В. Н. Веретенников

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ.
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Индивидуальное домашнее задание

Санкт-Петербург
2004

УДК 51

Веретенников В. Н. Методические указания. Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений. Индивидуальное домашнее задание. – СПб.: Изд. РГГМУ. 2004. – 25 с.

Активизация познавательной деятельности студентов, выработка у них способности самостоятельно решать достаточно сложные проблемы может быть достигнута при такой организации учебного процесса, когда каждому студенту выдаются индивидуальные домашние задания (ИДЗ) с обязательным последующим контролем их выполнения и выставлением оценок.

Предлагаемое пособие адресовано преподавателям и студентам и предназначено для проведения практических занятий и самостоятельных (контрольных) работ в аудитории и выдачи ИДЗ по линейной алгебре.

1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ И ИХ СВОЙСТВА. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

Основные теоретические сведения

Определение. ***Определителем (детерминантом) квадратной матрицы 2-го порядка***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad (1.1)$$

называется ***число***

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

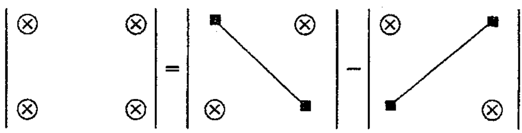
вычисляемое по следующему правилу: надо взять произведение чисел, расположенных по главной диагонали (диагональ, идущая из левого верхнего угла в правый нижний угол), и вычесть из него произведение чисел, расположенных на побочной диагонали (диагональ, идущая от правого верхнего элемента, к левому нижнему).

Определитель квадратной матрицы обозначается двумя вертикальными черточками:

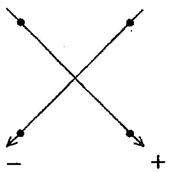
$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \qquad (1.2).$$

Кроме того, для определителя матрицы применяются обозначения $|A|$, $\det(a_{ij})$, Δ, $\det A$

Правило, по которому вычисляется определитель матрицы 2-го порядка, схематически можно изобразить следующим образом:



или



Определение. ***Определителем квадратной матрицы 3-го порядка***

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется ***число***

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Определитель матрицы кратко называют определителем 3-го порядка и обозначают двумя вертикальными чертами или одним из символов $|A|$, $\det A$, $\det(a_{ij})$, Δ.

Итак, по определению

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

(1.3)

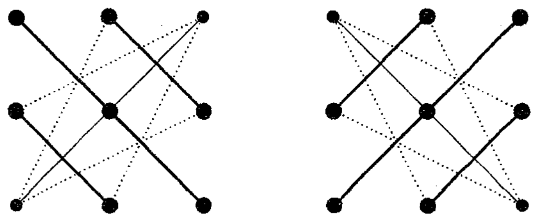
Таким образом,

каждый член определителя 3-го порядка представляет собой произведение трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Эти произведения берутся с определенными знаками. Со знаком плюс – три члена, состоящие из элементов главной диагонали и из элементов, расположенных в вершинах равнобедренных треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали, и с вершиной в противоположном углу. Со знаком минус – три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали.

Схематически это правило (правило ***Саррюса*** или правило ***треугольников***) может быть изображено следующим образом: или

$$\begin{vmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \otimes & \otimes \\ \otimes & \bullet & \otimes \\ \otimes & \otimes & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \otimes & \bullet & \otimes \\ \otimes & \otimes & \bullet \\ \bullet & \otimes & \otimes \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \otimes & \otimes & \bullet \\ \bullet & \otimes & \otimes \\ \otimes & \bullet & \otimes \end{vmatrix} -$$

$$-\begin{vmatrix} \otimes & \otimes & \bullet \\ \otimes & \bullet & \otimes \\ \bullet & \otimes & \otimes \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \otimes & \bullet & \otimes \\ \bullet & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \bullet \\ \otimes & \bullet & \otimes \end{vmatrix}$$



\+ −

Матрицей $A=(a_{ij})$ называется прямоугольная таблица, составленная из $m\times n$ элементов a_{ij} $(1\le i\le m,\ 1\le j\le n)$ некоторого множества. Записывается матрица в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы нумеруются двумя индексами. Первый индекс i элемента a_{ij} обозначает номер строки, а второй j – номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент в матрице.

> **Определение 1 (предварительное).** Определителем матрицы А n-го порядка называется сумма всех n! произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца; при этом каждое произведение снабжено знаком плюс или минус по некоторому правилу.

Определение. ***Минором элемента*** a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца (той строки и того столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}).

Минор элемента a_{ij} обозначается M_{ij}. Здесь первый индекс означает номер строки, второй – номер столбца, которые вычеркиваются.

Определение. ***Алгебраическим дополнением элемента*** a_{ij} называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} будем обозначать через A_{1j}.

В соответствии с определением

$$\boxed{A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}}$$

Определение 2. Определителем матрицы *A* порядка *n* называется число, вычисляемое по следующему правилу:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{j=1}^{n} a_{11}(-1)^{1+j}M_{1j}=\sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j}. \qquad (1.4)$$

Формула выражает правило составления определителя n-го порядка по элементам первой строки соответствующей матрицы и по алгебраическим дополнениям этих элементов, являющимся определителями $(n-1)$-го порядка, взятыми с надлежащими знаками.

Из формулы (1.4) при $n=2$ получаем формулу (1.2), при $n=3$ – формулу (1.3). Правило (1.4) дает возможность свести вычисления определителей матриц 4-го порядка к вычислению определителей матриц 3-го порядка, вычисление определителей матриц 5-го порядка к вычислению определителей матриц 4-го порядка и т. д.

Любую строку или столбец определителя будем называть ***рядом***.

Естественно, возникает вопрос, нельзя ли использовать для получения величины определителя элементы и соответствующие им миноры не первой, а любой строки матрицы, а также вопрос о разложении определителя по элементам любого столбца. Ответ на эти вопросы дают две основные теоремы.

Теорема 4.1. *Каков бы ни был номер строки i $(1 \le i \le n)$ для определителя n-го порядка справедлива формула*

$$\boxed{|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (1 \le i \le n),}$$

называемая разложением этого определителя по i-й строке.

Теорема 4.2. *Каков бы ни был номер столбца j $(1 \le j \le n)$ для определителя n-го порядка справедлива формула*

$$\boxed{|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} \quad (1 \le j \le n),}$$

называемая разложением этого определителя по j-му столбцу.

1. Свойства определителей и их вычисление.

Определители обладают следующими свойствами:

1. Величина определителя не изменится, если поменять местами соответствующие по номеру строки и столбцы.
2. Если переставить местами две строки (два столбца), то определитель изменит знак на противоположный.
3. Определитель равен нулю, если он имеет два ряда с пропорциональными элементами.
4. Множитель, общий для всех элементов ряда, можно вынести за знак определителя..
5. Справедливо: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{vmatrix}$.
6. Если ко всем элементам строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на любое число, то определитель не изменит своего значения.

Вычисление определителей.

Определитель второго порядка вычисляется по формуле (1.2).

Пример 1.1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -7 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -2 & -7 \end{vmatrix} = 8\cdot(-7)-(-2)\cdot 3 = -56+6 = -50\cdot$$

Определитель третьего порядка можно вычислять по-разному:

1. По способу треугольников (правило ***Саррюса***). Мы будем пользоваться этим способом только в теории.
2. По правилу разложения по элементам какого-либо ряда:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{cases} \sum_{i=1}^{3} a_{ij}A_{ij} - \text{разложение по элементам столбца } j=1,2,3. \\ \sum_{j=1}^{3} a_{ij}A_{ij} - \text{разложение по элементам строки } i=1,2,3. \end{cases}$$

Чтобы получить алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} нужно вычеркнуть строку i и столбец j, на пересечение которых стоит этот элемент, затем вычислить оставшийся определитель второго порядка (минор) и приписать ему знак по правилу $(-1)^{i+j}$.

Запишем разложение определителя по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}).$$

2. Вычисление определителя после его упрощения по свойству 6.

Вспомните, прочитайте заново шестое свойство определителей.

Упрощение заключается в получении в какой-либо строке (столбце) двух нулей с помощью шестого свойства определителей. Рассмотрим это свойство на примере.

Пример 2.1. Вычислить определитель после его упрощения

▲ 1. $\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{умножим ттреть строку на } (-1) \\ \text{и сложим с первой строкой} \end{matrix} \right\} = \begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} \begin{matrix} \swarrow \\ | \\ (-1) \end{matrix} =$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{разложим по элементам} \\ \text{первой строки} \end{matrix} \right\} = (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} = -2 \cdot (-a - a) = 4a$$

Для проверки и тренировки вычислим этот же определитель по способу треугольников и методом разложения по элементам какого-либо ряда.

2. По способу треугольников это будет так:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} = a \cdot a \cdot a + (-1) \cdot (-1) \cdot a + 1 \cdot 1 \cdot a - a \cdot a \cdot a - (-1) \cdot 1 \cdot a - (-1) \cdot 1 \cdot a = 4a \cdot$$

3. Разложив определитель по элементам первой строки, получим

$$\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ -1 & a & 1 \\ a & -1 & a \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} a & 1 \\ -1 & a \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ a & a \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot a \cdot \begin{vmatrix} -1 & a \\ a & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= a \cdot (a^2 + 1) - 1 \cdot (-a - a) + a \cdot (1 - a^2) = 4a \cdot$$ ▼

В дальнейшем определитель нужно вычислять так, чтобы время на вычисление было наименьшим.

Решение задачи I типового варианта

Для данного определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$$

найти миноры и алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{32}.

Вычислить данный определитель: а) разложив его по элементам первой строки; б) разложив его по элементам второго столбца;

в) получив предварительно нули в первой строке.

▲ Находим:

$$M_{12}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=2\cdot(-1)\cdot 4+1\cdot 2\cdot 3+4\cdot 4\cdot(-1)-4\cdot(-1)\cdot 3-2\cdot 2\cdot(-1)-1\cdot 4\cdot 4=$$

$$=-8+6-16+12+4-16=-18,$$

$$M_{32}=\begin{vmatrix}-3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}=-3\cdot 1\cdot 4+1\cdot 4\cdot 3+0\cdot 2\cdot(-1)-0\cdot 1\cdot 3-(-3)\cdot 4\cdot(-1)-1\cdot 2\cdot 4=$$

$$=-12+12-0-0-12-8=-20.$$

Алгебраические дополнения элементов a_{12} и a_{32} соответственно равны:

$$A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-(-18)=18\text{, } A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-(-20)=20\cdot$$

а) Разложим определитель по элементам первой строки:

$$\Delta=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=$$

$$=(-1)^{1+1}(-3)\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1 & 4\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & -1 & 4\end{vmatrix}+(-1)^{1+2}2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+3}1\cdot\begin{vmatrix}2 & -2 & 4\\ 4 & 0 & 2\\ 3 & 1 & 4\end{vmatrix}+(-1)^{1+4}0\cdot\begin{vmatrix}2 & -2 & 1\\ 4 & 0 & -1\\ 3 & 1 & -1\end{vmatrix}=$$

$$=-3(8+2+4-4)-2(-8-16+6+12+4-16)+(16-12-4+32)=38;$$

б) Разложим определитель по элементам второго столбца:

$$\Delta=a_{12}A_{12}+a_{22}A_{22}+a_{32}A_{32}+a_{42}A_{42}=$$

$$=(-1)^{1+2}2\cdot\begin{vmatrix}2 & 1 & 4\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}+(-1)^{2+2}(-2)\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1 & 0\\ 4 & -1 & 2\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{3+2}0\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & -1 & 4\end{vmatrix}+(-1)^{4+2}1\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 4\\ 4 & -1 & 2\end{vmatrix}=$$

$$= -2(-8+6-16+12+4-16) - 2(12+6-6-16) + (-6+16-12-4) = 38;$$

в) Вычислим определитель, получив предварительно нули в первой строке. Используем свойство 6 определителей.

$$\Delta = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} (3) & (-2) & & \end{array} \\ \begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} \end{array} = \left\{ \begin{matrix} \text{умножим третий столбец определителя на 3} \\ \text{и прибавим к первому, затем умножим на} \\ \text{(-2) и прибавим ко второму.} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (-5) \begin{vmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{вторую строку умножим на} \\ \text{(−5) и сложим с первой} \end{matrix} \right\} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -14 & -6 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{matrix} \text{разложим по} \\ \text{первому столбцу} \end{matrix} \right\} = (-1)^{2+1} \cdot 1 \cdot \left(-14 \cdot 4 - (-6) \cdot 3\right) = 38 \cdot \blacktriangledown$$

Знания и умения, которыми должен владеть студент

1. Знания на уровне понятий, определений, описаний формулировок
Определители 2, 3, n-го порядков.
Минор M_{ij} элемента a_{ij}. Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij}.

2. Знания на уровне доказательств и выводов
Свойства определителей (3-го порядка).

3. Умения в решении задач
Вычислять определители 2, 3-го и старших порядков.

2. МАТРИЦЫ И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Определение матрицы дано в разделе 1. Матрицу, имеющую m строк и n столбцов, называют ***матрицей типа*** $m \times n$ (читается «эм на эн»). В отдельных случаях употребляется также термин «размер матрицы». То, что матрица A имеет тип $m \times n$, обозначается следующим образом: $A_{mn} = A_{mn} = (a_{ij})_{mn}$.

Если $m \neq n$, матрица называется ***прямоугольной***, если $m = n$ – ***квадратной***. Две матрицы, имеющие одинаковое количество строк и столбцов, называются ***матрицами одинакового типа***.

> **Определение**. Две матрицы $A_{mn} = (a_{ij})_{mn}$ и $B_{pq} = (b_{ij})_{pq}$ называются ***равными***:
>
> 1. если они одинакового типа, т. е. $p = m$, $q = n$;
> 2. их соответствующие (т. е. имеющие одинаковые двойные индексы) элементы равны, т. е.
>
> $a_{ij} = b_{ij}$ $(1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n)$.

Линейными действиями над матрицами называются сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число.

1. Сложение и вычитание матриц

> **Определение.** Суммой двух матриц A и B одинакового типа называется матрица $C = A + B$ того же типа, элементы которой равны суммам соответствующих (т. е. имеющих одинаковые двойные индексы) элементов матриц A и B.

Элементы c_{ij} матрицы $C = A + B$ определяются, следовательно, формулами

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij},}$$

где a_{ij} и b_{ij} – элементы матриц A и B соответственно. Таким образом, если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \text{то } A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}+b_{m1} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Подчеркнем еще раз, что складывать можно только матрицы с одинаковым числом строк и с одинаковым числом столбцов.

Вычитание для матриц (как и для чисел) определяется как действие, обратное сложению. Таким образом, при вычитании матриц вычитаются соответствующие элементы этих матриц, т. е.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}, \text{то } A-B=\begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & \dots & a_{1n}-b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1}-b_{m1} & \dots & a_{mn}-b_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. Умножение матрицы на число

***Определение. Произведением матрицы** $A=(a_{ij})$ **на число** λ называется матрица, элементы которой получаются из соответствующих элементов матрицы A путем умножения их на число λ.*

Произведение матрицы A на число λ будем обозначать символом λA. Таким образом, если

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{то} \quad \lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda a_{m1} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Краткая запись: $\boxed{\lambda(a_{ij})=(\lambda a_{ij})=(a_{ij})\lambda\cdot}$

3. Умножение матриц

Введем сначала понятие согласованности матриц.

Определение. Матрица A называется ***согласованной*** с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B (если «ширина» матрицы A равна «высоте» матрицы B); другими словами, матрица A_{mn} согласована с матрицей B_{np}.

Определение. Если матрица $A_{mn} = (a_{ij})_{mn}$ согласована с матрицей $B_{np} = (b_{ij})_{np}$, то их ***произведением*** называется матрица $C_{mp} = (c_{ij})_{mp}$, элемент c_{ij} которой определяется по следующему правилу

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}, \quad (1 \le i \le m;\ 1 \le j \le p).$$

Формула означает, что элемент c_{ij} матрицы C_{mp} равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A_{mn} на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B_{np} (строка матрицы A умножается на столбец матрицы B). Итак, согласно определению не всякие две матрицы можно перемножить. Произведение двух матриц имеет смысл тогда и только тогда, когда число столбцов первого множителя равно числу строк второго множителя. При этом в произведении получается матрица, число строк которой равно числу строк первого множителя, а число столбцов равно числу столбцов второго множителя. Из существования произведения AB не следует существование произведения BA. В случае его существования, как правило $BA \ne AB$. Если $AB = BA$, то матрицы A и B называются ***перестановочными*** (или ***коммутирующими***).

Вычисление произведения матриц. Умножая матрицы вручную, целесообразно расположить их удобным способом. Для этого может употребляться, например, схема Фалька, причем заранее предполагается, что для данных матриц операция умножения выполнима.

Схема Фалька для умножения двух матриц. Расположим умножаемые матрицы $A = (a_{ij})_{mn}$, $B = (b_{ij})_{np}$ и произведение матриц $AB = C = (c_{ij})_{mp}$ таким образом, чтобы элемент c_{ij} матрицы-произведения C лежал на пересечении i - й строки A и j - го столбца B (схема 2.1).

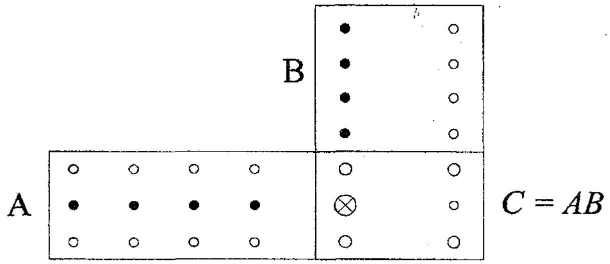


Схема 2.1.

3. Транспонирование матрицы. Обратные матрицы

Определение. ***Транспонированием*** матрицы называется такое преобразование этой матрицы, при котором каждая ее строка становится столбцом с тем же номером.

В результате транспонирования матрицы получается матрица, называемая ***транспонированной*** по отношению к данной матрице. Матрица, транспонированная относительно матрицы A, обозначается символом A^T. Таким образом, если

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \text{то} \qquad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В случае квадратной матрицы транспонирование представляет собой зеркальное отражение элементов относительно главной диагонали.

Квадратная матрица A порядка n называется ***невырожденной***, если ее определитель

$$|A| \neq 0 \cdot$$

В случае, когда $|A| = 0$, матрица A называется ***вырожденной***.

Определение. Квадратная матрица A^{-1} называется ***обратной по отношению к квадратной матрице*** *A*, если она, будучи умноженной как справа, так и слева на матрицу *A*, дает единичную матрицу *E*, т. е. если

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E \,. \qquad (3.1)$$

Из определения следует, что обратная матрица может существовать только для квадратной матрицы и, что обе матрицы имеют один и тот же порядок.

Единичной матрицей называется матрица вида $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$.

У единичной матрицы по главной диагонали стоят единицы, все остальные элементы – нули. Единичная матрица перестановочна с любой другой матрицей $AE = EA$.

Известно, что для матрицы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, которая определяется формулой

$$A^{-1} = \frac{A^{*}}{|A|}, \quad A^{*} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.2)$$

Матрица A^{*} называется ***присоединенной***, ее элементами являются алгебраические дополнения A_{ij} ***транспонированной матрицы*** A^{T}.

Алгоритм вычисления обратной матрицы. Чтобы найти матрицу A^{-1} обратную матрице *A*, нужно выполнить следующие операции:

1. Найти определитель матрицы A $(|A|)$. Если $|A| = 0$, то матрица *A* вырожденная и обратной матрицы не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица *A* невырожденная и обратная матрица существует.
2. Найти алгебраические дополнения элементов матрицы A_{ij} $(1 \le i \le n, 1 \le j \le n)$ и составить из них матрицу.
3. Транспонировать матрицу из алгебраических дополнений и получить присоединенную матрицу A^*.
4. Вычислить обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot A^*$.
5. Проверить правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из определения

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E$$

(пункт 5 не обязателен).

Решение задачи II типового варианта

Даны две матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) $A^T \cdot B + B^T \cdot A$; б) A^{-1}; в) AA^{-1}; г) $A^{-1}A$.

▲ а) Находим : A^T и B^T

$$A^T = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Произведение $A^T \cdot B$ имеет смысл, так как число столбцов матрицы A^T равно числу строк матрицы B . Произведение матриц $A^T B$ найдем по схеме Фалька

				1	2	-3	
B				2	0	1	
				-2	1	3	
	-4	2	3	-6	-5	23	
A^T	0	-1	2	-6	2	5	$A^T B$
	1	3	2	3	4	6	

Матрица B^T согласована с матрицей A , поэтому определено произведение $B^T A$. Находим:

				-4	0	1	
A				2	-1	3	
				3	2	2	
	1	2	-2	-6	-6	3	
B^T	2	0	1	-5	2	4	$B^T A$
	-3	1	3	23	5	6	

Окончательно имеем:

$$A^T B + B^T A = \begin{pmatrix} -6 & -5 & 23 \\ -6 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & -6 & 3 \\ -5 & 2 & 4 \\ 23 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -11 & 26 \\ -11 & 4 & 9 \\ 26 & 9 & 12 \end{pmatrix}.$$

б) Найдем A^{-1} .

1. (4)

$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 14 & -1 & 3 \\ 11 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 14 & -1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = (14 \cdot 2 - (-1) \cdot 11) = 39 \neq 0,$$

т. е. матрица A – невырожденная, и, значит, существует матрица A^{-1} .

2. Находим:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-8,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{vmatrix}=5,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}0 & 1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-11,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=8,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}0 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=1,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=14,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-4 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=4.$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений

$$\begin{pmatrix}-8 & 5 & 7\\ 2 & -11 & 8\\ 1 & 14 & 4\end{pmatrix}.$$

3. Получим присоединенную матрицу, транспонируя полученную матрицу из алгебраических дополнений

$$A^{*}=\begin{pmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{pmatrix}.$$

4. Тогда

$$A^{-1}=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}-8 & 2 & 1\\ 5 & -11 & 14\\ 7 & 8 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{8}{39} & \frac{2}{39} & \frac{1}{39}\\ \frac{5}{39} & -\frac{11}{39} & \frac{14}{39}\\ \frac{7}{39} & \frac{8}{39} & \frac{4}{39}\end{pmatrix}.$$

в) Имеем:

$$AA^{-1}=A\cdot\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{|A|}AA^{*}.$$

Тогда

			A^*	-8	2	1	
				5	-11	14	
				7	8	4	
A	-4	0	1	39	0	0	
	2	-1	3	0	39	0	AA^*
	3	2	2	0	0	39	

$$AA^{-1}=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}39&0&0\\0&39&0\\0&0&39\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E\cdot$$

г) Имеем

$$A^{-1}A=\frac{1}{|A|}A^*A\cdot$$

Тогда

			A	-4	0	1	
				2	-1	3	
				3	2	2	
A^*	-8	2	1	39	0	0	
	5	-11	14	0	39	0	A^*A
	7	8	4	0	0	39	

$$A^{-1}A=\frac{1}{39}\begin{pmatrix}39&0&0\\0&39&0\\0&0&39\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E\cdot$$

Таким образом, обратная матрица найдена верно. ▼

Знания и умения, которыми должен владеть студент

1. Знания на уровне понятий, определений, описаний формулировок
   Матрицы. Линейные операции над матрицами. Умножение матриц.
   Обратная матрица.
2. Знания на уровне доказательств и выводов
   Свойства операций сложения, вычитания, умножения матриц.
   Существование обратной матрицы, ее конструкция.
3. Умения в решении задач
   Находить сумму, разность, произведение матриц.
   Находить обратную матрицу.

4. Ранг матрицы. Базисный минор. Элементарные преобразования

Определение 1. ***Рангом матрицы*** А называется такое целое число r, что среди миноров r - го порядка матрицы А имеется хоть один, не равный нулю, а все миноры $(r+1)$ - го порядка (если только их можно составить) сплошь равны нулю.

Ранг матрицы А обозначают одним из символов: r, r_A, $\operatorname{rang} A$.

Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг такой матрицы считается равным нулю (здесь равны нулю миноры всех порядков).

Определение 2. ***Рангом матрицы*** называется наибольший из порядков ее миноров, отличных от нуля.

Определение. ***Базисным минором*** матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Для ненулевой матрицы существует базисный минор; отметим, что он может оказаться не единственным. Строки и столбцы матрицы, которым принадлежат элементы базисного минора, называются ***базисными***.

Определение. Под элементарными преобразованиями матрицы понимаются следующие операции:

1) умножение какой-либо строки матрицы на число, отличное от нуля;
2) прибавление к элементам одной строки матрицы соответствующих элементов другой строки, умноженных на одно и то же число;
3) перемена местами двух строк;

1), 2), 3) – аналогичные операции над столбцами.

Применяя к матрице A какое-либо элементарное преобразование, мы получаем новую матрицу B. Это факт мы будем записывать так: $A \sim B$.

Теорема 4.1. *При элементарном преобразовании ранг матрицы не меняется. Другими словами, если* $A \sim B$, то $r_A = r_B$.

5. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Теорема 5.1 (***Кронекера - Капелли***). *Для того чтобы система линейных уравнений*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{5.1}$$

была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы этой системы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

был равен рангу ее расширенной матрицы

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ . & . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

т. е. чтобы $r_A = r_{\tilde{A}}$.

1. Матричный метод

Для решения системы

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

с помощью матриц нужно ввести обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ – матрица коэффициентов,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$ – матрица неизвестных, $$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$ – матрица свободных членов.

Тогда система в матричной записи будет иметь вид $AX = B$, а ее решение определится так

$$\boxed{X = A^{-1}B.}$$

Правило: Чтобы найти решение системы с помощью матриц, нужно найти матрицу, обратную матрице коэффициентов, и умножить ее на матрицу свободных членов.

2. Формулы Крамера

Если дана неоднородная система трех линейных уравнений с тремя неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases}$$

то ей соответствуют четыре определителя: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ –

определитель системы и Δ_1, Δ_2, Δ_3 – вспомогательные определители, которые получаются из основного определителя Δ заменой столбца коэффициентов перед x_1, x_2, x_3 соответственно на столбец свободных членов.

Если $\Delta \neq 0$, то $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}$ – формулы Крамера.

Если $\Delta = 0$, а $\Delta_1 \neq 0$ или $\Delta_2 \neq 0$ или $\Delta_3 \neq 0$, то система несовместна.

Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система неопределена.

3. Метод последовательных исключений Гаусса

Если основная матрица A системы (5.1) имеет ранг $r = n$, то расширенная матрица $\widetilde{A}$ этой системы с помощью элементарных преобразований строк всегда может быть приведена к виду

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1k}^{(1)} & a_{1k+1}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & 1 & \cdots & a_{2k}^{(2)} & a_{2k+1}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{kk+1}^{(k)} & \cdots & a_{kn}^{(k)} & b_k^{(k)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_m^{(m)} \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица является расширенной матрицей системы, которая эквивалентна исходной системе. Если $r = n$, то решение этой системы единственно.

Решение задачи III типового варианта

Дана система неоднородных линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ 2x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -7. \end{cases}$$

Проверить совместность системы уравнений и в случае совместности решить ее:

а) по формулам Крамера;
б) матричным методом;
в) методом Гаусса.

▲ Совместность данной системы проверим по теореме Кронекера – Капелли. С помощью элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

данной системы и ранг расширенной матрицы

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right).$$

Преобразуем расширенную матрицу, в которой вертикальной чертой отделена матрица A:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right) \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-1) \\ \left(-\frac{1}{16}\right) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left\{ \begin{matrix} \text{поменяем местами} \\ \text{3-ю и 4-ю строки} \end{matrix} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ (-6) \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Следовательно, $r_A = r_{\tilde{A}} = 3$ (т. е. числу неизвестных). Значит, исходная система совместна и имеет единственное решение.

а) Составим определитель Δ данной системы и определители Δ_k $(k = 1, 2, 3)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 0 & -6 & -1 \\ 0 & -16 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} 1 \cdot (-16) = -16;$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}3&5&-1\\2&4&-3\\-7&-1&-3\end{vmatrix}\overset{(-3)}{} = \begin{vmatrix}3&5&-1\\-7&-11&0\\-16&-16&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}(-1)\cdot\begin{vmatrix}-7&-11\\-16&-16\end{vmatrix}=-16(7-11)=64$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}1&3&-1\\2&2&-3\\3&-7&-3\end{vmatrix}\overset{(-3)}{} = \begin{vmatrix}1&3&-1\\-1&-7&0\\0&-16&0\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}(-1)16=-16;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}1&5&3\\2&4&2\\3&-1&-7\end{vmatrix}\overset{(-2)(-3)}{} = \begin{vmatrix}1&5&3\\0&-6&-4\\0&-16&-16\end{vmatrix}=(-1)^{1+1}1\begin{vmatrix}-6&-4\\-16&-16\end{vmatrix}=2\cdot16\begin{vmatrix}3&2\\1&1\end{vmatrix}=32.$$

По формулам Крамера получаем

$$x_1=\frac{64}{-16}=-4,\quad x_2=\frac{-16}{-16}=1,\quad x_3=\frac{32}{-16}=-2.$$

б) В этом примере

$$A=\begin{pmatrix}1&5&-1\\2&4&-3\\3&-1&-3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\quad и\quad B=\begin{pmatrix}3\\2\\-7\end{pmatrix}.$$

Так как $|A|=\Delta=-16\neq0$, то матрица A имеет обратную. Найдем матрицу из алгебраических дополнений

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}4&-3\\-1&-3\end{vmatrix}=-15,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&-3\\3&-3\end{vmatrix}=-3,\ A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&4\\3&-1\end{vmatrix}=-14,$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}5&-1\\-1&-3\end{vmatrix}=16,\ A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&-1\\3&-3\end{vmatrix}=0,\ A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&5\\3&-1\end{vmatrix}=16,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}5&-1\\4&-3\end{vmatrix}=-11,\ A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&-1\\2&-3\end{vmatrix}=1,\ A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&5\\2&4\end{vmatrix}=-6,$$

$$\begin{pmatrix}-15&-3&-14\\16&0&16\\-11&1&-6\end{pmatrix}.$$

Составляем присоединенную матрицу

$$A^{*} = \begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

Вычисляем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{-16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix}.$$

Решение системы:

$$X = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} -15 & 16 & -11 \\ -3 & 0 & 1 \\ -14 & 16 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц произведем по схеме Фалька

			B	3 2 -7	
A^{*}	-15 -3 -14	16 0 16	-11 1 -6	64 -16 32	$A^{*}B$

Итак,

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 64 \\ -16 \\ 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

или $x_1 = -4,\ x_2 = 1,\ x_3 = -2$.

в) Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{c} (-2)(-3) \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -1 & -4 \\ 0 & -16 & 0 & -16 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ (-1) \\ (-\frac{1}{16}) \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 1 & 4 \end{array}\right)(-6) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right).$$

Последняя матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 = 3, \\ \quad\;\; x_2 \qquad\; = 1, \\ \qquad\qquad x_3 = -2. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом подстановки, двигаясь последовательно от последнего уравнения к первому. Из третьего уравнения находим $x_3 = -2$. Второе уравнение дает возможность определить $x_2 = 1$. Из первого уравнения находим:

$$x_1 = -5x_2 + x_3 + 3, \quad x_1 = -4.$$

Следовательно, полученная система имеет решение:

$$x_1 = -4, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = -2.$$

Это же решение имеет и исходная система. ▼

6. Однородные системы линейных уравнений

Произвольная однородная система линейных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Однородная система всегда совместна, так как она имеет следующее очевидное решение:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0,$$

которое называется ***нулевым*** или ***тривиальным***.

Теорема 6.1. *Для того чтобы однородная система линейных уравнений имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был числа неизвестных* $(r_A < n)$.

Теорема 6.2. *Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю.*

Теорема 6.3. *Если число уравнений в однородной системе линейных уравнений меньше числа неизвестных, то эта система имеет ненулевые решения.*

Решение задачи IV типового варианта

Решить однородную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 5x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 - 9x_5 = 0. \end{cases}$$

▲ Здесь число неизвестных $n = 5$, число уравнений $m = 3$, следовательно, по теореме 6.3 система имеет ненулевые решения. Вычислим ранг матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & -2 & -9 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2)(-1) \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -6 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг матрицы равен $r_A = 3$. В качестве базового минора возьмем минор, составленный их коэффициентов при x_1, x_2 и x_5 в первом и втором уравнениях преобразованной системы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \cdot$$

Оставляя базисные неизвестные x_1, x_2 и x_5 в левой части и перенося свободные неизвестные x_3 и x_4 в правую часть, приходим к системе

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 3x_5 = -2x_3, \\ \qquad x_2 + 7x_5 = -\ x_3 - 2x_4, \\ \qquad\qquad x_5 = 0. \end{cases}$$

Полагая $x_3 = \alpha,\ x_4 = \beta$, решение системы имеет вид

$$x_2 = -\alpha - 2\beta,$$

$$x_1 = -4(-\alpha - 2\beta) - 2\alpha = 2\alpha + 8\beta,$$

где $\alpha,\ \beta$ могут принимать любые вещественные значения.
Имеем:

$$X = \begin{pmatrix} 2\alpha + 8\beta \\ -\alpha - 2\beta \\ \alpha \\ \beta \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \blacktriangledown$$

7. Определение собственных чисел и собственных векторов матриц

Определение. Число λ называется ***собственным числом (значением)*** квадратной матрицы *A*, если существует ненулевой столбец *X* такой, что $AX = \lambda X$. Если λ – собственное число матрицы *A*, то всякий столбец *X* (в том числе и нулевой), удовлетворяющий условию (1.3), называется ***собственным столбцом*** матрицы *A*, соответствующим собственному числу λ.

При условии, что вектор $X \neq O$, получаем ***характеристическое уравнение*** для определения собственных значений λ

$$|A - \lambda E| = 0. \qquad (7.1)$$

Координаты собственного вектора $X^{(i)}$, соответствующие собственному значению λ_i, являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda_i)x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots + & a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda_i)x_2 + \ldots + & & a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots & \ldots \quad \ldots & \ldots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda_i)x_n = 0. \end{cases} \tag{7.2}$$

Решение задачи V типового варианта

Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

▲ Характеристическое уравнение для данной матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Преобразуем определитель в левой части характеристического уравнения

$$(-1)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 2+\lambda & 0 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 4-\lambda \\ 1 & 5-\lambda & 2 \\ 2+\lambda & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (2+\lambda)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 4-\lambda \\ 5-\lambda & 2 \end{vmatrix} = (2+\lambda)\big(2-(5-\lambda)(4-\lambda)\big) = (2+\lambda)(-\lambda^2+9\lambda-18).$$

Следовательно, уравнение для определения корней будет таким

$$(2+\lambda)(\lambda^2-9\lambda+18) = 0.$$

Таким образом, матрица *A* имеет три собственных значения:

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6.$$

Собственный вектор $X^{(1)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$, определим из системы уравнений вида (7.2)

$$\begin{cases} (1+2)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + (5+2)x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + (1+2)x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Найдем ранг матрицы, для чего преобразуем ее к более простому виду:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} (-3) \\ \hookrightarrow \\ \hookrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \\ (-1) \\ \hookrightarrow \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $|A_1| = 0$ и имеется минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, отличный от нуля, то ранг этой матрицы равен двум $(r_{A_1} = 2)$ и данная система имеет нетривиальное решение $(n = 3,\ r_{A_1} < n)$. В качестве базисного минора выбираем уже указанный минор, которому соответствует система первых двух уравнений преобразованной системы:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 = -x_3, \\ x_2 = 0, \end{cases}$$

где x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободная неизвестная. Решая систему, находим: $x_1 = -x_3$, $x_2 = 0$.

Придавая свободной неизвестной x_3 произвольное значение $x_3 = \alpha$, получаем решение исходной системы в виде: $x_1 = -\alpha$, $x_2 = 0$, $x_3 = \alpha$. Следовательно, первый собственный вектор $X^{(1)} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Второй собственный вектор $X^{(2)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 3$, определим из системы уравнений

$$\begin{cases}(1-3)x_1+ & x_2+ & 3x_3=0,\\ x_1+(5-3)x_2+ & x_3=0, \\ 3x_1+ & x_2+(1-3)x_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x_1+x_2+3x_3=0,\\ x_1+2x_2+x_3=0,\\ 3x_1+x_2-2x_3=0.\end{cases}$$

Найдем ранг матрицы системы

$$A_2=\begin{pmatrix}-2&1&3\\1&2&1\\3&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\-2&1&3\\3&1&-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&5&5\\0&-5&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Так как $|A_2|=0$ и имеется минор второго порядка $\begin{vmatrix}1&2\\0&1\end{vmatrix}$, отличный от нуля, то ранг этой матрицы равен двум $(r_{A_2}=2)$ и данная система имеет нетривиальное решение $(n=3,\ r_{A_2}<n)$. В качестве базисного минора выбираем уже указанный минор, которому соответствует система первых двух уравнений преобразованной системы:

$$\begin{cases}x_1+2x_2=-x_3,\\ x_2=-x_3,\end{cases}$$

где x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободная неизвестная.

Решая систему, находим: $x_1=x_3,\quad x_2=-x_3$.

Придавая свободной неизвестной x_3 произвольное значение $x_3=\alpha$, получаем решение исходной системы в виде: $x_1=\alpha,\ x_2=-\alpha,\ x_3=\alpha$. Следовательно, второй собственный вектор $X^{(2)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Третий собственный вектор $X^{(3)}$, соответствующий собственному значению $\lambda_3=6$, определим из системы уравнений

$$\begin{cases}(1-6)x_1+\quad x_2+\quad 3x_3=0,\\ \quad x_1+(5-6)x_2+\quad x_3=0,\\ \quad 3x_1+\quad x_2+(1-6)x_3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5x_1+x_2+3x_3=0,\\ x_1-x_2+\ x_3=0,\\ 3x_1+x_2-5x_3=0.\end{cases}$$

Найдем ранг матрицы системы

$$A_3=\begin{pmatrix}-5&1&3\\1&-1&1\\3&1&-5\end{pmatrix}\sim\ (-3)\ (5)\begin{pmatrix}1&-1&1\\-5&1&3\\3&1&-5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-4&8\\0&4&-8\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Так как $|A_3|=0$ и имеется минор второго порядка $\begin{vmatrix}1&-1\\0&-1\end{vmatrix}$, отличный от нуля, то ранг этой матрицы равен двум $(r_{A_3}=2)$ и данная система имеет нетривиальное решение $(n=3,\ r_{A_3}<n)$. В качестве базисного минора выбираем уже указанный минор, которому соответствует система первых двух уравнений преобразованной системы:

$$\begin{cases}x_1-x_2=-\ x_3,\\ \quad -x_2=-2x_3,\end{cases}$$

где x_1, x_2 – базисные неизвестные, x_3 – свободная неизвестная. Решая систему, находим: $x_1=x_3,\quad x_2=2x_3$.

Придавая свободной неизвестной x_3 произвольное значение $x_3=\alpha$, получаем решение исходной системы в виде: $x_1=\alpha,\ x_2=2\alpha,\ x_3=\alpha$.

Следовательно, третий собственный вектор $X^{(3)}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$. ▼

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Боревич З. И.* Определители и матрицы: Учеб. Пособие для вузов. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит, 1988. – 184 с.
2. *Веретенников В.* Н. Элементы линейной алгебры: Учебное пособие (рукопись). – СПб.: изд. РГГМУ, 2000 – 92 с.
3. *Краснов М.* Л. и др. Вся высшая математика: Учебник. Т.1. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 328 с.

Знания и умения, которыми должен владеть студент

1. *Знания на уровне понятий, определений, описаний формулировок*

Ранг матрицы. Базисный минор.

Зависимая и независимая система векторов.

Определенные, неопределенные, совместные, несовместные линейные алгебраические системы уравнений.

Матричная запись линейных алгебраических систем уравнений.

Метод Гаусса решения линейных алгебраических систем уравнений.

Метод Кронекера-Капелли исследования и решения линейных алгебраических систем уравнений.

Собственные значения и собственные векторы матрицы.

2. *Знания на уровне доказательств и выводов*

Матричный метод решения линейных алгебраических систем уравнений.

Теорема Крамера.

Необходимое и достаточное условие неопределенности однородной линейной алгебраической системы.

3. *Умения в решении задач*

Находить ранги матриц

Решать произвольные системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.

Решать квадратные системы методом Крамера.

Анализировать совместность систем методом Кронекера-Капелли.

Находить собственные значения и собственные векторы матриц.

Валентин Николаевич Веретенников

ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. МАТРИЦЫ.
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Индивидуальное домашнее задание

Редактор И. Г. Максимова

Формат 60х84/16. Объем 2,3 п.л. Тираж 250 экз.
Заказ №79 от 09.04.2004 г.
Отпечатано в ООО «КРОМ»
СПб, Новочеркасский пр. 1
Тел./факс (812) 224-95-29