

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ
по дисциплине
“МАТЕМАТИКА”**

Специальности: — экономика и управление на предприятии
природопользования
— менеджмент организации

Курс I-II



САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2001

Одобрено Ученым советом РГГМУ

УДК 511

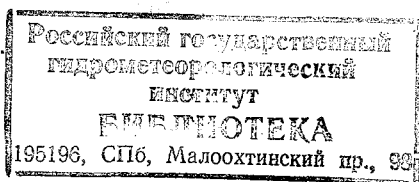
Учебно-методическое пособие для выполнения контрольных работ по дисциплине "Математика". – СПб: изд. РГГМУ, 2001 – с. 70
Специальности: – экономика и управление на предприятии природопользования
– менеджмент организации

Приведены основные теоретические сведения, примеры решения типичных задач и рекомендованная литература.

Составитель: В. Н. Веретенников, канд. техн. наук, доц. РГГМУ

© Российский государственный гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2001.

© В. Н. Веретенников 2001.



ПРЕДИСЛОВИЕ

“Математика” является не только мощным средством решения прикладных гидрометеорологических задач, но также и элементом общей культуры. Именно в рамках математического образования студент получает навыки творческого подхода к решению интеллектуальных проблем, точному пониманию средств возможностей решения проблем, знакомится с современными информационными технологиями.

Целью математического образования является:

1. Воспитание достаточно высокой математической культуры,
2. Привитие навыков современных видов математического мышления,
3. Привитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования в практической деятельности.

Воспитание у студентов математической культуры включает в себя ясное понимание необходимости математической составляющей в общей подготовке студента. Он должен выработать представление о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре, уметь логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений.

В пособии излагаются основные теоретические сведения по методам решения задач линейной алгебры и аналитической геометрии, математического анализа, обыкновенных дифференциальных уравнений и рядов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1980, 1984.
2. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М.: Наука, 1980, 1984. – 175 с.
3. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальное и интегральное исчисление. – М.: Наука, 1980, 1984.
4. Бугров Я. С., Никольский С. М. Высшая математика. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1981, 1985.
5. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1970-1985, т. 1, 2.
6. Мышкис А. Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1973. – 640 с.
7. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. – СПб: Лань, 1997. – 727 с.
8. Щипачев В. С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1985. – 471 с.
9. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I–III. – М.: Высшая школа, 1980.
10. Рябушко А. П. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. В 3 ч. – Мн. Выш. шк., 1991.
11. Кузнецов Л. А. Сб. заданий по высшей математике (типовые расчеты): Учебное пособие для втузов. – Высшая школа, 1994. – 206 с.
12. Веретенников В. Н. Программа дисциплины «МАТЕМАТИКА» для высших учебных заведений. – СПб.: изд. РГТМУ, 2000. – 9 с.
13. Веретенников В. Н. Математика. Учебно-методическое пособие для выполнения контрольных работ. – СПб.: изд. РГТМУ, 2001. – 68 с.

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Литература: [1], гл. 5, п. 1–7, гл. 6, п. 3; [2], п. 1–4; [6], гл. 6; [7], гл. 7; [8], гл. 10; [9], ч. 1, гл. 4; [13].

Основные теоретические сведения

1. **Матрицей** $A = (a_{ij})$ называется прямоугольная таблица, составленная из $m \times n$ элементов a_{ij} ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) некоторого множества. Записывается матрица в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы нумеруются двумя индексами. Первый индекс i элемента a_{ij} обозначает номер строки, а второй j – номер столбца, на пересечении которых находится этот элемент в матрице. Если у матрицы m строк и n столбцов, то, по определению, она имеет размерность $m \times n$.

Матрицы A и B называются **равными**, если все их соответствующие элементы a_{ij} и b_{ij} равны, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$. Следовательно, равными могут быть только матрицы одинаковой размерности.

Матрица размера $n \times n$ называется **квадратной матрицей** n -го порядка. Элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют **главную диагональ** матрицы. Определитель, составленный из элементов квадратной матрицы, называется **определителем матрицы** и обозначается $|A|$ или $\det A$.

Матрица E с элементами $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{если } i = j, \\ 0 & \text{если } i \neq j \end{cases}$ называется **единичной матрицей** n -го порядка.

Основные операции над матрицами: сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число, умножение матриц.

Произведением матрицы $A = (a_{ik})$ **размера** $m \times l$ **на матрицу** $B = (b_{kj})$ **размера** $l \times n$ называется матрица $C = A \cdot B = (c_{ij})$ **размера** $m \times n$ с элементами

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \cdot b_{kj} \quad (1.1)$$

(поэлементное умножение i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B).

Произведение двух матриц имеет смысл тогда и только тогда, когда число столбцов первого множителя равно числу строк второго множителя. Схематически правило для вычисления элементов в произведении двух матриц можно изобразить так:

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \circ & \circ & \circ & \otimes & \circ & \circ \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \bullet & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Преобразование элементов квадратной матрицы, состоящее в замене строк соответствующими столбцами, называется **транспонированием матрицы**. Для матрицы A транспонированную матрицу будем обозначать A^T . В частности, при транспонировании матрица-столбец превращается в матрицу-строку, и наоборот.

2. Определителем (детерминантом) квадратной матрицы второго порядка

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ называется число $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$. Определитель матрицы обозначается

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

Правило, по которому вычисляется определитель матрицы второго порядка, схематически можно изобразить следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ \\ \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet \\ \bullet & \circ \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{matrix} \begin{matrix} \swarrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{matrix} \begin{matrix} + & - \end{matrix}$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число

$$a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}.$$

Определитель матрицы 3-го порядка обозначается

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32}.$$

Заметим, что каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части последней формулы представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Этому произведению приписывается соответствующий знак. Чтобы запомнить, какие произведения следует брать со знаком «плюс», какие — со знаком «минус», можно пользоваться правилом, схематически изображенным следующим образом:

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Определителем матрицы n -го порядка называется сумма всех $n!$ произведений элементов этой матрицы, взятых по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца; при этом каждое произведение снабжено знаком «плюс» или «минус» по некоторому правилу. Вычисление определителей выше третьего порядка производится путем использования различных свойств, которыми обладают определители.

3. Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель $(n-1)$ -го порядка Δ_{n-1} , полученный из определителя n -го порядка Δ_n вычеркиванием i -й строки и j -го столбца.

Алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определяется равенством

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Рекуррентная формула для вычисления определителя n -го порядка имеет вид

$$\Delta_n = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \dots + a_{1n}A_{1n}$$

(разложение определителя по элементам 1-й строки). Для $n = 3$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; & A_{12} &= (-1)^{1+2} M_{12} = \\ &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}; & A_{13} &= (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Матрица A^{-1} называется **обратной** для квадратной матрицы A ($|A| \neq 0$), если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E. \quad (1.2)$$

Чтобы найти обратную матрицу A^{-1} , нужно выполнить следующие операции:

- найти определитель матрицы A ($|A|$);
- составить матрицу из алгебраических дополнений к элементам данной матрицы;
- транспонировать матрицу из алгебраических дополнений и получить **присоединенную (союзнную)** матрицу A^* ;
- записать

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^*, \quad (1.3)$$

Под **элементарными преобразованиями матрицы** понимаются следующие операции: 1) перестановка строк (столбцов); 2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля; 3) прибавление к элементам какой-либо строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число.

Матрицы, переходящие друг в друга в результате элементарных преобразований, называются *эквивалентными*: $A \sim A_1$.

Рангом матрицы A называется такое число r , что среди миноров r -го порядка матрицы A имеется хотя один, не равный нулю, а все миноры $(r + 1)$ -го порядка (если только их можно составить) сплошь равны нулю.

Базисным минором матрицы называется всякий отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу данной матрицы.

4. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3 имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3, \end{cases} \quad (1.4)$$

где a_{ij} – коэффициенты системы; b_i – свободные члены.

Определитель третьего порядка Δ , составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *определителем системы*. Если $\Delta \neq 0$, то единственное решение системы (1.4) выражается *формулой Крамера*:

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta, \quad x_2 = \Delta_2 / \Delta, \quad x_3 = \Delta_3 / \Delta, \quad (1.5)$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – определители третьего порядка, получаемые из определителя системы Δ заменой 1, 2 или 3-го столбца соответственными свободными членами b_1, b_2, b_3 .

Систему можно записать в *матричной форме*: $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда ее решение имеет вид

$$X = A^{-1} \cdot B, \quad (1.6)$$

если определитель системы отличен от нуля.

Метод исключения Гаусса – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе треугольного (или ступенчатого) вида, из

которой последовательно, начиная с последних (по номеру) неизвестных, находятся все остальные неизвестные.

Из первого уравнения системы (1.4), в которой все члены перенесены в левую часть, выражаем x_1 через остальные неизвестные. Получим

$$x_1 = b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}, \quad (1.7)$$

где $b_{1j} = -a_{1j}/a_{11}$, $a_{11} \neq 0$, $2 \leq j \leq 4$. Исключим из оставшихся уравнений x_1 ; для этого достаточно подставить значение x_1 из (1.7) во 2, 3 и 4-е уравнения системы (1.4). Тогда придем к системе из двух уравнений, не содержащих x_1 :

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + a_{24}^{(1)} = 0, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + a_{34}^{(1)} = 0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Из способа получения этой системы видно, что

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} + a_{i1} \cdot b_{1j}, \quad i = 2, 3, \quad 2 \leq j \leq 4.$$

Систему (1.8) можно подвергнуть тому же преобразованию, что и первоначальную. Приходим к уравнению $x_3 = b_{34}$. Итак, получаем три уравнения (вида (1.7)), которые объединяем в систему

$$\begin{cases} x_1 = b_{12}x_2 + b_{13}x_3 + b_{14}, \\ x_2 = b_{23}x_3 + b_{24}, \\ x_3 = b_{34}. \end{cases} \quad (1.9)$$

Из уравнений (1.9) последовательно находим все три неизвестных.

Переход системы (1.4) к равносильной ей системе (1.9) называется *прямым ходом* метода Гаусса, а нахождение неизвестных из системы (1.9) – *обратным ходом*.

На практике процесс решения системы уравнений облегчается тем, что указанным выше преобразованиям подвергают не саму систему, а *расширенную* матрицу системы (1.4)

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array} \right), \quad (1.10)$$

составленную из коэффициентов уравнений системы и их свободных членов. При этом каждому элементарному преобразованию,

проведенному над системой (1.4), соответствует преобразование над матрицей (1.10).

Исследование и решение линейных систем можно проводить по следующей схеме.

- Составить матрицу A и расширенную матрицу $\tilde{A}$ из коэффициентов данной линейной системы m уравнений с n неизвестными.
- Найти ранг r матрицы A данной системы и ранг $\tilde{r}$ расширенной матрицы $\tilde{A}$.
- Сравнить ранги указанных матриц и сделать выводы;
 - а) если $r \neq \tilde{r}$, то система несовместна (не имеет решений);
 - б) если $r = \tilde{r}$, то система совместна (имеет решения).
- В случае $r = \tilde{r}$ выделить базисный минор и базисные неизвестные, данную систему заменить равносильной ей системой, состоящей из тех r уравнений, в которые входят элементы базисного минора.
- Если $r = n$, т. е. число базисных неизвестных равно числу неизвестных данной системы, то система имеет единственное решение; это решение можно найти по формулам Крамера.
- В случае $r < n$ из полученной системы, равносильной исходной системе, находим выражения базисных неизвестных через свободные неизвестные. Придавая свободным неизвестным произвольные вещественные значения, находим бесконечное множество решений полученной и исходной линейных систем.

5. Число λ называется **собственным числом (значением)** квадратной матрицы A , если существует ненулевой столбец X такой, что $AX = \lambda X$. Если λ – собственное число матрицы A , то всякий столбец X , удовлетворяющий условиям $AX = \lambda X$, называется **собственным столбцом (вектором)** матрицы A , соответствующим собственному числу λ .

При условии, что вектор $X \neq O$, получаем **характеристическое уравнение** для определения собственных значений λ

$$|A - \lambda E| = 0. \quad (1.11)$$

Координаты собственного вектора X_i , соответствующие собственному значению λ_i , являются решением системы уравнений

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda_i)x_n = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Пример 1. Найти произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B , поэтому определено произведение $A \cdot B$.

Умножая матрицы, целесообразно расположить их удобным способом. Для этого может употребляться, например, схема Фалька. Расположим умножаемые матрицы $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ и произведение матриц $A \cdot B = C = (c_{ij})$ таким образом, чтобы элемент c_{ij} матрицы-произведения C лежал на пересечении i -й строки A и j -го столбца B (схема 1). Решение представлено на схеме 2.

В схеме 2 угловыми скобками выделено вычисление элемента c_{22} (сам элемент выделен фигурными скобками):

$$\begin{array}{c} B = \begin{vmatrix} \bullet & \circ & \\ \bullet & \circ & \\ \bullet & \circ & \\ \bullet & \circ & \end{vmatrix} \end{array} \quad \begin{vmatrix} 2 & \langle -1 \rangle & -1 \\ 3 & \langle -5 \rangle & 4 \\ 1 & \langle 2 \rangle & 1 \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} \quad C = A \cdot B; \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 & -2 & -3 & -11 \\ \langle 8 \rangle & \langle -7 \rangle & \langle -6 \rangle & -11 & \{15\} & -48 \\ -3 & 4 & 2 & 8 & -13 & 24 \end{vmatrix}$$

Схема 1

Схема 2

$$c_{22} = (8 \quad -7 \quad -6) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 8 \cdot (-1) + (-7) \cdot (-5) + (-6) \cdot 2 = 15.$$

Пример 2. Решить систему линейных уравнений с помощью формул Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-3)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -9 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & -9 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -9 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = -26$$

Так как $\Delta \neq 0$, решение системы может быть найдено по формулам Крамера (1.5). Для этого найдем Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 17 & -2 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(2)} \begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & -4 \\ 9 & 0 & 6 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{vmatrix} -5 & 1 & -3 \\ 7 & 0 & -4 \\ 9 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 9 & 6 \end{vmatrix} = -78, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 17 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{vmatrix} 2 & -5 & -3 \\ 1 & 17 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{vmatrix} 0 & -13 & -9 \\ 1 & 13 & -1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -13 & -9 \\ 13 & -1 \end{vmatrix} = 130, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 17 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-2)} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & -2 & 17 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{vmatrix} 0 & -1 & -13 \\ 0 & -3 & 13 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & -13 \\ -3 & 13 \end{vmatrix} = -52. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения определителей в формулы (1.5), получаем искомое решение:

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 3, \quad x_2 = \Delta_2 / \Delta = -5, \quad x_3 = \Delta_3 / \Delta = 2.$$

Пример 3. Найти решение системы примера 2 средствами матричного исчисления, при этом правильность вычисления обратной матрицы проверить, используя матричное умножение.

Решение. Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Так как определитель матрицы системы $\Delta = |A| = -26$ отличен от нуля (см. пример 2), то матрица A имеет обратную. Для нахождения обратной матрицы A^{-1} вычислим алгебраические дополнения элементов матрицы A

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -6, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -4, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5. \end{aligned}$$

Составим матрицу из алгебраических дополнений A_{ij} и присоединенную матрицу A^* :

$$\begin{pmatrix} -8 & -1 & 3 \\ -6 & 9 & -1 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Согласно формуле (1.3), матрица A^{-1} , обратная к A , имеет вид

$$A^{-1} = -\frac{1}{26} \begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

Проверим правильность вычисления A^{-1} , исходя из определения

обратной матрицы (1.2) и используя схему Фалька:

$$A^* \left| \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline -8 & -6 & -4 & -26 & 0 & 0 \\ -1 & 9 & -7 & 0 & -26 & 0 \\ 3 & -1 & -5 & 0 & 0 & -26 \end{array} \right| A^* A$$

Схема 3

$$A^{-1}A = -\frac{1}{26}A^*A = -\frac{1}{26} \begin{pmatrix} -26 & 0 & 0 \\ 0 & -26 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Матричное решение данной системы в силу формулы (1.6) и равенства $A^{-1}B = -\frac{1}{26}A^*B$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26} \begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$A^* \left| \begin{array}{ccc|c} -5 & & & \\ 17 & & & \\ 4 & & & \\ \hline -8 & -6 & -4 & -78 \\ -1 & 9 & -7 & 130 \\ 3 & -1 & -5 & -52 \end{array} \right| A^* B; \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26} \begin{pmatrix} -78 \\ 130 \\ -52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Схема 4

Откуда следует (из условия равенства двух матриц), что

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -5, \quad x_3 = 2.$$

Пример 4. Найти решение системы примера 2 методом Гаусса.

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем

ее. Для удобства вычислений отделим вертикальной чертой столбец, состоящий из свободных членов:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 17 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array} \right)$$

Последовательно переставим местами строки: $3 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$, $2 \rightarrow 3$. Получим матрицу, эквивалентную исходной.

Умножим первую строку матрицы последовательно на (-2) и (-1) и сложим соответственно со второй и третьей строками. Получим матрицу, эквивалентную исходной.

Умножим вторую строку на (-3) и сложим ее с третьей строкой матрицы. Получим матрицу, эквивалентную исходной.

Умножим вторую строку на (-1) , а третью строку разделим на 26. Получим матрицу, эквивалентную исходной.

$$\begin{aligned} \tilde{A} &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & -5 \\ 1 & -2 & 2 & 17 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(-2) \\ (-1)}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -9 & -13 \\ 0 & -3 & -1 & 13 \end{array} \right) \xrightarrow{(-3)} \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -9 & -13 \\ 0 & 0 & 26 & 52 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Из коэффициентов последней матрицы составим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 = 4, \\ x_2 + 9x_3 = 13, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом подстановки, двигаясь последовательно от последнего уравнения к первому. Из третьего уравнения $x_3 = 2$. Подставив значение x_3 во второе уравнение, найдем $x_2 = -5$. Подставив значения x_3 , x_2 в первое уравнение, найдем $x_1 = 3$.

Пример 5. Определить собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристическое уравнение (1.11) для данной матрицы имеет вид

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \lambda^3 - 7\lambda^2 + 36 = 0. \text{ Его}$$

корнем, как легко проверить, будет $\lambda_1 = -2$. Разделим левую часть этого уравнения на двучлен $\lambda+2$. Квадратное уравнение для определения остальных двух корней будет $\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$. Таким образом, матрица A имеет три собственных значения

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 6.$$

Собственный вектор X_1 , соответствующий $\lambda_1 = -2$, определяется из системы уравнений вида (1.12)

$$\begin{cases} (1+2)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + (5+2)x_2 + x_3 = 0, \text{ или } \\ 3x_1 + x_2 + (1+2)x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Однородная система имеет нетривиальное решение, если ранг матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

меньше числа неизвестных. Найдем ранг матрицы A , для чего преобразуем ее к более простому виду:

$$A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & -20 & 0 \\ 0 & -20 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $|A| = 0$ (две одинаковые строки в определителе матрицы A) и имеется минор второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$, отличный от нуля, ранг этой матрицы равен двум ($r = 2$) и данная система имеет нетриви-

альное решение. В матрице A минор $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Этому базисному минору соответствует система первых двух уравнений, которую можно написать так:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = -3x_3, \\ x_1 + 7x_2 = -x_3, \end{cases}$$

где x_1, x_2 — базисные неизвестные; x_3 — свободная неизвестная. Решая эту систему по формулам Крамера, находим

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -3x_3 & 1 \\ -x_3 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}} = -x_3, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -3x_3 \\ 1 & -x_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}} = 0.$$

Итак, система имеет решение $x_1 = -x_3, x_2 = 0$. Придавая свободной неизвестной x_3 произвольные значения $x_3 = t$, получаем решения исходной системы в виде $x_1 = t, x_2 = 0, x_3 = t$. Следова-

тельно, первый собственный вектор $X_1 = \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \end{pmatrix} = t(-1 \ 0 \ 1)^T$.

Второй собственный вектор X_2 , соответствующий собственному значению $\lambda_2 = 3$, определяется из системы уравнений вида (2.8):

$$\begin{cases} (1-3)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + (5-3)x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + (1-3)x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система сводится к системе

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 = -3x_3, \\ x_1 + 2x_2 = -x_3, \end{cases}$$

решение которой $x_1 = x_3, x_2 = -x_3$. Полагая $x_3 = t$, запишем ее решение в виде $x_1 = t, x_2 = -t$. Следовательно, второй собственный вектор есть $X_2 = (t \ -t \ t)^T = t(1 \ -1 \ 1)^T$.

Третий собственный вектор X_3 , соответствующий собственному значению $\lambda_3 = 6$, определяется из системы уравнений:

$$\begin{cases} (1-6)x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + (5-8)x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + (1-6)x_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система уравнений сводится к системе

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 = -3x_3, \\ x_1 - x_2 = -x_3, \end{cases}$$

решение которой $x_1 = x_3$, $x_2 = 2x_3$. Полагая $x_3 = t$, запишем ее решение в виде $x_1 = t$, $x_2 = 2t$. Следовательно, третий собственный вектор есть $X_3 = (t \ 2t \ t)^T = t(1 \ 2 \ 1)^T$.

ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Литература: [1], гл. 1, п. 1-3, 10, гл. 2, п. 1-3, гл. 3, п. 1, 2; [2], п. 7-11, 24-26; [6], гл. 2, гл. 7, п. 1-3, гл. 10; [7], гл. 1, гл. 8, п. 1-4, гл. 9; [8], гл. 3, гл. 9, п. 1-6, 9-14; [9], ч. 1, гл. 1-3; [13].

Основные теоретические сведения

1. Векторы. Линейные операции над векторами.

Скалярная величина — величина, которая характеризуется только числом. **Векторная величина** — величина, которая для своей характеристики кроме числа, требует еще указать направление (сила, скорость и др.).

Вектор — направленный отрезок $(\overline{AB}, \mathbf{a})$, один из концов которого называется началом (A), а другой — концом (B). **Длина вектора** — скаляр, характеризующий вектор $(|\overline{AB}| = |\mathbf{a}|)$. Направление вектора характеризуется заданием начала и конца или углами, которые он образует с осями координат (α, β, γ) . Косинусы этих углов — **направляющие косинусы** — обладают свойством

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Над векторами можно производить алгебраические операции: умножать на число, складывать и вычитать. Свойства этих операций над векторами в основном совпадают со свойствами аналогичных операций в алгебре.

Вектор

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n,$$

полученный в результате проведения нескольких линейных операций, называется **линейной комбинацией** векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ называются коэффициентами этой линейной комбинации.

Понятия, которые нужно запомнить!

1. **Орт** – вектор, длина которого равна 1 (единичный вектор).
2. **Нулевой вектор** – вектор, длина которого равна 0, а направление не определено.
3. **Векторы коллинеарны**, если они лежат на параллельных прямых ($\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$). Условие коллинеарности $\lambda_1 \mathbf{a} + \lambda_2 \mathbf{b} = 0$ или $\mathbf{b} = \lambda \mathbf{a}$.
4. **Векторы перпендикулярны**, если они образуют угол 90° ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$).
5. **Векторы равны** ($\mathbf{a} = \mathbf{b}$), если они коллинеарны, имеют равные длины ($|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$) и одинаково направлены (сонаправлены $\mathbf{a} \uparrow \mathbf{b}$).
6. **Векторы противоположны**, если $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$, они коллинеарны и противоположно направлены ($\mathbf{a} \downarrow \mathbf{b}$).
7. **Векторы компланарны**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.
8. **Базисные орты** – орты $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, направленные по осям координат.

Система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ называется **линейно-зависимой**, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_n \mathbf{a}_n = 0.$$

Если для системы векторов $\mathbf{a}_i$ ($1 \leq i \leq n$) это равенство верно только в случае, когда $\lambda_i = 0$, то эта система называется **линейно независимой**.

Пару векторов будем называть «упорядоченной парой», если указано, какой вектор пары считается первым, а какой вторым.

Упорядоченная пара линейно независимых (неколлинеарных) векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ называется **базисной системой векторов** (**базисом**) на плоскости, определяемой заданными векторами.

Теорема разложения. Всякий вектор на плоскости может быть

представлен как линейная комбинация базисной системы векторов, это представление (разложение по базисной системе) единственно.

$$a = a_x e_1 + a_y e_2,$$

где a_x, a_y координаты вектора a в базисе e_1, e_2 .

Упорядоченная тройка (если указано, какой вектор тройки считается первым, какой вторым и какой третьим) линейно независимых (некомпланарных) векторов e_1, e_2, e_3 называется базисной системой векторов (базисом) в пространстве.

Теорема разложения. Всякий вектор может быть представлен как линейная комбинация базисной системы векторов; это представление (разложение по базисной системе) единственно.

$$a = a_x e_1 + a_y e_2 + a_z e_3,$$

где a_x, a_y, a_z координаты вектора a в базисе e_1, e_2, e_3 .

Базис называется **ортонормированным**, если его векторы взаимно перпендикулярны и имеют единичную длину. Обозначают такой базис i, j, k .

2. Скалярным произведением двух векторов a и b называется число, которое обозначается $a \cdot b$ и равно произведению модулей данных векторов на косинус угла между ними

$$a \cdot b = |a| |b| \cos(a, b). \quad (2.1)$$

Если

$$a = a_x i + a_y j + a_z k, \quad b = b_x i + b_y j + b_z k,$$

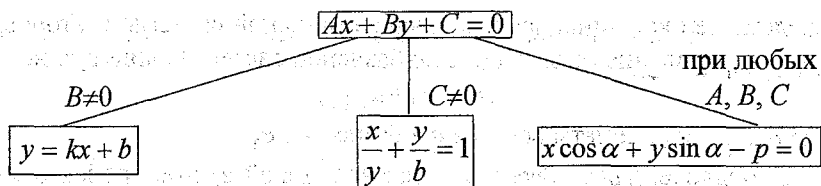
то

$$a \cdot b = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z, \quad (2.2)$$

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \quad (2.3)$$

$$\cos(a, b) = \frac{a \cdot b}{|a| |b|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}. \quad (2.4)$$

3. Основные задачи на прямую линию на плоскости. Любому уравнению первой степени $Ax + By + C = 0$ соответствует прямая линия на плоскости xOy и наоборот. В зависимости от условия задачи уравнение $Ax + By + C = 0$ может быть записано по-разному:



Общее уравнение прямой

$$Ax + By + C = 0. \quad (2.5)$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b, \quad (2.6)$$

$k = \operatorname{tg} \alpha$ – угловой коэффициент прямой. Угол наклона прямой (α) измеряется от положительного направления оси Ox до прямой (против часовой стрелки). Начальная ордината b – отрезок, отсекаемый прямой от оси Oy .

Уравнение прямой в отрезках

$$x/a + y/b = 1, \quad (2.7)$$

a, b – отрезки, отсекаемые прямой на осях Ox, Oy соответственно.

Нормальное уравнение прямой

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \quad (2.8)$$

α – угол наклона нормали прямой, p – расстояние от начала координат до прямой.

Если даны две прямые $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то координаты точки пересечения находят как решение системы

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Угол между прямыми линиями определяется формулой

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{|k_2 - k_1|}{|1 + k_2 k_1|}, \quad (2.9)$$

где k_1 и k_2 – угловые коэффициенты сторон угла, $0 \leq \varphi < \pi/2$ (φ – наименьший угол между двумя прямыми).

Если **прямые**

$$y = k_1x + b_1, \quad y = k_2x + b_2 \quad (A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0)$$

параллельны, то $k_1 = k_2$ ($A_1/A_2 = B_1/B_2$),

если **перпендикулярны**, то $k_1 \cdot k_2 = -1$ ($A_1A_2 + B_1B_2 = 0$).

Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0; y_0)$ в данном направлении ($\operatorname{tg} \alpha = k$):

$$y - y_0 = k(x - x_0). \quad (2.10)$$

Если k не задано (произвольно), то это же уравнение – **уравнение пучка прямых**.

Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}. \quad (2.11)$$

Расстояние от точки до прямой. Чтобы найти расстояние от точки $(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$, нужно уравнение прямой привести к нормальному виду и в него вместо текущих координат подставить координаты точки $(x_0; y_0)$:

$$d = |(Ax_0 + By_0 + C) / \sqrt{A^2 + B^2}|. \quad (2.12)$$

4. Определение основных элементов в треугольнике.

1) Определение вершин треугольника по уравнениям сторон.

Приведем решение задачи в общем виде. Даны уравнения сторон: (AB) , (AC) , (CB) . Найти вершины A , B , C .

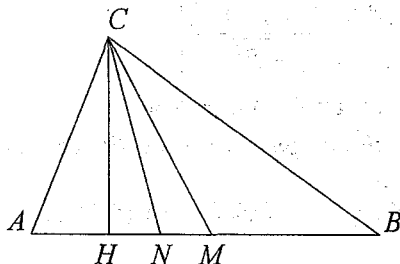
Из схематического чертежа очевидно, что каждая из вершин – точка пересечения соответствующих сторон. Для определения вер-

шины A нужно решить систему $\begin{cases} (AB) \\ (AC) \end{cases}$, вершины B – систему $\begin{cases} (AB) \\ (CB) \end{cases}$,

вершины C – систему $\begin{cases} (AC) \\ (CB) \end{cases}$.

2) Вычисление длин сторон, медиан, биссектрис и высот по координатам вершин.

а) Дано: $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Найти длины сторон.



Длина каждой из сторон – расстояние между соответствующими вершинами. Это одна из основных задач на метод координат и можно воспользоваться готовой формулой

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.13)$$

Имеем

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Аналогично находятся длины остальных сторон

б) Дано: $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Найти длины медиан.

Длина медианы CM – расстояние CM . Можно воспользоваться формулой (2.13), но сначала нужно найти координаты точки M по формулам деления отрезка пополам:

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} \quad (2.14)$$

Аналогично находятся длины остальных медиан.

в) Дано: $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Найти длины биссектрис.

Длина биссектрисы CN – расстояние между двумя точками, координаты точки N неизвестны. По свойству биссектрис точка N делит сторону AB в отношении пропорциональном длинам прилежащих сторон

$$x_N = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_N = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda}, \quad (2.15)$$

где $\lambda = \frac{AN}{NB} = \frac{AC}{CB}$. После определения координат точки N нужно воспользоваться формулой (2.13).

г) Дано: $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Найти длины высот.

Длина высоты – расстояние от точки до прямой. Если уравнение AB имеет вид $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, то по формуле (2.12)

$$AB = \left| \frac{A_1x_C + B_1y_C + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right|,$$

где $C(x_C; y_C)$ – вершина, из которой опущена высота.

3) Определение уравнений сторон, медиан, биссектрис и высот по координатам вершин.

Дано: $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$. Найти (CB) , (CM) , (CN) , (CH) .

а) Уравнение стороны CB – уравнение прямой, проходящей через точки C и B определяем по формуле (2.11)

$$\frac{y - y_C}{y_B - y_C} = \frac{x - x_C}{x_B - x_C}.$$

б) Уравнение медианы CM определяется уравнением (2.11), но координаты точки M еще нужно найти по формулам деления отрезка пополам (2.14).

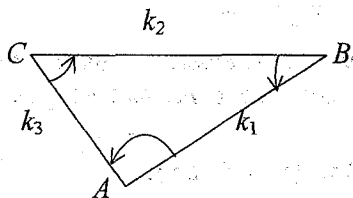
в) Уравнение биссектрисы CN также определяется уравнением (2.11), координаты точки N можно найти по формулам (2.15) деления отрезка в отношении $\lambda = AC/CB$.

г) Уравнение высоты CH определяется как уравнение прямой, проходящей через вершину C перпендикулярно стороне AB

$$y - y_C = k_{CH}(x - x_C), \quad k_{CH} = -1/k_{AB}.$$

4) Вычисление внутренних углов треугольника.

а) Сделать точный чертеж треугольника в системе xOy .



б) Определить угловые коэффициенты сторон. Если заданы координаты вершин, то $k_i = \Delta y_i / \Delta x_i$; если заданы уравнения сторон вида $A_i x + B_i y + C_i = 0$, то $k_i = -A_i / B_i$ ($i = 1, 2, 3$).

в) Составить формулы для определения тангенсов внутренних углов.

Пусть k_1, k_2, k_3 – угловые коэффициенты сторон (см. чертеж). Необходимо отметить для каждого угла положительное направление его измерения дугой со стрелкой (против часовой стрелки). Тогда в каждой формуле

$$\operatorname{tg} A = \frac{k_3 - k_1}{1 + k_3 k_1}, \quad \operatorname{tg} B = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}, \quad \operatorname{tg} C = \frac{k_2 - k_3}{1 + k_2 k_3}$$

в числителе уменьшаемым является угловой коэффициент той стороны, к которой обращена стрелка.

г) По тангенсам найти углы как арктангенсы.

5. Кривые второго порядка.

Окружность. Каноническое уравнение окружности

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \quad (2.16)$$

Общее уравнение окружности $Ax^2 + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. Признаком общего уравнения окружности является равенство коэффициентов перед x^2 и y^2 ($A = C$), отсутствие члена с произведением xy и возможности найти R после приведения общего уравнения к каноническому виду.

Чтобы привести общее уравнение к каноническому виду, нужно из членов, содержащих x и y выделить полный квадрат.

Эллипс. Каноническое уравнение эллипса.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.17)$$

Гипербола. Каноническое уравнение гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.18)$$

Парабола. Если парабола симметрична относительно оси Ox (Oy) и ее вершина находится в начале координат, то ее уравнение имеет вид

$$y^2 = \pm 2px \quad (x^2 = \pm 2py). \quad (2.19)$$

Если ось симметрии параболы параллельна оси Ox (Oy) и ее вершина находится в точке $(x_0; y_0)$, то ее уравнение будет иметь канонический вид

$$(y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0) \quad ((x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0)). \quad (2.20)$$

Основные задачи на элементарные свойства кривых второго порядка состоят в отыскании одного из параметров этих кривых по некоторой совокупности других.

Пример 1. Доказать, что векторы $a = (3, -1, 0)$, $b = (2, 3, 1)$, $c = (-1, 4, 3)$ образуют базис, и найти координаты вектора $d = (2, 3, 7)$ в этом базисе.

Решение. Составим векторное равенство $\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c = 0$ или

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Задача свелась таким образом к решению системы:

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases} \text{ Вычисляем } \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 22.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то однородная система имеет единственное нулевое решение: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, т. е. векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют систему линейно независимых векторов и, следовательно, составляют базис. Найдем координаты вектора $\mathbf{d}$ в базисе $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. По теореме разложения вектор $\mathbf{d}$ линейно выражается через базисные векторы:

$$\mathbf{d} = \alpha_1 \mathbf{a} + \alpha_2 \mathbf{b} + \alpha_3 \mathbf{c}$$

или

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 2, \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 = 3, \\ \alpha_2 + 3\alpha_3 = 7. \end{cases}$$

Решаем полученную систему методом Гаусса.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 11 & 11 & 11 \end{array} \right) \sim \\ \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array} \right).$$

Откуда на обратном ходе находим $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -2$, $\alpha_3 = 3$, поэтому

$$\mathbf{d} = (3; -2; 3) = 3\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 3\mathbf{c}.$$

Пример 2. По координатам точек $A(-5; 1; 6)$, $B(1; 4; 3)$ и $C(6; 3; 9)$ найти: а) модуль вектора $\mathbf{a} = 4\overline{AB} + \overline{BC}$; б) скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b} = \overline{BC}$; в) проекцию вектора $\mathbf{c} = \mathbf{b}$ на вектор $\mathbf{d} = \overline{AB}$; г) найти косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$.

Решение. а) Последовательно находим

$$\overline{AB} = (1 - (-5))\mathbf{i} + (4 - 1)\mathbf{j} + (3 - 6)\mathbf{k} \text{ или } \overline{AB} = (6; 3; -3),$$

$$\overline{BC} = (6 - 1)\mathbf{i} + (3 - 4)\mathbf{j} + (9 - 3)\mathbf{k} \text{ или } \overline{BC} = (5; -1; 6),$$

$$4\overline{AB} + \overline{BC} = (4 \cdot 6 + 5)i + (4 \cdot 3 + (-1))j + (4 \cdot (-3) + 6)k$$

$$\text{или } 4\overline{AB} + \overline{BC} = (29; 11; -6).$$

Модуль вектора $4\overline{AB} + \overline{BC}$ находим по формуле (2.3)

$$|4\overline{AB} + \overline{BC}| = \sqrt{29^2 + 11^2 + (-6)^2} = \sqrt{998}.$$

б) Скалярное произведение вектора $a = (29; 11; -6)$, и $b = (5; -1; 6)$.
Находим по формуле (2.1)

$$a \cdot b = 29 \cdot 5 + 11 \cdot (-1) + (-6) \cdot 6 = 98.$$

в) Так как

$$\text{пр}_d c = \frac{c \cdot d}{|d|}, \quad d = (6; 3; -3),$$

$$c \cdot d = 30 - 3 - 18 = 9, \quad |d| = \sqrt{36 + 9 + 9} = \sqrt{54},$$

то

$$\text{пр}_{\overline{AB}} \overline{BC} = 9/\sqrt{54}.$$

г) Косинус угла между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ находим по формуле (2.4)

$$\cos(\overline{AB}, \overline{AC}) = \frac{6 \cdot 11 + 3 \cdot 2 + (-3) \cdot 3}{\sqrt{6^2 + 3^2 + (-3)^2} \sqrt{11^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{21}{2\sqrt{201}}.$$

Пример 3. Составить каноническое уравнение эллипса, проходящего через точки $A(2; \sqrt{3})$ и $B(0; 2)$.

Решение. Каноническое уравнение эллипса имеет вид (2.17).
Найдем параметры a и b из условия, что эллипс проходит через точки A и B :

$$\begin{cases} A \in \text{эллипсу,} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \frac{4}{a^2} + \frac{3}{b^2} &= 1 \\ 0 + \frac{4}{b^2} &= 1 \end{aligned} \right. & \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{a^2} + \frac{3}{4} = 1 \\ b^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 4 \end{cases} \end{cases}$$

Искомое уравнение $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ (рис. 1).

Из уравнения эллипса следует, что координаты точек эллипса удовлетворяют неравенствам $|x| \leq a$, $|y| \leq b$. Это значит, что эллипс расположен внутри прямоугольника, ограниченного прямыми $x = a$, $x = -a$, $y = b$, $y = -b$ и симметричного осям координат. Следовательно, для построения эллипса достаточно построить его часть в первой координат-

ной четверти и затем симметрично отобразить полученную часть на остальные координатные четверти.

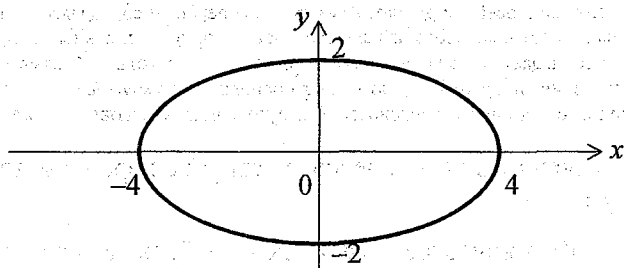


Рис. 1

Пример 4. Составить каноническое уравнение гиперболы, зная, что вещественная полуось равна 4, а эксцентриситет 1.25.

Решение. Каноническое уравнение эллипса имеет вид (2.18). Найдем параметр b .

$$\begin{cases} a = 4 \\ \varepsilon = c/a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ c = a \cdot \varepsilon = 4 \cdot 1.25 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b^2 = c^2 - a^2 = 9 \end{cases}$$

Искомое уравнение $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$. Для построения гиперболы найдем

уравнения асимптот $y = \pm \frac{b}{a}x \Rightarrow y = \pm \frac{3}{4}x$ (рис. 2).

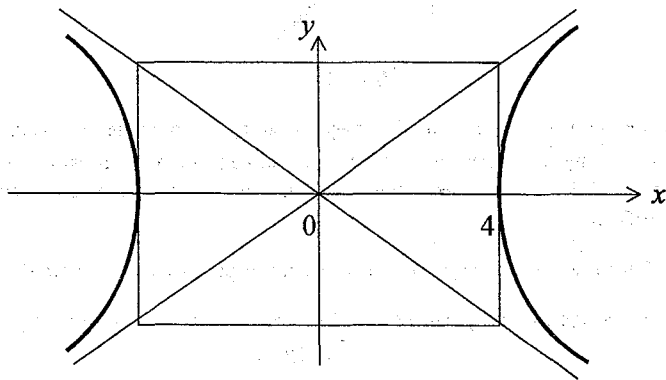


Рис. 2

Из уравнения гиперболы видно, что $x \geq a$ или $x \leq -a$. Отсюда следует, что все точки гиперболы находятся вне полосы ограниченной прямыми $x = a$, $x = -a$. Гипербола симметрична относительно осей координат. Асимптоты гиперболы совпадают с диагоналями прямоугольника, стороны которого параллельны осям координат и равны $2a$ и $2b$. Центр прямоугольника совпадает с началом координат. Этот прямоугольник называется *основным*. Для построения гиперболы строят сначала основной прямоугольник, проводят прямые, совпадающие с диагоналями основного прямоугольника, и, наконец, строят гиперболу.

Пример 5. Составить каноническое уравнение параболы, имеющей директрису $x = -3$.

Решение. Каноническое уравнение параболы в данном случае должно иметь вид $y^2 = 2px$, а уравнение ее директрисы $x = -p/2$. Но по условию задачи уравнение директрисы $x = -3$. Поэтому $-p/2 = -3$, $p = 6$ и искомое каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 12x$ (рис. 3).

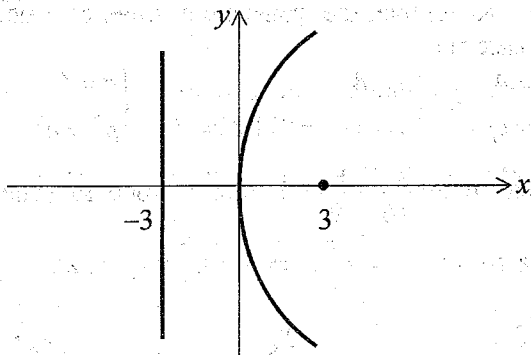


Рис. 3

Для построения параболы, являющейся графиком квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ ($x = ay^2 + by + c$) нужно справа выделить полный квадрат по $x(y)$ и найти координаты вершины, затем найти точку пересечения параболы с осью $Oy(Ox)$ и точку, симметричную оси параболы.

Пример 6. Найти каноническое уравнение и вершину параболы $y = 2x^2 + 4x - 3$.

Решение. Для приведения уравнения $y = 2x^2 + 4x - 3$ к каноническому виду

$$(x - a)^2 = \pm 2p(y - b),$$

нужно:

1) Вынести коэффициент перед x^2 за скобки: $y = 2(x^2 + 2x) - 3$.

2) Члены в скобке дополнить до полного квадрата $y = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 3 = 2(x + 1)^2 - 5$.

3) Записать каноническое уравнение $(x+1)^2 = \frac{1}{2}(y+5)$.

4) Для построения параболы из полученного уравнения запишите координаты вершины $A(-1; -5)$, из исходного уравнения ($y = 2x^2 + 4x - 3$) найдите точку пересечения с осью Oy ($B(0; -3)$) и на чертеже постройте точку B' симметричную относительно оси симметрии параболы.

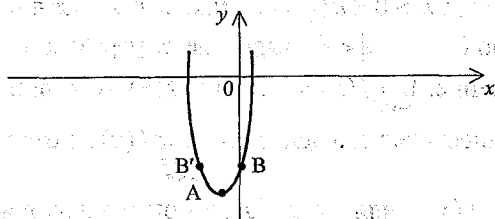


Рис. 4

Контрольные работы 5, 6

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Литература: [3], гл. 1-3, 4, п. 4.1-4.11; [5], т. 1, гл. 1, 2, 7, п. 1-5; [6], гл. 1-3, 4, п. 1-3; [7], гл. 2, гл. 3, п. 1-4; [8], гл. 1-5; [9], ч. 1 гл. 5, 6; [13].

Основные теоретические сведения

1. Если даны числовые множества $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$, и по некоторому закону f каждому элементу $x \in X$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in Y$, то говорят, что на множестве X задана **функция** $y = f(x)$, x называют **аргументом** функции, y — ее **значением**.

Через $f(a)$ или $y(a)$ обозначается то значение y , которое соответствует значению $x = a$.

Множество X называется **областью определения функции**, множество Y — **областью изменения функции**.

К **основным элементарным функциям** относятся: степенная функция $y = x^n$; показательная функция $y = a^x$; логарифмическая функция $y = \log_a x$; тригонометрические функции: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$; обратные тригонометрические функции: $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arctg} x$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество точек $(x; y)$ плоскости, координаты x и y которых связаны соотношением $y = f(x)$; x принадлежит области определения данной функции.

2. Число A называется **пределом функции** $f(x)$ в точке a (при $x \rightarrow a$), если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\forall x \in X$, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, или $f(x) \rightarrow A$ при $x \rightarrow a$.

Если существует предел вида $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x)$, который обозначается также $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$, или $f(a-0)$, то он называется **пределом слева функции** $f(x)$ в точке a .

Аналогично, если существует предел вида $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$, в другой записи $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, или $f(a+0)$, то он называется **пределом справа функции** $f(x)$ в точке a .

Пределы слева и справа называются **односторонними**.

Функция $f(x)$ ($F(x)$) называется **бесконечно малой (бесконечно большой)** при $x \rightarrow a$, если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad \left(\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \infty \right).$$

Для сравнения двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$ находят предел их отношения. Если

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x \rightarrow a$ называются **эквивалентными (равносильными)**. Обозначение: $\alpha(x) \sim \beta(x)$. Например, при $x \rightarrow a$ $\sin ax \sim ax$, $\operatorname{tg} ax \sim ax$, $\ln(1+ax) \sim ax$, $e^{ax} - 1 \sim ax$.

Если $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, то предел отношения бесконечно малых (бесконечно больших) функций при $x \rightarrow a$ не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}. \quad (3.1)$$

3. Предел элементарной функции в точке ее определения равен частному значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к неопределенностям вида $\infty - \infty$, $0/0$, ∞/∞ , $0 \cdot \infty$, 1^∞ , 0^0 , ∞^0 . Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются:

- сокращение на множитель, создающий неопределенность;
- деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (для отношения многочленов при $x \rightarrow \infty$);
- применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших функций;
- использование двух замечательных пределов

$$\lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1; \quad \lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} (1 + \alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e. \quad (3.2)$$

Отметим также, что

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{C}{f(x)} = 0, \text{ если } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty; \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{C}{f(x)} = \infty, \text{ если } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \text{ если } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty, \text{ если } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x = x_0$, если:

- функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;
- существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0 ;
- этот предел равен значению функции в точке x_0 , т.е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0). \quad (3.3)$$

Если положить $x = x_0 + \Delta x$, то условие непрерывности (3.3) будет равносильно условию

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

т.е. функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$.

Приращением функции $y = f(x)$ называется разность

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x),$$

где Δx — **приращение аргумента**.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывна в точке $x = x_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три условия:

1) существовал предел слева $f(x_0 - 0)$ и предел справа $f(x_0 + 0)$;

2) пределы слева и справа были равны друг другу

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = C;$$

3) выполнялось условие $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то функция называется **разрывной** в точке. Точка $x = x_0$ называется **точкой разрыва первого рода**, если оба односторонних предела конечны, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ (нарушается условие 2). Точка $x = x_0$ называется **точкой разрыва второго рода**, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности (нарушается условие 1). Точка $x = x_0$ называется **точкой устранимого разрыва**, если $f(x_0) \neq C$ (нарушается условие 3).

5. Предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю называется производной функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается

одним из следующих символов: y' , $f'(x)$, $\frac{dy}{dx}$. Таким образом,

по определению

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (3.4)$$

Если указанный в формуле (3.4) предел существует, то функцию $f(x)$ называют **дифференцируемой в точке x** , а операцию нахождения производной y' — **дифференцированием**.

Геометрически величина производной $f'(x_0)$ представляет тангенс угла α наклона касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$, к графику функции $y = f(x)$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \quad (3.5)$$

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \quad (f'(x_0) \neq 0). \quad (3.6)$$

Пример 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$.

Решение. Многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, обращаются в нуль при $x = -2$. Если $x = -2$ — корень многочлена, то этот многочлен делится на $x + 2$ без остатка. По теореме Безу в этом случае каждый многочлен (в числителе и знаменателе) может быть представлен в виде произведения $(x + 2)$ на некоторый многочлен. Таким образом, нахождение предела сводится прежде всего к выделению в числителе и знаменателе множителя $(x + 2)$, незримое присутствие которого и создает неопределенность $0/0$. Практически это достигается каким-либо способом разложения числителя и знаменателя на множители, например, делением «уголком».

$$\begin{array}{r} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^3 + 2x^2} \quad \left| \begin{array}{l} x+2 \\ x^2+x \end{array} \right. \quad \frac{x^2 - x - 6}{x^2 + 2x} \quad \left| \begin{array}{l} x+2 \\ x-3 \end{array} \right. \\ \hline \quad x^2 + 2x \quad \quad \quad -3x - 6 \\ \hline \quad \quad x^2 + 2x \quad \quad \quad -3x - 6 \\ \hline \quad \quad \quad 0 \quad \quad \quad 0 \end{array}$$

Теперь искомый предел можно представить в виде

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(x^2+x)}{(x+2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2+x}{x-3}.$$

Неопределенность исчезла. По теореме о пределе частного находим

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x}{x - 3} = \frac{4 - 2}{-2 - 3} = -\frac{2}{5}$$

Раскрытие неопределенностей 0/0

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида 0/0 при отыскании предела отношения многочленов $\lim_{x \rightarrow a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, нужно

- определить тип неопределенности,
- если неопределенность вида 0/0, то поделить числитель и знаменатель на двучлен $(x - a)$.

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1-2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

Решение. При отыскании пределов от иррациональных функций с неопределенностями вида 0/0 используется рассмотренный выше прием, но только после предварительных алгебраических преобразований. Умножим числитель и знаменатель на выражения, сопряженные числителю и знаменателю

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2} &= \frac{\{0\}}{\{0\}} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)} = \frac{2 \cdot 4}{6} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{3x^3 + x - 1}$.

Решение. В данном примере теорема о пределе частного (дроби) неприменима, так как пределы числителя и знаменателя дроби не существуют. При $x \rightarrow \infty$ и числитель, и знаменатель дроби функции бесконечно большие. Значит, мы имеем дело с отношением двух бесконечно больших функций. Чтобы найти предел, преобразуем данную дробь, разделив ее числитель и знаменатель на x^3 , т.е. на старшую степень x . Пользуясь свойствами пределов, получим

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + x^2 + 5}{3x^3 + x - 1} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^3 + x^2 + 5}{x^3}}{\frac{3x^3 + x - 1}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^3}}{3 + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = \frac{2}{3},$$

так как $1/x$ при $x \rightarrow \infty$ — величина бесконечно малая. Поэтому $1/x^2$, $1/x^3$ и $5/x^3$ — величины бесконечно малые и пределы этих величин равны нулю, когда $x \rightarrow \infty$. После деления числителя и знаменателя на x^3 оказалось возможным применить теорему о пределе частного, так как теперь и числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные соответственно 2 и 3, и предел знаменателя не равен нулю.

Раскрытие неопределенностей вида ∞ / ∞

Если предел отношения двух алгебраических функций при $x \rightarrow \infty$ дает неопределенность вида ∞ / ∞ , то нужно числитель и знаменатель поделить на старшую степень x встречающуюся в этой функции.

Раскрытие неопределенностей вида $\infty - \infty$ и $0 \cdot \infty$

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида $\infty - \infty$, необходимо с помощью алгебраических действий (приведение к общему знаменателю, освобождение от иррациональности) свести ее к неопределенности вида $0/0$ или ∞ / ∞ .

$$\left(0 \cdot \infty \Rightarrow 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty \Rightarrow \frac{1}{\infty} \cdot \infty = \frac{\infty}{\infty} \right).$$

Пример 4. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

Решение. На основании первой из формул (3.2) получаем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x} &= \left\{ \frac{0}{0} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x} \cdot 5x}{\frac{\sin 7x}{7x} \cdot 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\sin 7x}{7x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{7x} = \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1 \right\} = \frac{5}{7}. \end{aligned}$$

Пределы тригонометрических функций

Пределы тригонометрических функций находятся с помощью первого замечательного предела $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$, алгебраических и тригонометрических преобразований.

Пример 5. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin 2x} = \\ &= \left\{ 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \right\} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \sin 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x/2}{x/2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{\sin x/2}{x/2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x} \cdot \frac{2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{2x} = \\ &= \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x/2}{x/2} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{\sin 2x} = 1, \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos x + \cos^2 x) = 3 \right\} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{3}{x} \cdot \frac{1}{2x} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Пример 6. Найти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{2x}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{2x} &= \left\{ \frac{0}{0}, \text{ обозначим } \arcsin 3x = y, \text{ тогда} \right. \\ &\left. 3x = \sin y \text{ и } y \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0 \right\} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{3y}{2 \sin y} = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Если под знаком предела делается замена переменной, то все величины, входящие под знак предела, должны быть выражены через эту новую переменную, а из равенства, выражающего зависимость между старой переменной и новой, должен быть определен предел новой переменной.

Пример 7. Найти $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \{0 \cdot \infty$; обозначим $1-x=y$, тогда

$$\begin{aligned} y \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 1 \} &= \lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} y \right) = \left\{ \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} y \right) = \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2} \right\} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} y \operatorname{ctg} \frac{\pi y}{2} = \lim_{y \rightarrow 0} y \frac{\cos(\pi y/2)}{\sin(\pi y/2)} = \lim_{y \rightarrow 0} y \frac{(\pi y/2) \cos(\pi y/2)}{\sin(\pi y/2) \pi y/2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Пределы, связанные с числом e

Второй замечательный предел принято писать в одном из ниже указанных видов:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{1/\alpha} = e, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e.$$

Если во втором замечательном пределе непосредственно подставить предел аргумента, то получится неопределенность вида 1^∞ ; поэтому, если при $x \rightarrow 0$ или $x \rightarrow \pm\infty$ функция $f(x)$ дает неопределенность вида 1^∞ , то предел этой функции связан с числом e .

Пример 8. Найти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1}$.

Решение. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-2} \right)^{2x-1} = \left\{ 1^\infty; \frac{x+1}{x-2} = 1 + \frac{x+1}{x-2} - 1 = 1 + \frac{3}{x-2}; \text{ та-} \right.$

ким путем из дроби $\frac{x+1}{x-2}$ выделяется бесконечно малая $\alpha = \frac{3}{x-2}$

$$\begin{aligned} \text{при } x \rightarrow \infty \} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^{\frac{x-2}{3} \cdot \frac{3}{x-2} (2x-1)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{3}{x-2} \right)^{\frac{x-2}{3}} \right)^{\frac{3}{x-2} (2x-1)} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x-3}{x-2}} = e^6. \end{aligned}$$

Пример 9. Найти пределы функции $y = 2^{\frac{1}{x-3}}$ слева и справа в точках $x_1 = 3$, $x_2 = 5$. Узнать, является ли функция непрерывной в этих точках.

Решение. Исследуем точку $x = 3$. $f(3-0) = \lim_{x \rightarrow 3-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \{ \text{вместо}$

x подставляем его предельное значение в символах; $2^{\frac{1}{3-0-3}} = 2^{\frac{1}{-0}} = 2^{-\infty} = (1/2)^{\infty} \} = 0$, $f(3+0) = \lim_{x \rightarrow 3+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \left\{ 2^{\frac{1}{3+0-3}} = 2^{\frac{1}{+0}} = 2^{+\infty} = 2^{\infty} \right\} = \infty$.

В точке $x = 3$ предел справа не существует, и функция терпит бесконечный разрыв.

Исследуем точку $x = 5$. $f(5-0) = \lim_{x \rightarrow 5-0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \left\{ 2^{\frac{1}{5-0-3}} \right\} = 2^{\frac{1}{2}}$,

$$f(5+0) = \lim_{x \rightarrow 5+0} 2^{\frac{1}{x-3}} = \left\{ 2^{\frac{1}{5+0-3}} \right\} = 2^{\frac{1}{2}}, \quad f(5) = 2^{\frac{1}{5-3}} = 2^{\frac{1}{2}}.$$

Итак, $f(5-0) = f(5+0) = f(5)$ – предел слева равен пределу справа и равен значению функции в точке. Следовательно, $f(x)$ непрерывна при $x = 5$.

Пример 10. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность; найти точки разрыва функции и определить их тип

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2+1, & \text{если } 0 < x < 2, \\ 2x+1, & \text{если } x \geq 2. \end{cases}$$

Решение. Так как функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty; 0)$, $(0; 2)$ и $(2; \infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями, то «подозрительными на разрыв» являются те точки, в которых изменяется аналитическое выражение функции, т.е. точки $x = 0$ и $x = 2$.

Исследуем точку $x = 0$. $f(0-0) = \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \{ \text{символ } x \rightarrow 0-0 \text{ позволяет выбрать нужное аналитическое выражение } f(x) \text{ из уравнений, ее определяющих} \} = \lim_{x \rightarrow 0-0} (x-2) = -2$.

$$f(0+0) = \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} (x^2+1) = 1.$$

Односторонние пределы функции в точке $x = 0$ существуют, но

$$n = 100$$

$$x1 = -2, -2 + \frac{2}{n} \dots 0$$

$$y1(x1) = x1 - 2$$

$$x2 = 0, 0 + \frac{2}{n} \dots 2$$

$$y2(x2) = (x2)^2 + 1$$

$$x3 = 2, 2 + \frac{2}{n} \dots 4$$

$$y3(x3) = 2x3 + 1$$

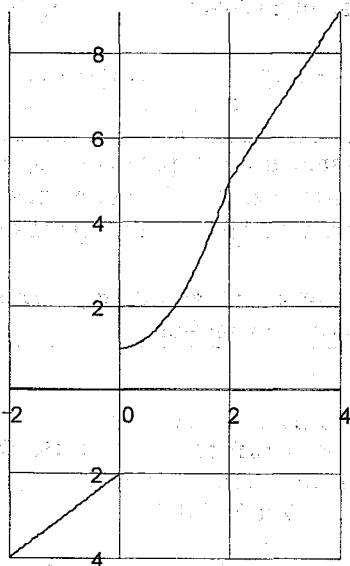


Рисунок к примеру 10

не равны между собой (нарушено условие 2). Следовательно, эта точка является точкой разрыва первого рода. Скачок

$$|f(0-0) - f(0+0)| = 3.$$

Исследуем точку $x = 2$.

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-0} (x^2 + 1) = 4 + 1 = 5,$$

$$f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+0} (2x + 1) = 5, \quad f(2) = (2x + 1)|_{x=2} = 5.$$

Односторонние пределы функции при $x \rightarrow 2$ равны между собой и равны частному значению функции $f(2-0) = f(2+0) = f(2)$. Следовательно, исследуемая точка $x = 2$ является точкой непрерывности.

Пример 11. Найти производную функции $y = \sin(3 \operatorname{tg} \ln^3 x)$.

Решение. $y' = \cos(3 \operatorname{tg} \ln^3 x) \cdot 3 \frac{1}{\cos^2 \ln^3 x} \cdot 3 \ln^2 x \cdot \frac{1}{x}.$

Порядок дифференцирования обратный порядку вычисления значения функции в точке. Вычисление значения функции начинается справа налево, а дифференцирование наоборот — слева направо.

Первой дифференцируется та функция, которая вычислялась бы последней — это самое главное!

Контрольная работа 7

ПРИЛОЖЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Литература: [3], гл. 4, п. 4.12–4.22; [5], т. 1, гл. 4, 5; [6], гл. 4, п. 4–7; [7], гл. 3, п. 5–7; [8], гл. 6; [9], гл. 6, п. 2; [13].

Основные теоретические сведения

1. Правило Лопиталя. Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций (неопределенность $0/0$ или ∞/∞) равен пределу отношения их производных

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \quad (4.1)$$

если предел справа существует.

2. Если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ или $f(x) > f(x_0)$, то точка x_0 называется *точкой экстремума* функции $f(x)$ (соответственно *точкой максимума* или *минимума*).

Необходимое условие экстремума: если x_0 — экстремальная точка функции $f(x)$, то первая производная $f'(x_0)$ либо равна нулю или бесконечности, либо не существует.

Достаточное условие экстремума: x_0 является экстремальной точкой функции $f(x)$, если ее первая производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0 : с плюса на минус — при максимуме, с минуса на плюс — при минимуме.

3. Точка x_0 называется *точкой перегиба* кривой $y = f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба: если x_0 — точка перегиба кривой $y = f(x)$, то вторая производная $f''(x_0)$ либо равна нулю или бесконечности, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба: x_0 является точкой перегиба кривой $y = f(x)$, если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак.

4. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки $(x; f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при $x \rightarrow \infty$. При этом

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx), \quad (4.2)$$

При $k = 0$ имеем *горизонтальную асимптоту*: $y = b$.

Если

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty, \quad (4.3)$$

то прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой*.

5. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

I. *Элементарное исследование:*

- найти область определения функции;

- исследовать функцию на симметричность (определить четность и нечетность функции) и периодичность;
- вычислить предельные значения функции в ее граничных точках;
- выяснить существование асимптот;
- определить, если это не вызовет особых затруднений, точки пересечения графика функции с координатными осями, найти интервалы знакопостоянства;
- сделать эскиз графика функции, используя полученные результаты.

II. Исследование графика функции по первой производной:

- найти решение уравнений $f'(x) = 0$ и $f'(x) = \infty$;
- точки, «подозрительные» на экстремум, исследовать с помощью достаточного условия экстремума, определить вид экстремума;
- вычислить значения функции в точках экстремума;
- найти интервалы монотонности функции;
- нанести на эскиз графика экстремальные точки;
- уточнить вид графика согласно полученным результатам.

III. Исследование графика функции по второй производной:

- найти решения уравнений $f''(x) = 0$ и $f''(x) = \infty$;
- точки, «подозрительные» на перегиб, исследовать с помощью достаточного условия;
- вычислить значения функции в точках перегиба;
- найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;
- нанести на эскиз графика функции точки перегиба;
- окончательно построить график функции.

Если исследование проведено без ошибок, то результаты всех этапов должны согласовываться друг с другом. Если же согласование отсутствует, необходимо проверить правильность результатов отдельных этапов и исправить найденные ошибки.

График функции лучше всего строить в таком порядке:

- построить все асимптоты, если они есть;
- нанести на график характерные точки: точки пересечения с осями координат, точки, в которых есть экстремумы, точки перегиба;
- построение проводить по интервалам непрерывности с учетом проведенных исследований.

6. При определении наибольших и наименьших значений функции на отрезке необходимо:

- найти значения функции на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$;
- определить критические точки первого рода (к.т. I);
- вычислить значения функции в к.т. I ($f(x_i)$, где $i = 1, 2, \dots$).
- Выбрать из $f(a), f(b), f(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots$) наименьшее (m) и наибольшее (M) значения функции.

Пример 1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции

$$y = -x^3 / (x+1)^2.$$

При исследовании функции на монотонность и экстремумы (по y') необходимо:

1. найти область определения функции;
2. найти y' ;
3. определить к.т. I и пронумеровать их в порядке возрастания;
4. построить таблицу 1.

Таблица 1

x	Интервалы монотонности и к.т. I
y'	Поведение y' на интервалах монотонности и в к.т. I
y	Поведение функции на интервалах монотонности и ее значения в к.т. I

Решение. 1) $-\infty < x < -1$; $-1 < x < \infty$; 2) $y' = -x^2(x+3)/(x+1)^3$;
3) $y' = 0$ при $x_1 = -3, x_2 = 0$; y' не существует при $x = -1$. Критические точки $x_1 = -3$ и $x_2 = 0$, точка $x = -1$ не является критической, так как она является границей области определения функции.

x	$(-\infty; -3)$	-3	$(-3; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; \infty)$
y'	$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$-$
y	$\searrow$	$y_{\min} = -27/4$	$\nearrow$	∞	$\searrow$	нет	$\searrow$

Знак y' на интервале монотонности определяем по ее знаку в произвольной точке этого интервала. Условимся в дальнейшем возрастание (убывание) функции на интервале обозначать так: $\nearrow (\searrow)$.

Исследуемая функция, как следует из табл. 1, имеет минимум в

точке $x = -3$; $y(-3) = 27/4$. Точки $x = -1$ и $x = 0$ не являются точками экстремума, так как в первой точке функция не определена, а в окрестности второй точки первая производная сохраняет знак.

Пример 2. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y = -x^3/(x+1)^2$.

При исследовании функции на интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба (по y''), необходимо:

1. найти область определения функции;
2. найти y' , y'' ;
3. определить критические точки 2-го рода (к.т. II) и пронумеровать их в порядке возрастания;
4. составить таблицу 2.

Таблица 2

x	Интервалы выпуклости, вогнутости и к.т. II
y''	Поведение y'' на интервалах выпуклости, вогнутости и в к.т. II
y	Поведение функции на интервалах выпуклости (вогнутости), значения в к.т. II

Решение. 1) $-\infty < x < -1$; $-1 < x < \infty$; 2) $y' = -x^2(x+3)/(x+1)^3$, $y'' = -6x/(x+1)^4$; 3) $y'' = 0$ при $x = 0$, y'' не существует при $x = -1$; $x = 0$ – единственная к.т. II, $x = -1$ области определения функции не принадлежит.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; \infty)$
y''	$+$	∞	$+$	0	$-$
y	$\cup$	не опр.	$\cup$	$y_{\text{т.п.}} = 0$	$\cap$

Знак y'' на интервалах выпуклости и вогнутости определяем по ее знаку в произвольной точке. Точка $(0; 0)$ – точка перегиба. Условимся в дальнейшем выпуклость (вогнутость) графика в таблице обозначать так: $\cup$ ($\cap$).

Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y = -x^3/(x+1)^2$.

Решение. Точка $x = -1$ является точкой разрыва функции. Так как

$$y(x) = -\frac{x^3}{(x+1)^2} \quad r = 6 \quad n = 60$$

$$x = -r, -r + \frac{r}{n} \dots r \quad y_{ac}(x) = -(x) + 2 \quad x = -1$$

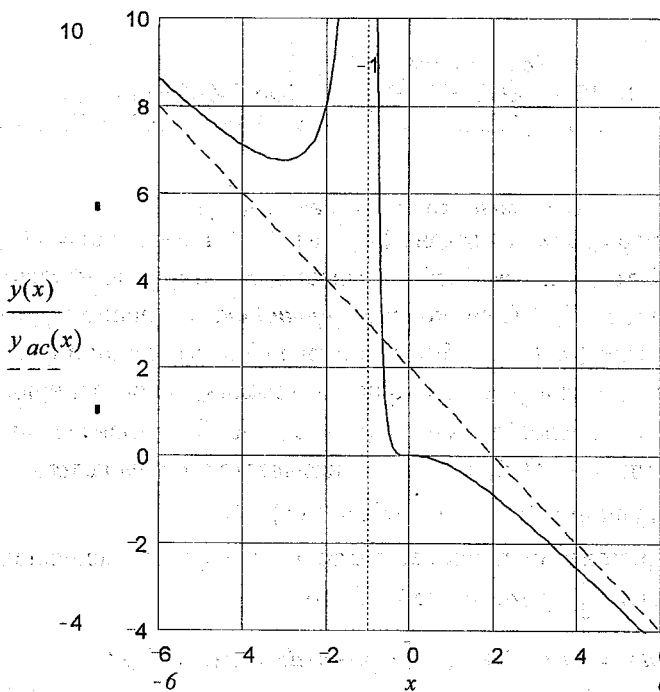


Рис. 5. График функции (примеры 1-3).

$$\lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{-x^3}{(x+1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{-x^3}{(x+1)^2} = +\infty,$$

то прямая $x = -1$ служит вертикальной асимптотой графика функции (см. формулы (4.3)).

Ищем наклонные асимптоты $y_{ac} = kx + b$, используя формулы (4.2):

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^3}{x(x+1)^2} = -1, \quad b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-x^3}{(x+1)^2} - (-1)x \right) = 2.$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет следующий вид $y_{ac} = -x + 2$. График функции представлен на рис. 5.

Контрольные работы 8, 9

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ И ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛЫ

Литература: [3], гл. 5–7; [5], т. 1, гл. 10–12; [6], гл. 13, 14; [7], гл. 5, 6; [8], гл. 7, 8; [9], гл. 8, 9; [13].

Основные теоретические сведения

1. Пусть на интервале $(a; b)$ задана функция $f(x)$. Если $F'(x) = f(x)$, где $x \in (a; b)$, то функция $F(x)$ называется **первообразной функцией** для функции $f(x)$ (или, короче, **первообразной** данной функции) на интервале $(a; b)$. Любые две первообразные данной функции $f(x)$ отличаются друг от друга на произвольную постоянную.

Совокупность первообразных $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, функции $f(x)$, $x \in (a; b)$, называется **неопределенным интегралом** функции $f(x)$: $\int f(x) dx = F(x) + C$.

При интегрировании наиболее часто используются следующие методы. 1) Если $\int f(x) dx = F(x) + C$, то

$$\begin{aligned} \int f(ax) dx &= \frac{1}{a} F(ax) + C, & \int f(x+b) dx &= F(x+b) + C, \\ \int f(ax+b) dx &= \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где a и b – некоторые постоянные.

2) **Подведение под знак дифференциала**

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)), \quad (5.2)$$

так как $\varphi'(x)dx = d(\varphi(x))$.

3) Формула **интегрирования по частям**:

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (5.3)$$

Обычно выражение dv выбирается так, чтобы его интегрирование не вызывало особых трудностей. За u , как правило, принимается такая функция, дифференцирование которой приводит к ее упрощению. К классам функций, интегрируемых по частям, относятся, в частности, функции вида $P_n(x) \cdot f(x)$, $P_n(x) \cdot e^{ax}$, $P_n(x) \cdot \sin ax$, $P_n(x) \cdot \cos ax$, $P_n(x) \cdot \ln x$, $P_n(x) \cdot \arcsin x$, $P_n(x) \cdot \operatorname{arctg} x$, где $P_n(x)$ — многочлен от x .

Указания

- **Правило выбора частей:** Если $f(x)$ — тригонометрическая или показательная функция, то следует положить

$$u = P_n(x), \quad dv = f(x)dx.$$

Если $f(x)$ — логарифмическая или обратная тригонометрическая функция, то

$$u = f(x), \quad dv = P_n(x)dx.$$

- **Интегрирование по частям** можно применять несколько раз подряд.
- **Интегрирование по частям** $\int e^{ax} \sin bx dx$ и некоторых других интегралов можно привести к линейному уравнению относительно этих интегралов после двукратного применения формулы (5.3).

4) **Интегрирование рациональных дробей**, т. е. отношений двух многочленов $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ (соответственно m -й и n -й степени): $R(x) = Q_m(x)/P_n(x)$, сводится к интегрированию правильных дробей. Если $m < n$, то $R(x)$ называется **правильной дробью**, если $m \geq n$ — **неправильной дробью**.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена

и правильной дроби: $\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{Q_k(x)}{P_n(x)}$, где $S_{n-m}(x)$, $Q_k(x)$ —

многочлены; $Q_k(x)/P_n(x)$ — правильная дробь ($k < n$). Например, $(x^4 + 4)/(x^2 + 3x - 1)$ — неправильная дробь. Разделив ее числитель

знаменатель (по правилу деления многочленов «уголком», см. пример 1 контрольной работы 3), получим

$$\frac{x^4 + 4}{x^2 + 3x - 1} = x^2 - 3x + 10 + \frac{-33x + 14}{x^2 + 3x - 1}.$$

Интегрирование правильных дробей сводится к разложению подынтегральной функции $R(x)$ на простейшие, всегда интегрируемые дроби, вида

$$1. \frac{A}{x-a}; \quad 2. \frac{A}{(x-a)^k}; \quad 3. \frac{Mx+N}{x^2+px+q}; \quad 4. \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \quad (5.4)$$

где A, a, M, N, p, q – постоянные числа; k – целое положительное число, а трехчлен $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней.

5) *Интегрирование методом замены переменной (способ подстановки)* является одним из эффективных приемов интегрирования. Его сущность состоит в переходе от переменной x к новой переменной t : $x = \varphi(t)$. Наиболее целесообразная для данного интеграла замена переменной, т. е. выбор функции $\varphi(t)$, не всегда очевидна. Однако для некоторых часто встречающихся классов функций можно указать такие стандартные подстановки, как

$$\int R\left(z, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx, \quad t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}; \quad \int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx, \quad x = a \sin t;$$

$$\int R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) dx, \quad x = a \operatorname{tg} t; \quad \int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx, \quad x = \frac{a}{\sin t},$$

где R – символ рациональной функции.

2. Формула Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (5.5)$$

если $F'(x) = f(x)$ и первообразная $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.

Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$ и частью графика функции $y = f(x)$, взятой со знаком плюс, если $f(x) \geq 0$, и со знаком минус, если $f(x) \leq 0$.

3. Если интервал интегрирования $[a; b]$ не ограничен (например, $b \rightarrow \infty$) или функция $f(x)$ не ограничена в окрестности одного из пределов интегрирования (например, при $x = b$), то по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx, \quad (5.6)$$

и

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx. \quad (5.7)$$

Интегралы в левых частях равенств (5.6) и (5.7) называются *несобственными интегралами*. Несобственный интеграл называется *сходящимся*, если существует конечный предел в правой части равенств (5.6) и (5.7). Если же предел не существует, то несобственный интеграл называется *расходящимся*.

4. **Вычисление площадей плоских фигур.** Область называется *правильной относительно оси Oy (Ox)*, если любая горизонтальная (вертикальная) прямая пересекает границу области не более чем в двух точках. Если область правильная относительно осей Ox и Oy , то она просто называется *правильной областью*. Области на рис. 6 – правильные относительно оси Oy , на рис. 7 – относительно оси Ox .

Условимся дальше области, правильные относительно оси Oy (Ox), штриховать линиями, параллельными оси Oy (Ox).

Если область G , правильная относительно оси Oy , проецируется на ось Ox в отрезок $[a; b]$, то ее граница разбивается на две линии: нижнюю границу области, задаваемую уравнением $y = f_1(x)$, и верхнюю, задаваемую уравнением $y = f_2(x)$. Тогда область G определяется системой неравенств

$$G: \begin{cases} a \leq x \leq b, \\ f_1(x) \leq y \leq f_2(x), \end{cases}$$

а площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$, на отрезке $[a; b]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (5.8)$$

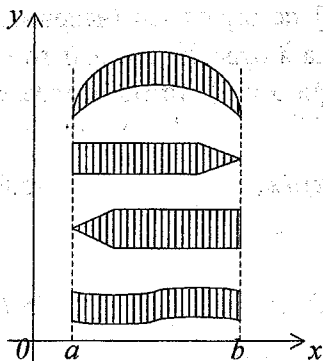


Рис. 6.

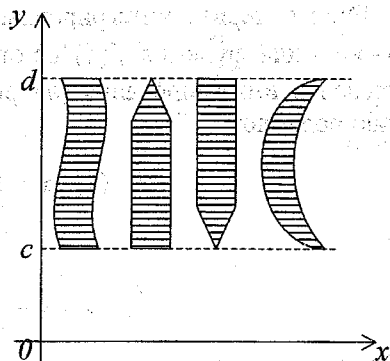


Рис. 7.

Если область G , правильная относительно оси Ox , проектируется на ось Oy в отрезок $[c; d]$, то ее граница разбивается на две линии: левую границу области, задаваемую уравнением $x = g_1(y)$, и правую, задаваемую уравнением $x = g_2(y)$. В этом случае область G определяется системой неравенств

$$G: \begin{cases} g_1(y) \leq x \leq g_2(y), \\ c \leq y \leq d, \end{cases}$$

а площадь фигуры, заключенной между кривыми $x = g_2(y)$ и $x = g_1(y)$, на отрезке $[c; d]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_c^d (g_2(y) - g_1(y)) dy. \quad (5.9)$$

Если кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \varphi'(t) dt; \quad (5.10)$$

где α и β определяются из уравнений $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$.

6. Пусть криволинейная трапеция, ограниченная прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и частью графика кривой $y = f(x)$, вращается вокруг оси Ox . Тогда объем полученного при этом тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (5.11)$$

Пример 1. Найти $\int \frac{dx}{(2x-3)^2}$.

Решение. Используя формулы (5.1), имеем

$$\int \frac{dx}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2} \int \frac{d(2x-3)}{(2x-3)^2} = \frac{1}{2} \int (2x-3)^{-2} d(2x-3) = -\frac{1}{2(2x-3)} + C.$$

Проверка.

$$\left(-\frac{1}{2(2x-3)} + C \right)' = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2x-3} \right)' = -\frac{1}{2} \frac{-2}{(2x-3)^2} = \frac{1}{(2x-3)^2}.$$

Пример 2. Найти $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$.

Решение. Применяя (5.2), получим

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \left\{ \frac{dx}{x} = d(1+\ln x) \right\} = \int \frac{d(1+\ln x)}{1+\ln x} = \ln|1+\ln x| + C.$$

Пример 3. Найти $\int x \cos 2x dx$.

Решение. Применяя формулу (5.3), имеем

$$\begin{aligned} \int x \cos 2x dx &= \left\{ \begin{array}{l} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos 2x dx, \quad v = \int \cos 2x dx = 0.5 \sin 2x \end{array} \right\} = \\ &= 0.5x \sin 2x - 0.5 \int \sin 2x dx = 0.5x \sin 2x - 0.25 \int \sin 2x d(2x) = \\ &= 0.5x \sin 2x + 0.25 \cos 2x + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти $\int e^{2x} \sin x dx$.

$$\text{Решение. } \int e^{2x} \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \sin x, \quad du = \cos x dx, \\ dv = e^{2x} dx, \quad v = \int e^{2x} dx = 0.5 e^{2x} \end{array} \right\} =$$

$$\begin{aligned}
 &= 0.5e^{2x} \sin x - 0.5 \int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \cos x, \quad du = -\sin x dx, \\ dv = e^{2x} dx, \quad v = 0.5e^{2x} \end{array} \right\} = \\
 &= 0.5e^{2x} \sin x - 0.5(0.5e^{2x} \cos x + 0.5 \int e^{2x} \sin x dx) = \\
 &= 0.5e^{2x} \sin x - 0.25e^{2x} \cos x - 0.25 \int e^{2x} \sin x dx.
 \end{aligned}$$

Переносим последний интеграл в левую часть равенства, получим

$$1.25 \int e^{2x} \sin x dx = 0.5e^{2x} \sin x - 0.25e^{2x} \cos x + C.$$

Следовательно, $\int e^{2x} \sin x dx = 0.4e^{2x} \sin x - 0.2e^{2x} \cos x + C.$

Пример 5. Найти $\int \frac{3x^2 - 7x + 10}{(x^2 + 4)(x - 2)} dx.$

Решение. Рациональная подынтегральная дробь является правильной (см. методы интегрирования 4) и разлагается на простейшие дроби вида (5.4):

$$\frac{3x^2 - 7x + 10}{(x^2 + 4)(x - 2)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{Mx + N}{x^2 + 4}.$$

Если

привести дроби из данного разложения к общему знаменателю, то он совпадает со знаменателем исходной подынтегральной функции. Числители в левой и правой частях последнего равенства будут тождественно равными, т. е.

$$3x^2 - 7x + 10 = A(x^2 + 4) + (Mx + N)(x - 2).$$

Для нахождения неизвестного коэффициента A используем **метод частных значений**, т. е. подставим вместо переменной x ее частное значение, совпадающее с вещественным корнем знаменателя, $x = 2$. Получим равенство $8 = 8A$, откуда следует, что $A = 1$.

Для вычисления значений M , N используем **метод неопределенных коэффициентов**. Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества, получаем

$$\begin{array}{lcl}
 \text{систему уравнений} & \begin{array}{l} x^2 \left| \begin{array}{l} 3 = A + M, \\ -7 = N - 2M, \end{array} \right. & \text{решение которой:} \end{array}
 \end{array}$$

$M = 2$, $N = -3$. Таким образом,

$$\int \frac{3x^2 - 7x + 10}{(x^2 + 4)(x - 2)} dx = \int \left(\frac{1}{x - 2} + \frac{2x - 3}{x^2 + 4} \right) dx = \int \frac{dx}{x - 2} + \int \frac{2x dx}{x^2 + 4} -$$

$$\begin{aligned} -3 \int \frac{dx}{x^2+4} &= \int \frac{d(x-2)}{x-2} + \int \frac{d(x^2+4)}{x^2+4} - 3 \int \frac{dx}{x^2+4} = \\ &= \ln|x-2| + \ln(x^2+4) - 1.5 \operatorname{arctg} x/2 + C. \end{aligned}$$

Пример 6. Найти $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}} &= \left\{ \begin{array}{l} \sqrt{1+x} = t, \quad dx = 2t dt, \\ x = t^2 - 1 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} |x| \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \begin{array}{l} 8 \\ 3 \end{array} \end{array} \right\} = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2t}{t} dt = \\ = 2 \int_2^3 (t^2-1) dt = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 = 2(9-3) - 2\left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{32}{3} \end{aligned}$$

Пример 7. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13}$; 2) $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Решение. 1) Первый интеграл является несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования. Согласно определению (5.6), имеем

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+13} &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{(x+2)^2+9} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+2}{3} \Big|_1^b = \\ &= \frac{1}{3} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b+2}{3} - \operatorname{arctg} 1 \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{12}. \end{aligned}$$

2) Второй интеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции; функция $f(x) = 1/\sin^2 x$ терпит бесконечный разрыв в нижнем пределе при $x=0$. Согласно определению (5.7) получаем

$$\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\pi/4} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{tg} x \Big|_{\varepsilon}^{\pi/4} = 1 - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \operatorname{tg} \varepsilon = 1.$$

Оба несобственных интеграла сходятся.

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x - x^2$ и $y = -x$.

$$y1(x) = 3x - x^2 \quad r = 5 \quad n = 100 \quad x = -r, -r + \frac{r}{n}, \dots, r$$

$$y2(x) = -x$$

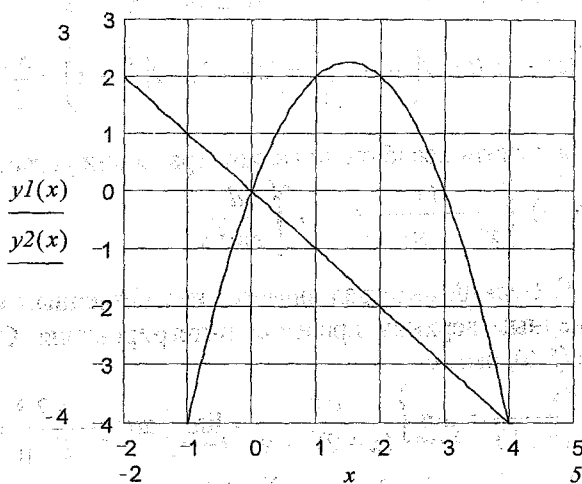


Рис. 8.

Решение. Находим точки пересечения данных кривых:

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = 3x - x^2, \\ y = -x, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -x = 3x - x^2, \\ y = -x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x - 4) = 0, \\ y = -x, \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = -4. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно, по формуле (5.8) имеем (см. рис. 8)

$$\begin{aligned} &\begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ -x \leq y \leq 3x - x^2; \end{cases} \\ S &= \int_0^4 (3x - x^2 - (-x)) dx = \int_0^4 (4x - x^2) dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^4 = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Пример 10. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой $y = \sqrt{4x - x^2}$, $y = 0$, $x = 2$ ($0 \leq x \leq 2$).

Решение. Объем полученного тела вращения найдем по формуле (5.11):

$$V = \pi \int_0^2 y^2 dx = \pi \int_0^2 (4x - x^2) dx = \pi \left(2x^2 - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = 16\frac{\pi}{3}.$$

Контрольная работа 10

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Литература: [4], гл. 1, п. 1.1–1.24, гл. 5; [5], т. 2, гл. 13; [6], гл. 15; [7], гл. 11, п. 1–3, 5; [8], гл. 15; [9], ч. 2, гл. 4; [13].

Основные теоретические сведения

1. Общим решением дифференциального уравнения первого порядка называется дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C)$, которая при любом значении произвольной постоянной C является решением данного уравнения. Решения, получающиеся из общего решения $y = \varphi(x, C)$ при определенном значении произвольной постоянной C , называется **частными**. Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям $y = y_0$ при $x = x_0$ (другая запись: $y|_{x=x_0} = y_0$), называется **задачей Коши**.

График всякого решения $y = \varphi(x)$ данного дифференциального уравнения, построенный на плоскости xOy , называется *интегральной кривой* этого уравнения. Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x, y)$ геометрически представляет собой поле направлений касательных к интегральным кривым.

2. Функция $f(x, y)$ называется *однородной функцией измерения k* относительно аргументов x и y , если равенство

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$$

справедливо для любого числа $\lambda \in \mathbf{R}$, при котором функция $f(\lambda x, \lambda y)$ определена, $k = \text{const}$. Например, функция

$$f(x, y) = 3x^4 - x^2 y^2 + 5y^4$$

является однородной четвертого измерения ($k = 4$), так как

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= 3(\lambda x)^4 - (\lambda x)^2 (\lambda y)^2 + 5(\lambda y)^4 = \lambda^4 (3x^4 - x^2 y^2 + 5y^4) = \\ &= \lambda^4 f(x, y). \end{aligned}$$

Если $k = 0$, то функция будет однородной нулевого измерения, т.е.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Дифференциальное уравнение в нормальной форме

$$y' = f(x, y) \tag{6.1}$$

называется *однородным* относительно переменных x и y , если $f(x, y)$ — однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Дифференциальное уравнение в дифференциальной форме

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

будет однородным в том и только в том случае, когда $P(x, y)$, $Q(x, y)$ — однородные функции одного и того же измерения k , т.е. $P(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k P(x, y)$, $Q(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k Q(x, y)$. Действительно, перепи-сав его в нормальной форме

$$y' = -\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = f(x, y),$$

легко заключаем, что $f(x, y)$ — однородная функция нулевого измерения. Так как однородное дифференциальное уравнение (6.1) в нормальной форме всегда можно записать в виде

$$y' = f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y),$$

то, положив $\lambda = 1/x$, получим $y' = \frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$.

Следовательно, уравнение (6.1) с помощью замены

$$y = tx \quad (t = y/x, y' = t + t'x \text{ или } dy = t dx + x dt)$$

сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно x и новой функции $t(x)$:

$$t + t'x = \varphi(t), \quad x \frac{dt}{dx} = \varphi(t) - t.$$

3. Уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)$$

называется **линейным**. Если $q(x) = 0$, то уравнение называется **однородным**; если $q(x) \neq 0$ — **неоднородным**. Общее решение однородного линейного уравнения получается путем разделения переменных; общее решение неоднородного уравнения получается из общего решения соответствующего однородного уравнения с помощью вариации произвольной постоянной интегрирования C .

Данное однородное уравнение можно интегрировать также с помощью замены $y = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$, $v(x)$ — две неизвестные функции.

4. Дифференциальное уравнение n -го порядка, разрешенное относительно производной, имеет вид

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}).$$

Порядок дифференциального уравнения равен порядку высшей производной, содержащейся в уравнении. Задача нахождения решения $y = y(x)$ данного уравнения, удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0; \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

называется **задачей Коши**.

Общее решение (совокупность всех решений) — функция, которая удовлетворяет трем условиям:

- содержит n произвольных постоянных (n — порядок дифференциального уравнения);
- при любых значениях произвольных постоянных является решением;

- при произвольных начальных условиях позволяет решать задачу Коши.

5. Теорема существования и единственности решения задачи Коши. Если в уравнении

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

функция $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$: а) непрерывна по всем своим аргументам $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$ в некоторой области G их изменений;

б) имеет ограниченные в области G частные производные $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'},$

$\dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$ по аргументам $y, y', \dots, y^{(n-1)}$, то найдется интервал

$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, на котором существует единственное решение $y = y(x)$ данного уравнения, удовлетворяющее условиям

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0; \dots; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

содержатся в области G .

Проинтегрировать (в конечном виде) уравнение n -го порядка можно только в некоторых частных случаях.

6. Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$py'' + qy' + ry = f(x),$$

где p, q, r — числа, причем $p \neq 0$. Если $f(x) = 0$, то уравнение называется *однородным*, а если $f(x) \neq 0$ — *неоднородным*.

7. Квадратное уравнение

$$pk^2 + qk + r = 0$$

называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения $py'' + qy' + ry = 0$. Пусть $D = q^2 - 4pr$ — дискриминант характеристического квадратного уравнения. Возможны следующие случаи зависимости общего решения от корней характеристического уравнения ($k_1; k_2$):

- $D > 0$ (корни действительные разные $k_1 \neq k_2$) — общим решением служит функция $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$;

- $D = 0$ (корни действительные равные $k_1 = k_2$) – общим решением служит функция $y = (C_1 + C_2 x)e^{k_1 x}$;
- $D < 0$ (корни комплексные $k_{1,2} = a \pm bi$) – общим решением является функция $y = e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$.

8. Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами основывается на следующей теореме.

Теорема. Если y^* – некоторое частное решение неоднородного уравнения $py'' + qy' + ry = f(x)$ и Y – общее решение соответствующего однородного уравнения $py'' + qy' + ry = 0$, то общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = Y + y^*.$$

Правило нахождения частного решения (y^*) неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

1. Пусть $f(x) = P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n , тогда:
 - $y^* = Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени n с неопределенными коэффициентами, если $k_1 \neq 0$ и $k_2 \neq 0$;
 - $y^* = x \cdot Q_n(x)$, если $k_1 = 0$ (или $k_2 = 0$);
 - $y^* = x^2 \cdot Q_n(x)$, если $k_1 = k_2 = 0$.
2. Пусть $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, тогда:
 - $y^* = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, если $\alpha \neq k_1, \alpha \neq k_2$;
 - $y^* = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, если $\alpha = k_1$ (или $\alpha = k_2$);
 - $y^* = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, если $\alpha = k_1 = k_2$.
3. Пусть $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + S_n(x) \sin \beta x)$, где $P_n(x)$ и $S_n(x)$ – многочлены, наибольшая степень которых n , тогда:
 - $y' = e^{\alpha x}(Q_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x)$, если $\alpha + \beta i \neq a + bi$;
 - $y' = x \cdot e^{\alpha x}(Q_n(x) \cos \beta x + R_n(x) \sin \beta x)$, если $\alpha + \beta i = a + bi$, где $Q_n(x)$ и $R_n(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами.

9. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

- Уравнение n -го порядка $y^{(n)} = f(x)$ (не содержит явно $y, y', \dots, y^{(n-1)}$) решается последовательным интегрированием.
- Уравнение 2-го порядка $F(x, y', y'') = 0$ (не содержит явно искомой функции y) преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y' = z(x)$ (откуда $y'' = z' = \frac{dz}{dx}$).
- Уравнение 2-го порядка $F(x, y', y'') = 0$ (не содержит явно аргумента x) преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y' = z(y)$ (откуда $y'' = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$).

Пример 1. Найти общее решение уравнения $xyy' = x^2 + y^2$.

Решение. Так как функции xy и $x^2 + y^2$ — однородные второго измерения, то данное уравнение — однородное (см. п. 2). Сделаем замену $y = tx$, $y' = t + t'x$. Тогда

$$x \cdot tx(t + t'x) = x^2 + (tx)^2, \quad tx^2(t + t'x) = x^2(1 + t^2).$$

Предполагая, что $x \neq 0$, сокращаем обе части уравнения на x^2 . Далее имеем:

$$t^2 + tx \frac{dt}{dx} = 1 + t^2, \quad tx dt = dx.$$

Разделяя переменные (для разделения переменных необходимо перенести все, что содержит $t(y)$, в одну сторону, а все, что содержит x — в другую, при этом dx и dt должны быть только в числителях), последовательно находим:

$$t dt = \frac{dx}{x}, \quad \int t dt = \int \frac{dx}{x}, \quad \frac{t^2}{2} = \ln |x| + \ln C, \quad t^2 = 2 \ln |Cx|.$$

В последнее выражение вместо t подставим значение y/x . Получим общий интеграл $y^2 = 2x^2 \ln |Cx|$. Разрешив его относительно y , найдем общее решение исходного дифференциального уравнения:

$$y = \pm x \sqrt{2 \ln |Cx|}.$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения $xy' - e^{-x} + xy = 0$.

Решение 1. Убедившись, что данное уравнение линейное (см. п. 2), полагаем $y(x) = u(x) \cdot v(x)$, тогда $y' = u'v + v'u$ и данное уравнение преобразуется к виду

$$x(u'v + v'u) + xuv = e^{-x}, \quad xu'v + xu(v' + v) = e^{-x}.$$

Составим систему для определения u и v :
$$\begin{cases} v' + v = 0, \\ xu'v = e^{-x}. \end{cases}$$
 Решаем первое уравнение системы

$$\frac{dv}{dx} + v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -dx, \quad \ln |v| = -x, \quad v = e^{-x}$$

(при определении v не нужно писать произвольную постоянную, ибо $v(x)$ достаточно знать с точностью до постоянной). Подставляем во второе уравнение системы $v = e^{-x}$ и решаем полученное уравнение:

$$xu'e^{-x} = e^{-x}, \quad x \frac{du}{dx} = 1, \quad du = \frac{dx}{x}, \quad u = \ln |x| + C.$$

Зная u и v , находим искомую функцию y : $y = uv = (C + \ln |x|)e^{-x}$.

Решение 2. Перепишем данное уравнение так: $xy' + xy = e^{-x}$. Рассмотрим однородное уравнение $xy' + xy = 0 \Rightarrow x(y' + y) = 0$. Так как $x \neq 0$ (значение $x = 0$ не является решением неоднородного уравнения), то

$$y' + y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y \Rightarrow \ln |y| = -x + \ln C \Rightarrow \ln \frac{|y|}{C} = -x \Rightarrow y = Ce^{-x} -$$

общее решение однородного уравнения.

Применяем далее метод вариации произвольной постоянной C . Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y = C(x)e^{-x}$; $y' = C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}$. Подставив значения y и y' в неоднородное уравнение, получим

$$xC'(x)e^{-x} - xC(x)e^{-x} + xC(x)e^{-x} = e^{-x} \Rightarrow xC'(x)e^{-x} = e^{-x}.$$

Так как $e^{-x} \neq 0$, то

$$xC'(x) = 1 \Rightarrow x \frac{dC(x)}{dx} = 1 \Rightarrow dC(x) = \frac{dx}{x} \Rightarrow C(x) = \ln |x| + C.$$

Подставив это значение $C(x)$ в общее решение неоднородного уравнения, получим $y = (\ln |x| + C)e^{-x}$ — общее решение неоднородного уравнения.

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''x \ln x = y'$.

Решение. В уравнении нет в явном виде искомой функции y . Понизим порядок этого уравнения, положив $y' = z(x)$. Тогда $y'' = z'$ и исходное уравнение превращается в уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{dx} x \ln x = z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x \ln x} \Rightarrow \ln |z| = \ln \ln x + \ln C_1 \Rightarrow z = C_1 \ln x.$$

Так как $z = y' = \frac{dy}{dx}$, то последнее уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= C_1 \ln x \Rightarrow dy = C_1 \ln x dx \Rightarrow y = C_1 \int \ln x dx = \\ &= \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = dx/x \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right\} = C_1 \left(x \ln x - \int dx \right) = C_1 x (\ln x - 1) + C_2. \end{aligned}$$

Получили общее решение исходного уравнения

$$y = C_1 x (\ln x - 1) + C_2.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

Решение. В уравнении нет в явном виде аргумента x . Понизим порядок уравнения подстановкой $y' = z(y)$, тогда $y'' = z \frac{dz}{dy}$ и исходное уравнение превращается в уравнение с разделяющимися переменными

$$z^2 + 2yz \frac{dz}{dy} = 0 \Rightarrow \frac{dz}{z} = -\frac{dy}{2y} \Rightarrow \ln |z| = -\frac{1}{2} \ln |y| + \ln C_1 \Rightarrow z = \frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Так как $z = y' = \frac{dy}{dx}$, то последнее уравнение является дифференциальным уравнением 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \sqrt{y} dy = C_1 dx \Rightarrow \frac{2}{3} y^{3/2} = C_1 x + C_2 \Rightarrow y = (C_1 x + C_2)^{2/3}.$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 13y = 5 \sin 2x$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$y|_{x=0} = 2/29, \quad y'|_{x=0} = 1/29.$$

Решение. Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 4y' + 13y = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид

$$k^2 + 4k + 13 = 0,$$

откуда $k_1 = -2 - 3i$, $k_2 = -2 + 3i$. Следовательно,

$$Y = e^{-3x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)$$

— общее решение однородного уравнения.

Подберем вид частного решения для данного уравнения.

$$f(x) = 5 \sin 2x, \quad P_n(x) = 0, \quad S_n(x) = 5, \quad n = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad \alpha + \beta i \neq k_{1,2},$$

$$Q_0(x) = A, \quad R_0(x) = B, \quad y^* = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Подставляя $(y^*)'$ и $(y^*)''$ в неоднородное исходное уравнение, получим тождество (y^* — решение данного уравнения). Для удобства вычислений будем выписывать выражения для y^* , $(y^*)'$, $(y^*)''$ в отдельные строки и слева за вертикальной чертой помещать коэффициенты, стоящие перед ними в уравнении. Умножая эти выражения на коэффициенты, складывая и приводя подобные члены, имеем:

$$\begin{array}{r|l} 13 & y^* = A \cos 2x + B \sin 2x, \\ 4 & (y^*)' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \\ 1 & (y^*)'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x, \\ \hline & (y^*)'' + 4(y^*)' + 13y^* = (13A + 8B - 4A) \cos 2x + (13B - 8A - 4B) \sin 2x \equiv \\ & \equiv 5 \sin 2x. \end{array}$$

Приравнявая коэффициенты при подобных членах в левой и правой части последнего тождества, находим A, B и y^* :

$$\begin{array}{r|l} \cos 2x & 9A + 8B = 0, \quad A = -8/29, \\ \sin 2x & -8A + 9B = 5, \quad B = 9/29. \end{array}$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y^* = -\frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x,$$

а общее решение неоднородного уравнения –

$$y = Y + y^* = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) - \frac{8}{29} \cos 2x + \frac{9}{29} \sin 2x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y|_{x=0} = 2/29 \Rightarrow C_1 - 8/29 = 2/29 \Rightarrow C_1 = 10/29;$$

$$y' = -2(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x) + e^{-3x} (-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x) + (16/29) \sin 2x + (18/29) \cos 2x;$$

$$y' = 1/29 \Rightarrow -2C_1 + 3C_2 + 18/29 \Rightarrow C_2 = 1/29.$$

Искомое частное решение таково:

$$y = e^{-2x} ((10/29) \cos 3x + (1/29) \sin 3x) - (8/29) \cos 2x + (9/29) \sin 2x.$$

Контрольная работа 11 РЯДЫ

Литература: [3], гл. 9; [4], гл. 4, п. 6.9–6.10; [5], т. 2, гл. 16, 17; [6], гл. 17; [7], гл. 13; [8], гл. 14; [9], ч. 2, гл. 3; [13].

Основные теоретические сведения

1. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (7.1)$$

где $a_n \in \mathbf{R}$, называется **числовым рядом**. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$, называются **членами ряда**, число a_n – **общим членом ряда**.

Суммы $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ называются **частичными суммами**, а S_n – **n -й частичной суммой ряда (7.1)**.

Числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **сходящимся**, если существует

предел его частичных сумм $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Число $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ называется

суммой ряда. Если же предел частичных сумм не существует, то ряд (7.1) называется **расходящимся**.

Необходимый признак сходимости. Если ряд (7.1) сходится, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Достаточный признак расходимости. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = C \neq 0,$$

то ряд (7.1) расходится.

К достаточным признакам сходимости для рядов с положительными членами ($a_n \geq 0$) относятся:

- **Признак сравнения.** Если даны два ряда

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (7.2)$$

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad (7.3)$$

и для всех $n > N$ выполняется неравенство $0 < a_n \leq b_n$, то:

- 1) из сходимости ряда (7.3) следует сходимость ряда (7.2);
- 2) из расходимости ряда (7.2) следует расходимость ряда (7.3).

- **Признак сравнения в предельной форме.** Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = C \quad (0 < C < \infty), \quad (7.4)$$

то ряды (7.2) и (7.3) одновременно сходятся или расходятся.

В качестве эталонных рядов для сравнения обычно служат:

- 1) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, сходящийся при $\alpha > 1$ и расходящийся при $0 < \alpha \leq 1$;
- 2) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$, сходящийся при $0 \leq q < 1$ и расходящийся при $q \geq 1$.

- **Признак Д'Аламбера.** Если существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho, \quad (7.5)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\rho < 1$ и расходится при $\rho > 1$. Если же

$\rho = 1$, то вопрос о сходимости ряда этим признаком не решается.

- **Радикальный признак Коши.** Если существует

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \rho, \quad (7.6)$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится при $\rho < 1$ и расходится при $\rho > 1$. При $\rho = 1$ радикальный признак Коши неприменим.

- **Интегральный признак Коши.** Пусть положительный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет положительную, непрерывную и убывающую производящую функцию $f(n) = a_n$. Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и интеграл $\int_0^{\infty} f(x) dx$ одновременно сходятся или расходятся.

Числовой ряд (7.1), члены a_n которого имеют разные знаки, называется **знакопеременным**.

Если ряд

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \quad (7.7)$$

сходится, то ряд (7.1) также сходится и называется **абсолютно сходящимся**. Если ряд (7.7) расходится, а ряд (7.1) сходится, то ряд (7.1) называется **неабсолютно (условно) сходящимся**.

Ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots, \quad (7.8)$$

где $a_n \cdot a_{n+1} < 0$, называется **знакопередующимся рядом**.

Признак Лейбница. Если члены знакопередующегося ряда (7.8) удовлетворяют условиям:

$$1) a_1 > a_2 > \dots > a_n > \dots; \quad 2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

то ряд (7.8) сходится.

2. Ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n. \quad (7.9)$$

называется **степенным рядом** (относительно $(x-a)$), где $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ — постоянные числа, называемые **коэффициентами ряда**, a — фиксированное число. При $a = 0$ получаем степенной ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (7.10)$$

Число R называется **радиусом сходимости** степенного ряда, если

(7.9) сходится при $|x-a| < R$ и расходится при $|x-a| > R$. При $|x-a| = R$ ряд может, как сходиться, так и расходиться. Интервал $(a-R; a+R)$ называется **интервалом сходимости** степенного ряда (7.9). Радиус сходимости R может быть найден по формуле

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \quad \text{или} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \quad (7.11)$$

Областью сходимости степенного ряда является интервал, $(-R; R)$, к которому в отдельных случаях добавляются одна или обе границы интервала (что зависит от свойств конкретного исследуемого ряда).

Чтобы определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, нужно:

1. Проверить необходимый признак сходимости. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0,$$

то ряд расходится;

2. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

то необходимо применить один из достаточных признаков:

- признак Д'Аламбера или Коши (какой лучше подойдет к данному примеру);
- интегральный признак Коши, если легко найти $\int_1^{\infty} f(x) dx$;
- признак сравнения, если $\int_1^{\infty} f(x) dx$ найти трудно, а признак Д'Аламбера или Коши бессилен.

Пример 1. Исследовать на сходимость числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2n+3)}{n}.$$

Решение. Проверяем необходимый признак

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(2n+3)}{n} = \left\{ \frac{\infty}{\infty} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+(2n+3)^2} = 0.$$

Здесь для вычисления предела использовано правило Лопиталья. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, то проверяем сходимость по признаку Д'Аламбера (7.5). Так как общий член ряда $a_n = \operatorname{arctg}(2n+3)/n$, то, заменяя в выражении n -го члена n на $n+1$, находим

$$a_n = \operatorname{arctg}(2(n+1)+3)/(n+1) = \operatorname{arctg}(2n+5)/(n+1).$$

Затем ищем предел отношения последующего члена a_{n+1} к предыдущему a_n при $n \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(2n+5) \cdot n}{(n+1) \operatorname{arctg}(2n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(2n+5)}{\operatorname{arctg}(2n+3)} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (2n+3)^2}{1 + (2n+5)^2} \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Поскольку полученный предел равен 1, признак Д'Аламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда (для вычисления предела использовано правило Лопиталья). Применим теперь признак сравнения в предельной форме. В качестве эталонного ряда выберем

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $b_n = \frac{1}{n}$ и в силу формулы (7.4) получим

$$C = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(2n+3)/n}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg}(2n+3) \cdot n}{n \cdot 1} = \pi/2.$$

Следовательно, исследуемый ряд является расходящимся, так как эталонный ряд с общим членом $b_n = 1/n$ расходится (гармонический ряд).

Для определения области сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \right)$$

необходимо:

- вычислить радиус сходимости по формуле (7.11);
- исследовать сходимость ряда при $x = \pm R$ ($x = a \pm R$);
- записать область сходимости по результатам предыдущих пунктов.

Решение. Так как $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n \sqrt{n+1}}$, $a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1} \sqrt{n+2}}$, то

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^n 2^{n+1} \sqrt{n+2}}{2^n \sqrt{n+1} (-1)^{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \sqrt{\frac{n+2}{n+1}} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1+2/n}{1+1/n}} = 2.$$

Значит, степенной ряд сходится при $|x - 2| < 2$, т.е. в интервале $(0; 4)$.

При $x = 0$ получаем ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(0-2)^n}{2^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Положим $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x+1}}$ при $x \geq 0$; эта функция положительная, непрерывная и убывает. Тогда несобственный интеграл

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+1}} = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b (x+1)^{-1/2} d(x+1) = \lim_{b \rightarrow \infty} 2\sqrt{x+1} \Big|_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (2\sqrt{b+1} - 2) = \infty,$$

т.е. расходится, а значит, данный ряд также расходится.

При $x = 4$ получаем знакочередующийся ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(4-2)^n}{2^n \sqrt{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Так как члены данного знакочередующегося ряда монотонно убывают

$$1 > 1/\sqrt{2} > 1/\sqrt{3} > \dots, \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} = 0,$$

то, согласно признаку Лейбница, ряд сходится. Так как ряд, составленный из абсолютных членов данного ряда, т.е. ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 1/\sqrt{n+1}$,

расходится, то исследуемый ряд сходится условно (неабсолютно).

Таким образом, область сходимости исследуемого степенного ряда $(0; 4]$.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
1. Предисловие	3
2. Литература	4
3. Элементы линейной алгебры	5
4. Элементы векторной алгебры и аналитической геометрии	20
5. Введение в математический анализ.	
Дифференциальное исчисление функций одной переменной	31
6. Приложения дифференциального исчисления	41
7. Неопределенный и определенный интегралы	46
8. Дифференциальные уравнения	54
9. Ряды	63

Учебное издание

**УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ
ДЛЯ ВЫПОЛНЕНИЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ**
по дисциплине
«МАТЕМАТИКА»

Составитель: Валентин Николаевич Веретенников

Редактор И. Г. Максимова

ЛР №020309 от 30.19.96

Подписано в печать 13.09.01
Печ. л. 4,5

Формат бумаги 60x90¹/₁₆
Тираж 300 экз.

Бумага кн.-жур.
Зак. 476

195196, СПб, Малоохтинский пр. 98. РГТМУ.
Отпечатано в ООО «АСпринт»