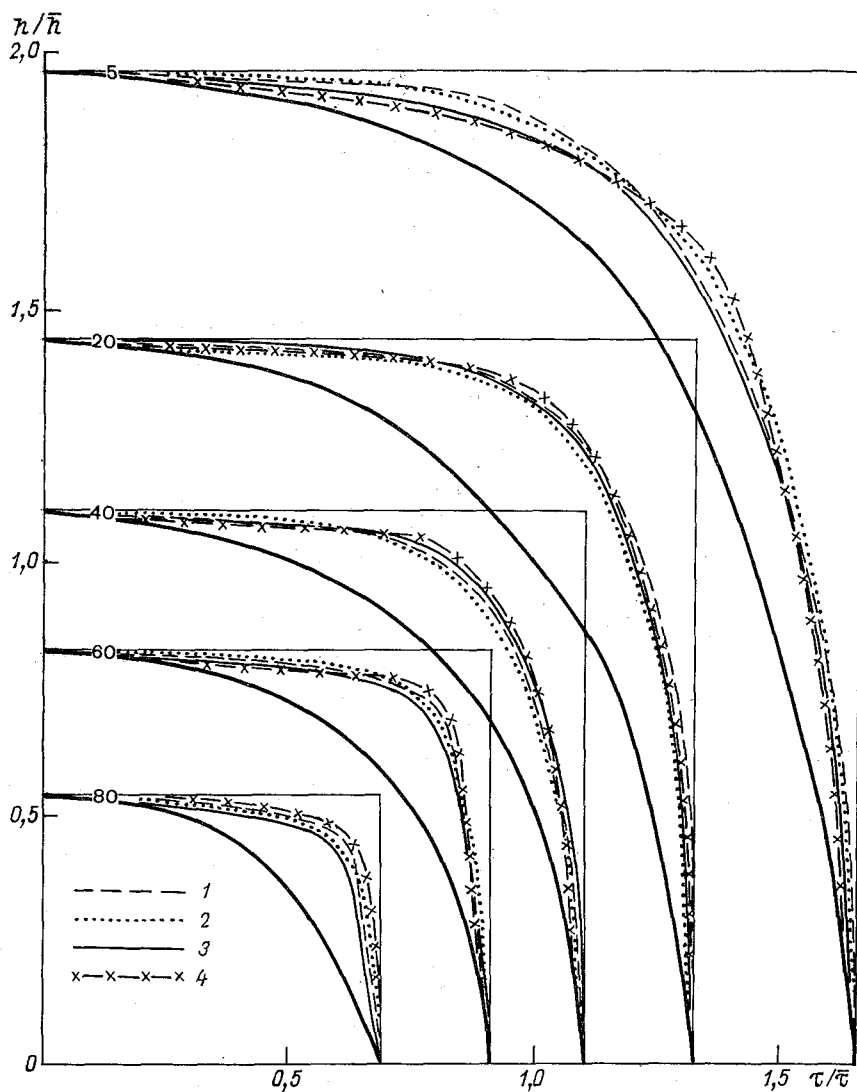


Рис. 5.5.1. Совмещенные изолинии распределений высот и периодов волн, рассчитанных по четырем продолжительным волнограммам ветровых волн (записи № 20, 45, 3, 7 из табл. 3.1.2)

1) $N = 2400$, $\bar{h} = 3,2$, 2) $N = 1500$, $\bar{h} = 1,0$, 3) $N = 1100$, $\bar{h} = 3,0$, 4) $N = 1000$, $\bar{h} = 3,7$

$$F(x, y) = kA \int_x^{\infty} x_1^{k-1} \exp \left[-A_{x_1} \left(\frac{y}{y_{x_1}} \right)^k x_1 - A \left(\frac{x_1}{x} \right)^k \right] dx_1. \quad (5.5.2)$$

Для расчета двумерных распределений высот — периодов, высот — длин волн, длин волн — длин гребней волн выполнено численное интегрирование (5.5.2), при этом значения параметров условных распределений брались из табл. 5.4.1, маргинальных — в соответствии с аппроксимациями, полученными в разделах, 5.1—5.3; регрессия принята в виде (5.4.2). Результаты численных расчетов по (5.5.2) показали хорошее согласие с «едиными» эмпирическими распределениями [90].

Аппроксимативное соотношение (5.5.2) относится к ветровым волнам или зыби. Для смешанного волнения единое соотношение вряд ли может быть получено, так как маргинальные распределения имеют различный вид (см. разделы 5.2, 5.3). Еще более сложные зависимости будут в случае нестационарности или неоднородности волнового процесса, так как изменяются не только маргинальные законы, но и вид зависимости между переменными.

5.6. Крутизна и показатель трехмерности

Аппроксимация двумерных распределений элементов волн позволяет получить как частный случай связанные с ними одномерные распределения, например крутизны $F(\delta)$ и показателя трехмерности $F(\gamma)$. Распределение $F(z)$ этих характеристик как частного от деления двух случайных величин x/y получается из двумерного распределения [84].

В работе [90] для вейбулловского семейства условных и маргинальных распределений волн получено выражение для $F(z)$. Для нормированного аргумента $y^0 = y/\bar{y}$ оно имеет вид

$$F(z) = \frac{A_y k_y}{(y^0)^{k_y}} \int_0^{\infty} (y^0)^{k_y-1} \exp \left[-A_x \left(z \frac{y}{x_y} y^0 \right)^{k_x} - A_y (y^0)^{k_y} \right] dy^0. \quad (5.6.1)$$

Для аппроксимации распределения крутизны волн примем, что $z \equiv \delta$, $y \equiv \lambda$, $x \equiv h$, тогда маргинальным является распределение $F(\lambda)$, условным — $F(h|\lambda)$; следовательно, $k = 2, 3$, $A = 0,757$. Тогда для $F(\delta)$ распределение (5.6.1) будет иметь вид

$$F(\delta) = 1,741 \int_0^{\infty} (y^0)^{1,3} \exp \left[-A_{y^0} \left(\delta \frac{y^0}{x_{y^0}} \right)^k y^0 - 0,757 (y^0)^{2,3} \right] dy^0. \quad (5.6.2)$$

Соотношение (5.6.2) неудобно для практических расчетов. Поэтому нахождение простой, хотя и формальной аппроксимации распределений отношения между элементами волн представляет практический интерес. В работах [10, 87] показано, что такой аппрок-

симацией является распределение Вейбулла (1.7.17) для $k = 2,5$. На рис. 5.6.1 эмпирические распределения крутизн волн, рассчитанные по данным, характеристика которых приводится в табл. 4.4, показаны на функциональной сетке закона (1.7.17) при $k = 2,5$ и $A = 0,742$. Из рисунка видно, что этот закон хорошо описывает натурные данные.* Отметим, что принятая в ряде работ [6, 72]

аппроксимация $F(\delta)$ в предположении независимости h и λ имеет вид

$$F(\delta) = 1 / \left[1 + \left(\frac{\pi}{2} \right) \left(\frac{\delta}{\delta_{\max}} \right)^2 \right] \quad (5.6.3)$$

и, как видно из рис. 5.6.1, противоречит экспериментальным данным. В работе [32] показано, что различия между (5.6.3) и натурными данными не объясняются возможной усеченностью распределения $F(\delta)$ из-за дискретности обработки планшетов стереосъемки и ограниченностью $\delta_{\max}$.

Планшеты стереосъемки позволяют также изучить распределение показателя трехмерности $\gamma = L/\lambda$. Аппроксимативное выражение для $F(\gamma)$ эквивалентно (5.6.1), так как γ является частным от деления двух случайных величин L и λ (при этом в качестве маргинального используется распределение $F(\lambda)$, а в качестве условного $F(L|\lambda)$). На рис. 3.8 работы [10] показано, что аппроксима-

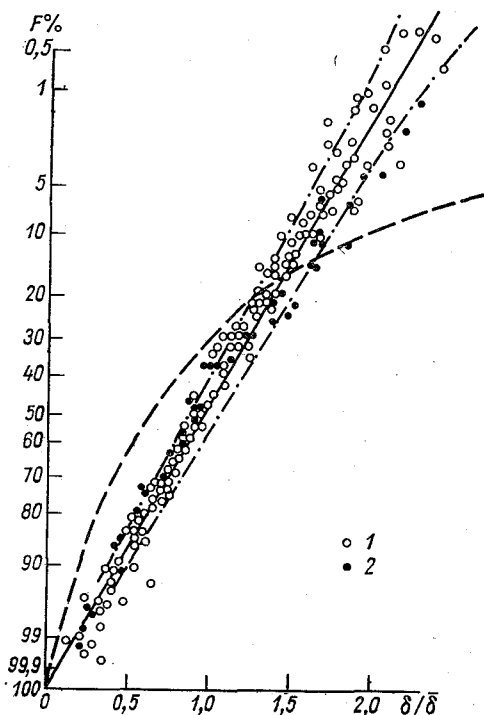


Рис. 5.6.1. Эмпирические распределения крутизн волн для штормового (1) и умеренного (2) волнения. Пунктир — распределение (5.6.3). Штрих-пунктир — доверительные интервалы, рассчитанные по (1.7.5) при $k = 2,5$ для доверительной вероятности 0,90 и $N = 200$

ция распределения $F(\gamma)$ законом (1.7.17) при $k = 2,5$ хорошо описывает натурные данные. Этот же закон применим для описания распределения крутизн волновых холмов.

* В полученных аппроксимациях не введено ограничение на предельную крутизну волн. Однако при δ , близкой предельно возможной, значения $F(\delta)$ пренебрежимо малы и в соответствии с принципом практической уверенности [23] такое событие можно считать недостоверным. Например, при $\delta = 0,10$ и $\delta_{\max} = 0,03$, $F(\delta) = 3,5 \cdot 10^{-5} \%$.

Для практического использования соотношения (5.6.2) желательно знать средние значения рассматриваемого элемента. Для ветровых волн, характеристика которых дана в табл. 4.4, можно в первом приближении принять, что $\bar{\delta} \simeq 0,03$, а $\bar{\gamma} \simeq 2,0$.

5.7. Последовательности волн

Анализ элементов подряд идущих волн представляет большой интерес для расчетов волновых нагрузок на суда и сооружения. В работе [87] показано, что такие последовательности являются зависимыми случайными величинами. Коррелограммы высот, периодов, длин и других элементов волн имеют экспоненциально-косинусный вид (см. рис. 1 работы [87]). Начальный участок (до первого пересечения с осью абсцисс) коррелограммы $K(m)$ можно аппроксимировать соотношением вида

$$K(m) = Dr^m, \quad m = 1, 2, 3, 4, \quad (5.7.1)$$

где D — дисперсия последовательности элементов волн, r — коэффициент корреляции между элементами, равный 0,6 для высот и длин волн и 0,5 для их периодов [10, 122]. Неучет зависимости между элементами соседних волн может привести к существенным погрешностям при расчете вероятности прохождения волн с заданными высотами. В табл. 3.13 работы [10] приводится распределение «со сдвигом» $F(h_i, h_{i-1})$, т. е. функции распределения вероятностей появления волны определенной высоты h_{i-1} при заданном значении соседней волны h_i . Из этой таблицы следует, что эмпирическое распределение $F(h_i, h_{i-1})$ всегда превышает (особенно для больших h) его аппроксимацию в предположении независимости высот соседних волн. Например, для штормового волнения с $\bar{h} = 3,2$ м вероятность того, что волне высотой $h_i \geq 4,6$ м будет предшествовать волна $h_{i-1} \geq 5,3$ м, по натурным данным равна 4%, а в случае независимости соседних высот волн — 2%; для волн высотой $h_i \geq 6,8$ м и $h_{i-1} \geq 7,6$ м указанные вероятности соответственно равны 0,2 и 0,04%.

Вычисление распределений для «сдвига» более двух волн не приводит к таким же четко интерпретируемым выводам, что в первую очередь связано с наличием групповой структуры волнения.

5.8. Группы волн

При всей кажущейся хаотичности и неупорядоченности последовательности сменяющих друг друга волн в ней существует определенная закономерность. В ряду нескольких волн, постепенно нарастающих по высоте, проходит особенно высокая волна, после которой следуют волны уменьшающейся высоты. Через некоторое время аналогичная картина повторяется, т. е. волны проходят

группами. Группы волн — одна из характерных черт волнения, проявляющаяся в циклической смене последовательностей волн, состоящих из достаточно высокой волны, которой предшествуют и за которой следуют волны меньшей высоты.

В Древней Греции предполагали, что наибольшая волна в группе — десятая, седьмая или четвертая, на Востоке — одиннадцатая, а моряки и рыбаки во многих странах считали наибольшей волной девятую, или так называемый «девятый вал» (нашедший отражение в известной картине И. К. Айвазовского). Наблюдения показали, что в последовательности волн наибольшей может быть любая, а ее порядковый номер зависит от многих факторов.

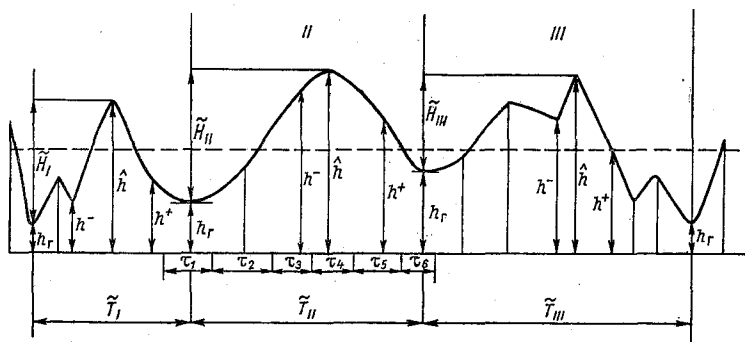


Рис. 5.8.1. Группы волн (отмечены римскими цифрами) и их элементы, выделяемые по последовательности высот волн. Пунктир соответствует средней высоте волн

До настоящего времени не существует определения групп волн, хотя с фактом наличия групповой структуры приходится считаться при расчетах волновых воздействий на суда и сооружения. Групповые свойства присущи волнению независимо от его типа и интенсивности; на фотографиях взволнованной поверхности моря можно заметить наличие групп волновых холмов [157]; достаточно хорошо известен групповой характер зыби, набегающей на берег; с группами волн связывают так называемые прибойные бienia и тягун на акваториях портов [7].

Исследование групповой структуры по записям волнографов (или сечениям планшетов стереосъемки) представляет интерес при расчете волновых воздействий на объекты, «рассекающие», взволнованную поверхность моря, т. е. на суда, плавучие и стационарные буровые установки и т. д. Вопросы, связанные с некоторыми способами описания волнения с учетом групп, в частности через огибающую, рассмотрены в главе 2.

Решение практических задач, в которых необходим учет групповой структуры волнения, требует однозначных определений, отражающих свойство цикличности волнового процесса. В практике

используется [10, 86, 107, 146] естественное рассмотрение группы волн как последовательности подряд идущих волн, в которой наибольшая высота $\hat{h}$ превышает среднюю высоту $\bar{h}$, рассчитанную по всей последовательности волн, а слева и справа от $\bar{h}$ располагаются волны с меньшими высотами; наименьшие волны в такой последовательности, имеющие, по определению, высоту меньше $\bar{h}$, являются границей групп. Пояснение указанного определения приводится на рис. 5.8.1.

Результаты вычисления среднего числа волн m в группе по некоторым записям ветрового волнения из табл. 3.1.2 приводятся

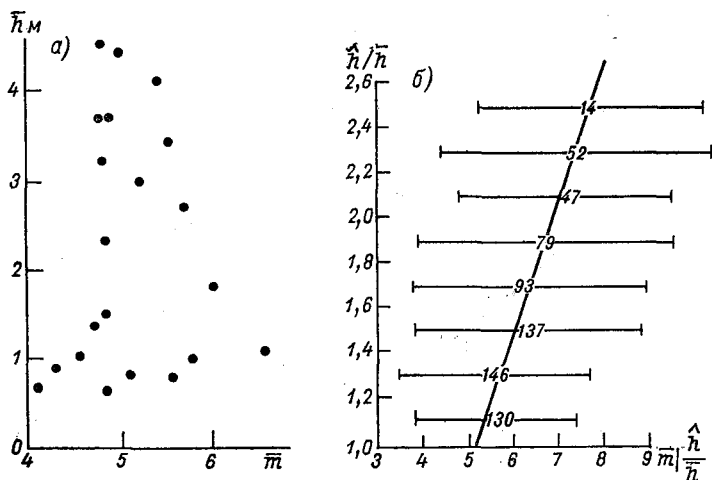


Рис. 5.8.2. Среднее число волн в группе по натурным данным
а — для волнения различной интенсивности; б — для групп с различной максимальной волной $\hat{h}^0$, числа — количество групп, сплошной отрезок — $\pm \sigma$ интервал

на рис. 5.8.2 а. Из рис. 5.8.2 а видно, что, независимо от интенсивности волнения (использованы волнограммы, в которых $\bar{h}$ изменяется от 0,2 до 4,5 м), группа в среднем состоит из 5—6 волн. Однако число волн в конкретных группах зависит от высоты наибольшей волны в ней. На рис. 5.8.2 б для ансамбля волнограмм штормового волнения (записи А-61—А-67 из табл. 3.1.2) приводится зависимость среднего числа волн в группе $\bar{m}$ от максимальной волны в ней. Из рисунка видно, что с увеличением $\hat{h}$ среднее число волн в группе возрастает. Например, если $\hat{h} = \bar{h}$, то $m = 5$, если $\hat{h} = 1,8 \bar{h}$, то $m = 6$. Эта же зависимость прослеживается на двумерном распределении $F(\hat{h}, \bar{m})$, приведенном в работе [122].

Для аппроксимации функции распределения числа волн в группе учтем, что m не может быть меньше 2 (согласно определению, иллюстрируемому на рис. 5.8.1, если две соседние группы

имеют по 3 волны, то одна — общая для обеих групп, может принадлежать только одной группе, а другая будет содержать 2 волны). На рис. 5.8.3 приводятся $F(m)$ для штормового волнения (те же волнограммы, что на рис. 5.8.2 б), здесь же показано усеченное нормальное распределение (для точки усечения $m_1 = 2$, $\bar{m} = 5$ и $\sigma = 3$), которое, как видно из рисунка, достаточно хорошо (особенно для больших m) описывает натурные данные.

Усеченный «слева», нормальный закон, по определению, имеет вид

$$F(m) = \frac{1 - P_n(x)}{1 - P_n(x_1)}, \quad (5.8.1)$$

где $P_n(x)$ — интеграл Лапласа, $x =$

$$= \frac{(\bar{m} - m)}{\sigma}, \quad x_1 = \frac{(m_1 - \bar{m})}{\sigma}.$$

Выражение (5.8.1) справедливо для дискретной последовательности $m = 2, 3, 4, \dots$

Из рис. 5.8.3 следует, что группы с числом волн 9 и более составляют около 10%, а группы с $m = 14$ встречаются в 0,5% случаев. Однако в группах с большим числом волн велико $\bar{m}$ и вследствие зависимости $\bar{h}$ от m (см. рис. 5.8.2 б) более вероятны высокие волны, представляющие наибольшую опасность. Поэтому легенды

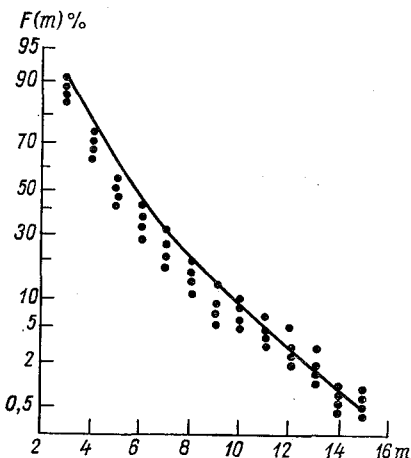


Рис. 5.8.3. Функции распределения числа волн в группах для штормового волнения. Сплошная линия — аппроксимация нормальным законом, усеченным в точке $m_1 = 2$ при $\bar{m} = 5, \sigma = 3$

о девятом (а не пятом или шестом) вале не так уж несостоятельны (одиннадцатый, четырнадцатый и другие «валы», хотя и должны быть еще более опасными, встречаются гораздо реже).

Рассмотрим вероятностные характеристики высот $\bar{H}$, равных разности высот наибольшей и наименьшей волн в группе, и периодов $\bar{T}$, равных временному интервалу между прохождением вершин наименьших волн в группе (см. рис. 5.8.1). На рис. 5.8.4 на функциональной сетке распределения Вейбулла (1.7.17) приведены эмпирические распределения $F(\bar{H})$ и $F(\bar{T})$. Из рисунка следует, что распределение (1.7.17) достаточно хорошо описывает $F(\bar{H})$ при $k = 2,3$ и $F(\bar{T})$ при $k = 1,8$; параметры A соответственно равны 0,757 и 0,810, $\bar{H}$ и $\bar{T}$ являются зависимыми случайными величинами. На рис. 5.8.5 показана по данным, относящимся к штормовому волнению, регрессия $\bar{H}$ на $\bar{T}$ и $\bar{T}$ на $\bar{H}$ для нормированных аргумен-

тов $\tilde{H}/\bar{H}$ и $\tilde{T}/\bar{T}$. Из рисунка видно, что регрессионное соотношение между высотами и периодами групп волн линейно, кроме того, из рисунка видно, что стандарт $\sigma_{\tilde{H}/\bar{H}}$ уменьшается с ростом $\tilde{T}/\bar{T}$; для периодов групп такой зависимости не наблюдается.

Изучение вероятностных закономерностей, которым подчиняются волны, входящие в группы, особенно вблизи наибольшей волны $\hat{h}$ в группе, определяют предельные волновые нагрузки на суда и сооружения [86, 107, 146]. Величины $\hat{h}$ являются подмно-

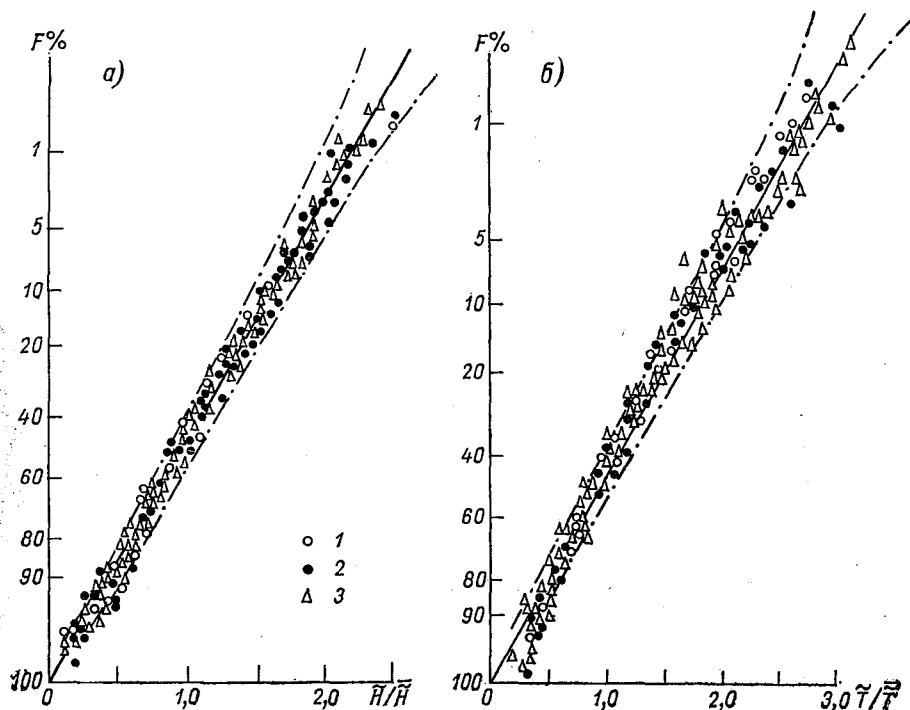


Рис. 5.8.4. Эмпирические распределения высот (а) и периодов (б) групп волн 1 — умеренное волнение, 2 — сильное волнение, 3 — штормовое волнение. Знак, внутри заполненный, — ветровые волны, знак, внутри пустой, — зыбь

жеством последовательности всех высот волн, которые, как известно (см. раздел 5.1), распределены по закону Рэля, поэтому распределение $F(\hat{h})$ должно подчиняться этому же закону, усеченному на квантили, соответствующей $\bar{h}$ (так как, по определению, всегда $\hat{h} \geq \bar{h}$). При решении некоторых прикладных задач [86, 146] необходимо рассматривать не все группы, а только некоторые, в которых $\hat{h}$ в κ раз превышают $\bar{h}$. Тогда функция распределения

для $\hat{h} \geq \kappa \bar{h}$ имеет вид распределения Рэлея, усеченного на квантили κ [86]:

$$F_{\kappa}(\hat{h}) = \exp \left\{ \frac{\pi}{4} [\kappa^2 - (\hat{h})^2] \right\}. \quad (5.8.2)$$

Периоды $\hat{\tau}$ максимальных волн в группах являются подмножеством всех периодов, определенных из условия $\tau|\hat{h} \geq \kappa \bar{h}$. Поэтому условные распределения периодов волн фиксированной высоты $F(\tau|h)$ (см. раздел 5.4) должны описывать распределение $F(\hat{\tau})$.

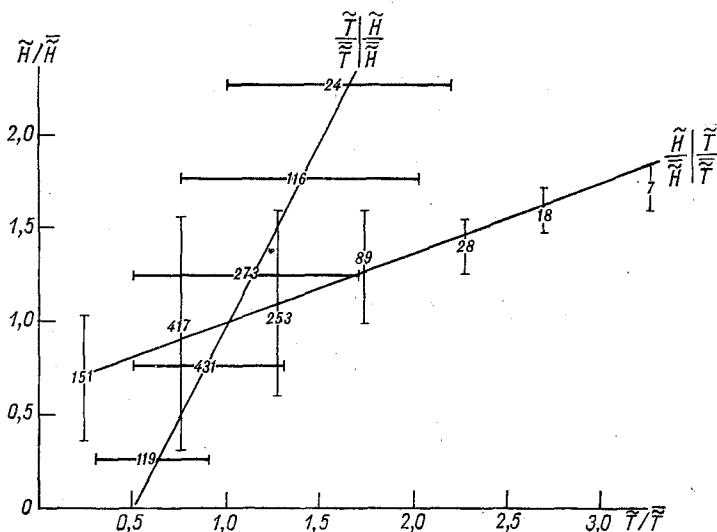


Рис. 5.8.5. Регрессионные зависимости между нормированными значениями средних высот и периодов групп штормового волнения

Цифры — число наблюдений, отрезки $\pm \sigma$ интервал

В табл. 5.4.1 приводятся значения параметров распределений $F(\tau|h)$; взяв их осредненные значения в диапазоне $h > \kappa \bar{h}$, можно в первом приближении получить аппроксимацию распределений $F(\hat{\tau}|\hat{h} \geq \kappa \bar{h})$.

Результаты анализа высот и периодов волн, непосредственно предшествующих $\bar{h}^-$, $\bar{\tau}^-$ и следующих $\bar{h}^+$, $\bar{\tau}^+$ за $\bar{h}$, достаточно подробно изложены в работе [86], где, в частности, показано, что

$$\frac{\bar{h}^-}{\bar{h}} \simeq \frac{\bar{h}^+}{\bar{h}} = \begin{cases} 0,6 & \text{для } \kappa \in [1,43 \div 2,11], \\ 0,5 & \text{для } \kappa \in (2,11 \div 2,42], \end{cases} \quad (5.8.3)$$

$$\bar{\tau}^- \simeq \bar{\tau} \simeq \bar{\tau}^+, \quad (5.8.4)$$

а распределение величин $\bar{h}^-/\bar{h}$, $\bar{h}^+/\bar{h}$, $\bar{\tau}^-/\bar{\tau}$, $\bar{\tau}^+/\bar{\tau}$ близко к нормаль-

ному с параметрами, приведенными в табл. 5.8.1. В качестве κ взяты квантили рэлеевского распределения, которые для обеспеченности 20% равны 1,43, для 10% — 1,71, для 5% — 1,95, для 3% — 2,11, для 1% — 2,42.

Временной интервал между прохождением вершин волн с высотой $\hat{h} \geq 1,43 \bar{h}$ обозначим через ρ . Вид закона, аппроксимирующего распределение ρ , следует из теории выбросов случайных процессов [147], где доказано, что распределение промежутков времени между соседними выбросами при больших κ (а именно такими являются случаи при $\kappa \geq 1,43$) экспоненциально

$$F(\rho) = \exp\left(-\frac{\rho}{\bar{\rho}}\right). \quad (5.8.5)$$

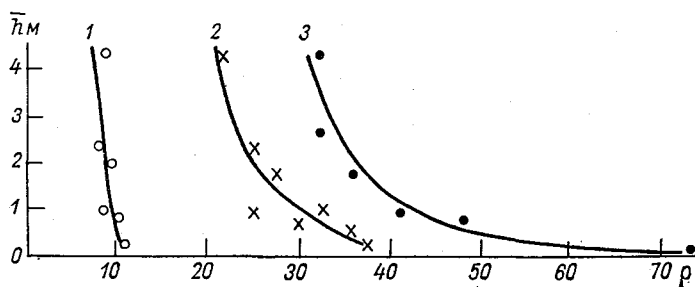


Рис. 5.8.6. Зависимость среднего временного интервала между группами от средней высоты волн и κ .
1 — $\kappa \geq 1,43$, 2 — $\kappa \geq 1,95$, 3 — $\kappa \geq 2,11$

На рис. 4 работы [86] показано, что распределение (5.8.5) хорошо описывает экспериментальные данные.

Значения параметра $\bar{\rho}$ (в средних периодах волн) для волнения различной интенсивности и $\kappa \geq 1,43$; 1,95 и 2,11 показаны на рис. 5.8.6. Из рисунка следует, что, чем слабее волнение, тем при заданном κ больше величина $\bar{\rho}$.*

Выше при определении группы допускалось, что хотя бы одна волна превышает заданный уровень $\kappa \bar{h}$. Однако определенный интерес представляет вероятность прохождения групп, в которых несколько волн подряд пересекают заданный уровень. Результаты таких расчетов по натурным данным приведены в табл. 5.8.2. Из таблицы видно, что наибольшее число подряд идущих волн, пересекающих уровень $\kappa \bar{h}$, наблюдается у зыби, наименьшее — у смешанного волнения. Для ветрового волнения различного типа при $\kappa = 1,95$ около 90% всех волн появляются изолированно, при

* Качественно аналогичные зависимости, полученные путем численного моделирования случайного процесса с широким и узким спектром, приводятся в работе [202].

Таблица 5.8.1

Осредненные значения моментных характеристик элементов волн, входящих в группы (по натурным данным)

κ	$\overline{h^-/\hat{h}}$	σ	$\overline{h^+/\hat{h}}$	σ	$\overline{\tau^-/\hat{\tau}}$	σ	$\overline{\tau^+/\hat{\tau}}$	σ
Ветровые волны								
1,43	0,60	0,22	0,62	0,22	1,03	0,32	1,02	0,37
1,71	0,60	0,22	0,61	0,22	1,06	0,32	1,04	0,35
1,95	0,58	0,21	0,60	0,20	1,06	0,32	1,06	0,33
2,11	0,54	0,21	0,58	0,21	1,06	0,32	1,05	0,30
2,42	0,50	0,22	0,49	0,18	0,98	0,34	1,06	0,33
Смешанное волнение								
1,43	0,56	0,22	0,57	0,26	1,02	0,44	0,93	0,40
1,71	0,53	0,21	0,55	0,21	1,04	0,40	0,96	0,41
1,95	0,52	0,21	0,54	0,20	1,05	0,40	1,05	0,41
2,11	0,52	0,20	0,51	0,20	1,00	0,27	0,98	0,29
2,42	0,55	0,22	0,57	0,21	1,04	0,30	1,00	0,30

$\kappa = 1,71$ до 30% приходится на долю двух волн, уровень $\kappa = 1,43$ примерно в 5% случаев пересекается тремя волнами и более.

Таблица 5.8.2

Значения повторяемости $\hat{f}(m)$ числа волн m , подряд пересекающих заданный уровень κ (по данным натурных наблюдений)

$\kappa = h/\bar{h}$	m	$\hat{f}(m) \%$		
		ветровые волны	зыбь	смешанное волнение
> 1,43	1	66	64	77
	2	27	22	19
	3	4	7	4
	4	3	5	—
	5	—	2	—
> 1,71	1	73	70	87
	2	27	30	13
> 1,95	1	92	85	100
	2	8	15	—
> 2,11	1	94	92	100
	2	6	8	—

В некоторых работах [93, 179, 202, 268] аналитически и по ограниченному числу натурных данных исследуется этот же вопрос, но анализируются только средние значения числа подряд идущих

волн, пересекающих уровень $\kappa \bar{h}$; последовательности таких волн необоснованно называются группами. Такой формальный подход привел указанных авторов к выводу, что среднее число подряд идущих волн с высотами $h > 1,6 \bar{h}$ равно 1,4—1,5. В пределе при росте κ среднее число таких волн, превышающих $\kappa \bar{h}$, стремится к 1. Следует отметить, что дробные значения среднего числа волн физически не реальны, кроме того, необоснованно называя такие последовательности волн группами, можно прийти к выводу об их отсутствии. Однако, как показал анализ натурных данных, изложенный в настоящем разделе, групповая структура является одной из характерных черт ветрового волнения.

Часть II

Развитие, распространение и затухание волн

При воздействии ветра на водную поверхность образуются ветровые волны, сначала капиллярные волны и рябь, а затем — при усилении ветра — гравитационные волны, которые могут достигнуть значительных размеров. С прекращением действия ветра вынужденные волны переходят в свободные — зыбь, при ослаблении ветра и изменении его направления — в смешанное волнение, состоящее из нескольких волновых систем. Для физической интерпретации этих и многих других закономерностей зарождения, развития и распространения волн используются гидродинамические модели — решения системы уравнений (1), (2) механики жидкости при различных начальных и граничных условиях.

Волновые движения на поверхности жидкости, возникающие под действием ветра, сами оказывают влияние на структуру воздушного потока, поэтому, строго рассуждая, необходимо решать совместно две системы уравнений вида (1), (2) для воздуха и воды при определенных граничных условиях. В столь общей постановке задачи трудно рассчитывать не только на получение точных аналитических решений, но и на детальное численное изучение различных свойств волновых движений. Наиболее часто теоретические исследования выполняются путем принятия тех или иных допущений, упрощающих запись исходных уравнений и облегчающих решение поставленной задачи. Как уже было отмечено во введении, наиболее часто для разработки математических моделей развития и распространения волн использовалось уравнение (16) баланса волновой энергии при различных допущениях о передаче энергии от ветра к волнам и ее диссипации.

Первые попытки создания модели развития волн под воздействием ветра были предприняты в конце прошлого века, когда Томсон [305] и независимо от него Гельмгольц предположили, что рост волн происходит благодаря изменению давления по профилю волны, обусловленному сгущением линий тока воздуха под греб-

ниями и их разрежением над ложбинами. Интерес к этой гипотезе был значительно ослаблен в связи с тем, что полученная этими исследователями минимальная скорость ветра (6,7 м/с), при которой возникают начальные ветровые волны, находилась в явном противоречии с данными наблюдений. Впоследствии многие исследователи продолжали считать, что основной причиной развития ветрового волнения является изменение нормальных давлений по профилю волны, но по-разному объясняли причину этих изменений и получали различные количественные соотношения для определения энергии, передаваемой от ветра волнам.

Джеффрис [231] одним из первых предположил, что причиной роста волн является образование позади каждого гребня вихрей воздушного потока, т. е. зон застоя, обуславливающих неодинаковое давление на передний и тыловой склоны волны. На этом основании он принял, что энергия, передаваемая от ветра волнам, пропорциональна крутизне волн и квадрату разности между скоростью ветра и фазовой скоростью волн. Джеффрис ввел в свои соотношения коэффициент воздействия, характеризующий отношение площади волны, подвергающейся действию ветра, ко всей площади волны.

Несколько более общую схему взаимодействия волн с воздушным потоком предложил Капица [56]. Согласно этой схеме процесс волнообразования под воздействием ветра происходит благодаря срыву потока воздуха на подветренном склоне волны. От места срыва потока и до начала следующего склона давление не изменяется, в то время как на наветренном склоне благодаря возрастанию тангенциальной скорости воздушного потока от впадины до вершины давление в этом направлении падает, давление по обоим склонам волн становится несимметричным и появляются силы, действующие по направлению ветра. Величина этих сил пропорциональна квадрату крутизны волн и квадрату разности скорости ветра и фазовой скорости волн.

В. В. Шулейкин [159], полагая вслед за Джеффрисом и Капицей, что асимметрия давления по профилю волны является основной причиной роста волн, и основываясь на результатах продувания моделей волн в аэродинамической трубе, предложил следующую схему процессов развития волн.

Благодаря асимметричности в распределении давления по профилю волны получается, что давление воздуха на наветренный склон всюду превышает давление на подветренный в точках, лежащих соответственно на одних и тех же высотах над подошвой. По этой причине частицы воды, находясь в фазе нисходящего движения, будут испытывать большую силу давления сверху, чем частицы, находящиеся в фазах восходящего движения по орбите. Каждый участок волновой поверхности будет из-за этого испытывать большее давление на спуске сквозь некоторую плоскость и меньшее давление при подъеме, в результате чего будет происходить прирост энергии волн, пропорциональный разности давления на на-

ветренном и подветренном склонах волны. Шулейкин получил, что осредненная мощность, передаваемая ветром волне, в расчете на единицу поверхности моря прямо пропорциональна квадрату высоты волн и квадрату разности скорости ветра и фазовой скорости волн и обратно пропорциональна длине и периоду волн.

В противоположность перечисленным выше исследователям, В. М. Маккавеев [91], Нэйман [266] и ряд других исследователей полагали, что развитие волн и передача энергии от ветра волнам происходят не из-за асимметрии давления по профилю волн, а под воздействием касательных напряжений, возникающих на поверхности воды при превышении скорости ветра над скоростью частиц воды. При этом принимается, что тангенциальные напряжения совпадают по направлению с движением частиц на волновой орбите по причине завихрений воздушного потока за гребнями. По Маккавееву, мощность, передаваемая от ветра волнам, пропорциональна квадрату их крутизны, скорости ветра, фазовой скорости волн и разности последних двух величин.

Свердруп и Манк [134] учитывали в своих исследованиях передачу энергии как нормальным давлением, так и тангенциальным напряжением ветра.

Из приведенного выше обзора видно, что большинство исследователей считают причиной роста волн возникновение у водной поверхности сил, обусловленных возмущающим влиянием волн на воздушный поток и совпадающих по направлению с направлением движения частиц воды по волновой орбите. Все исследователи сходятся на том, что величина этих сил зависит от крутизны волн и разности между средней скоростью ветра и средней фазовой скоростью распространения волн. Однако по количественной оценке сил воздействия воздушного потока на волны и схеме их формирования имеются очень значительные расхождения.

Не менее существенны различия в оценках диссипации энергии. В то время как одни исследователи [72, 159] полагают, что диссипация энергии определяется виртуальной вязкостью, другие [91, 134] считают основной ее причиной молекулярную вязкость.

Кроме отмеченной выше трудности — определения количества энергии, передаваемой ветром волнам; и величины, характеризующей диссипацию энергии, существуют еще по крайней мере две трудности:

— после приведения уравнения (16) к безразмерной форме оно будет содержать две неизвестные величины: крутизну волн (отношение h/λ) и возраст (отношение скорости волны к скорости ветра) как функции расстояния и времени, т. е. для решения (16) необходимо еще одно уравнение, связывающее указанные величины;

— уравнение (16) наиболее часто решалось с целью определения элементов видимых волн; в связи с тем что реальная волновая поверхность содержит довольно широкое разнообразие элементов волн (см. главу 5), необходимо определить, к каким именно элементам следует относить величины, вычисленные по (16).

В качестве дополнительного уравнения использовались закон постоянства крутизны волн [91], теоретическая [6] или эмпирическая [80] зависимость крутизны волн от скорости ветра, закон сохранения момента количества движения [159]. В окончательной записи уравнение баланса энергии и вспомогательное уравнение существенно различаются у отдельных авторов, и решение этих уравнений приводит к различным функциональным зависимостям между элементами волн и факторами волнообразования.*

Недостаточная обоснованность некоторых гипотез, принятых в различных теоретических моделях, а также наличие количественных расхождений в полученных расчетных зависимостях обусловили достаточно широкое распространение эмпирических формул.

Первые эмпирические формулы для расчета волн были предложены еще в прошлом веке. Подавляющая их часть являлась однофакторными и связывала элементы волн со скоростью ветра или длиной его разгона. Даже в тех случаях, когда в основу такой формулы положены данные «точных» наблюдений, она правильно отражает истинную закономерность только при том условии, если воздействие других факторов становится по тем или иным причинам неэффективным: например, эмпирическая формула вида $h = h(U)$ выражает правильную функциональную зависимость, если имеются в виду максимальные при данной скорости высоты волн, развитие которых возможно при достаточно большой длине разгона ветра и большой продолжительности его действия. Другими словами, зависимость этого вида справедлива, если в основу ее положены наблюдения над установившимся волнением, охватывающим большие морские пространства. Формулы вида $h = h(X)$ могут быть действительны только для установившегося волнения при определенной скорости ветра. Формулы вида $h = h(X)$ и $c = c(U)$ представляют интерес, если они получены по данным наблюдений над установившимся волнением. Тогда они дают значения длины и скорости волн, достигших наибольшей высоты. Так как большинство ранних эмпирических формул основывается на случайном материале попутных судовых наблюдений, то вполне естественно, что при выводе этих формул указанные выше ограничительные условия не всегда строго учитывались. Эта причина является существенным источником погрешностей ранних эмпирических формул.

Позднее были получены эмпирические формулы, более полно учитывающие следующие закономерности развития волнения, установленные на основе анализа наблюдений. Наблюдения показали, что в стационарных условиях размеры ветровых волн на глубокой воде (глубина моря больше длины волн) зависят от скорости ветра, продолжительности действия и протяженности воздушного потока над водной поверхностью, которую принято называть «разгоном»

* Критический анализ решений уравнений вида (16) выполнен Ю. М. Крыловым в работе [72].

ветра. Если над каким-либо водоемом дует устойчивый ветер, то на всем пространстве подверженном его воздействию, возникнут волны, размеры которых будут постепенно увеличиваться во времени до тех пор, пока не достигнут значений, максимальных для данной скорости ветра и длины его разгона. Чем меньше длина разгона ветра в данной точке, тем быстрее прекратится здесь рост волн и тем меньше будут их максимальные размеры. На участке, где рост волн прекратился, т. е. где волнение стало установившимся, размеры волн при данной скорости ветра будут определяться только длиной разгона ветра или расстоянием от подветренного берега (если ветер дует от берега). Наоборот, там, где волнение еще не установилось, рост волн во времени будет одинаковым во всех точках и размеры волн при данной скорости ветра будут определяться только продолжительностью действия ветра. Граница между участками установившегося и не установившегося волнения перемещается с увеличением продолжительности ветра все дальше и дальше в сторону увеличения длины разгона ветра. Время, необходимое для того, чтобы волнение стало установившимся, называют обычно временем роста волн; оно зависит от скорости ветра и длины его разгона и приводится в большинстве формул и таблиц по расчету элементов волн. Если продолжительность ветра меньше времени роста волн, их размеры будут определяться скоростью ветра и продолжительностью его действия. Наоборот, если продолжительность ветра больше времени роста волн, их размеры определяются скоростью ветра и длиной его разгона. Наблюдениями установлено, что для каждой скорости ветра существуют критические значения длины разгона ветра («действующий» или «действенный» разгон) и его продолжительности, при которых высота волн достигает максимального значения. На основе приведенных выше закономерностей современные эмпирические формулы (для глубокой воды) имеют следующий вид:

$$\begin{pmatrix} h \\ \tau \\ \lambda \end{pmatrix} = f_1(U, X) \quad \text{при } t > t_p; \quad (\text{II.1})$$

$$\begin{pmatrix} h \\ \tau \\ \lambda \end{pmatrix} = f_2(U, t) \quad \text{при } t < t_p; \quad (\text{II.2})$$

$$t_p = f_3(U, X), \quad (\text{II.3})$$

где U — средняя скорость по разгону ветра; X — разгон ветра; t — средняя продолжительность действия ветра по разгону; t_p — время роста волн.

Формулы вида (II.1), (II.2) были предложены многими исследователями [72, 80], а их точность зависит от достоверности исходных данных, использованных при составлении формул.

Различия между формулами, полученными различными авторами, связаны не только с погрешностями измерений волн в открытом море, но в большей степени — с недостатками методов анализа наблюдений. Обычно исследователи стремятся использовать как можно больший материал наблюдений и не уделяют должного внимания изучению генезиса измеренных волн. Недостаточно полно учитывается характер изменений скорости и направления ветра во времени и по длине разгона и возможность появления в волновом поле зыби, распространяющейся из соседних районов океана или моря. Все это приводит к тому, что эмпирические зависимости часто представляют результат осреднения данных, относящихся к более или менее широкому диапазону условий волнообразования. От широты осредняемого диапазона условий и точности наблюдений зависят те конкретные результаты, которые получают разные исследователи.

Необходимо отметить, что анализ волнового поля, наблюдающегося в морях и океанах, связан с большими трудностями из-за сложности самого явления и отсутствия достаточно подробных сведений о ветре и его изменении во времени и пространстве. В связи с этим целесообразно изучить в первую очередь закономерности зарождения и развития волн под воздействием устойчивых ветров при отсутствии в волновом поле фённ зыби. Выявление этих наиболее общих закономерностей позволит перейти к изучению волнения, развивающегося в более сложных условиях. Случаи, когда волнение развивается под воздействием прямолинейного воздушного потока, устойчивого во времени и в пространстве, при отсутствии зыби, наблюдаются исключительно редко, и такие условия волнообразования можно назвать «идеальными». Если вместо осреднения (грубого) результатов наблюдений выделить из них данные, относящиеся к условиям волнообразования, близким к «идеальным», то анализ наблюдений значительно упростится и появится возможность определения достаточно точных зависимостей между волнением и параметрами ветра. Такой путь анализа данных был в свое время выбран И. Н. Давиданом и позволил получить зависимости размеров волн от основных факторов волнообразования. Полученные зависимости были представлены вначале в форме номограмм и расчетных таблиц [140, 141], а впоследствии были аппроксимированы следующими соотношениями, составленными с учетом требований теории размерностей:

$$\frac{g\bar{h}}{U^2} = 1,5 \cdot 10^{-3} \left(\frac{gX}{U^2} \right)^{0,43}; \quad (\text{II. 4})$$

$$\frac{g\bar{h}}{U^2} = 2,61 \cdot 10^{-4} \left(\frac{gt}{U} \right)^{0,57}; \quad (\text{II. 5})$$

$$\frac{gX}{U^2} = 1,7 \cdot 10^{-1} \left(\frac{gt}{U} \right)^{1,32}; \quad (II.6)$$

$$\frac{g\bar{h}_{\max}}{U^2} = 1,17 \cdot 10^{-1}; \quad (II.7)$$

$$\frac{gX_{h_{\max}}}{U^2} = 24 \cdot 10^3; \quad (II.8)$$

$$\frac{gt_{h_{\max}}}{U} = 46 \cdot 10^3; \quad (II.9)$$

$$\frac{g\tau^2}{\bar{h}} = 2,26 \cdot 10^2, \quad (II.10)$$

где $\bar{h}$, τ — средние высота и период волн в промежутке квазистационарности процесса; U — скорость ветра (в м/с); X — длина разгона ветра (в метрах); t — продолжительность ветра (в секундах); $\bar{h}_{\max}$ — максимальное значение средней высоты волн (в метрах), возможное при ветре заданной скорости; $X_{h_{\max}}$ и $t_{h_{\max}}$ — длина разгона и продолжительность, необходимые для развития волн максимально возможной средней высоты ($\bar{h}_{\max}$).

Соотношение (II.10) между средней высотой и средним периодом волн является приближенным и справедливо только для достаточно развитого волнения.

При затухании волн обычно отмечается уменьшение их высоты и увеличение среднего периода, причем закономерности этих изменений в значительной степени зависят от размеров волн перед началом их затухания. Еще менее определенным должно быть соотношение между значениями $\bar{h}$ и τ для смешанного волнения, так как в этом случае геометрия и динамика волновой поверхности зависят от наложения волновых систем, характеристики которых могут существенно различаться между собой.

Уравнение баланса энергии применялось вначале для регулярного волнения. Затем каждый из авторов произвольно или путем подбора некоторого статистического аналога отождествлял высоту регулярной волны с волной определенной вероятности для нерегулярного волнения.

Так, например, по Ю. М. Крылову [72] высота регулярной волны в (16) принимается равной средней высоте нерегулярных волн.

Переход к уравнениям, описывающим осредненное движение волн, введение безразмерных переменных вида (gt/U) и (gX/U^2) , учет в том или ином виде некоторых эмпирических коэффициентов во многом сблизил результаты решения энергетических уравнений с эмпирическими формулами. Поэтому неудивительно, что многие методы расчета волн (например, [108]) базируются именно на обобщении натурных данных в форме, удовлетворяющей энергетическому уравнению.

Развитие знаний о спектральной структуре волнового процесса: подтверждение соотношений между моментами спектральной плотности и видимыми волнами, получение аппроксимативных зависимостей спектральных характеристик от фактов волнообразования, интерпретации углового распределения волновой энергии, объяснение некоторых закономерностей затухания зыби дисперсией скорости распространения спектральных составляющих и угловым рассеиванием энергии, — обусловили появление методов расчета волн, базирующихся на спектральном представлении уравнения баланса волновой энергии.)

Глава 6

Спектральная теория развития ветрового волнения

Возникающее под действием ветра морское волнение является сложным колебательным процессом. Сложность этого процесса обусловлена главным образом турбулентной структурой и большой изменчивостью воздушного потока над морем. Вследствие турбулентности мгновенные значения направления и скорости ветра являются случайной функцией пространственных координат и времени. Ветровое волнение, развивающееся под воздействием случайных сил ветра, — вероятностный процесс.

Ветровое волнение как физический процесс подчиняется основным законам механики жидкости, обычно записываемым в виде (3)—(7).

В силу того что решения уравнений (3) — (7) чаще всего ищутся в виде спектра, а входящие в них функции задаются в спектральном представлении случайных процессов, такое направление исследований получило название спектральной теории морских волн. Вероятностный характер сил, определяющих волновое движение, не позволяет просто переформулировать в терминах случайных процессов многочисленные результаты, накопленные классической гидромеханикой в изучении волновых движений идеальной жидкости. Поэтому спектральная теория волн еще не получила широкого развития, а достигла лишь первых результатов, базирующихся во многих случаях на интегрирование линеаризованных уравнений движения или на других упрощающих предположениях. Однако даже такие решения позволили получить новые данные о структуре морского волнения.

6.1. Передача энергии ветра волнам

Основные положения спектральной теории зарождения и развития волн сформулированы Филлипсом [270] и Майлзом [256] путем решения уравнения (3) при линеаризованных граничных

условиях (5), (6) и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + g\zeta + \frac{\hat{T}}{\rho} \nabla^2 \zeta = \frac{p(x, t)}{\rho_w} \quad \text{при } z = \zeta, \quad (6.1.1)$$

где $\hat{T}$ — поверхностное натяжение, ρ_w — плотность воды. Теоретические исследования этих ученых имеют наиболее заверченный вид и позволяют получить числовые характеристики количества энергии, передаваемой ветром волнам. Представляя возвышение свободной поверхности $\zeta(x, t)$ и распределение флуктуаций давления $p(x, t)$ в виде интегралов Фурье—Стилтьеса

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) &= \int_k \bar{e}^{i k x} dA(k, t); \\ p(x, t) &= \int_k e^{i k x} dp(k, t) \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

и подставляя их в линейризованные уравнения (3), (5), (6), (6.1.1), Филлипс записал уравнение развития и распространения составляющих Фурье—Стилтьеса в виде

$$dA_{tt}(k, t) + \omega^2 dA(k, t) = -\frac{k}{\rho} dp(k, t), \quad (6.1.3)$$

где $\omega = \left(gk + \frac{\tilde{T}k^3}{\rho} \right)$ — частота свободных волн.

Решение уравнения (6.1.3), удовлетворяющее начальным данным $dA(k) = dA_t(k) = 0$ при $t = 0$, будет

$$dA(k, t) = \frac{ik}{2\omega} \int_0^t dp(k, \tau) \{ e^{i\omega(\tau-t)} - e^{-i\omega(\tau-t)} \} d\tau. \quad (6.1.4)$$

Филлипс предположил, что причиной зарождения и роста волн на начальной стадии их развития являются флуктуации нормального давления, которые обусловлены турбулентностью воздушного потока над морем. Распределение флуктуаций давления рассматривается как стационарная случайная функция места и времени. Воздушный поток представляет крайне нерегулярную последовательность вихрей разнообразных размеров. Поэтому справедливо считать, что спектр давления существует в широком диапазоне волновых чисел и частот, причем составляющие, соответствующие разным волновым числам, распространяются с различными скоростями. Составляющие поля давления, воздействуя на поверхность воды, возбуждают малые вынужденные колебания. Реакция водной поверхности на воздействие различных составляющих, Фурье—Стилтьеса поля давления не одинакова, поэтому одни волновые составляющие растут быстрее других. Если распределение давления содержит составляющие, волновые числа и частоты которых совпадают с возможными характеристиками свободных волн на поверхности жидкости, то наблюдается явление резонанса, причем постоянное присутствие этих составляющих распределения

давления возбуждает поверхностные волны, амплитуда которых непрерывно растет.

Условие резонанса для волновых составляющих, движущихся под углом α к направлению ветра, записывается в виде

$$U \cos \alpha = \left(\frac{g}{k} + \frac{\hat{T}k}{\rho} \right)^{1/2} = c(k), \quad (6.1.5)$$

т. е. составляющая конвективной скорости U в направлении распространения волн равна скорости распространения поверхностных волн $c(k)$. Реакция водной поверхности зависит от величины флуктуаций давления и от их временного масштаба $\theta'(k)$, определяемого Филлипсом как промежуток времени, в течение которого составляющие спектра давления и волн остаются когерентны при их совместном движении. Временной масштаб $\theta'(k)$ максимален, когда конвективная скорость U поля давления точно равна фазовой скорости c свободных поверхностных волн с тем же волновым числом k .

В начальный момент времени при $t < \theta'$ и $dp(k, t) = dp(k, 0) e^{i k U t}$ составляющие Фурье—Стилтьеса для волн имеют вид

$$dA(k, t) = \frac{i k d p(k, 0)}{2 \rho_{\omega} \omega} \left(t e^{i \omega t} - \frac{i}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (6.1.6)$$

В этом случае допускается, что направление и скорость волновых составляющих должны совпадать по фазе с наложенным распределением давления, и интенсивность развития волновых составляющих наибольшая.

При $t > \theta'$ между спектром давления $\Pi(k, t)$ и спектром волн $S_{\zeta}(k, t)$ существует зависимость вида

$$S_{\zeta}(k, t) = \frac{t}{2 \rho_m^2 c^2} \int_0^{\infty} \Pi(k, t) \cos \omega t dt. \quad (6.1.7)$$

В этом случае зависимость $\Pi(k, t)$ от времени уже нельзя пренебрегать (амплитуда и фаза каждой составляющей будут медленно меняться во времени), поэтому увеличение средней амплитуды волновой составляющей будет происходить медленнее, чем в первом случае. Филлипс вычислил, что минимальная скорость ветра, способная увеличивать резонансные волны, равна 21—23 см/с при условии, что в спектре флуктуаций давления будут иметь существенное значение составляющие с большими волновыми числами.*

Таким образом, если допустить, что причиной возникновения и роста волн являются флуктуации нормального давления, то зависимость между составляющими Фурье—Стилтьеса или между спектрами давления и волн получается линейной.

* Лонге-Хиггинс, ссылаясь на результаты наблюдений [247], считает, что при такой скорости ветра флуктуации давления воздуха, вызванные турбулентностью, настолько незначительны, что не могут привести к зарождению волн.

Это допущение правомерно в основном на начальных стадиях образования и развития волн. Поэтому теория Филлипса лишь частично объясняет наблюдаемый в природе рост волн. Одним из наиболее существенных допущений резонансной теории волнообразования является независимость спектра флуктуаций давления от подстилающей взволнованной поверхности моря.

В работе Майлза [256] учитывается взаимодействие ветра с подстилающей поверхностью, в результате которого изменяется давление вдоль профиля волны и происходит передача энергии от осредненного движения воздушного потока волнам. Теория Майлза наиболее близка к физическим концепциям развития волн, которые ранее высказывались Кельвином, Гельмгольцем, Джеффрисом. За исходное берется уравнение

$$\zeta_{tt} + kg\zeta = -\frac{k}{\rho_w} p_a, \quad (6.1.8)$$

аналогичное уравнению (6.1.3), где давление

$$p_a = (\alpha + i\beta) \rho_a U^2 k \zeta \quad (6.1.9)$$

находится в фазе с наклоном волны $k\zeta$. Коэффициент $(\alpha + i\beta)$, зависящий от c и k , определяется из граничных условий обтекающего волны потока воздуха.

Пусть $U(z)$ — средний профиль воздушного потока при отсутствии волнового движения подстилающей поверхности. Волны вызывают в этом потоке малые возмущения скорости и давления; турбулентные флуктуации при этом не учитываются. При этих допущениях движение потока воздуха может быть описано уравнением Опп—Зоммерфельда без учета вязкости

$$(U - c) \psi_{zz} - [k^2 (U - c) + U_{zz}] \psi = 0 \quad (6.1.10)$$

(ψ — функция тока), которое решается при следующих граничных условиях; граница $z = z_0 + \zeta$ остается линией тока; возмущение затухает на бесконечности и давление возмущенного потока у поверхности волн равно p_a из уравнения (6.1.9).

В результате решения уравнений (6.1.8) — (6.1.10) Майлз получил выражение для скорости передачи энергии от двумерного воздушного потока поверхностной волне заданной длины и скорости распространения

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{E} = \varepsilon k c \bar{E} = -\rho_a^2 \left(\frac{\pi U_c''(z_c)}{k U_c'(z_c)} \right) \bar{w}_c^2, \quad (6.1.11)$$

где

$$\varepsilon = \frac{\rho_a}{\rho_w} \beta \left(\frac{U_c(z_c)}{c} \right)^2; \quad (6.1.12)$$

ρ_a — плотность воздуха; ρ_w — плотность воды; U_c' , U_c'' — кривизна и наклон профиля ветра на высоте z_c , где $U = c$; $\bar{E}$ — сред-

няя энергия; $\overline{w_c^2}$ — среднее значение квадрата вертикальной скорости.

Согласно Майлзу, рост волн на начальных стадиях их развития происходит под влиянием скоростей ветра, соответствующих нижней части профиля $U(z)$. По мере развития возмущения охватывают все больший слой воздуха в приводном слое атмосферы и в общем случае, могут расти только те волны, скорость которых соответствует скорости ветра в той зоне профиля, где $U''(z)$ велико [239].

Для логарифмического профиля, когда

$$U(z) = U_0 + U_1 \log\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad (6.1.13)$$

$\left(U_1 = \frac{U_*}{\kappa}, U_* \text{ — динамическая скорость [59]; } \kappa \text{ — постоянная Кармана; } U_0 \text{ — нижняя граница логарифмического профиля}\right)$, Майлз нашел величины коэффициента β , входящего в формулу (6.1.12).

Дальнейшие исследования, проведенные Майлзом [257, 259] и Бенджаминном [168], были направлены на поиски более точного решения дифференциальных уравнений (это привело к некоторому уменьшению передачи энергии) и более строгого задания граничных условий (что не изменило существенно результата).

Рассмотренный выше механизм передачи энергии от ветра волнам объясняет наблюдаемый в природе быстрый (экспоненциальный) рост волн, но не объясняет причину зарождения волн и начальную стадию их развития. С другой стороны, резонансный механизм Филлипса сам по себе недостаточен для объяснения наблюдающегося в природе роста волн, в частности потому, что флуктуации давления, вызванные турбулентностью воздуха, значительно слабее, чем их оценивает Филлипс [270]. Однако эти флуктуации можно рассматривать как причину образования первоначальных волновых возмущений водной поверхности, энергия которых затем может расти по экспоненциальному закону благодаря неустойчивости воздушного потока, обтекающего волны.

В последующем Майлз [258] объединил свои выводы с выводами Филлипса и записал исходное уравнение в виде *

$$\frac{\rho_w}{k} \zeta_{tt} + (\rho_w g + \hat{T} k^2) \zeta = -p, \quad (6.1.14)$$

где $p = p_1 + p_2$. Величина p_1 не зависит от формы волновой поверхности и определяет влияние турбулентных флуктуаций, а

$$p_2 = \epsilon \rho_w c \zeta_{tt},$$

* Уравнение (6.1.14) для сопоставления с (6.1.3) может быть записано также в виде

$$dA_{tt}(k, t) + \omega^2 dA(k, t) = -\frac{k}{\rho} dp(k, t) - skcdA_t(k, t).$$

где ε интерпретируется как приращение средней энергии за единицу времени

$$\varepsilon = \frac{1}{kc\bar{E}} \left(\frac{\partial E}{\partial t} \right).$$

Решение уравнения (6.2.14) имеет вид

$$S_{\varepsilon}(k, t) \sim \frac{\hat{F}(t, m)}{2\rho_w c^2} \int_0^{\infty} \Pi(k, \tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (6.1.15)$$

причем

$$m = \varepsilon kc, \quad \hat{F}(t, m) = \frac{\exp(2mt) - 1}{2m}. \quad (6.1.16)$$

Анализ этого уравнения показывает, что при малых значениях mt (т. е. на начальных стадиях развития волн) передача энергии ветра волне объясняется резонансными явлениями и спектр растет пропорционально первой степени t . На более поздней стадии развития, когда $mt > 1$, передача энергии обусловливается неустойчивостью воздушного потока над волновой поверхностью моря и рост волн происходит по экспоненциальному закону.

Филлипс [151] считает, что турбулентные флуктуации давления играют существенную роль в передаче энергии ветра волне не только на начальной стадии развития волнения, но и тогда, когда фазовая скорость компонент становится соизмеримой со скоростью ветра. Для разделения стадий развития волн под влиянием различных физических механизмов Филлипс и Катц ввели понятие переходной частоты, выше которой энергия волн обусловлена главным образом неустойчивостью воздушного потока над водной поверхностью. Спектральные составляющие волнового поля, частоты которых ниже переходной, обусловлены воздействием флуктуаций давления.

Переходная частота в довольно большом числе случаев будет меньше частоты максимума спектра волн, при больших разгонах и продолжительности действия ветра эта частота может превышать частоту максимума.

Основные соотношения рассмотренной выше теории Филлипса и Майлза часто используются в спектральных методах расчета волн. Однако, как будет показано ниже (в главе 7), эти теоретические схемы приводят к заниженным оценкам количества энергии, передаваемой ветром волнам. Для согласования с натурными данными некоторые исследователи необоснованно завышают эмпирические коэффициенты в зависимостях Филлипса и Майлза.

Рассмотренные теории не позволяют объяснить передачу энергии к низкочастотным составляющим. Лонге-Хиггинс [243] считает, что длинные волны получают энергию от коротких, когда короткие обрушиваются на переднем склоне (близ гребня) длинных, а короткие волны непрерывно получают энергию от воздуш-

ного потока. Этот процесс передачи энергии получил название «мазерного», или «модуляционного» механизма. Количественные характеристики этого процесса пока не изучены.

Хассельман [213] считает, что основной причиной роста низкочастотных составляющих является энергообмен в спектре волн, обусловленный слабыми нелинейными взаимодействиями между спектральными составляющими. Подробно этот вопрос рассмотрен в разделе 6.2. Здесь же отметим, что, по расчетам авторов книги (см. главу 7), нелинейное перераспределение энергии хотя и существенно, но недостаточно для объяснения роста волн на низких частотах. По-видимому, необходим дальнейший учет дополнительных факторов и в первую очередь влияния тангенциального трения ветра о водную поверхность и влияния турбулентности воздушного потока на распределение давлений по профилю волны. Теоретические разработки этих вопросов, выполненные различными авторами, пока еще не являются завершенными в той мере, чтобы использовать их в расчетах волн для прикладных целей, однако они представляют определенный научный интерес. Кратко рассмотрим основные положения этих теорий.

Стюарт и Лонге-Хиггинс исследовали влияние на развитие волн тангенциальных напряжений ветра и показали, что эти напряжения вызывают из-за конвергенции потоков воздуха неодинаковые вертикальные скорости, способствующие росту волн. Расчеты [165] показали, что за счет этого фактора волны растут линейно, но вклад его незначителен, и он может рассматриваться лишь как дополнительный.

Майлзом [250] высказано предположение, что на развитие волн должна оказывать существенное влияние турбулентность воздушного потока. Он проиллюстрировал это влияние на так называемой «квазиламинарной» модели, согласно которой турбулентность не испытывает влияния волн и турбулентные напряжения Рейнольдса зависят только от высоты над средним волновым уровнем.

Теоретически [151] полное напряжение трения необходимо рассматривать как сумму турбулентного τ_1 , индуцированного волнами τ_2 и вязкого τ_μ напряжений

$$\tau_0 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_\mu. \quad (6.1.17)$$

Величина τ_1 составляет основную часть τ_0 и определяется сопротивлением формы мелких гравитационных волн с фазовыми скоростями $c \ll U$, а также касательным трением с поверхностью [155]. Значения τ_2 зависят от характеристик волновой поверхности и экспоненциально убывают с удалением от нее [119]. Величина τ_μ , за исключением тонкого слоя у поверхности, пренебрежимо мала [59, 119, 151]. В настоящее время нет единого мнения о количественных соотношениях между τ_1 , τ_2 , τ_μ .

Мантон [250] выделил критический слой толщиной d , зависящий от шероховатости волновой поверхности, и показал путем

решения невязкого уравнения Орр—Зоммерфельда, что турбулентность воздушного потока сильно влияет на волны, когда z_c (высота, где скорость ветра U_{z_c} равна скорости волн c) меньше d . В том случае, когда $z_c > d$, влиянием турбулентности на рост волн можно пренебречь. Многие исследователи (например, [44, 119]) считают, что основной вклад в развитие волн дают индуцированные волнами турбулентные напряжения Рейнольдса.

Дэвис [187, 188], в отличие от «квазиламинарной модели», Майлза [260], построил модель, в которой турбулентные напряжения Рейнольдса меняются по высоте и содержат индуцированную волнами составляющую, т. е. зависят от высоты над переменным волновым профилем. Путем численных расчетов им было показано, что вязкие эффекты у взволнованной поверхности более существенны, чем это предполагается в теории Майлза; тангенциальное напряжение в фазе с волновыми колебаниями вызывает рост волн в той же мере, что и нормальное напряжение в фазе с волновыми уклонами. Учет вязкости, тангенциальных напряжений Рейнольдса (особенно при больших скоростях) ветра и нормальных индуцированных волнами напряжений, по оценкам Дэвиса [208], может дать величину потока энергии, объясняющую наблюдаемый в природе рост волн.

Ли [237] исследовал нелинейные эффекты роста волн под влиянием положительных* индуцированных волнами турбулентных напряжений при различных числах Рейнольдса Re и показал на основе решения нелинейного неоднородного уравнения Орр—Зоммерфельда с учетом вязкости, что средний профиль ветра модифицируется за счет этих напряжений, увеличение Re влечет уменьшение критической высоты. Таким образом, нелинейные эффекты взаимодействия ветра и волн могут явиться существенным фактором в передаче энергии ветра волнам.**

К этому выводу пришли также В. В. Ефимов и Г. А. Гришин [44] в результате теоретического изучения процессов образования и развития волн на основе численного интегрирования нелинейных уравнений (для функции тока) турбулентных движений с учетом вязкости.

Перечисленные теоретические исследования позволили уточнить влияние различных механизмов передачи энергии ветра волнам, однако не привели пока еще к таким соотношениям, которые в дополнение к соотношениям объединенной теории Филлипса и Майлза могли быть использованы в методах расчета волн.

* При этом условии волны получают энергию от ветра; число Рейнольдса тем больше, чем меньше вязкость среды и больше скорость движения.

** Выражение для изменения спектральной плотности волн за счет их взаимодействия с турбулентным воздушным потоком получено Хассельманом [212] и приводится в разделе 6.4 [см. (6.4.18)].

6.2. Нелинейные взаимодействия

Нелинейные решения системы уравнений (3), (5), (6), (7) позволяют изучить перераспределение энергии в спектре волн. Филлипсом [151] рассмотрен случай дискретного спектра, когда

$$\xi(x, t) = \sum_n A(k, t) e^{ikx}. \quad (6.2.1)$$

После соответствующих преобразований уравнений (3) — (7) им получено следующее основное уравнение для компонент Фурье—Стилтьеса:

$$\begin{aligned} k^{-1} A_{tt}(k, t) + g A(k, t) = & - \sum_{k_1+k_2=k} \{ H_1(k_1, k_2) A_{tt}(k_1) A(k_2) + \\ & + H_2(k_1, k_2) A_t(k_2) A_t(k_1) \} + \\ & + \sum_{k_1+k_2+k_3=k} \{ H_3(k_1, k_2, k_3) A_{tt}(k_1) A(k_2) A(k_3) + \\ & + H_4(k_1, k_2, k_3) A_t(k_1) A_t(k_2) A_t(k_3) \} + O[k^3 A_t^4(k)], \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

где $H_i(k_1, k_2, k_3)$ — сложные алгебраические функции.

В уравнении (6.2.2) первый член в правой части, включающий одно суммирование, описывает взаимодействие второго порядка, а второй — с двойным суммированием — третьего порядка. При решении этого уравнения методом возмущений Филлипс предполагает, что непрерывный обмен энергией между различными волновыми компонентами (волновыми числами) возможен лишь при выполнении условия резонанса. В этом случае нелинейные возмущения можно интерпретировать как причину* возникновения вынужденных колебаний составляющих высших порядков. Если частота возмущения некоторого волнового числа равна частоте свободной волны с тем же волновым числом, то наблюдается резонанс и линейный рост амплитуд вынужденных составляющих высших порядков.

Во втором приближении условие резонанса для волновых чисел k_0 и k_1 не выполняется**

$$g|k_0 \pm k_1| \neq (\omega_0 \pm \omega_1)^2,$$

и поэтому при взаимодействиях второго порядка невозможна непрерывная передача энергии. Амплитуды вторичной волны всегда будут малы, порядка $(a_0 a_1)^{1/2} (a_0 k_0 a_1 k_1)^{1/2}$ (a_0 и a_1 — амплитуды первичных волновых составляющих).

В третьем приближении условие резонанса выполняется для определенных волновых чисел $\pm(2k_0 - k_1)$ или $\pm(k_0 - 2k_1)$ и появляется возможность непрерывной передачи энергии к этим волновым составляющим. Время, в течение которого амплитуда со-

* Аналогично движущемуся возмущению поверхностного давления.

** За исключением случая, когда $k_0 = k_1$.

ставляющих третьего порядка становится сравнимой с амплитудой составляющих первого порядка, определяется соотношением

$$t = (k_0 a_0)^{-1} (k_1 a_1)^{-1} (2\omega_0 - \omega_1)^{-1}.$$

В результате взаимодействия в течение нескольких часов может существенно измениться спектр волнения. Из исследований Филлипса [151] следует, что существует такая совокупность трех первичных систем волн с волновыми числами k_1, k_2, k_3 , взаимодействие которых может создавать непрерывную передачу энергии к четвертой системе волн с волновым числом k_4 , амплитуда которой линейно увеличивается со временем. При таком типе резонансного взаимодействия волновые числа связаны соотношением, $k_1 \pm k_2 \pm k_3 \pm k_4 = 0$, а частоты $\omega_1 \pm \omega_2 \pm \omega_3 \pm \omega_4 = 0$. Лонге-Хиггинс [240], продолжая исследования в этом направлении, получил для случая, когда два из волновых чисел k_1, k_2, k_3 равны между собой и волновое число третичной волны k_4 не совпадает с волновым числом первичной волны, расчетную формулу для амплитуды составляющей 3-го порядка

$$\xi_{2,1} = \frac{\hat{F}t}{2g} \sin(2\psi_1 - \psi_2), \quad (6.2.3)$$

где

$$\psi_j = k_j x - \omega_j t, \quad \xi = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_1},$$

$$\hat{F} = (a_1 k_1)^2 (a_2 k_2)^2 g^2 \omega_1^{-1} \left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \xi^2\right)^2 (1 - 4\xi^2)}{(1 + \xi^2)^2} \left[1 + \frac{4\xi}{\xi - (6 + \xi^2)^{1/2}} \right] \right\}.$$

Исследование этого уравнения показывает, что скорость роста $\xi_{2,1}$ со временем максимальна, когда угол между k_1 и k_2 равен 17° .* По мнению Лонге-Хиггинса, проявление третичного взаимодействия можно проследить в опытовом бассейне и обнаружить третичную волну с помощью гармонического анализа. Проведенные эксперименты [106, 254] подтвердили не только существование третичных волн, но и справедливость полученной расчетной зависимости.

Кроме увеличения амплитуды, нелинейные взаимодействия проявляются также в увеличении фазовой скорости первичных составляющих. Так, например, Лонге-Хиггинс и Филлипс [248] показали, что в случае, когда волновое число третичной волны k_4 совпадает с одним из волновых чисел первичной волны k_1 , наблюдается изменение фазовой скорости первичной составляющей с волновым числом k_1 (резонансные условия требуют при этом, чтобы

* Если считать, что две системы волн взаимодействуют неограниченное время, но на ограниченном расстоянии, то скорость роста максимальна при угле между k_1 и k_2 , равном 24° .

и два других первичных волновых числа были равны, $k_2 = k_3$). Изменение скорости одной из волн, полученное от взаимодействия со второй волной, будет

$$\Delta c_2 = \frac{F_1}{2a_2\omega_2^2}, \quad (6.2.4)$$

где F_1 — сложная функция, пропорциональная a_2 . (Следовательно, Δc_2 не зависит от амплитуды a_2). В случае, когда направления k_1 и k_2 совпадают, выражение для F_1 упрощается:

$$F_1 = \begin{cases} 2a_1^2 a_2 k_1 \omega_1 \omega_2^2, & \text{если } k_1 \leq k_2, \\ a_1^2 a_2 k_2 \omega_1 \omega_2^2, & \text{если } k_1 > k_2, \end{cases}$$

а тогда для этого случая (6.2.4) принимает вид

$$\Delta c_2 = \begin{cases} a_1^2 k_1 \omega_2, & \text{если } k_1 \leq k_2, \\ a_1^2 k_2 \omega_1, & \text{если } k_1 > k_2. \end{cases} \quad (6.2.5)$$

Если направления k_1 и k_2 противоположны, то наблюдается эффект уменьшения фазовой скорости на ту же величину.

Путем интегрирования уравнений (3) — (7) Бэнней [106, 169] получил уравнение, показывающее зависимость явлений, обусловленных нелинейным взаимодействием, от времени, и на примере некоторых частных случаев (углов между первичными волновыми числами) рассчитал характеристики волн.

Исследование нелинейного перераспределения энергии для случая непрерывного спектра выполнено Хассельманом [211].* Исходными уравнениями в его исследовании является система уравнений (3) — (7) при начальных условиях

$$\begin{aligned} \zeta(x, 0) &= \zeta_0(x) \text{ при } t = 0. \\ \frac{\partial \Phi(x, \zeta_0, 0)}{\partial \eta} &= \frac{\partial \Phi_0(x)}{\partial \eta} \text{ при } t = 0 \text{ и } z = \zeta, \end{aligned}$$

где ζ_0 и $\partial \Phi / \partial \eta$ — возмущение свободной поверхности и значение нормальной составляющей скорости в начальный момент. Полагая $\partial \Phi_0 / \partial \eta$ и ζ_0 случайными однородными функциями и представляя их в виде интегралов Фурье—Стилтьеса, Хассельман сводит задачу к решению двух дифференциальных уравнений для потенциала и возмущения. Решение ищется в виде ряда по малому параметру. В начальный момент поверхность моря задана как однородное стационарное гауссово поле. Энергия волн представляется в виде ряда, члены которого зависят от коэффициентов разложения функций Φ и ζ в ряд Фурье. В результате анализа первых трех четных членов разложения энергии (нечетные равны нулю вследствие предпо-

* Нелинейные взаимодействия с учетом эффектов капиллярных волн изучены в работах [253, 311].

ложения о нормальном распределении возмущений) Хассельман получил следующую зависимость:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(k)}{\partial t} = & \iiint_{-\infty}^{\infty} S(k') S(k'') S(k' + k'' - k) F_1(k', k'', k' + k'' - k) \times \\ & \times dk'_x dk'_y dk''_x dk''_y - S(k) \iiint_{-\infty}^{\infty} S(k') S(k'') F_2(k, k', k'') \times \\ & \times dk'_x dk'_y dk''_x dk''_y, \end{aligned} \quad (6.2.6)$$

где F_1 и F_2 — сложные обменные функции.

Это выражение можно интерпретировать [212] как взаимодействие, при котором происходит (в случае выполнения некоторых резонансных условий) передача энергии от трех «активных» волновых компонент к четвертой «пассивной» компоненте. Первый член в правой части выражения (6.2.6) характеризует увеличение энергии составляющих вследствие всех взаимодействий, в которых компонента k участвует как пассивная. Второй член выражает потерю энергии в результате всех взаимодействий, в которых k является одной из трех «активных» составляющих. Приток энергии к данной компоненте не зависит от плотности энергии в спектре, в то время как потеря энергии пропорциональна ей. В дальнейшем Хассельман [211] на основании законов сохранения энергии и момента количества движений показал, что коэффициенты взаимодействия между активными и пассивными составляющими спектра равны друг другу. Из этого следует, что изменение энергии составляющих пропорционально частотам спектральных составляющих, а скорость изменения момента количества движения — волновым числам. Модельные расчеты, выполненные по формуле (6.2.6) для случая, когда спектральная плотность $S(k, \theta)$ задана спектром Неймана (см. табл. 3.1.4), позволили установить [211, 291], что нелинейный обмен приводит к заострению пика спектральной плотности, так как спектральные составляющие в области максимума спектральной плотности получают энергии больше, чем отдают. Передача энергии происходит интенсивнее от составляющих, расположенных правее области максимума спектра, к составляющим с большими волновыми числами. Результаты расчета дают возможность также установить, что нелинейные взаимодействия усиливаются при сужении направленного спектра. Малый приток приходится на волновые составляющие под большими углами к направлению ветра, например на составляющие с направлением от $+\pi/2$ до $-\pi/2$; этот поток энергии составляет всего 0,1% потока в направлении ветра.

Таким образом, выражение (6.2.6) характеризует в наиболее общем виде * нелинейный обмен энергией в спектре гравитацион-

* Нелинейные эффекты более высокого порядка обсуждаются также в разделе 6.4.

ных волн. Этот обмен необходимо учитывать в спектральных моделях развития и распространения волн и при разработке методов расчета спектральных характеристик. (Дальнейшее обсуждение этих вопросов в главах 7, 8.) Лонге-Хиггинсом [246] показано, что при определенных условиях четырехкратные интегралы в (6.2.6) могут быть приведены к однократным. Численные расчеты, выполненные Фоксом, позволили изучить характер нелинейных взаимодействий при различных видах спектра волн [204].

6.3. Диссипация энергии

Диссипация волновой энергии является одним из трех (наряду с передачей энергии от ветра к волнам и нелинейным обменом энергией между волновыми спектральными составляющими) важнейших факторов, определяющих развитие и распространение волн. Обычно под диссипацией энергии понимают ее переход в другие формы, например в тепловую, или при изменении упорядоченного движения в турбулентное.

Применительно к волновому движению к диссипативным процессам необходимо отнести:

- влияние среды, препятствующее движению за счет молекулярной вязкости;
- воздействие на волны турбулентного движения частиц жидкости через трение, обусловленное наличием турбулентной вязкости;
- обрушение волн при крутизне больше предельной;
- взаимодействие коротких волн с более длинными, а также волн и течений и др.

Рассмотрим отдельно каждый из перечисленных диссипативных процессов, отметив при этом, что их теоретическая и экспериментальная изученность неодинакова и недостаточна.

6.3.1. Молекулярное трение

Пренебрежение вязкостью во многих случаях упрощает математическое решение задачи, но часто недопустимо с точки зрения физической трактовки явлений. При любом движении вязкость или, точнее, силы внутреннего трения приводят к рассеянию части механической энергии жидкости (превращению в тепло).

Для регулярных монохроматических волн с амплитудой a и волновым числом k диссипация энергии

$$W_{\mu} = 2\mu g a^2 k^2 = 2\pi^2 g \mu (\bar{h}/\bar{\lambda})^2 \quad (6.3.1)$$

прямо пропорциональна квадрату высоты волны и обратно пропорциональна квадрату ее длины [63]. Если потери энергии на внутреннее трение не компенсируются, то волны будут затухать,

так как

$$\frac{DE}{Dt} = -2\mu g a^2 k^2 \quad (6.3.2)$$

и

$$a = a_0 \exp \left(-2 \frac{\mu}{\rho_w} k^2 t \right). \quad (6.3.3)$$

Затухание волн происходит тем быстрее, чем больше вязкость μ и меньше длина волны. Поскольку коэффициент μ молекулярной вязкости воды равен $1,006 \cdot 10^{-2}$ г/(см·с) при $t = 20^\circ \text{C}$ или $1,729 \cdot 10^{-2}$ г/(см·с) при $t = 0^\circ \text{C}$, то влияние молекулярного трения на волны должно быть ничтожно малым [48].

6.3.2. Турбулентное трение

Волновое движение воды сопровождается обычно турбулентным движением ее частиц. При переходе от ламинарного движения к турбулентному возникают турбулентные напряжения трения τ . Диссипацию волновой энергии при турбулентном движении обычно рассчитывают по формуле (6.3.1), подставляя в нее вместо коэффициента молекулярной вязкости μ коэффициент турбулентной вязкости μ_t [63]. Необходимо отметить, что коэффициент μ характеризует физические свойства жидкости, а μ_t — статистические свойства пульсационного движения; μ_t может изменяться в пространстве и во времени.

Для расчета μ_t необходимо знать величины турбулентного напряжения $\tau = \rho_w |u'w'|$, градиент средней скорости $\partial \bar{u} / \partial z$ и горизонтальное изменение вертикальной скорости $\partial \bar{w} / \partial x$, так как [63]

$$\mu_t = \frac{\rho_w |u'w'|}{\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{w}}{\partial x}}. \quad (6.3.4)$$

Турбулентная вязкость при волнении зависит от статистических характеристик волнения и скорости ветра. Для расчета величин μ_t предложено большое количество формул, приводящих к существенно различающимся между собой оценкам.*

В настоящее время трудно отдать предпочтение какой-либо из этих формул, однако следует отметить, что μ_t на два порядка превышает μ . Например, по данным Г. Е. Кононковой [63], при скорости ветра 4 м/с $\mu_t = 6$ г/(см·с), а при $U = 20$ м/с $\mu_t = 752$ г/(см·с).

Хассельман [210] предложил учитывать диссипацию волновой энергии вследствие влияния турбулентной вязкости в виде

$$\frac{D}{Dt} S_\zeta(k, \theta) = -4\mu_t k^2 S_\zeta(k, \theta). \quad (6.3.5)$$

* Подробный обзор этих исследований дан в работе [63].

Как уже отмечено в разделе 6.1, волновое движение оказывает влияние на структуру воздушного потока, в частности, тем, что общее тангенциальное напряжение трения τ_0 содержит в качестве составляющей индуцированное волнами напряжение Рейнольдса τ_w . С точки зрения Филлипса [151], при взаимодействии волн со встречным ветром «напряжение Рейнольдса индуцированных движений воздуха извлекает из волн импульсы и энергию, причем величина теряемой волнами энергии всегда пропорциональна самой энергии». Затухание энергии волн происходит по экспоненциальному закону

$$E(t) = E_0 \exp \{-2\gamma t\}, \quad (6.3.6)$$

где γ меняется от $1 \cdot 10^{-4}$ до $3 \cdot 10^{-4}$ при c/u_* от 10 до 50. Если ветер и волны образуют угол α , то коэффициент затухания γ будет в $\cos \alpha$ раз меньше.

6.3.3. Обрушение волн

Одним из основных факторов, определяющих диссипацию волновой энергии, является образование барашков и обрушение гребней, т. е. сброс энергии в результате сильных нелинейных взаимодействий волн. Этот процесс трудно описать с помощью классических методов, и поэтому наиболее часто он учитывается в расчетах путем задания аппроксимативного выражения для равновесной области спектра в виде (3.1.36). Значения этой функции являются предельными значениями спектральной плотности волн (на глубокой воде) на частотах $\omega > \omega_p$, где ω_p задано выражением (3.1.32).

Теоретическое обоснование «белых барашков» дано Хассельманом на основе решения уравнения [214]

$$\frac{\partial}{\partial t} S(k, \theta) = -\frac{2\omega}{g\rho_w} \text{Im}(\hat{p}_k a_k^-), \quad (6.3.7)$$

где $\hat{p}_k$ — компонента поля атмосферного давления (которая может зависеть, однако, от взаимодействия с волнами, течениями и турбулентностью); a_k^- — волновая компонента, связанная с компонентами Фурье—Стилтьеса соотношением

$$a_k^- = \frac{1}{2} \left(\zeta_k - \frac{i}{\omega} \frac{\partial \zeta_k}{\partial t} \right). \quad (6.3.8)$$

Исследование [214] показало, что (6.3.7) можно привести к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} S_\zeta(k, \theta) = -\kappa \omega^2 S(k, \theta). \quad (6.3.9)$$

где коэффициент κ зависит от среднего числа барашков на единицу поверхности и времени и их изменения во времени и пространстве. Количественная оценка κ получена Хассельманом [214], исходя из соотношений между приходом энергии от ветра к волнам и ее

диссипацией (см. раздел 7.1), а также с учетом экспериментальных данных [213] в виде

$$\kappa = \omega_{\max}^{-1} \left[2,2 \cdot 10^{-4} \left(1 - 0,3 \frac{2}{\omega_{\max} U} \right) + 2\hat{\alpha}^2 \hat{\lambda} \right], \quad (6.3.10)$$

где $\hat{\alpha}$ — константа в формуле (3.1.26), $\hat{\lambda}$ зависит от принятой аппроксимации частотного спектра и равна 0,16 для спектра (3.1.22) и 0,12 для спектра (3.1.23). К диссипативным процессам необходимо также отнести потери энергии коротких волн при их обрушении на гребнях длинных [243], потери энергии волн при их взаимодействии с течениями [151] и др.

6.4. Уравнение баланса волновой энергии в спектральной форме

В трех предыдущих разделах были рассмотрены отдельные факторы, определяющие зарождение, развитие и распространение волн. Для того чтобы оценить совместное влияние этих факторов, обычно используют уравнение баланса энергии. В дальнейшем будет использоваться уравнение баланса волновой энергии в спектральной форме [212]

$$\frac{DS}{Dt} \equiv \frac{\partial S}{\partial t} + v_x \frac{\partial S}{\partial x} + v_y \frac{\partial S}{\partial y} + k'_x \frac{\partial S}{\partial k_x} + k'_y \frac{\partial S}{\partial k_y} = G, \quad (6.4.1)$$

где $S = S(x, y, t, \omega, \theta)$ — пространственно-временная спектральная плотность волнового процесса; v_x, v_y — проекция вектора групповой скорости; k_x, k_y, k'_x, k'_y — проекции вектора волнового числа и их производные по t .

Функция $G = G(x, y, t, \omega, \theta)$ характеризует баланс энергии каждой спектральной составляющей $S_\xi(\omega, \theta)$, т. е. соотношение в каждой точке пространства и каждый момент времени между приходом энергии к $S_\xi(\omega, \theta)$ от ветра, ее диссипацией и обменом энергией между различными спектральными составляющими. Для того чтобы записать вид функции G , необходимо учесть взаимодействие полей различных физических характеристик приводного слоя атмосферы, верхнего слоя моря и на их границе — волновой поверхности. В наиболее общем виде функция G записана Хассельманом на основе теории слабых взаимодействий.

Рассматривая волновое поле как некоторую, находящуюся под влиянием внешних атмосферных полей (с индексом μ) систему волновых полей, упорядоченных индексом ν , Хассельман представляет изменение волнового поля как результат взаимодействия между компонентами волновых полей и между компонентами волновых и внешних полей. Исследуется случай, когда взаимодействующие

поля — стационарные, однородные * гауссовы функции горизонтальных координат и времени, исчерпывающей характеристикой которых является энергетический спектр $S(k)$.

Все взаимодействия предполагаются слабыми, т. е. такими, что

$$\frac{1}{k} \frac{\partial S}{\partial x_i} \ll 1, \quad \frac{1}{\sigma} \frac{\partial S}{\partial t} \ll 1, \quad \sigma = (gk \operatorname{th} kH)^{1/2}.$$

В качестве исходных уравнений Хассельман использует уравнение Лагранжа в обобщенных координатах,** причем за обобщенную координату q_k берутся амплитуды разложения волнового поля по собственным функциям вида $q_k \exp \{i(kx \pm \omega_k^v t)\}$. Функция Лагранжа (лагранжиан) записывается в виде суммы

$$\mathcal{L}(q_k^v, \dot{q}_k^v) = \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}',$$

где $\mathcal{L}_2 = \sum_{k,v} \frac{1}{2} [\dot{q}_k^v \dot{q}_{-k}^v - (\omega_k^v)^2 q_k^v q_{-k}^v]$ — лагранжиан невозмущенно-

го волнового поля; $\mathcal{L}'$ — лагранжиан взаимодействия; $\dot{q}_k^v = \frac{\partial q_k^v}{\partial t}$.

Вводя обобщенные импульсы $p_k^v = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k^v}$ и волновые переменные

$$a_k^v = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_k^v - i\omega_k^v q_k^v), \quad a_{-k}^{-v} = \frac{1}{\sqrt{2}} (p_{-k}^v + i\omega_k^v q_k^v),$$

уравнение движения можно записать в виде

$$\dot{a}_k^v = i\omega_k^v \frac{\partial H}{\partial a_{-k}^{-v}}, \quad (6.4.2)$$

* Эти свойства полей должны выполняться лишь на ограниченных промежутках времени и пространства, существенно превышающих средний период и среднюю длину волн соответственно. Фактически в соотношения (6.4.3), (6.4.10) — (6.4.12) входят функции, меняющиеся в пространстве и во времени.

** В аналитической механике [19] переменные t (время), q_k (независимые обобщенные координаты), $\dot{q}_k$ (обобщенные скорости) называются переменными Лагранжа. Система значений этих переменных характеризует момент времени и соответствующее состояние системы, т. е. положение системы и скорости ее точек. Функция $\mathcal{L} = \mathcal{L}(t, q_k, \dot{q}_k)$ — разность между кинетической и потенциальной энергией системы — называется функцией Лагранжа (лагранжианом), или кинетическим потенциалом. Гамильтон предложил в качестве основных переменных рассматривать не $t, q_k, \dot{q}_k$, а t, q_k, p_k , где p_k — обобщенные импульсы. Переменные Гамильтона могут быть выражены через переменные Лагранжа и наоборот. Функция $H = H(t, q_k, p_k)$, определяемая равенством вида (6.4.3), позволяет записать уравнения движения в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial q_k}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{\partial p_k}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}, \quad k = 1, \dots, n.$$

где

$$H(p_k^y, q_k^y) = \sum_{k, y} p_k^y q_k^y - \mathcal{L}$$

— функция Гамильтона (гамильтониан), которая по аналогии с (6.4.1) может быть представлена как сумма

$$H = H_2 + H' \quad (6.4.3)$$

гамильтониана невозмущенного волнового поля

$$H_2 = \sum_{k, y} \frac{1}{2} a_k^y a_k^{-y}$$

и H' — гамильтониана взаимодействия.

В соответствии с указанными выше предположениями, принимается, что $H' \ll H_2$ и что гамильтониан взаимодействия допускает разложение в ряд Тейлора следующего вида;

$$H' = H_3 + H_4 + \dots, \quad (6.4.4)$$

где

$$H_n = \sum_{k_j, y_j} D_{k_1, \dots, k_n}^{y_1, \dots, y_n} a_{k_1}^{y_1} \dots a_{k_n}^{y_n}. \quad (6.4.5)$$

Тогда уравнение (6.4.2) с учетом (6.4.3) — (6.4.5) приводится к виду

$$\begin{aligned} a_k^y + i\omega_k^y a_k^y = & -3i\omega_k^y \sum D_{-k, k_1, k_2}^{-y, y_1, y_2} a_{k_1}^{y_1} a_{k_2}^{y_2} - \\ & -i(p+1)\omega_k^y \sum D_{-k, k_1, \dots, k_p}^{-y, y_1, \dots, y_p} a_{k_1}^{y_1} \dots a_{k_p}^{y_p} - \dots \end{aligned} \quad (6.4.6)$$

В уравнении (6.4.6) учитывается взаимодействие только между волновыми полями. Для учета взаимодействия волновых полей с внешними полями предполагается, что внешние поля могут быть выражены через переменные b_k^μ вида

$$b_k^\mu = \alpha_k^y \exp \{-i\omega_y^k t\} \quad (6.4.7)$$

по аналогии с линейными решениями

$$\alpha_k^y = \alpha_k^y \exp \{-i\omega_y^k t\} \quad (6.4.8)$$

уравнения (6.4.2) при $H = H_2$. Однако в случае волновых полей частота ω_k^y однозначно определяется индексом y_n и поэтому $\alpha_k^y = \text{const}$; частоты внешних полей ω_k^μ могут изменяться при фиксированном k , и для определения частоты необходима еще одна переменная λ . Поэтому $\beta_k^\mu = \beta_k^\mu(\lambda)$.

Полагая, что воздействие внешних полей записано в форме, аналогичной выражению (6.4.5), но с коэффициентами

$$E_{-k, k_1, \dots, k_q, k_{q+1}, \dots, k_p}^{-y, y_1, \dots, y_q, \mu_q, \dots, \mu_p},$$

можно представить уравнение (6.4.6) в виде

$$\begin{aligned} \dot{a}_k^v + i\omega_k^v a_k^v = & -3i\omega_k^v \sum D_{-k, k_1, k_2}^{-v, v_1, v_2} a_{k_1}^{v_1} a_{k_2}^{v_2} - \\ & -i(p+1)\omega_k^v \sum D_{-k, k_1, \dots, k_p}^{-v, v_1, \dots, v_p} a_{k_1}^{v_1} \dots a_{k_p}^{v_p} - \\ & -2i\omega_k^v \left(\sum_v E_{-k, k_1}^{-v, v_1} a_{k_1}^{v_1} + \sum_\mu E_{-k, k}^{-v, \mu} b_k^\mu \right) - i(p+1)\omega_k^v \times \\ & \times \sum E_{-k, k_1, \dots, k_q, k_{q+1}, \dots, k_p}^{-v, v_1, \dots, v_q, \mu_{q+1}, \dots, \mu_p} a_{k_1}^{v_1} \dots a_{k_q}^{v_q} b_{k_{q+1}}^{\mu_{q+1}} \dots b_{k_p}^{\mu_p}. \end{aligned} \quad (6.4.9)$$

В правую часть уравнения (6.4.9) включены члены, описывающие взаимодействие между компонентами волновых полей, взаимодействия между компонентами внешних полей, а также члены, описывающие воздействие внешних полей на компоненты волновых полей. Воздействие волновых компонент на внешнее поле не рассматривается, хотя не исключается случай, когда это воздействие учитывается коэффициентами E_k^v .

Уравнение (6.4.9) решается Хассельманом методом последовательных приближений. Решение на n -м шаге имеет вид

$$\begin{aligned} a_k^v(t) = & \alpha_k^v e^{-i\omega_k^v t} + \int_0^t dt' \exp[-i\omega_k^v(t-t')] \{ \dots - i(p+1) \times \\ & \times \sum [E_{-k, k_1, \dots, k_q, k_{q+1}, \dots, k_p}^{-v, v_1, \dots, v_q, \mu_{q+1}, \dots, \mu_p} a_{k_1}^{v_1}(t') \dots a_{k_q}^{v_q}(t') \times \\ & \times b_{k_{q+1}}^{\mu_{q+1}}(t') \dots b_{k_p}^{\mu_p}(t')] \dots \}, \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

где $\alpha_k^v = a_k^v$ при $t = 0$.

Анализ (6.4.10) показывает, что значительными являются резонансные взаимодействия, когда

$$\sum_v s_v \omega_v = s_v \omega_v, \quad \omega_v > 0$$

или

$$\sum_v s_v k_v = s_v k_v,$$

где

$$s_j = \begin{cases} +1 & \text{для компонент,} \\ -1 & \text{для антикомпонент.} \end{cases}$$

По найденным a_k^v и a_{-k}^v можно определить спектральную плотность рассматриваемого процесса

$$S_k^v = \frac{1}{2} M \{a_k^v a_{-k}^v\}, \quad (6.4.11)$$

ее изменение

$$\frac{DS}{Dt} = G, \quad (6.4.12)$$

а также общую энергию волнового поля

$$H_2 = \sum_{k, \nu} S_k^\nu.$$

В соответствии с теорией слабых взаимодействий принимаются следующие гипотезы: исследуемые поля полностью определяются энергетическими спектрами, под влиянием взаимодействия нарушается гауссовость волновых полей, а под влиянием резонансных взаимодействий — стационарность. Поскольку взаимодействие слабое, то принимается, что резонансное взаимодействие первоначально производит непрерывное перераспределение энергии между спектральными составляющими так, что общая энергия не изменяется ($\frac{\partial H}{\partial t} = 0$). В связи с изменением спектрального распределения имеет место также вторичное перераспределение энергии между H_2 и H' . Необходимо отметить, что если функция G найдена, то через нее можно определить спектр $S(k, x, t)$ в любой точке пространства x в произвольный момент времени t :

$$S(k, x, t) = S(k_0, x_0, t_0) + \int_{t_0}^t G(k', x', t') dt', \quad (6.4.13)$$

(k', x', t') — координаты системы, имеющей начало в точке (k_0, x_0, t_0) . В то же время G является функционалом спектра, вид которого зависит от свойств взаимодействующих полей.

Ограничиваясь вторым приближением уравнения (6.4.10), Хасельман получил следующее выражение для функции G :

$$G(k) = \sum_{i=1}^7 G_i + \sum_i^4 G'_i. \quad (6.4.14)$$

Компоненты G_i ($i = 1, \dots, 4$) учитывают взаимодействие волнового поля с атмосферным полем; компоненты G'_i ($i = 1, \dots, 4$) — взаимодействие волнового поля со слабыми течениями и перемешиванием в океане; G_5 — перераспределение энергии процессами нелинейных взаимодействий составляющих волнового поля; G_6 — рассеивание энергии на мелководье вследствие турбулентного трения у дна; G_7 — потеря энергии вследствие разрушения волн.

Аналитический вид компонент G_i ($i = 1, \dots, 7$) и G'_i ($i = 1, \dots, 4$) получен из следующих предположений.

Воздушный поток рассматривается как стационарная однородная случайная функция $U(x, z, t)$, которая характеризуется спектром $\Pi(k, \omega)$ и движется со скоростью $\bar{U}$. Принимая гипотезу Филлипса о воздействии на волновое поле турбулентных флуктуаций давления, компоненту G_1 можно записать в виде

$$G_1 = \frac{\pi \omega^2}{2\rho g} \Pi(k, \omega) = \alpha, \quad (6.4.15)$$

где α зависит только от свойств внешнего поля и не зависит от времени и спектра волнового поля.

Для определения компоненты G_2 используется гипотеза Майлза о линейном взаимодействии волн со средним воздушным потоком

$$G_2 = \frac{\pi \omega \rho}{2 \rho_0 g} \left(\frac{\frac{d^2 U_c}{dz^2}}{\frac{dU_c}{dz}} \right) |w_k^\omega|^2 S(k) = \beta S(k), \quad (6.4.16)$$

где β находится путем численного решения уравнения Опп—Зоммерфельда (6.1.10); β зависит от свойств взаимодействующих полей.

Компоненту G_3 можно представить в виде

$$G_3 = -S(k) \int \gamma(k, k') S(k') dk', \quad (6.4.17)$$

где передаточная функция $\gamma(k, k')$ зависит от не включенных в уравнение Майлза нелинейных эффектов взаимодействия волнового и атмосферного полей.

Составляющая G_1 учитывает турбулентность воздушного потока в отрыве от свойств подстилающей поверхности, составляющие G_2 и G_3 отражают процесс взаимодействия волн с невозмущенным воздушным потоком. При рассмотрении взаимодействия более высокого порядка необходимо учесть влияние турбулентности атмосферного поля, поэтому компонента G_4 записывается в виде

$$G_4 = -\delta S(k) + \int \varepsilon(k, k') S(k') dk'. \quad (6.4.18)$$

Коэффициенты δ и ε получены с учетом решения неоднородного уравнения Опп—Зоммерфельда, описывающего движение турбулентного потока.

Компонента G_5 представляет перенос энергии между волновыми спектральными составляющими и может быть записана в виде (6.2.6). Процессы рассеяния волн под влиянием мелководья (компонента G_6) и нелинейного обрушения волн (компонента G_7) невозможно рассматривать методами теории слабых взаимодействий. Выражение для компоненты G_7 получено Хассельманом [214] и записано в виде (6.3.7). Взаимодействие волнового поля с движением и турбулентностью водной среды (компоненты G_i' ($i = 1, \dots, 4$)) может быть учтено в форме, аналогичной составляющим G ($i = 1, \dots, 4$).

Несмотря на общность подхода к определению компонент, теория Хассельмана не учитывает некоторые процессы, влияющие на развитие волн. Так, например, Ватсон и Вест [213] показали, что при развитии волнения в условиях наличия приливных течений или течений в устьях рек, а также с учетом взаимодействия ветровых волн с атмосферной турбулентностью, внутренними волнами или зыбью в уравнении баланса (6.4.12), кроме перечисленных, появляются еще два члена, один из которых характеризует нелинейное изменение групповой скорости волн, так как

$$\dot{x} = \nabla_k \Omega, \quad \dot{k} = -\nabla_x \Omega,$$

где

$$\Omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} + \omega_k - \int d^2 L c_{Lk}^{kL} S_{\xi}(\mathbf{x}, L), \quad (6.4.19)$$

а другой будет пропорционален квадрату спектральной плотности и иметь вид

$$G_s = \psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) S(\mathbf{k}, \mathbf{x}), \quad (6.4.20)$$

где

$$\psi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \{\nabla_{\mathbf{x}} [-\mathbf{k} \cdot \mathbf{U}] / (2k^2) - \int d^2 L (D_1 - D_2) S(\mathbf{k}, \mathbf{x})\},$$

$D_{1,2}$ — функции от коэффициентов c_{Lk}^{kL} [312].

Появление интегральных членов в выражениях для Ω и ψ связано с учетом нелинейных взаимодействий спектральных составляющих во время их роста: компонента G_b , пропорциональная кубу спектральной плотности, характеризует нелинейный перенос энергии лишь в квазистационарном состоянии; интегральные члены в (6.4.19), (6.4.20) уточняют величины нелинейных взаимодействий в периоды нестационарности волнового процесса.

Виллибрандтом показано [313], что в наиболее общем случае, когда волнение — нестационарный вероятностный процесс, развивающийся в условиях нестационарного неоднородного поля течений при неоднородном рельефе дна, уравнение баланса волновой энергии имеет вид

$$\frac{D}{Dt} \left\{ \frac{S(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)}{(gk \tanh kH)^{1/2}} [1 + I(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)] \right\} = G, \quad (6.4.21)$$

где

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Omega}{\partial k} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \Omega}{\partial x} \frac{\partial}{\partial k}, \quad (6.4.22)$$

$$\Omega(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{U} + (gk \tanh kH)^{1/2} \{1 + \int F_1(k, k') S(k') dk'\}, \quad (6.4.23)$$

$$I(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t) = \int S(k') \{T(k, k') - P^2(\pm k', k \pm k') \frac{S(k + k')}{S(k')}\} dk', \quad (6.4.24)$$

F , T , P — обменные функции (см. приложение 2 работы [313]).

Уравнение (6.4.12) является линейным приближением (6.4.21); нелинейные эффекты проявляются в том, что спектральные составляющие распространяются с разной скоростью, зависящей от $S(\mathbf{k}, \mathbf{x}, t)$, могут рефрагировать не только при наличии изменяющегося рельефа дна и течений, но даже при однородных условиях, появляется дополнительный поток энергии между волнами и средним полем течений.

Количественная оценка указанных нелинейных эффектов выполнена Виллибрандтом при весьма гипотетических условиях и требует дальнейшего уточнения.

Подводя итог теоретическому рассмотрению уравнений (6.4.1), (6.4.21) баланса волновой энергии в спектральной форме, необхо-

димо отметить, что полученные результаты дают принципиальную возможность создания на их основе физически обоснованного метода расчета волн. Однако символическая запись отдельных компонент, например G_3 , G_4 , требует дальнейшей детализации. Некоторые компоненты содержат параметры и функции, о виде и свойствах которых в настоящее время имеются лишь весьма приближенные представления. Так, например, компонента G_1 существенно зависит от принятой аппроксимации пространственно-временного спектра $\Pi(k, \omega)$ турбулентных пульсаций давления. Теоретически такая аппроксимация получена [53], однако она зависит от специальных функций (интегральная показательная, вырожденная гипергеометрическая) и поэтому неудобна в практических расчетах. Попытка упростить эту аппроксимацию и выразить все коэффициенты через единственный параметр u_* пограничного слоя принята при существенных ограничительных предположениях [53]. Поэтому прежде чем использовать тот или иной теоретический результат в расчетных схемах, требуется его серьезная экспериментальная проверка.

Глава 7

Оценка отдельных составляющих баланса волновой энергии по натурным данным

Непосредственное определение потока энергии от ветра к волнам и ее диссипации связано с большими трудностями. Основная из них обусловлена исключительной сложностью одновременного достаточно точного измерения большого числа характеристик ветра, волн, течений, турбулентности на разных поверхностях и в различных точках пространства даже при умеренном волнении. Почти все известные синхронные записи пульсаций скорости ветра на различных горизонтах и волнения относятся к сравнительно слабым ветрам. Пока никому из исследователей не удалось поставить такие измерения для штормового волнения. Процесс взаимодействия воздушного потока с подстилающей водной поверхностью настолько сложен, что даже результаты, полученные при слабых ветрах, довольно существенно различаются между собой. Так, например, если Добсон [190] получил по данным синхронных измерений давления и возвышений волновой поверхности, что поток энергии от ветра к волнам в 5—8 раз превышает величины по гидродинамической модели Майлза, то Эллиот [198] по данным таких же измерений пришел к совершенно другому выводу. По Эллиоту, коэффициент β в соотношении (6.4.16) мало отличается от теоретических оценок, полученных Майлзом. Не удалась попытки использовать большое число градиентных измерений скорости ветра над морем [3, 16, 18, 59, 92, 119] для определения количества энергии, поступающей к волнам, так как для этого необходимо знать,

как разделяется общий поток энергии от атмосферы к водной поверхности на его составляющие, идущие на развитие волн, течений, турбулентности. Еще сложнее обстоит дело с непосредственными измерениями диссипации волновой энергии. Данные, опубликованные в ряде работ [63, 191, 213, 295], не согласуются между собой. Даже по такому, казалось бы, очевидному вопросу, как роль встречных ветров в затухании зыби, данные измерений показали существенно различающиеся между собой результаты. Так, например, если по Добсону [191] поток энергии от зыби к воздушному потоку должен достигать существенных значений, то по результатам международного эксперимента «JONSWAP» [213] существенного влияния встречных ветров на затухание зыби не отмечено. Несмотря на большие усилия, приложенные учеными ряда стран для подготовки и проведения «JONSWAP», в результате анализа данных этого эксперимента не удалось получить приближенных оценок хотя бы основных составляющих баланса волновой энергии.

В связи со сложностью непосредственного измерения этих составляющих вполне оправданы попытки использовать для их количественной оценки данные об изменении спектра волн на основе тех или иных предположений относительно механизма взаимодействия воздушного потока с подстилающей поверхностью и диссипации энергии. Такой анализ, в частности, был выполнен под руководством Хассельмана [213] по результатам эксперимента «JONSWAP» и авторами монографии на основе обобщения всех выполненных ими инструментальных измерений волнения.

Хассельман и его соавторы пришли к выводу, что на коротких разгонах баланс волновой энергии в значительной степени определяется соотношением между энергией, поступающей от воздушного потока в область основного максимума волнового спектра, и передачей энергии из этой области как к более коротким волнам (где она диссипирует), так и к более длинным волнам. Основная часть энергии, обуславливающая рост спектральной плотности волн в области $\omega < \omega_{\max}$, определяется внутренним энергообменом за счет нелинейного взаимодействия между спектральными составляющими. На коротких разгонах примерно $80 \pm 20\%$ энергии, поступающей через поверхность моря, уходит на развитие ветрового волнения. Приблизительно 80—90% энергии, передающейся волнам, из-за нелинейного взаимодействия между спектральными составляющими уходит к коротким волнам и благодаря последующей диссипации передается течениям. Остальное остается в волновом поле и распространяется вместе с волнами. Вопрос о балансе волновой энергии при больших разгонах решается по данным эксперимента «JONSWAP» менее определенно из-за того, что неизвестна диссипация энергии в низкочастотной области спектра. Если допустить, что диссипация здесь отсутствует, то от общего потока энергии к водной поверхности волны должны получить $(20^{+20}_{-10})\%$, но если диссипация значительна, то удельный вес энергии, поступающей к вол-

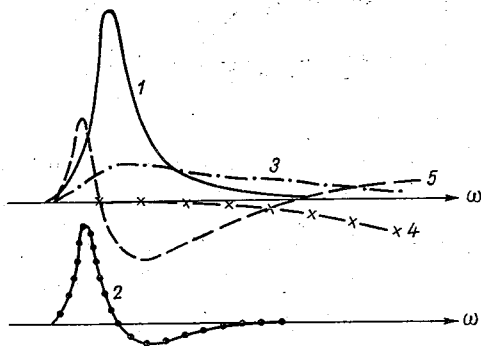
нам, может достигать 100%. Настолько неопределенными оказались результаты анализа баланса волновой энергии по данным эксперимента «JONSWAP». Результаты эксперимента обобщены в форме аппроксимации частотного спектра волн (3.1.22) и соотношений (см. стр. 107), связывающих параметры этой аппроксимации с безразмерным разгоном ветра gX/U^2 .

Результаты эксперимента «JONSWAP» позволили приближенно графически представить (рис. 7.1) возможный вид функции источника в соотношении (6.4.1).

Как уже указывалось, косвенная оценка функции источника по натурным данным была получена также авторами монографии [100, 186]. Для этой цели были использованы аппроксимация частотного спектра волн (3.1.36), функции углового распределения энергии (4.1.12) и соотношения (II.4, II.5), связывающие параметры аппроксимации частотного спектра с безразмерным разгоном, а через соотношение (II.6) с продолжительностью действия ветра. При помощи указанных соотношений была определена зависимость $S_{\zeta}(\omega, \theta) = S_{\zeta}(U, X, t, \omega, \theta)$ (7.1)

Рис. 7.1. Схематическое изображение частотного спектра (1) и компонент правой части (2) уравнения баланса волновой энергии

3 — поступление энергии от воздушного потока; 4 — диссипация волновой энергии; 5 — нелинейный перенос энергии, вычисленный по формуле (6.2.6) (по работе [213])



и рассмотрены два взаимоисключающих друг друга случая

$$\frac{\partial S}{\partial t} = G(U, \omega, \theta, t) \quad (7.2)$$

и

$$\frac{\partial S}{\partial X} = G(U, \omega, \theta, X). \quad (7.3)$$

Для каждого момента времени t или для каждой величины разгона X оказалось возможным построить соотношение между значениями производных S'_t или S'_x и значениями спектральных плотностей $S_{\zeta}(\omega, \theta)$, т. е. построить графики функций $G(S)$. Типичные графики этих функций представлены на рис. 7.2. Из рисунка видно, что зависимость $G(S)$ существенно нелинейна. Это является еще одним доказательством того, что наблюдающийся в природе рост волн не может быть полностью объяснен с помощью теории Филлипса—Майлза, согласно которой график функции $G(S)$ должен иметь вид прямой линии $G_1 + G_2$. Линейная аппроксимация до-

пустима лишь на самых начальных стадиях развития спектральных составляющих.

Наибольший интерес представляет аппроксимация зависимости $G(S)$ в виде, соответствующем теории Хассельмана, т. е. с определением компонент G_i согласно соотношениям (6.4.15) — (6.4.20). Однако наличие интегральных выражений в указанных соотношениях, а также невозможность однозначного разложения функции $G(S)$ на компоненты G_i в (6.4.14) приводят к необходимости использования более простых аппроксимаций. При этом необходимо отметить, что параметрический (относительно ω и θ) вид зависимости $G(S)$ и

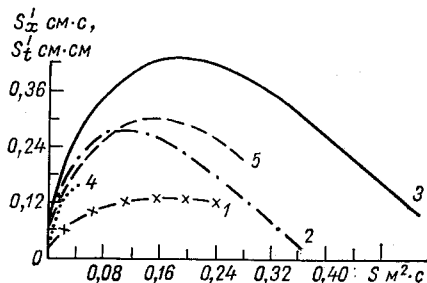


Рис. 7.2. Зависимость производных спектральной плотности волнового процесса по времени S'_t и по разгону S'_x от S при различных скоростях ветра U , частотах ω и направлениях распространения θ спектральных составляющих, вычисленная по формулам (7.2), (7.3)

1) $U = 10$ м/с, $\theta = 0^\circ$, $\omega = 0,9$ рад/с; 2) $U = 14$ м/с, $\theta = 20^\circ$, $\omega = 0,9$ рад/с; 3) $U = 14$ м/с, $\theta = 0^\circ$, $\omega = 0,9$ рад/с; 4) $U = 10$ м/с, $\theta = 0^\circ$, $\omega = 1,5$ рад/с; 5) $U = 10$ м/с, $\theta = 0^\circ$, $\omega = 0,9$ рад/с

$$G_5(\omega, \theta) = \Gamma(\omega, \theta) - \tau(\omega, \theta) S_t^*(\omega, \theta), \quad (7.4)$$

в которой Γ и τ вычисляются по формуле (8.1.12), позволяют, по крайней мере формально, исключить влияние нелинейности. Вычисление значений функции

$$\tilde{G}(S) = G(S) - G_5 \quad (7.5)$$

показало, что нелинейность зависимости $\tilde{G}(S)$ остается* (рис. 7.3).

Аппроксимируем зависимость $\tilde{G}(S)$ при фиксированных (ω, θ, U) прямой**

$$\hat{G} = \alpha + \beta S. \quad (7.6)$$

Результаты этой аппроксимации приведены на рис. 7.4 и 7.5 и сопоставлены с натурными данными, полученными в работах [166] и [297]. Данные Снайдера и Кокса [297] получены путем измерения волн с судна, движущегося со скоростью 2,6 м/с и буксирующего на расстоянии 135 м от судна цепь из четырех датчиков, разнесенных друг от друга на 8,5 м. При движении по ветру (с групповой скоростью) такие записи позволили проследить развитие вол-

* В рамках теоретической схемы раздела 6.4 это может быть объяснено влиянием компонент G_3 и G_6 .

** В работах [35, 100, 120] выполнена аппроксимация функции $G(s)$ полиномом четвертой степени; коэффициенты при нулевой, первой и третьей степенях S положительны, при второй и четвертой — отрицательны. Такая аппроксимация является формальной, однако учитывает влияние нелинейности функции $G(S)$. Сложность физической интерпретации такой аппроксимации обусловлена тем, что аппроксимация (6.4.14) является суммой квазилинейных функций с коэффициентами, зависящими от $S(\omega, 0)$.

новой спектральной составляющей с длиной 17 м/с (т. е. круговой частотой ω , равной 1,9 рад/с) при скоростях ветра от 5,5 до 8,3 м/с.

Данные Барнетта и Вилькерсона [166] получены путем изменения волн с самолета, снабженного специальной радарной волно-регистрирующей аппаратурой, при скоростях ветра от 15,2—17,8 м/с.

Из рис. 7.4 и 7.5 можно видеть, что оценки α и β , полученные по формуле (7.4), отличаются от соответствующих оценок, полученных в вышеназванных экспериментах. Необходимо отметить, что полученные нами оценки β близки к теоретическим оценкам Майлза.

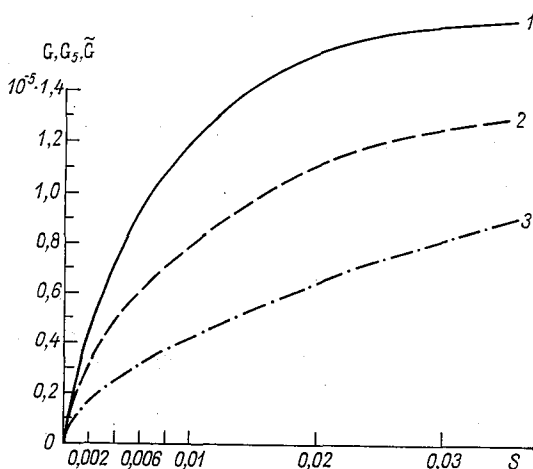


Рис. 7.3. Зависимость функций G (1), G_5 (2), $\tilde{G}$ (3) от S

Существенная нелинейность функции источника даже после исключения внутреннего энергообмена в спектре волн по причине слабонелинейного взаимодействия между спектральными составляющими указывают на то, что простое увеличение коэффициента β по сравнению с его теоретическими значениями для приведения баланса волновой энергии к результатам отдельных конкретных измерений нельзя признать правомерным. Линейная составляющая функции источника G вполне определяется теоретическими оценками α и β , и надо искать причину расхождений между натурой и моделями в том, что модели Филлипса и Майлза учитывают лишь часть энергии, поступающей от ветра волнам. Существует, безусловно, какой-то еще механизм передачи энергии, связанный, по всей видимости, с работой сил тангенциального напряжения ветра, которая становится более значимой (по сравнению с предположениями и расчетами отдельных исследователей) благодаря вторичным волнам, развивающимся на основной системе волн. Выполнен-

ная нами киносъемка штормового волнения при продолжительном ветре одного и того же направления показала, что на гребнях штормовых волн на верхних участках подветренного и наветренного склонов развиваются небольшие вторичные волны, размеры которых растут во времени и зависят от времени существования отдельно взятого гребня. Развитие вторичных волн на упомянутом участке гребня наблюдалось до тех пор, пока возможно было проследить распространение отдельной волны.

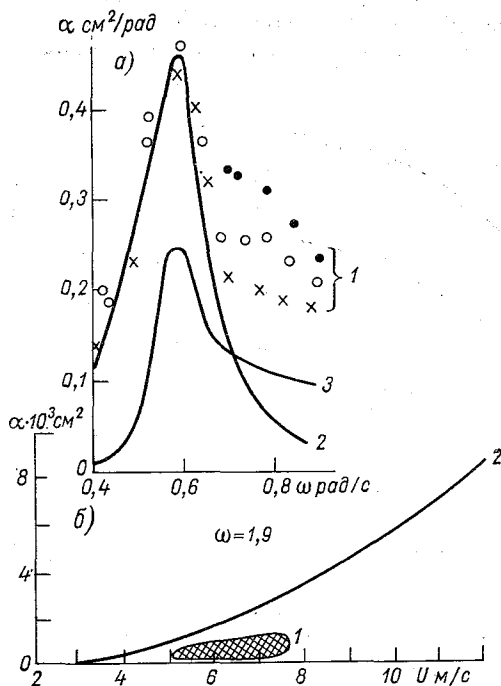


Рис. 7.4. Зависимость коэффициента α от скорости ветра (б) и частоты (а)

а: 1 — по натурным данным [166]; 2 — аппроксимация по работе [166] в соответствии с теорией Филлипса, 3 — аппроксимация по настоящей работе; б: 1 — по натурным данным из работ [166, 297] при $\omega = 1,9$ рад/с, 2 — аппроксимация по настоящей работе

Для более конкретного анализа полученные нами значения функции источника G были сопоставлены с результатами расчета отдельных ее компонент по модели Филлипса—Майлза и Хассельмана. Пример такого сопоставления для скорости ветра 15 м/с по расчетам, выполненным Т. А. Пасечник, приведены на рис. 7.6. На рисунке представлено пять графиков, относящихся к различным частотам от 0,44 до 0,94 рад/с. На каждом из них нанесены значения функции источника G по нашим расчетам, величина $\alpha + \beta S$ — по модели Филлипса—Майлза, компонента, обусловленная внутренним энергообменом по причине слабонелинейного взаимодействия спектральных составляющих по Хассельману (аппроксимация,

предложенная Барнеттом) и компонента, определяющая диссипацию энергии за счет сильнонелинейных взаимодействий (опрокидывание гребней волн) по модели Хассельмана. На всех графиках показана разность между функциями источника по нашим данным и суммой компонент прихода энергии по Филлипсу—Майлзу, внутреннего обмена и диссипации по Хассельману. Анализ этой разности для разных частот позволяет отметить следующее. На более низких частотах приход энергии за счет внутреннего энергообмена

не является определяющим в приходной части баланса энергии, как это указывается в работе [213]. Основная часть энергии должна поступать непосредственно от ветра; так как передача энергии по причине несимметричного распределения давления по профилю волны на низких частотах является не эффективной, приходится предположить, что на этих частотах определяющим является передача энергии за счет работы сил тангенциального напряжения турбулентного воздушного потока. С увеличением частоты увеличивается удельный вес прихода энергии, обусловленного главным

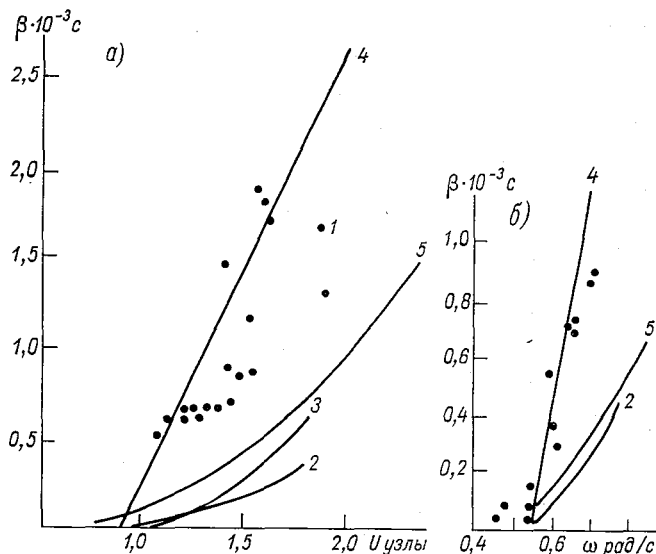


Рис. 7.5. Зависимость коэффициента β от скорости ветра (а) и частоты (б)

1 — по натурным данным из работ [166, 297]; 2 — аппроксимация по работе [297] в соответствии с теорией Майлза; 3 — аппроксимация по работе [297] в соответствии с теорией Джеффриса; 4 — аппроксимация, принятая авторами работы [297]; 5 — аппроксимация по настоящей работе

образом работой сил нормального давления (модель Филлипса—Майлза).

На более высоких частотах, начиная с определенной продолжительности ветра на графиках появляются участки, на которых диссипация энергии превышает ее приход при положительных величинах функции источника. Это возможно лишь в двух случаях: при завышенных оценках диссипации или при заниженных оценках прихода энергии. Из общих соображений более правдоподобным представляется второе.

Анализ графиков, приведенных на рис. 7.6, еще раз подтверждает необходимость получения новых экспериментальных данных для более определенного ответа на вопрос о механизме формирования спектральной структуры ветрового волнения. Однако, как

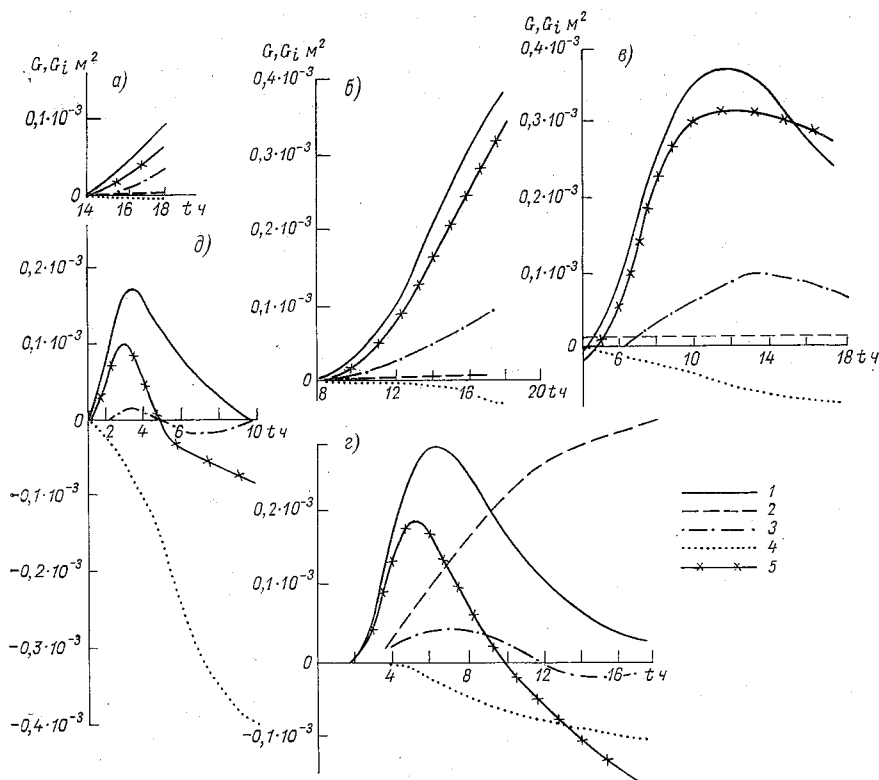


Рис. 7.6. Изменение во времени функции S'_t и отдельных компонент правой части уравнения баланса волновой энергии при скорости ветра 15 м/с для спектральных составляющих с частотой 0,44 (а), 0,50 (б), 0,63 (в), 0,75 (г), 0,94 (д) рад/с

1) S'_t вычислено по формуле (7.2); 2) $\alpha + \beta S$ — по теоретическим оценкам Филлипса и Майлза; 3) $\Gamma + \tau S$ — по формуле (8.1.12); 4) G_7 — по формуле (6.3.9); 5) $G_{3,4} = S'_t - (\alpha + \beta S) - (\Gamma - \tau S) - G_7$

показано в главе 8, даже ограниченные знания о спектре волн и полученные отдельными исследователями приближенные количественные оценки функции источника в уравнении баланса волновой энергии уже позволяют существенно совершенствовать те методы расчета, которые базируются на аппроксимации волнового поля регулярными плоскими волнами.

Метод расчета вероятностных характеристик волнения

Уравнение баланса волновой энергии в спектральной форме является основой для построения метода расчета волн при наиболее общих нестационарных и неоднородных условиях волнообразования. Применительно к волнам на глубокой воде это уравнение имеет вид [210]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v_x \frac{\partial S}{\partial x} + v_y \frac{\partial S}{\partial y} = G. \quad (8.1)$$

В левой части уравнения (8.1) опущены, в отличие от (6.1.1), члены $k'_x \frac{\partial S}{\partial k_x}$, $k'_k \frac{\partial S}{\partial k_y}$, имеющие существенное значение главным образом на мелководье. Правая часть G уравнения (8.1) задается в виде, соответствующем определенной теоретической схеме, или в виде эмпирической формулы.

Для расчета волн при конкретных условиях волнообразования применительно к конкретному географическому объекту необходимо, кроме основного уравнения (8.1) с определенной правой частью, задать начальные условия вида

$$S_\varepsilon(x, y, t, \omega, \theta) |_{t=t_0} = S_1(x, y, t_0, \omega, \theta) \quad (8.2)$$

и граничные условия (на контуре G_I) вида

$$S_\varepsilon(x, y, t, \omega, \theta) |_{(x^*, y^*) \in G_I} = S_2(x^*, y^*, t, \omega, \theta). \quad (8.3)$$

Решение уравнения (8.1) при условиях (8.2) и (8.3) называют решением смешанной задачи Коши. Несмотря на то что уравнение (8.1) является линейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка,* при произвольных $G(x, y, t, \omega, \theta)$, $S_1(x, y, t_0, \omega, \theta)$, $S_2(x^*, y^*, t, \omega, \theta)$ оно решается только численно, аналитические решения могут быть найдены лишь в некоторых частных случаях.

Таким образом, создание метода расчета вероятностных характеристик волнения на основе уравнения (8.1) сводится к определению вида правой части G , нахождению аналитического или численного решения этого уравнения при заданных условиях (8.2), (8.3) и выработке рекомендаций по применению метода.

В настоящее время в ряде стран на основе численного интегрирования уравнения (8.1) созданы методы расчета волн [100], в которых в качестве основной вероятностной характеристики волн используется пространственно-временная спектральная плотность

* То есть одним из простейших видов дифференциальных уравнений.

$S_{\xi}(x, y, t, \omega, \theta)$, а элементы видимых волн $\bar{h}$, $\bar{\tau}$, $\bar{\lambda}$ рассчитываются по спектру в соответствии с формулами (2.3.10), (2.3.11).

Эти методы различаются главным образом видом записи функции G . Критический анализ этих методов с целью выбора вида записи выполнен в разделе 8.1. В разделе 8.2 определен класс аналитических решений уравнения (8.1) при различных видах функции G . Каждое из этих решений применимо для расчета волн лишь в определенном довольно узком диапазоне условий волнообразования. Численное решение сформулированной задачи Коши, доведенное до конкретного алгоритма, дано в разделе 8.3; примеры расчета волн приведены в разделе 8.4.

Необходимо отметить, что численное решение задачи на современных электронно-вычислительных машинах (даже, например, на БЭСМ-6) занимает довольно много машинного времени. Поэтому для оперативных расчетов волн требуется по возможности уменьшить машинное время. Упрощение правой части уравнения (8.1) сужает границы применимости метода; модификация исходного уравнения применительно только к развивающемуся волнению (как, например, предлагают авторы работы [215]) или зыби также существенно уменьшает общность рассматриваемого метода, хотя и то и другое способствует уменьшению затрат машинного времени. По-видимому, прогресс в этом направлении может быть достигнут при использовании совместно аналитических и численных решений: на достаточно малых отрезках времени и в малых пространственных областях аналитические решения (требующие весьма малое количество вычислений) могут дать необходимую точность аппроксимации реальных условий, а расчет волн во всей области и в течение всего интересующего промежутка времени производится путем численной «склейки» аналитических решений.

8.1. Правая часть уравнения баланса волновой энергии в спектральной форме

Проанализируем вид функции G , принятый в некоторых наиболее известных спектральных методах расчета волн.

Жельси, Казале, Вассаль предложили [236] записать функцию в виде эмпирической формулы

$$G = \hat{P}(\tau_c, U) Q(\theta) + \frac{A}{\tau_c^4} D_{\xi}, \quad (8.1.1)$$

где $\hat{P}(\tau_c, U) = \left(\frac{3 \cdot 0,243}{\omega^3} \right) \tau_c^2 (U - \tau_c)^3 \cdot 100 \frac{\text{к эрг}}{\text{см}^2} \cdot 3 \text{ ч}$; τ_c — период, соответствующий спектральной составляющей $\omega = 2\pi/\tau_c$; A — константа.

Функция $\hat{P}(\tau_c, U)$ характеризует поступление энергии ветра волнам, $Q(\theta)$ учитывает угловое распределение волновой энергии, второй член в (8.1.1) — диссипация энергии.

Метод расчета волн, разработанный с учетом (8.1.1) и названный DSA,* до сих пор успешно применяется по Франции и Японии [100, 205, 290].

В методе, предложенном Пирсоном, Тиком и Байером [278], а также в методе Иное [224] правая часть уравнения (8.1) задана в виде

$$G = (\alpha + \beta S)(1 - \mu). \quad (8.1.2)$$

Функции α и β , определяющие рост волн, интерпретируются авторами методов как компоненты G_1 и G_2 (см. раздел 6.4), но задаются с учетом экспериментальных данных. Величина μ задает диссипацию энергии, зависит от отношения спектра волн $S(\omega, \theta)$ к спектру $S_\infty(\omega, \theta)$ полностью развитого волнения в форме Пирсона—Московица [276] и ограничивает таким образом рост волн.

В методах Барнетта [164] и Ювинга [201] дополнительно учтены слагаемые, характеризующие нелинейный обмен энергией между спектральными составляющими; функция G задана в виде

$$G = (\alpha + \beta S)(1 - \mu) + T - \tau S. \quad (8.1.3)$$

Коэффициент α записан на основе теории Филлипса в виде

$$\alpha = \frac{4\pi^2 k \omega^3}{\rho_w^2 g^3} \Pi(k, \omega). \quad (8.1.4)$$

Спектр $\Pi(k, \omega)$ в (8.1.4) задан аппроксимативным выражением, предложенным Пристли по данным измерений давления воздуха над сушей:

$$\Pi(k, \omega) = \frac{1,23\omega^{-2}U^6}{\pi^2} \frac{m_2}{m_2^2 + k^2 \sin^2 \theta} \frac{m_1}{m_1^2 + (k \cos \theta - \lambda)^2}, \quad (8.1.5)$$

где $\lambda = \omega/U$; m_1, m_2 — параметры, зависящие от скорости ветра U . Величина β задана обоими авторами аппроксимативными выражениями:

Барнеттом — в виде

$$\beta = \frac{5\rho_a}{\rho_w} \left(\frac{U \cos \theta}{c} - 0,9 \right), \quad (8.1.6)$$

Ювингом — в виде

$$\beta = 1,2 \cdot 10^{-8} \omega (U \omega \cos \theta)^4. \quad (8.1.7)$$

Выражения (8.1.6), (8.1.7) интерпретированы авторами методов как коэффициент β в теории Майлза, но заданы по эксперимен-

* Densities spectra angulaires.

тальным данным Снайдера и Кокса [297], Барнетта и Вилькерсона [166].

Функция μ , учитывающая наличие в спектре ветрового волнения равновесной области и через нее эффекты обрушения волн, Барнеттом задана эмпирическими формулами

$$\mu = 0,8 \exp \left(0,5 \frac{S - S_p}{S_p} \right) \quad (8.1.8)$$

и

$$S_p = \hat{\alpha} g^2 \omega^{-5} Q(\theta), \quad (8.1.9)$$

где $Q(\theta) \sim \cos^4 \theta$.

Ювинг эти же величины определил как

$$\mu = (S/S_p)^2; \quad (8.1.10)$$

$$S_p = \hat{\alpha} g^2 (2\pi)^{-4} f^{-5} Q(\theta), \quad (8.1.11)$$

где $\hat{\alpha} = 8,1 \cdot 10^3$, $Q(\theta) = (4/3\pi) \cos^4(\theta/r)$.

Компоненты Γ и τS в (8.1.3), характеризующие обмен энергией при нелинейных взаимодействиях спектральных составляющих и определяемые по теории Хассельмана выражением (6.2.6), заданы Барнеттом для упрощения вычислений параметрическими формулами

$$\Gamma = \frac{4,4 \cdot 10^8 E^3 f_0^8}{g^4} \cos^4(\theta - \theta_0) \left(\frac{f - 0,42 f_0}{f} \right) \exp \left[-4 \left(1 - \frac{f_0}{f} \right)^2 + \right. \\ \left. + 0,1 (f_0/f)^5 \right] \text{ при } f > 0,42 f_0, \quad |\theta - \theta_0| < \frac{\pi}{2};$$

$$\tau = \frac{7,5 \cdot 10^7 E^2}{g^4 f} (1 + 16 |(\theta - \theta_0)|) f_0^7 (f - 0,53 f_0) \text{ при } f > 0,53 f_0, \quad (8.1.12)$$

где

$$E = \iint S(f, \theta) df d\theta, \quad f_0 = \frac{1}{E} \iint S(f, \theta) f df d\theta, \\ \theta_0 = \frac{1}{E} \iint S(f, \theta) \theta df d\theta, \quad f = \omega/2\pi. \quad (8.1.13)$$

Картрайт предложил использовать в качестве аппроксимативных выражений для Γ и τ частные суммы рядов Фурье—Чебышева [201].

$$\Gamma = f_1^8 r^2 m_0^3 \sum_{n=0}^{12} \sum_{m=0}^6 a_{m,n} T_n(s) \cos m(\theta - \bar{\theta}); \\ \tau = f_1^9 r^8 m_0^2 \sum_{n=0}^{12} \sum_{m=0}^6 b_{m,n} T_n(s) \cos m(\theta - \bar{\theta}), \quad (8.1.14)$$

где $f_1 = 0,816 \bar{f}_1$, $r = \frac{f}{f_1}$, $s = \frac{1}{2} r - \frac{5}{4}$, $T_n(s)$ — полином Чебы-

шева степени n ; $a_{m,n}$, $b_{m,n}$ — коэффициенты разложения. В работе [291] показано, что результаты расчетов по формулам (6.2.6), (8.1.12) и (8.1.14) достаточно хорошо согласуются между собой, незначительно отличаясь только на высокочастотном участке.

Таким образом в большинстве применяемых в настоящее время методов [164, 201, 224, 227, 228, 251, 278] компоненты функции G записаны в виде, полученном на основе спектральной теории волн, но с коэффициентами, учитывающими определенные экспериментальные данные.

Несмотря на различия в количестве компонент и форме записи правых частей G уравнения (8.1), наличие эмпирических коэффициентов сближает результаты расчетов по разным методам. Однако это сближение в основном имеет место в интегральных характеристиках, например в $\bar{h}$, более того, при условиях волнообразования, приближающихся к идеальным. В качестве примера на рис. 8.1.1 приведены результаты расчета [205] изменения во времени $h_{1/3}$ на больших разгонах при скорости ветра 15 м/с по методам DSA, Иное и Барнетта; на этом же рисунке приведены высоты $h_{1/3}$ волн

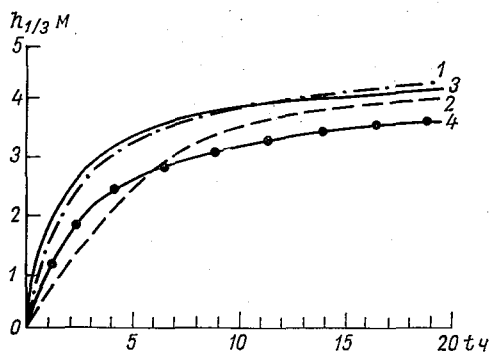


Рис. 8.1.1. Результаты вычисления высот волн при постоянном ветре 15 м/с по методам Барнетта (1), DSA (2), Иное (3) (по работе [205]) и по натурным данным (4)

по натурным данным [расчет по эмпирической формуле (II.5)]. Из рисунка видно, что названные методы приводят к довольно близким оценкам высот волн, согласующимся, особенно для полностью развитого волнения, и с натурными данными. По количеству и форме записи компонент среди сопоставляемых методов можно выделить метод Барнетта. Проверка этого метода, выполненная авторами книги при различных условиях волнообразования, показала, что он несколько завышает высоты волн по сравнению с натурными данными. К такому же выводу пришли также авторы работы [203] по результатам расчета волн для сильного шторма в северной части Атлантического океана. Как будет показано в разделе 8.4, метод Барнетта (с незначительной модификацией) можно использовать для расчетов средних значений элементов волн при сложных условиях волнообразования.

При этом необходимо отметить, что при переходе к частотным (а тем более пространственным) спектрам волн результаты расчета по различным методам, даже при идеальных условиях волнообразования, отличаются более существенно (по сравнению с интеграль-

ными характеристиками) [100]. Такое расхождение обусловлено, как уже было отмечено в главах 6 и 7, тем, что теория Филлипса и Майлза не может объяснить передачу энергии ветра волнам (необходим учет дополнительных факторов); кроме того, результаты теоретического исследования диссипативных процессов, в частности обрушения волн, приводят к принципиально другой [по сравнению с принятой Барнеттом в виде множителя $(1-\mu)$] форме записи компонент уравнения баланса, характеризующих диссипацию энергии. В связи с этим представляется целесообразным записать функцию G в правой части уравнения (8.1) так, что:

— передача энергии от ветра волнам описывается через соотношения объединенной теории Филлипса—Майлза с добавлением компоненты, учитывающей тангенциальное напряжение ветра;

— диссипация энергии описывается через соотношение вида (6.3.9), характеризующее сброс энергии при обрушении волн;

— обмен энергией между спектральными составляющими при их нелинейных взаимодействиях описывается через соотношение (6.2.6) с учетом упрощений в записи интегралов, предложенных, Лонге-Хиггинсом [246].

Уточнение числовых коэффициентов в перечисленных выше компонентах может быть достигнуто путем минимизации отклонений значений функции G в виде суммы этих компонент от значений функции G , вычисленной (по алгоритму из главы 7) по обобщенным натурным данным.

8.2. Аналитические решения уравнения баланса волновой энергии

Уравнение (8.1) при некоторых предположениях о виде функции G может быть решено аналитически. Рассмотрим некоторые аналитические решения, имея в виду, что часть из них может быть непосредственно использована при построении метода расчета волн, а другая часть — при разработке алгоритма, сочетающего элементы численных и аналитических решений.

8.2.1. Модель распространения мертвой зыби

Наиболее просто находится решение уравнения (8.1) при $G = 0$, т. е.

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v_x \frac{\partial S}{\partial x} + v_y \frac{\partial S}{\partial y} = 0 \quad (8.2.1)$$

при начальном условии (8.2) и граничных условиях на прямолинейном контуре

$$S(x, y, t, \omega, \theta)|_{x=x_0} = S_2(x_0, y, t, \omega, \theta) \quad (8.2.2)$$

или

$$S(x, y, t, \omega, \theta)|_{y=y_0} = S_3(x, y_0, t, \omega, \theta). \quad (8.2.3)$$

Этот случай можно интерпретировать как распространение мертвой зыби (при отсутствии поступления энергии от ветра волнам) на глубокой воде (волновое число не зависит от пространственных координат) без учета нелинейных взаимодействий между волновыми спектральными составляющими (частота ω и направление θ распространения спектральных составляющих являются параметрами) и без учета диссипации волновой энергии.

На глубокой воде спектральные составляющие распространяются со скоростью

$$|v| = g/2\omega, \quad (8.2.4)$$

т. е.

$$v_x = (g/2\omega) \cos \theta, \quad v_y = (g/2\omega) \sin \theta \quad (8.2.5)$$

не зависят от пространственных координат и времени t . Следовательно, решение задачи Коши (8.2.1) — (8.2.3) методом характеристик будет иметь вид

$$\begin{aligned} x &= v_x t + c_1; \\ y &= v_y t + c_2; \\ S &= c_3, \end{aligned} \quad (8.2.6)$$

а общее аналитическое решение поставленной задачи

$$f(c_1, c_2, c_3) = 0; \quad (8.2.7)$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные, подлежащие определению с помощью начального и граничных условий.

Например, при условии (8.2.2) система (8.2.6) будет

$$\begin{aligned} c_1 &= x_0 - v_x t; \\ c_2 &= y - v_y t; \\ c_3 &= S_2(x_0, y, t, \omega, \theta), \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

а решение задачи

$$S(x, y, t, \omega, \theta) = S_2 \left[x_0, y - \frac{v_y}{v_x} (x - x_0), t - \frac{x - x_0}{v_x} \right]. \quad (8.2.9)$$

Таким образом, спектральная плотность $S_\xi(\omega, \theta)$ зыби в любой точке пространства (x, y) и в любой момент времени t равна соответствующему (по характеристической линии) значению спектральной плотности S_2 на начальном сечении $(x = x_0)$ с ординатой, $y - \frac{v_y}{v_x} (x - x_0)$ и в момент времени t .

Решая уравнение (8.2.1) при граничном условии (8.2.3), имеем

$$S_\xi(x, y, t, \omega, \theta) = S_3 \left[x - \frac{v_x}{v_y} (y - y_0), y_0, t - \frac{y - y_0}{v_y} \right], \quad (8.2.10)$$

а при начальном условии (8.2)

$$S_{\xi}(x, y, t, \omega, \theta) = S_1[x - v_x(t - t_0), y - v_y(t - t_0), t_0]. \quad (8.2.11)$$

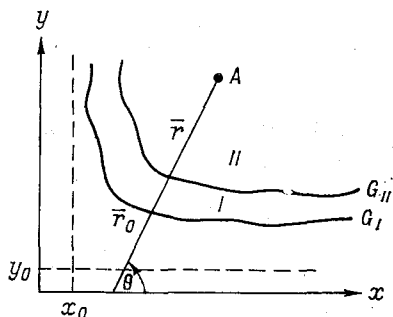
При использовании выражений (8.2.9) — (8.2.11) в модельных расчетах распространения зыби в условиях реальных водоемов необходимо сочетание полученных решений. Пусть в начальный момент $t = t_0$ в полупространстве $x > x_0$ задана спектральная плотность

$$S(x, y) = S_1(x, y, t_0),$$

в другие моменты времени $t \geq t_0$ заданы, кроме того, значения спектральной плотности на границе $x = x_0$

$$S(y, t) = S_2(x_0, y, t).$$

Тогда



$$S_{\xi}(x, y, t) = \begin{cases} S_1 & \text{при } t - \frac{x - x_0}{v_x} > 0, \\ & t - \frac{y - y_0}{v_y} > 0, \\ S_2 & \text{в других случаях.} \end{cases}$$

(8.2.12)

Рис. 8.2.1. Распространение волн в направлении θ при произвольном граничном контуре

Аналогичным образом может быть сформулировано решение задачи с граничными условиями и начальными данными на произвольном контуре [35]. Пусть в начальный момент времени $t = t_0$ волновое поле занимало положение I (выше и правее границы G_I на рис. 8.2.1). Допустим, что волны распространяются в направлении θ и за время t поле смещается и занимает положение II с границей G_{II} . Для удобства дальнейшего изложения введем два вектора: $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}_0$, направление которых совпадает с θ , начало находится на одной из осей координат, конец первого вектора $\mathbf{r}$ — в произвольной точке $A(x, y)$, второго — в точке пересечения вектора $\mathbf{r}$ с границей G . В этих обозначениях граничные условия имеют вид

$$S_{\xi}(\mathbf{r}, t)|_{G_I} = S_2(\mathbf{r}_0, t), \quad (8.2.13)$$

начальные —

$$S_{\xi}^I(\mathbf{r}, t)|_{t=t_0} = S_1(\mathbf{r}, t_0). \quad (8.2.14)$$

Решение уравнения (8.2.1) с граничным и начальным условиями (8.2.13), (8.2.14) (т. е. смешанной задачи Коши) в векторной форме имеет вид

$$S_3(\mathbf{r}, t) = \begin{cases} S_1[\mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t_0), t_0] & \text{при } \mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t_0) > 0; \\ S_2[\mathbf{r}, \mathbf{v}(t - t_0) - \mathbf{r}] & \text{при } \mathbf{r} - \mathbf{v}(t - t_0) \leq 0. \end{cases} \quad (8.2.15)$$

Отметим, что методы расчета зыби [79, 116] базируются на соотношениях, обобщением которых является выражение (8.2.15). Поскольку нелинейные взаимодействия между волновыми спектральными составляющими в данной задаче не учитываются, то компоненты спектральной плотности рассчитываются путем последовательного вычисления значений выражений (8.2.9) — (8.2.11) или (8.2.13) для всех фиксированных значений ω и θ .

Пример расчета спектра зыби по соотношениям (8.2.15) дан в разделе 8.4.

8.2.2. Развитие и распространение волн на глубокой воде под действием ветра

Другим простым случаем, допускающим аналитическое решение, является случай, когда функция G имеет вид линейной зависимости от S с постоянными (не зависящими от x , y , t) коэффициентами α , β , т. е.

$$G_{1,2} = \alpha + \beta S. \quad (8.2.16)$$

Этот случай можно интерпретировать как развитие и распространение волн, возникающих под воздействием постоянного (во времени и пространстве) поля ветра, причем коэффициенты α и β в соответствии с теорией Филлипса—Майлза зависят от частоты ω и угла θ .

Предполагая также, что рассматривается волнение на глубокой воде (т. е. $dk_x/dx = dk_y/dy = 0$), нелинейные взаимодействия ветра и волн, взаимодействия между волновыми спектральными составляющими, а также диссипация волновой энергии не учитываются, уравнение (8.1) можно представить в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v_x \frac{\partial S}{\partial x} + v_y \frac{\partial S}{\partial y} = \alpha + \beta S. \quad (8.2.17)$$

Как уже было отмечено выше (главы 6, 7, раздел 8.1), рассматриваемая модель является искусственной как из-за несовершенства теории Филлипса—Майлза, приводящей к правой части вида (8.2.16), так и из-за отсутствия в (8.2.17) диссипативных членов, ограничивающих рост волн.

Однако обсуждаемые ниже решения необходимы для получения результатов с более сложной правой частью и, кроме того, должны быть учтены при численной склейке различных аналитических решений. Уравнение (8.2.17) является линейным неоднородным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка.

Будем считать, что α и β не зависят от пространственных координат и времени, но являются функциями ω и θ , т. е.

$$\alpha = \alpha(\omega, \theta), \quad \beta = \beta(\omega, \theta), \quad (8.2.18)$$

тогда решение уравнения (8.2.17) при граничном условии (8.2.2) сводится к решению системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}c_1 &= x_0 - v_x t; \\c_2 &= y - v_y t; \\c_3 &= \left[S_2(x_0, y, t, \omega, \theta) + \frac{\alpha}{\beta} \right] \exp(-\beta t)\end{aligned}\quad (8.2.19)$$

и имеет вид

$$\begin{aligned}S(x, y, t, \omega, \theta) &= \left\{ S_2 \left[x_0, y - \frac{v_y}{v_x} (x - x_0), t - \frac{(x - x_0)}{v_x} \right] + \right. \\&\quad \left. + \frac{\alpha}{\beta} \right\} \exp \left[\beta \frac{(x - x_0)}{v_x} \right] - \frac{\alpha}{\beta}.\end{aligned}\quad (8.2.20)$$

Выражение (8.2.20) перепишем в виде

$$\begin{aligned}S(x, y, t, \omega, \theta) &= \left\{ S_2 \left[x_0, y - \frac{v_y}{v_x} (x - x_0), t - \frac{(x - x_0)}{v_x} \right] \right\} \exp \left\{ \beta \frac{(x - x_0)}{v_x} \right\} + \\&\quad + \frac{\alpha}{\beta} \left\{ \exp \left[\beta \frac{(x - x_0)}{v_x} \right] - 1 \right\}.\end{aligned}\quad (8.2.21)$$

Первое слагаемое в правой части (8.2.21) характеризует экспоненциальный рост спектральной составляющей $S_1(\omega, \theta)$, которая находилась на начальном сечении (при $x = x_0$) в точке с ординатой $y - \frac{v_y}{v_x} (x - x_0)$ и в момент времени $t - (x - x_0)/v_x$, в течение промежутка времени $(x - x_0)/v_x$, требуемого для ее распространения на расстояние $x - x_0$. Второе слагаемое в правой части (8.2.21) характеризует возникновение и дальнейший рост под действием ветра новой спектральной составляющей. В итоге в точке наблюдения значение интересующей нас составляющей спектра будет суммой видоизмененной старой и вновь возникшей спектральных составляющих [35].

Могут представить интерес два крайних случая, когда $\alpha = 0$ или $\beta = 0$. Пусть $\beta = 0$, $\alpha \neq 0$, тогда первый член в (8.2.21) будет совпадать с соответствующим решением (8.2.11) однородного уравнения (8.2.1). Второй член в правой части (8.2.21) в этом случае получается путем предельного перехода

$$\begin{aligned}\lim_{\beta \rightarrow 0} \left\{ \alpha \frac{\exp \left(\beta \frac{(x - x_0)}{v_x} \right) - 1}{\beta} \right\} &= \alpha \lim \left(\frac{x - x_0}{v_x} \right) \exp \left[\beta \frac{(x - x_0)}{v_x} \right] = \\&= \alpha \left(\frac{x - x_0}{v_x} \right)\end{aligned}\quad (8.2.22)$$

и может быть интерпретирован как линейный рост вновь возникшей спектральной составляющей (в полном соответствии с теорией Филлипса). По-видимому, этот случай может наблюдаться в при-

роде, если волны не оказывают заметного воздействия на структуру воздушного потока.

Пусть теперь $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$, тогда второй член в правой части (8.2.21) равен нулю и решение совпадает с первым членом в правой части. Следуя данной выше интерпретации, в этом случае можно говорить о том, что новые спектральные составляющие не возникают. Очевидно, что рассматриваемый случай является искусственным и не может наблюдаться в натуральных условиях.* И, наконец, когда $\alpha = \beta = 0$, решение (8.2.21) совпадает с решением (8.2.11).

Решение уравнения (8.2.17) при граничном условии (8.2.3) получается аналогичным (8.2.21) образом и имеет вид

$$S(x, y, t) = \left\{ S \left[x - \frac{v_x}{v_y} (y - y_0), y_0, t - \frac{y - y_0}{v_y} \right] \exp \left(\beta \frac{y - y_0}{v_y} \right) + \right. \\ \left. + \frac{\alpha}{\beta} \left\{ \exp \left[\frac{\beta (y - y_0)}{v_y} - 1 \right] \right\} \right\}. \quad (8.2.23)$$

Решение уравнения (8.2.17) при начальных данных (8.2) имеет вид

$$S(x, y, t) = S[x - v_x(t - t_0), y - v_y(t - t_0), t_0] \exp [\beta(t - t_0)] + \\ + \frac{\alpha}{\beta} \{ \exp [\beta(t - t_0)] - 1 \}. \quad (8.2.24)$$

Как указывалось в разделе 8.1, решение задачи с начальными данными и граничными условиями на произвольном контуре будет являться комбинацией решений (8.2.21), (8.2.23), (8.2.24) в зависимости от того, являются ли величины $[t - (x - x_0)/v_x]$, $[t - (y - y_0)/v_y]$ положительными или отрицательными.

Не представляет принципиальных трудностей нахождение решения и в случае, когда $\alpha = \alpha(x, y, t, \omega, \theta)$, $\beta = \beta(x, y, t, \omega, \theta)$, т. е. α и β изменяются во времени в пространстве. По внешнему виду это решение будет напоминать (8.2.21), но вместо числовых коэффициентов α и β будут стоять сложные интегральные выражения вида

$$\int_{t_0}^t \alpha [x - v_x(t - \tau), y - v_y(t - \tau), \tau] d\tau,$$

которые затрудняют анализ решения и его использование для практических расчетов.

8.2.3. Развитие и обрушение волн

В различных методах расчета волн [100] для описания развития и обрушения волн правая часть уравнения (8.1) задается в виде (8.1.2).

* Хотя могут быть ситуации, когда $\alpha \ll \beta$, тогда влияние второго слагаемого в (8.2.21) будет весьма не существенным.

Решение поставленной задачи при $\alpha(x, y)$ и $\beta(x, y)$, не зависящих от времени t , имеет вид [113]

$$\left(S + \frac{\alpha}{\beta}\right) v(S) = \left(S_1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) v(S_1) \exp(\beta t - \beta_1 t_0), \quad (8.2.25)$$

где

$$S_1 = S[t_0, x - v_x(t - t_0), y - v_y(t - t_0)];$$

$$\alpha_1 = \alpha[x - v_x(t - t_0), y - v_y(t - t_0)];$$

$$\beta_1 = \beta[x - v_x(t - t_0), y - v_y(t - t_0)];$$

$$v(S) = \exp \left[\beta \int_0^S \frac{\mu(u)}{1 - \mu(u)} \frac{du}{\alpha + \beta u} \right]. \quad (8.2.26)$$

Для изучения решений вида (8.2.25) необходимо задать вид функции

$$\mu = \mu(S). \quad (8.2.27)$$

В методе Барнетта зависимость (8.2.27) имеет вид (8.1.8). Для этого вида функции уравнение (8.2.25) должно решаться численным или графическим способами.

Среди других аппроксимаций наибольший интерес представляет выражение (8.1.10), предложенное Ювингом [201]. В этом случае интеграл (8.2.26) берется в квадратурах [113].

Если задать

$$\mu(S) = S/S_p, \quad (8.2.28)$$

то в этом случае не только интеграл (8.2.26) берется в квадратурах, но и решение (8.2.25) можно получить в явном виде, например, при значениях α и β , не зависящих от x и y [120]:

$$S = \frac{S_p(\alpha + \beta S_1) \exp \left[\left(\frac{\alpha}{S_p} + \beta \right) (t - t_0) \right] - \alpha(S_p - S_1)}{\beta(S_p - S_1) + (\alpha + \beta S_1) \exp \left[\left(\frac{\alpha}{S_p} + \beta \right) (t - t_0) \right]}. \quad (8.2.29)$$

Решение (8.2.29) было использовано Дженюком для построения метода расчета волн в Баренцевом, Норвежском и Гренландском морях [100].

Попутно отметим, что отсутствие в (8.2.29) членов, характеризующих нелинейные взаимодействия и диссипацию волновой энергии, не позволяет объяснить такой эффект, как затухание зыби.

8.2.4. Учет нелинейного взаимодействия

Нелинейные взаимодействия предполагают обмен энергией между спектральными составляющими на различных частотах. Поэтому формальная запись

$$G_5 = \Gamma - \tau S \quad (8.2.30)$$

в виде линейной функции отличается от (8.2.16) тем, что величины Γ и τ существенно зависят [см. выражения (8.1.12) и (8.1.13)] от стадии развития спектральной составляющей, вида зависимости спектральной плотности волн и параметров E и f_0 от времени.

Вследствие этого решение уравнения (8.1) с правой частью вида (8.1.3) нельзя рассматривать как сумму решений вида (8.2.21) с заменой α на Γ и β на τ и решения (8.2.25). В предположении, что Γ и τ на малом отрезке времени не зависят от t , аналитическое решение уравнения (8.1) с правой частью (8.1.3) на глубокой воде при начальном условии (8.2) имеет вид [112, 113]

$$\left(S + \frac{\alpha}{\beta}\right) v(S) p(S) = \left(S_1 + \frac{\alpha_1}{\beta_1}\right) v(S_1) p(S_1) \exp(\beta t - \beta_1 t_0), \quad (8.2.31)$$

или

$$p(S) = \exp \left\{ - \int_0^S \frac{G_5(u) du}{G(u) G_{1,2}(u)} \right\}, \quad (8.2.32)$$

G_5 задается выражением (8.2.30) при Γ и τ , определяемых формулами (8.1.12), (8.1.13), $G_{1,2}$ задается выражением (8.2.16) при α и β , определяемых формулами (8.1.4), (8.1.11).

Таким образом, полученное аналитическое решение является решением поставленной задачи при следующих допущениях: поле ветра стационарно (хотя может быть неоднородным), море глубокое, трансформации волн на мелководье нет, обрушение волн под влиянием воздействия ветра учтено в виде довольно произвольной функции $\mu(S)$, нелинейные взаимодействия учитываются, но коэффициенты Γ и τ принимаются постоянными на малых интервалах времени.

Несмотря на наглядность полученного аналитического решения и на его достоинства при изучении зависимости спектральной плотности волнения в различных точках пространства и в различные моменты времени от компонент правой части уравнения (8.1), начальных и граничных условий, вряд ли целесообразно построение алгоритма на основе выражения (8.2.31).

Неявный вид задания решения, сложность выбора численного метода для расчета значений спектральной плотности, наличие интегральных характеристик, таких как $v(S)$, $p(S)$, E , f_0 , обусловили необходимость рассмотрения (наряду с аналитическим) численного решения поставленной задачи.

В заключение раздела еще раз подчеркнем, что рассмотренный класс аналитических решений позволяет построить достаточно оптимальный алгоритм расчета спектра волн, на каждом шаге которого используется (в зависимости от конкретных условий) то или иное аналитическое решение, склейка решений производится численно. Такой алгоритм позволяет существенно сократить машинное время, требуемое для решения задачи.

8.3. Численное решение уравнения баланса

В прямоугольной области D выберем сетку с шагами Δx , Δy по пространственным переменным и Δt — по времени. Введем обозначение

$$S_{ij}^n = S(n\Delta t, i\Delta x, j\Delta y, \omega, \theta),$$

$$n = 0, 1, \dots, N; \quad i = 0, 1, \dots, I; \quad j = 0, 1, \dots, J.$$

Аппроксимируем уравнение (6.4.12) двухслойной разностной схемой с весами:

$$\begin{aligned} & \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + c_1 v_x \frac{S_{i,j}^n - S_{i-1,j}^n}{\Delta x} + c_2 v_y \frac{S_{i,j}^n - S_{i,j-1}^n}{\Delta y} + \\ & + c_3 v_x \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + c_4 v_y \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} + c_5 v_x \frac{S_{i+1,j}^n - S_{i,j}^n}{\Delta x} + \\ & + c_6 v_y \frac{S_{i,j+1}^n - S_{i,j}^n}{\Delta y} + c_7 v_x \frac{S_{i+1,j}^{n+1} - S_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \\ & + c_8 v_y \frac{S_{i,j+1}^{n+1} - S_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} = G_{i,j}^n, \end{aligned} \quad (8.3.1)$$

где $c_1 + c_3 + c_5 + c_7 = 1$, $c_2 + c_4 + c_6 + c_8 = 1$.

Уравнение (8.3.1) должно решаться при начальном условии (8.2) в виде

$$S_{i,j}^0 = S_1(i\Delta x, j\Delta y, t_0, \omega, \theta) \quad (8.3.2)$$

и граничном условии (8.3), записываемом в виде, зависящем от направления θ распространения спектральной составляющей.

Рассмотрим этот вопрос более подробно. Уравнение характеристик для уравнения (8.2.1) в пространстве переменных (x, y) имеет вид

$$\frac{dx}{v \cos \theta} = \frac{dy}{v \sin \theta}. \quad (8.3.3)$$

Решение (8.3.3) приводит к характеристикам в виде прямых линий, задаваемых выражением

$$y = x \operatorname{tg} \theta + c, \quad (8.3.4)$$

где c — произвольная постоянная.

Из (8.3.4), а еще более наглядно на рис. 8.3.1 видно, что вид поля характеристик, а следовательно, и вид граничных условий зависит от того, какому промежутку $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\left[0, -\frac{\pi}{2}\right]$, $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $\left[-\frac{\pi}{2}, -\pi\right]$ принадлежит θ .

При $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, согласно рис. 8.3.2, граничные условия

должны быть заданы на линиях OJ и OI , так как любая из характеристик имеет начало на одной из этих линий. При этих условиях (8.3) запишется в виде

$$S_{Oj}^n = S_2(x_0, j\Delta y, n\Delta t), \quad (8.3.5)$$

$$S_{iO}^n = S_3(i\Delta x, y_0, n\Delta t), \quad (8.3.6)$$

где x_0, y_0 — координаты точки «О», в простейшем случае $x_0 = y_0 = 0$. При $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\pi\right]$ (рис. 8.3.2) граничные условия должны

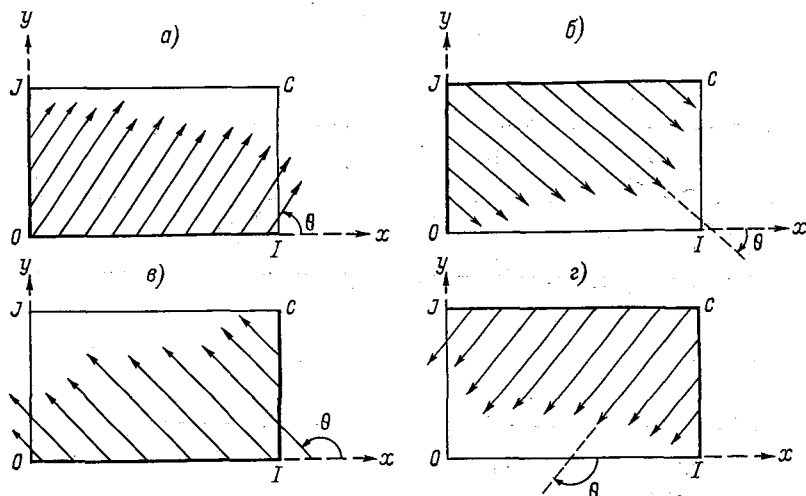


Рис. 8.3.1. Поля характеристик (8.3.4) в зависимости от направления распространения θ

а) $\theta \in [0, \pi/2]$, б) $\theta \in [0, -\pi/2]$, в) $\theta \in [\pi/2, \pi]$, г) $\theta \in [-\pi/2, -\pi]$

быть заданы на линиях JC и CI . При этих условиях (8.3) запишется в виде

$$S_{iJ}^n = S_4(i\Delta x, j\Delta y, n\Delta t), \quad (8.3.7)$$

$$S_{jI}^n = S_5(j\Delta y, i\Delta x, n\Delta t). \quad (8.3.8)$$

При $\theta \in \left[0, -\frac{\pi}{2}\right]$ (рис. 8.3.2) граничные условия задаются в виде (8.3.5) и (8.3.7), а при $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ (рис. 8.3.2) — в виде (8.3.6) и (8.3.8).

Пользуясь разложением в ряд Тэйлора, найдем погрешности R аппроксимации уравнения (6.4.12) разностным уравнением (8.3.1):

$$\begin{aligned} R = & 0,5\Delta t S_{tt} - 0,5\Delta x v_x (c_1 + c_3 - c_5 - c_7) S_{xx} - \\ & - 0,5\Delta y v_y (c_2 + c_4 - c_6 - c_8) S_{yy} + \Delta t (c_3 + c_7) v_x S_{tx} + \\ & + \Delta t (c_4 + c_8) v_y S_{ty} + O(\Delta t, \Delta x, \Delta y). \end{aligned} \quad (8.3.9)$$

Схема (8.3.1) имеет первый порядок точности. Веса c_i ($i = 1, 2, \dots, 8$) определяют конкретный вид двухслойной разностной схемы и выбираются в зависимости от направлений θ и условий устойчивости и поэтому существенным образом зависят от знака и величины коэффициентов v_x и v_y . Из общей схемы (8.3.1) можно [113] составить 8 конкретных разностных схем, которые разделим на 2 типа: относительно устойчивые явные схемы и абсолютно устойчивые неявные схемы.

Неявные схемы имеют бесконечную область зависимости решения разностного уравнения и поэтому применяются лишь в том

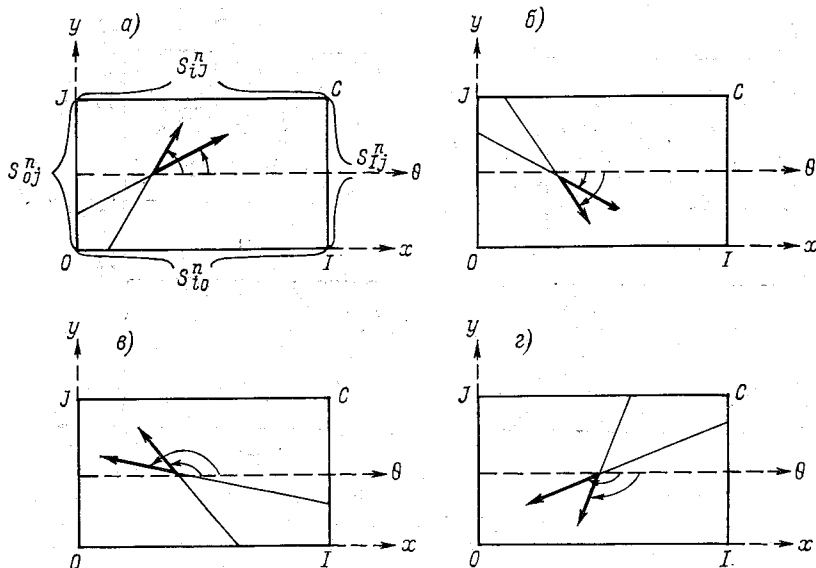


Рис. 8.3.2. Задание граничных условий для решения уравнения (8.3.1) в зависимости от направления θ

а) $\theta \in [0, \pi/2]$, б) $\theta \in [0, -\pi/2]$, в) $\theta \in [\pi/2, \pi]$, г) $\theta \in [-\pi/2, -\pi]$

случае, если условие устойчивости (8.3.12) нарушается в небольшом числе точек (для малых ω). Если же условие устойчивости нарушается почти для всех ω , то лучше всего уменьшать шаг по времени Δt [113].

Бассейн, в котором производится расчет волнения, вписывается в сеточную область с прямоугольной границей (рис. 8.3.3). Сеточная область состоит из $I \times J$ элементарных прямоугольников со сторонами Δx и Δy ($\Delta x, \Delta y$ — постоянные). Береговая линия бассейна аппроксимируется ломаной, проходящей по соответствующим сторонам элементарных прямоугольников. Таким образом, исходная прямоугольная область разбивается этой линией на две области: внешнюю G_I и внутреннюю G'_I .

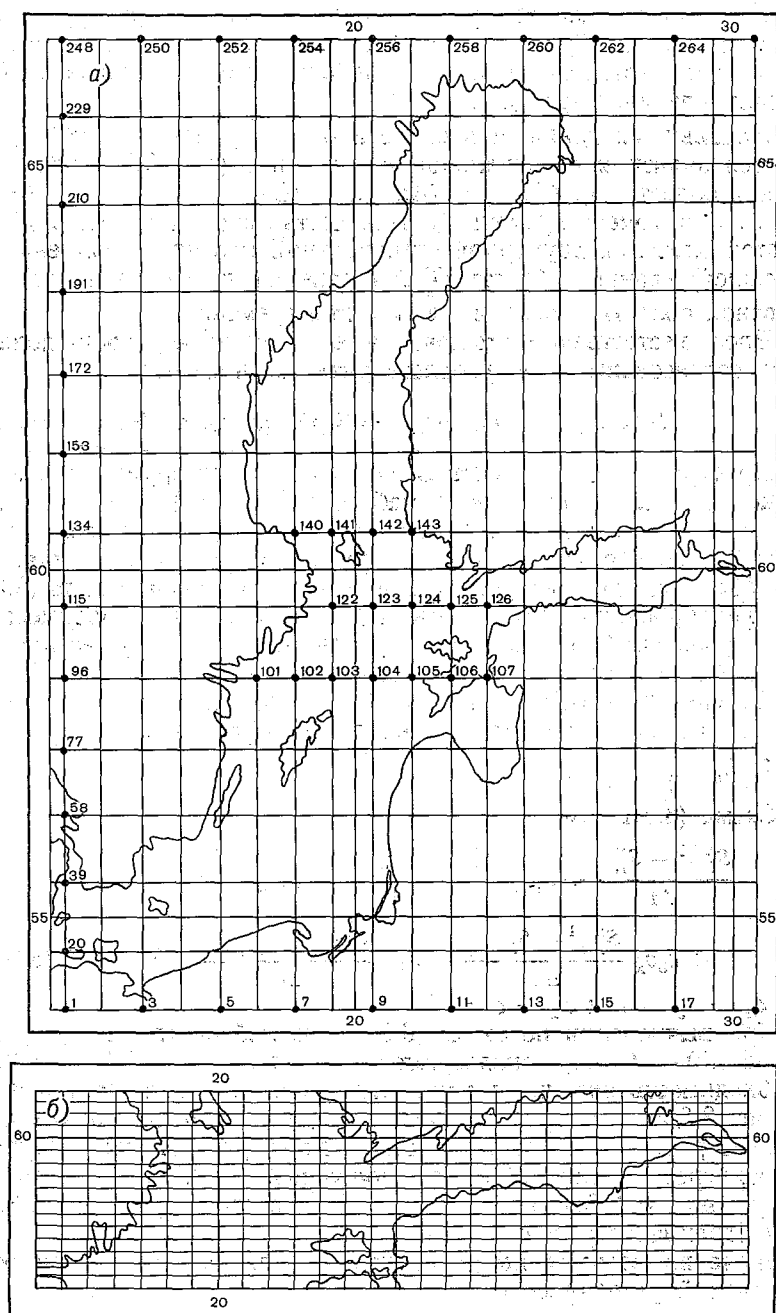


Рис. 8.3.3. Виды сетчатых областей
 а — Балтийское море; б — центральная часть Балтийского моря и Финский залив

Поле ветра задается в узлах сеточной области в фиксированные моменты времени $t_n = n\delta t$ ($n = 0, 1, \dots$) в виде числового массива, элементами которого являются значения модуля скорости U_{nij} и направления ветра φ_{nij} .

Начальными данными в области G'_1 для уравнения (8.3.1) являются значения спектральной плотности $S(\omega_r, \theta_p)$ в узлах сеточной области (x_i, y_j) , $x_i = i\Delta x$, $y_j = j\Delta y$ ($i = 1, 2, \dots, I$, $j = 1, 2, \dots, J$) в момент времени t_0 . В качестве граничных условий задаются значения двумерной спектральной плотности волнения на (внешней) границе области G'_1 в соответствующих узлах (x^*, y^*) сеточной области в различные моменты времени.

Вполне естественно, что начальные и граничные условия должны быть согласованы, т. е. удовлетворять соотношению

$$S(x^*, y^*, t, \omega, \theta)|_{t=t_0} = S(x^*, y^*, t_0, \omega, \theta). \quad (8.3.10)$$

Пространственный спектр $S(\omega, \theta)$ аппроксимируется в каждой точке x_i, y_j сеточной области набором $S(\omega_r, \theta_p)$, $r = 1, 2, \dots, l$, $p = \dots - 1, 0, 1, \dots$ дискретных спектральных составляющих: l — по частоте и s — по направлению распространения. Таким образом, одновременно решается $l \times s$ уравнений вида (8.3.1) для фиксированной r -й частоты и p -го направления. Взаимосвязь этих уравнений на каждом временном шаге осуществляется посредством интегральных (по параметрам θ и ω) функций Γ и τ .

Выберем нулевое направление θ вдоль оси x . Рассмотрим 4 вида схем в зависимости от того, в какой четверти находится угол θ_p

$$1. \theta_p \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

Схема (8.3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + c_1 v_x \frac{S_{i,j}^n - S_{i-1,j}^n}{\Delta x} + c_2 v_y \frac{S_{i,j}^n - S_{i,j-1}^n}{\Delta y} + \\ & + c_3 v_x \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + c_4 v_y \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} = G_{i,j}^n, \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

где $c_1 + c_3 = 1$ и $c_2 + c_4 = 1$.

При вычислении по схеме (8.3.11) из набора граничных условий (8.3.5) — (8.3.8) используются два условия — (8.3.5) и (8.3.6). Необходимость задания именно этих условий наглядно показана на рис. 8.3.2. Для простоты область G будем считать прямоугольной. Из рис. 8.3.2 видно, что волновая энергия может поступать только через границы OJ [граничное условие (8.3.5)] и OI [граничное условие (8.3.6)], но не через JC [граничное условие (8.3.7)] и CI [граничное условие (8.3.8)].

Значения весовых коэффициентов c_i задаются в зависимости от условий устойчивости

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \cos \theta_p + \frac{\Delta t}{\Delta y} \sin \theta_p < \frac{1}{v}. \quad (8.3.12)$$

Если при заданных Δt , Δx , Δy , θ_p условие (8.3.12) выполняется, то *

$$c_1 = c_2 = 1; \quad c_3 = c_4 = 0, \quad (8.3.13)$$

в противном случае

$$c_1 = c_2 = 0; \quad c_3 = c_4 = 1. \quad (8.3.14)$$

В соответствии с выбором весовых множителей вычислительная схема (8.3.11) будет иметь вид

$$\frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + v_x \frac{S_{i,j}^n - S_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_y \frac{S_{i,j}^n - S_{i,j-1}^n}{\Delta y} = G_{i,j}^n \quad (8.3.15)$$

при c_i , определяемых соотношениями (8.3.13), или

$$\frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + v_x \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + v_y \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} = G_{i,j}^n \quad (8.3.16)$$

при c_i , определяемых соотношениями (8.3.14).

Для большей наглядности перепишем выражения (8.3.15) и (8.3.16) с учетом того, что

$$G_{i,j}^n = (\alpha_{i,j}^n + \beta_{i,j}^n S_{i,j}^n) (1 - \mu_{i,j}^n) + \Gamma_{i,j}^n - \tau_{i,j}^n S_{i,j}^n, \quad (8.3.17)$$

в виде

$$S_{i,j}^{n+1} = \left\{ 1 - v_x \frac{\Delta t}{\Delta x} - v_y \frac{\Delta t}{\Delta y} + [\beta (1 - \mu_{i,j}^n) - \tau_{i,j}^n] \Delta t \right\} S_{i,j}^n + \\ + v_x \frac{\Delta t}{\Delta x} S_{i-1,j}^n + v_y \frac{\Delta t}{\Delta y} S_{i,j-1}^n + [\alpha (1 - \mu_{i,j}^n) + \Gamma_{i,j}^n] \Delta t; \quad (8.3.18)$$

$$S_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{1 + v_x \frac{\Delta t}{\Delta x} + v_y \frac{\Delta t}{\Delta y}} \{ [1 + (\beta_{i,j}^n (1 - \mu_{i,j}^n) - \tau_{i,j}^n) \Delta t] S_{i,j}^n + \\ + v_x \frac{\Delta t}{\Delta x} S_{i-1,j}^{n+1} + v_y \frac{\Delta t}{\Delta y} S_{i,j-1}^{n+1} + [\alpha_{i,j}^n (1 - \mu_{i,j}^n) + \Gamma_{i,j}^n] \Delta t \}. \quad (8.3.19)$$

Из выражения (8.3.18) (а еще более наглядно из рис. 8.3.4 а) видно, что значения $S_{i,j}^{n+1}$ спектральных составляющих на $(n+1)$ -м слое в (i, j) -м узле сеточной области вычисляются по трем величинам $S_{i,j-1}^n$, $S_{i,j}^n$, $S_{i-1,j}^n$, принадлежащим n -му слою и $(i, j-1)$, (i, j) , $(i-1, j)$ узлам сеточной области. При этом порядок расчета определяется следующим образом: при фиксированном значении $(i-1)$ индекс j пробегает значения от 1 до J , затем первый индекс принимает значение i и т. д. Когда во всех $I \times J$ узлах сеточной об-

* Следует отметить, что весами вида (8.3.14) можно пользоваться независимо от выполнения условий (8.3.12). Однако задание сочетания весов (8.3.13) и (8.3.14) приводит к меньшим погрешностям вычислений, задание дробных значений весов c_i приводит к большому объему вычислений.

ласти вычислены значения $S_{i,j}^{n+1}$, переходим аналогичным образом к расчету $S_{i,j}^{n+2}$. Наиболее существенным моментом в рассматриваемой вычислительной схеме (8.3.18) является то, что индексы i и j изменяются в сторону их увеличения, но не наоборот. Какой из индексов, i или j , изменяется при фиксированном другом индексе — несущественно. Вычислительная схема (8.3.19) предусматривает (рис. 8.3.4 б) расчет значений $S_{i,j}^{n+1}$ спектральных составляющих на $(n+1)$ -м слое в (i,j) -м узле по двум величинам $S_{i,j-1}^{n+1}$ и $S_{i-1,j}^{n+1}$,

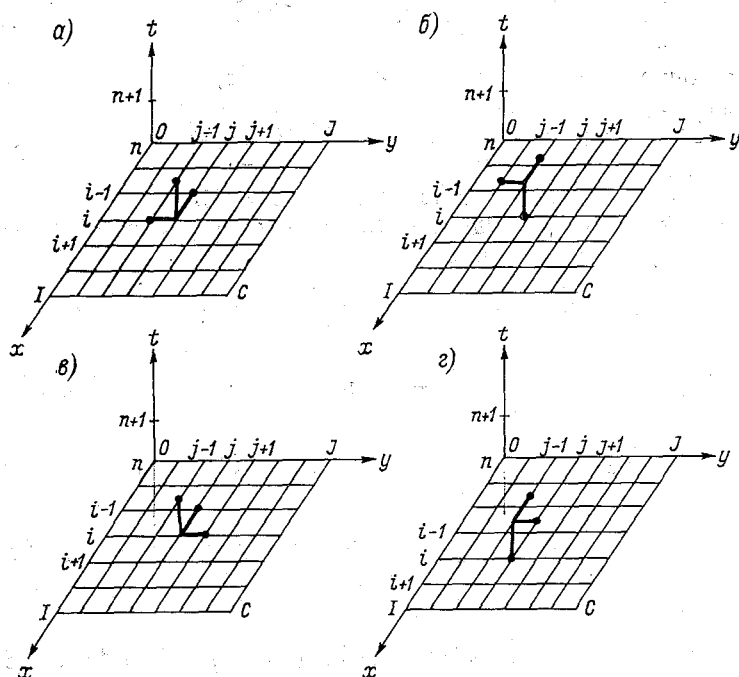


Рис. 8.3.4. Схема аппроксимации уравнения (8.3.1) разностными уравнениями (8.3.18) (а), (8.3.19) (б), (8.3.25) (в), (8.3.26) (г)

принадлежащим $(n+1)$ -му слою, и величине $S_{i,j}^n$, принадлежащей n -му слою. Порядок перебора индексов n, i, j совпадает с определенным выше.

$$2. \theta_p \in \left[0, -\frac{\pi}{2}\right].$$

Разностная схема (8.3.1) имеет вид

$$\frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + c_1 v_x \frac{S_{i,j}^n - S_{i-1,j}^n}{\Delta x} + c_3 v_x \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} +$$

$$+ c_6 v_y \frac{S_{i,j+1}^n - S_{i,j}^n}{\Delta y} + c_8 v_y \frac{S_{i,j+1}^{n+1} - S_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} = G_{i,j}^n, \quad (8.3.20)$$

где $c_1 + c_3 = 1$, $c_6 + c_8 = 1$.

При вычислении по схеме (8.3.20) используются граничные условия (8.3.5) и (8.3.7) (см. рис. 8.3.2 б). Значения весовых коэффициентов c_i задаются в зависимости от условия устойчивости (8.3.12). Если при заданных Δt , Δx , Δy условие (8.3.12) выполняется, то

$$c_1 = c_6 = 1, \quad c_3 = c_8 = 0; \quad (8.3.21)$$

в противном случае *

$$c_1 = c_6 = 0, \quad c_3 = c_8 = 1. \quad (8.3.22)$$

В соответствии с выбором весовых множителей разностная схема (8.3.20) будет иметь вид

$$\frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + v_x \frac{S_{i,j}^n - S_{i-1,j}^n}{\Delta x} + v_y \frac{S_{i,j+1}^n - S_{i,j}^n}{\Delta y} = G_{i,j}^n \quad (8.3.23)$$

при c_i , определяемых соотношением (8.3.23), и

$$\frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + v_x \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + v_y \frac{S_{i,j+1}^{n+1} - S_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} = G_{i,j}^n \quad (8.3.24)$$

при c_i , определяемых соотношением (8.3.23).

Для большей наглядности перепишем выражения (8.3.23) и (8.3.24) с учетом (8.3.17) в виде

$$\begin{aligned} S_{i,j}^{n+1} = & \left\{ 1 - v \cos \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} - v \sin |\theta| \frac{\Delta t}{\Delta y} + [\beta (1 - \mu_{i,j}^n) - \right. \\ & \left. - \tau_{i,j}^n] \Delta t \right\} S_{i,j}^n + v \cos \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} S_{i-1,j}^n + v \sin |\theta| \frac{\Delta t}{\Delta y} S_{i,j+1}^n + \\ & + [\alpha_{i,j}^n (1 - \mu_{i,j}^n) + \Gamma_{i,j}^n] \Delta t, \end{aligned} \quad (8.3.25)$$

$$\begin{aligned} S_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{1 + v \cos \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} + v \sin |\theta| \frac{\Delta t}{\Delta y}} \{ [1 + (\beta_{i,j}^n (1 - \mu_{i,j}^n) - \\ & - \tau_{i,j}^n) \Delta t] S_{i,j}^n + v \cos \theta \frac{\Delta t}{\Delta x} S_{i-1,j}^{n+1} + v \sin |\theta| \frac{\Delta t}{\Delta y} S_{i,j+1}^{n+1} + \\ & + [\alpha_{i,j}^n (1 - \mu_{i,j}^n) + \Gamma_{i,j}^n] \Delta t \}. \end{aligned} \quad (8.3.26)$$

Из выражения (8.3.26), а еще более наглядно из рис. (8.3.4 в) видно, что значения $S_{i,j}^{n+1}$ вычисляются по трем величинам $S_{i,j}^n$, $S_{i-1,j}^n$, $S_{i,j+1}^n$, принадлежащим n -му слою и $(i, j-1)$, (i, j) , $(i-1, j)$ узлам

* Условиями (8.3.22) можно пользоваться независимо от условия (8.3.12).

сеточной области. Расчет ведется по индексу i в порядке возрастания и индексу j в порядке убывания.

Вычислительная схема (8.3.26) предусматривает (рис. 8.3.4 з) расчет значений $S_{i,j}^{n+1}$ по двум величинам $S_{i-1,j}^{n+1}$, $S_{i,j+1}^{n+1}$, принадлежащим $(n+1)$ -му слою и величине $S_{i,j}^n$, принадлежащей n -му слою. Порядок перебора индексов n, i, j такой же, как в предыдущей схеме.

$$3. \theta_p \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right].$$

Схема (8.3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + c_2 v_y \frac{S_{i,j}^n - S_{i,j-1}^n}{\Delta y} + c_4 v_y \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} + \\ & + c_5 v_x \frac{S_{i+1,j}^{n+1} - S_{i+1,j}^n}{\Delta x} + c_7 v_x \frac{S_{i+1,j}^{n+1} - S_{i+1,j}^n}{\Delta x} = G_{i,j}^n, \end{aligned} \quad (8.3.27)$$

где $c_2 + c_4 = 1$ и $c_5 + c_7 = 1$.

Граничные условия принимают вид (8.3.6) и (8.3.4) (рис. 8.3.5). В зависимости от условий устойчивости схема (8.3.27) распадается на две схемы:

$$\frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + v_y \frac{S_{i,j}^n - S_{i,j-1}^n}{\Delta y} + v_x \frac{S_{i+1,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta x} = G_{i,j}^n \quad (8.3.28)$$

(относительно устойчивая схема) и

$$\frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + v_y \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} + v_x \frac{S_{i+1,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta x} = G_{i,j}^n \quad (8.3.29)$$

(абсолютно устойчивая схема).

Из схемы (8.3.28) имеем

$$\begin{aligned} S_{i,j}^{n+1} = & \left\{ 1 + v_x \frac{\Delta t}{\Delta x} - v_y \frac{\Delta t}{\Delta y} + [\beta_{i,j}^n (1 - \mu_{i,j}^n) - \tau_{i,j}^n] \Delta t \right\} S_{i,j}^n - \\ & - v_x \frac{\Delta t}{\Delta x} S_{i+1,j}^n + v_y \frac{\Delta t}{\Delta y} S_{i,j-1}^n + [\alpha_{i,j}^n (1 - \mu_{i,j}^n) + \Gamma_{i,j}^n] \Delta t \end{aligned} \quad (8.3.30)$$

и соответственно для схемы (8.3.29)

$$\begin{aligned} S_{i,j}^{n+1} = & \frac{1}{\left(1 + v_y \frac{\Delta t}{\Delta y} - v_x \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)} \left\{ [1 + (\beta_{i,j}^n (1 - \mu_{i,j}^n) - \tau_{i,j}^n) \Delta t] S_{i,j}^n - \right. \\ & \left. - v_x \frac{\Delta t}{\Delta x} S_{i+1,j}^{n+1} + v_y \frac{\Delta t}{\Delta y} S_{i,j-1}^n + [\alpha_{i,j}^n (1 - \mu_{i,j}^n) + \Gamma_{i,j}^n] \Delta t \right\}. \end{aligned} \quad (8.3.31)$$

Расчет по схеме (8.3.30) и (8.3.31) показан на рис. 8.3.5 а, б.

4. $\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, -\pi\right)$.

Схема (8.3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} & \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + c_5 v_x \frac{S_{i+1,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta x} + c_6 v_y \frac{S_{i,j+1}^n - S_{i,j}^n}{\Delta y} + \\ & + c_7 v_x \frac{S_{i+1,j}^{n+1} - S_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + c_8 v_y \frac{S_{i,j+1}^{n+1} - S_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} = G_{i,j}^n. \end{aligned} \quad (8.3.32)$$

Граничные условия — (8.3.7) и (8.3.8).

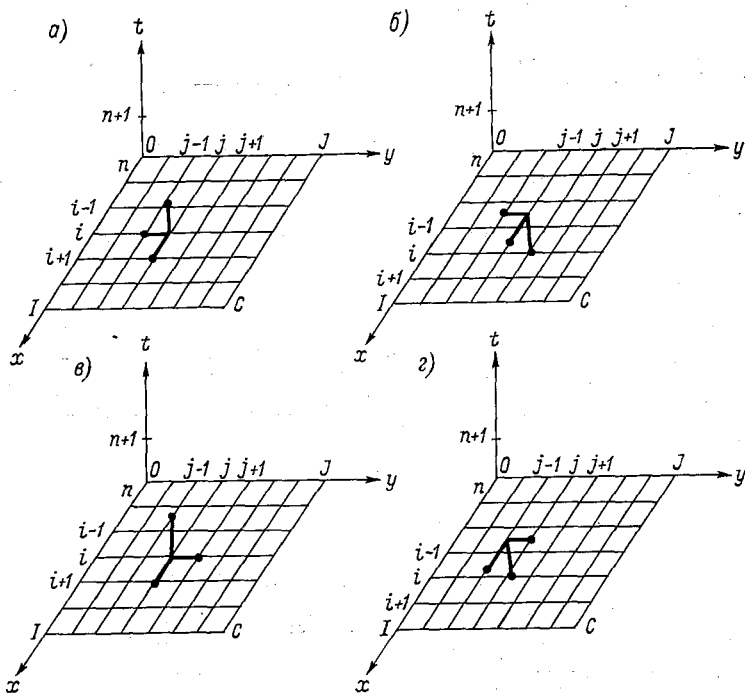


Рис. 8.3.5. Схемы аппроксимации уравнения (8.3.1) разностными уравнениями (8.3.30) (а), (8.3.31) (б), (8.3.35) (в), (8.3.36) (г)

Схема (8.3.32) распадается на две:

$$\frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + v_x \frac{S_{i+1,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta x} + v_y \frac{S_{i,j+1}^n - S_{i,j}^n}{\Delta y} = G_{i,j}^n \quad (8.3.33)$$

— относительно устойчивую схему и

$$\frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + v_x \frac{S_{i+1,j}^{n+1} - S_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + v_y \frac{S_{i,j+1}^{n+1} - S_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} = G_{i,j}^n \quad (8.3.34)$$

— абсолютно устойчивую схему.

Из схемы (8.3.33) имеем

$$S_{i,j}^{n+1} = \left[1 + v_x \frac{\Delta t}{\Delta x} + v_y \frac{\Delta t}{\Delta y} + (\beta_{i,j}^n (1 - \mu_{i,j}^n) - \tau_{i,j}^n) \Delta t \right] S_{i,j}^n - \\ - v_x \frac{\Delta t}{\Delta x} S_{i+1,j}^n - v_y \frac{\Delta t}{\Delta y} S_{i,j+1}^n + (\alpha_{i,j}^n (1 - \mu_{i,j}^n) + \Gamma_{i,j}^n) \Delta t \quad (8.3.35)$$

и из схемы (8.3.34)

$$S_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{\left(1 - v_x \frac{\Delta t}{\Delta x} - v_y \frac{\Delta t}{\Delta y} \right)} \{ [1 + (\beta_{i,j}^n (1 - \mu_{i,j}^n) - \tau_{i,j}^n) \Delta t] S_{i,j}^n - \\ - v_x \frac{\Delta t}{\Delta x} S_{i+1,j}^{n+1} - v_y \frac{\Delta t}{\Delta y} S_{i,j+1}^{n+1} + (\alpha_{i,j}^n (1 - \mu_{i,j}^n) + \Gamma_{i,j}^n) \Delta t \}. \quad (8.3.36)$$

Вычислительный процесс по схемам (8.3.35) и (8.3.36) идет аналогично рассмотренным выше случаям и представлен на рис. 8.3.5 а и г. Решение задачи по схеме (8.3.1) идет следующим образом. В момент времени $t = 0$ в каждой точке $(i\Delta x, j\Delta y)$ сеточной области рассчитывается спектр $S_\varepsilon(\omega, \theta)$ для всех ω_r и $\theta_p \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ по формулам (8.3.11). После расчета при этих условиях во всех точках области аналогичным образом производится расчет значений $S(\omega, \theta_p)$ при θ_p , принадлежащим трем остальным четвертям. Затем счет повторяется для нового момента времени $t + \Delta t$ и т. д. [113].

8.4. Примеры расчета

В настоящее время в нашей стране для расчета волн наиболее широко используют методы, изложенные в Руководстве [113], или параметрические формулы вида (II.5) — (II.10). Эти методы и формулы базируются на обобщении большого числа экспериментальных данных и наиболее эффективны при расчете для условий волнообразования, близких к идеальным.

В большинстве случаев реальные условия волнообразования (обусловленные нестационарностью и неоднородностью поля ветра, сложностью морфометрии дна и берегов) столь далеки от идеальных, что наиболее обоснованные оценки вероятностных характеристик волн можно рассчитать лишь по методам, основанным на решении уравнения баланса волновой энергии в спектральной форме. Для иллюстрации справедливости такого утверждения на рис. 8.4.1 приведены результаты расчета волн в северной части Атлантического океана во время шторма 17—18/XII 1959 г. Из рис. 8.4.1 видно, что вычисленные оценки высот волн близки к наблюдаемым.

Ниже рассмотрены некоторые примеры расчета волн при различных условиях волнообразования и на этих примерах выявлены отдельные характерные детали, подчеркивающие целесообразность использования спектральных методов расчета.

8.4.1. Расчет вероятностных характеристик штормового волнения при условиях, близких к экстремальным

Если до недавнего времени значения экстремальных волн представляли чисто академический интерес (при современных методах штормового оповещения судно, как правило, может обойти опасный район), то с появлением буровых платформ и других гидротехнических сооружений знание предельных высот волн не только жизненно важно, но имеет большое экономическое значение. Например, по данным работы [193], завышение расчетной высоты волн, возможной 1 раз в 50 лет в заданном районе, на 4 м означает удорожание стоимости одной глубоководной платформы для бурения нефти на 1 млн. фунтов стерлингов.

Для определения вероятностных характеристик волн при штормовых условиях, близких к экстремальным, в восточной части Финского залива была детально проанализирована последовательность синоптических карт, характеризующих ветровые поля в указанном районе за период с 1944 по 1975 г. Из этой последовательности выбрано по одному (реже двум) наиболее сильному шторму в каждом году. Сопоставление отобранных сильных штормов позволило выявить три штормовых периода* (25—28/VIII 1959 г., 21—22/VII 1963 г., 6—8/VIII 1967 г.) с условиями волнообразования, близкими к экстремальным, которые способствовали развитию в восточной части Финского залива волн со средней высотой около 2,5 м или более (по приближенным оценкам).

Для всех трех ситуаций расчет выполнен по методу Барнетта с некоторыми модификациями.

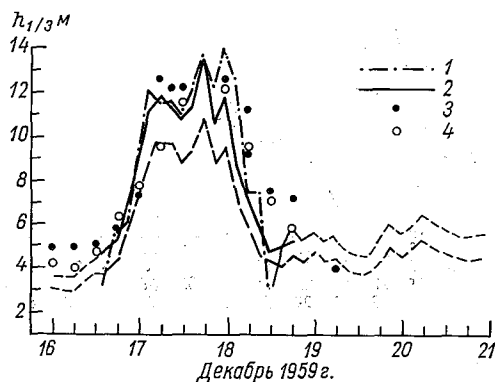


Рис. 8.4.1. Расчет высот волн для шторма 16—21/XII 1959 г. [203]

1 — доверительные интервалы для высот волн; 2 — наблюдаемые значения; 3, 4 — расчет по методу Барнетта

* Шторм 20—22/I 1957 г., по-видимому, наиболее сильный, относится к зимнему времени, когда интересующий район был покрыт льдом.

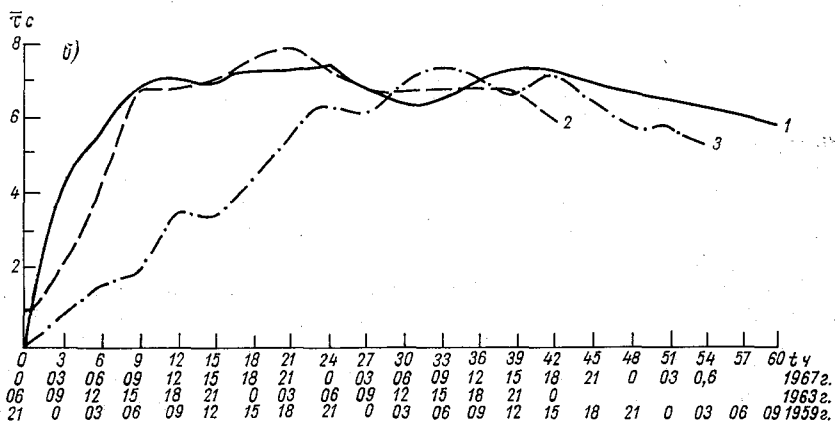
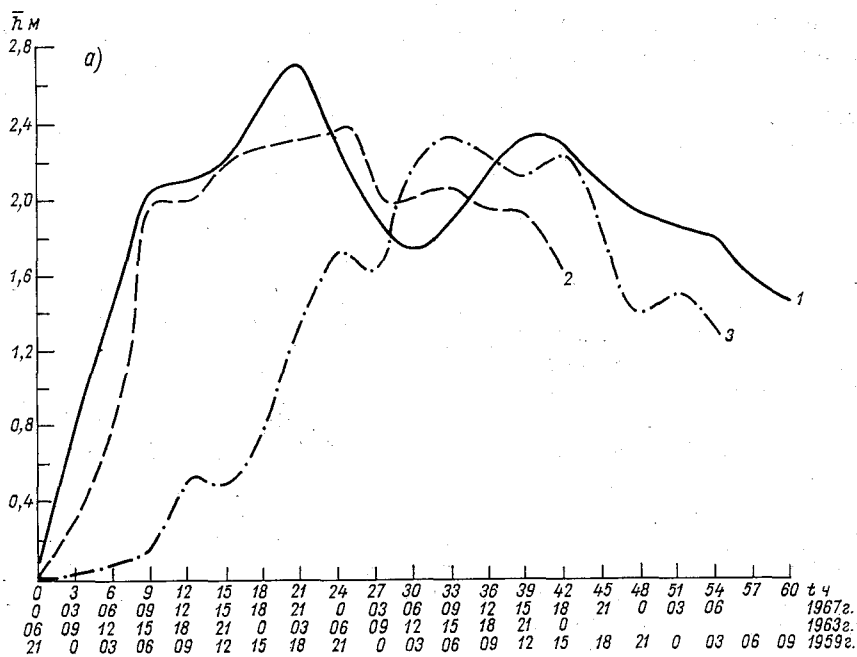


Рис. 8.4.2. Результаты расчета средних высот (а) и периодов (б) в Финском заливе для штормов:

1) 25—28/VIII 1959 г.; 2) 21—22/VII 1963 г.; 3) 6—8/VIII 1967 г.

Расчеты спектров и других связанных с ними вероятностных характеристик волн проводились по алгоритмам раздела 8.3 на ЭВМ БЭСМ-6 по трем контурам (см. рис. 8.3.3). Первый контур охватывал все Балтийское море (при $\Delta x = 111,1$ км, $\Delta y = 55,6$ км), второй — центральную часть Балтийского моря и весь Финский залив ($\Delta x = 13,9$ км, $\Delta y = 27,8$ км), третий — восточную часть Финского залива ($\Delta x = 2,8$ км, $\Delta y = 4,6$ км). Исходными данными для расчета служили значения скоростей ветра в узлах сетчатых областей; граничные условия для второго контура заданы по результатам вычисления спектров волн по первому контуру, граничные условия для третьего контура — по второму. Таким образом, на формирование волнового поля в восточной части Финского залива

Рис. 8.4.3. Эмпирические распределения высот волн за навигационный период и оценки квантилей распределения по модельным расчетам. Ежегодные максимумы (1) и срочные наблюдения (2) на плавмаеке за навигационный период; 3 — попутные судовые наблюдения; 4 — расчет для штормов 25—28/VIII 1959 г., 21—22/VII 1963 г., 6—8/VII 1967 г.

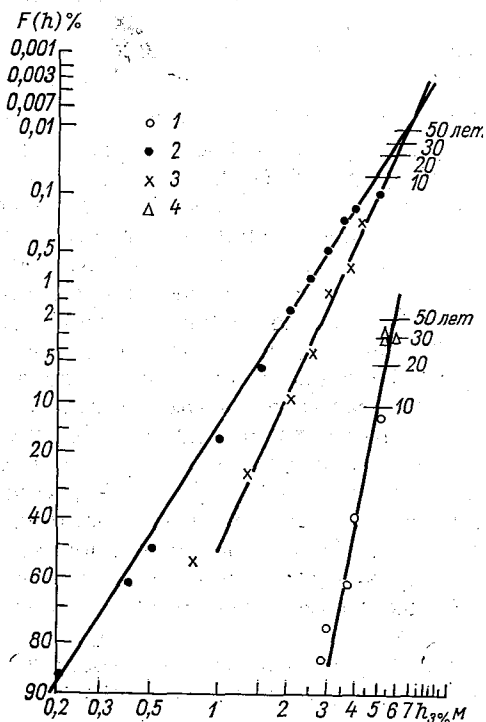


Таблица 8.4.1

Значения максимумов высот волн за навигационные периоды 1954—1961 гг. на плавмаеке

Дата *	1954 1/VIII	1955 19/XI	1956 16/XI	1957 25/X	1958 18/V	1959 ** 26— 27/VIII	1960 4/X	1961 21/VIII
Высота волн, м . . .	2,8	3,6	3,6	4,0	4,0	5,0	2,4	3,0

* До 1954 г. наблюдения над волнением выполнялись только в баллах. После 1962 г. при усилении ветра судно уходит в укрытие.

** Оценка высот волн в этот шторм дана по визуальным наблюдениям, так как вежа, по которой обычно проводились измерения, была сорвана штормом.

оказывали влияние поля ветра и волн по всему Балтийскому морю.

Результаты расчета средних высот и периодов волн в Финском заливе представлены на рис. 8.4.2.

Из рис. 8.4.2 видно, что наиболее жестокие штормовые условия со средней высотой волн до 2,7 м наблюдались в 18 ч 26/VIII 1959 г.

Для проверки результатов модельных расчетов эти расчеты были сопоставлены с данными наблюдений волн на плавмаяке (табл. 8.4.1), а также с данными попутных судовых наблюдений. Высоты волн, относящиеся к наблюдениям на плавмаяке, являются полуинструментальными и близки к $h_{3\%}$. Попутные судовые наблюдения приведены к $h_{3\%}$ по соотношению, полученному путем обобщения синхронных визуальных наблюдений и инструментальных измерений [10]. На рис. 8.4.3 сопоставлены на функциональной сетке логарифмически-нормального распределения эмпирические распределения высот волн по срочным наблюдениям на плавмаяке, попутным судовым наблюдениям и по данным табл. 8.1.1. Из рисунка видно, что все распределения хорошо спрямляются на функциональной сетке. Из-за различия в объеме исходной информации (по синоптическим срокам и годовым максимумам) оценки обеспеченности различаются между собой. Однако оценки квантилей — высот волн, наблюдающихся 1 раз в 10 лет — по разным исходным данным близки между собой. Результаты модельного расчета для вышеуказанных трех штормов должны иметь обеспеченность $1/_{32}$, $1/_{31}$ и $1/_{30}$ соответственно трем наибольшим значениям высот волн за 32-летний (1944—1975 гг.) промежуток времени. Из рисунка видно, что эти оценки хорошо согласуются с аппроксимативной прямой, полученной по данным табл. 8.4.1, и близки к оценкам по двум другим эмпирическим распределениям.*

Таким образом, принятый метод расчета позволил учесть нестационарность и неоднородность полей ветра и привел к оценкам высот волн, косвенно согласующимся с натурными данными.

8.4.2. Расчет вероятностных характеристик зыби

Предположим, что область шторма имеет неограниченные размеры и средняя высота волн в этой области равна $\bar{h}_0$.

Воспользуемся аналитическим решением (8.2.8) и вычислим значения средних высот волн зыби в заданных точках на различном удалении от области шторма, а также изменение высот волн

* Путем экстраполяции распределений, представленных на рис. 8.4.4, можно вычислить оценку средней высоты волн, возможной 1 раз в 50 лет; она для глубоководной зоны восточной части Финского залива оказывается равной $\bar{h} = 2,9$ м.

Таблица 8.4.2

Средние высоты волн зыби на различном удалении от области шторма

а) $\bar{h}_0 = 1$ м

X км	t ч								
	3	4	5	6	7	8	9	10	11
50	0,50	0,82	0,92						
100	0	0	0,21	0,50	0,68	0,82	0,89	0,92	0,95
150	0	0	0	0	0,13	0,34	0,50	0,65	0,74

X км	t ч								
	14	16	18	20	22	24	26	28	30
300	0,13	0,33	0,50	0,65	0,74	0,82	0,86	0,89	0,92
450	0	0	0	0	0,16	0,33	0,43	0,57	0,65

б) $\bar{h}_0 = 3$ м

X км	t ч								
	4	6	8	10	12	14	16	18	20
150	0,07	2,05	2,69						
300	0	0	0,07	1,18	2,05	2,44	2,69	2,79	2,82

в этих точках с течением времени. Результаты расчетов для $\bar{h}_0$, равных 1 и 3 м, приведены при $S_\zeta(\omega, \theta)$ в виде (4.2.3) в табл. 8.4.2. Из таблицы видно, что средняя высота волн в фиксированной точке увеличивается с течением времени (по мере прихода новых высокочастотных спектральных составляющих). Напомним, что скорость изменения $\bar{h}$ во времени зависит от вида спектральной плотности $S_\zeta(\omega, \theta)$ в области шторма.

Если воспользоваться номограммой Руководства [133], то можно вычислить, что на расстоянии 100 км от области шторма средняя высота волн должна достигнуть 90% исходной за 5 ч. Спектральная модель показывает, что за 5 ч доходят до интересующей нас точки только волны с частотами ниже 1 рад/с, но дисперсия процесса в этой полосе частот составляет 20% исходной, а 90% энергии от первоначальной в анализируемой точке будет только через 10 ч.

Для того чтобы убедиться в справедливости этих расчетов, обратимся к натурным данным.

В VI Атлантической экспедиции ГУГМС 8—9/X 1969 г. в Атлантическом океане была выполнена синхронно двумя судами

«Океанограф» и «Айсберг», удаленными друг от друга на расстояние 150 миль, серия записей волнения. Непосредственно в районе измерений в это время наблюдались слабые ветры до 5 м/с (ветровое волнение высотой до 0,5 м); структура волнового поля определялась главным образом распространением зыби западных румбов. По-видимому, источником зыби являлось волнение, вызванное прохождением 6—8/X над Северной Атлантикой глубокого циклона.

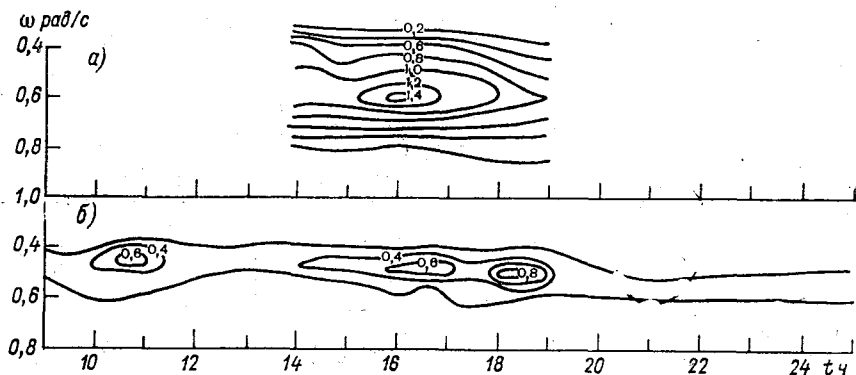


Рис. 8.4.4. Значения спектральной плотности $S(\omega t)$ в $\text{м}^2 \cdot \text{с}$ волнового процесса, вычисленные по данным натурных измерений 8/X 1969 г. с НИС «Океанограф» (а) и «Айсберг» (б). Суда располагались на расстоянии 150 км, направление распространения зыби — от НИС «Океанограф» к НИС «Айсберг»

В табл. 8.4.3 приведены данные наблюдений над ветром, визуальные и инструментальные оценки элементов волн с двух судов, а на рис. 8.4.4 — значения спектральной плотности $S_{\xi}(\omega)$, вычисленные по данным волновых измерений. Из табл. 8.4.1 и на рис. 8.4.4 видно, что структура волнового поля была довольно сложной, вероятностные характеристики волновых систем менялись во времени, преобладающая система волн всегда была хорошо выражена, и ее параметры легко определяются по частотному спектру. Хорошо выраженная нестационарность волнового процесса дала возможность сделать выводы о характере распространения зыби в пространстве. Описанный волновой процесс был промоделирован в трех вариантах:

а) в соответствии с выражением (8.2.11) в предположении, что волновая энергия распространяется лишь в одном направлении (200°);

б) в соответствии с выражением (8.2.11) в предположении, что функция углового распределения имеет вид (4.1.1);

в) по уравнению (8.3.1), где правая часть задавалась в виде (8.2.5).

Таблица 8.4.3

Условия волнообразования и статистические характеристики волнения в Атлантическом океане 8/X 1969 г. по данным НИС «Океанограф» и «Айсберг»

Дата и время наблюдений	НИС «Айсберг»										НИС «Океанограф»									
	ветер			данные визуальных наблюдений						инструментальные измерения		ветер			данные визуальных наблюдений			инструментальные измерения		
				вв	зыбь I		зыбь II		вв						зыбь					
	скорость, м/с	направление, град.	высота, м	период, с	направление, град.	высота, м	период, с	направление, град.	Дисперсия волнового процесса, м²	частота максимумов спектра волн, рад/с	скорость, м/с	направление, град.	высота, м	период, с	направление, град.	Дисперсия волнового процесса, м²	частота максимумов спектра волн, рад/с			
			высота, м	период, с	направление, град.	высота, м	период, с	направление, град.					высота, м	период, с	направление, град.					
8/X 09	5,8	130	0,5	2	12,5	320	1,5	10	260	0,12	0,48	0	—	0	1,5	8	280	0,26	0,48	
12	3,7	130	0,25	2	14	310	1,5	11	260	0,10	0,48	0	—	0	2,0	12	280	—	—	
15	1,2	180	0,25	2	13	300	1,5	10	260	0,15	0,48	3,0	160	0,25	3,0	14	280	0,45	0,51	
18	0	—	0	2	13	300	1	10	260	0,25	0,49	6,0	210	1,0	3,0	14	280	0,29	0,54	
21	1,0	80	0	2	13	300	—	—	—	0,14	0,55	2,0	160	0,25	2,0	12	280	—	—	
9/X 00	1,6	130	0	1,5	13	300	—	—	—	0,14	0,51	6,0	160	1,0	2,0	—	250	—	—	

Примечание. В отдельные сроки наблюдателями НИС «Айсберг» была зафиксирована и третья система зыби от СВ с высотой волн до 0,5 м.

Исходными данными для расчета во всех трех вариантах являлась последовательность частотных спектров волнения, зарегистрированного на НИС «Океанограф». Начальные условия для простоты интерпретации результатов расчета были приняты тождественно равными нулю на всех частотах и для всех направлений распространения спектральных составляющих. Расчет производился при $\Delta x = 50$ км, $\Delta t = 1$ ч.

В первом случае время появления максимума спектральной плотности в районе измерений волн на НИС «Айсберг» (пункт 2), наблюдавшийся в 19 ч, вполне объясняется распространением составляющих, формирующих волновое поле в районе (пункт 1), НИС «Океанограф» в 16 ч. Величина максимума в пункте 2 оказалась равной соответствующей величине в пункте 1. Модельный расчет во втором варианте показал, что различия в скоростях и направлениях распространения спектральных составляющих привели к запаздыванию (по отношению к 19 ч) максимума спектра в пункте 2, но величина этого максимума лучше соответствовала натурным данным. Нелинейные взаимодействия (вариант 3) не привели к существенным изменениям результатов модельного расчета.

8.4.3. Расчет вероятностных характеристик смешанного волнения

При ослаблении ветра и изменении его направления ветровое волнение на любой стадии его развития переходит в смешанное волнение. Моделирование этого процесса возможно только на основе численных решений уравнения баланса волновой энергии в спектральной форме. В качестве примера решения такой задачи рассмотрим модель ситуации, наблюдавшейся в третьей фазе Атлантического тропического эксперимента АТЭП-1974 г. В период с 9 по 12/IX 1974 г. в указанном районе наблюдалась погода со слабыми юго-западными и западными ветрами скоростью 2—8 м/с; волнение было смешанным с преобладанием компонент зыби от южных направлений высотой 2,5 м и периодом 10 с. Необходимо отметить, что эта система волн зыби фактически не изменяла своих характеристик. Спектральные плотности волнового процесса для рассматриваемых судов приведены на рис. 8.4.5. Из рисунка видно, что спектральная плотность соответствует смешанному волнению с явным преобладанием компонент зыби с частотой максимума 0,5 рад/с и наличием компонента другой системы зыби (не выделенной наблюдателями при визуальном определении) с частотой максимума около 0,8 рад/с при составляющей ветрового волнения на частотах выше 1 рад/с. Модельный расчет, соответствующий указанному случаю, был выполнен при следующих предположениях: ветер от юго-запада скоростью 5 м/с и зыбь, поступающая с южных направлений от стационарного источника.

Результаты расчета показали, что компоненты ветрового волнения в поле смешанного волнения вполне могут быть объяснены

влиянием местных ветров. Компоненты зыби, наблюдающиеся утром 9/IX на НИС «Михаил Ломоносов», через 46 ч, т. е. утром 11/IX, доходят до точки, где стоит судно «Эрнст Кренкель», а еще через 12 ч эта система достигает точки расположения НИСП «Порыв».

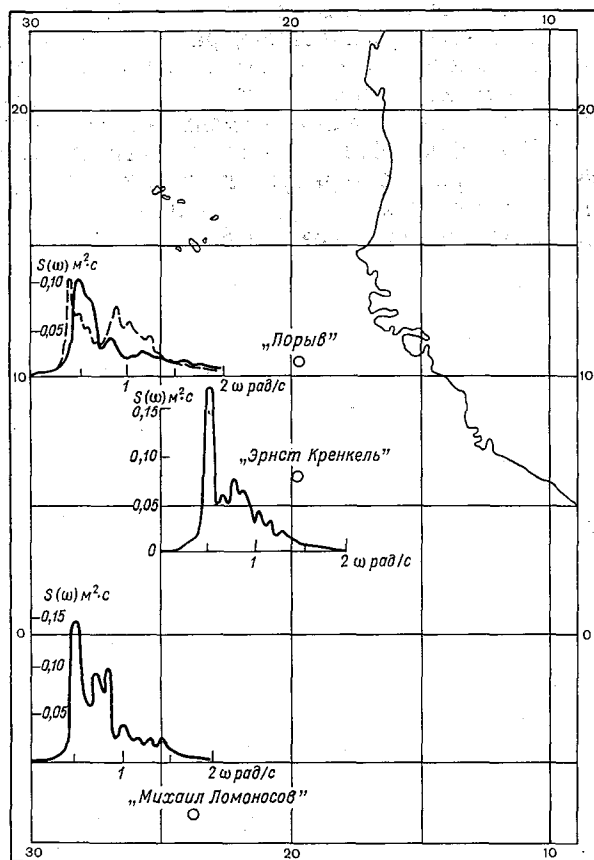


Рис. 8.4.5. Спектральные плотности волнения, вычисленные по данным инструментальных наблюдений (сплошные линии) на НИС «М. Ломоносов» (9/IX 1974 г., 10 ч 00 мин), «Эрнст Кренкель» (11/IX 1974 г., 9 ч 12 мин), «Порыв» (11/IX 1974 г., 11 ч 30 мин) и по расчету на НИС «Порыв» в 15 ч 10 мин 12/IX 1974 г. (пунктир)

Таким образом, построенная модель позволяет в основных чертах интерпретировать вид спектров, полученных по натурным данным и приведенных на рис. 8.4.5.

Приведенные примеры показывают, что предлагаемый метод дает вполне удовлетворительное совпадение с инструментальными данными.

В заключение отметим, что по уточненному методу Барнетта были выполнены расчеты вероятностных характеристик волн для двух наиболее значительных штормов в океане [156]. Результаты расчета высот и даже периодов волн оказались в довольно хорошем соответствии с данными судов погоды, расположенных на обширном пространстве. Расчеты также показали, что аппроксимация G выражением (8.1) может привести (когда $S \ll S_p$) к замедлению затухания волн, так как значения μ уменьшаются и влияние компоненты $\alpha + \beta S$ в общем балансе энергии возрастает. Этот факт дает основание еще раз подчеркнуть необходимость дальнейшего уточнения вида правой части G уравнения (8.1), например, так, как было предложено в конце раздела 8.1.

Часть III

Статистические характеристики многолетнего распределения ветра и волн

Многолетние (режимные) свойства волнения обычно описывают через функцию распределения моментных или порядковых статистик, каждая из которых характеризует волнение на промежутке квазистационарности волнового процесса.

Запросы судостроения и гидротехники требуют совместного учета волновых и ветровых нагрузок, поэтому ниже рассмотрены режимные характеристики как волнения, так и ветра.

Глава 9

Функции распределения ветра и волн

Последнее десятилетие характеризуется все более интенсивным изучением океанов и морей. Однако, несмотря на это, регулярные наблюдения над ветром и волнением в открытом океане и на морях ведутся только в крайне ограниченных районах, например, начиная с 1952 г. на станциях погоды в Северной Атлантике [225], на некоторых плавмаяхках и буровых установках на морях [193]. Эпизодические инструментальные измерения волнения выполняются в период различных экспедиций. Всех этих данных явно недостаточно для режимных обобщений, поэтому для большинства акваторий океанов и морей основным источником информации о ветре и волнении остаются попутные судовые наблюдения. Существенным недостатком таких наблюдений является то, что они в основном выполняются визуально. Для волнения это является специфической особенностью всех попутных судовых наблюдений, для ветра — значительного числа наблюдения на зарубежных судах [10, 33]. Достоверность визуальных определений скоростей

ветра, высот и периодов волн рассмотрена авторами в работах [10, 33], где приводятся результаты анализа синхронных визуальных и инструментальных определений указанных характеристик и предложены способы перехода от визуальных определений ветра и волнения к их инструментальным значениям; эти выводы использованы в последующих разделах при анализе режимных распределений и их параметров.

9.1. Распределение ветра

Для аппроксимации режимных распределений $F(U)$ скоростей ветра (при инструментальных измерениях это скорость, осредненная за некоторый интервал, обычно 10 мин) наиболее часто используется закон Вейбулла (1.7.15).

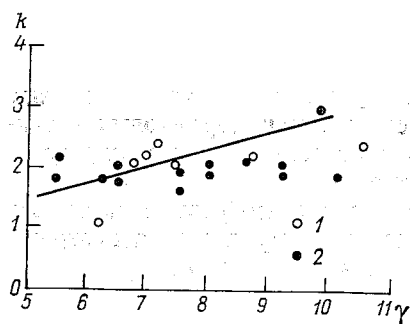


Рис. 9.1.1. Зависимость между оценками параметров k и γ для функций распределения скоростей ветра на судах погоды в Северной Атлантике (1) и в Северном море (2). Сплошная линия — аппроксимация (9.1.1)

$[b, c] \in \{0,10 \geq F(U) \geq 0,01\}$ и незначительно изменяется для различных сезонов и районов океанов и морей.

Наличие области $[b, c]$ означает, что между параметрами распределений (1.7.32) существует зависимость (1.7.35), которая представляет практический интерес при определении b и γ по β и k , так как в этом случае используются почти все члены вариационного ряда (распределение Вейбулла справедливо почти для всего диапазона скоростей ветра); при отсутствии наблюдений за экстремальными скоростями ветра их распределение рассчитывают по (1.7.32), используя соотношения, связывающие β и k с b и γ . Для нахождения зависимости между параметрами распределения Вейбулла и Фреше необходимо задать P_0 — вероятность, соответствующую квантили совпадения обоих распределений, и разность между P_1 и P_2 , принадлежащими области пересечения доверительных интервалов. Тогда соотношение между параметрами этих распределений записывается в виде (1.7.35).

В работах [10, 33] авторы показали, что этот закон справедлив в диапазоне $F(U)$ примерно от 95 до 1%. Для сильных и слабых ветров отклонения от (1.7.15) могут быть достаточно велики и распределение скоростей ветра подчиняется закону Фреше [10, 33, 34, 122]; функцию распределения скоростей ветра с учетом их больших значений можно записать в виде (1.7.32). Интервалы $[a, b]$ и $[c, d]$ в среднем охватывают соответственно диапазоны $F(U) \in [0,01 \div 0,95]$ и $F(U) \leq 0,10$. Область пересечения этих интервалов находится в диапазоне

Результаты численного решения уравнений (1.7.35) приводятся на рис. 1.7.2, 1.7.3. Для скоростей ветра в океанах и морях (как показано в работе [88]) можно использовать следующее аппроксимативное выражение, связывающее параметры k и γ :

$$\gamma = ak, \quad (9.1.1)$$

где $a = 3,9$ для $P_0 = 0,03$ и $a = 3,3$ для $P_0 = 0,05$ и практически не зависит от P_1 и P_2 .

На рис. 9.1.1 приводятся значения параметров k и γ , полученные по натурным данным, и соотношение (9.1.1) для $P_0 = 0,05$. На рисунке разброс точек велик, так как параметр γ определен по верхней части вариационного ряда, состоящей не более чем из 5—20 членов. (Доверительные интервалы для γ , определенного по такой выборке, очень велики и могут составлять 100% ее значения [88].) Например, по данным работы [88] для $\gamma = 7$ доверительной вероятности 0,95 имеем, что γ колеблется от 1 до 13 при $N = 5$ и от 4 до 10 при $N = 20$. Поэтому расчет γ по соотношению (9.1.1) приводит к его более достоверным значениям, чем использование оценок γ , полученных по малым выборкам.

Для расчета функций распределения скоростей ветра перепишем соотношение (1.7.32) в нормировке на произвольную квантиль U_P . Тогда

$$F(U) = \begin{cases} \exp \left[\ln P_0 \left(\frac{U}{U_P} \right)^k \right] & \text{для } U \in [a, b], \\ 1 - \exp \left[\ln (1 - P_0) (U/U_{1-P})^\gamma \right] & \text{для } U \in [c, d]. \end{cases} \quad (9.1.2)$$

Подставив в (9.1.2) $P_0 = 0,05$, которое можно принять для большинства эмпирических распределений, имеем

$$F(U) = \begin{cases} \exp \left[-3,0 \left(\frac{U}{U_{0,5}} \right)^k \right] & \text{для } \frac{U}{U_{0,5}} \leq 1,0, \\ 1 - \exp \left[-0,05 \left(\frac{U}{U_{0,95}} \right)^{-\gamma} \right] & \text{для } \frac{U}{U_{0,95}} \geq 1,0. \end{cases} \quad (9.1.3)$$

Для выполнения расчетов по (9.1.3) необходимо знать параметры распределений скоростей ветра. Значения параметров даны в работе [10], там же приводятся таблицы со значениями $F(U)$.

9.2. Распределение волн

Анализ многочисленных эмпирических распределений элементов волн на морях и океанах, выполненный авторами, позволил заключить [10, 34], что высота, например $h_{3\%}$, и периоды τ волн в значительном диапазоне их изменений распределены по логарифмически-нормальному закону (1.7.21).

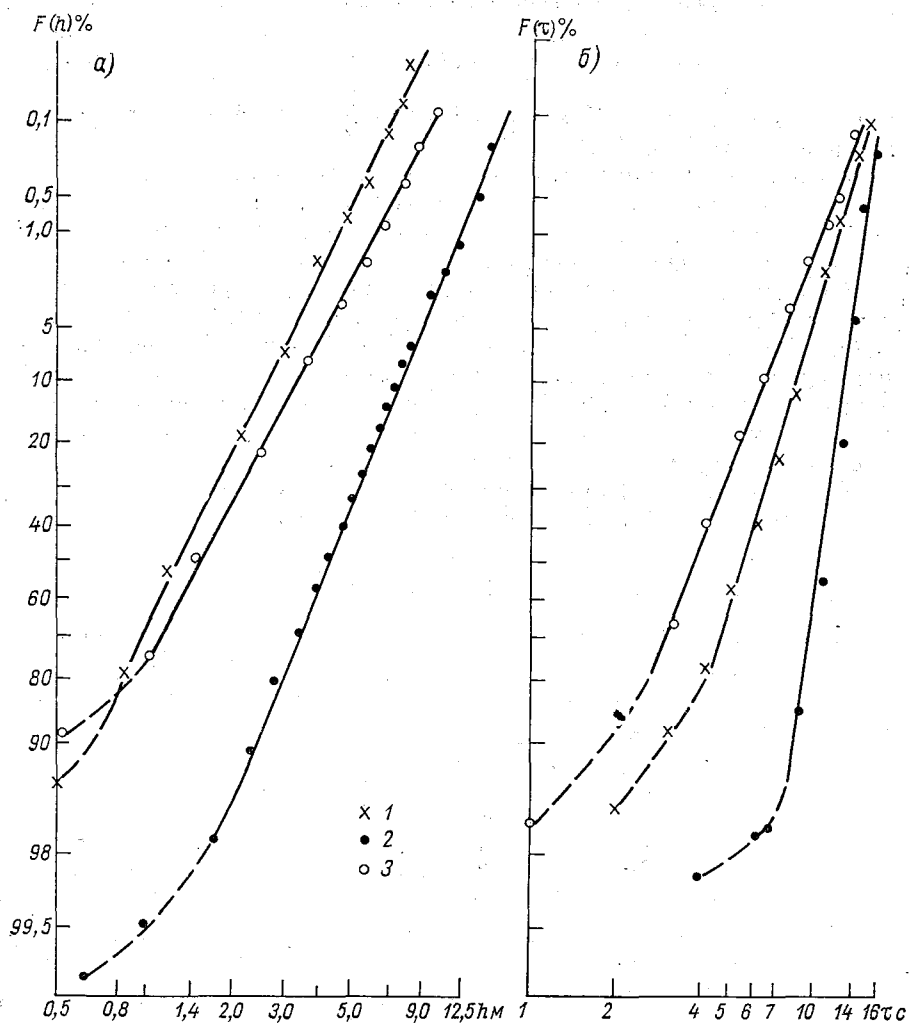


Рис. 9.2.1. Эмпирические распределения высот (а) и периодов (б) волн на функциональной сетке закона (1.7.21)

1 — Средиземное море; 2 — станция погоды J; 3 — Японское море

В качестве примера на рис. 9.2.1 показана применимость этого закона для распределений высот и периодов волн: эмпирические распределения вплоть до малых обеспеченностей спрямляются на функциональной сетке для (1.7.21). Заметные отклонения отмечаются только в области больших значений $F(h)$. На рис. 9.2.2 распределения, представленные на рис. 9.2.1, изображены на функциональной сетке закона Вейбулла (1.7.17). Из рисунка видно, что это рас-

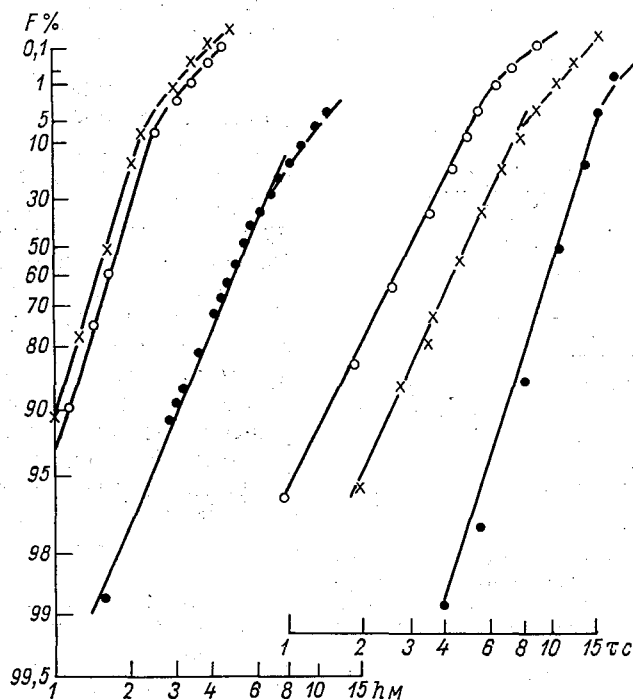


Рис. 9.2.2. Эмпирические распределения высот и периодов волн, изображенных на рис. 9.2.1, на функциональной сетке (1.7.15)

пределение справедливо для элементов волн большой обеспеченности.

Принадлежность эмпирических распределений двум асимптотическим законам и наличие достаточно широкой области их справедливости привело к тому, что различные авторы [167, 225] берут какой-либо один из указанных асимптотических законов для описания режима волнения, при этом $F(x)$ не всегда определяется одинаково. Мы, как и ранее, используем традиционно принятое в гидрометеорологии определение $F(x) = P\{X \geq x\}$ (а не $F(x) = P\{X < x\}$). Тогда можно считать, что логарифмически нормаль-

ной области изменения переменных (т. е. исключая края распределений, где, как следует из разделов 9.1, 9.2, справедливы другие асимптотические законы) следующее аппроксимативное выражение:

$$F(h, U) = \\ = \frac{0,69k}{\sqrt{2\pi}} \int_U^{\infty} (U^*)^{k-1} \times \\ \exp[-0,69(U^*)^k] dU^* \times \\ \times \int_h^{\infty} \frac{1}{h^*} \times \\ \exp\left[-(\ln h^*/2)^{-s_h}\right] dh^*.$$

(9.3.1)

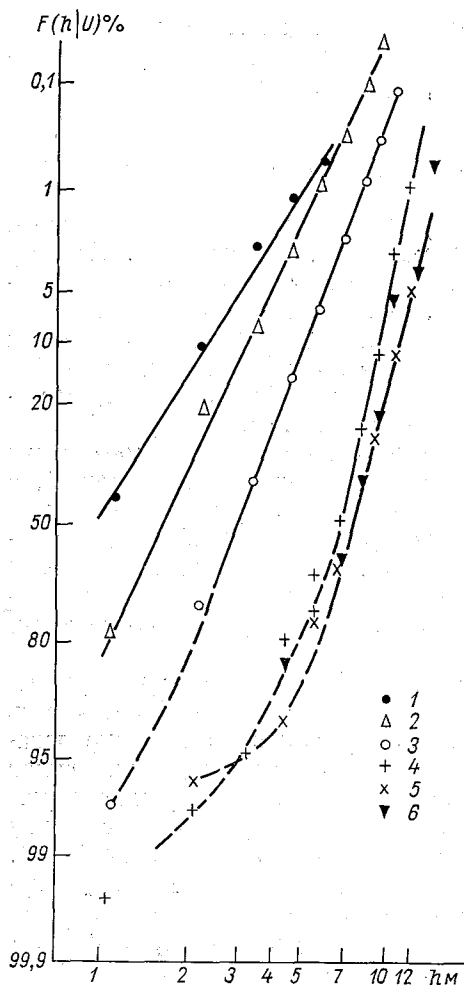


Рис. 9.3.1. Условные распределения высот волн (м) для фиксированных скоростей ветра (м/с) (открытое море, зима)

1 — $U \in [1, 4]$; 2 — $U \in [5, 8]$; 3 — $U \in [9, 12]$; 4 — $U \in [17, 20]$; 5 — $U \in [21, 24]$; 6 — $U \geq 25$ м/с

распределений $F[(h, \tau)/U]$, где скорости ветра сгруппированы в последовательность непересекающихся интервалов. Аппроксимативные выражения для таких распределений мо-

Вопрос об аппроксимативных выражениях $F(h, U)$ в области экстремальных значений h и U требует дальнейшего исследования.

В последние годы значительно возрастают требования к полноте описания внешних сил, воздействующих на суда и сооружения. В частности, для эффективного проектирования и эксплуатации буровых установок необходима информация о совместных распределениях $F(h, \tau, U)$. Поскольку анализ таких распределений требует использования достаточно громоздких методов, мало пригодных для инженерных расчетов, и выборочный анализ большого объема, то в качестве эквивалентной замены такого распределения используется ансамбль

гут быть получены с использованием (5.5.1), где маргинальными служат распределения $F(h|U)$ или $F(\tau|U)$, а условными — $F[(\tau/h)|U]$ или $F[(h/\tau)/U]$. Результаты расчетов по натурным данным и диапазонов скоростей ветра [0—5), [5—10), [10—15), ≥ 15 м/с показали, что указанные распределения в первом приближении можно считать логарифмически нормальными, а их параметры увеличиваются с ростом скорости ветра. Более детальный анализ таких распределений требует дополнительных исследований.

Приведенные выше режимные распределения элементов волн позво-

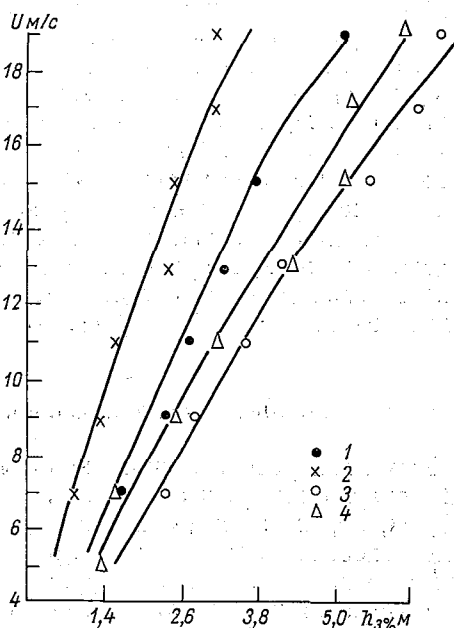


Рис. 9.3.2. Значения медианы распределений $F(h/U)$ на закрытых (1, 2) и открытых (3, 4) морях

ляют определить вероятность появления в многомерном плане волнения с различными средними (на промежутке квазистационар-

ности) значениями элементов волн. Поскольку по средним значениям рассчитываются распределения элементов волн, то по режимным функциям распределения можно получить достаточно полную харак-

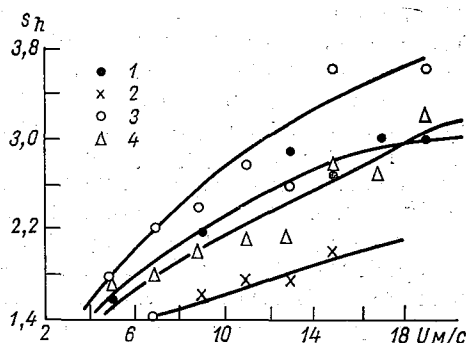


Рис. 9.3.3. Значения параметра s_h распределений $F(h/U)$ на закрытых (1, 2) и открытых (3, 4) морях

теристику волнового поля и использовать ее для определения воздействия волн на различные динамические системы, т. е. когда требуется знание распределения волн в том или ином конкретном волновом поле. Однако имеются практические задачи,

для которых не требуется информации о распределении волн в ограниченные отрезки времени или на сравнительно небольших участках волновой поверхности, а достаточно знать, превысят ли размеры какой-либо волны некоторой величины, например, когда необходимо определить вероятность заливания сооружения или силу удара отдельной волны. Для решения таких задач необходимы сведения о вероятности появления за очень длительные промежутки времени отдельных волн с фиксированными значениями параметров. Приведенные выше режимные распределения не дают прямого ответа на этот вопрос, так как необходимы дополнительные расчеты. В последнее время были выполнены исследования, в результате которых получены аппроксимации функции многолетнего распределения отдельно взятых волн [98, 167]. Несмотря на ряд недостатков этих аппроксимаций, они, по-видимому, могут быть использованы для непосредственного определения вероятности отдельно взятых волн фиксированных размеров.

9.4. Межгодовая изменчивость ветра и волнения

Режимные распределения скоростей ветра и элементов волн характеризуют их среднюю многолетнюю повторяемость. В работах [28, 38, 99, 126] авторы показали, что для описания межгодовой изменчивости ветров и волнения режимная функция распределения этих элементов может рассматриваться как асимптотический закон, а его значения в отдельные годы — как оценка этого закона; тогда межгодовые колебания режима идентичны оценке выборочной изменчивости эмпирических распределений. Достаточно подробно этот вопрос рассмотрен в разделе 1.7. Выражения (1.7.5), (1.7.7) определяют достоверность статистических оценок распределений скоростей ветра и элементов волн, имеющих асимптотические законы Вейбулла и логарифмически-нормальный. Расчет по (1.7.5) и (1.7.7) требует знания корреляционной функции процесса. Данные наблюдений показывают, что она для достаточно широкого комплекса условий имеет экспоненциально-косинусный вид (см. рис. 1.7.1). Расчеты декремента затухания α и флуктуационного периода β по данным восьми судов погоды в Северной Атлантике показали, что в среднем для скоростей ветра и высот волн $\beta \sim 0,03$ рад/ч, а α — соответственно 0,045 и 0,03. Результаты вычислений по (1.7.5) приведены в работах [9, 10, 87], по (1.7.7) — в работе [38]. Сопоставление расчетов по (1.7.8) и (1.7.7) показало [28], что различия невелики и для приближенных оценок можно использовать простое соотношение (1.7.8), в котором необходимо вместо общего количества наблюдений за рассматриваемый период принять их некоторое эквивалентное значение. Для этого необходимо учесть связность исходного временного ряда, а также наложить условие $[F(x) \pm \Delta F(x)] \in [0, 1]$, которое вытекает из свойств функции распределения. Тогда, в соответствии с выводами

работы [28], изменчивость $\Delta F(x)$ ветроволновых условий, наблюдающихся в отдельные месяцы разных лет, можно рассчитать по следующему соотношению:

$$\Delta F(x) = \begin{cases} 1 - F(x) & \text{для } F(x) \geq 1/(1 + 0,14x_{P_n}^2); \quad \Delta F > 0; \\ 0,38x[F(x)(1 - F(x))]^{1/2} & \text{для } F(x) \leq 1/(1 + 0,14x^2); \quad (9.4.1) \\ & \Delta F > 0, \quad F(x) \geq x^2/(x^2 + 7); \\ -F(x) & \text{для } F(x) < x^2/(x^2 + 7); \quad \Delta F < 0, \end{cases}$$

где x_{P_n} — квантиль, соответствующая заданной доверительной вероятности.

Для учета изменчивости в отдельные сезоны разных лет необходимо в центральное соотношение (9.4.1) вместо 0,38 поставить 0,22, а для определения выборочной изменчивости по данным наблюдений за несколько лет N в формулу (9.4.1) подставляется $1/\sqrt{N}$. В работах [10, 27] приводятся значения возможных отклонений статистических оценок функций распределения, рассчитанных по наблюдениям за различное число лет.

Справедливость модели межгодовой изменчивости проверена по данным натурных измерений. В работах [27, 28] показано, что значения отклонений функций распределения высот волн и скоростей ветра, полученные по наблюдениям на судах погоды в течение года, от асимптотического закона, определенного за 10 лет, не выходят за границы межгодовой изменчивости, которые охватывают весь диапазон эмпирических точек. Следовательно, соотношение (9.4.1) достаточно хорошо описывает межгодовую изменчивость ветров и волнения.

Заключение

Вероятностные гидродинамические модели и вероятностный анализ экспериментальных и натурных данных позволили более полно изучить ветровое волнение и получить более строгое и близкое к реальности математическое описание этого природного явления.

Наиболее значительны успехи, достигнутые в математическом описании ветрового волнения как квазистационарного и локально-однородного вероятностного процесса. С точностью, достаточной для многих прикладных задач, получены аппроксимации функций спектральной плотности волновых аппликат — частотного и частотно-направленного спектров — и установлены соотношения между моментами этих функций и моментами распределения видимых волн.

Менее определенными являются результаты, полученные в области изучения физики явления зарождения и развития ветрового волнения и его взаимодействия с воздушным потоком. Гипотезы и теоретические схемы, описывающие процесс развития ветрового волнения, еще недостаточно подтверждены экспериментальными и натурными данными; имеются существенные расхождения между результатами отдельных исследователей.

Особенность публикуемой монографии заключается в том, что ее авторы не ограничиваются обобщением вероятностных гидродинамических моделей, предложенных различными исследователями, а используют обширные натурные данные для проверки и уточнения этих моделей.

Основные результаты, полученные авторами монографии, заключаются в следующем.

По частотному спектру волн

Показано, что в гравитационном интервале спектра можно выделить три существенно различающиеся между собой области: максимума спектра, переходную и равновесную. Равновесная область спектра отмечается на всех стадиях развития волнения, а спектральная плотность в этой области хорошо описывается соотношением (3.1.28). По мере развития волнения уменьшается удельный вес равновесной области в частотном спектре; ее низко-

частотная граница связана с частотой максимума спектра соотношением (3.1.32).

Уточнена ранее полученная авторами аппроксимация области основного спектрального максимума; в новой аппроксимации (3.1.24) параметр зависит [см. (3.1.25)] от стадии развития волнения, что приблизило расчетные значения спектрального максимума к натурным данным на малых разгонах и начальных стадиях развития волнения (табл. 3.1.1) и позволило учесть в общей аппроксимации частотного спектра наблюдающиеся на малых разгонах явления превышения спектром в районе основного максимума «равновесных» величин и резкого уменьшения спектральной плотности в переходной области спектра (так называемое явление overshoot и undershoot). На основе анализа натурных данных получены зависимости (см. стр. 107), связывающие основные параметры аппроксимации частотного спектра волн с безразмерным разгоном ветра для идеальных условий развития волнения (устойчивый во времени и по разгону ветер). Показано, что в отдельных аппроксимациях существенно завышаются значения основного спектрального максимума (рис. 3.1.3, табл. 3.1.1). Учет генезиса отдельных областей спектра позволил в общем существенно приблизить его аппроксимацию к характерному виду частотных спектров, полученных по записям волнения.

По угловому распределению энергии в спектре волн

Подтверждена ранее установленная авторами закономерность, согласно которой угловое распределение энергии изменяется по мере развития волнения и существенно зависит не столько от абсолютного значения частоты спектральных составляющих, как это принято в большинстве работ по волнам, сколько от величины и знака разности $\omega - \omega_{\max}$. Авторы показали, что ранее полученная ими аппроксимация функции углового распределения энергии (4.1.12) не противоречит натурным данным при небольших углах θ (до $\pm 35^\circ$), и привели новые данные по угловому распределению энергии для более широкого диапазона значений θ .

На основе обобщения результатов спектрального анализа планшетов стереофотосъемки и записей многострунных волнографов получены значения параметра в косинусной аппроксимации углового распределения энергии в зависимости от частоты спектрального максимума и отношения $\omega/\omega_{\max}$ (табл. 4.1.2). Эти результаты позволяют легко рассчитать приближенные значения углового распределения энергии во всем спектре ветровых волн на любой стадии развития волнения, если допустить линейную интерполяцию между соседними значениями функции углового распределения энергии. Сопоставление различных аппроксимаций углового распределения энергии показало (рис. 4.1.10), что они наиболее близки на частоте максимума спектра и отличаются наиболее существенно в области $\omega/\omega_{\max} < 1$.

Установлено, что зависимость функции источника от спектральной плотности для фиксированных значений частоты и направления распространения спектральной составляющей существенно нелинейна даже в случае исключения эффекта слабых нелинейных взаимодействий между отдельными составляющими спектра волн (рис. 7.2).

Обобщение аппроксимации частотного спектра, функции углового распределения энергии и зависимостей между параметрами этих аппроксимаций и основными факторами волнообразования позволило рассчитать значения функции источника в уравнении баланса волновой энергии для различных скоростей ветра и частот [см. (7.1) — (7.3)] и сопоставить эти значения с расчетами, основывающимися на гидродинамических моделях (примеры приведены на рис. 7.6). Сопоставление позволило сделать следующие выводы:

— подтверждаются опубликованные в отдельных работах указания на то, что модели развития волн Филлипса и Майлза не позволяют объяснить наблюдающийся по натурным данным рост во времени составляющих волнового спектра; фактическое питание энергией отдельных гармоник существенно больше модельных;

— на низких частотах невозможно объяснить дисбаланс внутренним энергообменом за счет слабого нелинейного взаимодействия между отдельными спектральными составляющими, как это предполагается в ряде последних работ;

— нельзя признать правомерным стремление отдельных исследователей уравновесить баланс волновой энергии путем простого увеличения коэффициента β в соотношении (7.6), так как для низких частот это нередко противоречит основному физическому смыслу модели Майлза, согласно которому существенные значения потока энергии от ветра к волнам возможны только при определенном соотношении между фазовой скоростью спектральной составляющей и осредненной скоростью воздушного потока; это противоречит также оценкам коэффициентов α и β , полученным авторами монографии при аппроксимации функции источника, представленной на рис. 7.4, 7.5, полиномом четвертого порядка. Величины этих коэффициентов оказались большими, но вполне сопоставимыми с модельными расчетами по Филлипсу и Майлзу;

— представляется наиболее правдоподобной гипотеза, согласно которой существенную роль в энергоснабжении спектра волн на частотах, меньших частоты максимума, должно играть тангенциальное напряжение ветра, возрастающее благодаря появлению вторичных волн на основном волновом профиле; проведенная авторами киносъемка показала, что на гребнях штормовых волн всегда развиваются под воздействием турбулентного воздушного потока вторичные волны, наблюдающиеся до тех пор, пока возможно проследить существование отдельно взятого гребня штормовой волны;

Исследование возможностей аналитических решений уравнения баланса волновой энергии в спектральной форме (8.1) показало целесообразность использования этих решений при определенных упрощающих допущениях и показало, что наиболее перспективным путем дальнейшего усовершенствования методов расчета волн с целью существенного сокращения трудоемкости и затрат времени на расчет является сочетание численных и аналитических решений уравнения баланса волновой энергии в спектральной форме. На отдельных примерах (раздел 8.4) подтверждены широкие возможности использования уравнения баланса для более объективного (по сравнению с методами, ранее предложенными в нашей стране) расчета ветрового волнения, несмотря на то что разработка спектральной теории волн находится на своем начальном этапе. Основная трудность в разработке этой теории связана с исключительной сложностью постановки прямых измерений отдельных составляющих баланса волновой энергии. Результаты, полученные до сих пор, еще существенно различаются между собой и не позволяют ответить на многие принципиальные вопросы физики формирования спектральной структуры ветрового волнения.

По распределению видимых волн

По натурным данным показано, что распределение ординат и уклонов отклоняется от нормального, но не в такой степени, чтобы считать неправомерным использование основных соотношений линейной гидродинамической модели волновой поверхности для широкого круга научных и прикладных задач. Достаточно близки к натуре соотношения линейной модели между нулевым моментом спектра и средней высотой волн,* между средним периодом и отношением второго к нулевому моменту спектра.

Подтверждено, что в промежутке квазистационарности и на участке локальной однородности процесса высоты волн распределены по рэлеевскому закону, независимо от типа и стадии развития волнения. Распределение периодов, длин и крутиз волн, а также двумерные и условные распределения элементов волн отличаются от ранее принятых другими исследователями (см. разделы 5.2—5.6). Распределение периодов волн для смешанного волнения и в случае наложения систем волн зыби с различной частотой максимума спектра существенно отличается от распределения периодов ветровых волн и зыби с одновершинным спектром. Получены новые сведения о группах волн по данным обработки и анализа продолжительных записей волнения.

Многолетние распределения высот и периодов волн наиболее достоверно описываются логарифмически-нормальным законом в области $F \leq 0,5$ и вейбулловским законом в области $F > 0,5$. Приве-

* Если за отдельные волны считать участки волновой поверхности, дважды пересекающие среднюю волновую линию.

дены соотношения, позволяющие выразить параметры одного распределения через параметры другого. Приведена вероятностная модель и получены аппроксимативные зависимости, позволяющие рассчитать межгодовую изменчивость повторяемости ветров и волнения. Значения параметров аппроксимации и функций многолетнего распределения ветра и волн практически по всем районам Мирового океана даны в работе [10].

По методике спектрального анализа натурных данных

Показана допустимость принятия в моделях оценивания вероятностных характеристик волнения экспоненциально-косинусной аппроксимации корреляционной функции волновых аппликат и на этой основе определены закономерности выборочной изменчивости статистических оценок корреляционной функции и спектральной плотности волнения. Из-за сильной коррелированности оценок корреляционной функции появляются незатухающие ее колебания в области больших временных сдвигов и соответствующие случайные вторичные максимумы на нисходящей ветви спектра. От выбора точки усечения коррелограммы и вида весовой функции существенно зависят смещение, дисперсия и корреляционная функция оценок спектра.

С увеличением временного сдвига точки усечения корреляционной функции увеличивается дисперсия оценок спектральной плотности, но уменьшается их смещенность. Наиболее надежные оценки спектра можно получить при усечении коррелограмм в первом минимуме их огибающей. Для изучения групп волн записи волнения должны рассматриваться как нестационарный вероятностный процесс с двойным по частоте спектром. В работе приведены рекомендации по определению параметров эмпирического спектрального анализа выборочных функций волнения, полученных при помощи различных методов, и предложены способы определения доверительных интервалов для статистических оценок спектра волновых аппликат. Соответствующие рекомендации приведены также по вероятностному анализу распределения элементов видимых волн.

Summary

The probabilistic hydrodynamic model and the probability analysis of experimental data permitted to make more complete investigation of wind waves and to obtain more strict and close to reality mathematical description of this nature phenomenon.

The most significant successes are achieved in the mathematical description of wind waves as quasistationary and local homogeneous processes. The approximation of spectral density function of wave applicates of frequency and directional spectra are obtained, and the correspondence between the moments of these functions and the moments of wave elements distributions are determined with the accuracy enough for solving of many applied problems.

The results on wave generation, its propagation and interaction with wind flow are less definite. The hypothesis and the theoretical schemes, describing the processes of wind wave development are not enough verified by experimental data; there are essential discrepancies between the results of different scientists.

In this book the authors use a great variety of field data for verification and specification of probabilistic hydrodynamic models, proposed by different authors.

The main results obtained by the authors and stated in the monography are presented below.

On frequency spectrum of wind generated waves

— It is possible to mark out three quite different ranges of spectrum in gravitational waves: the maximum of spectrum, the intermediate and the equilibrium. The equilibrium range of a spectrum is marked out at all the stages of wave development, the spectral density in this ranges is described by (3.1.28). The importance of gravitational range in frequency spectrum decreases as wave develops, the low frequency border of this range is connected with the maxima frequency of spectral density by (3.1.32).

The previously obtained approximation of the range of the main spectral maxima is specified, in new approximation (3.1.24) the parameter n depends (see (3.1.25)) on the stage of wave development. It approached the calculated values of spectral maxima to field data at short fetches and initial stages of wave development (table 3.1.1). This also permitted to take into account the so called phenomenon over-

shoot and undershoot. On the basis of field data the dependences between the main parameters of frequency spectrum approximation and dimensionless fetches for ideal conditions of wave development (the wind stable along the fetch and time) are obtained (see page 107). It is shown that in some approximation the meaning of main peak are essentially overestimated (fig. 3.1.3, table 3.1.1). Taking into account the genesis of separate ranges of frequency spectrum, permit to approach the approximation to the typical shape of frequency spectra, obtained by wave records.

On angular distribution in wave spectrum

The dependence, previously obtained by authors, is verified. According to this dependence the angular distribution of energy changes as the waves develop, essentially depends not only on absolute value of frequency of spectral components (as in most publications on wind waves) but also on value and sign of difference $\omega - \omega_{\max}$. The authors showed that the approximation of angular distribution function (4.1.12) obtained previously didn't contradict to field data for the small angles θ (up to $\pm 35^\circ$). The authors give the new data on angular distribution of energy for more wide range of θ . On the basis of generalization of the results of spectral analysis of surface stereophotographs and records of the arrays of wave gauges the meanings of parameter in cosine approximation of angular distribution (depending on the frequency of spectral maxima and ratio $\omega/\omega_{\max}$ (table 4.1.2)) are obtained. These results permit easily to calculate the approximate values of angular distribution of wave energy spectra at all the stages of wave development (assuming the linear interpolation between adjacent values of angular distribution function). The comparison of different approximations of angular distribution function showed (fig. 4.1.10) that these approximations are almost the same on the frequency of spectral maxima and are essentially different in the range $\omega/\omega_{\max} < 1$.

On the equation of wave energy balance

It is proved that the dependence of source function from spectral density (even excluding the weak non-linear waves-waves interactions) is essentially non-linear (fig. 7.2).

The generalization of frequency spectra approximations, angular distribution function and dependencies between the parameters of these approximations and the main factors of wave generation permitted: to calculate (for different wind speeds and frequencies) the values of source function in the equation of wave energy balance (see (7.1) — (7.3), to compare these values with calculations, based on hydrodynamic models (the examples are shown on fig. 7.6). The comparison permitted to make the following conclusions:

— It is verified that Phillips' and Miles' models of wave generation don't permit to explain the time growth of wave spectrum com-

ponents. The actual energy input to the particular component are essentially greater than the models.

— It is impossible to explain the disbalance of energy exchange due to weak nonlinear interaction between separate spectral components on low frequency (as it is supposed in the latest works).

— It is impossible to admit the aspiration of some authors to balance the wave energy by means of simple increasing of coefficient β in equation (7.6), as for low frequencies this is usually contradict to main physical sense of Miles' model. According to the latter the considerable amounts of energy flow from wind to waves are possible only for definite correspondence between the phase velocity of spectral components and the mean speed of wind flow. The above mentioned aspiration also contradicts to the estimates of α and β , obtained by the authors of this monography, when they approximated the source function, shown on fig. 7.4, 7.5, by means of the polynom of 4th power, the values of these coefficients were found to be greater, but quite comparable with model calculations according to Phillips and Miles.

— The most true is a hypothesis, according to which the essential role in energy input to wave spectrum (on frequencies, which are less than spectral maxima) must belong to the shear stresses. The latter increased due to appearance of secondary waves on the main wave profile. The filming, made by the authors, had shown that on the crests of storm waves always develop (under the influence of turbulent wind flow) the secondary waves. These waves are observable until one can follow the existence of separate storm wave crest.

The investigation of analytical decisions of wave energy balance equation in spectral form (8.1) had shown the expediency of the utilization of these decisions with some simplifications. The above mentioned investigation permit to suppose, that the most perspective way for further improvement of methods of wave calculation (with purpose of essential reduction of expenditure and time for calculation) is a composing of numerical and analytical decisions. The wide possibilities of the utilization of the wave energy equation are confirmed on some examples (§ 8.4). This way is more objective, than methods previously proposed in our country, though the elaboration of spectral wave theory is on the first stage. The main difficulty in elaboration of this theory is connected with exceptional complication of direct measurements of separate components of wave energy balance. The obtained until this time results are essentially different and don't permit to answer for many principal questions on the generation of spectral structure of wind waves.

On the distribution of wind wave elements

It is shown (using the field data), that the distribution of wave ordinate and slopes deviate from normal, but one can use the main dependencies of linear hydrodynamic model of wave surface for decision of wide scope of questions. Sufficiently close to nature are

the correlations of linear model with the zero moment of spectrum and mean wave height*, period and ratio of second and zero moments of wave spectrum.

It is verified that on quasistationary period and local homogeneous interval the wave heights are distributed by Rayleigh law irrespectively from the type and stage of waves development. The distribution of periods, lengths and steepnesses of waves and also the two-dimensional and conditional distributions of wave elements differ from that ones taken by other authors (cf. 5.2—5.6). The distribution of periods in cases of mixed waves and superposition of swells with different frequencies of spectral maxima considerably differ from the distribution of periods of wind waves and swell with one peak spectrum. The new information on wave groups are given, using the data of processing and analysis of long-wave records.

The long-term distribution of waves the most consistent with log-normal law for $F \leq 0,5$ and Weibull law for $F > 0,5$. It's shown the correlation which permit to express the parameters of one distribution through the parameters of another. The probability model and approximative dependencies for calculation of variability (between defferent years) of wind and wave are obtained.

The parametres and the meanings of wind and wave long-term distribution function almost for all region of World ocean are presented in [10].

On the technique of spectral analysis of wave data

— It's shown that one may assume the exponentially-cosine approximation of wind wave covariance function; on this basis the conformity of sample variability of covariance function and spectral density of wind waves are determined. The strong correlation of covariance function estimates produces the undumped oscillations for big lags. This corresponds to the random secondary maxima on the descending part of spectra. The bias, variance and covariance function of spectrum estimates essentially depends on the truncation point of correlogramm and lag window. The more is the time lag of covariance function, the more is the variance of spectral density estimates, but the less is its bias. The most consistent estimates of spectrum may be obtained by truncation the correlogramm in the first minima of its envelope. The investigations of wave group can be made by considering the wave record as nonstationary probability process with double on frequency spectrum. The recommendations for choice the parameters of empirical spectral analysis are made. The method for determination of confidence intervals for statistical estimates of wave spectra are proposed. The corresponding recommendations are also made on probability analysis of wave elements distributions.

* If for separate wave to take the parts of wave surface which cross the mean wave level twicely.

Список литературы

1. Альбом планшетов стереофотограмметрической съемки волн. Антарктика. Дизель-электроход «Обь», 1956, Л., Гидрометеиздат, 1960. 48 с.
2. Андреев Б. М., Давидан И. Н., Рожков В. А. Сопоставление методов измерений волн на глубокой воде.— «Труды координационных совещаний по гидротехнике», 1969, вып. 50, с. 715—726.
3. Ариель Н. З., Бортковский Р. С., Бютнер З. К. Основные принципы построения таблиц для определения турбулентных потоков в нижнем слое воздуха над морем.— «Метеорология и гидрология», 1975, № 11, с. 55—65.
4. Артур Р. Различие в направлении распространения волн, вызванных постоянным ветром.— В сб.: Основы предсказания ветровых волн, зыби и прибоя. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1951, с. 139—150.
5. Беляшев А. П., Рожков В. А. Корреляционный тензор и тензор спектральной плотности как вероятностные характеристики векторных случайных процессов.— «Труды ГОИН», 1974, вып. 126, с. 17—32.
6. Бровиков И. С. Статистические характеристики элементов ветровых волн.— «Труды ГОИН», 1954, вып. 26, с. 147—194.
7. Бычков В. С., Стрекалов С. С. Морские нерегулярные волны. М., «Наука», 1971. 131 с.
8. Ван дер Варден Б. Л. Математическая статистика. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1960. 434 с.
9. Вероятностные характеристики волнения, методы их анализа и расчета.— «Труды ГОИН», 1971, вып. 97, 187 с. Авт.: И. Н. Давидан, В. А. Рожков, Б. М. Андреев, Л. И. Лопатухин, Ю. А. Трапезников.
10. Ветер и волны в океанах и морях. Справочные данные. Под ред. И. Н. Давидана, Л. И. Лопатухина, В. А. Рожкова. Л., «Транспорт», 1974. 359 с.
11. Виленкин С. Я. Статистические методы исследования систем автоматического регулирования. М., «Сов. радио», 1967. 200 с.
12. Виленский Я. Г., Глуховский Б. Х. Ветровое волнение в океане (результаты исследований и материалы наблюдений над элементами волн и ветром в северной части Атлантического океана).— «Труды ГОИН», 1961, вып. 62. 101 с.
13. Виленский Я. Г., Глуховский Б. Х. Некоторые закономерности ветрового волнения.— «Труды ГОИН», 1955, вып. 29 (41), с. 5—35.
14. Вознесенский А. И. Расчет статистических характеристик элементов движения произвольной точки корабля, качающейся на нерегулярном волнении.— «Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова», 1968, вып. 242, с. 35—40.
15. Вознесенский Л. И., Нецветаев Ю. А. Энергетический спектр морского волнения.— «Судостроение», 1966, № 7, с. 11—14.
16. Волков Ю. А. Спектры пульсаций скорости и температуры воздушного потока над взволнованной поверхностью моря.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1969, т. 5, № 12, с. 1251—1965.
17. Волков Ю. А., Елагина Л. Г., Копров В. М. Спектральные характеристики турбулентного обмена между океаном и ат-

- мосферой в тропической зоне Атлантики.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1974, т. 10, № 6, с. 619—627.
18. Волков Ю. А., Мордухович М. И. Спектры турбулентных потоков импульса и тепла над волнующейся поверхностью моря.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1971, т. 7, № 1, с. 18—27.
 19. Гантмахер Ф. Р. Лекции по аналитической механике. М., Физматгиз, 1960. 296 с.
 20. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов. М., «Наука», т. I, 1971, 664 с.; т. II, 1973, 638 с.
 21. Глуховский Б. Х. Исследование морского ветрового волнения. Л., Гидрометеониздат, 1966. 284 с.
 22. Глуховский Б. Х., Виленский Я. Г. Исследование распределения элементов морских волн.— «Метеорология и гидрология», 1953, № 9, с. 21—27.
 23. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., Физматгиз, 1961. 406 с.
 24. Горский А. А. Формулы для подсчета математического ожидания и дисперсии оценки спектральной плотности стационарного случайного процесса.— «Автоматика и телемеханика», 1965, т. 26, № 10, с. 1703—1710.
 25. Давидан И. Н. Зависимость вероятностных характеристик волн от ветра.— В сб.: Теоретические и практические вопросы мореходных качеств судов. Л., «Транспорт», 1967, с. 236—255.
 26. Давидан И. Н. Некоторые результаты исследований морского волнения, развивающегося в условиях, близких к идеальным. В сб.: Морское волнение, нерегулярная качка и ее учет в различных областях морской техники. Л., ВМОЛА, 1964, с. 141—150.
 27. Давидан И. Н. Применение вероятностных методов для анализа режима волнения на примере северной части Атлантического океана.— «Труды ГОИН», 1967, вып. 91, с. 70—96.
 28. Давидан И. Н. Сравнительная характеристика межгодовой изменчивости волнения в Атлантическом океане.— «Труды ГОИН», 1969, вып. 96, с. 174—184.
 29. Давидан И. Н. Частотный спектр ветрового волнения.— «Труды ГОИН», 1969, вып. 96, с. 185—210.
 30. Давидан И. Н. Основные вероятностные характеристики волновой поверхности моря на глубокой воде по натурным данным (ветровое волнение в гравитационном интервале частот).— «Вопросы судостроения», сер. Акустика, 1977, вып. 8, с. 3—24.
 31. Давидан И. Н., Бочкарев А. К., Трапезников Ю. А. Опыт применения модернизированных волнографов ГМ-16М и ГМ-32М.— «Труды ГОИН», 1973, вып. 117, с. 101—112.
 32. Давидан И. Н., Лопатухин Л. И., Рожков В. А. Распределение элементов волн, полученное по материалам стереофото-съемки.— «Труды ГОИН», 1973, вып. 112, с. 72—83.
 33. Давидан И. Н., Лопатухин Л. И. Закономерности распределения ветра и волн в океанах и морях.— «Труды ГОИН», 1974, вып. 122, с. 108—123.
 34. Давидан И. Н., Лопатухин Л. И., Рожков В. А. Географическое распределение ветров и морского волнения в Мировом океане.— В сб.: VI съезд Географического общества СССР. География Мирового океана. Л., «Наука», 1975, с. 48—50.
 35. Давидан И. Н., Пасечник Т. А., Рожков В. А. Определение компонент уравнения баланса волновой энергии в спектральной форме и некоторые результаты модельных расчетов вероятностных характеристик волнения.— «Труды ГОИН», 1974, вып. 122, с. 59—78.
 36. Давидан И. Н., Рожков В. А. Ветровые волны.— В сб.: Итоги науки. Геофизика, 1963. М., «Наука», 1965, с. 210—241.
 37. Давидан И. Н., Рожков В. А. Современное состояние исследований морского волнения как вероятностного процесса.— В сб.: Мор-

- ское волнение, нерегулярная качка и ее учет в различных областях морской техники. М., ВМОЛА, 1964, с. 50—82.
38. Давидан И. Н., Рожков В. А. Вопросы достоверности оценок функций распределения элементов волн.— «Регистр СССР. Научно-технический сборник», вып. 2. Л., «Транспорт», 1972, с. 22—39.
 39. Давидан И. Н., Рожков В. А., Трапезников Ю. А. Экспериментальные исследования ветрового волнения.— В сб.: Проблемы экспериментальных исследований в океане, № 28. М., «Наука», 1974, с. 179—190.
 40. Дербитайр Дж. Дальнейшие исследования ветрового волнения.— В сб.: Ветровые волны. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1962, с. 416—441.
 41. Дечь Р. Нелинейные преобразования случайных процессов. М., «Сов. радио», 1965. 207 с.
 42. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложение. М., «Мир», 1971, вып. 1, 316 с.; 1972, вып. 2, 287 с.
 43. Доброклонский С. В., Контобойцева Н. В. Эксперименты по определению толщины турбулентного слоя в волнах монохроматического типа.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1973, т. 91, № 2, с. 210—212.
 44. Ефимов В. В., Гришин Г. А. Динамика поверхностных волн при учете турбулентного характера движения.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1972, т. 8, № 1, с. 52—56.
 45. Ефимов В. В., Кушнир В. М. Анализ высокочастотной части спектра морского волнения.— «Океанология», 1974, т. 14, вып. 1, с. 30—36.
 46. Ефимов В. В., Посошков В. Л., Сизов А. А. О характере индуцированного движения воздуха над морскими поверхностными волнами.— «Морские гидрофизические исследования», 1974, № 2 (65), с. 82—92.
 47. Ефимов В. В., Соловьев Ю. П. О развитии спектра ветровых волн.— «Океанология», 1975, т. 15, вып. 3, с. 409—414.
 48. Жуковец А. М. О влиянии молекулярной вязкости на волнение.— «Труды координационных совещаний по гидротехнике», 1973, вып. 84, с. 11—13.
 49. Заварина М. В. Расчетные скорости ветра на высотах нижнего слоя атмосферы. Л., Гидрометеиздат, 1971. 162 с.
 50. Загородников А. А. Использование доплеровского спектра радиолокационного сигнала для измерения некоторых параметров морского волнения.— «Метеорология и гидрология», 1971, № 1, с. 65—72.
 51. Замараев Б. Д., Калмыков А. И. О возможности определения пространственной структуры взволнованной поверхности моря радиолокационным методом.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1969, т. 5, № 1, с. 124—127.
 52. Заславский М. М., Китайгородский С. А. О равновесном интервале в спектре генерируемых ветром поверхностных гравитационных волн.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1971, т. 7, № 5, 665—670 с.
 53. Заславский М. М., Китайгородский С. А., Лобышева Л. Г. Линейная модель пространственного спектра генерируемых ветром поверхностных гравитационных волн.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1973, т. 9, № 10, с. 1076—1087.
 54. Иваненков Г. В., Матушевский Г. В., Ржеплинский Г. В. Резонансное возбуждение поверхностных волн в море холодными атмосферными фронтами.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1977, т. 13, № 1, с. 80—87.
 55. Исследование спектров атмосферной турбулентности над морем на Каспийской подводной станции.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1976, т. 12, № 3, с. 244—254. Авт.: Г. В. Вальтер, С. Л. Зубковский, Т. М. Татаряев, М. З. Холмянский, Л. Р. Цванг.

56. Капица П. Л. К вопросу об образовании ветром морских волн.— «ДАН СССР. Новая серия», 1949, т. 64, № 4, с. 12—18.
57. Каракулаков В. А., Пасечник Т. А., Рожков В. А. Комплекс программ для статистической обработки записей волнения.— «Труды ВНИИГМИ МЦД», 1974, вып. 3, с. 23—47.
58. Китайгородский С. А. Некоторые приложения методов теории подобия при анализе ветрового волнения.— «Изв. АН СССР, серия геофиз.», 1962, № 1, с. 105—117.
59. Китайгородский С. А. Физика взаимодействия атмосферы и океана. Л., Гидрометеоиздат, 1970. 284 с.
60. Китайгородский С. А., Стрекалов С. С. К анализу спектров ветрового волнения. I.— «Изв. АН СССР, серия геофиз.», 1962, № 9, с. 1221—1228.
61. Китайгородский С. А., Стрекалов С. С. К анализу спектров ветрового волнения. II.— «Изв. АН СССР, серия геофиз.», 1963, № 8, с. 1240—1250.
62. Клеванцов Ю. П., Рожков В. А. Процедуры для расчета инвариантов корреляционного тензора спектральной плотности векторных случайных процессов.— «Труды ГГО», 1975, вып. 364, с. 118—131.
63. Кононкова Г. Е. Динамика морских волн. М., МГУ, 1969. 207 с.
64. Кононкова Г. Е., Кузнецов В. В. Регистрация наклонов взволнованной поверхности воды.— «Вестник МГУ. Физика, астрономия», 1971, № 3, с. 257—261.
65. Кононкова Г. Е., Кузнецов В. В. Основные статистические характеристики ветрового волнения в прибрежной зоне.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1975, т. 11, № 12, с. 1309—1313.
66. Корнева Л. А., Ливерди В. П. О предельно развитом волнении в океане.— «Труды МГИ», 1966, т. 37, с. 118—124.
67. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. М., Физматгиз, 1963, ч. I, 583 с.; ч. II, 727 с.
68. Красовский Ю. П. О существовании периодических течений со свободной границей.— «ДАН СССР», 1960, т. 133, № 4, с. 768—770.
69. Красовский Ю. П. К теории установившихся волн конечной амплитуды.— «Журнал вычислительной математики и математической физики», 1961, т. 1, № 5, с. 836—855.
70. Краусс Е. Взаимодействие атмосферы и океана. Л., Гидрометеоиздат, 1976. 295 с.
71. Кругляк Г. А., Микулинская С. М., Рожков В. А. Статистические свойства оценок корреляционных функций и спектральных плотностей гидрометеорологических процессов.— «Труды ВНИИГМИ МЦД», 1973, вып. 1, с. 28—40.
72. Крылов Ю. М. Статистическая теория и расчет морского ветрового волнения. Ч. I.— «Труды ГОИН», 1956, вып. 33 (45), с. 5—79. Ч. II.— «Труды ГОИН», 1958, вып. 42, с. 3—88.
73. Крылов Ю. М. Спектральные методы исследования и расчета ветровых волн. Л., Гидрометеоиздат, 1966. 254 с.
74. Крылов Ю. М., Стрекалов С. С., Цыплухин В. Ф. Исследование углового энергетического спектра ветровых волн.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1966, т. 2, № 7, с. 729—739.
75. Крылов Ю. М., Стрекалов С. С., Цыплухин В. Ф. Исследование двухмерного энергетического спектра и длины ветровых волн.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1968, т. 4, № 6, с. 660—670.
76. Крылов Ю. М., Стрекалов С. С., Цыплухин В. Ф. Ветровые волны и их воздействия на сооружения. Л., Гидрометеоиздат, 1976. 255 с.
77. Кубланов Я. М. Об определении двухмерного спектра ординат морского волнения с помощью самоориентирующегося волномерного буй.— «Труды ЦНИИ им. акад. А. И. Крылова», 1972, вып. 269, с. 3—20.
78. Кубланов Я. М. Самоориентирующийся буй для определения

- двухмерного спектра морского волнения.— «Экспериментальная гидро-механика судна», 1972, вып. 190, с. 168—171.
79. Кузьмин В. И., Стрекалов С. С. Расчет зыби при произвольных границах шторма.— «Труды ГМЦ», 1971, вып. 83, с. 6—16.
 80. Лабзовский Н. А. Определение элементов волн в зависимости от скорости ветра.— «Сб. трудов ЛОНИТОВТ», 1952, с. 23—35.
 81. Ламб Г. Гидродинамика. М., Гостехиздат, 1947. 928 с.
 82. Лейкин И. А., Розенберг А. Д. Исследование высокочастотной части спектра морского волнения.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1970, т. 6, № 12, с. 1328—1332.
 83. Лейкин И. А., Розенберг А. Д. Исследование угловых спектров высокочастотной части волнения.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1971, т. 1, № 1, с. 102—106.
 84. Лившиц Н. А., Пугачев В. Н. Вероятностный анализ систем автоматического управления. М., «Сов. радио», 1956. 865 с.
 85. Лонге-Хиггинс М. С. Статистический анализ случайной движущейся поверхности.— В сб.: Ветровые волны. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1962, с. 125—218.
 86. Лопатухин Л. И. Вероятностные характеристики интенсивных групп волн.— «Труды ГОИН», 1972, вып. 110, с. 148—160.
 87. Лопатухин Л. И. Анализ распределений элементов волн.— «Труды ВНИИГМИ МЦД», 1974, вып. 1, с. 116—142.
 88. Лопатухин Л. И., Олюнин Ю. В., Рожков В. А. О параметрах режимных распределений скоростей ветра и элементов волн (на примере Северного моря).— «Сб. работ Регистра СССР», 1977, вып. 6, с. 126—138.
 89. Лопатухин Л. И., Рожков В. А. Анализ вероятностных свойств волнения с учетом его групповой структуры.— «Труды ГОИН», 1972, вып. 112, с. 84—92.
 90. Лопатухин Л. И., Рожков В. А. Анализ совместных распределений элементов волн.— «Труды ВНИИГМИ МЦД», 1974, вып. 1, с. 143—159.
 91. Маккавеев В. М. О процессах возрастания и затухания волн малой амплитуды и о зависимости их от расстояния по наветренному направлению.— «Труды ГТИ», 1937, вып. 5, с. 17—25.
 92. Макова В. И. Особенности динамического режима турбулентности в приводном слое атмосферы для различных стадий развития волнения.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1975, т. 11, № 3, с. 297—307.
 93. Максимаджи А. И. Изучение внешних нагрузок, действующих на суда в море.— «Судостроение», 1974, № 10, с. 9—14.
 94. Максимов Б. А. Судовой волнограф ГМ-62. — «Методическое указание № 39», М., ГОИН, 1974, 58 с.
 95. Марцинкевич Л. М. Исследование статистических характеристик уклонов взволнованной поверхности моря по планшетах стереофотосъемки.— «Метеорология и гидрология», 1970, № 11, с. 83—86.
 96. Марцинкевич Л. М. Распределение уклонов взволнованной поверхности моря.— «Метеорология и гидрология», 1970, № 10, с. 41—45.
 97. Матушевский Г. В. Исследование связи истинных и средних уклонов взволнованной поверхности моря.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1969, т. 5, № 4, с. 404—415.
 98. Матушевский Г. В. Новый тип режимных функций распределения параметров ветровых волн.— «Метеорология и гидрология», 1977, № 3, с. 66—72.
 99. Матушевский Г. В., Стрекалов С. С. Расчет двухмерного спектра по данным стереофотосъемки волнения. — «Океанология», 1963, т. 3, № 5, с. 840—847.
 100. Методы расчета спектра волн. Обзор. Серия «Океанология». Обнинск. ВНИИГМИ МЦД. 1977. 97 с. Авт.: И. Н. Давидан, В. А. Рожков, Ю. В. Олюнин, Ю. А. Трапезников.

101. Микулинская С. М., Рожков В. А. Алгоритмы и программы для моделирования статистических свойств оценок вероятностных характеристик случайных процессов.— «Труды ГГО», 1975, вып. 364, с. 132—155.
102. Микулинская С. М., Рожков В. А. Корреляционная функция значений оценок спектральной плотности стационарного случайного процесса.— «Труды VII Всесоюзного симпозиума. Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей. Секция III». Л., ВНИИЭП, 1974, с. 139—146.
103. Минина Л. С., Нгуен Ван Нян. Тропические циклоны Индийского океана.— «Труды ГМЦ», 1969, вып. 41, с. 29—50.
104. Молэн П. А. Охотники за тайфунами. М., «Мир», 1967. 333 с.
105. Некрасов А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. М., Изд-во АН СССР, 1961. 95 с.
106. Нелинейная теория распространения волн. М., «Мир», 1970. 231 с.
107. Нечаев Ю. И., Подвинцев Ю. В. Статистический анализ условий опрокидывания судна в зависимости от элементов групп интенсивных волн. Регистр СССР. «Научно-технический сборник», 1976, вып. 4, с. 105—115.
108. Новый метод анализа и расчета ветровых волн.— «Труды ГОИН», 1969, вып. 93, с. 5—52. Авт.: Г. В. Ржеплинский, Ю. М. Крылов, Г. В. Матушевский, С. С. Стрекалов.
109. Океанографические таблицы. Изд. 4-е. Л., Гидрометеиздат, 1975. 477 с.
110. Океанология. Термины и определения. ГОСТ 18451-73, ГОСТ 18458-73. М., Госкомитет стандартов СМ СССР, 1973. 64 с.
111. О спектрах ветрового волнения при малом разгоне.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1970, т. 6, с. 747—751. Авт.: Г. Е. Кононкова, Е. А. Никитина, Л. В. Поборчая, А. А. Сперанская.
112. Пасечник Т. А. Численно-аналитический алгоритм интегрирования баланса волновой энергии.— В сб.: Комплексные исследования в Мировом океане. М., «Наука», 1975, с. 88—91.
113. Пасечник Т. А., Рожков В. А. Алгоритм и программа расчета вероятностных характеристик ветрового волнения.— «Труды ГГО», 1975, вып. 364, с. 90—117.
114. Пирсон В. Дж. Ветровые волны.— В сб.: Ветровые волны. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1962, с. 42—124.
115. Пирсон В., Нейман Г., Джеймс Р. Развитие и прогноз ветровых волн.— В сб.: Ветровые волны. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1962, с. 253—283.
116. Пирсон В., Нейман Г., Джеймс Р. Распространение и прогноз зыби.— В сб.: Ветровые волны. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1962, с. 289—355.
117. Поляк И. И. Численные методы анализа наблюдений. Л., Гидрометеиздат, 1975. 211 с.
118. Приложение методов теории нестационарных вероятностных процессов к анализу структуры и динамики океанологических процессов. Обзор. Обнинск. Информационный центр, 1972. 70 с. Авт.: В. А. Рожков, Ю. В. Суставов, С. М. Микулинская, Ю. П. Клеванцов, Ю. А. Трапезников.
119. Процессы переноса вблизи поверхности раздела океан—атмосфера. Л., Гидрометеиздат, 1974. 239 с. Авт.: Р. С. Бортковский, Э. К. Бютнер, С. П. Малевский-Малевич, Л. Ю. Преображенский.
120. Расчет спектральных характеристик ветрового волнения на основе численных и аналитических решений уравнения баланса волновой энергии в спектральной форме.— «Морские гидрофизические исследования», 1975, № 4, с. 83—95. Авт.: И. Н. Давидан, С. Л. Дженюк, Т. А. Пасечник, В. А. Рожков.
121. Рахманин Н. Н. Эмпирический спектр морского волнения.— «Труды ЦНИИ им. акад. А. Н. Крылова», 1958, вып. 126, с. 20—36.

122. Результаты экспериментальных исследований вероятностных характеристик ветрового волнения.— «Морские гидрофизические исследования», 1975, № 4, с. 73—82. Авт.: И. Н. Давидан, Я. М. Кубланов, Л. И. Лопатухин, В. А. Рожков.
123. Р ж е п л и н с к и й Г. В. Исследование режима ветрового волнения океанов и расчеты параметров волн.— «Труды ГОИН», 1972, вып. 111, 184 с.
124. Р о ж к о в В. А. О выборочной изменчивости спектральных характеристик морского волнения.— В сб.: Теоретические и практические вопросы мореходных качеств судов. Регистр Союза ССР. Л., «Транспорт», 1967, с. 219—235.
125. Р о ж к о в В. А. Длина реализации и точка усечения коррелограммы как параметры эмпирического спектрального анализа записей волнения.— «Труды ГОИН», 1968, вып. 93, с. 143—155.
126. Р о ж к о в В. А. Расчет статистических оценок вероятностных характеристик ветровых волн по данным натурных наблюдений.— «Труды координационных совещаний по гидротехнике», 1969, вып. 50, с. 158—179.
127. Р о ж к о в В. А. Регрессионный анализ двух случайных величин.— «Труды ГГО», 1971, вып. 289, с. 51—63.
128. Р о ж к о в В. А. Вероятностный анализ океанологических процессов как нестационарных и неоднородных случайных функций.— «Труды ГОИН», 1974, вып. 122, с. 5—21.
129. Р о ж к о в В. А. О некоторых вопросах вероятностного анализа векторных случайных процессов.— «Труды VIII Всесоюзного симпозиума. Методы представления и аппаратный анализ случайных процессов и полей, секция 3», 1975, ВНИИЭП, с. 128—134.
130. Р о ж к о в В. А., Т р а п е з н и к о в Ю. А. Методические рекомендации, алгоритмы и программы расчета вероятностных характеристик ветрового волнения на ЭЦВМ. Обнинск, 1969. 397 с.
131. Р о ж к о в В. А., Т р а п е з н и к о в Ю. А. Метод оценивания двумерного спектра по данным синхронной регистрации волнения в нескольких точках волнового поля.— «Труды VIII Всесоюзной школы семинара по статистической гидроакустике». М., «Наука», 1976, с. 15—30.
132. Р о л ь Г. У. Физика атмосферных процессов над морем. Л., Гидрометеиздат, 1968. 398 с.
133. Руководство по расчету параметров ветровых волн. Л., Гидрометеиздат, 1969. 138 с.
134. С в е р д р у п Г. и М у н к В. Ветер, волнение и зыбь. Теоретические основы прогноза.— В сб.: Основы предсказания ветровых волн, зыби и прибоа. М., Изд-во иностр. лит.-ры, 1961, с. 15—87.
135. С в е ш н и к о в А. А. Определение вероятностных характеристик трехмерного волнения моря.— «Изв. АН СССР. Механика и машиностроение», 1959, № 3, с. 32—41.
136. С в е ш н и к о в А. А. Прикладные методы теории случайных функций. Л., Судпромгиз, 1961. 252 с.
137. С е к е р ж - З е н ь к о в и ч Я. И. К вопросу о применимости и значении теории А. И. Некрасова.— «Труды координационных совещаний по гидротехнике», 1973, вып. 84, с. 39—40.
138. С м и р н о в Н. В., Д у н и н - Б а р к о в с к и й Н. В. Курс теории вероятностей и математической статистики. М., «Наука», 1969. 505 с.
139. Справочник по надежности. Т. 1. М., «Мир», 1969. 339 с.
140. Справочные данные по режиму ветров и волнения в океанах. М.—Л., «Транспорт», 1956. 234 с.
141. Справочные данные по режиму ветров и волнения на морях, омывающих берега СССР. Л., «Морской транспорт», 1962. 156 с.
142. С р е т е н с к и й Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.—Л., ОНТИ НКТП СССР, 1936. 303 с.

143. Степанов А. Г. Статистические исследования распределений характерных элементов поверхностного волнения и придонных волновых давлений.— В сб.: Морское волнение, нерегулярная качка и ее учет в различных областях морской техники. Л., ВМОЛА, 1964, с. 410—429.
144. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1959. 617 с.
145. Стрекалов С. С. К определению аналитического вида энергетического спектра развитого волнения.— «Океанология», 1961, т. 1, № 3, с. 439—442.
146. Структурные свойства волнения и некоторые пути совершенствования оценок волновых нагрузок на судно.— «Научно-техн. сб. № 2. Регистр СССР», 1972, с. 195—208. Авт.: Г. В. Бойцов, Ф. Г. Кандель, Л. И. Лопатухин, В. А. Рожков.
147. Тихонов В. И. Выбросы случайных процессов. М., «Наука», 1970. 392 с.
148. Трапезников Ю. А. Исследование двумерной спектральной плотности волнения по регистрации взволнованной поверхности в нескольких точках.— «Труды ГОИН», 1974, вып. 122, с. 47—58.
149. Трапезников Ю. А. Исследование двумерной спектральной плотности волнения на озере Красном по регистрации в трех точках.— «Сб. работ Ленинградской и Петрозаводской ГМО», 1974, вып. 8, с. 223—231.
150. Филлипс О. М. Участок равновесия в спектре ветровых волн.— В сб.: Ветровые волны. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1962, с. 219—229.
151. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. М., «Мир», 1968. 167 с.
152. Хальд А. Математическая статистика с техническими приложениями. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1956. 664 с.
153. Хан Г., Шапиро С. Статистические модели в инженерных задачах. М., «Мир», 1969. 395.
154. Хеннан Э. Многомерные временные ряды. М., «Мир», 1974. 575 с.
155. Цыплухин В. Ф., Марцинкевич Л. М. Исследование вероятностных характеристик наклонов взволнованной поверхности моря.— «Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана», 1973, т. 9, № 7, с. 748—753.
156. Численные эксперименты со спектральной моделью расчета полей волнения.— «Труды ГМЦ», 1977, вып. 200, с. 191—209. Авт.: З. К. Абузаров, И. Н. Давидан, Т. А. Пасечник, А. Э. Рейхрудель, В. А. Рожков.
157. Шариков Ю. Д., Черкасов И. А. Применение аэрофото-съемки для изучения морского волнения (практическое руководство). Л., АН СССР, 1959. 217 с.
158. Шор Я. В., Кузьмин Ф. И. Таблицы для анализа и контроля надежности. М., «Сов. радио», 1968. 284 с.
159. Шудейкин В. В. Физика моря. М., «Наука», 1968. 1082 с.
160. Яглом А. М. Спектральные представления для различных классов случайных функций.— «Труды IV Всесоюзного математического съезда», т. 1, Л., АН СССР, 1963, с. 250—273.
161. Aitchison J., Brown J. A. C. The log-normal distribution. Cambridge Univ. Press, 1957, 176 p.
162. Akaike H. Undumped oscillation of the sample autocovariance function and the effect of prewhitening operation.— «J. Inst. Stat. Math.», 1961, vol. 13, N 2, p. 35—51.
163. Alaka M. A. Climatology of Atlantic tropical storms and hurricanes.— «ESSA Tech. Rep. WB-6», Maryland, 1968, p. 1—17.
164. Barnett T. P. On the generation dissipation and prediction of ocean wind waves.— «J. Geophys. Res.», 1968, vol. 73, N 2, p. 513—529.
165. Barnett T. P., Kenyon K. E. Recent advances in the study of wind waves.— «Reports on Progress in Physics», 1975, vol. 38, N 6, p. 667—729.

166. Barnett T. P., Wilkerson J. C. On the generation of wind waves as inferred from airborne radar measurements of fetch-limited spectra.—*J. Marine Res.*, 1967, vol. 25, p. 292—328.
167. Battjes J. A. Long-term wave distributions at seven stations around the British Isles.—*Deutsche Hydrogr. Zs.*, 1972, Bd 25, H 4, S. 179—189.
168. Benjamin B. T. Shearing flow over a wave boundary.—*J. Fluid Mech.*, 1959, vol. 6, N 2, p. 161—205.
169. Benney O. J. Non-linear gravity wave interactions.—*J. Fluid Mech.*, 1962, vol. 14, N 4, p. 477—584.
170. Blackman R. B., Tukey J. W. The measurement of power spectra from the point of view of communications engineering.—*Bell System Tech. J.*, 1958, vol. 37, p. 185—282, 485—569.
171. Borgman L. E. Statistical models for ocean waves and wave forces.—*Advances in Hydroscl.*, 1972, vol. 8, p. 139—181.
172. Borgman L. E. Probabilities for highest wave in hurricane.—*J. Waterways Harb. Eng. Coast. Div.*, 1973, vol. 99, N 2, p. 185—207.
173. Bretschneider C. L. A one dimensional gravity wave spectrum.—*Proc. Conf. Ocean Wave Spectra*, Easton USA, Nat. Acad. Sci, N. Y., 1963, p. 41—57.
174. Brillinger D. F., Rosenblatt M. Asymptotic theory K-th order spectra. Computation and interpretation of K-th order spectra.—*Proc. Advanced Sem. Spectral Analysis Time Ser.* Bernard Harris, 1966, p. 153—233.
175. Burling R. W. The spectrum of wave at short fetches.—*Deutsche Hydrogr. Zs.* 1959, Bd 12, H 2, S. 45—64, 96—117.
176. Cartwright D. E. The use of directional spectra in studying output of a wave recorder on a moving ship.—*Proc. Conf. Ocean Wave Spectra*, Easton USA, Nat. Acad. Sci., 1963, N 4, p. 203—219.
177. Cartwright D. E., Smith N. D. Buoy techniques for obtaining directional wave spectra. *Nat. Inst. Oceanogr. Collected Repr.*, 1964, Wormley, England, vol. 12, p. 112—121.
178. Cartwright D. E., Tucker M. J., Catton D. Digital techniques for the study of sea waves, ship motion and allied process.—*Trans. Soc. Instrum. Technol.*, 1962, N 1, p. 1—16.
179. Chakrabarti S. K., Snider R. H., Feldhausen P. H. Mean length of runs of ocean waves.—*J. Geophys. Res.*, 1974, vol. 79, N 36, p. 5665—5667.
180. Cote L. a. o. The directional spectrum of a wind generated sea as determined from data obtained by the stereo wave observation project.—*Met. Pap.*, 1960, vol. 2, N 6. 88 p.
181. Cox C. S. Measurements of slopes of high frequency wind waves.—*J. Marine Res.*, 1958, vol. 16, p. 199—225.
182. Darbyshire J., Simpson J. H. Numerical prediction of wave spectra over North Atlantic.—*Deutsche Hydrogr. Zs.*, 1967, Bd 20, H 1, S. 18—22.
183. Davidan I. N. a. o. The results of experimental investigation of wind waves probability characteristics.—In: *Intern. Symp. on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves*. London, 1974, p. 24—30.
184. Davidan I. N., Olunin Y. V., Trapeznikov Y. A. On representativity of wave measurements made by Soviet Ships.—In: *Preliminary Scientific Results of GATE*, Vol. 2, N 14. Geneva, 1975, p. 363—365.
185. Davidan I. N., Roshkov V. A. Wind wave analysis and calculation methods. The new world ocean wave charts.—*Abstract of Papers XIV General Assembly, Intern. Union Geod. Geophys.* Bern, 1967, p. 17—20.
186. Davidan I. N. a. o. Indirect checking results of theoretical mo-

- dels of the development of the sea waves in connection with their spectral structure.—«Proc. Verbaux», 1971, N 12, p. 137—139.
187. Davis R. E. On the turbulent flow over a wave boundary.—«J. Fluid Mech.», 1970, vol. 42, N 4, p. 721—731.
 188. Davis R. E. On prediction of the turbulent flow over a wave boundary.—«J. Fluid Mech.», 1972, vol. 52, N 2, p. 287—306.
 189. De Leonibus P. S., Simpson L. S., Mattie M. G. Equilibrium range in wave spectra observed at an open-ocean tower.—«J. Geophys. Res.», 1974, vol. 79, N 21, p. 3041—3053.
 190. Dobson F. W. Measurements of atmospheric pressure on windgenerated sea-waves.—«J. Fluid Mech.», 1971, vol. 48, N 1, p. 91—127.
 191. Dobson F. W. The damping of a group of sea waves.—«Boundary Layer Met.», 1971, N 4, p. 399—410.
 192. Draper L. Waves how high? Nat. Inst. Oceanogr. NIO Collected Repr., 1971, Wormley, England, vol. 19, p. 49—56.
 193. Draper L. British work on wave climatology.—On: Intern. Symp. on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves. London, 1974, p. 37—44.
 194. Dubey S. D. Some percentile estimaters for Weibull parameters.—«Technometrics», 1967, vol. 9, N 1, p. 119—129.
 195. Dunkel M. a. o. Turbulent fluxes of momentum heat and water vapor in the atmospheric surface layer at sea during ATEX.—«Boundary Layer Met.», 1974, N 12, p. 81—106.
 196. Earle M. D. Extreme wave conditions during hurricane Camille.—«J. Geophys. Res.», 1975, vol. 80, N 3, p. 377—379.
 197. Edge B. L., Liu P. C. Comparing power spectra computed by Blackman—Tukey and fast Fourier transformation.—«Water Resour. Res.», 1970, vol. 6, p. 1601—1610.
 198. Elliott J. A. Microscale pressure fluctuations near waves being generated by the wind.—«J. Fluid Mech.», 1972, vol. 54, N 3, p. 427—448.
 199. Ewing J. A. A note on wave length and period in confused seas.—«J. Geophys. Res.», 1969, vol. 74, N 6, p. 1334—1341.
 200. Ewing J. A. Some measurements of the directional wave spectrum.—«J. Marine Res.», 1969, vol. 27, p. 163—171.
 201. Ewing J. A. A numerical wave prediction method for the North Atlantic ocean.—«Deutsche Hydrogr. Zs.», 1971, Bd 24, H 6, S. 241—267.
 202. Ewing J. A. Mean length of runs of high waves.—«J. Geophys. Res.», 1973, vol. 78, N 12, p. 1933—1936.
 203. Feldhausen P. U., Chakrabarti K., Wilson W. Comparison of wave hindcats at weather station «J», North Atlantic Storm of Dec. 1959.—«Deutsche Hydrogr. Zs.», 1959, Bd. 29, H 1, S. 10—16.
 204. Fox M. J. H. On the non-linear transfer of energy in the peak of a gravity wave spectrum.—«Proc. Roy. Sci.», 1976, vol. 348, N 1655, p. 467—483.
 205. Gelsi R., Davillaz E. Le calcul numerique de l' etat de la mer.—«La Houille Blanche», 1970, N 2, p. 157—180; «Meteorologie», 1975, N 2, p. 167—180.
 206. Gilchrist A. W. R. The directional spectrum of ocean waves: an experimental investigation of certain predictions of the Miles—Phillips theory of wave generation.—«J. Fluid Mech.», 1966, vol 25, N 4, p. 795—816.
 207. Gospondnetic D., Miles M. D. Some aspects of the average shape of wave spectra at station India.—In: Intern. Symp. on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves. London, 1974, p. 23—36.
 208. Grenander U., Rosenblatt M. Statistical analysis of stationary time series. Stockholm, Almqvist and Wiksell, 1956, 300 p.
 209. Gross P. L., Warsh K. L., Garstang M. Wave spectra

- with directional aspects for deep water in the Tropical Atlantic.—«Deutsche. Hydrogr. Zs.», 1972, Bd 25, H 4, S. 164—178.
210. Hasselmann K. Grundgleichungen der Seegangsvoraussage.—«Schiffstechnik», 1960, vol. 7, N 39, S. 191—195.
 211. Hasselmann K. On the non-linear energy transfer in a gravity wave spectrum.—«J. Fluid Mech.», 1962, vol. 12, N 4, p. 481—500; 1963, vol. 15, N 2, p. 273—281; 1963; vol. 15, N 3, p. 385—398.
 212. Hasselmann K. Weak-interaction theory of ocean waves. University of Hamburg, 1967. 112 p.
 213. Hasselmann K. a. o. Measurements of wind-wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP).—«Deutsch. Hydrogr. Institut», Hamburg, 1973, 95 S.
 214. Hasselmann K. On the spectral dissipation of ocean wave due to white capping. —«Boundary Layer Met.», 1974, vol. 6, N1—2 p. 107—127.
 215. Hasselmann K. a. o. A parametric wave prediction model.—«J. Phys. Oceanogr.», 1976, vol. 6, N 2, p. 200—228.
 216. Hasselmann K., Munk W. H., MacDonald G. Bispectra of ocean waves.— In: Time Series Analysis, Ch. 8, N. Y., J. Wiley and Sons, 1963, p. 125—139.
 217. Hess G. D., Hidy G. M., Plate E. J. Comparison between wind waves at sea and in the laboratory.—«J. Marine Res.», 1969, vol. 27, N 2, p. 215—225.
 218. Hidy G. M., Plate E. I. Wind action on water standing in a laboratory channel.—«J. Fluid Mech.», 1966, vol. 26, N 4, p. 651—688.
 219. Hicks B. L. The energy spectrum of small wind waves. Univ. Illinois, C. S. L., 1960, Rep. M-92.
 220. Hogben N., Lumb F. Ocean wave statistics. London, HMSO, 1963. 263 p.
 221. Hoffman D. Analysis of measured and calculated spectra.— In: Intern. Symp. on the Dynamics of Marine Vehicles and Structures in Waves, London, 1974, p. 11—28.
 222. Houmb O. G. Some experience gained from analysis of visual and instrumental wave data from the Norwegian continental shelf.—«Schiff and Hafen», 1974, vol. 26, p. 914—917.
 223. Hunt J. N., Massoud S. K. A. On mass transport in deep water waves.—«Geofisica Pura E. Applicata», 1962, vol. 53, N 111, p. 65—76.
 224. Inoue T. On the numerical wave forecasting methods.—«Umi to Sora», 1971, N 2—3, p. 81—92.
 225. International ship structure congresses. Report of Committee 1, Environmental Conditions. 1964, Delft — The Netherlands 70, 1967, Det Norske Veritas, 75 p.; 1970, Tokyo. 61 p.
 226. Isozaki J., Ujiiu J. The calculation of wave propagation in the numerical prediction of ocean waves.—«Papers Met. and Geophys.», 1972, vol. 23, N 4, p. 347—359.
 227. Isozaki I., Ujiiu T. Numerical prediction of ocean wind waves.—«Papers Met. and Geophys.», 1973, vol. 24, N 2, p. 207—231.
 228. Isozaki I., Ujiiu T. Numerical model of marine surface wind and application to the prediction of ocean wind waves.—«Papers Met. and Geophys.», 1974, vol. 25, N 3, p. 197—231.
 229. Iwata N. Directional energy distribution of wind waves.—«J. Oceanogr. Soc. Japan», 1971, vol. 27, N 3, p. 102—108.
 230. Iwata N., Inada W. Estimation of directional properties of wind waves by ultrasonic current meter.—«Bull. Soc. Franco-Japanese Oceanographic», 1971, vol. 9, N 1, p. 1—11.
 231. Jeffreys H. On the formation of water by wind.—«Proc. Roy. Soc.», 1925, A 110, p. 341—347.
 232. Kamphuis J. W. Introduction to wave spectrum analysis.—«Civil Engineering Rep.», N 64, Queen's Univ., Ontario, Canada. p. 62.

233. Kinsman B. Wind waves. Prentice-Hall Inst., Engl. Chiffs., New Jersey, 1965, 661 p.
234. Lass H. U. On the meaning of the constant in the spectrum of the equilibrium range of wind-generated waves.—«Gerlands Beitr. Geophys.», 1974, vol. 83, N 2—3, p. 238—240.
235. Latta G. E., Bailje J. A. On the autocorrelation function of wind generated ocean waves.—«Zs. Angew. Math. Phys.», 1968, Bd 19, H 4, S. 575—586.
236. Lebel F., Gelci R. La prevision numerique de l'etat de la mer a l'aide a'un calculeur.—«J. Mecanique et de Physique de l' Atmosphere. Ser. II.», 1959, vol. 1, N 2, p. 81—99.
237. Lee F. A. On the non-linear mechanics of wind-wave interaction.—«Mem. Roy. Sci. Liege», 1973, N 6, p. 35—46.
238. Levi Civita T. Determination rigoureuse des endes permanentes d'amplitude finie.—«Math. Ann.», 1925, vol. 93, p. 264—314.
239. Lighthill M. J. Physical interpretation of the mathematical theory of wave generation by wind.—«J. Fluid Mech.», 1962, vol. 14, N 3, p. 385—398.
240. Longuet-Higgins M. S. Resonant interactions between two trains of gravity waves.—«J. Fluid Mech.», 1961, vol. 12, N 2, p. 231—332.
241. Longuet-Higgins M. S. The statistical geometry of random surface.—«Proc. Symp. Appl. Math.», 1962, vol. 13, p. 105—143.
242. Longuet-Higgins M. S. The effect on non-linearity on statistical distribution in the theory of sea waves.—«J. Fluid Mech.», 1963, vol. 17, N 3, p. 459—479.
243. Longuet-Higgins M. S. A non-linear mechanism for generation of sea waves.—«Proc. Roy. Soc.», 1969, Ser. A 311, p. 371—389.
244. Longuet-Higgins M. S. On wave breaking and the equilibrium spectrum of wind-generated waves.—«Proc. Roy. Soc. Math. Phys. Sci.», 1969, vol. 310, N 1501, p. 151—159.
245. Longuet-Higgins M. S. On the joint distribution of the periods and amplitudes of sea waves.—«J. Gesphys. Res.», 1975, vol. 80, N 18, p. 2688—2694.
246. Longuet-Higgins M. S. On the non-linear transfer of energy in the peak of a gravity-wave spectrum: a simplified model.—«Proc. Roy. Soc.», 1976, Ser. A 347, N 1650, p. 311—328.
247. Longuet-Higgins M. S., Cartwright D. E., Smith N. D. Observations of the directional spectrum of sea waves using the motions of a floating buoy.—«Proc. Conf. Ocean Wave Spectra», Easton USA, Nat. Acad. Sci., N. Y., 1963, p. 111—136.
248. Longuet-Higgins M. S., Phillips O. M. Phase velocity effects in tertiary wave interactions.—«J. Fluid Mech.», 1961, vol. 12, N 2, p. 333—336.
249. Mallory J. K. Abnormal waves on the South East Coast of South Africa.—«Intern. Hydr. Rev.», 1974, vol. 51, N 2, p. 99—129.
250. Manton M. J. On the generation of the waves by a turbulent wind.—«Boundary Layer Met.», 1972, vol. 2, N 3, p. 348—364.
251. Manton M. J. On the growth and decay a deep water wave component.—«Tellus», 1973, vol. 25, N 1, p. 36—42.
252. Massel S. Methods ortzymynia widma dwuwymiarowegcna podstawie notovan trzech falografow.—«Rozpr. Hydrotechn.», 1971, N 29, p. 127—137.
253. McGoldrick L. F. Resonant interactions among capillary-gravity waves.—«J. Fluid Mech.», 1965, vol. 21, N 2, p. 305—332.
254. McGoldrick L. F. a. o. Measurements of third-order resonant interactions.—«J. Fluid Mech.», 1966, vol. 25, N 3, p. 193—218.
255. Michell I. N. The highest waves in water.—«Philosophical Magazine», 1893, 36, p. 430—437.

256. Miles J. W. On the generation of surface waves by shear flows.—*«J. Fluid Mech.»*, 1957, vol. 3, N 2, p. 185—204.
257. Miles J. W. On the generation of surface waves by shear flows.—*«J. Fluid Mech.»*, 1959, vol. 6, N 4, p. 568—582.
258. Miles J. W. On the generation of surface waves by turbulent shear flows.—*«J. Fluid Mech.»*, 1960, vol. 7, N 3, p. 469—478.
259. Miles J. W. On the generation of surface waves by shear flows.—*«J. Fluid Mech.»*, 1962, vol. 13, N 3, p. 433—448.
260. Miles J. W. On the generation of surface waves by shear flows.—*«J. Fluid Mech.»*, 1967, vol. 30, N 1, p. 163—176.
261. Mitsuyasu H. The one-dimensional wave spectra at limited Fetch.—*«Rep. Res. Inst. Appl. Mech.»*, 1973, vol. 20, N 66, p. 37—53.
262. Mitsuyasu H., Honda T. The high frequency spectrum of wind-generated waves. *«J. Oceanogr. Soc. Japan.»*, 1974, vol. 30, N 4, p. 185—198.
263. Mitsuyasu H., Honda T. The statistical distribution for the elevation velocity and acceleration of the surface of wind waves.—*«J. Oceanogr. Soc. Japan.»*, 1975, vol. 31, N 2, p. 93—104.
264. Mitsuyasu H. a. o. Observations of the directional spectrum of ocean waves using a clover-leaf buoy.—*«J. Phys. Oceanogr.»*, 1975, vol. 5, N 4, p. 750—760.
265. Mitsuyasu H. a. o. Studies on techniques for ocean wave measurements.—*«Bull. Res. Inst. Appl. Mech.»*, 1973, N 39, p. 105—182.
266. Neumann G. Über die Komplexe Natur des Seegangs.—*«Deutsche Hydrogr. Zs.»*, 1952, Bd. 15, H 2, S. 13.
267. Neumann G. Zur Charakteristik des Seeganges.—*«Archiv für Meteorologie Geophysik und Bioklimatologie. Ser. A. Met. und Geophys.»*, 1954, 7, S. 352—377.
268. Nolte K. G., Hsu F. H. Statistics of ocean wave groups.—*«Soc. Petrol. Eng. J.»*, 1973, vol. 13, N 3, p. 139—146.
269. Parzen E. Mathematical considerations in the estimation of spectra.—*«Technometrics»*, 1961, vol. 3, N 2, p. 167—190.
270. Phillips O. M. On the generation of waves by turbulent wind.—*«J. Fluid Mech.»*, 1957, vol. 2, N 1, p. 417—445.
271. Phillips O. M. The maintenance of Reynolds stress in turbulent shear flow.—*«J. Fluid Mech.»*, 1957, vol. 27, N 1, p. 131—144.
272. Pierson W. J. A study of wave forecasting methods and of the height of a fully developed sea on the basis of some wave records obtained by the O. W. S. «Weather Explorer» during a storm of Sea.—*«Deutsche Hydrogr. Zs.»*, 1959, Bd 12, H 6, S. 244—259.
273. Pierson W. J. Observations of long-crested random-breaking waves in both Eulerian and Lagrangian form for comparison with available theories.—In: *Time Series Analysis*, N. Y., J. Wiley and Sons, 1962, p. 140—143.
274. Pierson W. J. a. o. Research on the problem of the radar return from a wind roughened sea.—*«Advanced Applications Flight Experiments Principal Investigators»*, Review, Oct. 5—6, NASA Langley Research Center, 1971, p. 83—114.
275. Pierson W. J., Marks W. The power spectrum analysis of ocean wave records.—*«Trans. Amer. Geophys. Union»*, 1952, vol. 33, N 6.
276. Pierson W. J., Moskowitz L. A proposed spectral for fully developed wind seas based on the similarity theory of S. A. Kitaigorodskii.—*«J. Geophys. Res.»*, 1964, vol. 69, N 24, p. 5181—5190.
277. Pierson W. J., Stacy R. A. The elevations, slope and curvature spectra of wind roughened sea surface. NASA Contract. Rep. CR 2247, 1973. 128 p.
278. Pierson W. J., Tick L. O., Baer L. Computer-based procedures for preparing and wind field analysis capable of using wave data obtained by a space craft.—*«6th Symp. Naval Hydrodynamics»*, 1966, Ser. 28 — Okt. 4, p. 499—532.

279. Pond S. a. o. Measurements of the turbulent fluxes of momentum, moisture and sensible heat over the ocean.—*J. Atmos. Sci.*, 1971, vol. 28, N 6, p. 901—917.
280. Priestley M. B. Basic considerations in the estimation of spectra.—*Technometrics*, 1962, vol. 4, N 4, p. 551—564.
281. Ramamonjariisoa A. Sur l'évolution des spectres d'énergie des vagues de vent à Fetchs courts.—*Met. Soc. Roy. Sci. Liege*, 1974, vol. 6, p. 47—66.
282. Rayleigh, Lord. On waves.—*Phil. Mag.* 1876, vol. 1, p. 257—279.
283. Rayleigh, Lord. Hydrodynamical notes.—*Phil. Mag.* 1911, vol. 31, p. 177—195.
284. Rayleigh, Lord. On periodic irrotational waves at the the surface of deep water.—*Phil. Mag.*, 1917, vol. 33, p. 381—389.
285. Rikishi K., Mitsuyasu H. On the methods of computing power spectrum.—*Bull. Res. Inst. Appl. Mech.*, 1973, N 39, p. 77—105.
286. Roll H. U., Fischer G. Eine kritische Bemerkung zum Neumann-Spectrums des Seaganges.—*Deutsche Hydrogr. Zs.*, 1956, Bd 9, H 4, S. 9—14.
287. Rosenblatt M. A random model of the sea surface generated by the hurricane.—*J. Math.*, 1957, N 6 p. 235—246.
288. Rudnick P., Hasse R. W. Extreme Pacific waves, December, 1969.—*J. Geophys. Res.*, 1971, vol. 76, N 3, p. 742—744.
289. Sager G. Eindimensionale, dreiparametrische Spectren von Meereswellen.—*Gerlands Beitr. Geophys.*, 1975, Bd 84, N 2, S. 155—168.
290. Savina A., Fons C. Analyse et provision de l'état de la mer methode D. S. A.-5.—*Houillee Blanche*, 1966, Tomme 21, N 3, p. 321—336.
291. Sell W., Hasselman K. Computations of nonlinear energy transfes for JONSWAP and empirical wind wave spectra. Hamburg, 1973, 256 p.
292. Sellars F. Maximum heights of ocean waves.—*J. Geophys. Res.*, 1975, vol. 80, N 3, p. 398—404.
293. Smith R. Giant waves.—*J. Fluid Mech.*, 1976, vol. 77, N 3, p. 417—431.
294. Smith W. F. G. Desrtuctive wind waves.—*Sea Frontiers*, 1973, vol. 19, N 5, p. 292—302.
295. Snodgrass F. E. a. o. Propagation of ocean swell across the Pacific.—*Phil. Trans. Roy. London*, 1966, A. 259, p. 431—497.
296. Snyder R. L. A field study of wave-induced pressure fluctuations above surface gravity waves.—*J. Marine Res.*, 1974, vol. 32, N 3, p. 497—532.
297. Snyder R. L., Cox C. S. A. A field stydy of the wind generation of ocean waves.—*J. Marine Res.*, 1966, vol. 24, p. 141—178.
298. Stilwell D. Directional energy spectra of sea from photographs.—*J. Geophys. Res.*, 1969, vol. 74, N 8, p. 1974—1986.
299. Stokes G. G. On the theory of oscillatory waves.—*Math. Phys. Papers*, 180, vol. 1, p. 197—229.
300. Stokes G. G. Supplement to a paper on the theory of oscillatory waves.—*Math. Phys. Papers*, 1880, vol. 1, p. 314—326.
301. Struik D. J. Détermination rigoureuse des ondes irrotationelles périodiques dans un canal à profondeur finil. *Math. Ann.*, 1926, vol. 95, p. 595—634.
302. Sutherland A. J. Growth of spectral components in a wind-generated wave train.—*J. Fluid Mech.*, 1968, vol. 33, N 5, p. 545—560.
303. Taira K. A field study of the development of wind waves.—*J. Oceanogr. Soc. Japan*, 1972, vol. 28, p. 187—202.
304. Thomas J. W. Irrotational gravity waves of finite height: a numerical study.—*Mathematika*, 1968, vol. 15, N 2, p. 139—148.
305. Thomson W. On stationary waves in flowing water.—*Phil. Mag.*, 1887, vol. 27, N 28, p. 32—55.

306. Tick L. J. A non-linear random model of gravity waves.— «J. Math. Mech.», 1959, vol. 8, p. 643—652.
307. Tick L. J. Non-linear probability models of ocean waves.— «Proc. Conf. Ocean Wave Spectra», Easton USA, Nat. Acad. Sci., 1963, N 4, p. 163—171.
308. Toba Y. Local balance in the air—sea boundary process. P. 3.— «J. Oceanogr. Soc. Japan», 1973, vol. 29, p. 209—220.
309. Tucker M. J. Analysis of records of sea waves.— «Proc. I. C. E.», 1963, vol. 26, p. 305—316.
310. Tung C. C. Statistical properties of the kinematics and dynamics of a random gravity wave field. — «J. Fluid Mech.», 1975, vol. 70, N 2, p. 251—256.
311. Valenzuela G. R., Laing M. B. Non-linear energy transfer in gravity capillary wave spectra, with application.— «J. Fluid Mech.», 1972, vol. 54, N 1, p. 507—520.
312. Watson K. M., West B. J. A transport equation description of non-linear ocean surface wave interactions.— «J. Fluid Mech.», 1975, vol. 70, N 4, p. 815—926.
313. Willebrand J. Energy transport in a non-linear and in homogeneous random gravity wave field.— «J. Fluid Mech.», 1975, vol. 70, N 1, p. 113—126.
314. Wilson W. S. a. o. Wind-induced growth of mechanically generated water waves.— «J. Fluid Mech.», 1973, vol. 58, N 3, p. 435—460.

Предметный указатель

А

Ансамбль реализации 18
 Аппликации 71
 Аппроксимация
 — корреляционной функции 23, 25, 31, 41, 171
 — спектральной плотности 24, 25, 38, 108
 — функции углового распределения 130

Б

Баланса энергии уравнение 13, 183, 202, 208
 Би-спектр 17
 Буи волномерные 38

В

Вероятностные характеристики волн 17
 Весовые функции 32, 35
 Волнение ветровое 7
 — нерегулярное 8
 — регулярное 8
 — смешанное 116
 Волнографы 19, 41
 Волны ветровые 7
 — зыби 112

Г

Гильберта преобразование 66
 Грамма—Шарлье ряд 67
 Группы волн 171

Д

Дисперсионное соотношение 10
 Дисперсия оценок 20, 30, 49, 55
 Диссипация энергии 199
 Длина реализации 31

З

Закон распределения Вейбулла 51, 160, 161, 170, 252, 255, 257
 — — логарифмически-нормальный 52, 253
 — — нормальный 63, 64, 72, 255, 257
 — Рэлея 52, 157
 — — усеченный нормальный 174
 — — Рэлея 176
 — — Фреше 52, 252

И

Идеальные условия волнообразования 185
 Интегральное угловое распределение 135

К

Квазистационарность 16
 Квантиль 55
 Коллигации коэффициент 165
 Корреляционная функция 17
 — — временная 17
 — — значений оценок 21, 30, 46
 — — пространственная 17

М

Математическое ожидание 17
 Межгодовая изменчивость характеристик ветра 260
 — — — волнения 260
 Модель волновой поверхности линейная 62
 — — — нелинейная 62, 67, 195
 — распространения зыби 222
 Моменты распределения 47
 — спектра 63

О

- Огибающая волновая 78
- случайной функции 65
- Оценка корреляционной функции 20
- математического ожидания 20
- параметров распределения 50, 55
- спектральной плотности 29, 34, 36, 37
- статистическая вероятностной характеристики 19
- функции распределения 47, 48

П

- Параметры режимных распределений ветра и волнения 257
- Производные пространственные 38, 42

Р

- Разгон ветра (волн) 184
- Распределение вероятностей двумерное 47, 68, 72, 163, 173, 257
- — маргинальное 18, 47, 151
- — одномерное 18, 47, 151, 252, 253
- — условное 18, 47, 161, 258
- временных интервалов между группами волн 177
- высот волн 151, 253
- — — в группе 175
- — — режимные 251
- групп волн 175
- длин волн 160
- — гребней волн 161
- крутизны волн 169
- периодов волн 158
- — — в группе 176
- — — режимные 253, 257
- групп волн 175
- показателя трехмерности 170
- числа волн в группе 173

С

- Семинварианты 68
- Сетка функциональная 51, 88
- «Склеяка» распределения 58, 253
- Смещение оценок 20, 30, 46

Спектр волн зыби 112

- — пространственный 17, 122
- — частотный 17, 81
- — частотно-направленный 122, 129
- смешанного волнения 116
- уклонов волновой поверхности 142
- Спектра волн область 84
- — — основного максимума 84, 85
- — — переходная 84, 106
- — — равновесия 84, 92
- Спектральная плотность 17
- функция 17
- Спектральное представление случайной функции 16
- Спрямленная диаграмма 51, 52
- Статистические характеристики волн 7

Т

- Тензор корреляционный 143
- спектральной плотности 143
- Трение молекулярное 199
- турбулентное 200
- Три-спектр 17

У

- Уклоны волновой поверхности 72, 142

Ф

- Функция распределения вероятностей 18, 43
- — значений оценок 47, 48
- углового распределения волновой энергии 129

Ч

- Числовые характеристики распределений 53

Э

- Элементы волн 46
- Экстремумы случайной функции 77
- Эргодичность 16

Израиль Наумович Давидан
Леонид Иосифович Лопатухин
Валентин Алексеевич Рожков

**Ветровое волнение как вероятностный
гидродинамический процесс**

Редактор З. И. Мироненко. Художник В. В. Бабанов.
Технич. редактор В. И. Семенова. Корректоры: Е. И. Бородина, Т. Н. Черненко.
ИБ № 548

Сдано в набор 23/VIII 1977 г. Подписано к печати 25/XI 1977 г. М-20395. Формат 60×90¹/₁₆.
Бум. тип. № 1. Печ. л. 18,25 с вкл. Уч.-изд. л. 19,86. Тираж 1250 экз. Индекс ОЛ-249. Заказ
2271. Цена 2 р. 70 к. Гидрометеиздат. 199053. Ленинград, 2-я линия, 23.
Ленинградская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Со-
вета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 196126.
Ленинград, Ф-126, Социалистическая ул., 14.