## РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

#### Е.З. Шнеерсон

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА раздел «ДИНАМИКА»

ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ, ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ, УДАР

Санкт-Петербург

2001

Российский государственный гидромстеорологический институт

**БИБЛИОТЕКА** 

195196, СПб, Малоохтинский пр.,

УДК 531.01

Одобрено методической комиссией факультета экологии и физики природной среды РГГМУ

Автор: Е. З. Шнеерсон, д-р техн. наук, доц.

Рецензенты: Б. Г. Вагер, д-р физ.-мат. наук, проф. (СПб ГАСУ),

В. В. Максаров, д-р техн. наук, проф. (СЗТУ)

Теоретическая механика. Раздел «Динамика». Динамика материальной точки, общие теоремы динамики, удар: Учебное пособие. СПб.: РГТМУ, 2001, 70 с.

Значительная часть предлагаемого учебного пособия посвящена изложению основных законов и теорем классической динамики для материальной точки и системы материальных точек. Исследовано влияние выбора системы отсчета на структуру динамических уравнений. Приведены примеры, иллюстрирующие связь известных природных явлений с законами динамики. Даны элементы современной теории удара, и приведены примеры. Изучение этого раздела механики формирует у студентов представление о физических процессах определенного типа, рассматриваемых при решении практически важных задач механики жидкости и газа. Пособие предназначено для студентов гидрометеорологических специальностей.

#### ПРЕДИСЛОВИЕ

Решение многообразных проблем движения жидкости и газа невозможно без глубокого понимания законов фундаментальной науки — теоретической механики. Поэтому студентами, изучающими такие дисциплины, как «Динамическая метеорология», «Динамика океана» и другие, основные уравнения, модели и подходы теоретической механики должны быть освоены досконально.

Вместе с тем, в последнее время преподавание теоретической механики наталкивается на определенные трудности ввиду ограниченности учебного времени. В этих условиях роль динамики как важнейшего раздела механики еще более возрастает. Данное обстоятельство во многом явилось причиной издания настоящего пособия. Автор постарался избрать максимально сжатую форму изложения. Тем не менее, ряд вопросов остался за пределами пособия – теорема Кёнига, кинетическая энергия твердого тела, понятие о моментах инерции, не говоря уже об элементах аналитической механики. Зато уделено внимание рассмотрению структуры динамических уравнений для системы материальных точек в различных системах отсчета. Это согласуется с методологическими идеями М. А. Айзермана, содержащимися в лекционном курсе для физиков и инженеров-физиков [1]. Еще один учебник, на который в известной степени ориентировался автор в процессе работы над пособием, – непревзойденный курс Л. Г. Лойцянского и А. И. Лурье [6].

Предполагается, что читатель знаком с предшествующими разделами механики — статикой и кинематикой. Однако по ходу изложения даются некоторые определения и формулировки из этих разделов (главный вектор и главный момент, теорема сложения ускорений при сложном движении точки и т.п.)

Особое место занимает четвертая глава пособия, посвященная теории удара. Эта специальная задача динамики выделена по двум соображениям. Во-первых, в классической теории удара, известной под названием «стереомеханика» [2], используются динамические модели с сосредоточенными параметрами, а ударное взаимодействие предполагается мгновенным. В этом случае скорость соударяющихся тел изменяется скачкообразно, а их поведение определяется общими теоремами динамики. Таким образом, ударные явления в особо рельефной и физически понятной форме иллострируют применение общих теорем, рассмотренных в основной части курса.

Во-вторых, в современной механике жидкости и газа большое внимание уделяется изучению так называемых ударных волн, характеризующихся скачкообразным изменением давления, плотности, а также скорости движения среды [5]. В зависимости от характера поставленных задач, на первый план выходят различные аспекты ударных явлений. Во всяком случае, изучение расмотренных здесь проблем соударений твердых тел (в том числе, ударных взаимодействий с учетом неидеальности наложенных на тела связей), несомненно, полезны для будущих специалистов в области метеорологических и других родственных специальностей. Указанные задачи формируют у студентов навыки правильного выбора моделей и применения законов динамики, справедливых для любых физических сред.

В пособии в основном приняты традиционные для механики обозначения производных по времени в виде точек над переменными. Векторные величины выделены жирным шрифтом.

The Million of the Million of the Communication of the Communication of the Communication of the Communication Althorism of the Communication of the Communi

windows of their motion of the section of the secti

## ГЛАВА І. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

#### 1. ОСНОВНЫЕ МОДЕЛИ

Теоретическая механика является фундаментальной дисциплиной, без знания которой немыслимо изучение целой группы наук, составляющих общую механику (небесная механика, теория упругости, гидромеханика и т.п.). В теоретической механике абстрагируются от ряда свойств реальных материальных тел. При этом объектом исследования становятся несколько упрощенных моделей, что является распространенным и необходимым приемом для любой теоретической дисциплины. Подобные упрощения связаны с определенной схематизацией изучаемых явлений, поэтому полученные результаты дают лишь приближенное представление о реально происходящих в природе и технике процессах. С другой стороны, использование упрощенных моделей позволяет выделить основные, наиболее общие свойства тел, справедливые для любых агрегатных состояний. Получаемые при этом теоретические результаты и закономерности отличаются наглядностью, компактностью аналитических соотношений, обозримостью и универсальностью.

В теоретической механике рассматриваются механические движения и механические взаимодействия упрощенных моделей реальных тел, к которым относятся материальная точка, система материальных точек и абсолютно твердое тело. Материальная точка имеет массу (в статике и кинематике понятие массы не используется), но характеризуется пренебрежимо малыми размерами. Последнее утверждение является весьма условным, поскольку, например, любое тело, совершающее поступательное движение, можно рассматривать как материальную точку.

Система материальных точек – это совокупность материальных точек, движения и положения которых связаны между собой. Если отвлечься от вращательных движений планет вокруг собственных осей, то совокупность планет представляет собой систему материальных точек. При этом взаимосвязь движений отдельных материальных точек осуществляется только через силовое взаимодействие, а конфигурация составляющих систему точек изменчива. Такая система считается изменяемой. Если же конфигурация в процессе движения всегда сохраняется (например, для системы «гантельного» типа, включающей соединенные жестким стержнем две материальные точки), то система называется неизменяемой.

Абсолютно твердое тело — это недеформируемая сплошная среда. Расстояние между точками такого тела не меняется в процессе движения. Заметим, что абсолютно твердое тело можно трактовать как частный случай неизменяемой системы материальных точек. Именно отказ от представления о деформируемости реальных тел следует считать основной гипотезой, принятой в теоретической механике.

Любое реальное тело совершает движение в пространстве и во времени. Согласно представлениям современной физики свойства пространства и времени не универсальны, но в значительной степени определяются физическими характеристиками движущихся материальных объектов. Однако в классической механике по-прежнему опираются на постулаты, предложенные Ньютоном. При этом пространство предполагается евклидовым и неподвижным, причем его свойства считаются не связанными с движущейся в нем материей. Время по Ньютону течет непрерывно, равномерно и одинаково во всех частях пространства и также не зависит от движущихся объектов.

#### 2. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ДИНАМИКИ

Динамика является наиболее сложным и важным разделом теоретической механики. Предметом изучения динамики является движения материальных тел в зависимости от причин, их вызывающих, т.е. от силовых взаимодействий. Таким образом, в динамике в единое целое объединены проблемы статики (силовое взаимодействие материальных тел в их равновесных состояниях) и кинематики (геометрические характеристики механического движения).

Основой динамики являются три закона Ньютона.

Первый закон Ньютоца (принцип инерции). Изолированная материальная точка сохраняет состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения (т.е. инерционного движения) относительно инерциальной системы отсчета.

При этом под инерциальной понимается любая система координат, которая движется поступательно, равномерно и прямолинейно по отношению к другой системе, условно принимаемой за неподвижную (или сама условно неподвижная система). В качестве такой системы («абсолютной») когда-то рассматривалась геоцентрическая система Птолемея, жестко связанная с Землей. Впоследствии на основании открытий Коперника она была заменена гелиоцентрической системой, связанной с Солнцем, оси которой направлены на считавшиеся неподвижными звезды. Хотя по современным представлениям указанная система отсчета также не может считаться неподвижной, именно ее и в настоящее время часто трактуют как «абсолютную».

Изолированность материальной точки означает, что на нее не действуют другие материальные объекты. Очевидно, что в реальных условиях подобное недостижимо. Поэтому существование инерциальных систем нельзя строго доказать экспериментально. Однако в ряде случаев воздействием сил на рассматриваемую точку можно пренебречь, что позволяет с

высокой степенью точности рассматривать ее как изолированную. В этом случае наблюдатель, связанный с определенной системой отсчета, имеет возможность судить, является ли эта система инерциальной. Действительно, если движение данной изолированной точки не оказывается инерционным, то это означает лишь одно: рассматриваемая система отсчета принадлежит к классу неинерциальных.

Второй закон Ньютона. Ускорение, сообщаемое материальной точке, по величине пропорционально приложенной к ней силе и имеет направление этой силы (рис. 1):

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F},\tag{1.1}$$

где  $\mathbf{a}$  — вектор ускорения точки;  $\mathbf{F}$  — равнодействующая всех приложенных к точке сил; m — масса точки.

Величина массы определяет так называемую инертность материальной точки, т.е. ее способность противостоять изменению скорости под влиянием силового воздействия. В ньютоновской механике предполагается, что масса не зависит от скорости движения. Это экспериментально подтверждается для скоростей, малых по сравнению со скоростью света.

Однако в технике мы часто встречаемся с ситуациями, когда в процессе движения к телу присоединяются новые массы или, напротив, некоторая часть массы отделяется. Суда, «обрастающие» примерзающим к ним льдом, реактивные самолеты, отбрасывающие отработанное горючее, многоступенчатые ракеты служат наиболее яркими примерами подобных механических систем.

Трактуя эти объекты как материальные точки, мы уже не можем применять для описания их движения динамическое уравнение в форме (1.1). Необходимо использовать более общую формулировку второго закона Ньютона в виде

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = \mathbf{F}, \tag{1.2}$$

где  ${\bf v}$  — вектор скорости точки, а масса m, вообще говоря, является переменной величиной.

При помощи выражения (1.2) И. В. Мещерский получил основное уравнение динамики точки *переменной массы*, играющее важнейшую роль в теории современных летательных аппаратов [6]. Ниже, однако, рассматриваются только те проблемы динамики, в которых масса точки постоянна, что соответствует равенству (1.1), иногда называемому *основным уравнением динамики точки*. Отметим, что именно это уравнение является исходным при выводе сложных динамических соотношений для жидких и газообразных сред, определяющих движение воздушных и океанических потоков.

**Третий закон Ньютона.** Силы, с которыми две материальные точки действуют друг на друга, равны по величине, противоположны по направлению и имеют общую линию действия (рис. 2).

Этот закон иногда кратко формулируется как закон равенства действия и противодействия. Поскольку «действие» и «противодействие» приложены к различным материальным точкам  $B_1$  и  $B_2$ , то эти силы друг друга не уравновешивают. Поэтому обе материальные точки движутся ускоренно, если только к ним не приложены дополнительные уравновешивающие силы.

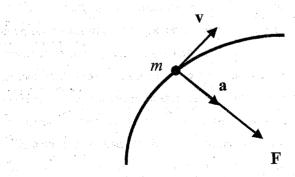
## 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Основное уравнение динамики точки (1.1) связывает между собой векторы силы и ускорения. Однако из кинематики известно, что ускорение выражается следующим образом

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}},\tag{1.3}$$

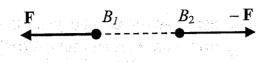
где  ${f r}-{f p}$ адиус-вектор точки, определяющий ее положение в пространстве.

and the second of the second o



Puc. 1.

The state of the s



enter de la companya del companya de la companya del companya de la companya de l

Подставляя выражение (1.3) в уравнение (1.1), получаем дифференциальное уравнение движения точки *В в векторной форме* (рис. 3)

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \tag{1.4}$$

В уравнении (1.4.) учтена зависимость равнодействующей силы от времени, положения точки в пространстве и скорости. Именно от этих переменных зависят обычно силы, встречающиеся в природе и технике. В устройстве для забивания свай силовые воздействия (удары) наносятся через определенные временные промежутки: Указанное является примером зависимости силы от времени. Силы трения и сопротивления воздуха, как известно, зависят от скорости. От положения точки зависят электростатические силы, силы всемирного тяготения и т.п.

Проектируя обе части уравнения (1.4) на оси декартовой системы координат Oxyz, получаем дифференциальные уравнения движения точки в координатной форме

$$m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$

$$m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z});$$

$$m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}),$$
(1.5)

где x, y, z — координаты материальной точки, одновременно являющиеся проекциями радиуса-вектора;  $F_x, F_y, F_z$  — проекции вектора силы.

Заметим, что уравнения (1.5) не являются независимыми, а образуют систему. Действительно, в каждом из уравнений соответствующая проекция силы зависит не только от «своих» переменных (в первом уравнении — от x и  $\dot{x}$ ), но и от «чужих». Указанное свойство может иметь глубокий физический смысл. Например, подъемная сила крыла, направленная вертикально, существенно зависит от горизонтальной скорости самолета относительно воздушной среды.

Из кинематики известно, что при *естественном* способе задания движения вектор ускорения точки разлагают по осям натурального триэдра —

по направлениям ортов касательной (т), главной нормали (**n**) и бинормали (**b**) к траектории (рис. 4). Главная нормаль — та из всех возможных нормалей к пространственной кривой в данной точке, которая лежит в так называемой *соприкасающейся* плоскости. Эта плоскость проходит через касательную к кривой в данной точке и ориентирована таким образом, что в ней «почти» лежит малая дуга траектории в окрестности этой точки. Бинормаль перпендикулярна к соприкасающейся плоскости.

Проектируя уравнение (1.1) на оси натурального триэдра, и учитывая, что соответствующие проекции вектора ускорения  $a_{\tau}=\dot{v}_{\tau},~a_{n}=\overset{v^{2}}{/\rho},$   $a_{b}=0$  , находим

$$m\dot{v}_{\tau} = F_{\tau}; \ m\frac{v^2}{\rho} = F_n; \ 0 = F_b,$$
 (1.6)

где учтено, что вектор  ${\bf a}$  лежит в соприкасающейся плоскости;  $\rho$  – радиус кривизны траектории.

Равенства (1.6) представляют собой дифференциальные уравнения движения точки *в естественной форме*. Аналогичным образом можно получить уравнения движения в любых криволинейных координатах (сферических, цилиндрических, полярных и т.п.).

## 4. ДВЕ ОСНОВНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Полученные выше дифференциальные уравнения дают возможность сформулировать и решить две различные задачи динамики, которые принято называть *основными*.

В *прямой* (первой) задаче задаются масса материальной точки и кинематические уравнения движения, например, в координатной форме

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t).$$
 (1.7)

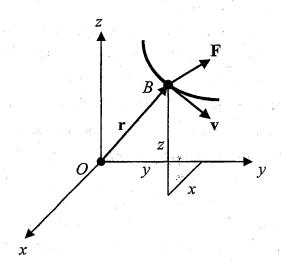


Рис. 3.

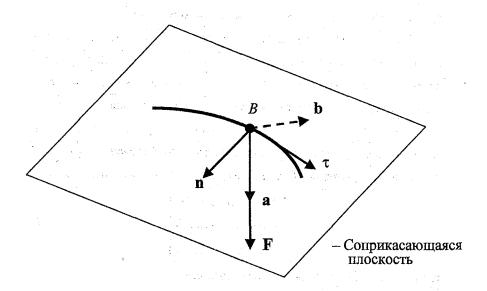


Рис. 4.

Отысканию подлежит равнодействующая сила, действующая на точку и определяющая заданное движение.

Техника решения прямой задачи элементарна. Для достижения результата достаточно найти вторые производные по времени заданных функций. Подставив функции  $\ddot{x}(t)$ ,  $\ddot{y}(t)$ ,  $\ddot{z}(t)$ , а также известную величину m в уравнения (1.5), получаем проекции  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$  как функции времени. При необходимости можно найти также модуль вектора равнодействующей и направляющие косинусы, которые легко выражаются через проекции.

Отметим, что решение первой задачи динамики (хотя и в более сложной постановке, чем описано выше) сыграло историческую роль в развитии небесной механики. Закономерности движения планет солнечной системы (т.е. кинематические уравнения движения) были при помощи астрономических наблюдений сформулированы И. Кеплером. Впоследствии И. Ньютон, решив первую задачу динамики, определил, что орбитальные движения осуществляются под влиянием сил всемирного тяготения.

В *обратной* (второй) задаче динамики требуется определить закон движения материальной точки, если заданы ее масса и закон действия сил. Последнее означает, что должен быть известен характер зависимости проекций равнодействующей от времени, координат точки и проекций скорости.

Итак, необходимо проинтегрировать систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка (1.5). Согласно теории дифференциальных уравнений *общее решение* системы записываются в виде

$$x = \varphi_1(t, C_1, C_2, ..., C_6);$$
  

$$y = \varphi_2(t, C_1, C_2, ..., C_6);$$
  

$$z = \varphi_3(t, C_1, C_2, ..., C_6),$$
(1.8)

где  $C_1, C_2, ..., C_6$  – произвольные постоянные.

Для определения движения материальной точки при конкретных начальных условиях нужно выразить эти постоянные через значения координат и проекций скорости в некоторый фиксированный момент времени  $t_0$ . Эти условия записываются в виде

при 
$$t = t_0$$
:  $x = x_0, y = y_0, z = z_0;$   $\dot{x} = \dot{x}_0, \dot{y} = \dot{y}_0, \dot{z} = \dot{z}_0.$  (1.9)

Дифференцируя по времени соотношения (1.8), получаем следующие равенства

$$\dot{x} = \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = \varphi_4(t, C_1, C_2, ..., C_6);$$

$$\dot{y} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} = \varphi_5(t, C_1, C_2, ..., C_6);$$

$$\dot{z} = \frac{\partial \varphi_3}{\partial t} = \varphi_6(t, C_1, C_2, ..., C_6).$$
(1.10)

После подстановки начальных условий в выражения (1.8), (1.10) образуется система шести уравнений для определения шести искомых констант  $C_i$  ( $i=\overline{1,6}$ ). Разрешая эту систему, находим постоянные  $C_i$  как функции начальных условий и подставляем найденные зависимости в равенства (1.8). В результате окончательно получаем кинематические уравнения движения точки

$$x = x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

$$y = y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

$$z = z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$
(1.11)

Пример решения обратной задачи динамики. Материальная точка B единичной массы движется в горизонтальной плоскости под действием силы  $\mathbf{F}$ , все время остающейся в этой же плоскости. Модуль силы изменяется со временем по закону  $F=2+\sin t$ . Угол  $\alpha$ , составляемый вектором  $\mathbf{F}$  с горизонталью и отсчитываемый против часовой стрелки, изменяется со временем по линейному закону  $\alpha=0.5t$  (рис. 5). В начальный момент точка находится в покое. Найти уравнения движения точки.

Решение. Начало координат O выберем в исходном положении точки. Ось Ox направлена по горизонтали вправо, ось Oy — по вертикали вверх. Начальные условия движения будут

при 
$$t = t_0$$
:  $x = 0, y = 0; x = 0, y = 0.$  (1.12)

Проекции силы на оси координат имеют вид

$$F_x = F\cos\alpha = (2 + \sin t)\cos 0.5t;$$
  
$$F_y = F\sin\alpha = (2 + \sin t)\sin 0.5t.$$

Уравнения движения материальной точки в данном случае примут вид

$$\ddot{x} = 2\cos 0.5t + \frac{1}{2}\sin 0.5t + \frac{1}{2}\sin 1.5t;$$

$$\ddot{y} = 2\sin 0.5t + \frac{1}{2}\cos 0.5t - \frac{1}{2}\cos 1.5t.$$
(1.13)

Интегрируя уравнения (1.13), получим

$$\dot{x} = 4\sin 0.5t - \cos 0.5t - \frac{1}{3}\cos 1.5t + C_1;$$

$$\dot{y} = -4\cos 0.5t + \sin 0.5t - \frac{1}{3}\sin 1.5t + C_3. \tag{1.14}$$

После повторного интегрирования имеем

$$x = -8\cos 0.5t - 2\sin 0.5t - \frac{2}{9}\sin 1.5t + C_1t + C_2;$$
  

$$y = -8\sin 0.5t - 2\cos 0.5t + \frac{2}{9}\cos 1.5t + C_3t + C_4.$$
 (1.15)

Подставляя в выражения (1.14) и (1.15) начальные условия (1.12), находим постоянные интегрирования

$$C_1 = \frac{4}{3}$$
;  $C_2 = 8$ ;  $C_3 = 4$ ;  $C_4 = \frac{16}{9}$ .

Окончательно искомые уравнения движения точки запишутся в виде

$$x = -8\cos 0.5t - 2\sin 0.5t - \frac{2}{9}\sin 1.5t + \frac{4}{3}t + 8;$$

$$y = -8\sin 0.5t - 2\cos 0.5t + \frac{2}{9}\cos 1.5t + 4t + \frac{16}{9}.$$

Приведенная выше схема решения второй задачи динамики основывалась на предположении о существовании общего решения системы уравнений движения в аналитической форме (1.8). Кроме того, предполагалась разрешимость уравнений для произвольных постоянных. В ряде случаев координаты точки не могут быть выражены в виде явных функций времени и постоянных интегрирования, но решение может быть записано в виде неявных функций (общих интегралов системы). В этом случае ход решения задачи усложняется. Наконец, во многих ситуациях аналитический подход вообще невозможен, и систему уравнений движения приходится решать посредством численного интегрирования. Отметим, что обратная задача занимает центральное место во всех динамических исследованиях как теоретического, так и прикладного характера.

## 5. ДВИЖЕНИЕ И РАВНОВЕСИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В НЕИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

В п. 2 указывалось, что первый закон Ньютона справедлив лишь для инерциальной системы отсчета. Это утверждение следует отнести и к основному уравнению динамики точки (1.1) (второму закону Ньютона).

Входящая в правую часть уравнения (1.1) равнодействующая **F** выражает совокупное действие на точку других материальных объектов. Однако наблюдатель, связанный с неинерциальной системой отсчета, может убедиться в том, что в его системе отсчета рассматриваемый закон не выполняется, поскольку произведение массы на ускорение не совпадаем с действующей на точку силой.

Для устранения этого протинере из следует обратиться к представлению о сложном движении мадериальнорогоминеский инфином в кинематике.

— виститут

БИБЛИОТЕКА

195196, СПб, Малоохтинский пр., 98

На рис. 6 показаны инерциальная система отсчета  $O \times y \times z$  и движущаяся относительно нее неинерциальная система  $O' \xi \eta \zeta$  Движение точки массы m будем рассматривать как сложное. При этом движение неинерциальной системы относительно инерциальной называется переносным (индексируется буквой e), движение точки по отношению к неинерциальной системе — относительным (индексируется буквой r), а движение точки относительно инерциальной системы — абсолютным (индексируется буквой a). Для соответствующих ускорений точки в кинематике получено соотношение

$$\mathbf{a}_a = \mathbf{a}_r + \mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c, \tag{1.16}$$

где  $\mathbf{a}_c$  — вектор кориолисова ускорения, причем  $\mathbf{a}_c = 2\mathbf{w} \times \mathbf{v}_r$ . Здесь  $\mathbf{w}$  — вектор угловой скорости переносного движения;  $\mathbf{v}_r$  — вектор относительной скорости точки.

Учитывая, что ускорение в левой части равенства (1.1) по смыслу является абсолютным, и подставляя вместо него выражение (1.16), получим

$$m\mathbf{a}_r = \mathbf{F} + \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_c, \tag{1.17}$$

где  $\mathbf{J}_e = -m\mathbf{a}_e$  — вектор переносной силы инерции;  $\mathbf{J}_c = -m\mathbf{a}_c$  — вектор кориолисовой силы инерции.

Таким образом, основное уравнение динамики точки в неинерциальной системе отсчета может быть получено из соответствующего уравнения для инерциальной системы, однако к непосредственно приложенным к точке силам следует добавить переносную и кориолисову силы инерции. Направление сил инерции противоположно направлению соответствующих ускорений.

Введем понятие состояния относительного равновесия материальной точки. Оно реализуется, если точка сохраняет неподвижность по отношению к неинерциальной системе отсчета. Очевидно, что при этом  $\mathbf{a}_r = \mathbf{v}_r = 0$ , а, следовательно, и  $\mathbf{a}_c = \mathbf{J}_c = 0$  (отметим, что  $\mathbf{J}_c = 0$  еще в двух случаях — если  $\mathbf{\omega} = 0$  или если вектор  $\mathbf{\omega}$  коллинеарен  $\mathbf{v}_r$ ). На основании соотношения (1.17) уравнение относительного равновесия точки имеет вид

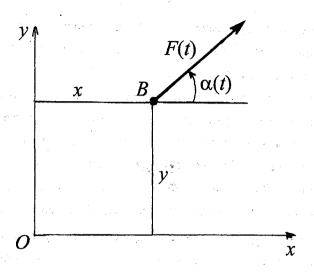


Рис. 5.

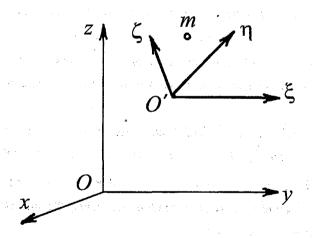


Рис. 6.

$$\mathbf{F} + \mathbf{J}_{\rho} = 0. \tag{1.18}$$

Таким образом, в неинерциальной системе отсчета равновесие наблюдается лишь в том случае, если равна нулю векторная сумма «обычных» сил и переносной силы инерции.

Пример относительного равновесия. Изучим относительное равновесие тяжелой точки (груза) на нити (отвеса) с учетом вращения Земли и вблизи ее поверхности [6]. Очевидно, что в этом случае систему отсчета, жестко связанную с Землей, необходимо рассматривать как неинерциальную. На точку B массы m действуют три силы: сила притяжения к Земле G, реакция нити N и переносная сила инерции  $J_e$ , которая в данном случае совпадает с центробежной, поскольку равномерно вращающаяся вокругоси Земля совершает плоское движение (рис. 7). Заметим, что реакция нити N равна по величине и противоположна по направлению кажущемуся весу груза. Вследствие вращения Земли кажущийся вес не идентичен силе притяжения.

Проектируя силы на направление отвеса *DB*, получаем

$$G\cos(\varphi - \lambda) - N - J_e\cos\varphi = 0, \qquad (1.19)$$

где  $\lambda$  — геоцентрическая широта (угол радиуса Земли с плоскостью экватора);  $\phi$  — географическая широта (угол линии отвеса с той же плоскостью).

Учтем малость смещения линии отвеса за счет вращения Земли, т.е. малость угла  $(\phi - \lambda)$ , а также выражение для центробежной силы  $J_e = m\omega^2 R_3 \cos \lambda$  ( $\omega$  — угловая скорость Земли, а  $R_3$  — ее радиус). Тогда, отбрасывая в разложениях тригонометрических функций все малые члены, преобразуем (1.19) к виду

$$g = g_0 \left( 1 - \frac{\omega^2 R_3 \cos \varphi}{g_0} \right), \tag{1.20}$$

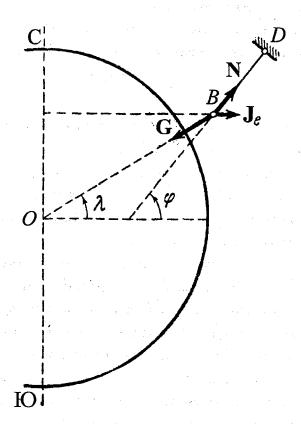


Рис. 7.

где  $g_0$  — истинное ускорение силы притяжения; g — кажущееся ускорение с учетом влияния центробежной силы.

Из равенства (1.20) следует, что кажущееся ускорение всегда меньше истинного. При этом на экваторе ( $\phi = 0$ ) кажущийся вес будет

$$mg = mg_0 \left( 1 - \frac{\omega^2 R_3}{g_0} \right).$$

Подставляя известные константы, убеждаемся, что на экваторе тела имели бы нулевой вес, если бы Земля вращалась примерно в 17 раз быстрее.

Рассмотренный пример иллюстрирует влияние переносной силы инерции на происходящие на Земле процессы. Однако во многих случаях гораздо существенней влияние кориолисовой силы инерции, также возникающей из-за вращения Земли вокруг своей оси.

Любое тело, движущееся вдоль земного меридиана, подвергается действию поперечной силы, направленной ортогонально меридиональной плоскости. Это следует из выражений для кориолисова ускорения и соответствующей силы инерции. В результате частицы воды в меридиональных реках «прижимаются» к одному из берегов, и этот берег размывается. В северном полушарии такому воздействию подвергаются правые берега, в южном — левые. Лишь на экваторе вектор относительной скорости частиц при меридиональном течении коллинеарен вектору угловой скорости Земли, поэтому  $\mathbf{J}_c = \mathbf{0}$ , и берега не размываются.

Описанное явление называется эффектом Бэра. Аналогичными причинами объясняется неодинаковое изнашивание железнодорожных рельсов.

#### ГЛАВА II. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ

#### 6. МЕХАНИЧЕСКАЯ СИСТЕМА МАТЕРИАЛЬНЫХ ТОЧЕК

В п. 1 было дано определение системы материальных точек. Важнейшим свойством системы являются силовое взаимодействие точек между собой, а также с окружающими систему материальными объектами. Силы, действующие на систему со стороны тел, не входящих в ее состав, называются внешними. Силы взаимодействия точек, входящих в систему, называются внутренними.

Пусть имеется механическая система, состоящая из N материальных точек. Обозначим равнодействующую всех внутренних сил, приложенных к i-й точке  $(i=\overline{1,N})$ ,  $\mathbf{F}'_i$ , а равнодействующую всех внешних —  $\mathbf{F}_i$ . Назовем главным вектором внутренних сил геометрическую (векторную) сумму

$$\mathbf{V}' = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i', \tag{2.1}$$

а главным вектором внешних сил - аналогичную сумму

$$\mathbf{V} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{i} . \tag{2.2}$$

На основании третьего закона Ньютона векторная сумма сил взаимодействия двух материальных точек равна нулю. Рассматривая попарно все точки системы, получаем, что главный вектор внутренних сил  $\mathbf{V}'$  всегда равен нулю

$$\mathbf{V}' = \mathbf{0} \,. \tag{2.3}$$

Отметим, что векторы  $\mathbf{F}_i$  приложены к различным точкам, поэтому их векторная сумма является свободным вектором. Это означает, что выбор

точки приложения главного вектора V произволен, и его никоим образом нельзя отождествлять с равнодействующей внешних сил. Главный вектор, в отличие от равнодействующей, не заменяет собой действие некоторой системы сил.

При изучении движения механических систем существенное значение имеют не только сами силы, но и их моменты. Момент силы  $\mathbf{F}$  относительно некоторой точки (полюса) O определяется следующим векторным произведением (рис. 8)

$$\mathbf{m}_{O}(\mathbf{F}) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \tag{2.4}$$

где  ${\bf r}$  — радиус-вектор, соединяющий полюс  ${\it O}$  с точкой приложения силы  ${\it B}$  .

Главным моментом внутренних сил, приложенных к механической системе, относительно полюса О называется геометрическая сумма

$$\mathbf{M}_O' = \sum_{i=1}^N \mathbf{m}_O(\mathbf{F}_i'), \tag{2.5}$$

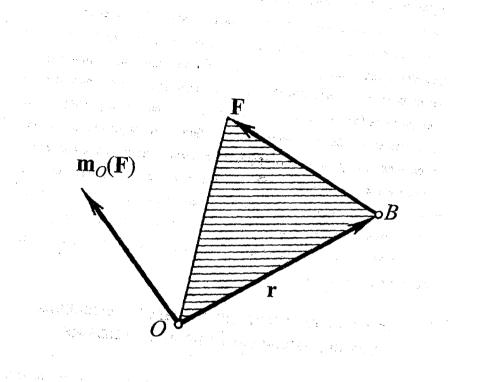
а *главным моментом внешних сил* относительно полюса — аналогичная сумма

$$\mathbf{M}_{O} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{m}_{O}(\mathbf{F}_{i}). \tag{2.6}$$

Силы взаимодействия для каждой пары точек имеют общую линию действия, равны по модулю и противоположны по направлению. Следовательно, при геометрическом суммировании их моменты относительно полюса взаимно уничтожаются. В результате для главного момента внутренних сил всегда имеем

$$\mathbf{M}_O' = 0. \tag{2.7}$$

Относительно главного момента внешних сил  ${\bf M}_O$  заметим, что его величина и направление существенно зависят от выбора полюса. В этом



Puc. 8.

Company of the second of the s

заключается принципиальное отличие главного момента  ${\bf M}_O$  от главного вектора  ${\bf V}$ , который инвариантен по отношению к выбору полюса.

Рассмотренные в настоящем параграфе векторные величины можно трактовать как некоторые суммарные меры действия сил, приложенных к механической системе. Эти величины, а также некоторые скалярные характеристики (работа сил, мощность) используются при формулировании так называемых общих теорем динамики. Эти теоремы устанавливают соотношения между указанными силовыми характеристиками и соответствующими им суммарными мерами движения механической системы. Общие теоремы не позволяют подробно исследовать поведение отдельных точек системы, но дают возможность при помощи значительно более простых методов получить представление о важных характеристиках движения системы как целого.

## 7. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ. ЦЕНТР ИНЕРЦИИ

Запишем для каждой из точек системы с массами  $m_i$  и скоростями  $\mathbf{v}_i$  основное уравнение динамики в форме (1.2), учитывая разделение действующих сил на внешние и внутренние

$$\frac{d}{dt}(m_i \mathbf{v}_i) = \mathbf{F}_i + \mathbf{F}_i'; \ i = \overline{1, N}.$$
 (2.8)

Просуммировав равенства (2.8) по всем точкам системы и учитывая (2.3), находим

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \mathbf{V},\tag{2.9}$$

где  $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^N \mathbf{q}_i$  — суммарный вектор, называемый количеством движения системы;  $\mathbf{q}_i = m_i \mathbf{v}_i$  — вектор количества движения i-й точки.

Равенство (2.9) определяет теорему об изменении количества движения системы:

Производная по времени от количества движения системы равна главному вектору действующих на систему внешних сил.

Представляет интерес ситуация, при которой либо система вовсе не подвергается воздействию внешних материальных объектов, либо эти воздействия «скомпенсированы». В обоих случаях  ${\bf V}={\bf 0}$ , и в силу уравнения (2.9) имеем

$$\mathbf{Q} = \mathbf{const}, \tag{2.10}$$

что выражает закон сохранения вектора количества движения по величине и направлению при  ${\bf V}={\bf 0}$  .

Очевидно, что при определенных условиях закон сохранения может выполняться только для одной из проекций количества движения (например,  $Q_x = {\rm const}$  при  $V_x = 0$ ).

Введем понятие *центра инерции* (центра масс) системы. Это геометрическая точка C, радиус-вектор которой определяется по формуле

$$\mathbf{r}_{C} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_{i} \mathbf{r}_{i}}{\sum_{i=1}^{N} m_{i}}.$$
 (2.11)

Из выражения (2.11) следует, что центр инерции подвижен, так как  $\mathbf{r}_C$  меняется со временем при движении составляющих систему материальных точек. Несмотря на то, что сам центр инерции материальной точкой не является, ему можно условно соотнести определенное количество движения. Дифференцируя соотношение (2.11) по времени, получаем следующее равенство

$$\mathbf{v}_C \sum_{i=1}^N m_i = \mathbf{Q} \,, \tag{2.12}$$

где  $\mathbf{v}_C$  – скорость центра инерции.

Из выражения (2.12) следует, что количество движения системы равно количеству движения центра инерции, если считать сконцентрированной в нем всю массу системы  $\sum_{i=1}^N m_i$  .

Дифференцируя по времени равенство (2.12) и учитывая (2.9), получаем следующее уравнение движения

$$\mathbf{a}_C \sum_{i=1}^N m_i = \mathbf{V}, \tag{2.13}$$

где а<sub>С</sub> – ускорение центра инерции.

Это уравнение, имеющее форму основного уравнения динамики для центра инерции с сосредоточенной в нем массой системы, выражает терему о движении центра инерции:

Центр инерции системы движется как материальная точка, в которой сконцентрирована вся масса системы, под воздействием главного вектора внешних сил, приложенного к этой точке.

Из формулы (2.13) следует, что при V=0 скорость центра инерции  $\mathbf{v}_C=$  const. Примером может служить изолированная от внешних объектов система двух материальных точек, силовое взаимодействие между которыми относится к категории внутренних сил. Если в начальный момент времени система находится в покое, то центр инерции остается в покое и в дальнейшем, хотя материальные точки приходят в движение.

В абсолютно твердом теле центр инерции совпадает с центром тяжести. На основании изложенного поступательное движение твердого тела можно рассматривать как движение его центра тяжести с сосредоточенной в нем массой всего тела под действием главного вектора приложенных к телу сил.

## 8. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОГО МОМЕНТА СИСТЕМЫ

Рассмотрим систему материальных точек, сопоставив каждой из них вектор количества движения  $\mathbf{q}_i$  ( $i=\overline{1,N}$ ). По аналогии с моментом силы определим момент количества движения материальной точки относительно неподвижного полюса O как векторное произведение (рис. 9)

$$\mathbf{k}_{Oi} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{q}_i = \mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i, \qquad (2.14)$$

где  $\mathbf{r}_i$  — радиус-вектор, соединяющий полюс O с i-й материальной точкой.

Главный момент количества движения системы (или кинетический момент) определяется следующим образом

$$\mathbf{K}_O = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{k}_{Oi} \,. \tag{2.15}$$

Дифференцируя по t выражение (2.15), получаем

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \sum_{i=1}^{N} (\mathbf{v}_i \times m_i \mathbf{v}_i) + \sum_{i=1}^{N} \left[ \mathbf{r}_i \times \frac{d}{dt} (m_i \mathbf{v}_i) \right]. \tag{2.16}$$

Учитывая коллинеарность сомножителей в первой сумме, а также соотношения (2.4) – (2.8), окончательно получаем равенство

$$\frac{d\mathbf{K}_O}{dt} = \mathbf{M}_O, \tag{2.17}$$

выражающее теорему об изменении кинетического момента:

Производная по времени от кинетического момента системы относительно неподвижного полюса равна главному моменту относительно того же полюса всех приложенных к системе внешних сил.

Если главный момент  $\mathbf{M}_O=0$ , то кинетический момент  $\mathbf{K}_O$  в процессе движения системы остается неизменным по величине и направлению (закон сохранения кинетического момента). Отметим, что закон сохранения не является универсальным по отношению к выбору полюса. При

выборе другого полюса главный момент внешних сил, вообще говоря, не равен нулю и соответствующий кинетический момент уже не является постоянным вектором. Однако для изолированной системы (при отсутствии внешних сил) закон сохранения выполняется вне зависимости от выбора полюса.

Из формулы (2.17) легко получается уравнение, соответствующее теореме об изменении момента количества движения одной материальной точки,

$$\frac{d\mathbf{k}_O}{dt} = \mathbf{m}_O(\mathbf{F}),\tag{2.18}$$

где  $\mathbf{m}_O(\mathbf{F})$  — момент относительно полюса равнодействующей приложенных к точке сил.

Из этого уравнения можно получить некоторые законы Кеплера [1]. Доказывается, в частности, что орбиты планет солнечной системы и искусственных спутников Земли являются плоскими кривыми.

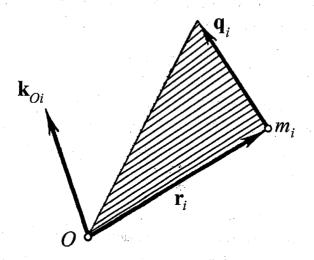
## 9. РАБОТА СИЛЫ. МОЩНОСТЬ. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ СИЛОВОЕ ПОЛЕ

Элементарной работой  $\delta A$  равнодействующей силы  ${\bf F}$ , приложенной к материальной точке  ${\bf B}$ . называется следующее скалярное произведение

$$\delta A = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \,, \tag{2.19}$$

где  $d\mathbf{r}$  — направленное по касательной к траектории бесконечно малое приращение радиуса-вектора  $\mathbf{r}$  (рис. 10), называемое элементарным перемещением.

Полная работа  $A_{1,2}$ , которую совершает переменная сила  ${\bf F}$  на конечном участке траектории  $B_1B_2$ , определяется суммой элементарных работ



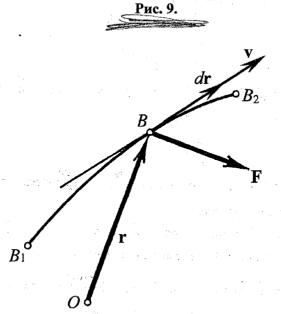


Рис. 10.

на элементарных перемещениях и выражается криволинейным интегралом вдоль траектории от  $B_1$  до  $B_2$ 

$$A_{1,2} = \int_{B_1}^{B_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \,. \tag{2.20}$$

Наряду с понятием работы широко используется родственное ей понятие мощности. Мощность H характеризует быстроту совершения работы с течением времени и выражается следующим соотношением

$$H = \frac{\delta A}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}, \tag{2.21}$$

где у - скорость материальной точки.

Введенные выше понятия легко распространяются на случай движения системы материальных точек. Элементарной работой всех внешних сил называется сумма элементарных работ равнодействующих всех внешних сил, приложенных к каждой точке системы,

$$\sum_{i=1}^{N} \delta A_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i . \tag{2.22}$$

Для элементарной работы всех внутренних сил, приложенных к системе, имеем аналогичную формулу

$$\sum_{i=1}^{N} \delta A_i' = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i' \cdot d\mathbf{r}_i. \qquad (2.23)$$

В формулах (2.22), (2.23)  $d\mathbf{r}_i$  – элементарное перемещение i-й материальной точки вдоль ее траектории.

Отметим, что, несмотря на равенство противоположно направленных внутренних сил взаимодействия для каждой пары точек, элементарная работа  $\sum_{i=1}^{N} \delta A_i'$ , вообще говоря, не равна нулю. Действительно, в выражение для суммарной элементарной работы (2.23) входят также элементарные перемещения взаимодействующих точек, которые в общем случае случае

движения системы отнюдь не идентичны  $(d\mathbf{r}_i \neq d\mathbf{r}_j; i \neq j)$ . Однако для неизменяемой системы (например, для абсолютно твердого тела) элементарная работа  $\sum_{i=1}^N \delta A_i'$  всегда равна нулю.

По аналогии с выражением (2.21) можно определить суммарную мощность всех внешних сил, приложенных к системе

$$H = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i \,, \tag{2.24}$$

и суммарную мощность всех внутренних сил

$$H' = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{i}' \cdot \mathbf{v}_{i} . \tag{2.25}$$

Полные работы, совершаемые внешними и внутренними силами на конечном участке траекторий точек, получаются при помощи суммирования соответствующих криволинейных интегралов [6].

Использованный выше для обозначения элементарной работы символ «δ» (вместо «d») указывает, что элементарная работа не является полным дифференциалом некоторой функции координат точки. Перейдем к рассмотрению случаев, когда элементарная работа может быть представлена в виде полного дифференциала.

Говорят, что система материальных точек движется в силовом поле, если при движении на них действуют силы, однозначно зависящие от положения всех точек в данный момент времени и не зависящие от скоростей. Примером таких сил являются кулоновы силы взаимного притяжения (или отталкивания) заряженных частиц, силы всемирного тяготения, упругие силы и т.п. Силовое поле характеризуется совокупностью векторов, выражающих силы и отнесенных к каждой точке пространства, в котором перемещаются материальные точки.

Силовое поле называется *потенциальным*, если существует скалярная функция координат

$$\Pi(x_1, y_1, z_1, ..., x_i, y_i, z_i, ..., x_N, y_N, z_N)_{i=1,2,...}$$
 (2.26)

через которую можно следующим образом выразить проекции силы  $\mathbf{F}_i$ , приложенной к i-й точке,на оси координат

$$F_{ix} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x_i}; F_{iy} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y_i}; F_{iz} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z_i} (i = \overline{1, N}). \tag{2.27}$$

Указанная скалярная функция называется потенциальной энергией силового поля, а соответствующие силы — потенциальными силами. При этом предполагается, что вектор  $\mathbf{F}_i$  выражает равнодействующую как внутренних, так и внешних сил, приложенных к i-й точке, т.е. и та, и другая группа сил является потенциальной.

Если потенциальными являются лишь внешние силы, то  $\mathbf{F}_i$  в приведенных выше соотношениях выражает равнодействующую только внешних сил, приложенных к i-й точке, а потенциальная энергия относится только к полю внешних сил. Если потенциальными являются лишь внутренние силы, то указанные обозначения и понятия следует относить к полю внутренних сил. В самом общем случае среди сил, действующих на систему, могут иметься и потенциальные силы, и непотенциальные.

Положим, что все силы, приложенные к системе, потенциальны. Такая система называется консервативной. Определим суммарную элементарную работу  $\delta A$  всех сил консервативной системы, используя соотношения (2.22). (2.23), (2.27) и выражая скалярные произведения через проекции сомножителей

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i + \sum_{i=1}^{N} \delta A_i' = -\sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} dx_i + \frac{\partial \Pi}{\partial y_i} dy_i + \frac{\partial \Pi}{\partial z_i} dz_i \right) = -d\Pi. \quad (2.28)$$

Таким образом, элементарная работа δ*A* равна взятому с обратным знаком полному дифференциалу потенциальной энергии. Заметим, что при выводе формулы (2.28) в левую часть выражений (2.27) подставлялись алгебраические суммы проекций внешней и внутренней силы. Интегрируя

соотношение (2.28) при перемещении точек системы из исходного положения (1) в конечное положение (2), находим выражение для полной работы всех сил системы

$$A_{1,2} = \Pi_1 - \Pi_2$$
. (2.29)

Таким образом, для консервативной системы работа, совершаемая всеми действующими на нее силами при переходе системы из одного положения в другое, зависит лишь от разности значений потенциальной энергии в крайних положениях, но не от формы траекторий точек системы.

Полученные выше зависимости справедливы, естественно, и для случая одной материальной точки, движущейся в потенциальном поле. При этом понятие внутренних сил отсутствует, а потенциальная энергия зависит лишь от трех переменных  $\Pi = \Pi(x,y,z)$ .

#### 10. ТЕОРЕМА ОБ ИЗМЕНЕНИИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Кинетической энергией W материальной точки называется следующая величина

$$W = \frac{mv^2}{2},\tag{2.30}$$

где m — масса точки, а  $\nu$  — модуль ее скорости.

По своему физическому содержанию кинетическая энергия является скалярной мерой движения, возрастающей при увеличении массы или модуля скорости. Исследованную в п. 7 величину  $\mathbf{q} = m\mathbf{v}$  следует рассматривать как векторную меру движения, поскольку эта характеристика содержит дополнительную информацию о направлении движения.

Рассмотрим основное уравнение динамики точки (1.1). Умножая обе его части скалярно на вектор элементарного перемещения точки  $d\mathbf{r}$ , осуществляя несложные преобразования и учитывая (2.19), получаем равенство

$$dW = \delta A, \qquad (2.31)$$

выражающее теорему об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме:

Дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе, производимой равнодействующей приложенных к точке сил.

Используя выражение (2.21) для мощности H, можно получить эту теорему в другой форме

$$\frac{dW}{dt} = H. ag{2.32}$$

Введем кинетическую энергию системы N материальных точек как сумму кинетических энергий образующих систему точек

$$W = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i v_i^2}{2},$$
 (2.33)

причем здесь прежнее обозначение W относится уже к суммарной величине для всей системы.

Записывая основное уравнение динамики для i-й точки, умножая обе его части скалярно на  $d\mathbf{r}_i$ , суммируя уравнения по всем точкам от 1 до N и учитывая равенства (2.22), (2.23), получаем

$$dW = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i + \sum_{i=1}^{N} \delta A_i', \qquad (2.34)$$

где первое слагаемое в правой части выражает элементарную работу всех внешних, а второе слагаемое — всех внутренних сил, приложенных к системе.

Соотношение (2.34) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы материальных точек в дифференциальной форме:

Дифференциал кинетической энергии системы материальных точек равен сумме элементарных работ всех внешних и всех внутренних сил, приложенных к системе.

Используя понятия мощности внешних и внутренних сил, можно на основании выражений (2.24), (2.25) придать соотношению (2.34) другую форму

$$\frac{dW}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}'_i \cdot \mathbf{v}_i.$$
 (2.35)

Полученные выше соотношения относятся к случаю, когда кинетическая энергия материальной точки (или системы) получает малое приращение. Однако при решении ряда задач механики необходимо знать конечное приращение  $\Delta W$  кинетической энергии (см. гл. IV). Интегрируя уравнение (2.31) вдоль траектории материальной точки от исходного положения  $B_1$  до конечного положения  $B_2$ , получаем соотношение

$$\Delta W = A_{12}, \tag{2.36}$$

выражающее теорему о конечном приращении кинетической энергии точки:

Приращение кинетической энергии материальной точки на конечном участке пути равно полной работе  $A_{1,2}$  равнодействующей силы на соответствующем перемещении.

Записывая теперь уравнение типа (2.36) для *i*-й точки системы, учитывая разделение на внешние и внутренние силы и суммируя по всем точкам системы, получаем соотношение

$$\Delta W = A_{1,2} + A'_{1,2}, \tag{2.37}$$

выражающее теорему о конечном приращении кинетической энергии системы:

Приращение кинетической энергии системы на конечном участке пути равно сумме полной работы всех внешних  $(A_{1,2})$  и полной работы всех внутренних  $(A'_{1,2})$  сил на соответствующем перемещении.

Отметим, что теорема об изменении кинетической энергии системы, выражаемая в различных своих формах соотношениями (2.34), (2.35) и (2.37), — единственная из общих теорем динамики, в формулировку которой входит мера действия внутренних сил (работа или мощность). Действительно, эта суммарная мера, в отличие от главного вектора или главного момента внутренних сил, в общем случае не равна нулю (см. п. 9). Однако, как указывалось ранее, для неизменяемой системы (в частности, для абсолютно твердого тела), суммарная работа внутренних сил всегда равна нулю и формулировки рассматриваемой здесь теоремы упрощаются.

В заключение рассмотрим консервативную систему материальных точек. В этом случае дифференциальное энергетическое соотношение (2.34) с учетом (2.28) записывается в виде

$$d(W+\Pi)=0, (2.38)$$

что равносильно следующему равенству

$$E = W + \Pi = \text{const}, \tag{2.39}$$

причем сумма кинетической и потенциальной энергий системы E называется полной механической энергией системы.

Выражение (2.39) определяет закон сохранения механической энергии:

При движении консервативной системы ее полная механическая энергия сохраняется неизменной.

Заметим, что значение постоянной в выражении (2.39) зависит от выбора начальных условий движения системы.

### 11. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ В НЕИНЕРШИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ ОТСЧЕТА

В п. 5 дано обобщение основного уравнения динамики точки на случай ее движения относительно неинерциальной системы отсчета.

По аналогии можно утверждать, что сформулированные в пп. 7—10 общие теоремы динамики остаются справедливыми и в неинерциальной

системе отсчета, если видоизменить правые части соответствующих уравнений. К силам, действующим на одну материальную точку, следует добавить переносную и кориолисову силы инерции. В случае системы материальных точек силы инерции должны быть учтены при вычислении суммарных мер действия внешних сил (главного вектора, главного момента, элементарной или полной работы), поскольку эти силы относятся к категории внешних. Отметим, что при вычислении работы учитываются лишь переносные силы инерции, так как для элементарной работы кориолисовой силы, действующей на *i*-ю точку, получаем

$$\delta A_{ic} = \mathbf{J}_{ic} \cdot \mathbf{v}_{ir} dt = -2m_i (\mathbf{\omega} \times \mathbf{v}_{ir}) \cdot \mathbf{v}_{ir} dt = 0. \tag{2.40}$$

Здесь сохранены обозначения, введенные в п. 5.

### ГЛАВА III. НЕСВОБОДНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

### 12. СВЯЗИ. ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ. ЧИСЛО СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

Положение свободной материальной точки в пространстве определяется совокупностью трех декартовых координат (x, y, z). В свою очередь, положение изменяемой системы N материальных точек определяется совокупностью 3N декартовых координат  $(x_i, y_i, z_i; i = \overline{1,3})$ . В этих случаях перемещения точек геометрически ничем не ограничены.

Однако можно привести и принципиально другие примеры. Так, при движении системы двух материальных точек, соединенных невесомым жестким стержнем («гантели»), перемещения точек связаны условием неизменности расстояния между ними. Подобные ограничения, накладываемые на движение системы, называются связями, а соответствующие материальные системы — несвободными. С этой точки зрения свободное твердое тело, без ограничений перемещающееся в пространстве, относится к несвободным системам, так как расстояния между точками тела остаются неизменными. Материальная точка, вынужденная двигаться вдоль заданной кривой или по некоторой поверхности, вращающееся вокруг неподвижной оси твердое тело — характерные примеры несвободных систем. При этом связями фактически являются другие тела, ограничивающие перемещения рассматриваемой материальной системы. Ниже показано, что наложение связей уменьшает количество параметров, определяющих положение системы.

Аналитически связи выражаются соотношениями, включающими в наиболее общем случае координаты и скорости входящих в систему точек, а также время. В некоторых случаях соотношения, определяющие связи, являются неравенствами. Такие связи в процессе движения могут исчезать

(или, как говорят, ослабляться), что часто приводит к соударениям контактирующих тел (см. гл. IV). Связи указанного типа называются *неудерживающими* (односторонними).

Если связи аналитически определяются равенствами, то они называются удерживающими (двухсторонними), поскольку всегда сохраняются в процессе движения. Предположим дополнительно, что связи являются голономными [1, 6]. В голономных системах уравнения связей либо вовсе не содержат скоростей точек, либо могут быть приведены к такому виду путем интегрирования. Если система N материальных точек подчинена s голономным удерживающим связям, то соответствующие уравнения имеют вид

$$\Phi_{i}(t,x_{1},y_{1},z_{1},...,x_{i},y_{i},z_{i},...,x_{N},y_{N},z_{N}) = 0 \ (j=\overline{1,s}). \tag{3.1}$$

Если равенства (3.1) не содержат время в явном виде, то связи называются *стационарными*, в противоположном случае — *нестационарными*. Так, рассмотренная выше система «гантельного» типа (рис. 11) стеснена одной голономной удерживающей стационарной связью вида

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 = h^2,$$
(3.2)

где  $x_i, y_i, z_i$  (i=1,2) — координаты материальных точек  $B_1$  и  $B_2$ ; h — длина стержня.

Для дальнейшего рассмотрения важно ввести понятие возможных перемещений точек несвободной материальной системы. Полагая ниже голономные удерживающие связи стационарными, определим возможные перемещения как бесконечно малые перемещения точек системы, совместимые со связями [6]. В векторной форме эти перемещения соответствуют малым приращениям радиусов-векторов точек и обозначаются как  $\delta \mathbf{r}_i$  (в отличие от действительных перемещений  $d\mathbf{r}_i$ ).

Продифференцировав соотношения (3.1) по времени с учетом стационарности связей, находим

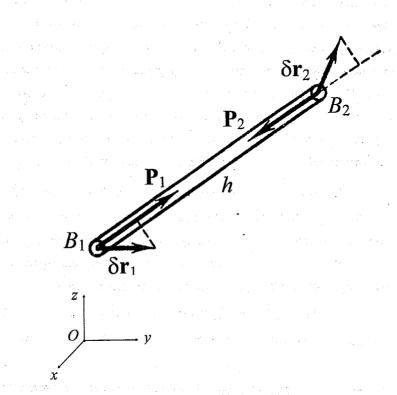


Рис. 11.

ale militar museum services and a military of the military of

$$\sum_{i=1}^{N} \left( \frac{\partial \Phi_{j}}{\partial x_{i}} \dot{x}_{i} + \frac{\partial \Phi_{j}}{\partial y_{i}} \dot{y}_{i} + \frac{\partial \Phi_{j}}{\partial z_{i}} \dot{z}_{i} \right) = 0 \quad (j = \overline{1, s}).$$
 (3.3)

Совокупность проекций скоростей точек  $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$   $(i=\overline{1,N}),$  удовлетворяющих равенствам (3.3), естественно назвать возможными скоростями, так как малые перемещения точек в направлении этих скоростей совместимы со связями. Среди этих перемещений, в частности, имеются и действительные перемещения, которые реализуются за малый промежуток времени под влиянием приложенных к системе сил. В координатной форме возможные перемещения связаны с возможными скоростями соотношениями  $\delta x_i = \dot{x}_i \delta t$ ,  $\delta y_i = \dot{y}_i \delta t$ ,  $\delta z_i = \dot{z}_i \delta t$ , причем  $\delta t$  произвольный бесконечно малый промежуток времени.

Из приведенных рассуждений следует, что возможные перемещения точек несвободной системы не являются произвольными. Действительно, малые величины  $\delta x_i$ ,  $\delta y_i$ ,  $\delta z_i$  ( $i=\overline{1,N}$ ) связаны s зависимостями. Таким образом, независимыми являются только k = (3N - s) возможных перемещений. Для связей рассматриваемого типа это означает, что k декартовых координат точек полностью определяют положение системы, а остальные з координат функционально выражаются через них. При этом в качестве kнезависимых использовать любые величин онжом параметры, определяющие положение системы (криволинейные координаты, эйлеровы углы и т. п.) [6]. Эти параметры называются обобщенными координатами.

Количество *независимых* параметров, однозначно определяющих в любой момент времени положение движущейся материальной системы, называется *числом степеней свободы системы*. Таким образом, для системы с голономными удерживающими связями число степеней свободы совпадает с количеством обобщенных координат k. Например, для системы «гантельного» типа k=5.

### 13. РЕАКЦИИ СВЯЗЕЙ. ИДЕАЛЬНЫЕ И НЕИДЕАЛЬНЫЕ СВЯЗИ. СПЕЦИФИКА УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Ограничивая свободу движения исследуемой системы, связи действуют на точки посредством сил, называемых реакциями связей. В отличие от реакций связей, остальные силы, действующие на точки системы, принято называть задаваемыми. В соответствии с принципом освобождаемости несвободную систему условно рассматривают как свободную и движущуюся под действием задаваемых сил и реакций связей [6].

При помощи рассмотренных в предыдущих главах динамических уравнений можно формально описать и движение несвободных механических систем, если к задаваемым силам добавить реакции связей. Однако силы реакций, вообще говоря, являются неизвестными величинами и число неизвестных превышает число уравнений. Для разрешимости задачи отыскания движения приходится использовать некоторые дополнительные соотношения, вытекающие из уравнений связей. При этом реакции связей отыскиваются в процессе определения движения системы. Указанная процедура решения обратных задач динамики оказывается весьма громоздкой и значительно более сложной, чем в случае свободных механических систем.

Процесс решения задач динамики несвободных механических систем существенно упрощается, если связи, наложенные на систему, относятся к классу идеальных. Смысл этого понятия поясним на следующем простом примере. Твердое тело (ползун) вынужденно совершает прямолинейное движение, перемещаясь между двумя ограничительными горизонтальными плоскостями (направляющими) под действием вектора заданной силы G, составляющего угол  $\alpha$  с нормалью к ограничительной плоскости (рис. 12 a). Сила G является равнодействующей двух составляющих — веса и приводящей тело в движение горизонтальной силы. Будем считать плоскости абсолютно гладкими (без трения). Тогда вектор реакции связи P ортогонален к направляющей, причем в данном случае величина динамической реакции априорно определяется из уравнения статики  $P = G \cos \alpha$ . Обозначим через

г радиус-вектор центра масс C твердого тела, проведенный из неподвижной точки O. Очевидно, что вектор возможного перемещения  $\delta$ r в данном случае коллинеарен вектору скорости прямолинейного движения тела  $\mathbf{v}$ . Из изложенного следует равенство нулю элементарной работы реакции связи  $\delta A_p$  на возможном перемещении

$$\delta A_{\rm p} = \mathbf{P} \cdot \delta \mathbf{r} = 0. \tag{3.4}$$

В более сложных случаях, когда на материальную систему наложено несколько различных связей, элементарные работы отдельных реакций на возможных перемещениях точек их приложения могут не равняться нулю. Однако если при этом выполняется условие равенства нулю суммы элементарных работ реакций на возможных перемещениях

$$\delta A_{\mathbf{p}} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{P}_{i} \cdot \delta \mathbf{r}_{i} = 0, \qquad (3.5)$$

то такие связи называются идеальными. В выражении (3.5)  $\mathbf{P}_i$  – вектор равнодействующей реакций связей, приложенных к i-й точке системы,  $\delta \mathbf{r}_i$  – вектор возможного перемещения этой точки. В качестве примера укажем изображенную на рис. 11 систему «гантельного» типа. Реакции  $\mathbf{P}_1$  и  $\mathbf{P}_2$  равны по величине и противоположны по направлению. Возможные перемещения  $\delta \mathbf{r}_1$  и  $\delta \mathbf{r}_2$  не ортогональны к направлению реакций, но их проекции на направление стержня равны между собой на основании известной теоремы кинематики. Поэтому равенство (3.5) выполняется, что свидетельствует об идеальности связи.

Рассмотренный выше случай, определяемый соотношением (3.4), является простейшим примером идеальной связи. Он характеризуется отсутствием касательной составляющей реакции связи. В действительности абсолютно гладких поверхностей не существует и при движении возникают силы трения. Поэтому рассмотренную модель следует трактовать как некую абстракцию. Она основана на предположении, что работа сил трения пренебрежимо мала по сравнению с работой других приложенных сил.

Однако во многих практически важных случаях, встречающихся в реальных механических системах, пренебрежение трением приводит к значительным ошибкам при расчетах. На рис. 12  $\delta$  показана касательная составляющая реакции связи (сила трения  $\mathbf{F}_{\tau}$ ), противодействующая движению. Очевидно, что для элементарной работы нормальной и касательной составляющих реакции связи на возможном перемещении имеем

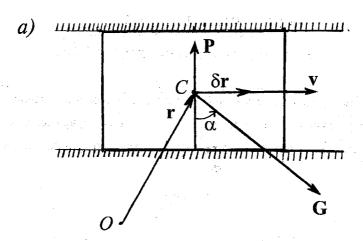
$$\delta A_{\rm p} = (\mathbf{P} + \mathbf{F}_{\rm T}) \cdot \delta \mathbf{r} = \mathbf{F}_{\rm T} \cdot \delta \mathbf{r} \neq 0. \tag{3.6}$$

Таким образом, рассмотренная система при наличии трения подчиняется неидеальной связи. Заметим, что в данном случае осуществление движения из состояния покоя возможно лишь при исключении заклинивания, т.е. при достаточно больших значениях угла  $\alpha$ .

В курсах теоретической и аналитической механики [6, 7] изложен метод уравнений Лагранжа второго рода, которые не содержат реакции связей. Указанный метод имеет важное преимущество по сравнению с непосредственным применением уравнений в форме Ньютона, поскольку позволяет существенно понизить порядок системы уравнений движения. Однако этот метод решения задач динамики несвободных систем применим только в случае идеальности наложенных на систему связей.

Если связи неидеальны, т.е. сумма элементарных работ  $\delta A_p$  не удовлетворяет равенству (3.5), то решение задач динамики значительно усложняется. Формальный прием, состоящий во включении сил трения в число задаваемых, позволяет условно описать движение при помощи уравнений Лагранжа второго рода, но не приносит результата. Ведь силы трения зависят от динамических характеристик движения (ускорений), а последние, в свою очередь, можно определить, лишь решив систему уравнений движения. Таким образом, приходится использовать другие подходы, сохраняя в уравнениях движения реакции связей и применяя процедуру решения, описанную в начале настоящего параграфа.

Отметим, что не следует отождествлять разделение сил на внешние и внутренние, а также на задаваемые и реакции связей. Например, для системы, показанной на рис. 12, реакции связи следует отнести к внешним силам. С другой стороны, в системе «гантельного» типа реакции связи являются внутренними силами.



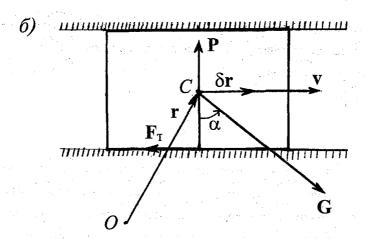


Рис. 12.

### ГЛАВА IV. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УДАРА

### 14. СТЕРЕОМЕХАНИЧЕСКИЙ УДАР И ЕГО МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

В ряде задач теоретической механики целесообразно использовать рассмотренную в п. 7 теорему для случая конечного приращения количества движения, т. е. в форме *теоремы импульсов*, которая записывается в виде [6]

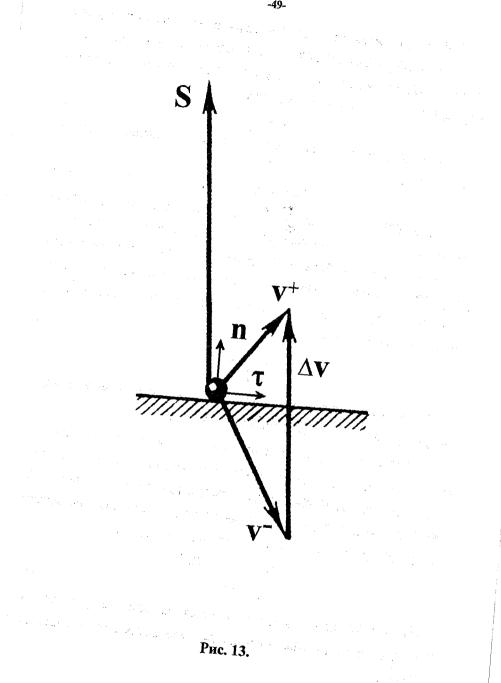
$$\Delta \mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{S}_{i}, \qquad (4.1)$$

где  $\mathbf{Q} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i$  — главный вектор количества движения системы материальных точек,  $\Delta \mathbf{Q}$  — его приращение за некоторый промежуток времени  $(t_2 - t_1)$ ;  $\mathbf{S}_i$  — импульс равнодействующей внешних сил  $\mathbf{F}_i$ , приложенной к i-й точке, за этот промежуток времени. Выражение для вектора импульса  $\mathbf{S}_i$  силы  $\mathbf{F}_i$  имеет вид

$$\mathbf{S}_{i} = \int_{\mathbf{F}_{i}} \mathbf{F}_{i} dt. \tag{4.2}$$

Указанная теорема относится к общим теоремам динамики и особенно важна в теории удара. Ударом в теоретической механике называется процесс, при котором вектор скорости движущейся материальной точки мгновенно изменяется на конечную величину (стереомеханический удар). Обобщая это понятие на абсолютно твердое тело, отметим, что при ударе скорости всех его точек (кроме, может быть, некоторых, жестко закрепленных) испытывают скачок.

В качестве примера рассмотрим соударение материальной точки массы т с неподвижной плоскостью (рис. 13). При этом для общности будем



полагать, что удар является *косым*, т. е. направление скорости до соударения не совпадает с нормалью к плоскости. Поскольку при ударе вектор скорости изменяется скачком, то представляет интерес разность векторов послеударной  $(\mathbf{v}^+)$  и доударной  $(\mathbf{v}^-)$  скоростей

$$\Delta \mathbf{v} = \mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-. \tag{4.3}$$

Соответственно изменение вектора количества движения точки при ударе имеет вид

$$\Delta \mathbf{Q} = m (\mathbf{v}^{+} - \mathbf{v}^{-}). \tag{4.4}$$

В реальности удар не является мгновенным. Однако его продолжительность очень мала, а приращение скорости представляет конечную величину. Это позволяет применить к ударному процессу теорему импульсов (4.1), причем для рассматриваемого случая действует только импульс реакции односторонней связи **S.** Вводя малую продолжительность удара  $\Delta t$ , определим **S** выражением

$$\mathbf{S} = \int_{\mathbf{F}}^{t+\Delta t} \mathbf{F} dt, \tag{4.5}$$

где  ${\bf F}-$  вектор реакции связи, являющийся геометрической суммой нормальной и касательной составляющих ( ${\bf F}={\bf P}+{\bf F}_{_T}$ ).

Теоретически ударная сила бесконечна по величине и называется мгновенной, поскольку срок ее действия чрезвычайно мал. Однако очень важно, что импульс мгновенной силы представляет конечную величину. С учетом выражений (4.3) - (4.5) запишем теорему импульсов в проекциях на нормаль  $(\mathbf{n})$  и касательную  $(\tau)$  к поверхности соударения

$$m(v_n^+ - v_n^-) = S_n;$$
  

$$m(v_n^+ - v_n^-) = S_T,$$
(4.6)

где  $S_n$   $S_{\tau}$  — нормальная и касательная проекции импульса реакции односторонней связи. Наличие импульса  $S_{\tau}$  свидетельствует о неидеальности этой связи.

Конечноразностные уравнения (4.6) называют уравнениями *импульсивного движения* [2]. Доударные скорости предполагаются известными, а послеударные  $(v_n^+, v_n^+)$  подлежат вычислению. Чтобы сделать задачу определенной, необходимо ввести дополнительные гипотезы, позволяющие отыскивать ударные импульсы. Для этого условная продолжительность удара разбивается на две фазы — *первую* (от момента соприкосновения до максимального сближения тел по нормали к поверхности) и *вторую* (от максимального сближения до разъединения контактирующих тел). Это позволяет определить нормальный ударный импульс  $S_n^t$ , действующий в первой фазе, через доударную скорость  $v_n^-$ :

$$S_n^I = -mv_n^-. \tag{4.7}$$

Равенство (4.7) получается из первого уравнения (4.6), если положить в нем  $\nu_n^* = 0$ , что соответствует представлению об окончании первой фазы удара. Для отыскания нормального импульса  $S_n^{\pi}$ , действующего во второй фазе, воспользуемся представлением о *динамическом* коэффициенте восстановления R [2]

$$S_n^{II} = R S_n^{I} = -R m v_n^{-1}. {4.8}$$

Тогда полный нормальный импульс  $S_n$ , действующий в течение соударения и входящий в правую часть уравнения (4.6), имеет вид

$$S_n = S_n^I + S_n^I = -m(1+R) v_n^-. \tag{4.9}$$

Заметим, что по классической гипотезе Ньютона коэффициент восстановления (кинематический) вводится следующим образом

$$R = \begin{vmatrix} v_n^+ \\ v_n^- \end{vmatrix} . \tag{4.10}$$

Однако только для простейших типов соударения отношения  $\begin{vmatrix} v_n^+ \\ v_n^- \end{vmatrix}$  и

 $S_n^{ll}/S_n^{ll}$  оказываются тождественными. Указанное имеет место, если роль

касательного ударного импульса не является доминирующей или им можно вообще пренебречь. В более сложных случаях соотношение типа (4.10) оказывается несправедливым, если под R понимать динамический коэффициент восстановления. Исследования показывают, что именно гипотезу о динамическом коэффициенте восстановления следует считать базовой как наиболее общую.

Конкретная величина коэффициента R зависит от ряда факторов — от материала соударяющихся тел, их формы, условий соударения и т.п. Для реальных тел 0 < R < 1. Однако при решении некоторых задач используются «граничные» значения коэффициента восстановления R = 0 (пластический удар) и R = 1 (абсолютно упругий удар).

Для определения касательного ударного импульса  $S_{\tau}$  применяются различные соотношения, в зависимости от тех или иных физических представлений об ударном трении. Наиболее расспространенной является гипотеза Рауса, допускающая зависимость типа сухого трения между нормальным и касательным ударными импульсами [3, 4]. Для рассматриваемого примера она имеет вид

$$S_{\tau} = f S_n \operatorname{sign} v_{\tau}, \tag{4.11}$$

где f – коэффициент трения скольжения на поверхности соударения.

В простейших случаях, когда знак скорости  $v_{\tau}$  (т. е. направление скольжения) сохраняется в процессе соударения, выражение (4.11) с учетом (4.9) позволяет определить импульс  $S_{\tau}$ . Таким образом, в системе уравнений (4.6) остаются неизвестными только  $v_n^*$  и  $v_{\tau}^*$ , что делает ее разрешимой. В более сложных случаях процесс соударения может подразделяться на ряд интервалов, причем скольжение может прекращаться или даже менять свое направление [3, 4]. Интересно, что разделение на интервалы можно условно осуществить на основе стереомеханической теории, трактующей удар как мгновенный. Уравнения импульсивного движения при этом различны для каждого интервала соударений.

При исследовании ударных явлений важное значение имеет *оценка* изменения кинетической энергии тел в процессе соударения. Указанная проблема может быть решена при помощи соответствующей теоремы, рассмотренной в п. 10 применительно к общему случаю движения механической системы. Преобразуем уравнение (2.34) с учетом (2.22) и (2.23), выражая элементарные работы через силы и элементарные перемещения

$$dW = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{i} \cdot d\mathbf{r}_{i} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{i}' \cdot d\mathbf{r}_{i}, \qquad (4.12)$$

где  $\mathbf{F}_i$  — равнодействующая внешних сил, приложенных к механической системе в i-й точке (включая реакции связей, являющиеся внешними силами);  $\mathbf{F}_i'$  — равнодействующая внутренних сил, приложенных в i-й точке (включая реакции связей, которые следует отнести к внутренним силам);  $d\mathbf{r}_i$  ( $i=\overline{1,N}$ ) — элементарные перемещения точек, причем в данном случае это не возможные, как в выражениях (3.4) — (3.6), а действительные перемещения, реализуемые при движении системы. Очевидно, что равенство (4.12) соответствует малому перемещению системы в отсутствие соударений, поскольку силы предполагаются ограниченными по величине, а элементарные перемещения — ненулевыми. Напротив, ударные силы по величине являются неограниченными. Кроме того, в соответствии со схемой стереомеханического удара точки системы в процессе ударного взаимодействия остаются неподвижными, т.е. элементарные перемещения оказываются нулевыми.

Применительно к процессу удара равенство (4.12) следует представить в другой форме. Для этого разделим и умножим каждое из слагаемых в правой части равенства на dt. В результате получим

$$\Delta W = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{S}_{i} \cdot \mathbf{v}_{i} + \sum_{i=1}^{N} \mathbf{S}_{i}^{i} \cdot \mathbf{v}_{i}, \qquad (4.13)$$

где обозначение  $\Delta W$  вместо dW принято ввиду скачкообразного изменения энергии при ударе.

Заметим, что внешние и внутренние импульсы  $S_i$  и  $S_i'$  в выражении (4.13) относятся только к ударным силам, поскольку импульсы «обычных» сил, действующих во время удара (например, силы тяжести), пренебрежимо малы.

Выражение (4.13) по существу является аналогом энергетического соотношения (2.37) применительно к ударному процессу. Однако это выражение не вполне корректно, поскольку не определено, какие значения скоростей (доударные, послеударные или какие-либо другие) следует подставлять в правую часть. Исследуем эту проблему при помощи расммотренного выше примера соударения материальной точки с плоскостью. Для простоты будем считать связь идеальной, т. е.  $S_{\tau} = 0$ . Поскольку в данном случае действует лишь один ударный импульс реакции связи, то равенство (4.13) приобретает вид:

$$\Delta W = \mathbf{S} \cdot \mathbf{v} = S_n v_n. \tag{4.14}$$

Естественно рассмотреть изменение кинетической энергии с учетом разбиения удара на две фазы. На фазе сближения действует импульс  $S_n^I$ , а скорость меняется скачком от  $v_n^-$  до нуля. Поэтому изменение энергии на первой фазе с учетом среднеарифметического значения скорости выражается формулой  $\Delta W^I = S_n^I \frac{v_n^-}{2}$ . Аналогично для второй фазы имеем  $\Delta W^I = S_n^{II} \frac{v_n^+}{2}$ . Общее изменение энергии с учетом (4.8) получается в виде

$$\Delta W = \frac{1+R}{2} S_n^{\prime} (v_n^- + v_n^+). \tag{4.15}$$

В формуле (4.15)  $S_n^I>0$  ,  $v_n^-<0$ ,  $v_n^+>0$  (в соответствии с направлением нормали и на рис. 12). Учитывая также очевидное условие  $v_n^+<\left|v_n^-\right|$ , получаем естественное неравенство  $\Delta W<0$ .

Выражение (4.15) получено для простейшего примера соударения, но оно дает представление об алгоритме вычисления работы ударных сил. В следующем параграфе понятие об ударных процессах расширено. Показано, что эти процессы не сводятся лишь к соударению тел по односторонней связи, а могут иметь и иной характер. Тем не менее, приводимые ниже выражения для величины  $\Delta W$  получены на основе того же подхода к вычислению работы ударных сил, что и в рассмотренном примере. Отличие состоит в том, что при наличии неидеальных связей работа вычисляется для каждого интервала в отдельности — в зависимости от направления скольжения или его отсутствия.

## 15. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ПРИ УДАРЕ В СИСТЕМАХ С ИЛЕАЛЬНЫМИ И НЕИЛЕАЛЬНЫМИ СВЯЗЯМИ

Материальные системы, подвергающиеся ударным нагрузкам, можно разделить на три группы. В первом случае к системе в некоторый момент времени прикладываются задаваемые ударные импульсы. Во второй группе ударные явления возникают в результате внезапного наложения на систему удерживающих связей, называемых в этом случае импульсивными и сохраняющихся после соударения. Наконец в третьей группе соударение входящих в систему твердых тел происходит при «замыкании» односторонней связи с последующим отскоком (см. п. 14). Будем полагать, что три указанных варианта ударного взаимодействия не реализуются одновременно, что позволяет исследовать каждый случай отдельно. Отметим, что при любом варианте соударения движение системы может быть ограничено дополнительными конечными (не импульсивными) связями, что соответствует концепции стесненного удара [2, 3]. При наличии основного ударного воздействия в этих связях возникают импульсные реакции. Особый интерес представляют ситуации, когда некоторые из наложенных свя-

зей (и импульсивных, и конечных, и односторонних) являются неидеальными

В данном параграфе обозначения  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{F}_{\scriptscriptstyle T}$  будем использовать для *им- пульсов* нормальных и касательных ударных сил реакций конечных и импульсивных связей, а не для самих сил реакций, как в п. 13 — 14. Обозначение  $\mathbf{S}$  сохраним для задаваемых ударных импульсов, а также для импульса реакции при одностороннем соударении.

Исследуем изменение кинетической энергии системы для различных вариантов удара. Известны несколько теорем об энергии при ударе, доказанных при условии что связи, наложенные на систему, идеальны [7]. Рассмотрим некоторые из указанных теорем, используя для наглядности сравнительно простые динамические модели. Это позволяет обобщить известные закономерности, отказываясь от гипотезы идеальных связей.

На рис. 14 а показан ползун массы *m*, обладающий одной степенью свободы, поскольку его вертикальное перемещение ограничено конечной удерживающей связью (идеальной). К центру тяжести тела С приложен внешний заданный мгновенный импульс S. Очевидно, что данный случай соответствует первой группе задач из приведенной выше классификации. Изменение кинетической энергии в таких системах на основании первой из шести классических теорем определяется следующим скалярным произведением [7]

$$\Delta W = W^{+} - W^{-} = 0.5 \cdot (\mathbf{v}^{+} + \mathbf{v}^{-}),$$
 (4.16)

где  $W^-$ ,  $W^+$ — значения кинетической энергии перед приложением импульса и после него;  $\mathbf{v}^-$ ,  $\mathbf{v}^+$ — векторы доударной и послеударной скоростей. Естественно, что импульс реакции идеальной связи  $\mathbf{P}$  не влияет на изменение энергии, поскольку он ортогонален скорости.

Усложним задачу и будем трактовать конечную связь как *неидеальную* (рис. 146). Угол  $\alpha$ , отсчитываемый от нормали к ограничивающей поверхности  $\mathbf{n}$ , принимается положительным при направлении вектора  $\mathbf{S}$ , по-

казанном на рисунке. Совмещая направления вектора  $\mathbf{v}^-$  и орта касательной  $\tau$ , будем полагать, что  $\mathbf{v}^-_\tau = \mathbf{v}^-$ . При этом исключается случай  $\mathbf{v}^-_\tau \leq 0$ , что не нарушает общности исследования. Импульс силы трения  $\mathbf{F}_\tau$  можно отнести к заданным силовым факторам только условно, поскольку он зависит от характера движения тела, который, вообще говоря, меняется в процессе взаимодействия. При этом для соотношения нормальной и касательной проекций импульса реакции связи по-прежнему будем использовать гипотезу Рауса с коэффициентом трения f. Нетрудно убедиться, что условие сохранения исходного направления движения после окончания действия импульса имеет вид

$$mv^- + S_n(\operatorname{tg}\alpha - f\operatorname{sign} S_n) > 0. \tag{4.17}$$

Полагая при этом условии импульс  $\mathbf{F}_{\scriptscriptstyle T}$  известным и используя выражение (4.16), получаем формулу для изменения кинетической энергии в виде

$$\Delta W = W^{+} - W^{-} = 0.5 \left[ \mathbf{S} \cdot \left( \mathbf{v}^{+} + \mathbf{v}^{-} \right) - f \left| S_{n} \right| \left( \mathbf{v}^{+} + \mathbf{v}^{-} \right) \right]. \tag{4.18}$$

Условие прекращения скольжения в процессе взаимодействия выражается нарушением неравенства (4.17). При этом нормальная проекция  $S_n^{(1)}$  заданного импульса, потребного для прекращения скольжения, определяется зависимостью

$$S_n^{(1)} = mv / (f \operatorname{sign} S_n - \operatorname{tg} \alpha)$$
 (4.19)

и соответствует первому этапу взаимодействия. Величина  $S_n^{(1)}$  конечна, так как при нарушении (4.17) знаменатель в (4.19) отличен от нуля. Очевидно, что в дальнейшем скольжение либо отсутствует до окончания действия импульса S, либо меняет свое направление на противоположное. По аналогии с (4.17) ползун из состояния покоя «срывается» в противоположном направлении, если реализуется неравенство

$$S_n^{(2)}(\operatorname{tg}\alpha + f \operatorname{sign} S_n) < 0, \tag{4.20}$$

где  $S_n^{(2)} = (S_n - S_n^{(1)})$  — нормальная проекция «остаточного» заданного импульса, действующего на заключительном этапе взаимодействия.

Пусть условия (4.17) и (4.19) не выполняются. Тогда реализуется режим с *прекращением скольжения*, и энергетическое соотношение записывается в виде

$$\Delta W = W^{+} - W^{-} = 0.5 \left[ \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{-} - f \left| S_{n}^{(1)} \right| \nu^{-} \right]. \tag{4.21}$$

Пусть теперь неравенство (4.17) нарушается, а (4.20) выполняется. Указанное может осуществляться только при значениях  $-\pi < \alpha < 0$ . Рассматриваемый случай соответствует режиму с изменением направления скольжения. Нетрудно убедиться, что при этом энергетическое соотношение записывается в следующей форме

$$\Delta W = W^{+} - W^{-} = 0.5 \left[ \mathbf{S}^{(1)} \cdot \mathbf{v}^{-} + \mathbf{S}^{(2)} \cdot \mathbf{v}^{+} - f \left( |S_{n}^{(1)}| v^{-} + |S_{n}^{(2)}| v^{+} \right) \right]. \quad (4.22)$$

Заметим, что при  $S_n=0$  ( $\alpha=\pm \frac{\pi}{2}$ ), когда связь не напряжена и не проявляется свойство ее неидеальности, неравенства (4.17) и (4.20) оказываются некорректными. В этом случае следует осуществить в них замены  $S_n t g \alpha \to S_\tau$  и  $S_n^{(2)} t g \alpha \to S_\tau^{(2)}$ .

Отметим, что для задач первой группы приращение энергии  $\Delta W$  может иметь любой знак — в зависимости от направлений доударной скорости и задаваемого импульса. В рассматриваемых ниже задачах энергия при ударе всегда рассеивается, поэтому удобно использовать величину  $(-\Delta W) > 0$ .

Динамическая модель, показанная на рис. 14 в,г, соответствует второй группе, т.е. системам, в которых удар является следствием мгновенного наложения связей. На тело, совершавшее плоское поступательное движение, накладывается импульсивная удерживающая связь, ограничивающая вертикальное перемещение и уменьшающая число степеней свободы до

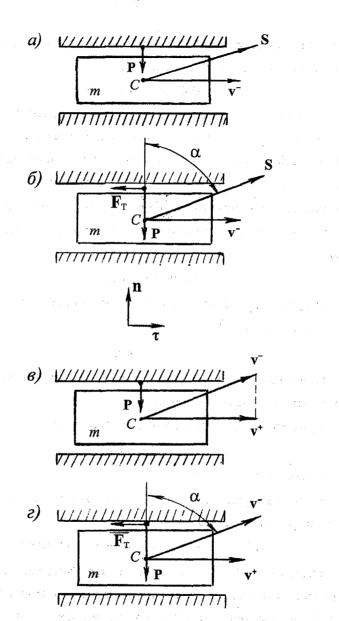


Рис. 14.

tera kaj kading Parencia and a sakeroni in the akking transport of the sakeroni in the

одной. Если связь *идеальна* (рис. 14*в*), то потерянная при соударении энергия определяется теоремой Карно [6, 7]

$$(-\Delta W) = W^- - W^+ = W^*, \tag{4.23}$$

где  $W^* = 0.5 m(\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-)^2$  – кинетическая энергия «потерянных» скоростей.

В схеме на рис. 14 г импульсивная связь трактуется уже как неидеальная, что требует дополнительного исследования. Примем, что угол между векторами  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{v}^{-}$ , отсчитываемый от  $\mathbf{n}$  в положительном направлении по часовой стрелке, удовлетворяет неравенству  $0 \le \alpha \le \pi$ . Нетрудно убедиться, что исходное скольжение сохраняется до окончания соударения при условии

$$v_n^-(\operatorname{tg}\alpha - f\operatorname{sign}v_n^-) \ge 0. \tag{4.24}$$

Отметим, что в особом случае при  $\nu_n^- = 0$  в неравенстве (4.24) следует осуществить замену

$$v_n^- tg\alpha \rightarrow v_s^-$$
. (4.25)

Очевидно, что в этом случае скольжение всегда сохраняется при любом значении коэффициента трения.

Уравнение импульсивного движения имеет вид:

$$v^{+} - v^{-} = -f v_{n} \operatorname{sign} v_{n},$$
 (4.26)

где учтено, что  $v_n^+ = 0$  и  $v_\tau^+ = v^+$ .

Используя уравнение (4.26), получим выражение для потерянной энергии при условии сохранения скольжения

$$(-\Delta W) = W^{-} - W^{+} = W^{*} - fm(v_{n}^{-})^{2} [f - (tg\alpha) sign v_{n}^{-}]. \tag{4.27}$$

Выражение (4.27) можно трактовать как обобщение теоремы Карно применительно к рассматриваемой динамической модели на случай неидеальной импульсивной связи. Естественно, что при f=0 это выражение совпадает с (4.23). Аналогичный результат с учетом (4.25) получается при  $v_n=0$ , поскольку при этом неидеальность связи не проявляется, причем W=0.

Если неравенство (4.24) не выполняется, то процесс соударения разделяется на два интервала, причем на втором интервале *скольжение отсутствует* ( $v^+=0$ ). В этом случае выражение для кинетической энергии «потерянных» скоростей приобретает вид  $W^*=0.5m(v^-)^2$ . Следовательно, для потерянной при соударении энергии справедливо классическое соотношение Карно (4.23).

Перейдем к задачам **третьей группы**, в которых удар возникает по причине «замыкания» односторонней связи [2, 3]. На рис. 15 представлена простейшая схема соударения двух тел при прямом центральном ударе. Центры тяжести  $C_1$  и  $C_2$  тел, имеющих массы  $m_1$  и  $m_2$ , движутся вдоль нормали к соприкасающимся поверхностям  $\mathbf{n}$ , причем для реализации соударения проекции доударных скоростей должны удовлетворять неравенству  $\mathbf{v}_{1n}^- > \mathbf{v}_{2n}^-$ . Формулы для послеударных скоростей имеют вид

$$v_{ln}^{+} = \frac{\left[ (m_1 - Rm_2)v_{ln}^{-} + (1+R)m_2v_{2n}^{-} \right]}{(m_1 + m_2)},$$

$$v_{2n}^{+} = \frac{\left[ (1+R)m_1v_{ln}^{-} + (m_2 - Rm_1)v_{2n}^{-} \right]}{(m_1 + m_2)}.$$
(4.28)

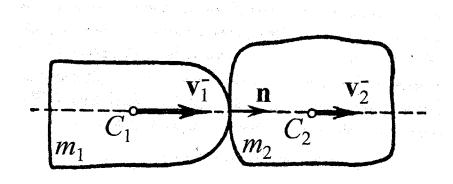
С учетом гипотезы кинематического коэффициента восстановления R кинетическая энергия, теряемая при ударе, определяется соотношением [6]

$$(-\Delta W) = W^{-} - W^{+} = \frac{(1-R)W^{+}}{(1+R)}, \tag{4.29}$$

также известным как теорема Карно, причем  $W^*$  по-прежнему имеет смысл энергии «потерянных» скоростей.

Естественно, что общее соотношение Карно (4.23) получается из частного (4.29) при R=0, поскольку пластический удар можно трактовать как наложение импульсивной удерживающей связи.

Больший интерес представляет обратный переход — от ударных явлений, вызываемых импульсивными удерживающими связями, к «одностороннему» соударению. С этой целью в случае частично (R<1) или абсолют-



Puc. 15. 44 ....

The second of the first the second of the se

но (R=1) упругого удара будем трактовать «одностороннее» соударение как последовательность внезапного наложения и внезапного исчезновения удерживающей связи. Первому из указанных процессов соответствует фаза сближения соударяющихся звеньев, второму — фаза восстановления. По аналогии с (4.23) потерянная на первой фазе соударения энергия определяется по формуле

$$W^{-} - W^{I} = W_{I}^{*}, \tag{4.30}$$

где 
$$W^- = 0.5 \sum_{i=1}^2 m_i (v_m^-)^2$$
;  $W^l = 0.5 \sum_{i=1}^2 m_i (v_m^l)^2$ ;  $W_l^* = 0.5 \sum_{i=1}^2 m_i (v_m^l - v_m^-)^2 - \text{кине-}$ 

тическая энергия «потерянных» на первой фазе скоростей;  $v_m^i(i=1,2)$  — скорости в конце первой фазы, определяемые по формулам (4.28) при R=0.

Кинетическая энергия, приобретенная при «исчезновении» связи на второй фазе соударения, на основании общей теоремы Карно будет равна:

$$W^* - W^* = W^*_{n}, (4.31)$$

где 
$$W^+ = 0.5 \sum_{i=1}^2 m_i (v_{in}^+)^2$$
;  $W_{ii}^* = 0.5 \sum_{i=1}^2 m_i (v_{in}^+ - v_{in}^I)^2$  кинетическая энергия

«приобретенных» на второй фазе скоростей [7].

Из выражений (4.30) и (4.31) следует энергетическое соотношение

$$(-\Delta W) = W^{-} - W^{+} = W_{I}^{*} - W_{II}^{*}, \qquad (4.32)$$

характеризующее изменение энергии при последовательном наложении и исчезновении удерживающей связи. Отметим, что исчезновение импульсивной связи на втором этапе, вообще говоря, не означает возврата к доударному состоянию, а характеризуется энергетическими закономерностями указанного «исчезновения» ( $W_{il}^* < W_{il}^*$ ). Исключение составляет случай абсолютно упругого удара ( $W_{il}^* = W_{il}^*$ ).

Используя выражения (4.28), в том числе, записанные при R=0, и подставляя их в правую часть равенства (4.32), получаем частное соотно-

шение Карно (4.29). Указанное подтверждает методическую целесообразность принятого выше подхода к «одностороннему» соударению.

Перейдем теперь к аналитическому описанию энергетических закономерностей для значительно более сложного варианта соударения, реализующегося при сочетании неидеальной односторонней связи с дополнительными конечными связями. При этом принимается единственное обоснованное упрощение — предположение об идеальности конечных связей. Ограничимся случаем, когда при раздельном движении соударяющиеся элементы имеют по одной степени свободы каждый.

Указанная схема соответствует клиновому механизму, показанному на рис. 16. Приняты следующие обозначения: 1 и 2 — клинья с массами  $m_1$  и  $m_2$ , соударяющиеся по поверхности контакта;  $\mathbf{P_1}$ ,  $\mathbf{P_2}$  — импульсы реакций направляющих клиньев 1 и 2;  $\alpha$  — угол скоса клиньев. Соударение происходит после *выборки зазора* между клиньями, причем силы трения (ударные) учитываются только на контактной поверхности, а их влиянием в направляющих мы пренебрегаем. Основную роль в ударном процессе играют нормальная  $S_n$  и касательная  $S_r$  проекции ударного импульса, действующего в принятой схеме на клин 1 со стороны клина 2. Наличие направляющих позволяет трактовать соударение как *стесненный удар с трением* [2, 3].

Отметим, что к схеме клинового механизма сводится большое количество так называемых *самотормозящихся механизмов*, широко используемых в современной технике [3]. Их особенностью является доминирующее влияние трения на характер движения и большое количество нестандартных динамических эффектов, возникающих при эксплуатации.

Скорости клиньев 1 и 2 обозначим соответственно  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$ . Нормальная  $\dot{y}_n$  и касательная  $\dot{y}_{\tau}$  проекции относительной скорости определяются выражениями

$$\dot{y}_n = \dot{x}_1 \cos\alpha - \dot{x}_2 \sin\alpha;$$

$$\dot{y}_\tau = \dot{x}_1 \sin\alpha + \dot{x}_2 \cos\alpha,$$
(4.33)

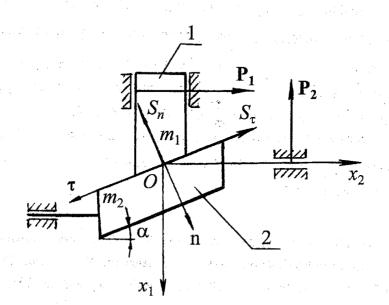


Рис. 16.

Уравнения импульсивного движения в проекциях относительной скорости записываются в виде

$$m_1 m_2 (\dot{y}_n^+ - \dot{y}_n^-) = S_n [i_{12}^2 m_1 + m_2 + f i_{12} (m_2 - m_1) \operatorname{sign} \dot{y}_{\tau}^-] \cos^2 \alpha;$$

$$m_1 m_2 (\dot{y}_{\tau}^+ - \dot{y}_{\tau}^-) = S_n [i_{12} (m_2 - m_1) + f (m_1 + m_2 i_{12}^2) \operatorname{sign} \dot{y}_{\tau}^-] \cos^2 \alpha; \qquad (4.34)$$

где  $\dot{y}_n^-$ ,  $\dot{y}_\tau^-$  — нормальная и касательная проекции относительной скорости до удара;  $\dot{y}_n^+$ ,  $\dot{y}_\tau^+$  — те же самые проекции после удара;  $i_{12} = \operatorname{tg}\alpha$  — так называемое кинематическое передаточное отношение механизма; f — коэффициент трения скольжения на контактных поверхностях.

Предполагается, что в момент соударения выполняется естественное условие  $\dot{y}_{n}^{-} > 0$ . Кроме того, при анализе предполагается, что в момент соприкосновения клиньев

$$\dot{y}_{\tau}^{-} \ge 0. \tag{4.35}$$

Условие (4.35) устанавливает определенное направление скольжения (или его отсутствие) в момент соприкосновения клиньев. В работе [3] подробно проанализированы все возможные режимы соударения, которые характеризуются разбиением процесса удара на разнотипные интервалы и различными соотношениями между послеударными и доударными скоростями. При этом для каждого интервала записываются уравнения типа (4.34). Реализация того или иного типа соударения определяется соотношением инерционных, геометрических и фрикционных параметров (т. е. парметров трения) исследуемой системы.

В наиболее общем виде линейные соотношения между послеударными и доударными значениями проекций относительной скорости записываются в виде:

$$\dot{y}_{n}^{+} = M\dot{y}_{n}^{-} + B\dot{y}_{\tau}^{-};$$

$$\dot{y}_{\tau}^{+} = C\dot{y}_{n}^{-} + D\dot{y}_{\tau}^{-},$$
(4.36)

где M, B, C, D — константы, зависящие от параметров, но по-разному выражаемые через эти параметры для различных режимов соударения.

В отдельных случаях значения некоторых из констант существенно упрощают соотношения (4.36). В частности, в режиме сохранения исходного скольжения до конца удара M=-R, B=0, D=1. Однако в большинстве случаев константы выражаются через параметры весьма сложным образом.

Кинетическую энергию рассматриваемой системы целесообразно представить в виде квадратичной формы [7] *относительных* скоростей  $\dot{y}_n$  и  $\dot{y}_{\tau}$ 

$$W = 0.5(\cos^2\alpha)(\Theta d, d), \tag{4.37}$$

где d — двухкомпонентный вектор с компонентами  $d_1=\dot{y}_n$ ;  $d_2=\dot{y}_\tau$ ;  $\Theta$  — (2x2) — симметричная матрица с элементами  $\vartheta_{11}=m_1+i_{12}^2m_2$ ;  $\vartheta_{12}=\vartheta_{21}=i_{12}(m_1-m_2)$ ;  $\vartheta_{22}=i_{12}^2m_1+m_2$ .

Исследуем кинетическую энергию  $(-\Delta W) = (W^- - W^+)$ , рассеиваемую при соударении. С учетом специфики стесненного удара с трением целесообразно выразить  $(-\Delta W)$  непосредственно через *доударные* скорости  $\dot{y}_n^-$  и  $\dot{y}_\tau^-$ . Используя соотношения (4.36) и (4.37), получаем  $(-\Delta W)$  в виде квадратичной формы

$$(-\Delta W) = 0.5(\cos^2\alpha)(\Lambda d^-, d^-), \tag{4.38}$$

где  $\Lambda - (2x2) -$  симметричная матрица с элементами

$$\lambda_{11} = (1 - M^2) \vartheta_{11} - C^2 \vartheta_{22} - 2MC \vartheta_{12};$$

$$\lambda_{12} = \lambda_{21} = -MB \vartheta_{11} - CD \vartheta_{22} + (1 - MD - BC) \vartheta_{12};$$

$$\lambda_{22} = -B^2 \vartheta_{11} + (1 - D^2) \vartheta_{22} - 2BD \vartheta_{12}.$$
(4.39)

Потеря энергии в процессе ударного взаимодействия звеньев клинового механизма определяется работой мгновенных нормальных сил, действующих на поверхности «одностороннего» соударения, а также работой

мгновенных сил трения на этой поверхности. В силу гипотезы идеальности дополнительных конечных связей соответствующие мгновенные силы реакций работы не совершают. В частных случаях соударения, как указывалось выше, некоторые из констант оказываются нулевыми, и выражения для элементов матрицы  $\Lambda$  упрощаются.

Рассмотрим в этой связи некоторые из возможных режимов соударения. Так, при выполнении условия (4.35) со знаком равенства и некоторых дополнительных условиях на параметры относительное скольжение звеньев отсутствует в течение всего промежутка соударения, и, следовательно, силы трения «не работают». Подставляя соответствующие коэффициенты в формулы (4.39) нетрудно убедиться, что соотношение (4.38) приобретает форму (4.29) теоремы Карно.

Аналогичный результат получаем для вырожденного (сугубо теоретического) случая соударения, если коэффициент трения f = 0. Работа сил трения в этом режиме также равна нулю, что и предопределяет выполнение энергетического соотношения Карно.

Однако эти случаи относятся к исключительным. Для большинства режимов соударения, характеризующихся ненулевой работой мгновенных сил трения, не удается получить компактные соотношения при оценке энергетических потерь и приходится пользоваться весьма громоздкими выражениями (4.38) – (4.39).

#### ЛИТЕРАТУРА

- 1. Айзерман М. А. Классическая механика. М.: Наука, 1974. 368 с.
- 2. Бабицкий В. И. Теория виброударных систем. М.: Наука, 1978. 352 с.
- 3. *Вейц В. Л., Шнеерсон Е. 3. и др.* Нелинейные задачи динамики и прочности машин. Л.: ЛГУ, 1983. 336 с.
- 4. *Леви-Чивита Т., Амальди У.* Курс теоретической механики. Т. 2, ч. 2. М.: ИЛ. 1951. 555 с.
- 5. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. –736 с.
- 6. Лойцянский Л  $\Gamma$ ., Лурье А. И. Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Наука, 1983. 640 с.
- 7. *Парс Л. А.* Аналитическая динамика. М.: Наука, 1971. 636 с.

### СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие3
ГЛАВА І. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ5
1. Основные модели
2. Основные законы динамики
3. Дифференциальные уравнения движения материальной точки9
4. Две основные задачи динамики материальной точки12
5. Движение и равновесие материальной точки
в неинерциальной системе отсчета17
ГЛАВА II. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ23
ГЛАВА II. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ
7. Теорема об изменении количества движения
механической системы. Центр инерции
8. Теорема об изменении кинетического момента системы29
9. Работа силы. Мощность. Потенциальное силовое поле30
10. Теорема об изменении кинетической энергии35
11. Общие теоремы динамики
в неинерциальной системе отсчета38
ГЛАВА III. НЕСВОБОДНЫЕ МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ40
12. Связи. Обобщенные координаты. Число степеней свободы 40
13. Реакции связей. Идеальные и неидеальные связи.
Специфика уравнений движения44
ГЛАВА IV. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УДАРА48
14. Стереомеханический удар и его математическое описание 48
15. Энергетические закономерности при ударе
в системах с идеальными и неидеальными связями55
Литература69

# ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА раздел «ДИНАМИКА»

## ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ, ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ, УДАР

Учебное пособие

Автор: Ефим Залманович Шнеерсон Под редакцией И. Г. Максимовой

ЛР № 020309 от 30.12.96

Подписано в печать 10.12.01 Формат  $60 \times 90 \frac{1}{16}$ Бумага офсетная. Печать офсетная. Печ. л. 4,5.
Тираж 300 экз. Заказ 196
195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98, РГГМУ
Печать ООО «АРКУШ»