

Ю. П. ДОРОНИН, В. А. МАКАРОВ, А. Б. МЕНЗИН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОКЕАНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Утверждено ученым советом института
в качестве учебного пособия*

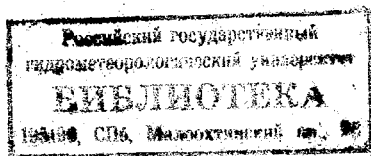
Дорюгин Ю. П., Макаров В. А., Мензин А. Б. Математическое моделирование океанологических процессов. Учебное пособие. — Л., изд. ЛПИ, 1987, 77 с. (ЛГМИ).

Дано определение математической модели и охарактеризованы их основные типы. Изложен принцип имитационного моделирования океанологических процессов и рассмотрены методы реализации математических моделей: аналитические точные и приближенные, конечно-разностные численные, статистические. Освещены принципиальные стороны моделирования ветрового волнения, длиннопериодных колебаний уровня, циркуляции вод моря, полей температуры и солености. Дано представление о морской системе и принципах моделирования ее состояния.

Пособие предназначено для студентов старших курсов океанологической специальности.

Ил. 11. Библ. 17.

Рецензенты: кафедра океанологии Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова; Л. А. Тимохов, докт. физ.-мат. наук (Арктический и Антарктический институт).



ПРЕДИСЛОВИЕ

Широкое развитие вычислительной техники привело к возникновению такого научного направления в океанологии, как математическое моделирование. Оно охватило в большей или меньшей степени все разделы этой науки. Особенно этот метод исследования применяется в физической океанологии. С его помощью удается оценить интенсивность турбулентного перемешивания, выявить закономерности, приводящие к формированию структуры океана, воспроизвести вихревую картину циркуляции вод и т. д.

Интенсивно внедряются методы моделирования в биологию океана. Они позволяют выяснить массу биологических организмов на различных трофических уровнях с учетом их взаимодействия. Составляются модели продуктивности моря и отдельных районов открытого океана, в которых учитываются физические, биологические и химические процессы, представленные в виде системы уравнений.

Начинают использоваться методы моделирования в химии и геологии океана, особенно при изучении шельфов и эстуариев. Получают распространение принципы моделирования при изучении таких сложных объектов, как экосистемы. Особую важность математическое моделирование приобретает при оценке возможных последствий антропогенных воздействий на бассейн, что позволяет разработать стратегию управления его состоянием.

Математическое моделирование — наименее трудоемкий и наиболее дешевый способ исследования по сравнению с другими видами моделирования. Он не лимитируется критериями подобия и не требует громоздкого лабораторного оборудования, кроме ЭВМ. Поэтому математическое моделирование применяется во многих научных и производственных организациях, в которых работают выпускники-океанологи. Это обуславливает необходимость знания ими принципов составления математических моделей и способов их реализации.

Поскольку математическая модель океанического процесса, или совокупности процессов состоит из отображающих их уравнений, то изучение данной дисциплины проводится после того, как студенты овладеют знаниями по специальным дисциплинам и научатся выражать естественные процессы в математической форме. Необходимы также знания в области вычислительной математики и программирования. Поэтому изучение данной дисциплины целесообразно проводить на старших курсах.

В соответствии с учебной программой и временем, выделяемым учебным планом на изучение «Моделирования океанологических процессов», в пособии представлено только то его направление, которое наиболее широко используется в океанологических исследованиях. В настоящее время имеется обобщающая монографическая литература, по которой можно познакомиться с более широким кругом типов моделей [например, 4, 13, 14].

Настоящее учебное пособие следует рассматривать как продолжение пособия [9], в котором изложены принципы лабораторного гидравлического и электроаналогового моделирования.

Глава 1, разделы 2.3, 3.3, 3.4 и заключение написаны Ю. П. Дорониным, разделы 2.1 и 2.2 — Ю. П. Дорониным и А. Б. Мензиным, разделы 2.4, 3.1, 3.2 и глава 4 — В. А. Макаровым.

Глава 1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОКЕАНИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

1.1. Определение математической модели

Под математической моделью океанологического процесса или совокупности процессов понимается математическое уравнение (или система уравнений) с соответствующими краевыми условиями, отображающее природный процесс или их совокупность. В связи со сложностью океанологических процессов, их взаимосвязью и зависимостью от многих факторов практически никогда не удается точно выразить их уравнениями. Поэтому модель должна учесть наиболее важные стороны процессов и наиболее существенные факторы, влияющие на процессы. Она не может воспроизвести природный процесс во всей его полноте, но в зависимости от степени абстракции или схематизации воспроизводит те или иные его стороны и формируемое явление с большей или меньшей полнотой и точностью, то есть **математическая модель не может копировать оригинал, а может только отображать его с большей или меньшей точностью.**

Математическое моделирование является вершиной всякого моделирования, поскольку представление океанологического процесса в математической форме означает познание его природы и установление причинно-следственных связей в детерминированной или статистической форме как внутри него, так и с обуславливающими факторами. Посредством такого моделирования удается изучать многие явления, которые невозможно заранее предсказать и воспроизвести в лабораторных условиях. Примером тому может служить изменение режима моря при антропогенном воздействии на речной сток, на водообмен через проливы или на другие факторы.

Обычно модель направлена на воспроизведение не абстрактного, а конкретного океанологического явления, по крайней мере в географическом плане. Поэтому должен быть определен **объект моделирования**, например, эстуарий, море, океан. Причем из-за влияния граничных условий на результат моделирования это не абстрактные понятия, а конкретные объекты. Например, модель моря составляется конкретно: для Белого, Балтийского, Черного или какого-либо другого.

Воспроизводимое моделью явление ограничивается либо временем его существования, либо интересующим исследователя интервалом времени. Это значит, что объект моделирования должен

быть определен в пространстве и во времени. Иначе говоря, должна быть определена область существования объекта.

Любой океанологический объект характеризуется большим набором параметров: динамических, термодинамических, химических, биологических и т. д. Это множество элементов, в той или иной мере связанных друг с другом и образующих определенное единство, принято называть **морской системой**. Все элементы системы сразу воспроизвести очень трудно. При ее моделировании нужно сначала определить стороны явления, которые интересуют исследователя, и установить переменные, характеризующие изучаемое явление. Чем оно сложнее, тем больше переменных необходимо для его описания.

Общее число переменных называется **размерностью** системы. Например, если определяется изменение во времени энтальпии всего моря, то размерность равна одному измерению во времени. Если же интерес представляет пространственно-временное изменение температуры воды в море, то размерность повышается до 4: три по пространству и одного по времени. При включении в модель солености и трех составляющих скорости течения ее размерность повышается еще на 16. Введение каждого нового элемента, меняющегося во времени и в пространстве, увеличивает соответствующим образом размерность модели. Естественно, что при этом увеличиваются трудности ее решения, особенно в том случае, когда все элементы системы взаимосвязаны. Поэтому одним из этапов составления математической модели является сокращение ее размерности.

Сокращение размерности модели производится выявлением и отсеиванием малосущественных переменных. Например, если достаточно знать среднюю за какой-либо интервал времени циркуляцию вод, то осреднение уравнений движения позволяет при моделировании не учитывать параметр времени, сокращая тем самым размерность. Иногда целесообразно проводить осреднение по пространству, что также сокращает размерность.

Следующим этапом формулировки модели является определение ее взаимосвязи с окружающей средой, которая выражается через граничные условия. Окружающая среда может влиять на систему также внутримассово. Например, так действуют приливные силы.

Все связи морской системы с окружающей средой принято называть **входами** и **выходами**. Их количество должно определять влияние среды на все переменные системы при уже ее суженной размерности. Например, при моделировании температуры моря в качестве граничного условия на его поверхности обычно используется уравнение теплового баланса

$$Q + F_s + \lambda_a \frac{\partial \theta}{\partial \zeta} + L_w \frac{\lambda_a}{c_p} \frac{\partial q}{\partial \zeta} = \lambda \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (1.1)$$

где T и ϕ — температура воды и воздуха; λ и λ_a — теплопроводность воды и воздуха, L_v и c_p — удельные теплота испарения и теплоемкость воздуха; z и ζ — вертикальные координаты в море и в атмосфере; Q и F_e — суммарная радиация и эффективное излучение. В этом уравнении вход — выход тепла в систему (море), выраженный правой частью уравнения, зависит от совокупного действия потоков тепла со стороны атмосферы. Иногда их называют **управляющими параметрами**, так как они влияют на состояние моделируемой системы. Эти параметры обычно выражают имеющиеся в природе связи, но иногда они могут создаваться в результате антропогенных мероприятий. Тогда их называют **параметрами активного воздействия**.

Управляющие параметры могут сами зависеть от состояния системы. В приведенном примере эффективное излучение, турбулентные потоки тепла и влаги в атмосфере зависят не только от состояния атмосферы, но и от температуры поверхности моря.

1.2. Типы математических моделей

Все математические модели по характеру входящих в них уравнений можно разделить на три типа: **детерминированные**, **статистические** и **смешанные**. В детерминированных моделях моделируемый процесс описывается уравнениями математической физики, полученными из общих физических соображений. Характерными примерами могут служить различные модели распространения тепла и соли, описываемые уравнениями диффузии, модели циркуляции вод, состоящие из уравнений Рейнольдса и неразрывности, которые обычно в большей или меньшей степени упрощаются, и т. д. Эти уравнения имеют абстрактный характер и в принципе применимы для любого океанического региона. Конкретизация детерминированной модели для конкретного региона происходит посредством выделения в уравнениях основных слагаемых и пренебрежением малозначимыми второстепенными членами, а также заданием специфических граничных условий. Например, уравнение диффузии тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla T = \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \nabla (K \nabla T) \quad (1.2)$$

является составной частью математической модели формирования поля температуры воды. Оно описывает основной характер изменения температуры за счет адвекции и турбулентного распространения тепла в любой части океана. Региональность модели, в первую очередь, учитывается граничными условиями. Если воспроизводится температура изолированного моря, то обычно принимается отсутствие теплообмена с сушей, т. е. $K \nabla T|_r = 0$. При наличии пролива, через который осуществляется перенос тепла, учитывается условие

$$\Phi_n = c_p (VT + K \nabla T)_n. \quad (1.3)$$

Региональные особенности могут учитываться и абсолютными значениями параметров при одной и той же форме записи. Так, в уравнении (1.2) от региональных особенностей зависит скорость V и интенсивность вертикальной k и горизонтальной K турбулентной теплопроводности.

Примером статистической модели могут служить любые регрессионные уравнения. В простейшем случае они представляются в виде

$$T_t = \sum_{\tau=1}^n k_{\tau} P_{t-\tau}. \quad (1.4)$$

Здесь P — аргумент, k — определенные статистически весовые коэффициенты. Поскольку статистические параметры вычисляются по данным наблюдений в конкретном регионе, то и регрессионные уравнения применимы, строго говоря, в этом же регионе. В принципе не обязателен сдвиг по времени или пространству между аргументом и функцией. Связи могут быть синхронными. Как правило, в статистических уравнениях учитывается небольшое число основных влияющих факторов, а влияние остальных оценивается через эмпирически полученные коэффициенты. Поэтому, если в моделируемом объекте происходит перераспределение роли действующих факторов, то статистически установленная их связь с аргументом нарушается. Это определяет границы применимости статистических моделей. Они могут использоваться для воспроизведения процессов и полей характеристик объекта, если его структура меняется в пределах не более тех, при которых составлялись эмпирические уравнения.

Смешанные модели включают в себя как детерминированные, так и статистические уравнения. Они наиболее распространены при воспроизведении совместных океанографических и химико-биологических процессов в регионе. Например, изменение биомассы фитопланктона B_1 зависит от поступления биогенных элементов, выедания зоопланктоном, естественной смертности, освещенности, температуры воды и т. д. В общем эта связь в простейшем случае представляется эмпирическим уравнением типа (1.4). Но освещенность и температура воды воспроизводятся детерминированными уравнениями. В частности, температура — уравнением (1.2). Хотя в нем также присутствуют эмпирические параметры — коэффициенты турбулентности, но в целом оно остается детерминированным.

По характеру воспроизведения процессов математическое моделирование разделяется на **имитационное**, **оптимизационное** и **самоорганизующееся**. В гидрометеорологии в настоящее время наиболее широко используется имитационное моделирование. Под ним понимается имитация, т. е. подделка, замена природного процесса или явления его более или менее точным изображением на имитаторе, которым может быть ЭВМ. Характер про-

пространственно-временного изменения процесса описывается математической моделью. Как правило, имитируемый процесс отличается от природного масштабом по времени и по пространству. Например, воспроизведение пространственно-временного распределения температуры воды с помощью уравнения (1.2), с соответствующими краевыми условиями, или посредством уравнения (1.4), является имитационным моделированием. Эти модели в общем приближенно воспроизводят природный процесс, масштаб модели по времени существенно меньше природного и практически равен времени машинного счета, а по пространству равен размерам карты или графика, на которых нанесены результаты моделирования.

Масштаб модели может быть равным или больше, чем масштаб воспроизводимого явления. Это встречается при моделировании мелко- или микромасштабных процессов.

Оптимизационное моделирование пока еще не получило распространения при воспроизведении критических океанологических ситуаций. Задача данного типа моделирования заключается в том, чтобы найти решение, при котором функция достигает экстремума. Такой подход, в частности, используется при выделении водных масс. В этом случае по ряду гидрологических характеристик нужно выявить экстремумы их совокупностей.

Выбор наиболее информативных аргументов в статистических моделях также удобно производить с помощью оптимизационного моделирования. При этом коэффициенты k_i в формулах типа (1.4) определяются из условия минимума дисперсии ошибки расчета.

Из прикладных задач океанологии этот тип моделирования наиболее перспективен при выборе оптимальных маршрутов судна, особенно во льдах.

При моделировании сложных систем, в которых имеется большое количество переменных, меняющихся в пространстве и во времени сложным образом, а разнообразные процессы описываются большим числом уравнений, на практике часто возникают затруднения в их реализации, даже с помощью мощных ЭВМ. Бывает даже трудно проследить последствия естественных ошибок в исходной информации. Эти трудности преодолеваются в самоорганизующихся моделях. При их составлении выделяются частные блоки, воспроизводящие поведение элемента или совокупности элементов посредством сравнительно простых детерминированных или статистических уравнений. В общем виде эти блоки можно представить описанием

$$y_i = f(x_j, x_k, x_l, \dots). \quad (1.5)$$

Функции y_i становятся аргументами полной модели, состоящей из блоков. При этом количество y_i таково, что удастся составить функциональную связь искомых характеристик модели z_m от совокупности y_i .

Данные наблюдений z_m разделяются на две группы: одна используется для обучения, а вторая — для проверки. Информация из первой группы используется для «организации» функциональных связей y_i , т. е. подбора коэффициентов функций y_i , исходя из условия близости к z_m .

Проверочная совокупность данных используется для испытания на ней возможности распространения функциональных связей модели за пределы первого множества данных, а также для оценки вклада переменных y_i в вычисляемые z_m и определения целесообразности участия тех или иных y_i в составлении модели. Это определяется по критерию регулярности, за который принимается средняя квадратичная ошибка, вычисленная по сопоставлению результатов моделирования и проверочной информации. Отбор наиболее значимых y_i осуществляется до достижения минимума ошибки.

В качестве критерия регулярности используются и другие характеристики, например, максимум коэффициента корреляции.

Такого типа модели начинают применяться для описания сложных экологических систем. При этом выделяются как минимум 3—4 частных блока, описывающих гидрологические и гидрохимические процессы, первичную продукцию, биомассу зоопланктона. Каждый из них зависит от ряда аргументов, всю совокупность которых непосредственно связать с биомассой зоопланктона или рыбы не удается.

1.3. Полнота модели

Гидрологические процессы обычно многомасштабны, хотя бы из-за непрерывности масштаба турбулентного перемешивания. Поэтому практически невозможно воспроизвести в модели все многообразие природного процесса, модель не может копировать оригинал. В связи с этим вводится понятие **физической полноты** модели, т. е. характеризуется степенью детального учета в ней факторов, влияющих на воспроизводимый процесс или явление. Например, в уравнении диффузии тепла (1.2) не учитывается проникновение лучистого потока тепла в толщину воды. Его влияние на температуру воды описано уравнением теплового баланса (1.1), из которого следует, что лучистые потоки тепла имеют место только на поверхности океана. Поэтому математическая модель, в которую входят уравнения (1.1) и (1.2) не полностью описывает физический процесс распространения тепла в океане. В ней также не учитывается адиабатическое изменение температуры при вертикальных перемещениях воды. Однако перечисленные процессы во многих случаях не оказывают существенного влияния на изменение температуры, поэтому часто модель используется в изложенной записи, несмотря на ее физическую неполноту.

Чтобы не перегружать модель любого типа второстепенными факторами, усложняющими ее и затрудняющими воспроизведение естественного процесса, всегда производится упрощение модели. Это приводит к тому, что обычно модель не бывает физически полной. Задача использования такой модели заключается в том, чтобы определить область ее применения, в которой неучтенные факторы не играют существенной роли.

С математической точки зрения любая модель должна быть математически полной. Входящие в нее уравнения должны сопровождаться соответствующими краевыми условиями. Например, модель распространения тепла (1.1) — (1.3) должна дополняться начальным условием, характеризующим распределение температуры в момент $t=0$, вторым граничным условием по вертикальной координате, граничными условиями по горизонтальным координатам, так как формула (1.3) справедлива только для части границы.

Если модель не состоит из дифференциальных уравнений, то она не требует краевых условий, но должна быть полностью определенной, т. е. количество уравнений в ней не должно быть меньше, чем число неизвестных.

Математическая полнота модели в общем не связана с физической и характеризует лишь возможность решения содержащихся в модели уравнений с получением конкретного результата.

1.4. Оценка правдоподобия моделирования

Единственным критерием, оценивающим правоту всякой теории, в том числе и заложенной в модели, является согласованность результатов моделирования с представлениями, полученными из практики, т. е. из наблюдений. Естественно, имеется в виду, что в результатах расчетов нет ошибок. Однако часто, особенно в моделях прогностического характера, не удается провести такое сопоставление. Оно может быть осуществлено только в том случае, если воспроизводимый процесс происходит в природных условиях и наблюдаем. Но при моделировании процессов с возможными антропогенными воздействиями, роль которых нужно оценить, наблюдений может не быть. Например, требуется оценить возможное изменение режима какой-то акватории при воздействии какого-то гидротехнического сооружения: дамбы, мола, приливной или тепловой электростанции и т. д. Естественно, правдоподобность моделирования нужно знать до осуществления технического проекта. В этом случае эту оценку делают на основе выполнения балансовых соотношений, закладываемых в математическую модель, совместно с воспроизведением более или менее близких ситуаций, если таковые имеются.

Глава 2. МЕТОДЫ РЕАЛИЗАЦИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

2.1. Аналитические методы

Процессы, протекающие в океанах и морях, исключительно сложны. Отсюда и сложность уравнений, описывающих эти процессы. Поэтому аналитические решения применимы лишь к ограниченному классу достаточно упрощенных уравнений.

К этой же категории методов следует отнести такой фундаментальный аппарат, как анализ размерностей, позволяющий составить аналитическую связь между воспроизводимой функцией и аргументами даже в том случае, когда уравнения связи неизвестны.

При моделировании широко применяется теория подобия, в большинстве случаев приводящая к аналитическому решению. То есть к аналитическим способам реализации моделей океанических процессов можно отнести, во-первых, аналитические решения уравнений, описывающих процесс, во-вторых, методы анализа размерностей и теории подобия.

Основным достоинством данного способа воспроизведения зависимости искомой характеристики модели от влияющих на нее факторов является получение математического выражения, в котором имеют место все заложенные в модель параметры и величины. По этому выражению легко проследить относительный вклад всех аргументов, их влияние на искомую характеристику в зависимости от положения в пространстве или сдвига во времени, легко увидеть влияние начальных и граничных условий.

К сожалению, аналитическому решению доступны лишь достаточно простые модели, которые не отображают реальный процесс во всей полноте, а только учитывают его некоторые основные стороны. Аналитические решения позволяют довольно детально проанализировать изучаемый процесс, как говорится, «в чистом виде». Хотя область применения аналитических решений ограничена по существу некоторыми весьма простыми модельными задачами, их роль по-прежнему велика при исследовании процессов в океанах и морях, так как только аналитическое выражение позволяет довольно детально проанализировать изучаемый процесс. Достоинством является также то, что решение уравнений модели получается точное, а не приближенное, как при численном решении.

В дисциплинах «Физика океана» и «Динамика океана» большинство аналитических зависимостей функции от аргументов представляют собой решения уравнений упрощенных математических моделей реальных океанических процессов. К ним относятся модели, отображающие изменения температуры воды в результате теплообмена с атмосферой, температуры и солености воды в течениях, температуры и толщины льда, дрейфовых течений под воздействием ветра и т. д. Все они учитывают только ограниченное количество аргументов, действующих на воспроизводимую функ-

цию и, поэтому последняя не может быть отображением реального процесса. Например, при воспроизведении установившихся дрейфовых течений в океане полагается, что они описываются следующими уравнениями с краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} -fv &= k \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \\ +fu &= k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

$$\left. \begin{aligned} k \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} &= -\frac{\tau_x}{\rho}; \quad k \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{z=0} = -\frac{\tau_y}{\rho} \\ u|_{z \rightarrow \infty} &\neq \infty, \quad v|_{z \rightarrow \infty} \neq \infty \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

где u и v — проекции дрейфовой составляющей течения на оси координат; f — параметр Кориолиса; k — коэффициент вертикальной турбулентной вязкости; τ_x и τ_y — проекции напряжения трения ветра на оси координат.

Из уравнений видно, что в модели не учитывается влияние на течения горизонтального турбулентного перемешивания, не приняты во внимание изменения k по глубине, изменения уровня океана, нелинейные слагаемые и т. д. Но в центральных районах океана, где роль перечисленных факторов не столь существенна по сравнению с турбулентным трением по вертикали и ускорением Кориолиса, модель имитирует основные черты установившейся дрейфовой циркуляции.

Решение уравнений (2.1) с краевыми условиями (2.2) получается легко, если сначала перейти к комплексной скорости, а потом разделить действительную и мнимую части:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{e^{-az}}{2k\rho a} [(\tau_x + \tau_y) \cos az + (\tau_y - \tau_x) \sin az], \\ v(z) &= \frac{e^{-az}}{2k\rho a} [(\tau_y - \tau_x) \cos az - (\tau_x + \tau_y) \sin az], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $a = \sqrt{f/2k}$.

Даже такой простой характер изменения скорости течения в зависимости от напряжения трения ветра, глубины и коэффициента турбулентности трудно получить с такой же точностью и быстротой другими методами. Кроме того, аналитическое выражение легко анализировать.

Преимущество аналитического решения модели неизмеримо возрастает, если приходится учитывать большое количество аргументов, влияющих на поведение функции. Наглядным примером в этом отношении может служить математическая модель, описывающая изменения температуры океана в результате его теплооб-

мена с атмосферой. Она приведена в «Физике океана» и состоит из уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k_T \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Q\alpha\delta e^{-\alpha z}, \quad (2.4)$$

уравнения теплового баланса на поверхности океана

$$\lambda \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} = \Upsilon T_0 + \Phi, \quad (2.5)$$

а также начального условия $T|_{t=0} = T_z$ и второго граничного условия $T|_{z \rightarrow \infty} \neq \infty$.

Здесь δ — доля коротковолновой радиации Q , проникшей через поверхность океана; α — показатель вертикального ослабления радиации в воде; k_T и λ — вертикальные температуропроводность и теплопроводность в океане; Φ — поток тепла, обусловленный радиацией, испарением и турбулентной теплоотдачей; Υ — аналог коэффициента теплоотдачи.

Модель характеризует изменение температуры в безадвективном районе океана, если в нем k_T не меняется существенно по глубине.

Решение уравнения (2.4) имеет вид

$$T(t, z) = T_z + e^{-\alpha z} \int_0^t \varphi(\xi) e^{\alpha^2 k_T (t-\xi)} d\xi + \frac{\sqrt{k_T}}{\lambda} \int_0^t [\Phi(\xi) + \Upsilon T_z + (\Upsilon + \alpha\lambda) \int_0^\xi \varphi(t) e^{-\alpha^2 k_T (t-\xi)} dt] \cdot \Psi(t-\xi) d\xi, \quad (2.6)$$

$$\text{где } \varphi = \frac{Q\alpha\delta k_T}{\lambda}, \quad \Psi(\tau) = \frac{e^{-z^2/4k_T\tau}}{\sqrt{\pi\tau}} - \frac{\Upsilon\sqrt{k_T}}{\lambda} \exp\left(\frac{\Upsilon z}{\lambda} + \frac{\Upsilon^2 k_T \tau}{\lambda^2}\right).$$

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2\sqrt{k_T\tau}} + \frac{\Upsilon\sqrt{k_T\tau}}{\lambda}\right).$$

$$\operatorname{erfc} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-r^2} dr.$$

Анализ выражения (2.6) приведен в «Физике океана», но и без его изложения видно, что связь между температурой воды и потоками тепла сложная. Другими способами она не может быть воспроизведена с такой же детализацией.

Потребность в точном решении математической модели и обуславливает в первую очередь поиск аналитического способа ее реализации.

Использование анализа размерностей и теории подобия при исследовании океанологических процессов. Области применения

анализа размерностей при изучении процессов в океанах и морях достаточно обширны. К наиболее важным при моделировании следует отнести:

1. Обоснование поведения масштабных моделей и обобщение информации, получаемой из экспериментов на моделях.

2. Помощь исследователю в выборе экспериментов, обеспечивающих получение полезной информации.

3. Получение частных решений математических моделей, слишком сложных для решения обычными приемами математического анализа.

4. Нахождение коэффициента пересчета при переходе от одной системы единиц к другой.

Ж. Фурье обратил внимание на то, что при математической формулировке физических процессов в уравнениях, выраженных в гауссовой системе единиц, при перемене единиц измерения уравнение остается неизменным, а все его слагаемые имеют одинаковую размерность. Ж. Бертран дополнил правило Фурье указанием, что условию однородности уравнений, отображающих физические процессы, должны подчиняться вообще все формулы, даже те, вид которых не определен. А если известны физические величины, входящие в них, то вид формул довольно часто может быть установлен. Все члены однородного уравнения имеют одинаковую размерность, и уравнение всегда может быть приведено к безразмерному виду. Следовательно, группируя величины, входящие в него, по признаку составления безразмерных компонентов, можно отыскать простую связь между ними.

Анализ размерностей неразрывно связан с теорией подобия. По существу речь идет об инвариантности уравнений, описывающих физические процессы, как к метрическим, так и физическим (подобным) преобразованиям. Ведь недаром известная π -теорема, широко используемая в анализе размерностей, является частным случаем второй теоремы подобия.

Суть π -теоремы в наиболее сжатом виде изложена в книге Г. И. Баренблатта [2]. Она состоит в следующем. Исследуемая физическая характеристика a может зависеть от величин $a_1, a_2, \dots, a_m$, размерности которых взаимонезависимы (м, с, кг и т. д.). Такие величины называются определяющими, или первичными. Кроме того, в функциональную зависимость a от различных аргументов могут входить величины $a_{m+1}, \dots, a_n$, размерность которых выражается через размерность определяющих величин. Эта вторая группа аргументов называется вторичными величинами.

В общем виде зависимость функции a от перечисленных аргументов представляется выражением

$$a = f(a_1, a_2, \dots, a_m, a_{m+1}, \dots, a_n). \quad (2.7)$$

Размерность функции a определяется совокупностью размерностей первичных величин, которые могут входить со степенями, т. е.

$$[a] = [a_1]^p [a_2]^q \dots [a_m]^s. \quad (2.8)$$

Делением функции a на совокупность величин первой группы определяется безразмерный параметр, включающий искомую величину

$$\Pi = \frac{a}{a_1^p a_2^q \dots a_m^s}. \quad (2.9)$$

Каждую размерную величину также можно преобразовать в безразмерный параметр, используя элементы первой группы, например,

$$\Pi_{n-m} = \frac{a_n}{a_1^{p_n} a_2^{q_n} \dots a_m^{s_n}}. \quad (2.10)$$

Здесь p_n, q_n, s_n — показатели, приводящие a_n к безразмерному виду.

Количество безразмерных параметров под знаком функции будет меньше размерных величин, т. е.

$$\Pi = f_0(\Pi_1 \dots, \Pi_{n-m}), \quad (2.11)$$

так как элементы первой группы использованы при обезразмеривании остальных величин.

Если все аргументы функции (2.7) относятся к категории определяющих величин, то с помощью теории размерностей функциональная зависимость находится с точностью до постоянного множителя без использования безразмерных параметров. Что же касается константы, то ее можно определить в результате эксперимента либо аналитически, решая соответствующую математическую задачу. Совершенно очевидно, что теория размерностей приносит тем большую пользу, чем больше можно выбрать первичных величин.

В анализе размерностей существуют несколько методов для отыскания неизвестных формул. Прием Аппеля состоит в том, что пересчетные множители обратно пропорциональны искомым величинам [15]. Сущность метода Толмэна заключается в том, что множители преобразования первичных величин численно одинаковы [15].

Самым распространенным является метод Рэлея, основанный на равенстве показателей степени у первичных величин одинаковой размерности. Его применение можно проиллюстрировать на каком-либо примере. Пусть требуется определить выражение, характеризующее зависимость полной энергии волны на поверхности океана от основных определяющих факторов.

Из физических соображений можно предположить, что полная энергия гравитационной волны должна зависеть от плотности воды ρ , ускорения силы тяжести g (гравитационная волна), амплитуды колебаний ζ и, так как рассматривается не удельная энергия, а энергия, сосредоточенная во всей длине, от длины волны λ и ширины волны b .

Таким образом, энергия волны

$$\Theta = \Theta(\rho, g, \zeta, \lambda, b).$$

Применим метод Рэлея:

$$\Theta = A \rho^\alpha g^\beta \zeta^\gamma \lambda^\delta b^\epsilon. \quad (2.12)$$

Поскольку размерность энергии равна ML^2T^{-2} , то оказывается, что пять величин, существенных для процесса, выражены через три первичные величины, следовательно, полное решение получить невозможно. Число физических переменных, определяющих протекание явления, не может быть уменьшено. Но в некоторых случаях можно увеличить число основных единиц измерения.

Обычно три размера по трем взаимно перпендикулярным направлениям имеют одну единицу измерения. Г. Хантли предложил метод так называемых «дифференциальных» [17] единиц измерения. В этой новой системе единиц трем размерам соответствуют три различные единицы измерения по осям координат трехмерного поля масс. Если использовать только векторные единицы пространства, то число основных единиц измерения будет на два больше. Аналогичным образом обстоит дело и с массой, для которой возможны две единицы: единица массы как мера инерции и единица массы как мера количества вещества.

Векторная единица длины $[L]$ образуется при сложении векторов $[L_x]$, $[L_y]$, $[L_z]$. Число основных единиц длины можно еще увеличить, придав им положительные и отрицательные значения. При использовании векторных длин многие формулы размерности сразу же становятся более информативными. Например, при описании скорости сразу же заметна существенная разница между $L_z T^{-1}$ и $L_x T^{-1}$ и т. д.

А теперь вернемся к примеру по определению полной энергии плоскопараллельной волны, которая равна работе, совершаемой при перемещении воды против сил тяжести. Ее размерность равна

$$[\Theta] = ML_z^2 T^{-2}.$$

Число уравнений, связывающих четыре неизвестных показателя степени в уравнении (2.12), возросло с трех до пяти. Тогда

$$ML_z^2 T^{-2} = (ML_x^{-1} L_y^{-1} L_z^{-1})^\alpha L_z^\gamma L_x^\delta (L_z T^{-2})^\beta L_y^\epsilon. \quad (2.13)$$

Приравниваем показатели степени при одинаковых размерностях

масса: $1 = \alpha$;

время: $-2 = -2\beta$;

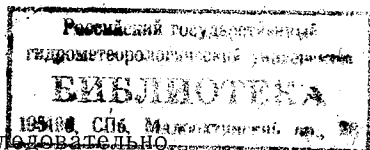
длина по оси x : $0 = -\alpha + \delta$;

длина по оси y : $0 = -\alpha + \epsilon$;

длина по оси z : $2 = -\alpha + \beta + \gamma$;

откуда $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 2$, $\delta = 1$, $\epsilon = 1$. Следовательно,

$$\Theta = A \rho g \zeta^2 \lambda b. \quad (2.14)$$



Таким образом, с помощью дополнительной размерности становится возможным найти зависимость, которую ранее нельзя было получить обычными приемами анализа размерностей: энергия волны пропорциональна ее длине и квадрату амплитуды. Значение произвольной постоянной A может быть определено экспериментально. В данном случае на основе аналитического решения определено, что она равна $1/2$ для прогрессивных волн и $1/4$ — для стоячих. Таким образом, метод размерностей позволил составить математическое выражение, характеризующее зависимость энергии волны от определяющих ее величин, т. е. составлена математическая модель волны. Она приближенная, так как в ней не учтена диссипация энергии, диффузия энергии и т. д. Тем не менее основные связи между функцией и аргументами установлены.

При моделировании гидрофизических процессов в ряде случаев руководствуются представлением об автомодельности явлений. Нужно четко различать два значения термина «автомодельность». Во-первых, — это равенство индикаторов подобия любой постоянной величине, что позволяет произвольно выбирать константы или коэффициенты подобия при гидравлическом или аналоговом моделировании. Во-вторых, он означает что определяемая величина $a(x, t_1)$ в некоторый момент t_1 подобна значению $a(x, t_0)$, в более ранний момент t_0 . В океанологии это понятие часто используется при описаниях температуры и солёности в термо- и галоклине, турбулентной диффузии тепла, солей и различных примесей, профилей гидрологических элементов в пограничных слоях и т. д. Переход к безразмерным параметрам позволяет исключить множество значений даже какой-то одной переменной определяющей величины и сконцентрировать спектр размерных функций в одном безразмерном параметре. Например, диффузия какой-то пассивной примеси, выпущенной в некоторой точке безадвективной части океана вдали от берегов, может быть описана уравнением

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial^2 C}{\partial r^2} \quad (2.15)$$

с краевыми условиями:

$$4\pi \int_0^{r_0} r^2 C(0, r) dr = Q, \quad C(0, r > r_0) = 0 \text{ при } t=0, \quad C(t, r) \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (2.16)$$

где Q — объем примеси, выпущенной в пределах малого радиуса r_0 в момент времени $t=0$; C — концентрация примеси.

Решение такой задачи известно:

$$C = \frac{Q}{(2\sqrt{\pi kt})^3} \exp\left(-\frac{r^2}{4kt}\right). \quad (2.17)$$

При разных значениях Q, k, t, r получаются различные концентрации C .

Если же ввести характерные масштабы концентрации C_* и расстояния r_*

$$C_* = Q(kt)^{-3/2}, \quad r_* = \sqrt{kt},$$

то можно составить безразмерные параметры

$$\Pi = \frac{C}{C_*}, \quad \Pi_1 = \frac{r}{r_*}.$$

С их учетом выражение (2.17) примет вид

$$\Pi = \frac{1}{8\pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{1}{4} \Pi_1^2\right). \quad (2.18)$$

Вместо четырех размерных аргументов формулы (2.17) в выражении (2.18) фигурирует только один — Π_1 . При разных Q , k и t можно сформировать такие масштабы C_* и r_* и так выбрать r , что Π и Π_1 не будут меняться. Следовательно, имеет место автомодельность.

К абсолютно такому же выражению (2.18) можно придти, если рассматривать распространение тепла в горизонтальной плоскости из мгновенного точечного источника мощностью Q_1 . Нужно лишь поделить Q_1 на теплоемкость воды c , а под k понимать коэффициент температуропроводности воды. Это означает, что распространение тепла и примеси автомодельны. Использование этого положения позволяет существенно сократить объем вычислений при моделировании таких процессов, если воспользоваться автомодельным соотношением (2.18).

Принцип автомодельности дает возможность найти соотношение между безразмерными параметрами, не зная исходного уравнения или его решения. Если, например, требовалось смоделировать распространение примеси из точечного источника, то на основании логических соображений можно считать, что

$$C = f(Q, k, t, r).$$

Из величин этого соотношения, учитывая их размерность, можно составить только два безразмерных параметра Π и Π_1 . Следовательно,

$$\Pi = \text{const } f_0(\Pi_1). \quad (2.19)$$

Дальнейшая задача сводится к определению вида функции f_0 и значения const . В простейшем случае это достигается графическим построением результатов экспериментов в координатах Π и Π_1 .

Известны большие успехи применения автомодельности при описании профилей метеорологических и гидрологических элементов в пограничных слоях, с использованием гипотезы Монина — Обухова. В простейшем случае, когда стратификация плотности

зависит только от температуры, изменение скорости течения по вертикали около дна можно полагать функцией от напряжения трения τ , плотности воды ρ , высоты над дном z , потока тепла Φ , теплоемкости воды c и ее теплового расширения β . Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = f_1(\tau, \rho, z, \Phi, c, \beta). \quad (2.20)$$

Из этих размерных величин можно составить характерные масштабы $u_* \sqrt{\tau/\rho}$, $l = c\rho u_*^3/\beta\Phi$. Чтобы было $l > 0$ при поступлении тепла от дна, масштаб длины берется со знаком минус, т. е. $L = -c\rho u_*^3/\beta\Phi$. Это масштаб длины Монина — Обухова, в который введена константа Кармана $\kappa \approx 0,4$.

В безразмерных параметрах, включающих характерные масштабы, функциональная связь (2.20) может быть представлена в виде

$$\frac{\kappa z}{u_*} \frac{\partial u}{\partial z} = \varphi_0\left(\frac{z}{L}\right). \quad (2.21)$$

Поскольку в правую часть введена κ , то и в левую введен этот множитель. Вообще можно было не использовать κ , но тогда L отличалось бы от принятой записи.

При небольших изменениях безразмерного параметра функцию φ_0 обычно представляют в виде ряда

$$\varphi_0\left(\frac{z}{L}\right) = 1 + \gamma \frac{z}{L} + \dots \quad (2.22)$$

В таком случае скорость течения вблизи дна определяется выражением

$$u - u_1 = \frac{u_*}{\kappa} \left[\ln \frac{z}{z_1} + \frac{\gamma}{L} (z - z_1) + \dots \right]. \quad (2.23)$$

Эта формула описывает и профиль ветра у подстилающей поверхности, но с другими значениями u_* и L .

В принципе, вид выражения (2.23) не меняется, если учесть влияние на стратификацию влажности в воздухе и солености в воде. Меняется лишь масштабный множитель L .

Таким образом, использование теории размерностей и автомодельности позволяет достаточно просто получать аналитические решения широкого круга моделей, описывающих естественные процессы.

2.2. Приближенные методы реализации моделей

К аналитическим решениям примыкают приближенные решения, в частном случае — в виде асимптотического степенного ряда. Приближенные методы значительно увеличивают круг океаноло-

гических задач, решение которых приводит к аналитическим зависимостям между искомой функцией и определяющими параметрами.

Дифференциальные уравнения, описывающие движения вод Мирового океана, как правило, содержат малые параметры, что позволяет, в той или иной степени, применять для их решения асимптотические методы.

Например, использование метода возмущений приводит к предельным разложениям в ряд. Обычно предполагается аналитическая зависимость решения от некоторого малого параметра ε . При этом ε , естественно, берется в безразмерном виде и вся задача, как правило, переходит к безразмерным величинам и координатам.

Например, при исследовании неустойчивости течений с градиентом скорости можно рассматривать малое возмущение основного потока. Тогда уравнения для безразмерных составляющих скорости течения и давления примут вид

$$\begin{aligned} u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, z) + \varepsilon u_1(x, y, z, t) + \varepsilon^2 u_2(x, y, z, t) + \dots, \\ v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, z) + \varepsilon v_1(x, y, z, t) + \varepsilon^2 v_2(x, y, z, t) + \dots, \\ w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, z) + \varepsilon w_1(x, y, z, t) + \varepsilon^2 w_2(x, y, z, t) + \dots, \\ P(x, y, z, t) &= P_0(x, y, z) + \varepsilon P_1(x, y, z, t) + \varepsilon^2 P_2(x, y, z, t) + \dots, \end{aligned} \quad (2.24)$$

где ε в данном случае — безразмерная мера амплитуды возмущений.

Выражения (2.24) должны удовлетворять уравнениям движения и неразрывности, из которых получается последовательность уравнений, описывающих движение любого порядка. При этом уравнения порядка α^0 описывают основное течение, уравнения порядка α^1 характеризуют линейную добавку, уравнения порядка α^2 описывают нелинейные эффекты.

В случае течения с градиентом скорости линейные члены порождают устойчивые и неустойчивые элементарные волновые движения. Нелинейные эффекты разделяются на два типа: двумерные, интенсивность которых меняется в плоскости, перпендикулярной основному течению, и трехмерные, проявляющиеся в продольных вихревых движениях с осями вдоль направления основного течения. Решение поставленной задачи методом возмущений подтверждается экспериментальными данными, в частности — трехмерными эффектами, включающими продольные вихревые движения.

В качестве примера можно привести решение уравнений модели, описывающей профиль скорости приливного течения в придонном слое. Уравнения свободного распространения приливной волны имеют вид [8]

$$\frac{\partial \dot{u}}{\partial t} - fv = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial \dot{u}}{\partial z}, \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial v}{\partial z},$$

где ζ — отклонение уровня моря от невозмущенного состояния.

Для удобства целесообразно ось z направить от дна вверх. При этом изменение по высоте осредненного за приливной период коэффициента турбулентности можно аппроксимировать моделью «с изломом»:

$$k_z = kz \text{ при } z \leq h, \quad (2.26)$$

$$k_z = kh \text{ при } z \geq h,$$

где h — толщина придонного пограничного слоя.

Если определять отклонение скорости от невозмущенного придонным трением приливного потока с составляющими скоростей U и V и ввести комплексную скорость по формуле

$$W = (u - U) + i(v - V),$$

то получается одно уравнение для W

$$\frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial t} - i f W = 0, \quad (2.27)$$

которое удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\text{при } z = z_0 \quad W = -(U + iV) = -W_n,$$

$$\lim_{z \rightarrow h-0} W = \lim_{z \rightarrow h+0} W,$$

$$\lim_{z \rightarrow h-0} \frac{\partial W}{\partial z} = \lim_{z \rightarrow h+0} \frac{\partial W}{\partial z}, \quad (2.28)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} W = 0,$$

где z_0 — параметр шероховатости дна.

Составляющие скорости приливного течения, а также комплексную скорость можно представить в виде компонент в начальный момент времени и через четверть периода. Тогда для W имеем

$$W = W_n \cos \sigma t + W_n \sin \sigma t, \quad (2.29)$$

где σ — угловая скорость приливной волны.

При этом из уравнений (2.27) и (2.29) следует

$$\frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial W}{\partial z} - \sigma W - i f W = 0, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} k_z \frac{\partial W}{\partial z} + \sigma W - i f W = 0.$$

Решение системы (2.30) при соответствующих граничных условиях ищется в виде ряда по степеням малого параметра $\varepsilon = \frac{\sigma h}{k}$:

$$\begin{aligned} W' &= W_0' + \varepsilon W_1' + \varepsilon^2 W_2' + \dots, \\ W'' &= W_0'' + \varepsilon W_1'' + \varepsilon^2 W_2'' + \dots \end{aligned} \quad (2.31)$$

Поскольку ε имеет порядок 10^{-1} , ряд очень быстро сходится и первые два члена ряда дают достаточно точный результат.

При ограничении членами, содержащими ε не выше первой степени, получается

$$\begin{aligned} W' &= \frac{W_h' + W_{h'}'}{\ln \frac{h}{z_0}} \ln \frac{z}{z_0} - W_{h'}' + \\ &+ \varepsilon \left\{ \frac{(W_h'' + i\alpha W_h') + (W_{h'}'' + i\alpha W_{h'}')}{h \ln \frac{h}{z_0}} \left[(z-h) \ln \frac{z}{z_0} - 2(z-z_0) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(h-z_0) \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{h}{z_0}} \right] - \frac{W_{h'}'' + i\alpha W_{h'}'}{h} \times \left[(z-z_0) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (h-z_0) \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{h}{z_0}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.32, a)$$

$$\begin{aligned} W'' &= \frac{W_h'' + W_{h'}''}{\ln \frac{h}{z_0}} \ln \frac{z}{z_0} - W_{h'}'' + \\ &+ \varepsilon \left\{ \frac{(i\alpha W_h'' - W_h') + (i\alpha W_{h'}'' - W_{h'}')}{h \ln \frac{h}{z_0}} \left[(z-h) \ln \frac{z}{z_0} - 2(z-z_0) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(h-z_0) \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{h}{z_0}} \right] - \frac{i\alpha W_{h'}'' - W_{h'}''}{h} \times \left[(z-z_0) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (h-z_0) \frac{\ln \frac{z}{z_0}}{\ln \frac{h}{z_0}} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2.32, б)$$

где $W'_h = W'$ при $z=h$, $W''_h = W''$ при $z=h$, $\alpha = \frac{f}{\sigma}$.

Решение показывает, что нулевое приближение описывает изменение профиля скорости приливного течения в придонном приграничном слое пропорционально логарифму высоты над дном. Следующее приближение характеризует добавочное изменение скорости течения, обусловленное ускорением Кориолиса. Учет членов, содержащих более высокие степени ϵ , приводит к дальнейшим уточнениям решения. В зависимости от малости параметра ϵ приходится принимать во внимание большее или меньшее количество членов.

При решении уравнений модели, особенно содержащих нелинейные слагаемые, иногда разложение по малому параметру удается проводить только при малых или больших значениях координат или других характеристик. В этих случаях линейризованное решение получается только в асимптотическом приближении.

Не ставя задачу полного изложения метода сращиваемых асимптотических разложений, которое содержится в соответствующих математических дисциплинах, остановимся лишь на применении этого метода в океанологическом моделировании. Суть его состоит в следующем. Часто характер океанологического процесса в разных областях бассейна таков, что при его математическом описании роль различных членов уравнения модели не одинакова и при приближенном решении можно те или иные из них опустить. В качестве характерного примера обычно приводится течение вдали от берегов и дна и около них. В первом случае турбулентная вязкость не играет определяющей роли, а во втором она существенно влияет на профиль течения.

На основании разложения входящих в уравнение величин в ряд по малому параметру, как это показано выше, и объединения членов с одинаковыми параметрами малости, получаются уравнения, являющиеся какой-то частью общего исходного уравнения. Например, из общего уравнения движения выделяется часть, описывающая геострофическое течение,

$$-fv^{(0)} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial x}, \quad fu^{(0)} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P^{(0)}}{\partial y},$$

$$u^{(0)} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial x} + v^{(0)} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial y} + w^{(0)} \frac{\partial \rho^{(0)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{\partial v^{(0)}}{\partial y} = 0. \quad (2.33)$$

Затем выделяются члены, описывающие течение в поверхностном и придонном слоях. В нем изменения плотности играют малую роль, а трение — большую. Поэтому уравнения имеют форму (2.25); в них можно не учитывать локальные производные по времени, а градиенты уровня могут быть заменены градиентами давления с соответствующими множителями. В уравнении нераз-

рывности должна учитываться производная скорости по вертикальной оси. Уравнения, а следовательно, и их решения для этих выделенных областей бассейна различны, но на общей границе каждой области они одинаковы. Это позволяет осуществлять переход от решения в одной области к решению в другой, т. е. сращивать (согласовывать) их.

В данном примере при сделанных упрощениях давление в экмановском слое по вертикали не меняется. Оно определяется из уравнений геострофического слоя (2.33). Это склейка одного из определяемых элементов, позволяющая получить решение уравнений экмановского слоя, которое приведено в «Динамике океана». Использование уравнения неразрывности позволяет получить выражение вертикальной скорости. Условие склейки требует, чтобы вертикальные скорости на границе обеих областей были бы также равны. Но в приближении (2.33) вертикальная скорость как малая не вычисляется. Следовательно, она автоматически приравнивается определенной вертикальной скорости в экмановском слое

$$\omega = - \frac{1}{f\rho_0} \operatorname{rot} \tau. \quad (2.34)$$

Таков же принцип сращивания решений придонной пограничной области с решениями геострофической области.

Метод сращивания асимптотических решений широко используется при учете прибрежных пограничных областей, придонных орографических областей, циркуляции в проливах и около них и т. д. Этот метод дает возможность получить приближенные аналитические решения, в то время как общее решение для таких сложных областей пока неизвестно.

2.3. Конечно-разностный численный метод. (Основные определения конечно-разностных сеточных схем)

В настоящее время в большинстве случаев система дифференциальных уравнений модели решается численно после представления производных функций в виде конечных разностей, взятых в соответствующих узлах сеточной области по пространству и времени. При переходе к конечно-разностным уравнениям необходимо выполнить несколько условий. Во-первых, при уменьшении шага сетки конечно-разностная аппроксимация должна стремиться к значению производной. Это видно из разложения искомой функции Φ_{j+1} в окрестности узла сетки j в ряд Тейлора:

$$\frac{\Phi_{j+1} - \Phi_j}{\Delta\eta} = \left(\frac{d\Phi}{d\eta} \right)_j + \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} \right)_j \Delta\eta + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3\Phi}{d\eta^3} \right)_j \Delta\eta^2 + \dots \quad (2.35)$$

Данное условие называется **согласованием** [12]. Сумма членов правой части выражения (2.35), содержащих в качестве множителей шаг сетки $\Delta\eta$ называется **ошибкой аппроксимации ε** . Порядок точ-

ности аппроксимации определяется наименьшей степенью $\Delta\eta$, учтенных слагаемых в ε . Например, при

$$\varepsilon = \frac{1}{2!} \left(\frac{d^2\Phi}{d\eta^2} \right) \Delta\eta + \frac{1}{3!} \left(\frac{d^3\Phi}{d\eta^3} \right) \Delta\eta^2 + \dots$$

конечно-разностная схема имеет первый порядок точности, что обычно записывается в виде $\varepsilon = O(\Delta\eta)$.

В случае многомерной сетки порядок точности аппроксимации зависит от суммы точностей по каждой из координат.

Во-вторых, численное решение должно быть **сходящимся**. Это означает, что ошибка решения δ , т. е. разность между точным решением и численным приближенным, должна уменьшаться при уменьшении пространственно-временных шагов сетки.

В-третьих, в тех случаях, когда в качестве одной из переменных модели фигурирует время, то вводится еще понятие **устойчивости** решения. Под ним понимают характер изменения ошибки δ по мере роста числа шагов n по времени. Если для неизменных пространственно-временных шагов сетки значение δ остается ограниченным при увеличении n , то решение является устойчивым. Конечно-разностная схема называется устойчивой, если решение, полученное при ее использовании, оказывается устойчивым для любых начальных условий. Обычно при составлении конечно-разностной схемы требование ее устойчивости является определяющим и в обязательном порядке проверяется.

Из курса вычислительной математики известно, что существуют различные методы проверки устойчивости разностной схемы, из которых наиболее часто применяется метод разложения искомой функции Φ в ряд Фурье. При линеаризировании уравнения каждый член ряда является его решением. Поэтому достаточно проверить устойчивость решения для одной гармоники. Например, решение имеет вид

$$\Phi_j^{(n)} = \text{Re} [\varphi^{(n)} e^{ikj\Delta\eta}], \quad (2.36)$$

где $\varphi^{(n)}$ — амплитуда волны на n шаге по времени; k — волновое число.

Подстановка выражения (2.36) в конечно-разностную схему и последующая группировка членов должна быть такой, чтобы схему можно было бы представить в форме

$$\varphi^{(n+1)} = \lambda \varphi^{(n)}. \quad (2.37)$$

Схема оказывается устойчивой, если

$$\lambda \leq 1. \quad (2.38)$$

В принципе многие физические процессы и отражающие их решения могут быть представлены суперпозицией волновых гар-

моник. В этом случае и к переменной λ можно относиться, как к волне, описываемой выражением

$$\lambda = |\lambda| e^{i\theta}, \quad (2.39)$$

где $|\lambda|$ — амплитуда; θ — фаза.

При такой записи λ формулу (2.36) можно представить в виде

$$\varphi^{(n)} = |\lambda|^n \varphi(0) e^{in\theta}. \quad (2.40)$$

Если схема устойчива, то при $|\lambda| < 1$ будет происходить непрерывное уменьшение амплитуды. Поэтому схема называется диссипативной. Таким образом, в зависимости от величины $|\lambda|$ схемы бывают:

неустойчивые $|\lambda| > 1$;

нейтрально-устойчивые $|\lambda| = 1$;

диссипативно-устойчивые $|\lambda| < 1$.

Величина фазового угла также оказывает влияние на результат численного решения. Если, как отмечалось выше, точное решение уравнения представляется суперпозицией волн, каждая из которых выражается произведением амплитуды на экспоненту с мнимым аргументом $i n \omega \Delta t$, то за каждый шаг времени Δt происходит изменение угла на $\omega \Delta t$. Соотношение $\frac{\theta}{\omega \Delta t}$ называется **относительным изменением фазы** численного решения, или **фазовой скоростью**. В зависимости от ее величины различают схемы:

ускоряющие фазовую скорость $\frac{\theta}{\omega \Delta t} > 1$;

не меняющие фазовую скорость $\frac{\theta}{\omega \Delta t} = 1$;

замедляющие фазовую скорость $\frac{\theta}{\omega \Delta t} < 1$.

Наименьшее различие между точным и конечно-разностным решениями имеет место в том случае, когда λ и фазовая скорость равны единице. На практике обычно ограничиваются определением сходимости по λ , так как искажение решения фазовой скоростью не влияет на его сходимость.

Пример вычисления λ и проверка устойчивости схемы наиболее просто демонстрируется при конечно-разностной аппроксимации уравнения диффузии

$$\frac{\partial S}{\partial t} = k \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}. \quad (2.41)$$

Как отмечалось выше, целесообразно представить $S(t, z)$ в виде суммы гармоник и искать решение для одной из них:

$$S(t, z) = \text{Re}[\varphi(t) e^{ikz}]. \quad (2.42)$$

Тогда уравнение (2.41) примет вид

$$\frac{d\varphi}{dt} = -kx^2\varphi. \quad (2.43)$$

По однонаправленной разностной схеме оно записывается следующим образом:

$$\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)} - kx^2\Delta t (\alpha\varphi^{(n)} + \beta\varphi^{(n+1)}). \quad (2.44)$$

При $\alpha=1$ и $\beta=0$ схема является явной (Эйлера), при $\alpha=0$ и $\beta=1$ — неявной, при $\alpha=\beta=1/2$ — получается так называемая схема трапеций.

После группировки членов уравнение (2.44) принимает вид, удобный для выделения множителя перехода,

$$\varphi^{(n+1)} = \frac{1 - \alpha p}{1 + \beta p} \varphi^{(n)}, \quad (2.45)$$

где $p = kx^2\Delta t$.

Схема будет устойчивой, если

$$\frac{1 - \alpha p}{1 + \beta p} \leq 1. \quad (2.46)$$

При использовании явной схемы, должно удовлетворяться условие $|1 - p| \leq 1$, т. е. $0 < p \leq 2$, по которому для заданных k и ω определяется Δt .

Поскольку при использовании неявной схемы при любых положительных значениях p удовлетворяется условие $\frac{1}{1 + p} < 1$, то эта схема всегда устойчива.

Схема трапеций также устойчива для $p > 0$, но при $p > 2$ из-за отрицательного знака переходного множителя возникают знакопеременные колебания решения от шага к шагу.

Естественно, что для разного типа уравнений и разных конечно-разностных аппроксимаций содержание переходного множителя λ будет различным, но изложенный способ проверки устойчивости данным методом сохраняется.

При аппроксимации производной по времени центральной разностью получаются два значения λ . Действительно, уравнение (2.43) в этом случае запишется в виде

$$\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n-1)} - 2p(\alpha\varphi^{(n)} + \beta\varphi^{(n+1)}). \quad (2.47)$$

Согласно (2.37) соотношение между значениями функций на трех уровнях по времени выражается формулами

$$\varphi^{(n)} = \lambda\varphi^{(n-1)} \text{ и } \varphi^{(n+1)} = \lambda^2\varphi^{(n-1)}. \quad (2.48)$$

Подстановка этих значений в выражение (2.47) и сокращение на $\varphi^{(n-1)}$ дают

$$\lambda^2 + 2 \frac{p\alpha}{1 + 2p\beta} \lambda - 1 = 0. \quad (2.49)$$

Это квадратное уравнение имеет решения:

$$\lambda_1 = -k + \sqrt{1+k^2} \text{ и } \lambda_2 = -k - \sqrt{1+k^2}, \quad (2.50)$$

$$\text{где } k = \frac{p\alpha}{1 + 2p\beta}.$$

Если беспредельно уменьшать шаг по времени, т. е. $\Delta t \rightarrow 0$, то $k \rightarrow 0$. При этом $\lambda_1 \rightarrow 1$, $\lambda_2 \rightarrow -1$. В первом случае происходит приближение к точному решению уравнения (2.43), характеризующего физический процесс, поэтому решение с λ_1 называется **физической модой**. Решение с использованием λ_2 не обеспечивает приближение к обычному решению и называется **вычислительной модой**. Поскольку численное решение является суперпозицией этих мод,

$$\varphi^{(n+1)} \sim \lambda_1 \varphi^{(n)} + \lambda_2 \varphi^{(n)}, \quad (2.51)$$

то нужно использовать схемы, не содержащие неустойчивой вычислительной моды, либо применять методы подавления вычислительной неустойчивости, образуемой этой модой.

Характерным примером неустойчивого решения из-за вычислительной моды может служить использование явной схемы. При $p > 0$ получается $k > 0$ и $\lambda_2 < -1$. Это означает, что вычислительная мода неустойчива.

К схемам с устойчивой вычислительной модой относится, например, схема Адамса — Бэшфорта, по которой уравнение (2.43) записывается в виде

$$\varphi^{(n+1)} = \varphi^{(n)} - p \left(\frac{3}{2} \varphi^{(n)} - \frac{1}{2} \varphi^{(n-1)} \right). \quad (2.52)$$

При этом для определения λ получаем уравнение

$$\lambda^2 - \left(1 - \frac{3}{2} p \right) \lambda - \frac{1}{2} p = 0. \quad (2.53)$$

Из него следует

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{3}{2} p \pm \sqrt{1 - p + \frac{9}{4} p^2} \right). \quad (2.54)$$

Если $\Delta t \rightarrow 0$, то $p \rightarrow 0$ и $\lambda_1 \rightarrow 1$, а $\lambda_2 \rightarrow 0$.

При выборе пространственного шага сетки, во-первых, принимается во внимание масштаб моделируемых процессов, так как при шаге Δx учитываются неоднородности, например, волнового характера с длиной не менее $2\Delta x$. Во-вторых, должно выполняться

отмеченное выше условие устойчивости. В-третьих, при представлении процесса суммой гармоник в результате вычисления не должно быть существенного их искажения, которое чаще возникает при представлении адвективных членов уравнения центральными конечными разностями. Наиболее простым примером может служить уравнение теплопроводности, в котором присутствуют лишь производная по времени и адвективная составляющая,

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \quad (2.55)$$

Если считать, что $T(t, x) = \text{Re}[\Theta(t)e^{ikx}]$, то уравнение примет вид

$$\frac{d\Theta}{dt} + iku\Theta = 0. \quad (2.56)$$

При представлении же уравнения (2.55) центральной разностью по оси x получается выражение

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} + u \frac{T_{j+1} - T_{j-1}}{2\Delta x} = 0, \quad (2.57)$$

которое при аппроксимации искомой функции такой же формулой, как и для исходного уравнения

$$T_j(t) = \text{Re}[\Theta(t)e^{ikj\Delta x}], \quad (2.58)$$

приводится к виду

$$\frac{d\Theta}{dt} + ik \left[u \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \right] \Theta = 0. \quad (2.59)$$

Из сопоставления уравнений (2.56) и (2.59) видно, что в последнем появился множитель, зависящий от волнового числа. Обычно этот множитель объединяют со скоростью. В таком случае можно считать, что переход от дифференциального уравнения к конечно-разностному приводит к искажению скорости распространения волн. Скорость последних уменьшается тем больше, чем короче волна. Этот эффект называется **вычислительной дисперсией**.

Если рассматривать групповую скорость волн

$$u_g = \frac{d}{dk} \left[ku \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x} \right] = u \cos k\Delta x, \quad (2.60)$$

то при некоторых значениях k она становится отрицательной, т. е. такие группы волн движутся навстречу основному перемещению. Естественно, что все это искажает решение. Чтобы таких волн, называемых **паразитными**, не было, используют однонаправленную разностную аппроксимацию:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \bar{T}_j}{\partial t} + u \frac{\bar{T}_j - \bar{T}_{j-1}}{\Delta x} &= 0, \text{ если } u > 0, \\ \frac{\partial \bar{T}_j}{\partial t} + u \frac{T_{j+1} - T_j}{\Delta x} &= 0, \text{ если } u < 0.\end{aligned}\quad (2.61)$$

К уменьшению вычислительной дисперсии приводит также повышение порядка разностной аппроксимации адвективных слагаемых.

В том случае, когда математическая модель состоит из нескольких уравнений, то имеют значение не только принципы изложенной конечно-разностной аппроксимации производных, но и характер их размещения в узлах сетки. Простейшим примером этому может служить, как показано в работе [12], модель распространения одномерной гравитационной волны

$$\frac{\partial u}{\partial t} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} + H \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (2.62)$$

где $H = \text{const}$ — глубина моря.

При аппроксимации производных по x центральными разностями получается система уравнений

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_j}{\partial t} + g \frac{\zeta_{j+1} - \zeta_{j-1}}{2\Delta x} &= 0, \quad \frac{\partial \zeta_{j+1}}{\partial t} + H \frac{u_{j+2} - u_j}{2\Delta x} = 0, \\ \frac{\partial \zeta_{j-1}}{\partial t} + H \frac{u_j - u_{j-2}}{2\Delta x} &= 0.\end{aligned}\quad (2.63)$$

Видно, что для каждого из уравнений u и ζ находятся в разных узлах сетки. Такая сетка называется шахматной.

Если скорость распространения волны согласно уравнениям (2.62) равна $C = \pm \sqrt{gH}$, то из дифференциально-разностной системы она, как и в предыдущем примере, оказывается зависимой от аналогичного множителя

$$C_p = \pm \sqrt{gH} \frac{\sin k\Delta x}{k\Delta x}. \quad (2.64)$$

Однако, несмотря на возникающую вычислительную дисперсию, волны с $k\Delta x > \frac{\pi}{2}$ исключаются из вычислений, так как происходит как бы увеличение шага сетки. Выше же отмечалось, что наибольший вклад в вычислительную дисперсию дают короткие волны. Поэтому она при такой сетке оказывается уменьшенной.

В случае решения системы уравнений, использующих две пространственные координаты, например,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + fv, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - fu, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = -H \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.65)$$

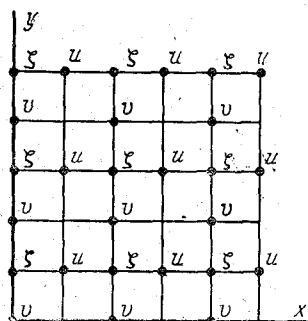


Рис. 1. Фрагмент шахматной сетки

шахматная сетка имеет вид, приведенный на рис. 1. По сути по оси x чередование ζ и u описывается уравнениями (2.63). Такими же уравнениями, но по оси y , описывается чередование ζ и v .

При переходе от системы дифференциальных уравнений к системе конечно-разностных уравнений определяется устойчивость последней с помощью преобразования каждой переменной по типу формулы (2.40). Например, для системы (2.65) можно использовать представления

$$\begin{pmatrix} u^{(n)} \\ v^{(n)} \\ \zeta^{(n)} \end{pmatrix} = \text{Re} \left[\lambda^n e^{i(kx + ly - \gamma t)} \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \zeta_0 \end{pmatrix} \right]. \quad (2.66)$$

При подстановке этих выражений в конечно-разностную схему для уравнений (2.65) получается система уравнений, из которых находятся различные значения λ . В частности, при использовании центральной разности для аппроксимации локальной производной одно из значений λ приводит к критерию Куранта

$$\sqrt{2gH} \frac{\Delta t}{\Delta \eta} \leq 1, \quad (2.67)$$

где $\Delta \eta$ — шаг сетки.

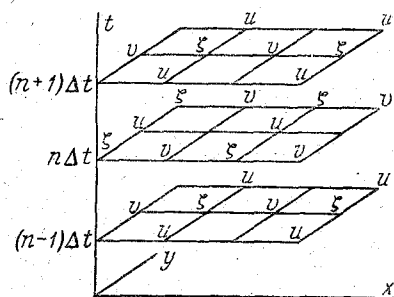


Рис. 2. Фрагмент шахматной сетки Элиассена

Для данного случая сетка приобретает шахматный характер не только по пространственным координатам, но и по времени. Если на одном уровне по времени в узлах сетки содержатся только составляющие скорости, а на другом — изменения уровня, то она называется сеткой Ричардсона [12].

В более общем случае при использовании пространственно-временных центральных разностей применяется шахматная сетка Элиассена (рис. 2). Выбор оптимальной для модели сетки чрезвычайно важен, так как ошибки при аппроксимации пространственных производных больше, чем за счет разностей по времени.

Само решение получающейся конечно-разностной системы алгебраических уравнений достаточно хорошо освещено в соответствующих разделах высшей математики.

2.4. Статистические методы

Многие океанические процессы имеют стохастический характер. К ним, в частности, относится турбулентный перенос тепла, соли, количества движения. При моделировании таких процессов представляется естественным применение статистических методов реализации модели.

Вероятностные методы, включающие использование приемов статистической выборки, представляют собой модификацию приближенного метода решения уравнений математической физики путем нахождения значений функции в дискретных точках.

В результате статистическое моделирование представляет собой численный метод решения задачи, при котором искомые величины выражаются вероятностными характеристиками какого-либо случайного явления и приближенно определяются путем статистической обработки данных, полученных на его модели.

В основе вероятностных методов решения дифференциальных уравнений в частных производных, представленных в конечных разностях, лежат особенности свойств матрицы коэффициентов A , определяемой геометрией области G_n в системе уравнений вида

$$AU = F, \quad (2.68)$$

где U — вектор-столбец неизвестных; F — вектор-столбец свободных членов, определяемый граничными условиями.

Размерность матрицы равна числу внутренних узлов области n .

В частности, если в качестве аппроксимирующего выбран конечно-разностный оператор вида $A^* \approx \nabla^2 U$, то матрица A будет симметрична независимо от формы области G_n :

$$A = \frac{1}{4} A^* = \begin{pmatrix} 1 & -0,25 & 0 & \dots & 0 \\ -0,25 & 1 & -0,25 & \cdot & \cdot \\ 0 & -0,25 & 1 & \cdot & \cdot \\ \vdots & \vdots & \cdot & \ddots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & 1 & -0,25 \\ \cdot & \cdot & \cdot & -0,25 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.69)$$

Вид матрицы позволяет применить достаточно простой алгоритм

ее обращения вероятностным методом путем вычисления степенного матричного ряда

$$A^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} B^m, \quad (2.70)$$

где $B = E - A$.

Процесс вычисления суммы состоит в моделировании блуждания некоторой частицы по узлам сеточной области G_n и в оценке вероятности распределения частоты попадания частицы в узлы сетки с фиксацией соответствующей переносимой субстанции, т. е. используется метод статистических испытаний (метод Монте-Карло).

Для решения детерминированной задачи по этому методу создается вероятностная модель и искомая величина представляется в виде математического ожидания функционала от случайного процесса, который затем моделируется на ЭВМ.

Решение системы дифференциальных уравнений в частных производных $AU = F$ представляется с позиций вероятностного моделирования в следующем виде.

Блуждание частицы, определяемое датчиком случайных чисел, начинается с узла, для которого отыскивается решение U . Закачивается блуждание, когда частица попадает в граничные узлы, совершив при этом N шагов (испытаний). Приближенным значением функции в исходном узле U_{ij} является ее среднее арифметическое значение на границе области U_L за N испытаний, т. е.

$$U_{ij} = \sum_{m=1}^N U_L / N.$$

В качестве примера можно привести решение задачи Дирихле для области, ограниченной контуром L , на котором заданы граничные значения $U_L = f$. Ради простоты примера принимается, что

шаги по осям координат равные и контур L проходит через узловые точки сетки (рис. 3).

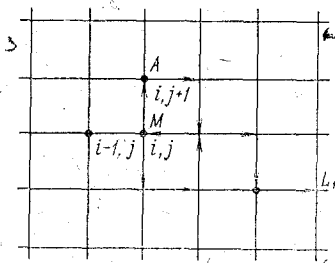


Рис. 3. Вариант блужданий частицы в сеточной области при вероятностном моделировании

Пусть требуется найти значение функции в точке $M(ij)$. Датчиком случайных чисел выбирается один из соседних с M узлов, например $A(i, j+1)$. Блуждающая частица перемещается в него. На следующем шаге определяется узел, соседний с A , в который перемещается частица и т. д.

В результате путь следования частицы представит собой ломаную линию, которая может многократно пересекаться и возвращаться в ис-

ходную точку. Однако рано или поздно линия пересечется с контуром в какой-то точке L_1 . В следующем испытании, начинающемся с исходной точки M , процесс повторяется опять до тех пор, пока новая траектория снова не пересечется с контуром в какой-то точке L_i .

Из N попаданий на границу области в точку L_1 приходится N_1 попаданий, в точку L_2 — N_2 и т. д.

$$N = \sum_{i=1}^n N_i.$$

Предел $p_i(M) = \frac{N_i}{N}$ при $N \rightarrow \infty$ равен вероятности попадания из точки M в точку L_i . Естественно, что $\sum_{i=1}^n p_i(M) = 1$.

Сумма

$$\psi(M) = \sum_{i=1}^n p_i(M) f_i \quad (2.71)$$

представляет собой приближенное решение задачи Дирихле

$$\psi(M) \approx U(M).$$

В качестве примера вероятностных моделей, широко используемых в океанологии, можно привести модель, которая отображает турбулентное распространение тепла или солей в двумерной области. При этом уравнение диффузии и соответствующие краевые условия целесообразно привести к безразмерному виду в области 1×1 . В этом случае модель будет представлена параболическим уравнением

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2}; \quad 0 < x, y < 1; \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.72)$$

с начальными и граничными условиями

$$\begin{aligned} S(x, y, 0) &= f_1(x, y); \quad 0 \leq x, y \leq 1, \\ S(x, y, t)|_{\Gamma} &= f_2(Q, t); \quad 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (2.73)$$

Простейшая конечно-разностная аппроксимация уравнения и краевых условий может быть представлена выражениями

$$\begin{aligned} S_{i,j,k+1} &= \sigma(S_{i+1,j,k} + S_{i-1,j,k} + S_{i,j+1,k} + S_{i,j-1,k}) + (1 - 4\sigma)S_{i,j,k}, \\ S(x, y, 0) &= S(\Theta_{i,j}, Q) = f_{i,j}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$S(x, y, t) = f(Q, k),$$

где $\sigma = \frac{\Delta t}{h^2}$ — соотношение между временным и пространственным шагами.

Наиболее удобным для вероятностного моделирования уравнения (2.74) является условие

$$0 < \sigma \leq 0,25.$$

Моделирование блуждающей частицы в двумерной области проводится по методике, рассмотренной выше. После серии испытаний определяется среднее арифметическое чисел, накопленных сумматором за N испытаний, что и является искомым решением задачи $S_{x,y,t}$.

Метод статистических испытаний, относящийся к группе методов математического моделирования, по своему принципу и технике выполнения несравненно ближе к экспериментальным математическим методам, чем к классическим (аналитическим, численным).

Для моделирования блуждания частиц по узлам сеточной области может быть использована электрическая сетка-аналог, собранная из сопротивлений, в которую «выпускаются» электроны. Для каждого электрона, выпускаемого в фиксированную точку, равновероятно любое из четырех направлений в сеточной области. Электрон, попавший на ее границу, не поступит снова в сетку, а уйдет обратно в источник тока. Необходимо определить количество электронов n_L , попавших в точку L_i границы области.

Количество электронов, проходящих по проводнику, пропорционально силе тока в нем, т. е. $n_L = cI_L$. Отсюда количество электронов, попавших в точку границы, по отношению к общему их числу равно

$$p_L = \frac{n_L}{N} = \frac{cI_L}{N} = \frac{cU_L}{NR} = \frac{cG_L}{NR\nu}, \quad (2.75)$$

где c — коэффициент пропорциональности; R — сопротивление проводника; U_L — напряжение на его концах; G_L — функция Грина, вводимая при решении интегральным методом задачи Дирихле; ν — множитель пропорциональности между U и G .

При использовании интегрального метода решение задачи для области, ограниченной контуром L , находится по формуле

$$U(M) = \int_L \frac{\partial G(L, M)}{\partial n} U(L) dL, \quad (2.76)$$

где L — переменная точка на границе области.

При шаге сеточной области h можно приближенно записать

$$\frac{\partial G}{\partial n} dL \approx \frac{G_L}{h} h = G_L. \quad (2.77)$$

Отсюда

$$U(M) = \sum_L G_L U_L. \quad (2.78)$$

Здесь $U(M)$ и $U(L)$ — значения функции соответственно в фиксированной точке M внутри области и в точке L на границе

$$U(M) = \frac{c}{NR_v} \sum_L G_L U_L, \quad (2.79)$$

причем

$$\sum_L p_L = \frac{c}{NR_v} \sum_L G_L = 1. \quad (2.80)$$

Для функции Грина имеем $\sum_{L_{\text{вн}}} G_L = 1$, поэтому $\frac{c}{NR_v} = 1$.

В результате

$$U(M) = \sum_L p_L U_L = \sum_L G_L U_L. \quad (2.81)$$

Таким образом, решение с помощью вероятностного метода получается по той же интегральной формуле. Отсюда следует, что функция Грина $G(L, M)$ численно равна вероятности попадания электрона из точки M в точку L .

Интегральный и вероятностный методы являются модификацией единого приближенного метода решения уравнений математической физики путем нахождения функции в дискретных точках. Однако интегральный метод применим лишь для тех областей, для которых известна функция Грина. Это обстоятельство ограничивает применение интегрального метода для областей сложной конфигурации.

Вероятностный метод пригоден для областей любой конфигурации, но он более трудоемкий. Применение его становится целесообразным в случае использования ЭВМ.

Эффект использования метода Монте-Карло на ЭВМ зависит от двух основных факторов: качества источника случайных чисел и выбора рационального алгоритма счета.

Случайные числа можно получить с помощью простых алгоритмов на основе имитации хаотического перемешивания разрядов чисел в определенной последовательности. Программы-генераторы случайных чисел обычно записывают в коде машины в виде стандартных программ. Равномерно распределенные случайные числа используют для генерирования случайных чисел, подчиняющихся законам распределения, отличным от равномерного.

Другой способ получения случайных чисел заключается в использовании специального устройства в ЭВМ — «датчика» случайных чисел, который преобразует результаты случайного физического процесса в последовательность двоичных разрядов в маши-

не, таким образом получая случайную величину. Использование датчика случайных чисел повышает скорость вычислений, так как в каждый такт работы ЭВМ в фиксированную стандартную ячейку памяти выдается новое случайное число.

Способы получения случайных чисел с помощью физического процесса основываются либо на излучении радиоактивных веществ, либо на шумах в цепях ЭВМ, которые при усилении могут обеспечить достаточную флуктуацию выходного напряжения.

Положительной стороной вероятностного метода решения задач также является то обстоятельство, что при определении функции в какой-либо точке области не требуется знать ее значения в других точках.

Однако статистический метод решения краевых задач обладает низкой скоростью сходимости. Использование методов ускорения сходимости, и в частности метода последовательного сокращения размерности, который может быть применен для решения всех уравнений математической физики, ставит статистический метод на один уровень с другими современными вычислительными методами.

Однотипность многократных вычислительных операций дает возможность реализовать метод статистических испытаний на простых специализированных вычислительных машинах, позволяющих путем применения ограниченного числа команд повысить скорость решения задач.

На базе таких специализированных ВМ и универсальной ЭВМ создан цифровый вероятностный вычислительный комплекс (ЦВВК), с помощью которого на решение задачи затрачивается времени на 2—3 порядка меньше, чем при решении на универсальной ЭВМ.

Метод статистического моделирования с помощью ЦВВК сочетает в себе достоинства дискретной вычислительной техники и аналоговых моделей. Он стоек по отношению к случайным сбоям, позволяет полностью автоматизировать процессы ввода и вывода информации и дает возможность оперативного вмешательства в вычислительный процесс и перебора любого числа вариантов решения задачи. При статистическом моделировании до 100% используется оперативная память, решение можно получать выборочно для любого узла области с заданной точностью.

ЦВВК имеет преимущества перед аналого-цифровыми вычислительными комплексами — гибридными моделями, которые используют положительные специфические свойства аналоговых моделей (наглядность, быстрое действие, простота набора схемы) и цифровых машин (точность, хранение в памяти нужных данных, результатов анализа и т. д.).

Примерно при одинаковой скорости решения задачи для одинакового числа узлов сеточной области и точности вычисления стоимость, габариты и потребляемая мощность ЦВВК значительно ниже соответствующих габаритов аналого-цифрового комплекса.

Глава 3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ОСНОВНЫХ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

3.1. Моделирование ветрового волнения

Морское волнение не представляет собой регулярную последовательность правильных волн. Они бывают более или менее одинаковыми только у зыби. Обычные ветровые волны трехмерны с различными длинами, уклонами и периодом, хотя в зависимости от скорости ветра, времени его действия, глубины и разгона существует преобладание определенных размеров волн. Распределение элементов волн имеет вероятностный характер. Это должно учитываться при моделировании ветрового волнения с использованием в качестве воспроизводимой функции спектральной плотности $S = S(\omega, \Theta, x, y, t)$.

Теория формирования спектральной структуры волнения основывается на анализе уравнения баланса спектральной энергии волн, которое в общем виде может быть записано следующим образом [1]:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla S + \mathbf{k} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{k}} = G. \quad (3.1)$$

Здесь $S = S(\omega, \Theta, x, y, t)$ — пространственно-временная функция спектральной плотности волнения; ω — угловая частота колебаний; Θ — направление распространения спектральных составляющих; $\mathbf{v}$ — вектор групповой скорости переноса спектральной энергии; $\mathbf{k}$ — вектор волнового числа; G — характеризует процессы, изменяющие локальную энергию волн; $\mathbf{k} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{k}}$ — характеризует адвективный перенос энергии волн на мелководье с учетом их рефракции.

В условиях глубокого моря $\mathbf{k} \frac{\partial S}{\partial \mathbf{k}} = 0$ и уравнение (3.1) принимает вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \nabla S = G. \quad (3.2)$$

Составляющие вектора групповой скорости в прямоугольной системе координат представлены выражениями

$$v_x = \frac{g}{2\omega} \cos \Theta; \quad v_y = \frac{g}{2\omega} \sin \Theta.$$

В результате уравнение (3.2) примет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{g}{2\omega} \cos \Theta \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{g}{2\omega} \sin \Theta \frac{\partial S}{\partial y} = G. \quad (3.3)$$

Функция G в общем виде связана с самим спектром, поэтому аналитическое решение уравнений (3.1) и (3.3) имеет место лишь в отдельных случаях. При $G=0$ уравнение (3.2) описывает распространение мертвой зыби в глубоком море.

Вид функции G оказывает большое влияние на решения исходных уравнений. Она может быть представлена в виде суммы компонентов, описывающих различные механизмы развития и затухания ветрового волнения, в совокупности формирующие спектр ветрового волнения.

Обычно первые два компонента G_1 и G_2 имеют вид

$$G_1 = \alpha, \quad G_2 = \beta S(k).$$

Параметр α описывает механизм передачи энергии, которому соответствует возрастание плотности энергии по линейному закону,

$$\alpha = \frac{\pi \omega^2}{2\rho g} \Pi(k, \omega). \quad (3.4)$$

Здесь $\Pi(k, \omega)$ — спектр флуктуаций атмосферного давления в турбулентном ветровом потоке.

Параметр β , описывающий механизм передачи энергии, которому соответствует возрастание плотности энергии по экспоненте, может быть получен из выражения

$$\beta = \frac{\rho_a}{\rho_w} \left(\frac{v \cos \varphi}{c} - 1 \right), \quad (3.5)$$

где ρ_a и ρ_w — соответственно плотности воздуха и воды; c — фазовая скорость волны; φ — угол между направлением распространения спектральных составляющих и направлением ветра.

Функция источника

$$G_3 = S(k) \int \gamma(k, k') S(k') dk'$$

представляет собой нелинейную поправку к результатам, полученным по теории Майлза.

Компонент

$$G_4 = -\delta S(k) + \int \varepsilon(k, k') S(k') dk'$$

выражает перенос энергии в результате взаимодействия волнового поля и атмосферной циркуляции. При детализации учитываемых сил появляются новые слагаемые.

Метод расчета спектральных характеристик на основе аналитического решения упрощенного уравнения баланса спектральной энергии предложил С. Л. Дженюк [7]. Уравнение модели представлено им в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t} + v_x \frac{\partial S}{\partial x} + v_y \frac{\partial S}{\partial y} = (\alpha + \beta S) \left(1 - \frac{S}{S_\infty} \right), \quad (3.6)$$

где $\hat{S}_\infty$ — предельно возможное значение спектральной плотности.

Выбор функции спектра или функции углового распределения спектральной энергии зависит от решения конкретной задачи в зависимости от характера волнения.

При расчете от спокойного состояния моря начальные условия задаются в виде

$$S(\omega, \Theta, x, y)_{t=0} = 0.$$

Если же в начальный момент волнение существует, то принимается

$$S|_{t=0} = S_0(\Theta, \omega, x, y) = S(\omega)Q(\omega, \Theta).$$

Для океанических условий приемлемы аппроксимации, полученные на основе обработки данных наблюдений над волнением [1]

$$S(\omega) = A\omega^{-m} \exp(-B\omega^{-n}), \quad (3.7)$$

где A , B , m и n — параметры аппроксимации.

В частности, для малых разгонов аппроксимативная формула имеет вид

$$S(\omega) = 8 \cdot 10^{-3} \frac{g^2}{\omega^5} \exp \left[-0,74 \left(\frac{\omega_{\max}}{\omega} \right)^4 \right]. \quad (3.8)$$

Здесь $\omega_{\max} = \frac{g}{V}$, где V — скорость ветра, м/с.

$$Q(\omega, \Theta) = 2^{\frac{-1,8}{\omega}} \frac{\Gamma \left[2 \left(\frac{1,8}{\omega} + 1 \right) \right]}{\Gamma^2 \left(\frac{1,8}{\omega} + 1 \right)} \cos \frac{1,8}{\omega} \Theta, \quad (3.9)$$

где Γ — гамма-функция.

Существенные трудности возникают с определением граничных условий S_r .

Для точек, расположенных вблизи берега при ветре со стороны берега выполняется условие $S_r = 0$. При распространении волн к берегу спектральная плотность в этих точках имеет конечное значение.

Для задания значений спектральной плотности энергии на жидких границах используются данные наблюдений высоты, периода и направления распространения волн либо расчетные величины, полученные, например, по эмпирическим формулам.

Спектральную плотность $S_r(\omega, \Theta)$ можно вычислить по одной из аппроксимативных формул спектра.

При слабом волнении на жидкой границе значения спектральной плотности можно принять равными нулю. Подобное условие

принимается также при значительном превышении расчетной области акватории, для которой определяется волновое поле.

При фиксированных α , β , ω и Θ решение уравнения (3.6) находится методом характеристик в виде

$$S = \frac{S_{\infty} (\alpha + \beta S^*) \exp \left[\left(\frac{\alpha}{S_{\infty}} + \beta \right) t - \alpha (S_{\infty} - S^*) \right]}{\beta (S_{\infty} - S^*) + (\alpha + \beta S^*) \exp \left[\left(\frac{\alpha}{S_{\infty}} - \beta \right) t \right]}, \quad (3.10)$$

$$\text{где } S^* = \begin{cases} S_0 [x - v_x t, y - v_y t] & \text{при } (x, y) \in Q \\ S_1 \left(x', y', \frac{x - x'}{v_x} \equiv \frac{y - y'}{v_y} \right) & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

S_{∞} — предельно возможное значение спектральной плотности. По данным [7] $S_{\infty} = 0,636$, Q — расчетная область.

Если разгон волн неограниченный и волнообразование происходит из состояния покоя ($S_0 = 0$ при $t = 0$), аналитическое решение имеет вид

$$S(t) = \frac{\alpha \left[\exp \left(\frac{\alpha}{S_{\infty}} + \beta \right) t - 1 \right]}{\beta + \frac{\alpha}{S_{\infty}} \exp \left[\left(\frac{\alpha}{S_{\infty}} + \beta \right) t \right]}. \quad (3.11)$$

Для установившегося волнения согласно рассматриваемой модели получается

$$S(x) = \frac{\alpha \left[\exp \left(\frac{\alpha}{S_{\infty}} + \beta \right) \frac{x}{v_x} - 1 \right]}{\beta + \frac{\alpha}{S_{\infty}} \exp \left[\left(\frac{\alpha}{S_{\infty}} + \beta \right) \frac{x}{v_x} \right]}. \quad (3.12)$$

Здесь α и β принимаются согласно формулам (3.4) и (3.5).

Для решения уравнения (3.3) в полном виде, что соответствует определению элементов смешанного волнения, непрерывные поля характеристик заменяются дискретными. Расчет двумерного спектра волн выполняется численно.

Моделирование развития, распространения и затухания волн с учетом нелинейного взаимодействия их компонентов проводится путем численного решения уравнения (3.3) для фиксированных значений частоты ω и направления распространения Θ спектральных составляющих.

Уравнение аппроксимируется двухслойной разностной схемой с весами c_i , которые выбираются в зависимости от направления распространения Θ спектральных составляющих, величин v_x , v_y и условий устойчивости:

$$\begin{aligned}
& \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j}^n}{\Delta t} + c_1 v_x \frac{S_{i,j}^n - S_{i-1,j}^n}{\Delta x} + c_2 v_y \frac{S_{i,j}^n - S_{i,j-1}^n}{\Delta y} + \\
& + c_3 v_x \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i-1,j}^{n+1}}{\Delta x} + c_4 v_y \frac{S_{i,j}^{n+1} - S_{i,j-1}^{n+1}}{\Delta y} + c_5 v_x \frac{S_{i+1,j}^n - S_{i,j}^n}{\Delta x} + \\
& + c_6 v_y \frac{S_{i,j+1}^n - S_{i,j}^n}{\Delta y} + c_7 v_x \frac{S_{i+1,j}^{n+1} - S_{i,j}^{n+1}}{\Delta x} + \\
& + c_8 v_y \frac{S_{i,j+1}^{n+1} - S_{i,j}^{n+1}}{\Delta y} = G_{i,j}^n.
\end{aligned} \quad (3.13)$$

Разностная схема устойчива при выполнении условия

$$c_1 + c_3 + c_5 + c_7 = 1, \quad c_2 + c_4 + c_6 + c_8 = 0$$

$$\text{и} \quad \min(\Delta x, \Delta y) \geq g \Delta t / 2 \omega_{\min}, \quad (3.14)$$

где $\omega_{\min}$ — наименьшее значение частоты, для которой вычисляется спектральная плотность.

Алгоритм, положенный в основу программы на ЭВМ [1], реализует следующие этапы решения задачи:

1. Ввод данных о скорости и направлении ветра в узлах сеточной области.

2. Расчет изменений энергии спектральных составляющих в результате развития волн, их распространения, обрушения гребней и нелинейного переноса энергии по спектру.

3. Суммирование компонентов спектра в узлах сетки по частотам и направлениям и расчет средней высоты и периода волн по формулам

$$\bar{h}(x, y, t) = \left[2\pi \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^m S(\omega_i, \theta_j, x, y, t) \Delta \omega_i \Delta \theta_j \right]^{1/2}, \quad (3.15)$$

$$\bar{T}(x, y, t) = \left[\frac{2\pi \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^m S(\omega_i, \theta_j, x, y, t) \Delta \omega_i \Delta \theta_j}{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^m S(\omega_i, \theta_j, x, y, t) \omega_i^2 \Delta \omega_i \Delta \theta_j} \right]^{1/2}, \quad (3.16)$$

где r — количество выбранных частот; m — количество направлений.

Выбор оптимальной модели ветрового волнения зависит от точности, репрезентативности и полноты исходных данных о ветре и волнении. Чем больше шаг сетки и интервал времени между последовательными полями ветра, тем сильнее сглаживание резких изменений в скорости и направлении ветра, что приводит к более плавному и медленному затуханию волн.

Расхождение между моделируемыми спектрами и вычисленными

ми по наблюдениям связаны, главным образом, с неточным заданием полей ветра.

Рассмотренные модели не исчерпывают всех методов расчета характеристик морского волнения на основе уравнения баланса спектральной энергии волн.

В сложных условиях волнообразования, особенно в условиях мелкого моря, их использование затруднено из-за отсутствия необходимых данных наблюдений и слабой изученности отдельных составляющих уравнения баланса волновой энергии.

Спектральные модели предусматривают знание спектра турбулентности воздушного потока, вертикального градиента ветра, распределение характеристик ветра по пространству и времени.

В связи с этим в практической работе по расчету волнения, наряду с гидродинамическим моделированием, развиваются физико-статистические методы, основанные на анализе наблюдений над ветром и волнением.

Анализ результатов численного моделирования ветровых волн показывает большое соответствие расчетных и наблюдаемых значений высот волн на стадии их развития. На стадии затухания волн на расхождении результатов расчета с наблюдаемыми данными сказывается пространственное и временное сглаживание изменений скорости и направления ветра, что приводит к более медленному затуханию расчетных высот волн по сравнению с действительными.

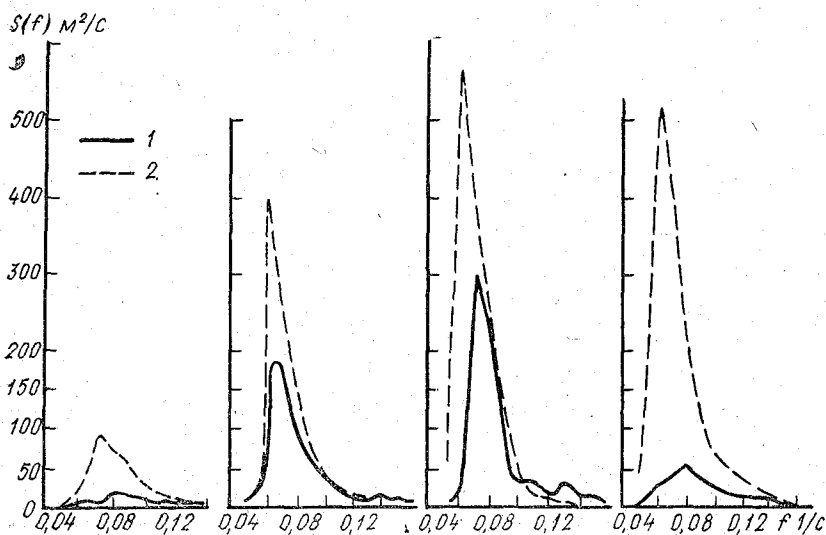


Рис. 4. Наблюдаемые и вычисленные частотные спектры для различных стадий развития шторма [1]:

1 — по наблюдениям; 2 — по расчетам

Наблюдаемые и моделируемые частотные спектры волн при развитии волнения находятся в меньшем соответствии по сравнению с высотами волн. Особенно это заметно в области низких частот. В сторону низких частот смещаются и максимумы частотных спектров, получаемые при моделировании (рис. 4). Расхождения между наблюдаемыми и вычисляемыми спектрами вызваны, главным образом, неточным заданием полей ветра.

3.2. Моделирование длиннопериодных колебаний уровня

Несмотря на наибольшую изученность длинноволновых процессов из всех движений океана, они, вследствие практической важности, продолжают привлекать внимание океанологов. Пока еще не все стороны этого явления поддаются экспериментальному изучению. Многие черты явления удалось познать посредством математического моделирования. Оно дает возможность решить ряд важных задач:

1. Исследование роли различных факторов, определяющих колебания уровня.
2. Изучение режима сгонно-нагонных колебаний уровня.
3. Прогноз уровня в условиях изменения морфометрических характеристик акватории (строительство дамб и других гидротехнических сооружений) и физико-географических особенностей (изъятие стока и т. п.).

Аналитические методы гидродинамического моделирования могут быть применены для идеализированных ситуаций и морфометрических характеристик бассейнов.

В сложных морфометрических и физико-географических условиях плодотворным является гидродинамическое моделирование на основе численных методов решения уравнений.

В основе математического моделирования длиннопериодных колебаний уровня чаще всего лежат разностные методы решения модельных задач для уравнений мелкой воды. Во многих случаях, когда представляет интерес только общий перенос воды и изменение уровня, математическая модель состоит из двух проинтегрированных по вертикали уравнений движения и уравнения неразрывности

$$\left. \begin{aligned} U_t + [(U^2/H)_x + (UV/H)_y] + gH\zeta_x - fV &= X - \chi UR, \\ V_t + [(UV/H)_x + (V^2/H)_y] + gH\zeta_y + fU &= Y - \chi VR, \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

$$\zeta_t + U_x + V_y = 0,$$

$$R = \frac{G}{H^2}; \quad G = \sqrt{U^2 + V^2}; \quad H = h(x, y) + \zeta(x, y, t).$$

Здесь ζ — отклонение уровня от невозмущенной поверхности; U , V — составляющие полного потока,

$$U = \int_{-H}^{\xi} u dz, \quad V = \int_{-H}^{\xi} v dz$$

X , Y — составляющие внешней силы; χ — коэффициент сопротивления, индексы при переменных обозначают дифференцирование.

Эта система уравнений дополняется соответствующими граничными условиями. На твердых границах области принято задавать условия непротекания, т. е. нормальные к берегу составляющие скорости течения равны нулю.

Используются и модели, в уравнения которых вводятся члены, аппроксимирующие горизонтальный турбулентный обмен, вследствие чего на твердой границе задается условие прилипания: $U=0$, $V=0$, которое не зависит от ориентации границ. Однако оценка порядка членов уравнения движения показывает незначительную роль горизонтального обмена в процессах длинноволновых колебаний.

На жидкой границе области нужно знать расход воды или колебания уровня как функции времени. Но они из-за отсутствия данных наблюдений в большинстве случаев не известны. Поэтому практически используют следующие варианты граничных условий:

1. Имитация на жидкой границе условий жесткой стенки. Это, по-видимому, наиболее грубый подход к решению задачи.

2. Задание отсутствия колебания на границе, т. е. $\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0$. Такое граничное условие близко к реальному при соседстве моделируемой акватории с бассейном, имеющим большую площадь и значительные глубины.

3. Задание уровня на водной границе по закону «обратного барометра».

4. Условие излучения на жидкой границе. В этом случае полный поток по нормали U к границе пропорционален денивелиации уровня ξ и фазовой скорости волны C :

$$U = C\xi|_r. \quad (3.18)$$

При использовании для описания длинных волн трехмерной модели условия на боковых границах морей аналогичны условиям для двухмерной задачи с тем лишь отличием, что расходы на жидком контуре вычисляются не по полным потокам или средним по вертикали скоростям течений, а по составляющим скоростей, вносящих наибольший вклад в формирование вертикальной структуры течений.

При моделировании длиннопериодных колебаний уровня необходимо выдержать отмеченное в разделе 2.3 соотношение шагов пространственно-временной сетки, которое определяется требуемой точностью решения и устойчивостью разностной схемы.

Имеются различные конечно-разностные схемы, пригодные для решения задач по моделированию длинных волн [6].

При выборе пространственного шага сетки должно учитываться то обстоятельство, что минимальная длина волны, которая учитывается в решении, равна, как это отмечено в разделе 2.3, двойному шагу сетки, т. е. $\lambda_{\min} = 2\Delta$. В настоящее время чаще всего используются явные схемы по времени, так как они просты в реализации и не требуют большой оперативной памяти ЭВМ. Но из-за обычно малых Δ приходится применять малые шаги по времени Δt , чтобы удовлетворялось условие Куранта. Причем, целесообразно аппроксимировать производные по времени центральными разностями, так как в линейных уравнениях амплитуды гармоник численного решения в этом случае не демпфируются.

Используются также полунеявные схемы, позволяющие реализовать явные схемы при уменьшенных ограничениях по устойчивости. Применение неявных схем при малом временном шаге приводит к существенному возрастанию объема вычислений.

Для линейной задачи простейший вариант ее численной реализации предусматривает использование сетки, на которой каждая из неизвестных U , V , ξ вычисляется в перемежающихся точках. Такое расположение узлов дает возможность аппроксимировать границу расчетной области наиболее простым путем — отрезками прямых, параллельных осям координат. Наибольшую известность из подобных аппроксимаций приобрел HN-метод (Hydrodynamical Numerical Method). При учете в модели горизонтальной турбулентной диффузии, т. е. включении в уравнения (3.17) слагаемых $K\nabla^2 U$ и $K\nabla^2 V$, применяется разработанный Г. И. Марчуком метод дробных шагов, который обеспечивает устойчивое решение, если выполняется условие $\Delta t K / \Delta^2 < 1$ [10].

На результаты моделирования длинноволновых колебаний уровня заметно влияют нелинейные эффекты, представленные в уравнениях нелинейными ускорениями, квадратичной зависимостью трения на дне от полного потока и членом $gH\Delta\xi$ в уравнениях (3.17).

По некоторым оценкам нелинейные ускорения имеют порядок ξ/h по отношению к стационарным членам, что позволяет пренебрегать ими в точках с глубинами, превышающими 10—15 м.

Постановка нелинейной задачи осложняется в областях, частично ограниченных жидким контуром.

Существуют также проблемы численной реализации полных уравнений мелкой воды для области произвольных очертаний. Установлено, что погрешности аппроксимации уравнений являются основной причиной возникновения нелинейной неустойчивости в подобных задачах.

Важнейшим этапом создания гидродинамической модели длиннопериодных колебаний уровня является их калибровка. Она преследует цель адаптировать модель к конкретным физико-географическим условиям исследуемой акватории и включает в себя: оптимальную аппроксимацию рельефа дна и конфигурации бере-

гов; определение оптимальных параметров модели; выбор оптимальных граничных условий на жидком контуре.

При калибровке модели исследуется влияние отдельных факторов на формирование колебаний уровня, таких, как трение у дна и на поверхности, водообмен между морями, кориолисово ускорение, речной сток, динамика барических систем, рельеф дна, плотностная стратификация, приливы, нелинейные эффекты, условия на жидких границах, сопряжение сеточных областей с различным пространственным разрежением и т. д.

Примером калибровки может служить рис. 5, на котором приведены результаты воспроизведения колебаний уровня в устье Невы при учете в математической модели разных сил. Во многих случаях только моделирование позволяет установить вклад того или иного фактора. В частности, это относится к донному трению, которое зависит от характера дна и придонного течения, а в данной формулировке модели выражается через полный поток и подбираемый экспериментально коэффициент трения.

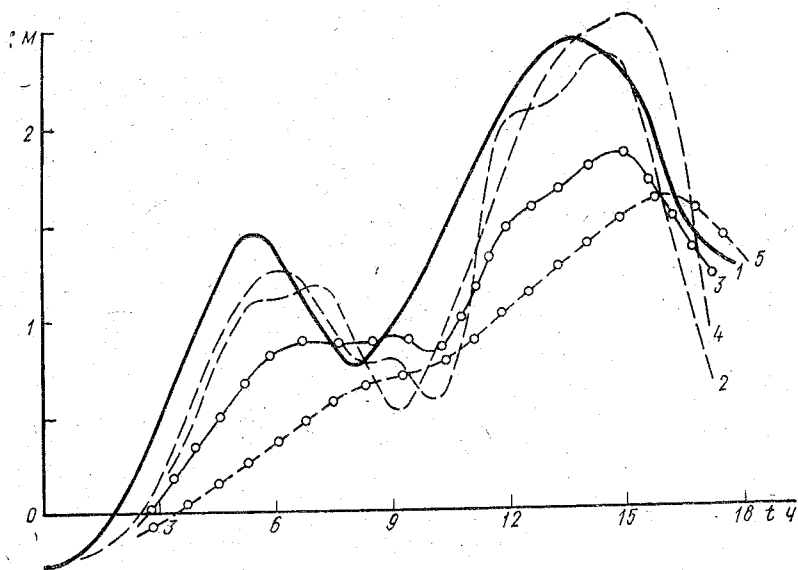


Рис. 5. Моделирование колебаний уровня в устье Невы [6]:
1 — по измерениям; 2, 4 — соответственно по двумерной и одномерной моделям, без трения; 3, 5 — то же с трением

Качество моделирования длиннопериодных колебаний уровня анемобарического происхождения в значительной степени зависит от точности метеорологической информации. При моделировании нагонов, связанных с прохождением барических систем, наиболее распространенным является задание некоторых известных пара-

метров, например, давления в центре барического образования, максимальной скорости ветра и радиуса его распространения, скорости и направления движения циклона.

В настоящее время математические модели, в основе которых содержатся уравнения мелкой воды, широко применяются для изучения приливов, штормовых нагонов, волн цунами, а также колебаний уровня в моделях непериодических течений.

3.3. Моделирование циркуляции вод

Чрезвычайно большие трудности с проведением инструментальных съемок течений заставляют во многих случаях воспроизводить их с помощью различных математических моделей. Если интерес представляет циркуляция, сформировавшаяся при существующей термохалинной структуре океана или моря, то используются диагностические модели. Их полнота различна: от интегральных двумерных до трехмерных вихреразрешающих.

При воспроизведении развития циркуляции в океане во времени приходится учитывать изменения температуры и солености воды. Модель становится существенно более сложной и переходит в категорию прогностических.

Любая диагностическая модель, отображающая не только дрейфовую составляющую течений, состоит из двух уравнений движения по горизонтальным координатам и уравнения неразрывности, дополненных соответствующими граничными условиями, а также уравнением, описывающим турбулентное перемешивание. Вертикальная составляющая скорости определяется из уравнения неразрывности, а не из проекции уравнения движения на вертикальную ось, так как в нем гидростатические составляющие на несколько порядков больше остальных членов, которые трудно определить.

В наиболее простой линеаризированной форме уравнения движения не содержат адвективных слагаемых, играющих существенную роль в боковых пограничных слоях или на границах струйных течений. Если точность отображения циркуляции в этих областях не принципиальна, то модель представляют в линейной форме, изложенной в учебнике [8].

Существуют различные способы решения уравнений движения модели. Наиболее широко распространено предварительное их интегрирование по вертикали для определения изменения уровня ζ . Гораздо реже встречается непосредственное решение уравнений движения, так как его результаты сильно зависят от коэффициента турбулентного перемешивания, который пока определяется с малой точностью.

Проинтегрированные по вертикали уравнения изложенной линейной модели имеют вид

$$-fV = \frac{P_H}{\rho_0} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{P_z}{\rho_0} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \int_{-z}^H P dz + \frac{\tau_x^0}{\rho_0} - \frac{\tau_x^H}{\rho_0} + K \nabla^2 U. \quad (3.19)$$

$$fU = \frac{P_H}{\rho_0} \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{P_z}{\rho_0} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-z}^H P dz + \frac{\tau_y^0}{\rho_0} - \frac{\tau_y^H}{\rho_0} + K \nabla^2 V. \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \quad (3.21)$$

где $U = \int_{-z}^H u dz$, $V = \int_{-z}^H v dz$; K — коэффициент горизонтальной турбулентности; P — давление столба воды.

Для получения уравнения, характеризующего изменение уровня, производится подстановка значений U и V в уравнение неразрывности. Трудность решения уравнения заключается в необходимости задания граничных значений уровня, который обычно не бывает известным, хотя имеются некоторые приемы его приближенного определения. Более просто формулируются граничные условия в том случае, когда от полных потоков осуществляется переход к интегральной функции тока Ψ по формулам

$$U = -\frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (3.22)$$

При этом предварительно из уравнений (3.19) и (3.20) операцией вихря исключаются члены, содержащие изменения уровня. В результате получается одно уравнение, содержащее неизвестную функцию Ψ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f}{H} \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{f}{H} \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right) = \text{rot} \frac{\tau^H - \tau^0}{\rho H} - K \nabla^4 \Psi + \\ + \frac{\partial}{\partial x} \int_0^H \frac{(H-z)}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial y} dz - \frac{\partial}{\partial y} \int_0^H \frac{(H-z)}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} dz. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Для этого уравнения на твердой границе $\Psi_r = \text{const}$ и может быть принято $\text{const} = 0$. На жидкой границе должен быть известным интегральный поток воды, равный разности функций тока на концах этого участка границы.

Напряжение трения у дна τ^H зависит от Ψ и выражается либо как функция коэффициента турбулентности по модели Аккерблома, либо в виде функции от коэффициента трения и градиента Ψ .

В обоих случаях придонное трение воспроизводится приближенно из-за слабого знания упомянутых коэффициентов.

При известных значениях поля плотности и напряжения трения ветра уравнение (3.23) легко решается численным способом относительно Ψ . При этом сеточная область выбирается в соответствии с рекомендациями, изложенными в разделе 2.3. Наиболее просто решение получается при использовании итерационного метода.

Вычисленное поле интегральных функций тока в узлах сетки позволяет из уравнений (3.19) и (3.20) определить наклоны уровней. Естественно, предварительно в этих уравнениях полные потоки выражаются через функции тока по соотношениям (3.22). Далее по известным наклонам уровня, напряжению трения ветра и полю плотности из основных уравнений движения находятся скорости течения на требуемых горизонтах. Такова стандартная процедура моделирования поля течений.

Если сила, вызывающая течение, меняется с периодом в несколько суток (например, меняется ветер соответственно естественному синоптическому периоду), то интегральная циркуляция будет подстраиваться к напряжению трения ветра с запаздыванием и не будет выходить на стационарный режим. Это требует учета в математической модели нестационарного члена, что приводит к появлению в левой части уравнения (3.23) слагаемого $\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \Psi$.

Решение такого уравнения наиболее просто проводить по явной схеме, учитывая рекомендации, изложенные в разделе 2.3.

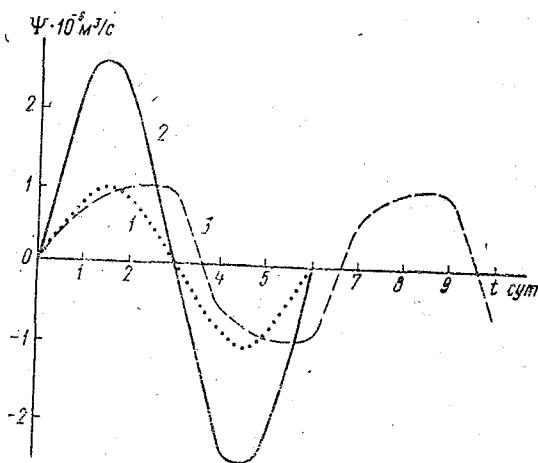


Рис. 6. Интегральная функция тока в одном из узлов сетки, вычисленная по стационарной (2) и нестационарной (3) моделям. Напряжение трения ветра (1) дано в условных единицах

В качестве примера на рис. 6 приведены значения функций тока в Балтийском море, вычисленные при изменении напряжения трения по закону

$$\tau = \tau_c(x, y) \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right). \quad (3.24)$$

На рисунке видно, что функция тока не только отстает от вынуждающей силы по времени, но и оказывается меньше по абсолютной величине, чем Ψ , полученная на основе стационарной модели. Естественно, что воспроизведенные по нестационарной модели изменения уровня моря и течения будут также отличаться от их значений, вычисленных без учета нестационарности. Эти отклонения тем больше, чем меньше период изменений вынуждающей силы.

При воспроизведении циркуляции вод в горизонтальных пограничных зонах у берегов и в других районах с повышенными горизонтальными градиентами скоростей течений результаты будут точнее, если в уравнениях движения модели учесть нелинейные члены. Пока еще не разработан метод получения интегральных функций тока от произведения скоростей течения. Если использовать приближенное представление так, как это изложено в «Динамике океана», то в левую часть уравнения (3.23) нужно добавить сумму членов

$$\frac{1}{H} J(\Psi, \nabla^2 \Psi) + J\left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{H}\right) + J\left(\Psi, \frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{H}\right). \quad (3.25)$$

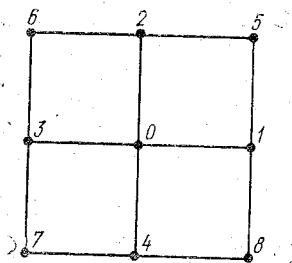


Рис. 7. Нумерация узлов в сеточном шаблоне

При конечно-разностной аппроксимации якобианов центральной разностью в тех случаях, когда Ψ или ее производные меняются вдоль границ области интегрирования, может возникнуть нелинейная неустойчивость решения [12]. Для ее преодоления используется 9-точечная аппроксимация якобиана по схеме

$$J(\Psi, \Phi) = \alpha J_1(\Psi, \Phi) + \beta J_2(\Psi, \Phi) + \gamma J_3(\Psi, \Phi) \quad (3.26)$$

при условии, что $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Якобианы J_1 , J_2 и J_3 аппроксимируются выражениями с нумерацией узлов сетки, приведенной на рис. 7,

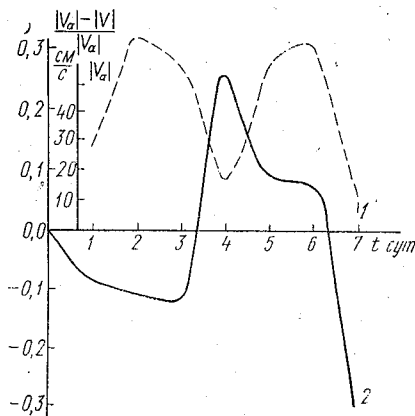
$$J_1(\Psi, \Phi) = \frac{1}{4\Delta^2} [(\Psi_1 - \Psi_3)(\Phi_2 - \Phi_4) - (\Psi_2 - \Psi_4)(\Phi_1 - \Phi_3)],$$

$$J_2(\Psi, \Phi) = \frac{1}{4\Delta^2} [\Phi_2(\Psi_5 - \Psi_6) - \Phi_4(\Psi_8 - \Psi_7) - \Phi_1(\Psi_5 - \Psi_8) + \\ + \Phi_3(\Psi_6 - \Psi_7)],$$

$$J_3(\Psi, \Phi) = \frac{1}{4\Delta^2} [\Psi_1(\Phi_5 - \Phi_8) - \Psi_3(\Phi_6 - \Phi_7) - \Psi_2(\Phi_5 - \Phi_6) + \\ + \Psi_4(\Phi_8 - \Phi_7)]. \quad (3.27)$$

В том случае, когда $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{3}$, приведенную аппроксимацию обычно называют якобиан Аракавы (имя предложившего ее исследователя).

Рис. 8. Роль адвективных слагаемых при моделировании
1 — модуль интегральной скорости течения с учетом адвективных слагаемых; 2 — относительный вклад адвективной составляющей циркуляции; V_a, V — скорости течения с учетом и без учета адвективных слагаемых соответственно



Результаты моделирования показывают, что роль адвективных слагаемых довольно существенная (рис. 8).

3.4. Моделирование формирования термохалинного поля и циркуляции вод

Океанические, да и морские течения, даже в таких небольших и мелководных морях, как Балтийское и Белое, в значительной степени зависят от пространственной неоднородности поля плотности. Поскольку температура и соленость воды зависят не только от тепло- и влагообмена с атмосферой, но и от адвекции тепла и соли течениями, то нельзя более или менее точно смоделировать какое-то поле одного элемента без учета остальных, особенно на длительный отрезок времени. Это приводит к тому, что гидрологический процесс значительно большей длительностью, чем приливной, описывается системой уравнений, в которую входят уравнения диффузии тепла и соли, движения, неразрывности и состояния совместно с соответствующими краевыми условиями.

При составлении математической модели такого процесса следует иметь в виду разную инерционность термохалинных и дина-

мических процессов. Крупномасштабные изменения температуры и солености происходят медленнее, чем уровни и градиентных течений. Поэтому если воспроизводится совместное приспособление термохалинных процессов и циркуляции, то последняя вполне удовлетворительно описывается квазистационарными уравнениями движения. Но в том случае, когда ветер оказывает большое влияние на течения не только в верхнем слое моря, в уравнениях движения нужно учитывать нестационарные слагаемые.

Существуют два подхода к моделированию совместных циркуляции и термохалинных процессов. В первом случае в математическую модель входят все перечисленные выше уравнения, а во втором — уравнения диффузии тепла и соли посредством линеаризованного уравнения неразрывности объединяются в одно уравнение переноса плотности.

При включении в модель уравнений диффузии тепла и соли

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_T \frac{\partial T}{\partial z} \right) + K \nabla_r^2 T, \quad (3.28)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_S \frac{\partial S}{\partial z} \right) + K \nabla_r^2 S \quad (3.29)$$

в качестве граничного условия на поверхности моря следует использовать уравнения баланса тепла и соли:

$$B + c_a \rho_a c_V U (T_a - T_0) + L \rho_a c_V U (q_a - q_0) = c \rho k_T \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (3.30)$$

$$\rho_a c_V U (q_a - q_0) + \frac{\partial M}{\partial t} = \frac{\rho k_S}{S_0} \frac{\partial S}{\partial z}, \quad (3.31)$$

где c_a , ρ_a , T_a , q_a — теплоемкость при постоянном давлении, плотность, температура и удельная влажность воздуха; T_0 , q_0 — температура поверхности моря и удельная влажность воздуха около нее; U , c_V — скорость ветра и коэффициент трения; M — масса осадков.

Радиационный баланс B также зависит от температуры воды, но эта зависимость более слабая, чем у потоков тепла и влаги. Поэтому ее во внимание можно не принимать.

Эти уравнения составляют термохалинный блок модели, который позволяет воспроизвести температуру и соленость воды в бассейне, если известны их значения на его боковых границах и у дна, начальное распределение этих элементов, а также динамические характеристики вод, т. е. составляющие скорости течения и интенсивность турбулентного перемешивания в вертикальном и горизонтальном направлениях. Часто этот блок обособляется в виде термохалинной модели, используемой для изучения характера изменения температуры и солености, особенно в верхних слоях океана.

Обычно при этом вводится уравнение состояния, представленное одной из эмпирических формул Кнудсена, Линейкина, Мамаева и т. д. В общем виде, ограничиваясь квадратичной зависимостью от температуры, его можно представить в виде

$$\rho(T, S, P) = \rho_0 - a_1 T + a_2 T^2 - a_3 S T + a_4 S + a_5 P. \quad (3.32)$$

В термохалинной модели это уравнение используется чаще всего для определения перехода от устойчивой стратификации к конвекции и определения толщины слоя конвективного перемешивания h , в пределах которого вертикальный градиент плотности, вычисляемый по температуре и солёности, оказывается меньше адиабатического

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} < \left(\frac{\partial \rho}{\partial z} \right)_a, \quad z \leq h. \quad (3.33)$$

Решение уравнений (3.28) и (3.29) проводится несколькими способами. При постоянных скоростях течения и турбулентного перемешивания удастся получить их аналитические решения. Некоторые частные случаи таких решений приведены в «Физике океана» [16].

Иногда рассматривается изменение температуры и солёности в элементарном объеме воды, движущемся по известной траектории l с известной скоростью u , т. е. используется метод Лагранжа. При этом выделяются слои воды с одинаковыми скоростями переноса и уравнения решаются при замене $t = \frac{l}{u}$. Часто решения для каждого из слоев получаются аналитически. Трудность заключается в определении граничных условий для движущегося объема воды. Поэтому такой метод проще применять в том случае, когда направление течения по глубине меняется слабо.

Чаще уравнения (3.28) и (3.29) решаются численно, методом расщепления. Выделяются адвективная и диффузионная части уравнений

$$T^{(n+1/2)} = T^{(n)} + \mathbf{V} \nabla T^{(n)} \Delta t_1, \quad (3.34)$$

$$T^{(n+1)} = T^{(n)} + \frac{\partial}{\partial z} k \frac{\partial T}{\partial z} \Delta t_2^{(n+1/2)} + k \nabla^2 T^{(n+1/2)} \Delta t_2. \quad (3.35)$$

В первом из уравнений адвективные члены аппроксимируются направленными разностями «против потока», в результате чего возникает вычислительная вязкость, приводящая к устойчивости решения. Кроме того, при такой аппроксимации возмущения в поле температуры переносятся в направлении течения [12]. Численное решение уравнения (3.35) не сопряжено с большими трудностями и при выполнении условия Куранта (2.67) устойчиво.

Можно также применять расщепление с выделением в нем вертикального переноса тепла из-за сильной изменчивости температуры в этом направлении. При этом точнее такое уравнение решать прямым методом, например «прогонкой». Естественно, все изложенное справедливо также для уравнения (3.29).

При необходимости воспроизведения картины, отображающей не только поля температуры, солености и плотности воды, но и ее циркуляцию, в математическую модель дополнительно включаются уравнения с соответствующими краевыми условиями, изложенные в разделе 3.3. Для того чтобы модель была бы полной, нужно вводить уравнения, характеризующие генерацию и диссипацию энергии турбулентности. Однако из-за слабой изученности этих процессов и трудности связи их с осредненными значениями скоростей течения и плотностью воды, пока в преобладающем большинстве моделей коэффициенты турбулентности считаются известными.

Полная модель термохалинных процессов и циркуляции содержит 7 уравнений: 3—в термохалинном блоке: (3.28), (3.29), (3.32) и 4—в динамическом: уравнения для составляющих скоростей течения и неразрывности. В таком полном объеме модель не реализуют, так как необходимо исключить определение малых разностей больших величин и факторы, не играющие в конкретной задаче основной роли.

Обычно не используется уравнение, описывающее составляющую скорости течения по вертикали. Вместо него записывается уравнение статики

$$\frac{\partial P}{\partial z} = g\rho, \quad (3.36)$$

с достаточной точностью характеризующее изменение давления с глубиной. Для вычисления вертикальной скорости используется уравнение вихря скорости, в котором, как известно, геострофическая составляющая отсутствует. В простейшем случае без учета вязких членов оно имеет вид

$$f \frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{1}{\rho_0 f} \nabla^2 \left(\frac{\partial P}{\partial t} \right) + \frac{1}{\rho_0^2 f^2} J(P, \nabla^2 P) + \frac{1}{\rho_0 f} J(P, f). \quad (3.37)$$

Далее, как уже отмечалось в предыдущем параграфе, из-за квазигеострофичности течения не всегда нужен учет в уравнениях движения нестационарных и адвективных слагаемых. Поэтому в наиболее простых моделях, когда вынуждающая сила меняется с периодичностью декады (или еще медленнее) и не требуется детального воспроизведения циркуляции в прибрежном пограничном слое, используется квазигеострофическое представление течений. Это позволяет вводить циркуляционный блок в том виде, который изложен в разделе 3.3.

В качестве примера можно привести составленную С. В. Котым математическую модель, воспроизводящую поля перечисленных гидрологических элементов в Белом море. Поскольку в нем плотностная составляющая играет основную роль в генерации циркуляции вод (а меняется она медленно), то использовались квазигеострофические уравнения, изложенные в разделе 3.3. Термохалинная часть модели представлялась уравнениями (3.28) — (3.32). Дополнительно к перечисленным краевым условиям принимался

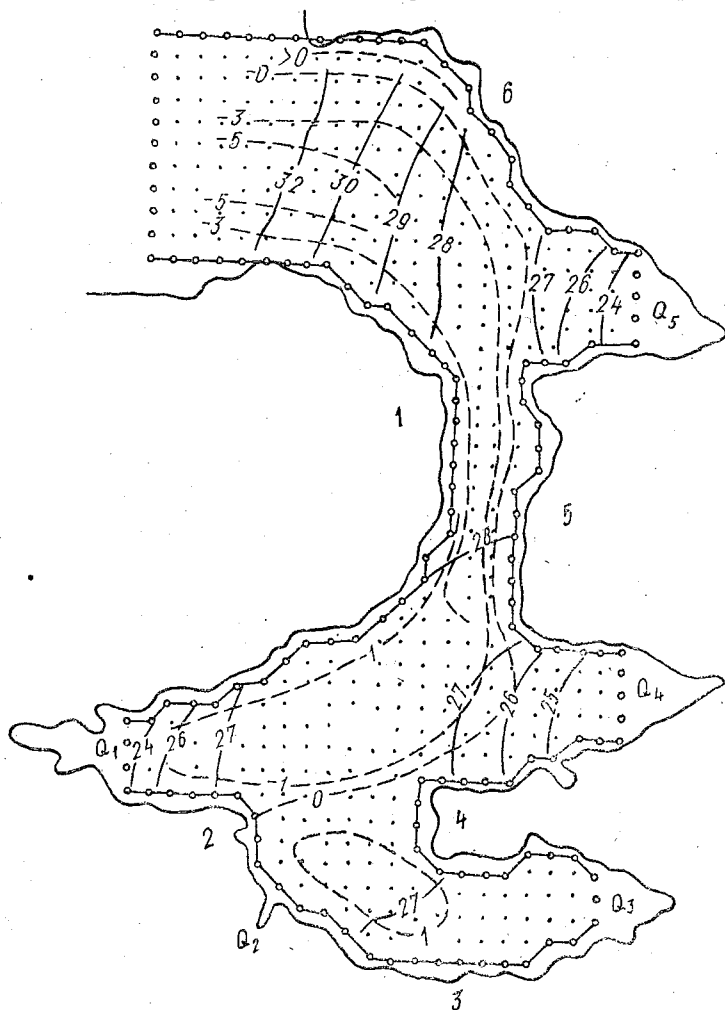


Рис. 9. Смоделированные значения солености верхнего квазиоднородного слоя в ‰ (сплошные линии) и интегральной циркуляции (Ψ) в $10^5 \text{ м}^3/\text{с}$ (пунктир): Q_1 — Q_5 —приток речных вод; 1—6—участки одинаковых значений Ψ

известным речной сток, вводимый в граничную функцию тока в виде $Q = \nabla_r^2 \Psi$ (рис. 9.). Этот приток пресной воды Q добавлялся в уравнение (3.31). Известной также считалась температура речной воды. Считалось, что через берег нет потока тепла и соли, т. е. перпендикулярные к берегу производные температуры и солености принимались равными нулю.

Важным моментом моделирования является калибровка модели (см. раздел 3.2). В частности, поскольку в приводимом примере не моделировалось турбулентное перемешивание, необходимо определить характерные значения коэффициентов турбулентности. Для этого проводились расчеты при разных их значениях. Они показали, что существование верхнего квазиоднородного по вертикали слоя, толщина которого определяется по критическому числу $Ri(h) = 0,25$, ослабляет требования к точности заданного в нем коэффициента вертикальной турбулентности k_1 . При среднем его значении $50 \text{ см}^2/\text{с}$ вариации до 75—100% слабо влияют на величины моделируемых гидрологических элементов в пределах квазиоднородного слоя.

Существенное влияние на вертикальные потоки тепла и соли оказывает величина коэффициента турбулентности за пределами квазиоднородного слоя, поэтому его нужно определять более тщательно.

Моделирование позволило оценить характерное значение коэффициента горизонтальной турбулентности. Он в среднем оказался равным $10^6 \text{ см}^2/\text{с}$.

Только модельные эксперименты помогли выяснить, что циркуляция вод в Белом море обусловлена, в основном, горизонтальной неоднородностью поля солености. Непосредственный речной сток в виде притока массы воды влияет на течения в море очень слабо. В свою очередь течения перераспределяют соленость и температуру воды, что приводит к этой горизонтальной неоднородности. Поэтому только совместное моделирование циркуляции и термохалинных процессов позволяет воспроизвести сложную картину результата из взаимодействия.

Глава 4. ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ МОРСКИХ СИСТЕМ

4.1. Анализ морских систем

При исследовании природных явлений используют понятие геосистемы. Это совокупность, состоящая из однородных объектов, тесно связанных между собой однородными взаимодействиями. Геосистемы различного масштаба, в состав элементов которых входят живые организмы, называются экологическими системами. К наиболее крупной из них относится биосфера, охватывающая все зоны земных оболочек.

Составной частью геосистемы являются морские системы, образующие взаимосвязанный комплекс в пределах морских акваторий. Из-за своей сложности морские системы исследуются преимущественно с помощью математических моделей, позволяющих прогнозировать последствия антропогенного воздействия на природную среду и осуществлять управление системой при решении задач по освоению ресурсов океана и проведению природоохранных мероприятий. Математическая модель системы считается простой, если ее уравнения доступны для решения, а параметры системы характеризуются регулярным поведением. В противном случае система относится к категории сложных. Свойство регулярности поведения параметров обусловлено механизмом связи между процессами в системе и зависит также от степени сглаженности изучаемого явления (от наименьшего учитываемого периода колебаний изучаемого элемента и от характерного масштаба времени).

Основной задачей при решении модели простых систем является преодоление вычислительных трудностей. Математические выражения, положенные в основу модели, при этом считаются точными.

Анализ сложных систем, непосредственное решение уравнений которых получить практически невозможно, обычно проводится двумя путями. Первый основывается на представлении сложной системы в виде совокупности простых, каждая из которых описывается математической схемой, доступной для непосредственного решения. Решение общей системы получается путем комбинирования решений, полученных для отдельных ее частей. Второй путь заключается в выявлении звеньев, определяющих поведение системы, и формировании из них простой модели, содержащей информацию об изучаемых параметрах.

Замена сложной системы более простой, удобной для исследований, сопровождается обычно разграничением объема исследований в пространстве и времени. Определение пространственно-временных границ рассматриваемой системы зависит от задачи исследований и сложности ее решения.

Математическое моделирование морских систем состоит из нескольких этапов: определение системы, разработка ее математической модели, аппроксимация для выполнения расчета и расчет. На основе результатов расчетов проводится корректировка модели, дается оценка способности модели адекватно отображать моделируемую систему и оценка точности решения.

Определение или выявление системы предусматривает установление ее пространственных границ, временных интервалов, в пределах которых рассматривается эволюция системы, описание взаимодействия системы с окружающей средой.

Важным этапом при выявлении системы является определение параметров, характеризующих ее свойства. Оно предусматривает выбор ограниченного числа репрезентативных переменных состоя-

ний, достаточных для описания поведения системы. Ограничение числа переменных необходимо для упрощения уравнений, описывающих систему, до уровня, достаточного для их решения и анализа.

Выбор пространственных и временных масштабов процессов и определение в их пределах параметров и их изменений приводят обычно к сокращению размерности системы и переходу к обобщенным характеристикам. Выделяя элементы пространства, которые описываются осредненными характеристиками, можно представить всю исследуемую физическую область в виде системы блоков или «резервуаров» и решать задачи с помощью блоковых моделей.

В стационарной модели параметры системы считаются постоянными, осредненными за некоторый, достаточно большой для изучаемого процесса, промежуток времени.

Сложность комплексного рассмотрения физических, химических и биологических полей в океане приводит к необходимости разделения морских систем на подсистемы: физическую, химическую, биологическую и т. д. Их взаимодействие учитывается введением дополнительных параметров, являющихся управляющими, которые характеризуют внешнее воздействие на каждую из подсистем [13].

Одной из главных проблем разработки математической модели системы является составление уравнений для ее параметров, в общем случае переменных. Описание сложных систем приводит к использованию математических выражений, адекватных по сложности изучаемым явлениям, что затрудняет вычисления.

Определение параметров системы и установление ее математической модели проводятся в общем случае путем экспериментальных исследований, предусматривающих необходимость получения достаточно полной информации об изучаемых явлениях, учета множества связей между элементами системы и их структуры.

Построение моделей морских систем на основе обработки наблюдений над их параметрами сопряжено с определенными трудностями, вызванными сложностью и индивидуальностью систем и ошибками в измерениях.

Взаимодействие системы с внешней средой через входы и выходы представлено при ее математическом описании граничными условиями, которые должны соответствовать уровню модели системы, отвечать ее потребностям и удовлетворять условию единственности решения. Точное определение граничных условий системы является частью моделирования и зависит от структуры модели, набора ее параметров, от характерных пространственных и временных масштабов описываемых процессов, т. е. от размерности системы.

Если граничные характеристики выражаются эмпирически и после интегрирования по пространству входят в уравнения, описывающие процесс, то это приводит к появлению дополнительных управляющих параметров, влияющих на поведение системы.

Полное описание морской системы, включающей в себя параметры химических, биологических полей и характеристики, дающие представление о влиянии на систему геологических процессов (осадкообразования, движения наносов, деформации дна и берегов), в значительной степени зависит от учета термогидродинамических процессов. Эволюция экологических систем, распространение загрязняющих веществ, перемещение наносов, эрозия дна и берегов обуславливаются перемешиванием и циркуляцией водных масс. Поэтому исследование термогидродинамических процессов есть необходимое условие анализа единой природной системы — морского биогеоценоза.

Исследование термогидродинамической системы связано с построением и реализацией методами вычислительной техники модели, состоящей из уравнений, описывающих динамический и термодинамический режимы бассейна. Это уравнения движения, неразрывности, диффузии тепла и соли, баланса энергии турбулентности, рассмотренные в курсах «Физика океана» и «Динамика океана». Если моделируется замерзающий бассейн, то дополнительно в систему вводятся уравнения, характеризующие изменение толщины и движение льда.

Изменения концентрации вещества C в системе выражаются уравнением сохранения массы в виде

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla C + (\mathbf{V}_c - \mathbf{V}) \nabla C = R + I, \quad (4.1)$$

где R — скорость продуцирования или разложения вещества в результате взаимодействия системы с внешними факторами; I — скорость продуцирования или разложения вещества в результате физико-химических и биологических взаимодействий элементов системы; $\mathbf{V}_c$ — скорость перемещения вещества вследствие миграции и диффузии; $\mathbf{V}$ — скорость потока.

При рассмотрении диффузии неконсервативных примесей скорость разложения вещества учитывается с помощью коэффициента его неконсервативности γ , связанного с периодом полураспада примеси τ соотношением $\gamma = \frac{\ln 2}{\tau}$. В таком случае

$$R = C\gamma = \frac{C}{\tau} \ln 2. \quad (4.2)$$

Скорость миграции вещества обычно выражается в виде эмпирических соотношений, устанавливаемых на основе наблюдений и теоретических исследований химических и биологических систем.

Осреднение параметров в пределах системы и деление поля скорости на среднюю величину и флуктуации приводит уравнение (4.1) к виду

$$\frac{\partial \bar{C}}{\partial t} + \bar{V} \cdot \nabla \bar{C} = \bar{R} + \bar{I} + \bar{V}_m \nabla \bar{C} + K \nabla^2 \bar{C}. \quad (4.3)$$

Здесь $\bar{V}_m$ — средняя скорость миграции вещества; $\bar{I}$ — химические и биологические взаимодействия между переменным состоянием системы; $\bar{R}$ — локальные входы и выходы системы, связывающие ее с внешней средой, например, сбросы загрязнений в систему, вылов организмов и т. п. $\bar{R}$ задается в качестве граничных условий при моделировании эволюции системы; K — коэффициент обмена, представляющий собой управляющий параметр.

Важным элементом разработки математических моделей, используемых для анализа систем, помимо составления основных уравнений является определение взаимодействия переменных состояния системы, представленного членом $\bar{I}$. Для этой цели проводится исследование кинетики химических процессов и динамики пищевых цепей. В частности, при изучении биологических полей широко используются модели Вольтерра, составляемые для различных трофических уровней.

Эти уравнения имеют вид

$$\frac{dB_i}{dt} = \sum_k E_k, \quad (4.4)$$

где B_i — биомасса организмов i -го трофического уровня; E_k — притоки и расходы биомассы, обусловленные различными причинами, в том числе и взаимодействием биомассы разных трофических уровней и внешними условиями [3]. Подобный тип уравнений используется и при исследовании химических полей.

С целью наиболее полного исследования взаимосвязанных процессов в море следует проводить моделирование на уровне экологических систем путем совместного решения уравнений, описывающих физические, химические и биологические поля.

4.2. Экологическая система

В настоящее время существует проблема разработки и проведения мероприятий по охране вод океана от загрязнений, экономного использования биологических ресурсов моря и их восстановления. Охрана и рациональное использование морских ресурсов неразрывно связаны с прогнозированием антропогенного воздействия на морскую среду. Решение этой задачи возможно лишь на основе моделирования **экологических систем** — функционально единых совокупностей организмов, населяющих общую территорию и способных к длительному существованию при полностью замкнутом круговороте веществ.

Одним из основных назначений моделей морских экологиче-

ских систем, включающих в себя акватории, населенные организмами, является прогноз распределения в пространстве и времени физических характеристик морской воды, биогенных элементов, загрязняющих веществ и т. д., исследование движений различных масштабов, оказывающих влияние на физические, химические, биологические поля и их взаимодействие.

Моделирование морских экологических систем (аквабиогенезов) упрощается в связи с существованием относительной автономности популяций гидробионтов, что позволяет их рассматривать как единое целое — элемент моделируемой системы.

Пространственное и временное распределение элементов экосистем может быть непрерывным или дискретным. Дискретная пространственная модель системы связана с сеточной областью решения. В детерминированных моделях экологических систем связь элементов выражается однозначными закономерностями, в стохастических моделях зависимости между элементами имеют вероятностный характер.

Поскольку в океане как составной части биосферы существует комплекс взаимосвязанных и взаимообусловленных явлений и процессов физической, химической, биологической (и даже геологической) природы, морской биогеоценоз рассматривается в виде единой многокомпонентной биохемотермогидродинамической системы и основным методом ее изучения является метод математического моделирования.

Моделирование жизнедеятельности организмов различных ярусов гидробиогенезов необходимо выполнять с учетом влияния всех факторов среды. Любое сообщество организмов связано зависимостью с определенным биотом — участком среды их обитания, который в свою очередь подвержен изменениям и сам формируется в результате воздействия биологических факторов.

Пространственное распределение компонентов в экосистеме моря в значительной степени определяется динамикой вод вследствие почти полного отсутствия активных движений планктона и динамической пассивности растворенных органических и минеральных соединений. На формирование структуры морских экосистем часто адвекция субстанций и их турбулентная диффузия оказывают не меньшее влияние, чем, например, трофические взаимодействия или биохимическая регенерация биогенных элементов.

Основным методом математического моделирования морских экологических систем с учетом единого комплекса процессов физико-химической, биологической и динамической природы является решение дифференциальных уравнений, описывающих эволюцию биогеоценозов. Некоторые свойства сообществ, находящихся в равновесном состоянии, исследуются методами сетевого анализа (теории графов) и кибернетического моделирования [11].

При составлении математических моделей экосистем в качестве их элементов рассматриваются не отдельные особи, а органи-

ческое вещество, содержащееся в популяциях. Это дает возможность в определенной степени абстрагироваться от возрастного состава организмов, детальный учет которого возможен только на основе моделирования множества особей с индивидуальными особенностями их жизни и ее продолжительности.

Сообщества, образованные несколькими трофическими уровнями, описываются системой уравнений, каждое из которых выражает изменение биомассы компонентов экосистемы с учетом всех факторов, определяющих это изменение.

В результате для каждого компонента системы, соответствующего трофическому уровню, можно составить уравнение изменения биомассы согласно (4.4)

$$\frac{dB_i}{dt} = \alpha_i - \beta_i - \gamma_i - \delta_i + \sum_k C_{ik} \alpha_k. \quad (4.5)$$

Члены правой части уравнения (4.5) выражают изменение биомассы i -го трофического уровня за счет рациона α_i , неусвояемости пищи β_i , затрат на энергетический обмен γ_i , отмирания, сопровождающегося переходом «живого» вещества в «мертвое» δ_i , гидрологических факторов $\sum_k C_{ik} \alpha_k$.

Выражение $C_{ik} \alpha_k$ характеризует уменьшение биомассы i -го компонента в результате потребления его k компонентом. Суммирование выполняется по всем трофическим уровням, на которых i -й компонент является пищей.

Построение математических моделей в единицах биомассы, в отличие от численности организмов, целесообразно при исследовании разных уровней морских экосистем — от абиотических элементов до планктона, что позволяет в сопоставимых величинах оценивать организмы, значительно различающиеся размерами.

Балансовые соотношения дают возможность при этом моделировать круговорот вещества в пределах экосистемы, поскольку результатом переноса вещества между элементами системы являться в первую очередь изменения их весовых характеристик. Поток вещества связывает живые элементы экосистемы с растворенными органическими и неорганическими соединениями, морской взвесью и т. д. Поэтому в единицах биомассы можно моделировать и сопряженные геохимические системы.

Перенос вещества в экосистеме связан с потоком энергии, поэтому уравнения взаимодействия между компонентами в системе, описывающие обмен как вещества, так и энергии, имеют одинаковый вид.

Непрерывный круговорот веществ в экосистемах происходит за счет энергии, поступающей на вход системы извне. В морских экосистемах таким входом являются автотрофные организмы первого трофического уровня, источником питания которых служат исключительно неорганические вещества (углекислота, аммиак и др.).

Питание их осуществляется путем фотосинтеза или хемосинтеза. К автотрофным организмам относятся зеленые растения и некоторые бактерии.

В процессах передачи вверх по трофической цепи экосистемы энергия рассеивается в окружающую среду в виде тепла. Однонаправленность потока энергии по трофической цепи позволяет объективно определять интенсивность продукционного процесса как всей системы, так и ее отдельных частей по разности энергии на входах и выходах.

Круговорот вещества в экосистемах, особенно в системах замкнутых, может сопровождаться многократным переходом органических веществ в неорганические и обратно, что затрудняет количественный анализ продукционного процесса. Поэтому анализ энергопередачи в экосистемах предпочтителен при определении их обобщенных статистических параметров в процессе исследования биологической продуктивности моря. Моделирование же эволюции экосистем и исследование их динамических закономерностей целесообразно проводить на основе математических моделей баланса вещества.

Существование многочисленных звеньев единой морской экологической системы и сложность их взаимосвязи не позволяют в настоящее время исследовать средствами математического моделирования поведение системы в полном объеме. Большая часть моделей рассматривает перенос вещества и энергии путем включения в систему растворенных в морской воде соединений биогенных элементов, кислорода, углекислого газа, косного органического вещества, бактерий, фито- и зоопланктона. Расширение схемы моделирования проводится путем присоединения к системе компонентов других трофических уровней: бентоса, крупных водорослей, рыб, млекопитающих.

Внешние воздействия, включая влияние океанологических и метеорологических факторов, техногенных условий, вводятся в систему с помощью коэффициентов уравнений и их дополнительных слагаемых.

Термохалинный режим, влияющий на деятельность организмов и вещества системы, моделируется уравнениями турбулентной теплопроводности и диффузии солей.

Перераспределение в пространстве элементов экологической системы моделируется с учетом механического переноса субстанций течениями и турбулентной диффузией.

Процессы, протекающие на границах бассейна, вызывают изменения концентрации веществ в системе, биомассы организмов. Водные массы переносят через жидкие границы живые компоненты системы, органические и минеральные вещества, взвешенные и растворенные в морской воде. На дне принимается условие непроницаемости растворенных соединений и учитывается осаждение и взму-

чивание взвешенного органического вещества. На поверхности моря учитывается газообмен через водную поверхность.

Для моделирования процессов, определяющих изменение биомассы бактерий, концентрации органического вещества и минеральных соединений, используются уравнения турбулентной диффузии неконсервативных субстанций [17]

$$\frac{\partial C_i}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla C_i = \frac{\partial}{\partial z} k_c \frac{\partial C_i}{\partial z} + K_c \nabla^2 C_i - b_i \frac{\partial C_i}{\partial z} + B. \quad (4.6)$$

Здесь C_i — концентрации кремния, взвешенного и содержащегося во взвешенных частичках биологического происхождения; (это может быть также детрит, концентрация взвешенных частиц органического происхождения или гумус; продукт разложения детрита; концентрация взвешенных частиц, устойчивых к процессам биохимического разложения); k_c , K_c — коэффициенты вертикального и горизонтального турбулентного обмена соответствующих взвешенных частиц; b_i — коэффициент скорости гравитационного оседания взвешенных частиц, зависящей от плотности морской воды.

Слагаемое B в уравнении (4.6) характеризует пополнение концентраций взвешенных минеральных соединений, детрита, гумифицированных веществ отмершими организмами.

Аналогичные по структуре уравнения составляются и для моделирования биомассы бактерий, концентрации компонентов растворенных органических веществ и минеральных соединений.

Для моделирования изменения биомассы фитопланктона B_1 используется уравнение, в основу которого положено выражение (4.5),

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_1}{\partial t} + \mathbf{V} \nabla B_1 = & \frac{\partial}{\partial z} A_z \frac{\partial B_1}{\partial z} + A_L \nabla^2 B_1 - b_1 \frac{\partial B_1}{\partial z} + \\ & + (\alpha_1 - \beta_1 - \gamma_1 - \delta_1) B_1 - B_1 c_1 B_2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Здесь A — коэффициенты обмена фитопланктоном за счет турбулентной диффузии; B_2 — биомасса зоопланктона, интенсивность выедания которым фитопланктона выражается коэффициентом c_1 ; α_1 — коэффициент скорости фотосинтеза фитопланктона, являющейся функцией подводной освещенности, температуры воды, концентрации биогенных элементов, углекислого газа. Сюда входит и синтез вещества клеток за счет органотрофного питания фитопланктона; b_1 — скорость гравитационного оседания фитопланктона как функция температуры; β_1 — коэффициент потери синтезированного вещества единой биомассы фитопланктона, δ_1 — интенсивность убыли биомассы фитопланктона вследствие смертности.

При выделении в верхних слоях моря эвфотической зоны, рас-

положенной до горизонта z_1 , на котором интенсивность света не превышает заданную, минимальную для существования процесса фотосинтеза величину ($\sim 1 \text{ Вт/м}^2$), выражение для суммарного фотосинтеза примет вид

$$q_1 = 2,5 \frac{I_0}{\varepsilon z_1} [1 - \exp(-\varepsilon z_1)].$$

Здесь I_0 — интенсивность солнечной радиации на поверхности моря; ε — показатель вертикального ослабления освещенности.

Уравнение для моделирования изменения биомассы зоопланктона может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \frac{dB_2}{dt} = & \frac{\partial}{\partial z} k_{B_2} \frac{\partial B_2}{\partial z} - b_2 \frac{\partial B_2}{\partial z} + \\ & + c_1 B_1 B_2 + c_2 D B_2 + c_2 V B_2 - \gamma_2 B_2 - \delta B_2 - c_3 B_2 B_3, \end{aligned} \quad (4.8)$$

где b_2 — коэффициент скорости изменения биомассы зоопланктона вследствие его миграции; γ_2 — коэффициент потери биомассы в результате обмена; δ_2 — интенсивность убыли биомассы вследствие смертности; D — концентрация детрита; V — концентрация бактерий; c_2 — коэффициент интенсивности потребления частиц детрита и бактерий; B_3 — биомасса планктоноядных рыб; c_3 — коэффициент скорости выедания рыбами зоопланктона. Активное передвижение зоопланктона обычно причисляется к процессам диффузии.

Изменение биомассы рыб (B_3) может характеризоваться уравнением

$$\frac{dB_3}{dt} = (c_3 B_2 - \delta_3 - \eta + I - E) B_3. \quad (4.9)$$

Здесь η , δ_3 — соответственно коэффициенты смертности рыб и скорости выедания их хищниками; I и E — иммиграция и эмиграция рыб в пределах рассматриваемой экосистемы, связанные с условиями внешней среды. Коэффициент смертности может быть использован и для учета изменения биомассы рыбы вследствие ее вылова.

Начальные условия для решения многокомпонентной системы уравнений (4.6) — (4.9), моделирующей экосистему, задаются в виде пространственного распределения в бассейне гидрологических и гидрохимических характеристик, а также организмов всех трофических уровней.

Граничные условия для гидрологических компонентов совпадают с условиями решения задачи о термохалинных и динамических полях в океане.

Для всех составляющих гидрохимического и гидробиологического комплексов экосистемы заданы условия непроникаемости

этих составляющих через поверхность моря. Исключением являются условия на поверхности моря для газов, которые задаются в виде потоков кислорода и углекислого газа на границе атмосфера-море, определяемых разностью их давления в воздухе и в воде и коэффициентом сорбции.

На дне моря для гидрохимических и гидробиологических компонентов, исключая гумус и взвешенный кремний органического происхождения, принимаются условия

$$K_{cl} \frac{\partial C}{\partial x} \cos(n, x) + K_{cl} \frac{\partial C}{\partial y} \cos(n, y) + k_{cz} \frac{\partial C}{\partial z} \cos(n, z) = 0. \quad (4.10)$$

Для взвешенных фракций гумуса и кремния в придонном пограничном слое задаются их потоки, определяемые с помощью полуэмпирических соотношений. На жидких боковых границах бассейна задаются потоки соответствующих характеристик, а на твердых — обычно условие отсутствия потоков, субстанций.

Система уравнений (4.6) — (4.10) используется для математического моделирования эволюции морского биогеоценоза с учетом основных связей между ее компонентами.

Естественно, что для подробного учета всех существующих в системе физико-химических, биологических превращений в уравнения должны быть включены дополнительные члены, описывающие более широкий спектр взаимодействий организмов.

С целью использования математического описания морских экологических систем для исследования биологической продуктивности морей и прогнозирования промысла морепродуктов необходимо учесть в модели техногенные факторы и планово-экономические показатели хозяйственной деятельности на морских акваториях.

Ниже в качестве примера реализации математической модели экологической системы приводятся результаты исследования функционирования реологического сообщества верхнего слоя воды в тропическом районе океана [4]. В нем рассматривалась эволюция системы, состоящей из фитопланктона, бактерий и некоторых видов зоопланктона, простейших (инфузорий и радиолярий, микрозоопланктона), веслоногих рачков, фильтраторов, использующих некоторую часть живой пищи, и хищников — потребителей фитопланктона. Учитывалось распределение лучистой энергии, биогенных элементов и детрита в верхней 150-метровой толще, вводилась трехслойная структура воды: пикноклин и слой выше и ниже его.

В начальный момент времени все элементы моделируемой системы принимались равномерно распределенными по глубине. Система формируется в зоне подъема вод и развивается, перемещаясь вместе с потоком.

На рис. 10 представлено изменение во времени биомассы неко-

торых элементов экосистемы [5]. Наиболее интенсивно растут биомассы фитопланктона (1) и бактерий (2). Фильтраторы (мелкие — 3 и крупные — 4) развиваются медленнее. Их биомасса достигает максимума лишь спустя месяц от начала существования системы, что приводит совместно с сокращением запасов биогенов к резкому уменьшению фито- и бактериопланктона. Хищники (циклопоиды — 5, хетогнаты — 6) еще более задерживаются в своем развитии и достигают максимума биомассы лишь на 35—50 сутки. К этому моменту устанавливается квазистационарное состояние системы, характеризующееся равновесным соотношением между низкой биомассой всех живых элементов, интенсивностью фотосинтеза и поступлением биогенов из нижних слоев через пикноклин.

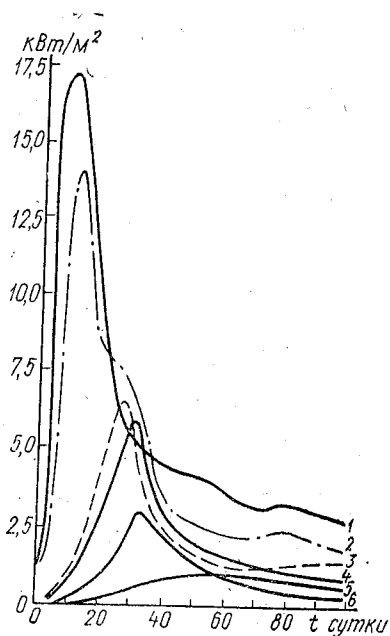


Рис. 10. Изменение суммарных биомасс элементов экосистемы пелагиали тропических районов океана в слое 0—150 м (в энергетических единицах)

4.3. Резервуарные модели морских систем

При исследовании гидрофизических, химических или биологических полей обращаются к статистическим характеристикам, полученным в результате наблюдений за некоторыми переменными на достаточно большой акватории. В этом случае весь район может быть представлен как однородная система или «резервуар» с обобщенными характеристиками. Примером таких «резервуарных моделей» могут быть математические модели продуктивности планктона, полученные при допущении однородности условий среды в пределах определенного объема.

Из-за обширности и сложности морских систем, недостаточно-го объема экспериментальных данных, необходимых для определения параметров, граничных и начальных условий, а также ограниченных возможностей ЭВМ при решении задачи часто приходится упрощать систему, уменьшать ее размерность, в частности, путем интегрирования уравнений по пространству всей или части исследуемой области. В результате область может быть представлена совокупностью резервуаров, каждый из которых характеризуется интегральными или средними по объему свойствами.

Модель, созданная для каждого резервуара с его интегральными характеристиками, содержит в виде входов и выходов потоки веществ между резервуарами. Взаимодействием между резервуарами определяют эволюцию обобщенных переменных в выделенных объемах, поэтому такие модели называют также моделями взаимодействия.

Составим уравнение для некоторой переменной r_α , характеризующей систему [13]:

$$\frac{\partial r_\alpha}{\partial t} = Q_\alpha + I_\alpha + \nabla (k \nabla r_\alpha - r_\alpha \sigma_\alpha - r_\alpha \mathbf{V}), \quad (4.11)$$

где Q_α — локальные входы и выходы из рассматриваемой системы (т. е. связь ее с внешней средой), которые задаются при моделировании; I_α — химические, биохимические и экологические взаимодействия, представляющие связь между переменной состояния r_α и взаимодействующими переменными r_β , r_γ и т. д.; k — коэффициент турбулентной диффузии — управляющий параметр для системы; σ_α — управляющий параметр.

Член $\nabla r_\alpha \sigma_\alpha$ представляет собой миграцию, скорость которой обычно выражают в полуэмпирической форме.

Полуэмпирическая зависимость устанавливается на основе наблюдений и теоретических исследований физических, химических и биологических свойств компонентов системы (организмов, химических соединений и т. п.).

Интегрируя уравнение (4.11) по фиксированному объему v , преобразуя последний член правой части в интеграл по поверхности Π вокруг объема и осредняя все члены уравнения, получим для единичного резервуара

$$\frac{d\bar{r}_\alpha}{dt} = v^{-1} \left[\int_v Q_\alpha dv + \int_\Pi (k \nabla r_\alpha - r_\alpha \sigma_\alpha - r_\alpha \mathbf{V}) d\Pi \right] + \bar{I}_\alpha. \quad (4.12)$$

Выражение в квадратных скобках представляет собой скорость продуцирования или деструкции (разрушения) переменной r_α в результате внешних антропогенных воздействий или потоков через границы объема; $\bar{I}_\alpha$ — скорость продуцирования (или деструкции) вещества, вызванная химическими, биохимическими и экологическими взаимодействиями, которая задается как функция переменных состояния и управляющих параметров.

На участках границы резервуара, совпадающих с границами системы в целом, потоки, связанные с адвекцией, миграцией и диффузией, определяются общими граничными условиями, налагаемыми на систему. На участках границы, разделяющих резервуары, потоки зависят от взаимного обмена между фиксированными объемами.

Уравнения, составленные для каждого резервуара, нужно решать совместно.

Выбор количества резервуаров в системе определяется необходимостью сохранения простоты модели. Модели резервуаров дают наибольший эффект, если удастся описать систему с помощью ограниченного числа блоков при допущении их пространственной однородности. В случае незначительных пространственных изменений в пределах системы ее можно изучать как один резервуар. Тогда граничные условия полностью будут определять потоки субстанций внутрь резервуара или из него.

Важным условием применения резервуарных моделей является выявление взаимодействий между внутренними параметрами системы, представленных скоростями продуцирования или деструкции r . Для этой цели используются результаты натурных наблюдений, лабораторных и теоретических исследований при условии, что полученные данные отражают общие закономерности совокупности процессов и особенности их проявления в условиях реального моря.

Скорости взаимодействий в системе наиболее просто выражаются линейной зависимостью вида

$$\bar{I}_\alpha = \sum k_{\alpha\beta} \bar{r}_\beta. \quad (4.13)$$

Суммирование в данном случае производится по параметру β , $k_{\alpha\beta}$ является функцией времени.

Частным случаем уравнения (4.13) может быть выражение

$$\frac{d\bar{r}_\alpha}{dt} = k\bar{r}_\alpha,$$

широко используемое при исследовании биоценозов.

Если скорость изменения искомой переменной является функцией других переменных, то последние будут представлены как управляющие параметры, объединенные в уравнении в виде коэффициента пропорциональности.

Более сложной по структуре является зависимость для скорости взаимодействий двух конкурирующих видов

$$\bar{I}_\alpha = k_{\alpha\beta\gamma} \bar{r}_\beta \bar{r}_\gamma + k_{\alpha\beta} \bar{r}_\beta. \quad (4.14)$$

Если известны максимально возможные масса популяций или количество отдельных особей в резервуаре при равновесных условиях (r_0), то скорость взаимодействия (т. е. изменение массы или числа переменной системы) может быть описана уравнением

$$\frac{d\bar{r}_\alpha}{dt} = a\bar{r}_\alpha \left(1 - \frac{\bar{r}_\alpha}{r_0} \right). \quad (4.15)$$

При рассмотрении динамики морских экологических систем учет взаимодействий между их трофическими уровнями, представляющими собой сложную цепь отношений, включая отношения жертва — хищник, в резервуарных моделях осуществляется с помощью обобщенных переменных состояния и управляющих параметров, которые задаются обычно эмпирически на основе анализа наблюдений.

Так, например, моделирование изменения концентрации фосфатов C и фитопланктона B_1 , осредненных в резервуаре, представляющем собой эвфотический слой над термоклином, связывают с процессами фотосинтеза, выедания фито-зоопланктоном и переносом через термоклин планктона и биогенных веществ. Влияние этих процессов на переменные состояния выражается с помощью следующих управляющих параметров: концентрации зоопланктона $B_2(t)$, освещенности поверхности моря $E(t)$, коэффициентами перемешивания $m(t)$ и опускания $w(t)$.

Уравнения изменения концентрации фосфатов и фитопланктона записываются в виде

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} &= -\alpha p(\lambda) f(C) B_1 - m(C - C_0), \\ \frac{dB_1}{dt} &= [p(\lambda) f(C) - g B_2 - w] B_1 - m(B_1 - B_{10}).\end{aligned}\quad (4.16)$$

Здесь α и g — эмпирические константы; $p(\lambda)$ и $f(C)$ — функции влияния света и биогенных веществ на скорость продуцирования фитопланктона; B_{10} и C_0 — концентрация фитопланктона и фосфатов в слое ниже эвфотического.

Систему уравнений, описывающих большее число трофических уровней, использовали для построения резервуарной модели замкнутого морского бассейна:

$$\begin{aligned}\frac{dB}{dt} &= f_1 B_2 B \{ (1 - \gamma B) + k_1 B \} \\ \left. \begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= s B_2 + \alpha B - f_2 N B_1 (1 - \alpha B_1) \\ \frac{dB_1}{dt} &= f_3 N B_1 (1 - B_1) - k_2 B_1 - f_3 B_2 (1 - \beta B_2) \\ \frac{dB_2}{dt} &= f_4 B_2 (1 - \beta B_2) - k_3 B_2\end{aligned}\right\}\end{aligned}\quad (4.17)$$

где N — концентрация нитритов и нитратов; B — количество бактерий; $\alpha, \alpha, \beta, k, f$ — параметры функции времени; s — слагаемое, характеризующее растворение осадков.

Произведение aB выражает продуцирование биогенов бактериями, аналогичные члены содержатся в уравнениях моделирования процессов дыхания, выделения, смертности, седиментации.

Посредством моделирования воспроизведен общий ход рассматриваемых величин, хотя в деталях наблюдаются существенные различия, что связано с упрощением системы из-за сокращения числа переменных состояния и исключения взаимодействий, важных для эволюции системы.

Для изучения физических равновесных систем с сосредоточенными параметрами возможен переход к еще более простым эквивалентным схемам и, наконец, к некоторому конечному эквиваленту, непосредственно позволяющему получить искомый результат. При этом устраняется необходимость составления уравнения равновесия.

Если эквивалентные схемы в достаточно явной форме обнаруживают функциональные связи между переменными системы, можно использовать методы сетевого анализа с применением теории графов. При таком подходе к задаче независимыми переменными являются возмущения, действующие на систему, а вызванные в ней процессы или реакции системы рассматриваются через зависимые переменные.

Недостатком резервуарных моделей является ограничение числа переменных состояния и, соответственно, возможности учета всех важных взаимодействий. Использование управляющих параметров, отражающих те характеристики системы, которые не учитываются непосредственно ее элементами, не раскрывает всей физической сущности явления, поэтому сложные процессы не могут быть удовлетворительно описаны такими моделями.

Использование резервуарных моделей целесообразно в тех случаях, когда при исследовании системы представляет интерес только ее осредненное или обобщенное поведение без детализации. Кроме того, недостаток информации для выявления зависимостей между параметрами систем приводит к необходимости обращения к статистическим данным наблюдений на достаточно большой акватории. В этом случае весь район должен рассматриваться как однородная система или резервуар, характеристики которого определяются взаимодействием.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем учебном пособии основной упор сделан на изложение принципов имитационного моделирования, которое наиболее распространено в океанологии. Это определяется тем, что не все стороны взаимосвязанных океанических процессов удастся изучить посредством инструментальных наблюдений. При помощи моделирования, варьируя управляющими параметрами, меняя характер взаимосвязей в процессах или просто подбирая величины констант, удастся быстрее определить роль различных факторов в форми-

ровании океанического процесса и выявить причинно-следственные связи, приводящие к наиболее правдоподобному отображению реального явления.

В учебном пособии изложены наиболее простые подходы к моделированию, приведены простые примеры, чтобы в наиболее четком виде выступал принцип моделирования. Существующие к настоящему времени исследовательские модели, даже только гидротермодинамических процессов, сложнее тем, что часто в них полнее учитывается роль дна и берегов, вихреобразование, генерация турбулентности и т. д. Сложность моделей увеличивается при переходе к системам, включающим в себя химические, биологические и другие процессы. Для их описания применяются не только уравнения в изложенном виде, но и такие подходы, как сетевой анализ и диаграммы энергетических цепей [4, 11]. При этом достигается наглядность связей в модели, что очень полезно при ее анализе. Известны попытки использования метода графов для описания характера переходов между различными явлениями. Удается схематически описать взаимосвязь интенсивностей процессов и длительности переходов от одного к другому. Например, интенсивное повышение температуры верхнего слоя океана вызывает сильную плотностную устойчивость вод, а последняя ослабляет турбулентное перемешивание и т. д. Слабый рост температуры воды или ее охлаждение уменьшают плотностную устойчивость верхнего слоя океана, что способствует росту турбулентности. Такие цепочки с указанием градаций интенсивности процессов можно составить на многие явления.

Близким по сути является язык энергетических цепей, в котором, как и в методе графов, представлены траектории переносов энергии и вещества, в символической форме определено суммирование, умножение, деление этих потоков. Это приводит к накоплениям и стокам энергии и вещества. Можно ожидать развития таких диаграммных подходов при анализе сложных морских систем.

Несомненно, что получают развитие самоорганизующиеся модели, поскольку уже с их помощью достигнуты положительные результаты при изучении сложных морских систем. Известно их практическое использование для предвычисления запаса рыбы в море. Хотя при этом не все блоки модели учтены и некоторые связи выполнены на уровне простых эмпирических соотношений, тем не менее посредством моделирования удается проследить пространственно-временную изменчивость искомой функции.

Большой интерес к моделированию с использованием метода самоорганизации возник в связи с появлением задач управления сложными системами, такими, как морские экосистемы. При этом чаще используется прямой подход, т. е. подбором изменений управляющих параметров находится требуемое состояние системы. Но развивается моделирование и на базе решения обратной зада-

чи. В этом случае по заданному состоянию системы находятся значения управляющих параметров [4]. Естественно, что этот путь короче прямого метода, при котором может потребоваться перебор многих параметров.

Проблема управления морскими системами должна наиболее полно решаться при привлечении оптимизационного моделирования. Однако пока, как уже отмечалось, этот тип моделей еще недостаточно разработан, даже для сравнительно простых океанологических систем.

Все модели состоят из различного рода уравнений, выражающих в математической форме естественный процесс. Это означает, что для проведения моделирования морской системы надо знать характер протекающих в ней процессов, или, по крайней мере, должна быть сформулирована определенная гипотеза о них. Нужно также уметь выразить естественный процесс в математической форме. Это означает, что без специальных знаний о естественных процессах и явлениях невозможно составить математическую модель морской системы. Но, несомненно, результаты моделирования расширяют знания о поведении морской системы и о правдоподобности гипотез, заложенных в модель. Совместное использование экспериментальных и теоретических исследований в области специальных дисциплин с методами моделирования ускорит изучение морских систем и позволит выработать рекомендации по их управлению.

ЛИТЕРАТУРА

1. Численные эксперименты со спектральной моделью расчета полей волнения. З. К. Абузяров, И. Н. Давидан, Т. Н. Пасечник, А. Э. Похил, В. А. Рожков. — Труды ГМЦ, 1978, вып. 200 (103—119).
2. Баренблатт Г. И. Подobie, автомодельность, промежуточная асимптотика. Теория и приложения к геофизической гидродинамике. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982—255 с.
3. Беляев В. И. Обработка и теоретический анализ океанографических наблюдений. Киев Наукова Думка, 1973, 295 с.
4. Беляев В. И. Теория сложных геосистем. Киев, Наукова Думка, 1978.—156 с.
5. Математическая модель функционирования экосистемы пелагиали тропических районов океана. М. Е. Виноградов, В. Ф. Крапивин, В. В. Меншуткин, Б. С. Флейшман, Э. А. Шукшина. — Океанология, т. XIII, вып. 5, 1973 (852—866).
6. Вольцингер Н. Е., Пясковский Р. В. Теория мелкой воды. Океанологические задачи и численные методы. Л., Гидрометеоиздат, 1977, 207 с.
7. Дженюк С. Л. Численный расчет вероятностных характеристик волн по полю ветра. — Труды ГМЦ, 1976, вып. 164, (3—10).
8. Динамика океана. Учебник. Под редакцией Ю. П. Доронина. — Л.: Гидрометеоиздат, 1980.—302 с.
9. Макаров В. А., Мензин А. Б. Моделирование океанологических процессов (гидравлическое и аналоговое). Учебное пособие. Л., изд. ЛПИ, 1979.—116 с.
10. Марчук Г. И. Численное решение задач динамики атмосферы и океана. — Л.: Гидрометеоиздат, 1974.—303 с.

11. Математическое моделирование морских экологических систем. Под ред. Ю. Н. Сергеева. Л., изд-во ЛГУ, 1977.—216 с.
12. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. — Л.: Гидрометеиздат, 1979, 135 с.
13. Моделирование морских систем. Пер. с англ. — Л.: Гидрометеиздат, 1978.—280 с.
14. Моделирование и прогноз верхних слоев океана. Пер. с англ. — Л.: Гидрометеиздат, 1979,—367 с.
15. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. — М.: Наука, 1977.—438 с.
16. Физика океана. Учебник. Под ред. Ю. П. Доронина. — Л.: Гидрометеиздат, 1978.—294 с.
17. Хантли Г. Анализ размерностей. — М.: Мир, 1970.—174 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

	Стр.
Предисловие	3
Глава 1. Математические модели океанических процессов	5
1.1. Определение математической модели	—
1.2. Типы математических моделей	7
1.3. Полнота модели	10
1.4. Оценка правдоподобия моделирования	11
Глава 2. Методы реализации математических моделей	12
2.1. Аналитические методы	—
2.2. Приближенные методы реализации моделей	20
2.3. Конечно-разностный численный метод. (Основные определения конечно-разностных сеточных схем)	25
2.4. Статистические методы	33
Глава 3. Моделирование основных гидрологических процессов	39
3.1. Моделирование ветрового волнения	—
3.2. Моделирование длиннопериодных колебаний уровня	45
3.3. Моделирование циркуляции вод	49
3.4. Моделирование формирования термохалинного поля и циркуляции вод	53
Глава 4. Принципы моделирования морских систем	58
4.1. Анализ морских систем	—
4.2. Экологическая система	62
4.3. Резервуарные модели морских систем	69
Заключение	73
Литература	75

Юрий Петрович ДОРОНИН
Валерий Александрович МАКАРОВ
Александр Борисович МЕНЗИН

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ОКЕАНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Учебное пособие

Редактор О. С. Крайнова
Обложка художника Р. П. Костылева
Корректор Р. В. Федорова

Сдано в набор 12.02.87. Подписано в печать 30.11.87. М-20634. Формат 60×90¹/₁₆.
Бумага тип. № 2. Лит. гарн. Печать высокая. Печ. л. 4,8. Уч.-изд. л. 5,0.
Тираж 300 экз. Темплан 1987 г., поз. 253. Зак. 140. Цена 35 коп.

Тип. ВВМУПП им. Ленинского комсомола

