

Министерство науки, высшей школы и технической политики
Российской Федерации

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. А. МАКАРОВ, А. Б. МЕНЗИН

МОДЕЛИРОВАНИЕ
ОКЕАНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ

1992

В. А. Макаров, А. Б. Мензин. Моделирование океанологических процессов. Лабораторный практикум. СПб, изд. РГГМИ, 1992. 75 с.

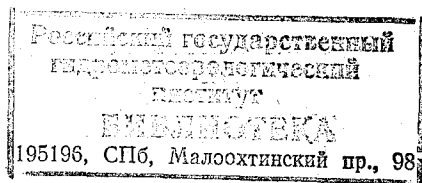
В практикуме представлены следующие разделы дисциплины «Моделирование океанологических процессов»: гидравлическое моделирование, аналоговое моделирование, математическое моделирование. В нем изложены теоретическое обоснование лабораторных работ, методика их выполнения, а также приведены примеры модельных и численных экспериментов.

Ил. 22. Табл. 3. Библ. 6.

Рецензенты: кафедра океанологии Санкт-Петербургского университета; *Е. Н. Дворкин*, канд. геогр. наук (ААНИИ).

This practicum text-book on the subject «Ocean processes modelling» is prepared in accordance with its main sections: hydraulic modelling, analogue modelling, mathematical modelling. It contains theoretical basis and methodics of laboratory works. Some examples of model and numerical experiments are presented.

© Российский государственный гидрометеорологический институт (РГГМИ), 1992.



ПРЕДИСЛОВИЕ

Лабораторные работы по дисциплине «Моделирование океанологических процессов» выполняются с целью приобретения студентами навыков самостоятельной работы и закрепления знаний, полученных на лекциях.

Лабораторная работа содержит теоретическое обоснование, методику выполнения, примеры моделирования и численных расчетов.

По каждой выполненной работе составляется отчет, состоящий из следующих разделов:

1. Задача работы.
2. Теоретическое обоснование.
3. Схема применявшейся лабораторной установки.
4. Методика выполнения.
5. Анализ результатов.
6. Список использованной литературы.

Настоящие лабораторные работы составлены преподавателями океанологического факультета РГГМИ на основе проводившихся занятий по дисциплине «Моделирование океанологических процессов». Работы 1.1—1.3 составлены доц. В. А. Макаровым, работы 2.1—2.5, 3.1—3.3 — доц. А. Б. Мензиным.

I. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ОКЕАНЕ

Моделирование, используемое в общетеоретических, научных, технических, учебных и других разработках и исследованиях, отличается многообразием конкретных форм. Среди них особое значение приобретает так называемое физическое моделирование, которое характеризуется прежде всего тем, что исследования проводятся на установках, обладающих физическим подобием, сохраняющим природу явлений. Изучение явления в натуре заменяется изучением аналогичного явления на модели другого масштаба обычно в специальных лабораторных условиях. В результате по характеристикам модели можно получить все характеристики оригинала простым пересчетом, аналогичным переходу от одной системы единиц измерения к другой. В практике изучения гидродинамических процессов физические модели принято называть гидравлическими.

Необходимым и достаточным условием подобия двух явлений при гидравлическом моделировании будет постоянство численных значений безразмерных комбинаций — критериев подобия. При исследовании процессов в однородной вязкой жидкости такими критериями являются числа Фруда и Рейнольдса. При учете стратификации жидкости к ним добавляется критерий Ричардсона.

На практике эти условия, обеспечивающие подобие явлений в целом, не выполняются. В этом случае оценивается величина погрешностей (масштабный эффект) при переносе на натуру результатов, полученных на модели, или используются указанные критерии в несколько измененном виде.

Лабораторная работа 1

ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ДВУХМЕРНОЙ ГРАВИТАЦИОННОЙ ВОЛНЫ

Задача работы

Определение элементов двухмерной гравитационной волны на экспериментальной установке.

Теоретическое обоснование

Гравитационные волны образуются на поверхности воды при воздействии силы тяжести. В задачах о поверхностных волнах в качестве неизвестных обычно являются возвышение свободной поверхности, скорость частиц и давление. Методы решения задач зависят от соотношения в колебательном процессе значений конвективных и локальных инерционных членов.

Если ввести характерные значения возвышения свободной поверхности, например высоты волны h , и горизонтального размера, например длины волны λ и глубины воды H , то можно составить три безразмерных параметра: h/λ , h/H , λ/H .

С ростом величин этих параметров возрастает относительная роль конвективных членов. На глубокой воде наиболее важным по значению параметром является h/λ — крутизна волны, на мелкой воде возрастает значение относительной высоты h/H . На промежуточной глубине важным параметром будет $h/\lambda (\lambda/H)^3$. Если величина $h/\lambda (\lambda/H)^3$ очень мала, то применима теория волн малой амплитуды.

Используя вместо высоты волны максимальное возвышение уровня над невозмущенной поверхностью $\zeta = h/2$, получим так называемый параметр Урселла

$$U_R = \zeta/\lambda (\lambda/H)^3.$$

При $U_R \ll 1$ применима линейная теория волн малой амплитуды. В случае очень длинных волн на мелкой воде (например, волны цунами вблизи берега) параметр Урселла становится значительно больше единицы. Практически на мелкой воде ($H/\lambda < 0,05$) теория волн малой амплитуды является частным случаем теории длинных волн, когда конвективной инерцией пренебрегают.

Теория волн малой амплитуды может служить основой как для изучения ветровых волн, так и для определения волнового движения, вызванного локальным возмущением или импульсом на свободной поверхности воды или на дне (цунами, волны, вызванные подводным взрывом или обрушением обломков скал на морскую поверхность). Эта теория может быть использована для исследования волн, формирующихся при движении источника возмущения (корабельные волны). Теория волн малой амплитуды упрощает решение задачи, однако в ряде случаев не описывает полностью реальный волновой процесс. В частности, профиль волны, наблюдаемый в натуре и в лабораторном эксперименте, отличается от синусоидального, как это принято в теории. Для большого числа практических задач широко используется теория вихревых волн конечной амплитуды — трохоидальная теория волн, результаты которой хорошо подтверждаются экспериментальными данными в лаборатории и в натуре.

Рассмотрим случай, когда движение частиц жидкости происходит в плоскости xoz и одинаково во всех параллельных плоскостях.

Согласно трохoidalной теории волн возвышение или понижение волновой поверхности над спокойным уровнем при фиксированном x запишется в виде

$$z = \frac{h}{2} \cos \omega t + \frac{\pi h^2}{4\lambda} \operatorname{cth} kH \cos^2 \omega t,$$

где $z = \frac{\pi h^2}{4\lambda} \operatorname{cth} kH \cos^2 \omega t$ — превышение над спокойным положением поверхности воды среднего волнового уровня; $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$ — угловая частота колебаний; $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число.

Период волны равен $\tau = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g} \operatorname{th} kH}$. Длина волны $\lambda = c\tau$, где c — фазовая скорость волны; g — ускорение свободного падения; H — высота волны.

Горизонтальные и вертикальные составляющие скорости движения частиц жидкости с координатами x, z находятся из выражений

$$u_x = \frac{h\omega}{2} \frac{\operatorname{ch}(z+H)}{\operatorname{sh} kH} \cos(\omega t - kx),$$

$$u_z = \frac{h\omega}{2} \frac{\operatorname{sh}(z+H)}{\operatorname{sh} kH} \sin(\omega t - kx).$$

В основе моделирования волн лежит соблюдение гравитационного подобия, что соответствует равенству на модели и в натуре критерия Фруда: $Fr = u^2/gl$ или, что то же самое, должно сохраняться равенство единице индикатора подобия

$$\frac{C_u^2}{C_g C_l} = 1, \quad (1.1)$$

где u и l, g — характерные размеры скорости, расстояния и ускорения свободного падения; C_u, C_l, C_g — соответствующие константы подобия, значения которых находятся из соотношений

$$C_u = \frac{u_{\text{натура}}}{u_{\text{модель}}} = \frac{u_n}{u_m}, \quad C_l = \frac{l_{\text{натура}}}{l_{\text{модель}}}, \quad C_g = \frac{g_{\text{натура}}}{g_{\text{модель}}},$$

Так как в большинстве случаев $C_g = 1$, соотношение (1.1) переходит в

$$C_u = C_l^{1/2}. \quad (1.2)$$

При моделировании процессов в море используются разные константы подобия для горизонтальных и вертикальных масштабов. В этом случае, естественно, константа подобия для вертикальных размеров C_H меньше, чем для горизонтальных C_l ($C_u < C_l$), поэтому появляются два новых соотношения для констант подобия скорости и времени:

$$\frac{C_u^2}{C_H} = 1, \quad \frac{C_l^2}{C_l^2 C_H} = 1, \quad (1.3)$$

где

$$C_l = \frac{t_{\text{натура}}}{t_{\text{модель}}}.$$

Для определения параметров волн в реальном бассейне необходимо умножить измеренные на модели характеристики на соответствующие константы подобия.

Описание лабораторной установки

Лабораторная установка представляет собой остекленный лоток прямоугольного сечения, в который наливается вода или другая жидкость (рис. 1). Лоток используется для моделирования гидродинамических процессов, вызываемых совместным действием волнения и течений в условиях переменных глубин. Дно лотка состоит из нескольких подъемных платформ, позволяющих формировать рельеф дна, линейно аппроксимируя его естественные уклоны. Волны воспроизводятся волнопродуктором в виде ныряла, расположенного у передней торцевой стенки. Между волнопродуктором и передней стенкой установлен струегаситель. У дальней от волнопродуктора торцевой стенки расположен волногаситель в виде наклонной решетки. Создание в лотке волн с различными амплитудами и периодами осуществляется путем изменения частоты и степени погружения в воду волнопродуктора, соединенного через редуктор с электродвигателем.

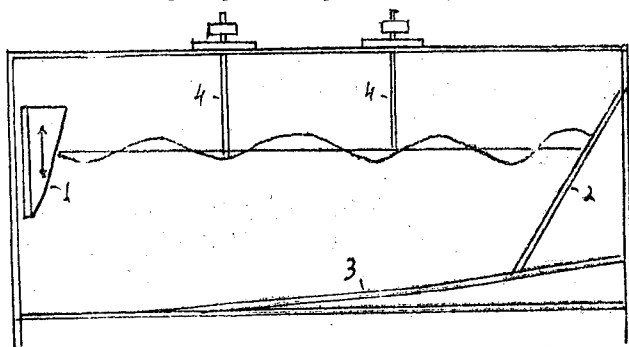


Рис. 1. Схема волнового лотка: 1 — волнопродуктор; 2 — волногаситель; 3 — подъемные платформы; 4 — мерная игла

Над лотком на специальной подставке установлена мерная игла, которая может передвигаться в вертикальном и горизонтальном направлениях. Мерной иглой определяются координаты точек свободной поверхности воды и дна лотка.

Местоположение сечений потока определяется по шкале, нанесенной на стенке лотка.

Исходные данные

1. Глубина моря.
2. Период волны в море.
3. Глубина воды в гидравлическом лотке.

Глубина моря и период волны выбираются по номеру варианта (см. примечание), который соответствует последней цифре номера зачетной книжки.

Порядок выполнения работы

1. Включив волнопродуктор, получаем в лотке волны. Запись колебаний уровня взволнованной поверхности ведется одновременно двумя датчиками, расположенными на расстоянии, меньшем длины волны.

2. С ленты самописца снимаются средние значения высот волн и их периодов.

3. Скорость распространения волнового профиля (фазовая скорость волны) определяется по формуле

$$C_{\text{мод}} = \frac{s}{t},$$

где s — расстояние между датчиками; t — время прохождения гребня волны от первого до второго датчика.

4. Определяем длину волны с помощью датчиков или по шкале на стенке лотка.

5. Для перехода от элементов волн на модели к натурным используются соотношения (1.3). С помощью констант подобия C_u , C_l , C_H определить длину и высоту волны, скорость ее распространения в море.

6. Дать заключение по результатам работы.

Пример моделирования

Исходные данные	Данные эксперимента
1. Глубина в море $H_n = 40$ м.	4. Высоты волн на модели $h_m = 2$ см.
2. Период волны в море $\tau_n = 9$ с.	5. Период волны на модели $\tau_m = 0,9$ с.
3. Глубина воды на модели $H_m = 40$ см.	6. Фазовая скорость волны на модели $C_m = 1,98$ м/с.
	7. Длина волны на модели $\lambda_m = 1,78$ м.

$$C_n = \frac{40}{0,4} = 100, \quad C_l = \frac{9}{0,9} = 10, \quad C_l = 100, \quad C_u = 10.$$

Длина волны (м) в море $\lambda_n = 1,78 \times 100 = 178$.

Высота волны (м) в море $h_n = 0,02 \times 100 = 2$.

Скорость распространения волны в море $C_{нат} = 1,98 \times 10 = 19,8$ м/с.

Примечание. Варианты глубин и периодов волны в море:

1. $H_n = 10$ м, $\tau_n = 7,8$ с.
2. $H_n = 17,5$ м, $\tau_n = 8,0$ с.
3. $H_n = 20,5$ м, $\tau_n = 8,6$ с.
4. $H_n = 30,0$ м, $\tau_n = 9,1$ с.
5. $H_n = 45,2$ м, $\tau_n = 10,2$ с.
6. $H_n = 15,2$ м, $\tau_n = 7,9$ с.
7. $H_n = 33,5$ м, $\tau_n = 9,8$ с.
8. $H_n = 42,1$ м, $\tau_n = 9,9$ с.
9. $H_n = 48,6$ м, $\tau_n = 10,8$ с.
10. $H_n = 51,7$ м, $\tau_n = 11,6$ с.

Лабораторная работа 2.

ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТРАНСФОРМАЦИИ ВОЛНЫ ЦУНАМИ ПРИ ПОДХОДЕ К БЕРЕГУ

Задача работы

Путем гидравлического моделирования установить закономерности трансформации длинной волны цунами в прибрежной зоне.

Теоретическое обоснование

По современным представлениям цунами возникают в результате движения морского дна при сдвиге плоскости разлома, а также распространения сейсмических поверхностных волн по континентальному шельфу.

Лабораторные эксперименты, относящиеся к цунами, вызванным землетрясениями, проводятся с целью исследования формы свободной поверхности и характера распространения волн на поверхности моря в результате смещения участка морского дна.

Пусть в качестве источника возмущения принято вертикальное смещение участка морского дна круглой формы на расстояние l в момент t с постоянной скоростью за промежуток времени T .

Примем следующие обозначения: H — глубина моря в месте смещения дна; λ , h , c — соответственно длина, высота и скорость распространения волны, вызванных смещением дна; ν — кинематическая вязкость воды; R — расстояние от источника.

Движение волны будет определяться при этом следующими безразмерными параметрами:

$$\lambda/H, h/H, u^2/gH, R/H, l/H, \sqrt{\frac{g}{H}} T, \sqrt{\frac{g}{H}} t, \frac{\nu T}{H^2}.$$

Согласно условиям подобия безразмерные параметры должны иметь одинаковые численные значения в натуре и на модели. В результате выбор пространственного масштаба будет определять временной масштаб модели. В частности, смещение дна на модели должно происходить с большей скоростью, чем в природе.

Действительно, из условия подобия $\left(\sqrt{\frac{g}{H}} t\right)_{\text{нат}} = \left(\sqrt{\frac{g}{H}} t\right)_{\text{мод}}$ с помощью констант подобия $C_t = \frac{t_n}{t_m}$, $C_H = \frac{H_n}{H_m}$ получим при $C_g = 1$ соотношение $C_t = (C_H)^{1/2}$. При $C_H \gg 1$ $C_t \gg 1$.

Если должно соблюдаться условие подобия для вязкости

$$\left(\frac{\nu T}{H^2}\right)_n = \left(\frac{\nu T}{H^2}\right)_m,$$

то соотношение констант подобия предстанет в виде

$$\frac{C_\nu C_t}{C_H^2} = 1 \quad \text{и} \quad C_\nu = \frac{C_H^2}{C_t} = C_H^{3/2}.$$

Вязкость жидкости в модели должна быть в $C_H^{3/2}$ раз меньше. Для этой цели возможно использовать некоторые виды масел. Однако на практике предпочитают использовать в качестве модельной жидкости воду, применяя методы приближенного моделирования.

При моделировании распространения цунами исходят из следующего положения.

В соответствии с общей классификацией динамических процессов в море цунами относятся к длинным волнам, которые распространяются со скоростью, пропорциональной квадратному корню из глубины воды. Скорость распространения волны цунами c

зависит также от шероховатости дна. Эффект трения уменьшает фазовую скорость по сравнению с расчетной по формуле Лагранжа ($c = \sqrt{gH}$). Эффект трения ослабляется при прочих равных условиях с уменьшением амплитуды волны. Эта зависимость практически исчезает при малом отношении амплитуды к глубине. Для стационарного туга длинных волн воздействие трения на скорость распространения возмущений уровня не зависит от периода колебаний.

Для оценки эффекта трения в волновом процессе воспользуемся уравнением движения для волн малой амплитуды с линейным трением в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \mu u \right), \quad (1.4)$$

где μ — коэффициент сопротивления, имеющий размерность $\text{с} \cdot \text{м}^{-1}$. Следует заметить, что за время одного периода работа сил сопротивления в линейном варианте не намного отличается от работы в квадратичном варианте.

Введем уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (1.5)$$

Из уравнений (1.4) и (1.5) получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = -g \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \mu g \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Преобразуем уравнение с учетом (1.5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= gH \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - \mu g \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \\ c \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \mu g \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $c = \sqrt{gH}$.

Решение уравнения (1.6) можно записать в виде

$$\zeta = A_0 e^{-\mu x} \cos(\omega t - kx), \quad (1.7)$$

где μ — коэффициент затухания.

Из уравнений (1.6) и (1.7) получим

$$c^2 (\mu^2 - k^2) + \omega^2 = 0, \quad (1.8)$$

$$2c^2 \mu k - g \mu \omega = 0. \quad (1.9)$$

Из уравнения (1.6), используя соотношение $\omega = kc$, получим

$$c_0^2 = c^2 \left[1 - \left(\frac{\mu}{k} \right)^2 \right]. \quad (1.10)$$

С помощью уравнения (1.9) определяем коэффициент сопротивления μ :

$$\mu = \frac{2c^2 \rho k}{g\omega} = \frac{2H\rho}{c \sqrt{1 - \left(\frac{\nu}{k}\right)^2}}.$$

Из уравнения (1.10) видна зависимость фазовой скорости c_0 от длины волны λ и коэффициента затухания μ .

При моделировании распространения длинных волн в канале изменение уровня будет определяться падающей и отраженной волнами, описываемыми соответственно выражениями

$$\zeta_1 = A_0 e^{-\mu x} \cos(\omega t - kx),$$

$$\zeta_2 = A_0 e^{\mu x} \cos(\omega t + kx),$$

где A_0 — амплитуда колебаний в конце канала при $x=0$.

Общее решение уравнения (1.6) в канале имеет вид

$$\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 = A_0 [e^{-\mu x} \cos(\omega t - kx) + e^{\mu x} \cos(\omega t + kx)]. \quad (1.11)$$

Момент экстремального значения ζ в любой точке канала определяется из условия $\partial\zeta/\partial t = 0$:

$$A_0 \omega [e^{-\mu x} \sin(\omega t - kx) + e^{\mu x} \sin(\omega t + kx)] = 0.$$

В конце канала при $x=0$ момент экстремума соответствует условию

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -2A_0 \omega \sin \omega t.$$

В таком случае относительное время максимального значения уровня в фиксированной точке по отношению к моменту максимума в конце канала определится из выражения

$$\frac{e^{-\mu x} \sin(\omega t - kx) + e^{\mu x} \sin(\omega t + kx)}{2 \sin \omega t} = 0.$$

Преобразуем это выражение:

$$\frac{1}{2} (e^{-\mu x} \cos kx - e^{-\mu x} \operatorname{ctg} \omega t \sin kx + e^{\mu x} \cos kx + e^{\mu x} \operatorname{ctg} \omega t \sin kx) = 0,$$

$$\operatorname{ctg} \omega t \sin kx \operatorname{sh} \mu x + \operatorname{ch} \mu x \cos kx = 0.$$

В результате получим соотношение для определения относительного времени максимального значения уровня в виде

$$(\operatorname{tg} \omega t)_{\max} = -\operatorname{tg} kx \operatorname{th} \mu x. \quad (1.12)$$

Отношение амплитуд колебаний в расчетной точке и в конце канала получим из уравнения (1.11):

$$\frac{\zeta_{0x}}{\zeta_{00}} = \frac{1}{2} (\cos 2kx + \operatorname{ch} 2\mu x).$$

В результате по измеренным на модели значениям амплитуд в конце канала и в любой его точке и фиксированным моментам максимального уровня в этих точках можно определить значения волнового числа k и коэффициента затухания μ .

В основу лабораторного моделирования цунами положено условие гравитационного подобия, выражающееся в равенстве в натуре и на модели числа Фруда:

$$\operatorname{Fr} = \frac{u^2}{gH}.$$

Здесь u — скорость; H — характерный вертикальный размер; g — ускорение свободного падения.

Для проверки соответствия явления на модели натурному используется критерий гравитационного подобия для волновых процессов

$$K_g = \frac{h^2}{H\lambda}, \quad (1.13)$$

где h — высота волны на модели; λ — ее длина; H — глубина воды.

При условии $h/H \leq 1$ и предельной крутизне волны $h/\lambda < 1/7$ критерий гравитационного подобия для волн до их обрушения должен быть меньше 0,14.

Оценка эффекта сил вязкости на гравитационные волны проводится с помощью критерия, аналогичного числу Рейнольдса:

$$K_v = \frac{h \sqrt{gH}}{\nu}, \quad (1.14)$$

где ν — коэффициент кинематической вязкости.

При $K_v = 2500$ результаты на модели достаточно хорошо соответствуют натурным условиям.

Используется «искаженная модель», при создании которой принимаются различные вертикальные C_H и горизонтальные C_L линейные масштабы. Выбор вертикальных масштабов определяется минимальными глубинами в моделируемой области и на модели.

Для искаженной модели константы времени C_t и скорости C_u равны

$$C_t = C_L C_H^{-1/2}, \quad C_u = C_H^{1/2}. \quad (1.15)$$

Эксперименты проводятся в гидравлическом лотке, стенки которого стеклянные, дно в мелководной зоне подвижное, выложенное плитами, которые позволяют изменять его уклон.

Моделируется прибрежная зона до глубины 200 м. Исходная денивелиция уровня на морской границе воспроизводится с помощью волнопродуктора, вытесняющего воду. Расстояние от волнопродуктора до границы модели, имитирующей берег, должно превышать две длины волны. Для сглаживания пульсаций и устранения сильной турбулизации потока, возникающих при истечении воды, вблизи щита устанавливается фильтрующая заслонка.

Колебания уровня регистрируются в различных точках модели датчиками сопротивлений с записью на шлейфный осциллограф. Тарировка датчиков производится в начале и в конце экспериментов. Точность отсчета уровней по тарировочным кривым составляет $\pm 0,5$ мм.

Запись колебаний уровня ведется при скорости протяжки ленты осциллографа 1 и 4 см/с. Обработка осциллографной ленты состоит в определении высот уровня первой и второй волн.

Кинематика потока фиксируется с помощью кино съемки скоростного поля. В качестве индикатора используются сополимеры с удельным весом, близким к удельному весу воды.

Рассмотрение трансформации волны проводится на трех участках лотка:

- 1) в зоне с постоянной глубиной, простирающейся от фильтрующей заслонки до начала подъема дна;
- 2) в зоне мелководья — от начала подъема дна до створа обрушения и наката волны;
- 3) в зоне обрушения и наката волны в виде бора до уреза воды.

В пределах морской части модели определяются высота гребня волны, ее длина и период в долях этих характеристик, наблюдающихся около волнопродуктора.

Описание лабораторной установки

Описание дано в работе № 1, рис. 1.

Исходные данные

1. Глубины на различных участках моделируемой зоны H_n и в лотке H_m , средний уклон дна.
2. Горизонтальные размеры участков в натуре l_n и на модели l_m .
3. Высоты гребня волны цунами на морской границе моделируемой области.

Порядок выполнения работы

1. Определяется константа подобия $C_H = \frac{H_n}{H_m}$ по фиксированным глубинам в натуре (H_n) и на модели (H_m).
2. Определяется константа подобия C_l с учетом горизонтальных размеров моделируемой акватории и гидравлического лотка.
3. По формулам (1.15) находятся константы подобия времени C_t и скорости C_u .
4. Подбирается режим работы волнопродуктора, удовлетворяющий критериям подобия K_g и K_v .
5. Задается исходная высота гребня волны на морской границе модели h_{0M} в соответствии с зависимостью $h_{0M} = \frac{h_{0n}}{C_H}$.
6. Определяются длина и период волны вблизи волнопродуктора.
7. Регистрируются высоты гребней волн, их длины, время наступления полной воды и периоды колебаний в точках вдоль продольной оси лотка.
8. С помощью констант подобия определяются высоты волн, их длины и периоды, скорость распространения волны в соответствующих пунктах моделируемой области.
9. Рассчитываются высоты гребней волн, их длины и периоды в долях этих характеристик, наблюдающихся на морской границе моделируемой области.
10. Анализируется трансформация волны, распространяющейся в моделируемой области в сторону берега.
11. Определяется коэффициент затухания волн μ на участке моделируемой области с постоянной глубиной.

Пример моделирования

Моделируется трансформация волны цунами в прибрежной акватории до глубины 200 м.

Константы подобия, рассчитанные на основе морфометрических характеристик акватории и размеров лотка, равны

$$C_H = 400; \quad C_l = 5000; \quad C_t = 270, \quad C_u = 20.$$

Критерий гравитационного подобия для волн до их обрушения имеет значение $K_g = 0,0017$ и удовлетворяет требованию $K_g < 0,14$.

Критерий вязкостных сил K_v равен 80 000, что существенно превышает его минимально допустимое значение (2500).

Воспроизводились волны, период которых у берега в натуре равнялся 10 минутам.

В результате эксперимента получено увеличение относительного периода волны при ее распространении к берегу от 1,0 до 2,0. Наблюдается уменьшение относительной высоты гребня в преде-

лах постоянной глубины от 1,0 до 0,5. При уменьшении глубины в прибрежной зоне относительная высота гребня увеличивается с 0,5 до 1,1.

До изобаты 100 м происходит увеличение длины волны, при меньших глубинах относительная длина волны уменьшается от 2 до 0,7 вблизи берега.

По мере распространения волны изменяется отношение высоты гребня к высоте волны. Среднее значение этого отношения близко к 0,5.

Коэффициент затухания волны $\mu = 0,0085$.

Примечание. Варианты исходных данных:

1. Расстояние от волнопродуктора до границы лотка более двух длин волн.
2. Средний уклон дна в пределах моделируемой области:
 1. 0,0072; 2. 0,0085; 3. 0,0118; 4. 0,0136; 5. 0,0141;
 6. 0,0152; 7. 0,0162; 8. 0,0177; 9. 0,0203; 10. 0,0243.
3. Длина волны (км) на морской границе, соответствующей положению волнопродуктора на модели:
 1. 12,1; 2. 12,5; 3. 13,1; 4. 13,8; 5. 14,2;
 6. 15,5; 7. 15,8; 8. 16,0; 9. 16,6; 10. 17,5.
4. Высота гребня волны на морской границе 10 м.
5. Расстояние морской границы от берега, км:
 1. 34,0; 2. 35,1; 3. 38,2; 4. 39,2; 5. 40,4;
 6. 41,3; 7. 42,3; 8. 43,3; 9. 44,2; 10. 45,0.

Лабораторная работа 3

ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПЛОТНОСТНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ В МОРЕ

Задача работы

Определение скоростей течения и интенсивности перемешивания вблизи поверхности раздела вод с различной плотностью.

Теоретическое обоснование

Вблизи морских проливов и в устьях рек наблюдается распределение и взаимодействие водных потоков, различающихся по плотности. При этом нередко формируется клин воды с повышенной плотностью (например, клин соленой воды), который может передвигаться или принимать неподвижное состояние.

Для движущегося клина воды исследуется его деформация, перемещение фронта воды, отличающейся по плотности. В случае движущегося и неподвижного клина определяются силы на границе раздела сред и на твердой границе, поле скоростей и интенсивность перемешивания воды.

Лабораторное моделирование динамических процессов в стратифицированном море основано на использовании в качестве критерия подобия плотностного числа Рейнольдса

$$\text{Re}_\rho = \frac{u_\Delta H}{\nu}, \quad (1.16)$$

где H — характерный вертикальный размер; ν — кинематический коэффициент вязкости; $u_\Delta = \left(\frac{\Delta\rho}{\rho} g H\right)^{\frac{1}{2}}$ — плотностная скорость, учитывающая относительное вертикальное изменение плотности $\Delta\rho/\bar{\rho}$ ($\bar{\rho}$ — средняя плотность).

Квадрат отношения скорости течения к плотностной скорости может быть преобразован в комплекс, аналогичный числу Ричардсона (Ri):

$$\left(\frac{u}{u_\Delta}\right)^2 = \frac{u^2}{\frac{\Delta\rho}{\rho} g H} \approx \bar{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 / g \frac{\partial \rho}{\partial z} = \frac{1}{\text{Ri}}. \quad (1.17)$$

Отношение $\frac{u}{u_\Delta}$ может быть представлено как число Фруда, в котором g умножено на $\Delta\rho/\bar{\rho}$.

Для затухающей турбулентности справедливо условие

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 / \frac{g}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} < 1.$$

В случае стационарной турбулентности можем принять приближенно

$$(\Delta u)^2 / \frac{\Delta\rho}{\rho} g h = 1,$$

где h — толщина переходного слоя на границе раздела слоев.

По Дефайту, в проливе Босфор при $\rho = 1013 \text{ кг/м}^3$, $\rho + \Delta\rho = 1027 \text{ кг/м}^3$ и $\Delta u = 1,1 \text{ м/с}$ имеем $h = 1,1 \text{ м}$. Наблюдения дают $h = 7 \div 10 \text{ м}$.

Введем константы подобия

$$C_\rho = \frac{\rho_H}{\rho_M}; \quad C_{\Delta\rho} = \frac{\Delta\rho_H}{\Delta\rho_M}; \quad C_g = \frac{g_H}{g_M};$$

$$C_u = \frac{u_H}{u_M} = \frac{\Delta u_H}{\Delta u_M}; \quad C_H = \frac{\Delta z_H}{\Delta z_M}.$$

Получим из числа Ричардсона

$$\frac{C_\rho C_u^2}{C_g C_H C_{\Delta\rho}} = 1.$$

Если положить $C_p = 1$, $C_g = 1$, что соответствует условиям моделирования на невращающемся бассейне, наполненном водой, имеем

$$C_{\Delta\rho} = \frac{C_u^2}{C_H}. \quad (1.18)$$

При моделировании движения жидкости с учетом действия горизонтальных градиентов давления необходимо в качестве критериев подобия принять и число Фруда

$$Fr = \frac{u^2}{gH}. \quad (1.19)$$

При $C_g = 1$, $C_u = C_H^{1/2}$ и $C_{\Delta\rho} = 1$.

При малых геометрических масштабах моделирования (больших значениях C_H) градиенты плотности на модели приобретают значения, слишком малые для возможности их измерения существующими приборами. Удовлетворительные результаты моделирования на таких моделях можно получить лишь при рассмотрении выклинивания более плотных вод, определения их объемов и скорости перемещения.

Для моделирования более «тонких» процессов, учитывающих перемешивание вод на границе их раздела и распределения скоростей вблизи границы, необходимо использовать искаженную модель.

На основании критерия Фруда для искаженной модели имеем

$$C_u = \frac{C_l}{C_t} = C_H^{1/2}, \quad (1.20)$$

где $C_l = l_n/l_m$; $C_t = t_n/t_m$; l_n , l_m — горизонтальные размеры соответственно в натуре и на модели.

Из (1.18) имеем

$$C_{\Delta\rho} = \frac{C_l^2}{C_t^2 C_H} = 1. \quad (1.21)$$

Для увеличения контрастности плотности на искаженной модели до уровня возможного его измерения необходимо увеличить константу времени C_t в соответствии с уравнением (1.21). Процессы на модели должны происходить в C_t раз медленнее, чем в натуре.

При формировании клина воды повышенной плотности, внедряющейся в водный поток (например, в проливе, в эстуарии), координату фронта плотности x определяют следующие параметры: скорость потока воды в канале, эстуарии, проливе, U_0 ; плотностная скорость U_{Δ} , глубина H , ширина канала b , коэффициент молекулярной вязкости ν (рис. 2).

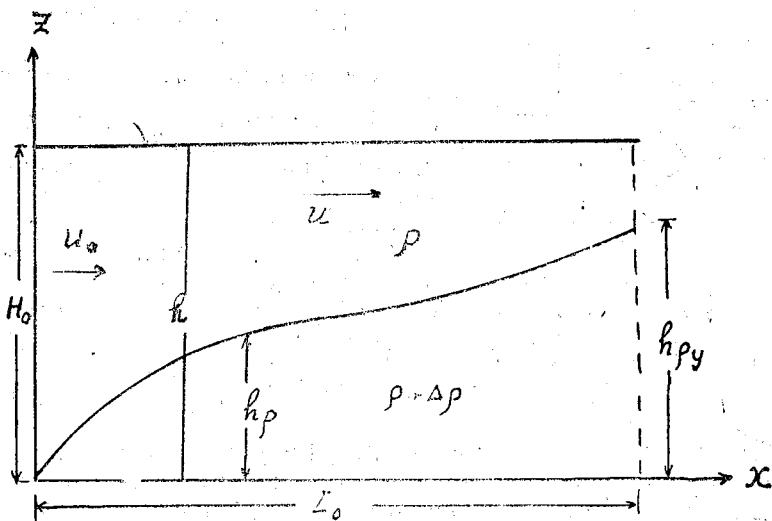


Рис. 2. Структура потока при неподвижном клине плотности

В общем случае имеем

$$x = f(u_0, u_\Delta, \nu, b, H, t). \quad (1.22)$$

Запишем уравнение в безразмерном виде

$$\frac{x}{H} = f\left(\frac{u_0}{u_\Delta}, \frac{u_\Delta H}{\nu}, \frac{u_0 t}{H}, \frac{H}{b}\right). \quad (1.23)$$

Продифференцировав уравнение (1.23) по времени, получим после преобразования скорость движения фронта воды повышенной плотности U_Φ :

$$\frac{u_\Phi}{u_\Delta} = f\left(\frac{L}{H}, \frac{u_0}{u_\Delta}, Re_\nu, \frac{H}{b}\right). \quad (1.24)$$

Соотношение (1.24) подтверждается экспериментами.

Если положить в (1.24) $u_\Phi = 0$, то получим выражение для длины неподвижного клина воды повышенной плотности (L_0)

$$\frac{L_0}{H} = f\left(\frac{H_0}{u_\Delta}, Re_\nu, \frac{H}{b}\right).$$

Получена универсальная зависимость высоты клина плотности в единицах высоты клина у его основания h_{py} (рис. 3) от расстояния L , выраженного в единицах длины клина L_0 :

$$\frac{h_p}{h_{py}} = f\left(\frac{L}{L_0}\right). \quad (1.25)$$

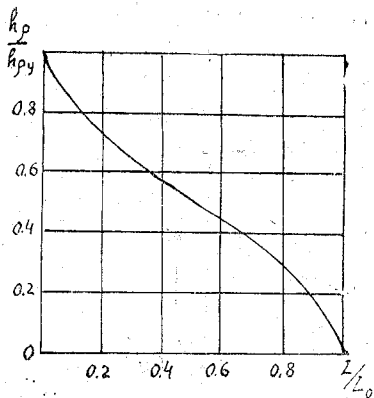


Рис. 3. Глубина клина плотности

Это соотношение не зависит от скорости течения (от $\frac{u_0}{u_{\Delta}}$), числа Re , и H/b . Универсальная зависимость (1.25) при $2U_0/U_{\Delta} < 1$ представлена на рис. 3.

Отношение толщины клина солиности в устье пролива к общей глубине H зависит только от отношения скоростей:

$$\frac{h_{py}}{H} = f\left(\frac{2u_0}{u_{\Delta}}\right). \quad (1.26)$$

Теоретически вывод зависимости (1.26) можно получить из условия для стационарных волн на границе раздела двух слоев с плотностями верхнего и нижнего соответственно ρ_1 и ρ_2 :

$$\rho_1 u_1^2 \operatorname{cth} kh_1 + \rho_2 u_2^2 \operatorname{cth} kh_2 = \frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{k}.$$

Здесь u_1 и u_2 — скорости течения соответственно в верхнем и нижнем слоях; h_1 и h_2 — толщины слоев; k — волновое число.

При пренебрежимо малой скорости потока в клине ($u_2 = 0$) и длине волны λ значительно большей толщины верхнего слоя h_1 получим для устья клина (выхода из канала):

$$u_1^2 = g \frac{\Delta\rho}{\rho} h_1.$$

Примем плотность в верхнем слое близкой среднему значению $\bar{\rho}$ и отметим, что

$$u_1^2 = \frac{\Delta\rho}{\rho} g (H - h_{py}).$$

При слабом перемешивании на поверхности раздела из уравнения неразрывности получим

$$u_1 (H - h_{py}) = u_0 H. \quad (1.27)$$

Отсюда

$$u_1 = u_{\Delta}^{2/3} u_0^{1/3},$$

и далее, приняв во внимание зависимость (1.26), получим

$$\frac{h_{py}}{H} = 1 - \frac{1}{2^{2/3}} \left(\frac{2u_0}{u_{\Delta}}\right)^{2/3}. \quad (1.28)$$

Запишем уравнение движения в виде

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \right). \quad (1.29)$$

Здесь P — часть осредненного давления, не зависящая от турбулентности; τ_{ij} — касательные напряжения.

Начало координат выбрано на дне, ось z направлена вертикально вверх, ось x — вдоль потока воды.

При

$$z > h_p \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (1.30)$$

где h — превышение уровня над отметкой дна.

Пренебрежем локальной составляющей ускорения в случае неподвижного клина плотности. Тогда $\frac{du}{dt} = u \frac{du}{dx}$ и после интегрирования по поперечному сечению потока воды меньшей плотности шириной b имеем

$$\int_{-b/2}^{b/2} \int_{h_p}^H \frac{du}{dt} dy dz = \frac{d}{dx} (\alpha \bar{u}^2 S), \quad (1.31)$$

где \bar{u} — средняя скорость потока в поперечном сечении,

$$S = b(H - h_p), \quad \alpha = \frac{1}{S} \int_S \left(\frac{u}{\bar{u}} \right)^2 dS.$$

Согласно лабораторным исследованиям поля скоростей в поперечном сечении потока при формировании клина солёности $\alpha = 1,028$.

Аналогично для определения интегрального ускорения в поперечном сечении слоя более плотной воды вводится коэффициент β :

$$U^2 \beta = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} u^2 dS,$$

где $S_1 = h_p b$; U — скорость перемещения поверхности раздела.

Согласно лабораторным исследованиям $\beta = 0,146$.

В результате имеем

$$\int_{-b/2}^{b/2} \int_{h_p}^H \frac{du}{dt} dy dz = \beta b \frac{d}{dx} (U^2 h_p). \quad (1.32)$$

Так как \bar{u} — расход воды в канале является постоянной величиной, а α слабо зависит от x , можно записать

$$\int_{-b/2}^{b/2} \int_{h_p}^H \frac{du}{dt} dy dz = \frac{\alpha b}{2} \frac{d}{dx} [\bar{u}^2 (H - h_p)]. \quad (1.33)$$

Подставим уравнение (1.30) в (1.29) и проинтегрируем полученное выражение по поперечному сечению с учетом (1.31)

$$\frac{\tau_s}{\rho} = -g \frac{dh}{dx} (h - h_p) - 2 \frac{\tau_w}{\rho} \frac{h - h_p}{b} = \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dx} [\bar{u}^2 (h - h_p)].$$

Здесь τ_s — среднее по ширине потока касательное напряжение на поверхности раздела; τ_w — среднее касательное напряжение на стенке на горизонте $(h - h_p)$, т. е. в пределах поверхностной, менее плотной воды.

Касательное напряжение τ_w выразим через среднюю скорость воды над поверхностью раздела: $\tau_w = \rho \chi \frac{\bar{u}^2}{2}$, где χ — коэффициент сопротивления.

В результате получим

$$\frac{\tau_s}{\rho} = -g \frac{dh}{dx} (h - h_p) - \frac{\chi}{b} \bar{u}^2 (h - h_p) - \frac{\alpha}{2} \frac{d}{dx} [\bar{u}^2 (h - h_p)]. \quad (1.34)$$

Определим среднее значение касательного напряжения на поверхности раздела вдоль всей длины клина $x_0 = L_0$:

$$T_s = \frac{1}{x_0} \int_0^{x_0} \tau_s dx.$$

Для этого проинтегрируем от 0 до x_0 уравнение (1.34)

$$\frac{T_s}{\rho u_0^2} = -g \frac{H}{u_0^2} \frac{d\bar{h}}{dx} I_1 - \alpha \frac{H_0}{x_0} I_2 - \chi_0 \frac{H_0}{b} I_3. \quad (1.35)$$

Здесь H_0 — глубина у вершины клина; u_0 — средняя скорость потока у вершины клина; $\frac{d\bar{h}}{dx}$ — средний наклон поверхности воды вдоль длины клина плотности.

Множители I_1 , I_2 , I_3 представлены в виде

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\bar{h}}{dx} &= \int_0^{x_0} \frac{dh}{dx} \left(\frac{h}{H_0} - \frac{h_p}{H_0} \right) \frac{dx}{x_0}, \\ I_2 &= \int_0^{x_0} \frac{1}{u_0^2} \frac{d\bar{u}^2}{dx} \left(\frac{h}{H_0} - \frac{h_p}{H_0} \right) dx, \\ I_3 &= \int_0^{x_0} \frac{\chi}{\chi_0} \left(\frac{\bar{u}}{u_0} \right)^2 \left(\frac{h}{H_0} - \frac{h_p}{H_0} \right) \frac{dx}{x_0}. \end{aligned} \quad (1.36)$$

С целью упрощения выражений (1.36) заменим h на $H_0 \frac{\bar{u}}{u_0}$ на $H_0/H_0 - h_p$, dh/dx заменим средним наклоном поверхности воды $\frac{d\bar{h}}{dx}$.

Примем для коэффициента сопротивления χ зависимость $\chi = f(u)^{1/4}$, тогда отношение λ/λ_0 можно выразить через $(\bar{u}/u_0)^{1/4}$.

Используя соотношение для универсальной формы неподвижного клина, полученного опытным путем, получим

$$I_1 = 1 - 0,485n,$$

$$I_2 = \frac{\alpha n}{1 - n},$$

$$I_3 = 1 + 0,369n + 0,195n^2,$$

где $n = \frac{h_{py}}{H_0}$, $\alpha = 1,028$.

Среднее придонное касательное напряжение вдоль плотностного клина получим аналогичным путем, используя в качестве исходных выражения для давления в плотностном клине:

$$P = P_a + \rho g (h - h_p) + g (\rho + \Delta\rho) (h_p - z) \quad \text{при } z < h_p.$$

Отсюда

$$\frac{dP}{dx} = \rho g \left(\frac{dh}{dx} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{dh_p}{dx} \right). \quad (1.37)$$

После подстановки (1.37) в (1.29) и преобразования путем интегрирования уравнения по поперечному сечению получим

$$\frac{\tau_s}{\rho} + \frac{\tau_b}{\rho} = g \left(\frac{dh}{dx} + \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{dh_p}{dx} \right) h_p + \frac{2}{\rho} \tau_w \frac{h_p}{b} + \frac{d}{dx} (\beta U_1^2 h_p). \quad (1.38)$$

Здесь U_1^2 — скорость на поверхности раздела; τ_b — напряжение на дне; τ_w — напряжение на стенках канала, соприкасающихся с водой в клине повышенной плотности. Это сопротивление мало и им можно пренебречь.

Проинтегрируем оставшиеся члены уравнения (1.38) вдоль длины клина. Получим

$$\frac{T_s}{\rho} x_0 + \frac{T_b}{\rho} x_0 = g \int_0^{x_0} \frac{dh}{dx} h_p dx + \frac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho} g h_p^2 + \beta U_0^2 h_p, \quad (1.39)$$

где $T_b = \int_0^{x_0} \tau_b dx$; U_0 — скорость на поверхности раздела в устье плотностного клина. Заменяв $\frac{dh}{dx}$ ее средней величиной $\frac{\bar{dh}}{dx}$ и приняв $\beta = 0,146$, $U_0/u_0 = 0,63$, преобразуем уравнение (1.38) к виду

$$\frac{T_s}{\rho u_0^2} + \frac{T_b}{\rho u_0^2} = h \frac{g H_0}{u_0^2} \left(0,496 \frac{\bar{dh}}{dx} + \frac{1}{2} \frac{\Delta\rho}{\rho} \frac{h_{py}}{x_0} + \frac{0,058}{(1-n)^2} \frac{H}{x_0} \right). \quad (1.40)$$

Определив T_s из (1.35), можно рассчитать T_b . Для их расчета необходимо знать скорость течения, глубину, наклон поверхности

воды, ширину потока, плотность воды в клине и его глубину в устье клина.

При предположении напряжения на поверхности раздела, соответствующего ламинарному потоку, а на дне — турбулентно-

му, и $n = \frac{h_{p,v}}{H_0} = 0,5$, получим соотношения

$$\frac{T_s}{\rho u_0^2} = 17,50 \left(\frac{u_0 H_0}{\nu} \right)^{-1}, \quad (1.41)$$

$$\frac{T_b}{\rho u_0^2} = 0,031 \left(\frac{u_0 H_0}{\nu} \right)^{-1/4}. \quad (1.42)$$

Теоретическая оценка касательных напряжений на поверхности раздела и на дне подтверждает результаты эксперимента.

В общем случае соотношения запишутся в виде

$$\frac{T_s}{\rho u_0^2} = 17,50 N_s(n) \left(\frac{u_0 H_0}{\nu} \right)^{-1}, \quad (1.43)$$

$$\frac{T_b}{\rho u_0^2} = 0,031 N_0(n) \left(\frac{u_0 H_0}{\nu} \right)^{-1/4}. \quad (1.44)$$

Коэффициенты пропорциональности $N_s(n)$ и $N_0(n)$ определяются из табл. 1.1.

Таблица 1.1

n	$N_s(n)$	$N_0(n)$	n	$N_s(n)$	$N_0(n)$
0,8	0,79	1,65	0,5	1,00	1,00
0,7	0,82	1,33	0,4	1,18	0,92
0,6	0,89	1,12	0,3	1,48	0,8

Выражая средние касательные напряжения через плотностное число Рейнольдса, получаем

$$\frac{T_s}{\rho u_0^2} = 35,00 N_s(n) \left(\frac{2u_0}{u_\Delta} \right)^{-1} \left(\frac{u_\Delta H_0}{\nu} \right)^{-1}, \quad (1.45)$$

$$\frac{T_b}{\rho u_0^2} = 0,037 N_0(n) \left(\frac{2u_0}{u_\Delta} \right)^{-1/4} \left(\frac{u_\Delta H_0}{\nu} \right)^{-1/4}. \quad (1.46)$$

Исключим средние наклоны поверхности воды $\frac{dh}{dx}$ из уравнений (1.35) и (1.40). Предполагая ширину канала b неограниченно большой, получаем

$$\frac{2T_s}{\rho u_0^2} R_1(n) + \frac{2T_b}{\rho u_0^2} R_2(n) = R_3 \frac{H_0}{L_0}, \quad (1.47)$$

где

$$R_1(n) = \frac{0,845}{n} + \frac{1}{2I_1},$$

$$R_2(n) = \frac{0,845}{n},$$

$$R_3(n) = 3,37n \left(\frac{u_\Delta}{2u_0} \right)^2 - \frac{I_2}{I_1} + \frac{0,10}{(1-n)^2}.$$

С учетом (1.45) и (1.46) получим

$$70,00N_S(n) R_1(n) \left(\frac{2u_0}{u_\Delta} \right)^{-1} \left(\frac{u_\Delta H_0}{\nu} \right)^{-1} + \\ + 0,074N_0(n) R_2(n) \left(\frac{2u_0}{u_\Delta} \right)^{-1/4} \left(\frac{u_\Delta H_0}{\nu} \right)^{-1/4} = R_3(n) \frac{H_0}{L_0}. \quad (1.48)$$

В пределах изменения $\frac{u_0}{u_\Delta}$ от 0,3 до 1,2 имеем

$$N_S(n) R_1(n) \left(\frac{2u_0}{u_\Delta} \right)^{-1} = 4,$$

$$N_0(n) R_2(n) \left(\frac{2u_0}{u_\Delta} \right)^{-1/4} = 2,$$

$$R_3 = 0,88 \left(\frac{2u_0}{u_\Delta} \right)^{-5,2}.$$

В данном случае получим

$$\frac{L_0}{H_0} = \frac{0,88 \left(\frac{2u_0}{u_\Delta} \right)^{-5,2}}{280 \left(\frac{u_\Delta H_0}{\nu} \right)^{-1} + 0,148 \left(\frac{u_\Delta H_0}{\nu} \right)^{-1/4}}.$$

Если плотностное число Рейнольдса имеет порядок 10^4 , то

$$\frac{L_0}{H_0} = 0,23 \left(\frac{u_\Delta H_0}{\nu} \right)^{1/2} \left(\frac{2u_0}{u_\Delta} \right)^{-5,2}. \quad (1.49)$$

Если Re_ρ имеет порядок 10^7 и больше, имеем

$$\frac{L_0}{H_0} = 6,0 \left(\frac{u_\Delta H_0}{\nu} \right)^{1/4} \left(\frac{2u_0}{u_\Delta} \right)^{-5,2}. \quad (1.50)$$

Зависимости (1.49) и (1.50) подтверждаются экспериментально при моделировании формирования клина соленой воды в широких каналах, близких по своим характерным признакам к руслам рек.

Описание лабораторной установки

Лабораторный бассейн состоит из остекленного лотка, между боковыми стенками которого жестко закреплена горизонтальная переборка (рис. 1.4).

Для создания движения воды в лотке служит реверсивный движитель в виде гребного винта (4), расположенного между переборкой и дном. Гребной винт соединен через редуктор с электродвигателем, число оборотов которого регулируется. Направление движения может меняться на противоположное. Между дном и горизонтальной переборкой имеется задвижка (5), служащая для регулирования величины потока в бассейне.

По другой схеме вода в лоток поступает по питающей трубе и сбрасывается в водослив.

Двухслойная жидкость создается путем подачи более плотной воды в рабочую часть лотка через трубу (6). Часть рабочего канала, расположенного около вертикальной переборки (7), может рассматриваться как мористый конец эстуария.

Исходные данные

1. Глубина моря, H .
2. Плотность воды в верхнем слое, ρ_1 .
3. Плотность воды в нижнем слое, ρ_2 .
4. Температура воды, T .
5. Скорость потока у вершины клина плотности, u_0 .

Порядок выполнения работы

1. В гидравлическом лотке, имитирующем пролив с двухслойным распределением плотности, воспроизводится поток воды со скоростью $u_0 \text{ мод}$, соответствующей $u_0 \text{ нат}$.

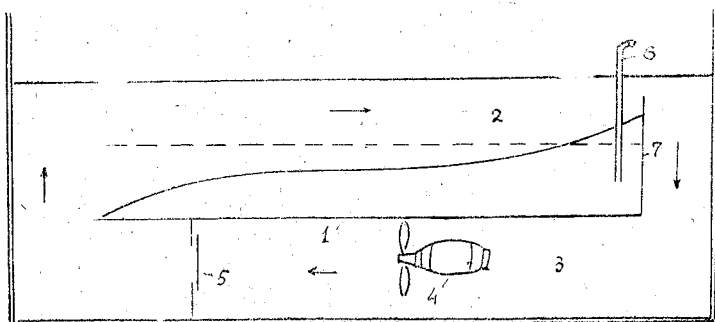


Рис. 4. Схема волнового лотка для моделирования плотностной стратификации: 1 — горизонтальная переборка; 2 — рабочий канал; 3 — обратный канал; 4 — вентилятор; 5 — задвижка; 6 — труба для подачи воды с повышенной плотностью; 7 — вертикальная переборка

Для этого: а) вводятся константы подобия C_p и $C_{\Delta p}$ (в зависимости от жидкости на модели); б) вводится константа подобия

$C_H = \frac{H_{\text{нат.}}}{H_{\text{мод}}}$; в) определяется $C_u = \sqrt{C_{\Delta p} C_H}$, если используется

вода, т. е. $C_p = 1$; г) задается $u_{0 \text{ мод}} = C_u u_{0 \text{ пат.}}$.

2. Определяем $L_{0 \text{ мод.}}$.

3. Определяем $h_{p \text{ мод.}}(x)$ и $u_{1 \text{ мод.}}(x)$ вдоль клина плотности.

4. Рассчитываем $L_{0 \text{ пат.}}$, $h_{p \text{ пат.}}(x)$ и $u_{1 \text{ пат.}}(x)$ с помощью констант подобия C_H , C_u и $C_l = C_l \sqrt{C_{\Delta p} C_H}$.

5. Рассчитываем h_{p_y} по формуле (1.28).

6. Рассчитываем L_0 по формулам (1.49) или (1.50), предварительно определив Re_ρ .

7. Рассчитываем $h_p(x)$ по рис. 3.

8. Рассчитываем $u_1(x)$ по формуле (1.27).

9. Сопоставляем расчетные и экспериментальные результаты.

Пример моделирования

$$H = 13,7 \text{ м}$$

$$\rho_1 = 1000 \text{ кг/м}^3$$

$$\rho_2 = 1020 \text{ кг/м}^3$$

$$T = 20 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$u_0 = 0,45 \text{ м/с.}$$

1) определяем: $u_\Delta = (0,02 \cdot 13,7 \cdot 9,8)^{1/2} = 1,64 \text{ м/с,}$

$$\frac{2u_0}{u_\Delta} = 0,55, \quad Re_\rho = 2,25 \cdot 10^7.$$

2) определяем $\frac{h_{p_y}}{H} = 1 - 0,42 = 0,58$; $b_{p_y} = 7,96 \text{ м.}$

3) определяем $\frac{L_0}{H_0} = 6,0 \cdot 0,69 \cdot 10^2 \cdot 4,45 = 1845$, $L_0 = 25 \cdot 276,5 \text{ м.}$

4) определяем $h_p(x)$ по рис. 3.

5) рассчитываем $u_1(x)$ по формуле (1.27).

II. АНАЛОГОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ОКЕАНЕ

Аналоговое моделирование основано на подобии в широком смысле или теории изоморфизма систем. В этом случае оригинал и его модель имеют одинаковую структуру.

Формально аналоговые модели относятся к классу математических моделей. Однако это не совсем так. В некоторых случаях

действительно существует формальная аналогия между двумя уравнениями, которая позволила В. Б. Штокману использовать взятое из теории упругости уравнение изгиба закрепленной на краях пластины для моделирования полного потока в море.

В случае электрических аналогов изоморфизм природы и модели определяется не формальным сходством, а общностью законов сохранения и изменения физических параметров. Иногда, например, изучая колебательный процесс и вводя понятие об активных (диссипирующих энергию) и реактивных (перераспределяющих энергию) сопротивлениях, можно говорить о физическом подобии гидродинамической, акустической, механической и электрической систем. Таким образом, при классификации электрическим аналоговым моделям следует отдать место между физически и математически подобными моделями. В ряде случаев (например, при исследовании колебательных процессов) речь должна идти о физически подобных явлениях.

Большая физичность электрических аналогов позволяет во многих случаях относительно просто решать задачи, возникающие при исследовании океанологических процессов.

Лабораторная работа 4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРИОДОВ СВОБОДНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ В БАССЕЙНАХ НА АНАЛОГОВОЙ МОДЕЛИ

Задача работы

Определение собственных периодов бассейна любой морфометрии.

Теоретическое обоснование

Так как периоды свободных колебаний жидкости в бассейне не зависят от диссипативных процессов и силы Кориолиса, то уравнения движения и неразрывности, характеризующие длинноволновые процессы, имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left[\frac{\partial (uH)}{\partial x} + \frac{\partial (vH)}{\partial y} \right] = 0, \quad (2.3)$$

где u , v — составляющие средних по вертикали скоростей течений по горизонтальным осям координат x и y соответственно; t — время; ζ — денивелиция уровня; H — глубина; g — ускорение свободного падения.

Представим колебательный процесс в комплексной форме:

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 e^{i\sigma t}, \\ u &= u_0 e^{i\sigma t}, \\ v &= v_0 e^{i\sigma t}, \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

где индексом «0» обозначены комплексные амплитуды соответствующих физических величин; σ — круговая частота колебаний; $\sigma = \frac{2\pi}{T}$ $i = \sqrt{-1}$, T — период колебаний.

Тогда (2.1) — (2.3) переходят в

$$i\sigma u = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (2.5)$$

$$i\sigma v = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y}, \quad (2.6)$$

$$i\sigma \zeta + \left[\frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} \right] = 0. \quad (2.7)$$

Дифференцируя (2.5) по x и (2.6) по y и учитывая (2.5) — (2.7), сведем систему уравнений к одному дифференциальному уравнению эллиптического типа для отклонения уровня от положения равновесия ζ :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{i\sigma}{gH} i\sigma \zeta. \quad (2.8)$$

Перейдем к дискретному представлению поля масс и напомним уравнение (2.8) для одной ячейки гидродинамической системы, в пределах которой глубину будем считать постоянной, тогда получим (см. рис. 5):

$$\frac{\sum_{n=1}^4 (\zeta_n - \zeta_0)}{l^2} = \frac{i\sigma}{gH} i\sigma \zeta_0, \quad (2.9)$$

где l — шаг ячейки в гидродинамической системе; ζ_0 и ζ_n — деформация уровня соответственно в центрах рассматриваемых ячеек и в центрах соседних ячеек.

Если совершить операции над мнимой единицей, получим известное уравнение Гельмгольца в разностной форме:

$$\frac{\sum_{n=1}^4 (\zeta_n - \zeta_0)}{l^2} + \frac{\sigma^2}{gH} \zeta_0 = 0. \quad (2.10)$$

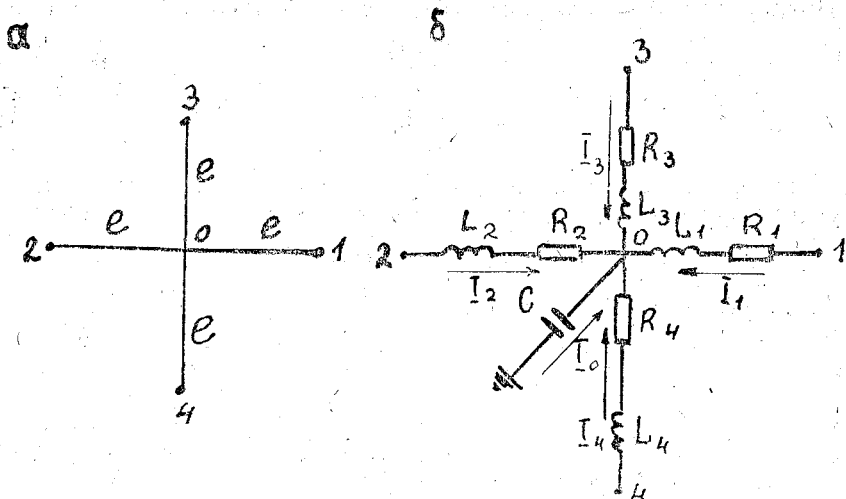


Рис. 5. Принципиальная схема электрической сетки для моделирования длинноволновых процессов: *a* — схема расчетного узла; *б* — принципиальная схема модели

Аналогом рассматриваемых процессов в исследуемом бассейне является электрическая сетка, собранная из конденсаторов C и катушек индуктивности L (рис. 5). На схеме приведены также омические сопротивления, но они, как говорилось выше, не влияют на величину собственных периодов, диссипативные члены лишь уменьшают добротность системы, а следовательно, резонансный отклик системы на возбуждение (уменьшают амплитуду резонансных колебаний).

Первое правило Кирхгофа вытекает из закона сохранения заряда и состоит в том, что алгебраическая сумма токов, сходящихся в точке разветвления проводников, равна нулю:

$$\sum_{n=1}^4 J_{in} + J_C = 0, \quad (2.11)$$

где J_{in} — токи, протекающие через индуктивности L_n ; J_C — ток, протекающий через емкость C .

Как известно, напряжение на индуктивности равно $U_L = L \frac{dJ_L}{dt_3}$, а ток, проходящий через конденсатор, равен $J_C = C \frac{dU_C}{dt_3}$, где U_C — разность потенциалов на обкладках конденсатора; t_3 — время в электрической системе.

С учетом этого в случае возникновения в электрической сетке гармонических колебаний с круговой частотой $\omega = 2\pi f$ (где f — частота) из (2.11) имеем

$$\frac{\sum_{n=1}^4 (V_n - V_0)}{i\omega L} + i\omega C (0 - V_0) = 0 \quad (2.12)$$

или

$$\frac{\sum_{n=1}^4 (V_n - V_0)}{i\omega L} = i\omega C V_0, \quad (2.13)$$

где V_0 , V_n — электрические потенциалы относительно нулевого потенциала соответственно в узловой точке и соседних точках.

Преобразуя уравнение (2.9), получаем

$$\frac{\sum_{n=1}^4 (\zeta_n - \zeta_0)}{\frac{t\sigma}{gH}} = i\sigma l^2 \zeta_0. \quad (2.14)$$

Следовательно, мы имеем две системы — гидродинамическую и электрическую, обладающие одинаковой структурой. Вводим константы подобия. В отличие от гидравлического моделирования (подобие в узком смысле) эти константы размерны, так как сравниваются величины разной физической природы.

Константы подобия, связывающие параметры природы и модели, следующие (сравниваем уравнения (2.13) и (2.14)):

$$C_V = \frac{\zeta_n}{V_n} \left[\frac{\text{М}}{\text{В}} \right], \quad (2.15)$$

$$C_t = \frac{t}{t_0} = \frac{\omega}{\sigma} = fT, \quad (2.16)$$

$$C_L = \frac{1}{gH} / L \left[\frac{\text{М}^2}{\text{М}^2 \cdot \text{Гн}} \right], \quad (2.17)$$

$$C_C = \frac{l^2}{C} \left[\frac{\text{М}^2}{\Phi} \right], \quad (2.18)$$

где t_0 — время в электрической системе.

Выразим параметры природы через параметры электрической аналоговой модели и константы подобия:

$$\begin{aligned} \zeta_n &= C_V V_n; & \omega &= C_t \sigma; & \frac{1}{gH} &= C_L L; \\ & & l^2 &= C_C C. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Подставим полученные соотношения в уравнение (2.9). Тогда получим

$$\frac{C_t C_V}{C_L} \frac{\sum_{n=1}^4 (V_n - V_0)}{i\omega L} = \frac{C_V C_C}{C_t} i\omega C V_0, \quad (2.20)$$

или

$$\frac{\sum_{n=1}^n (V_n - V_0)}{i\omega L} = \frac{C_L C_C}{C_t^2} i\omega C V_0. \quad (2.21)$$

Сравнивая выражение (2.21) с (2.13), получаем необходимое условие подобия гидродинамической и электрической систем, заключающееся в том, что индикатор подобия, составленный из констант подобия, должен быть равен единице:

$$\frac{C_L C_C}{C_t^2} = 1. \quad (2.22)$$

Исходные данные

1. Морфометрия исследуемой акватории (глубина H в одной из ячеек, размер шага l этой ячейки в гидродинамической системе).

2. Индуктивность L и емкость C в сходственной точке аналоговой модели.

Порядок выполнения работы

1. По заданным параметрам: глубине H , шагу сетки l , индуктивности L , емкости C определяются константы подобия C_L и C_C .

2. Из индикатора подобия (2.22) определяется временная константа подобия C_t .

4. К одной из узловых точек модели подключается синусоидальный генератор колебаний, к другой — регистратор напряжения (осциллограф или милливольтметр). Меняя частоту генератора, строим частотную характеристику модели и определяем по **относительному** максимуму напряжения пять последовательных резонансных частот (рис. 6).

4. При неизменном месте подключения генератора меняется место подключения регистратора напряжения и повторяется измерение резонансных частот.

5. Еще четыре раза меняется место подключения генератора, каждый раз повторяются операции, описанные в пунктах 3 и 4. В результате получаем по десять значений для каждой из пяти резонансных частот.

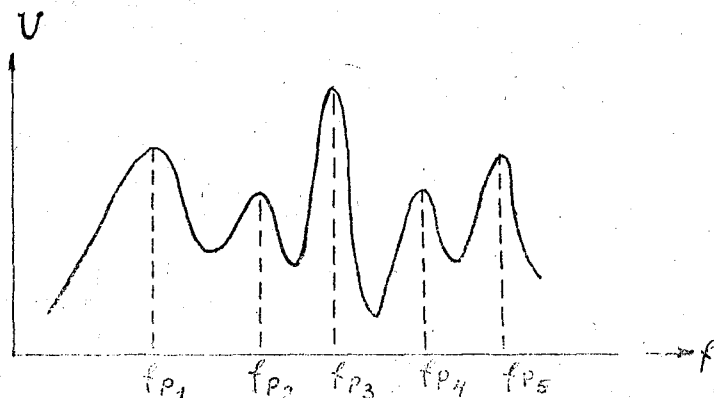


Рис. 6. Определение резонансных частот по относительному максимуму напряжения на аналоговой модели

6. Вычисляем пять средних резонансных частот f_p и находим соответствующие им в гидродинамической системе периоды свободных колебаний жидкости по соотношению

$$T_p = \frac{C_L}{f_p} \quad (2.23)$$

7. Все измерения и вычисления рекомендуется оформлять в виде прилагаемой таблицы с обязательным приложением к отчету схематического изображения исследуемого бассейна с указанием его размеров.

8. Анализ результатов моделирования.

Для оценки достоверности результатов можно воспользоваться сведениями из курса физики океана.

Например, для прямоугольного замкнутого бассейна постоянной глубины периоды собственных колебаний, полученные на модели, можно проверить по классической формуле

$$T = \frac{2}{\sqrt{gH \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)}}, \quad (2.24)$$

где a — длина бассейна; b — ширина бассейна; $m=0, 1, 2, \dots$; $n=0, 1, 2, \dots$.

Нетрудно заметить, что при $m=1, n=0$ получается период одноузловой сейши и т. д. Аналогичные формулы существуют для открытых бассейнов простых форм. В случае переменной глубины и бассейнов произвольной формы соотношения для проверки являются оценочными, тем не менее пренебрегать ими нельзя.

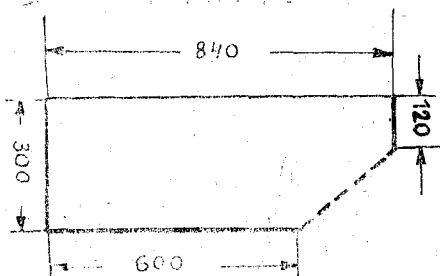


Рис. 7. Схема моделируемого бассейна. Размеры даны в км. Пунктиром показана открытая водная граница

Пример моделирования

Приводятся результаты расчета собственных колебаний бассейна постоянной глубины $H=360$ м, размером одной ячейки $l=60$ км и форм-

мой, показанной на рис. 7 (размеры даны в км). Пунктиром показана открытая водная граница.

Константы подобия имеют следующие значения:

$$C_C = 3,70 \cdot 10^{18} \frac{\text{м}^2}{\Phi}; \quad C_L = 4,57 \frac{\text{с}}{\text{м}^2 \cdot \Gamma_H}; \quad C_t = 4,11 \cdot 10^9.$$

Результаты эксперимента сведены в таблицу.

№ точек подключения		Резонансные частоты, кГц				
генератора	осциллографа	f_{p1}	f_{p2}	f_{p3}	f_{p4}	f_{p5}
1	A_1	235	279	323	375	469
	B_1	238	279	328	380	470
2	A_2	235	281	324	385	464
	B_2	235	278	311	386	462
3	A_3	—	279	312	381	485
	B_3	—	293	—	377	465
4	A_4	236	287	326	377	470
	B_4	234	281	324	376	460
5	A_5	236	279	330	370	468
	B_5	235	280	344	354	457
f_p (среднее)		236	282	326	376	465
T_p (среднее, ч)		4,81	4,19	3,50	3,04	2,45

Примечание. Так как периоды свободных колебаний жидкости являются свойством всего бассейна, а не отдельных дискретных точек, при произвольном подключении регистрирующей аппаратуры экспериментатор может измерять колебания в тех местах модели, которые для данной резонансной частоты (периода) являются узловыми (колебания равны нулю). Следовательно, в ряде

случаев, как в приведенном примере, осреднение частот может производиться не по десяти, а по меньшему количеству измеренных величин.

Лабораторная работа 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК УСТАНОВИВШИХСЯ ДЛИННОВОЛНОВЫХ ДВИЖЕНИЙ В МОРЕ НА ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ АНАЛОГОВОЙ МОДЕЛИ

Задача работы

Определение основных характеристик длинноволновых процессов в море на аналоговых моделях.

Теоретическое обоснование

При изучении длинноволновых движений в море используется линейная теория мелкой воды. Ограничимся тем кругом задач, где влиянием силы Кориолиса можно с достаточной степенью точности пренебречь (длинные волны ветрового происхождения, волны цунами и т. д.).

Уравнения движения и неразрывности, характеризующие длинноволновый процесс, имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial u}{\partial z}, \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial v}{\partial z}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.26)$$

где K_z — коэффициент турбулентного обмена количеством движения по вертикали; u , v , w — составляющие скоростей течения по осям x , y и z соответственно.

Проинтегрируем выражения (2.24) — (2.26) по вертикали и перейдем к средним скоростям, для удобства будем обозначать средние скорости прежними символами u и v , тогда получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\tau_{Hx}}{\rho}, \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\tau_{Hy}}{\rho}, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \left[\frac{\partial (uH)}{\partial x} + \frac{\partial (vH)}{\partial y} \right] = 0, \quad (2.29)$$

где τ_{Hx} , τ_{Hy} — составляющие тангенциального напряжения трения на дне; ρ — плотность,

Донное трение в линейной постановке обычно принимается пропорциональным либо полному потоку, либо средней по вертикали скорости течения, т. е.

$$\frac{\tau_{Hx}}{\rho} = r u, \quad (2.30)$$

$$\frac{\tau_{Hy}}{\rho} = r v, \quad (2.31)$$

где r — коэффициент донного трения, имеющий размерность, c^{-1} .

Представим колебательный процесс, как и в работе 2.1, в комплексной форме (см. выражения (2.4)), произведем с уравнениями аналогичные преобразования, тогда из (2.27) — (2.29) с учетом соотношений (2.30) и (2.31) получим дифференциальное уравнение эллиптического типа для денивеляции уровня ζ :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{1}{H} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{i\sigma + r}{gH} i\sigma \zeta. \quad (2.32)$$

При переходе к дискретному полю масс уравнение (2.32) для одной ячейки гидродинамической системы, в пределах которой глубина считается постоянной, превращается в (см. рис. 5):

$$\frac{\sum_{n=1}^4 (\zeta_n - \zeta_0)}{\frac{i\sigma + r}{gH}} = i\sigma \zeta_0 \quad (2.33)$$

(обозначения те же, что в работе 4).

Электрическая схема модели для решения уравнения (2.33) изображена на рис. 5.

Используем первое правило Кирхгофа для узла сетки для случая гармонических колебаний с частотой ω :

$$\frac{\sum_{n=1}^4 (V_n - V_0)}{i\omega L + R} = i\omega C V_0. \quad (2.34)$$

Вводим константы подобия, связывающие параметры природы и модели (сравниваются уравнения (2.33) и (2.34)). Константы подобия C_V , C_b , C_L и C_C такие же, как и в работе по определению периодов свободных колебаний жидкости в бассейнах, т. е.

$$C_V = \frac{\zeta_n}{V_n} \left[\frac{M}{B} \right].$$

$$C_t = \frac{t}{t_s} = \frac{\omega}{\sigma} = fT,$$

$$C_L = \frac{1}{gH} / L \left[\frac{c^2}{\text{м}^2 \cdot \Gamma \text{Н}} \right],$$

$$C_C = \frac{l^2}{C} \left[\frac{\text{м}^2}{\Phi} \right].$$

Учет диссипации энергии обеспечивается введением в электрическую сетку элементов, приводящих к рассеянию энергии, т. е. резисторов R . Добавляется новая константа подобия C_R :

$$C_R = \frac{r}{gH} / R \left[\frac{c}{\text{м}^2 \cdot \text{Ом}} \right]. \quad (2.35)$$

Выражая параметры природы через параметры электрической аналоговой модели и константы подобия, подставляя полученные соотношения в (2.33) и сравнивая новое выражение с (2.34), получаем необходимые условия подобия в виде индикаторов подобия, один из которых такой же, как в работе 4:

$$\frac{C_L C_C}{C_t^2} = 1,$$

а второй имеет вид

$$\frac{C_R C_C}{C_t} = 1. \quad (2.56)$$

На границах исследуемой акватории могут задаваться следующие граничные условия:

1. Денивелиция уровня $\xi = \xi(x, y)$, которой на аналоговой модели соответствует электрический потенциал V .
2. Полное отражение от твердых стенок:

$$\frac{\partial \xi}{\partial n} = 0, \quad (2.37)$$

где γ — внутренняя нормаль к границе области. На аналоговой модели условие (2.37) достигается разрывом электрической цепи.

3. Беспрепятственное прохождение волны за границы исследуемой акватории, т. е. отсутствие какого-либо отражения (полное прохождение волны). На модели-аналоге отсутствие отражения обеспечивается замыканием граничной ячейки на так называемое волновое сопротивление, величина которого с достаточной степенью точности вычисляется по соотношению

$$R_b \approx \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (2.38)$$

Исходные данные

1. Средняя глубина одной из ячеек бассейна H и размер шага сетки l .
2. Соответствующие им индуктивность L и емкость C в сходственной точке аналоговой модели.
3. Период колебаний гидродинамической системы T .
4. Соответствующие граничные условия.

Порядок выполнения работы

1. По заданным глубине H , шагу сетки l , индуктивности L и емкости C определяются константы подобия C_L и C_C по соотношениям (2.17) и (2.18).

2. Из выражения для индикатора подобия (2.22) находится временная константа подобия C_t .

3. Вычисляется частота генератора f , необходимая для моделирования колебаний жидкости данного периода T , по формуле

$$f = \frac{C_t}{T}. \quad (2.39)$$

4. В соответствии с заданными граничными условиями к части внешней границы подключается генератор синусоидальных колебаний; часть границы замыкается на волновые сопротивления; в местах полного отражения цепь разрывается.

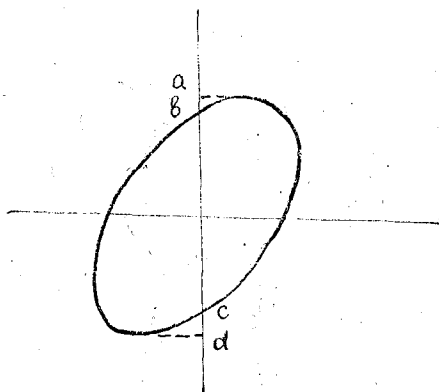
5. С помощью измерительной аппаратуры определяются амплитуды и фазы электрических колебаний. Фазы электрических колебаний соответствуют фазам колебаний уровня в природе. Для перехода от амплитуд электрических колебаний к величинам колебаний в бассейне необходимо определить константу подобия C_U по известной информации о колебаниях уровня хотя бы в одной из точек акватории. В противном случае информация о колебаниях уровня в натуре получается в относительных единицах.

Примечание. Фазы измеряются либо с помощью фазометра, либо с помощью двухлучевого осциллографа. Можно также использовать осциллограф, имеющий входы как по оси X , так и по оси Y . В этом случае на горизонтальные отклоняющие пластины (клеммы X) подается напряжение от узлов модели, в которой фаза известна (не ограничивая общности, ее можно положить равной нулю), а на вертикальные пластины (клеммы Y) — от тех узлов, где определяются фазы колебаний. При этом на экране осциллографа возникает изображение эллипса, вид которого будет зависеть от амплитуд колебаний и разности фаз между точками модели (рис. 8).

Разность фаз определяется по формуле

$$\Delta\varphi = \pm \arcsin \frac{bc}{ad}.$$

Рис. 8. Изображение на экране осциллографа эллипса, необходимого для определения разности фаз



Четверть, в которой находится угол (его знак), определяется по ориентации эллипса на экране осциллографа.

6. Строятся карты изоамплитуд и изофаз уровня.

7. Анализ результатов моделирования.

Пример моделирования

Рассматривается распространение длинной волны периода 12 ч в Северном море при следующих граничных условиях: колебания задаются на юге моря, в Дуврском проливе; на севере моря и в проливе между Оркнейскими и Шетландскими островами волна беспрепятственно уходит за пределы акватории; в проливе Скагеррак происходит полное отражение. Сила Кориолиса не учитывается.

Константы подобия имеют следующие значения: $C_C = 6,78 \times 10^{18} \frac{\text{м}^2}{\text{Ф}}$, $C_L = 8,85 \frac{\text{с}}{\text{м}^2 \cdot \text{Гн}}$, $C_I = 7,75 \cdot 10^9$.

Изоамплитуды уровня в относительных единицах приведены на рис. 9, а изофазы в градусах — на рис. 10 (см. с. 40).

Лабораторная работа 6

АНАЛОГОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДЛИННОВОЛНОВЫХ КОЛЕБАНИЙ УРОВНЯ МОРЯ

Задача работы

С помощью электрической аналоговой модели определить неустойчившиеся длинноволновые колебания уровня моря в результате внешнего воздействия, в том числе антропогенного происхождения.

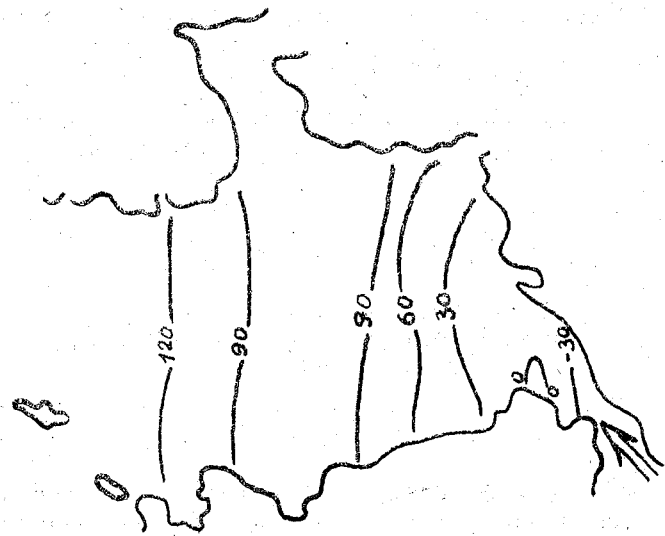


Рис. 9. Изаоплитуды уровня в Северном море (в относительных единицах). Стрелкой обозначено направление входящей в бассейн длинной волны

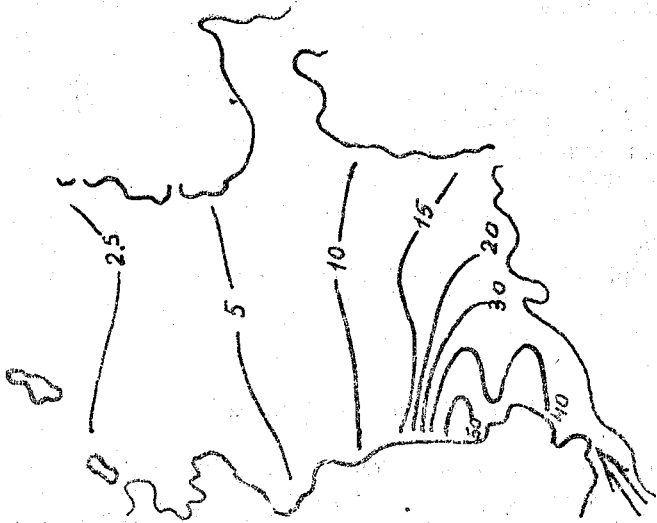


Рис. 10. Изафазы уровня в Северном море (град.)

Теоретическое обоснование

Так как исследуются длинноволновые колебания уровня моря, как и в работе 2.2, используется теория мелкой воды. Исходная система уравнений (2.24)—(2.26) интегрируется по вертикали и переходит в (2.27)—(2.29), донное трение принимается пропорциональным средней по вертикали скорости течения согласно (2.30)—(2.31). После преобразований, аналогичных преобразованиям в работах 4 и 5, получим одно уравнение для колебаний уровня ζ (обозначения такие же, как в работах 4 и 5).

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = gH \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) + g \left(\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) - r \frac{\partial \zeta}{\partial t}. \quad (2.40)$$

При переходе к дискретному полю масс уравнение (2.41), написанное для одной ячейки гидродинамической системы, в пределах которой глубина усредняется и считается постоянной, переходит в

$$\frac{\sum_{n=1}^4 (\zeta_n - \zeta_0)}{1} = l^2 \frac{d^2 \zeta_0}{dt^2} + l^2 r \frac{d\zeta_0}{dt}. \quad (2.41)$$

$$\frac{\sum_{n=1}^4 (\zeta_n - \zeta_0)}{gH}$$

Для моделирования процесса, описываемого уравнением (2.41), необходима аналоговая сеточная модель, состоящая из индуктивностей L , каждый узел которой имеет стоки из конденсаторов C и резисторов R .

Узел модели изображен на рис. 11. Реактивные элементы модели (емкость и индуктивность) при воспроизведении неустановившихся колебаний уровня моря не сдвигают фазу, как в случае установившихся колебаний, а являются дифференцирующими и интегрирующими элементами.

Первое правило Кирхгофа для узла рассматриваемой модели записывается как

$$\sum_{n=1}^4 J_{Ln} + J_C + J_R = 0, \quad (2.42)$$

где J_L — ток, проходящий через индуктивность; J_R — ток, протекающий через омическое сопротивление; J_C — ток, протекающий через конденсатор в случае неустановившегося процесса; как известно, его величина определяется соотношением

$$J_C = C \frac{dU_C}{dt}, \quad (2.43)$$

где U_C — разность потенциалов на обкладках конденсатора; t_0 — время в электрической системе.

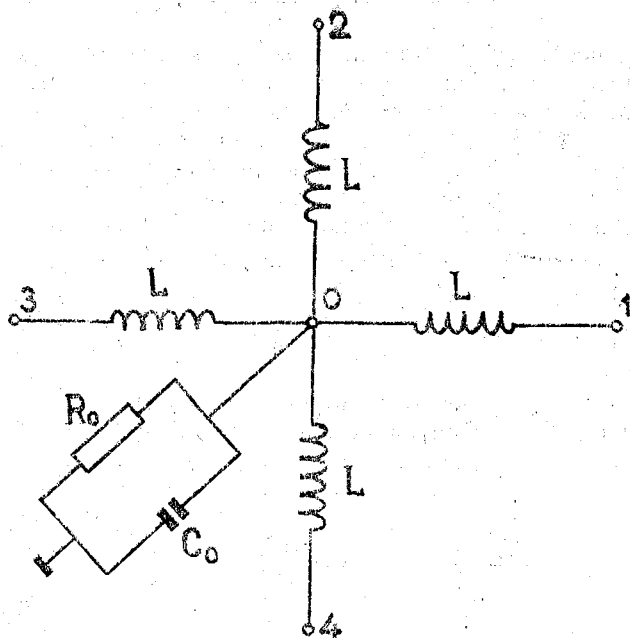


Рис. 11. Схема узла электрической сетки для моделирования неустановившихся длинноволновых колебаний уровня моря

С учетом (2.43) выражение (2.42) переходит в

$$\sum_{n=1}^4 J_{Ln} + C \frac{d}{dt_3} (0 - V_0) + \frac{0 - V_0}{R} = 0, \quad (2.44)$$

где V_n , V_0 — электрические потенциалы в соответствующих узлах модели.

Напряжение на индуктивности равно

$$U_L = L \frac{dJ}{dt_3}. \quad (2.45)$$

Продифференцируем соотношение (2.44) по времени:

$$\sum_{n=1}^4 \frac{dJ_{Ln}}{dt_3} = C \frac{d^2 V_0}{dt_3^2} + \frac{1}{R} \frac{dV_0}{dt_3}. \quad (2.46)$$

С учетом (2.45) имеем:

$$\frac{\sum_{n=1}^4 (V_i - V_0)}{L} = C \frac{d^2 V_0}{dt_3^2} + \frac{1}{R} \frac{dV_0}{dt_3}. \quad (2.47)$$

Сравнивая уравнения (2.41) и (2.47), видим, что гидродинамическая и электрическая системы обладают одинаковой структурой.

Вводим константы подобия, они аналогичны константам подобия в работах 4, 5, кроме константы C_R

$$\begin{aligned}
 C_V &= \frac{\zeta}{V_n} \left[\frac{M}{B} \right], \\
 C_t &= \frac{t}{t_s}, \\
 C_L &= \frac{1}{gH} / L \left[\frac{c^2}{M^2 \cdot \Gamma_H} \right], \\
 C_C &= \frac{l^2}{C} \left[\frac{M^2}{\Phi} \right], \\
 C_R &= l^2 r / \frac{1}{R} \left[\frac{M^2}{c \cdot \text{Ом}} \right].
 \end{aligned} \tag{2.48}$$

Выразим параметры природы через параметры аналоговой модели и константы подобия:

$$\zeta_n = C_V V_n; \quad t = C_t t_s; \quad \frac{1}{gH} = C_L L; \quad l^2 = C_C C; \tag{2.49}$$

Подставим полученные соотношения в уравнение (2.41)

$$\frac{C_V \sum_{n=1}^4 (V_i - V_0)}{C_L L} = \frac{C_V C_C}{C_t^2} C \frac{d^2 V_0}{dt_s^2} + \frac{C_V C_R}{C_t} \frac{1}{R} \frac{dV_0}{dt_s}. \tag{2.50}$$

Сравнив уравнения (2.50) и (2.46), получаем два индикатора подобия, обеспечивающие необходимое условие подобия аналоговой модели и гидродинамической системы. Один из индикаторов подобия такой же, как в работах 4 и 5

$$\frac{C_L C_C}{C_t^2} = 1,$$

второй имеет вид

$$\frac{C_L C_R}{C_t} = 1. \tag{2.51}$$

На границах исследуемой акватории могут задаваться следующие граничные условия:

1. Денивелиция уровня $\zeta = \zeta(x, y)$, которой на аналоговой модели соответствует электрический потенциал V .

2. Полное отражение от береговой линии, т. е.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \nu} = 0,$$

где ν — внутренняя нормаль к границе.

На аналоговой модели условие (2.37) достигается разрывом электрической цепи.

3. Беспрепятственное прохождение волны за границы исследуемой акватории, т. е. отсутствие какого-либо отражения (полное прохождение волны).

На электрической модели это условие обеспечивается замыканием граничной ячейки на так называемое волновое сопротивление, величина которого с достаточной степенью точности вычисляется по соотношению

$$R_b \sim \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Исходные данные

1. Средняя глубина одной из ячеек бассейна H , размер шага сетки l , коэффициент донного трения в одной из ячеек r .
2. Соответствующие им индуктивность L , емкость C и омическое сопротивление R в сходственной точке аналоговой модели.
3. Продолжительность исходного возмущения уровня ΔT .
4. Соответствующие граничные условия.

Порядок выполнения работы

1. По заданным глубине H , шагу сетки l , коэффициенту донного трения r , индуктивности L , емкости C и сопротивлению R определяются константы подобия C_L , C_C и C_R по соотношениям (2.17), (2.18) и (2.48).
2. Из выражений для индикатора подобия (2.22) или (2.51) находится временная константа подобия C_t .
3. Вычисляется длительность импульса генератора $\Delta \tau_g$, необходимая для моделирования исходного возмущения уровня заданной продолжительности ΔT , по формуле

$$\Delta \tau_g = \frac{\Delta T}{C_t}. \quad (2.49)$$

4. В соответствии с заданными граничными условиями к части внешней границы области подключается импульсный генератор; часть границы замыкается на волновые сопротивления; в местах полного отражения цепь разрывается.

5. С помощью измерительной аппаратуры определяются амплитуды колебаний в электрической системе и продолжительность

этих колебаний. Переход от данных, полученных на модели, к натурным данным происходит по соотношениям (2.15) и (2.16). При этом для вычисления константы подобия C_V необходима информация о колебаниях уровня в одной из точек акватории. В противном случае величина колебаний уровня получается в относительных единицах.

6. Строятся карты максимальных положительных и максимальных отрицательных изоамплитуд уровня, а также карта продолжительности неустойчившегося процесса.

7. Проводится анализ результатов моделирования.

Пример моделирования

Рассматривается распространение волны возмущения уровня, вызванной сбросом воды через плотину проектируемой Мезенской

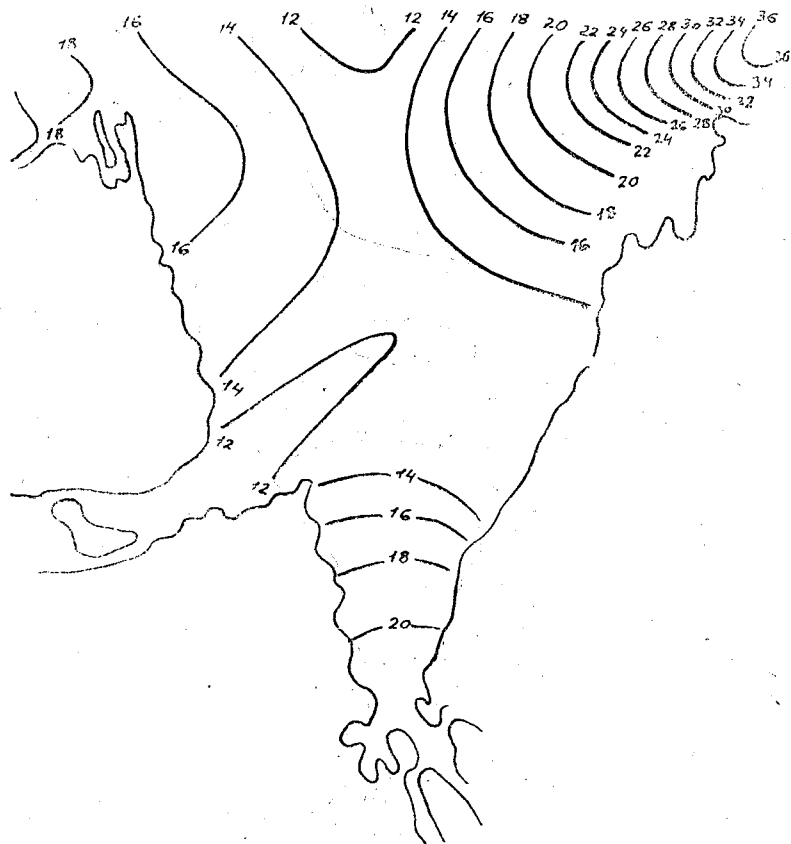


Рис. 12. Положительные изоамплитуды уровня в вершине Мезенской губы при неустойчившемся длинноволновом процессе (даны в относительных единицах)

приливной электростанции. Возмущение уровня задается в центральной части плотины. На остальной части плотины и на берегу задается полное отражение — условие (2.37). В устьях рек Мезени Кулоя задается беспрепятственное прохождение волны: эти части водной границы замыкаются на волновое сопротивление (2.38). Константы подобия имеют следующие значения:

$$C_L = 50,8 \text{ с} \cdot \text{м}^{-2} \cdot \text{Гн}^{-1}, \quad C_C = 0,503 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 \cdot \text{Ф}^{-1}, \quad C_H = 5,05 \cdot 10^8 \frac{\text{м}^2 \cdot \text{с}}{\text{Гн}}$$

Максимальные положительные изоамплитуды уровня в относительных единицах приведены на рис. 12; максимальные отрицательные изоамплитуды уровня в относительных единицах — на рис. 13; на рис. 14 показана продолжительность неустановившихся колебаний уровня в часах.



Рис. 13. Отрицательные изоамплитуды уровня в вершине Мезенской губы при неустановившемся длинноволновом процессе (даны в относительных единицах)

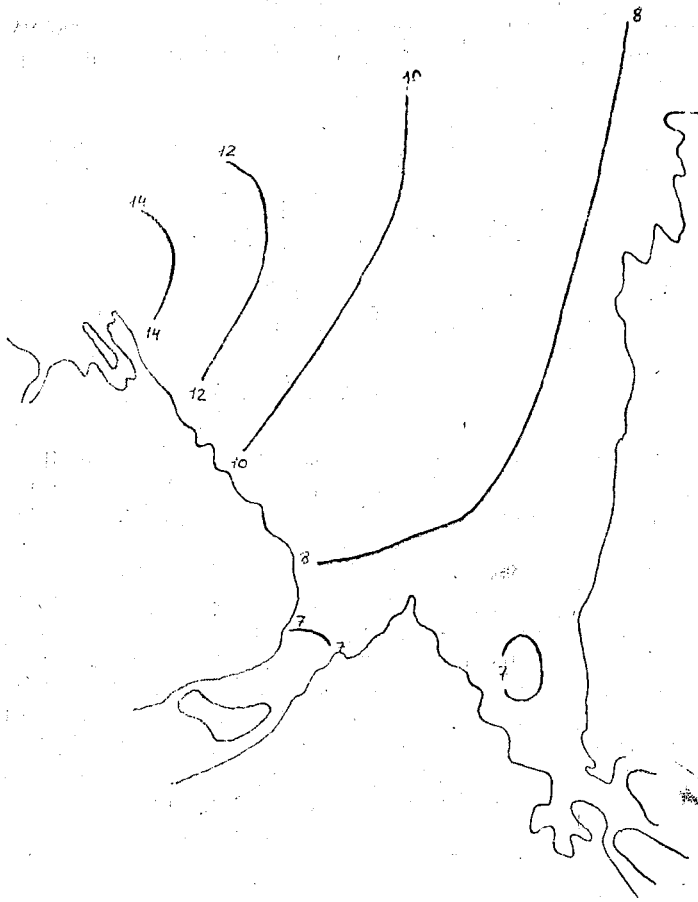


Рис. 14. Продолжительность неустановившегося колебательного процесса, ч

Лабораторная работа 7

**АНАЛОГОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ИНТЕГРАЛЬНОЙ ВЕТРОВОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ В МОРЕ**

Задача работы

Определение интегральной ветровой циркуляции в верхнем слое моря с учетом β -эффекта.

Теоретическое обоснование

Рассмотрим баротропное море с произвольными очертаниями берегов. Учитываем турбулентный обмен количеством движения только в вертикальном направлении, пренебрегаем нелинейными

эффектами, давление считаем равным гидростатическому. Тогда в стационарном случае уравнения движения и неразрывности имеют вид

$$-fv = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_x}{\partial z}, \quad (2.50)$$

$$fu = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_y}{\partial z}, \quad (2.51)$$

$$0 = -g\rho - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.53)$$

где u , v , w — составляющие скоростей течения вдоль прямоугольных осей координат; ρ — плотность ($\rho = \text{const}$); f — параметр Кориолиса; τ — тангенциальное напряжение трения; g — ускорение свободного падения; P — давление.

Рассматривается бассейн таких размеров, при которых можно не учитывать сферичность Земли. Начало координат расположено на невозмущенной поверхности моря, ось z направлена вертикально вверх, система координат правая.

Проинтегрируем уравнения движения и неразрывности от возмущенной поверхности моря $z = \xi$ до нижней границы слоя $z = -H$, причем будем считать толщину верхнего слоя моря, подверженной действию ветра, постоянной, т. е. $H = \text{const}$, тогда с учетом уравнения гидростатики (2.52) получим

$$-fW_y = -gH \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\tau_{0x}}{\rho} - \frac{\tau_{Hx}}{\rho}, \quad (2.54)$$

$$fW_x = -gH \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\tau_{0y}}{\rho} - \frac{\tau_{Hy}}{\rho}, \quad (2.55)$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} = 0, \quad (2.56)$$

где τ_{0x} , τ_{0y} — составляющие тангенциального напряжения ветра на свободной поверхности; τ_{Hx} , τ_{Hy} — составляющие тангенциального напряжения трения на нижней границе слоя; W_x , W_y — составляющие полного потока, причем

$$W_x = \int_{-H}^{\xi} u dz, \quad W_y = \int_{-H}^{\xi} v dz.$$

В случае линейной постановки задачи полагается, что тангенциальное трение на нижней границе слоя пропорционально полному потоку, т. е.

$$\frac{\tau_{Hx}}{\rho} = r W_x, \quad \frac{\tau_{Hy}}{\rho} = r W_y,$$

где r — коэффициент трения на нижней границе слоя, имеющий размерность с^{-1} .

Тогда из (2.54) — (2.55) получим

$$-f W_y = -gH \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\tau_{0x}}{\rho} - r W_x, \quad (2.57)$$

$$f W_x = -gH \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\tau_{0y}}{\rho} - r W_y. \quad (2.58)$$

Так как дивергенция полного потока равна нулю (см. уравнение (2.56)), можно ввести интегральную функцию тока ψ :

$$W_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad W_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (2.59)$$

При таком выборе функции ψ движение вод происходит таким образом, что значение интегральной функции тока слева по направлению переноса всегда больше, чем справа.

Исключая из (2.57) — (2.58) денivelацию уровня ζ в результате перекрестного дифференцирования и учитывая (2.59), получим следующее уравнение эллиптического типа для определения функции ψ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \alpha_x \frac{\partial \psi}{\partial x} = -T(x, y), \quad (2.60)$$

где $\alpha_x = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\beta}{r}$; β — изменение параметра Кориолиса с широтой; $T(x, y) = \frac{1}{\rho r} \left(\frac{\partial \tau_{0y}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{0x}}{\partial y} \right)$.

Если не учитывать изменение отклоняющей силы вращения Земли с широтой, то уравнение (2.60) превращается в уравнение Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = -T(x, y). \quad (2.61)$$

Хорошим физическим аналогом лапласиана является сплошная электропроводная среда. Ее и можно использовать для моделирования левой части уравнения (2.61).

Однако удобнее перейти к дискретному представлению поля масс с помощью конечно-разностной аппроксимации. Конечно-разностная форма уравнения (2.61) для точки 0 имеет вид (рис. 2.11, а):

$$\frac{\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 + \psi_4 - 4\psi_0}{l^2} = -T_0,$$

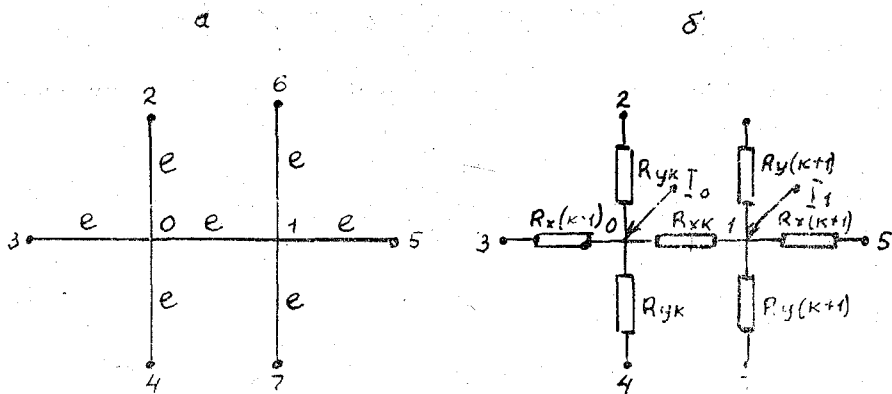


Рис. 15. Схема расположения точек в гидродинамической системе (а) и соответствующий ей участок электрической сетки (б)

или

$$\frac{\sum_{n=1}^4 (\psi_n - \psi_0)}{l^2} = -T_0, \quad (2.62)$$

где l — шаг сетки, в общем случае — переменный, при этом под T_0 подразумевается конечно-разностное изображение правой части уравнения (2.61).

Дискретным аналогом лапласиана в электрической системе является сетка, составленная из сопротивлений одного знака. Правая часть уравнения (2.62) аппроксимируется током, подаваемым в узловые точки сетки, который является дискретным эквивалентом распределенного возбуждения.

Напишем первое правило Кирхгофа для той же точки 0 (применим принцип непрерывности) (рис. 2, б):

$$\frac{\sum_{n=1}^4 (V_n - V_0)}{R} + J_0 = 0, \quad (2.63)$$

где V — потенциал, пропорциональный искомой функции тока; R — омическое сопротивление между соседними узлами сетки; I_0 — ток, поданный в узловую точку.

Введем константы подобия:

$$C_V = \frac{\psi_n}{V_n} \left[\frac{\text{М}^3}{\text{с} \cdot \text{В}} \right], \quad (2.64)$$

$$C_J = \frac{T_0}{J_0} \left[\frac{\text{М}}{\text{с} \cdot \text{А}} \right], \quad (2.65)$$

$$C_R = \frac{l^2}{R} \left[\frac{\text{М}^2}{\text{Ом}} \right]. \quad (2.66)$$

Выразим параметры природы через параметры модели и константы подобия, подставим полученные соотношения в (2.62), тогда получим

$$\frac{C_V}{C_R C_J} \frac{\sum_{n=1}^4 (V_n - V_0)}{R} + J_0 = 0. \quad (2.67)$$

Выражения (2.63) и (2.67) совместны (модель подобна натуре) тогда и только тогда, когда

$$\frac{C_V}{C_R C_J} = 1. \quad (2.68)$$

Соотношение (2.68) является индикатором подобия. Мы получили равенство, которое является обуславливающим при выборе параметров аналоговой модели и при переходе от данных эксперимента к натуре.

Необходимость учета изменения параметра Кориолиса с широтой (учета β -эффекта) связана с необходимостью моделирования эффекта, вызываемого наличием в моделируемом уравнении первой производной от искомой функции ψ по оси x — уравнение (2.60).

Тогда конечно-разностное представление уравнения (2.60) для точки 0 имеет вид (рис. 15, а)

$$\left(\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha_r}{2l}\right)(\psi_5 - \psi_0) + \left(\frac{1}{l^2} - \frac{\alpha_x}{2l}\right)(\psi_3 - \psi_0) + \frac{\psi_2 + \psi_4 - 2\psi_0}{l^2} = -T_0, \quad (2.69)$$

а для точки 1

$$\left(\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha_r}{2l}\right)(\psi_5 - \psi_1) + \left(\frac{1}{l^2} - \frac{\alpha_x}{2l}\right)(\psi_0 - \psi_1) + \frac{\psi_6 + \psi_7 - 2\psi_1}{l^2} = -T_1. \quad (2.70)$$

Первое правило Кирхгофа для точки 0 выражается как

$$\frac{V_1 - V_0}{R_{xk}} + \frac{V_3 - V_0}{R_{x(k-1)}} + \frac{V_2 + V_4 - 2V_0}{R_{yk}} + J_0 = 0, \quad (2.71)$$

а для точки 1 как

$$\frac{V_5 - V_1}{R_{x(k+1)}} + \frac{V_0 - V_1}{R_{xk}} + \frac{V_6 + V_7 - 2V_1}{R_{y(k+1)}} + J_1 = 0. \quad (2.72)$$

Сравнивая выражения (2.69) и (2.71), а также (2.70) и (2.72), обнаруживаем, что сопротивление R_{xk} в положительном направлении оси x отличается от сопротивления R_{xk} в отрицательном на-

правлении оси x . Аналогичные сравнения для других узловых точек показывают, что величина сопротивления зависит от того, является ли оно «правым» или «левым» по отношению к рассматриваемой узловой точке.

Таким образом, при наличии в уравнении кроме вторых еще и первой производной от искомой функции в процессе моделирования появляются особые трудности. Их можно преодолеть, применяя способ пересчетных множителей.

Для того чтобы оба значения R_{xk} стали идентичными, надо умножить на множитель

$$N_x = \frac{\frac{1}{l^2} - \frac{\alpha_x}{2l}}{\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha_x}{2l}} \quad (2.73)$$

обе части выражения (2.69), составленного для узловой точки 0. Эту операцию умножения следует проделать со всеми уравнениями, составленными для каждой узловой точки по оси x в целях «согласования» каждого «правого» и «левого» сопротивлений. Сравнивая полученные уравнения гидродинамической системы с уравнениями электрической сетки, составленными для сходственных точек, нетрудно заметить, что сопротивления должны возрастать в положительном направлении оси x , так как $N_x < 1$; токи должны уменьшаться в этом же направлении

$$R_{xk} = \frac{1}{C_R} \frac{1}{\left(\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha_x}{2l}\right) N_x^k}, \quad (2.74)$$

$$R_{yk} = \frac{1}{C_R} \frac{l^2}{N_x^k}. \quad (2.75)$$

$$J_k = \frac{1}{C_J} T_k N_x^k, \quad (2.76)$$

где k — порядковый номер узловой точки в положительном направлении оси x (обобщенная координата).

Однако такая электрическая система будет аналогична не рассматриваемой моделируемой системе, а системе, преобразованной умножением на множители N_x . Необходимо трансформировать электрическую систему. Этого можно достигнуть, если отказаться от констант подобия C_R и C_J , связывающих сопротивления с параметрами гидродинамической системы, а токи — с завихренностью ветрового поля, и ввести коэффициенты подобия, меняющиеся с изменением обобщенной координаты по оси x :

$$C_{R_k} = \frac{1}{\left(\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha_x}{2l}\right) R_{xk}} = \frac{l^2}{R_{yk}}, \quad (2.77)$$

$$C_{J_k} = \frac{T_k}{J_k}. \quad (2.78)$$

Аналогом гидродинамической системы будет сетка с сопротивлениями, уменьшающимися вдоль оси x (каждое «правое» сопротивление сетки меньше «левого» в N_x раз) и с токами, увеличивающимися по оси x :

$$R_{xk} = R_{x0} N_x^k, \quad (2.79)$$

$$R_{yk} = R_{y0} N_x^k, \quad (2.80)$$

$$J_k = J_k^{(0)} N_x^{-k}, \quad (2.81)$$

где R_{x0} , R_{y0} — так называемые опорные сопротивления; $J_k^{(0)}$ — величина нетрансформированного тока.

Хотя при таком выборе величин сопротивлений и токов константы подобия C_R и C_J превращаются в коэффициенты, меняющиеся с изменением обобщенной координаты, коэффициент подобия для искомой функции ψ не меняется по оси x , он по-прежнему остается константой подобия согласно уравнению (2.64):

$$C_V = \frac{\psi_{nk}}{V_{nk}}. \quad (2.82)$$

Выражая параметры природы через параметры модели из соотношений (2.77)—(2.78), (2.82) с учетом (2.79)—(2.81), подставляя новые выражения в (2.60) и сравнивая полученное уравнение с выражением для первого правила Кирхгофа, составленного для любой узловой точки модели, получаем индикатор подобия

$$\frac{C_V}{C_{R_k} C_{J_k}} = 1, \quad (2.83)$$

вид которого идентичен соотношению (2.68), хотя коэффициенты подобия C_{R_k} и C_{J_k} меняются с изменением обобщенной координаты по оси x . Выполняя условие (2.83), мы выполняем необходимое условие подобия электрической модели и природы.

Связь между опорными сопротивлениями R_{x0} и R_{y0} можно получить из выражения (2.77) с учетом (2.79)—(2.80), т. е. из того условия, что в каждой данной точке коэффициенты подобия для сопротивлений по осям x и y должны быть одинаковыми (сравни-

ваются «правые» сопротивления для данной точки как по оси x , так и по оси y):

$$\frac{R_{x0}}{R_{y0}} = \frac{\frac{1}{l^2}}{\frac{1}{l^2} + \frac{\alpha_x}{2l}}. \quad (2.84)$$

Предлагаются два варианта выполнения лабораторной работы.

Вариант первый

Исходные данные

1. Размер шага сетки l , коэффициент трения на нижней границе исследуемого слоя r , изменение параметра Кориолиса с широтой β .
2. Поле тангенциального напряжения ветра на поверхности τ_0 или его завихренность $\text{rot}_z \tau_0$.

Порядок выполнения работы

1. Для заданных l , r , $\text{rot}_z \tau_0$ определяются параметры электрической модели без учета β -эффекта.
2. Определяются параметры электрической модели с учетом β -эффекта. (Модель трансформируется с помощью пересчетных множителей N_x .)
3. На аналоговой модели набирается исследуемая область (без учета β -эффекта). В узлы модели подаются токи, пропорциональные правой части моделируемого уравнения (2.61).
4. В узлах модели снимаются значения электрического потенциала (без учета β -эффекта).
5. На аналоговой модели набирается та же область, но с учетом β -эффекта. В узлы модели подаются трансформированные токи.
6. В узлах модели снимаются значения электрического потенциала (с учетом β -эффекта).
7. Значения электрического потенциала переводятся в значения интегральной функции тока ψ по соотношениям (2.83), (2.82).
8. Строятся карты интегральной функции тока.
9. Проводится сравнение полученных картин интегральной функции тока без учета и с учетом β -эффекта.

Вариант второй

Исходные данные

1. Размер шага сетки l , коэффициент трения на нижней границе слоя r , изменение параметра Кориолиса с широтой β .

2. Поле электрического тока, аппроксимирующее правую часть моделируемого уравнения (2.61).

3. Константа подобия C_J , связывающая завихренность ветрового поля с нетрансформированным током (см. формулу (2.65)).

Порядок выполнения работы

1. Для заданного размера шага сетки l в гидродинамической системе определяются величины сопротивлений аналоговой модели R без учета β -эффекта.

2. Определяются величины омических сопротивлений R и токов, подаваемых в узлы, с учетом β -эффекта.

3. На аналоговой модели набирается исследуемая область (без учета β -эффекта), в узлы модели подаются токи на основании исходных данных.

4. В узлах модели снимаются значения электрического потенциала (без учета β -эффекта).

5. На аналоговой модели набирается та же область сопротивлений R , но с учетом β -эффекта; в узлы сетки подаются токи, трансформированные влиянием β -эффекта.

6. В узлах модели снимаются значения электрического потенциала (с учетом β -эффекта).

7. Значения электрического потенциала переводятся в значения интегральной функции тока ψ по соотношениям (2.83) — (2.82).

8. Строятся карты интегральной функции тока.

9. Определяется завихренность ветрового поля по заданному полю электрического тока, константе подобия C_J и коэффициенту трения l .

10. Строится поле $\text{rot}_z \tau_0$.

11. Производится сравнение полученных картин интегральной функции тока без учета и с учетом β -эффекта.

Пример моделирования

Приводятся результаты моделирования для второго варианта выполнения лабораторной работы.

Константы подобия имеют следующие значения:

$$C_R = 1,2 \cdot 10^6 \frac{\text{М}^2}{\text{ОМ}}; \quad C_J = 0,36 \frac{\text{М}}{\text{с} \cdot \text{А}}; \quad C_V = 0,43 \cdot 10^6 \frac{\text{М}^3}{\text{с} \cdot \text{В}}.$$

На рис. 2.12 показана интегральная ветровая циркуляция в Черном море с учетом β -эффекта, на рис. 2.13 приведена завихренность ветрового поля, вызвавшего данную циркуляцию.

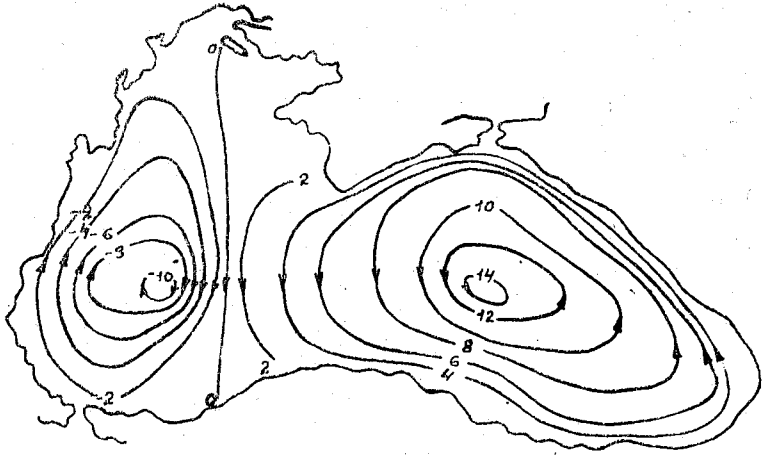


Рис. 16. Интегральная ветровая циркуляция в Черном море ($\psi \cdot 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$)

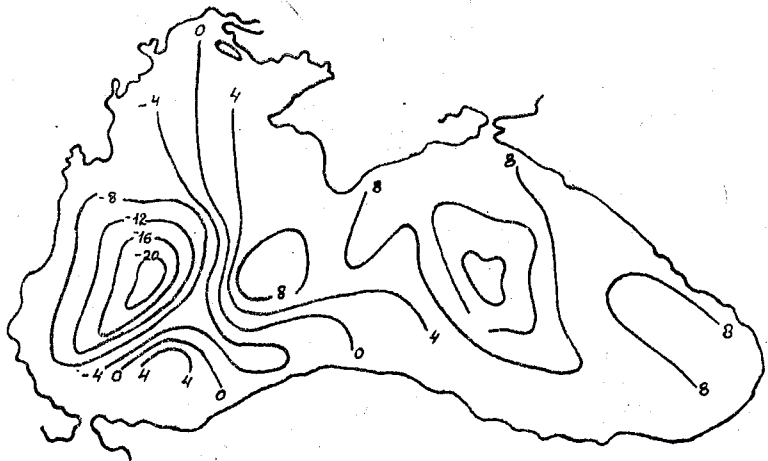


Рис. 17. Распределение завихренности ветрового поля над Черным морем ($\text{rot}_z \tau_0 \cdot 10^6 \text{ кг/м}^2 \cdot \text{с}^2$)

Лабораторная работа 8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕРМИЧЕСКОЙ И ХАЛИННОЙ СТРУКТУРЫ БАСЕЙНА С ПОМОЩЬЮ АНАЛОГОВОЙ МОДЕЛИ

Задача работы

Используя аналоговую модель, определить эволюцию термического либо халинного поля бассейна в результате атмосферного воздействия с учетом адвективного переноса.

Теоретическое обоснование

Для моделирования термохалинных процессов используются уравнения турбулентной теплопроводности и турбулентной диффузии солей:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial T}{\partial z} + K_L \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \quad (2.85)$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + v \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} K_z \frac{\partial S}{\partial z} + K_L \left(\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} \right), \quad (2.86)$$

где u , v — горизонтальные составляющие скорости течения; K_z — коэффициент турбулентного обмена теплом и солями по вертикали; K_L — коэффициент турбулентного обмена теплом и солями в горизонтальном направлении.

В исходных уравнениях не учитываем упорядоченные вертикальные токи. Задаются граничные условия второго рода, то есть потоки тепла и солей.

На поверхности при $z=0$

$$-c_p \rho K_z \frac{\partial T}{\partial z} = c_a \rho_a c_T (T_a - T_0) V_a + L_n \rho_a c_q (q - q_0) V_a + Б. \quad (2.87)$$

$$K_z \frac{\partial S}{\partial z} = S_0 \frac{\partial h}{\partial t}, \quad (2.88)$$

где c_p — теплоемкость воды; c_a — теплоемкость воздуха; ρ — плотность воды; ρ_a — плотность воздуха; c_T — число Стентона; c_q — число Дальтона; V_a — относительная скорость ветра; T_a — температура воздуха; T_0 — температура поверхности моря; q — удельная влажность воздуха; q_0 — насыщающая удельная влажность при температуре поверхности моря; L_n — теплота испарения; Б — радиационный баланс поверхности; S_0 — соленость поверхности моря; h — толщина слоя выпавших осадков и изменение слоя пресной воды в результате процессов испарения или конденсации; в устьях рек в величину h должен также входить приток пресной воды от речного стока.

На дне при $z=H$

$$K_z \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (2.89)$$

$$K_s \frac{\partial S}{\partial z} = 0. \quad (2.90)$$

На твердых боковых границах

$$K_L \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \quad (2.91)$$

$$K_L \frac{\partial S}{\partial n} = 0, \quad (2.92)$$

где n — нормаль к границе.

На жидком контуре

$$K_L \frac{\partial T}{\partial n} = \delta T V_n, \quad (2.93)$$

$$K_L \frac{\partial S}{\partial n} = \delta S V_n, \quad (2.94)$$

где δT — разность температур; δS — разность соленостей; V_n — составляющая скорости, нормальная к жидкой границе.

Конечно-разностное представление уравнений (2.85) — (2.86) по неявной схеме без учета адвективных членов имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_0^{(t+\delta t)} - \varphi_0^{(t)}}{\delta t} = & \frac{K_L \sum_{i=1}^4 [\varphi_i^{(t+\delta t)} - \varphi_0^{(t+\delta t)}]}{l^2} + \\ & + \frac{K_z(0) \sum_{i=5}^6 [\varphi_i^{(t+\delta t)} - \varphi_0^{(t+\delta t)}]}{l_z^2}, \end{aligned} \quad (2.95)$$

где l_z — размер шага по вертикали.

Лучше всего для решения уравнения (2.95) использовать электрическую сетку, составленную из резисторов (рис. 2.14).

Запишем закон Кирхгофа для узловой точки

$$\begin{aligned} \frac{V_0^{(t)} - V_0^{(t+\delta t)}}{R_t} + \frac{\sum_{i=1}^4 [V_i^{(t+\delta t)} - V_0^{(t+\delta t)}]}{R_l} + \\ + \frac{\sum_{i=5}^6 [V_i^{(t+\delta t)} - V_0^{(t+\delta t)}]}{R_z} = 0. \end{aligned} \quad (2.96)$$

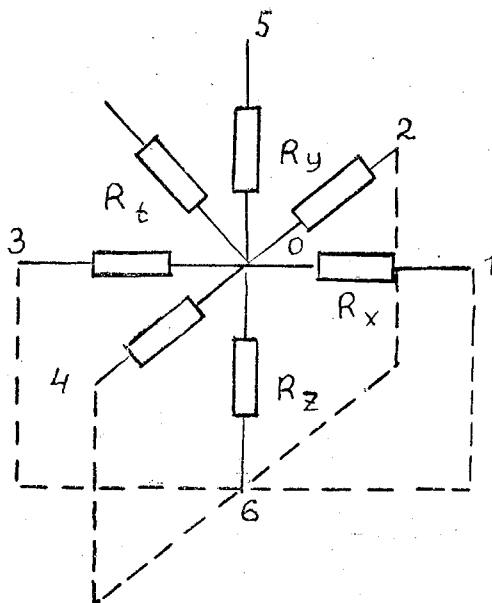


Рис. 18. Принципиальная схема узловой точки аналоговой модели для решения уравнений тепломассопереноса

В случае равных шагов по горизонтали

$$C_V = \frac{\varphi_i}{V_i}, \quad (2.97)$$

$$C_{R_z} = \frac{l_z^2}{K_z R_z}, \quad (2.98)$$

$$C_{R_l} = \frac{l^2}{K_l R_l}, \quad (2.99)$$

$$C_{R_t} = \frac{\delta t}{R_t}. \quad (2.100)$$

Сравнивая уравнения (2.95) и (2.96) с учетом введенных констант подобия, можно получить следующие выражения для индикаторов подобия, которые являются необходимыми для расчета параметров модели:

$$\frac{C_{R_z}}{C_{R_l}} = 1; \quad (2.101)$$

$$\frac{C_{R_z}}{C_{R_t}} = 1; \quad (2.102)$$

т. е.

$$C_{R_z} = C_{R_t} = C_{R_t}. \quad (2.103)$$

При наличии адвекции, когда в моделируемом уравнении появляются первые производные, необходимо использовать пересчетные множители, о которых шла речь в предыдущей работе, причем теперь их надо учитывать как по оси x , так и по оси y :

$$N_x = \frac{\frac{1}{l^2} + \frac{u}{2l}}{\frac{1}{l^2} - \frac{u}{2l}}, \quad (2.104)$$

$$N_y = \frac{\frac{1}{l^2} + \frac{v}{2l}}{\frac{1}{l^2} - \frac{v}{2l}}. \quad (2.105)$$

Исходные данные

1. Метеорологическая информация.
2. Коэффициенты турбулентного обмена.
3. Составляющие скоростей течений.
4. Начальные поля температуры или солености.

Порядок выполнения работы

1. По метеорологической информации рассчитываются потоки тепла или солей на поверхности бассейна.
2. Определяются потоки тепла или солей на жидких границах.
3. Рассчитываются параметры электрической модели по соотношениям (2.98) — (2.105).
4. На аналоговой модели набирается исследуемая область.
5. Проводится эксперимент по эволюции термического или халинного поля. Он протекает в следующей последовательности: на свободные концы сопротивлений R_t подаются значения потенциалов, пропорциональные искомой функции ϕ в момент времени t . Задаются граничные условия для момента времени $t + \delta t$. Затем в узловых точках модели измеряются электрические потенциалы, которые соответствуют моменту времени $t + \delta t$. Эти найденные значения опять подаются на свободные концы сопротивлений, задаются новые (на момент $t + 2\delta t$) граничные условия; в узловых точках определяются потенциалы для следующего момента времени $t + 2\delta t$ и т. д.
6. Производится анализ результатов.

Пример моделирования

На рис. 19 показано изменение поля солености в районе Датских проливов, вызванное в основном адвекцией.

Константы подобия имеют следующее значение: $C_{R_z} = C_{R_l} = C_{R_t} = 43,2 \text{ с/Ом}$.

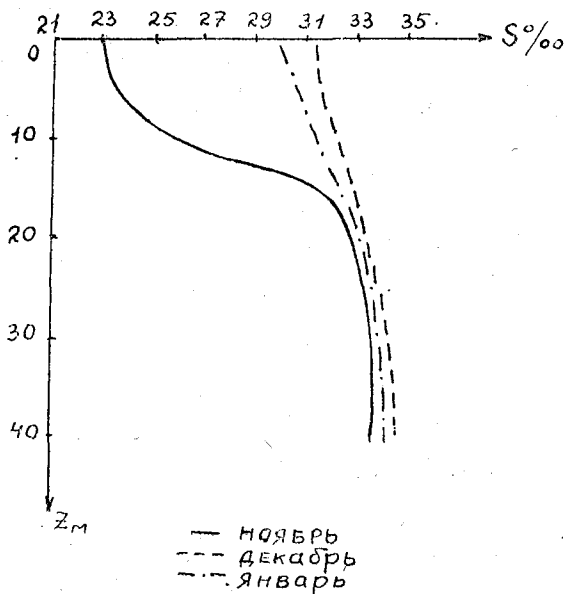


Рис. 19. Эволюция вертикальной халинной структуры в районе Датских приливов, полученная на аналоговой модели

III. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ОКЕАНЕ

При классификации материальных моделей их делят на три основные группы: пространственно подобные модели, физически подобные и математически подобные модели. К первой группе относятся различные макеты, компоновки и т. д. Вторую группу моделей образуют модели, обладающие механическим, динамическим, кинематическим и другими видами физического подобия с исследуемым объектом, при этом, конечно, предполагается, что сохраняется и пространственное подобие. В третью группу материальных моделей входят системы, не обладающие с объектом

одной и той же физической природой, но имеющие с ним либо одинаковую структуру, либо выполняющие с ним одинаковые функции. К третьей группе материальных моделей относятся аналоговые модели (модели физических полей, модели физических систем, структурные модели), цифровые вычислительные машины, функциональные кибернетические устройства. В предыдущем разделе шла речь об условности классификации моделей, так как в ряде случаев модель-аналог может быть физически подобна своему оригиналу. Поэтому, когда речь идет о математическом моделировании океанологических процессов, лучше говорить о **численном** моделировании явлений с использованием цифровых вычислительных машин.

Лабораторная работа 9

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЕТРОВОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ В МОРЕ

Задача работы

Определение интегральной ветровой циркуляции в бассейне под действием ветра.

Теоретическое обоснование

Рассмотрим бароклинное море с реальным рельефом дна и произвольными очертаниями берегов. Учитываем турбулентный обмен количеством движения только в вертикальном направлении. Пренебрегаем нелинейными эффектами, давление считаем равным гидростатическому. Тогда в стационарном случае уравнения движения и неразрывности имеют вид

$$-fv = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_x}{\partial z}, \quad (3.1)$$

$$fu = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \tau_y}{\partial z}, \quad (3.2)$$

$$0 = -g\rho - \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (3.4)$$

где u , v , w — составляющие скоростей течения вдоль прямоугольных осей координат; ρ_0 — стандартная плотность ($\rho_0 = \text{const}$) морской воды; ρ — плотность морской воды; f — параметр Кориолиса; τ_x , τ_y — составляющие тангенциального напряжения трения; P — давление; g — ускорение свободного падения.

Рассматривается бассейн таких размеров, для которого можно не учитывать сферичность Земли. Начало координат расположено на невозмущенной поверхности моря, ось z направлена вертикально вверх, система координат правая.

Интегрируя уравнения движения и неразрывности от $z=\zeta$ до $z=-H$, получаем:

$$-fW_y = -\frac{1}{\rho_0} \int_{-H}^{\zeta} \frac{\partial P}{\partial x} dz + \frac{\tau_{0x}}{\rho_0} - \frac{\tau_{Hx}}{\rho_0}, \quad (3.5)$$

$$fW_x = -\frac{1}{\rho_0} \int_{-H}^{\zeta} \frac{\partial P}{\partial y} dz + \frac{\tau_{0y}}{\rho_0} - \frac{\tau_{Hy}}{\rho_0}, \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} = 0, \quad (3.7)$$

где ζ —денивеляция уровня; H —глубина; $W_x = \int_{-H}^{\zeta} u dz$, $W_y = \int_{-H}^{\zeta} v dz$; τ_{0x} , τ_{0y} —составляющие тангенциального напряжения ветра на поверхности; τ_{Hx} , τ_{Hy} —составляющие тангенциального напряжения трения на дне.

В случае линейной постановки задачи тангенциальное трение на дне можно принять пропорциональным полному потоку, т. е.

$$\tau_{Hx} = rW_x, \quad \tau_{Hy} = rW_y, \quad (3.8)$$

где r —коэффициент донного трения, имеющий размерность c^{-1} .

Тогда уравнения (3.5) и (3.6) переходят в

$$-fW_y = -\frac{1}{\rho_0} \int_{-H}^{\zeta} \frac{\partial P}{\partial x} dz + \frac{\tau_{0x}}{\rho_0} - \frac{r}{\rho_0} W_x, \quad (3.9)$$

$$fW_x = -\frac{1}{\rho_0} \int_{-H}^{\zeta} \frac{\partial P}{\partial y} dz + \frac{\tau_{0y}}{\rho_0} - \frac{r}{\rho_0} W_y, \quad (3.10)$$

Будем представлять плотность как сумму постоянной величины ρ_0 и отклонения от этой постоянной ρ' , т. е. $\rho = \rho_0 + \rho'$. Этим компонентам плотности будут соответствовать две составляющие давления: $P = P_0 + P'$. Тогда из уравнений (3.9)—(3.10) получаем

$$-fW_y = -gH \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{P'_{-H}}{\rho_0} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\tau_{0x}}{\rho_0} - \frac{r}{\rho_0} W_x, \quad (3.11)$$

$$fW_x = -gH \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial q}{\partial y} + \frac{P'_{-H}}{\rho_0} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\tau_{0y}}{\rho_0} - \frac{r}{\rho_0} W_y, \quad (3.12)$$

где P'_{-H} —отклонение давления на глубине H ; $q = \int_{-H}^{\zeta} P' dz$.

Так как дивергенция полного потока равна нулю (3.7), можно ввести интегральную функцию тока ψ :

$$W_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad W_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (3.13)$$

При таком выборе интегральной функции тока значения ψ слева по движению вод оказываются больше, чем справа.

Исключая из (3.11)—(3.12) путем перекрестного дифференцирования денивелиацию уровня ξ и учитывая (3.13), получаем следующее уравнение эллиптического типа для определения функции ψ :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + A(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x} + B(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y} = F(x, y) + Q(x, y), \quad (3.14)$$

где

$$A(x, y) = \frac{H}{r} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{r}{H} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{H} \right) \right];$$

$$B(x, y) = \frac{H}{r} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{r}{H} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{H} \right) \right];$$

$$F(x, y) = \frac{H}{\rho_0 r} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\tau_{0x}}{H} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\tau_{0y}}{H} \right) \right];$$

$$Q(x, y) = \frac{H}{\rho_0 r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{1}{H} \right) \frac{\partial q}{\partial y} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{1}{H} \right) \frac{\partial q}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(\frac{P'_H}{H} \right) \frac{\partial H}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\frac{P'_H}{H} \right) \frac{\partial H}{\partial y} \right] \right\}.$$

Уравнение (3.14) решается при следующих граничных условиях. Если обозначим через S исследуемую область, через Γ — ее границу, а через $P(x, y)$ — любую точку области, в том числе принадлежащую границе, то для каждого случая необходимо знать

$$\psi = \psi(x, y), \quad \text{когда } P(x, y) \in \Gamma S. \quad (3.15)$$

Если бассейн замкнут, то из условия непротекания твердой стенки на береговой черте имеем

$$\psi = \text{const}, \quad \text{когда } P(x, y) \in \Gamma S, \quad (3.16)$$

чаще всего принимают

$$\psi = 0, \quad \text{когда } P(x, y) \in \Gamma S. \quad (3.17)$$

На водной границе необходимо задание функции ψ , что сопряжено с известными трудностями, так как часто мы можем задать расходы жидкости на входе в бассейн весьма и весьма ориентиро-

вочно. Лучше выбрать жидкий контур таким образом, чтобы он располагался нормально к предполагаемому интегральному переносу. Следовательно, водная граница должна быть расположена так, чтобы

$$\frac{\partial \psi}{\partial \nu} = 0, \text{ когда } P(x, y) \in F_w S, \quad (3.18)$$

где F_w — водная граница бассейна; ν — внутренняя нормаль к границе.

Численный алгоритм задачи

Перейдем к дискретному представлению поля масс, тогда конечно-разностный аналог уравнения (3.14) имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_{i,j} = & \frac{1}{4} (\psi_{i+1,j} + \psi_{i-1,j} + \psi_{i,j+1} + \psi_{i,j-1}) + \\ & + \frac{A_{i,j} l}{8} (\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}) + \frac{B_{i,j} l}{8} (\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}) - \\ & - F_{i,j} \frac{l^2}{4} - Q_{i,j} \frac{l^2}{4}. \end{aligned} \quad (3.19)$$

где l — горизонтальный шаг сетки; i, j — номера узловых точек по осям x и y (обобщенные координаты).

$$A_{i,j} = \frac{H_{i,j}}{r_{i,j}} \frac{1}{2l} \left[\left(\frac{r}{H} \right)_{i+1,j} - \left(\frac{r}{H} \right)_{i-1,j} + \left(\frac{f}{H} \right)_{i,j+1} - \left(\frac{f}{H} \right)_{i,j-1} \right];$$

$$B_{i,j} = \frac{H_{i,j}}{r_{i,j}} \frac{1}{2l} \left[\left(\frac{r}{H} \right)_{i,j+1} - \left(\frac{r}{H} \right)_{i,j-1} - \left(\frac{f}{H} \right)_{i+1,j} + \left(\frac{f}{H} \right)_{i-1,j} \right];$$

$$F_{i,j} = \frac{H}{\rho_0 r_{i,j}} \frac{1}{2l} \left[\left(\frac{\tau_{0x}}{H} \right)_{i,j+1} - \left(\frac{\tau_{0x}}{H} \right)_{i,j-1} - \left(\frac{\tau_{0y}}{H} \right)_{i+1,j} + \left(\frac{\tau_{0y}}{H} \right)_{i-1,j} \right];$$

$$\begin{aligned} Q_{i,j} = & \frac{H_{i,j}}{\rho_0 r_{i,j}} \frac{1}{2l} \left\{ \left[\left(\frac{1}{H} \right) \frac{q_{i,j+1} - q_{i,j-1}}{2l} \right]_{i+1,j} - \right. \\ & - \left[\left(\frac{1}{H} \right) \frac{q_{i,j+1} - q_{i,j-1}}{2l} \right]_{i-1,j} - \left[\left(\frac{1}{H} \right) \frac{q_{i+1,j} - q_{i-1,j}}{2l} \right]_{i,j+1} + \\ & + \left[\left(\frac{1}{H} \right) \frac{q_{i+1,j} - q_{i-1,j}}{2l} \right]_{i,j-1} + \left[\left(\frac{P'_H}{H} \right) \frac{H_{i+1,j} - H_{i-1,j}}{2l} \right]_{i,j+1} - \\ & - \left[\left(\frac{P'_H}{H} \right) \frac{H_{i+1,j} - H_{i-1,j}}{2l} \right]_{i,j-1} - \left[\left(\frac{P'_H}{H} \right) \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j-1}}{2l} \right]_{i+1,j} + \\ & \left. + \left[\left(\frac{P'_H}{H} \right) \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j-1}}{2l} \right]_{i-1,j} \right\}. \end{aligned}$$

Расчет ведется методом итераций.

Исходные данные

1. Морфометрия акватории.
2. Распределение коэффициента донного трения.
3. Поле тангенциального напряжения ветра.
4. Поле плотности.
5. Соответствующие граничные условия.

Порядок выполнения работы

1. Подготовка исходных данных.
2. Составление программы для реализации численного алгоритма с заданными граничными условиями на ЭВМ.
3. Отладка программы.
4. Проведение численного эксперимента.
5. Анализ результатов.

Пример моделирования

Приводятся результаты моделирования интегральной ветровой циркуляции в Азовском море при северо-западном ветре; море аппроксимируется прямоугольным бассейном размерами 240 км на 160 км, рельеф дна соответствует реальному распределению глубин. Интегральная функция тока приведена на рис. 3.1.

В качестве примера приводится программа реализации задачи (см. приложение).

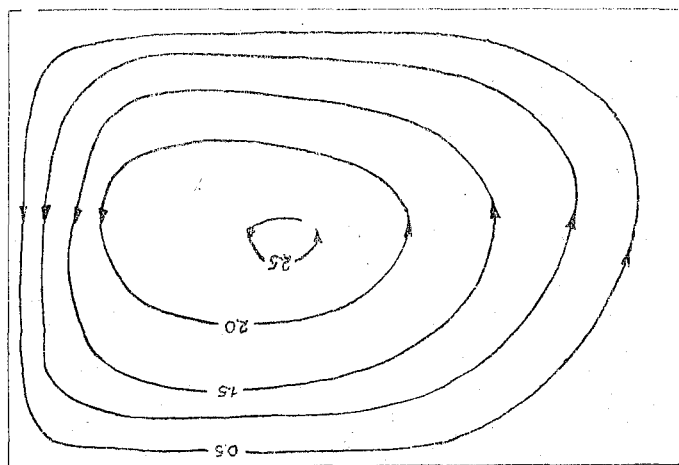


Рис. 20. Интегральная ветровая циркуляция в прямоугольном бассейне переменной глубины при северо-западном ветре ($\psi \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$)

Лабораторная работа 10

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЧИВОСТИ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОДЫ ВЕРХНЕГО СЛОЯ ОКЕАНА В ПЕРИОД ПРОГРЕВА

Задача работы

Определение изменения температуры воды верхнего слоя океана под влиянием атмосферного тепла.

Теоретическое обоснование

Основным фактором, определяющим сезонную и суточную изменчивость температуры воды верхнего слоя океана, является теплообмен через поверхность раздела вода — воздух. Тогда, если другие действующие факторы учесть параметрически, эволюция температуры воды в верхнем слое океана описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} K \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.20)$$

со следующими начальными и граничными условиями:

$$t = 0, \quad T = T(z), \quad (3.21)$$

$$z = 0, \quad -c_p \rho_0 K \frac{\partial T}{\partial z} = q_0, \quad (q_0 > 0), \quad (3.22)$$

$$z = H, \quad T = T_H, \quad (3.23)$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (3.24)$$

где T — температура воды; K — коэффициент турбулентного обмена теплом по вертикали; c_p — удельная теплоемкость морской воды при постоянном давлении; ρ_0 — стандартная плотность морской воды; q_0 — поток тепла через поверхность океана; H — глубина распространения сезонных или суточных колебаний температуры воды (в зависимости от условий задачи); T_H — температура воды на нижнем горизонте, где соответствующие колебания отсутствуют.

С помощью коэффициента вертикального турбулентного обмена довольно удачно удается параметризовать механическое перемешивание, вызванное не только вертикальным градиентом горизонтальной скорости, но и воздействием ветрового волнения.

Численный алгоритм задачи

Уравнение (3.20) можно решать с помощью явных и неявных численных схем.

а) явная схема

Конечно-разностный аналог уравнения (3.20) имеет вид

$$\frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = K_j \frac{T_{j+1}^n + T_{j-1}^n - 2T_j^n}{(\Delta z)^2} + \frac{K_{j+1} - K_{j-1}}{2\Delta z} \frac{T_{j+1}^n - T_{j-1}^n}{2\Delta z}, \quad (3.25)$$

где индекс j обозначает номер слоя по координате z ; индекс n соответствует значению температуры воды в момент времени n , а $n+1$ — в последующий. Решая уравнение (3.25) относительно T_j^{n+1} , получаем

$$T_j^{n+1} = T_j^n + \frac{K_j \Delta t}{(\Delta z)^2} (T_{j+1}^n + T_{j-1}^n - 2T_j^n) + \frac{(K_{j+1} - K_{j-1}) \Delta t}{4(\Delta z)^2} (T_{j+1}^n - T_{j-1}^n). \quad (3.26)$$

Уравнение (3.26) решается при $j=2, \dots, N-1$, если $j=1$ или $j=N$, значения T_j определяются из граничных условий при $z=0$ или $z=H$ (3.22—3.24).

При $z=0$

$$T_j^{n+1} = T_{j+1}^n + q_0^{n+1} \frac{\Delta z}{c_P \rho_0 K_{j+1/2}}. \quad (3.27)$$

При $\partial T/\partial z=0$ температура на предпоследнем горизонте равна температуре на последнем горизонте, т. е. $T_N = T_{N-1}$.

Уравнение (3.26) позволяет рассчитывать эволюцию температуры воды в верхнем слое океана при задании начального распределения температуры воды, потока тепла через поверхность, граничного условия на нижнем расчетном горизонте и вида функции K в зависимости от вертикальной координаты. При использовании явной схемы необходимо иметь в виду, что соотношение шагов по времени и по оси z должно подчиняться условию устойчивости разностной схемы:

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{(\Delta z)^2}{K}. \quad (3.28)$$

Отметим, что ограничение, накладываемое условием (3.28), является тяжелым в смысле затраты времени для численного решения уравнения теплопроводности. Например, для одномерного случая уменьшение вдвое шага пространственной сетки увеличивает затраты машинного времени в восемь раз. В общем случае уменьшение размера шага с Δz_1 до Δz_2 при решении одномерной задачи теплопроводности с разностями вперед по времени и центральными разностями по пространственной переменной увеличи-

ваёт машинное время в $(\Delta z_1/\Delta z_2)^3$ раз. Ясно, что метод, в котором удается избежать условия устойчивости (3.28), весьма желателен.

б) неявная схема

Конечно-разностный аналог уравнения (3.20) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{T_j^{n+1} - T_j^n}{\Delta t} = K_j \frac{T_{j+1}^{n+1} + T_{j-1}^{n+1} - 2T_j^{n+1}}{(\Delta z)^2} + \\ + \frac{K_{j+1} - K_{j-1}}{2\Delta z} \frac{T_{j+1}^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}}{2\Delta z}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Уравнение (3.29) преобразуется к виду

$$A_j T_{j-1}^{n+1} - C_j T_j^{n+1} + B_j T_{j+1}^{n+1} = -F_j, \quad (3.30)$$

где

$$\begin{aligned} A_j &= \frac{K_j}{(\Delta z)^2} - \frac{K_{j+1} - K_{j-1}}{4(\Delta z)^2}, \\ C_j &= \frac{1}{\Delta t} + \frac{2K_j}{(\Delta z)^2}, \\ B_j &= \frac{K_j}{(\Delta z)^2} + \frac{K_{j+1} - K_{j-1}}{4(\Delta z)^2}, \\ F_j &= \frac{1}{\Delta t} T_j^n. \end{aligned}$$

Уравнение вида (3.30) представляет собой систему линейных алгебраических уравнений специального типа, для решения которых используется метод прогонки, в котором имеет место рекуррентное соотношение

$$T_j^{n+1} = \alpha_{j+1} T_{j+1}^{n+1} + \beta_{j+1}. \quad (3.31)$$

Коэффициенты прогонки α_{j+1} и β_{j+1} находятся по формулам

$$\alpha_{j+1} = \frac{B_j}{-\alpha_j A_j + C_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, N), \quad (3.32)$$

$$\beta_{j+1} = \frac{\beta_j A_j + F_j}{-\alpha_j A_j + C_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, N). \quad (3.33)$$

Коэффициенты α_1 и β_1 определяются из граничного условия на поверхности из выражения (3.27)

$$\alpha_1 = 1, \quad \beta_1 = q_0^{n+1} \frac{\Delta z}{c_{pp_0} K_{1/2}}.$$

Последовательность реализации метода следующая.

Рассчитываются коэффициенты α_{j+1} и β_{j+1} по соотношениям (3.32) и (3.33) сверху вниз от $j=2$ до $j=N$. Затем, используя граничные условия при $z=N$ (3.23) либо (3.24), по формуле (3.31) определяем температуру воды на следующий временной шаг и т. д.

Если на нижней границе используется условие $\partial T/\partial z=0$, то принимаем $T_N=T_{N-1}$, откуда, используя рекуррентное соотношение (3.31), имеем $T_N=\beta_N/1-\alpha_N$.

Исходные данные

1. Начальное распределение температуры.
2. Потоки тепла на поверхности океана.
3. Изменение коэффициента турбулентного обмена теплом по вертикали.

Порядок выполнения работы

1. Составление программы для реализации алгоритма на ЭВМ.
2. Отладка программы.
3. Численный эксперимент.
4. Анализ проведенного численного эксперимента.

Пример расчета

Приводятся результаты численного моделирования изменения температуры воды верхнего слоя океана. Поток тепла на поверхности равен $3,3 \cdot 10^{-3}$ кал·см⁻²·с⁻¹, изменение коэффициента турбулентного обмена теплом по вертикали линейное, на поверхности $K=35$ см²/с, на горизонте 195 м $K=3$ см²/с. Расчет проводился по неявной схеме. Шаг по вертикали равен 5 м, на нижнем горизонте $T_H=12,92$ °С.

Горизонт, м	Начальное распределение температуры, °С	Значения температуры через 24 ч, °С
0	16,35	17,04
10	15,64	15,91
20	15,27	15,51
30	15,11	15,26
40	14,88	15,02
50	14,60	14,72
60	14,37	14,47
70	14,22	14,31
80	14,19	14,26
90	14,06	14,10
100	13,97	14,01
110	13,82	13,6
120	13,75	13,78
130	13,67	13,70
140	13,50	13,53
150	13,46	13,48
160	13,28	13,30
170	13,15	13,16
180	13,15	13,16
190	13,08	13,08
195	12,92	12,92

Лабораторная работа 11

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕНЧИВОСТИ ТОЛЩИНЫ ВЕРХНЕГО КВАЗИОДНОРОДНОГО СЛОЯ ОКЕАНА И ЕГО ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЕРИОД ОХЛАЖДЕНИЯ

Задача работы

Определение толщины верхнего квазиоднородного слоя океана и его температуры в случае отрицательных потоков тепла на поверхности ($q_0 < 0$).

Теоретическое обоснование

Охлаждение поверхности моря приводит к развитию конвективного перемешивания, которое с помощью коэффициента турбулентного обмена теплом параметризовать нельзя. Режим свободной конвекции сопровождается формированием верхнего квазиоднородного слоя (ВКС), толщина которого находится из соотношения плотностей в пределах ВКС и нижележащих слоев (в нашем случае изменение плотности морской воды определяется только изменением температуры).

Тогда толщина ВКС определяется уравнением

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial T_0}{\Gamma_T}, \quad (3.34)$$

где h — толщина ВКС; T_0 — температура воды в ВКС; $\Gamma_T = \frac{\partial T}{\partial z}$ при $z=h$.

Температура воды верхнего квазиоднородного слоя определяется из уравнения теплопроводности (3.20), проинтегрированного в пределах этого слоя при предположении, что потоки тепла на нижней границе ВКС отсутствуют. Тогда имеем

$$h \frac{\partial T_0}{\partial t} = \frac{q_0}{c_p \rho_0}, \quad (3.35)$$

где ρ_0 — плотность морской воды в ВКС.

Из уравнений (3.34) и (3.35) получаем соотношения для вычисления толщины ВКС и температуры воды в ВКС.

Толщина верхнего квазиоднородного слоя определяется по формуле

$$h^{n+1} = \sqrt{(h^n)^2 + \frac{2q_0^{n+1} \Delta t}{c_p \rho_0 \Gamma_T^n}}, \quad (3.36)$$

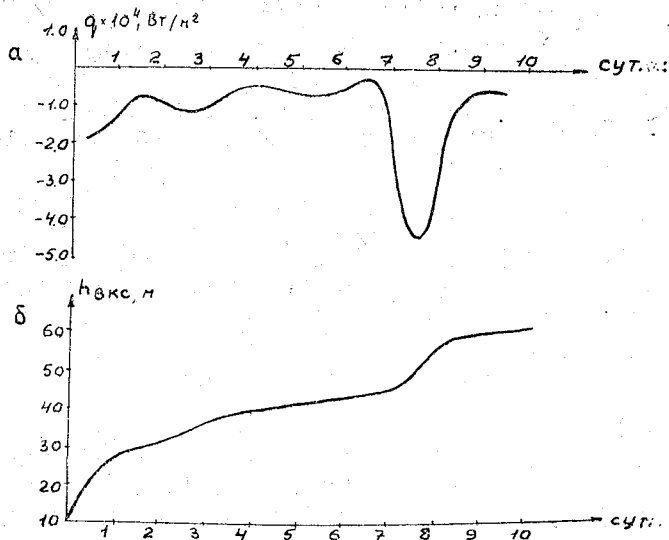


Рис. 21. Изменение отрицательных потоков тепла на поверхности океана (а) и эволюция толщины верхнего квазиоднородного слоя (б)

а температура воды в ВКС — по выражению

$$T_0^{n+1} = T_0^n + \frac{\Gamma_T^n}{2} \left[h^{n+1} - 2h^n + \frac{(h^n)^2}{h^{n+1}} \right] + \frac{q_0^{n+1} \Delta t}{c_p \rho_0 h^{n+1}}, \quad (3.37)$$

где индекс n соответствует значениям величин в момент времени n , а $n+1$ — в последующий.

Если все характеристики на момент времени n рассчитывались по алгоритму для $q_0 > 0$, когда h^n и T_0^n не определяются, они задаются: $h^n = 5$ м, а T_0^n принимается равным значению температуры поверхности океана, Γ_T^n определяется по профилю температуры воды в момент времени n .

Исходные данные

- 1) начальное распределение температуры.
- 2) потоки тепла на поверхности океана.

Порядок выполнения работы

- 1) составление программы для реализации численного алгоритма на ЭВМ.
- 2) отладка программы.
- 3) численный эксперимент.
- 4) анализ проведенного численного эксперимента.

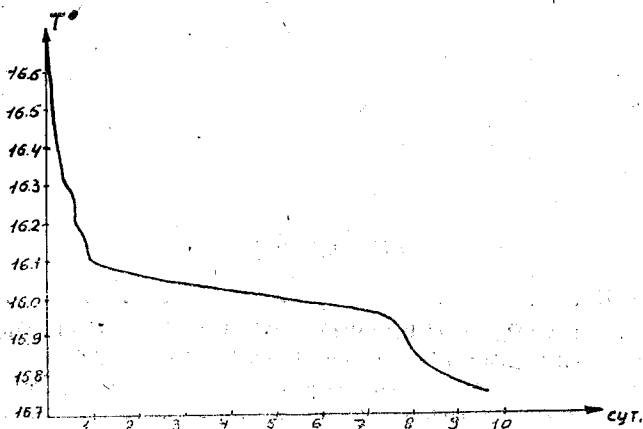


Рис. 21. Изменчивость температуры воды в ВКС в период охлаждения

Пример расчета

На рис. 21 показано изменение отрицательных потоков тепла на поверхности океана (*a*) и эволюция толщины верхнего квазиоднородного слоя (*b*). На рис. 22 показана изменчивость температуры воды в ВКС в период охлаждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гутенмахер Л. И. Электрические модели. — Киев: Техника, 1975. — 176 с.
2. Гухман А. А. Введение в теорию подобия. — 2-е изд., доп. и перераб. — М.: Высшая школа, 1973. — 295 с.
3. Дорониц Ю. П., Макаров В. А., Мензин А. Б. Математическое моделирование океанологических процессов: Учебное пособие. — Л.: изд-во ЛПИ, 1987. — 77 с.
4. Макаров В. А., Мензин А. Б. Моделирование океанологических процессов (гидравлические и аналоговые): Учебное пособие. — Л.: изд-во ЛПИ, 1979. — 115 с.
5. Самарский А. А. Теория разностных схем. — 2-е изд., исправлен. — М.: Наука, 1983. — 616 с.
6. Гидродинамика береговой зоны и эстуариев. Перев. с англ. — Л.: Гидрометеонадат, 1970. — 396 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ПРЕДИСЛОВИЕ	3
I. ГИДРАВЛИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ОКЕАНЕ HYDRAULIC MODELLING OF PROCESSES IN OCEAN	
<i>Лабораторная работа 1.</i> Гидравлическое моделирование элементов двухмерной гравитационной волны	4
<i>Лабораторная работа 2.</i> Гидравлическое моделирование трансформа- ции волны цунами при подходе к берегу	9
<i>Лабораторная работа 3.</i> Гидравлическое моделирование плотностной циркуляции в море	16
II. АНАЛОГОВОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ОКЕАНЕ ANALOGVE MODELLING OF PROCESSES IN OCEAN	
<i>Лабораторная работа 4.</i> Определение периодов свободных колебаний жидкости в бассейнах на аналоговой модели	28
<i>Лабораторная работа 5.</i> Определение характеристик установившихся длинноволновых движений в море на электрической аналоговой модели	35
<i>Лабораторная работа 6.</i> Аналоговое моделирование неустановившихся длинноволновых колебаний уровня моря	39
<i>Лабораторная работа 7.</i> Аналоговое моделирование интегральной вет- ровой циркуляции в море	47
<i>Лабораторная работа 8.</i> Моделирование термической и халинной структуры бассейна с помощью аналоговой модели	57
III. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ В ОКЕАНЕ MATHEMATICAL MODELLING OF PROCESSES IN OCEAN	
<i>Лабораторная работа 9.</i> Математическое моделирование ветровой циркуляции в море	62
<i>Лабораторная работа 10.</i> Математическое моделирование изменчиво- сти температуры воды верхнего слоя океана в период прогрева	67
<i>Лабораторная работа 11.</i> Математическое моделирование изменчиво- сти толщины верхнего квазигомогенного слоя океана и его температуры в период охлаждения	71
ЛИТЕРАТУРА	73
ПРИЛОЖЕНИЕ	76

Валерий Александрович Макаров
Александр Борисович Мензин

Моделирование океанологических процессов

Лабораторный практикум

Редактор *О. С. Крайнова*

Сдано в набор 27.02.92 Подписано в печать 27.10.92.
Формат набора 60×90¹/₁₆. Бум. тип. № 2. Лит. гарн. Печать высокая.
Печ. л. 4,75 Уч.-изд. л. 5,0+4 вклейки (0,25) Тираж 400.
Темплан 1992 г., поз. 180. Зак. 341 „С“ № 2

РГГМИ. 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98,
Типография ВАС

THE UNIVERSITY OF CHICAGO

PHYSICS DEPARTMENT

7

PHYSICS 311
LECTURE 10
MAY 10, 2011