ДИНАМИКА ОКЕАНА

Под редакцией
д-ра физ.-мат. наук, проф.
Ю. П. ДОРОНИНА

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для студентов вузов,
обучающихся по специальности «Океанология»

Ленинград Гидрометеоиздат 1980

УДК 551.46

Авторы; В. Г. Бухтеев, Ю. П. Доронин, М. М. Зубова, Л. Н. Карлин, К. Д. Крейман, Л. Н. Кузнецова, В. А. Макаров, А. Б. Мензин, А. В. Некрасов, Б. И. Тюряков

Рецензенты: д-р физ.-мат. наук, проф. П. С. Линейкин, кафедра океанологии Одесского гидрометеорологического института

Излагаются теоретические положения и методы расчета основных динамических процессов, протекающих в океане. Дана постановка задач о течениях, возбуждаемых в однородном море (баротропные модели) и в стратифицированном море или океане (бароклинные модели). Отмечено соотношение ветровой и термохалинной циркуляции, приводится теория и методы расчета вертикальных движений в океане. Изложена теория ветровых волн, даны статистические характеристики их элементов, рассмотрено влияние различных факторов на формирование приливной волны в океанах и морях и т. д.

Вадим Глебович Бухтеев, Юрий Петрович Доронин, Маргарита Михайловна Зубова, Лев Николаевич Карлин, Кирилл Дмитриевич Крейман, Лилия Николаевна Кузнецова, Валерий Александрович Макаров, Александр Борисович Мензин, Алексей Всеволодович Некрасов, Борис Иванович Тюряков

ДИНАМИКА ОКЕАНА

Редактор З. И. Мироненко. Художник В. В. Бабанов. Худож. редактор В. В. Быков. Техн. редактор Г. В. Ивкова. Корректор Г. С. Макарова. ИБ № 740. Сдано в набор 18.10.79. Подписано в печать 26.02.80. М-23263. Формат 60×90[1]/16, бум. тип. № 1. Лит. гарнитура. Печать высокая. Печ. л. 19. Уч.-изд. л. 20,13. Тираж 2700 экз. Индекс ОЛ-145. Заказ № 482. Цена 1 руб. Гидрометеоиздат, 199053, Ленинград, 2-я линия, д. 23.

Ленинградская типография № 8 ЛПО «Техническая книга» Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 190000, Ленинград, Прачечный пер., 6.

Д $\frac{20806\text{-}049}{069(02)\text{-}80}$ 4-79. 1903030100

ПРЕДИСЛОВИЕ

Курс «Динамика океана» представляет собой по сути развитие представлений о динамических процессах в океанах и морях, основы которых изложены в учебниках «Общая океанология» и «Физика океана». В соответствии с утвержденными учебными планами он читается студентам 4—5-го курсов океанологического профиля гидрометеорологических институтов, государственных университетов и высших морских училищ после того, как они изучат «Физику океана». Это позволяет при изложении материала считать, что студентам известны общие законы движения воды и характер распространения тепла и солей, обусловливающих бароклинность динамических процессов. Конкретизация этих общих положений в учебнике проведена для каждого класса движений: течений, волн, приливов, дрейфа льда.

Качественное представление о динамических процессах в океанах и морях и основные определения их элементов даны в «Общей океанологии». В данном учебнике основное внимание обращено на физическую природу процессов, их математическое описание и способ расчета. Поскольку многие вычисления в настоящее время можно выполнить только численно, при изложении результатов расчетов предполагается, что студенты изучили соответствующие разделы вычислительной математики.

Основой учебника послужили лекции, читаемые студентам океанологического факультета Ленинградского гидрометеорологического института.

Введение, глава 2 и разделы 7.1, 7.2, 7.3 написаны Ю. П. Дорониным, разделы 1.1, 1.2, 1.5—1.11 — Л. Н. Кузнецовой и Б. И. Тюряковым, разделы 1.3 и 1.4 — К. Д. Крейманом, глава 3 и разделы 6.2, 6.3 — А. Б. Мензиным, глава 4 — А. В. Некрасовым, разделы 5.1—5.4 — А. В. Некрасовым и В. Г. Бухтеевым, раздел 5.5—В. А. Макаровым, разделы 6.1, 6.4, 6.5, 7.5 — Л. Н. Карлиным, раздел 7.4 — Л. Н. Кузнецовой, раздел 3.10 — М. М. Зубовой.

ВВЕДЕНИЕ

1. ПОЛНАЯ СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ТУРБУЛЕНТНОГО ОКЕАНА

Движение жидкости описывается, как известно, уравнением Навье—Стокса, получение которого применительно к движению вод морей и океанов подробно рассмотрено в курсе физики океана. В наиболее компактной векторной форме это уравнение имеет вид

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt} = \rho\mathbf{g} + \mathbf{F}_n - \rho\,(2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) - \nabla P + \\ + \varkappa_V \rho \left[\nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{3}\,\mathrm{grad}\,(\mathrm{div}\,\mathbf{V}) \right]. \qquad (0.1)$$

Уравнение показывает, что изменение скорости $\mathbf{V}$ элементарного водного объема плотностью ρ во времени t определяется действием объемных и поверхностных сил. Гравитационные силы, характеризуемые первыми двумя членами правой части уравнения, разделены на периодические приливообразующие $\mathbf{F}_n$ и силы, вызывающие ускорение свободного падения $\mathbf{g}$. Третий член характеризует изменение перемещения воды за счет вращения Земли с угловой скоростью $\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ c^{-1} и называется силой Кориолиса, хотя энергии не производит. Последние два члена представляют собой силу гидростатического давления P и силу вязких напряжений, зависящую от кинематического коэффициента вязкости $\varkappa_V$.

Уравнение движения морской воды дополняется уравнением неразрывности, выражающим собой закон сохранения массы:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{V} = 0. \qquad (0.2)$$

В естественных условиях относительные изменения плотности морской воды не превосходят десятых долей процента. Это означает, что градиенты составляющих скоростей течения по координатным осям практически уравновешиваются и дивергенция потока воды с погрешностью не более десятых долей процента равна нулю. Поэтому изменения плотности морской воды никогда не определяют из уравнения неразрывности, а закон сохранения массы с точностью до десятых долей процента можно выразить более простой формулой:

$$\operatorname{div} \mathbf{V}=0, \tag{0.3}$$

которая всегда используется в океанологии.

Из-за турбулентного характера движения морской воды нет практического смысла находить мгновенные значения скоростей, описываемых уравнением (0.1). Обычно проводят осреднение входящих в него элементов в некотором диапазоне времени. При этом из-за малости изменений плотности воды обычно считают ρ в интервале осреднения неизменной. В результате операции осреднения, кроме средних значений элементов, в уравнении появляются члены, содержащие произведение пульсаций скоростей. Обычно эти члены полагают пропорциональными градиентам средних скоростей и коэффициентам турбулентности K_V. В таком случае осредненные уравнения движения отличаются от неосредненных добавочным членом, зависящим от K_V, все же остальные аргументы представляют собой не мгновенные значения гидрологических элементов, а осредненные, хотя в данном случае их обозначение не изменено:

$$\rho \frac{d\mathbf{V}}{dt}=\rho\mathbf{g}+\mathbf{F}_n-\rho(2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V})-\nabla P+\rho\nabla(K\nabla\mathbf{V}), \tag{0.4}$$

где $K=\varkappa_V+K_V$.

Вид уравнения неразрывности (0.3) при осреднении не меняется.

Осредненное уравнение движения, называемое часто уравнением Рейнольдса, в зависимости от потребностей может представляться в ином виде. Так, например, при исследовании завихренности течения, выражаемой через вихрь скорости $\boldsymbol{\Omega}=\nabla\times\mathbf{V}$, индивидуальная производная скорости трансформируется. Поскольку имеет место векторное тождество

$$\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{V}=(\nabla\times\mathbf{V})\times\mathbf{V}=\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}-\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right), \tag{0.5}$$

то

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\mathbf{V}\cdot\nabla\mathbf{V}=\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{V}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

и, следовательно, уравнение (0.4) преобразуется к виду

$$\rho\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}=\rho\mathbf{g}+\mathbf{F}_n-\rho(2\boldsymbol{\omega}+\boldsymbol{\Omega})\times\mathbf{V}-$$
$$-\nabla P-\rho\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)+\rho\nabla(K\nabla\mathbf{V}). \tag{0.6}$$

Третий член правой части уравнения (0.6) выражает абсолютную завихренность потока морской воды.

В уравнениях движения по сути три неизвестных параметра: скорость потока $\mathbf{V}$, давление P и плотность ρ.

При исследовании бароклинной циркуляции океанических вод необходимо учитывать зависимость плотности морской воды не только от давления, но и от температуры T и солености S, которая выражается уравнением состояния. Последнее, как известно, имеет сложный вид, но при аналитических исследованиях часто упрощается и может быть представлено в виде

$$\rho=\rho_c(1+\varepsilon_1 S+\varepsilon_2 P-\varepsilon_3 T-\varepsilon_4 T^2-\varepsilon_5 ST), \tag{0.7}$$

где коэффициенты ε_j определены экспериментально. Изменение температуры и солености описывается уравнениями диффузии тепла и солей, имеющих после операции осреднения вид

$$\frac{dT}{dt}=\nabla\left[(\varkappa_T+K_T)\nabla T\right]+\frac{1}{c\rho}\left(\frac{dQ}{dt}-\frac{\partial Б}{\partial z}\right); \tag{0.8}$$

$$\frac{dS}{dt}=\nabla\left[(\varkappa_S+K_S)\nabla S\right]. \tag{0.9}$$

В этих уравнениях коэффициенты $\varkappa$ и K обозначают молекулярную и турбулентную диффузию соответствующей субстанции, Q — приток тепла за счет диссипации энергии турбулентности и фазовых преобразований, $Б$ — радиационный баланс, c — теплоемкость воды.

Приведенная система уравнений с соответствующими краевыми условиями описывает все основные стороны движений вод в океанах и морях, включая бароклинную и баротропную циркуляцию, приливы, волны, вертикальные упорядоченные токи и т. д. Однако нерационально пользоваться полной системой уравнений в тех случаях, когда входящие в нее члены играют неравнозначную роль. Особенно важно это учитывать, если иметь в виду ошибки определения используемых параметров и гидрометеорологических элементов. Поэтому перед решением уравнений необходимо их проанализировать и упростить применительно к особенностям изучаемого процесса. Нужно выделить его существенные стороны и учесть это в соответствующих членах уравнения, пренебрегая малыми слагаемыми.

2. КЛАССИФИКАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ И УПРОЩЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Количественное соотношение между членами уравнений движения и неразрывности для процессов различного масштаба определяется посредством статистической оценки значений этих слагаемых. В зависимости от пространственного L_x и временно́го t_x масштаба изучаемого движения определяются среднестатистические значения перепадов давления ∇P_x, скоростей V_x, коэффициентов турбулентности K_x, плотности ρ_x и т. д. По этим характерным значениям элементов можно произвести приближенную оценку порядка различных членов уравнений динамики океана и выделить зна́чимые для процесса определенного масштаба. Таким образом удается классифицировать движения морских вод.

При использовании характерных масштабов имеется в виду, что отношение значения любого элемента f к его характерному значению f_x есть безразмерная величина $f_б$ порядка 1. В таком случае уравнение (0.6), например, представится следующим образом:

$$\frac{V_x}{t_x}\frac{\partial \mathbf{V}_б}{\partial t_б}=g_x\mathbf{g}_б+\frac{F_x}{\rho_x}\frac{\mathbf{F}_б}{\rho_б}-V_x(2\omega_x\boldsymbol{\omega}_б+\Omega_x\boldsymbol{\Omega}_б)\times$$
$$\times\mathbf{V}_б-\frac{\nabla P_x}{\rho_x L_x}\frac{\nabla P_б}{\rho_б}-\frac{V_x^2}{L_x}\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)+\frac{K_x V_x}{L_x^2}\nabla K_б\nabla\mathbf{V}_б. \quad (0.10)$$

Если поделить каждый из членов уравнения (0.10) на характерный масштаб ускорения свободного падения $g_x=10^1$ м/с^2, то окажется, что при характерных скоростях течения порядка 10^{-1} м/с, масштабах времени $t_x\sim10^5$ с и пространства $L_x\sim$ $\sim10^4$ м только два члена уравнения порядка 1. Это первый член правой части уравнения и четвертый, если в нем иметь в виду вертикальный градиент давления. Все остальные слагаемые на 3—4 порядка меньше. Это означает, что с точностью до долей процента сила тяжести уравновешивается вертикальным градиентом давления, т. е. в океане выполняется условие гидростатики

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\rho g. \quad (0.11)$$

На этом фоне развиваются практически все океанические и морские движения. Для них безразмерное отношение, $\mathrm{Fr}=$ $=V^2/(Lg)$, называемое числом Фруда, существенно меньше 1.

Большой класс движений морских вод характеризуется малыми масштабами t_x и L_x и большими масштабами V_x. Это волны. Для них число Fr порядка 10^{-1}. При малом периоде волнения отношение V_x/t_xg_x становится такого же порядка и левый член уравнения (0.10) должен приниматься во внимание. Учет только перечисленных основных членов приводит уравнение движения для этого масштаба процессов к виду

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+\frac{\nabla P}{\rho}+\nabla\left(\frac{V^2}{2}\right)-\mathbf{g}=0. \quad (0.12)$$

Малость члена, содержащего вихрь, по сравнению с основными обозначает, что движение практически безвихревое. В таком потоке скорость выражается через градиент скалярной функции потенциала скорости φ

$$\mathbf{V}=\nabla\varphi. \quad (0.13)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} = \nabla \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Поскольку в океанологии принято направлять вертикальную ось z параллельно ускорению свободного падения, то можно записать $\mathbf{g} = \nabla gz$. С учетом перечисленных замечаний при постоянной плотности воды ρ_c и координатной оси z, направленной вверх, уравнение (0.12) преобразуется следующим образом:

$$\nabla \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{P}{\rho_c} + \frac{V^2}{2} + gz \right) = 0. \qquad (0.14)$$

Уравнение неразрывности (0.3) и условие отсутствия завихренности (0.13) позволяют получить второе уравнение, описывающее поведение потенциала скорости:

$$\nabla^2 \varphi = 0. \qquad (0.15)$$

Последние два уравнения описывают гравитационные волны, классическим примером которых служат волны зыби.

В реальных условиях, особенно с уменьшением характерного масштаба волн L_x, роль турбулентного перемешивания и завихренности становится заметной. Это требует введения в уравнения (0.13)—(0.15) дополнительных слагаемых, входящих в более общее уравнение (0.6).

Большим классом движений, имеющих периодический характер с масштабом времени $t_x \sim 5 \cdot 10^4$ и пространственным масштабом $L_x \sim 10^6$ м, являются приливы. При их описании из уравнений движения отфильтровываются все высокочастотные колебания. Поэтому член, содержащий Ω_x, исключается. Следует принять во внимание отмеченную выше гидростатичность вод океанов и морей, вследствие чего проекция уравнения (0.6) на вертикальную координату z представляет собой уравнение статики (0.11). Поэтому в проекциях уравнения (0.6) на горизонтальные оси исчезают члены, содержащие вертикальный градиент давления и среднее значение g. Так как относительные изменения плотности воды не превышают долей процента, из уравнения статики (0.11) следует

$$P = P_0 + g\rho_c\zeta - g\rho_c z, \qquad (0.16)$$

где P_0 — атмосферное давление, ζ — отклонение морской поверхности от ее невозмущенного состояния ($z = 0$).

В этом случае

$$\nabla_г P = g\rho_c \nabla_г \left(\zeta + \frac{P_0}{g\rho_c} \right), \qquad (0.17)$$

где под $\nabla_г$ понимается оператор горизонтального градиента.

Масштабирование и оценку членов уравнения движения, спроектированного на горизонтальные оси, уже нельзя проводить по характерному значению g_x из-за гидростатичности процессов движения. Наиболее целесообразно в качестве масштаба использовать характерный горизонтальный градиент давления и приливообразующих сил. Последние зависят от взаимного расположения Земли, Солнца и Луны, а также от возмущения гравитационного поля Земли, вызванного приливами в океане и в земной коре, и входят в уравнения движения через градиент приливного потенциала $\Delta\mathbf{G}$. При делении всех членов уравнения (0.10) на характерную скорость приливного течения $V_x \sim \sim 1$ м/с и умножении на характерное время $t_x \sim 5 \cdot 10^4$ с оказывается, что из первого и четвертого слагаемых из-за гидростатичности процесса приливов пропадают вертикальные проекции силы тяжести и давления. Характерные значения слагаемых третьего члена определяются соотношением

$$2\omega_x t_x + \Omega_x t_x \sim 2 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 5 \cdot 10^4 + 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^4.$$

Следовательно, при рассмотрении приливов ускорение Кориолиса должно приниматься во внимание, но само движение морской воды оказывается практически безвихревым.

Характерное значение второго слагаемого, содержащего приливные силы и проекции на горизонтальную плоскость давления из четвертого слагаемого, порядка 1.

Два последних слагаемых порядка $5 \cdot 10^{-2}$ и $5 \cdot 10^{-4}$ соответственно, т. е. адвекция воды и трение, при рассмотрении приливов могут во внимание не приниматься.

Учет только членов порядка 1 приводит к упрощению уравнения движения, которое при описании приливов сводится к виду

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{g}\nabla_\Gamma\left(\frac{\mathbf{G}}{\rho_c \mathbf{g}} - \zeta - \frac{P_0}{\rho_c \mathbf{g}}\right) - A\mathbf{u}. \qquad (0.18)$$

Здесь введены обозначения $\mathbf{u} = \{u, v\}$ — вектор горизонтальной скорости, A — матрица коэффициентов, равная $A = \begin{pmatrix} 0 & -f \\ f & 0 \end{pmatrix}$, $f = 2\omega \sin \varphi$ — параметр Кориолиса.

Вблизи берегов и у дна возрастают градиенты скорости течения и трение, поэтому их нужно принимать во внимание при описании движения воды в мелководных морях.

Полученное уравнение содержит две неизвестных: $\mathbf{u}$ и ζ. Для нахождения второй неизвестной всегда используется уравнение неразрывности, которое при данной записи представляется в виде

$$\nabla_\Gamma \mathbf{u} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \qquad (0.19)$$

Вертикальная составляющая скорости на поверхности океана связана с колебаниями уровня $w = \partial\zeta/\partial t$. Поэтому если проинтегрировать уравнения (0.18) и (0.19) по вертикали в пределах от поверхности $z=\zeta$ до дна ($z=-H$) и вектор полного потока обозначить

$$\mathbf{U}=\int_{-H}^{\zeta}\mathbf{u}\,dz, \tag{0.20}$$

то уравнения (0.18) и (0.19) выражаются через $\mathbf{U}$:

$$\frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}=gH\nabla_{\mathrm{r}}\left(\frac{G-P_0}{\rho_c g}-\zeta\right)-HA\mathbf{U},$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\nabla_{\mathrm{r}}\mathbf{U}=0. \tag{0.21}$$

Уравнения (0.21) описывают не только приливы, но и отдельные колебания воды в результате изменений атмосферного давления или других возмущений.

Хотя изменения плотности морской воды невелики и в рассмотренных типах волновых движений они во внимание не принимаются, есть один тип волн, который имеет место только в стратифицированной жидкости, т. е. при существовании изменений плотности воды по вертикали. При описании внутренних волн используются упомянутые выше уравнения, либо представленные в виде системы для слоев воды с постоянными плотностями, на границах которых возникают волны, либо преобразованные к уравнению для вертикальной составляющей скорости движения, наиболее четко характеризующей волновой процесс.

Диапазон размеров внутренних волн очень большой: от мелкомасштабных до крупных, приливного происхождения. Поэтому при их описании в общем случае уравнения движения в приближении Буссинеска должны содержать кориолисово ускорение

$$\bar{\rho}\,\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}+\bar{\rho}\,(\mathbf{f}\times\mathbf{V})+\nabla P-\rho\mathbf{g}=0, \tag{0.22}$$

где $\bar{\rho}=\rho(z)$.

Чтобы от общего вектора скорости перейти к его вертикальной составляющей, используют соотношение (0.19), сведение к которому производится посредством скалярного приложения плоского оператора Лапласа $\nabla_{\mathrm{r}}^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial y}\right)$ к уравнению (0.22) и дифференцирования по t:

$$\bar{\rho}\,\nabla_{\mathrm{r}}^2\frac{\partial^2\mathbf{V}}{\partial t^2}+\bar{\rho}\,\nabla_{\mathrm{r}}^2\left(\mathbf{f}\times\frac{\partial\mathbf{V}}{\partial t}\right)+\nabla_{\mathrm{r}}^2\frac{\partial}{\partial t}(\nabla P)=0. \tag{0.23}$$

В полученном уравнении из-за гидростатичности процессов (0.11) взаимно сократились члены с вертикальным градиентом давления и ускорением свободного падения. Учет соотношения

(0.19) позволяет представить первый член уравнения (0.23) через вертикальную скорость w:

$$\bar{\rho}\nabla_{\text{г}}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial t^2} = -\bar{\rho}\frac{\partial^3 w}{\partial z\, \partial t^2}. \tag{0.24}$$

Лапласиан от ускорения Кориолиса приводит к вертикальному компоненту вихря скорости. Так как

$$(\mathbf{f}\times\mathbf{V}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & k \\ 0 & 0 & -f \\ u & v & w \end{vmatrix} = fv\mathbf{i} - fu\mathbf{j},$$

то

$$\nabla_{\text{г}}^2\left(\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}\right)\left(f\frac{\partial v}{\partial t}\mathbf{i} - f\frac{\partial u}{\partial t}\mathbf{j}\right) =$$

$$= f\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) = -f\cdot \operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \equiv -f\left(\nabla\times\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right). \tag{0.25}$$

При дальнейших преобразованиях к уравнению движения (0.22) применяется векторно оператор ∇. Поскольку $\nabla\times\nabla P = 0$ и $\nabla\times\mathbf{g} = 0$, то

$$\left(\nabla\times\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right) = -\nabla\times(\mathbf{f}\times\mathbf{V}).$$

Но

$$\nabla\times(\mathbf{f}\times\mathbf{V}) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}k\right)\times(fv\mathbf{i} - fu\mathbf{j}) =$$

$$= f\left[\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{i} + \frac{\partial v}{\partial z}\mathbf{j} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)k\right] = -f\frac{\partial w}{\partial z}.$$

Следовательно, второй член уравнения (0.23) преобразуется к функции от вертикальной скорости

$$\nabla_{\text{г}}^2\left(\mathbf{f}\times\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\right) = -f^2\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{0.26}$$

Давление P в уравнении (0.23) обычно не бывает известным, поэтому его заменяют, исходя из спроектированного на вертикальную ось уравнения движения в приближении Буссинеска:

$$\bar{\rho}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial P}{\partial z} - g\rho = 0, \tag{0.27}$$

и уравнения для локального изменения плотности, обусловленного волнением:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -w\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}. \tag{0.28}$$

Если уравнение (0.27) продифференцировать по t и локальное изменение плотности заменить выражением (0.28), то получится

$$\frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial t} = -\bar{\rho}\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - g w\,\frac{\partial \rho}{\partial z}. \tag{0.29}$$

Если теперь подставить в уравнение (0.23) вместо первого и второго членов выражения (0.24) и (0.26), затем продифференцировать по z

$$-\bar{\rho}\left(\frac{\partial^4 w}{\partial z^2\,\partial t^2} + f^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial t^2} + f^2\,\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \nabla_{\text{г}}^2\,\frac{\partial^2 P}{\partial z\,\partial t} = 0$$

и дифференциал от давления заменить соотношением (0.29), то получается уравнение, содержащее в качестве неизвестной только вертикальную скорость, характеризующую внутреннюю волну:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial z^2\,\partial t^2} + f^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \Gamma\left(\frac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial t^2} + f\,\frac{\partial w}{\partial z}\right) + \\ + \nabla_{\text{г}}^2\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g\Gamma\nabla_{\text{г}}^2 w = 0, \tag{0.30}$$

где $\Gamma \equiv \dfrac{1}{\bar{\rho}}\,\dfrac{\partial \bar{\rho}}{\partial z}$.

Класс движений жидкости, называемый течениями, в принципе описывается уравнениями (0.6)—(0.9). Но в зависимости от характера действующих сил, от размеров акватории, ее глубины и требуемой точности в оценке скоростей течения проводятся различного рода упрощения, облегчающие расчет и анализ течений. Для оценки значимости того или иного члена в уравнении движения (0.10), кроме упомянутого числа Фруда, наиболее часто используются безразмерные числа Россби $\text{Ro} = \dfrac{V_x}{2L_x\omega_x}$, Эйлера $\text{Eu} = \dfrac{V_x^2\rho_x}{\Delta P_x}$ и Буссинеска $\text{Bu} = \dfrac{V_x L_x}{K_x}$. Они характеризуют вклад наиболее трудно определяемых нелинейных инерционных сил по сравнению с силами Кориолиса, давления и трения соответственно. Часто в силах инерции выделяются временные и пространственные составляющие, которые оцениваются раздельно, в соответствии с чем течения подразделяются на стационарные и нестационарные. Конкретная оценка членов уравнения движения для разных условий и зависящая от этого типизация течений сделаны в главе 1.

Глава 1. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ И ТЕОРИЯ ТЕЧЕНИЙ

1.1. Основные уравнения, граничные условия и их упрощения для океана

Большим классом непериодических движений в океане, характеризующемся значительными горизонтальными (100—1000 км) и временными (сутки—месяцы—годы) масштабами и

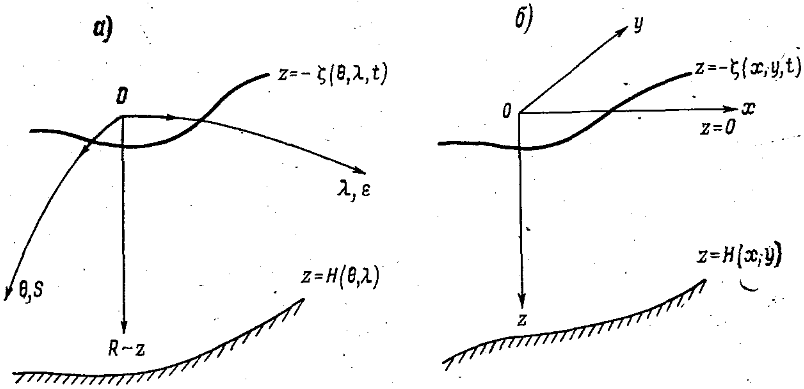


Рис. 1.1. Система координат.

а — сферическая; *б* — декартовая.

сравнительно малыми значениями скоростей (10—100 см/с), являются *течения*. Для их описания используются основные уравнения термогидродинамики турбулентного океана, приведенные в п. 2 Введения, и соответствующие граничные условия.

Обычно в практике требуется знание не вектора скорости течения, а его проекций, характеризующих горизонтальные и вертикальные движения воды. Поэтому уравнения (0.4), (0.8) и (0.9) проектируются на оси сферической системы координат (φ, λ, R). Чтобы не было особенностей в уравнениях при описании течений на экваторе, широта часто выражается через ее дополнение $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$. Проекция на радиус R ради удобства заменяется проекцией на ось z, которая направлена практически вдоль радиуса от невозмущенной поверхности в глубь океана (рис. 1.1 *а*). В проекциях на координаты θ, λ, z уравнения движения имеют вид

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t}+\frac{v_\theta}{R}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}+\frac{v_\lambda}{R\sin\theta}\frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda}+v_z\frac{\partial v_\theta}{\partial z}-$$
$$-\frac{v_\lambda^2}{R}\operatorname{ctg}\theta-2\omega\cos\theta v_\lambda=-\frac{1}{\rho_0 R}\frac{\partial P}{\partial \theta}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}K_V\frac{\partial v_\theta}{\partial z}+\frac{K_{VL}}{R^2}\nabla^2 v_\theta; \qquad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial t}+\frac{v_\theta}{R}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta}+\frac{v_\lambda}{R\sin\theta}\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda}+v_z\frac{\partial v_\lambda}{\partial z}+$$
$$+\frac{v_\theta v_\lambda}{R}\operatorname{ctg}\theta+2\omega\cos\theta v_\theta=-\frac{1}{\rho_0 R\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \lambda}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}K_V\frac{\partial v_\lambda}{\partial z}+\frac{K_{VL}}{R^2}\nabla^2 v_\lambda. \qquad (1.2)$$

Уравнение гидростатики

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\rho g. \qquad (1.3)$$

Уравнение неразрывности в приближении Буссинеска:

$$\frac{1}{R\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta v_\theta+\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}\right)+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0. \qquad (1.4)$$

Ввиду относительной малости адиабатических изменений температуры и малости градиентов основных океанологических характеристик уравнение переноса энтропии (0.8) заменим уравнением теплопроводности для движущейся среды:

$$\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{v_\lambda}{R\sin\theta}\frac{\partial T}{\partial \lambda}+\frac{v_\theta}{R}\frac{\partial T}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial T}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}K_T\frac{\partial T}{\partial z}+\frac{K_{TL}}{R^2}\nabla^2 T. \qquad (1.5)$$

Аналогично в связи с малыми изменениями плотности и градиента солености уравнение диффузии солей запишем в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{v_\lambda}{R\sin\theta}\frac{\partial S}{\partial \lambda}+\frac{v_\theta}{R}\frac{\partial S}{\partial \theta}+v_z\frac{\partial S}{\partial z}=$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}K_S\frac{\partial S}{\partial z}+\frac{K_{SL}}{R^2}\nabla^2 S. \qquad (1.6)$$

В уравнения (1.1)—(1.6) входит семь неизвестных величин: составляющие вектора скорости v_θ, v_λ, v_z, гидродинамическое давление P, плотность ρ, температура T и соленость S морской воды. Для замыкания системы уравнений необходимо ввести еще одно уравнение — уравнение состояния морской воды, которое в самой общей форме имеет вид

$$\rho(S,\ T,\ P)=\rho(35,\ 0,\ 0)+\delta\rho_S+\delta\rho_T+\delta\rho_P+ \\ +\delta\rho_{ST}+\delta\rho_{SP}+\delta\rho_{TP}+\delta\rho_{STP}, \tag{1.7}$$

где $\delta\rho$ — поправки плотности на S, T, P.

В системе (1.1)—(1.7) обозначены: v_θ, v_λ, v_z — составляющие скорости течения по осям θ, λ, z сферической системы координат; $\nabla^2=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right)$ — горизонтальная часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Среди граничных условий обычно выделяют *динамические*, *кинематические* и *термохалинные* условия.

Динамические граничные условия выражают непрерывность тензоров напряжений на границе раздела атмосферы и океана при $z=-\zeta(\theta,\ \lambda,\ t)$, т. е. на свободной поверхности океана, и сводятся к соотношениям:

$$P=P_a, \tag{1.8}$$

где P_a — атмосферное давление, и

$$\rho_0 K_V\frac{\partial v_\theta}{\partial z}=-\tau_\theta,\quad \rho_0 K_V\frac{\partial v_\lambda}{\partial z}=-\tau_\lambda, \tag{1.9}$$

где τ_θ, τ_λ — касательные напряжения ветра на поверхности океана.

В связи с малостью величины ζ по сравнению с глубиной океана эти граничные условия иногда задают на невозмущенной поверхности океана, т. е. при $z=0$.

Кинематические граничные условия означают непроницаемость для жидкости как свободной поверхности $z=-\zeta(\theta,\ \lambda,\ t)$, так и поверхности дна $z=H(\theta,\ \lambda)$ и твердых боковых участков границы.

При $z=-\zeta(\theta,\ \lambda,\ t)$

$$v_z=-\frac{d\zeta}{dt}=-\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{v_\theta}{R}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}+\frac{v_\lambda}{R\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}\right), \tag{1.10}$$

При $z=H(\theta,\ \lambda)$ кинематические условия могут быть двух видов:

а) $v_z=\frac{v_\theta}{R}\frac{\partial H}{\partial\theta}+\frac{v_\lambda}{R\sin\theta}\frac{\partial H}{\partial\lambda}$ — условие скольжения без трения, (1.11)

б) $v_\theta=v_\lambda=0$, $v_z=0$ — условия прилипания и непроницаемости. (1.12)

Выбор условий (а) или (б) зависит от учета трения о дно. Условие скольжения не рассматривает придонный пограничный слой.

На твердых боковых участках границы (рис. 1.2)

$$v_\theta = v_\lambda = 0 \text{ — условие прилипания и непроницаемости} \quad (1.13)$$

На жидких боковых участках границы задается распределение вектора скорости

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{V}_L(\theta,\ \lambda,\ z). \quad (1.14)$$

Термохалинные граничные условия выражают влияние переноса тепла и солей через граничные поверхности и, как было

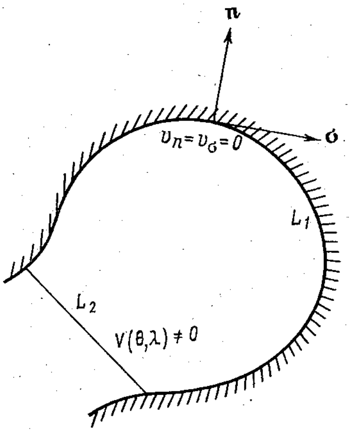


Рис. 1.2. К граничным условиям.

L_1 — твердая, L_2 — жидкая границы бассейна. Внешняя нормаль (**n**) и касательная (**σ**) к границе бассейна.

показано в «Физике океана», на свободной поверхности океана при $z = -\zeta(\theta,\ \lambda,\ t)$ их наиболее общий вид имеет форму

$$\gamma T + \delta \frac{\partial T}{\partial z} = \Gamma_T, \quad (1.15)$$

$$\gamma S + \delta \frac{\partial S}{\partial z} = \Gamma_S. \quad (1.16)$$

Если $\delta = 0$, то задаются значения самих функций, а если $\gamma = 0$, то градиенты функций, а в более общем случае, когда $\gamma \neq 0$ и $\delta \neq 0$, уравнения (1.15) и (1.16) становятся краевыми условиями третьего рода.

На дне и на боковых твердых границах принимаются условия отсутствия потоков тепла и солей по нормали к ним:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{\partial S}{\partial n} = 0. \quad (1.17)$$

На боковых жидких границах должны быть определены значения потоков тепла и солей или соответствующих градиентов температуры и солености по нормали к сечению:

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \Gamma_{Tn}, \quad \frac{\partial S}{\partial n} = \Gamma_{Sn}. \quad (1.18)$$

Начальные условия отражают термодинамическое состояние океана в начальный момент времени $t=0$ и сводятся к заданию полей всех характеристик:

$$v_\theta = v_\theta^{(0)},\quad v_\lambda = v_\lambda^{(0)},\quad v_z = v_z^{(0)},\ P = P^{(0)},$$
$$\zeta = \zeta^{(0)},\ T = T^{(0)},\ S = S^{(0)},\ \rho = \rho^{(0)}. \qquad (1.19)$$

При решении стационарных задач начальные условия отсутствуют.

К интегрированию системы дифференциальных уравнений (1.1)—(1.7) при граничных и начальных условиях (1.8)—(1.19) и сводится решение задачи о течениях в океане.

Однако решение сформулированной в таком виде задачи чрезвычайно сложно из-за больших математических трудностей, обусловленных как нелинейным характером основных уравнений, так и большим количеством зависимых и независимых переменных. Отсюда возникает необходимость упрощения рассмотренной системы уравнений и граничных условий. Основой такого упрощения служит представление о различных временны́х и пространственных масштабах термодинамических процессов в океане. Кроме того, упрощения могут производиться за счет сокращения числа неизвестных (ограничиваясь, например, решением лишь динамической задачи), за счет схематизации формы и рельефа дна океанических бассейнов, а также за счет перехода от сферических координат к декартовым.

Исходные уравнения, записанные в декартовых координатах, значительно проще, чем в сферических (рис. 1.1 *б*). Поэтому эти уравнения широко применяются в динамической океанологии. Однако их использование дает удовлетворительные результаты лишь в тех случаях, когда горизонтальные размеры бассейна значительно меньше радиуса Земли $L \ll R$ (моря, приэкваториальные районы океана). Для океанических бассейнов применение декартовых координат дает лучшие результаты, если использовать приближение *бета-плоскости* (β-плоскости), в котором наряду с использованием прямоугольной системы координат приближенно учитывается изменение параметра Кориолиса с широтой: $f(y) = f_0 + \beta y$, где f_0 — значение параметра Кориолиса на краю бета-плоскости ($y=0$), а $\frac{\partial f}{\partial y} = \beta$ (*бета-эффект*).

Уравнения (1.1)—(1.7) в приближении бета-плоскости записываются в следующем виде:

уравнения движения —

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - fv =$$
$$= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}K_V\frac{\partial u}{\partial z} + K_{VL}\nabla_\Gamma^2 u; \qquad (1.20)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+fu=$$
$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}K_V\frac{\partial v}{\partial z}+K_{VL}\nabla_{\mathrm{r}}^2 v; \qquad (1.21)$$

уравнение гидростатики —

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\rho g; \qquad (1.22)$$

уравнение неразрывности несжимаемой жидкости —

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0; \qquad (1.23)$$

уравнения переноса тепла и солей —

$$\frac{\partial T}{\partial t}+u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}+w\frac{\partial T}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}K_T\frac{\partial T}{\partial z}+K_{TL}\nabla_{\mathrm{r}}^2 T; \qquad (1.24)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t}+u\frac{\partial S}{\partial x}+v\frac{\partial S}{\partial y}+w\frac{\partial S}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}K_S\frac{\partial S}{\partial z}+K_{SL}\nabla_{\mathrm{r}}^2 S. \qquad (1.25)$$

Уравнение состояния (1.7) не зависит от координат и при переходе к декартовым координатам сохраняет свой вид.

В этих уравнениях u, v, w — составляющие скорости течения по осям x, y, z декартовой системы координат (ось x направлена на восток, ось y — на север, ось z — вертикально вниз); $\nabla_{\mathrm{r}}^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — двумерный оператор Лапласа в декартовых координатах.

Из всех граничных условий (1.8)—(1.19) при переходе к декартовым координатам изменяются лишь (1.10) и (1.11):

при $z=-\zeta(x, y, t)$

$$w=-\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right); \qquad (1.26)$$

при $z=H(x, y)$

$$w=u\frac{\partial H}{\partial x}+v\frac{\partial H}{\partial y}. \qquad (1.27)$$

Для дальнейшего упрощения исходной системы дифференциальных уравнений необходимо произвести анализ уравнений термогидродинамики океана и оценить роль отдельных слагаемых в этих уравнениях. Это можно сделать двумя способами: 1) оценкой порядка океанологических характеристик и их производных и 2) приведением уравнений и соответствующих граничных условий к безразмерному виду и оценкой относительной роли каждого из слагаемых (метод нормализации).

Первый способ основан на табличных сведениях об океанологических характеристиках и их производных, которые должны быть обобщением большого количества фактических данных.

Таких достоверных сведений по Мировому океану в настоящее время почти нет.

При использовании второго способа необходимо знать характерные масштабы всех океанологических характеристик. Выбор характерных масштабов сопряжен с большими трудностями, что может привести к неправильным выводам относительно роли отдельных факторов.

Произведем анализ основных уравнений термогидродинамики для течений в океане (движения по оси x, неразрывности и диффузии тепла), используя метод нормализации. Это позволит выявить роль отдельных физических факторов, формирующих течения, и произвести соответствующие упрощения этих уравнений.

Пусть t_x, L_x, H_x, V_x, W_x, T_x, ρ_x, P_x, f_x, K_{Vx}, K_{VLx}, K_{Tx}, K_{TLx} — характерные масштабы соответственно времени, горизонтальной и вертикальной координат, горизонтальной и вертикальной скорости, температуры, плотности, давления в воде, параметра Кориолиса, вертикального и горизонтального коэффициентов турбулентной вязкости и диффузии тепла. При этом под характерным масштабом любой физической величины φ понимают такую единицу ее измерения, при которой безразмерная величина $\varphi_б$ имеет порядок единицы: $\varphi_б = \dfrac{\varphi}{\varphi_x} = O\ (1)$. За временной ($t_x$) и пространственные ($L_x$ и H_x) характерные масштабы принимают промежутки времени и расстояния, в пределах которых величина φ меняется на порядок собственного значения. При таком выборе масштабов все безразмерные производные будут иметь порядок единицы, например

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = O\left(\frac{\varphi_x}{t_x}\right) = O\left(\frac{\varphi_x}{t_x}\frac{\partial\varphi_б}{\partial t_б}\right), \text{ т. е. } \frac{\partial\varphi_б}{\partial t_б} = O\,(1).$$

Введем безразмерные величины по схеме, указанной в п. 2 Введения:

$$t = t_б t_x,\ x = x_б L_x,\ y = y_б L_x,\ z = z_б H_x,$$

$$u = u_б V_x,\ v = v_б V_x,\ w = w_б W_x,\ T = T_б T_x,$$

$$\rho = \rho_б \rho_x,\ P = P_б P_x,\ f = f_б f_x,\ K_V = K_{Vб} K_{Vx},$$

$$K_{VL} = K_{VLб} K_{VLx},\ K_T = K_{Tб} K_{Tx},\ K_{TL} = K_{TLб} K_{TLx}. \qquad (1.28)$$

Значения характерных масштабов рассмотренных величин приведены в табл. 1.1.

Перейдем в уравнениях (1.20), (1.23) и (1.24) к безразмерным величинам, разделив все слагаемые в первом уравнении на коэффициент при кориолисовом слагаемом $f_x V_x$, во втором на V_x/L_x и в третьем на коэффициент при слагаемом вертикальной диффузии $\frac{K_{T_x} T_x}{H_x^2}$.

Рассматриваемые уравнения в безразмерной форме имеют следующий вид:

$$\frac{1}{f_x t_x} \frac{\partial u_б}{\partial t_б} + \frac{V_x}{f_x L_x}\left(u_б \frac{\partial u_б}{\partial x_б} + v_б \frac{\partial u_б}{\partial y_б}\right) + \\ + \frac{W_x}{f_x H_x} w_б \frac{\partial u_б}{\partial z_б} - 1 \cdot f_б v_б = -\frac{P_x}{\rho_x f_x V_x L_x} \frac{1}{\rho_б} \frac{\partial P_б}{\partial x_б} + \\ + \frac{K_{Vx}}{f_x H_x^2} \frac{\partial}{\partial z_б} K_{Vб} \frac{\partial u_б}{\partial z_б} + \frac{K_{VLx}}{f_x L_x^2} K_{VLб} \nabla^2 u_б; \tag{1.29}$$

$$\frac{\partial u_б}{\partial x_б} + \frac{\partial v_б}{\partial y_б} + \frac{W_x L_x}{V_x H_x} \frac{\partial w_б}{\partial z_б} = 0; \tag{1.30}$$

$$\frac{H_x^2}{K_{Tx} t_x} \frac{\partial T_б}{\partial t_б} + \frac{V_x H_x^2}{K_{Tx} L_x}\left(u_б \frac{\partial T_б}{\partial x_б} + v_б \frac{\partial T_б}{\partial y_б}\right) + \frac{W_x H_x}{K_{Tx}} w_б \frac{\partial T_б}{\partial z_б} = \\ = 1 \cdot \frac{\partial}{\partial z_б} K_{Tб} \frac{\partial T_б}{\partial z_б} + \frac{K_{TLx} H_x^2}{K_{Tx} L_x^2} K_{TLб} \nabla^2 T_б. \tag{1.31}$$

Введем безразмерные параметры (критерии): $\mathrm{Sh} = L_x/(V_x t_x)$ — число Струхаля; $\mathrm{Eu} = \rho_x V_x^2/P_x$ — число Эйлера; $\mathrm{Ki} = V_x/(f_x L_x)$ — число Кибеля; $\mathrm{Ek}_V = f_x H_x^2/K_{Vx}$ и $\mathrm{Ek}_{VL} = f_x L_x^2/K_{VLx}$ — числа Экмана для вертикальной и горизонтальной турбулентной вязкости; $\mathrm{Pe}_T = W_x H_x/K_{Tx}$ и $\mathrm{Pe}_{TL} = V_x L_x/K_{TLx}$ — числа Пекле для вертикальной и горизонтальной диффузии; $m = H_x/L_x$ — геометрический параметр.

Анализ уравнения неразрывности (1.30) показывает, что безразмерное отношение $W_x L_x/(V_x H_x) = 1$, т. е. характерное значение вертикальной составляющей скорости

$$W_x = \frac{H_x}{L_x} V_x. \tag{1.32}$$

Теперь уравнения (1.29)—(1.31) принимают вид

$$\mathrm{Sh} \cdot \mathrm{Ki} \frac{\partial u_б}{\partial t_б} + \mathrm{Ki}\left(u_б \frac{\partial u_б}{\partial x_б} + v_б \frac{\partial u_б}{\partial y_б} + \frac{1}{m} \frac{W_x}{V_x} w_б \frac{\partial u_б}{\partial z_б}\right) - f_б v_б = \\ = -\frac{\mathrm{Ki}}{\mathrm{Eu}} \frac{1}{\rho_б} \frac{\partial P_б}{\partial x_б} + \frac{1}{\mathrm{Ek}_V} \frac{\partial}{\partial z_б} K_{Vб} \frac{\partial u_б}{\partial z_б} + \\ + \frac{1}{\mathrm{Ek}_{VL}} K_{VLб} \nabla^2 u_б; \tag{1.33}$$

$$\frac{\partial u_б}{\partial x_б}+\frac{\partial v_б}{\partial y_б}+\frac{\partial w_б}{\partial z_б}=0; \qquad (1.34)$$

$$m \cdot \mathrm{Sh} \cdot \mathrm{Pe}_T \frac{\partial T_б}{\partial t_б}+m \cdot \mathrm{Pe}_T\Big(u_б \frac{\partial T_б}{\partial x_б}+$$

$$+v_б \frac{\partial T_б}{\partial y_б}+\frac{1}{m} \frac{W_x}{V_x} w_б \frac{\partial T_б}{\partial z_б}\Big)=$$

$$=1 \cdot \frac{\partial}{\partial z_б} K_{Tб} \frac{\partial T_б}{\partial z_б}+\frac{\mathrm{Pe}_T}{\mathrm{Pe}_{TL}} K_{TLб} \nabla^2 T_б. \qquad (1.35)$$

Физический смысл введенных безразмерных критериев заключается в том, что они определяют порядок отношения различных членов уравнений термогидродинамики друг к другу, позволяют выявить относительную роль различных факторов в формировании течений и термохалинных процессов и выделить главные из них.

Поэтому эти безразмерные числа называются определяющими параметрами. Так, число Струхаля представляет собой отношение нестационарных слагаемых к нелинейным адвективным; число Эйлера позволяет оценивать отношение нелинейных слагаемых к градиентам давления; число Кибеля выражает отношение нелинейных членов к кориолисовым; числа Экмана есть отношение кориолисовых слагаемых к тем, которые обусловлены вертикальным или горизонтальным турбулентным обменом количества движения; числа Пекле определяют отношение адвекции тепла к диффузии; геометрический параметр дает представление об относительной геометрической протяженности бассейна, характеризуя отношение вертикальных размеров к горизонтальным.

Безразмерные комплексы в уравнениях (1.33) и (1.35), составленные из этих параметров, включают только характерные масштабы. Из них L_x, H_x, f_x определяют внешние условия, в которых протекает физический процесс (в н е ш н и е м а с ш т а б ы), а остальные параметры характеризуют сам процесс (в н у т р е н н и е м а с ш т а б ы). Поскольку в уравнениях (1.33)—(1.35) неизвестные величины и их производные в безразмерной форме имеют порядок единицы, то числовые значения безразмерных комплексов определяют роль каждого члена уравнений и соответствующего ему физического фактора. Сравнительная характеристика слагаемых позволяет выделить главные факторы, формирующие конкретное физическое явление, и тем самым упростить уравнения.

Характерные масштабы и соответствующие им безразмерные критерии меняются в значительных пределах. В связи с этим в океане целесообразно выделять *внутреннюю* область, *пограничные слои (поверхностный, придонный* и *прибрежный)* и *эква-*

ториальную область. Последняя представляет из-за исчезновения силы Кориолиса особую динамическую зону и будет отдельно рассмотрена в разделе 1.9.

Весьма примечательно, что при анализе течений, осредненных за достаточно большой промежуток времени (месяц, сезон, год), в уравнениях движения можно пренебречь членом с локальной производной, поскольку во всех случаях произведение $\mathrm{Sh} \cdot \mathrm{Ki} \ll 1$. Такие течения называются *стационарными*. Таким образом, крупномасштабные и мезомасштабные циркуляции в океане могут рассматриваться как квазистационарные.

Роль локального слагаемого будет возрастать при существенном уменьшении характерного масштаба времени. Например, при $t_x \ll 10^4$ с (~ 3 ч) безразмерный комплекс будет $\mathrm{Sh} \times \mathrm{Ki} \gg 1$, течения будут существенно *нестационарными*.

В уравнениях движения для внутренней области океана лишь два слагаемых имеют порядок единицы: кориолисов член и член горизонтального градиента давления. Это означает, что уравнения движения упрощаются до геострофических соотношений, а соответствующие течения являются *геострофическими*. Выделяют два типа геострофических движений: первый тип, когда характерный горизонтальный масштаб L_x существенно меньше радиуса Земли $L_x/R \ll 1$, и второй тип, когда L_x и R соизмеримы, $L_x/R = 1$. Геострофические течения второго типа известны как *крупномасштабные*, а первого типа — *мезомасштабные*.

В поверхностном и придонном пограничных слоях растет роль вертикального турбулентного обмена, поскольку $1/\mathrm{Ek}_V = 1$ и поэтому геострофичность движения нарушается.

Отклонения от геострофичности движения проявляются также в прибрежном пограничном слое за счет усиления влияния горизонтального турбулентного обмена и нелинейных эффектов [в уравнении (1.33) безразмерные комплексы Ki, $1/\mathrm{Ek}_V$ увеличиваются].

Уравнения турбулентной диффузии тепла и солей почти не допускают упрощений. В них важны все слагаемые, описывающие формирование этих полей: и локальные изменения, и адвективный перенос, и вертикальная турбулентная диффузия.

Кроме того, следует отметить, что любые упрощения исходной системы уравнений вызывают необходимость несколько видоизменять граничные и начальные условия, приспосабливая их к сделанным допущениям.

В настоящее время при изучении течений в океане выделяют два класса задач: *эволюционный* и *диагностический*.

В первом из них изучается формирование взаимосвязанных полей течений, температуры и солености в океане. Однако решение эволюционных задач сопряжено с большими трудностями, связанными с необходимостью численного интегрирования нестационарных и нелинейных дифференциальных уравнений.

Этих трудностей можно избежать, если изучать крупномасштабные стационарные течения, осредненные за большие промежутки времени (месяц, сезон, год) *при известных из наблюдений* распределениях атмосферного давления и плотности морской воды. Это составляет содержание диагностических задач. В океанологической практике эти задачи нашли широкое распространение, поскольку эволюционные задачи еще далеки от практического использования, а инструментальных данных, необходимых для составления осредненных схем течений в океане, пока еще почти нет.

1.2. Основные уравнения гидродинамики в интегральной форме

Часто бывает необходимо рассматривать движение не отдельных объемов в трехмерном пространстве, а горизонтальных потоков вод, охватывающих всю толщу океана. Эти суммарные по вертикали переносы вод в горизонтальном направлении называются *полными потоками* и вводятся соотношениями

$$M_x = \int_{-\zeta}^{H} u\,dz \approx \int_{0}^{H} u\,dz; \quad M_y = \int_{-\zeta}^{H} v\,dz \approx \int_{0}^{H} v\,dz. \tag{1.36}$$

Здесь M_x и M_y обозначают компоненты полного потока $\mathbf{M}$ в декартовой системе координат; $H = H(x, y)$ — глубина океана, $\zeta = \zeta(x, y)$ — свободная поверхность океана. Поскольку $\zeta \ll H$, нижний предел интегрирования обычно заменяется на 0. Полный поток является интегральной характеристикой, не учитывающей вертикальной структуры течений.

Для получения основных уравнений гидродинамики в интегральном виде дифференциальные уравнения (1.20)—(1.23) необходимо проинтегрировать по z, учтя замечание о малости ζ по сравнению с H. Однако это упрощение при интегрировании уравнения гидростатики (1.22) неприменимо тогда, когда наклон уровня является единственной или при наличии других существенной причиной, вызывающей течение. Поэтому уравнение гидростатики в интегральной форме имеет вид

$$P_z = P_a + \int_{-\zeta}^{0} g\rho\,dz + \int_{0}^{z} g\rho\,dz. \tag{1.37}$$

В пределах тонкого слоя, описываемого первым интегралом, плотность воды меняется слабо и может быть заменена средней или поверхностной ρ_0. В таком случае

$$P_z = P_a + g\rho_0\zeta + g\int_{0}^{z} \rho\,dz. \tag{1.38}$$

В формуле (1.38) первые два слагаемых правой части, обусловленные атмосферным давлением и весом столба жидкости в слое от невозмущенной до свободной поверхности, не меняются с глубиной и характеризуют *баротропные эффекты* в поле гидродинамического давления. Последнее слагаемое, обусловленное весом столба жидкости в основном слое от невозмущенной поверхности до горизонта z, характеризует *гидростатический эффект*. В неоднородном океане оно учитывает также и бароклинный эффект в поле давления. Следует иметь в виду, что предпосылки к возникновению течений создаются лишь пространственной неоднородностью (градиентами) бароклинного и баротропного факторов.

Интегрирование уравнения неразрывности (1.23) по z от невозмущенной поверхности до дна океана приводит к выражению

$$\int_0^H \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_0^H \frac{\partial v}{\partial y} dz + \int_0^H \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0. \tag{1.39}$$

Так как в общем случае глубина океана меняется $H = H(x, y)$, то использование правила дифференцирования интегралов с переменным пределом дает

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_0^H u\, dz - u_H \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \int_0^H v\, dz - v_H \frac{\partial H}{\partial y} + (w_H - w_0) = 0. \tag{1.40}$$

Наблюдения показывают, что на дне обычно имеет место затухание течения, т. е. выполняются условия прилипания $u_H = v_H = w_H = 0$, а вертикальная скорость у поверхности океана очень мала, поэтому с достаточной для практики точностью *уравнение неразрывности в интегральной форме* записывается в виде

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = 0 \text{ или } \operatorname{div} \mathbf{M} = 0. \tag{1.41}$$

Если полные потоки определять интегрированием по вертикали от свободной поверхности и принять во внимание кинематическое соотношение типа (1.10), то более **точная** форма интегрального уравнения неразрывности имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{M} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \tag{1.42}$$

Дивергентная форма уравнения неразрывности (1.41) позволяет ввести новую интегральную характеристику, а именно *функцию полного потока* ψ таким образом, чтобы компоненты полного потока в любой точке пространства были связаны с нею следующими соотношениями:

$$M_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad M_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{1.43}$$

Изолинии этой функции представляют собой линии тока для полного потока. Разность значений функции ψ в двух близких точках, расположенных на нормали к изолиниям, определяет расход воды в этом сечении. Изолинии $\psi = \mathrm{const}$ не могут пересекать береговой контур, а должны быть параллельны ему.

Для получения уравнений движения в интегральном виде уравнения (1.20), (1.21) предварительно запишем в дивергентной форме (т. е. умноженными на u и v соответственно и сложенными с уравнением неразрывности):

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uu)+\frac{\partial}{\partial y}(uv)+\frac{\partial}{\partial z}(uw)-fv=$$
$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_V\frac{\partial u}{\partial z}\right)+K_{VL}\nabla^2 u; \qquad (1.44)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uv)+\frac{\partial}{\partial y}(vv)+\frac{\partial}{\partial z}(vw)+fu=$$
$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_V\frac{\partial v}{\partial z}\right)+K_{VL}\nabla^2 v. \qquad (1.45)$$

Интегрирование (1.44), (1.45) по вертикали от невозмущенной поверхности океана до дна с использованием правила дифференцирования интегралов с переменным пределом и учетом динамических (1.9) и кинематических (1.12) граничных условий приводит к уравнениям

$$\frac{\partial M_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H uu\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^H uv\,dz-fM_y=$$
$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H P\,dz+\frac{P_H}{\rho_0}\frac{\partial H}{\partial x}+\left(K_V\frac{\partial u}{\partial z}\right)_H+$$
$$+\frac{\tau_x}{\rho_0}+K_{VL}\nabla^2 M_x-K_{VL}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_H\frac{\partial H}{\partial x}+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_H\frac{\partial H}{\partial y}\right]; \qquad (1.46)$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H uv\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_0^H vv\,dz+fM_x=$$
$$=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^H P\,dz+\frac{P_H}{\rho_0}\frac{\partial H}{\partial y}+\left(K_V\frac{\partial v}{\partial z}\right)_H+$$
$$+\frac{\tau_y}{\rho_0}+K_{VL}\nabla^2 M_y-K_{VL}\left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_H\frac{\partial H}{\partial x}+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_H\frac{\partial H}{\partial y}\right]. \qquad (1.47)$$

Однако эти уравнения еще содержат составляющие скорости, входящие в интегралы и производные. С тем чтобы полностью перейти к полным потокам, необходимо сделать ряд упрощений. Во-первых, интегралы от произведений двух функций можно приближенно заменить произведениями интегралов от этих функций, т. е.

$$\int_0^H uu\,dz \approx \frac{1}{H} M_x^2, \quad \int_0^H uv\,dz \approx \frac{1}{H} M_x M_y.$$

Во-вторых, вследствие малости скорости течения у дна ($u_H \approx v_H \approx 0$) можно пренебречь последними членами в правых частях уравнений. Тогда уравнения (1.46), (1.47) сводятся к виду

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial M_x}{\partial t} + \frac{1}{H}\left(M_x \frac{\partial M_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) - f M_y = \\
&= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_0^H P\,dz + \frac{1}{\rho_0}(R_x + \tau_x) + K_{VL}\nabla^2 M_x; \qquad (1.48)\\
&\frac{\partial M_y}{\partial t} + \frac{1}{H}\left(M_x \frac{\partial M_y}{\partial x} + M_y \frac{\partial M_y}{\partial y}\right) + f M_x = \\
&= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_0^H P\,dz + \frac{1}{\rho_0}(R_y + \tau_y) + K_{VL}\nabla^2 M_y, \qquad (1.49)
\end{aligned}\right.$$

в которых ради краткости члены, описывающие придонное трение, обозначены через R_x и R_y:

$$R_x = \left(\rho_0 K_V \frac{\partial u}{\partial z}\right)_H, \quad R_y = \left(\rho_0 K_V \frac{\partial v}{\partial z}\right)_H. \qquad (1.50)$$

Полученные уравнения (1.48), (1.49) являются уравнениями движения в *интегральной форме*. Они описывают двумерное движение суммарных по вертикали потоков воды под воздействием различных сил. При диагностическом подходе (поле плотности морской воды известно из наблюдений) эти уравнения совместно с уравнениями неразрывности и гидростатики в интегральной форме (1.38), (1.42) образуют *замкнутую* систему для определения искомых интегральных функций M_x, M_y, P и ζ.

В качестве граничных условий, необходимых для решения этой системы, обычно используют два варианта условий для полных потоков на твердом контуре (берегах):

а) прилипания и непроницаемости

$$(M_\tau)_L = 0; \quad (M_n)_L = 0; \qquad (1.51)$$

б) скольжения и непроницаемости

$$\left(\frac{\partial M_\tau}{\partial n}\right)_L = 0; \quad (M_n)_L = 0, \qquad (1.52)$$

где M_n и M_τ — компоненты полного потока по нормали и касательной к контуру L. На жидкой границе должны быть известны расходы воды.

В начальный момент времени задается поле полных потоков

$$\mathbf{M}=\mathbf{M}^0(x, y) \text{ при } t=0. \qquad (1.53)$$

1.3. Дрейфово-градиентные течения в приближении однородного океана

Полная система дифференциальных уравнений геофизической термогидродинамики для океана является, как было отмечено выше, чрезвычайно сложной для решения даже с использованием современных вычислительных средств. Кроме того, необходимо иметь в виду, что в общем случае неизвестными в (1.1)—(1.7) еще являются и значения коэффициентов K_V, K_T, K_S. Таким образом, система (1.1)—(1.7) усложняется еще больше, поскольку с целью замыкания она должна быть дополнена уравнениями, устанавливающими связь между перечисленными коэффициентами и остальными неизвестными.

Одним из кардинальных упрощений, существенно облегчающим анализ закономерностей динамической структуры океана, является предположение о его плотностной однородности в вертикальном и горизонтальных направлениях. Суть этого допущения заключается в том, что не принимаются во внимание процессы тепло- и влагообмена между океаном, атмосферой и литосферой, а также изменения плотности воды с глубиной в зависимости от давления.

Ветровая циркуляция однородного океана устанавливается относительно быстро. Из уравнения (1.33) следует, что локальным изменением скорости можно пренебречь, если $\mathrm{Sh}\cdot\mathrm{Ki}\ll 1$. Поскольку $\mathrm{Sh}\cdot\mathrm{Ki}=1/(t_x f_x)$, то необходимым является условие $1/(t_x f_x)\ll 1$. Таким образом, учитывая, что $f_x\approx 10^{-4}$ с (см. табл. 1.1), рассматривать ветровую циркуляцию в квазистационарном приближении можно в тех случаях, когда $t_x\geqslant 10^6$ с.

Дрейфовый перенос, наличие берегов, а также пространственная неравномерность поля ветра вызывают наклон поверхности океана по отношению к поверхности невозмущенного уровня. Как следствие этого в однородном океане появляются горизонтальные градиенты давления:

$$\frac{\partial P}{R\partial\theta}=g\rho_0\frac{\partial\zeta}{R\partial\theta}; \qquad (1.54)$$

$$\frac{\partial P}{R\sin\theta\,\partial\lambda}=g\rho_0\frac{\partial\zeta}{R\sin\theta\,\partial\lambda}. \qquad (1.55)$$

На основании оценок, выполненных в разделе 1.1, ясно, что для крупномасштабных течений в океане кориолисов член и слагаемое, содержащее градиент давления,— величины одного порядка. Учет только этих членов описывает, как отмечалось в курсе «Общая океанология», геострофические течения:

$$2\omega \cos \theta v_\lambda = g \frac{\partial \zeta}{R\, \partial \theta}; \tag{1.56}$$

$$-2\omega \cos \theta v_\theta = g \frac{\partial \zeta}{R \sin \theta\, \partial \lambda}. \tag{1.57}$$

Вблизи берегов, у поверхности и дна океана возрастает роль трения, поэтому вклад соответствующих членов в уравнениях движения увеличивается и может достичь значений слагаемых геострофического течения. Таким образом, если принимать во внимание поверхностный и придонный слои, то динамика внутренней области однородного океана в квазистационарном приближении описывается следующей системой уравнений:

$$f v_\lambda = g \frac{\partial \zeta}{R\, \partial \theta} + K_V \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}; \tag{1.58}$$

$$-f v_\theta = g \frac{\partial \zeta}{R \sin \theta\, \partial \lambda} + K_V \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2}; \tag{1.59}$$

$$\frac{\partial v_\theta}{R\, \partial \theta} + \frac{\partial v_\lambda}{R \sin \theta\, \partial \lambda} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0. \tag{1.60}$$

Влияние на динамические процессы в океане атмосферы и дна задается граничными условиями:

при $z = 0$ — невозмущенная поверхность океана

$$\rho_0 K_V \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = -\tau_\theta, \quad \rho_0 K_V \frac{\partial v_\lambda}{\partial z} = -\tau_\lambda, \quad v_z = 0, \tag{1.61}$$

при $z = H$

$$v_\theta = 0, \quad v_\lambda = 0, \quad v_z = 0. \tag{1.62}$$

Граничные условия по горизонтали будут рассмотрены ниже.

Естественно, что в силу ряда упрощений поставленная задача (1.58)—(1.62) не в состоянии объяснить многие из наблюдаемых в реальном океане явлений. Однако ее простота по сравнению с полной системой, приведенной в разделе 1.1, позволяет по крайней мере качественно выявить и проанализировать ряд важных особенностей динамики океана.

Вводя комплексные скорость V, градиент давления ξ и напряжение трения ветра на поверхности τ, уравнения движения (1.58), (1.59) и первые два из граничных условий (1.61) и (1.62) можно записать в виде

$$ifV = g\xi + K_V \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \tag{1.63}$$

$$\text{при } z = 0 \quad \rho_0 K_V \frac{\partial V}{\partial z} = -\tau, \tag{1.64}$$

$$\text{при } z = H \quad V = 0. \tag{1.65}$$

В результате решения (1.63)—(1.65), с учетом того, что в приближении однородного океана ξ не зависит от глубины для северного полушария ($f > 0$), получается

$$V = \frac{\tau}{\mu K_V} \frac{\operatorname{sh} \mu (H - z)}{\operatorname{ch} \mu H} + \frac{g\xi}{if}\left(1 - \frac{\operatorname{ch} \mu z}{\operatorname{ch} \mu H}\right), \tag{1.66}$$

где $\mu = (f/2K_V)^{1/2}(1+i)$.

Первое слагаемое в правой части (1.66) — дрейфовый компонент движения — является результатом непосредственного влекущего действия ветра. Второе слагаемое определяется наличием в океане горизонтального градиента давления и носит название градиентного компонента движения. Суперпозиция (1.66) чисто дрейфового и градиентного течений в однородном океане образует так называемую экмановскую модель элементарной системы течений.

Вертикальная составляющая суммарного дрейфово-градиентного течения определяется из проинтегрированного по вертикали уравнения неразрывности (1.60) с учетом последнего из граничных условий (1.61):

$$v_z = -\int_0^z \operatorname{div}_\Gamma V = -\operatorname{div}_\Gamma \left\{\frac{\tau}{if} \frac{\operatorname{ch} \mu H - \operatorname{ch} \mu (H - z)}{\operatorname{ch} \mu + 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{g\xi}{if}\left(z - \frac{1}{\mu} \frac{\operatorname{sh} \mu z}{\operatorname{ch} \mu H}\right)\right\}, \tag{1.67}$$

где $\operatorname{div}_\Gamma$ обозначает дивергенцию на горизонтальной плоскости.

Поскольку, по обозначению (1.54), (1.55), а величину ξ входят первые производные от уровня ζ, то подстановка в выражение (1.67) граничного условия для вертикальной составляющей скорости у дна $v_z(\theta, \lambda, H) = 0$ приводит к уравнению второго порядка относительно $\zeta(\theta, \lambda)$. Для решения этого уравнения необходимо располагать не зависящим от вертикальной координаты граничным условием. В связи с этим обычно используемое условие непротекания на твердых границах выражается через равенство нулю не нормальной составляющей скорости на каждом горизонте, а через уже отмечавшееся в разделе 1.2 нулевое значение нормальной составляющей полного потока:

$$(M_n)_L = 0. \tag{1.68}$$

Значение полного потока **M** находится интегрированием уравнения (1.66) от невозмущенной поверхности до дна:

$$\mathbf{M} = \int_0^H V\,dz = \frac{\tau}{if} \frac{\operatorname{ch} \mu H - 1}{\operatorname{ch} \mu H} + \frac{g\xi}{if}\left(H - \frac{1}{\mu} \operatorname{th} \mu H\right). \tag{1.69}$$

Отделяя здесь действительную и мнимую части и составляя в зависимости от направления береговой черты выражение

(1.68), получают искомое граничное условие для определения уровня океана. После определения ζ на основании формул (1.66) и (1.67) определяется вектор скорости течения на любом горизонте.

Приступая к анализу основных закономерностей вертикальной структуры дрейфово-градиентных течений в однородном океане, необходимо отметить, что она, как это видно из (1.66), зависит от соотношения глубины океана и величины μ, в которую входит множитель $h = 1/\sqrt{f/2K_V}$, имеющий размерность длины. Физически h определяет толщину слоев вблизи свободной поверхности и дна океана, в пределах которых заметно сказывается непосредственный эффект трения ветра и трения о дно соответственно. Величина h и глубина трения Экмана D связаны между собой соотношением $D = \pi h$.

Когда $h \ll H$, океан принято называть глубоким. В этом случае, учитывая, что

$$\frac{\operatorname{sh} \mu (H - z)}{\operatorname{ch} \mu H} \approx e^{-\mu z}; \quad \frac{\operatorname{ch} \mu z}{\operatorname{ch} \mu H} \approx e^{-\mu (H - z)},$$

формулу (1.66) можно упростить:

$$V = \frac{\tau}{\mu K_V} e^{-\mu z} + \frac{g\xi}{if} - \frac{g\xi}{if} e^{-\mu (H - z)}. \tag{1.70}$$

Из анализа (1.70) следует, что в толще океана ($H - D > z > D$) на значительных расстояниях от свободной поверхности и дна основной вклад в течение вносит второе слагаемое. С достаточной степенью точности можно записать:

$$V = \frac{g\xi}{if}. \tag{1.71}$$

Этот результат может быть получен и непосредственно из уравнений движения (1.56) и (1.57), т. е. при предположении о незначительном влиянии турбулентного обмена. Формула (1.71) описывает геострофическое течение. Его направление и скорость не меняются с глубиной. Направлено геострофическое течение перпендикулярно направлению градиента давления, причем в северном полушарии оно отклоняется вправо от наблюдателя, смотрящего в направлении максимального понижения уровня.

В верхнем слое океана ($0 < z < D$), кроме геострофического, существенную роль играет чисто дрейфовое течение. Профиль скорости в этом слое, носящем название экмановского поверхностного слоя трения или верхнего пограничного слоя, описывается формулой

$$V = \frac{\tau}{\mu K_V} e^{-\mu z} + \frac{g\xi}{if}. \tag{1.72}$$

И, наконец, у дна океана в слое толщиной D ($H>z>H-D$), где дрейфовый перенос практически отсутствует и существенное влияние оказывает придонное трение, вертикальная структура течения будет определяться зависимостью

$$V=\frac{g\xi}{if}\left[1-e^{-\mu(H-z)}\right]. \qquad (1.73)$$

По аналогии с поверхностным этот слой называется экмановским придонным пограничным слоем. Здесь с увеличением расстояния от дна вектор скорости течения возрастает по модулю и одновременно совершает поворот до направления геострофического течения.

В другом предельном случае — случае мелководья ($H\ll h$) — имеет место соотношение $\mu H\ll 1$, учет которого приводит формулу (1.66) к виду

$$V=\frac{\tau}{K_V}(H-z)+$$

$$+\frac{g\xi}{2K_V}(H^2-z^2). \qquad (1.74)$$

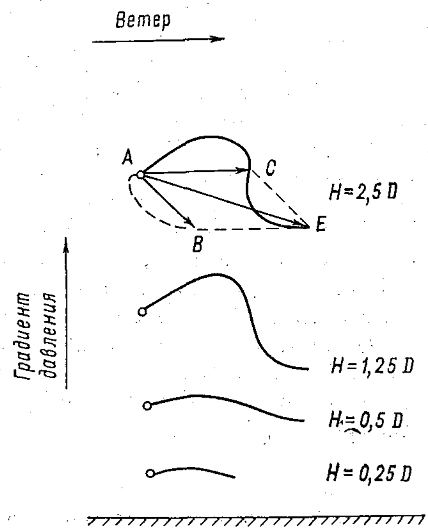


Рис. 1.3. Годографы скорости суммарного дрейфово-градиентного течения для различных значений H/D (северное полушарие).

AB — чисто дрейфовое течение на поверхности; AC — геострофическое течение; AE — суммарное дрейфово-градиентное течение на поверхности.

В (1.74) полностью отсутствует эффект вращения. Эта формула также может быть получена, если при решении задачи (1.63)—(1.65) пренебречь ускорением Кориолиса.

На рис. 1.3 приведены годографы суммарного дрейфово-градиентного течения в северном полушарии для различных значений H/D при наличии нагонного ветра, параллельного отвесному бесконечно протяженному прямолинейному берегу. Дрейфовое течение, формирующееся в поверхностном слое, создает интегральный перенос, направленный перпендикулярно к ветру, т. е. в данном случае нормально к береговой черте. Как следствие этого у берега образуется нагон, а значит, и градиент давления, направленный в сторону океана. Последний формирует градиентное течение, охватывающее всю толщу воды от поверхности до дна.

В качестве примера на том же рисунке помещена схема построения годографа для случая, когда $H = 2{,}5D$. В поверхностном пограничном слое имеется дрейфовое течение (годограф BA) и геострофическое течение AC. Их результирующая [см. (1.66)] на каждом горизонте дает суммарное течение (годограф EC). Вне поверхностного и придонного пограничных слоев имеет место практически неизменное по глубине, направленное параллельно берегу геострофического течения (1.71). В придонном пограничном слое, как и в вышележащем промежуточном, дрейфовое течение практически отсутствует. Вследствие влияния дна градиентное течение имеет переменное направление и скорость (годограф CA).

По мере уменьшения глубины H, естественно, уменьшается толщина промежуточного слоя и он исчезает при $H \leqslant 2D$. В связи с этим трансформируется и годограф суммарного дрейфово-градиентного течения. При $H = 0{,}25D$ он практически становится отрезком прямой, параллельной береговой черте, что соответствует однонаправленному вдольбереговому переносу.

Что касается вертикальной составляющей скорости, то, как следует из (1.67), существенное влияние на ее изменение с глубиной, так же как и на горизонтальные составляющие, оказывает наличие поверхностного и придонного пограничных слоев.

В связи со значимостью вертикального переноса в формировании гидрологической и гидрохимической структуры океана, а также в механизмах прибрежной циркуляции он будет рассмотрен отдельно.

1.4. Обобщение теории Экмана на случай переменного коэффициента вертикального турбулентного обмена

Классическая теория дрейфовых течений Экмана, в которой использована гипотеза о неизменности по вертикали коэффициента турбулентного обмена, приводит к выводу об экспоненциальном убывании скорости течения с глубиной и равномерном повороте вектора скорости при этом вправо (при $f > 0$) и влево (при $f < 0$) от направления касательного напряжения ветра. Причем угол между последним и направлением поверхностного течения составляет 45°. Однако материалами массовых натурных наблюдений в океане к настоящему времени подтверждена лишь качественная сторона этой теории, а именно убывание скорости дрейфового переноса с глубиной и отклонение его от направления ветра. Что касается количественных оценок, то, например, угол между направлением ветра и поверхностными течениями, по Дефанту, колеблется от 41 до 62° в Индийском океане и от 33 до 52,4° в Средиземном море. Хьюз по наблюдениям в Атлантическом океане считает этот угол близким к 20°. Одна из причин такого расхождения между расчетными и наблюденными значениями угла отклонения поверхностного течения от ветра заключается в том, что гипотеза о независимости коэффициента турбулентного обмена от глубины является существенным упрощением реально наблюдаемой турбулентной структуры, особенно в придонном и поверхностном пограничных слоях.

На рис. 1.4 представлено вертикальное распределение модуля вектора скорости дрейфового течения и изменение с глубиной угла между направлением ветра и направлением течения в верхнем слое океана, рассчитанные для ветра 7 м/с и широты 45°. Кривые *1* и *3* получены с использованием экмановской гипотезы $K_V = \text{const}$, а *2* и *4* — при экспоненциальном убывании коэффициента турбулентного обмена с глубиной:

$$K_V = K_0 e^{-mz}. \qquad (1.75)$$

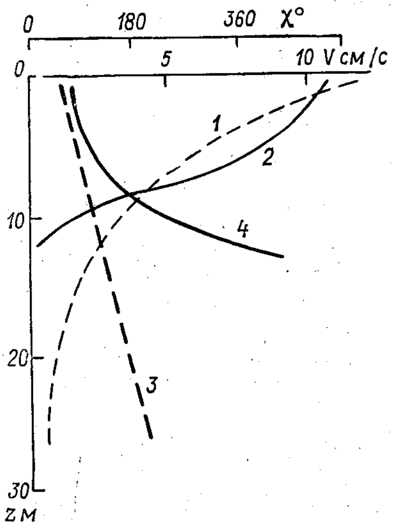


Рис. 1.4. Изменение модуля вектора скорости дрейфового течения (*1*, *2*) и угла между направлением ветра и направлением течения (*3*, *4*) с глубиной [2].

1, *3* — при K_V=const; *2*, *4* — при $K_V = K_0 e^{-mz}$;

Основой подобного закона изменения величины K_V является гипотеза о генерации энергии турбулентности в верхнем слое однородного океана поверхностными волнами и дрейфовым течением без учета демпфирующего влияния на масштаб турбулентности границы раздела воздух—вода.

Вертикальное распределение модуля скорости дрейфового течения в глубоком океане при таком законе изменения величины K_V определяется по формуле

$$V = \sqrt{v_\theta^2 + v_\lambda^2} = \frac{\tau_* e^{mz/2}}{K_V a_0 \sqrt{2}} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{\left[\operatorname{Re} \sqrt{i}\, H_1^{(1)}(\beta \sqrt{i})\right]^2 + \left[\operatorname{Im} \sqrt{i}\, H_1^{(1)}(\beta \sqrt{i})\right]^2}{\left[\operatorname{Re} H_0^{(1)}(\beta_0 \sqrt{i})\right]^2 + \left[\operatorname{Im} H_0^{(1)}(\beta_0 \sqrt{i})\right]^2}}, \qquad (1.76)$$

где $a_0 = \sqrt{\dfrac{\rho\omega \cos\theta}{K_O}}$, $\beta = \dfrac{2\sqrt{2}\, a_0}{m} e^{mz/2}$, $\beta_0 = \beta|_{z=0} = \dfrac{2\sqrt{2}\, a_0}{m}$, $H_0^{(1)}$, и $H_1^{(1)}$ — функция Ханкеля нулевого и первого порядка соответственно.

На каждом горизонте модуль вектора скорости течения отклоняется от направления ветра на угол χ, причем

$$\operatorname{tg}\chi=\frac{\begin{array}{c}\operatorname{Re}\sqrt{i}\,H_1^{(1)}(\beta\sqrt{i})\operatorname{Re}H_0^{(1)}(\beta_0\sqrt{i})+\\+\operatorname{Im}\sqrt{i}\,H_1^{(1)}(\beta\sqrt{i})\operatorname{Im}H_0^{(1)}(\beta_0\sqrt{i})\end{array}}{\begin{array}{c}\operatorname{Re}\sqrt{i}\,H_1^{(1)}(\beta\sqrt{i})\operatorname{Im}H_0^{(1)}(\beta_0\sqrt{i})-\\-\operatorname{Im}\sqrt{i}\,H_1^{(1)}(\beta\sqrt{i})\operatorname{Re}H_0^{(1)}(\beta_0\sqrt{i})\end{array}}. \qquad (1.77)$$

Из рис. 1.4 видно, что экспоненциальное убывание с глубиной величины K_V существенно влияет на характер изменения скорости течения, который отличается от экмановского (кривая *1*). Вблизи поверхности океана, согласно формуле (1.76), уменьшение скорости течения происходит сравнительно медленно. Так, на глубине 2 м скорость только на 3 %, а на глубине 4 м — на 9 % меньше поверхностной. Зато далее с увеличением глубины скорость течения резко убывает (кривая *2*). Также существенно сказывается изменение K_V по вертикали и на поворот вектора скорости течения с глубиной. По сравнению с экмановской постановкой при использовании закона убывания K_V в виде (1.75), угол между направлением ветра и течением на поверхности увеличивается почти в полтора раза. С удалением от поверхности океана поворот вектора скорости течения в этом случае происходит значительно скорее, особенно в нижележащих слоях (кривая *4*). Обращает на себя внимание нелинейность зависимости угла поворота вектора скорости течения от глубины при переменном K_V.

В связи с этим весьма отличаются и глубины, на которых течение направлено противоположно поверхностному. Так, глубина трения при использовании постоянного коэффициента турбулентного обмена в два раза превосходит глубину трения при изменении величины K_V в соответствии с формулой (1.75). Кроме аппроксимации (1.75), при расчетах вертикальной структуры течений в океане используется и ряд других гипотез об изменении коэффициента турбулентного обмена с глубиной. В некоторых случаях, например при расчетах течений в непосредственной близости ото дна, на основе результатов наблюдений и физического анализа определяющих факторов, удается установить закон изменения величины K_V с глубиной и более или менее успешно использовать его в расчетной практике. Однако в каждом конкретном случае при априорном задании закон изменения коэффициента турбулентного обмена с глубиной должен быть достаточно хорошо обоснован и подтвержден материалами наблюдений, что до сих пор в большинстве случаев невозможно сделать из-за чрезвычайной сложности прямых измерений характеристик турбулентности в натурных условиях.

При отказе от ограничивающей гипотезы о постоянстве K_V по глубине, а также от априорного задания его изменения для описания ветровой циркуляции во внутренней области океана к уравнениям движения и неразрывности (1.58)—(1.60) добавляется уравнение гидростатики (1.3) и уравнение баланса энергии турбулентности (см. курс «Физика океана») в виде

$$K_V\left[\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial z}\right)^2\right]-\varepsilon K_V\frac{g}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}-$$

$$-C_Э\frac{Э^2}{K_V}+\alpha\frac{\partial}{\partial z}K_V\frac{\partial Э}{\partial z}=0 \qquad (1.78)$$

с замыкающими гипотезами теории подобия

$$Э=\frac{K_V^2}{l^2}, \qquad (1.79)$$

$$l=2\varkappa\frac{\psi}{\partial\psi/\partial z}, \qquad (1.80)$$

где l — масштаб турбулентности; ε, $C_Э$, α — постоянные,

$$\psi=\left[\left(\frac{\partial v_\theta}{\partial z}\right)^2+\left(\frac{\partial v_\lambda}{\partial z}\right)^2\right]-\varepsilon\frac{g}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial z}+\frac{\alpha}{K_V}\frac{\partial}{\partial z}K_V\frac{\partial Э}{\partial z}. \qquad (1.81)$$

Влияние атмосферы и дна в зависимости от физических предпосылок учитывается граничными условиями вида (1.8)—(1.14). Для кинетической энергии турбулентных пульсаций в качестве граничных условий задаются как потоки, так и сами величины $Э$, принимающиеся пропорциональными касательному напряжению трения на соответствующей границе раздела.

На рис. 1.5 и 1.6 представлены некоторые результаты численного моделирования вертикальной динамической структуры баротропного океана в изложенной постановке.

Поскольку турбулизирующее влияние волн в данном случае не учитывалось, распределение по глубине характеристик турбулентности (рис. 1.5) свидетельствует о незначительной роли диффузии энергии турбулентности. В поверхностном и придонном пограничном слоях продукция энергии турбулентности практически компенсируется диссипацией. Что касается коэффициента турбулентного обмена, то его значение существенно изменяется с глубиной. Вблизи внешних границ пограничных слоев сказывается ограничивающее влияние на масштаб турбулентности свободной поверхности океана и дна. По мере удаления от границ раздела их демпфирующее влияние ослабевает и коэффициент турбулентного обмена увеличивается. Однако в промежуточном слое океана интенсивность турбулентного обмена незначительна и вертикальный профиль K_V испытывает разрыв вблизи внутренних границ пограничных слоев.

Подобное распределение коэффициента турбулентного обмена вполне согласуется с вертикальным профилем скорости течения (рис. 1.6). Непосредственно под поверхностью океана, где значения коэффициентов турбулентного обмена достаточно малы, имеют место значительные вертикальные градиенты скорости. Так, в самом верхнем метровом слое средний градиент скорости почти на два порядка больше, чем градиент в слое 1—10 м. Вне пограничных слоев вертикальный градиент скорости практически отсутствует, т. е. течение носит геострофический характер. Отсутствие вертикального сдвига скорости в этой области приводит к затуханию турбулентного обмена. Это и является причиной разрыва в вертикальном профиле величины K_V, который отмечался выше.

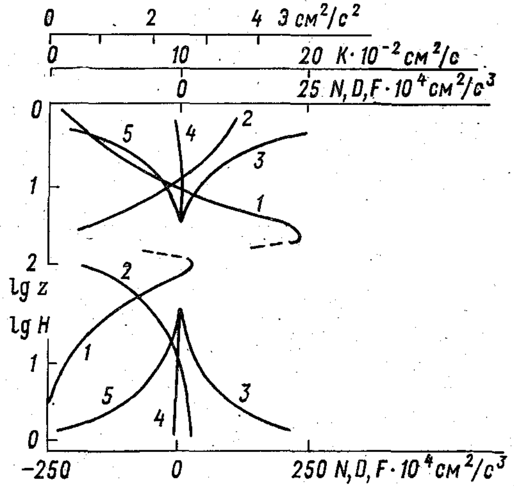


Рис. 1.5. Вертикальное распределение характеристик турбулентности в баротропном океане по результатам расчета [3].

1 — коэффициент турбулентного обмена K_V; *2* — кинетическая энергия турбулентных пульсаций *Э*; *3* — продукция турбулентности *N*; *4* — диффузия энергии турбулентности *F*; *5* — диссипация энергии турбулентности *D*.

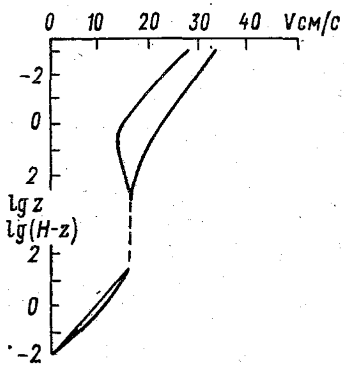


Рис. 1.6. Характерные вертикальные распределения модуля вектора скорости дрейфовоградиентного течения по результатам расчетов [3].

В придонном пограничном слое наибольшие вертикальные градиенты скорости течения наблюдаются непосредственно вблизи поверхности дна. Коэффициент турбулентного обмена по результатам расчетов здесь изменяется с глубиной линейно (рис. 1.5), а скорость течения — логарифмически (рис. 1.6). Последнее связано с возрастанием роли турбулентного трения по мере приближения ко дну, в непосредственной близости от которого вклад соответствующих членов в уравнениях движения становится определяющим. Это обстоятельство наряду с линейным профилем коэффициента турбулентного обмена (см. курс «Физика океана») и определяет логарифмический профиль скорости течения у дна. Отмеченные динамические особенности являются основой для выделения непосредственно вблизи поверхности дна так называемого слоя придонного трения. Перечисленные закономерности его турбулентной структуры, к сожалению, являются одними из немногих, нашедших к настоящему времени подтверждение в материалах прямых натурных измерений характеристик турбулентности в океане.

1.5. Интегральная циркуляция в океане

Решение динамической задачи значительно упрощается, если изучать не трехмерные поля течений, а суммарные по вертикали переносы вод. Полученная в разделе 1.2 система интегральных уравнений содержит лишь четыре неизвестные (M_x, M_y, P и ζ) и при диагностическом подходе дает возможность провести анализ горизонтальной структуры полных потоков и выявить общие закономерности интегральной циркуляции в океане.

Изучение интегральной циркуляции началось с *теории полных потоков*. Впервые эта теория была сформулирована в 1946 г. советским ученым В. Б. Штокманом. Плодотворно развитая советскими и зарубежными исследователями, она составила целый этап развития теории морских и океанических течений.

Если ввести упрощения, традиционно принимаемые в теории полных потоков (горизонтальность дна океана $H = \mathrm{const}$ и условия чистого скольжения на дне $R_x = R_y = 0$), то в уравнениях движения (1.48), (1.49) второе и четвертое слагаемые правой части обратятся в нуль, а сами уравнения примут *упрощенный вид*:

$$\frac{\partial M_x}{\partial t} + \frac{1}{H}\left(M_x \frac{\partial M_x}{\partial x} + M_y \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) - f M_y = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H P\,dz + K_{VL}\nabla^2 M_x + \frac{\tau_x}{\rho_0}; \tag{1.82}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial t} + \frac{1}{H}\left(M_x \frac{\partial M_y}{\partial x} + M_y \frac{\partial M_y}{\partial y}\right) + f M_x = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^H P\,dz + K_{VL}\nabla^2 M_y + \frac{\tau_y}{\rho_0}. \tag{1.83}$$

Посредством перекрестного дифференцирования (1.82) и (1.83) исключается интегральное давление:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) + \frac{1}{H}\left[\frac{\partial M_x}{\partial x}\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) + \frac{\partial M_y}{\partial y}\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) + M_x \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right) + M_y \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M_y}{\partial x} - \frac{\partial M_x}{\partial y}\right)\right] + f\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}\right) + \frac{\partial f}{\partial y} M_y = K_{VL}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\nabla^2 M_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\nabla^2 M_x)\right] + \frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}\right). \tag{1.84}$$

Учет уравнения неразрывности (1.41) и выражений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial M_y}{\partial x}-\dfrac{\partial M_x}{\partial y}=\mathrm{rot}_z\,\mathbf{M}=\nabla^2\psi; \\ \dfrac{\partial\tau_y}{\partial x}-\dfrac{\partial\tau_x}{\partial y}=\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=\beta \end{cases}$$

приводит уравнение (1.84) к основному уравнению теории полных потоков — уравнению *переноса завихренности*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}_z\,\mathbf{M})+\frac{1}{H}\left[M_x\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{rot}_z\,\mathbf{M})+M_y\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{rot}_z\,\mathbf{M})\right]+\beta M_y=$$
$$=\frac{1}{\rho_0}\mathrm{rot}_z\boldsymbol{\tau}+K_{VL}\,\mathrm{rot}_z(\nabla^2\mathbf{M}). \qquad (1.85)$$

С помощью соотношения (1.43) основное уравнение (1.85) легко преобразуется в уравнение для функции полных потоков ψ:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2\psi\right)+\frac{1}{H}J(\psi,\ \nabla^2\psi)+\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}-K_{VL}\nabla^2(\nabla^2\psi)=\frac{1}{\rho_0}\mathrm{rot}_z\boldsymbol{\tau}, \qquad (1.86)$$

в котором

$$J(\psi,\ \nabla^2\psi)=\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial y}-\frac{\partial\psi}{\partial y}\frac{\partial(\nabla^2\psi)}{\partial x}$$

обозначает оператор Якоби.

Таким образом, задача об интегральной циркуляции, возникающей под действием ветра в океане с горизонтальным дном и отсутствием придонного трения, сводится к интегрированию либо уравнения переноса завихренности (1.85) с граничными условиями для полного потока (1.51) и (1.53), либо уравнения (1.86) с простыми условиями для интегральной функции ψ на твердом и жидком контурах океана:

$$\psi_L=0 \text{ на твердом контуре}, \qquad (1.87)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0 \text{ на жидком контуре}, \qquad (1.88)$$

$$\psi=\psi(x,\ y) \text{ при } t=0 \qquad (1.89)$$

$$\text{либо } \psi=0 \text{ при } t=0. \qquad (1.89')$$

Физический смысл полученных уравнений очевиден. Так, уравнение (1.85) представляет собой баланс завихренности единичного столба жидкости, влекомого полным потоком во вращающемся океане. При принятых допущениях оно показывает, что полное изменение завихренности (первые два члена левой части) обусловливается неравномерностью вращения океана на разных широтах (бета-эффект), завихренностью в поле касательного напряжения ветра (первое слагаемое правой части), а также турбулентной диффузией вихря за счет горизонтального трения (последнее слагаемое).

Известны различные частные случаи основного уравнения (1.86) теории полных потоков. Для изучения *стационарной* интегральной циркуляции вод в океане уравнение (1.86) сводится к *уравнению Манка—Гровза—Кэрриера*:

$$\frac{1}{H} J(\psi,\ \nabla^2\psi) + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} - K_{VL}\nabla^2(\nabla^2\psi) = \frac{1}{\rho_0}\operatorname{rot}_z \boldsymbol{\tau}. \qquad (1.90)$$

Применительно ко внутренней области океана, где, согласно оценкам раздела 1.1, локальные изменения, инерционные и диссипативные эффекты намного меньше бета-эффекта и неравномерности в поле касательного напряжения ветра, уравнение (1.83) упрощается до *соотношения Свердрупа*:

$$\beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0}\operatorname{rot}_z \boldsymbol{\tau}. \qquad (1.91)$$

Учет горизонтального турбулентного обмена (введение прибрежного пограничного слоя) приводит либо к *уравнению Стоммела*, в котором этот обмен принимается пропорциональным лапласиану полного потока с коэффициентом пропорциональности r

$$r\nabla^2\psi + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{1}{\rho_0}\operatorname{rot}_z \boldsymbol{\tau}, \qquad (1.92)$$

либо к уравнению Манка, учитывающему горизонтальный турбулентный обмен в обычной форме:

$$K_{VL}\nabla^2(\nabla^2\psi) - \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{1}{\rho_0}\operatorname{rot}_z \boldsymbol{\tau}. \qquad (1.93)$$

При рассмотрении интегральной циркуляции в глубоком море, где бета- и нелинейные эффекты несущественны, основное уравнение (1.86) сводится к *уравнению Штокмана*:

$$K_{VL}\nabla^2(\nabla^2\psi) = -\frac{1}{\rho_0}\operatorname{rot}_z \boldsymbol{\tau}. \qquad (1.94)$$

Обращает на себя внимание, что во всех уравнениях теории полных потоков единственной внешней массовой силой является касательное напряжение ветра. Другой важный фактор, формирующий циркуляцию в океане,— плотностная неоднородность морской воды в силу принятых допущений оказался не учтенным, хотя предположения об однородности морской воды не делались. Потеря бароклинности в уравнениях (1.86), (1.91)—(1.94) произошла по трем причинам: 1) за счет допущения о постоянстве глубины океана и, следовательно, пренебрежения влиянием рельефа дна; 2) за счет пренебрежения трения о дно; 3) за счет допущения возможности замены интегралов от произведений двух функций произведением интегралов от этих функций (при интегрировании нелинейных инерционных членов). Последнее допущение исключает нелинейное взаимодействие между баротропной и бароклинной компонентами движения, оставляя лишь нелинейные эффекты, обусловленные самой баротропной составляющей [см., например, уравнение (1.38)].

Поэтому можно считать, что в рамках теории полных потоков изучается горизонтальная структура интегральной циркуляции *ветрового происхождения* в *однородном* океане. Основные уравнения этой теории позволяют описать главные основные черты океанической циркуляции, например существование замкнутых крупномасштабных круговоротов — «колец», отделяющихся друг от друга на широтах, где $\mathrm{rot}_z\, \tau = 0$, а также западную интенсификацию течений.

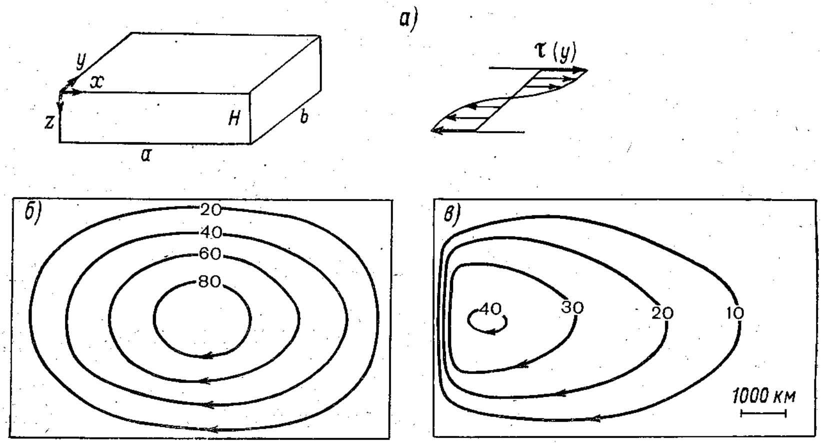


Рис. 1.7. Интегральная циркуляция в однородном океане постоянной глубины.

а — модель океана и распределение напряжения ветра; *б* — циркуляция в равномерно вращающемся океане; *в* — циркуляция с учетом бета-эффекта.

Американский ученый Г. Стоммел первым с помощью уравнения (1.92) описал усиление циркуляции у западных границ океана, схематически представив его в прямоугольной форме и постоянной глубины, простирающимся от экватора на север $0 \leqslant y \leqslant b$ и с запада на восток $0 \leqslant x \leqslant a$ (рис. 1.7 *а*). Учитывая зональный характер ветров, дующих над центральными районами океана (пассаты, западные ветры), он принял

$$\frac{\tau_x}{\rho_0} = -\tau_0 \cos\frac{\pi y}{b}, \quad \frac{\tau_y}{\rho_0} = 0. \tag{1.95}$$

С учетом (1.95) уравнение вихря (1.92) переходит в

$$r\nabla^2\psi + \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\frac{\tau_0}{\rho_0}\frac{\pi}{b}\sin\frac{\pi y}{b}. \tag{1.96}$$

Граничные условия для (1.96) очевидны:

$$\psi(0,\ y) = \psi(a,\ y) = \psi(x,\ 0) = \psi(x,\ b) = 0. \tag{1.97}$$

Решение уравнения вихря (1.96) при условиях (1.97) есть

$$\psi=\frac{\tau_0}{\rho_0 r}\frac{b}{\pi}\sin\frac{\pi y}{b}\left(\frac{1-e^{Ba}}{e^{Aa}-e^{Ba}}e^{Ax}+\frac{e^{Aa}-1}{e^{Aa}-e^{Ba}}e^{Bx}-1\right), \quad (1.98)$$

где

$$A=-\frac{\beta}{2r}+\sqrt{\left(\frac{\beta}{2r}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2},$$

$$B=-\frac{\beta}{2r}-\sqrt{\left(\frac{\beta}{2r}\right)^2+\left(\frac{\pi}{b}\right)^2}.$$

Аналитическое представление интегральной функции тока ψ в океане (1.98) позволяет проанализировать характер зависимости ψ от действующего напряжения ветра, морфометрических характеристик бассейна (его протяженности по широте и долготе) и от бета-эффекта. Поскольку в приближении бета-плоскости параметр Кориолиса является линейной функцией от координаты y $f(y)=f_0+\beta y$, то для случая *равномерно* вращающегося океана $[\beta=0$ и $f(y)=\text{const}]$, выражение для ψ (1.98) преобразуется в

$$\psi=\frac{\tau_0}{\rho_0 r}\frac{b}{\pi}\sin\frac{\pi y}{b}\left(e^{\frac{(x-a)\pi}{b}}+e^{-\frac{x\pi}{b}}-1\right). \quad (1.99)$$

Нетрудно видеть, что (1.99) описывает *симметричную картину* для функции полных потоков и по y, и по x (рис. 1.7 *б*). Если же рассматривать неравномерно вращающийся океанический бассейн ($\beta\neq 0$), то из (1.98) следует, что распределение интегральной функции по оси x несимметрично с концентрацией ее значений при малых x, т. е. у западной границы (рис. 1.7 *в*). Таким образом, *западная интенсификация течений* является ререзультатом глобального *влияния бета-эффекта* на циркуляцию в океане. Как показал Стоммел, эта важная особенность океанической циркуляции существует даже в условиях симметричного поля касательного напряжения ветра.

Оставаясь в рамках теории полных потоков, можно проанализировать влияние на интегральную циркуляцию переменной глубины океана. Введение переменной глубины океана $H=H(x, y)$ и пренебрежение в основном уравнении теории полных потоков (1.86) эффектом горизонтального турбулентного трения ввиду его малости для внутренней области океана приводят это уравнение к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_H\psi+\frac{1}{H}J(\psi, \nabla_H\psi)+\frac{f}{H}J(H, \psi)+\frac{\beta}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{1}{\rho_0}\operatorname{rot}_z\frac{\tau}{H},$$

где

$$\nabla_H\psi=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right). \quad (1.100)$$

Новый член $\frac{f}{H}J(H\ \psi)$, появившийся в левой части уравнения, описывает влияние рельефа дна на интегральную циркуляцию. Численное интегрирование уравнения (1.100) с начальными и граничными условиями (1.87)—(1.89) позволяет получить распределение интегральной функции тока в однородном океане с учетом реальной топографии дна. В этом случае поле функции тока в Мировом океане отражает глобальные черты поверхностной циркуляции вод. Отчетливо выражены субтропические антициклонические круговороты вод в северных и южных частях океанов. Вокруг Антарктиды простирается широкий зональный перенос. Заметны также экваториальные кольца циркуляции. Однако количественные характеристики циркуляции (расходы в основных звеньях) оказываются в 2—3 раза меньше наблюдаемых.

Для более полного и правильного представления об интегральной циркуляции в океане необходимо, кроме уже введенных факторов, учесть бароклинные эффекты и придонное трение.

Если в экмановском придонном пограничном слое (см. раздел 1.3) определять составляющие придонного трения R_x и R_y через градиенты придонного давления (в соответствии с известной теорией пограничного слоя Аккерблома)

$$R_x=\left(\rho_0 K_V\frac{\partial u}{\partial z}\right)_H=\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\partial P_H}{\partial x}-\frac{\partial P_H}{\partial y}\right);$$

$$R_y=\left(\rho_0 K_V\frac{\partial v}{\partial z}\right)_H=\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{\partial P_H}{\partial y}-\frac{\partial P_H}{\partial x}\right), \qquad (1.101)$$

где $\alpha=\sqrt{\omega\sin\varphi/K_V}$ — параметр, учитывающий придонное трение, то перекрестное дифференцирование интегральных уравнений движения (1.48), (1.49) с учетом уравнения неразрывности (1.41), гидростатики (1.38) и соотношений для функции ψ (1.43) приводит к наиболее *полному* уравнению для интегральной циркуляции:

$$-\underbrace{K_{VL}\nabla^2\nabla^2\psi}_{6}+\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\nabla^2\psi}_{5}+\underbrace{\frac{1}{H}J(\psi,\ \nabla^2\psi)}_{4}+$$

$$+\underbrace{\frac{f}{2\alpha H}\nabla^2\psi}_{3}+\underbrace{\frac{f}{H}J(H,\ \psi)}_{2}+\underbrace{\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}}_{1}=$$

$$=\underbrace{\frac{1}{\rho_0}\operatorname{rot}_z\tau}_{7}+\underbrace{\frac{1}{\rho_0 H}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\tau_x-\frac{\partial H}{\partial x}\tau_y\right)}_{8}+$$

$$+\underbrace{\frac{1}{H}\left(\frac{g}{\rho_0 f}\right)^2 J\left(\int_0^H (H-z)\,\rho\,dz,\ \int_0^H (H-z)\,\nabla^2\rho\,dz\right)-}_{4}$$

$$\underbrace{-\left(\frac{g}{\rho_0 f}\right)^2 \int_0^H J\left(\int_0^z \rho\,dz,\ \int_0^z \nabla^2\rho\,dz\right)dz}_{4}-$$

$$-\underbrace{\frac{g}{2\rho_0\alpha H}\int_0^H z\nabla^2\rho\,dz}_{3}-\underbrace{\frac{g}{\rho_0 H}\int_0^H zJ(H,\ \rho)\,dz}_{2}. \qquad (1.102)$$

Учет рельефа дна и придонного трения обусловил появление в правой части уравнения (1.102) слагаемых, отражающих бароклинные эффекты. При этом вторичные эффекты переменности f и H и некоторые малые слагаемые, обусловленные касательным трением ветра, не рассматривались.

Уравнение (1.102) получено А. С. Саркисяном. Из этого уравнения как частные случаи получаются все приведенные выше основные соотношения теории полных потоков.

Физический смысл слагаемых этого уравнения заключается в следующем. В левой части уравнения: 1 — β-эффект, 2 — влияние рельефа дна, 3 — эффект трения о дно (выраженный через параметр α), 4 — нелинейные инерционные слагаемые, 5 — локальная производная по времени от инерционных членов, 6 — эффект горизонтального турбулентного обмена. В правой части этого уравнения: 7 — вихрь от касательного трения ветра, 8 — совместный эффект ветра и рельефа дна. Остальные слагаемые обусловлены неоднородностью морской воды и идентичны слагаемым левой части той же физической природы. Так, слагаемое 2 — совместный эффект бароклинности и рельефа дна (СЭБИР), 3 — бароклинный эффект трения о дно, 4 — совместный эффект бароклинности и нелинейности инерционных факторов.

Анализ этого уравнения, выполненный многими исследователями, показал, что в левой части основными факторами, формирующими циркуляцию, следует считать β-эффект и эффект рельефа дна. Влияние инерционных членов и горизонтального турбулентного обмена на формирование крупномасштабных течений по внутренней области океана невелико, и в первом приближении этими эффектами можно пренебречь. Однако влияние этих эффектов в уравнении функции полных потоков является более важным, чем в уравнениях движения (1.48), (1.49).

Основными факторами правой части уравнения (1.102) являются бароклинность морской воды и совместный эффект бароклинности и рельефа дна (СЭБИР), который в 5—10 раз больше, чем $\text{rot}_z \tau$. Влияние совместного эффекта ветра и рельефа дна примерно того же порядка, что и влияние вихря от касательного трения ветра.

Таким образом, формирование поля функции полных потоков ψ обусловливается не только $\text{rot}_z \tau$, но и другими факторами и прежде всего бароклинностью морской воды и рельефом дна.

1.6. Стационарная трехмерная циркуляция в океане

Интегральный подход к изучению циркуляции в океане, рассмотренный в предыдущем разделе, имеет бесспорные успехи в объяснении целого ряда общих особенностей установившейся планетарной циркуляции в океане: физического механизма планетарного переноса вод, динамики интенсивных струйных течений в океане, в частности интенсификации течений у западных берегов океана, формирования экваториальных течений и противотечений и др. Однако интегральный подход не позволяет рассматривать трехмерную структуру полей течений, изменение скорости с глубиной, вертикальные движения, глубинные противотечения, взаимное влияние полей скорости и плотности. В связи с теоретическим и практическим значением этих вопросов изучение трехмерной циркуляции в океане представляет большой интерес.

В разделе 1.1 были показаны трудности решения эволюционной задачи о взаимосвязанных трехмерных полях течений, температуры и солености в океане. Решение существенно упрощается в диагностических задачах о крупномасштабных стационарных течениях в океане. Оно не связано с численным интегрированием нелинейных дифференциальных уравнений турбулентной теплопроводности и диффузии солей, а число неизвестных сокращается до пяти (v_θ, v_λ, v_z, p и ζ). При этом основные исходные уравнения (1.1)—(1.4) в общем случае принято представлять в виде

$$v_\theta = -\frac{1}{\rho_0 R f \sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{K_V}{f}\frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2} - \frac{1}{Rf} A; \quad (1.103)$$

$$v_\lambda = \frac{1}{\rho_0 R f}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \frac{K_V}{f}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{Rf} B; \quad (1.104)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{R\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta \sin\theta + \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda}\right); \quad (1.105)$$

$$p_z = p_a + g\rho_0\zeta + g\int_0^z \rho\, dz = g\rho_0\zeta_1 + g\int_0^z \rho\, dz. \quad (1.106)$$

Здесь A и B включают эффект бокового трения и инерционные эффекты (без конвективного члена в силу его малости):

$$A = v_\theta \frac{\partial v_\lambda}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{\sin\theta} \frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda} - \frac{K_{VL}}{R} \nabla^2 v_\lambda,$$

$$B = v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{\sin\theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} - \frac{K_{VL}}{R} \nabla^2 v_\theta,$$

$\zeta_1 = \frac{p_a}{\rho_0 g} + \zeta$ описывает так называемый *приведенный уровень*, а ρ и p — аномалии плотности морской воды и атмосферного давления, определяемые как разности между фактическими и некоторыми средними значениями.

Для удобства решения вводится комплексная скорость $V = v_\theta + i v_\lambda$. Это позволяет уравнения движения (1.103) и (1.104) свести к одному дифференциальному уравнению для комплексной скорости.

После умножения уравнения (1.104) на i и сложения его с (1.103) получается

$$v_\theta + i v_\lambda = \frac{1}{\rho_0 R f}\left(i \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda}\right) + \frac{K_V}{f}\left(-i \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 v_\lambda}{\partial z^2}\right) + \frac{1}{Rf}(iB - A) \tag{1.107}$$

или

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - i\alpha^2 V = - i\alpha^2 F, \tag{1.108}$$

в котором параметр $\alpha = \sqrt{\omega \cos\theta / K_V}$, а

$$F = \frac{1}{Rf}\left[\frac{1}{\rho_0}\left(i \frac{\partial p}{\partial \theta} - \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial p}{\partial \lambda}\right) + (iB - A)\right].$$

Преобразованные граничные условия (1.9), (1.12) для комплексного уравнения движения (1.108) записываются в форме

$$\rho_0 K_V \frac{\partial V}{\partial z} = -(\tau_\theta + i\tau_\lambda) \text{ при } z = 0,$$
$$V = 0 \text{ при } z = H(\theta, \lambda). \tag{1.109}$$

Общее решение уравнения (1.108) получается в следующем виде:

$$V = C_1 e^{(1+i)\alpha z} + C_2 e^{-(1+i)\alpha z} - \frac{1}{\alpha(1+i)} \int_0^H F e^{(1+i)\alpha z} dz. \tag{1.110}$$

После определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 из граничных условий (1.106) уравнение (1.107) принимает вид

$$V=v_\theta+iv_\lambda=\frac{1}{\rho_0 Rf}\left(i\frac{\partial p}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\lambda}\right)+$$

$$+\frac{1}{Rf}(iB-A)+\frac{\tau_\theta+i\tau_\lambda}{\alpha\rho_0 K_V(1+i)}e^{-\alpha z(1+i)}-$$

$$-\frac{1}{\rho_0 Rf}\left(i\frac{\partial p_H}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p_H}{\partial\lambda}\right)e^{\alpha(1+i)(z-H)}-$$

$$-\frac{1}{Rf}(iB_H-A_H)e^{\alpha(1+i)(z-H)}, \tag{1.111}$$

где p_H, A_H, B_H — придонные значения подлежащих также определению величин p, A, B.

В этом уравнении первое слагаемое правой части (1.111) описывает геострофическую часть течения, второе слагаемое — инерционно-вязкую составляющую течения, третье слагаемое — дрейфовое течение в верхнем слое трения (эпюра Экмана), последние два члена — течение в придонном слое трения («перевернутая» эпюра Экмана).

После разделения действительной и мнимой частей в уравнении (1.111) и перехода к тригонометрическим функциям выражения для составляющих скорости течения вне пределов придонного слоя получаются в виде

$$v_\theta=\frac{1}{R\rho_0 f}\left[-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\lambda}-\rho_0 A+\right.$$

$$\left.+\sqrt{\frac{K_V'}{K_V}}\left(\frac{\partial p_a}{\partial\theta}\sin\alpha z-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p_a}{\partial\lambda}\cos\alpha z\right)e^{-\alpha z}\right]; \tag{1.112}$$

$$v_\lambda=\frac{1}{R\rho_0 f}\left[\frac{\partial p}{\partial\theta}+\rho_0 B+\sqrt{\frac{K_V'}{K_V}}\left(\frac{\partial p_a}{\partial\theta}\cos\alpha z+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p_a}{\partial\lambda}\sin\alpha z\right)e^{-\alpha z}\right]. \tag{1.113}$$

В (1.112), (1.113) компоненты касательного напряжения ветра τ_θ и τ_λ заменены градиентами аномалий атмосферного давления при помощи известных из динамической метеорологии соотношений Аккерблома для пограничного слоя атмосферы:

$$\tau_\theta=-\frac{1}{2\alpha' R}\left(\frac{\partial p_a}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p_a}{\partial\lambda}\right);$$

$$\tau_\lambda=-\frac{1}{2\alpha' R}\left(-\frac{\partial p_a}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p_a}{\partial\lambda}\right), \tag{1.114}$$

где $\alpha' = \sqrt{\omega \cos\theta / K'_V}$, а K'_V — коэффициент вертикальной турбулентной вязкости в атмосфере.

Аномалии поля гидродинамического давления, входящие в выражения (1.111)—(1.113), являются также неизвестными функциями. Дальнейшее решение диагностической задачи об определении основных характеристик трехмерной циркуляции ведется с помощью некоторых вспомогательных функций: либо через уровенную поверхность ζ_1, либо через интегральную функцию тока ψ, либо через придонное давление p_H. Каждую из этих вспомогательных функций можно определять независимо друг от друга, а составляющие скорости течения вычислять либо через ζ_1, либо через ψ, либо через p_H. Наиболее распространен первый подход, когда задача сводится к решению дифференциального уравнения для уровенной поверхности.

Выражая градиенты аномалий давления в (1.112) и (1.113) при помощи интегрального уравнения гидростатики (1.106), получим формулы для горизонтальных компонентов течения на любом уровне z, исключая придонный пограничный слой:

$$v_\theta = v_{\theta\text{др}} - \frac{g}{Rf\sin\theta}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\lambda} + \frac{1}{\rho_0}\int_0^z \frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\,dz\right) - \frac{1}{f}A; \quad (1.115)$$

$$v_\lambda = v_{\lambda\text{др}} + \frac{g}{Rf}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho_0}\int_0^z \frac{\partial\rho}{\partial\theta}\,dz\right) + \frac{1}{f}B. \quad (1.116)$$

В этих формулах $v_{\theta\text{др}}$, $v_{\lambda\text{др}}$ — дрейфовые составляющие скорости течения

$$v_{\theta\text{др}} = \frac{1}{Rf\rho_0}\sqrt{\frac{K'_V}{K_V}}\left(\frac{\partial p_a}{\partial\theta}\sin\alpha z - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p_a}{\partial\lambda}\cos\alpha z\right)e^{-\alpha z}; \quad (1.117)$$

$$v_{\lambda\text{др}} = -\frac{1}{Rf\rho_0}\sqrt{\frac{K'_V}{K_V}}\left(\frac{\partial p_a}{\partial\theta}\cos\alpha z + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p_a}{\partial\lambda}\sin\alpha z\right)e^{-\alpha z}. \quad (1.118)$$

Проинтегрировав затем по z от поверхности до дна уравнение неразрывности (1.105), подставив в него найденные выражения для горизонтальных составляющих скорости (1.115)—(1.118) и учтя граничные условия (1.10) и (1.12), получим уравнение для определения приведенного уровня:

$$\frac{1}{2\alpha}\nabla^2\zeta_1 + \frac{1}{\sin\theta}J(H, \zeta_1) + \frac{H}{\cos\theta}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2\alpha'\rho_0 g}\nabla^2 p_a - \frac{1}{2\alpha\rho_0}\int_0^H \nabla^2\rho\,dz -$$

$$-\frac{1}{\rho_0 \sin\theta}\int\limits_0^H J(H,\ \rho)\,dz-\frac{1}{\rho_0\cos\theta}\left[\frac{\partial H}{\partial\lambda}\int\limits_0^H \rho\,dz-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial}{\partial\lambda}\int\limits_0^H (H-z)\,\rho\,dz\right]+\frac{1}{gH}\int\limits_0^H\left[\frac{2}{\sin 2\theta}A+\frac{\partial A}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial B}{\partial\lambda}\right]dz, \tag{1.119}$$

где дифференциальный оператор J — якобиан.

Граничные условия, необходимые для решения уравнения (1.119), сводятся к заданию приведенного уровня на контуре

$$\zeta_1|_L=\zeta_L(\theta,\ \lambda),\ \ \theta,\ \lambda\in L. \tag{1.120}$$

Для определения $\zeta_L(\theta,\ \lambda)$ на границе бассейна необходимо проинтегрировать по z от 0 до H уравнения движения (1.103) и (1.104) и учесть граничные условия на поверхности и на дне океана (1.114) и (1.101), уравнение гидростатики (1.106) и условия на границах бассейна

$$\frac{1}{H}\int\limits_0^H v_\lambda\,dz=V_\lambda,\quad \frac{1}{H}\int\limits_0^H v_\theta\,dz=V_\theta,$$

где V_θ и V_λ представляют известные расходы воды через жидкие участки границы. На твердых участках границы они равны нулю.

Тогда для наклонов уровня $\partial\zeta_L/\partial\theta$ и $\partial\zeta_L/\partial\lambda$ на границе бассейна может быть получена система уравнений, решение которой приводит к:

а) для границы, расположенной вдоль параллели,

$$\frac{\partial\zeta_L}{\partial\lambda}=\frac{F_1}{\left(1-\frac{1}{2\alpha H}\right)}; \tag{1.121}$$

б) для границы, расположенной вдоль меридиана,

$$\frac{\partial\zeta_L}{\partial\theta}=\frac{F_2}{\left(1-\frac{\sin\theta}{2\alpha H}\right)}. \tag{1.122}$$

Здесь функции F_1 и F_2 обозначают

$$F_1=\frac{\sin\theta}{H\rho_0}\int\limits_0^H (H-z)\left(\frac{1}{2\alpha H}\frac{\partial\rho}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\right)dz+$$

$$+\frac{\sin\theta}{2\alpha H\rho_0}\int\limits_0^H\left(-\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\right)dz-$$

$$-\frac{R\omega\sin 2\theta}{g}\left(V_\theta+\frac{1}{2\alpha H}V_\lambda\right)-\frac{\sin\theta}{2\alpha H\rho_0 g}\times$$

$$\times\sqrt{\frac{K_V'}{K_V}}\left(\frac{\partial p_a}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p_a}{\partial\lambda}\right)-\frac{\sin\theta}{gH}\int\limits_0^H A\,dz; \tag{1.123}$$

$$F_2=\frac{1}{H\rho_0}\int\limits_0^H (H-z)\left(-\frac{1}{2\alpha H\sin\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}-\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)dz+$$

$$+\frac{1}{2\alpha H\rho_0}\int\limits_0^H\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\right)dz+\frac{2\omega R\cos\theta}{g}\left(V_\lambda-\frac{1}{2\alpha H}V_\theta\right)+$$

$$+\frac{1}{2\alpha H\rho_0 g}\sqrt{\frac{K_V'}{K_V}}\left(\frac{\partial p_a}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p_a}{\partial\lambda}\right)-\frac{1}{gH}\int\limits_0^H B\,dz. \qquad (1.124)$$

Полученные уравнения (1.115), (1.116), (1.119)—(1.124) содержат выражения для A и B, включающие компоненты скорости и их производные. Поэтому решение задачи о трехмерных стационарных полях течений в океане может быть произведено методом последовательных приближений. На каждом этапе эта задача сводится к решению краевой задачи для уровенной поверхности океана (1.119)—(1.124) и последующему расчету горизонтальных составляющих течения по (1.115)—(1.118) с помощью найденных значений ζ_1 и известных аномалий атмосферного давления и плотности воды.

Для нулевого приближения значения A и B принимаются равными нулю. Вертикальная составляющая скорости течения вычисляется из уравнения неразрывности (1.105), проинтегрированному по вертикали от нуля до z с учетом кинематического граничного условия (1.10) и формул (1.119)—(1.124):

$$v_z=-\frac{1}{R\sin\theta}\int\limits_0^z\left(\cos\theta\cdot v_\theta+\sin\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}\right)dz=$$

$$=-\frac{1}{2\alpha' R^2 f\rho_0}\nabla^2 p_a+\frac{\operatorname{tg}\theta}{2\alpha' R^2 f\rho_0}\left(-\frac{\partial p_a}{\partial\theta}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p_a}{\partial\lambda}\right)+$$

$$+\frac{gz}{R^2 f\cos\theta}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\lambda}+\frac{g}{R^2 f\cos\theta\rho_0}\int\limits_0^z(z-\xi)\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}d\xi+$$

$$+\frac{1}{R^2 f}\int\limits_0^z\left(-\frac{2}{\sin 2\theta}A+\frac{\partial A}{\partial\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial B}{\partial\lambda}\right)dz. \qquad (1.125)$$

Некоторые результаты решения диагностической задачи в рамках этого подхода показаны на рис. 1.10, где приведено положение уровенной поверхности Мирового океана, а на рис. 1.11 — поле векторов поверхностных течений. Карта уровенной поверхности позволяет судить о линиях тока поверхностного градиентного течения, макроциркуляционных системах и их взаимодействии. На ней прослеживаются все основные круговороты воды и основные звенья течений в океане. Карта полей векторов отражает интенсивность перемещения вод; на ней отчетливо проявляются основные системы течений. Некоторое

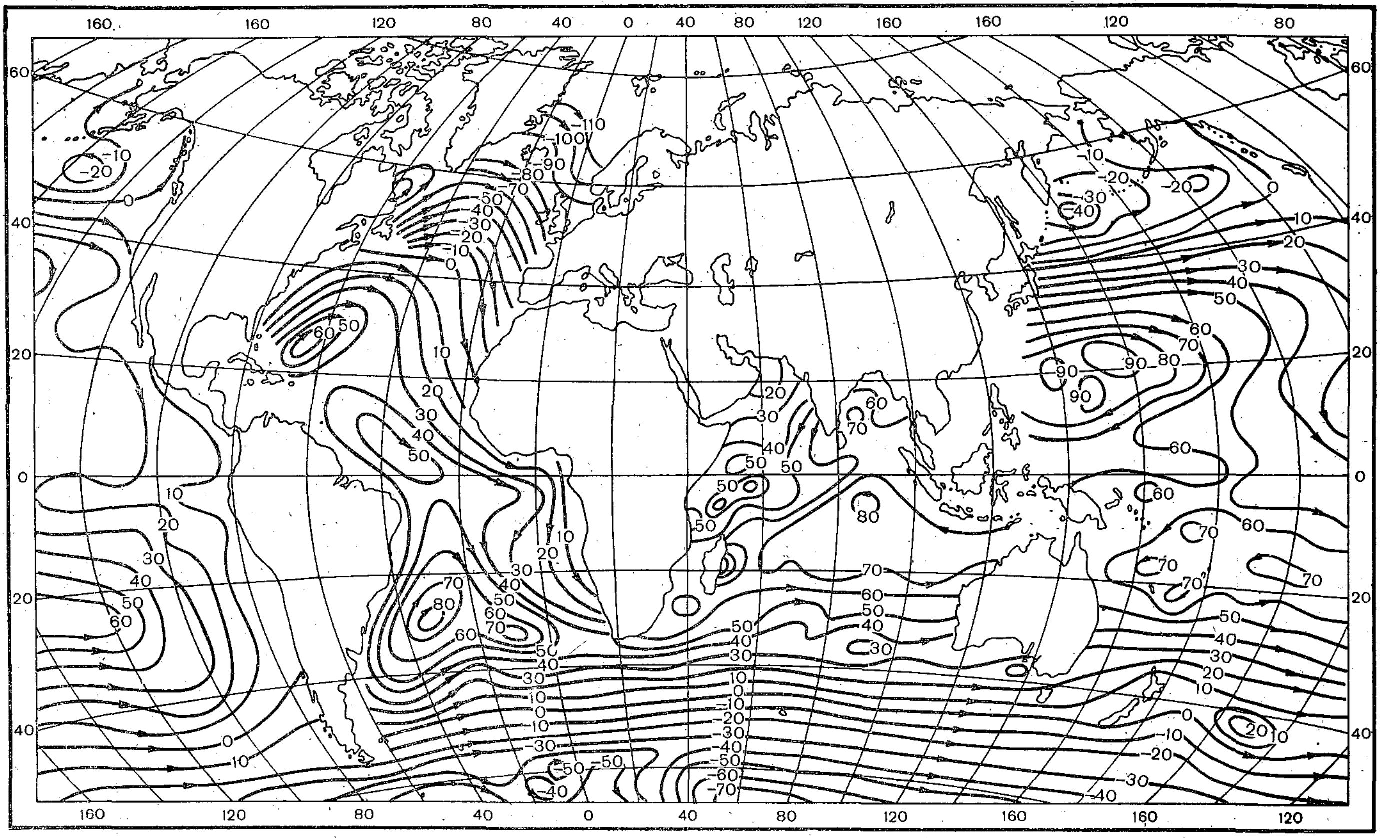


Рис. 1.8. Уровенная поверхность Мирового океана (см), согласно диагностическим расчетам В. Н. Степанова и др. [10].

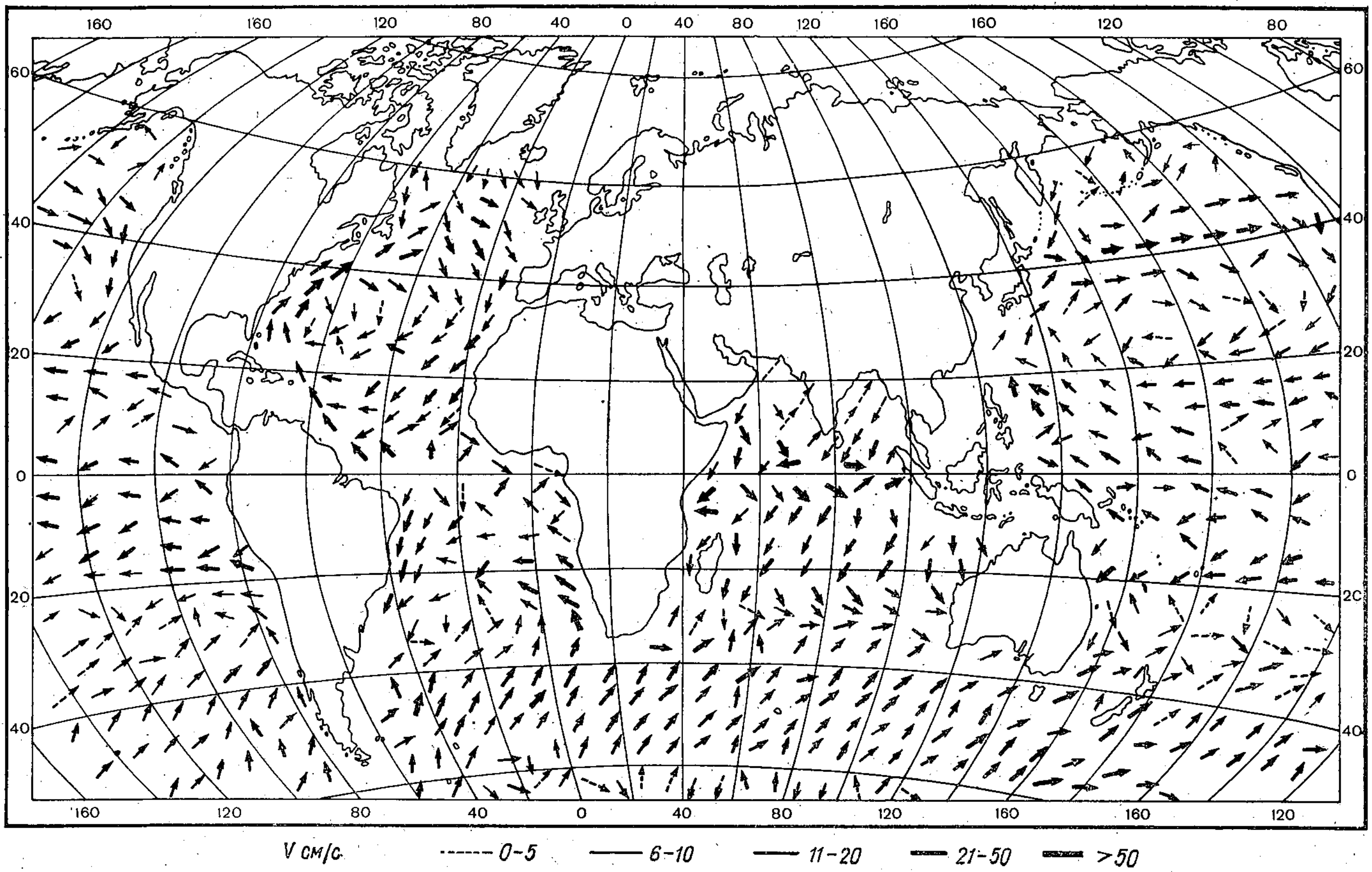


Рис. 1.9. Суммарные течения на поверхности Мирового океана, согласно диагностическим расчетам В. Н. Степанова и др. [10].

несоответствие в отдельных частях рис. 1.8 и 1.9 объясняется тем, что поле векторов является суммарным, включающим дрейфовую составляющую течения, а уровенная поверхность непосредственного воздействия ветра не учитывает.

Второй подход к решению диагностической задачи связан с использованием аналогичного уравнения для функции полных потоков (1.102) с граничными условиями (1.87)—(1.89). Значения составляющих скорости течения определяются через интегральную функцию тока при помощи следующих соотношений:

$$v_\theta = v_{\theta\text{др}} - \frac{1}{RH\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} + \frac{g}{2\omega\rho_0 R\sin\theta\cos\theta}\times$$

$$\times\left(\int\limits_z^H \frac{\partial\rho}{\partial\lambda}dz - \frac{1}{H}\int\limits_0^H z\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}dz\right) - \frac{1}{Rf}A; \tag{1.126}$$

$$v_\lambda = v_{\lambda\text{др}} + \frac{1}{RH}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} - \frac{g}{2\omega R\rho_0\cos\theta}\times$$

$$\times\left(\int\limits_z^H \frac{\partial\rho}{\partial\theta}dz - \frac{1}{H}\int\limits_0^H z\frac{\partial\rho}{\partial\theta}dz\right) + \frac{1}{Rf}B, \tag{1.127}$$

где $v_{\theta\text{др}}$ и $v_{\lambda\text{др}}$ определяются выражениями (1.117) и (1.118),

$$v_z = -\frac{1}{4\omega\rho_0 R^2\cos\theta a'}\nabla^2 p_a + \frac{\sin\theta}{4\omega\rho_0 R^2\cos\theta a'}\times$$

$$\times\left(-\frac{\partial p_a}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p_a}{\partial\lambda}\right) + \frac{z}{HR^2\cos\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} -$$

$$-\frac{gz}{2\omega\rho_0 R^2 H\cos^2\theta}\int\limits_0^H (H-z)\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}dz +$$

$$+\frac{g}{2\omega\rho_0 R^2\cos^2\theta}\int\limits_0^z (z-\xi)\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}d\xi +$$

$$+\frac{1}{2\omega R^2\sin\theta}\int\limits_0^z\left(\frac{2}{\sin 2\theta}A + \frac{\partial A}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial B}{\partial\lambda}\right)dz. \tag{1.128}$$

Рассмотренные два подхода к определению течений по заданному полю плотности путем интегрирования уравнения для уровенной поверхности и функции полных потоков были разработаны и успешно применены для Мирового океана и отдельных его частей А. С. Саркисяном.

Третий путь решения задачи связан с определением вспомогательной функции придонного давления. Основное уравнение удобно получить в безразмерных переменных. Пусть аномалии плотности и гидродинамического давления обозначены через δ и p, а характерные масштабы вертикальной координаты, аномалии плотности и напряжения ветра — через H_x, δ_x, T_x соответственно. С их помощью можно определить остальные характерные масштабы:

$$\zeta_{x1}=\frac{H_x\delta_x}{\rho_0}; \quad V_x=\frac{gH_x\delta_x}{2\omega\rho_0 R};$$

$$W_x=\frac{gH_x^2\delta_x}{2\omega\rho_0 R^2}; \quad M_x=\frac{gH_x^2\delta_x}{2\omega\rho_0 R}; \quad p_x=\delta_x g H_x. \tag{1.129}$$

Из интегрального уравнения гидростатики (1.106), записанного в безразмерных переменных, следует соотношение

$$p_б(\theta, \lambda, z_б)=\zeta_{б1}(\theta, \lambda)+\eta_б(\theta, \lambda, z_б), \tag{1.130}$$

где

$$\eta_б(\theta, \lambda, z_б)=\int\limits_0^{z_б}\delta_б\, dz_б \text{ — аналог динамической глубины.} \tag{1.131}$$

Если в формуле (1.130) $z_б=1$, то приведенный уровень можно выразить через придонные значения функций $p_{бH}$ и $\eta_{бH}$:

$$\zeta_{б1}=p_{бH}-\eta_{бH}. \tag{1.132}$$

Тогда

$$p_б=p_{бH}-\eta_{бH}+\eta_б. \tag{1.133}$$

Величина $\eta_{бH}$ может рассматриваться как динамическое приближение для приведенного уровня.

Инерционные эффекты и боковое трение (слагаемые A и B) в связи с их малостью для внутренних слоев океана (см. табл. 1.1) исключаются из рассмотрения. Тогда уравнение (1.108), записанное в безразмерной форме, после интегрирования по вертикали позволяет получить безразмерное значение комплексного полного потока:

$$\mathcal{M}_б=-\frac{1}{k^2}\int\limits_0^{H_б}G_б\, dz_б+\frac{\varepsilon_1(\tau_{б\theta}+i\tau_{бx})}{2k^2}+\frac{\varepsilon_2 G_{бH}}{k^3}, \tag{1.134}$$

где

$$G_б=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p_б}{\partial\lambda}+i\frac{\partial p_б}{\partial\theta}\right); \quad k=\frac{1}{2}(1+i)\sqrt{\cos\theta};$$

$$\varepsilon_1=\frac{RT_x}{gH_x^2\delta_x}; \quad \varepsilon_2=\frac{1}{2H_x}\sqrt{\frac{K_V}{\omega}}; \quad \varepsilon_1\ll 1,\ \varepsilon_2\ll 1. \tag{1.135}$$

После выделения в (1.134) действительной и мнимой частей выражения для составляющих полного потока (для сферы единичного радиуса) принимают вид

$$M_{б\theta}=-\frac{1}{\cos\theta}\left[\frac{\partial\Pi_{бH}}{\partial\lambda}-\varepsilon_1\tau_{б\theta}+H_б\frac{\partial p_{бH}}{\partial\lambda}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\cos\theta}}\left(\frac{\partial p_{бH}}{\partial\theta}-\frac{\partial p_{бH}}{\partial\lambda}\right)\right]; \tag{1.136}$$

$$M_{б\lambda}=-\frac{1}{\cos\theta}\left[\frac{\partial\Pi_{бH}}{\partial\theta}-\varepsilon_1\tau_{б\theta}+H_б\frac{\partial p_{бH}}{\partial\theta}+\right.$$

$$\left.+\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\cos\theta}}\left(\frac{\partial p_{бH}}{\partial\lambda}-\frac{\partial p_{бH}}{\partial\theta}\right)\right]. \tag{1.137}$$

В этих выражениях

$$\Pi_б=\int\limits_0^{z_б}\delta_б z_б\,dz_б \tag{1.138}$$

обозначает потенциальную функцию.

Подстановка (1.136) и (1.137) в интегральное уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial M_{б\theta}}{\partial\theta}\right)+\frac{\partial M_{б\lambda}}{\partial\lambda}=0 \tag{1.139}$$

дает дифференциальное уравнение для придонного давления:

$$\frac{\varepsilon_2}{\sqrt{\cos\theta}}\operatorname{tg}\theta\nabla^2 p_{бH}-J\left(\frac{H_б}{\cos\theta},\ p_{бH}\right)-$$

$$-\frac{3}{2}\frac{\varepsilon_2\operatorname{tg}^2\theta}{\sqrt{\cos\theta}}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial p_{бH}}{\partial\lambda}+\frac{\partial p_{бH}}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}\frac{\partial\Pi_{бH}}{\partial\lambda}+\varepsilon_1\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(\tau_{б\lambda}\operatorname{tg}\theta)-\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{\tau_{б\theta}}{\cos\theta}\right)\right]. \tag{1.140}$$

Граничное условие для уравнения (1.140) на боковом контуре акватории океана может быть получено в виде

$$\left(1-\frac{\varepsilon_2}{H_б\sqrt{\cos\theta}}\right)\frac{\partial p_{бH}}{\partial\sigma}+\frac{\varepsilon_2}{H_б\sqrt{\cos\theta}}\frac{\partial p_{бH}}{\partial n}+$$

$$+\frac{\chi_L}{H_б}\left(\frac{\partial\Pi_{бH}}{\partial\sigma}-\varepsilon_1\tau_{б\sigma}\right)=0. \tag{1.141}$$

Здесь (σ, n) обозначают касательное и нормальное направления к контуру L, параметр $\chi_L=1$ относится к твердым участкам границы, а $\chi_L=0$ — к жидким участкам.

По найденным из уравнения (1.140) значениям $p_{бH}$ определяются аномалии давления $p_б$ на всех горизонтах.

Составляющие скорости течения на каждом горизонте находятся по формулам

$$v_{б\theta} = v_{б\theta\,\text{др}} - \frac{1}{\cos\theta}\,\frac{\partial p_б}{\partial\theta}; \tag{1.142}$$

$$v_{б\lambda} = v_{б\lambda\text{др}} + \frac{1}{\cos\theta\sin\theta}\,\frac{\partial p_б}{\partial\lambda}; \tag{1.143}$$

$$v_{бz} = v_{бz\text{др}} + \frac{1}{\cos^2\theta}\left(z_б\,\frac{\partial p_б}{\partial\lambda} + \frac{\partial \Pi_б}{\partial\lambda}\right). \tag{1.144}$$

Дрейфовые составляющие течения определяются выражениями (1.117) и (1.118). Напомним, что в этих выражениях не учтены эффекты бокового трения и инерционные эффекты.

Уравнение (1.140) с граничным условием (1.141) было получено В. Ф. Козловым.

Важным вопросом изучения трехмерной циркуляции в океане является оценка роли различных физических факторов. Выяснить полную роль того или иного фактора можно только при исследовании процесса взаимного приспособления поля масс и течений. Однако это в настоящее время сделать невозможно, так как полных решений эволюционной задачи пока еще нет. Оценить приближенно роль различных факторов можно в рамках рассмотренной диагностической задачи на примере первого подхода.

Уравнение (1.119) для приведенного уровня, записанное в безразмерной форме, после исключения инерционных и диссипативных слагаемых в правой части уравнения ввиду их малости для крупномасштабной циркуляции принимает вид

$$\varepsilon_3\,\frac{1}{2\alpha_б}\,\nabla^2\zeta_б + \frac{1}{\sin\theta}\left[\Big(\underbrace{H_б\,\mathrm{tg}\,\theta}_{1} + \underbrace{\frac{\partial H_б}{\partial\theta_б}\Big)\frac{\partial\zeta_б}{\partial\lambda_б} - \frac{\partial H_б}{\partial\lambda_б}\,\frac{\partial\zeta_б}{\partial\theta_б}}_{2}\right] =$$

$$= \varepsilon_4\,\frac{1}{2\alpha_б}\,\nabla^2 p_{бa} - \varepsilon_4\,\frac{1}{2\alpha_б}\,\nabla^2\int\limits_0^{H_б}\rho_б\,dz_б -$$

$$- \frac{1}{\sin\theta}\left\{\underbrace{J\left(H_б,\ \int\limits_0^{H_б}\rho_б\,dz_б\right)}_{3} -\right.$$

$$\left.\underbrace{-\,\mathrm{tg}\,\theta\left[\frac{\partial H_б}{\partial\lambda_б}\int\limits_0^{H_б}\rho_б\,dz_б - \frac{\partial}{\partial\lambda_б}\int\limits_0^{H_б}(H_б - z_б)\,\rho_б\,dz_б\right]}_{4}\right\}, \tag{1.145}$$

где

$$\varepsilon_3=\frac{1}{\alpha_x H_x}, \quad \varepsilon_4=\frac{p_{xa}}{\alpha_x g H_x^2 (\delta\rho)_x}\sqrt{\frac{K'_{Vx}}{K_{Vx}}},$$

$$\alpha_x=\sqrt{\frac{\omega}{K_{Vx}}}.$$

При характерных значениях $\rho_0=10^3$, $H_0=5\cdot10^2$, $(\delta\rho)_x=1$, $p_{xa}=10$ мбар $=10^3$, $K'_{Vx}=1$, $K_{Vx}=10^{-2}$ безразмерные комплексы оказываются равными $\alpha_x\approx10^{-3}$ см$^{-1}$, $\varepsilon_3=2\cdot10^{-2}$, $\varepsilon_4=$ $=4\cdot10^{-2}$.

Отсюда следует, что в уравнении (1.145) основные слагаемые (1, 2, 3, 4) учитывают бета-эффект (слагаемое 1), эффект рельефа дна (слагаемое 2), совместный эффект бароклинности и рельефа дна (слагаемое 3), бароклинный бета-эффект (слагаемое 4). Таким образом, формирование поля уровенной поверхности, а следовательно, и поля течений определяется в основном балансом факторов, обусловленных, с одной стороны, бета-эффектом и рельефом дна, а с другой — СЭБИР и бароклинным бета-эффектом.

В заключение следует напомнить, что полная оценка роли таких важных факторов, как ветер и термохалинные процессы, в формировании стационарной циркуляции в океане при диагностическом подходе затруднительна. Это связано с тем, что наблюденные поля плотности уже включают в себя совместное влияние этих факторов.

1.7. Термохалинные течения в океане

В отличие от предыдущего раздела, рассматривающего закономерности суммарных течений, обусловленных совместным действием ветра и термохалинных процессов, представляет интерес выделить термохалинную компоненту течений, изучить ее особенности и вклад в общую циркуляцию в океане.

Поскольку плотность морской воды зависит не только от давления, но и от температуры и солености (термохалинных факторов), изобарические и изопикнические поверхности не совпадают, а пересекаются, образуя изобаро-изопикнические соленоиды (рис. 1.10). Вихри, порождаемые этими соленоидами, создают предпосылки к возникновению *термохалинной* циркуляции.

Термохалинные изменения плотности, постоянно возникающие на поверхности в процессе тепло- и влагообмена океана с атмосферой, передаются вглубь путем вертикальной адвекции и турбулентной диффузии. Пространственная неравномерность этих процессов обусловливает появление в океане горизонтальных градиентов плотности и давления, которые в свою очередь вызывают термохалинные течения и связанные с ними изменения полей температуры, солености или плотности. Слой в океане, где сосредоточены практически все изменения температуры, солености и плотности, называется *бароклинным слоем*. Он располагается глубже экмановского слоя трения и имеет толщину порядка 1000—1500 м. В нем сосредоточены также и основные изменения по вертикали градиентных течений, в том числе термохалинного происхождения. Ниже бароклинного слоя изменения температуры и солености практически исчезают, а аномалии давления и связанные с ними горизонтальные составляющие течений меняются очень мало по вертикали вплоть до самого придонного слоя трения.

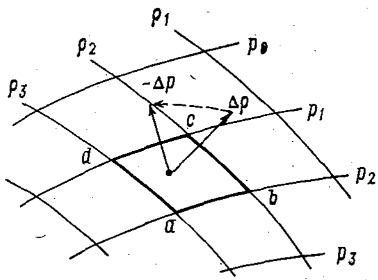


Рис. 1.10. Изобаро-изопикнические соленоиды.

В соленоиде *abcd* $(\Delta p \times \Delta \rho) \neq 0$ создается тенденция к завихрению.

Математическое описание процесса формирования в бароклинном слое океана взаимосвязанных полей течений, температуры и солености под действием термодинамических факторов (нагревание, охлаждение, испарение, осадки) опирается на систему семи нелинейных дифференциальных уравнений и граничных условий, приведенных в разделе 1.1. Эта система очень сложна для решения. Обращая основное внимание лишь на *динамическую сторону* взаимосвязанного процесса, т. е. на структуру термохалинных течений и выявление их общих закономерностей, обычно рассматривают эту систему в более простом виде.

Впервые теорию бароклинной циркуляции океана разработал в 1955 г. П. С. Линейкин. Он заменил уравнения турбулентной теплопроводности и солевой диффузии одним уравнением «турбулентной диффузии плотности», воспользовавшись линейной частью уравнения состояния. Это уравнение получается, если умножить (1.5) на $\left.\frac{\partial \rho}{\partial T}\right|_S$, а (1.6) на $\left.\frac{\partial \rho}{\partial S}\right|_T$ и сложить их:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{v_\theta}{R}\frac{\partial \rho}{\partial \theta} + \frac{v_\lambda}{R \sin\theta}\frac{\partial \rho}{\partial \lambda} + v_z \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K_\rho \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) + \frac{K_{\rho L}}{R^2}\nabla^2 \rho, \qquad (1.146)$$

где K_ρ и $K_{\rho L}$ обозначают вертикальный и горизонтальный коэффициенты турбулентной диффузии плотности. Это уравнение нашло широкое применение в теоретических исследованиях, поскольку позволило отказаться от раздельного рассмотрения полей температуры и солености и наиболее простым способом замкнуть исходную систему уравнений.

Учет сжимаемости морской воды приводит к появлению в уравнении (1.146) дополнительного члена, связанного с адиабатическими изменениями плотности при вертикальных движениях:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{v_\theta}{R}\frac{\partial \rho}{\partial \theta}+\frac{v_\lambda}{R\sin\theta}\frac{\partial \rho}{\partial \lambda}+v_z\left(\frac{\partial \rho}{\partial z}-\frac{\partial \rho}{\partial P}\bigg|_T g\rho\right)=$$
$$=\frac{\partial}{\partial z}\left(K_\rho\frac{\partial \rho}{\partial z}\right)+\frac{K_{\rho L}}{R^2}\nabla^2\rho. \qquad (1.147)$$

Однако в пределах слоя 1—1,5 км этим эффектом можно пренебречь вследствие его малости.

Дальнейшее упрощение уравнения «диффузии плотности» связано с пренебрежением горизонтальными эффектами диффузии и адвекции плотности, поскольку установлено, что при формировании квазистационарных крупномасштабных полей плотности преобладают вертикальные процессы диффузии и адвекции. Зональные и меридиональные адвективные переносы хотя и имеют существенный порядок, но обладают противоположными знаками, и предположительно их влияние взаимно компенсирует друг друга. Тогда уравнение (1.146) для этих полей принимает вид

$$v_z\frac{\partial \rho}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K_\rho\frac{\partial \rho}{\partial z}\right). \qquad (1.148)$$

Следует подчеркнуть, что это приближенное уравнение нельзя использовать в тех районах океана, где формирование плотности существенно зависит от горизонтальных эффектов диффузии и адвекции (например, в прибрежных пограничных слоях и экваториальной зоне).

С учетом геострофического характера термохалинных течений упрощенная система уравнений термодинамики для бароклинного слоя может быть записана:

$$\left.\begin{aligned}
-fv_\lambda&=-\frac{1}{\rho_0 R}\frac{\partial P}{\partial \theta}; && (1.149)\\
fv_\theta&=-\frac{1}{\rho_0 R\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \lambda}; && (1.150)\\
g\rho&=\frac{\partial P}{\partial z}; && (1.151)\\
\frac{1}{R\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\theta\cdot v_\theta)+\frac{\partial v_\lambda}{\partial \lambda}\right]&+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0; && (1.152)\\
v_z\frac{\partial \rho}{\partial z}&=K_\rho\frac{\partial^2 \rho}{\partial z^2}. && (1.153)
\end{aligned}\right\}$$

При формулировке условий на верхней границе бароклинного слоя, совпадающей с нижней границей экмановского слоя трения, возникает необходимость «переноса» граничных условий, задаваемых на поверхности океана. Одно из них получается, если учесть непрерывность вертикальной скорости на границе раздела слоя трения и бароклинного слоя,

$$v_z = v_{z\text{др}}(\theta, \lambda), \ z=0. \tag{1.154}$$

Другое условие может быть составлено, если предположить, что вертикальный турбулентный поток массы Φ_ρ, обусловленный распределением на поверхности океана теплового баланса $Б$, осадков $\mathscr{P}$, испарения E, передается без изменений в пределах квазиоднородного слоя трения на верхнюю границу бароклинного слоя:

$$K_\rho \rho_0 \frac{\partial \rho}{\partial z} = \Phi_\rho(Б, \mathscr{P}, E), \ z=0. \tag{1.155}$$

С глубиной термохалинные возмущения плотности ρ' и давления P' затухают, исчезают горизонтальные градиенты давления и горизонтальное движение и поэтому допустимы условия

$$\rho' \to P' \to 0, \ \frac{\partial P'}{\partial \theta} = \frac{\partial P'}{\partial \lambda} = 0, \ z \to \infty; \tag{1.156}$$

$$v_\theta \to v_\lambda \to 0, \ z \to \infty. \tag{1.157}$$

Следует отметить, что в условиях (1.156)—(1.157) не учитываются баротропные составляющие скорости течения.

Сформулированная задача (1.149)—(1.157) все еще сложна для аналитического анализа. Следующее ее упрощение состоит в *линеаризации* уравнения «диффузии плотности» (1.153). Применяя для этого метод малых возмущений, П. С. Линейкин представил поля плотности и давления в виде суммы невозмущенных значений (ρ_* и P_*) и малых возмущений, обусловленных термохалинными факторами:

$$\rho(\theta, \lambda, z) = \rho_*(z) + \rho'(\theta, \lambda, z); \tag{1.158}$$

$$P(\theta, \lambda, z) = P_*(z) + P'(\theta, \lambda, z). \tag{1.159}$$

Тогда в систему уравнений (1.149)—(1.153) войдут эти возмущения. Левая часть уравнения «диффузии плотности» (1.153) в предположении малости $\partial\rho'/\partial z$ и устойчивой *линейной* стратификации заменится на $v_z b$, где $b = \partial\rho_*/\partial z = \text{const}$ обозначает невозмущенный градиент плотности, а само уравнение (1.153) принимает линейный вид, позволяющий в дальнейшем получить аналитическое решение задачи:

$$v_z b = K_\rho \frac{\partial^2 \rho'}{\partial z^2}. \tag{1.160}$$

Дифференцирование уравнения «диффузии плотности» (1.160) по z дважды с учетом уравнений гидростатики (1.151) и неразрывности (1.152) приводит к выражению изменения плотности воды

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \lambda}=\frac{2\omega\rho_0 R^2\cos^2\theta K_\rho}{gb}\frac{\partial^4\rho'}{\partial z^4}. \tag{1.161}$$

Если ввести безразмерную вертикальную координату ξ с помощью соотношения $\xi=z/\mathscr{H}$, в котором $\mathscr{H}$ обозначает характерную толщину бароклинного слоя, определяемую из (1.161):

$$\mathscr{H}=\sqrt[4]{\frac{2\omega\rho_0 R^2\cos^2\theta K_\rho}{gb}}, \tag{1.162}$$

то в результате основное уравнение для определения термохалинных возмущений плотности в бароклинном слое принимает вид

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \lambda}=\frac{\partial^4\rho'}{\partial \xi^4}. \tag{1.163}$$

Для решения удобно представить термохалинные возмущения плотности в виде произведения характерного масштаба σ_x и безразмерной величины $\sigma_б(\theta, \lambda, z)$, в результате чего уравнение (1.163) запишется в виде

$$\frac{\partial \sigma_б}{\partial \lambda}=\frac{\partial^4\sigma_б}{\partial \xi^4}. \tag{1.164}$$

Граничные условия, необходимые для решения (1.164), следующие:

а) на верхней границе бароклинного слоя, при $\xi=0$

$$\sigma_x\frac{\partial \sigma_б}{\partial \xi}=\sigma_x\frac{\Phi_\rho}{\rho_0 K_\rho}, \quad \frac{\partial^2\sigma_б}{\partial \xi^2}=0; \tag{1.165}$$

б) при $\xi\to\infty$

$$\sigma_б\to 0, \quad \frac{\partial^3\sigma_б}{\partial \xi^3}=0. \tag{1.166}$$

Конкретный вид функции $\Phi_\rho(\theta, \lambda)$ в первом граничном условии (1.165) зависит от используемой формы уравнения состояния морской воды. В рассматриваемой задаче уравнение состояния принято в форме О. И. Мамаева, которая, как было показано в «Физике океана», является наиболее точной из приближенных форм:

$$\rho=\rho_0(1-aT-bT^2+cS-dTS),$$

в котором $\rho_0=1{,}000082$, $a=0{,}3499\cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$; $b=0{,}4689\times$ $\times 10^{-5}$ град$^{-2}$; $c=80{,}1934\cdot 10^{-5}$ 1/‰; $d=0{,}1999\cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$ ‰$^{-1}$.

Дифференцируя его по z и заменяя вертикальные градиенты температуры и солености через потоки тепла и солей при помощи градиентной гипотезы Буссинеска—Шмидта, переходя к безразмерной координате ξ и безразмерным возмущениям плотности, можно получить в конечном итоге

$$\sigma_x \frac{\partial \sigma_б}{\partial \xi} = \frac{\rho_0 \mathcal{H}}{K_\rho} \left[\frac{Б}{c_p \rho_0} (a + 2bT + dS) + \right.$$

$$\left. + (\mathcal{P} - E) S (c - dT) \right] \equiv \sigma_x G(\theta, \lambda), \qquad (1.167)$$

где $G(\theta, \lambda)$ определяет вертикальный градиент термохалинных возмущений плотности. Для простоты $G(\theta, \lambda)$ называют *термохалинной функцией*.

Если рассматривать океан в виде прямоугольника, то можно получить аналитическое решение основного уравнения (1.164) путем совместного разложения в ряды Фурье (в каждой широтной зоне по λ $0 < \lambda < 2\pi$) исходной $G(\theta, \lambda)$ и искомой $\sigma_б(\theta, \lambda, \xi)$ функций

$$G(\theta, \lambda) = \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} c_n(\theta) e^{in\lambda}; \qquad (1.168)$$

$$\sigma_б(\theta, \lambda, \xi) = \mathrm{Re} \sum_{n=1}^{\infty} C_n(\theta, \xi) e^{in\lambda}; \qquad (1.169)$$

здесь символ Re означает действительную часть следующего за ним выражения. Основное уравнение (1.164) с учетом (1.169) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение для коэффициента разложения $C_n(\theta, \xi)$

$$C_n^{\mathrm{IV}} - inC_n(\theta, \xi) = 0,$$

решение которого в комплексной форме имеет вид

$$C_n(\theta, \xi) = -\frac{c_n(\theta) e^{i\frac{\pi}{8}}}{\sqrt[4]{4n}} (e^{-r\xi} + e^{ir\xi}), \qquad (1.170)$$

где $r = \sqrt[4]{n}\, e^{i\frac{\pi}{8}}$.

Поскольку для бароклинного слоя характерно убывание по вертикали термохалинных возмущений плотности, то связанные с ними горизонтальные составляющие скорости термохалинных течений, определяемые из геострофических соотношений (1.149) и (1.150), также убывают с глубиной в соответствии граничного условия (1.157):

$$v_\theta = -\frac{g\sigma_x}{Rf \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_0^\infty \sigma_б \, dz;$$

$$v_\lambda = \frac{g\sigma_x}{Rf} \frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^\infty \sigma_б \, dz. \qquad (1.171)$$

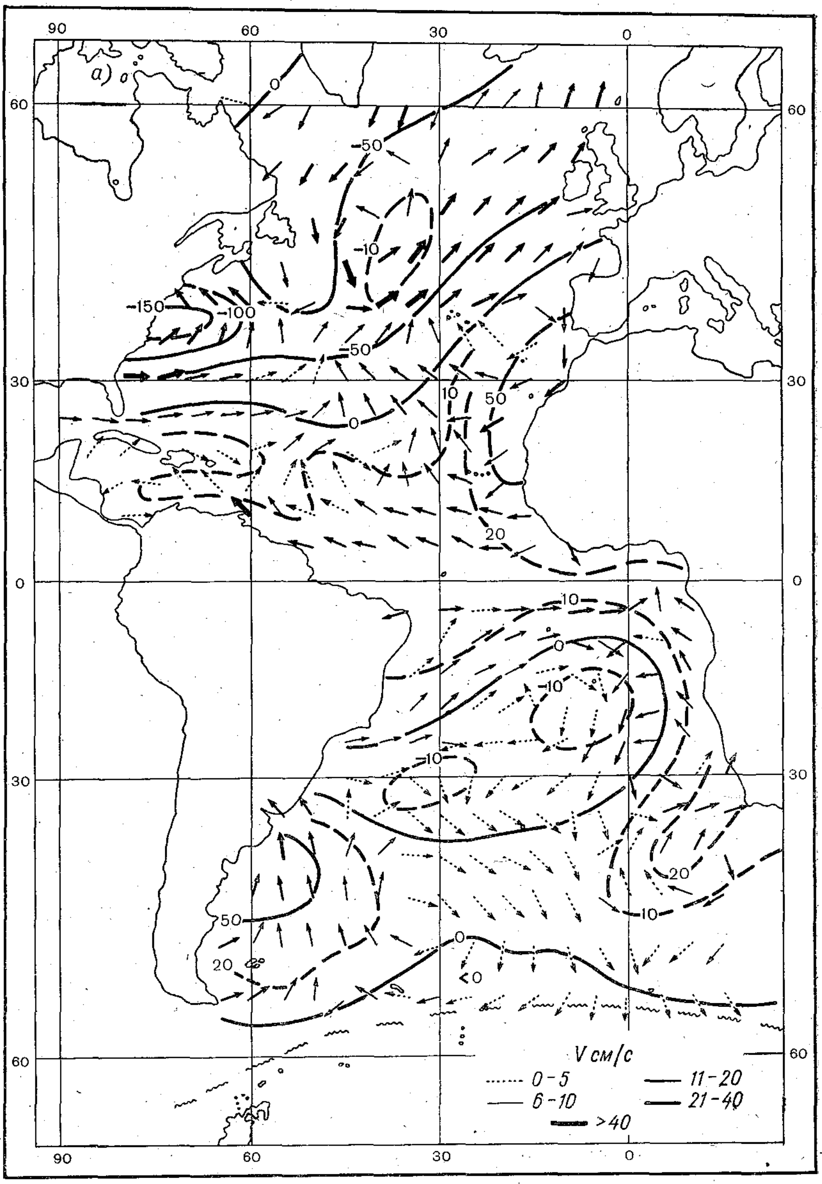
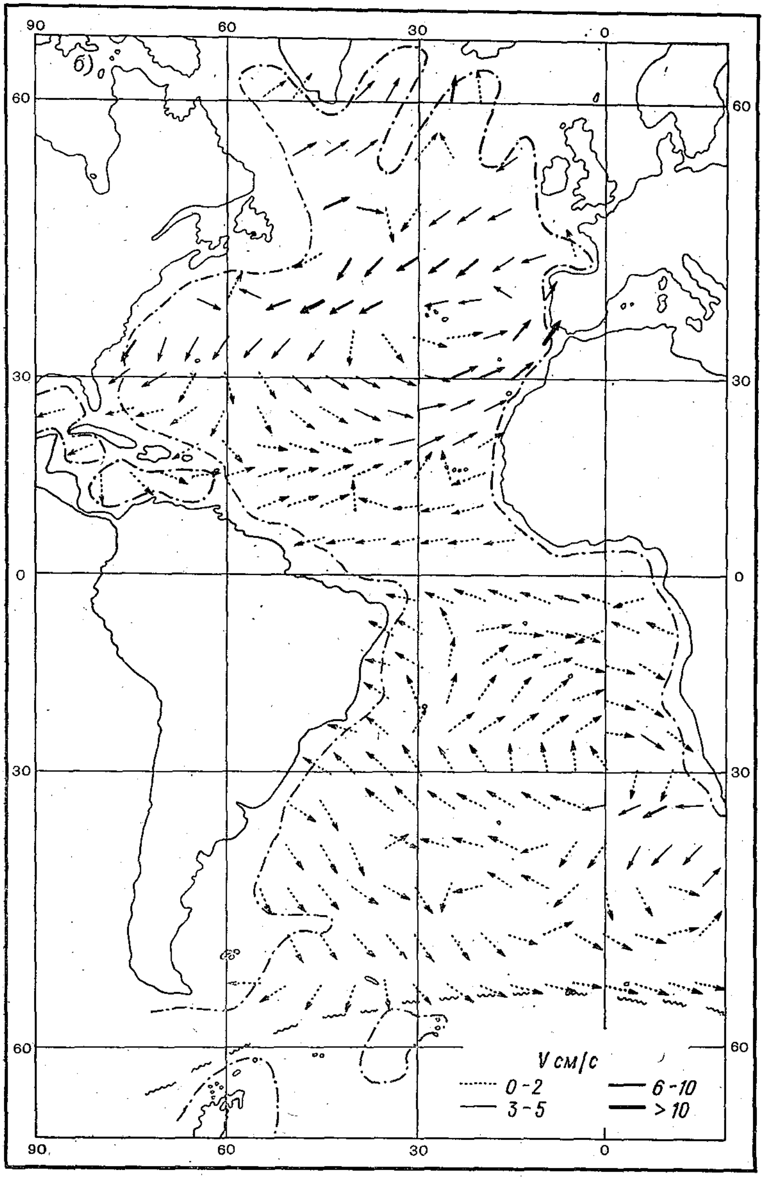


Рис. 1.11. Термохалинные течения в Атлантическом океане, *а* — на глубине 100 м, *б* — на глубине 2000 м. На рис. 1.11 *а* изолиниями



согласно расчетам Л. Н. Кузнецовой и Б. И. Тюрякова [20].
показаны среднегодовые турбулентные потоки массы (кг/(м^2 · год)).

Вертикальная скорость, определяемая из уравнения неразрывности (1.152), в силу геострофических соотношений для горизонтальных составляющих оказывается зависящей лишь от вертикальной структуры меридиональной составляющей скорости течений и вертикальной скорости в экмановском слое:

$$v_z = -\frac{1}{R\sin\theta}\int_0^z \left(\cos\theta \cdot v_\theta + \sin\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}\right) dz =$$

$$= v_{z\text{др}} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{R}\int_0^z v_\lambda\, dz. \qquad (1.172)$$

Вследствие требования об асимптотическом затухании с глубиной v_λ из (1.172) следует, что вертикальная скорость на больших глубинах при $z \to \infty$ стремится к некоторому предельному значению $v_{z\infty}$.

На рис. 1:11 *а* и *б* приведены расчетные схемы термохалинных течений, полученные в линейном приближении бароклинного слоя. Кроме того, показано среднегодовое распределение турбулентных потоков массы под поверхностью Атлантического океана. Области с положительными их значениями ($\Phi_\rho > 0$) соответствуют «стокам» термохалинной циркуляции, поскольку плотность воды уменьшается и стратификация становится более устойчивой. Области с отрицательными значениями $\Phi_\rho < 0$ являются «источниками» термохалинной циркуляции. Термохалинная циркуляция находится в полном соответствии с положением и знаком этих основных областей возмущений плотности. В верхней части бароклинного слоя (рис. 1.11 *а*) в обоих полушариях Атлантического океана наблюдаются три взаимосвязанные системы обращения вод. В тропических и субтропических широтах отчетливо выражены два круговорота, центры вращения которых смещены к западным и восточным границам океана. Западный круговорот имеет циклонический, а восточный — антициклонический характер. Эти круговороты сменяются в умеренных и субполярных широтах обоих полушарий циклоническими круговоротами вод. Эти крупномасштабные круговороты вод формируют соответствующие системы термохалинных течений с преобладанием переноса вод от *экватора к полюсу*, особенно ярко выраженного в северном полушарии.

С увеличением глубины происходит постепенная перестройка полей термохалинных течений на противоположные. В результате в глубинных слоях преобладают противотечения, осуществляющие перенос вод от *высоких широт к экватору* (рис. 1.11 *б*).

Интенсивность термохалинных течений, полностью определяемая неравномерностью процессов тепло- и влагообмена океана с атмосферой, составляет 10—50 см/с в верхней и 1—5 см/с в нижней частях бароклинного слоя. Максимальные скорости имеют место в очагах взаимодействия, а минимальные — в центрах круговоротов. При этом скорости течений в южном полушарии в 2—5 раз меньше по сравнению с северными, что обусловливается меньшей интенсивностью южных процессов взаимодействия.

Сопоставление расчетных данных с результатами наблюдений суммарной циркуляции в океане, обусловленной совместным действием ветрового и термохалинных факторов, показывают, что относительный вклад термохалинных течений составляет 30—50 %. Следовательно, термохалинные факторы могут порождать крупномасштабные течения примерно той же интенсивности, что и ветровые факторы.

1.8. Вертикальная циркуляция вод в океане

Вертикальная циркуляция вод в океане, несмотря на малые значения скорости вертикальных движений ($10^{-3} \div 10^{-4}$ см/с), играет важную роль в различных процессах, происходящих в нем, в том числе в жизни океана. Движущиеся вверх и вниз массы воды осуществляют обмен количеством движения, теплом, солями и биогенными элементами между глубинными и поверхностными слоями океана. Благодаря этому в зонах подъема происходит снабжение поверхностных вод биогенными элементами (фосфатами, нитратами и др.) и в пределах верхнего фотического слоя создаются условия, благоприятные для высокой биологической продуктивности. В настоящее время установлены достаточно четкие зависимости между концентрациями первичной продукции и интенсивностью процесса подъема глубинных вод. В иностранной литературе, а часто и в нашей этот процесс называют *апвеллингом*. Выделение в океане зон подъема (апвеллинговых зон), изучение их структуры, интенсивности и изменчивости в зависимости от различных гидрометеорологических условий представляет научный и практический интерес.

Малость скоростей вертикальных движений почти исключает возможность экспериментального изучения вертикальной циркуляции, основанного на непосредственных инструментальных измерениях. Поэтому представление о вертикальных движениях и вертикальной циркуляции вод в океане в настоящее время можно получить лишь теоретическим путем.

Существуют два подхода к определению скорости вертикальных движений:

1) как часть общей проблемы о трехмерных течениях при любой постановке задачи. Поле вертикальных движений находится на основании уравнения неразрывности и соответствующих граничных условий;

2) как самостоятельная задача, в которой вертикальные движения оцениваются без предварительного определения

горизонтальных течений. Такой подход позволяет составить рациональное представление о физической природе вертикальных движений и получить прямые зависимости вертикальной скорости от полей ветра и плотности.

В рамках первого подхода в результате интегрирования уравнения неразрывности (1.4) или (1.105) для вертикальной скорости можно получить

$$v_z=(v_z)_{z=-\zeta}-\frac{1}{R\sin\theta}\left[\int\limits_{-\zeta}^{z}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta)\,dz+\int\limits_{-\zeta}^{z}\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}\,dz\right], \tag{1.173}$$

где значение вертикальной скорости на свободной поверхности океана (первое слагаемое правой части) определяется:

а) в случае задания стационарного кинематического условия для вертикальной скорости на свободной поверхности $z=-\zeta(\theta,\lambda,t)$ в форме (1.10)

$$(v_z)_{z=-\zeta}=-\left(\frac{\partial v_\theta}{R}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}+\frac{v_\lambda}{R\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}\right); \tag{1.174}$$

б) в случае, если вертикальная составляющая скорости течения на поверхности океана равна нулю (условие «жесткой крышки»),

$$(v_z)_{z=-\zeta}=0. \tag{1.175}$$

Если учесть малость отклонения уровенной поверхности океана от невозмущенного положения по сравнению с толщиной слоя трения и принять условие (1.175), то выражение для вертикальной составляющей скорости течения на каждом горизонте z записывается в виде

$$v_z=-\frac{1}{R\sin\theta}\left[\int\limits_0^z\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta)\,dz+\int\limits_0^z\frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}\,dz\right]. \tag{1.176}$$

Это выражение может быть написано отдельно для слоя трения и отдельно для глубинного слоя. В это выражение могут быть включены как значения дрейфовой и градиентной составляющих горизонтального течения (ветрового и термохалинного происхождения), так и суммарные значения скорости.

Соотношение для вертикальной составляющей скорости течения в слое трения толщиной h $(0<z\leqslant h)$ может быть получено, если в (1.176) подставить выражения

$$v_\theta=(v_\theta)_d+(v_\theta)_g;$$
$$v_\lambda=(v_\lambda)_d+(v_\lambda)_g, \tag{1.177}$$

где индекс «d» относится к дрейфовым составляющим, а индекс «g» — к градиентным составляющим горизонтальной скорости течения. При этом градиентные составляющие скорости течения могут быть в свою очередь записаны в виде

$$(v_\theta)_g = (v_\theta)_{g,\,\gamma} + (v_\theta)_{g,\,\rho};$$

$$(v_\lambda)_g = (v_\lambda)_{g,\,\gamma} + (v_\lambda)_{g,\rho}. \qquad (1.178)$$

Здесь индекс «γ» обозначает градиентные составляющие, обусловленные наклоном поверхности моря (баротропный эффект, вызванный совместным влиянием ветра и термохалинных процессов), а индекс «ρ» относится к градиентным составляющим, обусловленным неравномерным распределением поля плотности (бароклинный эффект).

Тогда

$$(v_z)_{\text{пов}} = -\frac{1}{R\sin\theta}\left\{\int\limits_0^z \frac{\partial}{\partial\theta}\left[(v_\theta)_d \sin\theta\right] dz + \int\limits_0^z \frac{\partial (v_\lambda)_d}{\partial\lambda}\, dz\right\} -$$

$$-\frac{1}{R\sin\theta}\left\{\int\limits_0^z \frac{\partial}{\partial\theta}\left[(v_\theta)_{g,\,\gamma} \sin\theta\right] dz + \int\limits_0^z \frac{\partial (v_\lambda)_{g,\,\gamma}}{\partial\lambda}\, dz\right\} -$$

$$-\frac{1}{R\sin\theta}\left\{\int\limits_0^z \frac{\partial}{\partial\theta}\left[(v_\theta)_{g,\,\rho} \sin\theta\right] dz + \int\limits_0^z \frac{\partial (v_\lambda)_{g,\,\rho}}{\partial\lambda}\, dz\right\}. \qquad (1.179)$$

Первое слагаемое правой части этого выражения представляет чисто дрейфовый $(v_z)_d$, второе слагаемое — баротропный $(v_z)_{g,\,\gamma}$, а третье слагаемое — бароклинный $(v_z)_{g,\,\rho}$ вклад в вертикальную составляющую скорости течения.

Вертикальная составляющая скорости течения в пределах слоя трения с глубиной увеличивается и достигает максимума на нижней границе слоя трения.

Течение глубинного слоя (ниже поверхностного слоя трения) обусловлено неравномерным распределением поля плотности и по своей природе является градиентным.

Полное значение вертикальной скорости в глубинном слое определяется как течением глубинного слоя, так и течением слоя трения:

$$(v_z)_{\text{гл}} = -\frac{1}{R\sin\theta}\left[\int\limits_0^h \frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta)\, dz + \int\limits_0^h \frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}\, dz\right] -$$

$$-\frac{1}{R\sin\theta}\left[\int\limits_h^z \frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta \sin\theta)\, dz + \int\limits_h^z \frac{\partial v_\lambda}{\partial\lambda}\, dz\right], \qquad (1.180)$$

где $h < z \leqslant H$ (H — глубина океана), или

$$(v_z)_{\text{гл}} = (v_z)_{z=h} - \frac{1}{R\sin\theta}\left\{\int\limits_h^z \frac{\partial}{\partial\theta}\left((v_\theta)_{g,\,\rho}\sin\theta\right) dz + \right.$$

$$\left. + \int\limits_h^z \frac{\partial (v_\lambda)_{g,\,\rho}}{\partial\lambda}\, dz\right\}. \qquad (1.181)$$

С глубиной вертикальная составляющая скорости течения также изменяется, но чисто дрейфовая часть скорости, как и баротропная, является постоянной до самого дна. Характер изменения вертикальной скорости с глубиной определяется в основном бароклинным эффектом (бароклинной частью), обусловленным термохалинными процессами.

Если знак горизонтальных компонентов течения глубинного слоя сохраняется, бароклинная составляющая вертикальной скорости с глубиной возрастает. На глубине, где компоненты течения меняют знак, вертикальная скорость достигает максимума, после чего она с глубиной уменьшается. Это уменьшение будет происходить до тех пор, пока знак горизонтальных компонентов течения снова не изменится на обратный.

На рис. 1.12 представлены графики изменения с глубиной вертикальной составляющей скорости ветрового (*а*) и термохалинного (*б*) происхождения в двух точках северной части Атлантического океана. Точка *1* расположена в центральной части (45° с. ш., 30° з. д.), точка *2* — в тропической (15° с. ш., 30° з. д.). Вертикальные скорости ветрового течения вычислены для трех подтипов атмосферных процессов E_4, E_5, W_5 по детализированной типизации Г. Я. Вангенгейма, а термохалинного течения — для четырех сезонов среднего года. Вертикальные скорости ветрового течения на горизонте 100 м равны в среднем $(1 \div 5) \times 10^{-4}$ см/с, а на глубине 2000 м $(10 \div 40) \cdot 10^{-4}$ см/с с наибольшими значениями $(100 \div 120) \cdot 10^{-4}$ и даже $(120 \div 160) \cdot 10^{-4}$ см/с. Абсолютные значения вертикальной скорости термохалинного течения на горизонте 100 м составляют $(0{,}3 \div 0{,}5) \cdot 10^{-4}$ см/с летом и $(0{,}5 \div 1{,}0) \cdot 10^{-4}$ см/с зимой, а на глубине 2000 м наибольшие значения вертикальной скорости достигают $(10 \div 20) \times 10^{-4}$ см/с. Таким образом, в формирование суммарной вертикальной циркуляции в океане основной вклад вносят вертикальные движения ветрового происхождения. Вертикальная термохалинная циркуляция имеет меньшую интенсивность по сравнению с ветровой, но с глубиной ее роль увеличивается и ряд особенностей вертикальной циркуляции океана обязан термохалинным течениям, особенно в очагах взаимодействия океана и атмосферы. Термохалинная вертикальная циркуляция формирует в океане своеобразный динамический фон, на котором развивается более изменчивая ветровая вертикальная циркуляция.

Как показано в разделе 1.1, крупно- и мезомасштабные течения во внутренней области океана могут рассматриваться как геострофические. Следовательно, в задаче о течениях в глубинном слое бароклинного океана можно исходить из геострофичности градиентного течения.

Тогда на основании (1.1) и (1.2) выражения для горизонтальных составляющих скорости течения $(v_\theta)_{g,\rho}$ и $(v_\lambda)_{g,\rho}$ принимают вид

$$(v_\theta)_{g,\rho} = -\frac{1}{2\omega\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot\rho_0 R}\frac{\partial P}{\partial\lambda} = -\frac{1}{f\sin\theta\cdot\rho_0 R}\frac{\partial P}{\partial\lambda};$$

$$(v_\lambda)_{g,\rho} = \frac{1}{2\omega\cos\theta\cdot\rho_0 R}\frac{\partial P}{\partial\theta} = \frac{1}{f\rho_0 R}\frac{\partial P}{\partial\theta}. \qquad (1.182)$$

После подстановки соотношений (1.182) в (1.181) и соответствующих преобразований в подынтегральном выражении вто-

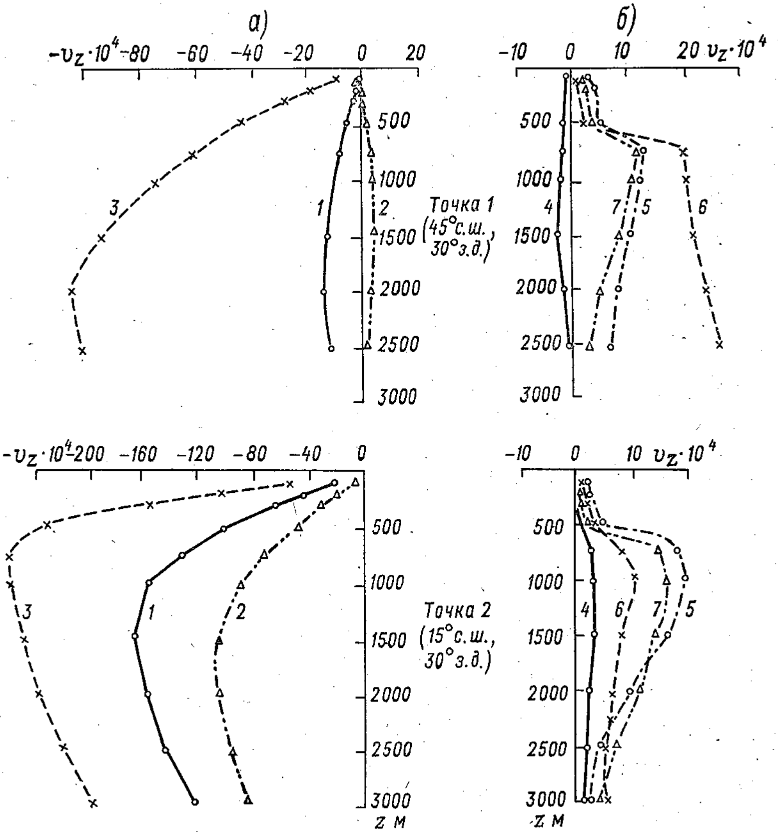


Рис. 1.12. Изменение с глубиной вертикальной скорости ветрового (*а*) и термохалинного (*б*) происхождения при различных ветровых и климатических условиях, согласно Б. И. Тюрякову и Л. Н. Кузнецовой [11].

Ветровые: *1* — подтип E_4; *2* — подтип E_5; *3* — подтип W_5. Термохалинные: *4* — лето; *5* — осень; *6* — зима; *7* — весна.

рого слагаемого правой части это слагаемое оказывается равным

$$-\frac{1}{R\sin\theta}\left\{\int_h^z \frac{\partial}{\partial\theta}\left[(v_\theta)_{g,\,\rho}\sin\theta\right]dz+\int_h^z \frac{\partial (v_\lambda)_{g,\,\rho}}{\partial\lambda}\,dz\right\}=$$

$$=-\frac{\operatorname{tg}\theta}{R}\int_h^z (v_\theta)_{g,\,\rho}\,dz. \qquad (1.183)$$

Тогда общее выражение для вертикальной составляющей скорости глубинного течения принимает вид

$$(v_z)_{\text{гл}}=(v_z)_{z=h}-\frac{\operatorname{tg}\theta}{R}\int_h^z (v_\theta)_{g,\,\rho}\,dz. \qquad (1.184)$$

Если представление о геострофичности градиентной составляющей течения распространить и на верхний слой (слой трения), то на основании (1.179) вертикальная скорость течения в глубинном слое равна

$$(v_z)_{\text{гл}}=(v_z)_d-\frac{\operatorname{tg}\theta}{R}\int_0^z (v_\theta)_g\,dz, \qquad (1.185)$$

где $0 < z \leqslant H$.

Из выражений (1.183)—(1.185) следует, что вклад градиентно-конвекционного компонента течения в вертикальную скорость в основном связан с меридиональной составляющей скорости горизонтального течения. Это обусловлено бета-эффектом (изменением параметра Кориолиса с широтой). В этих выражениях множитель перед интегралом включает в себя отношение параметра $\beta = \partial f/\partial\theta$ к параметру Кориолиса $f = 2\omega\cos\theta$.

В самом деле, так как $\partial f/\partial\theta = -2\omega\sin\theta$, то

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{-2\omega\sin\theta}{2\omega\cos\theta}=-\frac{\beta}{f}.$$

Особенностью вертикальной циркуляции в геострофическом движении является то, что вертикальная скорость v_z связана лишь с меридиональным компонентом течения. При этом в северном полушарии течению, направленному на юг ($v_\theta > 0$), соответствуют восходящие движения (подъем воды, $v_z < 0$), а течению, направленному на север ($v_\theta < 0$),— нисходящие движения (опускание вод $v_z > 0$).

В разделе 1.6 была рассмотрена диагностическая задача о стационарной крупномасштабной циркуляции в океане. Вертикальная циркуляция является составной частью суммарной трехмерной циркуляции. Скорости вертикальных движений (1.125) и (1.128) определены из уравнения неразрывности при использовании в первом случае уравнения для уровенной поверхности океана, а во втором — уравнения для интегральной функции тока.

В выражениях (1.125) и (1.128) первые два слагаемых в правых частях характеризуют составляющие вертикального движения вод, обусловленные дрейфовым течением. Для получения непосредственного представления о связи дрейфовой вертикальной циркуляции со структурой поля ветра (касательного напряжения ветра) заменим в выражениях (1.125) и (1.128) градиенты атмосферного давления компонентами касательного напряжения ветра согласно (1.114).

Тогда получим:

в первом случае при использовании уровенной поверхности океана

$$v_z = -\frac{1}{f\rho_0}\operatorname{rot}_z \boldsymbol{\tau} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{R}\frac{1}{f\rho_0}\tau_\lambda + \frac{gz}{fR^2\cos\theta}\frac{\partial\zeta_1}{\partial\lambda} + \frac{g}{fR^2\cos\theta\rho_0}\int_0^z (z-\xi)\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\,d\xi + \frac{1}{fR^2}\int_0^z\left(\frac{2}{\sin 2\theta}A + \frac{\partial A}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial B}{\partial\lambda}\right)dz; \quad (1.186)$$

во втором случае при использовании интегральной функции тока

$$v_z = -\frac{1}{f\rho_0}\operatorname{rot}_z \boldsymbol{\tau} - \frac{\operatorname{tg}\theta}{R}\frac{1}{f\rho_0}\tau_\lambda + \frac{z}{HR^2\cos\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\lambda} - \frac{gz}{fR^2H\rho_0\cos\theta}\int_0^H (H-z)\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\,dz + \frac{g}{fR^2\rho_0\cos\theta}\times$$
$$\times\int_0^z (z-\xi)\frac{\partial\rho}{\partial\lambda}\,d\xi + \frac{1}{fR^2}\int_0^z\left(\frac{2}{\sin 2\theta}A + \frac{\partial A}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial B}{\partial\lambda}\right)dz. \quad (1.187)$$

В этих выражениях величины ζ, ψ, A и B считаются уже найденными из решения общей задачи (см. раздел 1.6).

Первое слагаемое правых частей выражений (1.186) и (1.187) представляет ту часть вертикальной составляющей скорости дрейфового течения, которая обусловлена вертикальным компонентом вихря тангенциального напряжения ветра. Если рассматривать вертикальные движения, обусловленные лишь завихренностью в поле касательного напряжения ветра [первое слагаемое правых частей (1.186) и (1.187)], то при завихренности циклонического характера ($\operatorname{rot}_z\tau > 0$) вертикальные движения направлены вверх ($v_z<0$, подъем вод); при завихренности антициклонического характера ($\operatorname{rot}_z\tau < 0$) вертикальные движения направлены вниз ($v_z > 0$, опускание вод).

С глубиной вертикальные скорости увеличиваются. В глубинных слоях по сравнению с поверхностными они больше на один-два и даже три порядка. Для полей вертикальной скорости характерна меридиональная вытянутость областей восходящих и нисходящих движений. С глубиной эта вытянутость зон подъема и опускания усиливается. Наибольшая согласованность горизонтальной и вертикальной циркуляций проявляется в поверхностных водах. На поверхности океана антициклонические макроциркуляционные системы соответствуют преобладающему опусканию вод, а циклонические — подъему вод.

В промежуточных и глубинных слоях эта согласованность резко ослабевает, и прямая зависимость вертикальных движений от макроциркуляционных систем исчезает. Зоны восходящих движений в промежуточных водах по площади значительно превосходят зоны нисходящих движений. В глубинных слоях области подъема вод преобладают. Опускание вод обнаруживается лишь в отдельных местах. В глубинных водах вертикальные скорости достигают максимальных значений для всей толщи океана (порядка 10^{-3} см/с).

1.9. Особенности течений в экваториальной зоне океана

Циркуляция вод в экваториальной зоне океана отличается большим своеобразием. Она развивается в виде узких струйных потоков, ей свойственен зональный перенос вод и постоянное чередование по вертикали разнонаправленных течений. Наиболее замечательной особенностью экваториальной циркуляции вод является наличие мощных подповерхностных противотечений — течения Ломоносова в Атлантическом, течения Кромвелла в Тихом и течения Тареева в Индийском океанах. Противотечения характеризуются огромной протяженностью, высокими скоростями переноса вод, значительной устойчивостью положения их стрежней относительно экватора и большим постоянством, за исключением течения Тареева, которое наиболее развито при северо-восточном муссоне (табл. 1.1). Все они пересекают океан с запада на восток в узкой полосе, симметрично расположенной относительно экватора. Перенос вод на восток происходит в подповерхностном слое пикноклина, максимум скорости смещен в его верхнюю часть и располагается в среднем на глубинах 50—200 м. Ядра противотечения при этом поднимаются к поверхности в восточных частях экваториальной зоны. Вертикальная мощность противотечений в среднем 200—300 м, а ширина их 250 миль в западной и 120 миль в восточной частях экваториальной зоны. Расход вод в экваториальных противотечениях сравним со средним расходом Гольфстрима ($70\cdot10^6$ м^3/с) и Куросио ($50\cdot10^6$ м^3/с).

ТАБЛИЦА 1.1

Характеристики экваториальных подповерхностных противотечений, по Н. К. Ханайченко [17]

Характерные особенности	Течение Кромвелла	Течение Ломоносова	Течение Тареева
Общая протяженность, км	16 400	5100	5300
Положение границ	от 1°40′—2°30′ с. ш. до 2—3° ю. ш.	от 1°—2°30′ с. ш. до 1°30′—2°30′ ю. ш.	от 2°—2°30′ с. ш до 2°—2°30′ ю. ш
Максимальная скорость, см/с	150	120	80
Расход, 10^6 м³/с	от 15 до 40—55, средний 35	от 15 до 39—50, средний 32	от 11 до 37—40, средний 26

Общие черты планетарной системы экваториальной циркуляции свидетельствуют о том, что она во всех океанах возбуждается и поддерживается одними и теми же причинами. Задача теории состоит в выявлении этих причин и основных действующих сил и в выяснении механизма экваториальной циркуляции, включая систему экваториальных противотечений.

Основной особенностью экваториальной зоны всех океанов, имеющей огромное следствие в циркуляции вод, является резкое изменение силы Кориолиса (так называемый *эффект экватора, е-эффект*). На самом экваторе ее горизонтальные составляющие равны нулю, а вблизи экватора они отличны от нуля, хотя и очень малы.

Следовательно, в этой узкой полосе невозможен геострофический баланс, характерный, как было показано в разделе 1.1, для внутренних районов океана, и ускорения, обусловленные градиентами давления, должны уравновешиваться вязкими и инерционными ускорениями.

Оценить ширину экваториальной зоны можно при помощи следующих физических соображений. Инерционные и кориолисово ускорения имеют одинаковый порядок, когда число Кибеля $\mathrm{Ki} = V_x/(f_x L_x)$ равно единице. Отсюда следует, что ускорение Кориолиса успевает существенно повлиять на движущуюся частицу воды после того, как она пройдет расстояние $L_x = V_x/f_x$. С приближением к экватору параметр f_x уменьшается и путь L_x неограниченно растет. На расстоянии от экватора $|y| \ll L_x = V_x/f_x$ ускорение Кориолиса из доминирующего наряду с градиентом давления становится сравнимым или меньше остальных ускорений.

Если принять приближенно вблизи экватора $f_x \approx \beta_x y$, то ширина полосы, в которой не выполняется геострофическое соотношение, должна подчиняться неравенству $y<(V/\beta)^{1/2}$. Зона шириной $2y$, окаймляющая экватор с обеих сторон, называется *экваториальной зоной.* Если принять $V_x=50$ см/с, $\beta_x=$ $=2{,}3\cdot10^{-13}$ см$^{-1}\cdot$с$^{-1}$, то $y=147$ км и $2y=294$ км.

Таким образом, эффект экватора действительно проявляется в очень узкой полосе шириной $1{,}5\div2°$ в каждую сторону от экватора.

Для качественной оценки роли отдельных факторов, формирующих циркуляцию в экваториальной зоне, произведем анализ безразмерных уравнений движения, которые, в отличие от раздела 1.1, получены путем деления на коэффициент V_x^2/L_x при нелинейных слагаемых:

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial u_б}{\partial t_б}+1\cdot\left(u_б\frac{\partial u_б}{\partial x_б}+v_б\frac{\partial u_б}{\partial y_б}+w_б\frac{\partial u_б}{\partial z_б}\right)-$$

$$-\frac{1}{\mathrm{Ki}}f_бV_б+\frac{1}{\mathrm{Ki}^*}mf_бw_б=-\frac{1}{\mathrm{Eu}}\frac{1}{\rho_{0б}}\frac{\partial P_б}{\partial x_б}+$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Ki\,Ek}_V}\frac{\partial}{\partial z_б}K_{Vб}\frac{\partial u_б}{\partial z_б}+\frac{1}{\mathrm{Re}_L}K_{VLб}\nabla^2u_б; \qquad (1.188)$$

$$\mathrm{Sh}\frac{\partial v_б}{\partial t_б}+1\left(u_б\frac{\partial v_б}{\partial x_б}+v_б\frac{\partial v_б}{\partial y_б}+w_б\frac{\partial v_б}{\partial z_б}\right)+\frac{1}{\mathrm{Ki}}f_бu_б=$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{Eu}}\frac{1}{\rho_{0б}}\frac{\partial P_б}{\partial y_б}+\frac{1}{\mathrm{Ki\,Ek}_V}\frac{\partial}{\partial z_б}K_{Vб}\frac{\partial v_б}{\partial z_б}+\frac{1}{\mathrm{Re}_L}K_{VLб}\nabla^2v_б. \qquad (1.189)$$

В этих уравнениях число Кибеля Ki^* связано со вторым параметром Кориолиса $f_{x1}=2\omega\cos\varphi$, а число Рейнольдса $\mathrm{Re}_L=$ $=L_xV_x/K_{VLx}$ относится к горизонтальной турбулентной вязкости и характеризует порядок отношения нелинейных членов к вязким.

В качестве характерных значений основных параметров и величин в пределах поверхностного слоя примем $h_x=50$, $L_{xx}=$ $=10^6$, $L_{yx}=10^5$, $V_{xx}=1$, $V_{yx}=10^{-1}$, $W_x=5\cdot10^{-5}$, $K_{Vx}=10^{-2}$, $K_{VLx}=10^3$, $\delta t=10^5$, $\delta\rho=1$, $\delta P=25$, $m=h/L_x=5\cdot10^{-5}$, $\varphi=$ $=0°15'$ ($y=15$ миль), $f_x=2\omega\sin\varphi=6{,}4\cdot10^{-7}$, $f_{x1}=2\omega\cos\varphi=$ $=1{,}46\cdot10^{-4}$. Соответствующие значения безразмерных комплексов оказываются равными $\mathrm{Sh}=10$, $1/\mathrm{Ki}=0{,}64$, $m/\mathrm{Ki}^*=7{,}3\times$ $\times10^{-3}$, $1/\mathrm{Eu}_x=25$, $1/\mathrm{Eu}_y=250$, $1/\mathrm{Ki}=4$, $1/\mathrm{Re}_{Lx}=10^{-3}$, $1/\mathrm{Re}_{Ly}=10^{-1}$. В обозначениях комплексов индекс «x» относится к уравнению (1.188) для зональной составляющей течения, а индекс «y» — к уравнению (1.189) для меридиональной составляющей течения.

Произведенный анализ уравнений движения показывает преобладающее влияние на формирование течений в экваториальной зоне градиента давления, вертикального турбулентного обмена, нестационарных и инерционных эффектов. В самой непосредственной близости от экватора кориолисовы ускорения малы, но с удалением от него (50—100 км) эти эффекты возрастают и становятся сравнимыми с инерционными. За пределами 100—150 км от экватора геострофический баланс становится доминирующим. Второе слагаемое кориолисова ускорения даже в непосредственной близости к экватору пренебрежимо мало́.

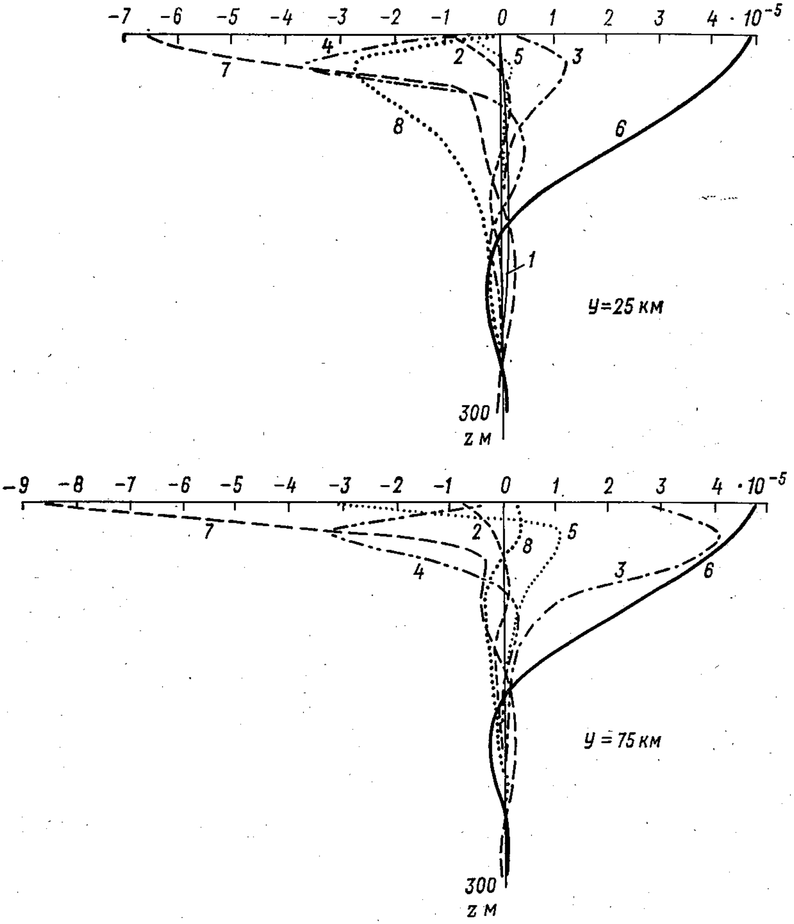


Рис. 1.13. Баланс членов в первом уравнении движения, согласно расчетам Г. К. Коротаева и др. [6], на расстоянии 25 и 75 км от экватора. $K_V = 2 \cdot 10^{-4}$ м²/с. 1 — $\partial u/\partial t$; 2 — $u\,\partial u/\partial x$; 3 — $v\,\partial u/\partial y$; 4 — $w\,\partial u/\partial z$; 5 — $(-fv)$;

$$6 - \left(-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}\right);\quad 7 - K_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2};\quad 8 - K_{LV}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

В качестве иллюстрации роли отмеченных эффектов в формировании течений в экваториальной зоне на рис. 1.13 приведены эпюры вертикального распределения всех слагаемых первого уравнения движения. Эти эпюры получены путем численного интегрирования нелинейной нестационарной экваториальной задачи. Они относятся к середине океана ($x = 2500$ км) и разным расстояниям от экватора ($y=25$ км и $y=75$ км соответственно). Очевидно, что на поверхности океана в непосредственной близости от экватора основной баланс осуществляется между ускорениями зонального градиента давления (кривая *6*), вертикальной турбулентной вязкости (кривая *7*) и зональным инерционным ускорением (кривая *2*). С удалением от экватора (рис. 1.13 *б*) на поверхности океана в балансе, кроме указанных ускорений, начинают играть существенную роль кориолисово (кривая *5*) и инерционное (кривые *2* и *3*) ускорения. С глубиной роль отдельных членов уравнения меняется. В ядре противотечения растет роль ускорения горизонтального турбулентного обмена (кривая *8*), который уравновешивается ускорениями зонального градиента давления (кривая *6*) и инерционными (кривые *3* и *4*). С удалением от экватора роль горизонтальной вязкости резко уменьшается (кривая *8*), а возрастает влияние инерционных ускорений (кривые *3* и *4*). Становится существенным и ускорение Кориолиса (кривая *5*). Ниже противотечения все ускорения малы и определение баланса становится затруднительным.

Таким образом, исходная система уравнений в экваториальной зоне не претерпевает существенных упрощений.

С учетом особенностей экваториальной циркуляции и сделанных оценок экваториальную зону можно рассматривать как зональный прямоугольный канал, ось которого совпадает с экватором, с продольным размером a и поперечным b. Поскольку $a \gg b$, возможно использовать декартову систему координат в приближении бета-плоскости. Так как рассматриваемый канал симметричен относительно экватора, то решение задачи можно искать только для его северной половины, при этом $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant y \leqslant b$.

Исходная система уравнений в размерной форме для определения течений, обусловленных ветровыми и термохалинными факторами, имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-fv= \\ =-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}K_V\frac{\partial u}{\partial z}+K_{VL}\nabla^2 u; \qquad (1.190)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+fu= \\ =-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}K_V\frac{\partial v}{\partial z}+K_{VL}\nabla^2 v; \qquad (1.191)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=\rho g; \qquad (1.192)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0; \qquad (1.193)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}K_\rho\frac{\partial \rho}{\partial z}+K_{\rho L}\nabla^2\rho. \qquad (1.194)$$

Соответствующие граничные условия записываются следующим образом:

на поверхности океана (при $z=0$) принимаются обычные динамические, кинематические и термохалинные условия

$$K_V\rho\frac{\partial u}{\partial z}=-\tau_x,\ K_V\rho\frac{\partial v}{\partial z}=-\tau_y,\ P=P_a, \tag{1.195}$$

$$w=0,\ \rho=\rho(x,\ y,\ 0);$$

на дне океана [при $z=H(x,\ y)$] задаются условия прилипания и непроницаемости

$$u=v=0,\ w=0,\ \frac{\partial\rho}{\partial z}=0; \tag{1.196}$$

на меридиональных твердых границах ($x=0,\ a$) задаются условия прилипания и отсутствия нормального к границам потока масс

$$u=v=0,\ \frac{\partial\rho}{\partial n}=0; \tag{1.197}$$

на жидкой границе (при $y=b$) для исключения влияния внеэкваториальной динамики принимаются

$$u=v=0,\ \frac{\partial\rho}{\partial y}=0. \tag{1.198}$$

Кроме граничных условий, на самом экваторе (при $y=0$) принимаются допущения

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0,\ v=0,\ \frac{\partial\rho}{\partial y}=0. \tag{1.199}$$

Изучение экваториальной циркуляции в неоднородном океане представляет очень сложную задачу, так как в исходных уравнениях необходимо учитывать нелинейные слагаемые. В связи с этим невозможно одновременно учесть все факторы, формирующие экваториальные течения, как при численных решениях, так и тем более при аналитических решениях задачи. Поэтому исследование экваториальной циркуляции целесообразно строить в рамках отдельных конкретных задач, например линейных или нелинейных задач в однородном, двухслойном, бароклинном океанах.

Некоторые особенности экваториальной циркуляции можно получить в рамках задачи о ветровых течениях в однородном океане. Течения возбуждаются восточным ветром (пассатом), постоянно действующим над экваториальной областью. Поскольку влияние вертикальной вязкости оказывается существенным в пределах верхнего перемешанного слоя, решение задачи целесообразно ограничить этим слоем, принимая границу главного термоклина за «условное» дно. Пренебрегая в уравнениях движения на первом этапе нелинейными и диссипативными членами (обусловленными горизонтальной вязкостью), полагая

$f \neq 0$ (исключается сам экватор) и вводя безразмерную комплексную скорость и граничные условия в виде

$$\text{при } z_б=0 \quad \frac{\partial V_б}{\partial z_б}=-T_б; \tag{1.200}$$

$$\text{при } z_б=1 \quad V_б=0, \tag{1.201}$$

получим

$$\frac{\partial^2 V_б}{\partial z_б^2}-\alpha^2 V_б=G_б, \tag{1.202}$$

где

$$\alpha^2=if_б \mathrm{Ek}_V, \quad T_б=\mathrm{Ek}_V(\tau_{xб}+i\tau_{yб}),$$

$$G_б=-\mathrm{Ek}_V\left(\frac{\partial \zeta_б}{\partial x_б}+i\frac{\partial \zeta_б}{\partial y_б}\right).$$

Выражение для $G_б$ получено путем перехода от градиентов давления к наклонам уровенной поверхности на основании интегрального уравнения гидростатики без учета неравномерности поля атмосферного давления.

Решение уравнения (1.202) при условиях (1.200), (1.201) имеет вид

$$V_б=\frac{T_б}{\alpha}\frac{\operatorname{sh}\alpha(1-z_б)}{\operatorname{ch}\alpha}+\frac{G_б}{\alpha^2}\left(\frac{\operatorname{ch}\alpha z_б}{\operatorname{ch}\alpha}-1\right). \tag{1.203}$$

Из (1.203) видно, что, в отличие от внутренних районов океана, чисто дрейфовое течение (первое слагаемое), развивающееся в экваториальной полосе, не имеет спирали Экмана, направлено по ветру и охватывает всю толщу рассматриваемого слоя. Градиентное течение (второе слагаемое) также распространяется в пределах всего этого слоя. Эффект трения о дно проявляется во всей толще этого слоя. Градиентное течение имеет противоположный знак по сравнению с чисто дрейфовым.

Учитывая преобладающий восточный характер ветров над экваториальной зоной океана, здесь следует ожидать западного направления у чисто дрейфового и восточного у градиентного течения. Поскольку с глубиной дрейфовая часть течений уменьшается значительно быстрее градиентной, то создаются предпосылки для возникновения экваториальных противотечений.

Особый интерес представляет вертикальная структура зональной составляющей скорости течения на экваторе в зависимости от ветра, наклонов уровенной поверхности и других факторов.

Для исследования эффектов воздействия неравномерности ветра на структуру течений целесообразно задать распределение зонального напряжения восточного ветра в экваториальной зоне $(y+y_0 \leqslant b)$ по закону, который в размерной форме имеет вид

$$\tau_x=-\tau_0\left[1-\varepsilon \sin\frac{\pi}{2b}(y+y_0)\right]. \tag{1.204}$$

Здесь τ_0 представляет максимальное абсолютное значение зонального напряжения ветра, знак минус перед скобкой означает, что τ_x ориентировано в направлении отрицательной оси (на запад).

В этом случае уравнение (1.203) с учетом (1.204) позволяет определить зональное течение на самом экваторе. В частности, для значения параметра $y_0=0$ (поперечная неравномерность τ_x по обе стороны от экватора одинакова)

$$u=-\frac{\tau_0 H}{4K_V}\left(1-\frac{z}{H}\right)\left(1-\frac{3z}{H}\right). \tag{1.205}$$

Для случая $y_0>0$ (отмеченный выше характер поперечной неравномерности зонального напряжения ветра смещается к югу)

$$u=-\frac{\tau_0 H}{4K_V}\left(1-\frac{z}{H}\right)\left[(1-\gamma)\left(1-\frac{3z}{H}\right)-3\gamma\left(1+\frac{z}{H}\right)\Phi\right], \tag{1.206}$$

где

$$\gamma=\varepsilon\sin\frac{\pi|y_0|}{2b},$$

$$\Phi=1-\frac{e^{k_2L}-1}{e^{k_2L}-e^{k_1L}}e^{k_1x}-\frac{1-e^{k_1L}}{e^{k_2L}-e^{k_1L}}e^{k_2x},$$

$$k_{1,2}=-\frac{\rho\beta H^2}{5K_V}\pm\sqrt{\left(\frac{\rho\beta H^2}{5K_V}\right)^2+\frac{\pi^2}{4b^2}}.$$

Для случая $y_0<0$ (характер поперечной неравномерности зонального напряжения ветра смещается к северу)

$$u=-\frac{\tau_0 H}{4K_V}\left(1-\frac{z}{H}\right)\left[1+\gamma\left(1-\frac{3z}{H}\right)+3\Phi\left(1+\frac{z}{H}\right)\right]. \tag{1.207}$$

Из формулы (1.205) видно, что эпюра зональной составляющей скорости течения представляет собой параболу с вершиной на глубине $z=\frac{2}{3}H$. Таким образом, при $y_0=0$ максимальная скорость противотечения находится на глубине $z=\frac{2}{3}H$ и равна одной трети поверхностной скорости (рис. 1.18, кривая *1*). При $y_0>0$ глубинное экваториальное противотечение становится сильнее (рис. 1.18, кривая *2*). Из (1.206) видно, что отношение максимальной скорости противотечения к скорости поверхностного течения всегда больше $^1/_3$. Так, в срединном сечении океана на экваторе ($x=L/2$, $\Phi=0{,}3$) при $\gamma=0{,}4$ это отношение равно 1,8, а при увеличении γ до 0,45 оно возрастает до 3. При $y_0<0$ экваториальное противотечение по-прежнему существует, поскольку всегда выполняется условие $z^*/H>0$, где $z^*=$

$= \dfrac{1+\gamma+3\gamma\Phi}{3(1+\gamma-\gamma\Phi)}$ — глубина, на которой зональная составляющая скорости обращается в нуль. Однако оно становится значительно слабее. Таким образом, существование экваториального противотечения не зависит от локальной структуры восточного пассата.

Кроме действия этого пассата, на экваториальное противотечение сильное влияние оказывает зональный наклон уровенной поверхности, создаваемый наличием меридиональных границ. Эту зависимость структуры зонального течения от наклона уровня наглядно иллюстрирует рис. 1.15.

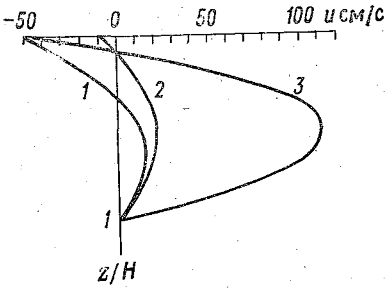


Рис. 1.14. Эпюры зональной составляющей скорости на экваторе, по Н. Б. Шапиро [18].

1 — $y_0=0$, $K_V=50$ см²/с; *2* — $y_0>0$, $K_V=50$ см²/с; *3* — $y_0>0$, $K_V=10$ см²/с.

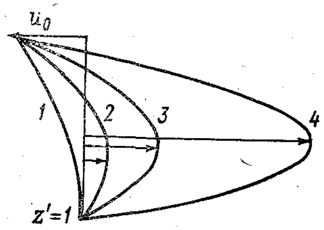


Рис. 1.15. Эпюры зональной составляющей скорости течения на экваторе при различных наклонах уровня, по А. И. Фельзенбауму и Н. Б. Шапиро [13].

1 — $\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}=\dfrac{\tau}{\rho_0 gH}$; *2* — $\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}=\dfrac{3}{2}\dfrac{\tau}{\rho_0 gH}$; *3* — $\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}=1{,}7\dfrac{\tau}{\rho_0 gH}$; *4* — $\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}=1{,}87\dfrac{\tau}{\rho_0 gH}$.

Таким образом, модели однородного океана выявляют основные черты экваториальной циркуляции. Однако скорости противотечения получаются малыми по сравнению с наблюденными. Для приближения результатов расчетов течений к действительным приходится искусственно занижать значения коэффициентов вертикальной турбулентной вязкости (рис. 1.14, кривая *3*).

Для того чтобы результаты теории соответствовали данным наблюдений, необходимо учесть неоднородность морской воды. Это можно сделать введением либо многослойности (в простейшем случае — двухслойности), либо непрерывной стратификации. При этом экваториальные течения в полном объеме могут быть изучены только при учете непрерывной стратификации океана и взаимосвязанности полей течений и плотности путем численных решений задачи (1.190)—(1.199). Формирование полей течений и гидрофизических характеристик в океане, включая и экваториальную зону, будет рассмотрено в главе 7.

1.10. Особенности струйных течений в океане

Характерной особенностью циркуляции в Мировом океане является наличие крупномасштабных макроциркуляционных систем, наиболее важные звенья которых представлены зональными и меридиональными течениями. Последние направлены вдоль берегов материков, носят пограничный характер и подразделяются на западные (Гольфстрим, Куросио, Сомалийское, Бразильское, Агульясское, Восточно-Австралийское) и восточные (Канарское, Калифорнийское, Бенгельское, Перуанское). Западные пограничные течения являются более узкими по сравнению с восточными и характеризуются значительно бо́льшими скоростями и расходами воды. Такие течения называются *струйными*. Ярко выраженными примерами струйных течений являются Гольфстрим и Куросио. Ширина этих течений имеет порядок 80—100 км, скорости на поверхности изменяются от 0,5 до 2 м/с с максимальными значениями 3 м/с. Расходы этих течений очень большие. Среднее значение расхода Гольфстрима $(70 \div 80) \cdot 10^6$ м^3/с, Куросио $(40 \div 50) \cdot 10^6$ м^3/с. Вниз по течению в связи с расширением и заглублением потоков их расходы увеличиваются до $100 \cdot 10^6$ м^3/с и выше (см. кривую *4* рис. 1.16). Наблюдения показывают, что расходы изменяются и во времени. При перемещении вдоль берегов траектории движения в этих течениях значительно повторяют рельеф материкового склона.

Интересными особенностями западных пограничных течений являются их отрыв от берегов и уход в открытый океан и меандрирование. Отрыв Гольфстрима, например, происходит к востоку от м. Хаттерас, Куросио — у восточных берегов о. Хонсю. После выхода в открытый океан западные пограничные течения меандрируют, образуя серии подвижных и изменчивых волновых возмущений. В пределах материкового подножия до выхода в область больших глубин амплитуда изгибов меандров составляет 50—100 км, а длина волн 200—400 км. Меандры перемещаются вдоль струи течения на восток со скоростью порядка 20 см/с. По мере продвижения вниз по течению амплитуды волновых возмущений возрастают в два раза и более. Когда амплитуда волнового возмущения достигает критического значения, меандр отрывается от основного потока, образуя самостоятельно перемещающееся вихревое образование — ринг. Время существования крупномасштабных меандров исчисляется десятками суток, а развившихся из них вихрей — рингов — от полугода до двух лет.

Как было показано в разделе 1.1, в формировании прибрежных пограничных течений важны все факторы, в том числе инерционные и диссипативные. Поэтому эти течения должны описываться полной системой дифференциальных уравнений (1.1)—(1.7) и соответствующих граничных условий (1.8)—(1.19). Как и в случае экваториальной задачи, решение этой системы для пограничных течений чрезвычайно сложное. Однако при тех или иных приближениях (однородный океан постоянной и переменной глубины, бароклинный океан постоянной глубины и др.) основные характеристики пограничных течений могут быть получены (рис. 1.6—1.9, 1.11, 1.13), но их интенсивности и расходы воды оказываются существенно заниженными (рис. 1.20). Кроме того, эти приближения позволяют выявить основные механизмы интенсификации западных струйных течений за счет бета-эффекта, за счет бароклинности, за счет совместного эффекта бароклинности и рельефа дна. Однако такие особенности западных пограничных течений, как отрыв от берегов и меандрирование, в рамках отмеченных приближений не могут быть объяснены, и для их рассмотрения необходимы специальные подходы.

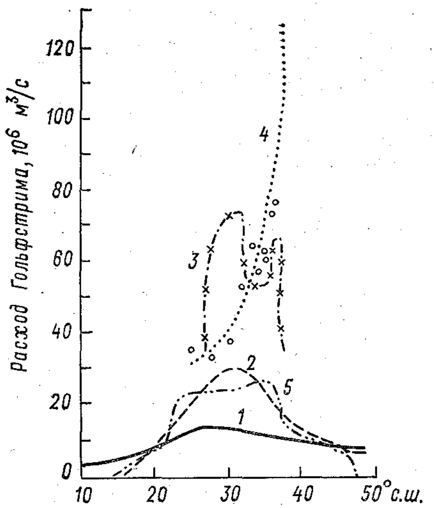


Рис. 1.16. Расход Гольфстрима (в м^3/с) как функция широты по теоретическим и экспериментальным данным, согласно [8].

1 — однородный океан переменной глубины; *2* — бароклинный океан постоянной глубины; *3* — бароклинный океан переменной глубины; *4* — экспериментальные данные; *5* — свердрупов перенос.

Вначале целесообразно более подробно рассмотреть механизм влияния бета-эффекта на усиление западных пограничных течений.

В отличие от теории Стоммела, рассмотренной в разделе 1.5 для интегральной циркуляции океана, это можно сделать для самих течений в пределах западного пограничного слоя. Деление основного уравнения теории полных потоков (1.90) на глубину океана H ($H = \mathrm{const}$) и введение средней по глубине скорости $\bar{u}$, $\bar{v}$ приводит уравнение переноса вихря для двухмерных течений к виду

$$\bar{u}\frac{\partial}{\partial x}(\Omega + f) + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y}(\Omega + f) = K_{VL}\nabla^2\Omega + \frac{1}{H\rho_0}\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}, \qquad (1.208)$$

в котором

$$\Omega = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} = \frac{1}{H}\mathrm{rot}_z\,\mathbf{M}.$$

Левая часть уравнения (1.208) описывает адвекцию абсолютного вихря ($\Omega + f$), правая часть — диффузию относительного вихря Ω и внешний источник завихренности, обусловленный действием касательного напряжения ветра.

Пусть в открытом океане северного полушария $\mathrm{rot}_z\boldsymbol{\tau}<0$. Это характерно, например, для азорского (североатлантического) или гонолульского (северотихоокеанского) антициклонов. Поскольку во внутренней области океана уравнение (1.90) теории полных потоков упрощается до соотношения Свердрупа (1.91), то уравнение переноса вихря (1.208) во внутренней области океана соответственно принимает вид

$$\beta\bar{v}=\frac{1}{H\rho_0}\,\mathrm{rot}_z\,\boldsymbol{\tau}. \qquad (1.209)$$

Это означает, что в открытом океане адвекция и диффузия относительного вихря незначительны, и адвекция планетарного вихря f уравновешивается лишь внешним источником завихренности.

Из соотношения (1.209) следует, что при $\mathrm{rot}_z\boldsymbol{\tau}<0$ все частицы воды во внутренней области океана должны перемещаться на юг к меньшим значениям планетарного вихря f, и для соблюдения закона сохранения массы, поскольку вода несжимаема, должны возникать прибрежные течения, направленные вдоль берегов к северу. В пределах этого течения адвекция и диффузия относительно вихря существенны (если бы это было не так, то частицы воды двигались бы к югу), и прибрежное течение оказывается узким по сравнению с характерным размером океана. А в таком течении $\Omega\simeq\frac{\partial\bar{v}_y}{\partial n}$, где $\bar{v}_y$ — скорость среднего течения вдоль берега, а $\mathbf{n}$ — вектор, направленный по нормали к берегу.

Если точка A находится на берегу, а точка B — на внешней границе прибрежного пограничного слоя (рис. 1.21), то адвективный перенос вихря Ω прибрежным течением равен

$$\int\limits_A^B \bar{v}_y\Omega\,dn=\frac{1}{2}\bar{v}^2_y(B)-\frac{1}{2}\bar{v}^2_y(A).$$

В точке A по условию прилипания $\bar{v}_y(A)=0$. Так как полный расход узкого прибрежного течения должен быть равен полному расходу воды в открытом океане, то скорость $\bar{v}_y$ в пограничном слое значительно больше скорости $\bar{v}_y$ в открытом океане. Поэтому можно принять, что на внешней границе пограничного слоя скорость $\bar{v}_y(B)\simeq 0$. Отсюда следует, что суммарная адвекция относительного вихря в пределах пограничного слоя равна нулю. Что касается внешнего источника завихренности $\frac{1}{H\rho_0}\mathrm{rot}_z\boldsymbol{\tau}$, то его вклад в баланс вихря в узком пограничном слое ничтожен. Поэтому в пределах сильного пограничного течения адвекция планетарного вихря может уравновешиваться только диффузионным притоком вихря от стенки.

На рис. 1.21 *а* показано западное пограничное течение, направленное к северу. Неподвижная стенка действует на прибрежные течения с силой, направленной против движения. Абсолютное значение вихря, создаваемого стенкой, уменьшается с удалением от стенки. Следовательно, диффузия от стенки добавляет прибрежному течению положительный вихрь, баланс вихря становится возможным, избыток положительного вихря переносится на север пограничным течением благодаря адвекции планетарного вихря. Таким образом, действительно в запад-

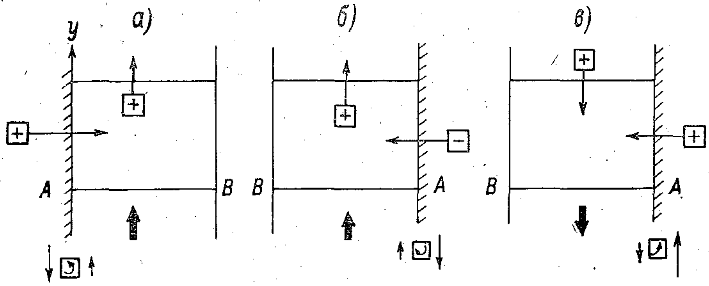


Рис. 1.17. Схема переноса вихря в прибрежных пограничных течениях, по [4.15].

Указаны адвективный перенос планетарного вихря и диффузионный перенос относительно вихря, а также пара сил, закручивающих частицу воды у берега (вид сверху).

а — западный пограничный слой, течение к северу; *б* — восточный пограничный слой, течение к северу; *в* — восточный пограничный слой, течение к югу.

ном пограничном слое океана возможно сильное течение, направленное на север.

Рисунок 1.17 *б* изображает течение, направленное к северу в пределах восточного пограничного слоя океана. Диффузия от стенки передает течению отрицательный вихрь. Уравнение переноса вихря в данном случае не выражает баланса составляющих. Следовательно, течение на север в пределах восточного пограничного слоя невозможно, даже если учесть действие внешнего источника.

На рис. 1.17 *в* течение в восточном пограничном слое направлено на юг. Диффузия вихря от стенки передает течению положительный вихрь, уравнение баланса вихря не нарушается, но только при учете внешнего источника завихренности (поскольку течение направлено на юг к меньшим значениям планетарного вихря f, выражение $\beta\overline{v}$ для адвекции планетарного вихря становится соизмеримым с $\frac{1}{H\rho_0}\,\mathrm{rot}_z\boldsymbol{\tau}$). Развивающееся в этом случае течение не может быть сильным и узким. Таким образом, сильное и узкое пограничное течение может формироваться лишь в западном пограничном слое океана.

Аналогичные результаты получаются и при $\mathrm{rot}_z\, \tau > 0$, что характерно, например, для южноатлантического или южнотихоокеанского антициклонов, расположенных в южном полушарии.

Определяющая роль эффекта широтного изменения параметра Кориолиса в усилении западных пограничных течений объясняет наблюдаемую в умеренных широтах северных частей Атлантического и Тихого океанов асимметрию в распределении полных потоков (рис. 1.7). Хотя поля касательного напряжения ветра в этих районах асимметрией не обладают, сильные прибрежные течения имеют место лишь в западных пограничных слоях (Гольфстрим, Куросио). Локальные касательные напряжения ветра в пределах пограничного течения непосредственно не влияют на него, пограничное течение обусловливается суммарным действием ветра над всем океаном.

Проблема отрыва струйных течений от берегов и ухода их в открытый океан в настоящее время окончательно еще не разрешена. Если эти течения рассматривать как инерционные струи (свободные или вязкие), то причины отрыва могут быть связаны с влиянием топографических и бароклинных эффектов.

Топографический эффект обусловлен переменностью рельефа дна и в наиболее «чистом» виде проявляется в приближении однородного океана. Так, инерционное пограничное течение существует лишь вдоль тех отрезков береговой черты, где $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{H}\right) < 0$. Если $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{H}\right)$ меняет знак при движении вдоль береговой черты, например происходит резкое возрастание глубины на некоторой широте $y = y_0$, то при $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{H}\right) > 0$ происходит отрыв струи и поворот ее в открытый океан, где она движется вдоль «критического контура», на котором $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{H}\right) = 0$. Реальность подобной ситуации в районе отрыва Гольфстрима от западного берега наглядно иллюстрирует рис. 1.18.

Бароклинный эффект отрыва струйных течений связан с особенностями термохалинной структуры этих течений, а именно с монотонным уменьшением к северу глубины главного термоклина и выходом его на поверхность при $y = y_0$. В приближении двухслойного океана инерционное пограничное течение может существовать только южнее места отрыва (т. е. $y = y_0$). Это связано с тем, что в океане вдоль линий тока должны сохраняться потенциальный вихрь и полная энергия столба жидкости.

В самом деле, известные из гидромеханики уравнения потенциального вихря и Бернулли применительно к двухслойному океану, в котором нижний слой считается неподвижным, имеют вид

$$\frac{1}{D}\left(\frac{\partial M_y}{\partial x}-\frac{\partial M_x}{\partial y}\right)+f=F(\psi), \tag{1.210}$$

$$\frac{1}{2}(M_x^2+M_y^2)+g\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho}D=G(\psi). \tag{1.211}$$

Здесь D — толщина верхнего слоя; M_x и M_y — составляющие полного потока верхнего слоя; ρ_1, ρ_2 — потенциальные плотности верхнего и нижнего слоев; ρ — ее среднее значение; F и G — некоторые функции интегральной циркуляции.

Глубина верхнего слоя на западном берегу $D(0, y)$, оказывается, зависит только от условий в открытой части океана:

$$D(0, y)=D(0, 0)-\frac{2\rho\beta\psi_{\text{ок}}}{g(\rho_2-\rho_1)}, \tag{1.212}$$

где $D(0, 0)$ — глубина верхнего слоя на южной границе инерционного течения; $\psi_{\text{ок}}$ — функция полных потоков в открытом океане.

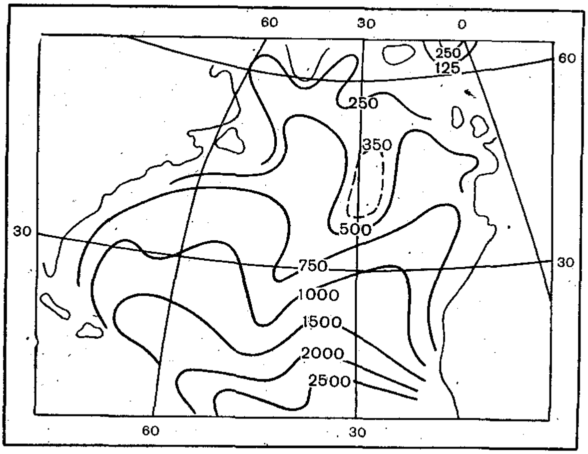


Рис. 1.18. Карта изолиний f/H для Северной Атлантики, согласно Веландеру [21].

Согласно (1.210) и (1.211), кинетическая энергия единичной массы воды, перемещающейся вдоль западного берега, должна увеличиваться с продвижением на север. Но это будет иметь место только там, где расход течения увеличивается вниз по потоку. Если же расход течения уменьшается, то кинетическая энергия с продвижением на север будет также уменьшаться, что влечет невыполнение условия (1.211). Отсюда следует, что решение задачи (1.210) и (1.211) севернее широты $y=y_0$ не существует. Таким образом, как и в однородном океане, инерционная струя существует у западного берега только при увеличении расхода вдоль по течению. Отрыв струи происходит при достижении некоторого критического значения расхода, определяемого соотношением [полученным из (1.212)]

$$\psi_{кр}(0,\ y_0) = \frac{g(\rho_2 - \rho_1) D(0,\ 0)}{2\rho\beta y_0}. \qquad (1.213)$$

Кроме того, отрыв струи от берега обусловлен также и термохалинными свойствами струи. Из соотношения (1.212) видно, что глубина термоклина $D(0,\ y)$ при продвижении к северу убывает, так как в антициклонических круговоротах $\psi_{ок} > 0$. На какой-то широте $y = y_0$ $D(0,\ y)$ может обратиться в нуль, т. е. термоклин «выходит» на поверхность и севернее этой широты западное пограничное течение существовать не может.

Как было отмечено выше, после отрыва западные струйные течения становятся неустойчивыми с ярко выраженным меандрирующим характером. Природу крупномасштабных меандр часто связывают с бароклинной неустойчивостью основной струи, приводящей к появлению особого вида движений — *градиентно-вихревых волн* (возмущений). Возникновение таких возмущений возможно на границе раздела между двумя разнородными (по термохалинным и кинематическим свойствам) слоями, перемещающимися в поле силы Кориолиса. При определенных значениях вертикального сдвига скоростей и вертикального градиента плотности амплитуда волновых возмущений может расти, а сами возмущения становятся неустойчивыми.

1.11. Мезомасштабные вихри в океане

На основе длительных инструментальных измерений в последние годы был открыт важный класс движений в океане, характеризующийся формированием крупных вихревых возмущений в поле течений. Эти вихревые образования имеют горизонтальные масштабы L_x порядка 100 км, вертикальные масштабы H_x порядка средней глубины океана, временные масштабы от нескольких недель до нескольких месяцев. Скорость течения в поле этих вихрей на поверхности океана может достигать 100—150 см/с, а на глубинах 200—1000 м в среднем составляет 20—25 см/с при средней скорости их перемещения 5—6 см/с. Орбитальные перемещения частиц воды в вихрях сопровождаются интенсивными вертикальными движениями со скоростями до 0,1—1,0 см/с, что при длительном существовании вихрей может приводить к развитию или затуханию биологических процессов в зоне вихрей. Вихри были обнаружены не только в области сильных струйных течений (что было известно и раньше), но и в открытой части океана. Эти вихри во многом аналогичны перемещающимся в атмосфере циклонам и антициклонам и по своим свойствам соответствуют синоптической изменчивости океана. Поэтому их называют *океанскими синоптическими*, или *мезомасштабными вихрями*. Открытие этих вихрей было одним из наиболее значительных событий в науке об океане за последние два десятилетия.

Наблюдения показывают, что энергия мезомасштабных океанских вихрей соизмерима с энергией крупномасштабных течений в океане, а часто на 1—2 порядка больше энергии средних течений. На рис. 1.19 показана спектральная функция горизонтальных компонентов скорости течения, полученная по американским измерениям на судне погоды «D», расположенном между Гольфстримом и материковым склоном Северной Америки. Из рис. 1.19 видно, что энергия мезомасштабных вихревых возмущений сравнима с энергией инерционных и приливных колебаний скорости и превосходит энергию осредненного климатического течения. Мезомасштабные вихри в океане могут вносить существенный вклад в баланс энергии и завихренности крупномасштабной циркуляции. Отсюда вытекает важность экспериментального и теоретического изучения структуры

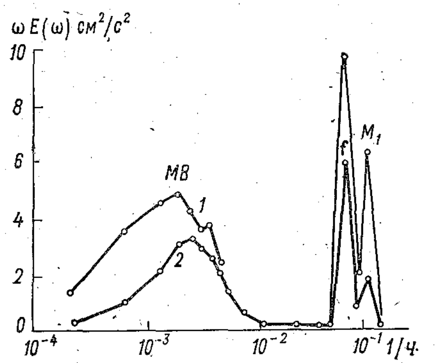


Рис. 1.19. Энергия спектральных компонентов скорости течения в океане для судна погоды «D» в Западной Атлантике, по П. Райнсу [19].

МВ — мезомасштабные возмущения; f — инерционные колебания; M_1 — приливные колебания; 1 — на глубине 1000 м; 2 — на глубине 2000 м.

океанских вихрей и процессов вихреобразования синоптического масштаба с целью создания теории океанских вихрей и разработки методов прогнозирования возникновения, эволюции и перемещения вихрей.

Впервые мезомасштабные вихри были обнаружены прямыми инструментальными измерениями в феврале—сентябре 1970 г. на советском гидрофизическом полигоне в тропической части Атлантического океана. Измерения показали очень сложный характер изменений течений во времени и с глубиной. На рис. 1.20 приведен типичный годограф скорости течений на «Полигоне-70» за промежуток 20 дней, характеризующийся многочисленными петлями и сменой знака течений. Сложный характер поля течений с возмущениями синоптического масштаба был обусловлен прохождением через площадь полигона с востока на запад нескольких мезомасштабных вихрей (циклонических и антициклонических). Аналогичные вихревые возмущения в поле течений были также обнаружены в 1973 г. экспедицией США МОДЕ-1 (Эксперимент по динамике открытого океана). В 1977—1978 гг. состоялся совместный советско-американский эксперимент ПОЛИМОДЕ (рис. 1.21).

В результате проведенных экспериментов обнаружено, что характеристики вихревых возмущений (их энергия, масштабы, плотность «упаковки», вертикальная структура, фазовые соотношения в их поле) отличаются большим разнообразием и большой неравномерностью распределения их в океане. В настоящее время мезомасштабные океанские вихри разделяют на два вида: 1) вихри открытого океана, возникающие, по-видимому, за счет неустойчивости крупномасштабных течений, и 2) фронтальные вихри, образующиеся в системах струйных (фронтальных) течений типа Гольфстрим или Куросио из меандр течений в виде периодически отрывающихся от них «колец» («рингов»).

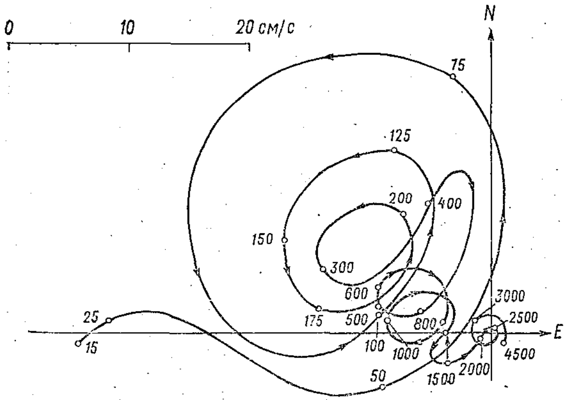


Рис. 1.20. Годограф средней за 20 дней (с 1 по 20 мая 1970 г.) скорости течения по данным измерений на «Полигоне-70», по [1].

Мезомасштабные вихри открытого океана. Типичными вихрями такого вида являются вихри, обнаруженные экспедицией «Полигон-70». Рисунок 1.22 дает последовательную во времени картину вихревого поля скорости синоптического масштаба с 13 марта по 28 августа 1970 г. Анализ аналогичных карт, построенных для различных горизонтов для всего полугодового периода измерений течений, позволил сделать следующие выводы:

1) в течение полугода через полигон прошли пять мезомасштабных вихрей — три антициклонических и два циклонических;

2) расположение вихрей характеризовалось «плотной упаковкой», когда соседние циклонический и антициклонический вихри имели общую зону максимума скорости. Слабые течения наблюдались в центре полигона при прохождении через него седлообразных областей между четырьмя вихрями;

3) горизонтальный масштаб вихрей, определяемый расстоянием от центра вихря до точки с максимальной скоростью,

составлял примерно 100 км. Для вихрей была характерна вытянутость; отношение большой и малой осей вихрей изменялось от 1,5 до 3,0;

4) все вихри, кроме последнего циклонического, передвигались на запад со средней скоростью 5—6 см/с;

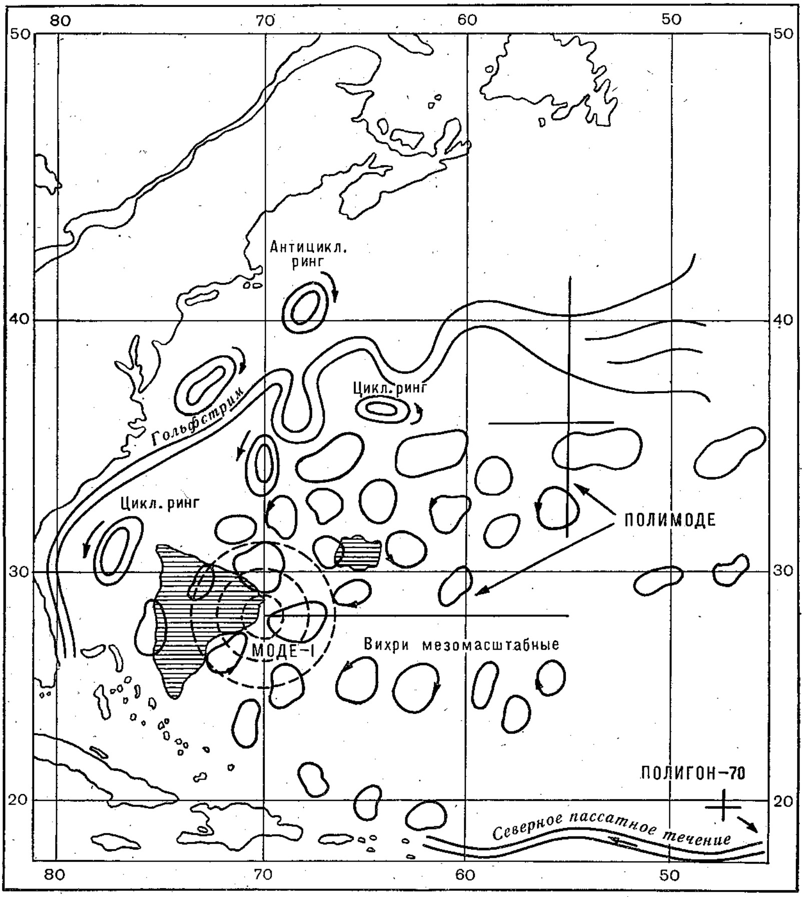


Рис. 1.21. Схема исследований мезомасштабных вихрей в Северной Атлантике.

5) был обнаружен наклон «вертикальной» оси вихрей. Так, у главного антициклонического вихря, прошедшего через полигон, эта ось была наклонена в сторону, обратную направлению его движения, и расстояние между центрами этого вихря на глубинах 300 и 1000 м в середине мая было равно 80 км;

6) скорость течения в поле этих вихрей достигала 25 см/с на глубинах 200—300 м, 35 см/с на 400—600 м, 20 см/с на 1000 м

и 10 см/с на 1500 м. Наблюдения показали резкое усиление скорости течения в тыловой части главного антициклонического вихря в течение мая с 10 до 25 см/с на 300 м, с 15 до 35 см/с на 600 м и с 10 до 20 см/с на 1000 м. Это увеличение скорости те-

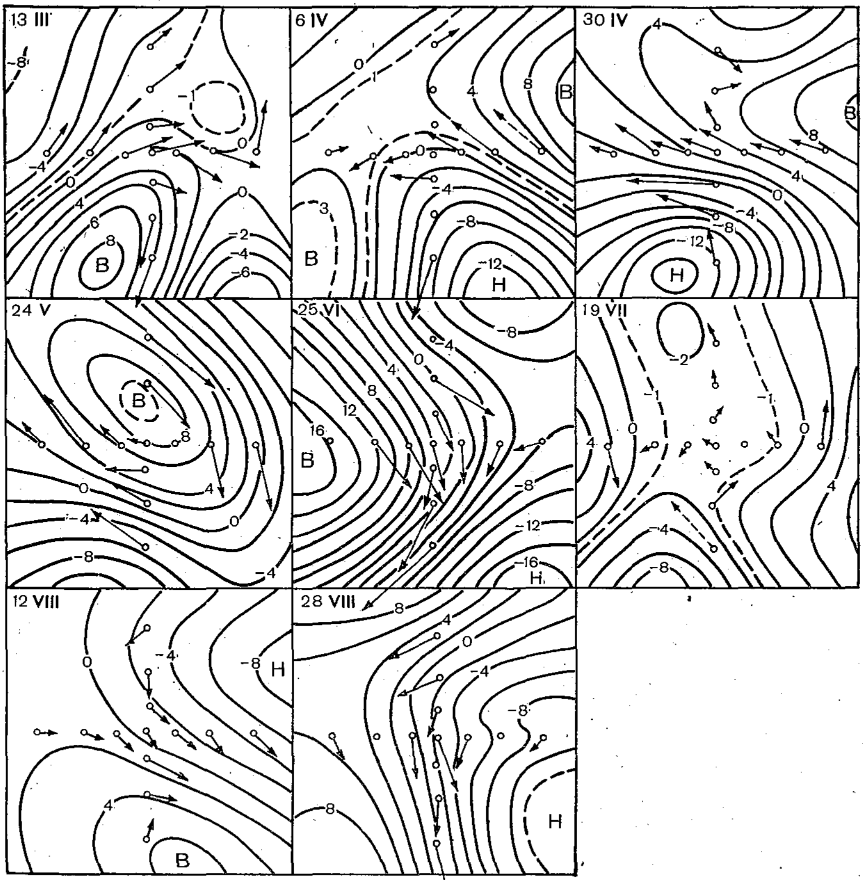


Рис. 1.22. Изолинии функции тока мезомасштабных течений ($\psi \cdot 10^7$ см^2/с) на глубине 300 м по данным «Полигона-70» [1].

Стороны квадрата 150 миль. Кружками обозначено положение буйковых станций, стрелками — векторы скорости течения.

чений и наклон оси главного антициклонического вихря (знак наклона оси вихря соответствовал стадии усиления мезомасштабного возмущения) могут, по-видимому, рассматриваться как возможные признаки интенсификации вихря вследствие бароклинной неустойчивости крупномасштабного течения.

Фронтальные вихри (ринги) наиболее изучены в Гольфстриме. Их изучение началось в 30-х годах XX в. Ринги образуются в северной части Гольфстрима к востоку от м. Хаттерас между 60 и 70° з. д., где Гольфстрим отходит от прибрежной зоны и выходит в открытый океан. Именно здесь образуются меандры, которые имеют вид волновых возмущений, возрастающих вниз по течению. В тех случаях, когда амплитуды этих меандров становятся достаточно большими, они отделяются от течения, порождая вихри—ринги. Образование этих вихрей — несимметричный процесс, по одну сторону струйного течения возникают только антициклонические, по другую — только циклонические вихри.

В отличие от вихрей открытого океана, фронтальные вихри — одиночные образования; средние расстояния между рингами за пределами фронтальной зоны заметно больше их характерных размеров. Обнаружено, что в Гольфстриме могут существовать до десяти рингов. Диаметр их 100—200 км. Время существования рингов значительно — от полугода до двух лет. Вихревая форма движения играет большую роль в поступательном перемещении фронтальных вихрей. Ринги в своем движении увлекают, по крайней мере частично, формирующие их водные массы. Скорость вращения воды в рингах очень высока. В верхнем слое океана она достигает нескольких метров в секунду, в среднем же 20—25 см/с. В отличие от вихрей открытого океана, знак вращения воды в поле фронтальных вихрей не меняется с глубиной. Скорость перемещения самих рингов 1—6 см/с (или несколько километров в сутки). В основном эти вихри перемещаются на запад и юго-запад. Однако известны случаи, когда ринги по сложной петлеобразной траектории двигались на восток и север.

Для фронтальных вихрей характерен температурный (и соленостный) контраст между их внутренними частями и окружающей водой. Горизонтальные перепады температуры воды могут превышать 10 °С. Циклонические ринги состоят из холодного центра, окруженного теплой водой Гольфстрима. Поэтому их часто называют холодными рингами.

В последнее время мезомасштабные вихри были обнаружены во многих районах Мирового океана. Это свидетельствует о том, что мезомасштабные вихревые возмущения в поле течений — довольно распространенный и универсальный компонент спектра всех движений вод в океане. Мезомасштабные вихри — и «вихри—ринги» и «вихри открытого океана» — составляют, по-видимому, единую гигантскую динамическую систему океана. Однако механизмы формирования этих вихрей изучены недостаточно.

Одним из возможных механизмов мезомасштабных вихревых движений типа меандр и рингов считают бароклинную неустойчивость крупномасштабных течений. Она является следствием перехода суммарной потенциальной энергии крупномасштабных течений, обусловленной горизонтальными наклонами изопикнических поверхностей в поле силы Кориолиса, в кинетическую энергию мезомасштабных возмущений. Этот переход осуществляется посредством планетарных волн, или волн Россби. Планетарными волнами называют сравнительно медленные волновые движения с периодом несколько недель — месяцев, развивающиеся на фоне средней океанической циркуляции и обусловленные изменением параметра Кориолиса с широтой.

Как было показано в разделе 1.1, для мезомасштабных движений числа Кибеля и Струхаля малы, а отношение $L_x/R \ll 1$. Вследствие этого рассматриваемые вихревые движения принадлежат к геострофическим первого рода. Поэтому исходная система уравнений в декартовых координатах (ось z направлена вверх) для возмущений в полях давления P' и плотности ρ' с учетом адиабатичности движений в приближении бета-плоскости при $f = f_0 + \beta y$ имеет вид

$$u = -\frac{1}{f_0 \rho_*} \frac{\partial P'}{\partial y}, \quad v = \frac{1}{f_0 \rho_*} \frac{\partial P'}{\partial x}; \tag{1.214}$$

$$\rho' = -\frac{1}{g} \frac{\partial P'}{\partial z}. \tag{1.215}$$

Здесь $\rho = \rho_*(z) + \rho'$, $P = P_a + \int\limits_z^0 g\rho_*(z)\, dz + P'$, $\rho'/\rho_* \ll 1$.

Поскольку волновые возмущения являются следствием сохранения потенциального вихря в бароклинном океане, к приведенным уравнениям необходимо присоединить уравнения вихря и эволюции энтропии.

Уравнение вихря может быть получено из известного в гидромеханике уравнения Фридмана

$$\frac{d(\mathbf{\Omega} + \mathbf{f})}{dt} - (\mathbf{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{V} + \mathbf{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{1}{\rho^2} (\nabla \rho \times \nabla P) + \operatorname{rot}_z \mathbf{F}, \tag{1.216}$$

показывающего, что изменение абсолютного вихря $(\mathbf{\Omega} + \mathbf{f})$ обусловлено эффектами растяжения абсолютных вихревых линий, бароклинностью морской воды и силами трения. Если в уравнении (1.216) для мезомасштабных вихревых движений пренебречь эффектами трения, горизонтальными производными от вертикальной скорости (в силу их малости) и некоторыми слагаемыми, имеющими порядок числа Кибеля, а составляющие горизонтальной скорости заменить градиентами давления в соответствии с (1.214), то уравнение вихря примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{1}{f_0 \rho_*} \nabla^2 P' + \beta y\right) - f_0 \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{\rho_*^2} J(\rho', P'). \tag{1.217}$$

Уравнение эволюции энтропии в общей форме имеет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\rho=$$
$$=\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)P. \qquad (1.218)$$

Применительно к мезомасштабным вихревым возмущениям в уравнении эволюции энтропии можно пренебречь временными и горизонтальными изменениями возмущений в поле давления и горизонтальной изменчивостью скорости звука c. Если при этом учесть также соотношение гидростатики (1.215), то уравнение (1.218) примет вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}\right)\rho'-\frac{\rho_*(z)}{g}N^2(z)\,w=0. \qquad (1.219)$$

В этом уравнении величина $N^2=-\frac{g}{\rho}\frac{d\rho_*}{dz}-\frac{g^2}{c^2}$ есть квадрат частоты Вяйсяля.

Уравнения (1.214), (1.215), (1.217) и (1.219) образуют замкнутую систему для определения мезомасштабных возмущений в полях плотности, давления и скорости течений. Соответствующие граничные условия имеют вид:

$$\text{при } z=0 \quad w=\frac{\partial\zeta}{\partial t}, \quad P'=g\rho_*\zeta; \qquad (1.220)$$

$$\text{при } z=-H \quad w=u\frac{\partial h}{\partial x}+v\frac{\partial h}{\partial y}. \qquad (1.221)$$

Здесь H — средняя глубина океана (невозмущенная глубина), h — отклонение от средней глубины.

Исключение w из уравнений (1.217) и (1.219) с помощью (1.214) сводит исходную систему к одному уравнению для возмущения давления P':

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{1}{f_0\rho_*}\frac{\partial P'}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{1}{f_0\rho_*}\frac{\partial P'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{f_0\rho_*}\nabla^2P'+\beta y+f_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_*N^2}\frac{\partial P'}{\partial z}\right)\right]=-\frac{1}{g\rho_*^2}J\left(\frac{\partial P'}{\partial z},\ P'\right).$$
$$(1.222)$$

Уравнение (1.222) обычно называют уравнением вихря в *квазигеострофическом приближении*, а выражение в квадратных скобках его левой части — *квазигеострофическим потенциальным вихрем*.

Это уравнение очень сложно для анализа. Оно и соответствующие граничные условия (1.220), (1.221) значительно упростятся, если пренебречь на первом этапе нелинейными слагаемыми и принять среднюю глубину океана постоянной:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\nabla^2 P' + f_0^2 \rho_* \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho_* N^2}\frac{\partial P'}{\partial z}\right)\right] + \beta \frac{\partial P'}{\partial x} = 0. \quad (1.223)$$

Граничные условия для (1.223), преобразованные из условий (1.220) и (1.221), принимаются в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g}{N^2}\frac{\partial P'}{\partial z} + P'\right) = 0 \text{ при } z = 0; \quad (1.224)$$

$$\frac{\partial^2 P'}{\partial z\, \partial t} = 0 \text{ при } z = -H. \quad (1.225)$$

Используя метод разделения переменных, решение задачи (1.223)—(1.225) целесообразно искать в виде

$$P' = \sum_{0}^{\infty} p'_m (x,\ y,\ t)\, P'_m (z), \quad (1.226)$$

в котором функции $p'_m(x, y, t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla^2 p'_m - \frac{f_0^2}{g h_m} p'_m\right) + \beta \frac{\partial p'_m}{\partial x} = 0 \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad (1.227)$$

а h_m и P'_m — собственные значения и соответствующие им собственные функции следующей задачи:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{\rho_* N^2}\frac{dP'}{dz}\right) + \frac{1}{g h \rho_*} P' = 0; \quad (1.228)$$

$$\frac{g}{N^2}\frac{dP'}{dz} + P' = 0 \text{ при } z = 0, \quad \frac{dP'}{dz} = 0 \text{ при } z = -H. \quad (1.229)$$

Здесь $h_m = (1/g)(NH/m\pi)^2$, $m = 1, 2, \ldots$ обычно называют *эквивалентной* глубиной.

Если ограничиться анализом возмущений в поле давления P' в горизонтально-временных координатах, то, как видно из уравнения (1.227), оно описывает распространение волновых возмущений, связанных с бета-эффектом. Для простейшего случая плоских волн, в которых

$$P'_m \sim \exp\left[i\left(k_x x + k_y y - \sigma t\right)\right],$$

оно приводит к следующему дисперсионному соотношению:

$$\sigma_m = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2 + f_0^2/g h_m}, \quad m = 0,\ 1,\ 2\ \ldots \quad (1.230)$$

В (1.230) σ_m означает угловую частоту собственных колебаний, а k_x и k_y — проекции волнового вектора $\mathbf{k}$ на координатные оси. При этом при $m=0$ в знаменателе исчезает третий член, связанный с бароклинностью, и дисперсионное соотношение относится к *баротропной* волне, а при $m=1, 2, \ldots$ — к *бароклинным волнам Россби*. Таким образом, в рассматриваемом *линейном* случае произвольное начальное возмущение распадается на *не взаимодействующие* между собой баротропную и бароклинные планетарные волны. При этом баротропная волна является более быстрой, чем бароклинные ($\tau_{\text{барот}} < \tau_{\text{барок}}$, $\tau = 2\pi/\sigma$).

Из (1.230) видно, что рассматриваемые планетарные волны Россби являются *поперечными*, для которых скорость распространения возмущений всюду параллельна гребням волны, т. е. составляет прямой угол с волновым вектором $\mathbf{k}(k_x, k_y)$. Фазовая скорость вдоль оси x не зависит от перемещения гребня волны. В самом деле, из выражения

$$c_x = \frac{\sigma}{k_x} = -\frac{\beta}{k_x^2 + k_y^2 + f_0^2/gh_m} \tag{1.231}$$

видно, что при любых k_x и k_y зональная составляющая фазовой скорости всегда направлена с востока на *запад*. В этом заключается наиболее замечательное свойство волн Россби. Меридиональная составляющая фазовой скорости может быть и положительной, и отрицательной. Поэтому в общем случае волны Россби перемещаются под некоторым углом к широте, отклоняясь либо к северу, либо к югу, но никогда не имеют восточной составляющей.

Гармонический анализ экспериментальных данных «Полигона-70» обнаружил, что действительно поля мезомасштабных течений обладают волновыми свойствами, в которых ярко выражены быстрый (с периодом 75—80 суток) и медленный (с периодом 300—700 суток) типы волн (табл. 1.2).

ТАБЛИЦА 1.2

Параметры волн, вычисленные по данным «Полигона-70» Л. М. Фоминым и А. Д. Ямпольским [16]

Тип волны	Амплитуда волны, см/с	Длина волны, км	Период волны, сут.	Начальная фаза, рад.	Фазовая скорость, км/сут	Направление, °
Быстрые волны	10	440	80	—2,75	5,0	225
	5	550	75	0,73	7,3	315
Медленные волны	7	750	400	—2,19	1,9	225
	5	450	300	0,00	1,9	315

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 1

1. Бреховских Л. М. и др. Некоторые результаты исследования синоптических вихрей в океане/Л. М. Бреховских, Ю. М. Грачев, М. Н. Кошляков, Л. М. Фомин.— Метеорология и гидрология, 1978, № 2, с. 5—14.

2. Доброклонский С. В. Дрейфовые течения в море при экспоненциальном убывании коэффициента вязкости с глубиной.— Океанология, 1969, т. 9, вып. 1, с. 26—33.

3. Егоров К. Л., Лайхтман Д. Л., Радикевич В. М. Модель баротропного океана.— Океанология, 1970, т. 10, вып. 2, с. 249—255.

4. Каменкович В. М. Основы динамики океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1973.— 240 с.

5. Козлов В. Ф. Лекции по теории стационарных океанических течений.— Владивосток, ДВГУ, 1969.— 383 с.

6. Коротаев Г. К., Михайлова Э. Н., Шапиро Н. Б. О формировании экваториального противотечения.— Морские гидрофизические исследования, 1977, № 1 (76), Севастополь, с. 47—58.

7. Монин А. С., Каменкович В. М., Корт В. Г. Изменчивость Мирового океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1974.— 262 с.

8. Саркисян А. С. Численный анализ и прогноз морских течений.— Л.: Гидрометеоиздат, 1977.— 182 с.

9. Степанов В. Н. и др. Вертикальная составляющая циркуляции вод Мирового океана/В. Н. Степанов, А. С. Саркисян, Ю. Л. Демин и др.— Морские гидрофизические исследования, 1976, № 4 (75), Севастополь, с. 28—35.

10. Степанов В. Н. и др. Диагностические расчеты горизонтальной циркуляции вод Мирового океана/В. Н. Степанов, А. С. Саркисян, Ю. Л. Демин и др.— Морские гидрофизические исследования, 1977, № 1 (76), Севастополь, с. 34—46.

11. Тюряков Б. И., Кузнецова Л. Н. Об изменчивости ветровых и термохалинных течений в Северной Атлантике в связи с изменениями макросиноптических процессов.— Океанология, 1970, т. 10, вып. 5, с. 757—769.

12. Фельзенбаум А. И. Динамика морских течений (обзор).— В кн.: Итоги науки. Гидромеханика. 1968. М., Изд-во ВИНИТИ АН СССР, 1970, с. 97—338.

13. Фельзенбаум А. И., Шапиро Н. Б. Некоторые вопросы теории течений на экваторе.— Труды Морского гидрофизического ин-та АН УССР, 1966, т. 34, с. 81—91.

14. Физика океана. Том 1. Гидрофизика океана.— М.: Наука, 1978.— 455 с.

15. Физика океана. Том 2. Гидродинамика океана.— М.: Наука, 1978.— 455 с.

16. Фомин Л. М., Ямпольский А. Д. Строение и кинематика поля синоптических вихрей в открытом океане по данным эксперимента Полигон-70.— Океанология, 1978, т. 18, вып. 4, с. 593—601.

17. Ханайченко Н. К. Система экваториальных противотечений в океане.— Л.: Гидрометеоиздат, 1974.— 158 с.

18. Шапиро Н. Б. Влияние ветра на течение в экваториальной зоне океана.— Труды Морского гидрофизического ин-та АН УССР, 1966, т. 34, с. 49—80.

19. Rhines P. Observations of the energy containing ocean eddies and theoretical models of waves and turbulence.— YUCRM Conference on Atmosphere Waves, 1972, La Jolla, Calif.

20. Tjuriakov B. I., Kuznetsova L. N. Influence of thermohaline processes on the circulation in the ocean.— XVI General Assembly IAPSO, 25 Aug.— 5 Sept., Abstracts, 1975, p. 118.

21. Welander P. Wind-driven circulation in one- and two-layer oceans of variable depth.— Tellus, 1968, vol. 20, N 1, p. 1—16.

Глава 2. ДРЕЙФ ЛЬДА

2.1. Силы, влияющие на дрейф льдины

Движение льдины, как любого твердого тела, может быть описано вторым законом механики Ньютона, в соответствии с которым произведение массы льдины M на ее ускорение $d\mathbf{V}/dt$ равно равнодействующей всех приложенных на нее сил $\mathbf{F}_j$

$$M\frac{d\mathbf{V}}{dt}=\sum_j \mathbf{F}_j. \qquad (2.1)$$

Масса льдины определяется по ее площади Π, толщине $\hbar$ и плотности $\rho_л$. Последняя может меняться по вертикали, а вместе с толщиной — и по площади, но при исследованиях дрейфа льда обычно используются средние значения $\rho_л$ и $\hbar$:

$$M=\int\limits_{\Pi}\int\limits_0^{\hbar}\rho_л\,dz\,d\Pi\approx\rho_л\hbar\Pi. \qquad (2.2)$$

Из сил, действующих на лед, выделяют шесть наиболее важных. В первую очередь следует отметить силу, приводящую к ветровому дрейфу льда,— напряжение ветра на лед. Различают касательное $\mathbf{F}'_1$ и нормальное $\mathbf{F}''_1$ напряжения. Первое из них по сути является силой трения между поверхностью льда и воздушным потоком, а второе — силой давления ветра на возвышающуюся над водой боковую поверхность льдины и на торосы.

При движении льдины со скоростью, отличающейся от скорости течения, возникает сила сопротивления, которая, как и для воздуха, может быть представлена в виде касательного напряжения трения $\mathbf{F}'_2$ и нормального сопротивления $\mathbf{F}''_2$. Последнее обусловлено подводной частью торосов и боковой поверхностью льдины.

При наличии течений, индуцированных не движением льдины, а другими факторами, появляются добавочные ускорения льдины, которые можно считать результатом действия некоторых сил. К ним относятся сила $\mathbf{F}_3$, обусловленная горизонтальным градиентом давления воды, и приливообразующая сила $\mathbf{F}_4$.

В связи с тем, что движение льдины рассматривается в координатах, связанных с движущейся Землей, в уравнение (2.1) добавляется ускорение Кориолиса, которое также принято считать проявлением действия некоторой силы $\mathbf{F}_5$.

В большинстве случаев необходимо еще учитывать силы трения и столкновений льдины с окружающими льдами или берегом $\mathbf{F}_6$.

Касательное напряжение ветра на единицу площади обычно выражается через вертикальный градиент осредненной скорости ветра U, плотность воздуха ρ_1 и коэффициент турбулентности воздуха k_1:

$$F_1' = k_1 \rho_1 \frac{\partial U}{\partial z}. \tag{2.3}$$

При логарифмическом профиле ветра k_1 является функцией только высоты z и динамической скорости $v_* = \sqrt{F_1'/\rho_1}$

$$k_1 = \varkappa v_* z.$$

Неизменность F_1'/ρ_1 по высоте в пределах нижних 30—50 м позволяет проинтегрировать выражение (2.3) по z и получить

$$\frac{1}{\varkappa} \sqrt{\frac{F_1'}{\rho_1}} \ln \frac{z}{z_0} = (U - V_л),$$

или, чтобы указать ориентировку силы F_1', последнюю формулу преобразуют:

$$F_1' = c_1' \rho_1 |U - V_л| (U - V_л), \tag{2.4}$$

где $c_1' = \left(\frac{\varkappa}{\ln z/z_0}\right)^2$ — коэффициент трения; $\varkappa = 0{,}4$ — постоянная Кармана; z_0 — аэродинамическая шероховатость поверхности льдины, т. е. уровень, на котором скорость ветра уменьшается до скорости дрейфа льдины $U = V_л$.

Параметр z_0 определялся экспериментально во многих арктических экспедициях и составляет $5 \cdot 10^{-2}$ см со средним отклонением $\pm 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ см. Использование этого значения z_0 и высоты наблюдения ветра $z = 10$ м приводит к коэффициенту сопротивления $c_1' = 1{,}64 \cdot 10^{-3}$ с дисперсией порядка 10 %. Это означает, что без непосредственного определения z_0 средняя погрешность в оценке касательного напряжения будет не менее 10 %.

В практических расчетах вместо разности скоростей ветра и льдины обычно используется только скорость ветра, так как скорость дрейфа на два порядка меньше.

Приведенные оценки аэродинамической шероховатости льда справедливы для его ровной поверхности. Обычно лед в большей или меньшей степени покрыт торосами, влияющими на его сопротивление воздуху, так как в этом случае начинают играть роль силы нормального напряжения. Давление на единицу вертикального сечения наветренной боковой поверхности тороса может быть выражено по аналогии с формулой (2.4) зависимостью от тех же параметров с учетом угла между направлением ветра и гряды торосов.

В настоящее время нет натурных данных по определению коэффициента нормального напряжения ветра. Для его оценки можно лишь воспользоваться результатами экспериментов, проведенных с моделями льдин, на основании которых был вычислен средний коэффициент сопротивления торосов $c_т$. Он оказался пропорциональным торосистости льдины $N_т$, т. е. относительной площади торосов $N_т = П_т/П$:

$$c'_т \approx 0{,}02 N_т. \tag{2.5}$$

По аналогии с формулой (2.4) сопротивление торосов можно выразить формулой

$$F''_1 П = c'_т \rho_1 \left| U - V_л \right| (U - V_л)\, П. \tag{2.6}$$

Общее сопротивление единицы площади льдины ветру представляется в виде суммы

$$F_1 = F'_1 + F''_1 = c'_1 \rho_1 U^2 \left(1 + \frac{c''_1}{c'_1} N_т\right) = c_1 \rho_1 U^2. \tag{2.7}$$

Здесь не учтена скорость дрейфа льдины из-за ее малости по сравнению со скоростью ветра и введено для удобства обозначение $c''_1 = 0{,}02$.

Вклад торосистости в общее сопротивление легко оценить по данным, связывающим процент покрытия льда торосами с принятой шкалой баллов, приведенных в работе З. М. Гудковича и М. А. Романова [2] (табл. 2.1).

ТАБЛИЦА 2.1

Влияние торосистости на сопротивление льда ветру

Торосистость льда, баллы	0	1	2	3	4	5
Относительная площадь торосов, %	0	4	12	20	30	45
$\left(1 + \frac{c''_1}{c'_1} N_т\right)$	1	1,5	2,4	3,4	4,6	6,4
z_0 см	0,05	0,3	1,6	4,5	9,4	19,3

Таким образом, общий коэффициент трения c_1 возрастает с увеличением торосистости льда.

Часто при определении напряжения трения ветра на лед используется только формула (2.4). В таком случае увеличение торосистости можно отождествить с ростом шероховатости поверхности льдины. При этом условие $c'_1 = c_1$ дает возможность вычислить z_0, которая приведена в последней строке табл. 5.1.

Напряжения, возникающие между водой и льдом за счет разницы скоростей, могут быть определены такими же способами, что и рассмотренные выше. Эксперименты, проведенные на советских и американских дрейфующих станциях, показывают, что в увлекаемом льдом слое воды можно выделить некоторый прилегающий ко льду подслой, в котором касательное напряжение трения сравнительно слабо изменяется по вертикали. В этом случае при нейтральной или близкой к ней плотностной стратификации воды сила F'_2, приходящаяся на единицу площади льдины, определяется по аналогии с формулой (2.4) выражением

$$F'_2 = c'_2 \rho \, | V - V_л | \, (V - V_л), \tag{2.8}$$

$$c'_2 = \left(\varkappa / \ln \frac{z + z_н}{z_н} \right)^2,$$

где ρ — плотность воды; V — скорость движения воды на глубине z; $z_н$ — гидродинамическая шероховатость нижней поверхности льдины.

Еще меньше сведений имеется о гидродинамической шероховатости нижней поверхности льда. На основании сравнения фактического дрейфа дрейфующей станции «Альфа» с расчетным Рид и Кэмпбелл [9] пришли к выводу, что $z_н = 2{,}65$ см, хотя ее изменение до 24 см ($^1/_{30}$ высоты торосов) привело к вычисленному дрейфу льдины, находящемуся в пределах точности наблюдений. Обработка результатов наблюдений вертикальных профилей подледных течений также приводит к большому диапазону значений шероховатости, меняющихся от 0,2 см для гладкого льда до 10 см для льда с менее гладкой нижней поверхностью.

В ряде случаев делается попытка детализации $z_н$ в зависимости от возраста льда. Например в работе Ингрэма и др. [8] шероховатость образовавшегося нового льда принимается равной 0,6 см, $z_н$ молодого льда оценивается в 0,8 см, а у зимнего льда $z_н$ меняется от 1,5 см при его средней толщине до 2 см при большей толщине.

Толщина подледного слоя воды, в пределах которого профиль скорости течения близок к логарифмическому, а касательное напряжение трения принимается неизменным по глубине, оценивается по перечисленным исследованиям в 0,5—1 м.

При $z = 0{,}5 \div 1{,}0$ м, $z_н = 1$ см и $\varkappa = 0{,}4$ параметр c'_2 примерно равен 0,01, что согласуется с оценкой, полученной В. В. Шулейкиным на основании анализа дрейфа станции «Северный полюс-1».

Влияние подводной части торосов на напряжение между водой и льдом в настоящее время еще не исследовано. Можно лишь предполагать, что, как и в воздухе, основную роль при этом играют силы нормального напряжения. В таком случае по аналогии с формулой (2.6) можно записать

$$F_2''\Pi = c_{\text{т}}''\rho\,|V - V_{\text{л}}|\,(V - V_{\text{л}})\,\Pi. \tag{2.9}$$

Коэффициент сопротивления торосов $c_{\text{т}}''$ будет зависеть от подводного рельефа льдины и степени ее покрытия торосами. Основываясь на упомянутых экспериментах с моделями льдин, в которых толщина подводной части тороса принималась равной его утроенной высоте от надводной поверхности льдины, получили $c_{\text{т}}'' \approx 0{,}08 N_{\text{т}}$. Эта оценка имеет лишь ориентировочный характер, так как в реальных условиях подводная часть торосов может проникать за пределы подслоя трения, вызывая искажение плоского потока воды. Фактическое распределение давления на действительную поверхность льда определить без натурных измерений пока не представляется возможным, поэтому влияние торосистости предлагается учитывать в виде поправки к коэффициенту трения ровного льда

$$F_2 = F_2' + F_2'' = c_2'\rho\left(1 + \frac{c_2''}{c_2'}N_{\text{т}}\right)(V - V_{\text{л}})^2 = c_2\rho\,(V - V_{\text{л}})^2, \tag{2.10}$$

где $c_2'' = 0{,}08$.

Множитель перед $N_{\text{т}}$ имеет такой же порядок, как и в формуле (2.7). Следовательно, сопротивление воды движущейся льдине с увеличением ее торосистости возрастает в такой же пропорции, как и для надводной части.

Лобовое сопротивление, оказываемое водой боковой поверхности льдины, можно, в принципе, рассматривать как действие гряды торосов, погруженных до глубины нижней поверхности льда. Чтобы получить аналогию с формулой (2.10), достаточно определить отношение смоченных поверхностей боковой и нижней и отождествить его с $N_{\text{т}}$. Таким образом, сопротивление боковой поверхности будет тем больше, чем толще льдина и меньше ее площадь.

Выражения для сил $\mathbf{F}_3$ и $\mathbf{F}_4$, определяющих действие течений и приливо-отливных явлений, связанных с наклоном уровенной поверхности моря, имеют простой вид. В обоих случаях силы пропорциональны массе льдины и наклону уровня ζ. Относя их к единице поверхности льдины, имеем

$$\mathbf{F}_{3,4} = -\rho_{\text{л}} g \bar{h}\,\operatorname{grad}\zeta. \tag{2.11}$$

Знак минус в формуле (2.11) ставится вследствие того, что направление силы и вызванного ею движения обратно градиенту уровня моря.

Столь же просто через массу льдины и ее скорость определяется ускорение Кориолиса и связываемая с ним сила $\mathbf{F}_5$. Отнеся ее к единице поверхности, имеем

$$\mathbf{F}_5 = 2\rho_л \bar{h} (\mathbf{v}_л \times \boldsymbol{\omega}), \tag{2.12}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость вращения Земли.

Аналитическое представление силы $\mathbf{F}_6$ от внешних макромасштабных параметров до сих пор еще не нашло строгого обоснования. По существу эта сила является результирующей нормальных и касательных напряжений, возникающих при столкновениях и трении льдин между собой и с берегом. Эти взаимодействия зависят от масс и скоростей льдин, учесть которые при исследовании общей картины дрейфа льда почти столь же трудно, как и движение отдельных молекул в общем потоке жидкости или газа. Поэтому используются различные виды зависимостей $\mathbf{F}_6$ от средней скорости дрейфа льда, его массы, приходящейся на единицу площади, дивергенции или конвергенции потока льда и т. д. Из-за передачи напряжения через лед с какого-то расстояния происходит более тесная корреляция дрейфа сплоченного льда с ветром, осредненным по большой площади, чем с локальным. Чтобы удовлетворить этим требованиям, предлагаются различные модели. Наиболее распространено выражение для $\mathbf{F}_6$ в виде функции от лапласиана скорости дрейфа

$$\mathbf{F}_6 = \rho_л \bar{h} K_б \nabla^2 \mathbf{v}_л. \tag{2.13}$$

Параметр $K_б$, который можно считать коэффициентом бокового взаимодействия, подбирался обычно экспериментально, исходя из условий наилучшей согласованности результатов расчета дрейфа льда с данными наблюдений. М. И. Рузин [5] оценил его примерно в 10^5 м²/с, Кэмпбелл (1964) в результате моделирования дрейфа льда в Северном Ледовитом океане получил $K_б = 10^6$ м²/с.

В некоторых моделях предполагается, что коэффициент $K_б$ на площади конвергенции дрейфа льда существенно больше, чем в районе дивергенции. Очевидно, это объяснимо влиянием нормальных напряжений между льдинами, которое в первом случае должно проявляться более существенно, чем во втором. Несомненно, что $K_б$ зависит от сплоченности льда и при не очень сплоченном льде эту зависимость описывают соотношением

$$K_б = K_0 N (1 - aN). \tag{2.14}$$

Моделирование показывает, что наиболее правдоподобные результаты расчета ветрового дрейфа льда по акватории размером в арктическое море получаются при $0{,}5 < a < 1$ и $K_0 = 5 \cdot 10^5$ м²/с. В сплоченном ледяном покрове дополнительно учитываются силы давления P, пропорциональные градиенту P, аналогичные по форме силам $\mathbf{F}_{3,4}$.

Проведенные эксперименты еще слишком малочисленны, чтобы сделать определенный выбор в пользу того или иного способа определения коэффициента бокового взаимодействия и вида зависимости $K_б$ от сплоченности N. Ясно одно, что интенсивность бокового взаимодействия льдов должна зависеть от их сплоченности и вергенции.

2.2. Стационарный ветровой дрейф одиночной льдины

Впервые попытки объяснить закономерности дрейфа льда были предприняты Нансеном и Свердрупом по наблюдениям, проведенным соответственно на дрейфовавших в Северном Ледовитом океане судах «Фрам» (1893—1896 гг.) и «Мод» (1924—1928 гг.). Нансен эмпирическим путем установил, что вдали от берегов направление движения льда отклоняется от ветра вправо в среднем на угол 28°, а скорость движения составляет $^1/_{50}$ скорости ветра. Предпринятое Свердрупом теоретическое обоснование результатов натурных наблюдений над дрейфом льда было недостаточно полным, так как не были еще изучены силы, влияющие на движение льдов. Например, силу трения воздуха о лед $\mathbf{F}_1$ он принимал пропорциональной скорости ветра, а не квадрату ее; он не учитывал сопротивление трения воды, полагая, что только окружающие льдины препятствуют ускорению, и т. д.

Первые подробные метеорологические и океанологические наблюдения, позволившие составить правильное представление об основных силах, действующих на льдину и вызывающих ее движение, были проведены на льдине «Северный полюс-1», на которой дрейфовали И. Д. Папанин, Е. К. Федоров, П. П. Ширшов и Э. Т. Кренкель. На основе этих наблюдений советский ученый В. В. Шулейкин составил в 1938 г. приближенную теорию дрейфа ледяных полей в открытом океане [7]. В ней он рассмотрел стационарный дрейф одиночной льдины, обусловленный действием трех сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ и $\mathbf{F}_5$. Поскольку в этом случае ускорение отсутствует, то уравнение движения представляется в виде суммы перечисленных сил

$$\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\mathbf{F}_5=0. \tag{2.15}$$

Направив ось x вдоль вектора скорости движения льдины $\mathbf{v}_л$, которая отклоняется от ветра вправо на угол ψ (рис. 2.1), В. В. Шулейкин спроектировал силы на оси координат. При этом учитывалось, что вектор силы $\mathbf{F}_2$ направлен противоположно относительной скорости дрейфа льда $\mathbf{v}_{л0}=\mathbf{v}_0-\mathbf{v}_л$, отклоняющейся от вектора $\mathbf{v}_л$ на угол β:

$$\begin{aligned} F_{1x}&=F_{2x};\\ F_{1y}&=F_{2y}+F_{5y}. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Выразив значения проекций сил через скорости на основе формул (2.7), (2.10) и (2.12), он получил

$$c_1\rho_1 U^2 \cos\psi = c_2\rho V_{л0}^2 \cos\beta;$$

$$c_1\rho_1 U^2 \sin\psi = c_2\rho V_{л0}^2 \sin\beta + 2\rho_л \hbar \omega_z V_л. \tag{2.17}$$

В последних двух уравнениях содержится четыре неизвестных: $V_л$, $V_{л0}$, ψ, β. Поэтому В. В. Шулейкин дополнительно привлек уравнения, связывающие скорости движения льда, воды и

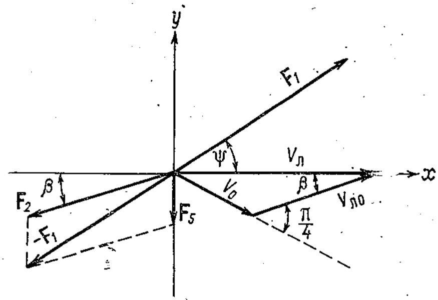


Рис. 2.1. Схема направления сил и скоростей при дрейфе льда, по В. В. Шулейкину [7].

относительной скорости льда, имеющие в проекциях на оси координат вид

$$V_л = V_0 \cos\alpha + V_{л0} \cos\beta;$$

$$V_0 \sin\alpha = U_{л0} \sin\beta. \tag{2.18}$$

При определении направления дрейфового подледного течения полагалось, что оно отклоняется от относительной скорости льдины вправо на угол $\pi/4$. Поэтому из треугольника скоростей (рис. 2.1) следует, что $\alpha = \pi/4 - \beta$. Однако появляется новая неизвестная — скорость дрейфового течения v_0, для нахождения которого В. В. Шулейкин воспользовался аналогией экмановских спиралей для открытого моря и покрытого дрейфующим льдом. Согласно экмановской теории скорость поверхностного течения и глубина трения $h_э$ выражается через напряжение трения ветра $\mathbf{F}_a$ и коэффициент турбулентности K_V:

$$V_0 = \frac{\mathrm{F}_a}{\rho\sqrt{2\omega_z K_V}}, \quad h_э = \frac{\pi\sqrt{K_V}}{\sqrt{\omega_z}}, \tag{2.19}$$

или

$$V_0 = \frac{\mathrm{F}_a h_э}{\rho\pi K_V \sqrt{2}}. \tag{2.20}$$

Воспользовавшись выражением напряжения трения через скорость ветра

$$\mathbf{F}_a = c_1\rho_1 U^2, \tag{2.21}$$

эмпирической формулой для поверхностного дрейфового течения

$$V_0 = \frac{nU}{\sqrt{\sin\varphi}}, \tag{2.22}$$

а также формулой (2.19) для исключения K_V, В. В. Шулейкин преобразовал соотношение (2.20) к виду

$$h_э = \frac{c_1\rho_1\pi}{n^2\rho\omega_z\sqrt{2}} V_0 \equiv aV_0, \tag{2.23}$$

где $n = 0{,}0127$.

Формула (2.20) остается справедливой при наличии льда, если в ней заменить $\mathbf{F}_a$ на $\mathbf{F}_1$, а для исключения $h_э$ и K_V воспользоваться соотношениями (2.19) и (2.23). Тогда получается

$$V_0 = \xi V_{л0}, \tag{2.24}$$

где

$$\xi \equiv \sqrt{\frac{c_2\pi}{a\omega_z\sqrt{2}}} = n\sqrt{\frac{c_2\rho}{c_1\rho_1}}.$$

Последнее выражение дополняет систему уравнений (2.17) и (2.18) до пяти с пятью неизвестными, что позволяет определить все параметры дрейфа.

Из последнего уравнения (2.18) находится

$$\frac{V_0}{V_{л0}} = \xi = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

или, так как $\alpha = \frac{\pi}{4} - \beta$, то

$$\operatorname{ctg}\alpha = 1 + \xi\sqrt{2}. \tag{2.25}$$

Далее, умножив и разделив последнее слагаемое второго выражения (2.17) на $v_л$, заменив $v_л^2$ первым уравнением (2.18) и разделив все полученное выражение на первое уравнение (2.17), получаем

$$\operatorname{tg}\psi = \operatorname{tg}\beta + \frac{2\rho_л \hbar\omega_z}{c_2\rho\cos\beta V_л}(\xi\cos\alpha + \cos\beta)^2. \tag{2.26}$$

Наконец, исключив в уравнениях (2.18) V_0 и подставив полученное выражение вместо $V_{л0}$ в первое уравнение системы (2.17), находим ветровой коэффициент

$$K \equiv \frac{V_л}{U} = (\xi\cos\alpha + \cos\beta)\sqrt{\frac{c_1\rho_1\cos\psi}{c_2\rho\cos\beta}}. \tag{2.27}$$

Полученные В. В. Шулейкиным выражения (2.26) и (2.27) показывают, что угол отклонения направления дрейфа льда от ветра не постоянный, а зависит от многих параметров и, в частности, от толщины льда и скорости его движения. От них же зависит и ветровой коэффициент. Первый с увеличением толщины льда возрастает, а второй — уменьшается.

Произведенная В. В. Шулейкиным проверка теории по данным дрейфа папанинской станции «СП-1» показала, что вычисленный дрейф при использовании коэффициентов трения $c_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ и $c_2 = 8 \cdot 10^{-3}$ удовлетворительно согласуется с наблюденным. Поэтому эта теория не потеряла своего значения до настоящего времени, хотя известны многие попытки ее улучшения.

Наблюдения, проведенные на дрейфующих станциях в Северном Ледовитом океане, показали, что при стационарном дрейфе льда нет резкого различия скоростей движения льда и воды у его нижней поверхности. То есть в уточненной теории дрейфа льда должно учитываться постепенное изменение скорости подледного течения с глубиной при ее совпадении со скоростью дрейфа льда у его поверхности. Такое уточнение было сделано американскими учеными Ридом и Кэмпбеллом [9], которые учли наличие подледного слоя трения толщиной h_2 с линейным возрастанием в нем по глубине коэффициента турбулентности:

$$K_V = \varkappa (z + z_{\text{н}}) \sqrt{F_2/\rho}\,. \tag{2.28}$$

На глубине h_2 этот коэффициент становится равным K_V, определяемому из спирали Экмана (2.18) при условии, что $F_a \equiv F_2$. Это позволяет из формул (2.18) и (2.28) исключить K_V и определить сопротивление воды

$$F_2 = 2\varkappa\omega_z (h_2 + z_H)^{2/3}\, V_h^{4/3}. \tag{2.29}$$

Но эта же сила выражается формулой (2.10), если в ней скорость дрейфового течения V_h определяется на глубине h, т. е.

$$F_2 = c_2 \rho\, (V_h - V_{\text{л}})^2. \tag{2.30}$$

Из последних двух выражений находим

$$V_h = \xi' V_{\text{л}0}^{3/2}, \tag{2.31}$$

где

$$\xi' = c_2^{3/4} \left[2\varkappa\omega_z (h_2 + z_H)\right]^{-1/2}, \quad V_{\text{л}0} = V_h - V_{\text{л}}.$$

В отличие от формулы В. В. Шулейкина (2.24), полученное при уточнении описания подледного течения соотношение между его скоростью и скоростью относительного дрейфа льдины оказывается нелинейным. Однако учет формулы (2.31) не меняет принципиальным образом зависимость ветрового коэффициента K и угла дрейфа ψ от скорости ветра (рис. 2.2).

Принципиально новый подход к определению напряжений трения в уравнении баланса сил (2.15) предложен Д. Л. Лайхтманом [4]. Он предположил, что профили скорости ветра над льдом и подледного дрейфового течения описываются спиралями Экмана. Это позволяет легко вычислить вертикальные градиенты скорости ветра и подледного течения, входящие в выражения сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ по типу формулы (2.3). При этом торосистость может рассматриваться как добавочная шероховатость и входить в коэффициенты K_1 и K_V. При определении сил F_1 и F_2 обычно принимается, что с удалением от поверхности льда скорость ветра стремится к геострофической, имеющей проекции на оси координат U_x и U_y, а скорость дрейфового течения с увеличением глубины убывает.

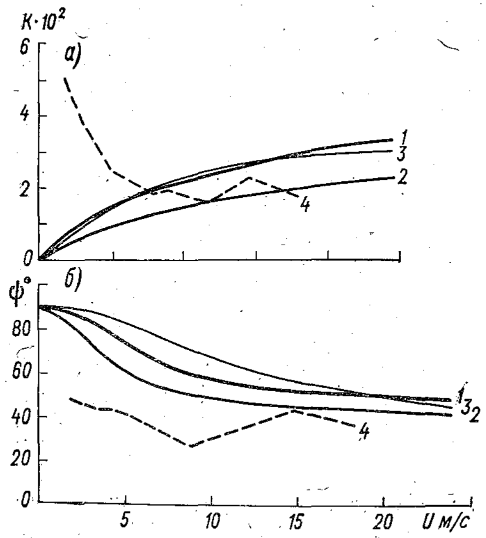


Рис. 2.2. Зависимость ветрового коэффициента (а) и дрейфового угла (б) от скорости ветра [9].

1 — $h=2$ м, $h_2=2$ м, $Z_H=2{,}65$ см; 2 — $h=2$ м, $h_2=4$ м, $Z_H=24$ см; 3 — по формулам В. В. Шулейкина; 4 — средние по наблюдениям дрейфа станции «Альфа».

Подстановка полученных таким образом выражений F_1 и F_2 при постоянных коэффициентах турбулентности в уравнение баланса сил (2.15) и учет силы F_5 (2.12) приводят к двум выражениям, представляющим проекцию уравнения баланса сил на оси координат x и y:

$$(U_x-u_л-U_y+v_л)\alpha_1+(v_л-u_л)\alpha_2+2\omega_z\rho_л h v_л=0;$$

$$(U_y-v_л+U_x-u_л)\alpha_1-(u_л+v_л)\alpha_2-2\omega_z\rho_л h u_л=0, \qquad (2.32)$$

где $u_л$, $v_л$ — составляющие скорости дрейфа льда на соответствующие оси координат:

$$\alpha_1=\rho_1\sqrt{\omega_z K_1};\quad \alpha_2=\rho\sqrt{\omega_z K_V}.$$

Если не расшифровывать зависимость коэффициентов турбулентности от ветра и течения, то уравнения (2.32) оказываются более простыми, чем те, в которых трение полагается пропорциональным квадрату скорости движения воздуха и воды.

Решение уравнений (2.32) позволяет получить элементы дрейфа льда как функцию геострофического ветра. В частности, если отбросить $u_л$ и $v_л$ в первых скобках из-за того, что они на полтора порядка меньше скорости ветра, то получаются следующие выражения составляющих скорости дрейфа льдины:

$$u_л = K'\left(U_x + \frac{\delta}{1+\delta} U_y\right), \quad v_л = K'\left(U_y - \frac{\delta}{1+\delta} U_x\right), \tag{2.33}$$

где

$$K' \equiv \frac{2\frac{\rho_1}{\rho}(1+\delta)}{1+(1+2\delta)^2}\sqrt{\frac{K_1}{K_V}}, \quad \delta \equiv \hbar \frac{\rho_л}{\rho}\sqrt{\frac{\omega_z}{K_V}}.$$

Если в полученных формулах устремлять $\hbar$ к нулю, то они переходят в выражения, описывающие скорость поверхностного дрейфового течения в постановке Экмана. Формулы (2.33) просты и удобны для анализа. Поэтому они часто используются, особенно в теоретических исследованиях. Но в них, по сути, остается неопределенным коэффициент турбулентности K_V, зависящий от скорости дрейфа. Коэффициент K_1 слабо зависит от дрейфа льдины и по существу представляет собой внешний параметр. Уточнение, связанное с учетом изменчивости коэффициентов турбулентности по вертикали, не вызывает принципиального изменения вида формул (2.33), а приводит только к более детальному определению аналога ветрового коэффициента K' и функции $\delta/(1+\delta)$ от определяющих факторов [3].

Часто в оперативной практике при вычислениях дрейфа льда используется не геострофический ветер, а градиенты давления. Обычно они связываются по формулам

$$U_x = -\frac{1}{2\omega_z\rho_1}\frac{\partial P}{\partial y}, \quad U_y = \frac{1}{2\omega_z\rho_1}\frac{\partial P}{\partial x}. \tag{2.34}$$

В таком случае

$$u_л = \frac{K'}{2\omega_z\rho_1}\left(\frac{\delta}{1+\delta}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right);$$

$$v_л = \frac{K'}{2\omega_z\rho_1}\left(\frac{\delta}{1+\delta}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial x}\right). \tag{2.35}$$

Для облегчения анализа направим ось x вдоль изобар. Тогда $\partial P/\partial x = 0$ и из формул легко увидеть, что лед движется, оставляя область высокого давления справа.

Чем толще лед, тем больше δ и составляющая скорости дрейфа по оси y возрастает, т. е. толстый лед дрейфует, сильнее отклоняясь от изобары в сторону высокого давления. Этот характер дрейфа льда подметил еще в 40-х годах Н. Н. Зубов и сформулировал «правило изобарического дрейфа льда», гласящее, что лед дрейфует вдоль изобар, оставляя область высокого давления справа, со скоростью, определяемой из формулы

$$v_л = \frac{0{,}01}{2\omega_z\rho_1}\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{2.36}$$

2.3. Нестационарный ветровой дрейф льда

Движение льдины в общем виде описывается уравнением (2.1). Однако даже при стационарном дрейфе встречаются затруднения в получении строгого решения этого уравнения, в котором бы не привлекались какие-либо гипотезы о зависимости действующих на лед сил от внешних факторов. Выяснение закономерностей нестационарного дрейфа льда сопряжено с еще большими трудностями как в теоретическом, так и в экспериментальном плане. Поэтому стационарный дрейф льда изучался не как частный случай нестационарного, а обособленно. Изменение же скорости движения льда изучалось сначала теоретически на простейших задачах.

Достаточно простое решение уравнения (2.1) получается при использовании действующих на одиночную льдину трех сил F_1, F_2 и F_5 в виде выражений (2.32). Если ради упрощения отбросить в первых скобках $u_л$ и $v_л$ из-за их малости по сравнению со скоростью ветра, то проекция уравнения (2.1) на оси координат имеет вид

$$\rho_л \hbar \frac{du_л}{dt} = \alpha_1 (U_x - U_y) + \alpha_2 (v_л - u_л) + 2\omega_z \rho_л \hbar v_л;$$

$$\rho_л \hbar \frac{dv_л}{dt} = \alpha_1 (U_x + U_y) - \alpha_2 (u_л + v_л) - 2\omega_z \rho_л \hbar u_л. \qquad (2.37)$$

В этих уравнениях все силы отнесены к единице площади льдины. Поэтому в качестве M рассматривается столбик льда единичного сечения. Никаких изменений не произойдет, если рассматривать всю льдину, для чего достаточно умножить на ее площадь каждый член выражений (2.37).

При решении производится предварительное сведение двух уравнений (2.37) к одному. Для этого второе из них умножается на i и суммируется с первым, в результате чего происходит переход к комплексной скорости $w = u_л + iv_л$:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\alpha_1}{\rho_л \hbar} [U_x - U_y + i(U_x + U_y)] +$$

$$+ \left(2\omega_z + \frac{\alpha_2}{\rho_л \hbar}\right)(v_л - iu_л) - \frac{\alpha_2}{\rho_л \hbar} w.$$

Обозначив ради краткости записи

$$\left(2\omega_z + \frac{\alpha_2}{\rho_л \hbar}\right) \equiv a; \quad \frac{\alpha_2}{\rho_л \hbar} \equiv b;$$

$$\frac{\alpha_1}{\rho_л \hbar} [U_x - U_y + i(U_x + U_y)] \equiv c$$

и вынеся во втором члене правой части последнего выражения $-i$ за скобки, получим

$$\frac{dw}{dt}+(ai+b)\,w=c. \tag{2.38}$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$w=\int_0^t c(\xi)\,e^{-(ai+b)(t-\xi)}\,d\xi+w_0 e^{-(ai+b)\,t}, \tag{2.39}$$

где w_0 — комплексная скорость дрейфа льда при $t=0$.

При анализе закономерностей выхода дрейфа льда на стационарный режим достаточно рассмотреть простейший случай — изменение скорости движения льдины из состояния покоя ($w_0 = 0$) при неизменном ветре ($c=\tilde{c}=\mathrm{const}$). В природе это уравнение описывает дрейф оторвавшейся от припая льдины.

При перечисленных условиях решение (2.39) упрощается:

$$\tilde{w}=\frac{\tilde{c}}{ai+b}\left[1-e^{-(ai+b)\,t}\right]. \tag{2.40}$$

Если $t\to\infty$, то второй член формулы стремится к нулю и она описывает стационарный дрейф, т. е.

$$w_\infty=\frac{\tilde{c}}{ai+b}. \tag{2.41}$$

Выделение в формуле (2.40) вещественной и мнимой частей приводит к выражениям

$$\begin{aligned} u_л(t)&=u_л-(u_л\cos at+v_л\sin at)\,e^{-bt};\\ v_л(t)&=v_л+(u_л\sin at-v_л\cos at)\,e^{-bt}, \end{aligned} \tag{2.42}$$

где $u_л$ и $v_л$ — составляющие скоростей стационарного дрейфа льда по осям координат, определяемые формулами (2.33).

Из формул (2.42) видно, что стационарный режим дрейфа льда наступает тем быстрее, чем меньше толщина льда и больше интенсивность турбулентного перемешивания в воде. Это особенно хорошо видно из сравнения модулей стационарного $V_л$ и нестационарного дрейфа $v(t)$, которые получаются из формул (2.42):

$$\frac{V(t)}{V_л}=\sqrt{1+e^{-2bt}-2e^{-bt}\cos at}. \tag{2.43}$$

Относительная скорость установления стационарного режима дрейфа льдины представляет собой кривую быстро затухающих колебаний (рис. 2.3). Для льда толщиной до 1 м дрейф становится стационарным уже через 1—2 ч, но толстые, многолетние льды приходят в это состояние только через 6—10 ч.

На скорость установления стационарности влияет размер льдины. Чем она меньше, тем сильнее проявляется нормальное сопротивление воды на боковую поверхность. Поэтому общее сопротивление воды, приходящееся на единицу поверхности льдины, будет больше у малой льдины, чем у большой. В свою очередь рост сопротивления вызывает увеличение коэффициента турбулентности в подледной воде K_2, а следовательно, и более быстрое наступление стационарного режима. В связи с этим мелкие льдины быстрее начинают дрейфовать под действием ветра, но и быстрее, чем крупные, останавливаются после его прекращения. Поэтому при переменном ветре в море могут образовываться полосы из более или менее однородных по размеру льдин.

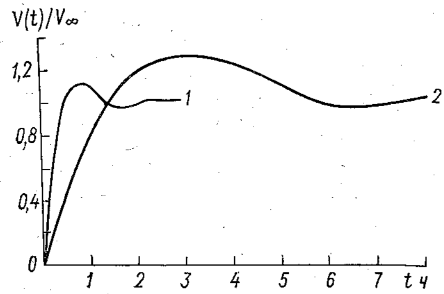


Рис. 2.3. Установление стационарного дрейфа ($K_V = 10$ см²/с).
1 — h = 50 см, 2 — h = 300 см.

При быстрой изменчивости ветра дрейф льда может не успевать выходить на стационарный режим и в зависимости от массы льдина в своем движении описывает различные траектории с бо́льшими или меньшими флюктуациями. Оценить последние, легко, если известны флюктуации ветра, которые нужно учесть в уравнении (2.39). Поскольку скорость ветра входит только в параметр c, то ради облегчения математических выкладок представим, что в соответствии с изменчивостью ветра он представим суммой средней величины $\tilde{c}$ и пульсаций с частотой σ_n:

$$c(t) = \tilde{c} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\sigma_n t}. \tag{2.44}$$

Подстановка этого выражения в уравнение (2.39) позволяет его проинтегрировать и выделить решение, описывающее скорость льдины $\tilde{w}$, обусловленную стационарным ветром и зависящую только от $\tilde{c}$. Поделив на это решение все полученное выражение, будем иметь

$$\frac{w(t)}{\tilde{w}(t)} = 1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{c_n}{\tilde{c}} \frac{ai+b}{(a+\sigma_n)i+b} \left[1 + \frac{e^{i\sigma_n t} - 1}{1 - e^{-(ai+b)t}} \right] \right\}. \tag{2.45}$$

Слагаемое, содержащее сумму, зависит от отношения флюктуаций скорости ветра к его среднему значению. Чем больше относительное значение флюктуаций ветра, тем больше изменчивость дрейфа льда. Поэтому при слабом ветре, относительная порывистость которого всегда повышенная, отмечается бо́льшая дисперсия ветровых коэффициентов и дрейфовых углов. При этом флюктуации движения льдины будут тем сильнее, чем меньше ее масса. В качестве примера несглаженного дрейфа на рис. 2.4 приведены траектории трех льдин, полученные по наблюдениям через каждые 15 мин с помощью локатора. Видно, что несглаженные траектории льдин не представляют собой гладкие линии.

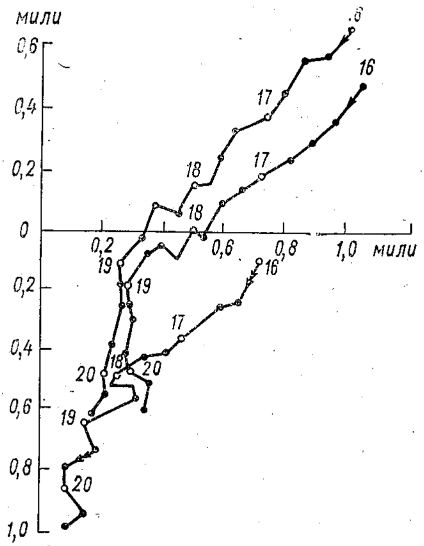


Рис. 2.4. Траектории льдин (цифры — время в часах) [6].

2.4. Дрейф совокупности льдин

Дрейф совокупности льдин отличается от дрейфа одиночной льдины тем, что в результате соударений одной льдины с другими происходит перераспределение моментов количества движения с соответствующим изменением скоростей и траекторий. При этом стационарный дрейф льда описывается уравнениями (2.32) с добавлением в них проекций сил $\mathbf{F}_б$. Поскольку коэффициент взаимодействия $K_б$ может меняться в пространстве, то он должен быть внесен под знак производной. Поэтому уравнения движения льда, если их поделить предварительно на $\rho_л \hbar$ и учесть упомянутые в разделе 2.2 упрощения, принимают вид

$$(U_x - U_y)\, b_1 + a v_л - b_2 u_л + \nabla\,(K_б \nabla u_л) = 0;$$

$$(U_x + U_y)\, b_1 - a u_л - b_2 v_л + \nabla\,(K_б \nabla v_л) = 0, \qquad (2.46)$$

где $b_1 \equiv \alpha_1/(\rho_л \hbar)$, $b_2 \equiv (\alpha_2 + \alpha_1)/(\rho_л \hbar)$, $a \equiv 2\omega_z + b_2$.

Уравнения (2.46) описывают вызванный ветром дрейф льда вдали от берега или от крупных малоподвижных ледяных массивов, т. е. вдали от препятствий, мешающих свободному дрейфу льдин. Однако они оказываются очень удобными для иллюстрации некоторых закономерностей дрейфа совокупности льдин.

Впервые решение уравнений (2.46) при $K_б = \mathrm{const}$ получил М. И. Рузин [5]. В результате стандартного перехода к комплексной скорости w из (2.46) получается одно уравнение второго порядка, решаемое аналитически:

$$K_б \nabla^2 w - (ai + b_2) w = -b_1 (1 + i) U_k.$$

В полярной системе координат r, φ решение имеет вид

$$w = \frac{1}{2\pi} \frac{(1 + i) b_1}{(ai + b_2)} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} U_k (\delta, \varphi) K_0 (\delta) \, d\varphi \, d\delta, \tag{2.47}$$

где $U_k = U_x + iU_y$.

Из этого выражения видно, что скорость дрейфа льда определяется не только геострофическим ветром в данной точке, как это имеет место для одиночной льдины, но и его распределением по некоторой площади. Ее размеры характеризуются функцией Макдональда $K_0(\delta)$, при больших расстояниях экспоненциально убывающей от центра:

$$K_0 (\delta) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2\delta}} e^{-\delta} \text{ при } \delta \gg 1, \tag{2.48}$$

где $\delta = r \sqrt{\dfrac{ai + b_2}{K_б}}$.

Влияние окрестного ветра на дрейф льдины передается через соударения, трение и давление окружающих льдин и поэтому оно тем сильнее, чем больше коэффициент бокового взаимодействия льдин $K_б$, уменьшающий показатель экспоненты δ в функции Макдональда, в результате чего последняя уменьшается с расстоянием слабее. Следовательно, чем больше $K_б$, тем с большим весом входит ветер в подынтегральное выражение (2.47). За счет окрестного ветра лед может двигаться даже при местных штилевых условиях. Это подтверждается наблюдениями. Особенно наглядно это явление проявляется при образовании торосов во время штиля, когда хорошо заметно движение льдин.

Во многих случаях лед дрейфует при наличии наклона ζ уровенной поверхности моря, который вызывает дополнительные ускорения. Они учитываются, как отмечалось в разделе 2.1, через силу $\mathbf{F}_3$. Для декартовой системы координат проекции этой силы обусловливают ускорения $-g \dfrac{\partial \zeta}{\partial x}$ и $-g \dfrac{\partial \zeta}{\partial y}$, суммируемые с соответствующими уравнениями (2.46). При известных значениях этих слагаемых, особенно для постоянного наклона уровня, уравнения легко решаются. В последнем случае заменой переменных

$$u'_л = u_л + \frac{g}{a^2 + b_2^2} \left(b_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + a \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right);$$

$$v'_л = v_л - \frac{g}{a^2 + b_2^2} \left(a \frac{\partial \zeta}{\partial x} - b_2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) \tag{2.49}$$

система уравнений сводится к (2.46). Это означает, что суммарный дрейф льда в открытом море может определяться суммированием чисто ветровой и градиентной слагаемых переноса.

В общем случае более целесообразно объединять слагаемые наклонов уровня с членами, учитывающими влияние геострофического ветра. При этом общий вид решения не меняется, но в подынтегральное выражение (2.47) будет входить не только геострофический ветер, но и наклон уровня:

$$U_{\zeta}=U_k-\frac{g}{b_1(1+i)}\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+i\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right). \tag{2.50}$$

Отсюда видно, что рельеф уровенной поверхности влияет на дрейф льда качественно так же, как и ветер, т. е. наиболее заметна роль местного наклона уровня. Скорость же ослабления влияния уровенного рельефа окружающей акватории зависит от интенсивности бокового взаимодействия льдин.

На основании формулы (2.50) можно оценить относительное влияние ветра и течений на дрейф льда. При осреднении за короткий период времени первое слагаемое обычно много больше второго, поэтому при расчетах дрейфа льда за промежутки времени порядка суток во многих случаях наклон уровня во внимание можно не принимать. Но при расчетах дрейфа льда за длительный промежуток времени, особенно при существовании постоянного течения, первый член формулы (2.50) из-за изменчивости скорости и направления ветра убывает в результате осреднения и наклон уровня начинает играть существенную роль. В качестве иллюстрации в табл. 2.2 приведены вычисленные З. М. Гудковичем [1] данные о дрейфе станции СП-2 за различные по продолжительности периоды.

ТАБЛИЦА 2.2

Роль течения в дрейфе станции «СП-2»

	Максимальная за сутки	Средняя			
		за сутки	за декаду	за месяц	за год
Скорость результирующего ветра, м/с	10,0	3,30	2,38	1,18	0,53
Скорость ветрового дрейфа, см/с	20,0	6,6	4,8	2,4	1,1
Роль течения в суммарном дрейфе, %	5	15	20	33	52

Суша, припай и малоподвижные ледяные массивы существенно влияют на дрейф льда. Из-за того что концентрация льдин, обычно называемая сплоченностью N, не может быть более 1 (100 %), в районах конвергенции льдины, как твердые пластины, заполнив всю площадь, влияют на скорость дальнейшего дрейфа таким образом, чтобы не происходило дальнейшего накапливания льда, за исключением некоторого расхода его массы на образование торосов. Это обстоятельство заставляет определять сплоченность льда. Но эта характеристика состояния ледяного покрова имеет и самостоятельное значение, будучи чрезвычайно важной для судоходства, при оценках воздействия льда на различные сооружения, при расчетах обмена энергией между океаном и атмосферой и т. д. Поэтому одновременно с дрейфом, как правило, рассчитывается сплоченность льда. Уравнение, характеризующее ее изменение, составляется на основе следующих соображений. Рассматривается движение льдин через некоторую площадь $\delta\Pi = \delta x \delta y$ (рис. 2.5). Эта площадь должна быть достаточно большой, чтобы в ней мог разместиться ансамбль льдин, т. е. по крайней мере порядка 1 км^2. Если с одной стороны выделенной площади, например через границу AB, входит лед толщиной $\hbar$, сплоченностью N со скоростью $u_л$, то в единицу времени поступит масса льда $N\hbar u_л \delta y$. При наличии изменений массы льда вдоль оси x $\frac{\partial N\hbar u_л}{\partial x}$ через противоположную сторону площади CD уйдет масса льда $(N\hbar u_л + \frac{\partial N\hbar u_л}{\partial x}\delta x)\delta y$. Аналогичная картина имеет место вдоль другой координатной оси: через AD входит $N\hbar v_л \delta x$ и через BC выходит $(N\hbar v_л + \frac{\partial N\hbar v_л}{\partial y}\delta y)\delta x$ масса льда. Следовательно, изменение массы льда на площади $ABCD$ представляется выражением

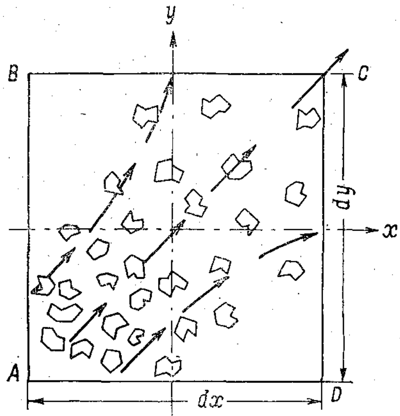


Рис. 2.5. Сплоченность льда на площади $ABCD$.

$$\frac{\partial N\hbar}{\partial t}\delta\Pi = N\hbar u_л \delta y - \left(N\hbar u_л + \frac{\partial N\hbar u_л}{\partial x}\delta x\right)\delta y +$$

$$+ N\hbar v_л \delta x - \left(N\hbar v_л + \frac{\partial N\hbar v_л}{\partial y}\delta y\right)\delta x.$$

Сокращение на площадь и на толщину льда, если она не меняется в пределах площадки, делает полученное уравнение более компактным:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -\left(\frac{\partial N u_л}{\partial x} + \frac{\partial N v_л}{\partial y}\right). \qquad (2.51)$$

При этом на сплоченность льда накладывается ограничение

$$0 \leqslant N \leqslant 1. \qquad (2.52)$$

В теплый период года, когда происходит таяние льда, на сплоченность льда, кроме отмеченных динамических факторов, влияют еще термические. Они вызывают не только стаивание льда с его поверхности, но и приводят к уменьшению N в результате бокового таяния льдин. При рассмотрении таяния льда было показано, что этот эффект описывается формулой

$$\frac{\partial N}{\partial t} = -(1-N)\frac{\Phi_б}{L\rho_л h}, \qquad (2.53)$$

где $\Phi_б$ — поток тепла, поступающий на единицу боковой поверхности льдины; L — теплота плавления льда.

Следовательно общее изменение сплоченности льда характеризуется уравнением

$$\frac{\partial N}{\partial t} = (N-1)\frac{\Phi_б}{L\rho_л h} - \left(\frac{\partial N u_1}{\partial x} + \frac{\partial N v_л}{\partial y}\right). \qquad (2.54)$$

Естественно, что при переменной сплоченности коэффициенты бокового взаимодействия льдин не могут считаться постоянными. Они будут функциями сплоченности, а тем самым и скорость дрейфа в уравнениях (2.46) будет также функцией сплоченности N. Больше того, нестационарность уравнения (2.51) не позволяет, строго говоря, считать возможным выход на стационарный режим дрейфа льда, и поэтому в уравнениях (2.46) должны содержаться нестационарные члены, т. е. они должны иметь вид

$$(U_x - U_y)\, b_1 + a v_л - b_2 u_л + \nabla\,(K_б \nabla u_л) = \frac{du_л}{dt};$$

$$(U_x + U_y)\, b_1 - a u_л - b_2 v_л + \nabla\,(K_б \nabla v_л) = \frac{dv_л}{dt}. \qquad (2.55)$$

Система уравнений (2.54) и (2.55) содержит три неизвестных $u_л$, $v_л$ и N, которые определяются в результате решения. Однако из-за нелинейности уравнений их решение возможно лишь численно с помощью ЭЦВМ. При этом нужно иметь в виду скорость выхода дрейфа льдин на установившийся режим. Поэтому при шаге времени Δt порядка суток нет необходимости учитывать ускорения льдин, стоящие в правой стороне уравнений (2.55). Но картина дрейфа льда в этом случае получается сглаженной. Тем не менее в большинстве прогностических моделей, предназначенных для прогноза дрейфа и сплоченности льда с заблаговременностью от нескольких суток до нескольких месяцев, используется условие быстрой приспосабливаемости дрейфа льда к меняющемуся ветру и правая часть уравнений (2.55) принимается равной нулю. Переход к комплексной скорости w и представление производных в конечно-разностном виде на mn-сеточной области с шагом l позволяет выразить w в mn-узле формулой

$$w_{mn} = \frac{1}{b_2 + ia + 4K_б/l^2} \Big[(1+i)\, b_1 U_{kmn} + \left(\frac{K_б}{l^2} + \frac{1}{2l} \frac{\partial K_б}{\partial x} \right)_{mn} w_{m+1,\, n} + \left(\frac{K_б}{l^2} + \frac{1}{2l} \frac{\partial K_б}{\partial y} \right)_{mn} w_{m,\, n+1} + \left(\frac{K_б}{l^2} - \frac{1}{2l} \frac{\partial K_б}{\partial x} \right)_{mn} w_{m-1,\, n} + \left(\frac{K_б}{l^2} - \frac{1}{2l} \frac{\partial K_б}{\partial y} \right)_{mn} w_{m,\, n-1} \Big] \tag{2.56}$$

где обозначения те же, что и в формуле (2.47).

Из выражения (2.56) видно, что дрейф льда происходит как под влиянием местного ветра, действующего непосредственно на льдину и характеризуемого первым членом, так и под воздействием окружающих льдин, какими бы причинами ни было обусловлено их движение. Составляющие скоростей дрейфа льда легко получаются из выражения (2.56) после разделения вещественной и мнимой его частей. Но это так сказать «возможные» скорости дрейфа. Реальная скорость дрейфа устанавливается под воздействием сплоченности льда, определяемой уравнением (2.54) и условием (2.52). В тех случаях, когда $N < 1$, влияние окружающих льдин проявляется через коэффициент взаимодействия льдин $K_б$, содержащего сплоченность. Но если вычисленная сплоченность льда оказывается больше 1, т. е. нарушается условие (2.52), то скорость дрейфа и конвергенция массы льда должны быть уменьшены до такой степени, чтобы условие (2.52) выполнялось.

Избыточное изменение сплоченности $\left(\frac{\partial N}{\partial t}\right)_и$ легко определяется из формулы

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} \right)_и = \left[N(t) + \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial N}{\partial t} dt - 1 \right] \frac{1}{\Delta t}, \tag{2.57}$$

причем по осям координат оно распределяется пропорционально слагаемым дивергентного члена уравнения (2.54), т. е.

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} \right)_{иx} = \frac{\partial N u_л}{\partial x} \left(\frac{\partial N}{\partial t} \right)_и \Big/ \frac{\partial N}{\partial t},$$

$$\left(\frac{\partial N}{\partial t} \right)_{иy} = \frac{\partial N v_л}{\partial y} \left(\frac{\partial N}{\partial t} \right)_и \Big/ \frac{\partial N}{\partial t}. \tag{2.58}$$

Если какое-либо из слагаемых оказывается отрицательным, то это свидетельствует о дивергенции льда вдоль этой оси и вся избыточная сплоченность льда формируется за счет конвергенции по другой оси. Полученные значения избытка сплоченности учитываются при коррекции скоростей дрейфа. Методика учета влияния сплоченности на скорость дрейфа еще до конца не разработана. В одних случаях выражения (2.58) приравнивают градиентам скоростей по соответствующим координатам и на эти величины уменьшают вычисленные на основании уравнения (2.56) градиенты скоростей. В других — в уравнения движения включают дополнительные члены, пропорциональные градиентам давления ледового сжатия, зависящим от избыточной сплоченности льда. Но во всех случаях приходится прибегать к итерационному процессу, так как пока еще не удалось получить аналитическое выражение скорости дрейфа в зонах конвергенции сплошного льда.

Итак, дрейф и сплоченность льдов оказываются тесно связанными между собой. Даже из выражения (2.56) видно, что под воздействием ветра сплоченный лед дрейфует медленнее, чем одиночная льдина. Это замедление тем сильнее, чем больше коэффициент взаимодействия льдин $K_б$, находящийся в знаменателе. Кроме того, дрейф сравнительно толстых льдов в массивах больше совпадает с «изобарическим», чем дрейф одиночных льдин. Анализ дрейфа станций СП-2, -3, -4, -5, проведенный З. М. Гудковичем [1], показал, что зимой, когда сплоченность льда повышенная, отклонение направления дрейфа от изобары находится в пределах 5—7°. Летом этот угол превышает 20°.

Суша, припай и малоподвижные ледяные массивы могут существенно изменять отмеченные закономерности дрейфа. Как уже отмечалось, сплоченность льда даже при расходовании некоторой его массы на торосы не может превышать единицы. Поэтому при конвергенции потоков льда или при его движении в направлении берега происходит уменьшение скорости дрейфа. По этой причине ветровые или изобарические коэффициенты при отжимном дрейфе всегда больше, чем при нажимном.

На приведенном в качестве примера рис. 2.6 показано состояние ледяного покрова Карского моря, вычисленное по уравнениям (2.54)—(2.58). Влияние торошения и молодого льда в разводьях на среднюю толщину льда учитывалось соотношением

$$\bar{h}_д = N\bar{h}. \tag{2.59}$$

В зонах конвергенции, где масса льда возрастает за счет торосов, на которые расходуется некоторый избыток льда $\delta N_т$, происходит увеличение средней толщины льда. На рисунке такая зона находится восточнее Земли Франца-Иосифа. В областях дивергенции $N<1$, в образующихся разводьях появляется молодой тонкий лед, и поэтому средняя толщина льда уменьшается.

Летом на толщину льда и его сплоченность большое влияние оказывает солнечное и атмосферное тепло, учитываемое первым

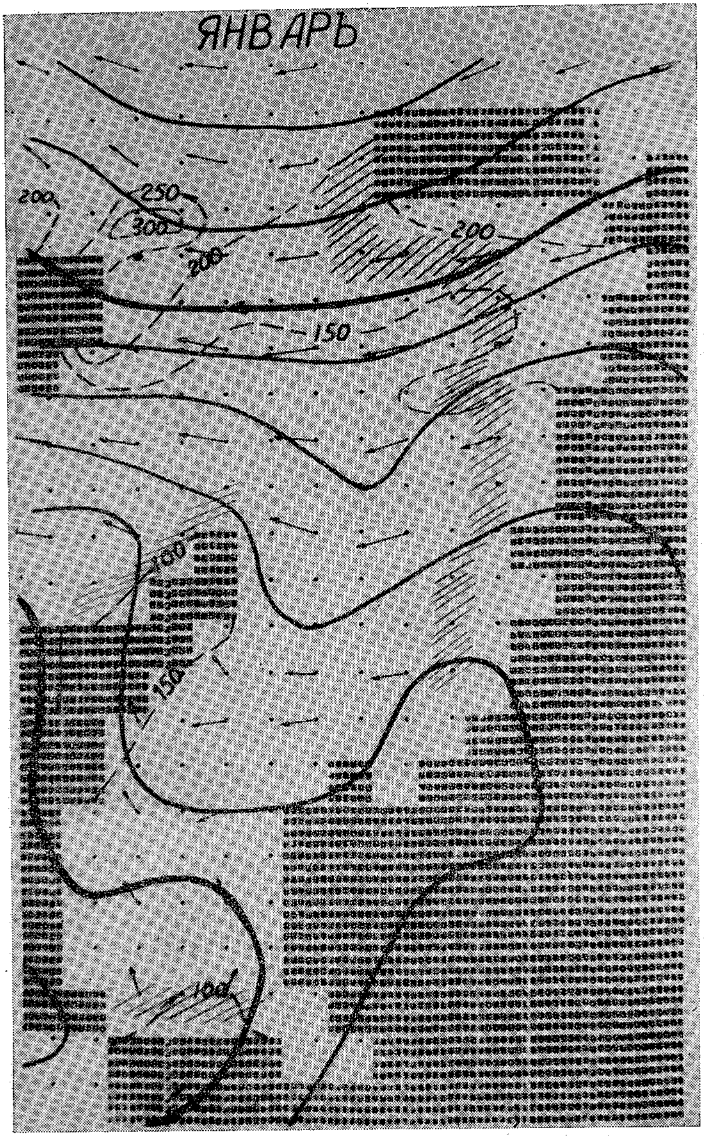


Рис. 2.6. Вычисленное состояние ледяного покрова Карского моря (штриховкой показаны зоны разрежения).

Пунктир — изолинии толщины льда в сантиметрах, стрелки — направление дрейфа льда, сплошные линии — изобары приземного атмосферного давления.

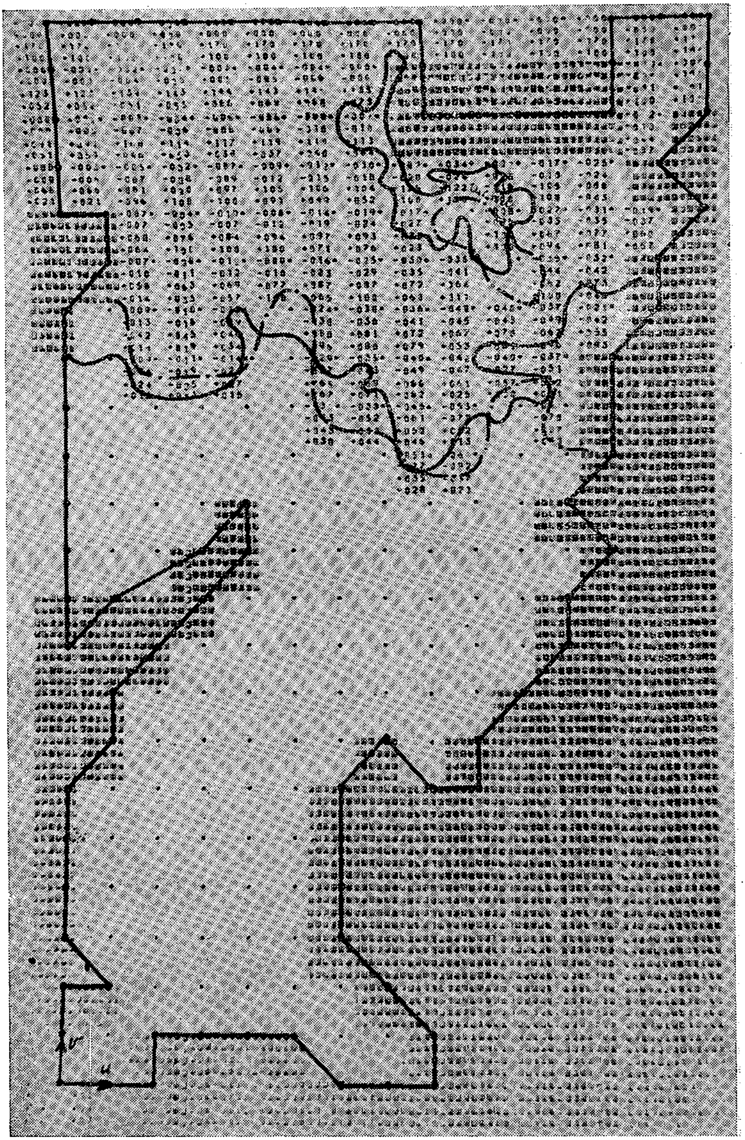


Рис. 2.7. Состояние ледяного покрова Карского моря летом 1953 г.

Сплошная линия — наблюденная граница льда, пунктирная линия — вычисленная граница льда, информация в узле сетки (по вертикали): *u*, *v* — составляющие скорости дрейфа льда в десятых долях километра в сутки, *h* — толщина льда в сантиметрах, *N* — сплоченность льда в десятых долях балла.

членом правой части уравнения (2.54). На рис. 2.7 приведено состояние ледяного покрова Карского моря, вычисленное от почти сплошного покрытия льдом всей акватории на интервал в два месяца. Стаивание льда в летний период довольно полно описывается уравнением теплового баланса поверхности льда в зависимости от радиационного баланса **Б**, турбулентного теплообмена $\mathbf{\Phi}_а$ и затраты тепла на испарение $\mathbf{\Phi}_и$

$$\frac{d\hbar}{dt} = \frac{1}{L\rho_л}(Б + \Phi_а + \Phi_и). \qquad (2.60)$$

Из рисунка видно, что совокупный учет термических и динамических факторов позволяет вычислять не только дрейф льда, но и его сплоченность, знание которой чрезвычайно важно при планировании различных морских операций.

Влияние динамических и термических факторов на состояние льда взаимосвязано. Летом в зонах пониженных $\hbar$ и N происходит не только более интенсивное таяние, но и возможно повышение скорости дрейфа льда. В свою очередь увеличение сплоченности льда за счет динамических факторов приводит к уменьшению пространства чистой воды, прогрева моря и бокового вытаивания льда. Такая картина процессов повсеместно имеет место в естественных условиях. Именно вследствие того, что течения и ветер в ряде районов Северного Ледовитого океана и его морей способствуют конвергенции льдов в массивы с высокой сплоченностью, их летнее таяние оказывается пониженным и массивы сохраняются дольше, чем окружающие льды. Напротив, дивергенция течениями и ветром антарктических льдов способствует их быстрому летнему таянию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 2

1. Гудкович З. М. Об основных закономерностях дрейфа льдов в Центральном полярном бассейне.— Материалы конференции по проблеме «Взаимодействие атмосферы и гидросферы в северной части Атлантического океана», вып. 3—4, Л., Гидрометеоиздат, 1961, с. 75—88.
2. Гудкович З. М., Романов М. А. Метод расчета распределения мощности льдов в арктических морях в зимний период.— Труды ААНИИ, 1970, т. 292, с. 4—48.
3. Доронин Ю. П., Хейсин Д. Е. Морской лед.— Л.: Гидрометеоиздат, 1975.— 318 с.
4. Лайхтман Д. Л. О ветровом дрейфе ледяных полей.— Труды ЛГМИ, 1958, вып. 7, с. 129—137.
5. Рузин М. И. О ветровом дрейфе льдов в неоднородном поле давления.— Труды ААНИИ, 1959, т. 226, с. 123—135.
6. Тимохов Л. А. О динамике ледяного покрова и изменении его сплоченности.— Труды ААНИИ, 1967, т. 257, с. 125—134.
7. Шулейкин В. В. Физика моря.— М.: Наука, 1968.— 1083 с.
8. Ingram R., Johannessen O., Paunder E. Pilot study of ice drift in the Gulf of St. Lawrence.— J. Geophys. Res., 1969, vol. 74, N 23, p. 5453—5459.
9. Reed R. and Campbell W. The equilibrium drift of ice station “Alpha”.— J. Geophys. Res., 1962, vol. 67, N 1, p. 281—297.

Глава 3. ДИНАМИКА ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

3.1. Теория гравитационных поверхностных волн малой амплитуды (линейные гравитационные волны)

Если на поверхности находящегося первоначально в покое океана возникают волны, то при пренебрежении силами вязкости их можно с достаточной степенью точности считать безвихревыми. Действительно, как следует из теоремы Гельмгольца, в невязкой жидкости, состоящей из одних и тех же частиц, циркуляция вдоль замкнутой кривой постоянная во времени. Пусть волны на поверхности тяжелой идеальной жидкости возникают под действием сил давления. В состоянии покоя циркуляция скорости вдоль любой замкнутой кривой, естественно, отсутствовала, следовательно, она будет равна нулю и после начала волнения. Но в таком случае на основании известной теоремы Стокса, связывающей поток ротора скорости через какую-либо поверхность с циркуляцией скорости вдоль контура, ограничивающего эту поверхность, доказывается, что движение невязкой жидкости, которое является безвихревым в некоторый момент времени, всегда остается безвихревым.

В реальной жидкости вязкость, связанная с возникновением касательных напряжений, носящих непотенциальный характер, неизбежно должна приводить к появлению завихренности, однако, если рассматривать перемещение волн на небольшое расстояние за небольшой промежуток времени, то их можно считать потенциальными. Этому условию лучше всего отвечают волны зыби.

Как указывалось в разделе 1.2, гравитационные волны описываются уравнениями (0.14) и (0.15). Первое из них нелинейно из-за квадрата скорости, который определяется адвективным членом в уравнении движения. Введем характерные масштабы величин и сравним между собой члены локальной и адвективной инерции v_x/t_x и v_x^2/L_x. Скорость частиц жидкости по порядку равна высоте волны h, деленной на период колебаний τ (характерный масштаб времени), и сама скорость заметно изменяется за промежуток времени порядка периода волны и на расстояниях порядка длины волны λ (характерный масштаб расстояния), следовательно,

$$\frac{v_x}{t_x} \sim \frac{h}{\tau^2}, \quad \frac{v_x^2}{L_x} \sim \frac{h^2}{\lambda\tau^2}.$$

Колебания будут линейными, если

$$\frac{h^2}{\lambda\tau^2} \ll \frac{h}{\tau^2} \text{ или } \frac{h}{\lambda} \ll 1. \tag{3.1}$$

Практически оказывается, что волны длиной порядка 100 м и высотой порядка 2 м и даже более удовлетворяют условию (3.1). Следовательно, уравнение (14) переходит в

$$\nabla\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{P}{\rho} + gz\right) = 0. \tag{3.2}$$

Не ограничивая общности, рассмотрим колебания в плоскости xOz (плоскопараллельное движение). Начало координат расположим на невозмущенной поверхности с осью z, направленной вертикально вверх, и осью x — в направлении распространения волн.

Определим те начальные и граничные условия, которым должен удовлетворять потенциал скоростей.

Условие непротекания на дне приводит к простому условию для вертикальной составляющей придонной скорости при $H = \text{const}$:

$$w|_{z=-H} = 0 \text{ или } \left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=-H} = 0. \tag{3.3}$$

На свободной поверхности $\zeta = \zeta(x, z, t)$ давление P сохраняет постоянное значение, равное значению атмосферного давления P_a, так как изменения давления в зависимости от фазы колебаний данной точки поверхности и скоростей обтекающего волну воздуха незначительны и во внимание не принимаются. Таким образом,

$$P|_{z=\zeta} = P_a = \text{const}. \tag{3.4}$$

Однако этого условия еще недостаточно для решения поставленной задачи. Необходимо знать для любой точки жидкости, в том числе принадлежащей поверхности, зависимость давления от определяющих величин. Эта зависимость получается из (3.2):

$$P = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \rho gz + f(t), \tag{3.5}$$

где $f(t)$ — произвольная функция времени, которая объединяется с потенциалом скоростей $\varphi(x, z, t)$ выбором новой функции $\varphi^* = \varphi + \int f(t)dt$. Это можно сделать, так как $\nabla\varphi^* = \nabla\varphi$.

По существу же $f(t)$ меняет лишь фазу колебаний, которая остается произвольной из-за неопределенности начала отсчета времени. Выражение (3.5) называется интегралом Коши, определяющим значение давления для любой точки жидкости.

При $z=\zeta$ из (3.4) и (3.5) имеем

$$P|_{z=\zeta} = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \rho g\zeta = P_a.$$

Давление является аддитивной величиной, поэтому его можно определять с точностью до произвольной постоянной, которой является атмосферное давление. После вычитания атмосферного давления из предыдущего выражения получается

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=\zeta} + g\zeta = 0. \qquad (3.6)$$

Связь между функцией $\zeta(x, t)$ и потенциалом $\varphi(x, z, t)$ устанавливается из кинематического условия

$$w|_{z=\zeta} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + u\frac{\partial\zeta}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

Только что полученное соотношение выражает естественное свойство непрерывности движения, заключающееся в том, что частица жидкости, расположенная на ее поверхности, все время остается на этой поверхности и не может перейти внутрь жидкости.

Так как мы рассматриваем малые колебания, то, во-первых,

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=\zeta}, \qquad (3.7)$$

во-вторых,

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=\zeta} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{z=0}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=\zeta} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0}.$$

Эти приближения приводят к погрешностям того же порядка, что и погрешности от пренебрежения членом адвективной инерции.

Следовательно, (3.6) и (3.7) переходят в

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=0} + g\zeta = 0 \qquad (3.8)$$

и

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=0}. \qquad (3.9)$$

Исключение из формул (3.8) и (3.9) функции ζ приводит ко второму граничному условию для потенциала скоростей:

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0. \tag{3.10}$$

Необходимо заметить, что полученное выражение является не обычным граничным условием, а фактически представляет собой динамическое уравнение процесса, происходящего на поверхности жидкости, так как выведено оно из уравнения движения. Для взволнованной поверхности весьма трудно определить начальные условия $\zeta(x, z, 0)$, и они могут быть произвольными. Если же рассматривать установившиеся волновые движения, то начальные условия отпадают и остаются лишь граничные условия.

Итак, для определения плоскопараллельных волновых движений жидкости в бассейне постоянной глубины необходимо решить уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{3.11}$$

при граничных условиях (3.3) и (3.10).

Так как исходные уравнения линейные, общее решение будет любой линейной комбинацией частных решений.

Определим частное решение уравнения Лапласа в виде произведения функций от горизонтальной координаты $X(x)$, от вертикальной координаты $Z(z)$ и от времени $F(t)$:

$$\varphi = X(x)\, Z(z)\, F(t). \tag{3.12}$$

Подстановка этого произведения в исходное уравнение дает

$$-\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}.$$

Левая часть полученного выражения зависит только от x, а правая — только от z, поэтому обе его части будут всегда равны друг другу, если они будут одновременно равны некоторой постоянной величине, которую обозначим как k^2. Тогда получим два следующих уравнения:

$$\frac{d^2Z}{dz^2} - k^2 Z = 0; \tag{3.13}$$

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2 X = 0. \tag{3.14}$$

Интегрируем первое из них по вертикали:

$$Z = C_1 e^{kz} + C_2 e^{-kz}.$$

В силу граничного условия (3.3)

$$C_1 e^{-kH} = C_2 e^{kH} = \frac{C}{2},$$

тогда функция $Z(z)$ может быть выражена как $Z(z) = C \operatorname{ch} k \times \times (z+H)$, а потенциал скоростей — как

$$\varphi = C \operatorname{ch} k (z+H)\, X(x)\, F(t). \qquad (3.15)$$

Подставляя полученное выше выражение для φ в условие для свободной поверхности (3.10) и производя преобразования, получаем

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dt^2} = -gk \operatorname{th} kH.$$

Введем обозначение

$$\sigma^2 = gk \operatorname{th} kH. \qquad (3.16)$$

Тогда имеем

$$\frac{d^2 F}{dt^2} + \sigma^2 F = 0. \qquad (3.17)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$F = C' e^{i(\sigma t + \gamma)},$$

где C' и γ — постоянные интегрирования, причем γ является начальной фазой колебаний.

Теперь вернемся к уравнению (3.14). Его интегрирование вдоль горизонтальной оси дает

$$X = C_1'' e^{-ikx} + C_2'' e^{ikx}.$$

Подставляя выражения для $F(t)$ и $X(x)$ в (3.15), окончательно имеем

$$\varphi = C \operatorname{ch} k (z+H)\, e^{i(\sigma t - kx + \gamma)} + D \operatorname{ch} k (z+H)\, e^{i(\sigma t + kx + \gamma)}. \qquad (3.18)$$

В выражении (3.18) постоянные интегрирования C' и C'' объединены с постоянной C, а константа D включает в себя постоянные C, C'_1 и C''_2. Это можно было сделать, так как ни одна из этих констант не определена из-за произвольности начальных условий.

Перейдем от показательной формы комплексных чисел к тригонометрической, ограничиваясь, как это принято в теории колебаний, либо вещественной, либо мнимой частью математических выражений. При этом из-за неопределенности начального отсчета времени без всякого ограничения общности можно положить фазу колебаний в момент $t = 0$ равной нулю, тогда (3.18) перейдет в

$$\varphi = C \operatorname{ch} k (z+H) \cos(\sigma t - kx) + D \operatorname{ch} k (z+H) \cos(\sigma t + kx). \qquad (3.19)$$

Теперь легко представить физический смысл параметров k и σ. Так как φ и ζ являются периодическими в пространстве и во времени, то $k=2\pi/\lambda$, $\sigma=2\pi/\tau$, где λ — длина волны, τ — период колебаний. Величины k и σ называются соответственно волновым числом и частотой волны. Волновое движение, определяемое первым членом выражения (3.19), представляет собой волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x, а определяемое вторым членом — волну, распространяющуюся в обратном направлении. Действительно, профиль взволнованной поверхности определяется всецело аргументами косинуса $\sigma t \mp kx$, которые можно написать в несколько другом виде: $k(ct \mp x)$, где $c=\lambda/\tau=\sigma/k$ — фазовая скорость распространения колебаний. В начальный момент времени ($t=0$) профиль волны будет определяться выражениями $k(\mp x)$, через одну секунду — выражениями $k[c\cdot 1-(x+c)]$ и $k[c\cdot 1+(x-c)]$. В первом случае волна распространяется в положительном, а во втором — в отрицательном направлении оси x с фазовой скоростью c.

Суперпозиция двух прогрессивных волн с одинаковой амплитудой и одинаковым периодом, движущихся навстречу друг другу, определяет так называемую стоячую волну:

$$\varphi=2C\,\mathrm{ch}\,k(z+H)\cos\sigma t\cos kx.$$

В дальнейшем будет рассматриваться прогрессивная волна, распространяющаяся в положительном направлении оси x:

$$\varphi=C\,\mathrm{ch}\,k(z+H)\cos(\sigma t-kx), \tag{3.20}$$

так как волна противоположного направления описывается таким же выражением, но с противоположным знаком при x. Круговая частота σ связана с волновым числом соотношением (3.16). Транцендентное уравнение (3.16) связывает длину волны с периодом колебаний и определяет фазовую скорость распространения волн c. После преобразований получается, что

$$c=\sqrt{\frac{g}{k}\,\mathrm{th}\,kH}. \tag{3.21}$$

Профиль свободной поверхности определяется из условия (3.8):

$$\zeta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=0},$$

т. е.

$$\zeta=\frac{c\sigma}{g}\,\mathrm{ch}\,kH\sin(\sigma t-kx).$$

Итак, взволнованная поверхность представляет собой прогрессивную синусоидальную волну высотой $h=\dfrac{2C\sigma}{g}\,\mathrm{ch}\,kH$, распространяющуюся в положительном направлении оси x. Постоянная интегрирования C осталась неопределенной, поэтому уравнению (3.11) удовлетворяют волны произвольной высоты, единственным ограничением является условие малости амплитуды. Подставляя в выражения для профиля волны и потенциала скорости значение h, имеем

$$\zeta = \frac{h}{2} \sin(\sigma t - kx); \tag{3.22}$$

$$\varphi = v_0 \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{k \operatorname{sh} kH} \cos(\sigma t - kx), \tag{3.23}$$

где $v_0 = \pi h/\tau$ — орбитальная скорость частиц жидкости, движущихся у поверхности волны по круговым траекториям.

Из (3.23) получаем выражения для составляющих скоростей и давления:

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_0 \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH} \sin(\sigma t - kx); \tag{3.24}$$

$$w = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = v_0 \frac{\operatorname{sh} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH} \cos(\sigma t - kx); \tag{3.25}$$

$$P = -\rho g z + \rho g \frac{h}{2} \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{ch} kH} \sin(\sigma t - kx). \tag{3.26}$$

При решении исходной системы уравнения движение считалось потенциальным. Полученные выражения для компонентов скорости дают возможность проверить правильность решения. Из (3.24) и (3.25) видно, что составляющая ротора скорости вдоль оси y тождественно равна нулю: $\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \equiv 0$, т. е. в волне отсутствуют элементы объема, вращающиеся как целое. Следовательно, какими бы ни были траектории частиц жидкости, движение чисто потенциальное. Соотношения (3.24) и (3.25) позволяют определить траектории, по которым перемещаются частицы жидкости в волне, в параметрическом виде $x = x(t)$, $z = z(t)$, если предположить, что скорости частиц являются только функциями времени $u = u(t)$, $w = w(t)$. Этим самым принимается, что значения составляющих скоростей на уровнях гребней и подошв одинаковы и равны их значениям, соответствующим среднему положению частиц. Такое допущение вполне приемлемо, так как рассматриваются малые колебания.

После замены в выражениях (3.24) и (3.25) координат частиц x и z на координаты их среднего положения x_0 и z_0 и интегрирования по времени, имеем

$$x - x_0 = -\frac{h}{2} \frac{\operatorname{ch} k(z_0+H)}{\operatorname{sh} kH} \cos(\sigma t - kx_0); \tag{3.27}$$

$$z - z_0 = \frac{h}{2} \frac{\operatorname{sh} k(z_0+H)}{\operatorname{sh} kH} \sin(\sigma t - kx_0). \tag{3.28}$$

Постоянные интегрирования определены как координаты первоначального невозмущенного положения частиц x_0 и z_0.

Полученные соотношения представляют собой параметрическую запись уравнения эллипса с полуосями $\frac{h}{2}\frac{\operatorname{ch} k(z_0+H)}{\operatorname{sh} kH}$ и $\frac{h}{2}\frac{\operatorname{sh} k(z_0+H)}{\operatorname{sh} kH}$, которые, как и скорости u и w, затухают с глубиной как гиперболические функции. Горизонтальная составляющая скорости изменяется от $v_0 \operatorname{cth} kH$ на поверхности до $v_0 \frac{1}{\operatorname{sh} kH}$ у дна. Вертикальная составляющая скорости из-

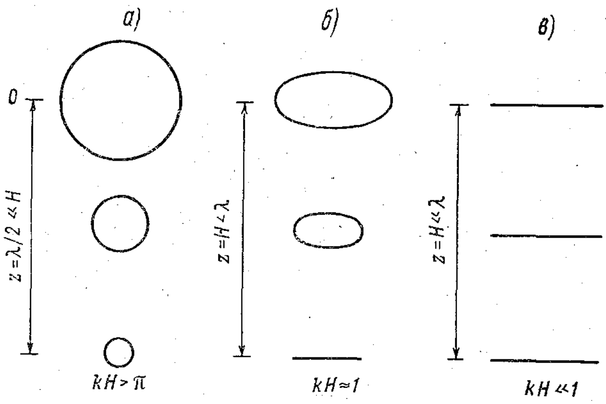


Рис. 3.1. Траектории частиц жидкости в прогрессивной волне.

а — глубокое море, *б* — море конечной глубины, *в* — мелкое море.

меняется от v_0 на поверхности до нуля на дне. Аналогично меняются и полуоси эллипсов: горизонтальная — от $\frac{h}{2}\operatorname{cth} kH$ до $\frac{h}{2}\frac{1}{\operatorname{sh} kH}$, вертикальная — от $\frac{h}{2}$ до нуля. Таким образом, частицы жидкости в волне совершают вращательные движения по замкнутым траекториям, но при этом само движение остается потенциальным, так как отсутствует вращательное движение самих частиц относительно любой своей оси (рис. 3.1).

От траекторий каждой частицы, определяемой ее положением как функцией времени, нужно отличать линии тока, определяемые как линии, к которым вектор скорости является касательной в фиксированный момент времени. Семейство линий тока $\psi = \text{const}$ ортогонально семейству линий потенциалов скоростей $\varphi = \text{const}$. Связь между ними дается соотношениями

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

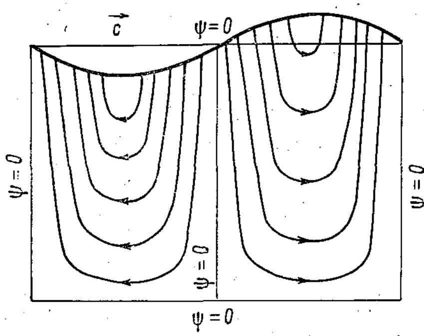


Рис. 3.2. Линии тока частиц жидкости в прогрессивной волне.

откуда путем интегрирования определяются линии тока ψ

$$\psi = \frac{v_0}{k} \frac{\operatorname{sh} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH} \sin(\sigma t - kx) = \text{const}$$

(см. рис. 3.2).

3.2. Волны мелкого и глубокого моря

В предыдущем разделе были получены выражения для гравитационных волн, распространяющихся в бассейне, глубина которого сравнима с длиной волны. Такие бассейны называются бассейнами конечной глубины. Теперь же рассмотрим два предельных случая — глубокое и мелкое море. Так как элементы волн являются функциями безразмерного параметра kH, то все три понятия моря: конечной глубины, глубокого и мелкого — являются относительными.

В глубоком море, когда $kH \to \infty$, $\operatorname{sh} kH \to \frac{e^{kH}}{2}$, $\operatorname{ch} kH \to \frac{e^{kH}}{2}$, $\operatorname{th} kH \to 1$. Практически море можно считать глубоким, если $kH > \pi$. Тогда выражение для потенциала скорости φ (3.23) перейдет в

$$\varphi = \frac{v_0}{k} e^{kz} \cos(\sigma t - kx), \tag{3.29}$$

фазовая скорость изобразится как

$$c = \sqrt{\frac{g}{k}} = \frac{g}{\sigma}. \tag{3.30}$$

Из соотношений (3.24)—(3.28) следует:

$$u = v_0 e^{kz} \sin(\sigma t - kx); \tag{3.31}$$

$$w = v_0 e^{kz} \cos(\sigma t - kx); \tag{3.32}$$

$$P = -\rho gz + \rho g \frac{h}{2} e^{kz} \sin(\sigma t - kx); \tag{3.33}$$

$$x - x_0 = -\frac{h}{2} e^{kz_0} \cos(\sigma t - kx_0); \tag{3.34}$$

$$z - z_0 = \frac{h}{2} e^{kz_0} \sin(\sigma t - kx_0). \tag{3.35}$$

Из двух последних выражений видно, что частицы в глубоком море описывают окружности радиусом $R = \frac{h}{2} e^{kz_0}$ (см. рис. 3.1).

Волны глубокого моря называются *короткими*.

Экспоненциальная зависимость потенциала скоростей и остальных характеристик волн от безразмерного параметра $\frac{2\pi}{\lambda} z$ приводит, во-первых, к весьма быстрому затуханию колебательного процесса с глубиной, во-вторых, к зависимости глубины проникновения колебаний от длины волны. Уже на глубине, равной половине длины волны, все характеристики волн ослабляются в $e^{-\pi} \simeq {}^1/_{23}$, а на глубине, равной длине волны,— в $e^{-2\pi} \simeq {}^1/_{1000}$. Следовательно, глубина проникновения колебаний коротких волн весьма мала. При этом чем выше частота колебаний, тем на меньшую глубину проникает колебательный процесс. Аналогичные зависимости можно встретить и у колебаний другой природы, например температурных, электромагнитных и т. д.

В мелком море, когда $kH \to 0$, $\operatorname{sh} kH \to kH$, $\operatorname{ch} kH \to 1$, $\operatorname{th} kH \to kH$. Море можно считать мелким, если $kH < 0{,}1\pi$. Следовательно, в мелком море потенциал скорости изобразится как

$$\varphi = \frac{v_0}{k^2 H} \cos(\sigma t - kx), \tag{3.36}$$

а фазовая скорость — как

$$c = \sqrt{gH} = \frac{\sigma}{k}. \tag{3.37}$$

Из выражений (3.24)—(3.28) имеем:

$$u = v_0 \frac{1}{kH} \sin(\sigma t - kx); \tag{3.38}$$

$$w = v_0 \cos(\sigma t - kx); \tag{3.39}$$

$$P = -\rho gz + \rho g \frac{h}{2} \sin(\sigma t - kx) = \rho g(-z + \zeta); \tag{3.40}$$

$$x - x_0 = -\frac{h}{2}\frac{1}{kH}\cos(\sigma t - kx_0); \tag{3.41}$$

$$z - z_0 = \frac{h}{2}\sin(\sigma t - kx_0). \tag{3.42}$$

Волны мелкого моря называются *длинными*. Если в случае глубокого моря и моря конечной глубины горизонтальные и вертикальные скорости и полуоси орбит частиц были либо равны по модулю, либо одного порядка, то в мелком море горизонтальные и вертикальные скорости, а также полуоси орбит частиц жидкости оказываются разных порядков.

В мелком море отношение вертикальных и горизонтальных скоростей или вертикальных и горизонтальных полуосей орбит оказывается равным величине $2\pi H/\lambda$, которая в этом случае намного меньше единицы. Таким образом, в длинных волнах преобладают колебания в продольном направлении (см. рис. 3.1).

Из (3.37) следует, что в отдельно бегущей длинной волне

$$\frac{u}{c} = \pm\frac{\zeta}{H} \quad \text{или} \quad u = \pm\sqrt{\frac{g}{H}}\,\zeta. \tag{3.43}$$

Соотношения (3.43) являются общими для длинных линейных волн.

Обычно, рассматривая отдельную гармоническую прогрессивную волну, записывают ее в виде

$$\zeta = a\sin(\sigma t \mp kx);$$
$$u = \pm u_0\sin(\sigma t \mp kx), \tag{3.44}$$

где a — амплитуда волнового возвышения; $u_0 = a\sqrt{g/H}$ — амплитуда скорости течения; σ — частота; $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число (верхние знаки относятся к волне, бегущей в сторону положительных x, а нижние — к противоположно направленной волне). Две встречные прогрессивные волны равной амплитуды дают в сумме стоячую волну:

$$\zeta = a\sin(\sigma t - kx) + a\sin(\sigma t + kx) = 2a\cos kx\sin\sigma t;$$
$$u = u_0\sin(\sigma t - kx) - u_0\sin(\sigma t + kx) = -2u_0\sin kx\cos\sigma t. \tag{3.45}$$

В общем случае, когда встречные волны не равны по амплитуде, их суперпозиция дает смешанную или прогрессивно-стоячую волну:

$$\zeta = a_1\sin(\sigma t - kx) + a_2\sin(\sigma t + kx) = (a_1 - a_2)\sin(\sigma t - kx) + 2a_2\cos kx\sin\sigma t;$$

$$u = u_{0,1}\sin(\sigma t - kx) - u_{0,2}\sin(\sigma t + kx) = (u_{0,1} - u_{0,2})\sin(\sigma t - kx) + 2u_{0,2}\sin kx\cos\sigma t. \tag{3.46}$$

В природе встреча противоположно направленных длинных волн обычно возникает вследствие отражения некоторой первичной прогрессивной волны от препятствия, которым может служить берег либо резкое изменение глубины H и ширины b бассейна. Если амплитуды прямой и отраженной волн равны a_1 и a_2, то интенсивность отражения характеризуется отношением $r = a_2/a_1$, которое называют *коэффициентом отражения*. При достаточно резком изменении H и b, т. е. при $d \ll \lambda$ (где d — протяженность зоны изменения H и b, а λ — длина волны) коэффициент отражения определяется выражением [7]

$$r = \frac{b_1 \sqrt{gH_1} - b_2 \sqrt{gH_2}}{b_1 \sqrt{gH_1} + b_2 \sqrt{gH_2}}, \tag{3.47}$$

где индекс «1, 2» означает принадлежность к бассейнам, расположенным перед зоной изменения и за ней. Из выражения (3.47) видно, что сужение или повышение дна приводит к положительному ($r > 0$), а расширение или понижение дна — к отрицательному ($r < 0$) отражению. В результате суперпозиции прямой и отраженной волн суммарное движение в бассейне 1 имеет вид прогрессивно-стоячей волны с образованием либо пучности (при $r > 0$), либо узла (при $r < 0$) в месте отражения. Полное отражение ($r = 1$; $a_2 = a_1$) имеет место, когда $b_2 \sqrt{gH_2} = 0$.

Как известно, в жидкости, в отличие от твердых тел, поперечные колебания возможны либо на поверхностях раздела, либо при наличии градиента плотности в направлении, перпендикулярном к направлению распространения колебаний. Это так называемые внутренние волны, которые будут рассмотрены в дальнейшем. В случае постоянной плотности поперечные колебания в толще жидкости не могут возникать из-за отсутствия в жидкой среде упругих тангенциальных напряжений.

Поперечные колебания в однородном море могут возникнуть лишь на свободной поверхности; при этом они постепенно затухают с глубиной. Локализация колебаний на свободной поверхности является необходимым условием для однородной жидкости. К достаточным условиям возбуждения колебаний нужно отнести наличие источников возмущения на этой поверхности.

Длинные волны гораздо ближе к продольным, чем к поперечным. В этом случае вся толща жидкости охвачена колебаниями, не затухающими с глубиной, и сами волны становятся, по существу, объемными, а следовательно, продольными, так как поперечные колебания в однородной жидкости следует отнести к разряду поверхностных волн.

Необходимо обратить внимание на выражение (3.40), из которого видно, что для мелкой воды давление меняется с глубиной по гидростатическому закону, т. е. вертикальное смещение поверхности жидкости на ζ меняет давление одинаково на $\rho g \zeta$ по всей глубине.

Хотя волны глубокого моря, моря конечной глубины и мелкого моря по-разному воздействуют на среду, переход к относительным единицам измерения убедительно показывает, что во всех трех случаях за глубину проникновения колебаний может быть принята некоторая величина, равная приблизительно половине длины волны, что позволяет считать ее не только характеристикой периодичности колебаний в горизонтальном направлении, но и параметром, определяющим толщину слоя жидкости, охваченного колебаниями. Глубина проникновения этих колебаний зависит лишь от их частоты, следовательно, она обусловлена только закономерностями самого волнового процесса, его инерционностью, а не характеристиками среды. Если не будет затухания с глубиной, то поступающая в волны энергия должна будет тратиться на колебания всей массы жидкости до дна; при $kH \to \infty$ это приведет к тому, что возникшие на поверхности моря волны не смогут распространяться вдоль нее.

В то время как глубина проникновения колебаний в глубь моря зависит от свойств самого процесса, скорость распространения колебаний (фазовая скорость) обусловлена лишь свойствами самой среды (глубиной бассейна) для случая длинных волн, зависит от длины волны и глубины бассейна в море конечной глубины и определяется лишь закономерностями самого волнового процесса в глубоком море.

Фазовая скорость волны является функцией ее длины (частоты колебаний), следовательно, волны с различными длинами распространяются с различными скоростями, т. е. диспергируют. Лишь в случае длинных волн дисперсия волнового движения отсутствует.

Из выражений (3.21) и (3.30) видно, что скорость распространения волны фиксированной длины в море конечной глубины всегда меньше, чем в глубоком море; скорость же распространения этой же волны в мелком море (3.37) всегда меньше, чем в море конечной глубины.

3.3. Группы волн

Так как мы рассматривали линейную систему, то ей будут удовлетворять не только частные решения, полученные ранее, но и их любые линейные комбинации. Общее решение исходных уравнений будет являться суммой мод вида (3.22) или (3.23). В самом общем случае эта сумма переходит в интеграл Фурье. Следовательно, сложное волновое движение водных масс можно представить как суперпозицию большого количества мод различных амплитуд и длин. Из-за дисперсии следует ожидать, что через определенный промежуток времени произойдет распределение волн на группы, состоящие из волн приблизительно одной длины. Для простоты рассматривается одна из групп волн, образованная волнами равной высоты и очень близкой длины:

$$\zeta_1 = a \sin(\sigma_1 t - k_1 x);$$

$$\zeta_2 = a \sin(\sigma_2 t - k_2 x),$$

где $a = h/2$.

Тогда результирующее колебание свободной поверхности определится выражением

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = 2a \sin\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} t - \frac{k_1 + k_2}{2} x\right) \times$$

$$\times \cos\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} t - \frac{k_1 - k_2}{2} x\right).$$

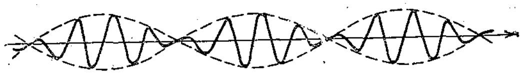


Рис. 3.3. Группы волн.

Так как $\sigma_1 \approx \sigma_2 \approx (\sigma_1 + \sigma_2)/2 = \sigma$ и $k_1 \approx k_2 \approx (k_1 + k_2)/2 = k$, то результат суперпозиции двух волн можно представить в виде

$$\zeta = 2a \sin(\sigma t - kx) \cos \frac{1}{2} (\delta\sigma t - \delta k x), \tag{3.48}$$

где $\delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$, $\delta k = k_1 - k_2$.

Следовательно, профиль свободной поверхности меняется с одной стороны по закону, близкому к составляющим модам, с другой стороны — по закону $\cos(\delta\sigma t - \delta k x)$.

Поскольку $\delta\sigma$ и δk малы́, то вторая функция изменяется весьма медленно как по времени, так и по расстоянию и результирующее колебание является амплитудно-модулированным в каждый момент времени и для любой точки пространства (рис. 3.3).

Период основного колебания близок к периоду составляющих волн

$$\tau = \frac{2\tau_1 \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} \approx \tau_1 \approx \tau_2. \tag{3.49}$$

Период модуляции значительно превышает период составляющих мод; этот период тем больше, чем меньше разность между периодами составляющих волн:

$$\tau_m = \frac{4\pi}{\delta\sigma} = \frac{2\tau_1 \tau_2}{\tau_1 - \tau_2}. \tag{3.50}$$

Сомножитель $2a\cos(\delta\sigma t - \delta kx)$ следует рассматривать как амплитуду суперпозиции двух волн почти равных периодов. Эта амплитуда очень медленно меняется от нуля до удвоенного значения амплитуд складываемых волн. Амплитудно-модулированное результирующее колебание называется *группой волн*, распространяющейся со своей групповой скоростью. Причем групповая скорость отличается от фазовой скорости отдельных гармоник.

Фазовая скорость волн была определена ранее как отношение длины волны к периоду или как отношение круговой частоты к волновому числу. Вывод фазовой скорости можно сделать иначе, исходя из условия постоянства фазы колебаний каждой точки профиля прогрессивной волны для любого момента времени, т. е. из условия

$$\sigma t - kx = \mathrm{const}. \tag{3.51}$$

Если за время dt точка с фиксированной фазой прошла расстояние dx, то ее скорость распространения, а следовательно, и фазовая скорость перемещения волны определится как $c = dx/dt$. Из (3.51), дифференцируя по времени, имеем $\sigma - k\,dx/dt = 0$, таким образом, $c = \sigma/k = \lambda/\tau$.

Скорость распространения амплитудной модуляции, или групповая скорость, также может быть определена из условия, аналогичного условию (3.51):

$$\delta\sigma t - \delta kx = \mathrm{const}, \tag{3.52}$$

откуда

$$c_{\text{гр}} = \frac{dx}{dt} = \frac{\delta\sigma}{\delta k};$$

в пределе при $\delta\sigma \to 0$ и $\delta k \to 0$ имеем

$$c_{\text{гр}} = \frac{d\sigma}{dk} = \frac{d\,(ck)}{dk} = c - \lambda\frac{dc}{d\lambda}. \tag{3.53}$$

Так как в глубоком море и море конечной глубины фазовая скорость возрастает с ростом длины волны, т. е. $dc/d\lambda > 0$, то в глубоком море и море конечной глубины групповая скорость должна быть меньше фазовой $c_{\text{гр}} < c$.

В мелком море фазовая скорость не зависит от длины волны, следовательно, $dc/d\lambda = 0$ и $c_{\text{гр}} = c$, поэтому для длинных волн среда является недиспергирующей.

Выражение для групповой скорости в явном виде получается из (3.16) и (3.53):

$$c_{\text{гр}} = \frac{1}{2}c\left(1 + \frac{2kH}{\operatorname{sh} 2kH}\right). \tag{3.54}$$

Из соотношения (3.54) видно, что в бассейне конечной глубины $2kH < \operatorname{sh} 2kH$ и групповая скорость оказывается меньше фазовой; в глубоком море при больших kH $2kH \ll \operatorname{sh} 2kH$, поэтому групповая скорость коротких волн равна половине фазовой

$$c_{\text{гр}} = \frac{1}{2} c. \tag{3.55}$$

В случае длинных волн отношение $\dfrac{2kH}{\operatorname{sh} 2kH}$ стремится к единице, поэтому в мелком море групповая скорость становится равной фазовой.

Выражение (3.53) справедливо для всех случаев, независимо от количества составляющих гармоник. Вместо суперпозиции двух прогрессивных волн рассмотрим наложение бесконечного числа волн, заданных потенциалами скоростей, с очень мало отличающимися друг от друга амплитудами и длинами:

$$\varphi = \int\limits_{k_0 - \varepsilon}^{k_0 + \varepsilon} c(k)\, e^{i(\sigma t - kx)}\, dk, \tag{3.56}$$

где $k_0 = \text{const}$, а ε достаточно мало́. Аргумент $\sigma t - kx$ можно представить следующим образом:

$$\sigma t - kx = \sigma_0 t - k_0 x + (\sigma - \sigma_0) t - (k - k_0) x,$$

тогда (3.56) переходит в

$$\varphi = e^{i(\sigma_0 t - k_0 x)} \int\limits_{k_0 - \varepsilon}^{k_0 + \varepsilon} c(k)\, e^{i[(\sigma - \sigma_0) t - (k - k_0) x]}\, dk.$$

Так как эта группа бесконечно большого числа волн должна распространяться как единое целое с практически неизменной формой, к ней также может быть применен принцип стационарной фазы суммарного колебания, который мы использовали ранее, т. е.

$$(\sigma - \sigma_0) t - (k - k_0) x \simeq \text{const}.$$

Таким образом, скорость распространения этой группы волн равна $(\sigma - \sigma_0)/(k - k_0)$ и при $(\sigma - \sigma_0) \to 0$ и $(k - k_0) \to 0$ получаем выражение (3.53).

3.4. Энергия волн. Поток энергии

Полная энергия прогрессивной волны состоит из кинетической энергии, обусловленной движением ее частиц, и из потенциальной энергии, обусловленной отклонением частиц от положения равновесия. Кинетическая энергия волны единичной ширины, осредненная по ее длине, равна

$$Э_к = \frac{1}{2\lambda} \rho \iint\limits_{(П)} \left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] dx\,dz, \tag{3.57}$$

где $П$ — площадь, ограниченная свободной поверхностью в пределах длины волны, дном и двумя вертикалями. Интеграл по площади $П$ можно заменить, согласно теореме Грина, интегралом по контуру, ограничивающему эту площадь. Тогда (3.57) с учетом потенциальности движения переходит в

$$Э_к = \frac{1}{2\lambda} \rho \int\limits_L \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n} dL, \tag{3.58}$$

где n — внешняя нормаль к контуру.

Нормальная составляющая скорости на дне $\partial\varphi/\partial n$ из-за условия непротекания равна нулю, а значения ее на вертикалях из-за периодичности движения будут равны по величине, но противоположны по знаку, следовательно, интеграл по контуру L сводится к интегралу по свободной поверхности в пределах длины волны.

Из-за малости амплитуд интегрирование по криволинейному участку можно заменить интегрированием по оси x, а нормальную производную в точках свободной поверхности вычислить как $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0}$, функцию φ также можно вычислить не при $z = \zeta$, а при $z = 0$. Тогда получим

$$Э_к = \frac{1}{2\lambda} \rho \int\limits_0^\lambda \left(\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{z=0} dx.$$

С учетом (3.23) и (3.16) окончательно имеем

$$Э_к = \frac{\rho g h^2}{16}. \tag{3.59}$$

Потенциальная энергия собственно прогрессивной волны единичного сечения без учета той потенциальной энергии, которой жидкость обладает в состоянии покоя, осредненная по ее длине, равна

$$Э_п = \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^\lambda \int\limits_0^h \rho g z\,dx\,dz,$$

после интегрирования получаем

$$Э_п = \frac{\rho g h^2}{16}. \tag{3.60}$$

Из (3.59) и (3.60) видно, что кинетическая и потенциальная энергии прогрессивной волны постоянны в любой момент времени и равны друг другу. Полная энергия волны, приходящаяся на единицу ее длины,—

$$Э=\frac{\rho g h^2}{8}. \tag{3.61}$$

В полученное выражение не вошла глубина бассейна, следовательно, средняя по длине удельная энергия волны в единичном сечении вертикального столба жидкости одинакова для моря любой глубины.

Вычислим теперь поток энергии, проходящей через сечение единичной ширины вдоль фронта волны в направлении ее распространения:

$$\Phi_Э=\frac{dЭ'}{dt}=\rho\frac{d}{dt}\iint_{(П)}\left\{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+gz\right\}dx\,dz, \tag{3.62}$$

где $Э'$ — энергия объема единичной ширины.

Если область $П$ ограничивается контуром, фиксированным в пространстве, то (3.62) переходит в

$$\Phi_Э=\rho\iint_{(П)}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}\right)dx\,dz. \tag{3.63}$$

Подынтегральная функция может быть представлена в виде

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial t}=\nabla\varphi\cdot\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t},$$

откуда на основании теоремы Грина с учетом потенциальности движения получаем

$$\Phi_Э=\rho\int_L\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dL. \tag{3.64}$$

Средний за период поток энергии через любую поверхность единичной ширины, проведенную от дна к свободной поверхности, равен

$$\overline{\Phi}_Э=\frac{\rho}{\tau}\int_t^{t+\tau}\int_{-H}^{\zeta}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dz\,dt. \tag{3.65}$$

С учетом (3.23) получаем

$$\overline{\Phi}_Э=\frac{\rho g h^2}{8}\frac{c}{2}\left(1+\frac{2kH}{\operatorname{sh}2kH}\right),$$

т. е.

$$\overline{\Phi}_Э=E\,c_{гр}. \tag{3.66}$$

Получается так, что средняя скорость распространения энергии в случае одной гармонической волны численно равна групповой скорости. Скорость переноса энергии при суперпозиции некоторого количества одинаковых по длине и совпадающих по фазе колебаний волн также равна групповой скорости. Но и в первом, и во втором случае группы волн отсутствуют. Поэтому, если с кинематической точки зрения понятие групповой скорости имеет большое значение,— это не что иное как скорость перемещения амплитудно-модулированной результирующей волны, т. е. действительно скорость распространения группы волн, то с динамической точки зрения лучше говорить просто о потоке энергии, а не о скорости переноса энергии волны. Динамическое понятие групповой скорости как скорости переноса энергии носит больше формальное, чем физическое содержание, тем более что полная энергия волны целиком в течение периода колебаний переноситься волнами не может.

3.5. Волны конечной амплитуды (нелинейные волны)

Основные особенности волнового движения, вытекающие из линейной теории, в основном вполне удовлетворительно описывают процессы, происходящие в жидкой среде. Однако некоторые закономерности, полученные для волн малой амплитуды, только приблизительно совпадают с данными наблюдений и экспериментов в лабораториях. Вычисленные значения фазовой и групповой скоростей, частоты колебаний, орбитальной скорости частиц жидкости под гребнем волны, а также энергии отличаются от экспериментальных данных не более чем на 5 %. С такой же степенью точности совпадает с наблюдениями закон затухания волнового процесса с глубиной.

Из линейной теории нельзя получить асимметрию профиля волны относительно спокойной поверхности воды, волновой перенос, зависимость орбитальной скорости частиц жидкости от фазы колебаний и некоторые другие характеристики.

Волновое движение происходит под действием силы тяжести, которая по своей природе является потенциальной, поэтому следует ожидать, что наиболее физически обоснованные результаты будет давать теория волн конечной амплитуды, носящих потенциальный характер.

Впервые задача о нелинейных потенциальных волнах была рассмотрена Стоксом в 1847 г. Приведем ее без подробного вывода, ограничиваясь лишь постановкой задачи и общими принципами решения.

Исходными уравнениями являются нелинейное уравнение движения и уравнение неразрывности.

В случае нелинейных колебаний интеграл Бернулли для плоскопараллельного движения имеет вид

$$P = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \rho gz - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right] + \text{const}; \tag{3.67}$$

уравнение неразрывности остается прежним

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0. \tag{3.68}$$

Граничное условие на поверхности теперь следующее:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}+u\frac{\partial P}{\partial x}+w\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z=\zeta}=0. \tag{3.69}$$

Нелинейное уравнение движения привело к интегралу Бернулли, отличающемуся от (3.5) членом $\frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]$, которым из-за конечности амплитуды волны, а следовательно, из-за значительности орбитальных скоростей пренебречь нельзя.

В отличие от волн малой амплитуды, изменилось и граничное условие на поверхности (3.69), в котором появились адвективные члены. Как в случае линейной, так и в случае нелинейной постановки задачи осталось неизменным лишь уравнение неразрывности (3.68).

Предполагается, что на бесконечной глубине скорость потока известна и равна фазовой скорости c; фактически это соответствует введению новой переменной $x_1=x-ct$, тогда $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=$ $=\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$; $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-c\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}$ и т. д.

Определяя из интеграла Бернулли производные от давления по времени и осям координат и подставляя их в (3.69), получаем граничное условие для поверхности, которое из-за введенного преобразования становится стационарным:

$$c^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial z}-2c\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial z}\right)+$$
$$+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2+2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial z}=0. \tag{3.70}$$

Из интеграла Бернулли можно получить еще одно соотношение для поверхности, если подставить туда соответствующее значение давления:

$$c\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}-g\zeta-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]+\mathrm{const}=0. \tag{3.71}$$

Следовательно, необходимо найти интеграл уравнения Лапласа, для которого бы выполнялись условия (3.70) и (3.71).

Будем искать неизвестную функцию $\varphi(x_1, z)$ в виде разложения в ряд по степеням некоторого малого безразмерного параметра ε

$$\varphi=\varepsilon\varphi_1+\varepsilon^2\varphi_2+\varepsilon^3\varphi_3+\ldots \tag{3.72}$$

Хотя фазовая скорость колебаний связана с длиной волны, необходимо дополнительно ввести также зависимости следующего вида:

$$c = c_0 + \varepsilon c_1 + \varepsilon^2 c_2 + \varepsilon^3 c_3 + \ldots;$$

$$c^2 = c_0^2 + \varepsilon (2c_0 c_1) + \varepsilon^2 (c_1^2 + 2c_0 c_2) + \varepsilon^3 (2c_1 c_2) + \ldots \qquad (3.73)$$

Раскладывая в дальнейшем функции $\varphi_1(x_1, z)$, $\varphi_2(x_1, z)$, $\varphi_3(x_1, z)$ в ряды Тейлора при $z = 0$ по степеням ζ:

$$\varphi_1(x_1, \zeta) = \varphi_1(x_1, 0) + \frac{\zeta}{1!}\left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial z}\right]_{z=0} + \frac{\zeta^2}{2!}\left[\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2}\right]_{z=0} + \ldots$$

и т. д., а функцию ζ по степеням ε:

$$\zeta = \varepsilon \zeta_1 + \varepsilon^2 \zeta_2 + \varepsilon^3 \zeta_3 + \ldots,$$

подставляя эти разложения, а также (3.72) и (3.73) в граничное условие (3.70) и эти разложения, а также (3.72) во второе граничное условие (3.71) и приравнивая коэффициенты при различных степенях ε в правых и левых частях полученных уравнений, после преобразований получаем условие на поверхности для искомых функций $\varphi_1(x_1, z)$, $\varphi_2(x_1, z)$, $\varphi_3(x_1, z)$. В дальнейшем определяется интеграл уравнения Лапласа и безразмерный параметр ε.

Окончательно имеем в переменных x, z, t

$$\varphi = -c' a e^{kz} \sin(\sigma t - kx), \qquad (3.74)$$

где $c' = c_0\left(1 - \frac{1}{8} k^2 a^2\right)$.

Уравнение поверхности имеет вид

$$\zeta = a \cos(\sigma t - kx) + \frac{1}{2} k a^2 \cos 2(\sigma t - kx) + $$
$$+ \frac{3}{8} k^2 a^3 \cos 3(\sigma t - kx). \qquad (3.75)$$

Если полученная волна симметрична относительно вертикальных прямых, проходящих через гребни и подошвы, то она оказывается несимметричной относительно невозмущенной поверхности. Вершина волны возвышается над невозмущенным уровнем на $a + \frac{ka^2}{2} + \frac{3k^2a^3}{8}$, в то время как подошва опускается на $a - \frac{ka^2}{2} + \frac{3k^2a^3}{8}$; при этом ложбины имеют более пологое очертание, чем гребни.

Связь между фазовой скоростью и длиной волны дается соотношением

$$c^2 = \frac{g}{k}(1 + k^2 a^2), \qquad (3.76)$$

следовательно, скорость распространения волны конечной амплитуды зависит не только от ее длины (частоты), как это имело место для линейных волн, но также и от амплитуды.

Определим теперь составляющие орбитальных скоростей и траектории частиц жидкости.

В случае волн малой амплитуды мы полагали, что скорости в точках x_0 и x_0+x, z_0 и z_0+z равны, т. е. имели место приближенные равенства

$$u(x_0+x)=\frac{\partial\varphi(x_0+x)}{\partial x}\approx\frac{\partial\varphi(x_0)}{\partial x}=u(x_0) \text{ и т. д.}$$

Теперь нужно пользоваться следующими соотношениями:

$$u=u_0+x\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0+z\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0+\ldots; \qquad (3.77)$$

$$w=w_0+x\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0+z\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0+\ldots \qquad (3.78)$$

Если выразить отклонения от невозмущенного положения через скорости линейного приближения, то с точностью до второго приближения из (3.77) и (3.78) можно найти

$$u=u_0+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\int_0^t u_0\,dt+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0\int_0^t w_0\,dt; \qquad (3.79)$$

$$w=w_0+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0\int_0^t u_0\,dt+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0\int_0^t w_0\,dt. \qquad (3.80)$$

Для вычисления составляющих орбитальных скоростей нужно вместо u и w подставить их выражения через потенциал φ; траектории частиц жидкости получаются при вторичном интегрировании (3.79)—(3.80).

Окончательно имеем

$$u=v_0e^{kz}\cos(\sigma t-kx)+c'k^2a^2e^{2kz}; \qquad (3.81)$$

$$w=-v_0e^{kz}\sin(\sigma t-kx); \qquad (3.82)$$

$$x-x_0=ae^{kz_0}\sin(\sigma t-kx_0)+c'k^2a^2e^{2kz_0}t, \qquad (3.83)$$

$$z-z_0=ae^{kz_0}\cos(\sigma t-kx_0). \qquad (3.84)$$

Когда исследовались волны малой амплитуды, было установлено, что каждая частица жидкости описывает замкнутую траекторию. Теперь же при распространении волн конечной амплитуды видно, что, кроме колебательного движения, частицы имеют постоянное движение в направлении распространения волны; это поступательное движение пропорционально времени, следовательно, траектории частиц жидкости оказываются разомкнутыми. В волнах конечной амплитуды возникает добавочное волновое течение со скоростью

$$v_{\text{волн}} = c' k^2 a^2 e^{2kz}. \tag{3.85}$$

Скорость поступательного перемещения жидкости тем больше, чем круче волны; с глубиной оно затухает по экспоненциальному закону, на поверхности же скорость течения может достигать по различным оценкам 25—38 см/с, т. е. имеет тот же порядок, что и скорость ветрового течения.

Стоксом было также получено приближенное решение для волн конечной амплитуды, распространяющихся в море конечной глубины. Решение оказалось пригодным лишь для $kH \geqslant 1$; при $kH < 1$ оно расходилось. Результаты для моря конечной глубины оказались качественно такими же, что и для глубокого бассейна. В первом приближении теория Стокса дает потенциал скорости, профиль волны, орбитальные скорости и траектории частиц, а также фазовую скорость такими же, как в случае линейной постановки задачи. Учет вторых степеней амплитуды приводит к асимметрии профиля волны и волновому переносу. Фазовая скорость изменяется лишь в третьем приближении.

Вот некоторые результаты для моря конечной глубины с точностью до второго приближения; выражение для потенциала скорости имеет вид

$$\varphi = -c_0 a \frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{sh} kH} \sin(\sigma t - kx) +$$

$$+ \frac{3}{8} c_0 k^2 a^2 \frac{\operatorname{ch} 2k(z+H)}{\operatorname{sh}^4 kH} \sin 2(\sigma t - kx),$$

а для профиля волны

$$\zeta = a \cos(\sigma t - kx) - ka^2 \frac{\operatorname{ch} kH (\operatorname{ch} 2kH + 2)}{4 \operatorname{sh}^3 kH} \cos 2(\sigma t - kx).$$

Самым важным результатом, полученным Стоксом, следует признать открытый им волновой перенос, сопутствующий потенциальным волнам конечной амплитуды. Вообще наличие волнового течения является необходимым условием существования именно потенциальных волн. Это течение должно сопровождать и волны малой амплитуды, правда, оно незначительно. Оно не было получено нами в разделе 3.1 из-за линеаризации исходной задачи. По существу же движение частиц жидкости в волне с постоянной по значению скоростью по замкнутым орбитам не может быть потенциальным, так как замкнутость орбит свидетельствует об отсутствии волнового течения — необходимого условия потенциальных волн.

Довольно оригинальное доказательство существования дополнительного стоксова течения было проделано Рэлеем.

В несколько другой интерпретации оно выполнено М. П. Кожевниковым. Приведем это доказательство.

Рассмотрим потенциальные волны, перемещающиеся в положительном направлении оси x. На это потенциальное волновое движение жидкости наложим другое потенциальное движение — равномерное движение, имеющее скорость, равную фазовой скорости распространения волн c, но направленное в противоположную сторону. Пусть скорость перемещения частиц жидкости в волне U. Если придать всем частицам жидкости дополнительную скорость $(-c)$, то профиль волны остановится, а все поле скоростей, так как $|c|>|U|$, превратится в стационарное течение жидкости вдоль отрицательной оси x в потоке с неподвижной волнистой свободной поверхностью.

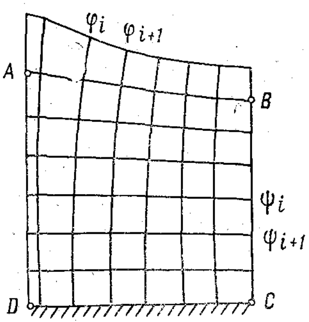


Рис. 3.4. Гидродинамическая сетка течения в потоке, заменившем волны.

Рассмотрим течение жидкости в потоке, заменившем волны, на участке от подошвы до гребня волны. При этом для увеличения наглядности нанесем на чертеж два семейства линий, дающих так называемую квадратичную гидродинамическую сетку течения, в которой $\varphi_{i+1}-\varphi_i=\psi_{i+1}-\psi_i$, где i — номер линии сетки течения (рис. 3.4).

Составим контур $ABCD$ из двух линий тока AB и CD и отрезков DA и BC, которые являются линиями равного потенциала и проходят через вершину и подошву волны. Наложение на потенциальное волновое движение потенциального движения со скоростью $(-c)$ привело к тому, что результирующее движение стало стационарным, а в случае стационарного движения линии тока должны совпадать с траекториями, поэтому участки AB и CD являются не только линиями тока, но и траекториями движения жидкости.

Так как мы рассматриваем потенциальное движение, то

$$\int\limits_{BA} U_{BA}\,dS+\int\limits_{DC} U_{DC}\,dS=0.$$

Осредняя скорости течения жидкости на участках BA и CD за период колебаний τ и считая средние скорости касательными к траекториям, получаем

$$\overline{U}_{BA}\cdot BA=\overline{U}_{CD}\cdot CD.$$

Так как $BA>CD$, то совершенно очевидно, что $\overline{U}_{BA}<\overline{U}_{CD}$. Если теперь освободить волновое движение жидкости от наложенного на него равномерного движения со скоростью, численно равной фазовой, но направленной навстречу распространению волны, легко получить следующее неравенство:

$$c-\overline{U}_{BA}>c-\overline{U}_{CD},$$

следовательно, в волне, распространяющейся в положительном направлении оси x, менее глубокая частица за период колебаний всегда обгоняет более глубокую частицу, в результате чего возникает волновое течение жидкости. Таким образом, необходимым условием потенциальности волн является наличие волнового потока, о чем уже говорилось ранее. К достаточному условию потенциальности волн следует отнести наличие именно такого по значению волнового течения, которое обеспечивает потенциальность движения [см. (3.85)], потому что в противном случае либо волны перестают быть потенциальными, либо это течение вызвано другими причинами.

Пользуясь полученными ранее формулами, определяющими гравитационные прогрессивные волны конечной амплитуды, можно вывести выражения для механической энергии. Схема определения энергии может быть такой же, как в разделе 3.4. После ряда преобразований кинетическая энергия прогрессивной волны единичного сечения, осредненная по ее длине, изобразится как

$$Э_{к}=\frac{\rho g a^2}{4}(1+k^2a^2), \tag{3.86}$$

а потенциальная — как

$$Э_{п}=\frac{\rho g a^2}{4}\left(1+\frac{k^2a^2}{4}\right). \tag{3.87}$$

Эти соотношения получены с точностью до второй степени отношения амплитуды волны к ее длине. Интересно отметить, что, во-первых, по своему виду формулы (3.86) и (3.87) повторяют формулы для энергий прогрессивной волны малой амплитуды, во-вторых, по значению эти энергии больше, причем кинетическая энергия прогрессивной волны превышает потенциальную энергию этой волны.

Полная механическая энергия имеет значение

$$Э=\frac{\rho g a^2}{2}\left(1+\frac{5}{8}k^2a^2\right). \tag{3.88}$$

Как хорошо видно, все полученные соотношения для волн конечной амплитуды отличаются от аналогичных выражений для волн малой амплитуды наличием поправок, связанных с нелинейным характером колебаний. Одни из этих поправок появляются уже во втором приближении, как, например, для профиля волны, другие — лишь в третьем приближении, как в случае фазовой скорости. Нелинейные эффекты растут с увеличением ka, т. е. с увеличением крутизны волны. Однако рост крутизны имеет предел, что связано с устойчивостью.

Стокс сначала высказал предположение, а потом доказал, что с увеличением амплитуды очертания волн стремятся к предельной форме, характеризуемой угловой вершиной, причем угол между касательными в верхней точке волны всегда равен 120°. Форму предельной волны Стокса исследовал сначала Мичелл, а затем А. И. Некрасов. Было получено, что крутизна предельной волны равна 0,143.

3.6. Гравитационно-капиллярные и капиллярные волны

Если длина волны становится менее 20 см, то на колебания в поле силы тяжести накладывается влияние сил поверхностного натяжения и волны из разряда гравитационных переходят в разряд гравитационно-капиллярных. Влияние сил поверхностного натяжения меняет основные закономерности волнового процесса. В интервале 0,2—20 см капиллярные и гравитационные силы оказываются одного порядка, а для более коротких волн силой тяжести можно пренебречь по сравнению с силой поверхностного натяжения.

Рассмотрим вначале гравитационно-капиллярные волны, задачу будем считать линейной, а жидкость несжимаемой и невязкой, по-прежнему ограничимся движением вдоль одной из горизонтальных координат x.

По сравнению с гравитационными волнами все изменения связаны лишь с появлением добавочной силы поверхностного натяжения. Колебания поверхности вызываются только вертикальными составляющими действующих сил. Поэтому интеграл Бернулли для свободной поверхности можно будет теперь записать в виде

$$P|_{z=0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - g\zeta + \gamma \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0, \tag{3.89}$$

где γ — нормированный на плотность коэффициент поверхностного натяжения.

После исключения из (3.89) денивеляции уровня получаем

$$\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + g\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \gamma \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z}\right)_{z=0} = 0. \tag{3.90}$$

Решение уравнения Лапласа для потенциала скоростей и уравнения (3.90) с учетом граничного условия (3.8) по-прежнему пишется в виде (3.17).

Преобразования, выполненные по аналогии с преобразованиями раздела 3.1, приводят к следующей дисперсионной зависимости:

$$\sigma^2 = (gk + \gamma k^3)\,\mathrm{th}\, kH. \tag{3.91}$$

Тогда фазовая скорость гравитационно-капиллярных волн изобразится как

$$c=\frac{\sigma}{k}=\sqrt{\left(\frac{g}{k}+\gamma k\right)\operatorname{th} kH}=\left(\frac{g}{\sigma}+\frac{\gamma k^2}{\sigma}\right)\operatorname{th} kH, \tag{3.92}$$

а соответствующий потенциал скоростей — как

$$\varphi=\frac{h}{2}\,\frac{g}{\sigma}\,\frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{ch} kH}\cos(\sigma t-kx)+\frac{h}{2}\,\frac{\gamma k^2}{\sigma}\,\frac{\operatorname{ch} k(z+H)}{\operatorname{ch} kH}\times$$

$$\times\cos(\sigma t-kx), \tag{3.93}$$

где первый член полученного выражения характеризует потенциал гравитационных, а второй — потенциал капиллярных волн. Следовательно, в линейной постановке задачи характеристики волн являются аддитивными функциями как гравитационных, так и капиллярных сил. Энергия гравитационно-капиллярных волн также может быть представлена суммой энергий гравитационных и капиллярных волн. Гравитационная часть энергии была получена в разделе 3.4.

Кинетическая энергия капиллярных волн определяется так же, как для гравитационных волн, из (3.58) с учетом капиллярной части дисперсионного соотношения (3.91). После преобразований получим

$$Э_{\text{кк}}=\frac{\rho\gamma h^2k^2}{16}. \tag{3.94}$$

Потенциальная энергия в капиллярных волнах возникает из-за растяжения поверхности, при этом необходимо преодолеть действие восстанавливающей силы поверхностного натяжения. Следовательно, потенциальная энергия будет определяться разностью длин взволнованной и невозмущенной поверхностей, т. е.

$$Э_{\text{пк}}=\frac{\rho\gamma}{\lambda}\left[\int_0^\lambda\sqrt{1+\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2}\,dx-\lambda\right].$$

Раскладывая подынтегральное выражение в ряд и пренебрегая членами второго порядка малости, получаем

$$Э_{\text{пк}}=\frac{\rho\gamma}{2\lambda}\int_0^\lambda\left(\frac{d\zeta}{dx}\right)^2 dx=\frac{\rho\gamma h^2k^2}{16}. \tag{3.95}$$

Таким образом, полная энергия гравитационно-капиллярных волн, приходящаяся на единицу длины волны, равна

$$Э=\frac{\rho h^2}{8}(g+\gamma k^2). \tag{3.96}$$

Предельные случаи для гравитационных и капиллярных волн получаются из (3.91)—(3.93) и (3.96), если $\gamma k^2 \ll g$ или $g \ll \gamma k^2$. Случай $\gamma k^2 \ll g$ соответствует гравитационным волнам, которые были рассмотрены ранее; условие $g \ll \gamma k^2$ приводит к чисто капиллярным волнам. Так как при длине волн $\lambda < 0{,}2$ см глубокая вода начинается при $H > 0{,}1$ см, то для них имеет смысл лишь случай $kH \to \infty$. Поэтому из (3.91)—(3.93) и (3.96) имеем

$$\varphi_к = \frac{h}{2} \frac{\gamma k^2}{\sigma} e^{kz} \cos(\sigma t - kx); \tag{3.97}$$

$$\sigma_к^2 = \gamma k^3; \tag{3.98}$$

$$c_к = \sqrt{\gamma k} = \frac{\gamma k^2}{\sigma}; \tag{3.99}$$

$$Э_к = \frac{\rho \gamma k^2 h^2}{8}. \tag{3.100}$$

Фазовая скорость капиллярных волн уменьшается с ростом длины волны, поэтому их групповая скорость, как это следует из (3.53), должна быть больше фазовой $c_{гр.\,к} > c_к$. Из (3.98), (3.99) получаем выражения для групповой скорости в явном виде

$$c_{гр.\,к} = \frac{3}{2} \frac{\gamma k^2}{\sigma} = \frac{3}{2} c_к. \tag{3.101}$$

Следовательно, капиллярные волны, как и гравитационные волны глубокого моря и моря конечной глубины, тоже обладают дисперсией, но противоположного знака.

3.7. Генерация волн ветром

В предыдущих разделах были получены соотношения для любых волн на поверхности океана независимо от причин их возникновения. Теперь же перейдем к рассмотрению собственно ветровых волн. Ветровые волны носят случайный характер, поэтому для их описания и исследования широко применяют соотношения и выводы из теории случайных процессов, но так как спектры ветровых волн довольно узки, к ним с достаточной степенью точности пригодны также выводы и соотношения, полученные для монохроматических волн.

Для зарождения ветровых волн на невозмущенной поверхности необходимо, чтобы движущийся воздушный поток был турбулентным. Неоднородность его строения приводит к тому, что давление воздуха на различных участках первоначально невозмущенной поверхности будет отличаться, что приводит к возникновению неоднородной поверхности, которые должны увеличиваться при определенных благоприятных условиях. Возникшие вначале волны относятся к разряду *капиллярных* и *гравитационно-капиллярных*; с увеличением длины они становятся чисто гравитационными.

С течением времени фазовая скорость и энергия этих волн растут, увеличивающиеся волны вносят еще бóльшие возмущения в воздушный поток, которые приводят к еще большему росту волн. И этот рост будет продолжаться до тех пор, пока фазовая скорость волн будет меньше скорости ветра.

Рассмотрим генерацию и развитие ветровых волн, следуя выводам Филлипса и Майлса. При этом будем пренебрегать слабыми нелинейными эффектами и влиянием завихренности. Следовательно, движение воды описывается уравнением Лапласа для потенциала скоростей с граничными условиями

$$\left(\frac{P}{\rho}+\frac{\partial\varphi}{\partial t}+g\zeta-\gamma\nabla_{\mathbf{r}}^{2}\zeta\right)_{z=0}=0; \tag{3.102}$$

$$\left.\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right|_{z=0}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}; \tag{3.103}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\to 0 \text{ при } z\to\infty. \tag{3.104}$$

Представим случайное возвышение свободной поверхности $\zeta(\mathbf{x},t)$ и распределение флюктуаций давления $P(\mathbf{x},t)$ в форме интегралов Фурье—Стильтьеса:

$$\zeta(\mathbf{x},\ t)=\int_{\mathbf{k}} dA(\mathbf{k},\ t)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}; \tag{3.105}$$

$$P(\mathbf{x},\ t)=\int_{\mathbf{k}} dP(\mathbf{k},\ t)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \tag{3.106}$$

Потенциал скорости, удовлетворяющий уравнению Лапласа и граничным условиям (3.102)—(3.104), записывается в виде

$$\varphi(\mathbf{x},\ z,\ t)=\int_{\mathbf{k}} k^{-1}\,d\dot{A}(\mathbf{k},\ t)\,e^{kz}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \tag{3.107}$$

где точка обозначает дифференцирование по времени.

Подставляя (3.105)—(3.107) в условие (3.102), получаем

$$d\ddot{A}(\mathbf{k},\ t)+(gk+\gamma k^{3})\,dA(\mathbf{k},\ t)+\frac{k}{\rho}\,dP(\mathbf{k},\ t)=0. \tag{3.108}$$

Так как случайное поле давления является причиной генерации волн, то необходимо определить распределение давления на движущейся случайной поверхности моря. Предполагается, что флюктуации давления на поверхности бывают двух видов: одни порождаются только турбулентными вихрями воздушного потока в невозмущенном волнами пограничном слое, а другие возникают из-за искажения воздушного потока взволнованной поверхностью.

Основная гипотеза рассматриваемой теории как раз и заключается в представлении амплитуд Фурье—Стильтьеса поля давления в виде амплитуды $dP_t(\mathbf{k},\ t)$, связанной с турбулентностью невозмущенного волнами воздушного потока, и амплитуды $dP_\zeta(\mathbf{k}, t)$, обусловленной возмущениями, вносимыми волнами:

$$dP(\mathbf{k},\ t) = dP_t(\mathbf{k},\ t) + dP_\zeta(\mathbf{k},\ t). \tag{3.109}$$

Индуцированная волнами компонента давления на основании исследований Филлипса и Майлса определяется как

$$dP(\mathbf{k},\ t) = (\nu + i\mu)\,\rho c^2(k)\,k\,dA(\mathbf{k},\ t), \tag{3.110}$$

где ν и μ — безразмерные коэффициенты взаимодействия волн с турбулентным пограничным слоем атмосферы, являющиеся функционалами ветрового поля.

С учетом такого представления $dP(\mathbf{k}, t)$ уравнение (3.108) переходит в

$$d\ddot{A}(\mathbf{k},\ t) + [(gk + \gamma k^3 + \nu c^2 k^2) + i\mu c^2 k^2]\,dA(\mathbf{k},\ t) = -\frac{k}{\rho}\,dP_t(\mathbf{k},\ t). \tag{3.111}$$

Доказывается, что вещественная часть индуцированного компонента давления отрицательна и описывает избыток давления у ложбин и подсос у гребней, что подтверждается непосредственными измерениями в море. В процессе генерации волн эта составляющая играет незначительную роль ($\nu \ll 1$). Мнимый же компонент является определяющей; он вычисляется по известному полю ветра. Тогда с достаточной степенью точности комплексную частоту в (3.111) с учетом дисперсионного соотношения $\sigma^2 = gk + \gamma k^3$ можно представить в виде

$$N \simeq \sigma(1 + i\mu)^{1/2} \approx \sigma\left(1 + \frac{1}{2}\,i\mu\right). \tag{3.112}$$

Из (3.110) и (3.112) видно, что при такой аппроксимации частота волн σ (вещественная часть N) не изменяется от взаимодействия с ветровым потоком, мнимая же часть N пропорциональна той части пульсаций амплитуды Фурье—Стильтьеса индуцированного давления, которая находится в фазе с наклоном поверхности волн kdA и связана с передачей энергии и импульса движущимся волнам.

Следовательно, уравнение (3.111) переходит в

$$d\ddot{A}(\mathbf{k},\ t) + N^2\,dA(\mathbf{k},\ t) = -\frac{k}{\rho}\,dP_t(\mathbf{k},\ t). \tag{3.113}$$

Решение уравнения (3.113), удовлетворяющее начальным условиям

$$dA(\mathbf{k},\ t) = 0, \quad d\dot{A}(\mathbf{k},\ t) = 0,$$

соответствующим невозмущенной поверхности, имеет вид

$$dA(\mathbf{k},\ t) = -\frac{k}{\rho N}\int_0^t dP_t(\mathbf{k},\ \tau_1)\sin N(t - \tau_1)\,d\tau_1. \tag{3.114}$$

Не будем рассматривать самые начальные этапы развития волн, полагая, что $\sigma t \gg 1$. Будем считать также, что время, прошедшее с начала зарождения волн, значительно превышает интегральный масштаб времени составляющих давления с волновым числом $\mathbf{k}$, измеренный в движущейся со скоростью среднего ветра $\mathbf{V}_a$ системе отсчета, т. е. $t \gg t_x(\mathbf{k})$. Причем $t_x(\mathbf{k})$ представляет собой характерное время, для которого амплитуды чисто турбулентных пульсаций давления $dP_t(\mathbf{k}, t)$ еще остаются коррелированными.

Тогда, если поле турбулентного давления статистически стационарно и, следовательно, пространственно-временной спектр пульсаций давления не зависит от начального момента времени, из (3.114) получается следующее выражение для спектра волн:

$$\Psi(\mathbf{k}, t) = \frac{\overline{dA(\mathbf{k}, t)\, dA^*(\mathbf{k}, t)}}{d\mathbf{k}} =$$

$$= \frac{1}{2\rho^2 c^2} \frac{\operatorname{sh} \mu\sigma t}{\mu\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\mathbf{k}, \tau') \cos \sigma\tau' \, d\tau', \qquad (3.115)$$

где $dA^*(\mathbf{k}, t)$ — величина, комплексно сопряженная с $dA(\mathbf{k}, t)$; $d\mathbf{k} = dk_x dk_y$, $\Omega(\mathbf{k}, \tau')$ — энергетический спектр флюктуаций давления в ветровом потоке у поверхности с временны́м сдвигом τ'. Вводя теперь спектр волновых чисел и частот $\Pi(\mathbf{k}, \sigma)$, являющийся преобразованием Фурье по времени от спектра $\Omega(\mathbf{k}, \tau)$:

$$\Pi(\mathbf{k}, \sigma) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\mathbf{k}, \tau') e^{i\sigma\tau'} d\tau' = \pi^{-1} \int_{0}^{\infty} \Omega(\mathbf{k}, \tau') \cos \sigma\tau' \, d\tau',$$

запишем выражение (3.115) в более удобном для анализа виде:

$$\Psi(\mathbf{k}, t) = \frac{\pi \Pi(\mathbf{k}, \sigma)}{\rho^2 c^2(k)} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu\sigma t}{\mu\sigma} \right). \qquad (3.116)$$

Соотношение (3.116) упрощается, если продолжительность действия ветра t либо мала́, либо велика по сравнению с $(\mu\sigma)^{-1}$. Эти два случая соответствуют двум различным механизмам роста волн. Если $\mu\sigma t \ll 1$, то (3.116) превращается в

$$\Psi(\mathbf{k}, t) = \frac{\pi \Pi(\mathbf{k}, \sigma)}{\rho^2 c^2} t. \qquad (3.117)$$

Выражение (3.117) описывает так называемую резонансную стадию развития ветрового волнения, когда амплитуды волн растут линейно, пропорционально времени; при этом индуцированные волнами флюктуации давления играют малую роль. Механизм резонансной стадии развития ветрового волнения можно выяснить, если вернуться к выражению (3.114), переписав его в несколько другом виде:

$$dA(\mathbf{k},\ t) = -\frac{k}{\rho\sigma}\int_0^t dP(\mathbf{k},\ \tau_1)\sin\sigma(t-\tau_1)\,d\tau_1. \qquad (3.118)$$

Так как

$$\sin\sigma(t-\tau_1) = \frac{e^{i\sigma(t-\tau_1)} - e^{-i\sigma(t-\tau_1)}}{2i},$$

то (3.118) превращается в

$$dA(\mathbf{k},\ t) = \frac{ik}{2\rho\sigma}\int_0^t dP(\mathbf{k},\ \tau_1)\left[e^{i\sigma(t-\tau_1)} - e^{-i\sigma(t-\tau_1)}\right]d\tau_1. \qquad (3.119)$$

Вследствие того что время действия ветра мало́ по сравнению с характерным временем эволюции турбулентных пульсаций давления на поверхности моря или временем турбулентных взаимодействий, случайное пространственное распределение давления переносится без всяких изменений средним ветром со скоростью $\mathbf{V}_a$. При этих условиях

$$dP(\mathbf{k},\ \tau_1) = dP(\mathbf{k},\ 0)\,e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_a\tau_1},$$

а выражение (3.119) принимает вид

$$dA(\mathbf{k},\ t) = \frac{ik\,dP(\mathbf{k},\ 0)}{2\rho\sigma}\left[e^{i\sigma t}\int_0^t e^{i(\mathbf{k}\mathbf{V}_a-\sigma)\tau_1}d\tau_1 - e^{-i\sigma t}\int_0^t e^{i(\mathbf{k}\mathbf{V}_a+\sigma)\tau_1}d\tau_1\right]. \qquad (3.120)$$

Если $\sigma \neq \mathbf{k}\cdot\mathbf{V}_a$, то интегралы в (3.120) будут осциллирующими функциями времени с ограниченными амплитудами, если же $\sigma = \mathbf{k}\mathbf{V}_a$, то (3.120) превращается в

$$dA(\mathbf{k},\ t) = \frac{ik\,dP(\mathbf{k},\ 0)}{2\rho\sigma}\left(te^{i\sigma t} - \frac{1}{\sigma}\sin\sigma t\right). \qquad (3.121)$$

При этих условиях колебания будут линейно расти со временем, причем при $\sigma t \gg 1$ будет преобладать первый член в выражении (3.121). Следовательно, из всех компонентов Фурье поля флюктуаций давления поверхность океана реагирует сильнее всего на те составляющие, частота которых совпадает с частотой свободных поверхностных волн, имеющих то же волновое число. Такое свойство избирательности аналогично резонансу в колебательных системах.

Если $\mu\sigma t \sim 1$, то индуцированное волнами давление становится уже существенным. Между ветром и волнами возникает так называемая обратная связь: составляющие давления, находящиеся в одной фазе с наклоном поверхности волн, растут вместе с этим наклоном. В результате такого взаимодействия происходит передача энергии от среднего движения к волновым возмущениям в атмосфере, которые в свою очередь передают ее волнам в результате работы сил давления. Рост волн становится более быстрым и достигает экспоненциальной зависимости от времени, характерной для неустойчивости. При $\mu\sigma t \gg 1$ соотношение (3.116) переходит в

$$\Psi(\mathbf{k},\ t) = \frac{\pi \Pi(\mathbf{k},\ \sigma)}{2\rho^2 c^2 \mu\sigma} e^{\mu\sigma t}. \qquad (3.122)$$

К сожалению, объединенная теория генерации волн Филлипса—Майлса не позволяет объяснить передачу энергии низкочастотным составляющим спектра волнения.

Как уже упоминалось выше, спектры ветровых волн узки, поэтому по-прежнему имеют большое значение детерминированные теории, несмотря на широкое распространение в последнее время приемов и методов спектрального анализа. Среди теорий, относящихся к монохроматическим волнам, наибольший интерес представляют ставшие классическими результаты, полученные В. В. Шулейкиным. Использовалось уравнение баланса волновой энергии для элементарного водного объема, ограниченного свободной поверхностью, дном и четырьмя вертикальными плоскостями, расположенными параллельно и перпендикулярно к направлению распространения волн:

$$\frac{dЭ}{dt} = N_a - N_{\text{дис}},$$

где N_a — количество энергии, поступающей от ветра волнам в единицу времени через единичную площадь свободной поверхности; $N_{\text{дис}}$ — энергия, теряемая столбом жидкости единичного сечения в единицу времени за счет разного рода диссипативных процессов.

Существо теории питания волн энергией ветра, предложенной В. В. Шулейкиным, состоит в следующем: прежде всего рассматривается воздействие внешних сил непосредственно на частицы воды, движущиеся по своим орбитам, а не на колебательную систему в целом. Опыты в аэродинамической трубе с твердыми моделями волн симметричного профиля показали, что давление воздуха на наветренный склон волны P_{a1} больше давления на подветренный склон волны P_{a2}. Следовательно, каждые две «парные» частицы, находящиеся на наветренном и подветренном склонах, пересекающие одну и ту же горизонтальную плоскость, будут испытывать бóльшую силу давления воздуха при движении вниз и меньшую силу давления при движении вверх (рис. 3.5). Если эти частицы переместились по вертикали на расстояние dz, должен возникнуть прирост энергии волн

$$dЭ=(P_{a1}-P_{a2})\cos\alpha\, dz,$$

где α — угол между элементами поверхности волны и горизонтальной плоскостью. Так как этот угол мал, особенно у вершин и подошв волн, можно принять $\cos\alpha\approx 1$. За период волны τ полный прирост энергии выражается интегралом

$$Э=\int_0^h (P_{a1}-P_{a2})\, dz.$$

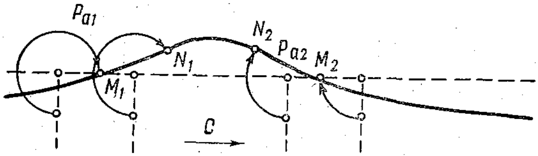


Рис. 3.5. Схема питания волн энергией ветра.

Прирост энергии от ветра волне в единицу времени равен

$$N_a=\frac{1}{\tau}\int_0^h (P_{a1}-P_{a2})\, dz. \tag{3.123}$$

По результатам опытов в аэродинамической трубе, где помещались модели с разными профилями волн, получена зависимость вида

$$P_{a1}-P_{a2}=\chi\rho_a V_a^2,$$

причем коэффициент χ зависит от крутизны волны.

Осредняя коэффициент пропорциональности по высоте волн и подставляя полученное выражение в (3.123), имеем

$$N_a=\bar{\chi}\rho_a V_a^2 \frac{h}{\tau}.$$

Обобщая это соотношение на случай потока над волнами, движущимися с фазовой скоростью c, окончательно получим

$$N_a=\bar{\chi}\rho_a (V_a-c)^2 \frac{h}{\tau}. \tag{3.124}$$

Значение энергии, передаваемой в единицу времени от воздушного потока ветровой волне, впервые получил В. В. Шулейкин, используя результаты опытов в штормовом кольцевом бассейне (рис. 3.6). Оно вычислялось из уравнения баланса энергии. При этом мощность $N_{дис}$ включала потери не только на турбулентное трение внутри жидкости, но и на трение о стенки бассейна.

Величина $dЭ/dt$ определялась непосредственно по кривым нарастания среднеквадратичной высоты, сумма потерь энергии — по кривым затухания волнения. Полная мощность N_a, передаваемая волне ветром, вычислялась, наконец, из выражения

$$N_a = \frac{dЭ}{dt} + N_{\text{дис}}.$$

Значения N_a, полученные по формуле (3.124), сравнивались с результатами экспериментов в бассейне. При не слишком сильном ветре (8 м/с) получено хорошее совпадение. По мере усиления ветра согласованность ухудшалась, и при ветре 17 м/с результаты опытов в бассейне превысили расчеты по формуле (3.124) более чем в два раза. Большое нарастание мощности объясняется появлением крутых волн более высоких порядков на основных волнах; тем самым волновое движение вносит еще большее возмущение в воздушный поток, что в свою очередь увеличивает асимметрию поля давления над волнами.

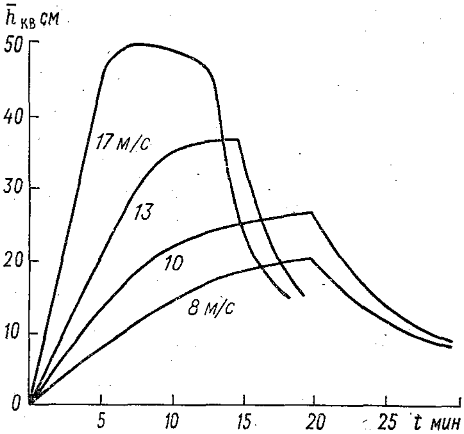


Рис. 3.6. Развитие и затухание волн в штормовом бассейне под действием ветра.

3.8. Разрушение волн

Как отмечалось в разделе 3.5, из-за потери устойчивости крутизна волны не может расти беспредельно. Неустойчивость же приводит к опрокидыванию вершин волн и возникновению пенистых белых барашков. Филлипс определил для ветровых волн так называемые интервалы равновесия, в которых распределение энергии определяется только физическими параметрами, характеризующими опрокидывание. При пространственно-временных масштабах, вязкость воды и поверхностное натяжение в которых не оказывают влияние на волновое движение, таким параметром будет ускорение свободного падения.

Из соображений размерности получается простейшая аппроксимация спектра гравитационных волн:

$$S(\sigma) = \beta g^2 \sigma^{-5} \text{ при } \sigma \geqslant \sigma_0, \qquad (3.125)$$

$$S(\sigma) = 0 \text{ при } \sigma < \sigma_0, \qquad (3.125\text{а})$$

где β — безразмерная постоянная, определенная по эмпирическим данным С. А. Китайгородским ($\beta \simeq 0{,}6 \cdot 10^{-2}$); σ_0 — нижняя граница высокочастотной части спектра. Профиль ветровых волн, испытывающих разрушение в глубоком море, сохраняет симметрию относительно вертикальной оси, которая проходит через вершину, что и подтверждается многочисленными наблюдениями за штормовыми волнами в океане. Схема развития ча-

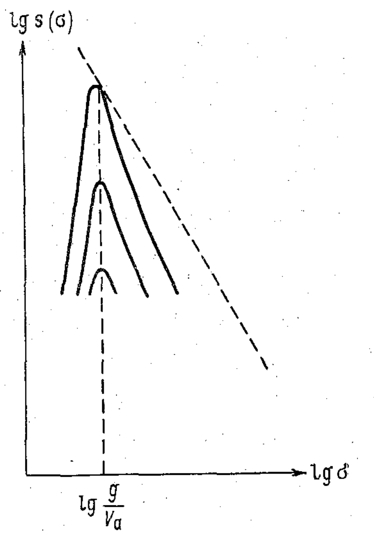


Рис. 3.7. Схема резонансной стадии развития волн.

Наклонная прямая соответствует закону Филлипса.

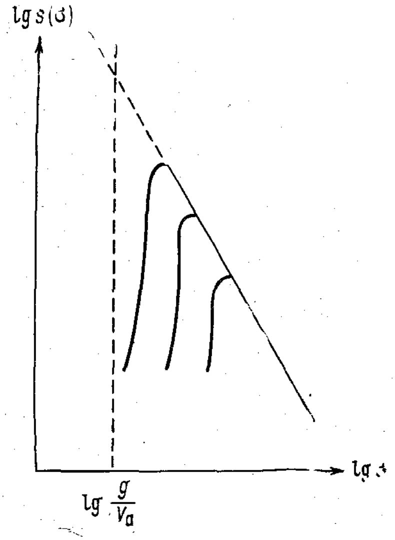


Рис. 3.8. Схема развития волн, амплитуды которых экспоненциально растут со временем.

Наклонная прямая соответствует закону Филлипса.

стотного спектра при резонансной генерации волн показана на рис. 3.7, схема системы, развивающейся по экспоненциальному закону,— на рис. 3.8. Из рисунков видно, что так называемый закон Филлипса является предельным случаем развития ветровых волн, после чего наступает опрокидывание.

Существует и другая причина разрушения волн, а именно — воздействие мелководья на профиль волны. В условиях мелководья волны не достигают чаще всего предельной высоты, которая определяется соотношением (3.125): они разрушаются из-за постепенного и непрерывного искажения их профиля. В. В. Шулейкин предложил следующий подход к решению задачи о распространении волны на мелководье. Существо идеи заключается в том, что обязательно учитывается изменение скорости распространения волны в зависимости от фазы, если глубина моря становится соизмеримой с амплитудой колебаний. Глубина моря в момент прохождения вершины волны максимальна и равна $H+\frac{h}{2}$, в момент прохождения подошвы — минимальна и равна $H-\frac{h}{2}$. Вводя обозначения $\alpha_1=k\left(H+\frac{h}{2}\right)$, $\alpha_2=k\left(H-\frac{h}{2}\right)$, получаем

$$c_1^2=\frac{g}{k}\operatorname{th}\alpha_1;\quad c_2^2=\frac{g}{k}\operatorname{th}\alpha_2.$$

Далее преобразуем

$$c_1^2-c_2^2=(c_1+c_2)(c_1-c_2)=\frac{g}{k}(\operatorname{th}\alpha_1-\operatorname{th}\alpha_2)=\frac{g}{k}\frac{\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)}{\operatorname{ch}\alpha_1\operatorname{ch}\alpha_2}. \tag{3.126}$$

Поскольку α_1 весьма мало отличается от α_2, а c_1 — от c_2, принимаем, что $c_1+c_2\simeq 2c_0$, $\operatorname{ch}\alpha_1\operatorname{ch}\alpha_2\simeq\operatorname{ch}^2\alpha_0$, $\operatorname{sh}(\alpha_1-\alpha_2)\simeq\alpha_1-\alpha_2$.

Так как $\alpha_1-\alpha_2=kh$, $\lambda_0=c_0\tau$, $\alpha_0=kH$, $c_0^2=\frac{g}{k}\operatorname{th}\alpha_0$, из (3.126) получаем

$$(c_1-c_2)\,\tau=\frac{2\pi h}{\operatorname{sh}2\alpha_0}. \tag{3.127}$$

Левая часть выведенного соотношения выражает длину отрезка, на который за один период смещается вперед вершина искаженной волны по отношению к подошве. Расстояние, на которое вершина волны опережает находящуюся на среднем уровне точку профиля, обозначим через ξ_τ; по сравнению с точкой профиля в средней фазе подошва волны отстанет на то же расстояние. Тогда выражение (3.127) запишем в виде

$$\xi_\tau=\frac{\pi h}{\operatorname{sh}2\alpha_0}. \tag{3.128}$$

Так как смещение вершины или подошвы волны пропорционально ее высоте, то опережение или отставание остальных точек профиля, отстоящих по вертикали на ζ от средней линии, выражаются соотношением

$$\xi_{\tau,\,\zeta}=\xi_\tau\frac{2\zeta}{h}.$$

Для произвольно заданного промежутка времени, в течение которого волна движется по мелководью, получаем

$$\xi_{t,\,\zeta}=\xi_{\tau,\,\zeta}\frac{t}{\tau}. \tag{3.129}$$

Искажение профиля волны в условиях мелководья лучше всего исследовать на примере простейшей синусоидальной волны. Проследим за дальнейшим изменением ее профиля, используя не время t, а непосредственно значение ξ_t для вершины и подошвы волны к концу исследуемого промежутка времени t. Смещение остальных точек профиля определяются формулой

$$\xi_{t,\,\zeta} = \xi_t \frac{2\zeta}{h}.$$

На рис. 3.9 изображены профили, соответствующие значениям $\frac{\xi_t}{\lambda} = 0,\ ^1/_{36},\ ^1/_{18},\ ^1/_{12},\ ^1/_9,\ ^5/_{36},\ ^1/_6$. Последний из профилей на этом рисунке резко обрывается, пересекая горизонтальную

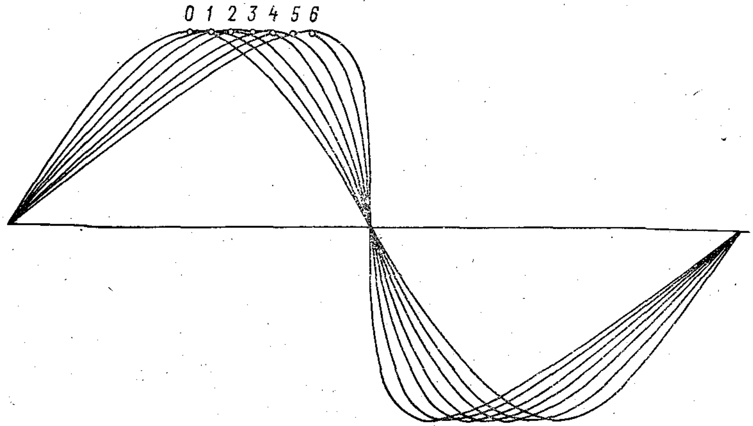


Рис. 3.9. Искажение профиля синусоидальной волны на мелководье.

ось под прямым углом. Считается, что именно таким и становится профиль волны перед обрушением.

Хотя профиль ветровых волн отличается от синусоиды, физика рассматриваемого явления при этом не меняется. В. В. Шулейкин определил критическое значение сдвига для собственно ветровой волны. Результаты опытов в штормовом бассейне показали, что нарастание крутизны переднего склона волны идет быстрее, чем это следует из формул (3.128), (3.129), и волна делается неустойчивой несколько раньше того момента, когда ее передний склон становится отвесным.

3.9. Рефракция волн и изменение их элементов при изменении глубины

Направление движения волн вблизи берега не остается постоянным, постепенно фронт волн поворачивается и приближается к направлению, параллельному урезу воды. Даже если в более мористой части направление распространения волн параллельно берегу, то на мелководье волны постепенно поворачивают к береговой черте и подходят к ней почти по нормали (рис. 3.10). Объясняется это тем, что при произвольном направлении волн их мористый фланг, как правило, находящийся на большей глубине, движется быстрее фланга, расположенного ближе к берегу.

Явление рефракции морских волн интересно как с теоретической, так и с практической точек зрения, так как косой прибой действует на берег и портовые сооружения иначе, чем прибой, идущий к береговой черте по нормали.

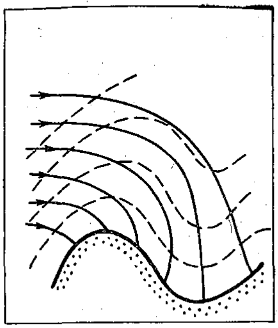


Рис. 3.10. Рефракция волн на мелководье.

Сплошными линиями обозначены волновые лучи, пунктирными — изобаты.

С исчерпывающей полнотой рефракционная задача решена В. В. Шулейкиным. По аналогии с оптикой им вводится для морских волн понятие показателя преломления

$$n = \frac{c_\infty}{c}, \qquad (3.130)$$

где c_∞ — фазовая скорость волн в глубоком море; c — фазовая скорость волн в исследуемой точке на произвольной, но конечной глубине H.

Скорость распространения волн в глубоком море зависит только от их периода $c_\infty = \frac{g\tau}{2\pi}$; в море конечной глубины фазовая скорость волн не может быть выражена в виде явной функции от периода и глубины $c = \frac{g\tau}{2\pi} \times \times \operatorname{th} kH$. Из выражения для c получаем следующие соотношения:

$$\frac{c}{\tau} = \frac{g}{2\pi} \operatorname{th} kH; \quad \frac{H}{\tau^2} = \frac{g}{4\pi^2} kH \operatorname{th} kH.$$

Величины H/τ^2 и c/τ оказываются функциями единственного безразмерного параметра kH. Следовательно, зависимость $c/\tau = f(H/\tau^2)$ будет универсальной и пригодной для волн любого периода (рис. 3.11). Для ее использования необходимо лишь измерить глубину моря в условных единицах H/τ^2, а фазовую скорость — в условных единицах c/τ. Из рисунка видно, что изменение скорости с глубиной существенно лишь до глубин, равных 0,5—0,7 условных единиц. На бо́льших глубинах условная скорость асимптотически приближается к значению 1,54, характеризующему глубокое море.

Из соотношения

$$n = \frac{c_\infty}{\tau} : \frac{c}{\tau}$$

по кривой $c/\tau = f(H/\tau^2)$ находится связь показателя преломления с условной глубиной H/τ^2. Кривая $n = f(H/\tau^2)$ довольно хорошо аппроксимируется уравнением гиперболы (пунктирная кривая на рис. 3.11):

$$n = \frac{m}{H/\tau^2}, \qquad (3.131)$$

где $m \simeq 0{,}05$ м/с². Зная показатель преломления, можно определить и изменение длины волны в зависимости от изменения глубины, так как

$$\frac{\lambda_\infty}{\lambda} = n.$$

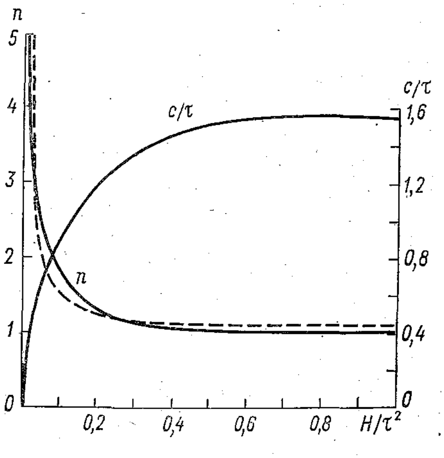


Рис. 3.11. Зависимость условной скорости распространения и показателя преломления волн от условной глубины моря.

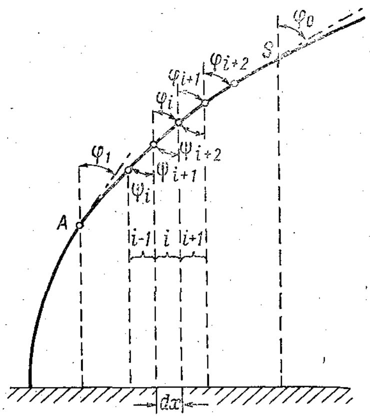


Рис. 3.12. Построение волнового луча при рефракции.

Выводим основные уравнения рефракции. Движение волн изображаем лучом SA (рис. 3.12). Если в точке S элемент луча составит угол φ_0 с нормалью к берегу, а в точке A соответствующий угол будет равен φ_1, то разность $\varphi_0 - \varphi_1$ выражает собой рефракцию волн на пути SA. Разобьем участок SA на бесконечно малые элементы прямыми, перпендикулярными берегу и отстоящими друг от друга на dx. В пределах каждого бесконечно малого отрезка глубина, а следовательно, и показатель преломления считаются постоянными, изменяется показатель лишь при переходе от одного отрезка к другому. На основании закона преломления

$$n_{i+1} \sin \varphi_{i+1} = n_i \sin \psi_{i+1}.$$

Так как $\sin\psi_{i+1} = \sin\varphi_i$, то

$$n_{i+1}\sin\varphi_{i+1} = n_i\sin\varphi_i = n_{i-1}\sin\varphi_{i-1} = \ldots = n\sin\varphi = \text{const}. \tag{3.132}$$

Из (3.132) получается зависимость между углом волнового луча φ_0 в начальной и углом φ_1 в конечной точке:

$$\sin\varphi_1 = \frac{n_0 \sin\varphi_0}{n_1}. \tag{3.133}$$

С учетом (3.131) имеем

$$\sin\varphi_1 = \frac{1 + m\frac{\tau^2}{H_0}}{1 + m\frac{\tau^2}{H_1}}\sin\varphi_0. \tag{3.134}$$

Если в точке S волны распространяются параллельно береговой черте, то у берега

$$\sin\varphi_1 = \frac{1 + m\frac{\tau^2}{H_0}}{1 + m\frac{\tau^2}{H_1}}. \tag{3.135}$$

Если же при этом начальная точка расположена в глубоком море ($H_0 \to \infty$), то

$$\sin\varphi_1 = \frac{H_1}{H_1 + m\tau^2}. \tag{3.136}$$

Вид соотношений (3.134)—(3.136) совершенно не зависит от формы подводного рельефа на пути волн между начальной и конечной точками, имеют значение лишь глубины в самих этих точках.

У самого уреза воды при $H_1 = 0$ $\varphi_1 = 0$, следовательно, если бы волны не разрушались на мелководье, то они подходили бы к берегу всегда по нормали, независимо от предыдущей истории движения. В действительности, волны разрушаются, не доходя до уреза воды, поэтому для определения угла подхода прибоя к берегу в формулы (3.134)—(3.136) нужно подставлять ту глубину H_1, на которой происходит разрушение волн.

В зоне переменных глубин явление рефракции и изменение групповой скорости меняют высоту волны. Рассмотрим поток энергии на глубокой воде между двумя волновыми лучами, расстояние между которыми b_∞:

$$\overline{\Phi}_Э = Эc_{\text{гр.}\,\infty} b_\infty. \tag{3.137}$$

Вне зоны разрушения волн пренебрегаем незначительными потерями на диссипацию, поэтому в точке с глубиной H_0 при косом подходе волн к берегу не изменившийся поток энергии выражается как

$$\overline{\Phi}_Э = Эc_{гр.0}b_0, \tag{3.138}$$

где b_0 — изменившееся из-за рефракции расстояние между лучами в точке с глубиной H_0.

Из (3.137), (3.138) с учетом (3.61) получается выражение, позволяющее определить изменение высоты волны:

$$h_0 = h_\infty \left(\frac{c_{гр.\infty}}{c_{гр.0}}\right)^{1/2} \left(\frac{b_\infty}{b_0}\right)^{1/2}. \tag{3.139}$$

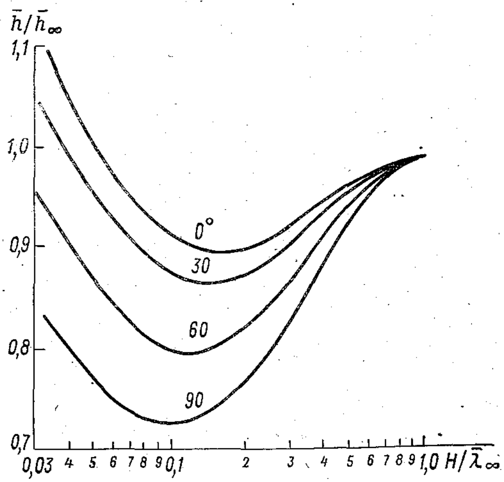


Рис. 3.13. Зависимость средней высоты волны в прибрежной зоне от глубины и угла подхода к берегу.

При уменьшении глубины групповая скорость вначале слабо возрастает, а затем уменьшается. Когда волна становится длинной, групповая скорость равна фазовой, уменьшающейся пропорционально квадратному корню из значения глубины. Для длинных волн соотношение (3.139) записывается в виде, известном как формула Грина:

$$h_i = h_{i+1} \left(\frac{H_{i+1}}{H_i}\right)^{1/4} \left(\frac{b_{i+1}}{b_i}\right)^{1/2}. \tag{3.140}$$

Изменение высоты волны в прибрежном районе при различных углах подхода ее к берегу показано на рис. 3.13.

3.10. Статистические закономерности ветровых волн

Взволнованная поверхность моря, как можно заметить даже путем визуальных наблюдений, представляет собой сложную структуру из разнообразных и быстро меняющихся по своим размерам и форме волн. Применение инструментальных методов измерений позволило обнаружить определенные статистические закономерности в их разнообразии. Первые представления о статистике волн были получены Л. Ф. Титовым в результате стереофотосъемки поверхности моря. Последующие измерения волн с помощью волнографов позволили получить интегральные функции распределения высот и периодов волн, действительные для квазистационарного процесса, т. е. для такого промежутка времени, когда средние значения элементов волн практически не меняются. Исследования А. П. Морозова показали, что достаточно надежные статистические характеристики элементов ветровых волн могут быть получены при записи 150—200 волн подряд. Изменчивость ветровых волн при квазистационарном процессе носит случайный характер, поэтому для ее описания применимы методы теории случайных процессов.

Первые фундаментальные исследования в этом направлении принадлежат Я. Г. Виленскому и Б. Х. Глуховскому, которые на основании волнографных измерений записали обобщенную интегральную функцию распределения высот волн в виде

$$F(h)=\exp\left[-\frac{\pi}{4\left(1+\frac{H^*}{\sqrt{2\pi}}\right)}\left(\frac{h}{\bar{h}}\right)^{\frac{2}{1-H^*}}\right], \qquad (3.141)$$

где $\bar{h}$ — среднее арифметическое из всех высот волн h, зарегистрированных в точке; $H^*=\bar{h}/H$ (H — глубина моря).

Для условий глубокой воды, когда $H^*=0$,

$$F(h)=\exp\left[-\frac{\pi}{4}\left(\frac{h}{\bar{h}}\right)^2\right]. \qquad (3.142)$$

В соответствии с этим выражением средней высоте волны ($\bar{h}$) соответствует обеспеченность 46 %.

Распределение (3.142) известно как закон распределения Рэлея. Если высоты волн выражать в долях от высоты волны 50 %-ной обеспеченности $h_{50\,\%}$, т. е. если производить нормировку на медиану, то соответственно обобщенная интегральная функция распределения высот ветровых волн имеет вид

$$F(h)=\exp\left[-\ln 2\left(\frac{h}{h_{50\,\%}}\right)^{\frac{2}{1-H^*}}\right] \qquad (3.143)$$

и для глубокого моря

$$F(h)=\exp\left[-\ln 2\left(\frac{h}{h_{50\,\%}}\right)^2\right], \qquad (3.144)$$

где $\ln 2=0{,}693$.

Приведенные соотношения показывают, что между высотами волн различной обеспеченности существует определенная функциональная зависимость, которая не зависит от значения средней высоты волны. Для условий мелководья разнообразие высот волн меньше, чем для глубокой воды: оно зависит от отношения высоты волны к глубине моря. Это особенно хорошо видно из рис. 3.14.

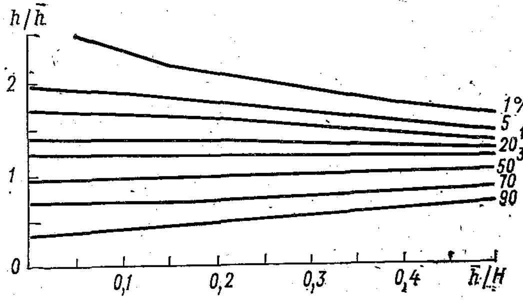


Рис. 3.14. Изменение (%) относительных высот волн в зависимости от относительной глубины моря, по Я. Г. Виленскому и Б. Х. Глуховскому.

Все последующие исследования распределения высот волн на глубокой воде, как теоретические, так и эмпирические, подтвердили правильность выражений (3.142) и (3.144).

И. Н. Давиданом, Л. И. Лопатухиным и В. А. Рожковым на основе инструментальных наблюдений (волнографных и аэросъемки) было установлено, что распределение всех элементов волн принадлежит распределению Вейбулла:

$$F(x)=\exp\left[-A\left(\frac{x}{\bar{x}}\right)^m\right], \qquad (3.145)$$

где $\bar{x}$ — среднее значение любого элемента волн; A и m — параметры, значения которых приведены в табл. 3.2. Эти значения получены в результате обобщения большого количества данных наблюдений.

При $m=2$ распределение Вейбулла соответствует распределению Рэлея.

По формуле (3.145) с использованием значений параметров A и m могут быть получены значения функций распределения для различных значений нормированного аргумента.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 3

1. Ветер и волны в океанах и морях. Справочные данные.— Л.: Транспорт, 1974 (Регистр СССР).— 360 с.

2. Глуховский Б. X. Исследование морского ветрового волнения.— Л.: Гидрометеоиздат, 1966.— 284 с.

3. Давидан И. Н., Лопатухин Л. И., Рожков В. А. Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс.— Л.: Гидрометеоиздат, 1978.— 288 с.

4. Китайгородский С. А. Физика взаимодействия атмосферы и океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1970.— 284 с.

5. Кожевников М. П. Гидравлика ветровых волн.— М.: Энергия, 1972.— 264 с.

6. Крылов Ю. М., Стрекалов С. С., Цыплухин В. Ф. Ветровые волны и их воздействие на сооружения.— Л.: Гидрометеоиздат, 1976.— 256 с.

7. Ламб Г. Гидродинамика. Пер. с англ.— М.; Л., Гостехтеориздат, 1947.— 928 с.

8. Майлс Д. В. Генерация поверхностных волн потоками с градиентом скорости.— В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. Пер. с англ. М., Мир, 1964, с. 98—110.

9. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. Изд. 2-е, перераб. и доп.— М.: Наука, 1977.— 816 с.

10. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. Математическая теория и приложения. Пер. с англ.— М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1959.— 620 с.

11. Титов Л. Ф. Ветровые волны.— Л.: Гидрометеоиздат, 1969.— 294 с.

12. Физика океана. Том 2. Гидродинамика океана.— М.: Наука, 1978.— 455 с.

13. Филлипс О. М. Динамика верхнего слоя океана. Пер. с англ.— М.: Мир., 1969.— 268 с.

14. Шулейкин В. В. Физика моря. Изд. 4-е, перераб. и доп.— М.: Наука, 1968.— 1084 с.

15. Шуляк Б. А. Физика волн на поверхности сыпучей среды и жидкости.— М.: Наука, 1971.— 400 с.

Глава 4. ПРИЛИВЫ

4.1. Приливообразующий потенциал и статический прилив

1) Приливообразующий потенциал

Общее представление об астрономической природе и основных свойствах приливообразующей силы дано в курсе общей океанологии. В дальнейшем мы в основном будем иметь дело лишь с горизонтальной составляющей этой силы, так как только она имеет практическое значение для динамики океана, будучи сравнима по порядку величины с горизонтальным градиентом давления и силой Кориолиса.

Изменчивость и пространственное распределение приливообразующей силы $\mathbf{F}_п$ удобно рассматривать с помощью ее *потенциала* Ω, с которым эта сила связана соотношением

$$\mathbf{F}_п = \nabla\Omega. \tag{4.1}$$

В соответствии с определением приливообразующей силы [2, 6] можно сказать, что ее потенциал характеризует избыток действительного притяжения океана возмущающим небесным светилом над однородным средним притяжением, которое не может привести к смещению частиц воды относительно друг друга, т. е.

$$\Omega = \Omega^* - \overline{\Omega}^*, \tag{4.2}$$

где Ω^* — потенциал силы действительного притяжения светила, а $\overline{\Omega}^*$ — часть Ω^*, характеризующая пространственно однородную часть силового поля.

Потенциал силы притяжения единичной массы, как известно, имеет вид

$$\Omega^* = \gamma M/d, \tag{4.3}$$

где γ — гравитационная постоянная; M — масса возмущающего тела (Луны, Солнца), а d — расстояние до центра возмущающего светила.

Из треугольника CAL на рис. 4.1 следует, что

$$d = (D^2 + R^2 - 2DR\cos\vartheta)^{1/2}, \tag{4.4}$$

где D — расстояние между центрами Земли и светила, R — радиус Земли, а ϑ — зенитное расстояние (угол) светила в точке A.

Подставляя (4.4) в (4.3), получаем

$$\Omega^* = \frac{\gamma M}{D}\left[1+\left(\frac{R}{D}\right)^2 - 2\frac{R}{D}\cos\vartheta\right]^{-1/2}. \tag{4.5}$$

Чтобы выделить переменную слагаемую потенциала, выражение в квадратных скобках в степени $-1/2$ раскладывается в ряд по степеням R/D:

$$\left[1+\left(\frac{R}{D}\right)^2 - 2\frac{R}{D}\cos\vartheta\right]^{-1/2} = P_0 + \frac{R}{D}P_1 + \left(\frac{R}{D}\right)^2 P_2 + \left(\frac{R}{D}\right)^3 P_3 + \ldots, \tag{4.6}$$

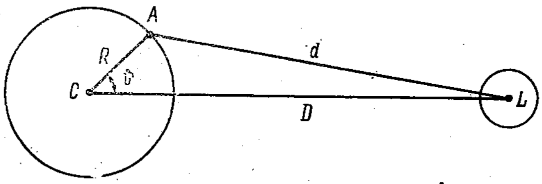


Рис. 4.1. Взаимное расположение приливообразующего светила и Земли.

где P_n — полиномы Лежандра от $\cos\vartheta$, т. е. $P_0 = 1$; $P_1 = \cos\vartheta$; $P_2 = \frac{1}{2}(3\cos^2\vartheta - 1)$; $P_3 = \frac{1}{2}(5\cos^3\vartheta - 3\cos\vartheta)$ и т. д.

Подставляя (4.6) в (4.5), получаем

$$\Omega^* = \Omega_0 + \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 + \ldots = \frac{\gamma M}{D} + \frac{\gamma M}{D}\frac{R}{D}\cos\vartheta + \frac{3}{2}\frac{\gamma M}{D}\left(\frac{R}{D}\right)^2\left(\cos^2\vartheta - \frac{1}{3}\right) + \frac{5}{2}\frac{\gamma M}{D}\left(\frac{R}{D}\right)^3 \times \left(\cos^3\vartheta - \frac{3}{5}\cos\vartheta\right) + \ldots \tag{4.7}$$

Очевидно, что, поскольку $\Omega_0 = \gamma M/D = \text{const}$, то $\nabla\,\Omega_0 = 0$, т. е. член Ω_0 не дает силового поля. Поскольку следующий член $\Omega_1 = (\gamma M/D^2)R\cos\vartheta \neq \text{const}$, то он дает силовое поле, но это поле — пространственно однородное, так как его изопотенциальные поверхности, определяемые соотношением $R\cos\vartheta = nd_1$ (где d_1 — расстояние от центра Земли до первой изопотенциальной поверхности, а $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$), представляют собой равноотстоящие плоскости, перпендикулярные линии центров (рис. 4.2).

Таким образом, $\nabla\,(\Omega_0 + \Omega_1) = \nabla\,\Omega_1 = \text{const}$, откуда $\overline{\Omega}^* = \Omega_0 + \Omega_1$, и приливообразующая сила обусловлена остальными членами ряда (4.7), начиная с Ω_2. В силу малости параметра R/D (он равен 0,001 66 для Луны и 0,000 04 для Солнца) оказывается, что член Ω_2, который описывает силовое поле, симметричное относительно линии, разделяющей «подлунное» и «антилунное» полушария (рис. 4.3), намного превосходит остальные. Поэтому, ограничиваясь членом Ω_2, используя выражение для силы тяжести $g = \gamma E/\bar{R}^2$ (здесь E — масса, а $\bar{R}$ — средний радиус Земли) и обозначая через $\bar{D}$ среднее значение D, выражение для Ω можно переписать в виде

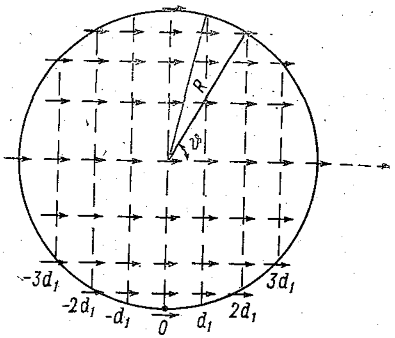


Рис. 4.2. Пространственно-однородное силовое поле, обусловленное членом Ω_1 потенциала силы притяжения единичной массы приливообразующим светилом (направление на светило показано пунктирной стрелкой).

$$\Omega \cong \Omega_2 = \left\{ \frac{3}{2} g \frac{M}{E} \frac{\bar{R}^4}{\bar{D}^3} \right\} \left[\left(\frac{\bar{D}}{D} \right)^3 \left(\frac{R}{\bar{R}} \right)^2 \right] \left(\cos^2 \vartheta - \frac{1}{3} \right). \quad (4.8)$$

Если выразить угол ϑ через склонение светила δ, его часовой угол относительно гринвичского меридиана $t_\text{г}$, а также широту φ

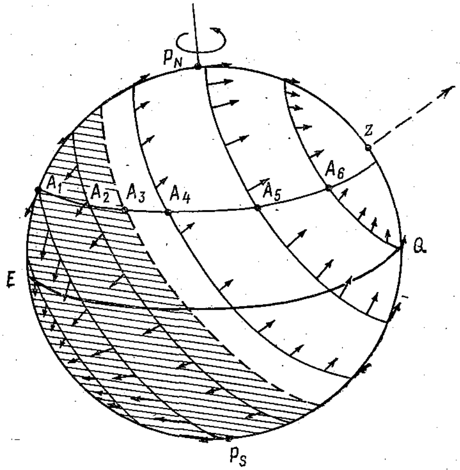


Рис. 4.3. Поле горизонтальных приливообразующих сил на поверхности Земли, обусловленное членом Ω_2.

и восточную долготу $\lambda°$ наблюдателя, то выражение для Ω распадается на три квазипериодические члена

$$\Omega = \Omega^{(0)} + \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)} = \mathscr{D} \left\{ 3 \left(\frac{R}{\bar{R}} \right)^2 \left(\sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \right\} \left[\left(\frac{\bar{D}}{D} \right)^3 \times \right.$$
$$\left. \times \left(\sin^2 \delta - \frac{1}{3} \right) \right] + \mathscr{D} \left\{ \left(\frac{R}{\bar{R}} \right)^2 \sin 2\varphi \right\} \left[\left(\frac{\bar{D}}{D} \right)^3 \sin 2\delta \cos (t_\text{г} + \lambda°) \right] +$$
$$+ \mathscr{D} \left\{ \left(\frac{R}{\bar{R}} \right)^2 \cos^2 \varphi \right\} \left[\left(\frac{\bar{D}}{D} \right)^3 \cos^2 \delta \cos 2 (t_\text{г} + \lambda°) \right]. \quad (4.9)$$

Здесь $\mathscr{D}=\frac{3}{4}g\bar{R}(M/E)(\bar{R}/\bar{D})^3$ — общий для каждого члена коэффициент, так называемая постоянная Дудсона, далее, в фигурных скобках — так называемый геодезический множитель, зависящий только от φ, и в квадратных скобках — астрономический множитель, зависящий от времени и долготы $\lambda°$.

Поскольку наиболее быстрые изменения величины Ω обусловлены суточным вращением Земли, то в качестве определяющей характеристики изменчивости каждого из членов $\Omega^{(0)}$, $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$

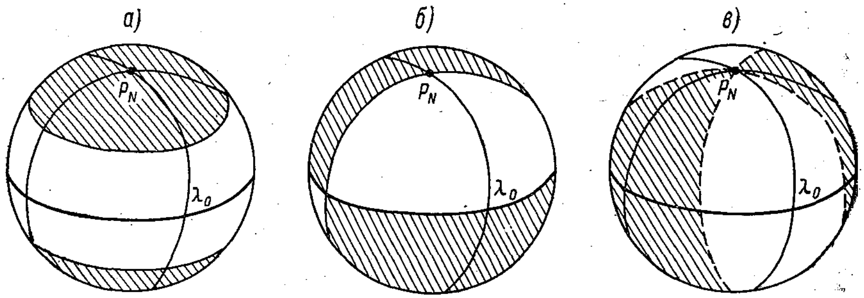


Рис. 4.4. Сферические гармоники, характеризующие распределение членов приливообразующего потенциала на земной поверхности. Области отрицательных значений Ω заштрихованы.

а — зональная гармоника (долгопериодный член); *б* — тессеральная гармоника (суточный член); *в* — секториальная гармоника (полусуточный член).

принимают их зависимость от угла $t_г$, который изменяется с периодом, равным лунным либо солнечным суткам (24,48 и 24,00 ч). Поэтому член $\Omega^{(0)}$ называют долгопериодным (период изменения величин δ и D — порядка месяца), член $\Omega^{(1)}$, пропорциональный $\cos t_г$ — суточным, а член $\Omega^{(2)}$, пропорциональный $\cos 2t_г$ — полусуточным.

Геодезический множитель характеризует широтное распределение соответствующего члена на земной поверхности. Если учесть еще аргумент $\lambda°$, то пространственное распределение этих членов описывается тремя «сферическими гармониками»: зональной, тессеральной и секториальной (рис. 4.4). В теоретических исследованиях приливы, соответствующие каждому из членов $\Omega^{(0)}$, $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$, часто называют соответственно приливами первого, второго и третьего рода.

Проделанные преобразования позволяют существенно упорядочить закономерности, определяющие изменчивость приливообразующего потенциала. Дальнейший шаг в этом направлении состоит в разложении астрономических множителей каждого из членов $\Omega^{(0)}$, $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ на чисто гармонические составляющие.

2) Гармоническое разложение приливообразующего потенциала

Поскольку расположение Луны и Солнца относительно Земли не повторяется с абсолютной периодичностью, то выражение для потенциала в принципе невозможно «без остатка» разложить на конечное число гармонических составляющих, т. е., строго говоря, его частотный спектр является не линейным, а непрерывным. Этот спектр, однако, характеризуется весьма острыми и высокими пиками на низком общем фоне, и поэтому для многих практических целей его представление набором конечного числа дискретных гармоник оказывается приемлемым.

В наиболее полном виде гармоническое по времени разложение астрономического множителя приливообразующего потенциала, требующее громоздких выкладок, приведено в ряде руководств и специальных работ. Укажем лишь главную идею, лежащую в основе этой процедуры.

Представим себе, что $D = \mathrm{const}$, а $\delta = 0$. Тогда из (4.9) следует, что $\Omega^{(0)}(t) = \mathrm{const}$, $\Omega^{(1)} = 0$, а $\Omega^{(2)}(t)$ будет чисто гармоническим. Учет склонения δ порождает долгопериодную и суточную составляющие, а для полусуточной проявляется в виде *модуляции*, т. е. порождает дополнительные «боковые» гармоники, частоты которых являются линейными комбинациями основной (полусуточной) частоты и частоты модулирующей функции (месячной). Аналогичное влияние оказывает и изменчивость величины D. Однако изменчивость величин δ и D сама не является чисто гармонической; она искажена неравномерностями более высоких порядков, которые обусловлены изменениями других астрономических параметров. Всего в существующих разложениях учитываются изменения пяти основных параметров с соответствующими фундаментальными частотами, а именно: 1) изменение лунного склонения ($\omega_1 = 0{,}549\,016\,5$ град/ч; 2) изменение солнечного склонения ($\omega_2 = 0{,}041\,068\,6$ град/ч; 3) обращение лунного перигея ($\omega_3 = 0{,}004\,641\,8$ град/ч; 4) обращение узла лунной орбиты ($\omega_4 = 0{,}002\,206\,4$ град/ч; 5) обращение перигелия ($\omega_5 = 0{,}000\,001\,9$ град/ч).

Частоты гармоник, возникающих при разложении долгопериодного члена $\Omega^{(0)}$, представляют собой линейные комбинации указанных пяти фундаментальных частот. При разложении же членов $\Omega^{(1)}$ и $\Omega^{(2)}$ такие комбинации включают еще и сидерическую частоту суточного вращения Земли ($\omega_0 = 15{,}041\,07$ град/ч). При этом, однако, для наблюдателя на Земле в качестве основной частоты удобнее принимать не сидерическую частоту ω_0, а частоту видимого обращения светила, т. е. частоты $\omega_{☾} = \omega_0 - \omega_1 = 14{,}492\,05$ град/ч; $2\omega_{☾} = 28{,}984\,10$ град/ч — для Луны и $\omega_{\odot} = \omega_0 - \omega_2 = 15$ град/ч; $2\omega_{\odot} = 30$ град/ч — для Солнца.

В общем каждая гармоника может быть представлена в виде

$$\mathscr{D}\, GC \cos(\sigma t + n\lambda^\circ + \Phi), \tag{4.10}$$

где $\mathscr{D}$ — постоянная Дудсона; G — геодезический множитель; C — амплитуда соответствующей гармоники астрономического множителя (так называемый «средний» коэффициент); σ — частота гармоники (линейная комбинация частот ω_0, ω_1, ..., ω_5); $n = 0$, 1 либо 2 в зависимости от того, к какому члену $\Omega^{(0)}$, $\Omega^{(1)}$ либо $\Omega^{(2)}$ относится гармоника; Φ — фаза гармоники на меридиане Гринвича. Для гармоники S_2, период которой совпадает с половиной солнечных суток, фаза $\Phi = 0$, а для других гармоник она определяется на конкретные сутки по элементам орбит Луны и Солнца с помощью специальных таблиц, приведенных в ряде монографий и пособий.

Практические соображения обычно позволяют ограничиться рассмотрением лишь 11 (а иногда и еще меньшего числа) наиболее существенных гармоник; они приведены в табл. 4.1.

ТАБЛИЦА 4.1

Важнейшие гармонические составляющие приливообразующего потенциала

№ п/п	Название	Символ	Коэффициент C	Угловая частота σ, °/ч	Период τ, ср. солн. часы
			Полусуточные		
1	Главная лунная	M_2	0,908	28,984 10	12,42
2	Главная солнечная	S_2	0,423	30,000 00	12,00
3	Лунная эллиптическая	N_2	0,174	28,439 73	12,66
4	Лунно-солнечная деклинационная	K_2	0,115	30,082 14	11,97
			Суточные		
5	Лунно-солнечная деклинационная	K_1	0,530	15,041 07	23,93
6	Главная лунная	O_1	0,377	13,943 04	25,82
7	Главная солнечная	P_1	0,175	14,958 93	24,07
8	Лунная эллиптическая	Q_1	0,072	13,398 66	26,87
			Долгопериодные		
9	Лунная полумесячная	M_f	0,156	1,098 03	327,86
10	Лунная месячная	M_m	0,082	0,544 37	661,30
11	Солнечная полугодовая	S_{sa}	0,073	0,082 14	2191,43

Значение индексов при символах характеризует период соответствующей гармоники: 2 — полусуточный, 1 — суточный, f — полумесячный (от английского fortnightly), m — месячный (monthly), sa — полугодовой (semi-annual).

Использование гармонических составляющих сильно упрощает исследование реальных приливных движений, поскольку в рамках линейной теории можно считать, что каждая гармоника приливообразующего потенциала создает в Мировом океане «свой» частный прилив со своим периодом. Каждый из таких — чисто гармонических — приливов можно исследовать отдельно, а для получения полного результата достаточно просуммировать отдельные решения.

3) Статический прилив

С понятием приливообразующего потенциала тесно связан так называемый *статический*, или равновесный, прилив. Этот прилив соответствует предположению, что водная оболочка Земли реагирует на действие силы таким образом, что возникающий уклон поверхности создает горизонтальные градиенты давления, в любой момент уравновешивающие эту силу, т. е.

$$\mathbf{F}_{\text{п}} = g \nabla_{\text{г}} \hat{\zeta}, \tag{4.11}$$

где $\hat{\zeta}$ — соответствующее «статическое» возвышение уровня. Поскольку одновременно $\mathbf{F}_{\text{п}} = \nabla_{\text{г}} \Omega$, то

$$\hat{\zeta} = \Omega / g + C_1. \tag{4.12}$$

Значение константы C_1 определяется из условия сохранения общего объема воды в замкнутом бассейне в любой момент приливного цикла, которое можно записать в виде

$$\iint_{\Pi} \hat{\zeta} \, d\Pi = 0,$$

где Π — площадь поверхности бассейна. Отсюда

$$C_1 = -\frac{1}{g\Pi} \iint_{\Pi} \Omega \, d\Pi. \tag{4.13}$$

Для океана, сплошь покрывающего Землю, $C_1 = 0$ в силу свойств сферических гармоник, и тогда

$$\hat{\zeta} = \Omega / g, \tag{4.14}$$

т. е. статический прилив с точностью до постоянного множителя g описывается распределением потенциала Ω. При этом поверхность сплошного глобального океана приближенно описывается эллипсоидом вращения с большой осью, направленной на приливообразующее светило. Если рассматривать отдельные члены потенциала $\Omega^{(0)}$, $\Omega^{(1)}$, $\Omega^{(2)}$, то каждому из них отвечает статический прилив в форме сферических гармоник, изображенных на рис. 4.4. Можно говорить и о частных статических приливах, соответствующих отдельных гармоническим составляющим потенциала. Подставляя в (4.14) величину Ω в форме (4.10) и учитывая все константы, для главных четырех гармоник с точностью, достаточной для многих практических целей, можно записать (величины $\hat{\zeta}$ даны в сантиметрах)

$$\hat{\zeta}_{M_2} = 24{,}3 \cos^2 \varphi \cos (28{,}984t + 2\lambda^\circ + \Phi_{M_2});$$

$$\hat{\zeta}_{S_2} = 11{,}3 \cos^2 \varphi \cos (30{,}000t + 2\lambda^\circ);$$

$$\hat{\zeta}_{K_1} = 14{,}2 \sin 2\varphi \cos (15{,}041t + \lambda^\circ + \Phi_{K_1});$$

$$\hat{\zeta}_{O_1} = 10{,}1 \sin 2\varphi \cos (13{,}943t + \lambda^\circ + \Phi_{O_1}). \qquad (4.15)$$

Допущения, лежащие в основе статической теории, настолько велики (предполагается, что вода лишена инерции, но при этом обладает гравитационными свойствами), что эта теория в том или ином приближении описывает лишь приливы долгого периода, для которых инерционные члены малы́. Реальные океанские суточные и полусуточные приливы, наиболее важные с практической точки зрения, отнюдь не соответствуют статической теории. В этом последнем случае статический прилив, как правило, представляет собой лишь воображаемое явление, позволяющее, однако, наглядно и компактно описать распределение и изменчивость приливообразующей силы через уклоны условного статического приливного уровня с помощью соотношения (4.11). Сами же колебания суточного и полусуточного периодов характеризуются значительными скоростями и ускорениями и имеют поэтому ярко выраженный *динамический* характер. Рассмотрение таких движений наряду с учетом приливообразующей силы и горизонтального градиента давления, входящих в уравнение (4.11), требует также учета сил инерции (в том числе — силы Кориолиса), а в ряде случаев — и турбулентной вязкости.

4.2. Динамический характер приливных движений

1) Приливные уравнения Лапласа

Динамическая и каналовая теории приливов. В целом Мировой океан, за исключением незначительных по площади мелководных окраинных участков, реагирует на действие приливообразующей силы как линейная колебательная система, состоящая из нескольких связанных друг с другом океанических бассейнов. Как указывалось выше, возникающие при этом движения при ряде допущений описываются уравнениями (0.21), в которых можно положить $P_0 = 0$. Переходя от векторной формы к выражениям для составляющих вдоль параллели и меридиана, получаем классическую систему *приливных уравнений Лапласа:*

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-\frac{g}{R\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda^{\circ}}(\zeta-\hat{\zeta});$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-\frac{g}{R}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\zeta-\hat{\zeta});$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{1}{R\cos\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial\lambda^{\circ}}(uH)+\frac{\partial}{\partial\varphi}(vH\cos\varphi)\right]=0, \qquad (4.16)$$

где $\hat{\zeta}$ — воображаемое статическое приливное возвышение уровня; u, v — компоненты осредненной по вертикали скорости течения вдоль параллели и меридиана соответственно; R — радиус Земли; $f=2\omega\sin\varphi$ — параметр Кориолиса, а φ, λ° — сферические географические координаты (широта и долгота). Правые части уравнений движения в системе (4.16) представляют собой зональную и меридиональную компоненты так называемого «эффективного» градиента гидростатического давления $-g\nabla_{\text{г}}(\zeta-\hat{\zeta})$, представляющего собой сумму фактического градиента $-g\nabla_{\text{г}}\zeta$ и приливообразующей силы $g\nabla_{\text{г}}\hat{\zeta}$ [см. выражение (4.11)]. Уравнения (4.16) лежат в основе *динамической теории приливов.*

Существующие аналитические решения системы (4.16) относятся лишь к чрезвычайно идеализированным случаям, когда океан предполагается либо сплошь покрывающим земной шар, либо ограниченным параллелями и меридианами, а глубина чаще всего берется постоянной. При этом рассматриваются чисто гармонические колебания, т. е. величина $\hat{\zeta}$ задается в форме одной из гармоник статического прилива. Приближения к действительности в глобальном масштабе удается достичь только с помощью численного моделирования, а оставаясь в рамках аналитических методов — путем перехода к более простым частным задачам, например рассматривая приливы в узких каналах, опоясывающих всю Землю или ее часть. Соответствующий раздел динамической теории приливов носит название *каналовой теории.* В ней предполагается, что из-за малой ширины канала поперечные движения отсутствуют, поперечные перекосы несущественны и силой Кориолиса можно пренебречь.

Результаты каналовой теории показывают, что в зонально ориентированных бассейнах непосредственное действие приливообразующих сил способствует возникновению вынужденных прогрессивных волн, направленных с востока на запад (в направлении кажущегося движения приливообразующего светила). Амплитуда этих волн пропорциональна амплитуде статического прилива [см. уравнение (4.17)], отличаясь от нее множителем типа $(1-p^2\cos^2\varphi)^{-1}$, где φ — географическая широта, $p=\sigma/\sigma_0$,

σ — приливная частота, $\sigma_0=2\sqrt{gH/R}$, H — глубина канала, а R — радиус Земли. При $p\cos\varphi<1$ такой прилив является «прямым», т. е. под светилом находится гребень волны, а при $p\cos\varphi>1$ прилив является «обращенным», т. е. под светилом находится подошва волны. При $p\cos\varphi=1$ имеет место резонансный случай, определяемый «критическим» сочетанием значений φ и H.* В бассейнах, ориентированных вдоль меридиана, приливообразующие силы вызывают продольные колебания стоячего типа, поскольку кульминация светила наступает одновременно по всей продольной оси бассейна.

Наиболее близкие к действительности результаты получены при рассмотрении каналов, ограниченных поперечными стенками. Если в канале, расположенном вдоль параллели φ, принять его центральную долготу за $\lambda°=0$, то на его краях, при $\lambda°=\pm\alpha$, необходимо задать условие непротекания. При этих условиях решение системы (4.16) при $H=\mathrm{const}$ для вынужденного полусуточного прилива будет иметь вид

$$\zeta=\frac{\hat{\zeta}_0\cos^2\varphi}{1-p^2\cos^2\varphi}\left\{\cos(\sigma t+2\lambda°)-\frac{p\cos\varphi}{\sin 4\alpha p\cos\varphi}\times\right.$$
$$\times[\sin(\sigma t+2\alpha)\cos 2p\cos\varphi(\lambda°+\alpha)-\sin(\sigma t-2\alpha)\times$$
$$\left.\times\cos 2p\cos\varphi(\lambda°-\alpha)]\right\}. \tag{4.17}$$

Волна в целом обнаруживает нарастание фазы с востока на запад, но не является чисто прогрессивной. Резонанс наступает не только при $p\cos\varphi=1$, но и при $\sin 4\alpha p\cos\varphi=0$, т. е. определяется критическим сочетанием трех параметров бассейна: его географической широты φ, глубины H и длины $L=R\alpha$.

2) Собственный и индуцированный прилив

Реальный океан имеет чрезвычайно сложные геометрические очертания, и в ряде случаев отдельные его части (бассейны) целесообразно рассматривать как отдельные системы, в большей или меньшей степени связанные друг с другом. При таком подходе фактический прилив, существующий в отдельном бассейне, обычно считают состоящим из двух частей: *собственного прилива*, представляющего собой индивидуальную реакцию бассейна на прямое действие приливообразующей силы, и *индуцированного прилива*, обусловленного влиянием смежных водоемов, где происходят свои приливные движения. Такое влияние можно представить в виде проникновения в наш бассейн

* Как обычно, теоретически бесконечный рост амплитуды при резонансе представляет собой фиктивный результат, обусловленный идеализацией условий задачи.

приливных волн, которые, распространяясь внутри него, трансформируются, отражаются от берегов и неровностей дна, и при этом рассеивают часть своей энергии. Отраженные волны вновь достигают входа и частично проходят (излучаются) сквозь него в обратном направлении. Суперпозиция всевозможных возникающих при этом колебаний определяет полную реакцию водной массы бассейна на воздействие со стороны смежного водоема, т. е. индуцированный прилив рассматриваемого бассейна.

В масштабе глобального океана весь прилив, естественно, является чисто собственным. При переходе к отдельным океанам необходимо учитывать воздействие через открытые границы со стороны смежных океанических бассейнов, т. е. в реальном приливе присутствует индуцированная часть. Если же рассматривать моря, заливы и т. п., то оказывается, что наблюдаемые в них приливы, как правило, в основной своей части сформированы воздействием со стороны океанических бассейнов, к которым эти моря примыкают. В этом случае преобладание индуцированного прилива иногда настолько значительно, что собственным приливом вообще можно пренебречь.

Если рассматриваемый бассейн не слишком велик, то для исследования приливов в нем можно использовать прямоугольную систему координат. В этом случае для описания собственного прилива из (4.16) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\frac{\partial}{\partial x}(\zeta - \hat{\zeta});$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\frac{\partial}{\partial y}(\zeta - \hat{\zeta});$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(uH) + \frac{\partial}{\partial y}(vH) = 0. \qquad (4.18)$$

В качестве граничных условий на береговой черте должно выполняться условие непротекания $u_n = 0$, где u_n — нормальный к берегу компонент скорости, а на открытой границе — условие излучения энергии собственного прилива в смежные водоемы (см. с. 237). Для описания индуцированного прилива, не связанного непосредственно с действием приливообразующей силы, используются те же самые уравнения (4.18) при $\hat{\zeta} = 0$. При этом на береговой черте также ставится условие непротекания, а на открытых границах должны быть заданы характеристики внешнего воздействия.

Хотя индуцированные приливные колебания формируются так называемыми свободными приливными волнами и описывающие их дифференциальные уравнения не содержат приливообразующих сил, эти колебания, как и собственные, являются *вынужденными*, но внешнее воздействие вводится здесь через граничные условия. Показателем вынужденного характера индуцированных колебаний служит их период, навязываемый им внешним воздействием и совпадающий, как и у собственного прилива, с периодом соответствующей гармонической составляющей.

В различных конкретных случаях в уравнения (4.18) могут быть добавлены дополнительные члены, учитывающие донное трение, горизонтальный турбулентный обмен, нелинейные эффекты и др. Аналитические решения этих уравнений возможны лишь для идеализированных бассейнов простой формы. В реальных случаях решения ищут численными способами.

3) Резонансные свойства бассейнов

Как известно, явление резонанса состоит в увеличении амплитуды вынужденных колебаний при приближении периода τ (частоты σ) внешнего воздействия к одному из периодов τ_n (частот σ_n) собственных колебаний системы. Применительно к приливному резонансу в океанских и морских бассейнах внешнее воздействие осуществляется либо приливообразующей силой, либо путем периодического проникновения волн в бассейн через открытую границу. Бассейн характеризуется собственными колебаниями определенного периода и формы в том случае, когда на его границах происходит полное или частичное отражение длинных волн. Пространственная форма каждого собственного колебания фиксирована и носит название *собственной моды*. При полном отражении на границах собственные моды имеют вид стоячих волн или их комбинаций. На границе с положительным отражением собственная мода должна иметь пучность, а на границе с отрицательным отражением — узел; это условие ограничивает возможные моды собственных колебаний, допуская только те из них, которые обеспечивают совпадение пучностей либо узлов с краями бассейна.

Периоды собственных колебаний связаны с временем пробега длинной волны через бассейн, т. е. от одного отражения до другого. Так, в простейшем случае продольных колебаний в замкнутом прямоугольном бассейне с постоянной глубиной H и длиной L величина τ_n выражается известной формулой Мериана (см. «Общая океанология», с. 149, 177)

$$\tau_n = \frac{2L}{(n+1)\sqrt{gH}}, \qquad (4.19)$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$, а $(n+1)$ — число узлов собственного колебания или сейши. Наибольший собственный период $\tau_0 = 2L/\sqrt{gH}$ соответствует одноузловой сейше и равен времени двойного пробега свободной длинной волны вдоль бассейна. Для бассейна, соединенного одним концом с океаном, формула Мериана имеет вид

$$\tau_n' = \frac{4L}{(2n+1)\sqrt{gH}}, \tag{4.20}$$

причем наибольший собственный период $\tau_0' = 4L/\sqrt{gH}$ равен теперь учетверенному времени пробега волны бассейна. Надо иметь в виду, что, поскольку отражение приливной волны от открытой границы происходит по более сложным законам, чем от линии берега, в этом случае формула Мериана является не вполне корректной и должна быть исправлена так называемой «устьевой поправкой».

Для широкого замкнутого прямоугольного бассейна, в котором наряду с продольными колебаниями следует учитывать и поперечные, обобщенная формула Мериана приобретает вид

$$\tau_{n,m} = \frac{2}{\sqrt{gH}} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{n}{L}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2}}, \tag{4.21}$$

где n и m — целые числа, а b — ширина бассейна. При наличии соединения бассейна со смежным водоемом определение $\tau_{n,m}$ усложняется и существенно зависит от параметров соединяющего залива.

В бассейнах менее простой формы определение периодов и форм собственных колебаний также усложняется. Если глубина изменяется вдоль бассейна, т. е. $H = H(x)$, то скорость волны $c = \sqrt{gH(x)}$ будет переменной величиной, и время пробега волны вдоль бассейна будет определяться не выражением $L/\sqrt{gH}$, а выражением $\int_0^L dx/\sqrt{gH(x)}$, откуда следуют так называемые формулы Дюбуа

$$\tau_n = \frac{2}{n+1} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{gH(x)}} \quad \text{или} \quad \tau_n' = \frac{4}{2n+1} \int_0^L \frac{dx}{\sqrt{gH(x)}}, \tag{4.22}$$

представляющие собой обобщение формул Мериана на случай переменной глубины. Для определения периода и пространственной формы собственных колебаний в широких бассейнах неправильных очертаний применяют численные методы.

Близость периодов τ и τ_n, т. е. «настройка» бассейна на резонанс может быть охарактеризована с помощью так называемого критерия Дефанта

$$\nu = \frac{\tau_0}{\tau} = \frac{kL}{\pi}. \tag{4.23}$$

Условия резонанса выполняются при значениях $\nu = \nu_{рез}$, которые в общем различны для случая собственного и индуцированного прилива, а также в силу различного характера отражения приливных волн от границ различного типа, для бассейнов типа залива и пролива (табл. 4.2).

ТАБЛИЦА 4.2

Резонансные значения критерия Дефанта $\nu_{рез}$ ($n=0, 1, 2, \ldots$)

Индуцированный пролив		Собственный прилив	
залив	пролив	залив	пролив (замкнутый бассейн)
$n+\frac{1}{2}$	n	$n+\frac{1}{2}$	$2n+1$

В реальных условиях, однако, степень резонансного усиления колебаний зависит не только от близости ν к резонансному значению, но и от того, какими энергетическими потерями характеризуется колебательный процесс. Существуют два источника таких потерь: диссипация трением и излучение энергии с приливными волнами в смежные водоемы; при этом каждый из указанных факторов ограничивает амплитуду колебаний при резонансе.

4.3. Влияние трения на приливные явления

1) Учет донного трения. Затухающие приливные волны

В уравнениях (0.4) массовый эффект силы турбулентного трения был записан в виде $\rho\nabla\,(K\nabla\mathbf{V})$. При рассмотрении длинных приливных волн, распространяющихся вдоль оси x, объемный эффект силы донного трения для единичной массы выражается членом

$$F_\tau = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\tau}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial u}{\partial z}, \tag{4.24}$$

где τ — касательное напряжение, а K_z — коэффициент турбулентного обмена количеством движения по вертикали.

Если, как это обычно делается в теории длинных волн, рассматривать только среднюю по вертикали скорость $\bar{u}$, то эффект силы трения, действующей на движущийся слой воды, сводится к касательному трению этого слоя о дно. В результате ряда исследований, как теоретических, так и экспериментальных, установлено, что зависимость между напряжением донного трения и средней по вертикали скоростью близка к квадратичной. В этом случае можно записать

$$F_{\text{т}}=r^{*}\frac{\overline{u}\,|\overline{u}\,|}{H}. \qquad (4.25)$$

Величина r^* на основании экспериментальных данных обычно берется равной от 0,002 до 0,003.

Нелинейность члена (4.25) приводит к серьезным затруднениям при выкладках и расчетах. Поэтому иногда, заведомо допуская неточность, ради простоты принимают линейную зависимость силы трения от скорости в виде

$$F_{\text{т}}=r_{*}\overline{u}. \qquad (4.26)$$

При этом выбор величины r_* целесообразно производить так, чтобы работа сил трения за период $\tau=2\pi/\sigma$, вычисленная с помощью выражений (4.25) и (4.26), была одинаковой, т. е. чтобы линеаризация не нарушала энергетических характеристик описываемого процесса. На основе этих соображений принимается

$$r_{*}=\frac{8}{3\pi}\,\frac{\overline{u}_0}{H}\,r^{*}, \qquad (4.27)$$

где $\overline{u}_0$ — максимальное значение осредненной по вертикали скорости течения. Таким образом, «линейное» выражение (4.26) на самом деле содержит квадратичную зависимость в скрытом виде, поскольку $r_{*}\sim\overline{u}$. В общем погрешности, связанные с линеаризацией члена $F_{\text{т}}$, уменьшаются с увеличением глубины бассейна.

Отметим, что даже при явной квадратичной зависимости типа (4.25) коэффициент r^*, строго говоря, не может быть постоянным из-за различия в условиях, определяющих развитие турбулентности. Как показано рядом исследований [3, 6], режим турбулентности в пограничном слое, а следовательно, и величина r^* определяются такими внешними параметрами, как характеристики течения за пределами пограничного слоя, шероховатость морского дна, период приливной волны и параметр Кориолиса.

Влияние донного трения на длинные приливные волны легче всего проанализировать, рассматривая индуцированный прилив ($\hat{\zeta}=0$) в узком канале ($f=0$, $v=0$) постоянной глубины ($H=\text{const}$). Тогда, полагая $\overline{u}=u$ и учитывая линеаризованный фрикционный член в виде (4.26), из системы (4.18) получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}-r_{*}u;$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+H\frac{\partial u}{\partial x}=0. \qquad (4.28)$$

Исключение величины u дает

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-r_*\frac{\partial\zeta}{\partial t}+gH\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=0. \tag{4.29}$$

Гармоническое во времени решение уравнения (4.29) при $r_*=\mathrm{const}$ можно записать в виде

$$\zeta=a^+e^{-\mu x}\cos(\sigma t-k_*x)+a^-e^{\mu x}\cos(\sigma t+k_*x), \tag{4.30}$$

где

$$k_*=\sqrt{k^2+\mu^2},\quad \mu=\frac{\sigma}{\sqrt{gH}}\sqrt{\frac{\sqrt{\sigma^2+r_*^2}-\sigma}{2\sigma}}. \tag{4.31}$$

Два слагаемых в правой части (4.30) представляют собой две волны, бегущие в противоположные стороны с фазовой скоростью

$$c_*=\sigma/k_*=\sqrt{gH}\sqrt{\frac{2\sigma}{\sqrt{\sigma^2+r_*^2}+\sigma}}, \tag{4.32}$$

т. е. несколько медленнее, чем в отсутствие трения. Так как фазовая скорость c_* зависит от частоты σ, то это значит, что трение делает длинную волну дисперсной.

Главное отличие полученного решения от обычных прогрессивных волн состоит в присутствии в нем множителя $\exp(\mp\mu x)$, показывающего, что амплитуда каждой из бегущих волн затухает по мере движения. Физически такое гашение волны объясняется диссипацией волновой энергии донным трением. Скорость затухания характеризуется коэффициентом μ, связанным с r_* вторым из соотношений (4.31). Выражение для u получим, подставив выражение (4.30) в уравнение неразрывности. Интегрируя затем по x и выражая u в явном виде, находим для волны, бегущей в сторону положительных x,

$$u=a^+\sqrt{\frac{g}{H}}e^{-\mu x}\frac{k}{\sqrt{\mu^2+k_*^2}}\cos(\sigma t-k_*x+\varepsilon), \tag{4.33}$$

где $\varepsilon=\mathrm{arctg}(\mu/k_*)$. Таким образом, наличие трения приводит к наличию фазового сдвига ε между уровнем и течением. Амплитуда течения по мере движения волны затухает вместе с колебаниями уровня. Кроме того, в любой точке течения слабее, чем при той же амплитуде вертикальных смещений в прогрессивной волне без трения [ср. (3.43) с (4.30) и (4.33)], так как

$k/\sqrt{\mu^2+k_*^2}<1.$

При отсутствии трения ($r_*=0$) мы имеем $k_*=k=\sigma/\sqrt{gH}$ и $\mu=0$.

4.4. Влияние вращения Земли на приливные явления

Рассмотрим влияние силы Кориолиса на свободную приливную волну в бассейне постоянной глубины H. В этом случае уравнения движения и неразрывности берутся в виде (4.18) при $\hat{\zeta}=0$ и $f=\mathrm{const}$ в пределах бассейна. Аналитические решения таких уравнений получены для двух типичных случаев: 1) для канала, ориентированного вдоль оси x (соответствует морскому бассейну ограниченной ширины, но не настолько узкому, чтобы в нем, как в случае «каналовой» теории, можно было пренебречь поперечными перекосами), и 2) для безграничного бассейна (соответствует открытым частям океанов).

1) В первом случае на боковых границах бассейна задается условие непротекания ($v=0$), и решение, гармоническое во времени и вдоль оси x, дает так называемую *волну Кельвина*

$$\begin{aligned} &\zeta=a^{\pm}e^{\mp my}\cos(\sigma t \mp kx);\\ &u=\pm\sqrt{g/H}\,a^{\pm}e^{\mp my}\cos(\sigma t \mp kx);\\ &v=0, \end{aligned} \tag{4.34}$$

где $m=f/\sqrt{gH}$, скорость волны $\sqrt{gH}$ имеет то же значение, что и в случае без силы Кориолиса, а верхние и нижние знаки относятся к волнам, распространяющимся в сторону положительных либо отрицательных x. Поперечный профиль волны описывается множителем $e^{\mp my}$, т. е. нарастающей слева направо экспонентой. Аналогичное распределение имеют и продольные течения. Поперечный наклон уровня связан с продольным течением так называемым геострофическим соотношением

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y}=-\frac{f}{g}u, \tag{4.35}$$

вытекающим из уравнения движения для оси y при $v=0$ и выражающим условие статического равновесия между силой Кориолиса и поперечным градиентом давления. На рис. 4.5 изображен рельеф волны Кельвина и показаны течения в ней. Отметим, что условие $v\equiv 0$ не обязательно связано с узким каналом. В принципе волны Кельвина могут существовать, распространяясь вдоль берега, в бассейне постоянной глубины и любой ширины, хотя в узких морях условия для отсутствия заметных поперечных течений более благоприятны.

Суперпозиция двух встречных волн Кельвина в общем случае приводит к образованию *амфидромических систем* (см. с. 216). Если начало координат поместить в точке, где волны с амплитудами a^+ и $a^-=na^+$ встречаются в противофазе, то для суммарного движения будем иметь

$$\begin{aligned} &\zeta=a^+e^{-my}\cos(\sigma t-kx)-na^+e^{my}\cos(\sigma t+kx);\\ &u=\sqrt{\frac{g}{H}}\,a^+e^{-my}\cos(\sigma t-kx)+n\sqrt{\frac{g}{H}}\,a^+e^{my}\cos(\sigma t+kx). \end{aligned} \tag{4.36}$$

Дифференцируя первое из уравнений (4.36) по t и приравнивая производную $\partial\zeta/\partial t$ к нулю, что соответствует экстремальному положению уровня, можно получить уравнение котидальных линий

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{e^{-my} + ne^{my}}{e^{-my} - ne^{my}} \operatorname{tg} kx, \tag{4.37}$$

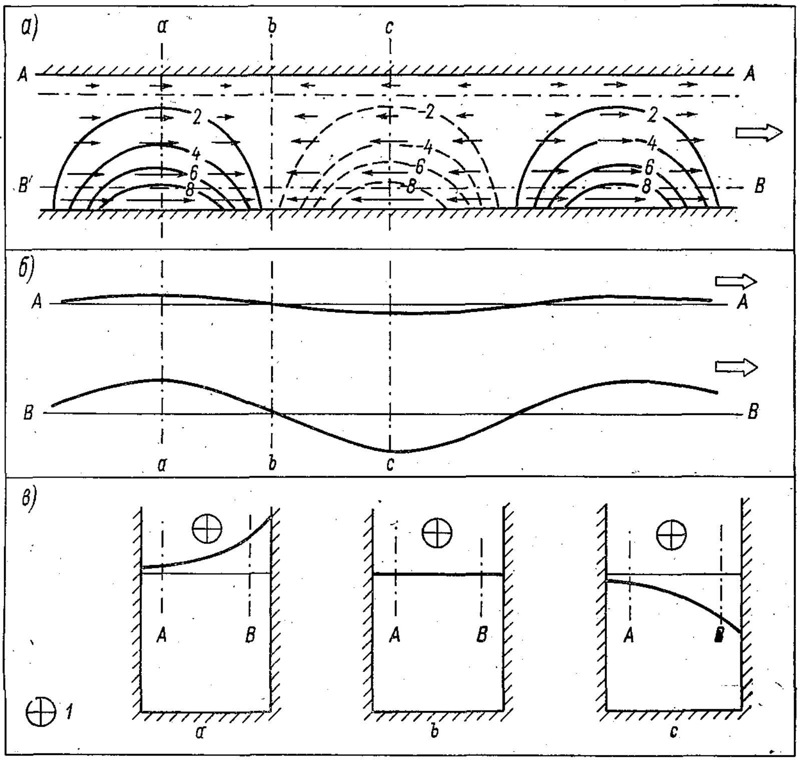


Рис. 4.5. Характер движений в волне Кельвина.

а — план; рельеф поверхности изображен с помощью изогипс (сплошные линии — выше среднего уровня, прерывистые линии — ниже среднего уровня); стрелки — течения; *б* — продольные профили; *в* — поперечные профили. *1* — означает, что волна направлена «в чертеж».

где $\varepsilon = \sigma t_0$ — фаза уровня, а t_0 — момент наступления полной воды. Картина колебания представляется рядом *амфидромических систем*, называемых *амфидромиями Тэйлора*; в них нарастание фазы происходит в северном полушарии против, а в южном — по часовой стрелке (рис. 4.6).

Абсцисса амфидромической точки (x_a) определяется из условия противофазы встречных волн, т. е. $x_a = 0, \pm\lambda/2, \pm\lambda, \ldots$

Ордината амфидромической точки ($y_а$) определяется из условия равенства амплитуд встречных волн

$$\overset{+}{a} e^{-my_а} = n\overset{+}{a} e^{my_а},$$

откуда

$$y_а = -\frac{\sqrt{gH}\ln n}{4\omega \sin\varphi}. \qquad (4.38)$$

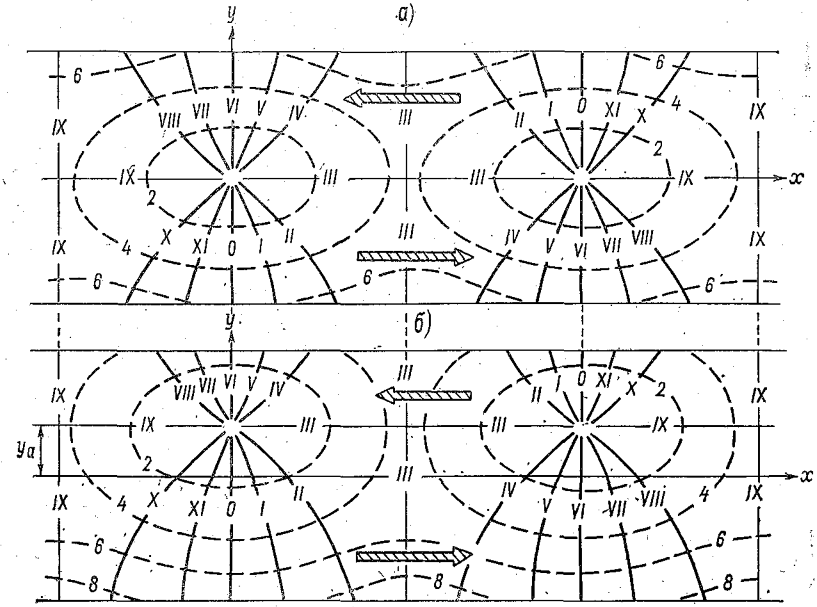


Рис. 4.6. «Амфидромии Тэйлора» в результате встречной интерференции волн Кельвина в канале.

Сплошные линии — котидали, прерывистые линии — изоамплитуды. *а* — встречные волны равны; амфидромические точки лежат на оси бассейна; *б* — встречные волны не равны; амфидромические точки сдвинуты влево от направления бо́льшей из волн.

Таким образом, в северном полушарии амфидромическая точка всегда сдвинута влево от продольной оси бассейна, если смотреть по ходу большей из встречных волн. При равенстве встречных волн ($n=1$) амфидромическая точка должна лежать точно на центральной оси ($y_а=0$). При отсутствии встречной волны ($n=0$) амфидромическая точка отсутствует ($y_а=\infty$). При слабой встречной волне значение $y_а$ может быть так велико, что амфидромическая точка не будет наблюдаться в пределах бассейна, и можно говорить лишь о ее фиктивном положении на суше.

На приливной карте признаком волны Кельвина может служить нарастание амплитуд поперек продольной оси бассейна.

На присутствие двух встречных волн Кельвина указывает последовательность амфидромических систем одинакового оборота (соответствующего данному полушарию) либо группировка котидальных линий в веерообразные пучки с падением амплитуды в районе схождения котидалей.

2) Во втором случае (безграничный океан) действие сил Кориолиса на приливную волну порождает синфазные вдоль y поперечные течения, которые, не встречая препятствий в виде берегов, не сопровождаются возникновением поперечных перекосов уровня, т. е. гребни волн остаются горизонтальными. Таким образом, условиями, которые накладываются на решение, являются здесь требование *гармоничности* во времени и вдоль оси x и *неизменности* всех характеристик движения (ζ, u, v) вдоль оси y в каждый момент. При таких условиях решение системы (4.18) при $\hat{\zeta} = 0$ дает так называемую *волну Свердрупа*

$$\zeta = \pm a_S^{\pm} \cos(\sigma t \mp k_S x);$$

$$u = \pm \sqrt{g/H}\, a_S^{\pm} \sqrt{\frac{1}{1 - s^2}} \cos(\sigma t \mp k_S x);$$

$$v = \mp \sqrt{g/H}\, a_S^{\pm} \sqrt{\frac{s^2}{1 - s^2}} \sin(\sigma t \mp k_S x), \tag{4.39}$$

где $s = f/\sigma$, $k_S = (\sigma/\sqrt{gH})\sqrt{1 - s^2}$. Отсюда длина волны Свердрупа равна

$$\lambda_S = \sigma/k_S = \frac{2\pi\sqrt{gH}}{\sigma\sqrt{1 - s^2}}. \tag{4.40}$$

Характер движений в волне Свердрупа иллюстрируется рис. 4.7. Компоненты течения u и v сдвинуты по фазе на четверть периода, а отношение их амплитуд равно s. В северном полушарии течения вращаются по часовой стрелке, и их годограф имеет вид эллипса, ориентированного в направлении движения волны с отношением полуосей, равным s. Геострофическое правило (4.35) не выполняется в волнах Свердрупа даже качественно; для u-компоненты поперечный наклон отсутствует, а для v-компоненты он имеет знак, обратный тому, который следует из (4.35). Область существования волн Свердрупа ограничена предельным значением $s = f/\sigma = 1$, которому соответствует так называемая критическая параллель, определяемая соотношением

$$\varphi_{кр} = \pm \arcsin \frac{\sigma}{2\omega}, \tag{4.41}$$

что дает для главных приливных гармоник M_2, S_2, K_1 и O_1 следующие значения $\varphi_{кр}$: 74,47; 85,76; 30,00; 27,61°. На широте $\varphi_{кр}$ из (4.39) следует, что амплитуды u и v равны, а их конечные значения возможны только при $a_S = 0$. В этом случае волна

Свердрупа представляет собой круговое течение при отсутствии колебаний уровня. При $\varphi > \varphi_{кр}$ волны Свердрупа существовать не могут.

Суперпозиция двух встречных волн Свердрупа приводит к стоячей или смешанной волне. Так как гребни волн горизонтальны, то амфидромические системы не возникают.

В общем случае отражение волн Кельвина и Свердрупа от берега сопровождается возникновением специфических форм ко-

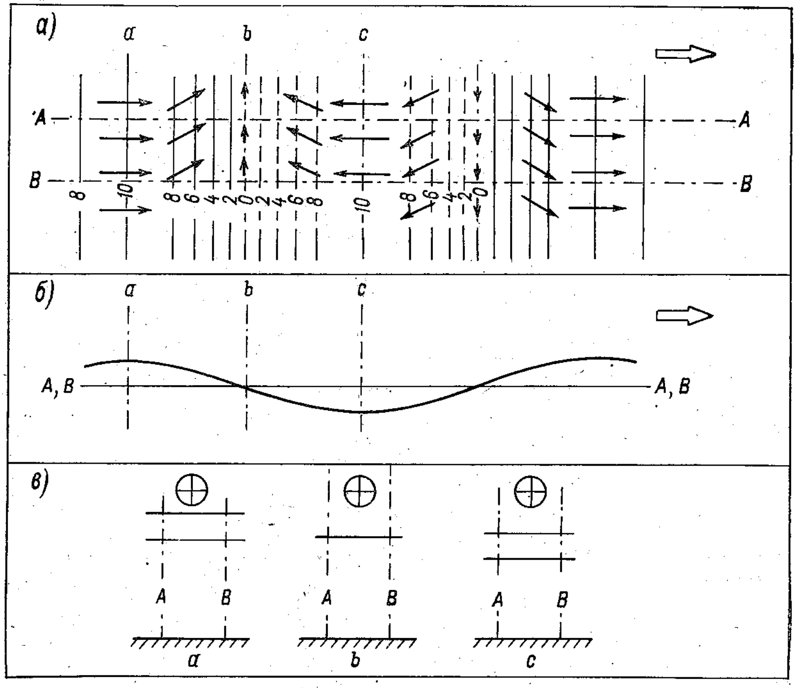


Рис. 4.7. Характер движений в волне Свердрупа (обозначения см. на рис. 4.5).

лебаний, называемых *волнами Пуанкаре* 1-го и 2-го рода. Волны Пуанкаре 1-го рода (прогрессивные) являются результатом интерференции двух волн Свердрупа, скрещивающихся под углом при косом отражении от берега. Они могут существовать вблизи открытого побережья либо в проливах, ширина которых превосходит критическое значение, равное половине длины интерферирующих волн Свердрупа. Волны Пуанкаре 2-го рода (стоячие) возникают при нормальном отражении волн Кельвина в вершине залива. Они сосредоточены в районе отражения, затухая с удалением в сторону океана.

4.5. Совместное влияние силы Кориолиса и трения

Для одновременного учета влияния силы Кориолиса и донного трения на приливную волну в правые части первых двух уравнений (4.18) добавляют соответственно члены $-r_*u$ и $-r_*v$. Решения для свободных приливных волн при этом имеют вид *затухающих* волн Кельвина и Свердрупа. Для морского бассейна, имеющего форму залива или пролива, наиболее типичными являются затухающие волны Кельвина:

$$\zeta = a^{\pm} \exp(\mp \mu x \mp m_1 y) \cos(\sigma t \mp k_* x), \qquad (4.42)$$

где $m_1 = (f/c_*)(\sigma / \sqrt{\sigma^2 - r_*^2})$, а μ и k_* имеют те же значения, что и в (4.31). Перекос уровня вдоль оси y описывается здесь множителем $e^{\mp m_1 y}$; он подобен перекосу в обычной волне Кельвина, но менее крут, так как продольные течения ослаблены трением, и для уравновешивания возникающей силы Кориолиса требуется меньший поперечный наклон. При $r_* = 0$ или $f = 0$ выражение (4.42) соответственно переходит в выражение для волн Кельвина (4.34) или в выражение для плоской затухающей волны (4.30). Наиболее характерной особенностью такой картины является сдвиг амфидромических точек с оси бассейна влево от направления движения входящей (прямой) волны, причем сдвиг $y_а$ связан с величиной $n = a^- / a^+$ выражением (4.38). С удалением от вершины залива в сторону океана $y_а$ будет уменьшаться за счет затухания каждой из волн, и, таким образом, поперечный сдвиг амфидромической точки будет тем больше, чем дальше от вершины расположена амфидромия. Зная $y_а$, можно с помощью (4.38) определить значения a^- и a^+ в узловых зонах и далее, рассматривая отраженную волну как продолжение падающей, оценить затухание μ и коэффициент сопротивления r_* для различных участков моря.

Совместное действие силы Кориолиса и трения оказывает существенное влияние на вертикальную структуру приливного потока. Для анализа этой структуры сила трения в уравнениях движения должна быть задана пропорциональной вертикальному градиенту скорости течения (см. (4.24)), в результате чего исходная система уравнений приобретает более сложный вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - fv + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial u}{\partial z};$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu + g\frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial v}{\partial z};$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial (uH)}{\partial x} + \frac{\partial (vH)}{\partial y} = 0. \qquad (4.43)$$

Существующие решения уравнений (4.43), описывающие вертикальное строение приливного потока, различаются главным образом способом учета значения и изменчивости коэффициента турбулентной вязкости K_z.

Наиболее общие закономерности вертикального распределения приливных течений удается получить, задаваясь постоянным по глубине и во времени значением K_z и при условии «прилипания» ($u = v = 0$) у дна [9]. Полученные в этом случае решения показывают, что действие донного трения сосредоточено в некотором нижнем пограничном слое, выше которого течение можно считать «свободным» от трения и неизменным по верти-

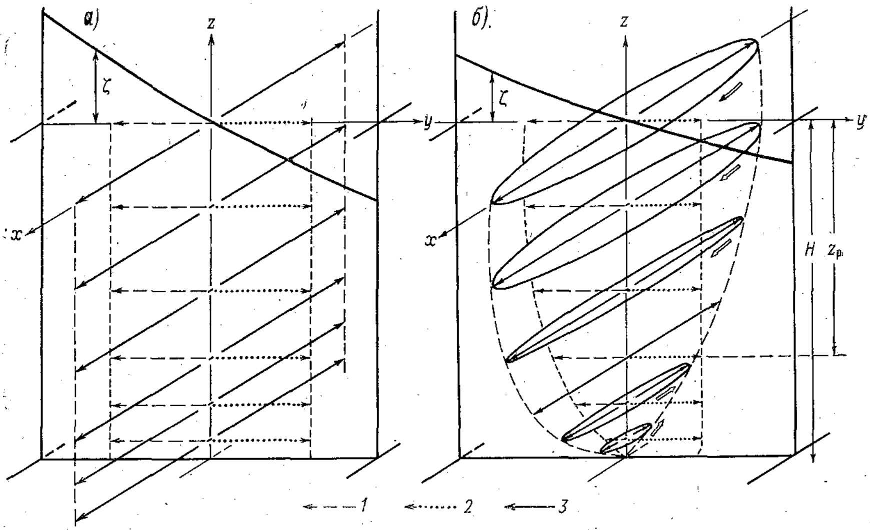


Рис. 4.8. Влияние донного трения на вертикальную структуру приливного течения в поле силы Кориолиса.

а — случай без трения, *б* — случай с трением.
1 — сила Кориолиса; *2* — градиент давления; *3* — течения.

кали. Поведение «свободного» течения определяется только наклонами морской поверхности и действием силы Кориолиса, в зависимости от которых это течение может вращаться как вправо, так и влево. В пределах пограничного слоя течения уменьшаются с глубиной, причем в северном полушарии ($f > 0$) эллипсы течения правого вращения по мере приближения к дну становятся все у́же (малая ось уменьшается быстрее, чем большая). При определенных условиях малая ось на некотором горизонте обращается в нуль, т. е. течение становится здесь реверсивным, а ниже этого горизонта направление вращения сменяется с правого на левое. Если же «свободное» течение вращается влево, то знак вращения сохраняется на всех глубинах.

Такая закономерность объясняется уменьшением абсолютных значений скорости (а значит, и силы Кориолиса) по мере приближения ко дну, в то время как горизонтальный градиент давления на всех горизонтах остается одинаковым, что хорошо иллюстрируется на примере продольных колебаний в канале, изображенном на рис. 4.8. В отсутствие трения продольные те-

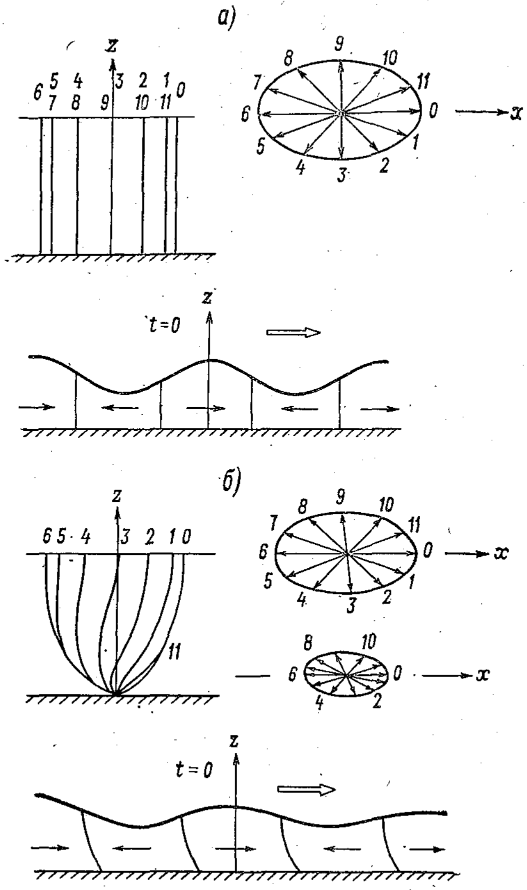


Рис. 4.9. Влияние донного трения на приливную волну Свердрупа [9].

Показаны ежечасные вертикальные эпюры приливного течения, эллипсы течений в плане и схемы волны, разделенной на «блоки» с противоположно направленными течениями.
а — случай без трения; *б* — случай с трением.

чения одинаковы от поверхности до дна, и возникающий геострофический поперечный наклон уровня создает градиент давления, который на любой глубине уравновешивается силой Кориолиса $\left(\rho f u = -\rho g \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)$, т. е. течение повсюду остается реверсивным (рис. 4.8 *а*). Если же трение уменьшает продольный компонент течения на придонных горизонтах (рис. 4.8 *б*), то здесь соответственно уменьшается и сила Кориолиса, т. е. статическое поперечное равновесие в нижних слоях нарушается $\left(|\rho f u| < \left|\rho g \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|\right)$ и возникает поперечное ускорение, колеблющееся в фазе с продольным течением и направленное влево от него. Соответствующий поперечный компонент течения приводит к левому вращению течений вблизи дна. Другим следствием поперечных потоков в нижних слоях будет перераспределение объемов воды и тем самым уменьшением перекосов поверхности, т. е. в верхнем слое статическое равновесие также нарушится, но в противоположную сторону $\left(|\rho f u| > \left|\rho g \frac{\partial \zeta}{\partial y}\right|\right)$, что приведет к правому вращению течений. Таким образом, образуются два слоя с противоположным направлением вращения течений, разделенные горизонтом $z_р$, на котором течение остается реверсивным. Следовательно, косвенно действие придонного трения сказывается и за пределами пограничного слоя, приводя к перестройке приливного потока по всей вертикали. При этом можно сказать, что сила трения изменяет относительную роль градиента давления и силы Кориолиса в формировании конфигурации эллипса течения, причем в верхних слоях это изменение происходит в «пользу» силы Кориолиса, а в нижних слоях — «в пользу» градиента давления.

В частном случае прогрессивной волны в открытом океане течения в верхнем, «свободном» от трения слое ведут себя так же, как в обычной волне Свердрупа. В пограничном слое течения ослабевают с глубиной, и эллипс течения становится у́же. Влияние трения проявляется также в сдвиге фазы между максимальным течением и полной водой; этот фазовый сдвиг нарастает с приближением ко дну в соответствии с увеличением роли трения в придонных слоях. Указанные особенности иллюстрируются рис. 4.9.

4.6. Приливы в море, покрытом льдом

Влияние ледяного покрова на приливные движения имеет следствием ряд эффектов, наиболее существенными из которых являются: а) возникновение подледного пограничного слоя в приливном потоке; б) отражение приливной волны от границы между льдом и чистой водой; в) уменьшение скорости приливной волны и ее затухание по мере движения подо льдом.

При наличии неподвижного ледяного покрова вблизи его нижней кромки в приливном потоке за счет трения образуется «верхний» пограничный слой. Учет его производится только через граничные условия при тех же общих уравнениях (4.43). Вид решения зависит прежде всего от способа учета коэффициента турбулентной вязкости K_z. На рис. 4.10 показаны вертикальные эпюры приливного течения, вычисленные при предположении, что K_z линейно растет с удалением от дна и от нижней поверхности льда при неизменности в промежуточном слое, но без задания абсолютных значений K_z. В этом случае уравнения, описывающие решения для u и v, включают зависимость от неизвестной по абсолютным значениям величины K_z. Для того чтобы система была замкнутой, эти уравнения дополняются соотношением $K_z = l\sqrt{Э}$, где l — средний масштаб турбулентности, а $Э$ — осредненная по глубине энергия турбулентности, причем обе эти величины выражаются через вертикальный профиль скорости

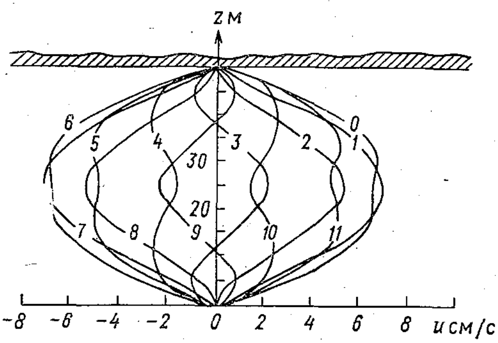


Рис. 4.10. Вертикальные эпюры скорости приливного течения под неподвижным льдом на каждый час приливного цикла.

течения. Полученная система уравнений решается методом последовательных приближений при задании в качестве внешних параметров уклонов поверхности $\nabla_\Gamma \zeta$, а также величин H, σ, f и параметра шероховатости дна и нижней кромки льда. На рис. 4.10 видно падение скорости и опережение фаз приливного течения по мере приближения ко дну и к нижней кромке льда.

Встречаясь с ледяным покровом и распространяясь под ним, приливная волна не только испытывает трение, но и частично отражается от границы между льдом и чистой водой, теряя энергию на упругие деформации. Полный учет всех факторов чрезвычайно сложен, поэтому для их оценки часто применяют эмпирический подход. Аналитические решения получены лишь для частных упрощенных задач.

Если ледяной покров представляет собой неподвижное припайное ледяное поле, ширина которого $2d$ (рис. 4.11) того же порядка, что и длина приливной волны $\lambda = 2\pi\sqrt{gH}/\sigma$, то его замерзающих морей, приводя к заметному сезонному ходу *гармонических постоянных* приливных колебаний $H_п$ и g° [2].

4.7. Энергетические характеристики приливных движений

1) Волновой поток приливной энергии

В главе 3 для осредненного за период потока волновой энергии вдоль оси x через поперечное сечение единичной ширины было получено выражение (3.65), характеризующее величину $dЭ'/dt$, т. е. быстроту изменения энергии в области, лежащей на оси x слева от рассматриваемого поперечного сечения. При учете выражения (3.36), а также соотношений $u = \partial\varphi/\partial x$ и $\zeta = -(1/g)\,\partial\varphi/\partial t$ выражение (3.65) дает для потока $\overline{Ф_э}$ величину $-(\rho g H/\tau)\int\limits_t^{t+\tau} u\zeta\,dt$. Если, как это обычно делается при изучении приливов, определять знак потока $Ф_э$ направлением переноса энергии, то отрицательным значениям величины $dЭ'/dt$ соответствует положительно направленный поток, т. е.

$$\overline{Ф_э} = \rho g H\,\frac{1}{\tau}\int\limits_t^{t+\tau} u\zeta\,dt. \tag{4.49}$$

В поперечном сечении, фиксированном на оси x, величины ζ и u изменяются с одинаковым периодом, но в общем случае с разными фазами, т. е.

$$\begin{aligned} \zeta &= H_п\cos(\sigma t - g^\circ); \\ u &= U\cos(\sigma t - g_u^\circ). \end{aligned} \tag{4.50}$$

Подстановка (4.50) в (4.49), сопровождаемая осреднением по периоду, дает так называемый *чистый поток* энергии

$$\overline{Ф_э} = \frac{1}{2}\rho g H H_п U\cos\beta, \tag{4.51}$$

где $\beta = g_u^\circ - g^\circ$. Таким образом, волновой поток приливной энергии через поперечное сечение пропорционален амплитудам прилива и нормальных к сечению приливных течений, а также зависит от соотношения их фаз. При $\beta = 0$ и $\beta = \pi$ (чисто прогрессивная волна) результирующий поток максимален и равен $\frac{1}{2}\rho g H H_п U$, а при $\beta = \pi/2$ или $\beta = 3\pi/2$ (чисто стоячая волна) результирующий поток энергии $\overline{Ф_э}$ отсутствует.

2) Работа приливообразующих сил

Обусловленный прямым действием приливообразующих сил вклад в энергетический баланс океана или моря складывается из двух частей. Во-первых, при расчете волнового переноса энергии через боковые границы в выражении для $\Phi_э$ добавляется член вида $\rho gH\widehat{\zeta u}$, который можно рассматривать как «астрономическую поправку». Во-вторых, непосредственное действие приливообразующей силы на массу воды бассейна производит определенную работу, что равносильно наличию некоторого дополнительного потока энергии Φ_Ω.

Для расчета Φ_Ω удобнее пользоваться выражениями, содержащими не компоненты приливообразующей силы F_x, F_y и скорости течения u, v, а приливообразующий потенциал $\Omega = g\widehat{\zeta}$ и колебания уровня ζ. Если колебания происходят вдоль оси x, то, рассматривая столбик воды с высотой H и единичным основанием, находим, что скорость, с которой приливообразующая сила $F_x = \rho\, \partial\Omega/\partial x$ совершает работу, будет $F_x uH = \rho gHu \times$ $\times (\partial\widehat{\zeta}/\partial x)$. Для участка от $x = 0$ до $x = L$, интегрируя по частям, получим

$$\int\limits_0^L \rho gHu \frac{\partial\widehat{\zeta}}{\partial x}\, dx = \rho gHu\widehat{\zeta}\,\Big|_{x=0}^{x=L} - \rho g \int\limits_0^L \widehat{\zeta} \frac{\partial}{\partial x}(uH)\, dx. \quad (4.52)$$

Первый член в правой части представляет собой поправку к волновому переносу энергии через границы участка при $x = 0$ и $x = L$, а второй член дает величину Φ_Ω.

Переходя от одномерного участка 0, L к поверхности с площадью Π и учитывая уравнение неразрывности в форме (4.18), можно переписать выражение для Φ_Ω в виде

$$\Phi_\Omega = \rho g \iint\limits_{\Pi} \widehat{\zeta} \frac{\partial\zeta}{\partial t}\, d\Pi. \quad (4.53)$$

Величина $\Phi'_\Omega = \rho g\widehat{\zeta}\, (\partial\zeta/\partial t)$ будет плотностью потока Φ_Ω (его называют иногда «астрономическим» потоком приливной энергии). Для отдельной гармонической составляющей, когда

$$\widehat{\zeta} = \widehat{\zeta}_0 \cos \sigma t;$$
$$\zeta = H_п \cos(\sigma t - \varkappa), \quad (4.54)$$

по аналогии можно получить выражение для плотности осредненного по периоду чистого астрономического потока [7]:

$$\overline{\Phi}'_\Omega = \frac{1}{2}\, \rho g\sigma H_п \widehat{\zeta}_0 \sin \varkappa. \quad (4.55)$$

Таким образом, знак величины $\overline{\Phi}_\Omega$ определяется фазовым сдвигом между $\hat{\zeta}$ и ζ. Если фактический прилив отстает по фазе от статического ($0<\varkappa<\pi$), то приливообразующая сила *сообщает* энергию бассейну, а в противоположном случае ($\pi<\varkappa<2\pi$) приливообразующая сила *отбирает* энергию от бассейна. При точной синфазности или антифазности величин $\hat{\zeta}$ и ζ ($\varkappa=0,\ \pi$) положительная и отрицательная работа, совершаемая приливообразующей силой, в целом за период компенсируют друг друга, и чистый астрономический поток энергии равен нулю (рис. 4.12).

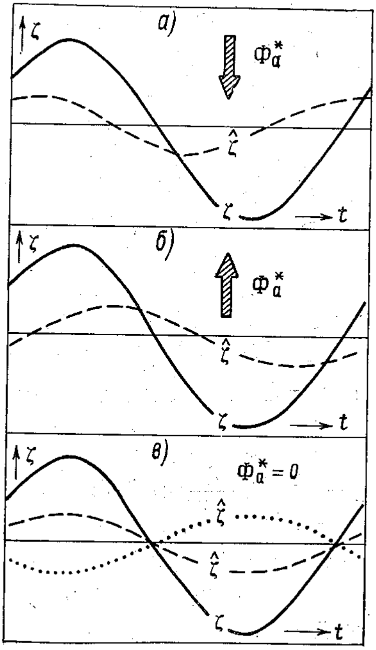


Рис. 4.12. Работа, совершаемая приливообразующей силой.

а — фактический прилив отстает от статического; работа положительна; *б* — фактический прилив опережает статический; работа отрицательна; *в* — фактический прилив в фазе (противофазе) со статическим; работа равна нулю.

3) Баланс приливной энергии и ее диссипация в морях

Поскольку гармонические приливные движения, происходящие в пределах каждого бассейна, можно считать установившимися, то это означает, что между притоком Φ^+ и расходом Φ^- приливной энергии в среднем существует равновесие, которое выражается уравнением баланса. В общем виде это уравнение имеет вид

$$\overline{\Phi}^{\pm}_{c,\Sigma}+\overline{\Phi}^{\pm}_{\Omega,\Sigma}+\overline{\Phi}^{\pm}_{д,\Sigma}+\overline{\Phi}^{\pm}_{ат,\Sigma}+\overline{\Phi}^{-}_{т,\Sigma}=0, \qquad (4.56)$$

где члены $\Phi^{\pm}_{c,\Sigma}$ обусловлены волновым переносом через жидкие границы; члены $\Phi^{\pm}_{\Omega,\Sigma}$ — прямым действием приливообразующих сил; члены $\Phi^{\pm}_{д,\Sigma}$ и $\Phi^{\pm}_{ат,\Sigma}$ выражают энергообмен океана с твердой земной корой (дном) и атмосферой, а $\Phi^{-}_{т,\Sigma}$ — расход энергии на диссипацию трением. Роль членов $\Phi^{\pm}_{д,\Sigma}$ и $\Phi^{\pm}_{ат,\Sigma}$ исследована еще недостаточно, хотя, согласно некоторым оценкам, значение члена $\Phi^{\pm}_{д,\Sigma}$ в глобальном масштабе может быть довольно велико. Если же говорить о бассейнах морского типа, то при исследовании их приливного энергетического баланса обычно ограничиваются рассмотрением членов $\Phi^{\pm}_{c,\Sigma}$, $\Phi^{\pm}_{\Omega,\Sigma}$ и $\Phi^{-}_{\text{т},\Sigma}$. Если для бассейна известны колебания уровня по всей площади и приливные течения на жидких границах, то можно подсчитать сумму $\overline{\Phi}^{\pm}_{c,\Sigma}+\overline{\Phi}^{\pm}_{\Omega,\Sigma}$, и ее отличие от нуля будет характеризовать среднюю скорость диссипации $\overline{\Phi}^{-}_{\text{т},\Sigma}$ в пределах бассейна. Такой способ оценки величины $\Phi^{-}_{\text{т},\Sigma}$ в виде остаточного члена называют *методом потоков*, имея в виду потоки энергии.

В то же время диссипация энергии донным трением может быть рассчитана непосредственно. Если рассматривать осредненные по вертикали течения, то скорость, с которой сила трения совершает работу для единицы объема, будет равна $F_{\text{т}}V$, где $V=\sqrt{u^2+v^2}$, и тогда для бассейна с глубиной H и площадью Π имеем

$$\Phi_{\text{т},\Sigma}=\iint\limits_{\Pi} HF_{\text{т}}V\,d\Pi. \tag{4.57}$$

Величина $\Phi'_{\text{т}}=HF_{\text{т}}V$ будет плотностью фрикционного потока $\Phi_{\text{т},\Sigma}$. Так как $F_{\text{т}}$ и V всегда противоположны по фазе, то $\Phi_{\text{т}}$ всегда отрицательно.

Плотность фрикционного потока при квадратичном законе сопротивления $F_{\text{т}}=-\rho r^*V|V|/H$ находится в виде функции от составляющих скорости приливного течения

$$\Phi'_{\text{т}}=-\rho r^*V^3=-\rho r^*\left(u^2+v^2\right)^{3/2}. \tag{4.58}$$

Если использовать более приближенный линейный закон сопротивления $F_{\text{т}}=-r_*V$, то

$$\Phi'_{\text{т}}=-\rho r_*V^2=-\rho r_*\left(u^2+v^2\right). \tag{4.59}$$

Такой способ оценки $\Phi_{\text{т}}$ называют *фрикционным методом*.

Согласно существующим оценкам, на диссипацию в окраинных морях затрачивается свыше половины всей энергии, сообщаемой приливообразующей силой системе атмосфера—океан—твердая земля, в то время как остальная часть расходуется на генерацию внутренних волн, сопровождающуюся развитием турбулентности в открытом океане, а также на диссипацию в земной коре и атмосфере. Оценки глобального астрономического потока приливной энергии выполнены для гармоники M_2, и они колеблются от $3\cdot10^{19}$ [6] до $5\cdot10^{19}$ [4] эрг/с.

4.8. Нелинейные эффекты в мелководных прибрежных районах

Если приливные колебания уровня $\zeta = a\cos\sigma t$ составляют заметную долю от средней глубины H, то распространение приливной волны сопровождается искажением ее формы. Фактическая глубина под вершиной $(H+a)$ становится ощутимо больше, чем под подошвой $(H-a)$, и гребень начинает двигаться быстрее, чем ложбина. Передний склон волны становится более крутым, а задний — более пологим, в результате чего в фиксированной точке оси x время подъема уровня уменьшается, а время падения увеличивается. Подобное нарушение симметрии описывается наложением на основное, чисто синусоидальное, колебание дополнительных гармоник с частотами, кратными (удвоенной, утроенной и т. д.) частоте основной гармоники (M_2, S_2, K_1 и др.). Такие гармоники высшего порядка, обусловленные искажением формы приливной волны, называют *деформационными*.

Указанный эффект аналитически иллюстрируется следующим образом [5]. Если параметр a/H не очень мал, то в исходных уравнениях следует учитывать нелинейные члены. Тогда исходную систему можно записать в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x};$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}=-(H+\zeta)\frac{\partial u}{\partial x}. \qquad (4.60)$$

Решение системы (4.60) можно искать методом последовательных приближений. Рассмотрим случай периодического возмущения на границе (при $x=0$) с амплитудой a:

$$\zeta=a\cos\sigma t, \qquad (4.61)$$

что соответствует вторжению волны с периодом $\tau=2\pi/\sigma$ из глубоководного бассейна, где она линейна, на мелководье, лежащее в области $x>0$, где начинают действовать нелинейные эффекты. В нулевом приближении полагаем $u(\partial u/\partial x)=\partial(\zeta u)/\partial x=0$ и решение для ζ и u имеет вид прогрессивной волны

$$\zeta=a\cos(\sigma t-kx);$$

$$u=\sqrt{g/H}\,a\cos(\sigma t-kx). \qquad (4.62)$$

Подставляя эти значения ζ и u в нелинейные члены уравнений (4.60), получаем исходные уравнения в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}=-\frac{1}{2}\frac{kga^2}{H}\sin 2(\sigma t-kx);$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+H\frac{\partial u}{\partial x}=-ka^2\sqrt{g/H}\sin 2(\sigma t-kx). \qquad (4.63)$$

Интегрирование уравнений (4.63) с учетом граничного условия (4.61) при $x=0$ дает выражения для ζ и u в первом приближении:

$$\zeta = a\left[\cos(\sigma t - kx) - \frac{3\pi}{2}\frac{a}{H}\frac{x}{\lambda}\sin 2(\sigma t - kx)\right];$$

$$u = \sqrt{\frac{g}{H}}\, a\left[\cos(\sigma t - kx) - \frac{3\pi}{2}\frac{a}{H}\frac{x}{\lambda}\sin 2(\sigma t - kx) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8}\frac{a}{H}\cos 2(\sigma t - kx)\right]. \qquad (4.64)$$

Таким образом, нелинейность порождает колебания удвоенной частоты, или «обергармоники», роль которых нарастает по мере роста x, т. е. по мере продвижения волны по мелководью. Поскольку применение способа последовательных приближений требует, чтобы поправки к нулевому приближению были малыми, полученный результат справедлив только до тех пор, пока остается малым произведение $(a/H)(x/\lambda)$, т. е. пока вторгшаяся волна прошла по мелководью расстояние x, не во много раз превышающее ее длину $\lambda = \tau\sqrt{gH}$, где $\tau = 2\pi/\sigma$.

Проделав второе и последующие приближения, можно получить деформационные обергармоники более высоких порядков (с частотами 3σ, 4σ и т. д.) и с все меньшими амплитудами. При этом если, например, в качестве основной гармоники с частотой σ фигурировала гармоника M_2, то полученные обергармоники обозначаются M_4, M_6, M_8 и т. д.

Наряду с искажением формы каждой отдельной, первоначально гармонической волны к появлению гармоник высшего порядка приводит также нелинейное взаимодействие различных гармонических составляющих. Допустим, что в рассмотренном выше случае внешнее возмущение на границе представляет собой комбинацию гармоник M_2 и S_2, т. е. вместо (4.61) мы имеем при $x=0$

$$\zeta = m\cos\sigma_M t + s\cos\sigma_S t, \qquad (4.65)$$

где m и s — амплитуды, а σ_M и σ_S — частоты указанных гармоник.

Тогда при подстановке нулевого приближения в квадратичные члены мы получим величины вида

$$(m\cos\sigma_M t + s\cos\sigma_S t)^2 = m^2\cos^2\sigma_M t + 2ms\cos\sigma_M t\cos\sigma_S t +$$
$$+ s^2\cos^2\sigma_S t, \qquad (4.66)$$

которые содержат три четвертьсуточные гармонические составляющие, пропорциональные $m^2\cos 2\sigma_M t$ (обозначается символом M_4); $ms\cos(\sigma_M+\sigma_S)t$ (обозначается MS_4); $s^2\cos 2\sigma_S t$ (обозначается S_4). Если колебание на границе, помимо M_2 и S_2, содержит еще гармоники N_2 и K_2, то нелинейное взаимодействие приведет к появлению в мелководной зоне дополнительных высших гармоник типа MN_4, MK_4, M_6, $2MS_6$, $2MN_6$, $2SN_6$, MSN_6 с частотами $\sigma_M+\sigma_N$, $\sigma_M+\sigma_K$, $3\sigma_M$, $2\sigma_M+\sigma_S$, $2\sigma_M+\sigma_N$, $2\sigma_S+\sigma_N$, $\sigma_M+\sigma_S+\sigma_N$ и т. д. Такие гармоники называют *комбинационными*.

Приведенные выше выражения (4.64) носят лишь иллюстративный характер, так как они получены при весьма сильных допущениях, наиболее важное из которых связано с пренебрежением затрат энергии основным колебанием на образование высших гармоник. Тем не менее с помощью специальных приемов возникающие погрешности можно в значительной степени устранить, и тогда выражения типа (4.64) могут быть использованы для ориентировочных оценок. Наблюдения показывают, что приливные колебания в мелководных морских бассейнах (Ла-Манш, Хофден, Мезенский залив и др.) содержат весьма ощутимые по амплитуде гармоники высших порядков, объединяемые под общим названием «мелководные составляющие».

4.9. Приливные карты

Пространственная картина приливных колебаний, обусловленных определенной гармонической составляющей, изображается в виде приливной карты, на которой проведены изолинии амплитуд ($H_п$) и фаз ($g°$), называемые соответственно *изоамплитудами* и *котидальными линиями (котидалями)*. В каждой точке приливные колебания характеризуются фиксированными значениями $H_п$ и $g°$, т. е. могут быть записаны в виде

$$\zeta=H_п\cos(\sigma t-g°)=\zeta_1\cos\sigma t+\zeta_2\sin\sigma t, \tag{4.67}$$

где $\zeta_1=H_п\cos g°$ и $\zeta_2=H_п\sin g°$. Величины ζ_1 и ζ_2 дают положение уровня в моменты $t=0$ и $t=\tau/4$, т. е. через четверть периода. Амплитуда и фаза колебаний определяются через ζ_1 и ζ_2 с помощью соотношений

$$H_п=\sqrt{\zeta_1^2+\zeta_2^2};\quad g°=\operatorname{arctg}\frac{\zeta_2}{\zeta_1}, \tag{4.68}$$

т. е. величины ζ_1 и ζ_2 столь же однозначно характеризуют колебания в каждой точке, как амплитуда и фаза.

В *прогрессивной* волне положение котидальных линий находится из соотношения $t=kx/\sigma$, определяющего фазу колебаний уровня, т. е. момент полной воды. Поскольку фаза линейно изменяется вдоль абсциссы, то котидальные линии представляют собой прямые, перпендикулярные к направлению волны и отстоящие друг от друга на расстоянии $\Delta x=\Delta t\cdot k/\sigma=\sqrt{gH}$. В то же время амплитуда колебаний при всех x одинакова, так что изоамплитуды в этом случае отсутствуют. Из выражения (3.44) следует также, что котидали совпадают с линиями гребней волн, так как условие полной воды $\partial\zeta/\partial t = 0$ и условие гребня $\partial\zeta/\partial x = 0$ дают одинаковое соотношение между x и t. Таким образом, в прогрессивной волне ежечасные котидали изображают последовательное положение гребня приливной волны на каждый час.

В *стоячей* волне изменение фазы вдоль абсциссы происходит скачком на 180° в узловых точках, а на участках между этими точками фаза постоянна. Котидали как бы «стягиваются» в узловые линии, и приливная карта состоит из одних изоамплитуд, описывающих продольный профиль стоячей волны.

В *смешанной* волне и амплитуда, и фаза непрерывно изменяются вдоль абсциссы. Так как в узлах стоячей доли фаза изменяется быстрее, а в пучностях — медленнее, то котидальные линии сгущаются в зонах узлов и разрежаются в зонах пучностей. Изоамплитуды обрисовывают области минимумов в зонах узлов и области максимумов в зонах пучности. В общем с увеличением стоячей доли неравномерность картины обостряется, а с увеличением прогрессивной доли — сглаживается. Следует отметить, что в смешанной волне полная вода в общем случае не совпадает по времени с прохождением гребня в фиксированной точке $x = x_1$. Действительно, при условии полной воды $\partial\zeta/\partial t = 0$ из выражения (3.46) следует, что момент полной воды равен

$$t_{\text{пв}} = g^\circ/\sigma = \frac{1}{\sigma}\operatorname{arctg}\left(\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2}\operatorname{tg} kx_1\right), \tag{4.69}$$

а при условии гребня $\partial\zeta/\partial x = 0$ момент прохождения гребня через точку x_1 равен

$$t_{\text{гр}} = \frac{1}{\sigma}\operatorname{arctg}\left(\frac{a_1 + a_2}{a_1 - a_2}\operatorname{tg} kx_1\right). \tag{4.70}$$

В общем случае $a_2 \neq 0$ и, следовательно, $t_{\text{пв}} \neq t_{\text{гр}}$. Таким образом, в большинстве реальных случаев отождествление котидальных линий с гребнем приливной волны неправомерно.

Рисунок приливной карты значительно усложняется в случае интерференции приливных волн под различными углами. В частности, для океанов типичной является косая интерференция стоячих волн, что приводит к весьма характерной для приливных движений картине, называемой *амфидромической системой*, или *амфидромией*. Допустим, что существуют две стоячие волны

$$\zeta_{(1)} = a_1 \sin(k'x + k''y)\cos(\sigma t - \varepsilon_1);$$

$$\zeta_{(2)} = a_2 \sin(-k'x + k''y)\cos(\sigma t - \varepsilon_2), \tag{4.71}$$

скрещивающиеся под углом α и имеющие фазовый сдвиг $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$. Здесь ось y совмещена с биссектрисой угла α, и тогда $k' =$

$= k\sin\gamma$, $k'' = k\cos\gamma$, где γ — это угол между направлением колебаний в волне $\zeta_{(1)}$ и осью x, т. е. $\gamma = \frac{1}{2}(180° - \alpha)$. Налагая на суммарное колебание $\zeta = \zeta_{(1)} + \zeta_{(2)}$ условие полной воды $\partial\zeta/\partial t = 0$, получаем из (4.71) уравнение котидальных линий [7]:

$$\operatorname{tg}\sigma t = \frac{a_1 \sin(k'x + k''y)\sin\varepsilon_1 + a_2 \sin(-k'x + k''y)\sin\varepsilon_2}{a_1 \sin(k'x + k''y)\cos\varepsilon_1 + a_2 \sin(-k'x + k''y)\cos\varepsilon_2}. \quad (4.72)$$

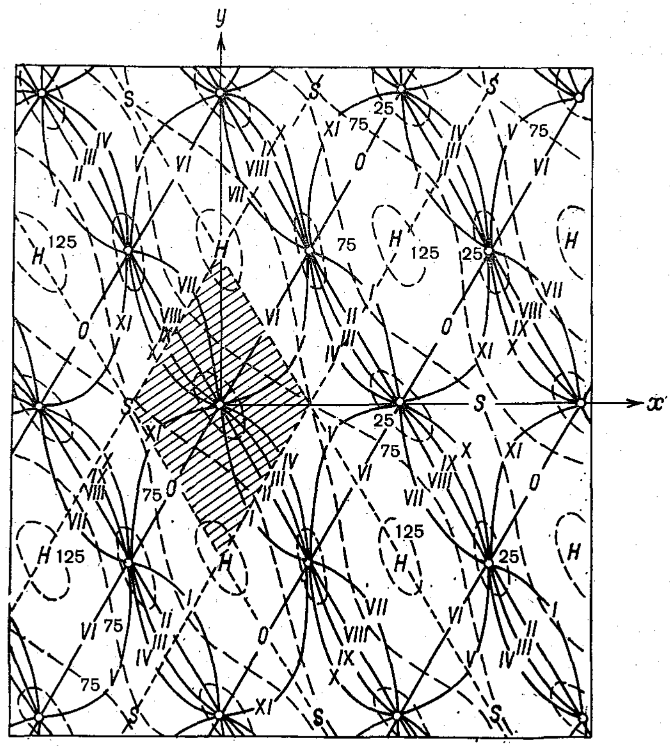


Рис. 4.13. Результат косой интерференции стоячих волн. Семейство «амфидромий Гарриса». Заштрихована «ячейка господства» одной из амфидромий.

На рис. 4.13 показана приливная карта, построенная по уравнению (4.72) и по соответствующему уравнению изоамплитуд для случая $\alpha = 120°$, $a_2/a_1 = 0{,}6$, $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = 60°$. В местах пересечения узловых линий интерферирующих волн $\zeta_{(1)}$ и $\zeta_{(2)}$ возникают амфидромические точки, в которых колебания уровня отсутствуют. Вокруг каждой точки формируется амфидромическая система, состоящая из котидальных линий, которые исходят из этой точки лучеобразным пучком. Направление обхода котидалей вокруг амфидромической точки определяется разностью фаз исходных стоячих волн. Поскольку указанная разность в общем произвольна и к тому же может (если горизонтальные размеры бассейна превышают $\lambda/2$) различаться на 180° в различных частях акватории, то направление обхода в принципе может быть любым, но смежные амфидромии, связанные общими котидалями, должны «вращаться» в противоположные стороны. Такие амфидромические системы интерференционного происхождения называют *амфидромиями Гарриса*, в отличие от *амфидромий Тэйлора*, обусловленных вращением Земли (см. рис. 4.6).

Изображение пространственного распределения приливных течений, когда требуется показать характеристики колебаний вектора, является более сложной задачей, чем изображение колебаний уровня. Приливные течения, изменяясь как по величине, так и по направлению, характеризуются в каждой точке своим годографом, имеющим в общем (для отдельной гармоники) форму эллипса. Размер большой полуоси (A) такого эллипса определяет амплитудное значение скорости, а момент его наступления определяет фазу, но для полной характеристики течения необходимо знать и другие элементы эллипса: его ориентацию, размер малой полуоси (B) либо *коэффициент полноты* $\beta = B/A$, а также направление вращения. В общем случае эти элементы можно выразить через компоненты скорости u и v. Если каждый из этих компонентов подобно уровню в (4.67) записать в виде

$$u = u_1 \cos \sigma t + u_2 \sin \sigma t;$$
$$v = v_1 \cos \sigma t + v_2 \sin \sigma t \qquad (4.73)$$

и ввести обозначения

$$a = u_1^2 + u_2^2; \quad c = u_1 v_1 + u_2 v_2;$$
$$b = v_1^2 + v_2^2; \quad \Delta = u_1 v_2 - u_2 v_1, \qquad (4.74)$$

то после преобразований, учитывающих геометрические свойства эллипса, получим

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{a + b + \sqrt{(a+b)^2 - 4\Delta^2}};$$

$$B = \frac{1}{2}\sqrt{a + b - \sqrt{(a+b)^2 - 4\Delta^2}};$$

$$\beta = \frac{B}{A} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4\Delta^2}{(a+b)^2}}}{1 + \sqrt{1 - \frac{4\Delta^2}{(a+b)^2}}}}. \qquad (4.75)$$

Направление вращения вектора течения определяется знаком величины Δ: при $\Delta<0$ течение вращается вправо (по часовой стрелке), а при $\Delta>0$ — влево. При $\Delta=0$ течение реверсивное или вообще отсутствует.

Все элементы эллипса приливного течения можно представить с помощью различных систем изолиний, но для компактности часто предпочитают схематически изображать на картах сами эллипсы в надлежащем масштабе.

Расчет и построение приливных карт

Методы, применяемые для построения приливных карт, можно условно разделить на: 1) эмпирические, основанные на обобщении данных наблюдений без использования уравнений гидродинамики, 2) полуэмпирические, в которых уравнения гидродинамики и данные наблюдений используются совместно, и 3) чисто теоретические, вообще не требующие данных наблюдений. В настоящее время наибольшее распространение получили полуэмпирические методы.

Из *эмпирических* методов наиболее эффективным является метод изогипс, предложенный В. В. Тимоновым и основанный на простом правиле, согласно которому при гармоническом колебании нулевое и экстремальное положения уровня разделены промежутком времени в четверть периода. Следовательно, в каждый момент котидальная линия совпадает с нулевой изогипсой мгновенного рельефа водной поверхности, наблюдаемого за (спустя) четверть периода до (после) данного момента. Таким образом, если, используя известные гармонические постоянные в пунктах наблюдений, предвычислить в этих пунктах ежечасные значения уровня и с их помощью, интерполируя, изобразить в виде изогипс топографию водной поверхности на каждый час, то нулевые изогипсы на каждой ежечасной карте покажут положение котидальных линий на моменты, отстоящие на $\tau/4$ от тех, к которым относятся сами карты. Сборная карта нулевых изогипс, надлежащим образом переоцифрованная, и представляет собой котидальную карту. Ежечасные уровни для любых точек внутри бассейна, снятые с карт изогипс и сглаженные до синусоид заданного периода τ, позволяют определить амплитуды и построить их изолинии, дающие в сочетании с котидалями полную приливную карту.

Хотя метод изогипс сохраняет самостоятельное значение в силу своей простоты и наглядности, тем не менее в последнее время основным средством получения приливных карт стали *полуэмпирические* методы, основанные на численном решении уравнений гидродинамики. Наиболее известными среди этих методов являются методы Дефанта и Ганзена.

Метод Дефанта предназначен для расчета приливных колебаний в узких каналообразных бассейнах переменного поперечного сечения $\Pi = Hb$, где b — ширина, а H — средняя глубина сечения. После введения горизонтального смещения частицы $\xi = \int u\,dt$ и учета гармонической зависимости ζ и ξ от времени, из уравнений движения и неразрывности следует

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\sigma}{g}\xi;$$

$$\frac{\partial(\Pi\xi)}{\partial x} = -\zeta b. \tag{4.76}$$

Уравнения (4.76) интегрируются численно вдоль x при условии $\xi = 0$ в замкнутом конце бассейна. В классическом варианте метод применим только для чисто стоячих колебаний, однако его модификации позволяют выполнять расчеты также для прогрессивных и смешанных волн. Результат получается в относительных единицах, и для перехода к абсолютным значениям ζ и ξ необходимо хотя бы в одном пункте иметь фактические данные для «привязки».

В методе краевых значений Ганзена, пригодном для бассейнов произвольной формы, в качестве исходных уравнений используется система (4.18), причем в правые части уравнений движения добавляются члены $-r_* u$ и $-r_* v$, приближенно учитывающие донное трение (см. с. 195). Учет гармонической зависимости величин ξ, u и v от времени и исключение из полученной системы величин u и v позволяют получить одно уравнение для комплексной переменной $\zeta = H_п e^{ig°}$:

$$\nabla^2\zeta + \frac{\partial\zeta}{\partial x}\left[\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial x} - \frac{f}{(i\sigma + r_*)H}\frac{\partial H}{\partial y}\right] + \frac{\partial\zeta}{\partial y}\left[\frac{1}{H}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{f}{(i\sigma + r_*)H}\frac{\partial H}{\partial x}\right] - \frac{i\sigma\left[f^2 + (i\sigma + r_*)^2\right]}{gH(i\sigma + r_*)}\zeta = 0. \tag{4.77}$$

В обширных бассейнах, где необходимо учитывать прямое действие приливообразующей силы, фактические уклоны уровня в (4.77) заменяются «эффективными», т. е. вместо $\partial\zeta/\partial x$ записывается $\partial(\zeta - \widehat{\zeta})/\partial x$ и т. д., где $\widehat{\zeta}$ — статическое возвышение уровня. При необходимости можно учесть и горизонтальное турбулентное трение, включая в исходные уравнения движения члены $K_L \nabla^2 u$, $K_L \nabla^2 v$, где K_L — коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости.

Уравнение (4.77) имеет единственное решение, если на границах бассейна заданы значения ζ (и $\widehat{\xi}$) либо нормальные компоненты скорости. Значения ζ (т. е. $H_п$ и $g°$) внутри бассейна определяются численно путем итераций, после того как уравнение (4.77) записывается в конечных разностях по x и y. Такую процедуру называют гидродинамическим интерполированием, поскольку при ней производится распространение граничных значений искомой величины внутрь области с учетом законов гидродинамики (баланс действующих сил, неразрывность).

В последнее время довольно широкое распространение получил так называемый HN-метод*, или метод Ганзена с начальными условиями [8]. В этом методе все три уравнения исходной системы (4.18) с добавочными фрикционными членами $-r_*u$ и $-r_*v$ расписываются в конечных разностях (центральных по x, y и передних по t), и расчет величин u, v и ζ ведется по полученным конечно-разностным соотношениям вперед по времени от заданной начальной картины. Метод допускает и учет нелинейных членов, т. е. применим к мелководным районам. В обширных бассейнах можно учесть горизонтальное турбулентное трение и действие приливообразующих сил, дополняя исходные уравнения членами $K_L\nabla^2u$, $K_L\nabla^2v$ и заменяя $\partial\zeta/\partial x$, $\partial\zeta/\partial y$ на $\partial(\zeta-\hat{\zeta})/\partial x$, $\partial(\zeta-\hat{\zeta})/\partial y$. В отличие от первого метода Ганзена, здесь не накладывается никаких ограничений на вид зависимости u, v, ζ от времени — в принципе она может быть произвольной. Часто применяется вариант HN-метода, при котором в качестве граничных условий задаются известные колебания уровня на жидких границах и условие непротекания на береговой черте при невозмущенном начальном состоянии внутри бассейна. В процессе расчета возмущение распространяется от жидких границ внутрь бассейна, и вычисления ведутся по всей его акватории до установления стационарных колебаний, которые и представляют собой окончательный результат. Распространив указанный подход на весь Мировой океан, можно рассчитать реакцию глобального бассейна на действие заданной приливообразующей силы. В этом случае бассейн имеет только твердые береговые границы, на которых должны выполняться условия непротекания либо прилипания (при наличии горизонтальной вязкости). Поскольку характеристики приливообразующей силы можно считать известными, то данные наблюдений вообще не требуются при расчете, и в такой постановке задача является чисто *теоретической*.

Все перечисленные методы основаны на так называемых двухмерных приливных моделях, в которых принимается, что скорость приливных течений не зависит от z. Следует отметить, что применительно к морским бассейнам разработаны и трехмерные модели, позволяющие учитывать вертикальную неоднородность приливных течений. Наибольшее практическое применение получила модель Б. А. Кагана, существующая в вариантах для случая мелкого ($H<z_п$) и глубокого ($H>z_п$) моря (здесь H — глубина моря, а $z_п$ — толщина придонного пограничного слоя), а также для моря, покрытого неподвижным и

---

* Название метода принято по начальным буквам немецкого наименования „Hydrodynamisch-Numerisch Verfahren".

плавучим льдом. Расчет ведется методом краевых значений, причем основное внимание здесь сосредоточено на учете тормозящего и турбулизирующего эффекта донного трения и на способах определения коэффициента турбулентной вязкости K_z, который не задается заранее, а находится в процессе расчета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 4

1. Богданов К. Т. Приливы Мирового океана.— М.: Наука, 1975.— 116 с.
2. Жуков Л. А. Общая океанология.— Л.: Гидрометеоиздат, 1976.— 376 с.
3. Каган Б. А. Гидродинамические модели приливных движений в море.— Л.: Гидрометеоиздат, 1968.— 219 с.
4. Каган Б. Л. Приливы.— В кн.: Физика океана. Т. 2. Гидродинамика океана. М., Наука, 1978, с. 255—299.
5. Ламб Г. Гидродинамика. Пер. с англ.— М.: Л., ОГИЗ, 1947.— 928 с.
6. Марчук Г. И., Каган Б. А. Океанские приливы (математические модели и численные эксперименты).—Л.: Гидрометеоиздат, 1977.— 296 с.
7. Некрасов А. В. Приливные волны в окраинных морях.— Л.: Гидрометеоиздат, 1975.— 285 с.
8. Ханзен В. Приливы. Пер. с англ.— В кн.: Море. Л., Гидрометеоиздат, 1965, с. 389—433.
9. Шулейкин В. В. Физика моря.— М.: Наука, 1968.— 1083 с.

Глава 5. ДИНАМИКА ВОЛН ЦУНАМИ И ШТОРМОВЫХ НАГОНОВ

5.1. Общая характеристика явления цунами

Под японским названием «цунами» известны гравитационные волны, возбуждаемые в первую очередь подвижками дна при подводных землетрясениях значительной мощности с относительно неглубоким (до 50 км) расположением очага в земной коре. Другие причины цунами — подводные извержения вулканов, оползни и обвалы — имеют второстепенное значение [6].

Интенсивность цунами (I) определяют по максимальному подъему воды у берега ζ_{max} и выражают в баллах.

Периоды волн цунами τ лежат в пределах 10^2—10^4 с (2—200 мин), а скорость распространения хорошо описывается формулой Лагранжа—Эри $c=\sqrt{gH}$; таким образом, их длина имеет порядок 10—1000 км. Над большими глубинами высота большинства волн цунами не превышает 2—3 м, но при выходе на прибрежное мелководье высота цунами значительно возрастает. В табл. 5.1 приведены некоторые из зарегистрированных высот ζ_{max} у берега.

ТАБЛИЦА 5.1

Высота некоторых катастрофических цунами

Место	Год	Высота, м
Камчатский залив, СССР	1923	20
о. Парамушир, СССР	1952	18
Санрику, Япония	1933	24
Аляска, США	1964	7 (средн.)
Чили	1960	25

В соответствии с преобладающей ролью различных физических факторов весь процесс цунами принято делить на три основных этапа: возникновение, распространение, взаимодействие с берегом.

Физический механизм возбуждения цунами подвижкой океанского дна обусловлен передачей возмущения от дна к воде, которое выводит свободную поверхность из состояния равновесия и формирует так называемое начальное возмущение, которое дает начало гравитационным волнам, концентрически расходящимся из «очага цунами», как называют зону начального возмущения. При этом гравитационные колебания довольно быстро отфильтровываются от акустических, так как последние, обладая большей скоростью распространения ($c_{зв} \approx 1500$ м/с), разбегаются из зоны очага быстрее, чем первые ($c \approx 300$ м/с). Поэтому при гидродинамическом описании процесса возникновения цунами приведенная выше картина обычно упрощается путем исключения ее акустической части. С этой целью часто используют «поршневую» аппроксимацию, полагая, что подвижка дна непосредственно сдвигает по вертикали («выдвигает» либо «вдвигает») несжимаемый вышележащий водяной блок. Если сама подвижка и соответствующий сдвиг предполагаются не мгновенными, а растянутыми во времени, то к моменту завершения подвижки поверхностное возмущение успевает деформироваться под действием горизонтальных градиентов давления и, сохраняя некоторые черты донной деформации, не является в точности подобным ей.

Основными факторами, определяющими параметры и излучающие свойства очага, будут пространственные и временные характеристики донной подвижки, фоновая топография дна в зоне очага и общая глубина. Грубо можно считать, что горизонтальный размер очага l определяет верхний предел длины излучаемой волны ($\lambda \approx 2l$) и тем самым нижний предел частоты возникающих колебаний ($\sigma \approx \pi \sqrt{gH}/l$). Более высокие частоты обусловлены неоднородностями начального возмущения в пределах зоны очага.

После перехода ко второму этапу процесс распространения и трансформации волн цунами полностью описывается законами динамики несжимаемой жидкости. Основными факторами, определяющими характер распространения, будут геометрические и спектральные характеристики начального возмущения, а также рельеф дна в области распространения. Здесь требуется учитывать отражение и рефракцию распространяющихся волн, захват энергии, волноводные эффекты и т. д.

Наконец, на третьем этапе, при непосредственном взаимодействии волн с наклонным берегом, характер волны зависит от его наклона, переменности конфигурации и площади области, покрытой водой; при этом может происходить обрушение волн и их движение «по сухому дну» при заливании берега. Математическое описание этих явлений наиболее трудно и наименее развито.

5.2. Возникновение начального возмущения и излучение волн цунами из зоны очага

Обычно процесс возникновения цунами описывается в виде задачи о движении горизонтального слоя невязкой и несжимаемой жидкости, ограниченного сверху свободной поверхностью, а снизу дном, движение которого в зоне «донного очага» известно. Начало координат располагается на поверхности либо на дне (обычно в зоне очага), ось z направлена вверх. Если дно смещается плоскопараллельно, то движение жидкости, начинающееся из состояния покоя, будет безвихревым. Дополнительный учет уравнения неразрывности приводит, как было показано во введении, к уравнению [см. формулу (0.15)], описывающему поведение потенциала скорости:

$$\nabla^2\varphi=0.$$

Граничное условие на дне вытекает из известного распределения вертикальных скоростей воды, обусловленного подвижкой дна:

$$w|_{z=0}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}=F(t,\ x,\ y). \tag{5.1}$$

Граничные условия на свободной поверхности, как обычно, состоят из динамического и кинематического. Их комбинация дает в линейном приближении одно граничное условие в виде

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}+g\frac{\partial\varphi}{\partial z}=0. \tag{5.2}$$

Если потенциал φ, заданный уравнением (0.15), определен при граничных условиях (5.1) и (5.2), то из динамического условия (3.8) можно определить возвышение уровня $\zeta=\zeta(t, x, y)$. В общем случае, однако, решение для φ и ζ удается получить лишь в интегральной форме, и анализ этого решения, не говоря уже про вычисления, крайне затруднителен. Получение обозримого результата возможно лишь при таких колебаниях дна, которые описываются некоторыми видами функций $F(t, x, y)$. В частности, для осесимметричных очагов при использовании плоской полярной системы координат r, θ удается не только получить форму начального поверхностного возмущения, но и проследить за излучением из зоны очага, т. е. определить функцию ζ для значений t и r, превышающих те, которые характеризуют функцию F. На рис. 5.1 показан ход колебаний уровня («теоретические мареограммы») на различных удалениях от центра очага при $H=\text{const}$, характеризуемого начальным возмущением поверхности в виде параболической впадины

$$\zeta_{\text{нач}}=\zeta_0\left[1-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right], \tag{5.3}$$

которое задается для $r \leqslant r_0$, где r_0 — горизонтальный радиус впадины. Рисунок 5.1 демонстрирует некоторые характерные свойства волн, излучаемых из зоны начального возмущения небольших размеров:

а) первое возмущение уровня на всех удалениях от очага совпадает по знаку с начальным возмущением в очаге (в данном случае оно отрицательное);

б) в первом приближении излучаемая волновая система имеет вид косинусоиды, модулированной по амплитуде, в результате чего максимальное значение имеет не головная волна цуга, а какая-то из последующих;

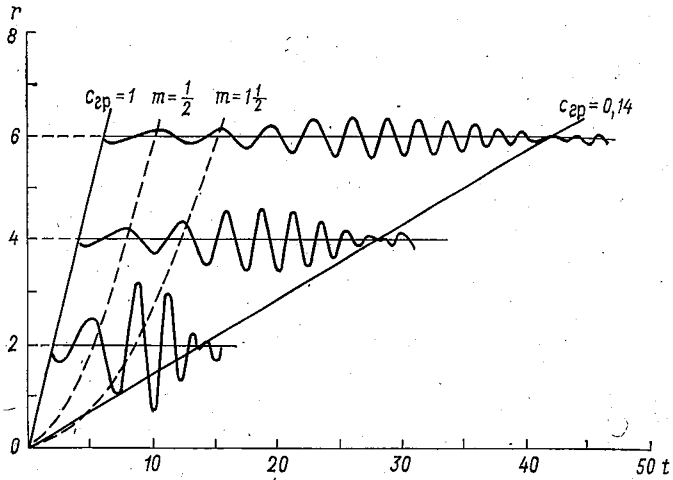


Рис. 5.1. Колебание уровня в точках на различном удалении от центра очага; $r/H=2$, 4, 6; m — удаление очередного гребня от первого возмущения (отрицательного), выраженное в длинах волн.

в) амплитуда колебаний падает с удалением от очага пропорционально члену $1/r$. Следует отметить, что в одномерном случае (плоская волна) падение амплитуды происходит пропорционально $1/\sqrt{r}$, т. е. медленнее. Физическая причина этого состоит в том, что в одномерном случае падение амплитуды, пропорциональное $1/\sqrt{r}$, обусловлено только различием между групповой $c_{гр}=d\sigma/dk$, фазовой $c=\sigma/k$ и характеристической $c_0=\sqrt{gH}$ скоростями (в общем $c_{гр}<c<c_0$). Это различие приводит к отставанию максимума энергосодержания в волновом цуге от переднего фронта, имеющего скорость c_0; при этом энергия как бы размазывается вдоль волнового луча и особенно в его головной части все более тонким слоем. В двумерном же случае к описанному эффекту добавляется эффект радиального

расхождения волновых лучей, за счет которого энергия, приходящаяся на единицу длины фронта, падает пропорционально $1/r$, что дает дополнительный множитель $1/\sqrt{r}$ для амплитуды, полное падение которой характеризуется теперь множителем $1/r$;

г) по мере удаления от очага происходит увеличение как длины волнового пакета («длины волны» модулирующей огибающей), так и числа отдельных волн в пакете. Тыловая точка пакета постоянно отстает от фронтовой, т. е. пакет нарастает с тыла. В головной части цуга происходит увеличение периодов колебаний (эффект дисперсии).

Поскольку перечисленные особенности получены для случая небольшого очага, они в основном характеризуют лишь относительно высокочастотную часть спектра цунами. Однако обычно горизонтальные размеры очага во много раз превосходят глубину океана, т. е. излучаемые волны имеют максимум энергии на достаточно низких частотах и являются длинными. При этом дисперсия незначительна и описанного выше «отставания» максимума энергосодержания от гребней, а гребней от фронта не происходит либо оно выражено слабо. В результате форма распространяющейся волны становится более устойчивой, а падение амплитуды с удалением от очага происходит медленнее, чем у высокочастотных волн.

На рис. 5.2 приведены результаты расчета характеристик длинных волн, появляющихся при характерной ширине зоны исходного возмущения 100 и 50 миль. При постоянной глубине $H=3$ мили оба колебания зафиксированы на расстоянии около 3000 миль от центра очага (волна предполагается плоской). Видно, что в первом случае волна пробегает весь путь практически без изменения формы, сохранив свою высоту и характер одиночного возмущения. Во втором случае уже заметны искажения: падение амплитуды, отставание гребня от фронта, возникновение высокочастотного хвоста. В обоих случаях, однако, энергия весьма устойчиво удерживается в головной волне цуга, которая остается самой высокой. Нарушение этой закономерности у длинных волн цунами в открытом море может происходить лишь за счет особенностей самого исходного возмущения.

Исследование аналитических решений модельных задач установило возможность появления неравномерной направленности излучения волн в зависимости от характера подвижки дна в области возмущения. Существенная разница между амплитудами волн, распространяющихся в различных направлениях, может возникнуть в связи с уклоном дна в эпицентре землетрясения.

Приведенные выше результаты аналитических решений получены при идеализированном условии $H=\text{const}$ и описывают лишь начальный этап развития цунами. Построить функцию

$\zeta(t, x, y)$ для больших значений t, x, y и при $H \neq \text{const}$ крайне трудно. Математические модели, позволяющие воспроизводить как возбуждение, так и распространение волн цунами при наличии переменной глубины и отражающих берегов сложной конфигурации, реализуются с помощью численного решения уравнений длинных волн («мелкой воды»):

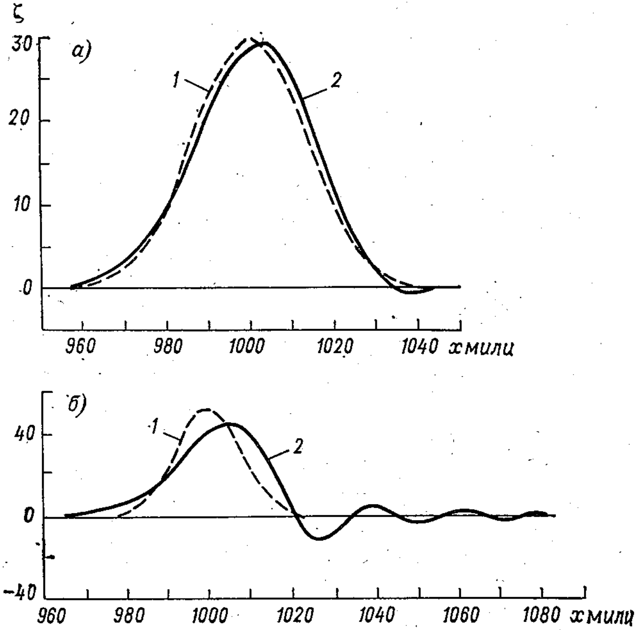


Рис. 5.2. Влияние горизонтальных размеров очага на сохранение формы излучаемой волны.

а — характерная ширина исходного возмущения около 100 миль; *б* — ширина возмущения около 50 миль; *1* — форма волны в очаге; *2* — форма волны на расстоянии 3000 миль от центра очага.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x}+fv-r_*u;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}=-g\frac{\partial \zeta}{\partial y}-fu-r_*v; \qquad (5.4)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[u(H+\zeta)]+\frac{\partial}{\partial y}[v(H+\zeta)]=0, \qquad (5.5)$$

где f — параметр Кориолиса; r_* — коэффициент трения.

На береговых границах обычно используется условие непротекания ($v_n = 0$), а на открытых границах — условия свободного ухода волны в той или иной модификации.

При приближенных расчетах часто не учитывают роль трения и силы Кориолиса. Система (5.4)—(5.5) переписывается в конечно-разностной форме и решается шагами по времени и пространству, воспроизводя эволюцию возмущения свободной поверхности и поля скоростей. В качестве начального условия обычно принимается решение задачи, описываемой уравнениями (0.15)—(5.2), в какой-то момент t, когда значения φ (а значит, и ζ, u, v) отличны от нуля в ограниченной области очага. Однако, видоизменив уравнение неразрывности (5.5), можно учесть подвижку дна, описываемую известной функцией $\zeta_д$ непосредственно. Поскольку при наличии вертикальной донной подвижки полная глубина будет

$$D(t, x, y)=H(x, y)+\zeta(t, x, y)-\zeta_д(t, x, y), \qquad (5.6)$$

то интегрирование по вертикали уравнения неразрывности от дна до свободной поверхности дает не (5.5), а

$$\frac{\partial(\zeta-\zeta_д)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[u(H+\zeta-\zeta_д)]+\frac{\partial}{\partial y}[v(H+\zeta-\zeta_д)], \qquad (5.7)$$

где первый член часто представляется в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}(\zeta-\zeta_д)=\frac{\partial\zeta}{\partial t}-F(t, x, y), \qquad (5.8)$$

поскольку в линейном приближении

$$\frac{\partial\zeta_д}{\partial t}=w\,|_{z=0}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right|_{z=0}=F(t, x, y). \qquad (5.9)$$

Таким образом, в качестве уравнений модели служит система (5.4), (5.7), а в качестве начальных условий используется соотношение

$$\zeta_д=\zeta=u=v=0, \qquad (5.10)$$

характеризующее невозмущенное состояние до начала подвижки дна.

Описанная модель была применена Хвангом и Дивоки для расчета цунами от землетрясения в районе Аляски 27 марта 1964 г. [8]. Тщательно изученные сейсмические данные и данные промера позволили построить подробную картину подвижки дна, на основании которой функция $\zeta_д$ была параметризована следующим образом:

$$\zeta_д(t, x, y)=0 \text{ при } t\leqslant t_1(x, y);$$

$$\zeta_д(t, x, y)=a(x, y)\sin^2\left[\frac{\pi(t-t_1)}{2\tau}\right] \text{ при } t_1<t\leqslant t_1+\tau;$$

$$\zeta_д(t, x, y)=a(x, y) \text{ при } t>t_1+\tau. \qquad (5.11)$$

Момент t_1 для каждой точки очага был определен по моменту землетрясения и постоянной скорости передачи «шоков» (ударных импульсов) в земной коре. Функция $a(x, y)$ была картирована при повторных промерах. Интервал времени τ принят равным 10 с. Вид временного множителя $\sin^2$ определен по аналогии с непрерывными записями смещений в других зонах, захваченных землетрясением. На рис. 5.3 показано решение за-

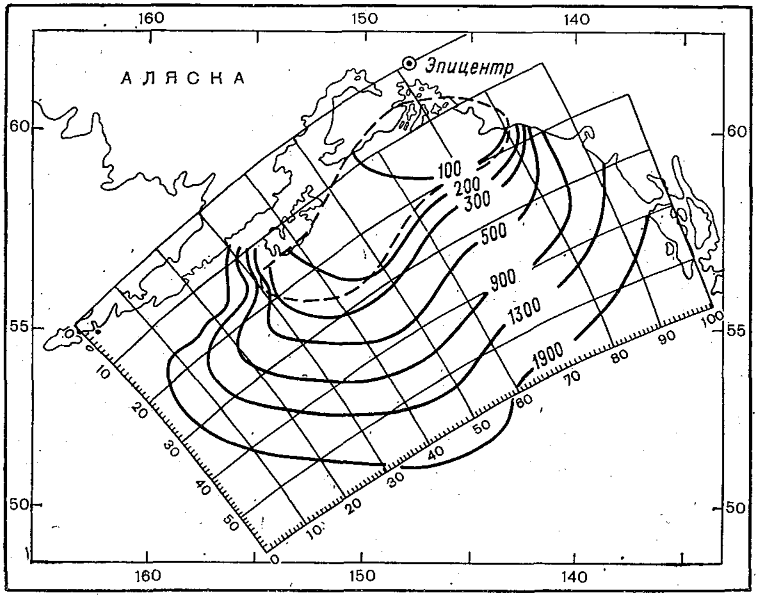


Рис. 5.3. Положение зоны очага цунами, наблюдавшегося в случае Аляскинского землетрясения 27/III 1964 г., и распространение первой волны.

дачи в виде последовательных положений фронта (изохроны подошвы) первой излучаемой волны, высота которой в открытой глубоководной части океана составляет 50—60 см.

5.3. Распространение и трансформация волн цунами

Характер распространения волн цунами в значительной мере определяется влиянием топографических особенностей дна океана и его берегов. Такие явления, как рефракция, отражение, концентрация (захват) волновой энергии на шельфах и подводных хребтах, аналитически исследованы в работах С. С. Войта, Б. И. Себекина, Р. М. Гарипова и других [1]. В принципе эффекты такого рода могут быть учтены в процессе численного решения системы (5.4), (5.5) либо (5.4), (5.7), если продолжить вычисления достаточно долго. Однако на этом пути встречаются трудности, связанные с ограниченной емкостью существующих вычислительных средств, поскольку область расчета нередко охватывает огромные пространства океанов, а расчетная сетка должна быть достаточно частой, чтобы воспроизвести характерные черты явления без грубых искажений. Поэтому в практике исследований часто применяются упрощенные, но зато более доступные методы расчета распространения волн цунами. Одним из них является метод рефракционных диаграмм (лучей и фронтов), в основе которого лежит аналогия с законами геометрической оптики.

Метод рефракционных диаграмм. Цель этого метода состоит в построении системы волновых лучей и фронтов, описывающих распространение головной волны цунами от зоны очага до ближайшего побережья. Для нахождения лучевой картины используется известный закон Снеллиуса [7, с. 266], описывающий преломление волнового луча за счет изменения глубины, а для определения положения фронтов — формула Дюбуа

$$t_{\text{н}}-t_0=\int_0^X \frac{dl}{\sqrt{gH(l)}}, \qquad (5.12)$$

где t_0 — момент образования начального возмущения; $t_{\text{н}}$ — момент регистрации волны в пункте наблюдения; l — расстояние вдоль волнового луча, соединяющего очаг с пунктом регистрации у берега, а X — расстояние самого пункта от очага. Формула (5.12) прямо следует из формулы Лагранжа—Эри $c = dl/dt = \sqrt{gH}$, если придать последней формуле локальный характер, считая, что H и c зависят от l.

На практике построение волновых лучей производят, например, разбивая рассматриваемый район на полосы между принятыми изобатами и приписывая каждой полосе среднюю постоянную глубину H_m. Получив для каждой полосы значение $c_m=\sqrt{gH_m}$ и задаваясь первоначальным направлением луча (обычно по нормали от границы очага), продолжают его до первой изобаты, определяя тем самым угол падения α. Зная α, c_1 и c_2, с помощью закона Снеллиуса находят угол преломления β

$$\beta=\arcsin\left(\frac{\sin\alpha\sqrt{gH_2}}{\sqrt{gH_1}}\right), \qquad (5.13)$$

после чего производят надлежащий излом луча и вводят его во вторую полосу, продолжая по прямой линии до следующей изобаты, где повторяют ту же процедуру. Полученная ломаная линия затем сглаживается. Иногда методику видоизменяют, производя излом луча не на изобатах, а посредине каждой полосы. Для таких построений широко используются вспомогательные графики, таблицы, палетки, а также графопостроители на ЭВМ.

Получив набор волновых лучей, каждый из них можно разбить на небольшие отрезки Δl и, применяя вытекающее из (5.12) выражение

$$t_{н}-t_{о}=\sum_{0}^{n}\frac{\Delta l_i}{\sqrt{gH_i}}=L\sum_{0}^{n}\frac{1}{\sqrt{gH_i}}, \qquad (5.14)$$

где L — полный путь вдоль луча, рассчитать время пробега волны от очага до любой точки. После этого, соединив точки с одинаковыми значениями $t_{н}$, строят систему ортогональных к лучам волновых фронтов на разные моменты времени, получая тем самым полную картину распространения фронта головной волны от очага.

Указанный способ особенно часто применяется для решения обратной задачи — определения положения очага по данным наблюдений в береговых пунктах. Из каждого такого пункта строят пучок веерообразно расходящихся в море лучей. Момент замлетрясения, регистрируемый во всех пунктах практически одновременно (если необходимо, вводятся небольшие поправки), принимают за момент образования исходного возмущения, т. е. за $t_{о}$. Если $t_{н}$ — момент регистрации первой волны в данном пункте, то время пробега волны от очага до пункта будет $\tau_{н}=t_{н}-t_{о}$. Если теперь для каждого пункта построить условный фронт на расстоянии, соответствующем времени пробега $\tau_{н}$, то такой фронт будет «линией положения» того края очага, который обращен в сторону данного пункта. При надлежащем и удачном расположении береговых пунктов несколько таких условных фронтов, как видно из примера на рис. 5.3, позволяют довольно уверенно определить положение очага.

Трансформация волн цунами на пути от очага к берегу. При построении прямых рефракционных диаграмм (от очага к берегу) можно получить дополнительные сведения о параметрах первой волны из весьма простых соображений. В случае лучевого приближения, которое оправдывается тем лучше, чем проще рельеф дна и сама лучевая картина, предполагается, что волновая энергия переносится вдоль лучей, не пересекая их. Таким образом, область между двумя смежными лучами — так называемую «лучевую трубку» — можно рассматривать как элементарный канал переменного сечения, к которому применимы одномерные уравнения и соответствующие положения теории длинных волн. Так, если сечение трубки меняется достаточно плавно и отражение в ее пределах является слабым, то закон Грина

$$\zeta=\zeta_0\sqrt{\frac{b_0}{b}\sqrt{\frac{H_0}{H}}} \qquad (5.15)$$

позволяет ориентировочно определить высоту первой волны ζ на любой изобате H, если высота возмущения ζ_0 и глубина H_0 в очаге известны, а b_0 и b означают ширину трубки на выходе из очага и на изобате H. Кроме того, если известен горизонтальный размер l_0 однородного очага в направлении луча, то, считая, что $l_0 = \lambda_0/2$, из соотношения $c = \lambda/\tau = \sqrt{gH}$ можно получить примерное значение основной частоты колебания

$$\sigma_0 = \frac{\pi \sqrt{gH_0}}{l_0}. \tag{5.16}$$

Считая $\sigma_0 = \mathrm{const}$ в пределах всей трубки, легко найти и длину гребня первой волны на любой изобате H:

$$l_\text{г} = l_0 \sqrt{\frac{H}{H_0}}. \tag{5.17}$$

Применяя простые формулы (5.15)—(5.17), удается получить ориентировочные оценки амплитуд, периодов и других характеристик цунами для любых изобат, если известны его параметры в очаге.

На практике этот способ применяется для грубых оценок влияния на «цунамиопасность» различных участков побережья прибрежных эффектов (мелководье, рефракция). Для этого строится лучевая картина от некоторого условного очага, ориентированного параллельно берегу и с одинаковым возмущением по всей длине. Тогда, например, полученное по формуле (5.15) распределение величины ζ вдоль прибрежной изобаты, в качестве которой часто берется 10 м, будет характеризовать локальное усиление или ослабление цунами, позволяя выделить более или менее опасные зоны побережья.

Результаты такого же характера, но значительно более точные получают путем численного интегрирования вдоль лучевой трубки одномерных уравнений длинных волн, которые в данном случае обычно записываются в форме, где фигурирует не скорость u, а объемный расход $Q = ub(H+\zeta)$. В такой форме уравнения будут иметь вид [2]

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q^2}{b(H+\zeta)}\right) = -gb(H+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x} - r^* b \frac{Q\,|\,Q\,|}{b^2 (H+\zeta)^2};$$

$$b\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0. \tag{5.18}$$

В качестве начального условия на удаленном от берега участке трубки обычно принимается либо начальное возмущение уровня $\zeta_0(x)$ при $Q_0(x) = 0$, либо комбинация возмущений уровня $\zeta_0(x)$ и потока $Q_0(x)$. На конце трубки задается линеаризованное условие бегущей волны или излучения

$$Q = \pm b\zeta \sqrt{gH}, \tag{5.19}$$

но иногда на прибрежном конце, например на 10-метровой изобате, задают условия непротекания $Q=0$ либо частичного отражения

$$Q=\frac{1-r_{к}}{1+r_{к}}b\zeta\sqrt{gH}, \qquad (5.20)$$

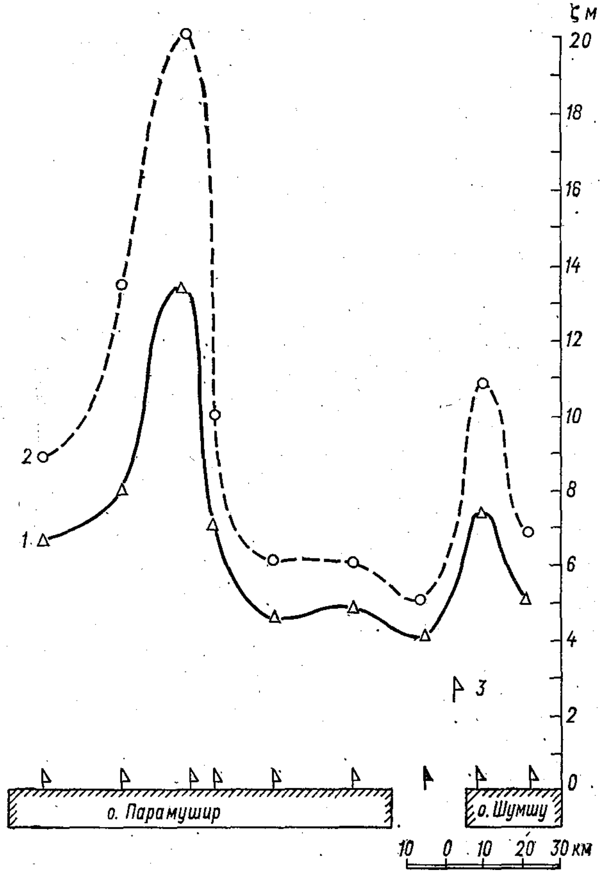


Рис. 5.4. Изменение высоты одиночной волны вдоль побережья островов Шумшу и Парамушир.

1 — гидродинамический расчет; 2 — по формуле Грина; 3 — положение рефракционных трубок.

где $r_{к}$ — коэффициент комплексного отражения, учитывающий фазовый сдвиг.

Этот более строгий подход позволяет получить полный волновой профиль на любой момент, а также в полной мере учитывает отражение от неровностей дна и возможные резонансные эффекты.

На рис. 5.4 показан результат применения указанного метода к району двух северных островов Курильской гряды — Парамуширу и Шумшу. На рис. 5.5 приведены лучевая картина и по-

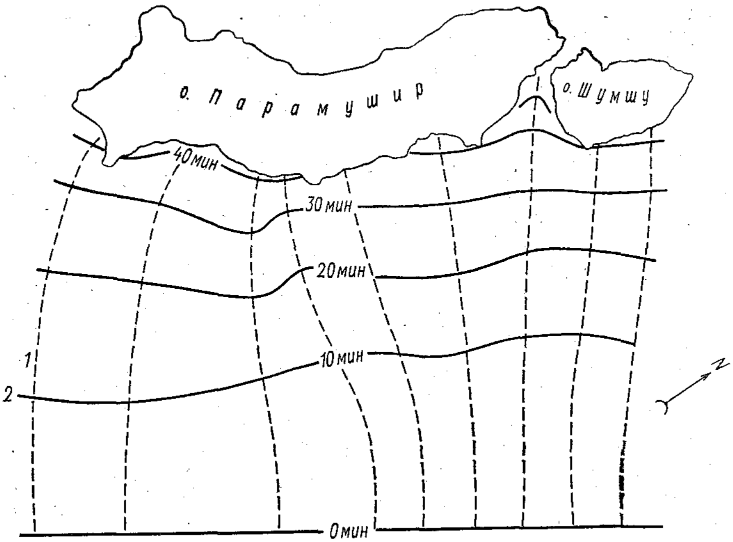


Рис. 5.5. Рефракционная диаграмма и карта волновых фронтов для района островов Шумшу и Парамушир.

1 — рефракционные лучи; 2 — положение фронта волны в различные моменты времени.

ложение фронта первой волны через каждые 10 мин после возникновения исходного возмущения, имеющего высоту 1 м.

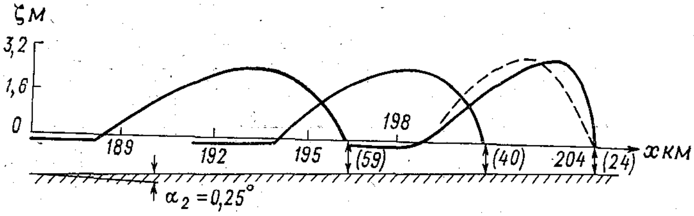


Рис. 5.6. Изменение формы длинной волны на мелководье (по Л. В. Черкесову).

Пунктир — форма волны без учета нелинейных членов; цифры в скобках — глубина в метрах.

Видно, что зонам конвергенции лучей соответствуют повышенные за счет концентрации волновой энергии амплитуды волны на 10-метровой прибрежной изобате.

Изменение формы длинной волны на мелководье можно проследить на рис. 5.6, где представлены последовательные профили волны (первоначально имевшей форму положительной полусинусоиды) при ее движении над склоном дна. Заметно некоторое нарастание высоты при движении в сторону меньших глубин, а также увеличение крутизны переднего склона. Такие эксперименты позволяют проанализировать влияние нелинейных членов, сил трения и крутизны уклона дна на деформацию волны.

5.4. Волны цунами у берега

Резонанс на шельфе. При наличии шельфа, окаймленного крутым континентальным склоном, волна цунами после отражения от береговой черты испытывает затем частичное отражение обратно от склона в шельфовую зону, что при определенных соотношениях между длиной волны и шириной шельфа (когда ширина шельфа равна нечетному числу $^1/_4$ длин волн) может приводить к резонансу, если приходящий из океана цуг содержит хотя бы несколько индивидуальных волн. В этом случае специальный интерес представляет вопрос о перераспределении энергии между отдельными волнами подходящего к берегу цуга. В монохроматическом цуге ($\sigma=\mathrm{const}$) при резонансе синфазная суперпозиция каждой новой вступающей на шельф волны цуга с дважды отраженной (от берега и склона) долей предыдущей волны в общем случае приведет к нарастанию подходящих к берегу волн до тех пор, пока излучение из зоны шельфа не превзойдет поступления энергии на шельф. В результате максимальную высоту у берега может иметь не та волна, которая была максимальной в цуге, а одна из последующих. Рассмотрим в качестве примера экспоненциально модулированный затухающий цуг вступающих на шельф волн в форме

$$\zeta=\zeta_0 \exp\left[-\frac{\gamma}{2\pi}(\sigma t-kx)\right]\cos(\sigma t-kx), \qquad (5.21)$$

где $k=\sigma/\sqrt{gH}$; H — глубина шельфа, ширина которого равна $B=\pi/(2k)$ (четвертьволновой резонанс), а $-\gamma$ — показатель огибающей экспоненты. Каждая последующая волна цуга, меньшая предыдущей в e^{γ} раз, будет, вступая на шельф, складываться с дважды отраженной, т. е. уменьшенной в q^{-1} раз ($q=r_1r_2$, r_1 и r_2 — коэффициенты отражения от берега и склона) предыдущей волной, в результате чего высота очередной волны увеличится. В этом случае отношение высоты n-й волны, регистрируемой у берега, к высоте первой волны будет не $e^{-n\gamma}$, как у неискаженного цуга, а

$$m_n=q^{2n}e^{\gamma}\sum_{j=1}^{n}(q^{-2}e^{-\gamma})^j. \qquad (5.22)$$

На рис. 5.7 показан ход уровня у берега при различных значениях q для случая резонанса при $\gamma=0{,}4$. Видно, что с ростом q колебания у берега возрастают, а максимум возвышения сдвигается на 2-й, 3-й и т. д. подъем уровня.

Обрушение волн цунами. В прибрежной мелководной зоне действие нелинейных эффектов приводит к тому, что гребень волны движется быстрее ложбины, передний склон волны становится все круче и со временем, при достаточной длине мелководной зоны, на нем возникает зона обрушения волны, называемая бором. Нагляднее всего представление о возникновении и развитии бора можно получить, рассчитывая одномерное распространение длинной волны по мелководью с помощью так называемого метода характеристик, сущность которого заключается в следующем [5]. Рассмотрим одномерную систему уравнений длинных волн на мелкой воде переменной глубины $H(x)$:

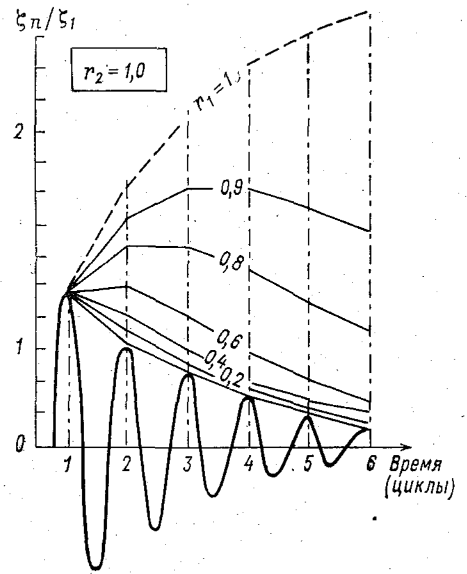


Рис. 5.7. Изменение относительного возрастания гребней экспоненциально модулированного затухающего цуга волн у берега при различных значениях коэффициентов отражения от края шельфа.

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x};$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[u(H+\zeta)]=0. \tag{5.23}$$

Посредством ввода величин $c=\sqrt{g(H+\zeta)}$ и $N=-\partial H/\partial x$ система (5.23) сводится к

$$\frac{\partial}{\partial t}(u\mp 2c)+(u\mp c)\frac{\partial}{\partial x}(u\mp 2c)=-gN. \tag{5.24}$$

Левая часть этого уравнения представляет собой полную производную от $(u\mp 2c)$ по t при условии, что $u\mp c=dx/dt$, т. е.

$$\frac{d}{dt}(u\mp 2c)=-gN. \tag{5.25}$$

Это соотношение выполняется вдоль линий, проведенных в x, t-плоскости и имеющих наклон

$$\frac{dx}{dt}=u\mp c. \tag{5.26}$$

Линии, имеющие наклон $u+c$, называются прямыми характеристиками, а линии с наклоном $u-c$ — обратными характеристиками. Из каждой точки x, t-плоскости с известными u и c можно провести как прямую, так и обратную характеристику.

Если записать уравнения (5.25) и (5.26) в конечно-разностной форме

$$\Delta(u \mp 2c) = -gN\,\Delta t;$$
$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = u \mp c, \qquad (5.27)$$

то, имея начальные либо граничные условия, описывающие возмущение, удается проследить эволюцию волны в процессе ее распространения. Пусть, например, в момент $t=t_1$ во всех узлах x_i интервала x_m—x_n заданы значения ζ и u. Так как глубина H во всех x_i также известна, то можно определить для каждой точки величину $c=\sqrt{g(H+\zeta)}$, а затем и $u\mp c$, т. е. найти наклоны характеристик в этих точках. На рис. 5.8 показано, что, проведя, например, характеристику с наклоном u_1+c_1 из точки 1 и характеристику с наклоном u_2-c_2 из точки 2 до их пересечения, мы графически определяем точку 3, т. е. тот момент t_3 и ту координату x_3, которые обеспечивают одновременное выполнение вытекающих из (5.27) соотношений:

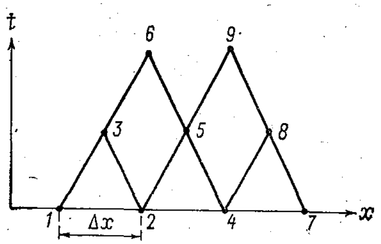


Рис. 5.8. Построение характеристик.

$$u_3+2c_3=u_1+2c_1-gN_1\,(t_3-t_1);$$
$$u_3-2c_3=u_2-2c_2-gN_2\,(t_3-t_2). \qquad (5.28)$$

Из (5.28) находятся u_3 и c_3 (а отсюда и ζ_3) в точке 3, а это позволяет провести из нее продолжение прямой и обратной характеристик до их следующего пересечения со смежными и т. д. При переменном уклоне дна на каждом шаге можно использовать последовательные приближения путем ввода значений N в соотношение (5.28) в виде $\frac{1}{2}(N_1+N_3)$ вместо N_1 и $\frac{1}{2}(N_2+N_3)$ вместо N_2.

Таким образом, распространение волнового возмущения можно описать, построив сетку характеристик от зоны возмущения в сторону берега. При этом наклон прямой характеристики, идущей от переднего края возмущения, известен заранее (он равен $\sqrt{gH}$, так как здесь $u=\zeta=0$), и эта характеристика строится первой. Обратные характеристики строятся от первой прямой характеристики, а также в пределах заданного возмущения. Каждый узел полученной сетки дает новую пару значений x и t, для которых, решая систему типа (5.28), можно найти новые значения ζ и u.

Следует отметить, что метод характеристик допускает учет донного трения и переменной ширины бассейна (в случае бухты или эстуария). При этом первое из уравнений (5.27) приобретает вид

$$\Delta(u \mp 2c) = -\left[gN + r^* u \mp \frac{uc}{b}\frac{db}{dx}\right]\Delta t, \tag{5.29}$$

где b — ширина бассейна; r^* — коэффициент трения. Соответствующим образом изменится и система (5.28).

Деформация волны, обусловленная действием нелинейных эффектов, проявляется прежде всего в том, что в точках гребня волны, где $\zeta > 0$, значение c возрастает, и прямые характеристики имеют тем больший наклон, чем больше ζ. В результате по мере распространения волны на ее переднем склоне происходит сгущение прямых характеристик и в некоторый момент t^* происходит пересечение каких-либо двух из них.

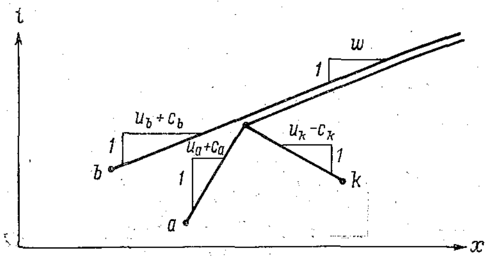


Рис. 5.9. Пересечение характеристик при возникновении бора.

На рис. 5.9 показано пересечение прямых характеристик a и b, в то время, как k — это обратная характеристика, проходящая через точку их пересечения. Для такой точки можно определить две системы величин u и c: одну из пары характеристик a, k, а другую — из b, k. Двойное значение u и c в одной точке и в один момент означает наличие разрыва или вертикальной водяной стенки. Эта ситуация соответствует началу обрушения волны и возникновения бора. В зависимости от уклонов дна и от формы вступающей на мелководье волны бор может возникнуть в различных точках ее переднего склона — от переднего края (фронта) до гребня.

Поскольку в окрестности бора условие малости крутизны волновой поверхности явно нарушается и теория длинных волн, лежащая в основе метода характеристик, теряет силу, для дальнейшего расчета распространения бора используют закономерности и соотношения, полученные в гидравлике при исследовании явления гидравлического прыжка, аналогичного бору.

В частности, скорость движения бора в ряде случаев можно определить по формуле

$$V=[g(H+Z)(2H+Z)/2H]^{1/2}, \qquad (5.30)$$

где H — глубина перед бором; Z — высота бора. Величина V определяет положение возникающего разрыва в x, t-плоскости, задавая наклон так называемой линии бора, выходящей из точки начала обрушения. Последующее изменение параметров бора определяется с помощью величин u и c на характеристиках (прямых и обратных), продолжающих пересекать линию бора по мере его приближения к берегу.

Заливание берега. Собственно процесс заливания обусловлен тем, что при достижении волной или бором линии берега происходит перестройка волнового движения в поступательное, и слой воды накатывается на берег в виде потока.

Этот конечный этап взаимодействия волн цунами с берегом представляет наибольшие трудности для теоретического исследования в силу чрезвычайно сложной зависимости параметров заливания от многочисленных природных факторов. Фактические оценки показывают, что заливание достигает десятков метров в высоту. Существующие теории и методы расчета заливания относятся к частным случаям и основаны на целом ряде упрощающих предположений.

Если обозначить высоту заливания через $h_б$, то из общих соображений следует, что для относительного заливания $h_б/h_0$ (где h_0 — высота волны у береговой черты) определяющими безразмерными параметрами будут: крутизна уклона дна и берега $N^*=\operatorname{tg}\alpha$ (где α — угол уклона); относительная глубина в начале мелководья H_0/λ (где λ — длина волны) и крутизна волны h_0/λ.

Зависимость $h_б/h_0$ от уклона дна неоднозначна. При отвесном береге высота заливания равна удвоенной высоте подходящей волны за счет полного отражения. С уменьшением уклона отношение $h_б/h_0$ растет до тех пор, пока мелководье не становится настолько растянутым, что волна, распространяясь по нему, обрушивается, не доходя до берега. В этом случае берега достигает возникающий при обрушении бор, образование и движение которого сопровождаются значительными потерями энергии. Чем больше (при дальнейшем уменьшении уклона и удлинении мелководья) становится путь, проходимый бором от момента своего образования до берега, тем меньше становится высота заливания из-за указанных потерь. На рис. 5.10 показана зависимость $h_б/h_0$ от уклона дна при фиксированных значениях h_0/λ для малых $\operatorname{tg}\alpha$. Видно, что рост крутизны волны приводит к уменьшению заливания за счет более интенсивной диссипации при разрушении. В то же время при больших уклонах (для необрушивающихся волн) рост крутизны ведет к увеличению заливания за счет нелинейных эффектов. Можно отметить что указанная зависимость $h_б/h_0$ от h_0/λ ослабевает с уменьшением параметра H_0/λ.

Таким образом, степень и характер заливания решающим образом зависят от того, успеет ли начаться обрушение волны до ее подхода к берегу. Существующие критерии обрушения позволяют лишь ориентировочно предсказать ответ на этот вопрос, так как обрушение, как указывалось выше, зависит от начальной формы волны, которая заранее не известна.

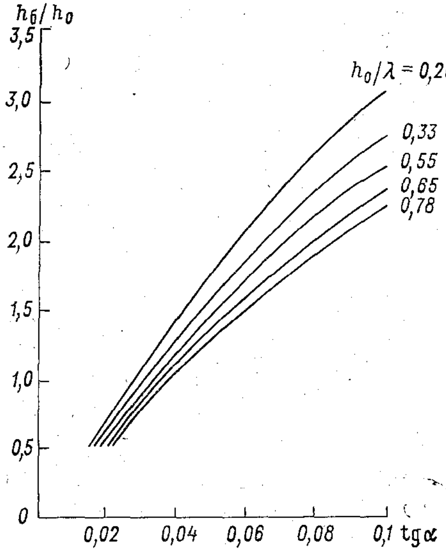


Рис. 5.10. Зависимость $h_б/h_0$ от уклона дна и крутизны волны при $\operatorname{tg}\alpha < 0{,}1$.

В любом случае при достижении берега передняя соприкасающаяся с сухим берегом часть волны или бора преобразуется в поток, скорость которого определяется скоростью водных частиц в момент выхода волны (бора) на берег. По мере заливания поступательный характер движения сохраняется в зоне «движущегося уреза», т. е. переднего края накатывающего на берег слоя, где глубина равна нулю. В то же время в тыловой части области затопления, где глубина водного слоя конечна, имеется возможность для волновых движений.

Расчет процесса заливания можно осуществить на основе изложенного выше метода характеристик. При этом из-за нарушения волнового характера движения в зоне уреза величины u и c в первый момент определяются не в точке уреза O, а в близкой и лежащей с ней на одной прямой характеристике «тыловой» (лежащей в море) точке k (рис. 5.11). Так как обе точки находятся на одной характеристике, а в точке O волновое движение отсутствует и $c_O = 0$, то

$$u_K + 2c_K - gNt_K = u_O - gNt_O. \tag{5.31}$$

При известной скорости бора V_k в точке k [см. (5.30)], имеем

$$t_O \approx t_N + L/V_k, \tag{5.32}$$

где L — расстояние между k и O.

Затем по формуле (5.31) находится u_O. Если далее считать, что частицы воды в зоне движущегося уреза подвержены только

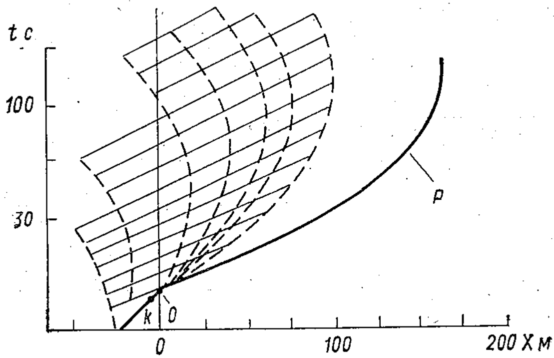


Рис. 5.11. Вид характеристик в случае выхода волны на сухой берег и образование бора.

p — линия движения уреза.

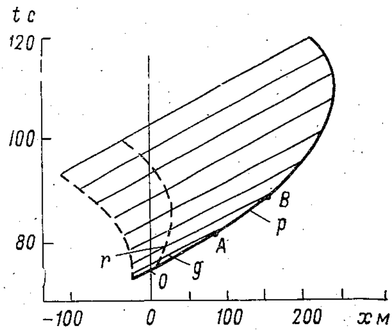


Рис. 5.12. Учет влияния тыловых эффектов при расчете заливания берега.

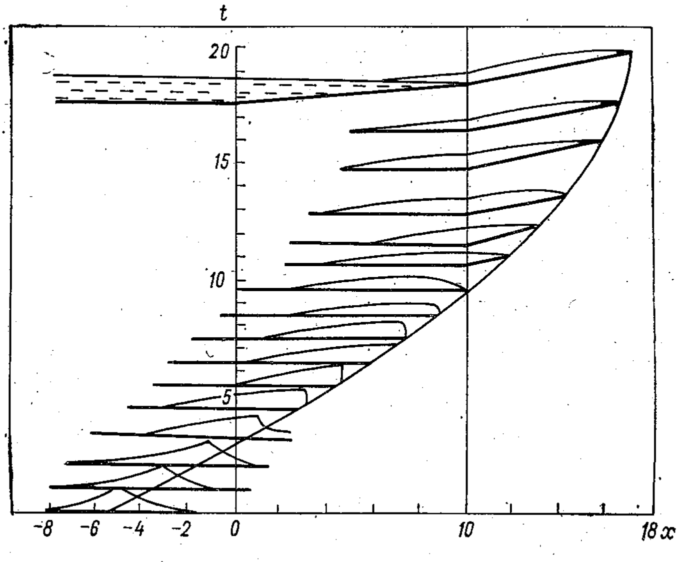


Рис. 5.13. Пример расчета заливания наклонного берега.

x, *t* — расстояние и время в условных единицах. Профиль дна и берега показан в верхней части рисунка.

действию силы тяжести, то для них имеет силу соотношение

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -gN, \tag{5.33}$$

откуда интегрированием получаются уравнения для скорости и положения x движущегося уреза в любой момент:

$$u = \frac{dx}{dt} = u_O - gN\,(t - t_O); \tag{5.34}$$

$$x = u_O(t - t_O) - gN\,\frac{(t - t_O)^2}{2}. \tag{5.35}$$

Уравнение (5.35) определяет линию движения уреза P, показанную на рис. 5.11. Максимальная зона заливания определяется из условия $dx/dt = 0$, откуда

$$x_{\max} = \frac{u_O^2}{2gN}, \tag{5.36}$$

и максимальная высота заливания будет

$$h_{\max} = \frac{u_O^2}{2g}, \tag{5.37}$$

что можно определить как высоту, при подъеме на которую вся кинетическая энергия частиц переходит в потенциальную.

В изложенном способе пренебрегается силой трения и влиянием тыловых элементов волны, нагоняющих передний край. Учет влияния тыловых эффектов осуществляется путем построения прямых характеристик в области, уже покрытой слоем воды, до их пересечения с линией движущегося уреза P. В первой точке пересечения (точка A на рис. 5.12) значение u_A определяется теперь не с помощью (5.34), а из соотношения

$$u_A = u_g + 2c_g - gN\,(t_A - t_q). \tag{5.38}$$

Продолжение кривой P из точки A по аналогии с (5.35) дается уравнением

$$x = x_A + u_A\,(t - t_A) - gN\,(t - t_A)^2/2. \tag{5.39}$$

В точке B, где кривая P пересекается следующей прямой характеристикой, рассчитываются новые величины u_B. Та же процедура повторяется для последующих пересечений. Заворот линии P в сторону моря определяет момент начала отката воды с берега; соответствующее ему значение $x_{\max}$ легко определяется графически.

На рис. 5.13 показан пример расчета заливания наклонного берега. При вычислениях в принципе можно учитывать и донное трение, хотя способы его учета при заливании разработаны еще недостаточно.

5.5. Основы теории штормовых нагонов

Непериодические колебания уровня моря могут быть вызваны динамическими процессами в атмосфере, связанными с перераспределением атмосферного давления и изменением ветрового поля над морем, а также осадками, испарением, изменением плотности воды. Однако при рассмотрении непериодических колебаний уровня, вызванных метеорологическими причинами, обычно учитывается только воздействие анемобарических сил, как наиболее существенных.

Так же как и при возникновении волн цунами и приливов, характер непериодических изменений уровня зависит от морфометрических особенностей бассейна.

Обычно изменения уровня, возникающие вследствие действия ветра называют *сгонно-нагонными колебаниями*, а за счет статического эффекта атмосферного давления — *барометрическими*. Колебания уровня, связанные с перемещением над поверхностью моря барических систем, приводящих к образованию длинных волн в море, называют *штормовыми нагонами*. Штормовые нагоны нередко вызывают в отдельных прибрежных районах катастрофические наводнения.

Изменение положения уровня за счет статического воздействия атмосферного давления обычно учитывается с помощью закона «обратного барометра», согласно которому изменение давления на 1 мм вызывает изменение уровня на 13 мм. При движении барических систем с определенной скоростью значения уровня в точке уже не будут соответствовать их статическим значениям и в определенных условиях при возникновении резонанса могут существенно возрасти.

Анализ спектральной плотности атмосферного давления, ветра и уровня выявил связь реакции уровня с частотой колебания давления, зафиксировав предельное ее значение, ниже которой справедлив закон «обратного барометра». При превышении предельной частоты колебаний атмосферного давления реакция на него уровня моря считается случайной.

В реальных условиях поле атмосферного давления имеет нестационарный характер и формирует действующее одновременно с ним ветровое поле. Под воздействием ветра формируются на поверхности моря ветровые волны, не имеющие непосредственного отношения к длиннопериодным колебаниям уровня, и дрейфовые течения, которые отклоняются от направления ветра на угол от 45° в глубоком море практически до нуля в мелководных районах. В глубоком море полный поток направлен перпендикулярно к направлению действующего ветра. В результате нагон или сгон будет наибольшим при ветрах, направленных параллельно береговой черте в глубоководных морях, и при ветрах, перпендикулярных к берегу, на мелководье.

При сгонно-нагонных колебаниях ветрового происхождения ход ветра опережает ход уровня, в то время как при изменении уровня главным образом под воздействием давления, когда ветер является сопутствующим процессом, ход ветра и ход уровня могут находиться в любом соотношении во времени. Циклоны, перемещающиеся над поверхностью моря, помимо всего, возбуждают длинные волны, влияние которых на уровень может значительно превосходить суммарное воздействие ветра и атмосферного давления, вызывающее подъем уровня в центре циклона. При движении циклона уровень не успевает сформироваться соответственно распределению непрерывно меняющихся полей давления и ветра. Тем не менее благодаря возникновению при движении циклона длинных волн, высота которых зависит от скорости перемещения барического образования, движущиеся циклоны являются наиболее опасными в смысле формирования высоких уровней.

Возвышение уровня ζ при движении циклона связано с равновесным возвышением ζ_c (статический подъем) выражением

$$\zeta=\frac{\zeta_c}{1-\frac{U^2}{gH}}, \tag{5.40}$$

где U — скорость перемещения барической системы; H — глубина моря.

Выражение (5.40) получено из решения уравнений движения и неразрывности:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-g\frac{\partial}{\partial x}(\zeta-\zeta_c); \tag{5.41}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}=-H\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{5.42}$$

в которых перемещающееся статическое возмущение уровня определяется соотношением

$$\zeta_c=F(x-Ut). \tag{5.43}$$

Решение уравнений ищется в виде

$$\zeta=AF(x-Ut). \tag{5.44}$$

Подставив (5.44) в (5.42), получим

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{UAF'}{H}(x-Ut).$$

После интегрирования, предполагая, что $u=0$ при $\zeta_c=0$, имеем

$$u=\frac{UA}{H}F(x-Ut). \tag{5.45}$$

Подставив (5.43), (5.44), (5.45) в (5.41), получим

$$\frac{U^2 A}{H} F'(x-Ut)=g(1-A)F'(x-Ut). \qquad (5.46)$$

Из последнего выражения следует, что

$$A=\frac{1}{1-\frac{U^2}{gH}}, \qquad (5.47)$$

откуда получается формула для ζ.

При равенстве скоростей перемещения барической системы и распространения длинной волны $U=\sqrt{gH}$ возникает явление резонанса и резкое увеличение амплитуды колебания уровня. Если $U<\sqrt{gH}$, подъем уровня сохраняет знак равновесной формы и увеличивает свою высоту, при $U>\sqrt{gH}$ наблюдается понижение уровня.

Характерные периоды штормовых нагонов находятся в пределах от долей часа до нескольких суток. При медленно изменяющемся, равномерном в пространстве ветре наблюдается продолжительное (несколько часов), неизменное по высоте экстремальное поднятие уровня.

Согласно наблюдениям, штормовые нагоны связаны с распространением волн, длины которых намного превышают глубину воды, поэтому исследование их вполне допустимо с позиций теории мелкой воды, что широко используется в практике. Вследствие того что анемобарические силы в условиях сравнительно мелководных морей действуют как силы массовые, штормовые нагоны по своей природе близки к приливным волнам, к которым успешно применяется теория мелкой воды.

Используя такой подход, можно классифицировать нагоны, исходя из соотношения собственных периодов колебания воды в бассейнах и периодов атмосферных возмущений. При значении главного собственного периода бассейна меньше временно́го масштаба анемобарической системы колебания уровня происходят с периодом вынуждающей силы. При значительном превышении собственного периода значения временно́го масштаба системы наблюдаются колебания уровня с различными собственными частотами при равномерном распределении энергии в спектре внешних возмущений или свободные колебания воды в бассейне после кратковременного внешнего импульса. Близость периодов вынуждающей силы и собственных колебаний бассейна приводит к резонансу, при котором возможны катастрофические наводнения. В данном случае может возникнуть резонанс двух видов: 1) временно́й, вызванный совпадением периода изменения скорости ветра с собственным периодом бассейна при значительном превышении размеров атмосферного возмущения площади бассейна; 2) пространственный, возникающий в случае совпадения скоростей движения барического образования сравнительно малого размера и распространения гравитационной волны в бассейне.

Сопоставление спектров атмосферных возмущений или скоростей их перемещения со спектрами частот собственных колебаний бассейнов и их частей или с распределением скорости распространения гравитационных волн на поверхности моря представляет большой интерес при определении районов морского побережья, находящихся под угрозой катастрофических наводнений.

Если изменения уровня вызваны длинноволновыми возмущениями, а ветер играет второстепенную роль, с известным приближением можно считать горизонтальную составляющую скорости не зависящей от глубины, а вертикальную равной нулю. При преобладающем действии ветра вблизи берега возникает вертикальная циркуляция как следствие совместного действия дрейфового течения и градиентного потока, образующегося в результате нагона воды. Вследствие особенностей конфигурации берегов и рельефа дна ход уровня и характер циркуляции приобретают сложный вид, тем более при совместном действии давления, ветра и длинной волны.

Для расчета непериодических колебаний уровня моря и главным образом штормовых нагонов широко используются методы, основанные на решении гидродинамических уравнений теории мелкой воды в виде

$$\frac{d\overline{V}}{dt}+2\left(\overline{\omega}\times\overline{V}\right)=g-\frac{1}{\rho}\nabla P+K\frac{\partial^2\overline{V}}{\partial z^2}; \tag{5.48}$$

$$\operatorname{div}\overline{V}=0 \tag{5.49}$$

при граничных условиях

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}=w \quad \text{при} \quad z=\zeta(x,\ y,\ t),$$

$$\overline{V}=0 \quad \text{при} \quad z=-H(x,\ y), \tag{5.50}$$

где H — глубина моря, а ζ — превышение уровня моря над равновесным положением.

Аналитическое решение задач теории мелкой воды можно получить с помощью метода интегральных преобразований, приводящего нестационарную задачу для уравнения с частными производными к решению обыкновенного дифференциального уравнения.

Подобная задача применительно к штормовому нагону на шельфе была решена Хипсом.

Для участка шельфа $0\leqslant x\leqslant l$ использовались уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t}+g\frac{\partial\zeta}{\partial x}-fv=-2ku;$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-2kv;$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+H\frac{\partial u}{\partial x}=0. \qquad (5.51)$$

Глубина принималась постоянной, трение о дно — линейным. Краевые условия задавались в виде $\zeta(l, t)=\zeta_0 \sin \omega t$, $\zeta_0 = \mathrm{const}$, $u=v=\zeta=0$ при $t=0$.

В случае прихода волны со стороны моря задача свелась после преобразования Лапласа $\bar{R}(x, s)=p\int\limits_0^\infty e^{-pt}R(x, t)\,dt$ к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(p+2k)\bar{u}-f\bar{v}+g\frac{d\bar{\zeta}}{dx}=0;$$

$$(p+2k)\bar{v}+f\bar{u}=0;$$

$$\frac{d\bar{u}}{\partial x}+\frac{p}{H}\bar{\zeta}=0;$$

$$\bar{u}\,|_{x=0}=0, \quad \bar{\zeta}\,|_{x=l}=\bar{\zeta}_0\frac{\omega p}{p^2+\omega^2}.$$

Здесь $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{\zeta}$ — изображения соответствующих им функций.

Решение системы уравнений дает выражение для изображения

$$\bar{\zeta}=\zeta_0\frac{\omega p}{p^2+\omega^2}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha x}{\mathrm{ch}\,\alpha l}, \qquad (5.52)$$

где

$$\alpha=\left\{\frac{[(p+2k)^2+f^2]}{gH\,(p+2k)}\right\}^{1/2}.$$

Переходя от изображения к оригиналу с помощью обратного преобразования, получим

$$\zeta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a-i\infty}^{a+i\infty}\zeta_0\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\frac{\mathrm{ch}\,\alpha x}{\mathrm{ch}\,\alpha l}e^{pt}\,dp. \qquad (5.53)$$

Подобные интегралы можно получить для оригиналов скоростей $\bar{u}$ и $\bar{v}$. Для решения интегралов используется теория вычетов или таблицы [3].

Задача нахождения уровня с учетом ветрового воздействия сводится к решению неоднородной системы.

При рассмотрении воздействия на уровень нестационарного ветрового поля в море постоянной глубины переходят от линеаризованной системы дифференциальных уравнений путем преобразования Лапласа к краевой задаче для уравнения Гельмгольца относительно изображения $\bar{\zeta}$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\varkappa^2\right)\bar{\zeta}=\bar{F}; \tag{5.54}$$

$$\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial n}+\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial p}=\bar{Q} \quad \text{вдоль контура } C_1;$$

$$\bar{\zeta}=0 \quad \text{вдоль контура } C_2,$$

где $\bar{F}$, $\varkappa^2$, γ, $\bar{Q}$ известны.

Первоначально ищется решение $\bar{\zeta}_0$, удовлетворяющее условию при $x=\text{const}$. Затем определяется свободное колебание $\bar{\zeta}-\bar{\zeta}_0$ согласно условиям на береговой линии $y=0$ и на границе с океаном $y=b$, состоящее из линейной комбинации двух волн Кельвина и двойной бесконечной последовательности волн Пуанкаре. Такое решение дало возможность рассчитать ряд наводнений для характерных штормовых ситуаций.

Решение одномерной задачи для стационарного потока с изменяющимся при нагоне распределением горизонтальной скорости по вертикали может быть реализовано с помощью уравнения

$$K_V\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}+g\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0. \tag{5.55}$$

Представим суммарную скорость течения U при нагоне в виде $U=-v+u$ и направим ось x в сторону, противоположную направлению ветра (ось z направлена вертикально вниз). Здесь v — скорость волнового переноса, который приводит к наклону уровня и градиентному течению u, охватывающему весь слой воды от поверхности до дна и направленному в противоположную сторону.

Интегрирование уравнения (5.55) для установившихся ветровых течений в относительно мелководных акваториях дает

$$u-v=u_0-v_0+\left(u_0'-v_0'\right)z-\frac{gz^2}{2K_V}\frac{\partial\zeta}{\partial x}. \tag{5.56}$$

Индексом «0» здесь обозначены скорости и их производные на поверхности.

При глубине бассейна H в условиях установившегося движения и отсутствия результирующего расхода можно записать

$$u_0-v_0+\frac{\left(u_0'-v_0'\right)H}{2}-\frac{gH^2}{6K_V}\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0. \tag{5.57}$$

Для стационарного процесса скорость волнового переноса может быть определена в соответствии с теорией волн конечной амплитуды по формуле

$$v=\frac{\pi^2h^2c}{2\lambda^2}\frac{\operatorname{ch}\frac{4\pi}{\lambda}(z-H)}{\operatorname{sh}^2\frac{2\pi}{\lambda}H}, \tag{5.58}$$

где h — высота волны; c — фазовая скорость; λ — длина волны.

С определенным допущением, пренебрегая влиянием дна, можно считать скорость градиентного течения постоянной по всему сечению

$$u=\frac{1}{H}\int_0^H v\,dz=\frac{\pi h^2c}{4H\lambda}\operatorname{cth}\frac{2\pi H}{\lambda}. \tag{5.59}$$

После подстановки значений скоростей в уравнение (5.56) получается выражение уклона свободной поверхности

$$\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{6K_V\pi^2c}{\lambda^2g}\left(\frac{2\pi H}{\lambda}\operatorname{cth}\frac{2\pi H}{\lambda}+\frac{\lambda}{4\pi H}\operatorname{cth}\frac{2\pi H}{\lambda}-\frac{\operatorname{ch}\frac{4\pi H}{\lambda}}{2\operatorname{sh}^2\frac{2\pi H}{\lambda}}\right). \tag{5.60}$$

От уклона поверхности воды легко перейти к значениям уровня, находящегося под действием ветра. Параметры ветровых волн могут быть определены в зависимости от скорости ветра, разгона и глубины места.

Ввиду сложности процессов, связанных с непериодическими колебаниями уровня в реальных условиях, нахождение аналитических решений в большинстве случаев не удовлетворяет требованиям практики. Реальную возможность получать числовые характеристики при исследовании подобных явлений дают численные методы решения математических задач при помощи ЭЦВМ.

За последние 20 лет во многих странах были выполнены расчеты и проведены исследования по численному эксперименту морских наводнений.

Комплексные исследования, включающие изучение метеорологических условий, наблюдения в натурных условиях, гидравлическое моделирование и детальный анализ численных методов расчета нагонных явлений, проводились в СССР с целью создания метода прогноза морских наводнений в Ленинграде.

Развитие численных методов прогноза наводнений, требующих для повышения точности увеличения объема исходной информации, тесно связано с совершенствованием численных методов прогноза погоды.

Численная модель дает возможность исследовать влияние морфометрических особенностей бассейна на возникновение и трансформацию длинноволновых процессов в море.

Для расчета непериодических колебаний уровня моря численными методами обычно используются уравнения теории мелкой воды, преобразованные путем перехода к скоростям, проинтегрированным по вертикали.

В результате решаемая система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_{-H}^{\zeta}u^2\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-H}^{\zeta}uv\,dz-fV+g(H+\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial x}+$$
$$+\frac{H+\zeta}{\rho}\frac{\partial P_a}{\partial x}=\frac{\tau_x^{(1)}}{\rho}-\frac{\tau_x^{(2)}}{\rho};$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\int_{-H}^{\zeta}uv\,dz+\frac{\partial}{\partial y}\int_{-H}^{\zeta}v^2\,dz+fU+g(H+\zeta)\frac{\partial\zeta}{\partial y}+$$
$$+\frac{H+\zeta}{\rho}\frac{\partial P_a}{\partial y}=\frac{\tau_y^{(1)}}{\rho}-\frac{\tau_y^{(2)}}{\rho};$$
$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0. \tag{5.61}$$

Здесь U и V — интегральные скорости:

$$U(x,\ y,\ t)=\int_{-H}^{\zeta}u(x,\ y,\ z,\ t)\,dz;$$
$$V(x,\ y,\ t)=\int_{-H}^{\zeta}v(x,\ y,\ z,\ t)\,dz;$$

H — глубина моря; ζ — превышение уровня моря над его равновесным положением; P_a — атмосферное давление на свободной поверхности; f — параметр Кориолиса; $\tau^{(1)}=\mu\frac{\partial V}{\partial z}$ при $z=\zeta(x, y, t)$; $\tau^{(2)}=\mu\frac{\partial\overline{V}}{\partial z}$ при $z=-H(x, y)$.

Правая система координат выбрана таким образом, что начало ее расположено на невозмущенной поверхности моря, ось z направлена вертикально вверх.

Для бассейнов типа Балтийского моря, ширина которых в несколько раз меньше длины, представляется возможным ограничиться одномерной моделью и решать задачи штормовых нагонов для канала переменного сечения.

Расчет наводнения в этом случае сводится к смешанной краевой задаче для уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{\Pi}\right)+g\Pi\frac{\partial\zeta}{\partial x}=-\frac{\Pi}{\rho}\frac{\partial P_a}{\partial x}+b\left(\frac{\tau}{\rho}-K\frac{U|U|}{\Pi^2}\right);$$
$$b\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}=0, \tag{5.62}$$

где $U=U(x,\ t)$ — объемный расход; $b(x)$ — ширина свободной поверхности; $\Pi = \Pi_0(x) + b(x)\zeta$ — площадь поперечного сечения; K — коэффициент донного трения.

Задача решается при следующих начальных и граничных условиях:

$$\zeta(x, 0) = \zeta_0(x); \quad U(x, 0) = U_0(x) \quad \text{при} \quad t = t_0;$$
$$U_1(t) \text{ и } U_2(t) \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad x = l.$$

Решения, полученные по схеме Лакса, дают удовлетворительную точность. Оказалось, что для Финского залива погрешность за счет неточного выбора $b(x)$ и $\Pi(x)$ практически незначительно влияет на решение. Влияние начальных и граничных условий на результаты расчета существеннее. Бóльшая часть погрешностей при расчете штормового нагона связана с ошибками, допущенными при задании правой части уравнения движения.

В большинстве случаев при расчете придонного трения принимается значение коэффициента сопротивления, равное 0,0026. Справедливость квадратичного закона и слабая зависимость высоты нагона от коэффициента сопротивления позволяют не учитывать непостоянство K, значение которого разные авторы выбирают в пределах 0,002—0,003.

Главная доля неточности расчета высоты нагона связана с определением касательного напряжения ветра. Хотя квадратичная зависимость этой величины от скорости ветра не так универсальна, как зависимость придонного трения от средней скорости потока, на практике применяется обычно выражение

$$\tau = c_z \rho_a U_a^2(z),$$

где U_a — модуль скорости ветра на уровне z, ρ_a — плотность воздуха, c_z — коэффициент трения.

С помощью этой формулы получены вполне удовлетворительные результаты расчетов штормовых нагонов.

Очевидно, что улучшение предсказания штормовых нагонов неразрывно связано с совершенствованием прогноза поля ветра.

Двумерная задача штормового нагона может быть решена на основе системы уравнений

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{U^2}{\overline{H}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{UV}{\overline{H}}\right) + g\overline{H}\frac{\partial \zeta}{\partial x} - fV = \\
&\qquad = X - \frac{KU\sqrt{U^2+V^2}}{\overline{H}^2}, \qquad\qquad (5.63)\\
&\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{UV}{\overline{H}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{V^2}{\overline{H}}\right) + g\overline{H}\frac{\partial \zeta}{\partial y} + fU = \\
&\qquad = Y - \frac{KV\sqrt{U^2+V^2}}{\overline{H}^2};\\
&\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0,
\end{aligned}$$

где U, V — составляющие полного потока; $\bar{H}=H(x, y)+\zeta(x, y, t)$; X, Y — составляющие внешних сил.

На берегу принимается условие $\bar{V}_n=0$.

При решении двумерной задачи усложняется выбор начальных условий. Приближенные условия $U=V=\zeta=0$ позволяют определить такой промежуток времени решения, после которого начальные значения уже не сказываются на изменении рассматриваемого уровня.

Расчеты, выполненные при начальных условиях

$$\zeta(x,\ y,\ 0)=\zeta_0(x,\ y), \quad U=V=0,$$

связаны с интерполяцией прибрежных данных на акватории моря, что создает при отсутствии в начальный момент ускорений нереальные перекосы уровня.

В большинстве задач при условии $V_n=0$ на береговой стенке принимают скольжение вдоль нее. Результаты решений уравнений движения с учетом горизонтального турбулентного обмена и условия прилипания на береговой границе ($\bar{V}=0$) позволили сделать заключение о незначительном влиянии горизонтальной вязкости на длинноволновые движения. Тем не менее представляют интерес численные расчеты штормовых нагонов с учетом горизонтального обмена количеством движения, выполняемые в прибрежных районах и мелководных бассейнах, где возможно возрастание этого эффекта.

Подобный расчет для Азовского моря выполнил С. Н. Овсиенко, использовав численную двумерную модель, в основу которой были положены уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t}-fV=-g(H+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\tau_x^{(1)}}{\rho}-\frac{\tau_x^{(2)}}{\rho}+A_l\nabla^2 U;$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+fU=-g(H+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\tau_y^{(1)}}{\rho}-\frac{\tau_y^{(2)}}{\rho}+A_l\nabla^2 V;$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0. \qquad (5.64)$$

Здесь $\tau_x^{(2)}/\rho=rU$; $\tau_y^{(2)}/\rho=rV$, $r=A_z\pi^2/(4H^2)$; $\tau^{(1)}=\gamma^2\rho_a\bar{W}|\bar{W}|$, где A_l, A_z — коэффициенты горизонтального и вертикального турбулентного обмена; $\bar{W}$ — скорость приводного ветра; $\gamma^2=1{,}5\times10^{-3}\div4{,}0\cdot10^{-3}$.

На границе области задавалось условие прилипания: $U(x,\ y,\ t)=0$, $V(x,\ y,\ t)=0$, а в начальный момент — скорости полных потоков и уровень: $U(x, y, 0)=U_0(x, y)$, $V(x, y, 0)=V_0(x, y)$, $\zeta(x, y, 0)=\zeta_0(x, y)$.

Поле касательного напряжения ветра над морем из-за малого количества пунктов наблюдения над ветром на побережье интерполировалось с помощью поверхности 2-го порядка.

Для решения использовалась явно неявная численная схема.

В последнее время широко используется вероятностно-статистический подход к колебаниям уровня моря, которые рассматриваются как случайный процесс.

С помощью передаточных функций, получаемых на основе гидродинамических моделей колебаний уровня моря, выражают соотношения между спектрами колебаний уровня и возбуждающих сил, в частности анемобарических. Передаточные функции дают возможность выявлять механизм реакции уровня моря на воздействие внешних сил. В случае статического эффекта атмосферных процессов спектры колебаний уровня в основном подобны спектрам сил. Если реакция уровня на возбуждение имеет волновую природу, вид спектров колебания уровня моря и внешних сил различен. Энергия при этом передается не непосредственно, как при формировании статического уровня, а главным образом в областях резонансных частот и волновых чисел.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 5

1. Войт С. С. Волны цунами.— В кн.: Физика океана, т. 2. М., Наука, 1978.

2. Вольцингер Н. Е., Пясковский Р. В. Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1977.

3. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению.— М., Высшая школа, 1965.— 465 с.

4. Лабзовский Н. А. Непериодические колебания уровня моря.— Л.: Гидрометеоиздат, 1971.— 230 с.

5. Ле Меоте Б. Основы гидродинамики и теории волн. Пер. с англ.— Л.: Гидрометеоиздат, 1974.

6. Соловьев С. Л. Проблема цунами и ее значение для Камчатки и Курильских островов.— В кн.: Проблема цунами. М., Наука, 1968.

7. Физика океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1978.— 294 с.

8. Hwang L. S., Divoky D. Tsunami generation.— J. Geophys. Res., 1970, vol. 75, N 33.

Глава 6. ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ

6.1. Происхождение внутренних волн и их статистические свойства

Океан в общем имеет устойчивую плотностную стратификацию, т. е. относительно более плотные слои воды расположены ниже менее плотных. Поэтому океан представляет собой по существу колебательную систему. Любая частица устойчиво стратифицированной жидкости, выведенная из состояния покоя под действием каких-либо внешних сил, начинает совершать колебательные движения около положения равновесия. Такие колебания в толще воды, где плотность увеличивается с глубиной, называются *внутренними волнами*. Градиенты плотности в океане малы, вследствие чего даже небольшие возмущения могут перемещать частицы жидкости на большие расстояния по вертикали. Поэтому амплитуды внутренних волн могут достигать очень больших значений (до 100 м и более). Причины, вызывающие внутренние волны, очень разнообразны: приливообразующие силы Луны и Солнца, воздействие атмосферы, неустойчивость стационарных течений, обтекание потоком неровностей дна, нелинейное взаимодействие поверхностных волн и т. д.

Механизм генерации внутренних волн с приливными периодами достаточно сложен. Внутренние волны приливного периода могут возникнуть, например, при совпадении периодов собственных колебаний слоев с периодом приливообразующих сил. Кроме того, внутренние волны могут вызываться движениями воды, обусловленными приливами. Распространение океанского прилива в область материковой отмели, которая часто поднимается почти до сезонного термоклина, приводит к образованию внутренних волн над материковым склоном, в области перехода от глубоких вод к мелким. Возникшие здесь внутренние волны могут распространяться по направлению к берегу и в открытый океан. В пользу этого механизма свидетельствуют экспериментальные данные, показывающие, что амплитуды внутренних волн с приливными частотами уменьшаются по мере удаления от материковой отмели.

Воздействие атмосферы может вызывать внутренние волны различными способами. Они могут возбуждаться колебаниями атмосферного давления на поверхности океана. Последние вызывают колебания уровня океана, которые при условиях резонанса способствуют интенсивным колебаниям внутренних слоев жидкости.

Внутренние волны могут также возбуждаться колебаниями напряжения трения на поверхности океана. При пространственно неоднородном поле ветра на нижней границе экмановского слоя трения возникают вертикальные движения, которые порождают внутренние волны. Наконец, внутренние волны могут генерироваться переменным во времени потоком массы через поверхность океана, который ведет к флюктуациям плотности в верхнем слое океана. Последние в свою очередь вызывают колебания давления на нижней границе слоя трения, которые генерируют внутренние волны. Все три механизма прямого атмосферного воздействия дают сравнимые скорости роста внутренних волн, однако в конкретных гидрометеорологических условиях доминирующим может оказаться любой из них.

Большую роль в образовании внутренних волн играют океанические течения. В слоях с резким изменением плотности воды, которое сопровождается, как правило, большими градиентами скорости течения, при $\mathrm{Ri} < 1/4$ возможно возникновение неустойчивости, при которой даже малые возмущения не затухают и их амплитуда растет. Это так называемая неустойчивость Гельмгольца, часто наблюдаемая на поверхностях раздела, отделяющих друг от друга жидкости, движущиеся с различными скоростями.

Внутренние волны могут генерироваться также при обтекании стратифицированным потоком малых (по сравнению с глубиной океана) неровностей дна. При обтекании препятствий в потоке возникает вертикальная составляющая скорости, способствующая возбуждению колебаний, которые в силу очень малых градиентов температуры воды на глубине могут иметь значительные амплитуды. Такие внутренние волны называются *волнами за препятствиями*. Они стоячие при стационарном потоке и бегущие в случае периодически изменяющегося течения (приливного или создаваемого длинными поверхностными волнами). Рассмотренный механизм является одним из главных, приводящих к возникновению внутренних волн на больших глубинах.

Широкое распространение имеет механизм генерации внутренних волн вследствие нелинейного резонансного взаимодействия между поверхностными гравитационными волнами. Пусть две поверхностные волны с волновыми числами K_1, K_2 и частотами σ_1, σ_2 нелинейно взаимодействуют между собой. Если при этом удовлетворяется условие резонанса, т. е.

$$K_1 - K_2 = K_в; \quad \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_в,$$

где $K_в$, $\sigma_в$ — волновое число и частота внутренней волны, то возникающая внутренняя волна начинает постепенно отбирать энергию от поверхностных волн благодаря взаимодействию с ними.

Таковы основные механизмы генерации внутренних волн в океане.

Внутренние волны в океане измерять непосредственно можно, исследуя вертикальные перемещения частиц воды. Такие наблюдения, называемые прямыми, производились несколькими способами. Например, на определенную плотностную поверхность (изопикну) запускался большой плавучий контейнер. Глубина его положения регистрировалась манометром на барабане. В более глубоководных районах для регистрации вертикальных колебаний частиц воды можно использовать поплавки нейтральной плавучести, которые также опускаются на определенные изопикны, а их перемещение автоматически регистрируется на судне. Однако осуществление таких экспериментов довольно сложное дело, и до настоящего времени они остаются единичными.

Для исследования внутренних волн поэтому приходится использовать косвенные методы, основанные на анализе временно́го хода температуры и солености воды в какой-либо точке океана на нескольких горизонтах. Реальные колебания температуры и солености воды, регистрируемые датчиками, вызываются внутренними волнами и турбулентным перемешиванием. В связи с этим возникает проблема выделения типа колебаний. Однако дело облегчается тем, что колебания, обусловленные устойчивыми внутренними волнами, в отличие от турбулентных, имеют периодический характер. Поэтому, анализируя только их, можно судить об основных параметрах внутренних волн.

Форма внутренних волн в океане весьма разнообразна. Длинные и низкочастотные внутренние волны, как правило, имеют квазисинусоидальную форму с длиной волны, доходящей до сотен километров, скоростью распространения до нескольких метров в секунду и амплитудой до 100 м (рис. 6.1а).

Короткие внутренние волны имеют форму, отличающуюся от синусоидальной (уплощение гребня и обострение ложбин). Их период не превышает 2—5 ч, амплитуда 10—20 м, скорость распространения несколько десятков сантиметров в секунду (рис. 6.1б).

Накопленный к настоящему времени экспериментальный материал дает представление также о некоторых статистических свойствах внутренних волн. Большая часть косвенных определений характеристик внутренних волн охватывала верхний слой океана (до глубин порядка 600 м). При этом изучался широкий диапазон частот от l до N (где l — частота инерционных колебаний, N — частота Брента—Вяйсяля), что соответствует внутренним волнам с периодами от нескольких минут до десятков часов.

Измерения показали, что частотные спектры внутренних волн, отличаясь в некоторых деталях, обладают определенной общностью (рис. 6.2):

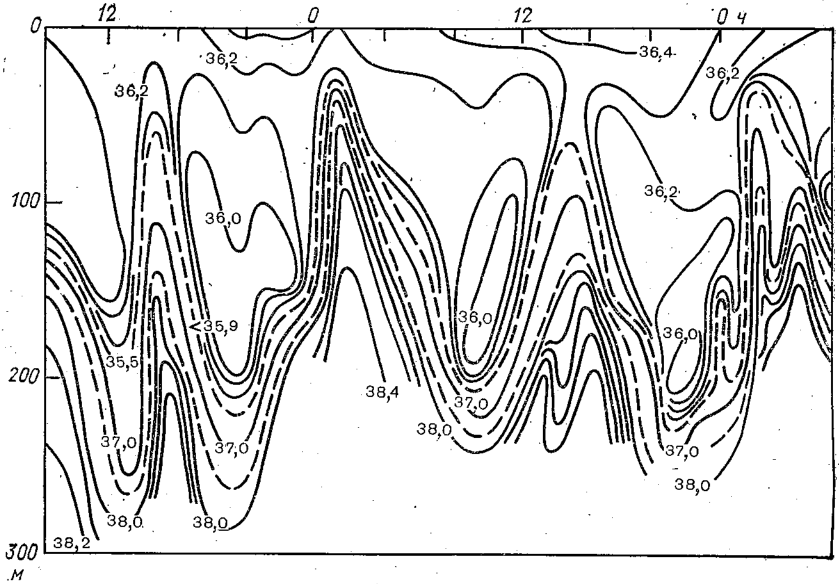


Рис. 6.1а. Длиннопериодные внутренние волны в Гибралтарском проливе (по колебаниям солености 16—18 мая 1961 г.) [2].

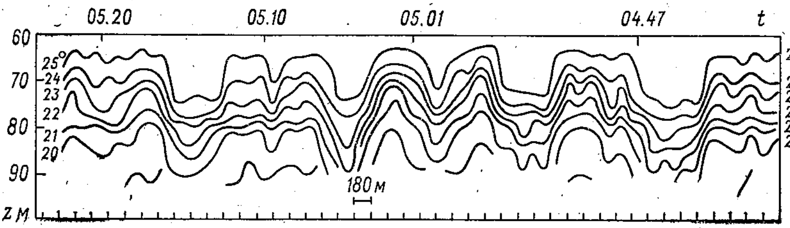


Рис. 6.1б. Короткопериодные внутренние волны в пассатной зоне Северной Атлантики (по колебаниям температуры) [3].

1) распределение энергии внутренних волн по частотам почти непрерывно, что подтверждает возможность существования внутренних волн в широком диапазоне частот;

2) на фоне непрерывного распределения энергии имеются два пика на инерционной и приливной частотах. Это свидетельствует о том, что энергия внутренних волн, приходящаяся на инерционный и приливной периоды, больше, чем на других периодах;

3) уровень спектральной плотности падает с увеличением частоты по степенному закону $\sigma^{-\alpha}$, где $1 \leqslant \alpha \leqslant 4$.

Пространственная статистическая структура внутренних волн изучена гораздо слабее, поскольку для ее анализа тре-

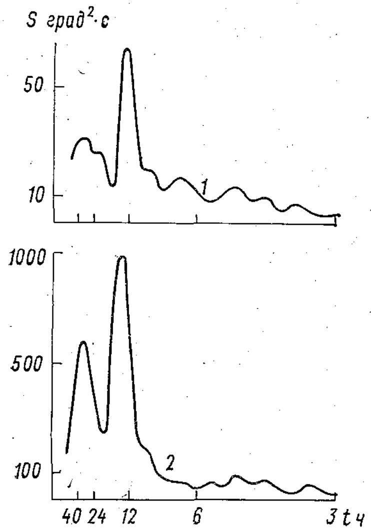


Рис. 6.2. Спектральная плотность (S) колебаний температуры по данным Атлантического полигона [1].

1 — на глубине 50 м; 2 — на глубине 200 м.

Для района Атлантического полигона приливный период составляет 12,4 ч, а инерционный 40 ч (пики на частотных спектрах падают на эти периоды).

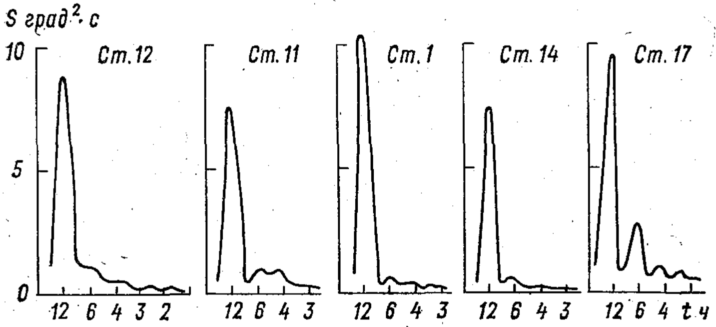


Рис. 6.3. Пространственная изменчивость частотных спектров на Атлантическом полигоне [1].

Расстояние между станциями около 100 миль.

буется более сложный комплекс наблюдений. Получение пространственных статистических характеристик внутренних волн возможно либо с помощью буксируемых кораблем датчиков, либо проведением измерений на полигоне с нескольких заякоренных буев.

Анализ наблюдений, выполненных вторым способом, показывает, что частотные спектры, полученные в различных точках полигона, практически не изменяются на расстоянии до 100 миль и более. Причем энергия на приливном периоде меняется незначительно, а некоторая деформация спектров наблюдается только в области более высоких частот (рис. 6.3).

Наблюдения, выполненные при помощи буксируемой гирлянды термисторов, дают возможность построить одномерные пространственные спектры, которые характеризуют распределение энергии внутренних волн в зависимости от длины волны (или волнового числа). Такие спектры, как и частотные, обладают общими закономерностями. Они, как правило, не имеют пиков и монотонно спадают с ростом волнового числа K по степенному закону $K^{-\alpha}$, где $1 \leqslant \alpha \leqslant 4$. Причем вид одномерных пространственных спектров не зависит от направления движения судна. Приведенные факты свидетельствуют о горизонтальной однородности поля внутренних волн.

6.2. Внутренние приливные волны в двухслойном океане

Наиболее распространены в Мировом океане волны приливного происхождения. Они обычно развиваются в главном и сезонном термоклинах и поэтому для их описания пригодна двухслойная модель океана. Основные действующие силы, приводящие к колебанию границы раздела слоев,— это приливообразующая сила, выражаемая через градиенты статистического прилива $\bar{\zeta}$, и неоднородность давления в верхнем и нижнем слоях, также выражаемая через градиенты давления. Поскольку частота приливных колебаний одного порядка с угловой скоростью вращения Земли, в уравнения должно входить ускорение Кориолиса. Так как интерес представляют колебания границы раздела сред, находящейся далеко от дна, то трение может во внимание не приниматься. Таким образом, уравнения, описывающие движение воды первого и второго слоя, одинаковы. В проекциях на прямоугольные оси координат совместно с уравнением неразрывности они имеют следующий вид:

для верхнего слоя

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} - f v_1 = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P_1}{\partial x} + g\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x}; \tag{6.1}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + f u_1 = -\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial P_1}{\partial y} + g\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial y}; \tag{6.2}$$

$$\frac{\partial (\zeta_1 - \zeta_2)}{\partial t} = H_1\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right); \tag{6.3}$$

для нижнего

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} - f v_2 = -\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P_2}{\partial x} + g\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial x}; \tag{6.4}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}+fu_2=-\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial P_2}{\partial y}+g\frac{\partial\overline{\zeta}}{\partial y};\tag{6.5}$$

$$\frac{\partial\zeta_2}{\partial t}=-H_2\left(\frac{\partial u_2}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}\right),\tag{6.6}$$

где ζ_1 — отклонение свободной поверхности океана от положения равновесия; ζ_2 — отклонение границы раздела слоев от положения равновесия; P_1 и P_2 обозначают давления соответственно в верхнем и нижнем слоях:

$$P_1=\rho_1 g(\zeta_1-z_1)+P_a;\tag{6.7}$$

$$P_2=\rho_1 g(\zeta_1-\zeta_2+H_1)+\rho_2 g(\zeta_2-z_2)+P_a.\tag{6.8}$$

В выражениях (6.7) и (6.8) через P_a обозначено атмосферное давление, z_1 — глубина ниже положения равновесия свободной поверхности, а z_2 — ниже положения равновесия поверхности разрыва плотности.

Из-за относительно небольших горизонтальных градиентов атмосферного давления по сравнению с перепадом давления по длине волны можно принимать $P_a\approx\mathrm{const}$. В таком случае замена P_1 и P_2 выражениями (6.7) и (6.8) в уравнениях движения приводит их к виду

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}-fv_1=-g\frac{\partial}{\partial x}(\zeta_1-\overline{\zeta});\tag{6.9}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t}+fu_1=-g\frac{\partial}{\partial y}(\zeta_1-\overline{\zeta})\tag{6.10}$$

для верхнего слоя и к виду

$$\frac{\partial u_2}{\partial t}-fv_2=-g\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial x}-\frac{\partial\overline{\zeta}}{\partial x}\right)-g\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{\partial\zeta_2}{\partial x};\tag{6.11}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial t}+fu_2=-g\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}-\frac{\partial\overline{\zeta}}{\partial y}\right)-g\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}\tag{6.12}$$

для нижнего слоя.

Дифференцируя уравнения неразрывности (6.3) и (6.6) по времени, уравнения движения (6.9) и (6.11) по x, а (6.10) и (6 12) по y и производя преобразования, получим

$$\frac{\partial^2(\zeta_1-\zeta_2)}{\partial t^2}+f^2(\zeta_1-\zeta_2)=gH_1\nabla^2(\zeta_1-\overline{\zeta});\tag{6.13}$$

$$\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial t^2}+f^2\zeta_2=gH_2\nabla^2\left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\zeta_1+\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\zeta_2-\overline{\zeta}\right].\tag{6.14}$$

Ради упрощения, не ограничивая общности, будем рассматривать волны с горизонтальными гребнями $\left(\frac{\partial\zeta_1}{\partial y}=\frac{\partial\zeta_2}{\partial y}=0\right)$. Для свободных прогрессивных волн, когда отсутствует непосредственно возмущающая сила, выраженная через $\bar{\varsigma}$, решение уравнения (6.13) и (6.14) ищется в виде

$$\zeta_1=\zeta_{01}\cos(\sigma t-kx); \tag{6.15}$$

$$\zeta_2=\zeta_{02}\cos(\sigma t-kx). \tag{6.16}$$

Дифференцируя (6.15) и (6.16) по t и x и подставляя полученные результаты в (6.13) и (6.14), имеем

$$(f^2-\sigma^2)(\zeta_{01}-\zeta_{02})=-gH_1k^2\zeta_{01}; \tag{6.17}$$

$$(f^2-\sigma^2)\zeta_{02}=-gH_2k^2\left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\zeta_{01}+\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\zeta_{02}\right]. \tag{6.18}$$

После введения обозначения

$$\beta=\frac{c^2-\frac{f^2}{k^2}}{gH_1} \tag{6.19}$$

выражения (6.17) и (6.18) сводятся к

$$(\beta-1)\zeta_{01}=\beta\zeta_{02}; \tag{6.20}$$

$$\beta\zeta_{02}=\frac{H_2}{H_1}\left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\zeta_{01}+\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\zeta_{02}\right]. \tag{6.21}$$

Исключение из (6.20) и (6.21) ζ_{01} и ζ_{02} приводит к уравнению Стокса:

$$\frac{H_1}{H_2}\beta^2-\left(1+\frac{H_1}{H_2}\right)\beta+1-\frac{\rho_1}{\rho_2}=0, \tag{6.22}$$

из которого определяется

$$\beta=\frac{1}{2}\left(1+\frac{H_2}{H_1}\right)\pm\sqrt{\frac{1}{4}\left(1+\frac{H_2}{H_1}\right)^2-\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{H_2}{H_1}}. \tag{6.23}$$

Для получения приближенного значения корня, соответствующего положительному знаку в выражении (6.23), можно пренебречь членом, содержащим $1-\rho_1/\rho_2$, тогда

$$\beta'=1+\frac{H_2}{H_1}, \tag{6.24}$$

а при получении приближенного значения корня, соответствующего отрицательному знаку в (6.23), после разложения подкоренного выражения в ряд можно пренебречь квадратами и высшими степенями $1-\rho_1/\rho_2$:

$$\beta''=\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)\frac{H_2}{H_1+H_2}. \tag{6.25}$$

Видно, что корень β' не зависит от стратификации и соответствует однородной жидкости, а корень β'' — двухслойной жидкости.

Чтобы легче оценить влияние разницы плотностей воды в слоях, предположим, что геострофические эффекты отсутствуют. Тогда подстановка значений корней уравнения Стокса в (6.19) дает

$$c_s' = \sqrt{g(H_1+H_2)}; \tag{6.26}$$

$$c_s'' = \sqrt{\frac{gH_1H_2}{H_1+H_2}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)}. \tag{6.27}$$

Формула для c_s' представляет по существу известное выражение для скорости распространения длинных волн в однородном море, а c_s'' соответствует скорости распространения внутренних волн. Так как в океане наибольший порядок величины $1-\frac{\rho_1}{\rho_2}$ не превышает 10^{-3}, то оказывается, что при отсутствии геострофических эффектов скорость распространения внутренних волн во много раз меньше скорости распространения волн на поверхности.

Учет вращения Земли превращает соотношения (6.26) и (6.27) в

$$c' = \sqrt{g(H_1+H_2)+\frac{f^2}{k^2}}; \tag{6.28}$$

$$c'' = \sqrt{\frac{gH_1H_2}{H_1+H_2}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)+\frac{f^2}{k^2}}. \tag{6.29}$$

Так как для приливных волн $f^2/k^2 \gg \frac{gH_1H_2}{H_1+H_2}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)$, то скорости распространения поверхностных и внутренних приливных волн с учетом вращения Земли становятся одного порядка, причем с увеличением длины скорость внутренних волн приближается к скорости волн на свободной поверхности.

Периоды свободных колебаний волн получаются из формулы $\tau = \lambda/c$, если в ней заменить c выражениями (6.28) и (6.29):

$$\tau' = \frac{1}{\sqrt{\frac{g(H_1+H_2)}{\lambda^2}+\frac{\omega^2\sin^2\varphi}{\pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\tau_s')^2}+\frac{1}{\tau_p^2}}}; \tag{6.30}$$

$$\tau'' = \frac{1}{\sqrt{\frac{g(H_1H_2)}{H_1+H_2}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)+\frac{\omega^2\sin^2\varphi}{\pi^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\tau_s')^2}+\frac{1}{\tau_p^2}}}, \tag{6.31}$$

где τ_s — периоды свободных колебаний без учета вращения Земли, а τ_p — период инерционных колебаний, равный половине маятниковых суток.

Как и следовало ожидать, в случае коротких волн период колебаний мало зависит от вращения Земли; с увеличением длины волны период свободных колебаний все больше стремится к половине маятниковых суток.

Сравним колебания поверхности моря и границы раздела плотностей. Из (6.20) имеем соотношение для вертикальных перемещений

$$\frac{\zeta_{02}}{\zeta_{01}}=\frac{\zeta_2}{\zeta_1}=\frac{\beta-1}{\beta}, \tag{6.32}$$

а из уравнений неразрывности (6.3) и (6.6) — соотношение для горизонтальных скоростей

$$\frac{u_{02}}{u_{01}}=\frac{u_2}{u_1}=\frac{\zeta_{02}}{\zeta_{01}-\zeta_{02}}\,\frac{H_1}{H_2},$$

где u_{01}, u_{02} — амплитудные значения скоростей течения. Таким образом,

$$\frac{u_{02}}{u_{01}}=\frac{u_1}{u_2}=(\beta-1)\frac{H_1}{H_2}. \tag{6.33}$$

Из (6.32) и (6.33) с учетом (6.24) имеем, что

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1}=\frac{H_2}{H_1+H_2},\quad \frac{u_2}{u_1}=1. \tag{6.34}$$

Эти соотношения относятся к обычным приливным волнам; они показывают, во-первых, что колебания граничной поверхности всегда меньше колебаний свободной поверхности, во-вторых, что фазы этих колебаний совпадают. Скорости течений одинаковы в двух слоях.

Выражения (6.26) и (6.34) свидетельствуют, что стратификация не препятствует возможности распространения и существования обычных приливных волн и в весьма малой степени меняет их свойства.

Из (6.32) и (6.33) с учетом (6.25) получаются соотношения, характеризующие внутренние волны:

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1}=-\frac{\rho_2}{\rho_2-\rho_1}\left(1+\frac{H_1}{H_2}\right),\quad \frac{u_2}{u_1}=-\frac{H_1}{H_2}. \tag{6.35}$$

Для них отношения вертикальных перемещений поверхности раздела плотностей и свободной поверхности обратно пропорциональны устойчивости граничной поверхности, при этом фазы волны на поверхности моря и на границе разрыва плотности противоположны.

В случае вынужденных приливных волн необходимо учитывать возмущающую силу, которая выше была выражена через значение статистического прилива, который, как и колебания уровня, можно представить через косинусоиду $\bar{\zeta}=\bar{\zeta}_0\cos(\sigma t-kx)$. Подстановка этого выражения, а также ранее использованных (6.15) и (6.16) в уравнения (6.13) и (6.14) по аналогии с проделанным решением для свободных волн дает

$$\bar{\zeta}_0=(1-\beta)\zeta_1+\beta\zeta_2;$$

$$\bar{\zeta}_0=\frac{\rho_1}{\rho_2}\zeta_{01}+\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}-\beta\frac{H_1}{H_2}\right)\zeta_{02}.$$

Из этих двух выражений находятся амплитуды колебаний свободной поверхности океана ζ_{01} и границы раздела слоев с разной плотностью воды ζ_{02}:

$$\zeta_{01}=\frac{\bar{\zeta}_0}{\delta}\left[1-\frac{\rho_1}{\rho_2}-\beta\left(1+\frac{H_1}{H_2}\right)\right]; \tag{6.36}$$

$$\zeta_{02}=\frac{\bar{\zeta}_0}{\delta}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}-\beta\right), \tag{6.37}$$

где

$$\delta=(1-\beta)\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}-\beta\frac{H_1}{H_2}\right)-\frac{\rho_1}{\rho_2}\beta=$$

$$=\frac{H_1}{H_2}\beta^2-\left(1+\frac{H_1}{H_2}\right)\beta+1-\frac{\rho_1}{\rho_2}=\frac{H_1}{H_2}(\beta-\beta')(\beta-\beta''). \tag{6.38}$$

Из выражений (6.36)—(6.38) видно, что при $\beta\to\beta'$ возможен резонанс с обычными приливными волнами, а при $\beta\to\beta''$ — резонанс с внутренними приливными волнами.

Отношение амплитуд граничной поверхности и свободной поверхности находится из (6.36) и (6.37):

$$\frac{\zeta_{02}}{\zeta_{01}}=\frac{1-\frac{\rho_1}{\rho_2}-\beta}{1-\frac{\rho_1}{\rho_2}-\beta\left(1+\frac{H_1}{H_2}\right)}. \tag{6.39}$$

Отношение скоростей течений в двух слоях определяется из тех же соотношений с учетом (6.33):

$$\frac{u_2}{u_1}=1-\frac{1}{\beta}\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right). \tag{6.40}$$

Если β не является малой величиной, то пренебрегая членом с $1-\rho_1/\rho_2$, получаем приблизительные зависимости, характеризующие обычную приливную волну:

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1}=\frac{H_2}{H_1+H_2},\quad \frac{u_2}{u_1}=1.$$

Если σ стремится к f, т. е. период колебаний стремится к периоду, равному половине маятниковых суток, то β становится малым, и, если оно достаточно близко к β'', то отношение ζ_{02}/ζ_{01} будет большим и создаются условия для возникновения внутренних приливных волн инерционного периода.

Условие $\sigma\to 2\omega\sin\varphi$ сильно ограничивает районы возникновения больших внутренних приливных волн, так как скольконибудь значительные амплитуды внутренних волн могут наблюдаться в пределах 2—3° около резонансных широт.

Для резонанса достаточно совпадения периодов собственных колебаний слоев с периодом приливообразующих сил, в этом случае резонансные условия должны существовать для следующего диапазона широт: $\sin\varphi \leqslant \frac{\sigma}{2\omega}$.

6.3. Внутренние волны в непрерывно стратифицированной среде

Во введении система уравнений, описывающих внутренние волны, была сведена к одному уравнению (0.30). Аналогичный вид имеет уравнение для возмущений вертикальной скорости относительно среднего стационарного значения. Для его решения необходимо определить граничные условия, так как на берегах, на дне океана и его поверхности неизвестные переменные могут меняться скачкообразно. На берегах должно выполняться условие непротекания. Так как не учитывается изменение атмосферного давления на свободной поверхности $z=\zeta_0(x, y, t)$, то обычное кинематическое условие на ней можно свести к виду

$$\frac{\partial P}{\partial t}+w\frac{\partial \bar{P}}{\partial z}=\frac{\partial P}{\partial t}+wg\bar{\rho}=0. \tag{6.41}$$

Чтобы исключить из (6.41) давление, применим к нему операцию ∇_{Γ}^2, тогда с учетом того, что $-\bar{\rho}\left(\frac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial t}+f^2\frac{\partial w}{\partial z}\right)+\nabla_{\Gamma}^2\times$ $\times\frac{\partial P}{\partial t}=0$, оно перейдет в

$$\frac{\partial^3 w}{\partial z\,\partial t^2}+f^2\frac{\partial w}{\partial z}+g\nabla_{\Gamma}^2 w=0 \quad \text{при} \quad z=\zeta_0(x, y, t). \tag{6.42}$$

На дне должно выполняться условие: при $H=\text{const}$

$$w|_{z=H}=0. \tag{6.43}$$

Решение, как обычно, ищется в виде $\omega=\omega_0(x, y, z)e^{i\sigma t}$ и (6.42) переходит в однородное волновое уравнение для гармонических волн, в котором отсутствует время:

$$\nabla_{\Gamma}^2 w_0-\frac{\sigma^2-f^2}{g\Gamma-\sigma^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}+\Gamma\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)=0. \tag{6.44}$$

При средних условиях стратификации плотности в океане $g\Gamma\sim 10^{-6}$ с$^{-2}$. В случае длинных волн, например внутренних приливов или внутренних сейшеобразных колебаний с $\sigma\sim 10^{-4}$ с$^{-1}$, оказывается, что $g\Gamma\gg\sigma^2$ и уравнение (6.44) упрощается:

$$\nabla_{\Gamma}^2 w_0-\frac{\sigma^2-f^2}{g\Gamma}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2}+\Gamma\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)=0.$$

При коротких и средних внутренних волнах выполняется условие $f^2 \ll \sigma^2$, тогда в уравнении (6.44) пренебрегают ускорением Кориолиса

$$\nabla^2_\Gamma w_0 - \frac{\sigma^2}{g\Gamma - \sigma^2}\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} + \Gamma \frac{\partial w_0}{\partial z}\right) = 0.$$

Характер дифференциального уравнения (6.44) определяется знаком множителя $\frac{\sigma^2 - f^2}{g\Gamma - \sigma^2}$. Если он меньше нуля, то уравнение (6.44) будет эллиптического типа, если больше, то гиперболического. Решение вида $w = w_0 e^{i\sigma t}$ возможно лишь тогда, когда уравнение будет гиперболического типа, следовательно, соотношение величин f^2, $g\Gamma$ и σ^2 имеет исключительно важное значение для возникновения внутренних колебаний в океане.

Величина $g\Gamma$ имеет размерность квадрата частоты. Физический смысл ее легко понять из следующих рассуждений. Рассмотрим элементарный объем воды с неизменной плотностью $\rho = \bar{\rho}(z_0)$, где $\bar{\rho}$ — плотность окружающего пространства, а z_0 — вертикальная координата этого объема в состоянии покоя. Пусть выделенный объем воды выводится мгновенной вертикальной силой из положения равновесия, тогда его движение описывается выражением

$$\frac{dw}{dt} = g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z},$$

а для окружающей среды справедливо уравнение статики

$$0 = g - \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{P}}{\partial z}.$$

Процессы в океане происходят сравнительно медленно, поэтому давление в движущемся объеме воды равно давлению окружающей среды, т. е. $P = \bar{P}$. Поскольку $w = \frac{d\zeta}{dt}$, имеем, что

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = g\frac{\bar{\rho}(z_0) - \bar{\rho}}{\bar{\rho}(z_0)}. \tag{6.45}$$

При небольших отклонениях от уровня z_0 можно принять, что плотность окружающей среды меняется линейно, следовательно, при $z = \zeta$ частица будет иметь свою неизменную плотность $\bar{\rho}(z_0)$, а окружающее пространство — плотность $\bar{\rho} = \bar{\rho}(z_0) + \zeta\frac{d\bar{\rho}}{dz}$, тогда (6.45) переходит в

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + g\Gamma\zeta = 0.$$

Таким образом, частица жидкости совершает колебания $\zeta = \zeta_0 e^{i\sqrt{g\Gamma}t}$ с характеризующей устойчивость водных масс круговой частотой $N = \sqrt{g\Gamma}$, которую обычно называют частотой Вяйсяля.

Так как Γ является функцией только z, то однородное волновое уравнение (6.44) с граничными условиями на поверхности (6.42) и на дне (6.43) допускает разделение переменных:

$$w_0(x, y, z) = W(z) F(x, y). \tag{6.46}$$

Подставляя (6.46) и (6.44) и деля полученное выражение на WF, получаем

$$-\frac{1}{\sigma^2 - f^2} \frac{\nabla_\Gamma^2 F}{F} + \frac{1}{g\Gamma - \sigma^2}\left(\frac{d^2W}{dz^2} + \Gamma \frac{dW}{dz}\right)\frac{1}{W} = 0. \tag{6.47}$$

Первый член этого уравнения зависит только от x и y, а второй — только от z, следовательно, чтобы (6.47) могло удовлетворяться при всех значениях x, y, z, оба эти члена должны быть равны некоторой постоянной, но с обратным знаком. Пусть первый член равен ν, тогда из (6.47) имеем дифференциальное уравнение с частными производными

$$\nabla_\Gamma^2 F + (\sigma^2 - f^2)\nu F = 0 \tag{6.48}$$

и обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2W}{dz^2} + \Gamma\frac{dW}{dz} + (g\Gamma - \sigma^2)\nu W = 0. \tag{6.49}$$

Граничные условия (6.42) и (6.43) с учетом разделения переменных и гармонического характера колебаний переходят в

$$\left[(f^2 - \sigma^2)\frac{dW}{dz} F + g\nabla_\Gamma^2 F W\right]_{z=0} = 0 \tag{6.50}$$

и

$$W|_{z=H} = 0. \tag{6.51}$$

Из (6.48) и (6.50) имеем

$$\frac{dW}{dz} + g\nu W = 0. \tag{6.52}$$

В уравнении (6.48) выражение $(\sigma^2 - f^2)\nu$ представляет собой не что иное как квадрат волнового числа, в чем можно убедиться, используя хотя бы анализ размерностей $k_*^2 = (\sigma^2 - f^2)\nu$, а само уравнение (6.48) описывает форму внутренних волн. Зависимость же внутренних волн от глубины описывается выражением (6.49), которое удобно записать в виде

$$\frac{d}{dz}\left[\bar{\rho}(z)\frac{dW}{dz}\right] + \nu q(z) W = 0, \tag{6.53}$$

где

$$q(z) = [N^2(z) - \sigma^2]\,\bar{\rho}(z).$$

Рассмотрим два возможных случая, когда второй член (6.53) принимает либо положительные, либо отрицательные значения.

Если $\nu q(z) > 0$, то уравнение (6.53) с граничными условиями (6.51) и (6.53) представляет собой задачу о нахождении собственных значений. Интегрируя (6.53) по глубине, имеем

$$\left[\bar{\rho}(z)\frac{dW}{dz}\right]_0^H = -\nu\int_0^H q(z)\,W\,dz.$$

Так как $\nu q(z) > 0$, то могут существовать две области: область глубин $z_1 < z < z_2$, для которой

$$\left[\bar{\rho}(z)\frac{dW}{dz}\right]_{z_2} < \left[\bar{\rho}(z)\frac{dW}{dz}\right]_{z_1}, \quad \text{если} \quad W > 0,$$

и область глубин $z_2 < z < z_3$, для которой

$$\left[\bar{\rho}(z)\frac{dW}{dz}\right]_{z_3} > \left[\bar{\rho}(z)\frac{dW}{dz}\right]_{z_2}, \quad \text{если} \quad W < 0.$$

Следовательно, при монотонном возрастании плотности с глубиной производная dW/dz в интервале $z_1 < z < z_2$ монотонно уменьшается, а в интервале $z_2 < z < z_3$ монотонно растет (рис. 6.4).

Граничные условия (6.51) и (6.52) могут выполняться лишь при определенных собственных значениях задачи. Каждому собственному значению ν_n соответствует собственная функция $W_n(z)$, являющаяся решением уравнения (6.49) с граничными условиями (6.51) и (6.52).

На рис. 6.4 сплошными линиями показаны собственные функции W_1, W_2, W_3, соответствующие собственным значениям ν_1, ν_2, ν_3. Каждая волна W_n на определенной глубине достигает максимального вертикального смещения, а на так называемой узловой глубине вертикальные колебания отсутствуют. Так как исследуемое уравнение (6.49) линейно и однородно, то в принципе любое распределение внутренних колебаний по глубине можно изобразить в виде суммы собственных функций, подобно ряду Фурье.

Если $\nu \neq \nu_n$, то граничное условие на дне (6.51) для функций $W(z)$ не удовлетворяется. Эти функции изображены на рис. 6.5 пунктирными линиями.

Для определения длины волны без учета геострофических эффектов необходимо ввести обычное волновое число k, которое связано с ранее введенным k_* соотношением $k^2 = k^2_* + f^2\nu$, причем каждому собственному значению ν_n соответствуют свои волновые числа k_{*n} и k_n. Следовательно,

$$k_n^2 = \nu_n \sigma^2, \quad \bar{\lambda}_n^2 = \frac{1}{\nu_n} \tau^2,$$

т. е. при заданном периоде τ длина волны может принимать лишь определенные значения, связанные с собственными значениями ν_n. При отсутствии геострофических эффектов для поступательных волн, так как $\nu_n = k_n^2/\sigma^2$, получаем, что $\nu_n = 1/c_n^2$, т. е. каждое собственное значение определяет одну

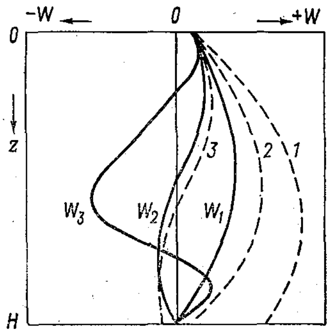


Рис. 6.4. Собственные функции W_n, соответствующие собственным значениям ν_n (сплошные линии) и функции $W(z)$ при условии $\nu \neq \nu_n$ (пунктирные линии).

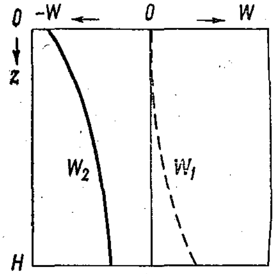


Рис. 6.5. Изменение с глубиной функции $W = W_1 + W_2$ при $\nu q(z) < 0$.

возможную фазовую скорость, которая монотонно убывает с ростом порядка собственного значения.

Если $\nu q(z) < 0$, то также возможны две области: область глубин $z_1 < z < z_2$, для которой

$$\left[\bar{\rho}(z) \frac{dW}{dz}\right]_{z_2} > \left[\bar{\rho}(z) \frac{dW}{dz}\right]_{z_1} \quad \text{при} \quad W > 0,$$

и область $z_2 < z < z_3$, где

$$\left[\bar{\rho}(z) \frac{dW}{dz}\right]_{z_3} < \left[\bar{\rho}(z) \frac{dW}{dz}\right]_{z_2} \quad \text{при} \quad W < 0.$$

Так как плотность монотонно растет с глубиной, то в области отрицательных вертикальных скоростей dW/dz монотонно убывает с глубиной, а при $W > 0$ dW/dz с глубиной возрастает и при $Z = H$ $W \neq 0$ (рис. 6.5). Следовательно, при $\nu q(z) < 0$ не существует собственного значения ν_n, для которого могут выполняться граничные условия. Тем не менее граничные условия (6.51) и (6.52) могут выполняться при соответствующем выборе амплитуды W с помощью функций $W_1 > 0$ и $W_2 < 0$ при любом значении $\nu : W = W_1 + W_2$. В этом случае экстремальное значение $W(z)$ находится на поверхности. Таким образом, условие $\nu q(z) < 0$ характеризует не внутренние, а поверхностные волны. Следовательно, в бассейне с постоянной глубиной для существования внутренних волн необходимо условие $\nu q(z) > 0$, т. е.

$$\frac{k_*^2 [N^2(z) - \sigma^2] \bar{\rho}(z)}{\sigma^2 - f^2} > 0. \tag{6.54}$$

Так как плотность монотонно растет с глубиной, то для синусоидальных волн, у которых $k_*^2 > 0$, критерий существования

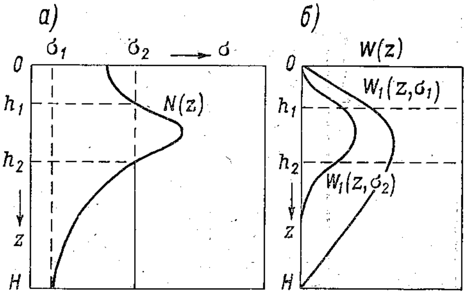


Рис. 6.6. Внутренние волны, охватывающие всю толщу океана (*а*), и нехарактерные внутренние волны в слое скачка при $f < \sigma < N(z)$ (*б*).

внутренних волн (6.54) может быть сведен к следующему виду:

$$\frac{N^2(z) - \sigma^2}{\sigma^2 - f^2} > 0. \tag{6.55}$$

Нетрудно заметить, что в натуре могут встретиться два случая: $\sigma > f$ и $\sigma < f$.

Если $\sigma > f$, то условие (6.55) может выполняться при $\sigma < N(z)$ или при $\tau > 2\pi \sqrt{\frac{1}{g\Gamma}}$, т. е. интервал периодов внутренних волн ограничен в своей нижней части периодом Вяйсяля, все внутренние колебания должны иметь бóльшие периоды. В океане могут возникнуть две ситуации. Во-первых, внутренние волны с частотой $\sigma < \sigma_1 \leqslant N(z)$ охватывают всю толщу (рис. 6.6). Во-вторых, могут существовать внутренние волны в области слоя скачка $h_1 < z < h_2$ с частотами $\sigma < \sigma_2$, причем $\sigma_2 > \sigma_1$. И лишь в пределах этого слоя эти волны обладают характером собственно внутренних волн, так как вне его из-за того, что $\nu q(z) < 0$, их амплитуда уменьшается вверх и вниз на экспоненте. Такие волны, которые имеют характер внутренних волн лишь в определенном слое, а вне его затухают экспоненциально, как поверхностные, и не могут нигде принимать экстремального значения, следуя Крауссу, будем называть нехарактерными внутренними волнами.

Если $\sigma < f$, то условие (6.55) может выполняться при $\sigma > N(z)$ или $\tau < 2\pi \sqrt{\frac{1}{g\Gamma}}$. В этом случае интервал внутренних волн ограничен периодом Вяйсяля в своей верхней части. Так как сила Кориолиса влияет лишь на длиннопериодные колебания, то рассматриваемая ситуация может встретиться преимущественно в квазиоднородных глубинных слоях океана (рис. 6.7).

Предположим, что σ_1 — частота приливной волны в тех широтах, где $f > \sigma_1$. Ниже слоя скачка, в области $h_1 < z < H$, где $\sigma_1 > N(z)$, могут появиться волны с частотой σ_1. Вне этой области из-за того, что $\nu q(z) > 0$, амплитуда волн уменьшается по экспоненте. Мы опять имеем дело с нехарактерными внутренними волнами. Следовательно, в высоких широтах суточные внутренние приливные волны должны возникать преимущественно на больших глубинах, в то время как полусуточные внутренние приливные волны могут возникнуть на любой глубине. Это обстоятельство было подтверждено наблюдениями в северной части Атлантического океана и в Баренцевом море.

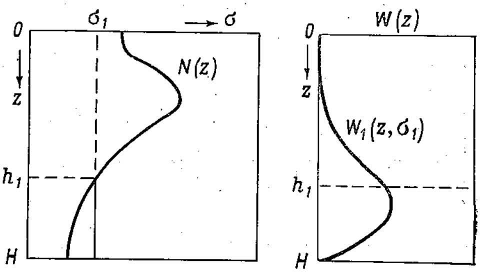


Рис. 6.7. Нехарактерные внутренние волны в квазиоднородных слоях при $N(z) < \sigma < f$.

6.4. Внутренние волны конечной амплитуды

Форма внутренних волн часто значительно отличается от синусоидальной. В короткопериодных волнах, например, наблюдается уплощение гребня и обострение ложбин (см. рис. 6.1). В рамках линейной теории получить такие профили не удается. Поэтому для исследования внутренних волн в последнее время все чаще применяется нелинейная теория волн конечной амплитуды. Решение эволюционных нелинейных уравнений для внутренних волн при произвольной стратификации океана представляет собой чрезвычайно сложную задачу. Однако на модельных примерах следствия учета нелинейных эффектов удается продемонстрировать сравнительно просто. При этом рассматриваются установившиеся волны, которые часто наблюдаются в океане вследствие характерной для внутренних волн дисперсии. В отсутствие дисперсии все волны с различными волновыми числами распространяются с одинаковой скоростью и имеют возможность длительное время взаимодействовать между собой, так что даже малые искажения вначале могут со временем значительно возрастать. Как правило, это приводит к увеличению крутизны волны и в конечном итоге к ее опрокидыванию. При наличии дисперсии фазовая скорость у волн с различными волновыми числами неодинакова, и волновой пакет в этом случае имеет тенденцию к расплыванию; вследствие этого опрокидывание волн может не происходить. Если увеличение крутизны волн при взаимодействии волн в точности компенсируется дисперсионным расплыванием, то могут существовать стационарные или установившиеся волны, т. е. волны, распространяющиеся без изменения формы. Наиболее просто исследование плоских, стационарных внутренних волн конечной амплитуды выпол-

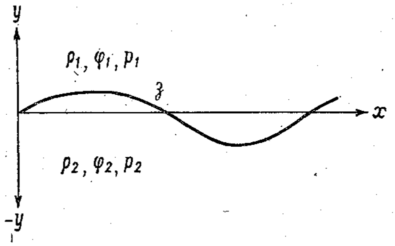


Рис. 6.8. Область, в которой моделируются волны.

няется при двухслойной стратификации, когда слои с плотностями ρ_1 и ρ_2 имеют неограниченную глубину (рис. 6.8).

В этом случае можно использовать метод Стокса, который был подробно разобран в главе 3 при исследовании поверхностных волн. Поскольку рассматривается потенциальное движение, то в обоих слоях должно выполняться уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial y^2}=0; \tag{6.56}$$

$$\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial y^2}=0, \tag{6.57}$$

где φ_1 и φ_2 — потенциалы в первом и втором слоях соответственно.

Для удовлетворения обычных граничных условий предполагается

$$x=0 \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=0; \tag{6.58}$$

$$\text{при } y\to\infty \qquad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\to 0; \tag{6.59}$$

$$\text{при } y\to-\infty \qquad \frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\to 0. \tag{6.60}$$

При этом на границе раздела должны выполняться: 1) условие равенства давления жидкости, т. е. при $y=\zeta$ $p_1=p_2$ и 2) кинематическое условие

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}; \tag{6.61}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}+\frac{\partial\zeta}{\partial y}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}. \tag{6.62}$$

Так как рассматривается потенциальное движение, давление внутри жидкости может быть вычислено из интеграла Бернулли:

$$\frac{p_1}{\rho_1}=-\zeta+\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}\right)^2\right]+f(t); \tag{6.63}$$

$$\frac{p_2}{\rho_2}=\zeta+\frac{\partial\varphi_2}{\partial t}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial y}\right)^2\right]+f(t). \tag{6.64}$$

При постановке данной задачи не делается предположение о малости скоростей в волновом движении, а также амплитуды и ее первой производной по координате x. Поэтому в выражениях (6.63) и (6.64) члены, содержащие в себе эти величины, сохранены, в отличие, например, от (3.5), где такие допущения при решении подобной задачи делались.

Интеграл уравнения Лапласа находится в виде

$$\varphi_1=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n e^{-ny}\cos nx; \tag{6.65}$$

$$\varphi_2=\sum_{n=0}^{\infty}\beta_n e^{ny}\cos nx. \tag{6.66}$$

Здесь величины α_n и β_n подлежат определению. Подстановка (6.65) и (6.66) в (6.56) и (6.57) превращает их в тождества, что означает приемлемость выбранной формы разложения.

Уравнение границы раздела также находится разложением в ряд

$$\zeta=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx. \tag{6.67}$$

Подстановка разложения (6.65), (6.66), (6.67) в условия на поверхности раздела и приравнивание к нулю членов с одинаковыми значениями n приводит к системе трансцендентных уравнений, решение которой возможно лишь на ЭВМ. Для получения аналитического решения используется представление произведения типа $e^{\lambda y}\cos\mu x$ в виде

$$e^{\lambda y}\cos\mu x=E(\lambda,\ \mu)+\sum_{s=1}^{\infty}\cos sx\,[E(\lambda,\ s-\mu)+E(\lambda,\ s+\mu)], \tag{6.68}$$

где

$$E(\lambda, s) = E(\lambda, -s) = \sum_{0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{2^n n!} S_n(s),$$

$$S_n(s) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_m S_{n-1}(s-m).$$

В уравнениях (6.65), (6.66) и (6.67) произведения типа $e^{\lambda y} \cos \mu x$ заменяются рядами (6.68). Полученные выражения подставляются в граничные условия на поверхности и приравниваются к нулю коэффициенты при одинаковых степенях n. Тогда получается система уравнений, в результате решения которой можно найти значения α_n, β_n, a_n, а следовательно, и все параметры волн. Если в (6.65)—(6.67) ограничиться первыми четырьмя членами разложения, то выражение для смещения границы двух глубоких соприкасающихся слоев с точностью до членов третьего порядка имеет вид

$$\zeta(x, t) = a_1 \cos(kx - \sigma t) + \frac{1}{2} a_1 (a_1 k) \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1} \cos 2(kx - \sigma t) +$$

$$+ \frac{1}{8} a_1 (a_1 k)^2 \frac{3\rho_1^2 - 10\rho_1\rho_2 + 3\rho_2^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} \cos 3(kx - \sigma t), \qquad (6.69)$$

где a_1 — амплитуда волны, k — волновое число, σ — частота, ρ_1, ρ_2 — плотность верхнего и нижнего слоев.

В этом случае малым параметром разложения служит наклон волны (a_1, k).

Первый член формулы (6.69) соответствует линейному решению с синусоидальным профилем волны, а члены более высоких порядков — искажению этого профиля за счет учета нелинейных эффектов.

При этом дисперсионное соотношение имеет следующий вид:

$$\sigma^2 = \frac{gk(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_2 + \rho_1} \left\{ 1 + \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (a_1 k)^2 \right\}. \qquad (6.70)$$

Из формулы (6.69) следует, что если разность плотностей мала́, то второй член правой части близок к нулю и искажение профиля волны определяется членом третьего порядка малости. В этом случае гребни и ложбины волны симметричны, но они имеют более уплощенную форму в сравнении с синусоидой. Частота для данного волнового числа увеличивается при увеличении амплитуды волны.

Подобное исследование можно выполнить для случая, когда верхний слой мелкий (kh_1 мало́), а другой — глубок. Таким распределением плотности можно моделировать реальную ситуацию, когда квазиоднородный слой имеет малую толщину, а слой скачка ярко выражен, что наблюдается в океане летом. В этом случае с точностью до членов второго порядка

$$\zeta(x,\ t)=a_1\cos(kx-\sigma t)-\frac{3}{4}a_1(a_1k)\left[(1-T_1)/T_1^2\right]\cos 2(kx-\sigma t), \tag{6.71}$$

где $T_1=\text{th}(kh_1)$ и

$$\sigma^2=\frac{gk(\rho_2-\rho_1)T_1T_2}{\rho_1T_2+\rho_2T_1}\left[1+\frac{(a_1k)^2}{8T_1}(9-22T_1+13T_1^2+4T_1^3)\right]. \tag{6.72}$$

Здесь профиль волны уже несимметричен. Гребни волн уплощены, а ложбины обострены. Такая асимметрия профиля внутренней волны при неглубоком термоклине действительно наблюдалась Ля-Фондом (рис. 6.9).

При учете нелинейности волн рассчитанные орбиты движения частиц в волне значительно усложняются. При набегании

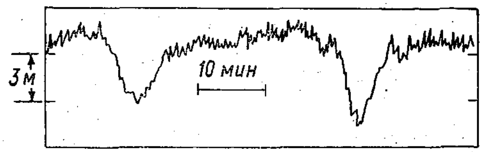


Рис. 6.9. Внутренние волны при неглубоком термоклине [5].

переднего фронта волны на неподвижную среду частицы жидкости поднимаются или опускаются и одновременно приобретают горизонтальную скорость. При прохождении заднего фронта волны жидкие частицы вернутся на свой первоначальный вертикальный уровень. Однако каждая частица сместится по горизонтали в направлении распространения волны на некоторое расстояние. Тогда орбиты движения частиц представляют собой незамкнутые вихри, которые, по-видимому, осуществляют перемешивание океана по горизонтали. Скорость возникающего таким образом горизонтального волнового течения пропорциональна $(a_1k)^2$. Причем она максимальная на границе раздела.

6.5. Вырождение внутренних волн и их взаимосвязь с термодинамической структурой океана

Затухание внутренних волн под действием молекулярной вязкости приближенно описывается законом $\exp(-\nu k^2 t)$ (где ν — коэффициент молекулярной вязкости, k — волновое число, t — время). Из приведенной формулы видно, что внутренние волны вследствие молекулярной вязкости должны затухать за время, измеряемое месяцами и годами. В реальном океане существуют более эффективные механизмы, обусловливающие диссипацию энергии внутренних волн. Внутренние волны при своем распространении могут попадать в районы с горизонтально неоднородными течениями, тогда избыточный поток импульса приводит к обмену энергией между волнами и течением. При этом амплитуды волн растут при распространении против течения и затухают при движении по течению. Анализ внутренних волн на пространственно неоднородном течении показывает, что при соответствующих условиях волновые числа и групповые скорости систем волн могут экспоненциально расти со временем, приводя, таким образом, к вырождению внутреннего волнового движения в турбулентность.

Важную роль в формировании термодинамической структуры океана играет гидродинамическая и конвективная неустойчивость внутренних волн. Гидродинамическая неустойчивость может возникать за счет сдвигов скорости орбитального движения в волне. Как показывают натурные эксперименты, этот механизм наиболее ярко проявляется в неглубоком сезонном термоклине, который характеризуется наличием тонких слоев с большими вертикальными градиентами температуры и плотности. К таким слоям, как правило, приурочены и максимальные значения вертикальных градиентов скорости основного течения. На этих прослойках возникают пакеты коротких и крутых внутренних волн (длиной до 5 м, с фазовой скоростью порядка нескольких сантиметров в секунду и периодом несколько минут). В результате взаимодействия скоростей орбитального движения и основного потока вблизи гребней и ложбин волн вертикальные градиенты результирующей скорости могут стать такими, что локальное число Ричардсона $\mathrm{Ri} = \frac{g}{\rho}\frac{d\rho}{dz}\Big/\left(\frac{du}{dz}\right)^2$ будет меньше критического.

Развивающаяся при этом сдвиговая неустойчивость Кельвина—Гельмгольца порождает турбулентность, которую принято называть волно-вихревой турбулентностью. При этом энергия турбулентности черпается примерно поровну из основного потока и коротких внутренних волн. Описанный процесс приводит к постепенному расслоению сезонного термоклина на все более и более тонкие слои, которые образуют ступенчатые структуры на вертикальных профилях океанологических характеристик. Слоистая структура, формирующаяся таким способом, имеет характерные вертикальные масштабы от 10 см до 1 м. Однако для данного механизма необходимо существование первоначальной ступенчатой структуры, обусловленной другими факторами.

Конвективная неустойчивость внутренних волн заключается в том, что, когда орбитальная скорость на вершине волны превысит ее фазовую скорость, происходит опрокидывание гребня, подобное тому, как это имеет место у поверхностных волн. В результате опрокидывания вершины волны возникает гидростатически неустойчивая температурная инверсия. Конвективное перемешивание приводит к выравниванию температуры по вертикали и формированию однородного слоя и появлению на профиле ступеньки.

В океане реализуются оба рассмотренных механизма диссипации внутренних волн, однако более распространенной является волно-вихревая турбулентность. В основной толще океанов (всюду, кроме верхнего квазиоднородного и придонного турбулентного слоев) главным образом эти механизмы обусловливают турбулентное перемешивание. Условия, при которых возникает гидродинамическая или конвективная неустойчивость, формируются в основной толще океана эпизодически и поэтому турбулентность имеет здесь перемежающийся характер.

Внутренние волны вызывают также временные (обратимые) изменения полей температуры, солености и плотности воды вследствие самого характера волнового движения. В результате неодинакового смещения частиц во внутренних волнах по вертикали на различных глубинах вертикальные градиенты температуры и солености могут увеличиваться или уменьшаться, что при анализе разового зондирования можно ошибочно принять за элементы тонкой структуры океана.

Таким образом, становится очевидной тесная взаимосвязь внутренних волн и термохалинной структуры океана. Внутренние волны, с одной стороны, являются продуктом термохалинной структуры, а с другой, сами участвуют в ее формировании.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 6

1. Иванов Ю. А., Морозов Е. Г. Исследование флуктуаций температуры на приливном и инерционных периодах. Атлантический гидрофизический полигон-70.— М.: Наука, 1974, с. 229—335.

2. Краусс В. Внутренние волны. Методы и результаты теоретической океанографии. Пер. с нем.— Л.: Гидрометеоиздат, 1968.— 272 с.

3. Миропольский Ю. З., Монин А. С. Внутренние волны.— В кн.: Океанология. Физика океана, том 2. Гидродинамика океана. М., Наука, 1978, с. 182—228.

4. Праудмэн Дж. Динамическая океанография. Пер. с англ.— М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1957.— 420 с.

5. Turner I. S. Buoyancy effects in fluids.— Cambridge, at the University Press. 1973 (русский перевод Дж. Тернер. Эффекты плавучести в жидкостях. Пер. с англ.— М.: Мир, 1977.— 427 с.)

Глава 7. ФОРМИРОВАНИЕ ПОЛЕЙ ОСНОВНЫХ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ

7.1. Основные поля гидрологических элементов

Под *полем* какого-либо океанографического элемента понимается пространственное распределение этого элемента. Как правило, оно меняется во времени и точность его представления зависит от степени осреднения. Наиболее часто в океанографических целях рассматриваются поля температуры, солености и течений. Их можно считать исходными, так как пространственное распределение плотности воды, газов, биогенных веществ, акустическое поле, даже световое поле во многом зависят от первых трех.

Во вводном курсе «Общей океанологии» в качественном плане рассматривались основные течения и вызывающие их силы, распределение температуры и солености в Мировом океане. В курсе «Физики океана» и при изучении циркуляции вод отмечалось, что изменение температуры и солености вод зависит не только от тепло- и влагообмена с внешней средой, но и от адвекции тепла и солей течениями. В значительной степени и циркуляция вод определяется бароклинными эффектами, т. е. поля температуры, солености и течений взаимосвязаны. Действительно, приток лучистой энергии, характеризуемый радиационным балансом океана, как было показано в «Общей океанологии», имеет распределение, близкое к зональному. Но уже пространственное распределение температуры поверхностного слоя Мирового океана, в значительной степени являющейся функцией радиационного баланса, в районах интенсивных меридиональных течений отличается от зонального. В большей степени нарушается зональность в распределении температуры в глубинных слоях океана, куда радиация не проникает и где роль течений и вертикальных токов возрастает.

Соленость связана с радиационным балансом не непосредственно, а только через испарение, т. е. слабее, чем температура. Поэтому влияние адвекции солей течениями и отклонение в зональности испарения проявляются в поле солености существенно.

Пространственная неоднородность распределения температуры и солености через поле плотности влияет на циркуляцию вод. Такова качественная картина взаимосвязи полей перечисленных гидрологических элементов.

В результате особенностей тепло- и влагообмена с атмосферой и литосферой, динамического воздействия атмосферы, а также вследствие внутренней взаимосвязи термохалинных полей и течения большие объемы воды приобретают специфическое пространственное распределение гидрологических, а часто и химических элементов. Приобретенные свойства оказываются довольно консервативными и присущими данному объему воды, который называют *водной массой*. По горизонтали гидрологические поля в водных массах довольно однородные. Область же раздела между ними характеризуется существенным увеличением градиентов гидрологических элементов в сравнительно узкой зоне, называемой *фронтальной*. Во многих случаях раздел между двумя водными массами может быть настолько узким, что в нем происходит практически скачок между гидрологическими полями. Такой водораздел называют *гидрологическим фронтом*. Естественно, что поля гидрологических элементов в нем могут быть практически двумерными, т. е. не имеющими толщины.

Несмотря на специфические особенности полей различных элементов, в Мировом океане прослеживается четырехслойность вертикальной стратификации, в соответствии с которой выделяется четыре типа вод: поверхностные, промежуточные, глубинные и придонные. Для каждого из типов вод свойственны специфика вертикального распределения температуры и солености, изменение этих элементов в горизонтальной плоскости, характер циркуляции, обусловленный как динамическими, так и плотностными эффектами.

Наиболее велика пространственно-временная изменчивость полей рассматриваемых элементов у поверхностных вод, поскольку они формируются под непосредственным воздействием атмосферы. Толщина слоя этих вод, как правило, ограничивается глубиной проникновения сезонных колебаний температуры — наиболее сильно меняющегося элемента, обычно не превышая 0,5 км. Из-за больших сезонных изменений в нем элементов этот слой часто называют *деятельным*. Характерным для поверхностного типа вод является наличие в полях температуры солености и плотности верхнего квазиоднородного по вертикали слоя, а также сезонного термоклина. В соответствии с общей тенденцией увеличения притока тепла от Солнца и атмосферы от высоких широт к низким изотермы в поле температуры этого слоя в Мировом океане в среднем зональны с максимумом в экваториальной зоне и минимумом в полярных широтах.

Поле солености этих вод имеет более сложный характер, и даже по средним широтным значениям зафиксированы два максимума солености в тропиках. По глубине соленость поверхностных вод в полярных и умеренных широтах в среднем увеличивается, а в тропических и экваториальных — уменьшается.

Из-за специфики атмосферной циркуляции, влияния берегов и бароклинных эффектов пространственная изменчивость поля скоростей поверхностных вод велика и представляет собой как бы систему круговоротов (рис. 7.1) со средними скоростями в некоторых течениях, превышающими 1 м/с. Особенно изменчиво поле дрейфовых течений, захватывающих, правда, сравнительно тонкий верхний слой вод.

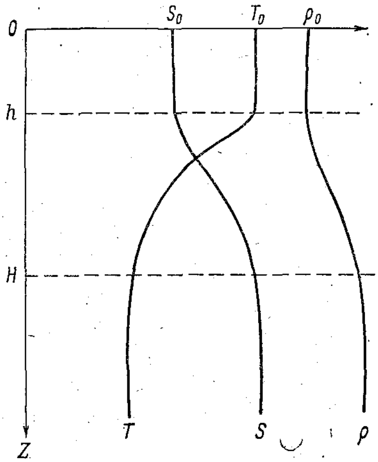


Рис. 7.1. Схема вертикальных профилей T, S, ρ в пределах сезонного термо- и галоклина.

Структура полей гидрологических элементов промежуточных вод, простирающихся до глубины 1,5—2 км, более простая вследствие того, что на них атмосфера непосредственно не влияет. Поэтому сезонные колебания полей элементов здесь практически отсутствуют. Но с глубиной изменения температуры и солености еще значительные. В пространственном отношении поля этих элементов существенно однороднее, чем в поверхностных водах, но зональность в положении изолиний еще проявляется. Системы циркуляции ослабевают по сравнению с поверхностными, и появляется тенденция распадания их на отдельные вихри.

Глубинные воды наиболее однородны и скорость их циркуляции небольшая. По вертикали температура и соленость в них практически не меняются, а по горизонтали поле температуры изменяется в пределах 3°, а поле солености — в пределах 0,5—0,6 ‰. Направление изолиний определяется крупномасштабной циркуляцией вод.

Поля гидрологических элементов придонных вод несколько сложнее, чем глубинных, хотя абсолютная изменчивость солености и потенциальной температуры уменьшается. Их циркуляция, в которой проявляется меридиональный характер, очень сильно зависит от рельефа дна. Со времени проведения глубоководных измерений временной изменчивости полей элементов придонных вод не отмечено.

Описанный общий характер изменчивости полей гидрологических элементов и их практическое использование приводят к необходимости сосредоточивать внимание исследователей в первую очередь к поверхностным водам. Это уже дало определенные достижения в разработке теории циркуляции поверхностных вод, о чем говорилось выше, в разработке теории термохалинной структуры вод и взаимосвязи полей этих элементов. Хотя формально поля перечисленных элементов и их пространственно-временна́я изменчивость могут быть описаны общей системой уравнений, приведенных во введении, однако решение их в полном виде пока нам не под силу как из-за неизвестности некоторых параметров, так и из-за математических трудностей. Поэтому большое внимание уделяется изучению отдельных сторон формирования гидрологических полей, особенно их вертикальной структуры, поскольку в этом направлении наиболее велика изменчивость гидрологических элементов из-за обмена энергией океана с окружающей средой.

7.2. Влияние конвекции на верхний слой океана

При повышении плотности поверхностного слоя воды за счет понижения температуры или повышения солености по отношению к подстилающим слоям воды возникает неустойчивая стратификация плотности. Возникающие при этом архимедовы силы плавучести вызывают специфическую циркуляцию, которая стремится возвратить воду к устойчивой стратификации. Такая форма циркуляции называется *свободной конвекцией*. Она чрезвычайно сильно влияет на вертикальную структуру термохалинных полей.

Впервые эту конвекцию в лабораторных условиях исследовал Бенар, установивший, что в равномерно подогреваемом снизу тонком слое жидкости возникает ячеистая циркуляция: менее плотная нагретая жидкость поднимается в центральной части ячейки, а на ее периферии возникают нисходящие движения. Последующие эксперименты [14] подтвердили ячеистую структуру циркуляции и в том случае, когда неустойчивая стратификация возникает за счет охлаждения слоя жидкости сверху, но при этом в центре ячейки происходит нисходящее движение, а по ее периферии — восходящее. С увеличением толщины слоя конвекции и перепада температур возрастает роль турбулентных флюктуаций, в результате правильность форм ячеек и регулярность их пространственного расположения нарушаются вплоть до полной замены ячеек беспорядочной совокупностью нестационарных восходящих и нисходящих струй. Горизонтальное движение их искривляет, часто приводя к системе горизонтальных вихревых трубок, каждая пара которых вращается в разные стороны.

В естественных условиях океана исследований конвективной циркуляции на уровне лабораторных экспериментов не проводилось. Только по наблюдениям облачности в атмосфере было сделано заключение, что в крупных естественных процессах конвекция часто обладает весьма регулярным характером, хотя форму и расположение конвективных элементов не удается предвычислить.

Впервые условие возникновения термической конвекции обосновал Рэлей. Полученный им числовой критерий начала этого процесса впоследствии назвали его именем. Физический смысл числа Рэлея легко получить из простой механистической модели конвекции [14]. Суть ее сводится к тому, что в слое покоящейся жидкости толщиной h при перепаде температур на ее границах ΔT отклонение плотности ρ' от средней ρ возникает в локализованных пузырьках с характерным размером r. В установившемся состоянии архимедова сила пузырька $g\rho' r^3$ уравновешивается стоксовой силой сопротивления движению $\varkappa_V \rho w r$. Поэтому уравнение баланса сил для рассматриваемого процесса имеет вид

$$g\rho' r^3 = \varkappa_V \rho w r. \tag{7.1}$$

Вследствие диффузии тепла разность плотностей по мере движения пузырька жидкости убывает со скоростью

$$\frac{d\rho'}{dt} \approx -\frac{\varkappa_T \rho'}{r^2}, \tag{7.2}$$

т. е.

$$\rho'(t) \approx \rho_0' e^{-\frac{\varkappa_T t}{r^2}}, \tag{7.3}$$

где $\varkappa_T$ — коэффициент молекулярной температуропроводности.

В таком случае скорость движения конвективного пузырька определится из формулы (7.1) после подстановки в нее выражения (7.3):

$$w = \frac{g r^2 \rho_0'}{\varkappa_V \rho} e^{-\frac{\varkappa_T t}{r^2}}. \tag{7.4}$$

Поскольку $w = dz/dt$, то интегрирование формулы (7.4) по времени от 0 до ∞ позволяет определить полное расстояние, проходимое пузырьком жидкости до выравнивания ее плотности с окружающей средой:

$$z = \frac{g r^4}{\varkappa_V \varkappa_T} \frac{\rho_0'}{\rho}. \tag{7.5}$$

Наиболее благоприятны условия для развития конвекции во всем слое жидкости ($z = nh \geqslant h$) тогда, когда пузырьки большие и r имеет порядок h. В этом случае формула (7.5) переписывается в виде

$$n = \frac{gh^3}{\varkappa_V \varkappa_T} \frac{\rho_0'}{\rho}. \tag{7.6}$$

Параметр n называется числом Рэлея ($\mathrm{Ra} \equiv n$). При линейной зависимости плотности жидкости от температуры разность плотностей среды и пузырька в начале его движения ρ_0' пропорциональна перепаду температур в слое и коэффициенту термического расширения k_T

$$\frac{\rho_0'}{\rho} = k_T \, \Delta T.$$

С учетом этого соотношения выражение для числа Ra принимает вид

$$\mathrm{Ra} = \frac{gh^3 k_T \Delta T}{\varkappa_V \varkappa_T} \tag{7.7}$$

и характеризует соотношение между силой плавучести, силой сопротивления движению и диффузией тепла.

Рэлей показал на основе решения идеализированной задачи об устойчивости жидкости к малым возмущениям ее плотности, что возмущения не затухают, начиная с $\mathrm{Ra}_{\text{кр}} = 657$, которое было названо критическим.

Для океана критическое значение $\mathrm{Ra}_{\text{кр}}$ может отличаться от приведенного, так как нарушение устойчивости зависит от масштаба возмущений, условий на границах слоя с неустойчивой стратификацией, размеров конвективных ячеек и т. д.

Принципиально, для описания конвекции после ее начала необходимо в проекцию уравнения движения на вертикальную координатную ось ввести архимедову силу, в результате чего осредненная вертикальная скорость определяется выражением

$$\frac{dw}{dt} = g - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial z} + 2u\omega \cos\varphi + \frac{g\overline{\rho' w'}}{\rho} + \varkappa_V \nabla^2 w -$$
$$- \left(\frac{\partial}{\partial x} \overline{u'w'} + \frac{\partial}{\partial y} \overline{v'w'} + \frac{\partial}{\partial z} \overline{w'w'} \right). \tag{7.8}$$

Естественно, что условие гидростатики при этой форме движения не выполняется. Но остальные уравнения могут быть оставлены в приближении Буссинеска.

Уравнение (7.8) очень сложно для непосредственного вычисления вертикальной скорости, даже при известных значениях остальных элементов. Дополнительные трудности теоретического исследования этого процесса возникают из-за зависимости стратификации плотности от солености. Для оценки ее влияния на возникновение конвекции вводится аналог числа Ra для солености

$$\mathrm{Rs} = \frac{gh^3 k_S \Delta S}{\varkappa_V \varkappa_S}. \quad (7.9)$$

Трудности решения полной системы уравнений, описывающих конвекцию, привели к наибольшей исследованности решений линеаризированных уравнений без адвекции и турбулентности с линейной зависимостью плотности воды от температуры и солености:

$$\rho = \rho_0 - \varepsilon_T T + \varepsilon_S S.$$

Решение такой линеаризированной системы уравнений в двумерном пространстве для функции тока ψ, температуры и солености представляется выражениями [14]

$$\psi \sim e^{pt} \sin(\pi a x) \cdot \sin(\pi m z);$$
$$T,\ S \sim e^{pt} \cos(\pi a x) \cdot \sin(\pi m z), \quad (7.10)$$

где πa и πm — горизонтальные и вертикальные волновые числа; p — комплексное число, характеризующее скорость роста возмущений и периодичность конвекции.

При рассмотрении конвекции в верхнем слое океана такой простой картины не получится из-за действия многих факторов, не учтенных в линейных уравнениях. Поэтому при практических расчетах глубины проникновения конвективного перемешивания, определении температуры и солености в слое конвекции применяется интегральный метод. Он использует тот отмеченный наблюдателями факт, что в слое конвективного перемешивания отсутствуют сколь-нибудь существенные вертикальные градиенты температуры и солености, т. е. он квазиоднороден в этом направлении. Кроме того, вертикальное конвективное перемешивание происходит гораздо быстрее, чем изменение плотности воды в слое конвекции. Поэтому, как правило, изменение во времени глубины проникновения конвекции синхронно со скоростью возрастания плотности воды.

Впервые схему вычисления глубины распространения конвекции в арктических морях, температуры и солености перемешанных вод предложил Н. Н. Зубов. Он исходил из того, что конвекция возникает всегда при неустойчивой плотностной стратификации моря. Обычно это выполняется в природных условиях из-за довольно интенсивной турбулентности верхнего слоя моря, разрушающей неустойчивое состояние.

В процессе конвекции наиболее ярко проявляется взаимосвязь термохалинного поля с динамическими явлениями, выраженными через глубину проникновения конвективного перемешивания h, которая зависит только от профиля потенциальной плотности ρ_V. В слое конвекции она неизменна по вертикали, а глубже начинает возрастать (рис. 7.1). Это обстоятельство позволяет находить h из условия

$$\left.\frac{\partial \rho_{\nu}}{\partial z}\right|_{z \leqslant h}=0. \tag{7.11}$$

Сама плотность морской воды в верхнем слое океана меняется в зависимости от изменений температуры и солености, которые описываются уравнениями балансов тепла и солей:

$$\int_0^h c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dz=\Phi_0-\Phi_h+\Phi_a; \tag{7.12}$$

$$\int_0^h \rho \frac{\partial S}{\partial t} dz=\varphi_0-\varphi_h+\varphi_a, \tag{7.13}$$

где Φ и φ — потоки тепла и солей соответственно у поверхности океана, на глубине h и в результате горизонтальной адвекции.

При известных потоках тепла и солей Φ и φ перечисленные уравнения совместно с уравнением состояния полностью определяют температуру, соленость, плотность воды в слое конвективного перемешивания и его толщину. При решении этой системы уравнений обычно избавляются от дифференциалов, интегрируя уравнения (7.12) и (7.13) по времени в пределах от t_j до t_{j+1}, считая, что на t_j момент времени все гидрологические элементы (T_j, S_j, h_j, ρ_j) известны:

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_0^{h_j} \frac{\partial T}{\partial t} dz+\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{h_j}^{h_{j+1}} \frac{\partial T}{\partial t} dz=\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\Phi_0-\Phi_h+\Phi_a}{c\rho} dt \equiv \psi_T; \tag{7.14}$$

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_0^{h_j} \frac{\partial S}{\partial t} dz+\int_{t_j}^{t_{j+1}}\int_{h_j}^{h_{j+1}} \frac{\partial S}{\partial t} dz=\int_{t_j}^{t_{j+1}} \frac{\varphi_0-\varphi_h+\varphi_a}{\rho} dt \equiv \psi_S. \tag{7.15}$$

В первых левых членах выражений (7.14) и (7.15) температура и соленость по глубине не меняются и интегралы легко вычисляются. При сравнительно небольших интервалах времени изменение $T(z)$ и $S(z)$ в пределах глубины $\Delta h=h_{j+1}-h_j$ можно аппроксимировать линейной функцией:

$$T(z)=T_j+\Gamma_T(z-h_j); \tag{7.16}$$

$$S(z)=S_j+\Gamma_S(z-h_j). \tag{7.17}$$

Это позволяет вычислить интегралы вторых слагаемых выражений (7.14) и (7.15) и получить формулы

$$T_{j+1}=T_j+\frac{\Gamma_T}{2}\left(h_{j+1}-2h_j+\frac{h_j^2}{h_{j+1}}\right)+\frac{\psi_T}{h_{j+1}}; \tag{7.18}$$

$$S_{j+1}=S_j+\frac{\Gamma_S}{2}\left(h_{j+1}-2h_j+\frac{h_j^2}{h_{j+1}}\right)+\frac{\psi_S}{h_{j+1}}. \tag{7.19}$$

Значение градиента плотности на нижней границе слоя конвективного перемешивания (7.11) можно трактовать таким образом, что плотность в слое конвекции в момент времени t_{j+1} $\rho(t_{j+1})$ должна равняться плотности на уровне h_{j+1}, т. е. $\rho(h_{j+1})$. При линеаризированном представлении уравнения состояния $\rho=\rho_0-\varepsilon_T T+\varepsilon_S S$ в соответствии с формулами (7.16) и (7.17) это приводит к выражению

$$\varepsilon_S S_{j+1}-\varepsilon_T T_{j+1}=\varepsilon_S\left[S_j+\Gamma_S(h_{j+1}-h_j)\right]-\\-\varepsilon_T\left[T_j+\Gamma_T(h_{j+1}-h_j)\right]. \tag{7.20}$$

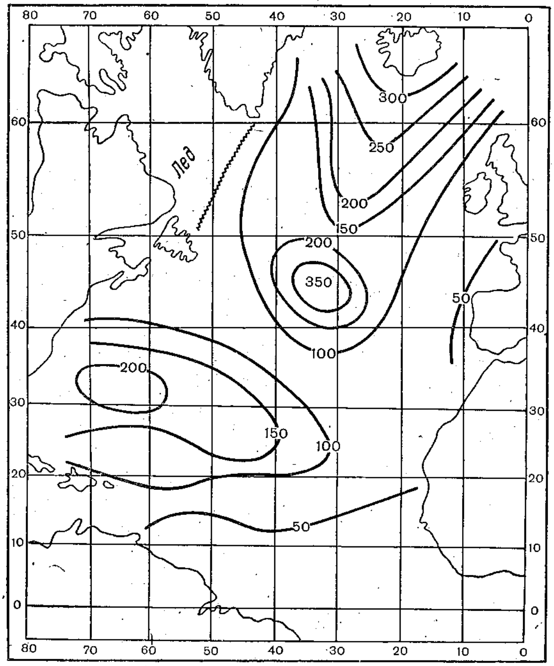


Рис. 7.2. Глубина распространения конвекции (январь).

Из формул (7.18), (7.19) и (7.20) следует

$$h_{j+1}=\sqrt{h_j^2+\frac{2\left(\varepsilon_S\psi_S-\varepsilon_T\psi_T\right)}{\varepsilon_S\Gamma_S-\varepsilon_T\Gamma_T}}. \tag{7.21}$$

Подстановка полученной формулы в выражения (7.18) и (7.19) позволяет определить температуру и соленость в слое конвекции.

Таким образом, глубина распространения конвективного перемешивания зависит от отношения потоков тепла и солей, поступающих в слой конвекции, к градиентам температуры и солей в нижележащих слоях воды. Приток солей в слой конвекции, если он не сопровождается одновременным ростом градиента солености Γ_S, приводит к возрастанию плотности и более глубокому распространению конвекции. К такому же эффекту приводит отток тепла или адвекция холода. Причем положительный градиент температуры, т. е. ее рост с глубиной, будет уменьшать устойчивость плотностной стратификации и способствовать распространению конвекции вглубь. Результат влияния описанных потоков тепла и солей на толщину слоя конвективного перемешивания виден из рис. 7.2. В районах с большим количеством осадков и стока речных вод, что равносильно оттоку солей, происходит уменьшение плотности поверхностных вод и конвективное перемешивание затруднено, поэтому толщина верхнего квазиоднородного слоя оказывается уменьшенной. В районах же адвекции соленых вод h возрастает. Особенно сильно развивается конвективное перемешивание в открытых морях субполярной зоны, как, например, в Норвежском, Гренландском, Баренцевом морях, куда поступает мало пресных вод и за осенне-зимний период происходит большой отток тепла. В них конвекция распространяется до глубин в несколько сот метров.

7.3. Формирование термохалинной структуры деятельного слоя океана

Квазиоднородный поверхностный слой существует и в теплый период года, но толщина его меньше, чем зимой (рис. 7.3). Механизм образования этого слоя до конца еще не выяснен, но несомненно, что большую роль в формировании вертикальной однородности играет перемешивание, вызванное дрейфовым течением и волнением. Для описания турбулентного перемешивания обычно используется уравнение баланса энергии турбулентности, которое для процессов продолжительностью более нескольких суток записывается в квазистационарном приближении:

$$K_V\left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2+\left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right]-\frac{g}{\rho^2}\left(\varepsilon_T\frac{\Phi}{c}-\varepsilon_S\varphi\right)+$$
$$+\alpha_э\frac{d}{dz}\left[K_V\frac{d}{dz}\left(\frac{K_V^2}{l^2}\right)\right]=C_э\frac{K_V^3}{l^4}. \qquad (7.22)$$

Это уравнение было достаточно детально рассмотрено в курсе «Физика океана». Первый его член описывает генерацию энергии турбулентности за счет кинетической энергии основного потока. Второй член характеризует влияние архимедовых сил на турбулентное перемешивание. При получении этого слагаемого использовалось линеаризированное уравнение

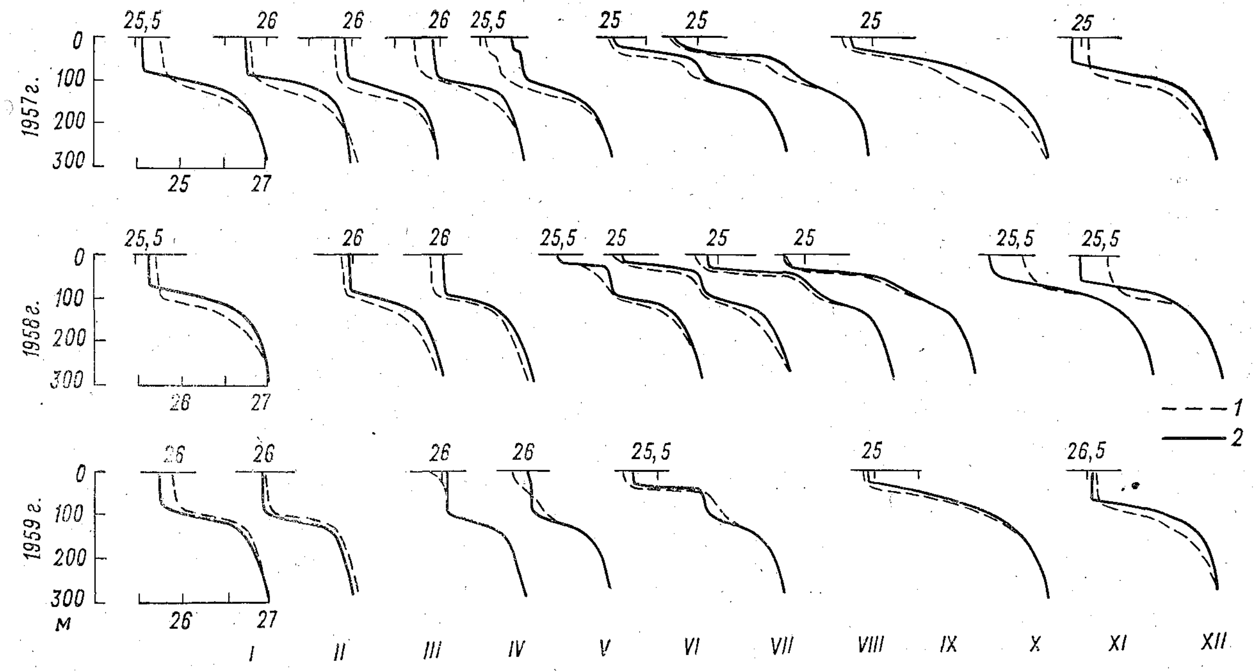


Рис. 7.3. Условная плотность (г/см^3) деятельного слоя океана по данным «Papa» (50° с. ш., 145° з. д.) [5].

1 — средние месячные по наблюдениям, *2* — рассчитанные на начало каждого месяца.

состояния морской воды с $\varepsilon_T = 7 \cdot 10^{-5}$ г/(см³·К) и $\varepsilon_S = 8 \times 10^{-4}$ г/(см³·‰), позволившее поток массы выразить через потоки тепла Φ и солей φ. Третий член описывает диффузию турбулентности, генерируемую волнением, вглубь. Здесь использовано известное соотношение А. Н. Колмогорова о связи между энергией турбулентности $Э$, ее масштабом l и коэффициентом турбулентности K $(Э = K^2/l^2)$.

Правая часть уравнения (7.22) содержит выражение, характеризующее диссипацию энергии турбулентности в тепло, и экспериментальный параметр $C_Э = 0{,}046$.

Поскольку в верхнем слое океана наибольшие значения вертикальных градиентов скоростей, входящих в первый член уравнения (7.22), имеют место в пределах экмановского слоя, то они обычно определяются из уравнений

$$\frac{d}{dz}\left(K_V \frac{du}{dz}\right) = -2\omega_z v;$$

$$\frac{d}{dz}\left(K_V \frac{dU}{dz}\right) = 2\omega_z u. \tag{7.23}$$

Турбулентные потоки тепла и солей, влияющие на плотностную стратификацию океана, а тем самым и на интенсивность турбулентности, описываются соответствующими уравнениями диффузии этих элементов.

Наиболее сложной проблемой в оценке генерации энергии турбулентности остается определение ее масштаба l. В настоящее время нет еще достаточного экспериментального материала, свидетельствующего о его значении, изменении с глубиной, зависимости от определяющих факторов. Поэтому при решении уравнения (7.22) обычно используются различные гипотезы о масштабе турбулентности.

Система уравнений (7.22)—(7.23) при различных предложениях относительно K и l решалась многими учеными, исследовавшими строение пограничных слоев атмосферы и океана. Однако в этих решениях больше внимания уделялось профилю течения и не удавалось получить достаточно качественное представление о квазиоднородном слое, термоклине и галоклине. Лишь в середине 70-х годов Г. И. Марчук и его коллеги [10] с помощью дополнительного выражения для диссипации энергии турбулентности численно решили систему уравнений и проследили динамику развития однородного слоя океана. Однако интенсивность обмена энергией через термоклин пока еще остается внешним параметром, относительно которого приходится строить различные гипотезы и в зависимости от них получать тот или иной результат. Поэтому описание процессов, формирующих структуру деятельного слоя океана, с помощью лишь одних дифференциальных уравнений пока еще не получило широкого практического применения.

Трудность определения интенсивности турбулентного перемешивания и обусловленных ею вертикальных профилей температуры, солености и скорости течения заставляет пользоваться результатами наблюдений, свидетельствующими о наличии однородности в распределении температуры и солености. Толщина такого слоя интенсивного динамического перемешивания определяется соотношением основных членов уравнения баланса энергии турбулентности, проинтегрированного в пределах квазиоднородного слоя h. Общий поток кинетической энергии G_V, переходящий в турбулентную энергию от течения, определяется из уравнений (7.23), если первое из них умножить на u, второе — на v и просуммировать, а результат проинтегрировать по z в пределах от 0 до h:

$$G_V \equiv \int_0^h K_V \left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dz}\right)^2\right] dz = u_0 u_{*0}^2 + v_0 v_{*0}^2 - u_h u_{*h}^2 - v_h v_{*h}^2. \tag{7.24}$$

Первые два члена этого выражения, состоящие из произведения скорости поверхностного течения на квадрат динамической скорости по соответствующей оси, характеризуют приток энергии в квазиоднородный слой. Аналогичные два последних члена характеризуют отток части поступившей энергии в более глубокие слои. Если квазиоднородный слой толще экмановского, то последние два члена равны нулю.

Приток турбулентной энергии в квазиоднородный слой, обусловленный волнением, равен интегралу от последнего члена левой части выражения (7.22). Поскольку разрушение волн и генерация турбулентности происходят на поверхности океана, а на нижней границе квазиоднородного слоя, толщиной более десятка метров, ветровые волны уже не влияют на турбулентность, то принято динамическое влияние этих волн учитывать только через поверхностный поток

$$G_\omega = \alpha_э K_V \frac{d}{dz}\left(\frac{K_V^2}{l^2}\right). \tag{7.25}$$

Как уже отмечалось выше, в настоящее время пока нет надежных методов определения коэффициента турбулентности и ее масштаба. Поэтому связь диффузионного потока G_ω со средними значениями элементов осуществляется при использовании различных гипотез. В большинстве случаев его предполагают пропорциональным энергии ветра, передаваемой волнам $Э_\omega$. По экспериментальным данным последняя приближенно представляется формулой

$$Э_\omega \approx \rho_a U_a^3 \frac{g S_\omega \sqrt{C_d}}{2\pi^3} \omega_б^3 \sigma_б^2, \tag{7.26}$$

где S_ω — спектр волнения; $\omega_б = \omega_* \sqrt{\tau}/g\sqrt{\rho}$ — безразмерная частота максимума в спектре волн с частотой ω_*; $\sigma_б = g\sigma\rho/\tau$ — безразмерное значение дисперсии σ.

Однако значительная доля притока энергии расходуется на поддержание волнения. В турбулентную энергию переходит только та часть ее притока, которая высвобождается при опрокидывании волн, при разрушении капиллярных волн, в результате действия вязкости жидкости, нарушающей потенциальность волн, и т. д. Пока еще надлежащей оценки этих процессов не имеется и чаще всего полагается, что в зависимости от характера волнения в турбулентность переходит бо́льшая или меньшая доля от общего потока энергии (7.26). Только при установившемся волнении поток энергии от ветра через кинетическую и потенциальную энергию волн переходит в конечном итоге в энергию турбулентности. По-видимому, в этом случае можно полагать G_ω той долей $Э_\omega/\rho$, которая соответствует энергии волн на поверхности океана от полной энергии всего слоя, охваченного волнением.

Несмотря на сравнительную простоту записи, диссипация энергии турбулентности определяется столь же трудно, как и диффузия, так как содержит те же мало еще изученные параметры турбулентности, как l и K_V. Поэтому для оценки этого слагаемого уравнения баланса энергии турбулентности используются различные зависимости диссипации от притока энергии, базирующиеся на различных гипотезах. До сих пор наиболее часто принимается, что интегральная диссипация энергии турбулентности

$$G_d = \int_0^h C_Э \frac{K_V^3}{l^4} dz \tag{7.27}$$

составляет некоторую часть от продукции турбулентности. Интегральная продукция турбулентности на основании формул (7.24) и (7.26) пропорциональна кубу модуля динамической скорости V_*. Поэтому часто используется выражение

$$G_d = \rho V_*^3 \delta. \tag{7.28}$$

В первых исследованиях δ полагалось постоянным, меняющимся у различных авторов от 0,2 до 0,99. В последнее время установлено, что δ зависит как от скорости поступления энергии турбулентности, так и от стратификации плотности. Эти результаты получены на основании обработки экспериментального материала и некоторых дополнительных соображений и поэтому у разных исследователей эти зависимости δ от определяющих факторов различные. Например, на основе теории размерностей масштаб толщины экмановского пограничного слоя $L_э = V_*/(2\omega_z)$ характеризует глубину распространения фрикционных сил, а масштаб $L_\rho = -\rho V_*^3/(g\Phi_\rho)$, зависящий от потока массы Φ_ρ, характеризует относительный вклад архимедовых сил. Из этих двух параметров и h Ю. Д. Реснянский [11] составил

$$\delta = a\frac{h}{L_э}\left(1+b\left|\frac{L_э}{L_\rho}\right|\right), \tag{7.29}$$

где безразмерные параметры a и b определены на основе экспериментальных данных: $a=25$, $b=1{,}4\cdot10^{-2}$.

Интегральное влияние архимедовых сил на турбулентное перемешивание в квазиоднородном слое океана описывается членом

$$G_A = -\frac{g}{\rho^2}\int_0^h\left(\frac{\varepsilon_T}{c}\Phi - \varepsilon_S\varphi\right)dz. \tag{7.30}$$

Поскольку абсолютные изменения плотности воды невелики, то она как множитель выносится из-под знака интеграла. Потоки тепла и солей в подынтегральном выражении находятся из уравнений диффузии тепла и солей, если их по аналогии с уравнениями (7.12) и (7.13) проинтегрировать от поверхности океана до глубины $z \leqslant h$ и при этом учесть неизменность по вертикали в квазиоднородном слое температуры и солености

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_a - c\rho\frac{\partial T_0}{\partial t}z;$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_a - \rho\frac{\partial S_0}{\partial t}z. \tag{7.31}$$

Скорость изменения температуры и солености всего квазиоднородного слоя такова же, как и его части. Поэтому после интегрирования уравнений (7.12) и (7.13) и исключения с помощью полученных выражений температуры и солености в формулах (7.31) получаются значения потоков тепла и солей в квазиоднородном слое:

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_a - \frac{z}{h}(\Phi_0 - \Phi_h + \Phi_a);$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_a - \frac{z}{h}(\varphi_0 - \varphi_h + \varphi_a). \tag{7.32}$$

Постановка полученных потоков тепла и солей в подынтегральное выражение (7.30) позволяет вычислить интеграл и определить G_A, который при неизменной по вертикали в квазиоднородном слое адвекции тепла и солей будет

$$G_A = \frac{gh}{2\rho^2}\left[\varepsilon_S(\varphi_0 + \varphi_h + \varphi_a) - \frac{\varepsilon_T}{c}(\Phi_0 + \Phi_h + \Phi_a)\right]. \tag{7.33}$$

При изложенной трактовке составляющих уравнения баланса энергии турбулентности квазиоднородного слоя его толщина входит в явном виде только в член с архимедовыми силами, и поэтому подстановка всех проанализированных слагаемых в проинтегрированное по всей толщине слоя h уравнение (7.22) позволяет получить выражение для определения h

$$h = \frac{2\rho^2}{g} \frac{G_V + G_\omega - G_d}{\left[\frac{\varepsilon_T}{c}(\Phi_0 + \Phi_h + \Phi_a) - \varepsilon_S(\varphi_0 + \varphi_h + \varphi_a)\right]}. \tag{7.34}$$

Полученная формула наглядно представляет влияние динамических и термохалинных факторов на толщину квазиоднородного слоя. Она будет тем больше, чем больше энергии от ветра через течения и волнения переходит в турбулентность и меньше ее диссипирует в тепло.

Любой приток тепла в слой перемешивания уменьшает плотность воды этого слоя и затрудняет рост его толщины. Приток солей в квазиоднородный слой вызывает в нем рост плотности воды и способствует увеличению h.

При известных потоках тепла и солей температура и соленость квазиоднородного слоя находятся из уравнений (7.31), если в них положить $z = h$ и проинтегрировать по времени от t_j до t_{j+1}. Это приведет к формулам (7.18) и (7.19). При их использовании в данном случае вторые члены правых частей принимаются во внимание только при $h_{j+1} > h_j$, так как только при заглублении квазиоднородного слоя происходит захват подстилающих вод с соответствующим запасом тепла и солей, влияющих на температуру и соленость перемешанного слоя. В случае уменьшения h такого процесса не происходит и второй член формул (7.18) и (7.19) во внимание не принимается.

Практическое применение изложенных методов расчета элементов квазиоднородного слоя океана затрудняется трудностью определения потоков тепла и солей через его нижнюю границу, трудностью определения адвекции тепла и солей, трудностью определения упорядоченных вертикальных токов, которые также влияют на толщину перемешанного слоя, профили температуры и солености в пикноклине.

Чтобы в какой-то степени описать сезонный термоклин, используется то обстоятельство, что в нем вертикальный профиль температуры более или менее универсальный и не зависит от времени. С. А. Китайгородский [3] предложил представлять его в безразмерном виде:

$$\frac{T_0 - T}{T_0 - T_H} = \vartheta(\zeta), \quad \frac{z - h}{H - h} = \zeta, \tag{7.35}$$

и описывать полиномом четвертой степени.

В этих переменных термоклин распространяется по глубине от $\zeta = 0$ до $\zeta = 1$. В таких же пределах меняется безразмерная температура.

Аналогичные переменные и аппроксимация применимы для описания профиля солености в галоклине [12].

Потоки тепла и солей определяются из уравнений балансов тепла и солей, полученных интегрированием уравнений диффузии тепла и солей в пределах от h до нижней границы термоклина H. По аналогии с формулами (7.12) и (7.13) эти уравнения имеют вид

$$\int\limits_h^H c\rho \frac{\partial T}{\partial t} dz = c\rho \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_h^H T\, dz - c\rho T_H \frac{\partial H}{\partial t} + c\rho T_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \Phi_h - \Phi_H + \widetilde{\Phi}_a;$$

$$\int\limits_h^H \rho \frac{\partial S}{\partial t} dz = \rho \frac{\partial}{\partial t} \int\limits_h^H S\, dz - \rho S_H \frac{\partial H}{\partial t} + \rho S_0 \frac{\partial h}{\partial t} = \varphi_h - \varphi_H + \widetilde{\varphi}_a. \quad (7.36)$$

Первые члены левых частей уравнений (7.36) характеризуют изменение тепло- и солесодержания в пикноклине переменной толщины, а вторые и третьи слагаемые определяют изменение тепла и содержания солей в этом слое в результате изменения его толщины снизу и сверху. В правой части уравнений (7.36) содержатся слагаемые, характеризующие потоки тепла и солей соответственно на верхней и нижней границах, а также адвективный.

Подстановка безразмерных температуры и аналогичной солености в подынтегральные выражения уравнений (7.36) приводит их к виду

$$J_T \equiv \int\limits_h^H T\, dz = (H - h)\,[T_0 (1 + \delta_T) + \delta_T T_H];$$

$$J_S \equiv \int\limits_h^H S\, dz = (H - h)\,[S_0 (1 + \delta_S) + \delta_S S_H], \quad (7.37)$$

где $\delta_T \equiv \int\limits_0^1 \vartheta(\zeta)\, d\zeta$, $\delta_S \equiv \int\limits_0^1 \frac{S_0 - S}{S_0 - S_H}\, d\zeta.$

Замена интегралов полученными выражениями сводит уравнения балансов тепла и солей к двум дифференциальным уравнениям:

$$(H - h)\left[(1 - \delta_T) \frac{\partial T_0}{dt} + \delta_T \frac{\partial T_H}{\partial t}\right] + (1 - \delta_T)(T_0 - T_H) \frac{\partial H}{\partial t} +$$
$$+ \delta_T (T_0 - T_H) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\Phi_h - \Phi_H + \widetilde{\Phi}_a}{c\rho}; \quad (7.38)$$

$$(H - h)\left[(1 - \delta_S) \frac{\partial S_0}{\partial t} + \delta_S \frac{\partial S_H}{\partial t}\right] + (1 - \delta_S)(S_0 - S_H) \frac{\partial H}{\partial t} +$$
$$+ \delta_S (S_0 - S_H) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\varphi_h - \varphi_H + \widetilde{\varphi}_a}{\rho}. \quad (7.39)$$

Обычно температура и соленость за пределами сезонного пикноклина меняются слабо, и поэтому производные по времени от них обычно во внимание не принимаются. По этой же причине слабо меняются во времени потоки тепла и солей у нижней границы пикноклина. Они обычно принимаются пропорциональными градиентам этих элементов под пикноклином и коэффициентам турбулентности. Последние также чаще всего оказываются постоянными во времени и поэтому в качестве потоков Φ_H и φ_H могут использоваться их климатические значения.

Если положение нижней границы пикноклина H известно, то уравнения (7.38) и (7.39) позволяют выразить потоки тепла и солей на нижней границе квазиоднородного слоя в виде функции от его элементов, а также от профиля температуры и солености в пикноклине. Однако H меняется в не меньшей, а часто и в большей степени, чем h. К сожалению, пока еще процессы, приводящие к изменению положения нижней границы пиноклина, в надлежащей степени не изучены. С качественной стороны известно, что весной в период формирования пикноклина он сравнительно тонок и расположен недалеко от поверхности океана. Поэтому в этот период года h и H малы́. Затем толщина квазиоднородного слоя увеличивается, особенно сильно при возникновении конвективного перемешивания, и h возрастает. Диффузия тепла и солей из термоклина и галоклина вниз приводит к их размыванию. Эти слои, а соответственно и образуемый ими пикноклин становятся толще и H увеличивается. Несомненно, что большую роль в формировании пикноклина должны играть вертикальные движения воды.

Трудности математического описания данного явления не позволили пока разработать надежную математическую модель пикноклина, хотя отдельные попытки количественных оценок H в зависимости от внешних факторов имеются. Так, например, В. М. Каменкович и Б. В. Харьков предложили использовать для определения H как нижней границы термоклина уравнение теплопроводности с адвективным членом вида $\frac{1}{c\rho}\frac{\partial \Phi_a}{\partial z} = \delta(\tilde{T} - T)$, умноженное на $(z-h)$ и проинтегрированное по z в пределах от h до H:

$$\int_h^H (z-h)\frac{\partial T}{\partial t}dz = -\frac{1}{c\rho}\int_h^H \frac{\partial \Phi}{\partial z}(z-h)\,dz -$$

$$-\delta\int_h^H \left(T-\tilde{T}\right)(z-h)\,dz. \qquad (7.40)$$

Интегрирование дает

$$\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{1}{(1-2\beta)(T_0-T_H)}\left\{[T_0-2\beta(T_0-T_H)]\frac{\partial h}{\partial t}-\right.$$

$$-\left(\frac{1}{2}-\beta\right)(H-h)\frac{\partial T_0}{\partial t}-\beta(H-h)\frac{\partial T_H}{\partial t}-\frac{\Phi_H}{c\rho}+$$

$$\left.+\frac{1}{c\rho(H-h)}\int\limits_h^H \Phi\, dz-\delta(H-h)\left[\frac{1}{2}\left(T_0-\tilde{T}\right)-\beta(T_0-T_H)\right]\right\}, \qquad (7.41)$$

где $\beta\equiv\int\limits_0^1 \zeta\Phi(\zeta)\,d\zeta.$

В принципе полученное выражение совместно с перечисленными (7.38) и (7.34) или (7.21) и (7.18) составляет систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных: T_0, h, Φ_h и H. Однако в данном случае H представляет собой нижнюю границу термоклина, а не пикноклина, хотя из-за слабой изменчивости солености на такой глубине граница термоклина должна определять и границу пикноклина. Не представляет труда получить выражение для определения непосредственно

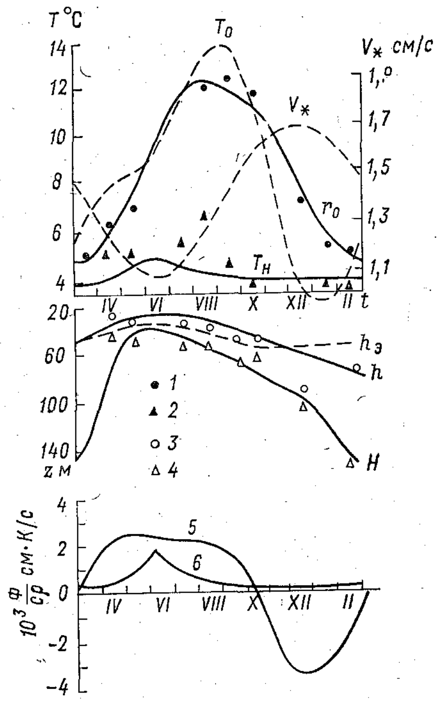


Рис. 7.4. Толщина и температура квазиоднородного слоя и термоклина для района судна погоды «Рара» в 1959 г. [3].

T_a — температура воздуха, V_* — динамическая скорость, 1—4 — наблюденные значения T_a, T_H, h и H соответственно; 5 — $\Phi_0/c\rho$, 6 — $10\,\Phi_H/c\rho$.

глубины пикноклина H на основе линеаризированного уравнения состояния

$$\rho=\rho_0-\varepsilon_T T+\varepsilon_S S. \qquad (7.42)$$

Для этого достаточно уравнение (7.40) умножить на $-\varepsilon_T$, аналогичное уравнение диффузии солей умножить на ε_S. Тогда их сумма будет представлять собой уравнение диффузии плотности, содержащее в правой части слагаемые, зависящие от потока тепла и солей. Решение этого уравнения приведет к выражению, аналогичному (7.41), которое вместо температуры будет содержать плотность воды на соответствующей глубине, а вместо одного потока тепла — сумму потоков тепла и солей, умноженных на соответствующие коэффициенты — ε_T и ε_S.

В качестве примера на рис. 7.4 для района с преобладающим влиянием динамических и термических факторов на строение верхнего слоя океана показано сезонное изменение толщин квазиоднородного слоя и термоклина, а также их температуры. При оценке температуры на нижней границе термоклина поток тепла к квазиоднородному слою учитывался только за счет вовлечения в него массы воды при росте h. Это равносильно второму члену выражения (7.14). Такой подход позволил использовать уравнение (7.38) для определения T_H.

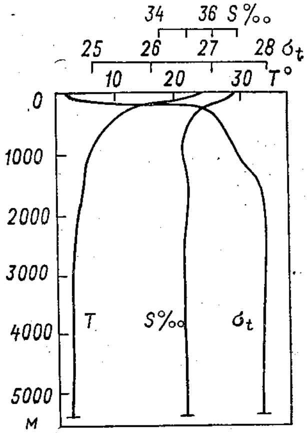


Рис. 7.5. Типичные профили температуры, солености и условной плотности в тропической зоне океанов.

7.4. Формирование главного термоклина

Под *главным термоклином* понимают слой в океане толщиной 1000 м, расположенный под деятельным слоем и характеризующийся высокими значениями градиентов всех гидрофизических характеристик. Перепад температуры в пределах термоклина составляет примерно 10 °С, солености 1,0—2,5 ‰, плотности 1,5 единицы σ_T (рис. 7.5). Ниже главного термоклина, в абиссали почти всего Мирового океана, температура, соленость и плотность имеют почти постоянные значения, по существу не зависящие от колебаний климатических характеристик на поверхности.

Распределение главного термоклина в океане отличается своеобразием. Его нижняя граница имеет ярко выраженную «чашеобразную» форму: она приподнята на экваторе, заглублена в субтропических и восходит к поверхности в субполярных широтах.

В главном термоклине сосредоточены основные изменения градиентных течений, порождаемых наклоном уровенной поверхности и бароклинностью. В глубинных же слоях океана течения мало меняются по вертикали вплоть до самого придонного слоя трения. Все это позволяет при теоретическом анализе подходить к главному термоклину как к *пограничному бароклинному слою* в океане. Основная задача состоит в выяснении механизма его формирования, структуры взаимосвязанных полей температуры, солености (или плотности) и течений, его толщины и т. д.

Рассматривая главный термоклин как внутренний слой в океане, расположенный вдали от поверхностного, придонного, прибрежного пограничных слоев, систему основных уравнений термодинамики можно записать в виде (для простоты анализа в приближении бета-плоскости)

$$-fv=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}; \tag{7.43}$$

$$fu=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}; \tag{7.44}$$

$$g\delta=\frac{\partial p}{\partial z}; \tag{7.45}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0; \tag{7.46}$$

$$u\frac{\partial \delta}{\partial x}+v\frac{\partial \delta}{\partial y}+w\frac{\partial \delta}{\partial z}=K_\rho\frac{\partial^2\delta}{\partial z^2}+K_{\rho L}\nabla^2\rho. \tag{7.47}$$

Неизвестными в уравнениях (7.43)—(7.47) являются составляющие скорости течения u, v, w, аномалии плотности δ и давления p. Последние суть

$$\delta=\rho-\rho_H, \quad p=P-g\rho_H z, \tag{7.48}$$

где ρ_H — наибольшее значение плотности воды у дна океана.

В качестве граничных условий на верхней границе термоклина, совпадающей с нижней границей экмановского слоя трения, принимается непрерывность вертикальной скорости и считается известным вертикальный градиент аномалии плотности

$$\text{при } z=0 \quad w_э(x, y, 0)=-\frac{1}{\delta}\text{rot}_z\frac{\tau}{f}, \quad \frac{\partial \delta}{\partial z}=\Gamma_\rho(x, y, 0). \tag{7.49}$$

На дне океана принимается условие непротекания и отсутствия вертикального потока масс

$$\text{при } z=H(x, y) \quad w_H=u_H\frac{\partial H}{\partial x}+v_H\frac{\partial H}{\partial y}, \quad \frac{\partial \delta}{\partial z}=0. \tag{7.50}$$

На твердых боковых границах должны выполняться условия прилипания и отсутствия потоков массы. Однако, поскольку в принятой геострофической форме уравнений движений отсутствуют адвективные члены и горизонтальный турбулентный обмен, удовлетворить естественным динамическим и термохалинным условиям не представляется возможным. Поэтому на твердых берегах, предполагаемых отвесными, вводятся «смягченные» условия исчезновения нормального к берегу полного потока и полного переноса плотности:

$$\int_0^H v_\text{п}\, dz = 0, \quad \int_0^H \left(v_\text{п}\delta - K_{\rho L}\frac{\partial\delta}{\partial n}\right) dz = 0. \tag{7.51}$$

Здесь учтено, что перенос плотности осуществляется адвекцией ($v_n\delta$) и горизонтальной турбулентной диффузией $\left(-K_{\rho L}\frac{\partial\delta}{\partial n}\right)$. На жидких участках контура L нули в правых частях условий (7.51) должны быть заменены на заданные значения расходов и потоков масс.

Система уравнений (7.43)—(7.47) сводится к одному уравнению для некоторой вспомогательной функции $\Pi(x, y, z)$. Для этого посредством перекрестного дифференцирования исключается давление p из (7.43) и (7.44) и с учетом (7.46) получается

$$v = \frac{f}{\beta}\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{7.52}$$

Далее использование уравнения (7.43) позволяет привести выражение (7.52) к виду

$$\frac{\beta}{\rho_0 f^2}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{7.53}$$

По аналогии с функцией тока для плоских движений несжимаемой жидкости уравнение (7.53) с учетом первого из граничных условий (7.49) позволяет ввести потенциальную функцию $\Pi(x, y, z)$:

$$\Pi(x, y, z) = \frac{1}{g}\int_0^z p\, dz + \frac{\rho_0 f^2}{\beta g}\int_0^x w_э(x, y, 0)\, dx, \tag{7.54}$$

при помощи которой p и w могут быть выражены

$$p = g\frac{\partial\Pi}{\partial z}, \quad w = \frac{\beta g}{\rho_0 f^2}\frac{\partial\Pi}{\partial x}. \tag{7.55}$$

Остальные неизвестные, согласно (7.43), (7.44) и (7.45), также выражаются через Π:

$$u = -\frac{g}{\rho_0 f}\int_0^z \frac{\partial p}{\partial y}\, dz = -\frac{g}{\rho_0 f}\frac{\partial^2\Pi}{\partial z\,\partial y};$$

$$v = \frac{g}{\rho_0 f}\int_0^z \frac{\partial p}{\partial x}\, dz = \frac{g}{\rho_0 f}\frac{\partial^2\Pi}{\partial z\,\partial x};$$

$$\delta = \frac{1}{g}\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial^2\Pi}{\partial z^2}. \tag{7.56}$$

С учетом выражений (7.55), (7.56) уравнение турбулентной «диффузии плотности» преобразуется в уравнение для потенциальной функции

$$K_\rho \frac{\partial^4 \Pi}{\partial z^4} + K_{\rho L} \nabla^2 \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} = \frac{\beta g}{\rho_0 f^2} \frac{\partial \Pi}{\partial x} \frac{\partial^3 \Pi}{\partial z^3} + \frac{g}{\rho_0 f} J\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}, \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2}\right). \quad (7.57)$$

Граничные условия

$$\text{при } z=0 \qquad \frac{\partial \Pi}{\partial x} = -\frac{f^2}{\beta g} \operatorname{rot}_z \frac{\tau}{f}, \quad \frac{\partial^3 \Pi}{\partial z^3} = \Gamma_\rho; \quad (7.58)$$

$$\text{при } z=H(x, y) \quad J\left(\frac{\partial \Pi}{\partial z}, H\right) + \frac{\beta}{f} \frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^3 \Pi}{\partial z^3} = 0. \quad (7.59)$$

На твердых боковых границах

$$g\left[\frac{\partial \Pi(x, y, 0)}{\partial s} - \frac{\partial \Pi(x, y, H)}{\partial s}\right] + \tau^s = 0;$$

$$\int_0^H \left[g \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z\, \partial s} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial z^2} + \rho_0 K_{\rho L} f \frac{\partial^3 \Pi}{\partial n\, \partial s}\right] dz - \tau^s \frac{\partial^2 \Pi(x, y, 0)}{\partial z\, \partial n} = 0. \quad (7.60)$$

В условиях (7.60) s и n обозначают касательную и внешнюю нормаль к контуру.

Таким образом, задача о взаимосвязанных полях плотности и течений в главном термоклине сводится к решению уравнения для потенциальной функции Π (7.57) при соответствующих граничных условиях (7.58)—(7.60).

Прежде произведем качественный анализ задачи, записав основное уравнение и граничные условия в безразмерной форме:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial^4 \Pi_б}{\partial z_б^4} + \varepsilon_1 \nabla^2 \frac{\partial^2 \Pi_б}{\partial z_б^2} = \frac{1}{f_б^2} \frac{\partial \Pi_б}{\partial x_б} \frac{\partial^3 \Pi_б}{\partial z_б^3} +$$
$$+ \frac{\varepsilon_2}{f_б} J\left(\frac{\partial \Pi_б}{\partial z_б}, \frac{\partial^2 \Pi_б}{\partial z_б^2}\right); \quad (7.61)$$

$$\text{при } z_б = 0 \qquad \varepsilon_0 \varepsilon_3^{-1} \frac{\partial^3 \Pi_б}{\partial z_б^3} = \Gamma_{\rho б}, \quad \frac{\partial \Pi_б}{\partial x_б} = \varepsilon_4 f_б^2 w_{эб}; \quad (7.62)$$

$$\text{при } z_б = \mu^{-1} H_б \quad \frac{\partial \Pi_б}{\partial x_б} = \varepsilon_2 \mu^{-1} J\left(\frac{\partial \Pi_б}{\partial z_б}, H_б\right), \quad \frac{\partial^3 \Pi_б}{\partial z_б^3} = 0. \quad (7.63)$$

Безразмерные переменные введены через соответствующие характерные масштабы

$$x, y = L_x x_б y_б; \; z = Z_x z_б; \; H = H_x H_б;$$
$$f = f_x f_б; \quad w = W_x w_б; \quad \Gamma_\rho = \Gamma_x \Gamma_б;$$
$$\delta = \delta_x \delta_б; \quad \Pi = \Gamma_x Z_x^3 \Pi_б; \quad (7.64)$$
$$W_x = \beta g \delta_x Z_x^2 \rho_x^{-1} f_x^{-2} L_x^{-1},$$

где Z_x означает характерную толщину главного термоклина и условно принимается равной глубине, где аномалия плотности в e раз меньше значения на верхней границе термоклина.

Безразмерные комплексы в (7.61)—(7.63) имеют вид

$$\varepsilon_0=\frac{\rho_x K_\rho \delta_x f_x^2 L_x}{\beta g \Gamma_x Z_x^4}=\frac{K_\rho}{W_x Z_x};$$

$$\varepsilon_1=\frac{\rho_x K_{\rho L} f_x^2}{\beta g L_x \Gamma_x Z_x^2}; \qquad \varepsilon_2=\frac{f_x}{\beta L_x};$$

$$\varepsilon_3=\frac{K_\rho \Gamma_x \rho_x f_x^2 L_x}{\beta g \delta_x^2 Z_x^2}; \qquad \varepsilon_4=\frac{W_{x\text{э}}}{W_x};$$

$$\mu=\frac{Z_x}{H_x}. \tag{7.65}$$

Введенные масштабы имеют следующие характерные значения: $f_x = 0{,}85 \cdot 10^{-4}$; $\beta = 1{,}85 \cdot 10^{-15}$; $L_x = 5 \cdot 10^6$; $\Gamma_x = 5 \cdot 10^{-3}$; $K_\rho = 10^{-4}$; $K_{\rho L} = 10^3$; $Z_x = 10^3$; $W_x = 4 \cdot 10^{-6}$; $W_{x\text{э}} = 5 \cdot 10^{-7}$; $H_x = 5 \cdot 10^3$, что приводит к значениям безразмерных комплексов $\varepsilon_0 = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$; $\varepsilon_1 = 1{,}5 \cdot 10^{-3}$; $\varepsilon_2 = 0{,}92$; $\varepsilon_3 = 0{,}25$; $\varepsilon_4 = 0{,}12$; $\mu = 0{,}2$.

Это означает, что основными членами в уравнении (7.61) являются члены правой части, отражающие *адвективные эффекты* формирования термоклина. Малые параметры ε_0 и ε_1 при старших производных служат признаком появления пограничных слоев в решении задачи. Параметр ε_0, описывающий эффект вертикальной диффузии, обусловливает в решении существование *диффузионного подслоя*. Толщину этого подслоя можно оценить, задавая $z = Z_{xd}$ таким образом, чтобы ε_0 имел порядок адвективных членов, т. е. порядок единицы,

$$\frac{\rho_x K_\rho f_x^2 L_x}{\beta g \Gamma_x Z_{xd}^4} \leqslant 1, \quad \text{отсюда}$$

$$Z_{xd} \geqslant \left(\frac{\rho_x K_\rho f_x^2}{\beta g \Gamma_x}\right)^{1/4}.$$

При принятых значениях масштабов $Z_{xd} \sim 170$ м. В верхних слоях при $z < Z_{xd}$ термоклин формируется *диффузией плотности*, а при $z > Z_{xd}$ — *адвекцией плотности*.

Решение трехмерного нелинейного уравнения четвертого порядка для функции П при соответствующих граничных условиях представляет большие математические трудности. В настоящее время полное решение задачи еще не получено. Однако известны некоторые частные автомодельные решения уравнения (7.57), удовлетворяющие не всем граничным условиям (7.58)—(7.60), а части их и существующие лишь при специальных видах полей ветра и потоков плотности (тепла) на поверхности. Примечательно, что все они показывают убывание термохалинных возмущений с глубиной либо по экспоненте, либо по гиперболе с показателем степени, обратно пропорциональным синусу широты.

Представляет интерес рассмотреть наиболее полное частное решение задачи, объединяющее адвективный и диффузионный механизм формирования главного термоклина и позволяющее выявить влияние на его структуру вертикальной скорости и потока плотности (тепла) в экмановском слое.

Представим неизвестную функцию П в виде *

$$\Pi = U(x, y) + \mu z N(x, y) + Q(x, y, z). \tag{7.66}$$

Первые два слагаемых здесь составляют баротропную часть П и соответствующие баротропные слагаемые горизонтальных компонентов скорости течения, которые согласно (7.55) и (7.56) не зависят от z и не исчезают вблизи дна. $Q(x, y, z)$ имеет смысл бароклинной составляющей функции П. В отличие от баротропных, эта составляющая существенна лишь в пределах термоклина, она сама и ее производные затухают ко дну океана.

С учетом (7.66) основное уравнение (7.61) и граничные условия (7.62), (7.63) преобразуются:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial^4 Q}{\partial z^4} + \varepsilon_1 \nabla^2 \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2} = \frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \mu z \frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial^3 Q}{\partial z^3} + \frac{\varepsilon_2}{f} J\left(N + \frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right); \tag{7.67}$$

при $z=0$ $\quad \varepsilon_0 \varepsilon_3^{-1} \frac{\partial^3 Q}{\partial z^3} = \Gamma_\rho, \quad \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \varepsilon_4 f^2 w_э;$ (7.68)

при $z = \mu^{-1} H$ $\quad \frac{\partial U}{\partial x} = \varepsilon_2 f^2 J\left(N, \frac{H}{f}\right).$ (7.69)

В первом приближении в уравнении (7.67) можно пренебречь баротропной составляющей $N(x, y)$ ввиду малости ее амплитуды, а также вторым членом в левой части, выражающим эффект горизонтальной турбулентной диффузии (см. главу 1):

$$\varepsilon_0 \frac{\partial^4 Q}{\partial z^4} = \frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial x}\right)\frac{\partial^3 Q}{\partial z^3} + \frac{\varepsilon_2}{f} J\left(\frac{\partial Q}{\partial z},\ \frac{\partial^2 Q}{\partial z^2}\right). \tag{7.67'}$$

Основная задача динамики термоклина сводится, таким образом, к решению уравнения (7.67′) для бароклинной функции Q. Баротропная функция N определяется из граничного условия (7.69).

Уравнение (7.67′) содержит малый параметр при старшей производной. По аналогии с классической теорией пограничного

* Здесь и далее индексы «б», означающие безразмерные переменные, опущены.

слоя в механике вязкой жидкости для его решения можно воспользоваться методом асимптотических разложений, представляя функции $U(x, y)$ и $Q(x, y, z)$ в виде рядов разложения по малому параметру:

$$U(x, y) = U_0(x, y) + \varepsilon_0 U_1(x, y) + \ldots; \qquad (7.70)$$

$$Q(x, y, z) = Q_0(x, y, z) + \varepsilon_0 Q_1(x, y, z) + \ldots + m_0 \widetilde{Q}_0(x, y, \zeta) + \varepsilon_0 m_1 \widetilde{Q}_{01}(x, y, \zeta). \qquad (7.71)$$

При этом разложение для бароклинной функции (7.71) содержит функции $Q_0, Q_1, \ldots, Q_i$, описывающие решение для основной адвективной области термоклина, и поправочные функции $\widetilde{Q}_0, \widetilde{Q}_{01}, \ldots, \widetilde{Q}_i$, отличные от нуля в тонком диффузионном подслое. Эти поправочные функции вводятся для исправления невязок в функциях Q_i, возникающих в граничных условиях. В уравнении (7.71) $Q_i, \widetilde{Q}_i \to 0$ при $\zeta \to \infty$, $i = 0, 1, \ldots$, $\zeta = z/h$; m_i и h — неизвестные пока функции от параметров $\varepsilon_0, \varepsilon_3, \varepsilon_4$, определяющие амплитуду поправки и толщину пограничного диффузионного подслоя.

Подстановка (7.70) и (7.71) в уравнение (7.67′) дает для адвективной области термоклина ($\varepsilon_0 = 0$) уравнение первого приближения

$$0 = \frac{1}{f^2}\left(\frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{\partial Q_0}{\partial x}\right)\frac{\partial^3 Q_0}{\partial z^3} + \frac{\varepsilon_2}{f} J\left(\frac{\partial Q_0}{\partial z}, \frac{\partial^2 Q_0}{\partial z^2}\right). \qquad (7.72)$$

Уравнение (7.72) имеет частное решение

$$Q_0(x, y, z) = \sigma C^2 \exp\frac{z}{C}, \qquad (7.73)$$

справедливое при $\dfrac{\partial U_0}{\partial x} = 0$, $C = C_0 f$, где $\sigma(x, y)$ — пока неопределенная функция горизонтальных координат x, y, а постоянную C_0 необходимо задать.

Если к адвективной области термоклина включить поверхностный (при $z = 0$) диффузионный подслой, то уравнения (7.67′) и (7.68), выписанные для первых членов разложений с учетом решения для Q_0, имеют вид

$$\varepsilon_0 \frac{\partial^4 Q_0(0)}{\partial z^4} + \varepsilon_0 \frac{m_0}{h^4}\frac{\partial^4 \widetilde{Q}_0}{\partial \zeta^4} = \frac{1}{f^2}\left[m_0 \frac{\partial \widetilde{Q}_0}{\partial x}\frac{\partial^3 Q_0(0)}{\partial z^3} + \frac{m_0}{h^3}\frac{\partial Q_0(0)}{\partial x} \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial^3 \widetilde{Q}_0}{\partial \zeta^3} + \frac{m_0^2}{h^3}\frac{\partial \widetilde{Q}_0}{\partial x}\frac{\partial^3 \widetilde{Q}_0}{\partial \zeta^3}\right] + \frac{\varepsilon_2}{f}\left[\frac{m_0}{h} J\left(\frac{\partial Q_0(0)}{\partial z}, \frac{\partial^2 \widetilde{Q}_0}{\partial \zeta^2}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{m_0}{h^2} J\left(\frac{\partial \widetilde{Q}_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 Q_0(0)}{\partial z^2}\right) + \frac{m_0^2}{h^3} J\left(\frac{\partial \widetilde{Q}_0}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 \widetilde{Q}_0}{\partial \zeta^2}\right)\right]; \qquad (7.74)$$

при $z=0$ $$\varepsilon_0\varepsilon_3^{-1}\frac{\partial^3 Q_0(0)}{\partial z^3}+\varepsilon_0\varepsilon_3^{-1}\frac{m_0}{h^3}\frac{\partial^3\widetilde{Q}_0}{\partial\zeta^3}=\Gamma_\rho;$$

$$\frac{\partial Q_0(0)}{\partial x}+m_0\frac{\partial\widetilde{Q}_0(0)}{\partial x}=\varepsilon_4 f^2 w_э. \tag{7.75}$$

Для того чтобы решение для поправочной функции $\widetilde{Q}_0$ устранило соответствующие невязки в граничных условиях, необходимо подобрать такие m_0 и h, чтобы, во-первых, $\frac{\partial^4\widetilde{Q}_0}{\partial\zeta^4}$ в (7.74) балансировался хотя бы одним членом правой части и, во-вторых, хотя бы в одном из граничных условий (7.75) присутствовала поправочная функция $\widetilde{Q}_0$. Из граничных условий (7.75) видно, что характер пограничного слоя существенно зависит от двух параметров ε_0 и ε_4, из которых последний отражает влияние вертикальной скорости экмановского слоя трения. Так, при $\varepsilon_0^{1/2}\ll\varepsilon_4\leqslant 1$, что соответствует условиям центральных областей океанических круговоротов, где ротор касательного напряжения ветра, определяющий $w_э$, имеет экстремум, функции m_0 и h удовлетворяют вышеперечисленным требованиям, когда $m_0=\varepsilon_0^2\varepsilon_3$, $h=\varepsilon_0$.

Тогда уравнением диффузионного пограничного подслоя для $\widetilde{Q}_0$ будет

$$\frac{\partial^4\widetilde{Q}_0}{\partial\zeta^4}=\frac{1}{f^2}\frac{\partial Q_0(0)}{\partial x}\frac{\partial^3\widetilde{Q}_0}{\partial\zeta^3}+O(\varepsilon_0) \tag{7.76}$$

с граничными условиями

при $\zeta=0$ $$\varepsilon_0\varepsilon_3^{-1}\frac{\partial^3 Q_0(0)}{\partial z^3}+\frac{\partial^3\widetilde{Q}(0)}{\partial\zeta^3}=\Gamma_\rho,$$

$$\frac{\partial Q_0(0)}{\partial x}=\varepsilon_4 f^2 w_э; \tag{7.77}$$

при $\zeta\to\infty$ $$\widetilde{Q}_0,\ \frac{\partial\widetilde{Q}_0}{\partial\zeta},\ \ldots\to 0. \tag{7.78}$$

Решением задачи (7.76)—(7.78) является

$$\widetilde{Q}_0=\frac{1}{\varepsilon_4^3 w_э^3}\left(\Gamma_\rho-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_3}\frac{\sigma}{C}\right)\exp\varepsilon_4 w_э\zeta. \tag{7.79}$$

Чтобы удовлетворить граничным условиям (7.78), показатель экспоненты в решении (7.79) должен быть отрицательным. Это требует, чтобы $w_э<0$, т. е. направленной вверх экмановской скорости. Это соответствует циклоническим круговоротам в океане. При $w_э>0$, соответствующей опусканию вод в антициклонических круговоротах, решение (7.79) не существует.

Решение с учетом адвективного и диффузионного пограничных слоев дает окончательные выражения.

$$Q=\sigma C^2 \exp\frac{z}{C}+\frac{\varepsilon_0^2\varepsilon_3}{\varepsilon_4^3 w_э^3}\left(\Gamma_\rho-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_3}\frac{\sigma}{C}\right)\exp\frac{\varepsilon_4 w_э z}{\varepsilon_0}; \tag{7.80}$$

$$\delta=\sigma\exp\frac{z}{C}+\frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_4 w_э}\left(\Gamma_\rho-\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_3}\frac{\rho}{C}\right)\exp\frac{\varepsilon_4 w_э z}{\varepsilon_0}; \tag{7.81}$$

$$u=-\frac{1}{f}\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma C\exp\frac{z}{C}\right)+O\left(\varepsilon_0\varepsilon_3\varepsilon_4^{-2}\right); \tag{7.82}$$

$$v=\frac{f}{C}\varepsilon_4 w_э\exp\frac{z}{C}+O\left(\varepsilon_0\varepsilon_3\varepsilon_4^{-2}\right); \tag{7.83}$$

$$w=\varepsilon_4 w_э\exp\frac{z}{C}+O\left(\varepsilon_0^2\varepsilon_3\varepsilon_4^{-3}\right), \tag{7.84}$$

в которых неизвестная функция $\sigma(x, y)$ определяется подстановкой адвективного решения (7.73) в граничное условие (7.77) и последующим интегрированием по x:

$$\sigma(x, y)=\frac{\varepsilon_4 f^2}{C^2}\int_{x_0}^{x} w_э\,dx+\sigma_0(x_0, y). \tag{7.85}$$

Произвольная функция $\sigma_0(x_0, y)$, выражающая адвективную составляющую аномалии плотности на поверхности океана на каком-либо меридиональном разрезе, должна быть задана.

Рассмотрим случай малых $w_э$, т. е. $\varepsilon_4 \leqslant \varepsilon_0^{1/2}$, что соответствует окраинным частям океанических круговоротов. Тогда $m_0=\varepsilon_0^{1/2}\varepsilon_3$, $h=\varepsilon_0^{1/2}$. Уравнение для диффузионного приповерхностного пограничного слоя $\widetilde{Q}_0$ в этом случае имеет вид

$$\frac{\partial^4\widetilde{Q}_0}{\partial\zeta^4}=\frac{1}{\varepsilon_0^{1/2}f^2}\frac{\partial Q_0(0)}{\partial x}\frac{\partial^3\widetilde{Q}_0}{\partial\zeta^3}+$$
$$+\frac{\varepsilon_2}{f}\left[\frac{\partial^2 Q_0(0)}{\partial z\,\partial x}\frac{\partial^3\widetilde{Q}_0}{\partial\zeta^2\,\partial y}-\frac{\partial^2 Q_0(0)}{\partial z\,\partial y}\frac{\partial^3\widetilde{Q}_0}{\partial\zeta^2\,\partial x}\right]+O\left(\varepsilon_0^{1/2}\right). \tag{7.86}$$

Граничные условия по вертикали (7.77) и (7.78) необходимо дополнить боковым условием на $x=x_0$:

$$\frac{\partial^2\widetilde{Q}_0}{\partial\zeta^2}=\gamma(x_0, y, \zeta), \tag{7.87}$$

где значения функции γ определяются по заданному вертикальному распределению аномалии плотности на меридиональном разрезе при $x=x_0$.

Уравнение (7.86) для $\widetilde{Q}_0$ является уже уравнением в частных производных и решать его трудно. Однако в простейшем случае $\varepsilon_4 \leqslant \varepsilon_0$ это уравнение сводится к уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial^2 \tilde{\delta}_0}{\partial \zeta^2} = \varepsilon_2 u_0(0) \frac{\partial \tilde{\delta}_0}{\partial x}, \qquad (7.88)$$

в котором $\tilde{\delta}_0 = \dfrac{\partial^2 \tilde{Q}}{\partial \zeta^2}$ означает диффузионную составляющую аномалии плотности, $u_0(0) = u_0(y, 0)$ — зональную составляющую скорости течения на поверхности, а

$$u_0(y, z) = -\frac{1}{f} \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_0 C \exp \frac{z}{C}\right) + O\left(\varepsilon_0^{1/2}\right). \qquad (7.89)$$

Решение уравнения (7.88) с граничными условиями (7.77), (7.78) для зонального распределения потоков плотности $\Gamma_\rho = \Gamma_\rho(y)$ и в предположении $\gamma = 0$ и с учетом решения для адвективной составляющей δ_0 имеет вид

$$\delta = \sigma_0 \exp \frac{z}{C} - \frac{\varepsilon_3\left(\Gamma_\rho - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_3} \frac{\sigma_0}{C}\right)}{\varepsilon_0^{1/2} \sqrt{-\varepsilon_2 u_0(0)}} \left[2 \sqrt{\frac{x_0 - x}{\pi}} \exp\left(\frac{\varepsilon_2 u_0(0) z^2}{4\varepsilon_0 (x_0 - x)}\right) - \right.$$
$$\left. - \varepsilon_0^{1/2} \sqrt{-\varepsilon_2 u_0(0)}\, z \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{2\varepsilon_0^{1/2}} \sqrt{\frac{-\varepsilon_2 u_0(0)}{x_0 - x}}\, z\right)\right]. \qquad (7.90)$$

Это решение существует при $u_0(0) < 0$, т. е. зональная скорость поверхностного течения должна быть направлена на запад.

Полученные решения (7.81) и (7.90) для аномалии плотности показывают, что она состоит из адвективной и диффузионной составляющих. Согласно (7.81) и (7.90), устойчиво стратифицированный термоклин будет иметь место при $\Gamma_\rho \geqslant \varepsilon_0 \varepsilon_3^{-1/2} \sigma C^{-1} > 0$, что соответствует притоку плотности (или тепла). При $\Gamma_\rho < \varepsilon_0 \varepsilon_3^{-1/2} \sigma C^{-1}$, когда происходит отток тепла или поступающего тепла недостаточно для поддержания адвективного термоклина, стратификация становится неустойчивой и начинается конвекция. При $\Gamma\rho = \varepsilon_0 \varepsilon_3^{-1/2} \sigma C^{-1}$ диффузионная составляющая аномалии плотности исчезает и термоклин имеет чисто адвективное происхождение.

Полученные решения обнаруживают также, что наличие диффузионного подслоя у поверхности термоклина и его характер существенно зависят от амплитуды и знака экмановской вертикальной скорости $w_э$. При сильных и направленных вверх $w_э$ (циклонические круговороты) возникает резкий диффузионный термоклин, соответствующий ситуации, когда приток плотности (тепла) сверху балансируется подъемом холодных вод из главного термоклина. Однако приповерхностный диффузионный подслой в термоклине существовать не может при сильных направленных вниз $w_э$, т. е. в антициклонических круговоротах. При слабых $w_э$ наблюдается другой режим. Существует приповерхностный диффузионный подслой, но приток плотности (тепла) в этот слой балансируется горизонтальным и вертикальным переносом вод, вызванным адвективными составляющими скорости поверхностного течения [см. (7.86)].

На рис. 7.6 приведена схема структуры главного термоклина в антициклоническом круговороте при зональных распределениях ветра и потоков плотности (тепла). Изопикны (сплошные кривые) имеют реальную «чашеобразную» форму. Волнистые линии обозначают область конвекции. Светлые стрелки показывают экмановские полные потоки в слое трения, черные стрелки — составляющие геострофических течений. На схеме отчетливо выражено пограничное течение, отходящее затем в открытый океан. Очевидно, что полученное решение достаточно правильно описывает особенности структуры по-

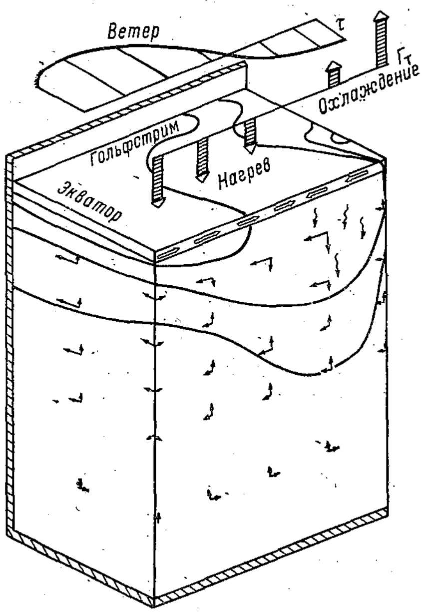


Рис. 7.6. Схема структуры главного термоклина в антициклоническом круговороте [8].

лей плотности и горизонтальных течений в океане: вертикальные изменения этих полей сосредоточены в основном в главном термоклине, ниже которого плотность и скорости горизонтальных течений практически не зависят от z.

7.5. Исследование формирования гидрологических полей численными методами

Получение количественных критериев описанной в разделе 7.1 качественной картины взаимосвязи полей основных гидрологических элементов на основе системы дифференциальных уравнений, приведенных во введении, осуществимо в настоящее время только с использованием ЭВМ. Даже диагностические расчеты поля течений по известным полям плотности воды и ветра проводятся на ЭВМ. Введение же в рассмотрение меняющегося во времени поля плотности, а тем более температуры и солености воды не дает пока возможности проводить аналитические решения, и совместное формирование полей температуры, солености и течений изучается на конкретных численных решениях при конкретных краевых условиях.

Система уравнений, описывающая изменение во времени и в пространстве гидрологических элементов, совместно с начальными и граничными условиями называется математической моделью соответствующего процесса. Пока еще нет возможности, а в ряде случаев и знаний для составления такой модели, которая бы полностью описывала гидрологический процесс, поэтому все существующие модели в большей или меньшей степени абстрагируют реальный процесс в зависимости от поставленной задачи.

При этом нужно иметь в виду, что результат численного решения зависит не только от степени абстракции физического процесса исходной системой уравнений, соответствующего представления краевых условий, но и от используемой пространственно-временной сетки.

Поскольку решается не сама система дифференциальных уравнений, а ее алгебраический аналог, то в любой математической модели первоочередным шагом является определение сходимости численного решения к точному, а также его устойчивости. Поэтому в модели обычно вводятся дополнительные уравнения для вычисления таких характеристик процесса, которые остаются постоянными, т. е. инвариантными, при решении по сеточной области.

Более или менее просто математически описывается характер взаимного приспособления поля плотности и течения в среднемноголетнем стационарном плане, рассмотренный в предыдущем разделе. Основные математические трудности такой упрощенной модели связаны с тем, что в уравнении, описывающем аномалии плотности воды, приходится принимать во внимание адвективные слагаемые, что делает его нелинейным. Полученные решения позволили определить поле плотности и стационарную циркуляцию, обусловленные воздействием атмосферы. При этом аномалии плотности воды зависят не только от потоков тепла и влаги между атмосферой и океаном, но и очень существенно от циркуляции вод. На последнюю же сильно влияет поле плотности. Приведенный в качестве примера рис. 7.6 наглядно демонстрирует взаимосвязь этих двух полей.

В последнее десятилетие все большее распространение получают эволюционные модели, в которых учитывают изменение во времени искомых гидрологических элементов.

Повышение внимания к эволюционным моделям объясняется тем, что их реализация позволит решить ряд весьма важных научных и прикладных задач. Из них основными являются:

1) изучение характера влияния внешних факторов (потоков тепла и солей, а также динамического воздействия атмосферы) на формирование гидрологических полей в океане;

2) исследование изменчивости полей температуры, солености и течений в различных временны́х масштабах под действием тех или иных факторов;

3) определение скорости приспособления гидрологических полей к внешним условиям;

4) построение модели климата океана. Под этим понимается задача о возникновении, развитии и установлении полей температуры, солености и течений под действием реальных внешних факторов (потоков тепла и солей через поверхность океана, касательного напряжения ветра).

Надежная модель климата океана помогла бы в решении трех перечисленных выше задач, а кроме того, позволила бы рассмотреть варианты климата океана в прошедшие эпохи и выяснить, во-первых, сколько времени потребуется океану для приспособления к стационарным условиям и, во-вторых, какова роль факторов, формирующих климат океана.

Внесение ясности в эти фундаментальные вопросы динамической океанологии в конечном итоге будет способствовать созданию надежных методов прогноза основных океанологических полей.

Для расчета эволюции температуры, солености и течений в принципе можно непосредственно интегрировать приведенную во введении полную систему уравнений гидротермодинамики океана (иногда ее называют «примитивной») без всяких упрощений. Однако пока таких попыток очень мало, поскольку сложная система нелинейных уравнений, с которой приходится иметь дело, поддается решению только на самых современных ЭВМ и требует огромного количества машинного времени. Естественно поэтому попытаться вначале систему упростить так, чтобы ее можно было интегрировать с меньшими затратами машинного времени, но без существенной потери точности.

Для упрощения уравнений динамики чаще всего вводятся вспомогательные функции: либо рельеф свободной поверхности (ζ), либо функция полного потока (ψ). Определив одну из этих функций, можно с помощью введения некоторых гипотез найти составляющие скоростей течений, необходимые также и для расчета поля плотности.

Вообще расчет плотности воды представляет собой наиболее сложную часть поставленной задачи. Дело в том, что уравнения, описывающие эволюцию температуры и солености воды, определяющие ее плотность, являются существенно нелинейными, поскольку, как показывают оценки входящих в него членов, все они имеют одинаковый порядок и поэтому уравнения не допускают никаких упрощений. Для облегчения технической стороны задачи часто вместо уравнений турбулентной диффузии тепла и солей используют уравнение плотностной диффузии П. С. Линейкина. В этом случае вместо расчета двух неизвестных функций (температуры и солености воды) необходимо определять только одну — плотность.

Реализация прогностических моделей для Мирового океана даже с рассмотренными упрощениями остается достаточно сложной задачей. Поэтому первые опыты с такими моделями осуществлялись на ограниченной акватории. Однако и такие расчеты позволили получить целый ряд новых результатов. Наиболее интересные из них были получены А. С. Саркисяном, В. П. Кочергиным, В. И. Климком. В основе сформулированной ими модели лежат уравнение плотностной диффузии П. С. Линейкина, эволюционное уравнение для уровенной поверхности (ζ) и простые соотношения для расчета скоростей течения на горизонтах по известному рельефу свободной поверхности. Расчеты проводились для северной части Атлантического океана (от 12,5 до 52,5° с. ш.) с шагом по горизонтали 2,5°, а по времени 10 суток. В начальный момент задавались: поле плотности зональным, а океан в состоянии покоя. Согласно этим расчетам, время приспособления поля течений к полю масс достаточно мало́. Уже после первого шага (т. е. через 10 суток после начала расчетов) зональное поле плотности, обусловившее зональное поле рельефа свободной поверхности, породило градиентный западно-восточный перенос (рис. 7.7), поддерживаемый воздействием ветра.

Под действием касательного напряжения ветра, меридиональных границ и неравномерности теплообмена с атмосферой возникает меридиональная циркуляция вдоль побережья, которая обусловливает восточно-западный перенос в приэкваториальных широтах. Восточный поток совместно с β-эффектом вызывает западную интенсификацию течений, а западно-восточный перенос обеспечивает отрыв струйных течений от западного берега. Таким образом, довольно скоро (спустя несколько месяцев) возникает известное антициклоническое кольцо. С появлением меридионального и восточно-западного переноса начинается адвекция плотности, которая вместе с потоками массы через поверхность океана начинает трансформировать поле плотности. Поле плотности устанавливается довольно долго (в течение 10 лет и более). Однако основные изменения происходят в первые 1—2 года (рис. 7.8). В соответствии с этим общая картина циркуляции и поля плотности, близкая к фактической, устанавливается спустя 3—4 года после начала движения. В дальнейшем происходит лишь медленная эволюция полей.

Диагностическими расчетами установлено, что основными факторами, обусловливающими циркуляцию в океане, являются динамическое воздействие атмосферы, бароклинный β-эффект и СЭБИР (совместный эффект бароклинности и рельефа дна). Этот вывод подтверждают и прогностические расчеты. Однако в процессе эволюции влияние их проявляется поразному. В первый месяц СЭБИР и бароклинный β-эффект малы по сравнению с динамическим воздействием атмосферы (rot τ) (рис. 7.9). С течением времени роль СЭБИР и баро-

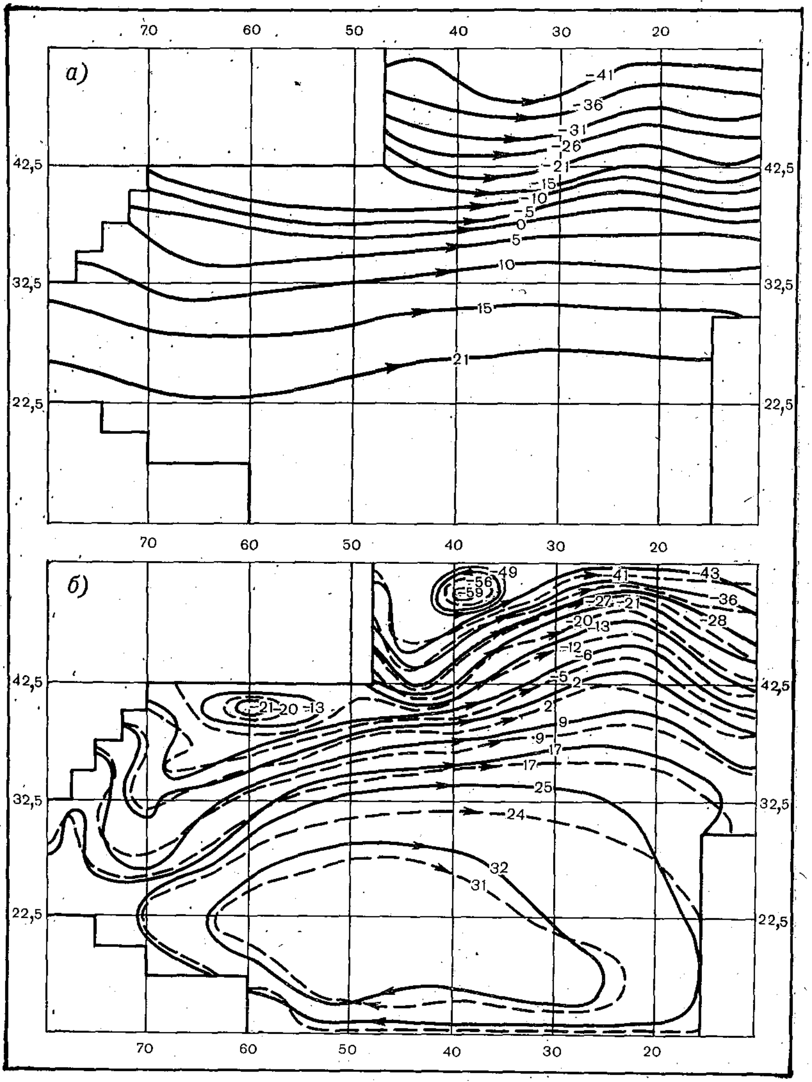


Рис. 7.7. Уровенная поверхность (см) Атлантического океана.

а — после первого шага по времени (через 10 сут); *б* — через 3,5 года (пунктирные линии) и через 7 лет (сплошные). Стрелки показывают направление поверхностного градиентного течения [13].

клинного β-эффекта возрастает и в установившемся состоянии их роль может становиться даже больше непосредственного воздействия ветра (рис. 7.9).

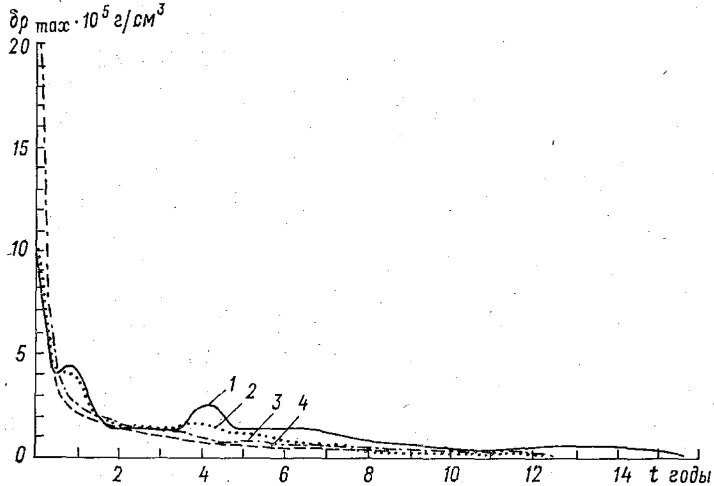


Рис. 7.8. Максимальная разность значений плотности между двумя последовательными шагами по времени [13].

1, 2 — через месяц после начала расчетов для $H \neq \mathrm{const}$ и $H = \mathrm{const}$ соответственно; *3, 4* — установившиеся значения для $H \neq \mathrm{const}$ и $H = \mathrm{const} = 1{,}5$ км [13].

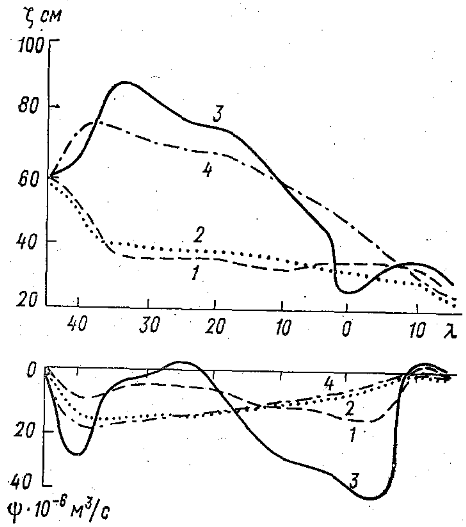


Рис. 7.9. Рельеф свободной поверхности ζ и функция полного потока ψ вдоль 27,5° с. ш. Атлантического океана [13].

1, 2 — через месяц после начала расчетов для $H \neq \mathrm{const}$ и $H = \mathrm{const}$ соответственно; *3, 4* — установившиеся значения при $H \neq \mathrm{const}$ и $H = \mathrm{const}$ соответственно.

Экваториальная зона океана, которая в данных расчетах не учитывалась, отличается большим своеобразием своих динамических и термохалинных полей (наличие подповерхностных противотечений, мелкий главный термоклин, его растяжение у экватора и подъем изопикн с запада на восток). Процесс взаимного формирования этих полей также имеет свои особенности. Так, *характерное* время динамической реакции экваториальной зоны океана на воздействие очень устойчивых восточных ветров и потоков тепла через поверхность океана, почти не меняющихся от сезона к сезону, составляет примерно один месяц, в отличие от нескольких десятилетий в умеренных районах океана.

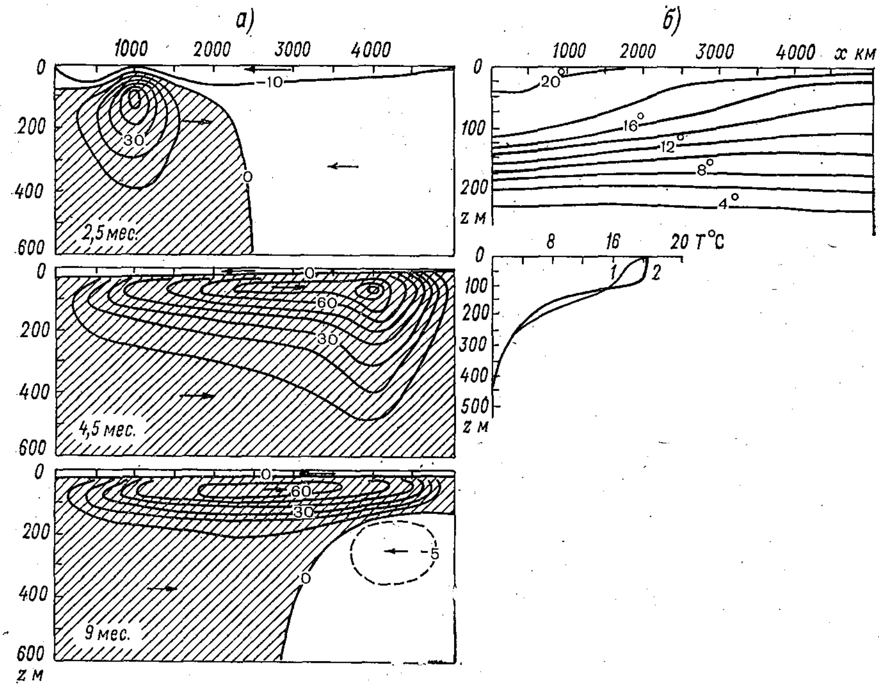


Рис. 7.10. Эволюция полей зонального течения (*а*) и температуры (*б*) в плоскости экватора, согласно расчетам [16].

Поле температуры показано на момент t=4,7 года. Кривая *1* на вертикальных эпюрах температуры относится к плоскости экватора, кривая *2* — на расстоянии 400 км.

Численная реализация эволюционной задачи, подобной рассмотренной выше для экваториальной зоны, показывает, что процесс формирования полей течений и температуры в экваториальной зоне океана происходит следующим образом (рис. 7.10). Вначале под действием равномерного восточного ветра возбуждаются западные дрейфовые течения, приводящие к возникновению наклонов уровенной поверхности. Последние приводят к появлению противотечений, сосредоточенных вначале у западных границ океана. Одновременно с этим за счет адвективного переноса тепла дрейфовыми течениями создается горизонтальная неоднородность поля температуры. Возникающий при этом горизонтальный градиент давления усиливает противотечение и способствует его распространению в восточную половину зоны. Со временем происходит интенсивное «поджатие» противотечения у восточной границы и образование под ним течения западного направления, которое через 4,7 года охватывает всю экваториальную зону. К этому времени за счет сформированного противотечения происходит дальнейшая эволюция поля температуры. Возникает растяжение термоклина (начиная с некоторого горизонта изотермы к экватору опускаются), а также подъем изотерм при продвижении с запада на восток. На рис. 7.10 приведены изотермы в плоскости экватора и вер-

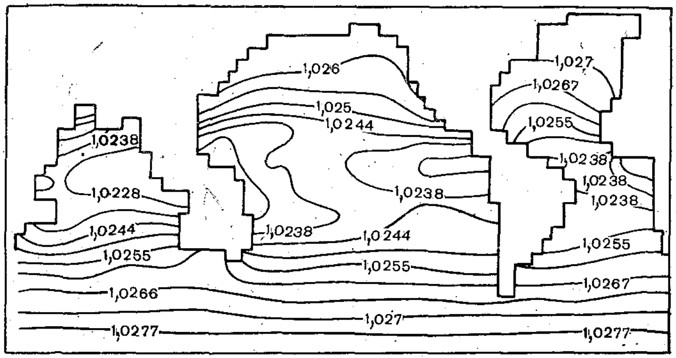


Рис. 7.11. Плотность воды на глубине 500 м (по расчетам А. А. Цветковой).

тикальные эпюры температуры на экваторе (кривая *1*) и на расстоянии 400 км от экватора (кривая *2*) при $t=4{,}7$ года.

А. А. Цветковой были проведены расчеты по похожей модели для Мирового океана с учетом переменности рельефа дна. Задача решалась с шагом по пространству $\delta\theta=\delta\lambda=5°$ для 6 уровней по вертикали (0, 100, 500, 1000, 2000 м, дно). Шаг по времени равнялся одним суткам. Расчеты по модели были доведены до установления, которое в соответствии с выбранным критерием $|\rho^{n+1}-\rho^n|<5\cdot 10^{-5}\rho^n$ наступило через 4 года.

В результате получены почти все известные течения с расходами, близкими к наблюдаемым: Антарктическое — 170 Св, Гольфстрим — 70 Св, Куросио — 71 Св. Рассчитанные установившиеся поля плотности на горизонтах (рис. 7.11) отражают все основные закономерности реального распределения плотности. Однако они являются сильно сглаженными вследствие довольно грубого шага по горизонтали. Сравнение рассчитанных до установления полей плотности и течений показывает их сильную взаимообусловленность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ К ГЛАВЕ 7

1. Жуков Л. А. Общая океанология.— Л.: Гидрометеоиздат, 1976.— 376 с.
2. Каменкович В. М., Харьков В. В. О сезонном изменении термической структуры верхнего слоя океана.— Океанология, 1975, т. 15, вып. 6, с. 978—988.
3. Китайгородский С. А. Физика взаимодействия атмосферы и океана.— Л.: Гидрометеоиздат, 1970.— 283 с.
4. Козлов В. Ф. Некоторые точные решения нелинейного уравнения адвекции плотности.— Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1967, т. 2, № 11, с. 434—446.
5. Кутало А. А. Изменение плотности в деятельном слое океана.— Труды ГМЦ, 1975, вып. 161, с. 26—34.
6. Линейкин П. С. Рельеф дна и глубинные течения в океане.— Труды ГМЦ, 1969, вып. 51, с. 16—28.
7. Линейкин П. С. Теория главного термоклина.— Океанология, 1974, т. 14, вып. 6, с. 965—981.
8. Линейкин П. С., Мадерич В. С. Динамика океанической циркуляции.— Итоги науки, сер. «Океанология», 1977, вып. 4, М., ВИНИТИ, с. 35—87.
9. Мадерич В. С. О вертикальной структуре главного океанического термоклина.— Метеорология и гидрология, 1974, № 10, с. 67—74.
10. Марчук Г. И. и др. Математическое моделирование поверхностной турбулентности в океане.— Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1976, т. 12, № 8, с. 841—849.
11. Реснянский Ю. Д. Влияние изменений солености на формирование вертикальной плотностной структуры верхнего слоя океана.— Труды ГМЦ, 1975, вып. 161, с. 40—49.
12. Решетова О. В., Чаликов Д. В. Об универсальной структуре деятельного слоя океана.— Океанология, 1977, т. 17, № 5, с. 744—777.
13. Саркисян А. С. Численный анализ и прогноз морских течений.— Л.: Гидрометеоиздат, 1977.— 182 с.
14. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкости. Пер. с англ.— М.: Мир, 1977.— 431 с.
15. Физика океана, т. 1, М., Наука, 1978, с. 208—339.
16. Шапиро Н. Б., Михайлова Э. Н. Моделирование изменчивости экваториальных течений, обусловленной действием муссонных ветров.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1978, т. 14, № 3, с. 300—307.
17. Needler G. T. A model for thermohaline circulation in a ocean of finite depth.— J. Marine Res., 1967, vol. 25, N 3.
18. Welander P. The thermocline problem.— Phil. Trans. Roy. Soc. A. London, 1971, vol. 270, p. 415.

ОГЛАВЛЕНИЕ