

# Взаимодействие океана и атмосферы лабораторный практикум

Под редакцией

д-ра физ.-мат. наук, проф. Б. А. КАГАНА и  
д-ра геогр. наук, проф. Н. П. СМЕРНОВА

Допущено

Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР в качестве учебного пособия  
для студентов вузов, обучающихся по специальности «Океанология»



ЛЕНИНГРАД ГИДРОМЕТЕОИЗДАТ 1989

**Авторы: А. С. Аверкиев, Г. И. Беликова,  
М. А. Белянцев, Б. А. Каган, Н. Л. Плинка**

**Рецензенты: д-р физ.-мат. наук Р. С. Бортковский,  
канд. физ.-мат. наук С. П. Малевский-Малевич  
(Главная геофизическая обсерватория),  
канд. геогр. наук М. И. Вильданова  
(Одесский гидрометеорологический институт)**

Настоящее учебное пособие состоит из двух частей. В первой излагаются основные сведения о масштабах и механизмах временной изменчивости климатической системы, рассматриваются результаты исследований бюджета тепла, влаги, энергии и углового момента. Особое внимание уделяется принципам построения нульмерных, одномерных, зональных и трехмерных моделей климатической системы и анализу их возможностей с точки зрения воспроизведения современного климата. Вторая часть объединяет семь лабораторных работ, подобранных таким образом, чтобы осветить различные аспекты мелкомасштабного, мезомасштабного и крупномасштабного взаимодействия океана и атмосферы.

Рассчитано на студентов океанологических специальностей гидрометеорологических институтов, а также физических и географических факультетов университетов.

This text-book «Ocean—Atmosphere Interaction (Practicum)» by A. S. Averkiev, G. I. Belikova, M. A. Belyantsev, B. A. Kagan and V. L. Plink consists of two parts. The first part presents data on scales and mechanisms of time-dependent variability of a climatic system together with results of investigations on the heat, moisture, energy and angular momentum budgets. Special attention is given to construction principles for zero-dimensional, one-dimensional, zonal and three-dimensional models of climatic systems and to analysis of their capabilities from the point of view of climate simulation. The second part includes seven laboratory studies chosen to illuminate different aspects of small-, meso- and large-scale ocean—atmosphere interaction.

The book is intended for students of oceanological specialities of hydrometeorological institutes and also physical and geographical faculties of universities.

### Учебное пособие

**Александр Сергеевич Аверкиев, Галина Иосифовна Беликова,  
Михаил Алексеевич Белянцев, Борис Абрамович Каган,  
Николай Леонидович Плинка**

### **Взаимодействие океана и атмосферы (лабораторный практикум)**

Редактор З. И. Мироненко. Художник В. В. Быков. Технический редактор Л. М. Шишкова. Корректор Л. Б. Емельянова. ИБ № 1929. Сдано в набор 10.05.88. Подписано в печать 01.12.88. М-27219. Формат 60×90<sup>1/16</sup>. Бумага тип. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Печ. л. 12,5. Кр.-отт. 12,5. Уч.-изд. л. 13,02. Тираж 1640 экз. Индекс ОД-48. Заказ № 1123. Цена 85 коп. Гидромеоиздат. 199226. Ленинград, ул. Беринга, 38. Ленинградская типография № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 191126, Ленинград, Социалистическая ул., 14.

Отпечатано в Ленинградской типографии № 4 ордена Трудового Красного Знамени Ленинградского объединения «Техническая книга» им. Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном комитете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. 190000, Ленинград. Прачечный переулок, 6.

**1805040600-005**  
**В 069 (02)-89 36-89**

ISBN 5-286-00137-8

© Гидромеоиздат, 1989 г.

# СОДЕРЖАНИЕ

|                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| Предисловие . . . . .                 | 4 |
| Список основных обозначений . . . . . | 5 |

## Система океан—атмосфера

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 1. Определение климатической системы . . . . .                                    | 9   |
| 2. Масштабы временной изменчивости климатической системы и ее механизмы . . . . . | 11  |
| 3. Проблема предсказуемости . . . . .                                             | 16  |
| 4. Современное состояние климатической системы океан—атмосфера . . . . .          | 21  |
| 4.1. Исходная информация . . . . .                                                | —   |
| 4.2. Бюджет тепла . . . . .                                                       | 23  |
| 4.3. Бюджет влаги . . . . .                                                       | 29  |
| 4.4. Бюджет углового момента . . . . .                                            | 37  |
| 5. Адиабатические инварианты . . . . .                                            | 42  |
| 6. Энергетика климатической системы . . . . .                                     | 50  |
| 7. Теория подобия для глобального взаимодействия океана и атмосферы . . . . .     | 63  |
| 8. Иерархия моделей климатической системы . . . . .                               | 69  |
| 8.1. Нульмерные модели . . . . .                                                  | 70  |
| 8.2. Одномерные модели . . . . .                                                  | 75  |
| 8.3. Зональные модели . . . . .                                                   | 83  |
| 8.4. Трехмерные модели . . . . .                                                  | 91  |
| Заключение . . . . .                                                              | 119 |
| Список литературы . . . . .                                                       | 121 |

## Лабораторные работы

|                                                                                                                                                            |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Работа № 1. Определение турбулентных потоков на поверхности раздела океан—атмосфера. Проверка возможности использования климатологических формул . . . . . | 124 |
| Работа № 2. Исследование реакции системы океан—атмосфера на внешнее постоянное возмущение . . . . .                                                        | 142 |
| Работа № 3. Исследование реакции системы атмосфера—верхний квазиоднородный слой океана на внешнее периодическое возмущение . . . . .                       | 160 |
| Работа № 4. Исследование спектра собственных колебаний в системе океан—атмосфера . . . . .                                                                 | 165 |
| Работа № 5. Моделирование эволюции углеродного цикла в системе океан—атмосфера . . . . .                                                                   | 174 |
| Работа № 6. Исследование нестационарной реакции системы океан—атмосфера на антропогенные изменения содержания атмосферного $\text{CO}_2$ . . . . .         | 185 |
| Работа № 7. Расчет меридионального переноса тепла в океане . . . . .                                                                                       | 192 |

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Взаимодействие океана и атмосферы — новая учебная дисциплина, призванная объединить разрозненные сведения об океане и атмосфере в цельную и сбалансированную «картину мира», ознакомить с существующими методами и результатами исследований, развить опыт их интерпретации и использования, дать возможность убедиться в чрезвычайной сложности реальных проблем, как правило, не имеющих бесспорного окончательного решения, и тем самым стимулировать инициативу и творческое мышление студентов.

Достижение этих целей предъявляет специфические требования к учебному пособию. Оно должно быть кратким, увлекательным и способствующим активному изучению предмета путем самостоятельных размышлений и решения конкретных физических задач. К этому мы стремились. Что вышло из этого — не нам судить. Наш замысел состоял в том, чтобы весь материал, содержащий сведения о современном состоянии исследований системы океан—атмосфера и не нашедший освещения в учебнике Ю. П. Доронина «Взаимодействие атмосферы и океана» (Л., Гидрометеониздат, 1981), изложить по возможности сжато, а часть рассматриваемых в нем вопросов привести в лабораторных работах. В этом смысле предлагаемое пособие не подменяет учебник. Скорее оно дополняет и в ряде случаев иллюстрирует его на примере решения конкретных физических задач.

Решение этих задач требует определенных технических навыков. Поэтому, чтобы не затенить физическую сторону изучаемого вопроса и вместе с тем избежать трудностей, связанных с обращением к математическим методам решения сформулированных задач, в конце каждой лабораторной работы помещены краткие сведения о сущности используемых методов и необходимые рекомендации по их реализации.

Раздел «Система океан—атмосфера» написан Б. А. Каганом. Темы лабораторных работ отбирались и обсуждались всеми авторами. Работа № 4 подготовлена А. С. Аверкиевым, работы № 3, 5 — М. А. Белянцевым, работы № 2, 6, 7 — Б. А. Каганом, работа № 1 — Н. Л. Плинком, приложения к работам № 2, 4, 7 — Г. И. Беликовой. Общая компоновка и редактирование учебного пособия выполнены Б. А. Каганом и Н. П. Смирновым.

Авторы искренне признательны Р. С. Бортковскому, М. И. Вильдановой, С. П. Малевскому-Малевичу и В. М. Радикевичу, взявшим на себя труд ознакомиться с рукописью и высказавшим ценные замечания:

## СПИСОК ОСНОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

- $A$  — доступная лабильная энергия
- $A_E$  — доступная лабильная энергия вихревых возмущений
- $A_M$  — доступная лабильная энергия среднего зонального движения
- $C$  — скорость конденсации
- $C_D$  — коэффициент сопротивления
- $C_E$  — коэффициент влагообмена (число Дальтона)
- $C_H$  — коэффициент теплообмена (число Стентона)
- $C_a^{CO_2}$  — удельная концентрация углекислого газа в атмосфере
- $c_a$  — теплоемкость атмосферы
- $c_d$  — теплоемкость верхнего квазиоднородного слоя океана
- $c_m$  — теплоемкость глубинного слоя океана
- $c_p = 1007 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$  — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении
- $c_s$  — скорость звука
- $c_v = 720 \text{ Дж/(кг} \cdot \text{К)}$  — удельная теплоемкость воздуха при постоянном объеме
- $c_l$  — коэффициент растворимости углекислого газа в воде
- $E$  — полная энергия, отнесенная к единице массы, вертикальный турбулентный поток влаги (скорость испарения с подстилающей поверхности)
- $E_1$  — скорость образования (или таяния) морского льда
- $F, F_T, F_q, F_S$  — источники и стоки импульса, тепла, влаги и соли
- $F_R$  — радиационный поток тепла
- $F_\lambda$  — зональная составляющая ускорения силы трения
- $f$  — излучательная способность атмосферы
- $f_o, f_L, f_I$  — отношение площадей океана, суши и морского льда к площади поверхности всей Земли (иначе, баллы океана, суши и морского льда)

- $H$  — высота однородной атмосферы  
 $h$  — толщина деятельного слоя океана, толщина ледяного покрова, толщина верхнего квазиоднородного слоя океана  
 $I$  — отнесенная к единице массы внутренняя энергия, уходящее длинноволновое излучение  
 $K$  — отнесенная к единице массы кинетическая энергия  
 $K_E$  — отнесенная к единице массы кинетическая энергия вихревых возмущений  
 $K_M$  — отнесенная к единице массы кинетическая энергия среднего зонального движения  
 $K_i$  — число Кибеля  
 $k$  — скорость газообмена на границе раздела океан — атмосфера, волновое число  
 $k_\theta, k_q$  — коэффициенты вертикальной турбулентной температуропроводности и диффузии водяного пара  
 $k_h$  — коэффициент горизонтальной турбулентной диффузии тепла  
 $k_M$  — коэффициент вертикальной диффузии импульса  
 $L$  — масштаб длины Монина—Обухова, характерный горизонтальный масштаб движения, теплота конденсации или сублимации  
 $L_I = 3,334 \cdot 10^5$  Дж/кг — теплота плавления льда при  $t = 0^\circ\text{C}$   
 $M$  — абсолютный угловой момент единичной массы относительно оси вращения Земли  
 $MNT_A$  — меридиональный перенос тепла в атмосфере  
 $MNT_O$  — меридиональный перенос тепла в океане  
 $MMT_A$  — меридиональный перенос абсолютного углового момента в атмосфере  
 $MMT_O$  — меридиональный перенос абсолютного углового момента в океане  
 $m$  — масса столба атмосферы единичного сечения  
 $m_I$  — масса морского льда, отнесенная к единице площади  
 $N^C$  — количество углерода, поступающего в атмосферу при сжигании ископаемого топлива

- $n$  — балл облачности  
 $P$  — вертикальный турбулентный поток явного тепла  
 $p$  — давление  
 $p_s$  — атмосферное давление на подстилающей поверхности  
 $p_a^{\text{CO}_2}$  — парциальное давление углекислого газа в атмосфере  
 $p_w^{\text{CO}_2}$  — парциальное давление углекислого газа в воде  
 $Q$  — радиационные и фазовые источники и стоки тепла в атмосфере  
 $Q_s$  — нормированный на объемную теплоемкость морской воды результирующий поток тепла на поверхности раздела океан — атмосфера  
 $q$  — поток коротковолновой солнечной радиации  
 $q_o^{\text{CO}_2}$  — поток углекислого газа между океаном и атмосферой  
 $q_A$  — удельная влажность воздуха  
 $R = 8,32 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$  — универсальная газовая постоянная, результирующий поток радиации  
 $Ri$  — динамическое число Ричардсона  
 $S$  — соленость морской воды, площадь поверхности Земли  
 $S_0$  — солнечная постоянная  
 $S_0^0 = 1376 \text{ Вт}/\text{м}^2$  — современное значение солнечной постоянной  
 $T_A$  — температура атмосферы  
 $T_e$  — эквивалентная температура воздуха  
 $T_I$  — температура замерзания морской воды  
 $u$  — скорость течения, скорость ветра, зональная составляющая относительной скорости  
 $V$  — объем  
 $v_*$  — динамическая скорость ветра  
 $v_I$  — скорость дрейфа льда  
 $v_h$  — скорость перемещения речных и грунтовых вод  
 $W_A$  — влагосодержание атмосферы  
 $W_I$  — масса пресной воды в морском льду  
 $W_L$  — влагосодержание деятельного слоя суши  
 $W_O$  — содержание пресной воды в океане

- $z_0$  — параметр шероховатости подстилающей поверхности  
 $z_c$  — толщина подслоя динамического взаимодействия  
 $\alpha$  — удельный объем воздуха  
 $\alpha_i$  — локальное альbedo  
 $\alpha_p$  — планетарное альbedo  
 $\alpha_T$  — коэффициент теплового расширения морской воды  
 $\alpha_\theta, \alpha_q$  — параметры, обратно пропорциональные турбулентным (термическому и диффузионному) числам Прандтля  
 $\beta$  — параметр плавучести  
 $\gamma, \gamma_a$  — фактический и адиабатический градиенты температуры в атмосфере  
 $\delta_v$  — толщина вязкого подслоя  
 $\eta$  — удельная энтропия  
 $\Theta$  — потенциальная температура воздуха  
 $\kappa$  — постоянная Кармана, скорость теплообмена на границе раздела между верхним квазиоднородным и глубинным слоями, скорость обмена углеродом  
 $\mu_c$  — молекулярная масса углерода  
 $\nu_\theta$  — коэффициент молекулярной теплопроводности  
 $\nu_q$  — коэффициент молекулярной диффузии  
 $\Pi$  — потенциальная энергия  
 $\rho, \rho_l, \rho_o$  — плотность воздуха, морского льда и пресной воды  
 $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4)$  — постоянная Стефана—Больцмана, безразмерное давление  
 $\tau$  — вертикальный турбулентный поток импульса, безразмерное время  
 $\tau_\lambda, \tau_\varphi$  — зональная и меридиональная составляющие касательного напряжения ветра  
 $\Phi$  — потенциальная энергия, отнесенная к единице массы  
 $\omega$  — изобарическая вертикальная скорость  
 $\Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$  — угловая скорость вращения Земли



## 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛИМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

*Климатической системой* ( $\mathcal{G}$ ) называется совокупность взаимодействующих между собой и обменивающихся энергией и веществом атмосферы ( $\mathcal{A}$ ), гидросферы ( $\mathcal{H}$ ), криосферы ( $\mathcal{C}$ ), литосферы ( $\mathcal{L}$ ) и биосферы ( $\mathcal{B}$ ), т. е.

$$\mathcal{G} = \mathcal{A} \cup \mathcal{H} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{L} \cup \mathcal{B},$$

причем под атмосферой понимается газовая оболочка Земли, под гидросферой — Мировой океан со всеми окраинными и внутренними морями, под криосферой — континентальные ледниковые щиты, горные ледники, морской лед и снежный покров суши, под литосферой — деятельный слой суши и все, что имеется на ней, в том числе озера, реки и подземные воды, и, наконец, под биосферой — сухопутная и морская растительность и живые организмы, включая самого человека.

Состояние каждой из перечисленных подсистем климатической системы  $\mathcal{G}$  описывается конечным числом *определяющих параметров*  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Все остальные величины, характеризующие состояние той или иной подсистемы, являются функциями этих параметров. Подобно тому, как это принято в термодинамике, определяющие параметры можно разделить на *экстенсивные*, пропорциональные размеру или массе рассматриваемой подсистемы, и *интенсивные*, не зависящие от них. К первым относятся объем, внутренняя энергия, энтальпия и энтропия, ко вторым — температура, давление и концентрация. Различают также *внутренние* и *внешние* определяющие параметры. Внутренние параметры определяют состояние системы, внешние — окружающей среды. Подчеркнем некоторую условность такого деления и его зависимость от временных масштабов исследуемых процессов. Так, для временных масштабов порядка  $10^3$  лет и меньше площадь и объем континентальных ледниковых щитов можно отождествить с внешними, для более продолжительных временных масштабов — с внутренними параметрами климатической системы. Соответственно в первом случае континентальные ледниковые щиты выступают как часть окружающей среды, во втором — климатической системы.

Вообще говоря, принадлежность той или иной подсистемы к окружающей среде или к климатической системе определяется соотношением между временным масштабом исследуемого процесса

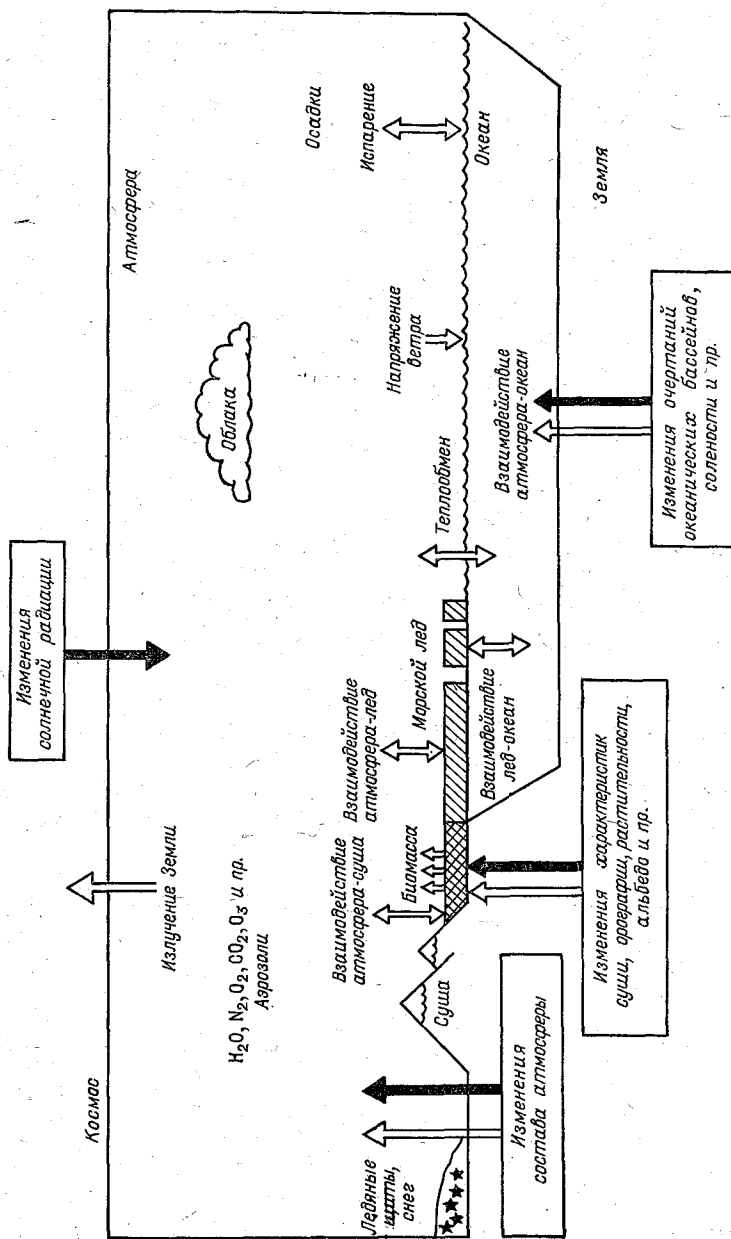


Рис. 1. Схематическое представление отдельных звеньев климатической системы и процессов, контролирующих ее изменчивость, по [19].

Внешние процессы указаны заштрихованными, внутренние — незаштрихованными стрелками.

и временем установления равновесного состояния рассматриваемой подсистемы. Если это соотношение мало, подсистема считается принадлежащей окружающей среде, иначе — климатической системе. Время установления равновесного состояния атмосферы составляет  $10^6$  с, верхнего квазиоднородного и глубинного слоев океана —  $10^6$  и  $10^{10}$  с, морского льда, снежного покрова суши, горных ледников и ледниковых щитов — соответственно  $10^6$ ,  $10^5$ ,  $10^{10}$  и  $10^{12}$  с, деятельного слоя суши —  $10^6$  с. Как видно, атмосфера, верхний квазиоднородный слой океана, морской лед, а также снежный покров и деятельный слой суши обладают сравнительно быстрой и, главное, одинаковой (по скорости) реакцией на внешнее возмущение, так что на временных масштабах порядка  $10^6$  с они должны объединяться в единую климатическую систему.

Используя терминологию термодинамики, введем понятия открытой, закрытой и изолированной системы. *Открытой системой* будем называть систему, которая обменивается веществом с окружающей средой, *закрытой системой* — систему, которая не обменивается, веществом с окружающей средой, и *изолированной системой* — систему, которая не взаимодействует с окружающей средой, т. е. не обменивается с ней ни энергией, ни веществом. Таким образом, с точки зрения термодинамики климатическая система представляет собой неизолированную систему, состоящую из взаимодействующих друг с другом и с окружающей средой макроскопических подсистем, каждая из которых обладает чрезвычайно большим числом степеней свободы.

Изменение состояния климатической системы, характеризующееся изменением ее параметров, будем называть *процессом*. В зависимости от изменения внешних и внутренних параметров будем различать соответственно *внешние* и *внутренние процессы*. Схематическое изображение отдельных звеньев климатической системы и внешних и внутренних процессов ее изменения приводится на рис. 1.

## 2. МАСШТАБЫ ВРЕМЕННОЙ ИЗМЕНЧИВОСТИ КЛИМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ И ЕЕ МЕХАНИЗМЫ

Данные наблюдений свидетельствуют о большом разнообразии колебаний характеристик климатической системы. Главными из них, согласно А. С. Монину [17, 18], являются:

1) *мелкомасштабные колебания* с периодами от долей секунды до минут, обусловленные турбулентностью и различного рода волновыми процессами (скажем, акустическими и гравитационными волнами в атмосфере);

2) *мезомасштабные колебания* с периодами от минут до часов (в частности, инерционные колебания). Их интенсивность сравнительно невелика, и поэтому энергетический спектр в указанном

интервале периодов содержит широкий и глубокий минимум, отделяющий квазигоризонтальные синоптические возмущения от трехмерных мелкомасштабных неоднородностей;

3) *синоптические колебания* с периодами от нескольких часов до нескольких суток в атмосфере и порядка нескольких недель в океане. К этой группе относятся также суточные и полусуточные колебания, создаваемые суточными изменениями инсоляции и гравитационными силами Луны и Солнца;

4) *глобальные колебания* с периодами от недель до месяцев. К ним принадлежат, в частности, двухнедельные колебания индекса циркуляции (средней угловой скорости вращения атмосферы в умеренных широтах относительно поверхности Земли) и автоколебания в системе океан—атмосфера с периодами порядка месяцев;

5) *сезонные колебания*. Таковыми являются колебания с годовым периодом и их гармоника (в том числе все муссонные явления);

6) *междугодовые колебания* с периодами порядка нескольких лет, включающие 26-месячные колебания зонального течения в экваториальной стратосфере, квазидвухлетнее явление Эль-Ниньо-Южное колебание в восточной части Тихого океана, 3,5-летние автоколебания северной ветви Гольфстрима и пр.;

7) *внутривековые колебания* с периодами в десятки лет, примером которых может служить потепление в первой половине текущего столетия;

8) *междувековые колебания* с периодами в несколько веков или несколько десятков веков. Их проявления — потепление после конца ледникового периода (65-й век до н. э.) и установление так называемого «климатического оптимума» в 40—20-х веках до н. э., последующее похолодание (10-й век до н. э. — 3-й век н. э.), новое потепление в 4—10-м веках н. э., затем похолодание в 13—14-м веках, потепление в 15—16-м веках, и наконец, похолодание в так называемый «малый ледниковый период» (17—19-й века);

9) *долгопериодные колебания* продолжительностью в десятки тысяч лет (ледниковые и межледниковые эпохи плейстоцена), связанные с изменением параметров земной орбиты и наклона земной оси. Среди подобного рода колебаний астрономического происхождения наибольшим является колебание с периодом 100 тыс. лет. Затем в порядке уменьшения амплитуд располагаются колебания с периодами 22 и 41 тыс. лет. Первый из упомянутых периодов близок к периоду изменения эксцентриситета земной орбиты, а также к периоду колебаний в системе континентальные ледниковые щиты — астеносфера, второй совпадает с периодом прецессии и третий — с периодом угла наклона земной оси;

10) *изменения геологических эпох* продолжительностью в десятки и сотни миллионов лет, создаваемые орогенными и тектоническими процессами и дрейфом континентов.

Все эти проявления временной изменчивости климатической системы представлены в идеализированном спектре колебаний тем-

пературы приземного слоя атмосферы на рис. 2. В зависимости от механизма возбуждения колебания температуры, как, впрочем, и любых других климатических характеристик, можно разделить на *вынужденные* и *свободные*. Вынужденными называются колебания, создаваемые внешними воздействиями (скажем, изменениями инсоляции и параметров земной орбиты), свободными — колебания, происходящие независимо от внешнего механического или теплового воздействия и обусловленные внутренней неустойчивостью климатической системы по отношению к малым возмущениям.

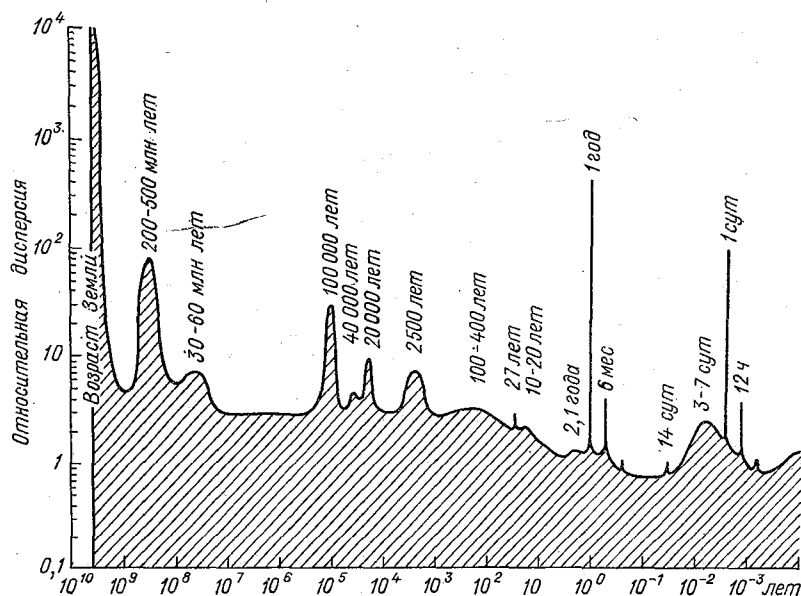


Рис. 2. Идеализированный спектр колебаний температуры приземного слоя атмосферы, по Митчеллу [42].

Соображения, лежащие в основе этой классификации, сводятся к следующему. В любой реальной гидродинамической системе всегда есть вязкая диссипация, если система не движется как твердое тело, и тепловая диссипация, если система не изотермична. Поэтому в свободных колебаниях единственным механизмом, способным уравновесить влияние диссипации, может быть только перенос энергии по спектру. В вынужденных колебаниях диссипация может компенсироваться как за счет каскадного переноса энергии, так и за счет работы вынуждающих сил. При этом сначала возбуждается мода с пространственным масштабом, равным масштабу длины вынуждающей силы. Затем под влиянием неустойчивости эта мода передает свою энергию более высоковолевым модам. Как только энергия этих мод достигает некоторого крити-

ческого уровня, начинают возбуждаться еще более высоковольтные моды. Одновременно высоковольтные моды взаимодействуют с порождающими их низковольтными модами, вызывая либо усиление, либо стабилизацию и даже разрушение последних.

Из сказанного ясно, что внешнее воздействие — это всего лишь один из возможных механизмов изменчивости, другой — внутренний стохастический механизм, обусловленный существованием *обратных связей* между различными внутренними параметрами климатической системы. Обратные связи могут либо усиливать вариации одного из взаимодействующих параметров, либо ослаблять их. В первом случае они называются *положительными*, во втором — *отрицательными*.

Известно довольно много примеров обратных связей. Приведем только некоторые из них.

*Положительная обратная связь парниковый эффект водяного пара — температура атмосферы.* Количество содержащегося в воздухе водяного пара (абсолютная влажность) нелинейным образом зависит от температуры воздуха и в свою очередь определяет прозрачность атмосферы для длинноволновой радиации. Так, повышение температуры при постоянной относительной влажности (предположение о постоянстве относительной влажности хорошо оправдывается в широком диапазоне изменения температуры) приводит к усилению поглощения длинноволновой радиации в атмосфере (*парниковый эффект*) и тем самым способствует дальнейшему повышению температуры нижних слоев атмосферы. Итак, парниковый эффект водяного пара действует на климатическую систему дестабилизирующим образом.

*Положительная обратная связь альbedo снежно-ледяного покрова — температура атмосферы.* Как известно, снег и лед обладают более высокой отражательной способностью (альbedo), чем вода или почва. Поэтому увеличение площади снежно-ледяного покрова или сроков его существования должно сопровождаться увеличением планетарного альbedo, а оно — уменьшением количества солнечной радиации, усваиваемой климатической системой, и последующим понижением температуры атмосферы и увеличением площади снежно-ледяного покрова.

*Положительная обратная связь парниковый эффект углекислого газа — температура приземного слоя атмосферы.* Увеличение содержания углекислого газа в атмосфере, вызванное сжиганием ископаемого топлива, приводит к повышению температуры приземного слоя атмосферы благодаря «парниковому эффекту» углекислого газа. В свою очередь повышение температуры приземного слоя, сопровождающееся увеличением нисходящего потока длинноволновой радиации, и уменьшение потоков явного и скрытого тепла (уменьшается контраст температур вода—воздух) вызывают нагревание океанской поверхности. Это усиливает вертикальную устойчивость верхних слоев океана, ослабляет поглощение угле-

кислого газа и в конечном счете способствует увеличению концентрации  $\text{CO}_2$  в атмосфере.

*Отрицательная обратная связь между перепадом температур экватор—полюс и меридиональным переносом тепла.* Увеличение перепада температур экватор—полюс приводит к усилению меридионального переноса тепла. Это способствует повышению температуры океана и атмосферы в высоких широтах и, как следствие, уменьшению меридионального контраста температур.

*Отрицательная обратная связь влажность почвы — альbedo поверхности суши.* Увеличение влажности почвы сопровождается уменьшением альbedo поверхности суши, что в свою очередь благоприятствует увеличению поглощения коротковолновой солнечной радиации, повышению температуры подстилающей поверхности, усилению испарения и в итоге — уменьшению влажности почвы.

Мы рассмотрели два механизма изменчивости климатической системы — присущую ей внутреннюю стохастичность и внешнее воздействие. Третий механизм — различные формы резонанса между внутренними модами климатической системы и внешними воздействиями циклического характера. Примером тому могут служить колебания приземной температуры с периодом 100 тыс. лет. Эти колебания, как сейчас считается, обусловлены совпадением периодов изменения эксцентриситета земной орбиты и реакции астеносферы на нагрузку, создаваемую континентальными ледниковыми щитами.

Следуя [42], предположим, что внутренний стохастический механизм вносит существенный вклад в изменчивость климатической системы на всех временных масштабах и что этот механизм складывается из индивидуальных стохастических процессов, каждому из которых отвечают свой временной масштаб и собственный вклад («белый шум») в изменчивость, характеризующую всеми временными масштабами, превосходящему данный. Это определяет появление «фоновой» изменчивости (на рис. 2 она заштрихована) и увеличение ее интенсивности с ростом временного масштаба колебаний. Наиболее важными факторами «фоновой» изменчивости с временными масштабами порядка часа и меньше являются мелко-масштабная турбулентность и конвекция. На временных масштабах порядка суток основной вклад вносит инерционная, а на временных масштабах порядка месяца — термическая релаксация атмосферы. «Фоновая» изменчивость с временным масштабом порядка 1—10 лет обуславливается термической релаксацией верхнего квазиоднородного слоя океана. На временных масштабах от месяца до  $10^3$  лет сказывается влияние глубинного слоя океана, в интервале масштабов от  $10^3$  до  $10^5$  лет — влияние взаимодействия между континентальными ледниковыми щитами, глубинным слоем океана и атмосферой.

Внешние воздействия приводят к появлению дополнительной узкополосной изменчивости. Поэтому при наличии внешних воз-

действий и отсутствии «фоновой» изменчивости спектр климатической изменчивости напоминал бы суперпозицию изменений, свойственных различным внешним факторам. Подобные изменения обладают большой упорядоченностью и соответственно высокой степенью предсказуемости. Наоборот, «фоновая» изменчивость характеризуется малой упорядоченностью и низкой степенью предсказуемости.

### 3. ПРОБЛЕМА ПРЕДСКАЗУЕМОСТИ

Пусть начальное состояние климатической системы известно, и мы хотим найти решение уравнений гидротермодинамики, описывающих эволюцию этой системы, т. е. дать прогноз изменения ее состояния. Естественно задаться вопросом: возможен ли такой прогноз, и если да, то какова его максимальная заблаговременность? Чтобы ответить на него, вспомним, что начальное состояние климатической системы определяется по данным наблюдений на нерегулярной сети станций, расположенных к тому же на достаточно большом расстоянии друг от друга. Последнее обстоятельство приводит к тому, что индивидуальные движения с горизонтальными масштабами, меньшими расстояния между станциями, вообще не фиксируются. Мало того, используемые начальные данные искажены случайными ошибками измерений, интерполяции и округления. Поэтому даже точное решение исходных уравнений гидротермодинамики будет сопряжено с неизбежными ошибками, растущими вследствие нелинейности уравнений с увеличением срока заблаговременности.

Ситуация усугубляется еще и тем, что исходные уравнения описывают состояние климатической системы отнюдь не безупречно в силу ограниченности наших знаний о законах, управляющих поведением климатической системы. К тому же, как показал Лоренц [12], вследствие нелинейного взаимодействия движений различных пространственных и временных масштабов состояние климатической системы является неустойчивым в том смысле, что два близких в начальный момент времени состояния не останутся таковыми навсегда. Все это приводит к увеличению расхождений между прогнозируемыми и фактическими величинами. Однако любой прогноз имеет смысл лишь до тех пор, пока его ошибка не выходит за пределы средней климатической дисперсии прогнозируемой величины. Такой срок прогноза получил название *предела предсказуемости* (при использовании детерминистических моделей — *предела детерминистической предсказуемости*). Итак, причинами ограниченной предсказуемости климатической системы являются внутренняя неустойчивость климатической системы, неадекватность принятых способов ее описания и неточность начальной информации.



Предел детерминистической предсказуемости однозначно связан со скоростью роста ошибки в начальных данных или временем ее удвоения. Действительно, если погрешность задания начального поля температуры  $1^{\circ}\text{C}$ , время ее удвоения 3 сут и средняя климатическая дисперсия температуры  $8^{\circ}\text{C}$ , то при постоянной скорости роста предел детерминистической предсказуемости будет равен 9 сут. Такой порядок предела детерминистической предсказуемости имеют все используемые сейчас в оперативной практике модели краткосрочного прогноза погоды. В частности, предел детерминистической предсказуемости в модели Европейского центра среднесрочных прогнозов погоды равен 6,2 сут. Численные эксперименты по исследованию проблемы предсказуемости, выполненные в рамках этой модели, интересны в следующих двух отношениях. Во-первых, они свидетельствуют о том, что предел детерминистической предсказуемости зависит от качества прогностической модели: усовершенствование модели способствует увеличению предела детерминистической предсказуемости, но только до некоторого его значения, названного *верхним пределом детерминистической предсказуемости*. Во-вторых, предел детерминистической предсказуемости испытывает заметные сезонные вариации, принимая наибольшие значения зимой и наименьшие летом. Это объясняется тем, что предел детерминистической предсказуемости определяется как скоростью роста ошибки, так и максимально возможным значением последней, равным, по определению, средней климатической дисперсии прогнозируемой величины.

Известно, что скорость роста ошибки в северном полушарии летом меньше, а дисперсия — много меньше, чем зимой. В результате предел детерминистической предсказуемости зимой оказывается больше по сравнению с летом. Далее, из-за преобладания интенсивности влажно-конвективной неустойчивости в тропиках над интенсивностью динамической (создаваемой горизонтальными и вертикальными сдвигами скорости ветра) неустойчивости в умеренных широтах скорость роста ошибки в тропиках больше, чем в умеренных широтах, а амплитуды суточных колебаний метеорологических характеристик и в тропиках, и в умеренных широтах примерно одинаковы. Это обуславливает уменьшение предела детерминистической предсказуемости в тропиках по сравнению с умеренными широтами.

Влияние дисперсии на продолжительность периода предсказуемости можно проиллюстрировать еще одним примером. Интенсивность возмущений синоптического масштаба больше, нежели возмущений планетарного масштаба, и потому при прочих равных условиях (одинаковой скорости роста ошибки в начальных данных) предел детерминистической предсказуемости синоптических возмущений должен быть меньше, чем планетарных возмущений. Сказанное подтверждается результатами анализа предсказуемости возмущений геопотенциала на поверхности 850 гПа, согласно

которым предел детерминистической предсказуемости для возмущений с волновыми числами от 5 до 12 (возмущения синоптического масштаба) составляет около 2 недель, а для возмущений с волновыми числами от 0 до 4 (возмущения планетарного масштаба) — более 4 недель. Таким образом, предел детерминистической предсказуемости увеличивается с ростом пространственного масштаба возмущений. Последнее обстоятельство указывает на принципиальную возможность прогноза крупномасштабных долгопериодных колебаний в системе океан—атмосфера.

Однако крупномасштабные долгопериодные колебания (скажем, циркуляции атмосферы) могут возникать либо благодаря собственной неустойчивости атмосферы и взаимодействию с крайне неустойчивыми движениями синоптического масштаба, либо благодаря вариациям внешних параметров (как-то: температуры океанской поверхности, влажности почвы, площади снежно-ледяного покрова), приводящим к аномальному распределению источников и стоков тепла в атмосфере и, следовательно, к изменению амплитуд и фаз планетарных волн. Соответственно говорят о *внутренней* и *внешней изменчивости* атмосферы и отвечающей ей предсказуемости первого и второго родов [12]. Под *предсказуемостью первого рода* понимается прогноз последовательности состояний атмосферы при фиксированных значениях внешних параметров и заданных изменениях начальных условий, под *предсказуемостью второго рода* — прогноз асимптотически равновесной реакции (предельного состояния) на заданные изменения внешних параметров.

Из общих соображений ясно, что внутренняя изменчивость климатической системы обладает ограниченной детерминистической предсказуемостью, за пределами которой она служит источником непредсказуемого шума, тогда как внешняя изменчивость может быть предвычислена на более продолжительный срок, если, конечно, вариации внешних параметров сами предсказуемы или они достаточно медленны. Понятно также, что предсказуемость поведения климатической системы, как и любой динамической системы, определяется числом асимптотически устойчивых ее состояний при фиксированных значениях внешних параметров. В этой связи напомним, что в случае, когда уравнения, описывающие эволюцию динамической системы, при любых начальных условиях и фиксированных внешних параметрах имеют единственно возможное решение в течение бесконечно большого промежутка времени, такая система является *эргодической*. Если же динамическая система не является эргодической, то ее поведение в течение бесконечно большого промежутка времени будет существенно зависеть от начального состояния. Применительно к климатической системе это означает, что внешние параметры однозначно определяют климат в первом случае и неоднозначно во втором.

Подчеркнем, что стационарное состояние не обязательно должно быть устойчивым в том смысле, что система сколь угодно долго

приближается или остается в окрестности этого состояния, колеблясь вокруг него. Если стационарное состояние асимптотически неустойчиво, то под влиянием внешних сил система начнет отдаляться от него или приближаться к другому стационарному состоянию, которое также может быть асимптотически устойчивым или неустойчивым. Простейшим примером механических систем, обладающих асимптотически устойчивым и неустойчивым стационарным состоянием, может служить вертикальный стержень, колеблющийся в поле силы тяжести вокруг горизонтальной оси вращения. Устойчивое состояние имеет место, когда центр тяжести располагается ниже, неустойчивое — выше оси вращения.

Другой пример — движение жидкости в узком одномерном канале, описываемое так называемым уравнением адвекции

$$\partial u / \partial t + u \partial u / \partial x = 0, \quad (3.1)$$

где  $u$  — скорость течения в направлении оси  $x$ ;  $t$  — время.

Пусть длина канала равна  $L$ , и он ограничен с двух сторон непроницаемыми стенками, на которых скорость течения обращается в нуль, т. е.

$$u = 0 \text{ при } x = 0, L. \quad (3.2)$$

Следуя [2], представим решение задачи (3.1), (3.2) в виде ряда Фурье

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \sin(nkx),$$

где

$$k = \pi/L.$$

Подстановка этого выражения в (3.1) дает следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для коэффициентов  $u_n$  ряда Фурье:

$$\frac{du_n}{dt} = \frac{kn}{2} \sum_{m=1}^{\infty} u_m u_{n+m} - \frac{k}{2} \sum_{m=1}^{n-1} m u_m u_{n-m}. \quad (3.3)$$

Определим безразмерную скорость  $U_n$  и безразмерное время  $\tau$  формулами

$$U_n = \frac{u_n}{\sqrt{2E_0}}; \quad \tau = \sqrt{2E_0} kt,$$

где  $2E_0 = \sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t)$  — удвоенная кинетическая энергия, индекс «0» указывает на принадлежность к начальному моменту времени.

Тогда уравнение (3.3) переписывается в виде

$$\frac{dU_n}{d\tau} = \frac{n}{2} \sum_{m=1}^{\infty} U_m U_{n+m} - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{n-1} m U_m U_{n-m}. \quad (3.4)$$

Рассмотрим двухмодовую ( $n = 1, 2$ ) систему. В этом случае в соответствии с (3.4) имеем

$$dU_1/d\tau = U_1 U_2/2; \quad dU_2/d\tau = -U_1^2/2. \quad (3.5)$$

С помощью (3.5) находим закон сохранения энергии

$$dE/d\tau = 0$$

или, учитывая, что  $E = 1$  при  $\tau = 0$  (следствие выбора выражения для масштаба скорости),

$$U_1^2 + U_2^2 = 1. \quad (3.6)$$

Подставим это равенство во второе уравнение системы (3.5). В результате получим

$$dU_2/d\tau = -(1 - U_2^2)/2. \quad (3.7)$$

Интегрируя (3.7) и полагая  $U_2 = U_2^{(0)}$  при  $\tau = 0$ , имеем

$$U_2 = \frac{U_2^{(0)} - \text{th}(\tau/2)}{1 - U_2^{(0)} \text{th}(\tau/2)}. \quad (3.8)$$

Подстановка этого выражения в (3.6) дает

$$U_1 = \frac{U_1^{(0)}}{\text{ch}(\tau/2) - U_2^{(0)} \text{sh}(\tau/2)}. \quad (3.9)$$

При  $\tau \rightarrow \infty$  отсюда следует

$$U_1 = 0; \quad U_2 = -1,$$

т. е. асимптотическое состояние системы в *фазовой плоскости* (плоскость, координатами которой являются параметры состояния  $U_1, U_2$ ), изображается точкой с координатами  $(0, -1)$ . Однако, как видно из (3.5), состояние системы является неединственным: существует еще одно, представленное на фазовой плоскости точкой с координатами  $(0, 1)$ .

Выясним, какое из них устойчиво. С этой целью воспользуемся методом возмущений, для чего запишем  $U_1, U_2$  в окрестности стационарных состояний  $(0, U_2^{(\infty)})$  в виде  $U_1 = U_1^{(\infty)} + U'_1, U_2 = U_2^{(\infty)} + U'_2$ , где  $U_1^{(\infty)} = 0, U_2^{(\infty)} = 1$ , затем подставим выражения для  $U_1$  и  $U_2$  в (3.5), отбросим члены, содержащие произведения и квадраты возмущений  $U'_1, U'_2$ , и вычтем уравнения для  $U_1^{(\infty)}, U_2^{(\infty)}$ . В результате получим

$$\frac{dU'_1}{d\tau} = \frac{U_2^{(\infty)}}{2} U'_1; \quad \frac{dU'_2}{d\tau} = 0.$$

Решение первого из этих уравнений имеет вид

$$U_1' = U_1^{(0)} \exp(U_2^{(\infty)} \tau / 2). \quad (3.10)$$

Здесь мы учли, что  $U_1' = U_1^{(0)}$  при  $\tau = 0$ .

Из (3.10) видно, что отклонения от состояния  $(0, 1)$  экспоненциально растут, а отклонения от состояния  $(0, -1)$  экспоненциально затухают. Иными словами, первое из этих двух стационарных состояний является неустойчивым, второе — устойчивым.

Мысль о возможности неединственности земного климата впервые была высказана Э. Лоренцем [34, 35], назвавшим эргодические системы *транзитивными*, а системы, не обладающие свойством транзитивности, — *интранзитивными*. Реальная климатическая система, по Лоренцу, является *почти интранзитивной*, т. е. обладающей одновременно признаками транзитивности и интранзитивности. Свидетельством тому может служить чередование ледниковых и межледниковых эпох в последние 3,5 млн. лет истории Земли. Почти интранзитивность климатической системы влечет за собой важные следствия [18]: она делает практически невозможным детальный сверхдолгосрочный прогноз климата и заставляет весьма настороженно относиться к любым преднамеренным или непреднамеренным воздействиям на климатическую систему.

#### 4. СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КЛИМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ОКЕАН — АТМОСФЕРА

Рассмотрим бюджеты тепла, влаги и углового момента и отвечающие им пространственно-временные распределения климатических характеристик. Однако предварительно приведем сведения об исходной информации, лежащей в основе существующих представлений о современном состоянии климатической системы. При изложении фактических данных мы будем следовать [32, 46, 51].

##### 4.1. ИСХОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ

В настоящее время имеется приблизительно 2000 станций радиолокационного зондирования атмосферы, производящих дважды в сутки измерения горизонтальных составляющих скорости ветра, температуры, влажности и высоты изобарической поверхности на 11 уровнях в атмосфере. Объем информации, поставляемый этими станциями, огромен. Даже если исключить все месячные серии, в которых пропуски данных превышают 10 сут, то за 10-летний период с мая 1963 г. по апрель 1973 г. мы будем иметь  $10 \cdot 365 \cdot 2 \times 1000 \cdot 11 \cdot 5 = 4 \cdot 10^9$  единиц информации. Здесь первая цифра характеризует количество лет, вторая — количество суток в году, третья — количество ежесуточных серий измерений, четвертая — количество станций, обеспечивающих поступление доброкачест-

венной информации, пятая — количество уровней измерений в атмосфере и шестая — количество измеряемых параметров. Указанный объем информации достаточен для выявления крупномасштабных особенностей климата атмосферы. Однако не следует забывать о крайне неравномерном распределении аэрологических станций: последние сосредоточены преимущественно в густонаселенных районах земного шара, тогда как большая часть акватории Мирового океана, экваториальный пояс Южной Америки и Африки, а также Антарктида до сих пор еще остаются неосвещенными данными наблюдений.

Примерно то же самое можно сказать и в отношении сети станций измерений в Мировом океане. В настоящее время мы располагаем приблизительно  $10^6$  регистраций температуры, солёности и концентрации кислорода более чем на 30 горизонтах от поверхности до дна океана. Таким образом, массив данных океанологических измерений содержит в общей сложности  $10^6 \cdot 30 \cdot 3 \approx 10^8$  единиц информации. Однако, как и в атмосфере, распределение гидрологических станций по акватории Мирового океана имеет крайне неравномерный характер: на большей части акватории Мирового океана, особенно в океанах южного полушария, данных фактически нет. К счастью, недостаток данных измерений в океане не ощущается так остро, как в атмосфере, потому что наиболее изменчивым является верхний 100-метровый слой океана, лучше других слоев обеспеченный данными измерений. Кроме того, интенсивность междугодовой изменчивости в океане много меньше, нежели в атмосфере, так что для ориентировочной оценки климатических характеристик океана (в частности, меридионального переноса тепла) можно использовать все данные, полученные с момента выполнения первых глубоководных измерений температуры и солёности морской воды.

Значительно хуже обстоит дело с данными измерений скорости течения. Все, что мы имеем на сегодняшний день, — это сведения о дрейфе судов и весьма немногочисленные прямые регистрации скорости течения в глубинных слоях океана. Такая ситуация, естественно, не способствует совершенствованию наших знаний о глобальной циркуляции океана. Если к тому же добавить, что в ближайшие годы резкое увеличение сети станций измерений скорости по техническим и экономическим причинам невозможно, то остается одно — попытаться привлечь нетрадиционные (в первую очередь спутниковые) методы исследования динамической структуры океана. Но это — дело будущего. Пока же сбор всей необходимой информации производится по стандартной технологии. Исключение составляют измерения потоков коротковолновой и длинноволновой радиации на верхней границе атмосферы, температуры и рельефа свободной поверхности океана.

## 4.2. БЮДЖЕТ ТЕПЛА

Первичным источником энергии для климатической системы служит инсоляция, определяемая так называемой *солнечной постоянной* (поток солнечной радиации на среднем расстоянии Земли от Солнца, наиболее вероятное значение которого заключено в пределах от 1368 до 1377 Вт/м<sup>2</sup>), а также наклоном, эксцентриситетом и долготой перигелия земной орбиты. Вариации последних трех астрономических факторов имеют временные масштабы порядка десятков тысяч лет (см. выше), и потому они не оказывают сколько-нибудь ощутимого влияния на интересующие нас изменения состояния климатической системы с временными масштабами порядка десятилетий.

Полученное по данным спутниковых измерений пространственное распределение среднего годового результирующего потока радиации на верхней границе атмосферы (разность между усваиваемой коротковолновой радиацией и уходящим длинноволновым излучением) изображена на рис. 3. Отметим две его особенности: во-первых, превышение поглощенной солнечной радиации над уходящим длинноволновым излучением в районе экватора и обратное соотношение между ними вблизи полюсов и, во-вторых, заметные отклонения от зональной симметрии, связанные с различиями уходящего длинноволнового излучения над океаном и континентами, которые в свою очередь обусловлены разной теплоемкостью воды и почвы и перераспределением тепла океанскими течениями. Пространственная неоднородность результирующего потока радиации на верхней границе атмосферы является причиной возникновения общей циркуляции атмосферы и океана. В частности, перепад между экватором и полюсом создает меридиональный перенос тепла, а зональная асимметрия, особенно отчетливо выраженная в экваториальных и тропических широтах, — перенос тепла с океана на континенты.

Обозначим результирующий поток радиации на верхней границе атмосферы через  $R_A$ , на подстилающей поверхности — через  $R_0$ . Тогда их разность есть не что иное, как радиационный приток тепла в атмосферу. Этот приток тепла вместе с потоком  $P$  явного тепла, выделением тепла  $L\hat{C}$  при фазовых переходах водяного пара, дивергенцией  $\nabla \cdot c_p \frac{p_s}{g} T \hat{\mathbf{v}}_A$  интегрального по массе атмосферы переноса тепла и интегральным по вертикали переходом  $C(\Phi, I)$  внутренней энергии в другие формы энергии (см. ниже) должен балансироваться локальным изменением внутренней энергии  $c_v \frac{p_s}{g} \hat{T}_A$  единичного столба атмосферы, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} c_v \frac{p_s}{g} \hat{T}_A + \nabla \cdot c_p \frac{p_s}{g} T \hat{\mathbf{v}}_A = (R_A - R_0) + P + L(\hat{C} - \hat{e}) - C(\Phi, I), \quad (4.1)$$

где  $T_A$  — температура воздуха;  $v_A$  — горизонтальный вектор скорости ветра;  $\hat{C}$  — масса сконденсировавшегося за единицу времени водяного пара, отнесенная к единице площади атмосферы;  $p_s/g$  — масса столба атмосферы единичного сечения ( $p_s$  — атмосферное давление на подстилающей поверхности,  $g$  — ускорение свободного падения);  $L$  — теплота конденсации или сублимации;  $c_p$  и  $c_v$  — удельные теплоемкости воздуха при постоянном давлении и объеме;  $\nabla$  — двумерный оператор градиента на поверхности

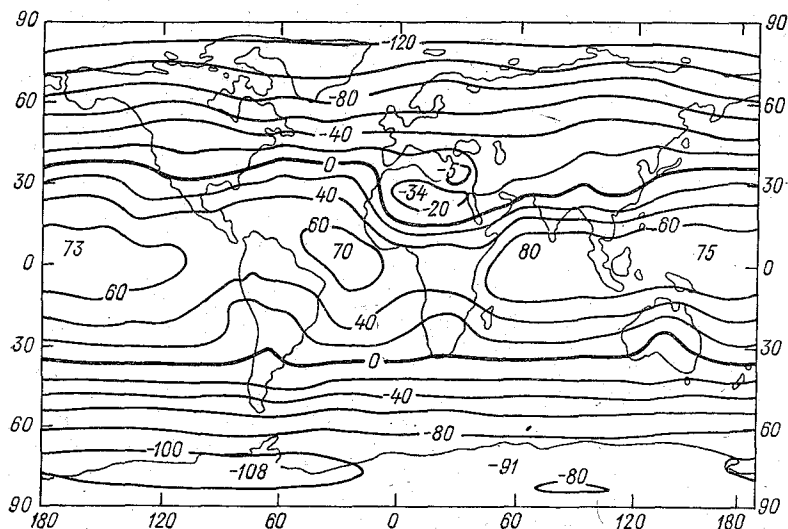


Рис. 3. Среднее годовое глобальное распределение результирующего потока радиации ( $\text{Вт/м}^2$ ) на верхней границе атмосферы, по Кемпбеллу и Вондер-Хаару [26].

сферы радиуса  $a$ ; символ « $\sim$ » означает усреднение по массе атмосферы.

Аналогично, результирующий поток радиации  $R_o$  на подстилающей поверхности за вычетом потоков явного  $P$  и скрытого  $LE$  тепла (здесь  $E$  — скорость испарения с подстилающей поверхности), дивергенции интегрального переноса тепла и потока тепла  $L_1 E_1$ , обусловленного фазовыми переходами воды, должен балансироваться локальным изменением теплосодержания единичного столба воды в океане или деятельного слоя суши, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} c_o m_o \hat{T}_o + \nabla \cdot c_o m_o \hat{T}_o \mathbf{v}_o = R_o - (P + LE) - L_1 E_1; \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} c_L m_L \hat{T}_L + \nabla \cdot c_L m_L \hat{T}_L \mathbf{v}_L = R_o - (P + LE), \quad (4.3)$$

где  $c$  и  $T$  — удельная теплоемкость и температура;  $m$  — масса еди-



нического столба, определяемая в терминах средней плотности;  $E_1$  — скорость образования (или таяния) морского льда;  $L_1$  — теплота плавления льда; индекс «О» указывает на принадлежность к океану, индекс «L» — к суше, символ « $\sim$ » означает усреднение по глубине океана или толщине деятельного слоя суши.

Дополним систему (4.1) — (4.3) уравнениями сохранения скрытого тепла  $L(p_s/g) \hat{q}_A$  в атмосфере и  $L_1 m_1$  в морском льду (здесь  $\hat{q}_A$  — средняя по массе атмосферы удельная влажность воздуха,  $m_1$  — масса морского льда, отнесенная к единице площади поверхности Земли). Эти уравнения имеют вид

$$\frac{\partial}{\partial t} L \frac{p_s}{g} \hat{q}_A + \nabla \cdot L \frac{p_s}{g} \hat{q}_A \mathbf{v}_A = L(E - \hat{C}); \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} L_1 m_1 + \nabla \cdot L_1 m_1 \mathbf{v}_1 = L_1 E_1 + L(\hat{C} - E), \quad (4.5)$$

где  $\mathbf{v}_1$  — горизонтальный вектор скорости дрейфа льда.

Интегрируя уравнения (4.1) — (4.5) по долготе и затем складывая полученные выражения, приходим к равенству

$$\begin{aligned} 2\pi a \frac{\partial}{\partial t} \left( \left[ c_v \frac{p_s}{g} \hat{T}_A \right] + \left[ L \frac{p_s}{g} \hat{q}_A \right] + f'_O [c_O m_O \hat{T}_O] + \right. \\ \left. + f'_L [c_L m_L \hat{T}_L] + f'_I [L_1 m_1] \right) \cos \varphi + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\text{MHT}_A + \text{MHT}_O) = \\ = 2\pi a [R_A] \cos \varphi - 2\pi a [C(\Phi, I)] \cos \varphi, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$\text{MHT}_A = \int_0^{2\pi} \frac{p_s}{g} (c_p \hat{T}_A v_A + L \hat{q}_A v_A) a \cos \varphi d\lambda \quad (4.7)$$

— меридиональный перенос явного и скрытого тепла в атмосфере;

$$\text{MHT}_O = \int_0^{2\pi} (f'_O c_O m_O \hat{T}_O v_O + f'_I L_1 m_1 v_I + f'_L c_L m_L \hat{T}_L v_L) a \cos \varphi d\lambda \quad (4.8)$$

— меридиональный перенос явного и скрытого тепла в океане и на суше;  $v_A$ ,  $v_O$ ,  $v_I$  и  $v_L$  — соответственно меридиональные составляющие скорости ветра, течения, дрейфа льда и перемещения речных и грунтовых вод;  $f'_O$ ,  $f'_L$  и  $f'_I$  — баллы океана, суши и морского льда в зональном поясе единичной меридиональной протяженности;  $\varphi$  и  $\lambda$  — широта и долгота; квадратные скобки означают зональное усреднение.

Уравнение (4.6), описывающее бюджет тепла в зональном поясе единичной меридиональной протяженности, связывает результирующий поток радиации на верхней границе атмосферы с дивергенцией меридионального переноса тепла и изменением теплосодержания в системе океан—атмосфера. Воспользуемся этим урав-

нением для оценки ( $MHT_A + MHT_O$ ). Однако предварительно рассмотрим пространственно-временное распределение скорости изменения теплосодержания в океане, учтя, что эта скорость (в силу малости ее аналога в атмосфере) может характеризовать не только океан, но и систему океан—атмосфера в целом.

Наиболее интересными особенностями пространственно-временного распределения скорости изменения теплосодержания в океане (рис. 4) являются увеличение сезонных колебаний в умеренных

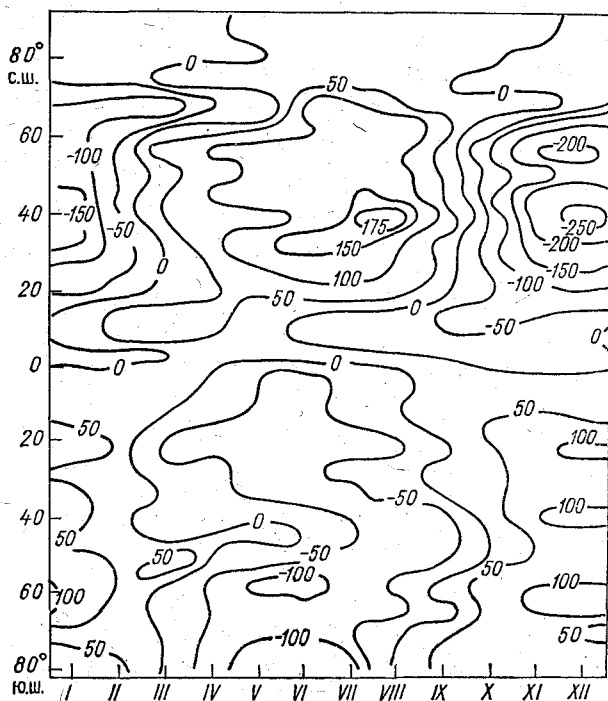


Рис. 4. Пространственно-временное распределение скорости изменения теплосодержания ( $Вт/м^2$ ) в Мировом океане, по Кагану и Цанковой [8].

широтах северного полушария по сравнению с теми же широтами южного полушария, отсутствие заметных сезонных колебаний в экваториальной зоне и в высоких широтах северного полушария, разная продолжительность периодов положительных и отрицательных значений в северном и примерное равенство этих периодов в южном полушарии и, наконец, преобладание экстремальных значений в северном полушарии над аналогичными значениями в южном. Для подтверждения последнего заключения приведем оценки максимальных положительных и отрицательных значений

скорости изменения теплосодержания в океане. В северном полушарии они составляют соответственно около 200 и  $-270$  Вт/м<sup>2</sup>, в южном 100 и  $-90$  Вт/м<sup>2</sup>. Таким образом, оказывается, что интенсивность поступления и отдачи тепла в океане северного полушария в 2—3 раза выше, чем в южном.

Переходя к анализу среднего годового меридионального переноса тепла в системе океан—атмосфера (рис. 5), отметим прежде всего, что в низких широтах меридиональный перенос явного и

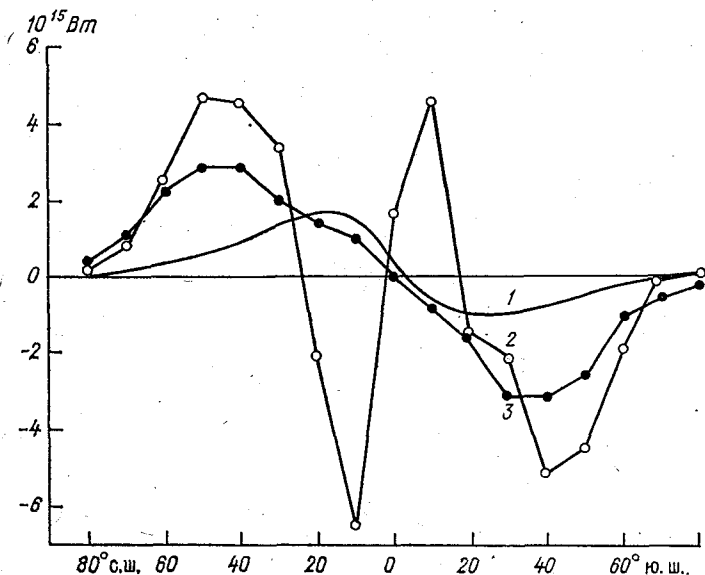


Рис. 5. Средний годовой меридиональный перенос явного тепла в океане (1), а также явного (2) и скрытого (3) тепла в атмосфере.

Положительным значениям соответствует перенос на север, отрицательным — на юг. При построении графика использованы данные из [27, 48] (см. также [49, 56]).

скрытого тепла в атмосфере направлен к экватору и потому тропики представляют собой мощный источник тепла для атмосферы, что меридиональный перенос тепла в океане способствует выносу тепла из тропиков, но не компенсирует его полностью, что эта компенсация осуществляется главным образом меридиональным переносом потенциальной энергии в атмосфере, что суммарный меридиональный перенос энергии в атмосфере (перенос явного и скрытого тепла + перенос потенциальной энергии) и меридиональный перенос тепла в океане ориентированы к полюсам, что такая их ориентация есть следствие преобладания усваиваемого потока коротковолновой солнечной радиации над уходящим длинноволновым излучением в низких широтах и обратного соотношения ме-

жду ними в высоких широтах и что, наконец, на экваторе меридиональный перенос тепла в океане принимает близкие к нулю и положительные значения, свидетельствующие о существовании небольшого переноса тепла из южного полушария в северное.

Не секрет, что меридиональный перенос тепла в океане до сих пор еще остается одним из наименее изученных элементов глобального климата, и потому на анализе его пространственно-временной

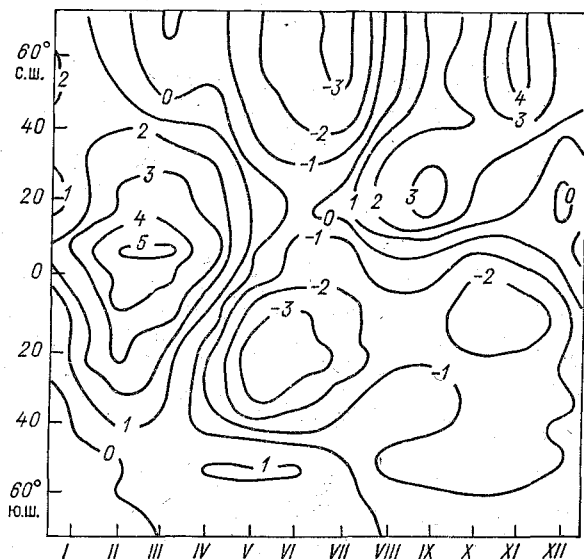


Рис. 6. Пространственно-временное распределение меридионального переноса тепла ( $10^{15}$  Вт) в Мировом океане, по Кагану и Цанковой [9].

Положительные значения соответствуют переносу на север, отрицательные — на юг.

изменчивости стоит остановиться более подробно. Для оценки меридионального переноса тепла в океане можно поступить следующим образом: 1) определить  $MNT_A$  по данным о температуре и меридиональной составляющей скорости ветра и найти  $MNT_O$  как разность между  $(MNT_A + MNT_O)$  и  $MNT_A$ ; 2) определить  $MNT_O$  из уравнения бюджета тепла в океане как разность между результирующим потоком тепла на поверхности и скоростью изменения теплосодержания океана; 3) определить  $MNT_O$  по данным о температуре и меридиональной составляющей скорости течения в океане. Первый из названных способов, по-видимому, впервые был использован в [21] (см. также [27, 49]), второй — в [55], третий получил распространение лишь в последние годы, когда появились результаты численного интегрирования уравнений гид-

ротермодинамики атмосферы и океана и были разработаны обратные методы расчета скорости океанских течений.

Полученное вторым способом пространственно-временное распределение меридионального переноса тепла в океане приводится на рис. 6. Анализ этого рисунка выявляет замечательное подобие сезонных колебаний  $MHT_0$  в океане северного и южного полушарий. В обоих из них меридиональный перенос тепла достигает наибольших значений зимой и направлен в это время года к зимнему полюсу. Летом всюду, за исключением тропической зоны океана, происходит заметное ослабление и смена направления меридионального переноса тепла в океане. Максимальные значения  $MHT_0$  отмечаются в тропиках и приходятся на февраль—март в северном полушарии и на октябрь—ноябрь в южном. Вторичные максимумы, смещенные относительно первых дальше от экватора, имеют место в октябре—ноябре в северном полушарии и в мае—июне в южном. Последнее обстоятельство указывает на существование четко выраженной полугодовой гармоник.

Упомянем еще две особенности сезонной изменчивости  $MHT_0$ . Мы имеем в виду, во-первых, интенсификацию переноса тепла к полюсу весной по сравнению с осенью в северном полушарии и летом по сравнению с зимой в южном и, во-вторых, превышение (в два раза) продолжительности периода переноса тепла из северного полушария в южное по сравнению с продолжительностью периода переноса тепла в обратном направлении.

И последнее: сопоставление средних годовых распределений  $MHT_A$  и  $MHT_0$  показывает (см. рис. 4), что меридиональные переносы тепла в атмосфере и океане не только соизмеримы между собой, но, главное, имеют совершенно иную природу. Об этом говорит тот факт, что в океане максимум переноса тепла к полюсам приходится на низкие широты, где меридиональные градиенты температуры воды сравнительно невелики, тогда как в атмосфере максимальные значения переноса тепла к полюсам располагаются в области умеренных широт, т. е. в области наибольших меридиональных градиентов температуры воздуха.

#### 4.3. БЮДЖЕТ ВЛАГИ

Как и в предыдущем разделе, начнем с анализа уравнений бюджета массы пресной воды в отдельных звеньях климатической системы. Для атмосферы и морского льда эти уравнения имеют вид

$$\partial W_A / \partial t + \nabla \cdot \widehat{W_A} \mathbf{v}_A = -(\widehat{C} - E) (\rho_0 / \rho); \quad (4.9)$$

$$\partial W_I / \partial t + \nabla \cdot W_I \mathbf{v}_I = E_I (\rho_0 / \rho_I) + (\widehat{C} - E) (\rho_0 / \rho). \quad (4.10)$$

Здесь  $W_A = (p_s / g) \widehat{q}_A (\rho_0 / \rho)$  — влагосодержание (в водном эквиваленте) столба атмосферы единичного сечения;  $W_I = m_I (\rho_0 / \rho_I)$  —

нормированная на единицу площади масса пресной воды в морском льду;  $\rho$ ,  $\rho_1$  и  $\rho_0$  — плотность воздуха, морского льда и пресной воды; остальные обозначения прежние.

Для суши уравнение бюджета массы пресной воды записывается в виде

$$\partial W_L / \partial t + \nabla \cdot \widehat{W_L} \mathbf{v}_L = (\widehat{C} - E) (\rho_0 / \rho), \quad (4.11)$$

где  $W_L$  — влагосодержание деятельного слоя суши, определяемое как масса пресной воды в почве и грунте, приходящаяся на единицу площади поверхности Земли.

Система (4.9) — (4.11) замыкается уравнением бюджета массы пресной воды в океане

$$\partial W_O / \partial t + \nabla \cdot \widehat{W_O} \mathbf{v}_O = (\widehat{C} - E) (\rho_0 / \rho) - E_I (\rho_0 / \rho), \quad (4.12)$$

где  $W_O$  имеет смысл содержания пресной воды в столбе океана единичного поперечного сечения.

Уравнения (4.9) — (4.12) описывают соответственно атмосферную, криосферную, континентальную и океанскую составляющие гидрологического цикла. После интегрирования первого из этих уравнений по поверхности всей Земли, второго — по поверхности морского льда, третьего — по поверхности суши и четвертого — по свободной от льда поверхности океана и использования условия непрерывности интегрального переноса массы воды на границе раздела океан—суша получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \{W_A\} + [\widehat{C} - E] (\rho_0 / \rho_A) = 0; \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{W_I\} f_I - [\widehat{C} - E] f_I (\rho_0 / \rho_A) - \{E_I\} f_I (\rho_0 / \rho_I) = 0; \quad (4.14)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{W_L\} f_L - [\widehat{C} - E] f_L (\rho_0 / \rho_A) + \{E_R\} f_L = 0; \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{W_O\} f_O - [\widehat{C} - E] f_O (\rho_0 / \rho_A) + \{E_I\} f_I (\rho_0 / \rho_I) - \{E_R\} f_L = 0, \quad (4.16)$$

где  $f_O$ ,  $f_L$  и  $f_I$  — отношения площадей океана, суши и морского льда к площади поверхности всей Земли (иначе, баллы океана, суши и морского льда), связанные между собой соотношением  $f_O + f_L + f_I = 1$ ; фигурные скобки означают усреднение по площади поверхности Земли.

Сложение (4.13) — (4.16) приводит к очевидному равенству

$$\frac{\partial}{\partial t} (\{W_A\} + \{W_I\} f_I + \{W_L\} f_L + \{W_O\} f_O) = 0, \quad (4.17)$$

выражающему закон сохранения массы пресной воды в климатической системе.

Пространственное распределение средней по массе атмосферы удельной влажности воздуха для средних годовых условий изображено на рис. 7. Из рисунка видно, что, за редким исключением, влагосодержание атмосферы систематически уменьшается от экватора к полюсам. Такое его распределение объясняется сильной зависимостью удельной влажности воздуха от температуры. Обратим внимание на отклонения от зональной симметрии, связанные с влиянием подстилающей поверхности: как правило, влагосодер-

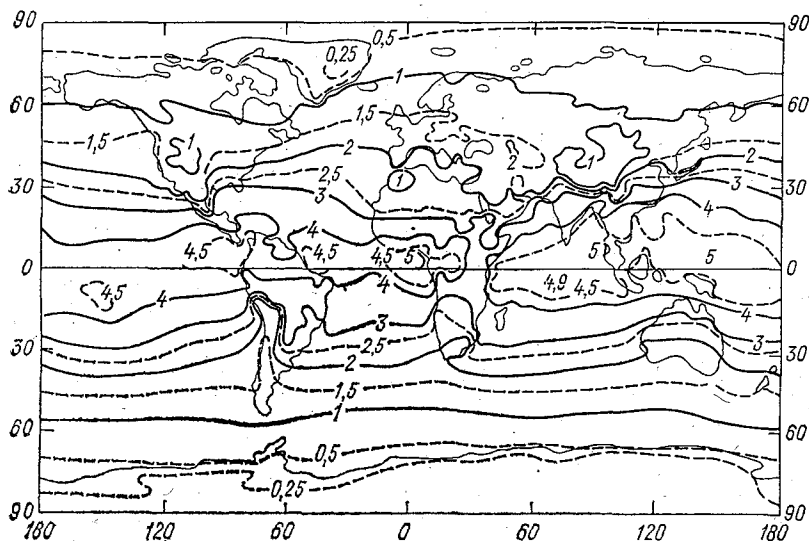


Рис. 7. Глобальное распределение средней по массе атмосферы удельной влажности (г/кг) воздуха для средних годовых условий, по Пейшоту и Оорту [50].

жание больше над океаном, чем над сушей. Заметные смещения изолиний влагосодержания отмечаются также в окрестности западных и восточных границ континентов, что обусловлено влиянием орографии и теплых и холодных океанских течений. Еще одна примечательная особенность — более близкое к зональному распределение удельной влажности в южном, нежели в северном, полушарии. Причина этого — разное соотношение площадей суши и океана.

Представление о сезонной изменчивости влагосодержания атмосферы можно получить на основании рис. 8. Из этого рисунка явствует, что на всех широтах северного полушария влагосодержание атмосферы летом больше, чем зимой, причем максимальные изменения влагосодержания имеют место в зональном поясе, ограниченном параллелями 20 и 30° с. ш. Эта особенность обязана своим происхождением муссонной циркуляции над юго-восточ-

ной Азией и Африкой. В экваториальной области сезонная изменчивость, связанная со смещением максимума влагосодержания в летнее полушарие, выражена гораздо слабее.

Переходя к обсуждению меридионального переноса влаги в атмосфере, проинтегрируем уравнение (4.9) по долготе. В результате получаем

$$2\pi a \frac{\partial}{\partial t} [W_A] \cos \varphi + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} MWT_A = \\ = -2\pi a ([\hat{C}] - [E]) (\rho_o/\rho) \cos \varphi, \quad (4.18)$$

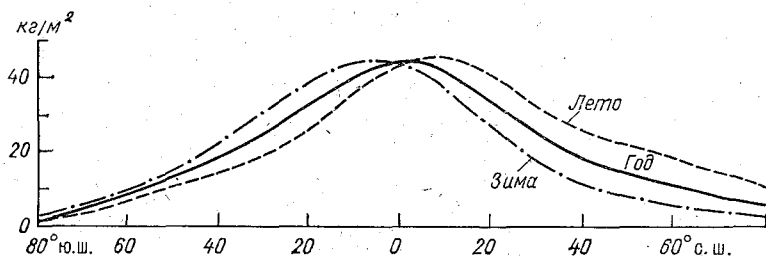


Рис. 8. Меридиональное распределение влагосодержания атмосферы, по Пейшоту и Оорту [50].

где

$$MWT_A = \int_0^{2\pi} (\rho_s/g) \widehat{q_A v_A} (\rho_o/\rho) a \cos \varphi d\lambda$$

— меридиональный перенос пресной воды в атмосфере.

Зависимость от широты меридионального переноса водяного пара в атмосфере (он определяется как  $MWT_A$ , нормированный на  $(\rho_o/\rho)$ ) представлена на рис. 9. Даже беглого взгляда на этот рисунок достаточно, чтобы обнаружить две интересные особенности. Мы имеем в виду, во-первых, большую сезонную изменчивость меридионального переноса водяного пара в тропиках и почти полное ее отсутствие в умеренных и высоких широтах; во-вторых, существование значительного ( $18,8 \cdot 10^8$  кг/с) переноса водяного пара из южного полушария в северное летом и несколько меньшего ( $13,0 \cdot 10^8$  кг/с) обратного переноса влаги зимой. Таким образом, оказывается, что в среднем за год южное полушарие служит источником водяного пара для северного.

Перенос водяного пара через экватор играет важную роль в формировании водного баланса обоих полушарий. Достаточно сказать, что именно он регулирует превышение средних годовых осадков над испарением, которое, например, в северном полушарии составляет 39 мм/год [50]. Далее, если взглянуть на вещи с более общей точки зрения, то наличие меридионального переноса водяного



пара через экватор может служить косвенным свидетельством в пользу существования обратного (относительно  $MWT_A$ ) меридионального переноса воды в океане и на суше: в среднем за год

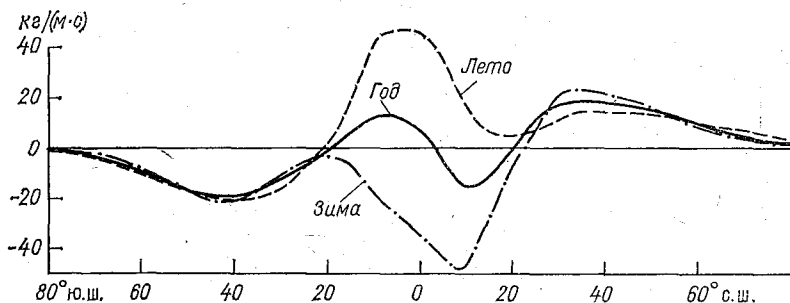


Рис. 9. Меридиональный перенос водяного пара в атмосфере как функция широты, по Пейшото и Оорту [50].

меридиональный перенос влаги во всех звеньях климатической системы обязан обращаться в нуль. На основании этого соображения и приведенных выше оценок меридионального переноса во-

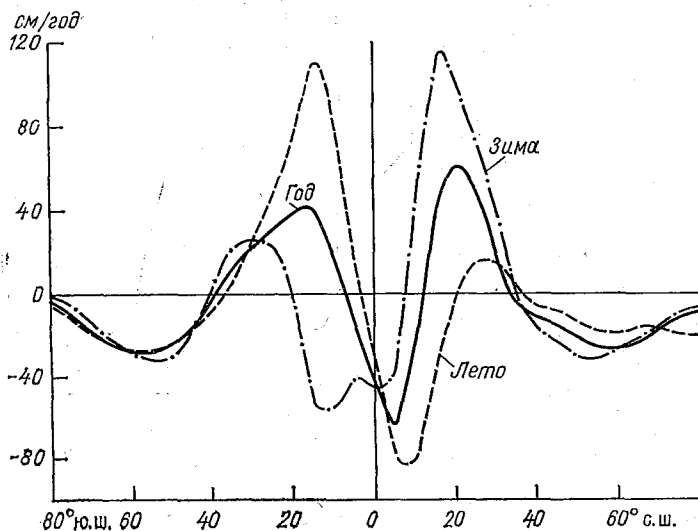


Рис. 10. Дивергенция меридионального переноса водяного пара как функция широты, по Пейшото и Оорту [50].

дяного пара заключаем, что меридиональный перенос пресной воды в океанской и континентальной частях гидрологического цикла должен быть ориентирован на юг в умеренных широтах северного полушария и в районе экватора и на север на всех других широтах.

Однако при изучении водного баланса надо знать не только меридиональный перенос водяного пара, но и его дивергенцию, поскольку величина и знак последней определяют для средних годовых условий разность между осадками и испарением (см.

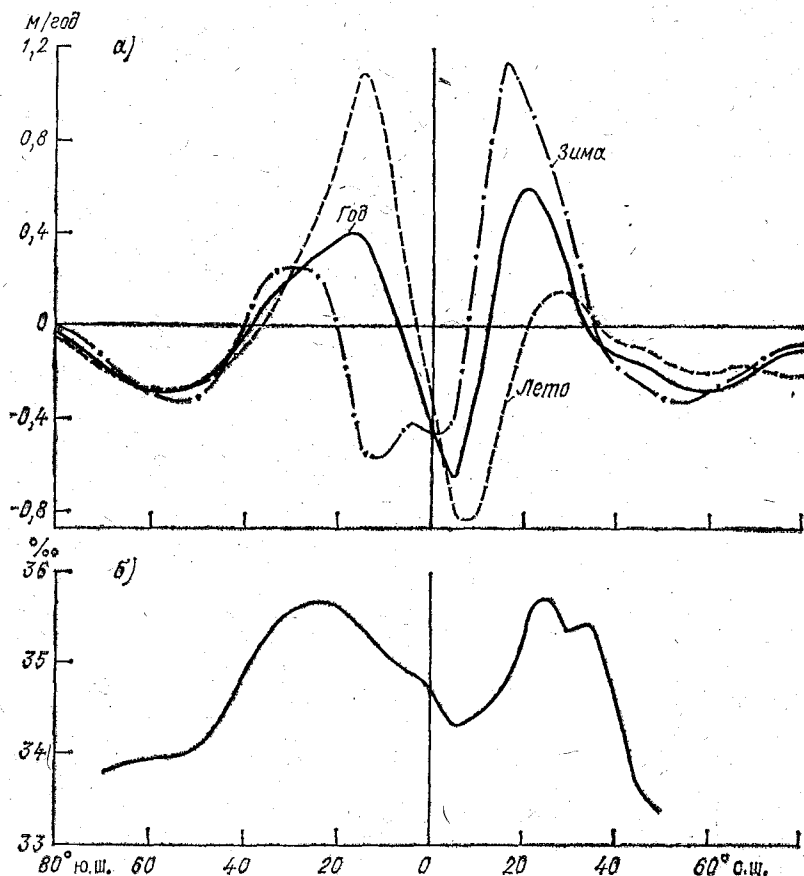


Рис. 11. Меридиональное распределение разности испарение — осадки (а) и солености поверхности океана (б), по Пейшото и Оорту [50].

(4.18)). В частности, если дивергенция меридионального переноса водяного пара положительна, то  $([E] - [\hat{C}]) > 0$  и, значит, область, в которой это условие выполняется, служит источником водяного пара для атмосферы. Напротив, если в некоторой области  $([E] - [\hat{C}]) < 0$ , то в ней имеет место сток водяного пара. Представленная на рис. 10 зависимость от широты дивергенции меридионального переноса водяного пара свидетельствует о том, что основным источником водяного пара для атмосферы являются

тропические области океана, стоком — экваториальная зона, а также умеренные и высокие широты обоих полушарий.

Эта особенность должна иметь важные следствия для меридионального распределения солености воды в океане. Действительно,

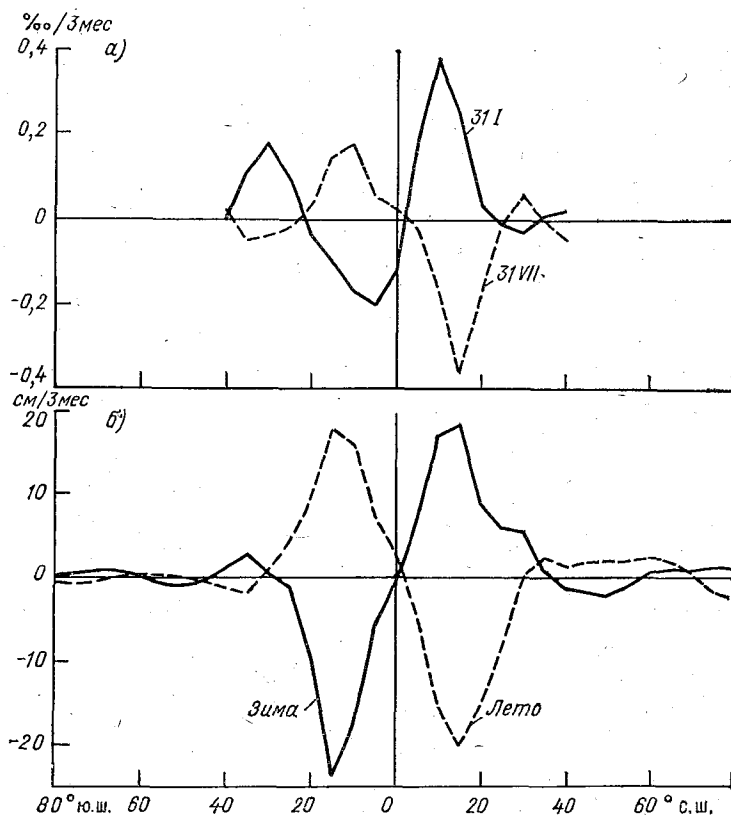


Рис. 12. Меридиональное распределение скорости изменения солености в поверхностном слое океана (а) и дивергенции меридионального переноса водяного пара в атмосфере (б), по Пейшоту и Оорту [50].

Указанные значения дивергенции представляют собой разности средних сезонных и средних годовых значений.

там, где испарение преобладает над осадками, соленость поверхностного слоя океана должна увеличиваться, в противном случае — уменьшаться. Сравнение меридиональных распределений средних годовых зональных значений разности испарение — осадки и солености поверхностного слоя Мирового океана (рис. 11) подтверждает отмеченную закономерность. Но особенно сильное впечатление оставляет сравнение меридиональных распределений разности

испарение—осадки и скорости изменения солености в поверхностном слое океана, отвечающих лету и зиме северного полушария (рис. 12): совпадения формы кривых и местоположения экстремумов — почти идеальные. Это говорит о том, что по крайней мере в экваториальных и тропических широтах испарение и осадки оказывают определяющее влияние на сезонную изменчивость солености поверхностного слоя океана, тогда как все прочие факторы

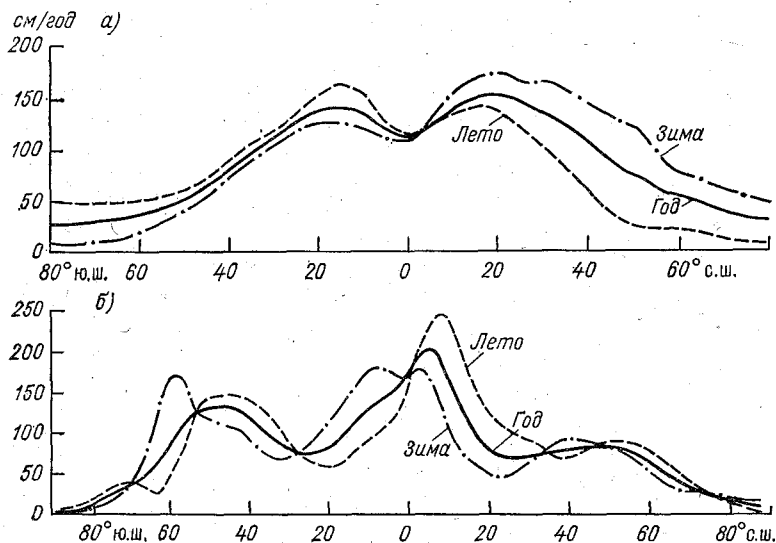


Рис. 13. Меридиональные распределения испарения (а) и осадков (б), по Пейшото и Оорту [50].

(в том числе горизонтальная адвекция и вертикальная диффузия) вносят лишь второстепенный вклад.

Итак, распределение  $([E] - [\bar{C}])$  известно. Ради полноты картины рассмотрим, как ведут себя отдельные составляющие этой разности (рис. 13). Никаких неожиданностей этот рисунок не приносит. Как и следовало ожидать, максимальные значения испарения приходятся на тропические широты океана. В экваториальной зоне испарение меньше, чем в тропиках, из-за понижения температуры поверхности океана и ослабления ветра, причем зимой оно больше, чем летом. Из рисунка видно также, что меридиональное распределение осадков не симметрично относительно экватора (в северном полушарии их меньше, чем в южном) и что всюду, кроме тропиков, количество осадков над океаном больше, чем над сушей. Если теперь учесть, что испарение с поверхности океана в среднем больше, чем с поверхности суши, то это означает, что испарение и осадки уравниваются локально. Однако эта ком-

пенсация может быть только частичной в том смысле, что результирующая разность испарение—осадки должна быть отрицательной на суше и положительной в океане. В противном случае существование речного стока становится необъяснимым. Следовательно, в атмосферной части гидрологического цикла должен иметь место перенос водяного пара с океана на сушу, в континентальной части — перенос воды с суши в океан.

Теперь, если средняя годовая скорость выпадения осадков и средняя годовая скорость таяния морского льда равны 1 и 0,5 м/год, а русловой и подземный сток — 0,3 м/год, то, поделив на них общее влагосодержание атмосферы (в водном эквиваленте равное 0,025 м) и нормированные на единицу площади Земли запасы пресной воды в морском льду (1,5 м), в озерах, руслах рек, болотах, почвах и подземных водах (78 м) и в океане (3700 м), получаем, что время обновления массы пресной воды в атмосферной, криосферной, литосферной и океанской частях гидрологического цикла составляет соответственно 9 сут, 3 года, 260 и 3700 лет.

#### 4.4. БЮДЖЕТ УГЛОВОГО МОМЕНТА

*Абсолютный угловой момент* единичной массы относительно оси вращения Земли определяется выражением

$$M = \Omega a^2 \cos^2 \varphi + ua \cos \varphi, \quad (4.19)$$

где  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли;  $u$  — зональная составляющая относительной скорости; остальные обозначения прежние.

В (4.19) первый член справа называется *омега-моментом* (он характеризует угловой момент единичной массы, вращающейся вместе с Землей как твердое тело), второй — *относительным моментом* (своим происхождением он обязан движению относительно Земли). Относительный момент считается положительным при движении с запада на восток и отрицательным — при движении в обратном направлении.

Подеействуем на  $M$  оператором  $d/dt$  индивидуальной производной и выпишем выражение для  $dM/dt$ . Оно будет иметь вид

$$dM/dt = \left[ du/dt + \left( l + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) v \right] a \cos \varphi.$$

Здесь  $l = 2\Omega \sin \varphi$  — параметр Кориолиса;  $v$  — составляющая скорости в направлении оси  $\varphi$ .

Комбинируя это выражение с уравнением движения для зональной составляющей скорости

$$\frac{du}{dt} + \left( l + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{a \cos \varphi \partial \lambda} + F_{\lambda},$$

где  $p$  — давление;  $\rho$  — плотность;  $F_\lambda$  — зональная составляющая ускорения силы трения, находим:

$$\rho dM/dt = -\partial p/\partial \lambda + \rho F_\lambda a \cos \varphi. \quad (4.20)$$

Отсюда следует, что изменение абсолютного углового момента определяется исключительно моментами сил давления и трения.

Проинтегрируем уравнение (4.20) по долготе и затем по вертикали в пределах всей толщи атмосферы. Тогда вместо (4.20) будем иметь

$$\begin{aligned} 2\pi a \cos \varphi \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{p_s}{g} \widehat{M}_A \right] + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} (MMT_A) = \\ = - \int_0^\infty \sum_i (p_{AE}^i - p_{AW}^i) a \cos \varphi dz - 2\pi [\tau_\lambda] a^2 \cos^2 \varphi, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где

$$\begin{aligned} MMT_A = \int_0^{2\pi} \frac{p_s}{g} \widehat{M}_A v_A a \cos \varphi d\lambda = \int_0^{2\pi} \frac{p_s}{g} (\Omega \widehat{v}_A a^2 \cos^2 \varphi + \\ + \widehat{u}_A v_A a \cos \varphi) a \cos \varphi d\lambda \end{aligned}$$

— меридиональный перенос абсолютного углового момента в атмосфере, равный сумме меридиональных переносов омега-момента (первый член справа) и относительного углового момента (второй член);  $(p_{AE}^i - p_{AW}^i)$  — разность давления на восточной и западной сторонах  $i$ -го горного хребта; суммирование производится по всем горным хребтам или другим неровностям земной поверхности, пересекающим рассматриваемый широтный пояс;  $\tau_\lambda$  — зональная составляющая касательного напряжения ветра на подстилающей поверхности.

Уравнение (4.21) характеризует бюджет углового момента в зональном поясе атмосферы единичной протяженности в меридиональном направлении. Для оценки слагающих его членов воспользуемся данными наблюдений средней годовой зональной скорости ветра (рис. 14). Отличительная особенность распределения скорости ветра в меридиональной плоскости — трехъячеистая структура циркуляции в каждом полушарии, причем из трех ячеек две прямые располагаются в тропических и полярных широтах, одна обратная — в умеренных широтах. Напомним, что *прямой ячейкой циркуляции* называется ячейка, в которой поднимается более теплый и опускается более холодный воздух. В *обратной ячейке*, напротив, поднимается более холодный и опускается более теплый воздух. Прямая ячейка циркуляции в низких широтах обычно именуется ячейкой Хэдли, обратная ячейка в умеренных широтах — ячейкой Феррела.

Из рис. 14 видно, что зональная составляющая скорости ветра на нижних уровнях в атмосфере ориентирована на запад (пассаты) в низких широтах и на восток (западный перенос) в умеренных широтах. Соответственно напряжение приземного трения, направленное против ветра, будет положительным в первом случае и отрицательным во втором. Отсюда следует, что атмосфера передает Земле импульс в низких широтах и получает его от Земли в умеренных широтах. Поскольку, согласно третьему закону Ньютона, Земля оказывает равное и противоположно направленное действие на атмосферу, то это утверждение равносильно тому, что Земля

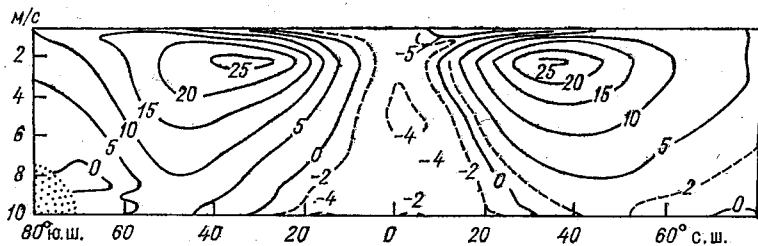


Рис. 14. Среднее годовое меридионально-высотное распределение зональной составляющей скорости ветра, по Пейшоту и Оорту [51].

служит источником импульса для атмосферы в низких широтах и стоком его в умеренных широтах. То же самое можно сказать и применительно к относительному угловому моменту. Для подтверждения сошлемся на рис. 15, содержащий результаты расчета меридионального распределения суммарного момента сил давления и трения. Последний считается положительным, если он увеличивает относительный угловой момент атмосферы, т. е. если в последнем члене уравнения (4.21) касательное напряжение ветра заменяется равным ему по величине, но противоположным по направлению касательным напряжением подстилающей поверхности. Судя по рис. 15, поверхностное трение способствует переносу относительного углового момента от подстилающей поверхности к атмосфере в тропиках и от атмосферы к подстилающей поверхности в умеренных широтах, причем такое направление переноса характерно не только для средних годовых условий, но и для всего года.

Отметим еще два источника относительного углового момента для атмосферы, расположенные в высоких широтах обоих полушарий, в области влияния полярных (северной и южной) ячеек циркуляции. Соответствующий им радиус широтного круга (плечо рычага  $a \cos \varphi$ ) мал, и, стало быть, мал относительный угловой момент, передаваемый здесь от подстилающей поверхности Земли к атмосфере.

Итак, мы выяснили, что относительный угловой момент передается от подстилающей поверхности к атмосфере главным образом в тропиках. Затем он переносится восходящими ветвями ячеек Хэдли в верхние слои атмосферы, после чего транспортируется в умеренные широты и уже здесь перемещается вниз, чтобы компенсировать потери углового момента в планетарном пограничном слое атмосферы вследствие трения. Обсудим теперь меридиональный перенос углового момента в атмосфере.

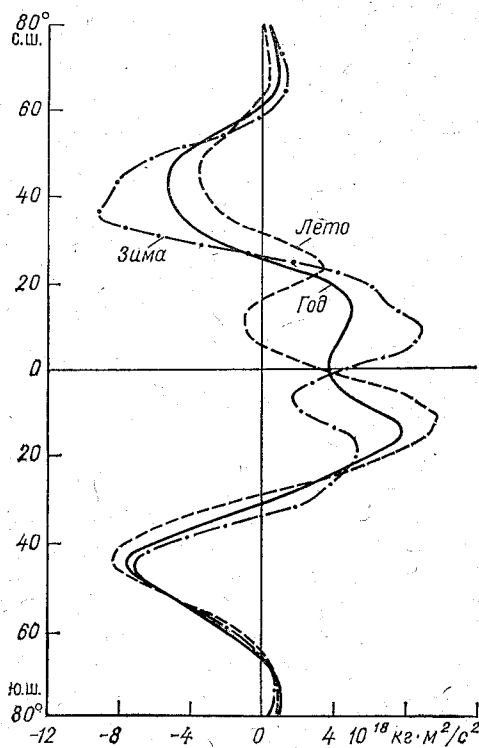


Рис. 15. Меридиональное распределение суммарного момента сил давления и трения, по Пейшото и Оорту [51].

Как известно, скорость  $\Omega a$  твердого вращения, равная 464 м/с, много больше относительной скорости  $u$ . Поэтому меридиональный перенос абсолютного углового момента на любом уровне в атмосфере должен обуславливаться переносом омега-момента. Однако в установившемся состоянии интегральный (по массе атмосферы) меридиональный перенос абсолютного углового момента не зависит от переноса омега-момента, так как в силу закона сохранения массы интегральная (по массе атмосферы) меридиональная составляющая скорости тождественно равна нулю. Иными словами, интегральный меридиональный перенос абсолютного углового момента определяется только переносом относительного углового

момента, а он в свою очередь зависит от корреляции  $[\widehat{u_A v_A}]$  между зональной и меридиональной составляющими скорости ветра. Именно эта корреляция и отвечает за перенос абсолютного углового момента из низких в умеренные широты атмосферы. Но поскольку бесконечного накопления абсолютного углового момента в умеренных широтах атмосферы не происходит, как не происходит и бесконечной убыли его в низких широтах, то, по-видимому,



обязан существовать обратный перенос абсолютного углового момента. Естественно предположить, что такой перенос локализован в океане. Проверим эту возможность.

Предварительно выпишем уравнение бюджета абсолютного углового момента в зональном поясе океана единичной меридиональной протяженности. По аналогии с (4.21) оно имеет вид

$$\begin{aligned} & 2\pi a \cos \varphi \frac{\partial}{\partial t} [m_O \widehat{M}_O] + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \text{MMT}_O = \\ & = - \int_{-H_O}^0 \sum_i (p_{OE}^i - p_{OW}^i) a \cos \varphi dz + 2\pi [\tau_\lambda^0] a^2 \cos^2 \varphi. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Здесь

$$\text{MMT}_O = \int_0^{2\pi} m_O \widehat{M}_O v_O a \cos \varphi d\lambda$$

— меридиональный перенос абсолютного углового момента в океане;  $(p_{OE}^i - p_{OW}^i)$  — разность давления на восточном и западном краях континентов, срединных океанских хребтов и других неровностей дна, пересекающих рассматриваемый широтный круг; касательное напряжение на дне считается пренебрежимо малым по сравнению с касательным напряжением  $\tau_\lambda^0$  на свободной поверхности океана.

Сопоставим оценки меридионального переноса абсолютного углового момента в атмосфере и океане. Принимая типичные значения отношений корреляционных членов  $[\widehat{u_A v_A}]$  и  $[\widehat{u_O v_O}]$ , масс единичных столбов атмосферы ( $p_s/g$ ) и океана ( $m_O$ ) и протяженности атмосферы и океана в зональном направлении соответственно равными  $10^4$ ,  $3 \cdot 10^{-3}$  и 2, получаем  $O(\text{MMT}_A/\text{MMT}_O) \approx 10^2$ , т. е. меридиональный перенос абсолютного углового момента в океане на два порядка меньше, чем в атмосфере, и, стало быть, меридиональный перенос в океане не может компенсировать накопление абсолютного углового момента в умеренных широтах атмосферы.

Перепишем теперь уравнение (4.22) применительно к средним годовым условиям. В этом случае оно будет иметь вид

$$0 \approx - \int_{-H_O}^0 \sum_i (p_{OE}^i - p_{OW}^i) a \cos \varphi dz + 2\pi a \cos \varphi [\tau_\lambda^0] a \cos \varphi.$$

Отсюда следует, что момент силы трения на поверхности океана почти целиком балансируется моментом, создаваемым разностью давления (или, что то же, разностью среднего уровня океана) на восточном и западном берегах континентов. Таким образом, в отличие от атмосферы, перераспределение абсолютного углового момента в океане происходит в зональном, а не в меридиональном направлении.

Моменты сил давления и трения обозначены соответственно символами  $\mathcal{P}$  и  $\mathcal{T}$ , индекс «L» указывает на принадлежность к суше, индекс «O» — к океану.

*Адиабатическим инвариантом* называется функция или комбинация функций, которая в адиабатическом приближении не зависит от времени. Выясним, какими адиабатическими инвариантами обладает система уравнений гидротермодинамики атмосферы и океана. Начнем с атмосферы. Как известно, ее состояние определяется следующими независимыми параметрами: скоростью  $u$ , давлением  $p$ , температурой  $T$  и удельной влажностью  $q$ . Уравнения, описывающие изменения этих параметров, с учетом гидростати-

ческого и традиционного (для ускорения Кориолиса) приближений имеют вид:

$$d\mathbf{v}/dt = -2\Omega \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \nabla p/\rho + \mathbf{F}; \quad (5.1)$$

$$\partial p/\partial z = -g\rho; \quad (5.2)$$

$$d\rho/dt = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}; \quad (5.3)$$

$$c_p dT/dt = F_T + (1/\rho)(dp/dt); \quad (5.4)$$

$$dq/dt = F_q, \quad (5.5)$$

где  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  и  $\mathbf{v} = (u, v)$  — трехмерный и двумерный (в горизонтальной плоскости) векторы скорости с компонентами  $u = a \cos \varphi d\lambda/dt$ ,  $v = a d\varphi/dt$ ,  $w = dz/dt$ ;  $\mathbf{F}$ ,  $F_T$  и  $F_q$  — отнесенные к единице массы источники и стоки импульса, тепла и влаги;  $\mathbf{k}$  — единичный вектор, ориентированный вертикально вверх; остальные обозначения прежние.

Пять уравнений (5.1) — (5.5) содержат шесть неизвестных функций:  $\mathbf{v}$ ,  $w$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $T$  и  $q$ . Для замыкания системы воспользуемся уравнением состояния

$$p = \rho RT \quad (5.6)$$

для ненасыщенного влажного воздуха.

Сформулируем граничные условия, которым должно удовлетворять решение системы (5.1) — (5.6). На поверхности суши все три составляющие скорости должны быть равны нулю ( $u = v = w = 0$ ). На океанской поверхности (при исследовании крупномасштабных атмосферных процессов эту поверхность можно совместить с горизонтальной плоскостью  $z = 0$ ) должны выполняться кинематическое соотношение для вертикальной составляющей ( $w$ ) и условие непрерывности для горизонтальных составляющих ( $u$ ,  $v$ ) скорости. Условие непрерывности должно выполняться также для давления и горизонтальных составляющих ( $\tau_\varphi$ ,  $\tau_\lambda$ ) касательного напряжения на поверхности океана. Граничным условием для температуры на поверхности суши и океана служит уравнение бюджета тепла, для удельной влажности — условие равенства ее влажности насыщения на поверхности океана и уравнение бюджета влаги на поверхности суши. На верхней границе атмосферы давление и вертикальный поток импульса, а также потоки тепла и влаги должны обращаться в нуль. Наконец, в качестве граничных условий по горизонтали (атмосфера по  $\varphi$  и  $\lambda$  не имеет границ) необходимо потребовать выполнения условия регулярности решения.

Обратимся теперь к уравнению неразрывности (5.3) и с помощью соотношения

$$dX/dt = \partial X/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla X,$$

связывающего индивидуальную ( $d/dt$ ) и частную ( $\partial/\partial t$ ) производ-

ные от произвольной скалярной функции  $X$ , перепишем это уравнение в виде

$$\partial \rho / \partial t = -\nabla \cdot \rho \mathbf{u}. \quad (5.7)$$

Интегрируя (5.7) по всему объему атмосферы и учитывая соответствующие граничные условия, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = 0, \quad (5.8)$$

где  $dV = a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dz$  — элемент объема.

Отсюда следует, что масса атмосферы сохраняется неизменной. Это — первый линейный (относительно неизвестной функции) интегральный инвариант.

Вторым линейным инвариантом является интегральная (по массе атмосферы) удельная энтропия  $\eta$ , которая для ненасыщенного влажного воздуха (в этом случае  $T_e \approx T$ ) определяется как  $\eta = c_p \ln T - R \ln p + \text{const}$ . Действительно, переписывая уравнение (5.4) в терминах  $\eta$  и затем приводя его к дивергентной форме, имеем:

$$\partial \eta / \partial t = -\nabla \cdot \eta \mathbf{u} + F_T / T. \quad (5.9)$$

Умножим теперь (5.9) на  $\rho$ , а (5.7) на  $\eta$  и получившиеся выражения сложим. В результате находим

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \eta = -\nabla \cdot \rho \eta \mathbf{u} + \rho F_T / T.$$

Вновь проинтегрируем это уравнение по всему объему атмосферы и учтем надлежащие граничные условия. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \eta dV = \int \rho (F_T / T) dV, \quad (5.10)$$

откуда следует, что в адиабатическом приближении ( $F_T = 0$ ) интегральная по массе атмосферы энтропия остается неизменной по времени.

Аналогично доказывается инвариантность влагосодержания  $\int \rho q dV$  и интегрального по массе атмосферы абсолютного углового момента  $\int \rho M_A dV$ . При этом предполагается, что источники и стоки водяного пара в атмосфере, а также потоки влаги и момента импульса на подстилающей поверхности и на верхней границе атмосферы отсутствуют.

Как известно, любая функция от инвариантов сама является инвариантом. В качестве примера рассмотрим экспоненциальную функцию от нормированной на удельную теплоемкость  $c_p$  энтропии. Действуя оператором  $d/dt$  на  $\eta/c_p$ , имеем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\eta}{c_p} = \frac{1}{T} \frac{dT}{dt} - \frac{R}{c_p} \frac{1}{p} \frac{dp}{dt}.$$

Правая часть этого соотношения тождественно равна  $d \ln \Theta$ , где  $\Theta$  — потенциальная температура, так что рассматриваемая здесь экспоненциальная функция от  $\eta/c_p$  есть потенциальная температура, удовлетворяющая уравнению (5.4))

$$\frac{d}{dt} \ln \Theta = F_T.$$

Дальнейший ход доказательства инвариантности выражения  $\int \rho \ln \Theta dV$  не отличается от проделанного выше для энтропии.

Перейдем к выводу квадратичных инвариантов. Предварительно введем определения отнесенных к единице массы потенциальной энергии  $\Phi = gz$ , внутренней энергии  $I = c_v T$  (здесь  $c_v$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме), скрытого тепла  $Lq$ , кинетической энергии  $K = |\mathbf{u}|^2/2$  и полной энергии  $E = K + \Phi + I + Lq$ .

Уравнение сохранения потенциальной энергии

$$d\Phi/dt = g\omega \quad (5.11)$$

следует непосредственно из определения  $\Phi$  после того, как на него подействовать оператором  $d/dt$  и учесть тождество  $\omega \equiv dz/dt$ . Уравнение сохранения внутренней энергии находится объединением (5.3), (5.4) и уравнения состояния

$$p = \rho RT \quad (5.6')$$

ненасыщенного влажного воздуха. Именно, комбинируя (5.3) и (5.6') и подставляя результирующее выражение

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = -\frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} + R \frac{dT}{dt}$$

в (5.4), имеем:

$$\frac{dI}{dt} = F_T - \frac{p}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (5.12)$$

или

$$\frac{dI}{dt} = F_T - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot p \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla p}{\rho}. \quad (5.13)$$

В гидростатическом приближении интегральная по массе атмосферы внутренняя энергия  $\int_0^\infty \rho I dz$  пропорциональна интегральной по массе атмосферы потенциальной энергии  $\int_0^\infty \rho \Phi dz$  с множителем пропорциональности  $c_v/R$ . Действительно, для ненасыщенного влажного воздуха

$$\int_0^\infty \rho \Phi dz = \int_0^\infty \rho g z dz = - \int_0^{p_s} z dp = \int_0^\infty p dz = \int_0^\infty \rho RT dz,$$

так что

$$\int_0^{\infty} \rho I dz / \int_0^{\infty} \rho \Phi dz = c_p / R.$$

Поэтому эти две формы энергии объединяют в одну, называемую *лабильной* (или *полной потенциальной*) *энергией*  $\Pi = I + \Phi$ . Соответствующее ей уравнение сохранения имеет вид

$$\frac{d\Pi}{dt} = gw + F_T - \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \rho \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \frac{\nabla p}{\rho}. \quad (5.14)$$

Уравнение сохранения кинетической энергии получается скалярным умножением (5.1) на  $\mathbf{v}$ . Поступая таким образом и учитывая, что в гидростатическом приближении  $dw/dt = 0$  и, кроме того,  $\mathbf{v} \cdot \nabla p / \rho = \mathbf{u} \cdot \nabla p / \rho + gw$ , находим:

$$dK/dt = -\mathbf{u} \cdot \nabla p / \rho - gw + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}. \quad (5.15)$$

Несколько отступая от принятой последовательности изложения, заметим, что уравнения (5.11), (5.13), (5.14) и (5.15) содержат одинаковые, но противоположные по знаку члены, характеризующие преобразования одной формы энергии в другую. Так, член  $\mathbf{u} \cdot \nabla p / \rho$ , фигурирующий в уравнениях (5.13) и (5.15) и описывающий работу, совершаемую силой давления, характеризует преобразование кинетической энергии во внутреннюю и обратно. Аналогично, член  $gw$ , фигурирующий в уравнениях (5.14) и (5.15) и описывающий работу, совершаемую силой плавучести, характеризует преобразование лабильной энергии в кинетическую и обратно. Однако в кинетическую энергию может превращаться не вся лабильная энергия атмосферы, а только ее часть  $A = \int \rho (\Pi - \Pi_*) dV$ , называемая *доступной лабильной энергией*. Здесь  $\int \rho \Pi_* dV$  — недоступная лабильная энергия, т. е. та лабильная энергия, которая останется, если атмосферу адиабатически привести к состоянию с постоянным давлением вдоль любой изэнтропической поверхности  $\theta = \text{const}$ , сохранив при этом устойчивую стратификацию; интегрирование распространяется на весь объем атмосферы.

Для представления  $\int \rho \Pi_* dV$  в терминах измеряемых параметров выполним следующую цепочку преобразований:

$$\begin{aligned} \int \rho \Pi_* dV &= \int \rho (I + \Phi) dV = \frac{c_p}{R} \int \rho \Phi dV = c_p \int \rho \frac{p}{R\rho} dV = \\ &= c_p \int \rho T dT = -\frac{c_p}{g} \int_{p_0}^0 ds \int_{p_0}^0 T dp = -\frac{c_p}{g} \int_{p_0}^0 ds \int_{p_0}^0 \Theta \left( \frac{p}{p_0} \right)^{R/c_p} dp = \\ &= -\frac{c_p}{g} \left( 1 + \frac{R}{c_p} \right)^{-1} p_0^{-R/c_p} \int_{p_0}^0 ds \int_{p_0}^0 \Theta dp^{1+R/c_p} = \\ &= \frac{c_p}{g} \left( 1 + \frac{R}{c_p} \right)^{-1} p_0^{-R/c_p} \int_{p_0}^0 ds \int_0^{\infty} p^{1+R/c_p} d\Theta; \end{aligned}$$

здесь мы приняли, что  $\Theta = 0$  при  $p = p_0$  [где  $\Theta = T (p_0/p)^{R/c_p}$  — потенциальная температура,  $p_0 = 1000$  гПа — стандартное атмосферное давление на уровне моря] и что интегрирование по  $s$  распространяется на всю поверхность сферы.

Учтем теперь, что при адиабатических процессах масса воздуха над любой изэнтропической поверхностью остается неизменной. Последнее обстоятельство влечет за собой постоянство над этой поверхностью среднего давления  $p_*$  и величины

$$\int \rho \Pi_* dV = \frac{c_p}{g} \left(1 + \frac{R}{c_p}\right)^{-1} p_0^{-R/c_p} \int ds \int_0^\infty p_*^{1+R/c_p} dp.$$

Подставляя приведенные [выражения для  $\int \rho \Pi dV$  и  $\int \rho \Pi_* dV$  в определение  $A$ , имеем:

$$A = \frac{c_p}{g} \left(1 + \frac{R}{c_p}\right)^{-1} p_0^{-R/c_p} \int ds \int_0^\infty (p^{1+R/c_p} - p_*^{1+R/c_p}) dp.$$

Поскольку, однако,  $p > 0$  и  $R/c_p > 0$ , а  $p_*$ , по определению, есть некоторое среднее значение давления  $p$ , то, согласно [11], интеграл от разности  $(p^{1+R/c_p} - p_*^{1+R/c_p})$  положителен для каждой изэнтропической поверхности, и стало быть, он может быть аппроксимирован через дисперсию давления на этой поверхности. Далее, если, следуя [11], принять, что наклон изэнтропической поверхности относительно горизонтальной плоскости мал, то дисперсию давления на изэнтропической поверхности можно аппроксимировать с помощью дисперсии потенциальной температуры или дисперсии абсолютной температуры на изобарической поверхности. В настоящее время имеется несколько аппроксимаций приведенного выше выражения  $A$ . Все они основываются на приближенной формуле Лоренца [11]:

$$A = \frac{1}{2} \frac{c_p}{g} \int \frac{\gamma_a}{(\gamma_a - \gamma)} \frac{T^2 - \tilde{T}^2}{\tilde{T}} a^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda \frac{dp}{g},$$

где  $\tilde{T}$  — средняя глобальная температура воздуха на фиксированной изобарической поверхности;  $\gamma_a = g/c_p$  и  $\gamma = -\partial \tilde{T} / \partial z$  адиабатический и фактический вертикальные градиенты температуры в атмосфере.

Возвращаясь к выводу квадратичных инвариантов, умножим уравнение (5.5) на  $L$  и затем сложим его с (5.14) и (5.15). В результате получим уравнение сохранения полной энергии

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \rho \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} + F_T + L F_q \quad (5.16)$$

или после умножения на  $\rho$  и сложения с умноженным на  $E$  уравнением неразрывности (5.7)

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho E = -\nabla \cdot \mathbf{u} (\rho + \rho E) + \rho (\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} + F_T + L F_q). \quad (5.17)$$

Интегрируя (5.17) по всему объему атмосферы и используя надлежащие граничные условия, убеждаемся в том, что при  $\mathbf{F} = F_T = F_q = 0$  полная энергия  $\int \rho E dV$  атмосферы является инвариантом.

Рассмотрим теперь океан. Инвариантами в этом случае выступают те же комбинации функций, кроме, разумеется, влагосодержания атмосферы. Вместо него появляется новый инвариант — общее содержание соли в океане. Сказанное подтверждается сравнением уравнений гидротермодинамики атмосферы и океана. Для океана эти уравнения, записанные в приближениях несжимаемости, гидростатики и Буссинеска (последнее означает, что вариации плотности оказывают влияние на циркуляцию только посредством эффекта плавучести), имеют вид:

$$d\mathbf{v}/dt = -2\Omega \mathbf{k} \times \mathbf{v} - \nabla p / \rho_0 + \mathbf{F}; \quad (5.18)$$

$$\partial p / \partial z = -g\rho; \quad (5.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0; \quad (5.20)$$

$$dT/dt = F_T; \quad (5.21)$$

$$dS/dt = F_S; \quad (5.22)$$

здесь, кроме известных обозначений, введены следующие:  $S$  — соленость морской воды;  $F_T$  — нормированные на объемную теплотемкость морской воды источники или стоки тепла;  $F_S$  — отнесенные к единице массы источники или стоки соли;  $\rho_0$  — отсчетное значение плотности.

Для замыкания системы (5.18) — (5.22), как обычно, привлекается уравнение состояния морской воды

$$\rho = \rho_s'(T, S, p), \quad (5.23)$$

связывающее между собой плотность  $\rho$ , температуру  $T$ , соленость  $S$  и давление  $p$ .

Граничными условиями для вектора  $\mathbf{v}$  горизонтальной скорости служат условия непрерывности скорости и касательного напряжения на свободной поверхности [ $z = \xi(\varphi, \lambda, t)$ ] и условие обращения в нуль горизонтальной скорости на дне [ $z = -H(\varphi, \lambda)$ ]; для вертикальной скорости  $w$  — равенство ее нулю на дне и кинематическое соотношение на свободной поверхности, определяющее отклонение уровня  $\xi(\varphi, \lambda, t)$  относительно его невозмущенного положения; для давления — условие непрерывности давления на свободной поверхности океана; для температуры и солености — уравнения бюджета тепла и соли на свободной поверхности и равенство нулю потоков тепла и соли на дне. На берегах океана



(всюду, кроме устьев рек) ставятся условия обращения в нуль горизонтальной скорости течения и потоков тепла и соли; в устьях рек нормальная к берегу составляющая скорости должна быть равна нормированному на площадь поперечного сечения расходу реки, а температура и соленость — их значениям, отвечающим речным водам.

Мы не будем повторять вывод всех инвариантов — он тождествен приведенному выше — и рассмотрим лишь полную энергию океана применительно к случаю, когда связь между плотностью и температурой морской воды задается линейным уравнением состояния

$$\rho = \rho_0 (1 - \alpha_T (T - T_0)), \quad (5.23')$$

где  $T_0$  — отсчетное значение температуры;  $\alpha_T$  — коэффициент теплового расширения морской воды.

Вновь скалярно умножая (5.18) на  $\mathbf{v}$ , получаем уравнение сохранения кинетической энергии. Оно имеет вид

$$\frac{dK}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot \rho \mathbf{u} - \frac{\rho}{\rho_0} g \mathbf{w} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}; \quad (5.24)$$

здесь член, стоящий в левой части, характеризует скорость изменения кинетической энергии  $K = |\mathbf{u}|^2/2$ , а члены в правой части — соответственно работу, совершаемую силами давления, плавучести и трения.

Определим отнесенную к единице массы потенциальную энергию  $\Pi$  так, чтобы она принимала нулевое значение при  $z = -H$ , т. е.

$$\Pi = \frac{\rho}{\rho_0} g (z + H).$$

Тогда

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{\rho}{\rho_0} g \mathbf{w} + g (z + H) \frac{d}{dt} \frac{\rho}{\rho_0}. \quad (5.25)$$

Выражение для второго слагаемого в правой части (5.25) найдем с помощью уравнения бюджета тепла (5.21). С этой целью умножим (5.21) на  $-\rho_0 \alpha_T$  и воспользуемся (5.23'). В результате приходим к следующему уравнению сохранения плотности:

$$\frac{d}{dt} \frac{\rho}{\rho_0} = -\alpha_T F_T.$$

В комбинации с (5.25) оно дает искомое уравнение бюджета потенциальной энергии

$$\frac{d\Pi}{dt} = \frac{\rho}{\rho_0} g \mathbf{w} - g \alpha_T (z + H) F_T. \quad (5.26)$$

Содержащийся в нем и в уравнении (5.24) член  $(\rho/\rho_0) g \mathbf{w}$  описывает преобразование потенциальной энергии в кинетическую и обратно за счет работы, совершаемой силой плавучести; второй член

справа представляет собой скорость изменения потенциальной энергии, обусловленную источниками и стоками тепла.

Обозначим через  $E$  полную энергию ( $K + \Pi$ ). Соответствующее ей уравнение бюджета находится суммированием (5.24) и (5.26). Прделав эту операцию, получаем:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla \cdot p \mathbf{u} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} - g \alpha_T (z + H) F_T. \quad (5.27)$$

Умножим обе части уравнения (5.27) на  $\rho_0$ , затем проинтегрируем его по всему объему океана и удовлетворим надлежащим граничным условиям. В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho_0 E dV = \int \rho_0 \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} dV - \int g \alpha_T \rho_0 (z + H) F_T dV. \quad (5.28)$$

Из (5.28) при  $\mathbf{F} = F_T = 0$  следует инвариантность полной энергии  $\int \rho_0 E dV$  океана.

## 6. ЭНЕРГЕТИКА КЛИМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Согласно эмпирическим оценкам, систематизированным в [18], поток коротковолновой солнечной радиации, приходящийся на единицу площади верхней границы атмосферы и являющийся первичным источником энергии для климатической системы, составляет около  $1370 \text{ Вт/м}^2$ . Доля этой радиации (*планетарное альбедо*), отражающаяся обратно в космос, равна в среднем  $0,30$ , а усваиваемая климатической системой коротковолновая солнечная радиация —  $244 \text{ Вт/м}^2$ .

Внутренняя энергия всей атмосферы равна  $1,7 \cdot 10^9 \text{ Дж/м}^2$ , потенциальная энергия —  $7,2 \cdot 10^8 \text{ Дж/м}^2$  и лабильная энергия —  $2,42 \cdot 10^9 \text{ Дж/м}^2$ . Часть лабильной энергии, способная превращаться в кинетическую энергию, равна  $5,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^2$ , что лишь немногим больше  $0,2 \%$  всей лабильной энергии атмосферы. Еще меньше кинетическая энергия. Она составляет  $1,5 \cdot 10^6 \text{ Дж/м}^2$ , т. е. около четверти доступной лабильной энергии. При этом кинетическая энергия, приходящаяся на единицу массы ( $5,14 \cdot 10^{18} \text{ кг}$ ) атмосферы, равна  $140 \text{ м}^2/\text{с}^2$ , что дает для средней квадратической скорости ветра оценку  $17 \text{ м/с}$ .

Усваиваемая климатической системой солнечная радиация перераспределяется следующим образом: из оставшихся после отражения в космос  $70 \%$  приходящей солнечной радиации  $20 \%$  поглощается атмосферой и  $50 \%$  океаном и сушей. В свою очередь поглощенная океаном и сушей солнечная радиация частично ( $24 \%$ ) затрачивается на испарение с поверхности и частично ( $6 \%$ ) — на обмен явным теплом с атмосферой. Остальная часть ( $20 \%$ ) расходуется на нагревание океана и суши и затем на длинноволновое излучение в атмосферу ( $14 \%$ ) и в космос ( $6 \%$ ).

Только очень небольшая часть (примерно  $4 \text{ Вт/м}^2$ , или всего 1,6 %) усваиваемой климатической системой солнечной радиации преобразуется в кинетическую энергию атмосферных и океанских движений. Если рассматривать эту систему как тепловую машину по переработке солнечной радиации в кинетическую энергию, то отношение мощности генерации кинетической энергии к мощности усваиваемой солнечной радиации может характеризовать собой *коэффициент полезного действия климатической системы*. Малость этого коэффициента (меньше 2 %) приводит к тому, что кинетическая энергия составляет лишь ничтожную долю (0,06 %) полной энергии атмосферы. В единице массы атмосферы скорость генерации кинетической энергии равна в среднем  $4 \text{ см}^2/\text{с}^3$ . Такого же порядка должна быть и удельная (отнесенная к единице массы) скорость диссипации кинетической энергии в теплоту.

Наконец, поглощенная в атмосфере тепловая энергия (64 % приходящей солнечной радиации) излучается в космос посредством длинноволновой радиации, замыкая тем самым энергетический цикл. Все эти соображения иллюстрируются рис. 17, на котором дано схематическое изображение энергетического цикла климатической системы.

Выше уже отмечалось, что в атмосфере совершается переход от одной формы энергии в другую, но ничего не говорилось о механизме этого перехода. Для его анализа воспользуемся квазизональностью атмосферной циркуляции, являющейся следствием широтной зональности инсоляции, и выделим в полях климатических характеристик зональную и вихревую (связанную с отклонениями от зональных средних) составляющие. Тогда любые климатические характеристики (скажем, компоненты  $u$ ,  $v$ ,  $w$  скорости ветра или температура  $T$  воздуха) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} u &= [u] + u^*; \\ v &= [v] + v^*; \\ w &= [w] + w^*; \\ T &= [T] + T^* + \tilde{T}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

где квадратные скобки, как и раньше, означают зональное усреднение; звездочка — отклонение от зонального среднего; тильда — глобальное среднее.

Соответственно отнесенную к единице массы кинетическую энергию  $K$  можно выразить в виде суммы кинетической энергии  $K_M$  среднего зонального движения и кинетической энергии  $K_E$  вихревых возмущений, т. е.

$$K = K_M + K_E,$$

где

$$\begin{aligned} K_M &= ([u]^2 + [v]^2)/2; \\ K_E &= ([u^{*2}] + [v^{*2}])/2. \end{aligned} \quad (6.2)$$

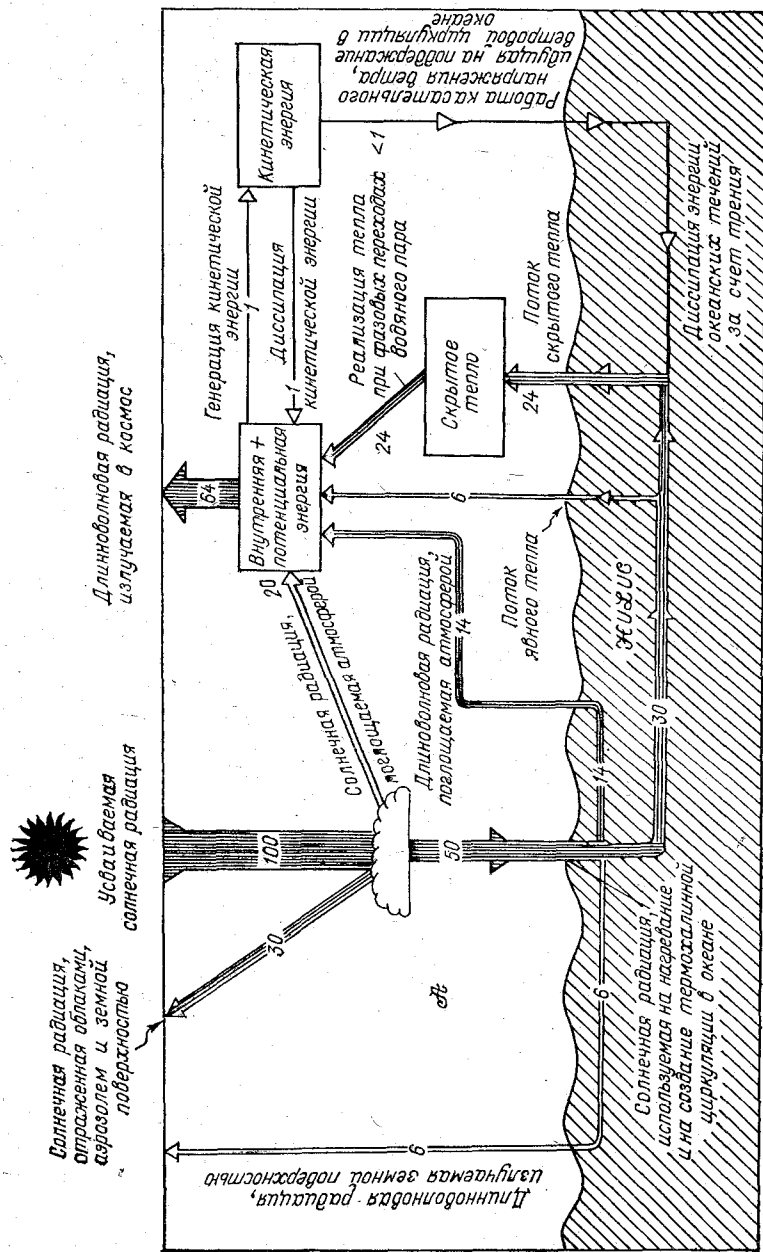


Рис. 17. Схематическое представление энергетического цикла в климатической системе, по Пейшоту и Оорту [51]. Все переходы энергии даны в относительных единицах; нормировочный множитель — усваиваемый поток солнечной радиации, последнему приписана цифра 100.

Аналогично определяется и доступная лабильная энергия

$$A = A_M + A_E,$$

где

$$\begin{aligned} A_M &= \frac{1}{2} c_p \int \frac{\gamma_a}{(\gamma_a - \gamma)} \frac{[T]^2}{\tilde{T}} a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi \frac{dp}{g}; \\ A_E &= \frac{1}{2} c_p \int \frac{\gamma_a}{(\gamma_a - \gamma)} \frac{[T^{*2}]}{\tilde{T}} a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi \frac{dp}{g}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Получим уравнения бюджета  $K_M$  и  $K_E$ . Предварительно перейдем от обычных координат  $\lambda, \varphi, z, t$  к изобарическим координатам  $\lambda, \varphi, p, t$ . Тогда уравнения динамики атмосферы (5.1) — (5.3) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \omega \frac{\partial u}{\partial p} - \\ - \left( l + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) v = - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} + F_\lambda; \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \omega \frac{\partial v}{\partial p} + \\ + \left( l + \frac{u}{a} \operatorname{tg} \varphi \right) u = - \frac{1}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + F_\varphi; \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\partial \Phi / \partial p = -\alpha; \quad (6.6)$$

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} v \cos \varphi \right) + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0, \quad (6.7)$$

где  $\omega = dp/dt$  — изобарическая вертикальная скорость;  $\alpha = 1/\rho$  — удельный объем воздуха;  $F_\lambda, F_\varphi$  — составляющие вектора  $\mathbf{F}$  в направлении осей  $\lambda, \varphi$ ; остальные обозначения прежние.

Переписывая уравнения (6.4), (6.5) в дивергентной форме и усредняя их по долготе, находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [u] + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [uv] \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial p} [u\omega] - \\ - l[v] - [uv] \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} = [F_\lambda]; \\ \frac{\partial}{\partial t} [v] + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [v^2] \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial p} [v\omega] + \\ + l[u] + [u^2] \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} = - \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial p} [\Phi] + [F_\varphi]. \end{aligned}$$

Подставим в эти уравнения определения  $u, v, \omega$  из (6.1), затем умножим первое из них на  $[u]$ , второе — на  $[v]$  и результирующие выражения сложим. После всех этих преобразований будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial t} \cdot \frac{1}{2} ([u]^2 + [v]^2) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ [u] \frac{\partial}{\partial \varphi} ([u] [v] + [u^* v^*]) \cos \varphi + \right. \\
& + [v] \frac{\partial}{\partial \varphi} ([v]^2 + [v^{*2}]) \cos \varphi \left. \right\} + \left\{ [u] \frac{\partial}{\partial \rho} ([u] [\omega] + [u^* \omega^*]) + \right. \\
& + [v] \frac{\partial}{\partial \rho} ([v] [\omega] + [v^* \omega^*]) \left. \right\} - ([u^* v^*] [u] - [u^{*2}] [v]) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} = \\
& = - \frac{[v]}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\Phi] + ([u] [F_\lambda] + [v] [F_\varphi]). \quad (6.8)
\end{aligned}$$

Второй и третий члены в левой и первый член в правой частях этого уравнения представим в виде

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ [u] \frac{\partial}{\partial \varphi} ([u] [v] + [u^* v^*]) \cos \varphi + \right. \\
& \quad \left. + [v] \frac{\partial}{\partial \varphi} ([v]^2 + [v^{*2}]) \cos \varphi \right\} = \\
& = \frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{[u]^2 + [v]^2}{2} [v] + [u^* v^*] [u] + [v^{*2}] [v] \right) \cos \varphi - \right. \\
& \quad \left. - \cos \varphi \left( [u^* v^*] \frac{\partial [u]}{\partial \varphi} + [v^{*2}] \frac{\partial [v]}{\partial \varphi} \right) \right\}; \\
& \left\{ [u] \frac{\partial}{\partial \rho} ([u] [\omega] + [u^* \omega^*]) + [v] \frac{\partial}{\partial \rho} ([v] [\omega] + [v^* \omega^*]) \right\} = \\
& = \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \frac{[u]^2 + [v]^2}{2} [\omega] + [u^* \omega^*] [u] + [v^* \omega^*] [v] \right) - \\
& \quad - \left( [u^* \omega^*] \frac{\partial [u]}{\partial \rho} + [v^* \omega^*] \frac{\partial [v]}{\partial \rho} \right); \\
& - \frac{[v]}{a} \frac{\partial [\Phi]}{\partial \varphi} = - \frac{[v] \cos \varphi}{a \cos \varphi} \frac{\partial [\Phi]}{\partial \varphi} = \\
& = - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\Phi] [v] \cos \varphi + \frac{\Phi}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [v] \cos \varphi
\end{aligned}$$

или в соответствии с (6.6), (6.7)

$$\begin{aligned}
& - \frac{[v]}{a} \frac{\partial [\Phi]}{\partial \varphi} = - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\Phi] [v] \cos \varphi - [\Phi] \frac{\partial [\omega]}{\partial \rho} = \\
& = - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\Phi] [v] \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial \rho} [\Phi] [\omega] - [\alpha] [\omega].
\end{aligned}$$

Подстановка этих выражений в (6.8) дает

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \frac{[u]^2 + [v]^2}{2} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{[u]^2 + [v]^2}{2} [v] \cos \varphi + \\
& + \frac{\partial}{\partial \rho} \frac{[u]^2 + [v]^2}{2} [\omega] + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} ([u^* v^*] [u] + [v^{*2}] [v]) \cos \varphi -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{a} \left( [u^* v^*] \frac{\partial [u]}{\partial \varphi} + [v^{*2}] \frac{\partial [v]}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial p} ([u^* \omega^*] [u] + [v^* \omega^*] [v]) - \\
& - \left( [u^* \omega^*] \frac{\partial [u]}{\partial p} + [v^* \omega^*] \frac{\partial [v]}{\partial p} \right) - ([u^* v^*] [u] - \\
& - [u^{*2}] [v]) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} = -\frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\Phi] [v] \cos \varphi - \\
& - \frac{\partial}{\partial p} [\Phi] [\omega] - [\alpha] [\omega] + ([u] [F_\lambda] + [v] [F_\varphi]). \quad (6.9)
\end{aligned}$$

Интегрируя (6.9) по всей массе  $\int a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp/g$  атмосферы и учитывая надлежащие граничные условия, получаем:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \int K_M a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp/g = \\
& = C(A_M, K_M) + C(K_E, K_M) - D(K_M), \quad (6.10)
\end{aligned}$$

где

$$C(A_M, K_M) = - \int [\alpha] [\omega] a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp/g; \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned}
C(K_E, K_M) = & \int a \cos \varphi \left\{ \left( [u^* v^*] \frac{\partial}{a \partial \varphi} + [u^* \omega^*] \frac{\partial}{\partial p} \right) \left( \frac{[u]}{a \cos \varphi} \right) + \right. \\
& \left. \left( [v^{*2}] \frac{\partial}{a \partial \varphi} + [v^* \omega^*] \frac{\partial}{\partial p} - \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} ([u^{*2}] + [v^{*2}]) \right) \left( \frac{[v]}{a \cos \varphi} \right) \right\} \times \\
& \times a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp/g; \quad (6.12)
\end{aligned}$$

$$D(K_M) = - \int ([u] [F_\lambda] + [v] [F_\varphi]) a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp/g. \quad (6.13)$$

Для вывода уравнения бюджета  $K_E$  вновь обратимся к исходным уравнениям динамики атмосферы (6.4) — (6.7). Умножая первое из этих уравнений на  $u$ , второе — на  $v$ , затем складывая полученные выражения и используя остальные два уравнения системы (6.4) — (6.7), приходим к локальному уравнению сохранения кинетической энергии суммарного (среднего зонального плюс вихревого) движения. Оно имеет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{u^2 + v^2}{2} u + \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{u^2 + v^2}{2} v \cos \varphi \right) + \\
& + \frac{\partial}{\partial p} \frac{u^2 + v^2}{2} \omega = -\frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \Phi u + \frac{\partial}{\partial \varphi} \Phi v \cos \varphi \right) - \\
& - \frac{\partial}{\partial p} \Phi \omega - \omega \alpha + (u F_\lambda + v F_\varphi).
\end{aligned}$$

Подставим в это уравнение определения (6.1) и усредним его по долготе. В результате имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{[u]^2 + [v]^2}{2} + \frac{[u^{*2}] + [v^{*2}]}{2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{[u]^2 + [v]^2}{2} [v] + \frac{[u^{*2}] + [v^{*2}]}{2} [v] + \right. \\
& \quad \left. + ([u][u^*v^*] + [v][v^*u^*]) \cos \varphi + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{[u]^2 + [v]^2}{2} [\omega] + \frac{[u^{*2}] + [v^{*2}]}{2} [\omega] + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + ([u][u^*\omega^*] + [v][v^*\omega^*]) \right\} = \right. \\
& = - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} ([\Phi][v] + [\Phi^*v^*]) \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial p} ([\Phi][\omega] + [\Phi^*\omega^*]) - \\
& \quad - ([\omega][\alpha] + [\omega^*\alpha^*]) + ([u][F_\lambda] + \\
& \quad + [v][F_\varphi]) + ([u^*F_\lambda^*] + [v^*F_\varphi^*]). \tag{6.14}
\end{aligned}$$

Вычитая (6.9) из (6.14), получаем искомое уравнение для  $K_E$ :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \frac{[u^{*2}] + [v^{*2}]}{2} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left\{ \frac{[u^{*2}] + [v^{*2}]}{2} [v] + ([u^*v^*][u] + \right. \\
& \quad \left. + [v^*u^*][v]) \right\} \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{[u^{*2}] + [v^{*2}]}{2} [\omega] + ([u^*\omega^*][u] + \right. \\
& \quad \left. + [v^*\omega^*][v]) \right\} + \frac{1}{a} \left( [u^*v^*] \frac{\partial [u]}{\partial \varphi} + [v^*u^*] \frac{\partial [v]}{\partial \varphi} \right) + \\
& \quad + \left( [u^*\omega^*] \frac{\partial [u]}{\partial p} + [v^*\omega^*] \frac{\partial [v]}{\partial p} \right) + \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} ([u^*v^*][u] - [u^{*2}][v]) = \\
& = - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [\Phi^*v^*] \cos \varphi - \frac{\partial}{\partial p} [\Phi^*\omega^*] - [\omega^*\alpha^*] + \\
& \quad + ([u^*F_\lambda^*] + [v^*F_\varphi^*]). \tag{6.15}
\end{aligned}$$

Интегрируя (6.15) по всей массе атмосферы и учитывая граничные условия, окончательно находим:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int K_E a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp / g = C(A_E, K_E) - C(K_E, K_M) - D(K_E); \tag{6.16}$$

где

$$C(A_E, K_E) = - \int [\omega^*\alpha^*] a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp / g; \tag{6.17}$$

$$D(K_E) = - \int ([u^*F_\lambda^*] + [v^*F_\varphi^*]) a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp / g. \tag{6.18}$$

В уравнениях (6.10), (6.16) слагаемые  $C(K_E, K_M)$  описывают взаимные превращения кинетической энергии среднего зонального ( $K_M$ ) и вихревого ( $K_E$ ) движений. Из определения (6.12), видно, что эти слагаемые представляют собой работу напряжений Рейнольдса на градиентах зональной скорости, причем первый и третий члены в подынтегральном выражении характеризуют так называемую *баротропную неустойчивость* зональной циркуляции.



Остальные слагаемые в (6.10), (6.15) описывают диссипацию кинетической энергии среднего зонального и вихревого движений (слагаемые  $D_M$  и  $D_E$ ) и взаимные преобразования кинетической и доступной лабильной энергии [слагаемые  $C(A_M, K_M)$  и  $C(A_E, K_E)$ ].

Уравнения бюджета доступной лабильной энергии получаются примерно так же, как мы только что показали для  $K_M$  и  $K_E$ . Поэтому можно было бы, не повторяя вывод, ограничиться обсуждением окончательных выражений. Однако мы поступим иначе с тем, чтобы избежать недоразумений, нередко встречающихся при изложении рассматриваемого вопроса. Итак, будем отправляться от уравнения бюджета тепла, записанного в терминах потенциальной температуры  $\Theta$ . Это уравнение после перехода к изобарической системе координат имеет вид

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Theta}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \Theta}{\partial \varphi} + \omega \frac{\partial \Theta}{\partial p} = \frac{\Theta}{T} \frac{F_T}{c_p}. \quad (6.19)$$

Определим  $\Theta$  как сумму среднего по поверхности сферы значения  $\bar{\Theta}$  и отклонения  $\Theta'$  от него. Аналогично определим составляющие скорости, а также источники и стоки тепла в атмосфере. Подстановка этих соотношений в (6.19) и последующее вычитание из получившегося равенства уравнения для  $\bar{\Theta}$

$$\frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial t} + \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial p} = \frac{\Theta}{T} \frac{\bar{F}_T}{c_p} \quad (6.20)$$

дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta'}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \Theta'}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \Theta'}{\partial \varphi} + \omega \frac{\partial \Theta'}{\partial p} + \\ + \bar{\omega} \frac{\partial \bar{\Theta}}{\partial p} = \frac{\Theta}{T} \frac{F'_T}{c_p}; \end{aligned} \quad (6.21)$$

здесь мы предположили, что множитель  $\Theta/T$  в правых частях уравнений (6.19), (6.20) не зависит от горизонтальных координат, и, кроме того, учли, что в соответствии с проинтегрированным по поверхности сферы уравнением неразрывности изобарическая вертикальная скорость  $\bar{\omega}$  подчиняется уравнению  $\partial \bar{\omega} / \partial p = 0$ , откуда при равенстве  $\bar{\omega}$  нулю на верхней границе атмосферы ( $p = 0$ ) следует  $\bar{\omega} \equiv 0$ .

Введем определения

$$\begin{aligned} \Theta' = [\Theta] + \Theta^*; \quad u = [u] + u^*; \quad v = [v] + v^*; \quad \omega = [\omega] + \omega^*; \\ F'_T = [F_T] + F_T^*, \end{aligned} \quad (6.22)$$

где, как и раньше, квадратные скобки означают усреднение по долготе, звездочка — отклонение от зонального среднего, затем

подставим (6.22) в (6.21), переписанное в дивергентной форме, и полученное уравнение усредним по долготе. В результате имеем

$$-\frac{\partial [\Theta]}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} ([\Theta] [v] + [\Theta^* v^*]) \cos \varphi + \\ + \frac{\partial}{\partial p} ([\Theta] [\omega] + [\Theta^* \omega^*]) = \frac{\Theta}{T} \frac{[F_T]}{c_p} - [\omega] \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial p}$$

или после умножения на  $[\Theta]$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{[\Theta]^2}{2} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{[\Theta]^2}{2} [v] + [\Theta] [\Theta^* v^*] \right) \cos \varphi + \\ + \frac{\partial}{\partial p} \left( \frac{[\Theta]^2}{2} [\omega] + [\Theta] [\Theta^* \omega^*] \right) - \left( [\Theta^* v^*] \frac{\partial}{\partial \varphi} + [\Theta^* \omega^*] \frac{\partial}{\partial p} \right) [\Theta] = \\ = \frac{\Theta}{T} [\Theta] \frac{[F_T]}{c_p} - [\Theta] [\omega] \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial p}. \quad (6.23)$$

Преобразуем выражение для последнего члена в правой части (6.23). Однако предварительно заметим, что

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial p} = \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial p} - \frac{R}{c_p} \frac{\tilde{T}}{p} \right) = \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} \frac{dz}{dp} - \frac{1}{c_p \tilde{\rho}} \right) = \\ = -\frac{1}{g \tilde{\rho}} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} \left( \frac{\partial \tilde{T}}{\partial z} + \frac{g}{c_p} \right) = -\frac{1}{g \tilde{\rho}} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{R/c_p} (\gamma_a - \gamma),$$

где, как и раньше,  $\gamma_a = g/c_p$  и  $\gamma = -\partial \tilde{T}/\partial z$  — адиабатический и фактический вертикальные градиенты температуры.

Следовательно,

$$[\Theta] [\omega] \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial p} = -\frac{\tilde{T}}{g} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{2R/c_p} (\gamma_a - \gamma) [\alpha] [\omega] = \\ = -\frac{\tilde{T}}{c_p} \left( \frac{p_0}{p} \right)^{2R/c_p} \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a} [\alpha] [\omega] = -\frac{\tilde{T}}{c_p} \times \\ \times \left( \frac{\Theta}{T} \right)^2 \frac{\gamma_a - \gamma}{\gamma_a} [\alpha] [\omega].$$

Подставим это выражение в (6.23), затем умножим результирующее уравнение на  $\frac{c_p}{\tilde{T}} \left( \frac{T}{\Theta} \right)^2 \frac{\gamma_a}{\gamma_a - \gamma}$ , перейдем от  $[\Theta]$  к  $[T]$  и проинтегрируем по всей массе атмосферы. Тогда окончательно

$$\frac{\partial A_M}{\partial t} = G(A_M) - C(A_M, K_M) - C(A_M, A_E), \quad (6.24)$$

где

$$A_M = \frac{1}{2} c_p \int \frac{\gamma_a}{\gamma_a - \gamma} \frac{[T]^2}{\tilde{T}} a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp / g; \quad (6.25)$$

$$G(A'_M) = \int \frac{\gamma_a}{\gamma_a - \gamma} \frac{[T]}{\bar{T}} [F_T] a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp/g; \quad (6.26)$$

$$C(A_M, A_E) = -c_p \int \frac{\gamma_a}{\gamma_a - \gamma} \left( [T^* v^*] \frac{\partial}{a \partial \varphi} + [T^* \omega^*] \frac{\partial}{\partial p} \right) \times \\ \times \frac{[T]}{\bar{T}} a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp/g; \quad (6.27)$$

определение  $C(A_M, K_M)$  было дано выше.

Уравнение (6.24) и есть уравнение бюджета доступной лабильной энергии. В нем члены, стоящие справа, характеризуют соответственно генерацию доступной лабильной энергии средним зональным движением, взаимные преобразования доступной лабильной и кинетической энергии зонального движения и взаимные преобразования доступной лабильной энергии среднего зонального движения и вихревых возмущений. Последний из названных процессов обязан своим происхождением так называемой *бароклиной неустойчивости* зонального движения.

Для вывода уравнения бюджета доступной лабильной энергии  $A_E$  вихревых возмущений вновь обратимся к уравнению (6.21). Перепишем его в дивергентной форме, затем умножим на  $\Theta'$ , усредним по долготе и воспользуемся определениями (6.22). В результате получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} ([\Theta]^2 + [\Theta^{*2}]) + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \frac{1}{2} ([\Theta]^2 [v] + [\Theta^{*2}] [v] + \\ + 2 [\Theta] [\Theta^* v^*]) \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{1}{2} ([\Theta]^2 [\omega] + [\Theta^{*2}] [\omega] + 2 [\Theta] [\Theta^* \omega^*]) = \\ = \frac{1}{c_p} \frac{\Theta}{T} ([\Theta] [F_T] + [\Theta^* F_T^*]) - ([\Theta] [\omega] + [\Theta^* \omega^*]) \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial p}. \quad (6.28)$$

Вычитая (6.23) из (6.28), имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{[\Theta^{*2}]}{2} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \frac{1}{2} ([\Theta^{*2}] [v] + [\Theta] [\Theta^* v^*]) \cos \varphi + \\ + \frac{\partial}{\partial p} \cdot \frac{1}{2} ([\Theta^{*2}] [\omega] + [\Theta] [\Theta^* \omega^*]) + \left( [\Theta^* v^*] \frac{\partial}{a \partial \varphi} + [\Theta^* \omega^*] \frac{\partial}{\partial p} \right) [\Theta] = \\ = \frac{1}{c_p} \frac{\Theta}{T} [\Theta^* F_T^*] - [\Theta^* \omega^*] \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial p}. \quad (6.29)$$

Перейдем в (6.29) от  $[\Theta^{*2}]$  к  $[T^{*2}]$ , после чего полученное уравнение умножим на  $c_p \gamma_a / \bar{T} (\gamma_a - \gamma)$  и проинтегрируем по всей массе атмосферы. Если ввести обозначения

$$A_E = \frac{1}{2} c_p \int \frac{\gamma_a}{\gamma_a - \gamma} \frac{[T^{*2}]}{\bar{T}} a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp/g; \quad (6.30)$$

$$G(A_E) = \int \frac{\gamma_a \tilde{T}^{-1}}{\gamma_a - \gamma} [T^* F_T^*] a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi dp/g \quad (6.31)$$

соответственно для доступной лабильной энергии вихревых возмущений и ее генерации и учесть определения взаимных переходов энергии [см. (6.17), (6.27)], то уравнение бюджета  $A_E$  примет вид

$$\partial A_E / \partial t = G(A_E) - G(A_E, K_E) + C(A_M, A_E). \quad (6.32)$$

Описываемый уравнениями (6.10), (6.16), (6.24) и (6.32) энергетический цикл атмосферы изображен в виде диаграммы на рис. 18.

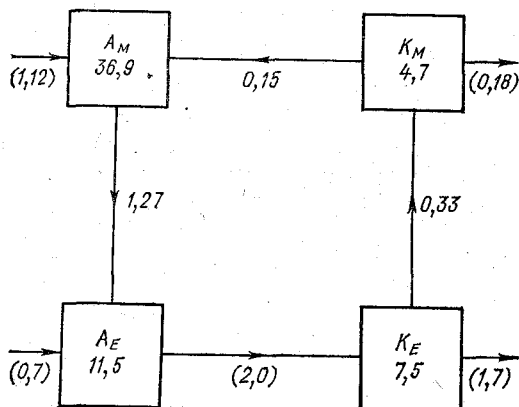


Рис. 18. Диаграмма энергетического цикла атмосферы, по Пейшоту и Оорту [51].

Различные формы энергии даны в  $10^{15}$  Дж/м<sup>2</sup>, переходы энергии — в Вт/м<sup>2</sup>.

Здесь стрелками указаны направления переходов энергии, числовые оценки получены по фактическим данным за 10-летний период (1963—1973 гг.) и отнесены к средним многолетним условиям. Анализ этого рисунка приводит к следующим заключениям о последовательности процессов, ответственных за поддержание энергетического цикла атмосферы. Радиационное нагревание атмосферы в тропиках и выхолаживание в высоких широтах вызывают генерацию доступной лабильной энергии среднего зонального движения. Эта энергия переходит со скоростью  $1,3 \text{ Вт/м}^2$  в доступную лабильную энергию вихревых возмущений главным образом благодаря механизму бароклинной неустойчивости среднего зонального движения. Упомянутый переход в совокупности с генерацией доступной лабильной энергии вихревых возмущений ( $0,7 \text{ Вт/м}^2$ ), обусловливаемой реализацией скрытого тепла, уравнивается преобразованием в кинетическую энергию вихревых возмущений в основном благодаря механизму баротропной неустойчивости. Небольшая часть ( $0,33 \text{ Вт/м}^2$ ) поступления кинетической энергии вихревых возмущений расходуется на поддержание средней зональной циркуляции, что эквивалентно обратному переносу энергии по спектру (т. е. переносу от движений с меньшими к движе-

ниями с большими горизонтальными масштабами) — явление, известное под названием *отрицательной вязкости*. Основная же часть ( $1,7 \text{ Вт/м}^2$ ) вовлекается в прямой каскадный перенос энергии от интервала энергоснабжения к вязкому интервалу, где кинетическая энергия вихревых возмущений диссипирует в тепло. Наконец, кинетическая энергия средней зональной циркуляции частично ( $0,18 \text{ Вт/м}^2$ ) диссипирует, частично ( $0,15 \text{ Вт/м}^2$ ) под действием упорядоченных меридиональных движений преобразуется в доступную лабильную энергию средней зональной циркуляции. Таков в общих чертах энергетический цикл атмосферы. Коротко он может быть представлен в виде схемы

$$A_M \rightarrow A_E \rightarrow K_E \rightarrow K_M \rightarrow A_M.$$

В океане зональная симметрия выражена не так отчетливо, как в атмосфере, из-за наличия многочисленных меридиональных барьеров — континентальных склонов и срединных океанских хребтов. Соответственно разделение климатических характеристик на средние зональные и отклонения от них обычно не производится, что, естественно, упрощает вывод уравнения бюджета доступной потенциальной энергии. Он сводится к следующему.

Определим доступную потенциальную энергию океана как

$$A = - \int \frac{g\rho^{*2}/2}{\partial \{\rho\}/\partial z} a^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda dz, \quad (6.33)$$

где  $\rho^*$  — отклонение плотности от ее среднего по площади океана и во времени значения  $\{\rho\}$ ; интегрирование распространяется на весь объем океана.

Далее, представим все климатические характеристики океана в виде суммы средних (в указанном выше смысле) значений и отклонений от них. Первые обозначим фигурными скобками, вторые — звездочкой. Подстановка этих определений в эволюционное уравнение для плотности

$$\partial \rho / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + w \partial \rho / \partial z = F_\rho,$$

где член  $F_\rho$  в правой части описывает горизонтальную и вертикальную диффузию плотности, дает

$$\partial \rho^* / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho^* + w \partial \rho^* / \partial z + w^* \partial \{\rho\} / \partial z = F_\rho^*$$

или в дивергентной форме

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t} + \nabla \cdot \rho^* \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial z} \rho^* w + w^* \frac{\partial \{\rho\}}{\partial z} = F_\rho^*. \quad (6.34)$$

где учтено, что  $\{w\} = 0$ ,  $\{F_\rho^*\} = 0$ , и, значит,  $\partial \{\rho\} / \partial t = 0$ .

Умножим (6.34) на  $-g\rho^* (\partial \{\rho\} / \partial z)^{-1}$  и полученное уравнение проинтегрируем по объему океана. В результате после использова-

ния надлежащих граничных условий приходим к уравнению бюджета доступной потенциальной энергии

$$\frac{\partial A}{\partial t} = -g \int \rho^* w^* dV - g \int \frac{\rho^* F_p^*}{\partial \{\rho\} / \partial z} dV; \quad (6.35)$$

здесь первый член в правой части характеризует превращение доступной потенциальной энергии в кинетическую энергию, второй — генерацию и диссипацию доступной потенциальной энергии,  $dV = a^2 \cos \varphi d\varphi d\lambda dz$ , как и раньше, — элемент объема.

Заметим теперь, что

$$\{\rho^* w^*\} = \{\rho w\} - \{\rho\} \{w\}$$

и что  $\{w\} = 0$ . Следовательно, в обмене с кинетической энергией

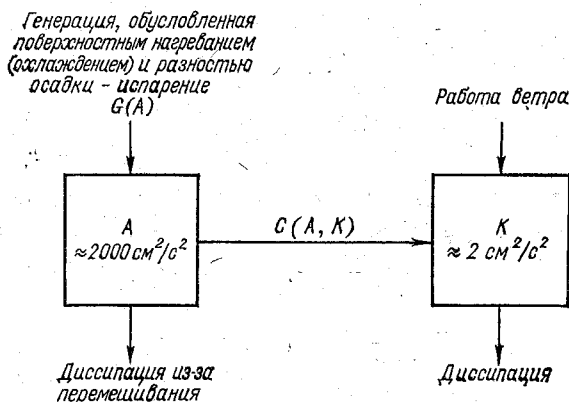


Рис. 19. Диаграмма энергетического цикла океана, по Пейшото и Оорту [51]

(см. 5.25) участвует не вся потенциальная энергия, а только доступная ее часть, определяемая выражением (6.33).

Приступая к обсуждению энергетического цикла океана, отметим сразу же, что эмпирической информации в том объеме, который для этой цели нужен, просто не существует. Поэтому не остается ничего другого, как ограничиться анализом результатов вычислений в рамках той или иной модели крупномасштабной циркуляции океана. Изображенная на рис. 19 диаграмма энергетического цикла океана построена с использованием глобальной модели Брайена и Льюиса [22]. Видно, что результирующие потоки тепла и влаги на поверхности раздела океан — атмосфера приводят к появлению пространственной неоднородности температуры и солености морской воды. Это в свою очередь способствует возникновению пространственной изменчивости плотности и, следовательно, генерации доступной потенциальной энергии. Последняя частично диссипирует в толще океана благодаря горизонтальному и вертикальному перемешиванию, частично же переходит в кинетическую энергию упорядоченной термохалинной циркуля-

ции. Одновременно касательное напряжение ветра на поверхности океана формирует ветровые течения и тем самым благоприятствует росту кинетической энергии крупномасштабной циркуляции океана. Однако кинетическая энергия остается много меньше доступной потенциальной энергии. Это означает, что переход доступной потенциальной энергии в кинетическую энергию общей циркуляции океана очень мал и что, стало быть, временные масштабы крупномасштабных процессов в океане много больше временных масштабов аналогичных процессов в атмосфере.

Ради полноты картины укажем существующие оценки отдельных составляющих энергетического цикла океана. Согласно [37], скорость генерации кинетической энергии составляет приблизительно  $0,1 \text{ Вт/м}^2$ , тогда как продукция доступной потенциальной энергии, ее преобразование в кинетическую энергию и диссипация кинетической энергии —  $2 \cdot 10^{-4}$ ,  $2 \cdot 10^{-4}$  и  $0,1 \text{ Вт/м}^2$  соответственно. Другими словами, имеет место примерный паритет между продукцией доступной потенциальной энергии и ее преобразованием в кинетическую энергию, с одной стороны, и генерацией и диссипацией кинетической энергии, с другой.

## 7. ТЕОРИЯ ПОДОБИЯ ДЛЯ ГЛОБАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОКЕАНА И АТМОСФЕРЫ

Выше мы рассмотрели некоторые особенности пространственно-временной изменчивости характеристик климатической системы, выявленные по данным наблюдений. Однако, кроме использования данных наблюдений, имеется еще один, значительно более экономичный метод изучения состояния климатической системы. Это — *численное моделирование*, т. е. численное решение уравнений гидротермодинамики, описывающих динамику и структуру отдельных подсистем климатической системы и их взаимодействие. Основным недостатком этого, как, впрочем, и экспериментального, метода, основанного на использовании эмпирической информации, является трудность истолкования полученных результатов. Для преодоления указанного недостатка необходимо располагать серией численных экспериментов, выполненных при различных сочетаниях внешних и внутренних параметров модели. Ограниченность такого подхода очевидна. Поэтому вполне естественно желание попытаться выяснить возможную роль тех или иных климатических факторов, не прибегая к трудоемким расчетам. Весьма полезной в этом отношении может оказаться теория подобия циркуляции планетарных атмосфер, разработанная Г. С. Голицыным [3] и модифицированная затем применительно к случаю глобального взаимодействия океана и атмосферы С. С. Зилитинкевичем и А. С. Моным [4]. При ее изложении мы будем следовать в основном [3, 4].

Как уже отмечалось, первопричиной атмосферных движений является усваиваемый планетой средний на единицу ее площади поток  $q = [\pi a^2 / (4\pi a^2)] S_0$  коротковолновой солнечной радиации (здесь  $S_0$  — солнечная постоянная, см. выше). Кроме  $q$ , к числу внешних параметров, определяющих атмосферную циркуляцию, принадлежат радиус  $a$  планеты, угловая скорость  $\Omega$  ее вращения, масса  $m = p_s/g$  столба атмосферы единичного сечения, ускорение  $g$  свободного падения, связанное с  $m$  и давлением  $p_s$  на нижней границе атмосферы соотношением  $g = p_s/m$ , теплоемкость  $c_p$  воздуха при постоянном давлении, теплоемкость  $c_w$  воздуха при постоянном объеме, определяемая разностью  $(c_p - c_w) = R/\mu$  (где  $R$  — универсальная газовая постоянная), относительная молекулярная масса  $\mu$  воздуха и, наконец, постоянная Стефана—Больцмана  $\sigma$  или ее приведенное значение  $f\sigma$  (здесь  $f$  — излучательная способность), определяющая при заданной температуре уходящий поток длинноволнового излучения.

Г. С. Голицын предположил, что эти восемь параметров, из которых все, кроме  $\mu$ , являются размерными, полностью определяют глобальные свойства атмосферы. Поскольку, однако, размерные параметры содержат четыре независимые размерности (длина, время, масса и температура), то на основании  $\pi$ -теоремы теории размерностей из них можно составить только следующие три независимые безразмерные комбинации:

$$\Pi_\Omega = \frac{a}{2L} = \frac{a\Omega}{c_r}; \quad \Pi_g = \frac{H}{a} = \frac{c_r^2}{\kappa g a};$$

$$\Pi_m = \frac{\tau_p}{\tau_r} = (f\sigma)^{3/8} c_p^{-3/2} q^{5/8} \frac{a}{m},$$

где  $L = c_r / (2\Omega)$  и  $H = c_r^2 / (\kappa g)$  — горизонтальный масштаб синоптических возмущений и высота однородной атмосферы:  $c_r = \left( \kappa \frac{R}{\mu} T_r \right)^{1/2}$  — скорость звука;  $\kappa = c_p / c_w$  — отношение теплоемкостей;  $T_r = (q / f\sigma)^{1/4}$  — средняя температура уходящего излучения;  $\tau_p = a / c_p$  — время релаксации возмущений давления;  $\tau_r = c_p m T_r / q$  — время тепловой релаксации к состоянию локального радиационного равновесия.

Условимся, что угловая скорость  $\Omega$  вращения планеты входит во все формулы только через  $\Pi_\Omega$ , ускорение  $g$  свободного падения — только через  $\Pi_g$  и масса  $m$  столба атмосферы единичного сечения — только через  $\Pi_m$ . Кроме того, исключим из рассмотрения безразмерный параметр  $\kappa$ , приняв его равным числовой константе. Тогда любая характеристика  $F$  атмосферной циркуляции должна иметь вид

$$F = F_0(f\sigma, c_p, q, a) \Psi_F(\Pi_\Omega, \Pi_g, \Pi_m),$$

где  $F_0$  — комбинация размерности  $F$ , составленная из параметров



$f\delta$ ,  $c_p$ ,  $q$  и  $a$ ;  $\Psi_F$  — безразмерная функция от безразмерных комбинаций  $\Pi_\Omega$ ,  $\Pi_g$  и  $\Pi_m$ .

Пусть теперь  $\Pi_\Omega \ll 1$ ,  $\Pi_g \ll 1$  и  $\Pi_m \ll 1$ . В этом случае, как считает Г. С. Голицын, функцию  $\Psi_F$  можно заменить ее предельным (равным единице) значением, отвечающим нулевым значениям безразмерных комбинаций  $\Pi_\Omega$ ,  $\Pi_g$  и  $\Pi_m$ . Предположение о существовании конечного предела функции  $\Psi_F$  (иначе, *полной автономности*) по параметрам  $\Pi_\Omega$ ,  $\Pi_g$  и  $\Pi_m$  представляет собой еще одну гипотезу, лежащую в основе рассматриваемой теории. Использование этой гипотезы позволяет получить простую формулу для полной кинетической энергии  $E$  атмосферной циркуляции. Действительно, при сделанных предположениях

$$E = 2\pi (f\sigma)^{1/8} c_p^{-1/2} q^{7/8} a^3, \quad (7.1)$$

где множитель  $2\pi$  введен для удобства.

С другой стороны,  $E = (4\pi a^2 m) U^2/2$ , где  $U$  — средняя квадратичная скорость атмосферных движений. Поэтому в соответствии с (7.1)

$$U = (2\pi)^{1/2} m^{-1/2} (f\sigma)^{1/8} c_p^{-1/2} q^{7/8} a^2. \quad (7.2)$$

Далее, если адвективный перенос тепла в атмосфере уравновешивается длинноволновым излучением в космос, т. е.

$$mc_p U \frac{\delta T}{\pi a/2} \approx (f\sigma) T_r^4, \quad (7.3)$$

где  $\delta T$  — характерная разность температур между экватором и полюсом, то после подстановки в (7.3) выражений для  $U$  и  $T_r$  имеем

$$\delta T = \frac{1}{4} (2\pi)^{1/2} m^{-1/2} (f\sigma)^{-1/8} c_p^{-1/2} q^{1/8} a^{-1}. \quad (7.4)$$

Заметим теперь, что для земных условий неравенство  $\Pi_\Omega \ll 1$  не выполняется (для Земли  $\Pi_\Omega = 1,43$ ). Тем не менее совпадение полученных с помощью (7.1), (7.2), (7.4) оценок с данными наблюдений оказалось удовлетворительным, что свидетельствует о возможности использования теории подобия и в этом случае.

Для того чтобы учесть факт существования двух сред — атмосферы и океана — и процессов взаимодействия между ними, С. С. Зилитинкевич и А. С. Монин предложили модифицировать теорию подобия в следующих отношениях. Во-первых, уравнение (7.3) они заменили уравнением бюджета тепла в системе океан—атмосфера, усредненным по времени в течение годового цикла и по участку поверхности сферы между экватором и некоторым фиксированным кругом широты (скажем,  $\varphi = \pi/4$ ). Это уравнение в предположении об отсутствии переноса тепла через экватор записывается в виде

$$(MHT_A + MHT_O) = R_A, \quad (7.5)$$

где

$$\text{МНТ}_A = c_p m \bar{v} T / a$$

— меридиональный перенос тепла в атмосфере на широте  $\varphi = \pi/4$ , отнесенный к единице площади сферического пояса  $0 < \varphi < \pi/4$ ;  $\text{МНТ}_O$  — таким же образом нормированный меридиональный перенос тепла в океане;  $R_A$  — средний в рассматриваемом сферическом поясе результирующий поток радиации на верхней границе атмосферы;  $v$  — меридиональная составляющая скорости ветра; черта сверху означает усреднение вдоль широтного круга  $\varphi = \pi/4$ .

Во-вторых, результирующий поток  $R_A(\varphi) = F^\downarrow(\varphi) - F^\uparrow(\varphi)$  радиации на верхней границе атмосферы они задали пропорциональным разности температуры  $T_s$  подстилающей поверхности при  $\varphi = \pi/4$  и среднего глобального ее значения  $T_0$ . Подстановка в соотношение  $R_A(\varphi) \sim (T_s - T_0)$  выражений для усваиваемого потока  $F^\downarrow(\varphi)$  коротковолновой солнечной радиации

$$F^\downarrow(\varphi) = \frac{4}{\pi} q \cos \varphi$$

и для уходящего потока  $F^\uparrow(\varphi)$  длинноволнового излучения

$$F^\uparrow(\varphi) = q \left( 1 + b_0 \frac{T_s - T_0}{T_0} \right)$$

дает

$$T_s - T_0 = \delta T_0 (\cos \varphi - \pi/4); \quad (7.6)$$

$$R_A(\varphi) = q \left( 1 - \frac{\pi b_0}{4} \frac{\delta T_0}{T_0} \right) \left( \frac{4}{\pi} \cos \varphi - 1 \right); \quad (7.7)$$

здесь  $\delta T_0 = T_E - T_P$  — средняя годовая разность температур подстилающей поверхности на экваторе ( $T_E$ ) и на полюсе ( $T_P$ );  $b_0$  — числовая константа.

При  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi/2$  из (7.6) следует

$$T_E - T_0 = \delta T_0 (1 - \pi/4); \quad T_P - T_0 = -(\pi/4) \delta T_0, \quad (7.8)$$

а из (7.7) после усреднения его по области  $0 < \varphi < \pi/4$  и использования соотношения

$$T_r/T_0 = 0,879, \quad (7.9)$$

связывающего среднюю температуру  $T_r$  уходящего излучения со средней глобальной температурой  $T_0$  подстилающей поверхности,—

$$R_A = b_1 (1 - b_2 \delta T_0 / T_r) q, \quad (7.10)$$

где  $b_1 = 0,16$ ;  $b_2 = 1,8$  — новые числовые константы.

В-третьих, при описании меридионального переноса тепла  $\text{МНТ}_A$  в атмосфере, они предположили, что основной вклад в среднее произведение  $\bar{v} T$  вносит корреляция синоптических возмуще-

ний скорости и температуры и что главным механизмом генерации этих возмущений в стратифицированной атмосфере является бароклинная неустойчивость зонального потока. В этом случае

$$\overline{vT} \sim \sigma_v \sigma_T,$$

где  $\sigma_v \sim Lu/a$ ;  $\sigma_T \sim L\delta T_0/a$  — средние квадратичные возмущения скорости и температуры;  $L \sim \Pi_T^{1/2} c_r / \Omega$  — горизонтальный масштаб бароклиновых возмущений, пропорциональный радиусу деформации Россби;  $\Pi_T = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \left(1 - \frac{\gamma}{\gamma_a}\right) \approx 0,1$  — безразмерная комбинация, характеризующая вертикальную стратификацию атмосферы;  $\gamma_a$  и  $\gamma$  — адиабатический и фактический вертикальные градиенты температуры в атмосфере.

Подставляя  $\overline{vT}$  в  $\text{МНТ}_A$  и используя определения  $\Pi_m$  и  $\Pi_\Omega$ , получаем:

$$\text{МНТ}_A = \frac{b_3 \Pi_T}{\Pi_m \Pi_\Omega^2} \frac{\hat{u} \delta T_0}{c_r T_r} q, \quad (7.11)$$

где  $b_3 \approx 12$  — еще одна числовая константа.

В (7.11) фигурирует средняя взвешенная (по массе атмосферы) зональная скорость  $\hat{u}$  ветра. Для ее отыскания привлекается разностный аналог формулы термического ветра

$$\hat{u} = \frac{b_4 c_r}{\Pi_\Omega} \frac{\delta T_0}{T_r}, \quad (7.12)$$

вытекающий из геострофического соотношения при учете уравнения гидростатики, уравнения состояния идеального газа и приближенного равенства  $\delta p/p \approx \delta T/T$ ; здесь  $p$  — атмосферное давление,  $b_4 = 0,35$  — числовая константа.

Наконец, для оценки меридионального переноса тепла  $\text{МНТ}_O$  в океане используется тот факт, что в среднем за год поступающее в рассматриваемую область океана суммарное количество тепла должно балансироваться меридиональным переносом, т. е.

$$\frac{2}{3} Q_0 = \text{МНТ}_O,$$

где  $Q_0$  — результирующий поток тепла на поверхности раздела океан—атмосфера, отнесенный к единице площади  $2\pi a^2 \sin(\pi/4)$  зонального пояса  $0 < \varphi < \pi/4$ ; множитель  $2/3$  — балл океана (относительная площадь океана в рассматриваемой области).

Предполагается также, что сезонные и широтные вариации температуры воды захватывают не всю толщу океана, а только его верхний деятельный слой и что вертикальная разность температур на поверхности и на нижней границе деятельного слоя океана в области  $0 < \varphi < \pi/4$  пропорциональна горизонтальному перепаду

$\delta T_w = (T_E - T_I)$  температур, где  $T_I$  — температура замерзания морской воды. С учетом этих допущений вертикальный поток тепла определяется в виде

$$Q_0/(\rho_0 c_0) = k_H \delta T_w / h,$$

где  $h$  — толщина деятельного слоя;  $k_H$  — эффективный коэффициент вертикальной диффузии тепла, включающий множитель пропорциональности между вертикальным и горизонтальным перепадами температуры воды в океане;  $\rho_0 c_0$  — объемная теплоемкость морской воды.

Выписанное выше выражение для  $Q_0/(\rho_0 c_0)$  содержит две новые неизвестные —  $k_H$  и  $h$ . Первая из них находится из условия существования в деятельном слое океана сильно устойчивой стратификации. В этом случае динамическое число Ричардсона

$Rf = \frac{\beta Q_0}{\rho_0 c_0} \left( \frac{v_*^4}{k_M} \right)^{-1}$  и отношение  $\alpha_H = k_H/k_M$  стремятся к их предельным значениям, а комбинация  $\alpha_H Rf$  — к константе  $Rf_0$ , равной приблизительно  $5 \cdot 10^{-4}$ . Здесь  $v_*$  — скорость трения в приповерхностном слое океана,  $k_M$  — коэффициент вертикальной диффузии импульса;  $\beta = g\alpha_T$  — параметр плавучести;  $\alpha_T$  — коэффициент теплового расширения морской воды.

Равенство  $\alpha_H Rf = Rf_0$  вместе с выражением для  $Q_0$  дает

$$k_H = \left( \frac{Rf_0 h}{\beta \delta T_w} \right)^{1/2} v_*^2.$$

Для определения второй неизвестной привлекается уравнение  $\partial h / \partial t = b_5 k_H / h$  (здесь  $b_5 = 17$  — числовая константа), описывающее рост толщины деятельного слоя за счет вовлечения в него воды из глубинного слоя в течение холодного полугодия. В соответствии с этим уравнением типичное значение  $h$  составляет

$$h = (b_5 k_H t_0)^{1/2}, \quad (7.13)$$

где  $t_0$  — годовой период.

Теперь, зная  $h$ , можно переписать выражения для  $k_H$ ,  $Q_0/(\rho_0 c_0)$  и  $MHT_0$  в виде

$$\begin{aligned} k_H &= \left( \frac{Rf_0 v_*^4}{\beta \delta T_w} \right)^{2/3} (b_5 t_0)^{1/3}; \\ \frac{Q_0}{\rho_0 c_0} &= \left( \frac{Rf_0 v_*^4}{\beta b_5 t_0} \right)^{1/3} (\delta T_w)^{2/3}; \\ MHT_0 &= \frac{2}{3} \rho_0 c_0 \left( \frac{Rf_0 v_*^4}{\beta b_5 t_0} \right)^{1/3} (\delta T_w)^{2/3}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Осталось найти выражение для  $v_*$  и соотношение между  $\delta T_w$  и  $\delta T_0$ . Для оценки  $v_*$  используется равенство

$$v_* = \left( C_D \frac{\rho}{\rho_0} \hat{u}^2 \right)^{1/2}, \quad (7.15)$$

следующее из условия непрерывности потоков импульса на границе раздела океан—атмосфера. Здесь  $C_D$  — коэффициент сопротивления морской поверхности,  $\rho$  — плотность воздуха.

Что касается соотношения между  $\delta T_w$  и  $\delta T_0$ , то для него, очевидно, справедливо условие:  $\delta T_w = \delta T_0$  при отсутствии и  $\delta T_w = (T_E - T_i)$  при наличии льда в полярных широтах. Это условие вместе с (7.5), (7.7) — (7.15) образует замкнутую систему для определения климатических характеристик атмосферы ( $T_0$ ,  $\delta T_0$ ,  $T_E$ ,  $T_P$ ,  $\hat{u}$ ,  $MHT_A$ ) и океана ( $\delta T_w$ ,  $v_*$ ,  $k_H$ ,  $MHT_O$ ,  $Q_0$ ,  $h$ ). Так, для современного периода, когда Антарктика покрыта льдом, а Арктика почти изолирована от Мирового океана, изложенная теория дает следующие оценки:  $T_0 = 17^\circ \text{C}$ ;  $\delta T_0 = 36^\circ \text{C}$ ;  $T_E = 27^\circ \text{C}$ ;  $T_P = -9^\circ \text{C}$ ;  $\hat{u} = 10$  м/с;  $MHT_A = 244$  Вт/м<sup>2</sup>;  $\delta T_w = 27^\circ \text{C}$ ;  $v_* = 1,4$  см/с;  $K_H = 1,7$  см<sup>2</sup>/с;  $MHT_O = 84$  Вт/м<sup>2</sup>;  $Q_0 = 126$  Вт/м<sup>2</sup>;  $h = 300$  м. Последние в общем неплохо согласуются с эмпирическими данными.

## 8. ИЕРАРХИЯ МОДЕЛЕЙ КЛИМАТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

То, что изучение любого физического явления должно основываться на данных наблюдений настолько, насколько это возможно, ни у кого не вызывает сомнений. Однако представим себе, что таких данных нет или их не хватает. Как быть тогда? Конечно в этом, случае всегда можно отложить решение поставленной задачи до лучших времен, когда необходимая эмпирическая информация достигнет такого объема, что вытекающие из ее анализа выводы будут внушать доверие. Но что если ожидание обойдется слишком дорого, или мы не можем позволить себе роскошь проведения подробных натурных измерений, или временной масштаб изучаемого явления соизмерим с продолжительностью жизни одного поколения или даже человечества в целом? Наконец, что делать, если это явление, о последствиях которого нам нужно знать, в принципе не допустимо (как, например, в том случае, когда перед нами встает задача определения последствий ядерного конфликта)? В этих и подобных им ситуациях ответ может быть только один — воспользоваться математическими моделями изучаемых явлений.

Математические модели климатической системы представляют собой совокупность уравнений гидротермодинамики, описывающих состояние отдельных звеньев системы и дополненных надлежащими начальными и граничными условиями и схемами параметризации

тех физических процессов, которые в силу то ли несовершенства наших знаний, то ли ограниченности имеющихся в нашем распоряжении технических и экономических средств, то ли того и другого одновременно не поддаются разрешению в явном виде. Все существующие модели климатической системы делятся на аналитические и численные, на детерминистические и стохастические, на гидротермодинамические и термодинамические (энергобалансовые), на нульмерные, одномерные, двумерные (в том числе зональные) и трехмерные. Это, как, впрочем, и всякое другое, деление в известной мере является условным. Его назначение — лишь классифицировать модели по методу решения (аналитические и численные), по способу описания ансамбля состояний климатической системы (детерминистические и стохастические), по принципу воспроизведения упорядоченной крупномасштабной циркуляции (в гидротермодинамических моделях — непосредственно, в термодинамических — в параметризованной форме), и, последнее, по числу независимых переменных — пространственных координат, — определяющих решение (нульмерные, одномерные, двумерные и трехмерные).

В настоящем разделе мы рассмотрим только основные идеи конструирования детерминистических моделей, сыгравших исключительно важную роль в разработке теории климата. Начнем с наиболее простых из них, занимающих в иерархии моделей ступень, отведенную для *малопараметрических моделей*, т. е. моделей, описывающих климатическую систему при помощи небольшого числа параметров.

### 8.1. НУЛЬМЕРНЫЕ МОДЕЛИ

Самой простой является модель с одним параметром — температурой  $T_r$  уходящего излучения Земли. Эта модель есть следствие условия радиационного равновесия планеты, характеризующего баланс между усваиваемым потоком солнечной радиации  $\lambda a^2 S_0 (1 - \alpha_p)$  и потоком уходящего излучения  $4\lambda a^2 f \sigma T_r^4$ . Иначе,

$$\frac{1}{4} S_0 (1 - \alpha_p) = f \sigma T_r^4, \quad (8.1)$$

где, как и раньше,  $S_0$  — солнечная постоянная;  $f$  — излучательная способность;  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана;  $\alpha_p$  — среднее взвешенное планетарное альbedo, определяемое выражением

$$\alpha_p = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 S(x) \alpha(x) dx;$$

здесь  $x = \sin \varphi$ ;  $\alpha(x)$  — локальное альbedo на широте  $\varphi$  (или при фиксированном  $x$ );  $S(x)$  — среднее годовое распределение солнечной радиации на верхней границе атмосферы, нормированное так,

что интеграл от  $S(x)$  в пределах от 0 до 1 равен единице. Подходящей аппроксимацией для  $S(x)$  служит формула [44]

$$S(x) \approx 1 + S_2 P_2(x), \quad (8.2)$$

где  $S_2 = -0,477$  — числовая константа;  $P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$  — полином Лежандра второго порядка. В соответствии с (8.2) среднее годовое распределение солнечной радиации на верхней границе атмосферы является параболической функцией от  $x$ , причем эта функция имеет нулевую производную на экваторе ( $x = 0$ ) и принимает значение 0,523 на полюсе ( $x = 1$ ).

При  $\alpha_p = 0,30$  из (8.1) следует  $T_r = 254,6$  К, т. е. температура уходящего излучения Земли значительно ниже наблюдаемой средней глобальной температуры приземного слоя атмосферы, составляющей 287,4 К. Спрашивается: какова причина отмеченного расхождения? Для того чтобы ответить на этот вопрос, вспомним о том вкладе, который вносит в формирование термического режима неучитываемый формулой (8.1) парниковый эффект атмосферы. Последний создается поглощением длинноволнового излучения земной поверхности и прилегающего к ней слоя воздуха активными в радиационном отношении примесями и в первую очередь — водяным паром и углекислым газом. Если вертикальный градиент температуры в тропосфере принять равным 5,5 К/м, то окажется, что температура уходящего излучения Земли устанавливается на высоте около 6 км.

Определим теперь *параметр чувствительности*  $\beta_0 = (S_0/100) \times (dT_0/dS_0)$ , характеризующий степень изменения средней глобальной температуры  $T_0$  при 1 %-ном изменении солнечной постоянной. При  $\alpha_p = \text{const}$  из (8.1) следует

$$dS_0/S_0 = 4dT_r/T_r,$$

откуда

$$\beta_0 = T_r/400 = 0,63 \text{ К}.$$

Это значение параметра  $\beta_0$  соответствует чувствительности климатической системы при отсутствии в ней обратных связей.

Для описания эффекта обратной связи между потоком уходящего длинноволнового излучения и приземной температурой  $T_0$  аппроксимируем  $I$  в виде [24]

$$I = A + BT_0,$$

где  $A = 203,3$  Вт/м<sup>2</sup>;  $B = 2,09$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С) — эмпирические константы, неявно учитывающие влияние облачности и активных в радиационном отношении примесей в атмосфере северного полушария.

Приравнивая поток  $I$  усваиваемому потоку солнечной радиации, имеем:

$$\frac{1}{4} S_0 (1 - \alpha_p) = A + BT_0. \quad (8.3)$$

При  $\alpha_p = 0,30$  и указанных выше значениях числовых констант  $A$  и  $B$  это выражение дает оценку  $T_0 = 14,97^\circ\text{C}$ , которая практически совпадает с наблюдаемой средней (для северного полушария) приземной температурой ( $T_0 = 14,9^\circ\text{C}$ ). Отвечающий уравнению (8.3) параметр  $\beta_0$  получается равным

$$\beta_0 = (A + BT_0)/(100B) = 1,12^\circ\text{C}.$$

Таким образом, парниковый эффект атмосферы увеличивает чувствительность климатической системы.

Следуя [45], выясним причину этого увеличения. Пусть планета с температурой поверхности  $T_1$  окружена газовой оболочкой с температурой  $T_0$ , причем эта оболочка абсолютно прозрачна для коротковолновой солнечной радиации. Предположим далее, что оболочка планеты находится в состоянии радиационного равновесия, т. е. излучение вверх и вниз равно поглощению. Если поглощение равно  $\sigma T_1^4$ , а излучение —  $\sigma T_0^4$ , то

$$\sigma T_1^4 = 2\sigma T_0^4. \quad (8.4)$$

Аналогично, условие радиационного равновесия подстилающей поверхности будет иметь вид

$$\sigma T_1^4 = \sigma T_0^4 + S_0 (1 - \alpha_p)/4. \quad (8.5)$$

На основании (8.4) получаем, что  $T_1$  больше  $T_0$  в  $2^{1/4} \approx 1,19$  раз. Далее, комбинируя (8.4), (8.5) и затем дифференцируя найденное выражение по  $S_0$ , имеем при  $\alpha_p = \text{const}$

$$\beta_0 = T_1/400 = 0,76 \text{ K}.$$

Отсюда видно, что это приближение, называемое *приближением черного тела*, аппроксимирует парниковый эффект атмосферы, способствуя усилению чувствительности системы к изменению, солнечной постоянной. Итак, наиболее вероятной причиной усиления чувствительности является присутствие в атмосфере поглощающих веществ.

Рассмотрим теперь влияние обратной связи между планетарным альбедо и температурой климатической системы. Предположим, что планетарное альбедо равно 0,30 в том случае, когда планета свободна от снега и льда, и 0,62 — когда она покрыта снегом и льдом. После подстановки этих значений в (8.3), находим  $T_0 = 15^\circ\text{C}$  в первом случае и  $T_0 = -36,4^\circ\text{C}$  во втором. Планета Земля занимает промежуточное положение между этими двумя крайними случаями.



Допустим, что южной границе снежно-ледяного покрова соответствует  $x = x_s$ , причем  $x_s = 1$  при  $T_0 > 15^\circ\text{C}$ ,  $x_s = 0$  при  $T_0 < -15^\circ\text{C}$  и  $x_s = 1 + (T_0 - 15)/30$  при  $-15 \leq T_0 \leq 15^\circ\text{C}$ . Тогда, обозначая локальное альбедо через  $\alpha_i$  при  $0 < x < x_s$  и через  $\alpha_i$  при  $x_s < x < 1$ , на основании определения  $\alpha_p$  и (8.3) получаем:

$$H_0(x_s(T_0)) \equiv 1 - \alpha_p = 1 - \int_0^1 \alpha(x) S(x) dx = 1 - \left[ \alpha_i \int_{x_s}^1 S(x) dx + \alpha_i \int_0^{x_s} S(x) dx \right] = 1 - \alpha_i + (\alpha_i - \alpha_j) \left[ x_s - \frac{1}{2} S_2(x_s - x_s^3) \right].$$

Функция  $H_0(x_s(T_0))$  изображена сплошной кривой на рис. 20. Здесь же пунктиром нанесена зависимость нормированного на  $S_0/4$  потока  $I$  уходящего излучения от температуры  $T_0$ . Пересечение кривых дает корни уравнения (8.3). Как видно, для современного значения солнечной постоянной уравнение (8.3) имеет три решения. Решение, отмеченное точкой I, соответствует современному климату; решение, отмеченное точкой II — климату, при котором примерно 30 % площади поверхности планеты покрыто льдом, и решение, отмеченное точкой III, — климату планеты, полностью покрытой льдом (случай белой Земли).

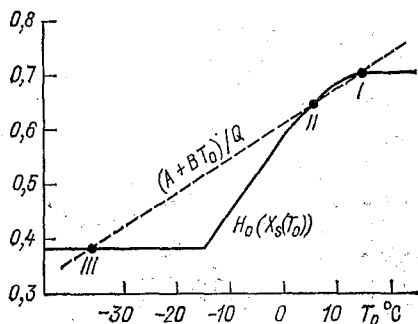


Рис. 20. Три решения, отвечающие нулевой климатической модели с переменной площадью полярного оледенения, по Норту и др. [45].

Из рис. 20 следует также, что уменьшение  $S_0$  должно сопровождаться смещением вверх пунктирной кривой, а это в свою очередь — сближением решений I и II и последующим их исчезновением. В результате оказывается, что при уменьшении солнечной постоянной остается единственное решение, отвечающее режиму полного оледенения. Напротив, увеличение солнечной постоянной приводит к слиянию решений II и III, и единственное остающееся решение соответствует режиму безледной Земли.

Исследуем линейную устойчивость каждого из трех решений стационарного уравнения (8.3). Предварительно выпишем соответствующее нестационарное уравнение бюджета тепла. Оно имеет вид

$$c \frac{dT_0}{dt} + I(T_0) = \frac{1}{4} S_0 [1 - \alpha_p(T_0)] = \frac{1}{4} S_0 H_0[x_s(T_0)], \quad (8.6)$$

где  $c$  — коэффициент теплоемкости климатической системы;  $I(T_0)$  и  $\alpha_p(T_0)$  — уходящее длинноволновое излучение и планетарное

альбедо, считающиеся известными функциями от средней глобальной приземной температуры  $T_0$ .

В пределе  $t \rightarrow \infty$  уравнение (8.6) сводится к алгебраическому уравнению относительно  $T_0$ , которое при указанных выше аппроксимациях  $I$  и  $\alpha_p$  описывает зависимость  $T_0$  от  $S_0/S_0^0$  (здесь  $S_0^0$  — современное значение солнечной постоянной). Эта зависимость представлена на рис. 21.

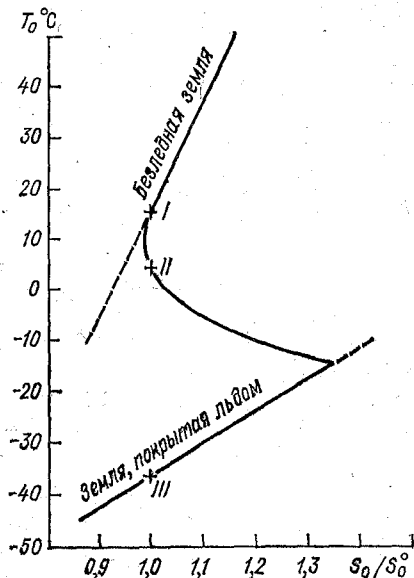


Рис. 21. Зависимость средней глобальной температуры приземного слоя атмосферы от  $S_0/S_0^0$  для нулевой климатической модели с переменной площадью полярного оледенения, по Норту и др. [45].

Определим  $I_0$  как  $(T_0^0 + \delta T_0)$ , где  $T_0^0$  — решение стационарного уравнения,  $\delta T_0$  — малое отклонение от него. Затем представим  $I(T_0)$  и  $H_0(x_s(T_0))$  в виде рядов Тейлора и удержим в них члены, содержащие  $\delta T_0$  в степени не выше первой. После подстановки выражений

$$T_0 = T_0^0 + \delta T_0;$$

$$I(T_0) = I(T_0^0) + \left( \frac{\partial I}{\partial T_0} \right)_{T_0^0} \delta T_0;$$

$$H(x_s(T_0)) = H_0(x_s(T_0^0)) + \left( \frac{\partial H_0}{\partial T_0} \right)_{T_0^0} \delta T_0$$

в уравнение (8.6) и вычитания стационарного уравнения

$$I(T_0^0) = \frac{1}{4} S_0 H_0(x_s(T_0^0)) \quad (8.7)$$

получаем

$$c \frac{d}{dt} \delta T_0 + \left[ \left( \frac{\partial I}{\partial T_0} \right)_{T_0^0} - \frac{1}{4} S_0 \left( \frac{\partial H_0}{\partial T_0} \right)_{T_0^0} \right] \delta T_0 = 0. \quad (8.8)$$

Преобразуем выражение, стоящее в квадратной скобке, для чего продифференцируем уравнение (8.7) по  $T_0$ . В результате будем иметь

$$\frac{\partial I}{\partial T_0} = \frac{1}{4} \frac{\partial S_0}{\partial T_0} H_0 + \frac{1}{4} S_0 \frac{\partial H_0}{\partial T_0},$$

откуда

$$\left( \frac{\partial I}{\partial T_0} - \frac{1}{4} S_0 \frac{\partial H_0}{\partial T_0} \right)_{T_0^0} = \frac{1}{4} \left( \frac{\partial S_0}{\partial T_0} \right)_{T_0^0} H_0.$$

Подстановка этого соотношения в (8.8) дает

$$c \frac{d}{dt} \delta T_0 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial S_0}{\partial T_0} \right)_{T_0^0} H_0 \delta T_0 = 0. \quad (8.9)$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка имеет экспоненциальное решение с показателем степени  $\frac{1}{4} \left( \frac{\partial S_0}{\partial T_0} \right)_{T_0^0} c^{-1} H_0$ . Следовательно, стремление  $\delta T_0$  к нулю (устойчивость) или удаление от него (неустойчивость) должны определяться только знаком комбинации  $\frac{1}{4} \left( \frac{\partial S_0}{\partial T_0} \right)_{T_0^0} c^{-1} H_0$ . Поскольку,

однако,  $c$  и  $H_0$  всегда положительны, то устойчивость или неустойчивость стационарного решения должны зависеть исключительно от знака производной  $(\partial S_0 / \partial T_0)_{T_0^0}$ . Таким образом, можно сформулировать теорему [25]: стационарный режим климатической системы, описываемый уравнением (8.3), будет устойчивым при  $(\partial S_0 / \partial T_0)_{T_0^0} > 0$  и неустойчивым при  $(\partial S_0 / \partial T_0)_{T_0^0} < 0$ . Последнее

неравенство имеет место, если отрицательная обратная связь между уходящим длинноволновым излучением и приземной температурой оказывается слабее положительной обратной связи между планетарным альбедо и приземной температурой, т. е. если

$(\partial I / \partial T_0)_{T_0^0} < \frac{1}{4} S_0 (\partial H_0 / \partial T_0)_{T_0^0}$  [см. уравнение (8.8)]. Выполнение этого условия в свою очередь эквивалентно заданию отрицательной теплоемкости  $c$ , что лишено физического смысла.

Итак, на основании приведенных выше соображений приходим к следующим двум заключениям: 1) климатический режим, отвечающий точке II на рис. 20, является неустойчивым в том смысле, что при малых изменениях солнечной постоянной он переходит либо в режим безледной Земли, либо в режим «белой Земли»; 2) климатические режимы, при которых средняя глобальная приземная температура становится выше  $10^\circ \text{C}$  или ниже  $-15^\circ \text{C}$ , являются устойчивыми относительно малых вариаций солнечной постоянной. Это относится как к современному климату, характеризующемуся частичным оледенением Земли, так и к климатам «белой Земли» и безледной Земли.

## 8.2. ОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ

К ним принадлежат, в частности, модели, учитывающие изменение приземной температуры в меридиональном направлении (или, как их еще называют, модели широтной структуры).

Выделим в климатической системе зональный пояс единичной меридиональной протяженности. Соответствующее ему уравнение бюджета тепла для средних годовых условий записывается в виде

$$I(x) + \nabla \cdot \text{МНТ}(x) = \frac{1}{4} S_0 S(x) a(x, x_s), \quad (8.10)$$

где первый член в левой части характеризует длинноволновое уходящее излучение, второй — дивергенцию проинтегрированного по всей толще атмосферы и океана среднего годового меридионального переноса тепла, член в правой части — усваиваемую солнечную радиацию,  $a(x) = [1 - \alpha(x)]$  — локальный коэффициент поглощения коротковолновой солнечной радиации, остальные обозначения прежние.

Дополним уравнение (8.10) представлением каждой фигурирующей в нем неизвестной функции в терминах средней годовой зональной приземной температуры  $T(x)$  и надлежащим граничным условием на полюсах. В качестве последнего примем условие обращения в нуль меридионального переноса тепла. Что касается функций  $I(x)$ ,  $a(x)$  и  $\nabla \cdot \text{МНТ}(x)$ , то для определения первых двух воспользуемся аппроксимациями, предложенными М. И. Будыко [24]. Именно, будем считать, что

$$I(x) = A + BT(x), \quad (8.11)$$

$$a(x, x_s) = \begin{cases} a_i & \text{при } T(x) < T_s, \\ a_f & \text{при } T(x) > T_s, \end{cases}$$

где, как и раньше,  $A$  и  $B$  — числовые константы;  $a_i = 0,38$  и  $a_f = 0,68$  — коэффициенты поглощения ледовитых и безледных широтных зон;  $T_s = -10^\circ\text{C}$  — средняя годовая приземная температура на границе ( $x = x_s$ ) между этими широтными зонами.

Прежде чем заняться параметризацией дивергенции меридионального переноса тепла, рассмотрим, следуя [45], два предельных случая, при которых МНТ( $x$ ) становится равным бесконечности и нулю. В первом случае должно произойти выравнивание приземной температуры на всех широтах, т. е. одномерная модель будет воспроизводить ситуацию, аналогичную описываемой нульмерной моделью. Соответственно решение, отвечающее одномерной модели должно совпадать с изображенными на рис. 20 и 21 с той лишь разницей, что в диапазоне изменения температуры от  $-15$  до  $15^\circ\text{C}$  сплошная кривая на рис. 20 теперь заменится вертикальной линией, имитирующей разрыв коэффициента поглощения при  $T = -10^\circ\text{C}$ , а на рис. 21 — пунктирными прямыми, которые являются продолжением сплошных прямых, отвечающих решениям в режиме безледной (темной) и в режиме сплошь покрытой льдом (белой) Земли. Физическая интерпретация разрывной кривой на фазовой плоскости ( $T, S_0/S_0^0$ ) очевидна: при постепенном уменьшении солнечной постоянной происходит понижение приземной температуры изотермической планеты. Последняя остается темной до тех пор, пока приземная температура не достигнет  $-10^\circ\text{C}$ , после чего планета внезапно становится белой. Новая (соответ-

вующая режиму белой планеты) приземная температура составляет около  $-44^{\circ}\text{C}$ .

Во втором предельном случае (нулевой меридиональный перенос тепла) уравнение (8.10) сводится к виду

$$A + BT(x) = \frac{1}{4} S_0 S(x) a(x, x_s), \quad (8.12)$$

Пусть  $a(x, x_s)$  при  $x = x_s$  принимает среднее между  $a_i$  и  $a_j$  значение. Тогда, приписывая уравнение (8.12) границе между оледенитой и безледной широтными зонами, получаем:

$$S_0(x_s) = 4(A + BT_s)/[S(x_s)\bar{a}],$$

где  $\bar{a} = (a_i + a_j)/2$ .

Это соотношение определяет то значение солнечной постоянной  $S_0$ , которое обеспечивает установление южной границы льда на той или иной фиксированной широте. Результаты расчета, приведенные на рис. 22, демонстрируют весьма любопытную ситуацию: если согласиться с существующими теориями эволюции Солнца и в соответствии с ними принять, что солнечная постоянная на ранних стадиях геологической истории Земли была меньше ее современного значения на 20—40 %, то почему Земля не была покрыта льдом, как это предсказывают все имеющиеся в настоящее время одномерные климатические модели? Можно предложить разные объяснения этого парадокса и среди них недостаток воды для формирования ледяного покрова, наличие неучитываемых отрицательных обратных связей, обусловленных изменением облачности и состава атмосферы и пр.

Напомним, что обсуждаемые здесь результаты расчета были получены с использованием неявного предположения об универсальности числовых констант  $A$  и  $B$ , которые на самом деле должны изменяться в геологическом масштабе времени хотя бы вследствие изменений содержания в атмосфере поглощающих веществ. Следует также иметь в виду, что одномерные модели с нулевым меридиональным переносом тепла не в состоянии воспроизвести реальную климатическую систему. Действительно, из рис. 22 видно, что современному положению южной границы полярного оледенения ( $x_s = 0,95$ ) соответствует солнечная постоянная, превышающая, ее современное значение на 70 %. Мало того, при указанных значениях  $S_0/S_0^0$  и  $x_s$  средняя глобальная приземная температура оказывается равной  $93^{\circ}\text{C}$ , а при  $x = x_s$  имеет место разрыв температуры, составляющий [см. (8.12)] около  $50^{\circ}\text{C}$ . Ясно, что без учета меридионального переноса тепла сгладить этот разрыв температуры не удастся.

Известны два способа параметризации дивергенции меридионального переноса тепла в рамках одномерных моделей. Первый из них (так называемое *транспортное приближение*) был предложен М. И. Будыко [24], второй (*диффузионное приближение*) —

А. Фаигром [28] и Дж. Нортон [43]. Рассмотрим эти способы параметризации более подробно с тем, чтобы установить присущие им особенности и общие черты.

*Транспортное приближение.* Для средних годовых условий меридиональный перенос тепла в климатической системе равен результирующему потоку радиации на верхней границе атмосферы. С другой стороны, он должен быть связан со средней (в пределах толщи атмосферы) температурой воздуха. Однако вертикальная изменчивость температуры воздуха мала по сравнению с горизонтальной изменчивостью, так что средняя по вертикали температура воздуха должна быть коррелирована с приземной температу-

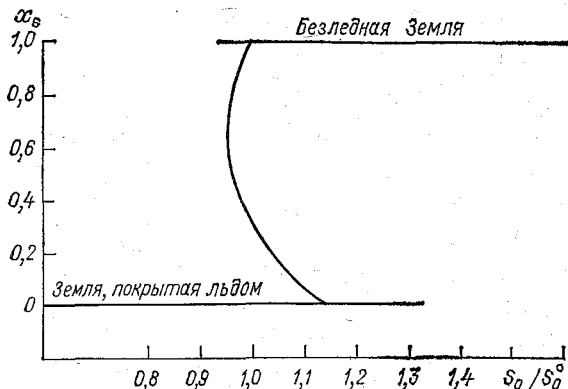


Рис. 22. Зависимость положения южной границы полярного оледенения от  $S_0/S_0^0$  для нулевой климатической модели, по Нортону и др. [45].

рой. Иными словами, должна существовать зависимость между меридиональным переносом тепла и распределением приземной температуры. Эти соображения послужили основанием для аппроксимации дивергенции меридионального переноса тепла в виде

$$\nabla \cdot \text{МНТ}(x) = \beta_1 [T_1(x) - T_0], \quad (8.13)$$

где, как и раньше,  $T_0$  — средняя глобальная приземная температура;  $\beta = 3,75 \cdot 10^4$  Вт/(м<sup>2</sup>·°С) — эмпирическая константа.

В комбинации с (8.11), (8.13) уравнение (8.10) дает

$$A + BT_1(x) + \beta_1 [T_1(x) - T_0] = S_0 S(x) a(x, x_s)/4. \quad (8.14)$$

Отсюда после подстановки выражения

$$A + BT_0 = S_0 H_0(x_s)/4, \quad (8.15)$$

найденного интегрирования (8.14) по  $x$  от 0 до 1, получаем соотношение для определения средней годовой зональной температуры приземного слоя атмосферы. Оно имеет вид

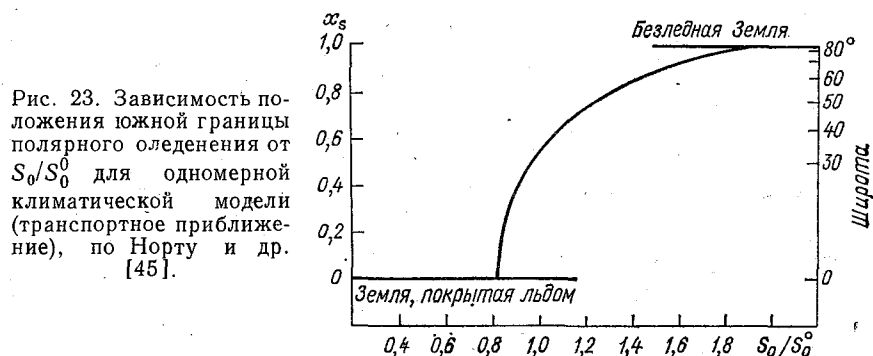
$$T(x) = -AB^{-1} + S_0 [S(x) a(x, x_s) + \beta B^{-1} H_0(x_s)] B^{-1} (1 + \beta B^{-1})^{-1/4}. \quad (8.16)$$

Осталось определить положение  $x_s$  южной границы полярного оледенения. Используя условие  $T(x) = T_s$  при  $x = x_s$ , получаем:

$$T_s = -AB^{-1} + \frac{1}{4} S_0 [S(x_s) a(x_s, x_s) + \beta B^{-1} H_0(x_s)] B^{-1} (1 + \beta B^{-1})^{-1}, \quad (8.17)$$

где  $a(x_s, x_s) = (a_i + a_j)/2$  — среднее значение коэффициента поглощения.

Найденная с помощью этого алгебраического уравнения зависимость  $x_s$  от  $S_0/S_0^0$  представлена на рис. 23. Обратим внимание



на скачкообразное изменение южной границы полярного оледенения после того, как она достигает широты  $50^\circ$ . Объяснение этому факту следующее: на самой границе полярного оледенения (при  $x = x_s$ ) поток уходящего длинноволнового излучения остается неизменным в силу постоянства  $T_s$ . Если  $S_0/S_0^0$  уменьшается, то южная граница смещается к экватору ( $x_s$  уменьшается) и, следовательно, увеличивается  $S(x_s)$ . Одновременно происходит понижение средней глобальной приземной температуры, а вслед за ним — увеличение дивергенции меридионального переноса тепла. Однако как только  $S_0/S_0^0$  становится достаточно малым, дивергенция меридионального переноса тепла увеличивается больше, нежели усваиваемый поток солнечной радиации, и полярное оледенение быстро распространяется до экватора.

Обратная последовательность событий имеет место при увеличении  $S_0/S_0^0$ . Тем не менее быстрый переход от режима частичного оледенения к режиму безледной Земли сохраняется и в этом случае.

**Диффузионное приближение.** Если отождествить теплосодержание с пассивной скалярной характеристикой, то в среднем меридиональный перенос тепла от источника тепла к источнику холода будет пропорциональным градиенту температуры или в терминах

переменной  $x$  — пропорциональным —  $(1-x^2)^{1/2} dT(x)/dx$  с числовым множителем, называемым феноменологическим коэффициентом диффузии тепла. Соответственно дивергенция меридионального переноса тепла будет равна

$$\nabla \cdot \text{МНТ}(x) = -\frac{d}{dx} D(1-x^2) \frac{dT(x)}{dx},$$

где множитель  $D$  есть произведение коэффициента диффузии на  $1/a^2$ .

Воспользуемся этой аппроксимацией и перепишем уравнение бюджета тепла (8.10) в виде

$$-\frac{d}{dx} D(1-x^2) \frac{dT(x)}{dx} + A + BT(x) = \frac{1}{4} S_0 S(x) a(x, x_s). \quad (8.18)$$

В качестве граничных условий примем условия равенства нулю меридионального переноса тепла на экваторе и на полюсе, т. е.

$$-D(1-x^2)^{1/2} \frac{dT(x)}{dx} \Big|_{x=0,1} = 0. \quad (8.19)$$

Заметим, что первое из этих условий эквивалентно предположению о симметрии полей температуры в обоих полушариях.

Будем искать решение уравнения (8.18) при  $D = \text{const}$  в виде ряда по полиномам Лежандра  $P_n(x)$ . Предварительно вспомним, что эти полиномы являются собственными функциями диффузионного оператора

$$-\frac{d}{dx} (1-x^2) \frac{dP_n(x)}{dx} = n(n+1) P_n(x)$$

и что граничным условиям (8.19) удовлетворяют только те из них, которые имеют четный порядок  $n$ . Следовательно, решение задачи (8.18), (8.19) может быть записано в виде

$$T(x) = \sum_n T_n P_n(x), \quad n=0, 2, \dots \quad (8.20)$$

Подставим выражение (8.20) в уравнение (8.18), затем умножим его на  $P_n(x)$  и проинтегрируем по  $x$  от 0 до 1. Тогда после использования условия ортогональности

$$\int_0^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{\delta_{nm}}{2n+1},$$

где  $\delta_{nm}$  — символ Кронекера, равный единице при  $n = m$  и нулю при  $n \neq m$ ;  $n, m = 0, 2, \dots$ , получаем для коэффициентов разложения  $T_n$  в (8.20) следующее соотношение:

$$[n(n+1)D + B] T_n + \delta_{0n} A = S_0 H_n / 4, \quad (8.21)$$



где

$$H_n \equiv H_n(x_s) = (2n+1) \int_0^1 P_n(x) S(x) a(x, x_s) dx$$

полиномиальная функция от аргумента  $x_s$ , затабулированная при  $a(x, x_s) = a_0 + a_2 P_2(x)$  в [43].

В частном случае  $n = 0$  соотношение (8.21) сводится к виду

$$T_0 = \left( \frac{1}{4} S_0 H_0 - A \right) B^{-1}, \quad (8.22)$$

в точности совпадающему с (8.15). Здесь, как и в (8.15),  $T_0$  — средняя глобальная приземная температура. Из (8.22) при указанных выше значениях числовых констант  $A$  и  $B$  и функции  $H_0(x_s)$  следует  $T_0 = 14,97^\circ \text{C}$ .

При  $n = 2$  значение функции  $H_n(x_s)$  равно  $H_2 \approx -0,500$ . Принимая, как и в [45], что  $DB^{-1} = 0,310$ , на основании (8.21) имеем  $T_2 = -28^\circ \text{C}$ . Если теперь ограничиться в (8.20) первыми двумя членами разложения (*двухмодовое приближение*)

$$T(x) \approx T_0 + T_2 P_2(x), \quad (8.23)$$

и подставить сюда найденные значения  $T_0$  и  $T_2$ , то согласование между рассчитанными и наблюдаемыми меридиональными распределениями средней годовой приземной температуры будет достаточно хорошим (рис. 24). Разумеется, то, что диффузионная параметризация обеспечивает хорошее согласование с данными наблюдений, впечатляет. Но не будем забывать, что это есть скорее результат удачного подбора параметров двухмодового приближения, а отнюдь не достоинств принятого способа параметризации. Кстати сказать, диффузионная параметризация меридионального теплообмена в рамках двухмодового приближения совпадает с предложенной в [24] с точностью до обозначений. Действительно, подставляя (8.23) в выражение для диффузионного оператора, получаем при  $D = \text{const}$  и  $n = 2$

$$-\frac{d}{dx} D (1-x^2) \frac{dT(x)}{dx} = 6DT_2 P_2(x) = 6D [T(x) - T_0].$$

Отсюда и из (8.13) следует равенство  $\beta = 6D$ .

Для определения  $x_s$  поступим следующим образом [43]. Вместо  $T(x)$  введем новую зависимую переменную — уходящий поток длинноволнового излучения  $I(x)$ . Тогда уравнение (8.18) переписывается в виде

$$-\frac{d}{dx} D' (1-x^2) \frac{dI(x)}{dx} + I(x) = \frac{1}{4} S_0 S(x) a(x, x_s), \quad (8.24)$$

где  $D' = D/B$ .

Далее представим  $I(x)$  в виде ряда по четным полиномам Лежандра

$$I(x) = \sum_n I_n P_n(x), \quad n=0, 2, \dots \quad (8.25)$$

и сделаем те же преобразования, что и при выводе выражения для  $T(x)$ , т. е. подставим (8.25) в (8.24), затем умножим получившееся уравнение на  $P_n(x)$  и проинтегрируем его по  $x$  от 0 до 1. В результате будем иметь

$$[n(n+1)D' + 1] I_n = \frac{1}{4} S_0 H_n(x_s).$$

Подстановка этого соотношения в (8.25) дает при  $x = x_s$

$$I(x_s) = \frac{1}{4} S_0 \sum_n \frac{H_n(x_s) P_n(x_s)}{n(n+1)D' + 1},$$

$$n=0, 2, \dots,$$

откуда следует искомое соотношение

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} S_0(x_s) &= I(x_s) \times \\ &\times \left[ \sum_n \frac{H_n(x_s) P_n(x_s)}{n(n+1)D' + 1} \right]^{-1} \\ n &= 0, 2, \dots, \quad (8.26) \end{aligned}$$

определяющее положение южной границы полярного оледенения. В двухмодовом приближении ( $n=2$ ) оно принимает вид

$$\frac{1}{4} S_0(x_s) = I(x_s) \left[ H_0(x_s) + \frac{H_2(x_s) P_2(x_s)}{6D' + 1} \right]^{-1}.$$

Полученная с использованием (8.26) зависимость  $x_s = x_s(S_0/S_0^0)$  изображена на рис. 25. При ее построении в (8.26) были удержаны члены с индексами  $n$  от 0 до 6 включительно. Из рис. 25 видно, что в небольшом интервале значений  $S_0/S_0^0$  в окрестности  $S_0/S_0^0 = 1$  функция  $x_s = x_s(S_0/S_0^0)$  имеет несколько (до пяти) стационарных решений, отвечающих различным климатическим режимам. При этом современному климату соответствует наблюдаемое значение  $x_s(1) = 0,95$ . Устойчивость этих решений можно установить примерно так же, как это было сделано выше для нульмерной модели, т. е. добавить в левую часть уравнения (8.24) член  $c \partial I(x, t) / \partial t$

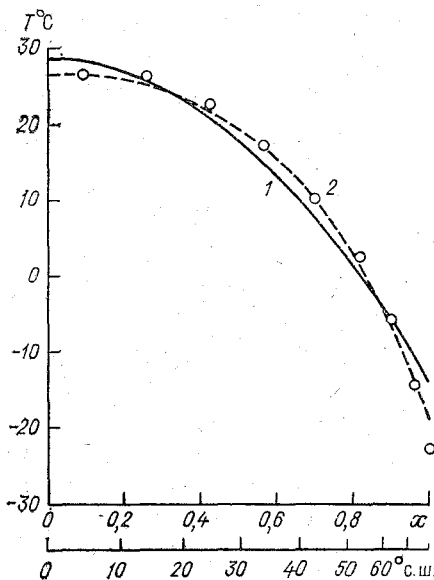


Рис. 24. Сравнение рассчитанных (1) и наблюдаемых (2) средних годовых меридиональных распределений температуры приземного слоя атмосферы, по Норту и др. [45].

с коэффициентом теплоемкости  $c$  и затем линеаризовать нестационарное уравнение относительно малых возмущений стационарного решения. Используя такую процедуру, Норт [44] выяснил, что современный климат и климат полного оледенения (ветви I и III на рис. 25) устойчивы, а климат ледниковых периодов (ветвь II) — неустойчив и, следовательно, не может быть получен как результат эволюции флуктуаций современного климата.

Сравнение рис. 23 и 25 показывает, что наибольшие их отличия имеют место в режиме полного оледенения при  $S_0/S_0^0 > 1,1$  и в режиме безледной Земли при  $S_0/S_0^0 < 1,1$ : диффузионное приближение предсказывает ветвление решений, транспортное приближение — их слияние. Кроме того, в диффузионном приближении производная  $dx_s/dS_0$  при  $x_s \leq 1,0$  меняет знак, причем постепенное увеличение  $S_0/S_0^0$  от  $S_0/S_0^0 = 1$  приводит сначала к плавному, а затем, после прохождения точки смены знака  $dx_s/dS_0$ , — к резкому увеличению  $x_s$  (уменьшению площади полярного оледенения), сопровождающемуся скачкообразным переходом к режиму безледной Земли. Согласно [45], эта особенность пропадает при учете зависимости коэффициента диффузии  $D$  от меридионального градиента температуры и удержании в разложении (8.20) [или (8.25)] более высоких мод. В этом случае решения, полученные в рамках диффузионного и транспортного приближений, почти не отличаются друг от друга.

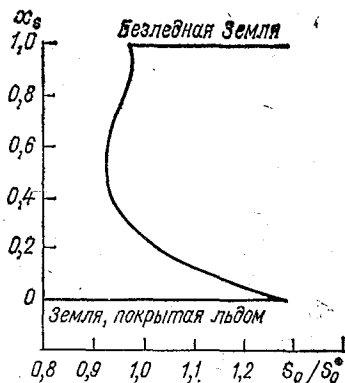


Рис. 25. Зависимость положения южной границы полярного оледенения от  $S_0/S_0^0$  для одномерной модели (диффузионное приближение), по Норту и др. [45].

### 8.3. ЗОНАЛЬНЫЕ МОДЕЛИ

Зональными называются такие модели, в которых в качестве независимых переменных выступают время, широта и вертикальная координата. Исклучение одной переменной делает зональные модели более простыми по сравнению с трехмерными, что, естественно, облегчает выполнение большого количества численных экспериментов на ЭВМ средней мощности. Это формальное, но в ряде случаев решающее преимущество не имело бы смысла, если бы зональные модели не воспроизводили многие особенности меридиональной структуры климатической системы. Разумеется, зональные модели не могут описывать долготные различия, создаваемые распределением континентов и океанов. Однако если для океана и суши такие различия являются определяющими из-за ограничен-

ности их протяженности в зональном направлении, то для атмосферы они не имеют столь важного значения. Поэтому зональные модели атмосферы оказываются весьма представительными с точки зрения воспроизведения атмосферной циркуляции. При обсуждении этих моделей мы будем следовать главным образом [8, 20].

Отличительным свойством атмосферы, лежащим в основе вывода уравнений зональных моделей, является приближенная симметрия характеристик термодинамического режима атмосферы относительно оси вращения планеты. Свидетельством тому может служить высокая степень зональности в распределении многих характеристик циркуляции атмосферы. Это свойство является отражением зональности суточной инсоляции.

При выводе уравнений зональной модели атмосферы будем исходить из непреобразованной системы трехмерных уравнений гидротермодинамики атмосферы [см. (5.1) — (5.6)], включающей, прогностические уравнения для горизонтальных составляющих  $u$ ,  $v$  скорости ветра, температуры  $T$  (или потенциальной температуры  $\Theta$ ), удельной влажности  $q$  и плотности  $\rho$ , а также диагностическое соотношение для давления  $p$ . Представим все фигурирующие в исходной системе зависимые переменные в виде суммы средних зональных значений и отклонений от них. Первые, как и прежде, будем обозначать квадратными скобками, вторые — звездочками. Тогда после усреднения по долготе уравнения гидростатики и проинтегрированного по вертикали в пределах всей толщи атмосферы уравнения неразрывности будем иметь

$$\partial [\Phi] / \partial \sigma = -R [T] / \sigma, \quad (8.27)$$

$$\frac{\partial [p_s]}{\partial t} = -\frac{1}{a \cos \varphi} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \varphi} ([p_s] [v] + [p_s^* v^*]) \cos \varphi \, d\sigma, \quad (8.28)$$

где  $\Phi = gz$ ;  $\sigma = p/p_s$ ;  $p_s$  — приземное давление;  $R$  — газовая постоянная воздуха.

Уравнение (8.28) означает, что давление изменяется за счет дивергенции массы, создаваемой средней меридиональной циркуляцией (первый член) и коррелированными с давлением незональными возмущениями меридиональной составляющей скорости (второй член). В настоящее время вопрос о соотношении этих двух членов в правой части уравнения (8.28) остается открытым. Вместе с тем известно, что в ряде случаев незональная циркуляция и создаваемые ею статистические эффекты переноса массы могут оказаться важными и потому пренебрегать ими в общем нет оснований. Заметим также, что члены типа  $[p_s^* u^*]$ ,  $[p_s^* v^*]$  возникают и при усреднении уравнений движения. Поэтому если эти члены удерживаются в (8.28), то логично было бы удерживать их всюду. Последнее обстоятельство приводит к необходимости введения дополнительных замыкающих гипотез. Во избежание усложнений

во всех существующих зональных моделях эти члены вообще опускаются. Оправданием служат оценки типа

$$\frac{[p_s^* u^*]}{[p_s][u]} \sim \frac{\delta p}{p_0} \sim 10^{-2},$$

где  $\delta p \approx 10$  гПа — характерное изменение приземного давления вдоль круга широты;  $p_0 \approx 10^3$  гПа — среднее приземное давление.

С учетом этого упрощения система зонально усредненных уравнений гидротермодинамики атмосферы принимает вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [p_s][u] + \frac{\partial}{x \cos \varphi \partial \varphi} \{[p_s]([u][v] + [u^*v^*]) \cos \varphi\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} \{[p_s]([u][\omega] + [u^*\omega^*])\} = l[p_s][v] + [p_s]([u][v] + \\ & + [u^*v^*]) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} + [F_\lambda]; \end{aligned} \quad (8.29)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [p_s][v] + \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \varphi} \{[p_s]([v][v] + [v^*v^*]) \cos \varphi\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} \{[p_s]([v][\omega] + [v^*\omega^*])\} = -l[p_s][u] - [p_s]([u][u] + [u^*u^*]) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} - \\ & - \frac{[p_s]}{a} \left( \frac{\partial [\Phi]}{\partial \varphi} + R[T] \frac{\partial [p_s]}{\partial \varphi} \right) + [F_\varphi]; \end{aligned} \quad (8.30)$$

$$\frac{\partial [p_s]}{\partial t} = - \frac{1}{a \cos \varphi} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \varphi} [p_s][v] \cos \varphi d\sigma; \quad (8.31)$$

$$\frac{\partial [\omega]}{\partial \sigma} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} [v] \cos \varphi = 0; \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [p_s][\Theta] + \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \varphi} \{[p_s]([\Theta][v] + [\Theta^*v^*]) \cos \varphi\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} \{[p_s]([\Theta][\omega] + [\Theta^*\omega^*])\} = [F_T] + [Q]; \end{aligned} \quad (8.33)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} [p_s][q] + \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \varphi} \{[p_s]([q][v] + [q^*v^*]) \cos \varphi\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} \{[p_s]([q][\omega] + [q^*\omega^*])\} = [F_q] + [C]; \end{aligned} \quad (8.34)$$

здесь  $\omega = dp_s/dt$  — изобарическая вертикальная скорость;  $[F_\lambda]$ ,  $[F_\varphi]$ ,  $[F_T]$  и  $[F_q]$  — соответственно усредненные вдоль круга широты диффузионные потоки импульса, тепла и влаги;  $[Q]$  — радиационные и фазовые источники и стоки тепла в атмосфере;  $[C]$  — осадки.

Таким образом, даже после введения указанного выше упрощения система (8.29) — (8.34) содержит по меньшей мере восемь новых переменных типа  $[a^*b^*]$ , порождаемых нелинейными членами в исходных уравнениях. Дополнительные переменные появляются при зональном усреднении членов  $F_\lambda$ ,  $F_\phi$ ,  $F_T$  и  $F_q$ , если они имеют нелинейную структуру.

Аналогичные затруднения возникают и при формулировке граничных условий на подстилающей поверхности. В самом деле, пусть уравнение рельефа имеет вид  $h(\phi, \lambda) = [h(\phi)] + h^*(\phi, \lambda)$  и пусть любую функцию можно линейаризовать относительно  $h^*(\phi, \lambda)$ . Тогда для горизонтальных составляющих скорости ветра будут иметь место соотношения

$$[u(h), v(h)] \approx [u([h]), v([h])] + h^* \frac{\partial}{\partial [h]} [u^*([h]), v^*([h])],$$

где вторые слагаемые представляют собой новые неизвестные величины.

Кроме того, если на поверхности суши все три составляющие скорости обращаются в нуль, то на поверхности океана условие равенства нулю выполняется лишь (и то приближенно) для вертикальной скорости, а горизонтальные составляющие скорости должны находиться из условий непрерывности. Задание последних влечет за собой необходимость присоединения к зональной модели атмосферы соответствующей модели океана, построение которой сопряжено с дополнительными и притом весьма серьезными ограничениями. По этой причине планетарный пограничный слой атмосферы обычно не включается в область определения решения зональной модели, а неоднородности подстилающей поверхности учитываются введением средних взвешенных значений коэффициента сопротивления и угла между направлением ветра на верхней границе планетарного пограничного слоя атмосферы и направлением трения на поверхности Земли. Аналогично, температура и влажность подстилающей поверхности находятся из уравнений, полученных линейной комбинацией уравнений бюджета тепла и влаги на поверхности суши и океана с весами, пропорциональными зональной протяженности суши и океана.

Переходя к обсуждению проблемы замыкания, заметим, что при построении зональной модели с параметризацией вторых моментов  $[a^*, b^*]$ , основанной на статистических закономерностях неопределяемых индивидуально явлений, кроме зонального усреднения, необходимо еще произвести усреднение по подходящему ансамблю реализаций. Обычно усреднение по ансамблю заменяется усреднением по времени, причем период временного усреднения выбирается заведомо меньшим годового периода: иначе невозможно учесть сезонную изменчивость инсоляции, а без нее — правильно воспроизвести даже средний годовой климат.

Представим любую зависимую переменную  $a$  в виде

$$a = [\bar{a}] + \bar{a}^* + a',$$

где  $[\bar{a}]$  — средняя зональная стационарная составляющая;  $\bar{a}^*$  и  $a'$  — стационарное и нестационарное отклонения от зонального среднего, определяемые равенствами

$$[\bar{a}^*] = 0, \quad \bar{a}' = 0,$$

черта сверху означает усреднение по времени.

Далее усредним исходную систему уравнений по времени и долготе. Поскольку в этом случае мгновенные величины должны выпадать из уравнений, вместо  $[\bar{a}]$  будем использовать обозначение  $a$ , т. е. под  $a$  будем понимать усредненное по времени среднее зональное значение любой переменной. Тогда уравнения (8.29), (8.30), (8.33) и (8.34) переписутся в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_s u}{\partial t} + \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \varphi} \{p_s (uv + [\bar{u}^* \bar{v}^*] + [\bar{u}' \bar{v}']) \cos \varphi\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} \{p_s (u\omega + [\bar{u}^* \bar{\omega}^*] + [\bar{u}' \bar{\omega}'])\} = \\ & = l p_s v + p_s [uv + [\bar{u}^* \bar{v}^*] + [\bar{u}' \bar{v}']] \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} + F_\lambda; \end{aligned} \quad (8.35)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_s v}{\partial t} + \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \varphi} \{p_s (vv + [\bar{v}^* \bar{v}^*] + [\bar{v}' \bar{v}']) \cos \varphi\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} \{p_s (v\omega + [\bar{v}^* \bar{\omega}^*] + [\bar{v}' \bar{\omega}'])\} = \\ & = -l p_s u - p_s (uv + [\bar{u}^* \bar{v}^*] + [\bar{u}' \bar{v}']) \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} - \frac{p_s}{a} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} + RT \frac{\partial p_s}{\partial \varphi} \right) + \\ & + F_\varphi; \end{aligned} \quad (8.36)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_s \Theta}{\partial t} + \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \varphi} \{p_s (\Theta v + [\bar{\Theta}^* \bar{v}^*] + [\bar{\Theta}' \bar{v}']) \cos \varphi\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} \{p_s (\Theta \omega + [\bar{\Theta}^* \bar{\omega}^*] + [\bar{\Theta}' \bar{\omega}'])\} = F_T + Q; \end{aligned} \quad (8.37)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial p_s q}{\partial t} + \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \varphi} \{p_s (qv + [\bar{q}^* \bar{v}^*] + [\bar{q}' \bar{v}']) \cos \varphi\} + \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} \{p_s (q\omega + [\bar{q}^* \bar{\omega}^*] + [\bar{q}' \bar{\omega}'])\} = F_q + C. \end{aligned} \quad (8.38)$$

Эти уравнения содержат 20 неизвестных вторых моментов. Одни из них (со штрихами) обуславливаются нестационарными синоптическими возмущениями, другие (со звездочками) — стационарными незональными движениями. Стандартный способ описания вторых моментов с помощью гипотез полуэмпирической теории турбулент-

ности (вторые моменты считаются пропорциональными градиентам соответствующих средних полей с множителями пропорциональности, имеющими смысл коэффициентов турбулентной диффузии импульса, тепла и влаги) здесь не проходит. Дело в том, что в действительности упомянутые множители пропорциональности являются сложными функциями пространственных координат, а некоторые из них, в частности возникающие при параметризации членов типа  $[\overline{u'v'}]$ , даже принимают отрицательные значения.

Более обоснованная параметризация меридионального потока зонального импульса  $[\overline{u'v'}]$  была предложена Дж. Вильямсом и Д. Девисом [58]. Они исходили из того, что синоптические процессы черпают свою энергию из доступной потенциальной энергии зональных движений, мерой которой является меридиональный градиент температуры. Соответственно поток импульса  $[\overline{u'v'}]$  был параметризован в виде

$$[\overline{u'v'}] = -k \frac{LR}{a} \frac{\partial T}{\partial \varphi}, \quad (8.39)$$

где  $L = c/\Omega$  — типичный горизонтальный масштаб синоптических возмущений;  $c$  — скорость звука;  $\Omega$  — угловая скорость вращения Земли;  $k$  — безразмерный множитель, принимаемый пропорциональным  $(z/H)^2$ ;  $z$  — вертикальная координата;  $H = c^2/(\kappa g)$  — высота однородной атмосферы;  $\kappa = c_p/c_v$  — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и постоянном объеме.

Выражение (8.39) обеспечивало возможность существования отрицательной вязкости в тех широтных зонах, в которых формируются основные струйные течения. Остальные моменты, создаваемые нестационарными синоптическими возмущениями, предлагалось определять по обычным диффузионным формулам с положительными коэффициентами виртуальной вязкости, теплопроводности и диффузии.

Другой способ параметризации вторых моментов на основе теории бароклиной неустойчивости зональной циркуляции был развит в цикле работ Дж. Грина [29], Б. Солтсмана [52] и П. Стоуна [54]. Последний предложил определять вторые моменты формулами вида

$$\begin{aligned} [\overline{u'v'}] &= -k_1 U^2 (1 + \text{Ri})^{3/2} \left[ \left( \frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{12} \right]; \\ [\overline{u'\omega'}] &= -k_2 l H U (1 + \text{Ri})^{1/2} \left[ \left( \frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]; \\ [\overline{v'\omega'}] &= -k_3 l H U (1 + \text{Ri}) \left[ \left( \frac{z}{H} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{16} \right]; \\ [\overline{\Theta'v'}] &= K_4 k U \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{(1 + \text{Ri})^{1/2}}{\text{Ri}} \frac{y}{L} \left( 1 - \frac{y}{L} \right); \end{aligned}$$



$$[\overline{\Theta' \omega'}] = k_5 l H^2 \frac{\partial \Theta}{\partial z} \frac{(1 + \text{Ri})^{1/2}}{\text{Ri}} \frac{z}{H} \left(1 - \frac{z}{H}\right), \quad (8.40)$$

где  $k_1, \dots, k_5$  — числовые множители;  $U = -\frac{gH}{lT} \frac{\partial \Theta}{\partial y}$  — зональная составляющая термического ветра;  $\text{Ri} = \frac{gH^2}{V^2 T} \frac{\partial \Theta}{\partial z}$  — число Ричардсона;  $y$  — меридиональная координата.

Оба рассмотренных выше способа параметризации содержат много произвольных гипотез. Их влияние можно ослабить, если, как это сделал А. С. Монин [16], присоединить к усредненным уравнениям гидротермодинамики уравнения для вторых моментов (так называемые уравнения Фридмана—Келлера), упрощенные путем исключения в них третьих моментов.

Наконец, еще одним, но пока не реализованным способом параметризации вторых моментов является использование выражений [20]

$$\begin{aligned} [\overline{u'v'}] &\sim R^{1/2} U \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} \right)^{1/2} F_1(\sigma, \text{Ri}, \text{Ki}, \text{Ma}, \text{Re}); \\ [\overline{v'v'}] &\sim R^{1/2} U \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} \right)^{1/2} F_2(\sigma, \text{Ri}, \text{Ki}, \text{Ma}, \text{Re}); \\ [\overline{\theta'v'}] &\sim R^{3/2} l^{-2} \left( \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right) \left| \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right| \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} \right)^{1/2} F_3(\sigma, \text{Ri}, \text{Ki}, \text{Ma}, \text{Re}); \\ [\overline{q'v'}] &\sim R^{3/2} l^{-2} \left( \frac{\partial q}{\partial y} \right) \left| \frac{\partial \Theta}{\partial y} \right| \left( \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} \right)^{1/2} F_4(\sigma, \text{Ri}, \text{Ki}, \text{Ma}, \text{Re}), \quad (8.41) \end{aligned}$$

полученных в результате обработки климатических данных на основе соображений размерности. Здесь  $\partial/\partial y = \partial/(a d\varphi)$ ;  $\text{Ri} = \sigma l^2 (\partial \Theta / \partial \sigma) / (R \partial \Theta / \partial y)^2$  — число Ричардсона;  $\text{Ki} = l^{-1} \partial U / \partial y$  — число Кибеля;  $\text{Ma} = U (g R \partial \Theta / \partial \sigma)^{-1/2}$  — параметр, близкий по смыслу к числу Маха;  $\text{Re} = U a / K$  — число Рейнольдса;  $K$  — коэффициент макровязкости, характеризующий движения с горизонтальным масштабом, меньшим заданного шага сетки.

Функции  $F_1, \dots, F_4$  в (8.41) содержат слишком много безразмерных аргументов, чтобы их можно было определить по эмпирическим данным. Однако число  $\text{Re}$  при  $K = 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$  имеет порядок  $10^3$ , а числа  $\text{Ma}$  и  $\text{Ki}$  — соответственно  $10^{-2}$  и  $10^{-1} - 10^{-2}$ . Следовательно, можно ожидать, что выражения (8.41) обладают свойством автомодельности по  $\text{Re}$ ,  $\text{Ma}$  и  $\text{Ki}$  и что, стало быть, вопрос об их использовании сводится к отысканию функций  $F_1, \dots, F_4$  от двух аргументов —  $\sigma$  и  $\text{Ri}$ .

Рассмотрим теперь вторые моменты, создаваемые стационарными незональными движениями. Для оценки их вклада в формирование зональной циркуляции примем характерные масштабы длины в горизонтальном и вертикальном направлениях и характерный временной масштаб исследуемых движений соответственно

равными  $10^6$  м, 0,2 и  $3 \cdot 10^6$  с. Характерные значения вторых моментов типа  $\overline{a^*b^*}$  и  $[\overline{a'b'}]$  заимствуем из [48], причем те из них, сведения о которых в [48] отсутствуют, оценим с помощью соотношений вида

$$[\overline{T'\omega'}] \sim [\overline{Tv'}] \frac{\partial T / \partial y}{\partial T / \partial \sigma}.$$

Аналогично, для определения эффектов горизонтальной вязкости и диффузии тепла и влаги воспользуемся оценками типа

$$F_\lambda \sim KUL^{-1}.$$

Тогда после приведения уравнений (8.35) — (8.38) к безразмерному виду и сохранения за безразмерными переменными прежних обозначений будем иметь:

$$\begin{aligned} & (10^{-2}) \frac{\partial u}{\partial t} + (10^{-2}) \frac{\partial}{\partial y} uv + (10^{-2}) \frac{\partial}{\partial y} [\overline{u^*v^*}] + (10^{-1}) \frac{\partial}{\partial y} [\overline{u'v'}] + \\ & + (0,5 \cdot 10^{-3}) \frac{\partial}{\partial \sigma} u\omega + (10^{-4}) \frac{\partial}{\partial \sigma} [\overline{u^*\omega^*}] + (10^{-4}) \frac{\partial}{\partial \sigma} [\overline{u'\omega'}] = \\ & = [1]v + (0,5 \cdot 10^{-2})uv + (10^{-2})[\overline{u^*v^*}] + (10^{-2})[\overline{u'v'}] + (10^{-1})F_\lambda; \\ & (10^{-4}) \frac{\partial v}{\partial t} + (10^{-4}) \frac{\partial}{\partial y} uv + (5 \cdot 10^{-2}) \frac{\partial}{\partial y} [\overline{v^*v^*}] + \\ & + (10^{-1}) \frac{\partial}{\partial y} [\overline{v'v'}] + (10^{-3}) \frac{\partial}{\partial \sigma} v\omega + (10^{-4}) \frac{\partial}{\partial \sigma} [\overline{v^*\omega^*}] + \\ & + (10^{-4}) \frac{\partial}{\partial \sigma} [\overline{v'\omega'}] = -(1)u + (10^{-2})uu - \\ & - (0,5 \cdot 10^{-3})[\overline{u^*u^*}] - (10^{-2})[\overline{u'u'}] - (0,5) \times \\ & \times \frac{\partial \Phi}{\partial y} - 0,5 \frac{\partial p_s}{\partial y} + (10^{-1})F_\Phi; \\ & (5 \cdot 10^{-2}) \frac{\partial T}{\partial t} + (1) \frac{\partial}{\partial y} Tv + (1) \frac{\partial}{\partial y} [\overline{T^*v^*}] + (1) \frac{\partial}{\partial y} [\overline{T'v'}] + \\ & + (10^{-1}) \frac{\partial}{\partial \sigma} T\omega + (10^{-1}) \frac{\partial}{\partial \sigma} [\overline{T^*\omega^*}] + \\ & + (10^{-1}) \frac{\partial}{\partial \sigma} [\overline{T'\omega'}] = (10^{-1})F_T + (0,5)Q; \\ & (10^{-2}) \frac{\partial q}{\partial t} + (1) \frac{\partial}{\partial y} qv + (1) \frac{\partial}{\partial y} [\overline{q^*v^*}] + \\ & + (1) \frac{\partial}{\partial y} [\overline{q'v'}] + (10^{-2}) \frac{\partial}{\partial \sigma} q\omega + \\ & + (10^{-1}) \frac{\partial}{\partial \sigma} [\overline{q^*\omega^*}] + (5 \cdot 10^{-2}) \frac{\partial}{\partial \sigma} [\overline{q'\omega'}] = (5 \cdot 10^{-2})F_q + (1)C. \quad (8.42) \end{aligned}$$

Сравнивая помещенные в круглых скобках характерные значения безразмерных параметров, приходим к следующим двум заключениям: 1) уравнения движения с достаточно высокой точностью можно заменить геострофическими соотношениями, дополненными членами, характеризующими эффект макровязкости; 2) несколько членов в уравнениях бюджета тепла и влаги имеют близкие порядки (во всяком случае различия порядков членов в этих уравнениях меньше, чем в уравнениях движения). Поэтому упрощение уравнений бюджета тепла и влаги представляется нецелесообразным.

#### 8.4. ТРЕХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ

В этом разделе мы рассмотрим трехмерные модели системы океан—атмосфера, занимающие в иерархии климатических моделей высшую ступень в смысле их сложности. Как и прежде, основное внимание мы уделим принципам построения этих моделей и их использованию при воспроизведении современного климата.

Здесь может возникнуть естественный вопрос: зачем нужно использовать модели для воспроизведения современного климата, если он и без того известен по данным наблюдений? Иными словами, зачем нужно затрачивать дополнительные усилия на выполнение уже решенной (пусть даже в первом приближении) задачи? Ответить на этот вопрос одновременно и просто, и непросто. Действительно, никакая климатическая модель никогда не будет полностью соответствовать реальной климатической системе, так что стремление понять различия и сходство между ними является непременным условием, если мы хотим, чтобы климатические модели имели, по выражению А. С. Мони́на [18], доказательную и предсказательную силу. С другой стороны, то, что хочется сделать в мечтах, и то, что удастся сделать на самом деле, по ряду причин (скажем, технического и экономического характера) могут не совпадать друг с другом. Важно понять, является ли то, что реально удастся сделать, полезным. Так вот, что касается этого вопроса, то ответ на него можно получить только после того, как будет составлено четкое представление о возможностях моделей воспроизводить современной климат.

В настоящее время прошли испытание и проверку четыре глобальные модели системы океан—атмосфера. Мы имеем в виду модели, разработанные в Лаборатории геофизической гидродинамики Принстонского университета (модель GFDL), в Институте океанологии им. П. П. Ширшова АН СССР (модель ИОАН), в Вычислительном центре Сибирского отделения АН СССР (модель ВЦ СОАН) и в Национальном центре атмосферных исследований США (модель NCAR). Этот список можно было бы продолжить, включив в него модели, либо фиксирующие температуру поверхности океана, что равносильно предположению о бесконечной теп-

лоемкости океана, либо представляющие океан в виде «болота» с нулевой или конечной теплоемкостью, служащего бесконечным источником влаги для атмосферы, но не обеспечивающего переноса тепла в меридиональном направлении. Подобного рода моделей известно много. Назовем одну из них, реализованную в Годдардском центре космических исследований США (см. [30, 31]). Обсудим каждую из перечисленных выше моделей системы океан—атмосфера в порядке их упоминания.

### Модель GFDL

Описанию ранней версии этой модели и полученных с ее помощью результатов расчета среднего годового состояния системы океан—атмосфера посвящены работы С. Манабе и К. Брайена [13] (см. также [38—40]). Обобщение этой версии модели на случай сезонной изменчивости климатической системы приводится в [40]. При изложении этих работ мы будем следовать в основном [5, 13, 18].

Модель GFDL имеет следующую структуру. Она состоит из атмосферного и океанского блоков и общей библиотеки данных, в которой происходит непрерывное обновление информации, необходимой для расчета характеристик взаимодействия между океаном и атмосферой.

Атмосферный блок включает систему уравнений гидротермодинамики, в которой независимыми переменными являются время  $t$ , долгота  $\lambda$ , широта  $\varphi$  и безразмерное давление  $\sigma = p/p_s$ . Состояние атмосферы характеризуется полями зональной  $u$  и меридиональной  $v$  составляющих скорости ветра, температуры  $T$ , удельной влажности  $q$  и давления  $p_s$  на подстилающей поверхности. Эти поля описываются уравнениями движения

$$\frac{d}{dt} p_s u = \left( l + u \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} \right) p_s v - p_s \frac{\partial \Phi}{a \cos \varphi \partial \lambda} + F_\lambda + g \frac{\partial \tau_\lambda}{\partial \sigma}; \quad (8.43)$$

$$\frac{d}{dt} p_s v = - \left( l + u \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} \right) p_s u - p_s \frac{\partial \Phi}{a \partial \varphi} + F_\varphi + g \frac{\partial \tau_\varphi}{\partial \sigma}, \quad (8.44)$$

уравнением статики

$$\Phi = \Phi_s + R \int_0^1 \frac{T}{\sigma} d\sigma, \quad (8.45)$$

уравнением тенденции для поверхностного давления

$$\frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \int_0^1 \left( \frac{\partial p_s u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} p_s v \cos \varphi \right) d\sigma = 0 \quad (8.46)$$

и уравнениями переноса тепла и влаги

$$\frac{d}{dt} p_s T = \frac{pT}{c_p \sigma} \dot{p} + \frac{g}{c_p} \frac{\partial}{\partial \sigma} (F_R + H) + p_s (Q_C + Q_P + Q_D); \quad (8.47)$$

$$\frac{d}{dt} p_s q = g \frac{\partial E}{\partial \sigma} + p_s (P_C - C + P_D); \quad (8.48)$$

здесь  $F_\lambda$ ,  $F_\varphi$ ,  $Q_D$  и  $P_D$  — члены, характеризующие соответственно горизонтальную диффузию импульса, тепла и влаги;  $\tau_\lambda$ ,  $\tau_\varphi$  — составляющие вертикального турбулентного потока импульса;  $H$  и  $E$  — вертикальные турбулентные потоки тепла и влаги;  $F_R$  — радиационный поток тепла;  $Q_C$  и  $P_C$  — нормированные притоки тепла и влаги при конвекции;  $Q_P$  — скорость изменения температуры при фазовых переходах влаги;  $C$  — скорость изменения влагосодержания при выпадении осадков;

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_s ( ) &= \frac{\partial}{\partial t} p_s ( ) + \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \lambda} ( ) p_s u + \\ &+ \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \varphi} ( ) p_s v \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial \sigma} ( ) p_s \omega \end{aligned}$$

— оператор индивидуальной производной;  $\omega$  и  $\dot{p}$  — аналоги вертикальной скорости в  $\sigma$ - и  $p$ -системах координат, определяемые диагностическими соотношениями

$$\omega = -\frac{1}{p_s} \left[ \sigma \frac{\partial p_s}{\partial t} + \int_0^\sigma \left( \frac{\partial p_s u}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial p_s v \cos \varphi}{a \cos \varphi \partial \varphi} \right) d\sigma \right]; \quad (8.49)$$

$$\dot{p} = p_s \omega + \sigma \left( \frac{\partial p_s}{\partial t} + \frac{u \partial p_s}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{v \partial p_s}{a \partial \varphi} \right). \quad (8.50)$$

Схема расчета радиационного потока  $F_R$  тепла включает описание поглощения радиации озоном, углекислым газом и водяным паром, а также описание эффектов облачности и зависимости их альbedo от высоты облачного слоя. Средние годовые поля облачности на трех ярусах и распределение озона задаются по климатическим данным. Концентрация углекислого газа считается постоянной. Альbedo подстилающей поверхности варьирует в зависимости от типа поверхности (вода, открытая поверхность суши, снег, морской и материковый лед).

Испарение на суше и влагосодержание деятельного слоя почвы находятся интегрированием прогностического уравнения для влажности почвы, учитывающего выпадение осадков, таяние снега, испарение и речной сток. При этом предполагается, что влагоемкость почвы (т. е. максимальное количество влаги, которое может сохраниться в почве) не может превосходить 15 см, а влияние влажности почвы на испарение сказывается только в том случае, когда влажность почвы меньше некоторого критического значения, со-

ставляющего 75 % влагоемкости. В этом случае испарение уменьшается на величину, пропорциональную отношению текущего и критического значений влажности почвы. Толщина снежного покрова определяется из уравнения, учитывающего накопление, сублимацию и таяние снега.

Для расчета конвекции и фазовых переходов влаги используется схема конвективного приспособления, предусматривающая вертикальное перераспределение влаги и тепла при возникновении гидростатической неустойчивости. Перераспределение производится с учетом интегрального сохранения тепло- и влагосодержания, после чего сконденсированная влага считается выпадающей в виде дождя или снега.

Эффекты горизонтального перемешивания описываются следующими образом. Члены, характеризующие горизонтальную диффузию импульса, представляются в виде произведения соответствующих компонентов тензора деформации скорости на коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости. Последний находится из условия равенства локальной генерации и диссипации турбулентной энергии, причем масштаб длины (масштаб турбулентности) принимается равным шагу сетки. Тот же коэффициент используется для определения эффекта горизонтальной диффузии тепла и влаги.

Вертикальные турбулентные потоки импульса, тепла и влаги рассчитываются с использованием полуэмпирической модели турбулентности, в которой масштаб турбулентности задается линейно растущим до высоты 75 м, а затем линейно убывающим до нуля на высоте 2,5 км (верхняя граница планетарного пограничного слоя атмосферы). Для оценки напряжения трения и турбулентных потоков явного и скрытого тепла на подстилающей поверхности привлекаются обычные диффузионные формулы с фиксированными значениями коэффициентов сопротивления и тепло- и влагообмена. Влажность водной поверхности и поверхности снега считается насыщенной. Температура почвы находится из уравнения бюджета тепла в предположении о равенстве нулю потока тепла в почву, температура поверхности океана рассчитывается в океанском блоке модели.

Уравнения атмосферного блока модели аппроксимируются их разностными аналогами на широтно-долготной сетке с 64 узловыми точками вдоль круга широты и с 19 точками вдоль меридиана (между экватором и полюсом). По вертикали атмосфера разбивается на 9 слоев со сгущением уровней в пограничном слое и в нижней стратосфере. Реальная топография земной поверхности заменяется сглаженным рельефом, учитывающим основные горные системы, а также Антарктический и Гренландский ледниковые щиты.

Океанский блок объединяет преобразованные уравнения движения

$$\frac{du}{dt} = \left( l + u \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} \right) v - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{a \cos \varphi \partial \lambda} + F_\lambda + k_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}; \quad (8.51)$$

$$\frac{dv}{dt} = - \left( l + u \frac{\operatorname{tg} \varphi}{a} \right) u - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{a \partial \varphi} + F_\varphi + k_v \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (8.52)$$

записанные в приближении Буссинеска, уравнения гидростатики

$$\partial p / \partial z = -g\rho \quad (8.53)$$

и неразрывности

$$\frac{\partial u}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial v \cos \varphi}{a \cos \varphi \partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (8.54)$$

а также уравнения переноса потенциальной температуры  $\Theta$  и солёности  $S$

$$\frac{d}{dt} (\Theta, S) = k_H \Delta (\Theta, S) + k_v \frac{\partial^2}{\partial z^2} (\Theta, S), \quad (8.55)$$

где  $\rho_0$  — средняя плотность морской воды;  $k_v$  и  $k_H$  — коэффициенты вертикального и горизонтального турбулентного обмена;  $F_\lambda$  и  $F_\varphi$  — члены, характеризующие горизонтальное трение (рассчитываются с помощью линеаризованного варианта соответствующих формул атмосферной модели);

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ( ) &= \frac{\partial}{\partial t} ( ) + \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \lambda} ( ) u + \\ &+ \frac{\partial}{a \cos \varphi \partial \varphi} ( ) v \cos \varphi + \frac{\partial}{\partial z} ( ) w; \\ \Delta ( ) &= \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} ( ) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} ( ) \right) \right] \end{aligned}$$

— операторы индивидуальной производной и Лапласа.

Для отыскания плотности  $\rho$  морской воды привлекается нелинейное уравнение состояния в форме Эккарта

$$\rho = \frac{p_0 + p_s}{1,000027 [a + b (p_0 + p_s)]}, \quad (8.56)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $p_0$  — параметры, определяемые в виде

$$a = 1779,5 + 11,25\Theta - 0,0745\Theta^2 - (3,8 + 0,01\Theta) S;$$

$$b = 0,698;$$

$$p_0 = 5890 - 38\Theta - 0,375\Theta^2 + 3S;$$

плотность измеряется в г/см<sup>3</sup>, температура — в градусах Цельсия, солёность — в промилле.

Как и в атмосферном блоке, предусматривается возможность появления гидростатической неустойчивости. Она разрешается путем конвективного приспособления, т.е. мгновенным выравниванием профилей температуры и солёности с учетом интегрального сохранения последних.

Структура верхнего слоя океана определяется, помимо конвекции, еще и ветровым перемешиванием. Его эффект описывается

в рамках локальной модели верхнего квазиоднородного слоя типа предложенной Э. Краусом и Дж. Тернером [10]. На самой поверхности используется условие равенства нулю вертикальной скорости и задаются составляющие касательного напряжения ветра и турбулентные потоки тепла и соли, определяемые в атмосферном блоке. На дне принимаются условия скольжения и обращения в нуль вертикальных потоков тепла и соли. На берегах океана нормальная к береговой черте составляющая скорости и горизонтальные потоки тепла и соли считаются равными нулю.

Система уравнений и граничных условий дополняется уравнением эволюции толщины  $h_I$  ледяного покрова

$$\frac{\partial h_I}{\partial t} + \delta \left( \frac{\partial u h_I}{a \cos \varphi \partial \lambda} + \frac{\partial v h_I \cos \varphi}{a \cos \varphi \partial \varphi} \right) = k_H \Delta h_I + I, \quad (8.57)$$

где  $I$  — скорость изменения толщины льда за счет локальных факторов (намерзания, таяния, сублимации и пр.);  $\delta$  — множитель, качественно учитывающий влияние толщины морского льда на скорость его дрейфа (этот множитель задается равным нулю при  $h_I \geq 3$  м или единице при  $h_I < 3$  м).

При конечно-разностной аппроксимации уравнений океанского блока используется стандартная шахматная сетка с более тонким разрешением вблизи западного берега. В высоких широтах, где длина шага сетки уменьшается, применяется процедура пространственного Фурье-сглаживания. По вертикали океан разбивается на 12 слоев, толщина которых неравномерно увеличивается от поверхности до дна.

Первые численные эксперименты по объединенной модели GFDL были выполнены для области, представляющей собой усеченный сферический сектор. С запада и востока он был ограничен меридианами, отстоящими друг от друга на  $120^\circ$ , с севера и юга — параллелями  $\pm 81,7^\circ$ . Зональная протяженность атмосферы и океана принималась одинаковой всюду, кроме областей высоких широт, занятых сушей. Такая конфигурация области определения решения (рис. 26) напоминает Северную и Южную Америку и Атлантический океан. В атмосфере на граничных меридианах задавалось условие цикличности, на граничных параллелях — условие скольжения. Поверхности суши и дна океана считались плоскими, глубина океана — равной 4 км.

Для преодоления трудностей, связанных с различием тепловой инерции атмосферы и океана, производилась искусственная *синхронизация*, т. е. склейка состояния океана на каждом временном шаге со сглаженным по времени состоянием атмосферы. Сглаживание осуществлялось с помощью процедуры, эквивалентной экспоненциальному фильтру с весовой функцией  $\lambda^{-1} \exp(t/\lambda)$  при  $t \leq 0$  и 0 при  $t > 0$  ( $\lambda$  — постоянная времени, равная одной неделе).

Анализ результатов интегрирования уравнений модели показал, что учет переноса тепла в океане приводит к охлаждению ат-



мосферы в низких и ее нагреванию в умеренных широтах. В свою очередь уменьшение перепада температуры между экватором и умеренными широтами вызывает ослабление зональной циркуляции и как следствие бароклинной неустойчивости атмосферы уровня кинетической энергии макротурбулентности в умеренных широтах и интенсивности меридиональной ячейки Феррела. Адвекция тепла в океане способствовала также углублению субтропического и полярного максимумов давления и барического минимума в умеренных широтах, обеспечивающего перенос нагретого над океаном воздуха на восточный берег континента.

Существование холодного экваториального апвеллинга сказалось на ослаблении осадков в тропической зоне океана и на усилении их над континентом. В субтропических и высоких широтах перенос теплой воды субтропическим круговоротом увеличил потоки явного и скрытого тепла от океана к атмосфере и количество осадков вдоль восточного берега континента; в северных широтах этот перенос обусловил появление аналогичных эффектов вдоль западного берега континента. В целом результаты расчета по объединенной модели системы океан — атмосфера оказались более реалистичными, чем по модели, в которой океан представлялся в виде «болота» с нулевой теплоемкостью.

В дальнейшем основные результаты упомянутого численного эксперимента были подтверждены более детальными расчетами, выполненными с учетом реальной геометрии континентов и океанов. Расчеты выполнялись на сетке, содержащей 9 уровней в атмосфере и 12 уровней в океане. Шаг сетки принимался равным 500 км; синхронизация состояний атмосферы и океана — 1,3 атмосферных года к 430 океанским годам.

Остановимся на результатах расчета океанских полей. Хотя установления термического режима океана так и не было достигнуто, распределение температуры в океане оказалось очень похожим на наблюдаемое (рис. 27). Удалось правильно воспроизвести также основные особенности глобального распределения солености: в Атлантике соленость получилась выше, чем в Тихом океане, а в Тихом океане она получилась на юге больше, чем на севере. Кроме того, модель правильно воспроизвела меридиональную

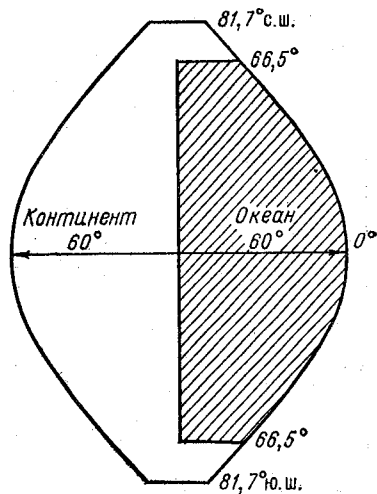


Рис. 26. Представление океана и континента в ранней версии модели GFDL.

циркуляцию в океане, образующую два круговорота с подъемом и прогревом на экваторе и опусканием холодных вод в высоких широтах. Как выяснилось, меридиональный перенос тепла достигает максимальных значений в субтропиках, где термохалинная и дрейфовая составляющие скорости течения ориентированы в одном направлении. Наоборот, в умеренных широтах, где дрейфовая и термохалинная составляющие ориентированы в противоположных направлениях, меридиональный перенос тепла ослаблен.

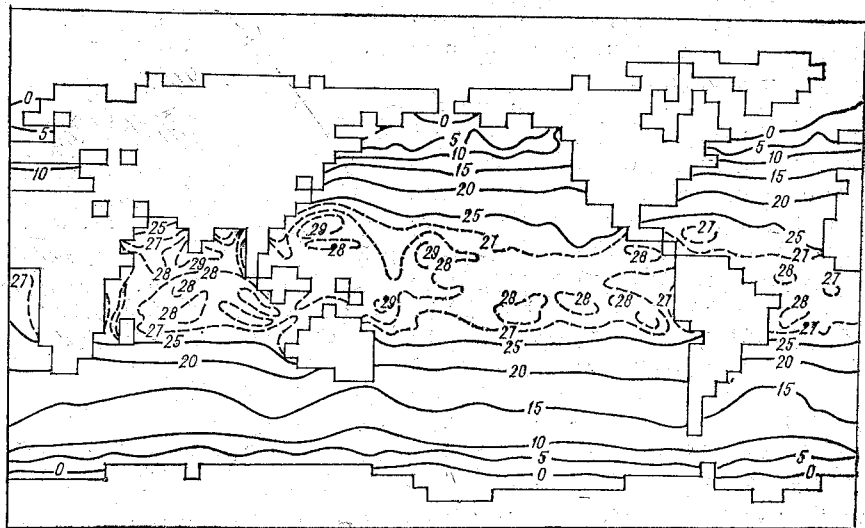


Рис. 27. Среднее годовое распределение температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) поверхности океана, по Брайену и др. [23].

Вместе с тем существуют и неизбежные расхождения между рассчитанными и наблюдаемыми полями океанских характеристик. Это касается в первую очередь завышения температуры в высоких и полярных широтах, занижения солёности, особенно отчетливо выраженного в Северной Атлантике, и ослабления интенсивности циркуляции в целом. Последнее обстоятельство, как и недооценка скорости образования холодных глубинных вод в высоких широтах, объясняется, по мнению авторов, отсутствием в модели сезонного хода инсоляции.

Учет сезонного хода инсоляции при небольшом изменении модели (коэффициенты вертикальной и горизонтальной диффузии импульса, тепла и соли в океане задавались функциями глубины, синхронизация осуществлялась приравниванием 4,2 атмосферных лет к 1200 океанским годам) улучшил воспроизведение ряда характеристик климатического режима системы океан—атмосфера, таких как распределение многолетнего льда в Арктике и снежного

покрова на континентах северного полушария. Учет сезонного хода инсоляции привел к ликвидации нереально большой толщины морского льда (теперь она составила около 3 м вместо 35 м, как это было ранее) и непрерывного накопления снега.

Весьма удовлетворительным получилось пространственно-временное распределение средней зональной приземной температуры над океанами и над сушей (рис. 28). Обратим внимание на сдвиг фаз (запаздывание) и уменьшение амплитуд сезонных колебаний приземной температуры над океаном по сравнению с их значениями над сушей в области умеренных и низких широт и на все более раннее наступление максимума по мере приближения к полюсу в высоких широтах. Последняя особенность имеет своей причиной усиление влияния морского льда, препятствующего теплообмену между океаном и атмосферой и тем самым способствующего преобразованию морского климата в континентальный.

Аналогичное заключение в смысле точности воспроизведения пространственно-временного распределения климатических характеристик можно сделать и в отношении средних (в северном и южном полушариях) значений температуры воздуха на разных высотах в атмосфере и температуры воды на разных горизонтах в верхнем слое океана. Из рис. 29 видно, что в северном полушарии, где суша занимает примерно две трети площади, амплитуда сезонных колебаний температуры воздуха увеличивается с приближением к подстилающей поверхности в основном из-за сильной изменчивости альбедо, связанной с появлением и исчезновением снега на континентах. Эта особенность не обнаруживается в южном полушарии, в котором площадь суши меньше площади океана.

Рисунок свидетельствует также об асимметрии годового хода температуры воды в верхнем слое океана: максимальные положительные отклонения температуры от ее среднего годового значения летом почти на  $0,5^{\circ}\text{C}$  больше максимальных отрицательных отклонений зимой. Ее причина — существование зимней конвекции, ограничивающей понижение температуры поверхности океана, и летнего термоклина, экранирующего теплый верхний слой от холодных глубинных слоев океана. Эта особенность хорошо воспроизводится моделью.

На рис. 30 изображены сезонные вариации теплосодержания атмосферы и океана. Даже беглого взгляда на этот рисунок достаточно, чтобы уловить несоизмеримость амплитуд сезонных колебаний в обеих средах (в океане они много больше, чем в атмосфере) и опережение сезонных колебаний теплосодержания в атмосфере по сравнению с таковыми в океане. Данные наблюдений подтверждают этот результат.

Рисунок 31 демонстрирует сезонную изменчивость меридионального переноса тепла в атмосфере и океане. Как видно, в умеренных широтах меридиональный перенос тепла в атмосфере принимает максимальные значения в начале зимы и минимальные —

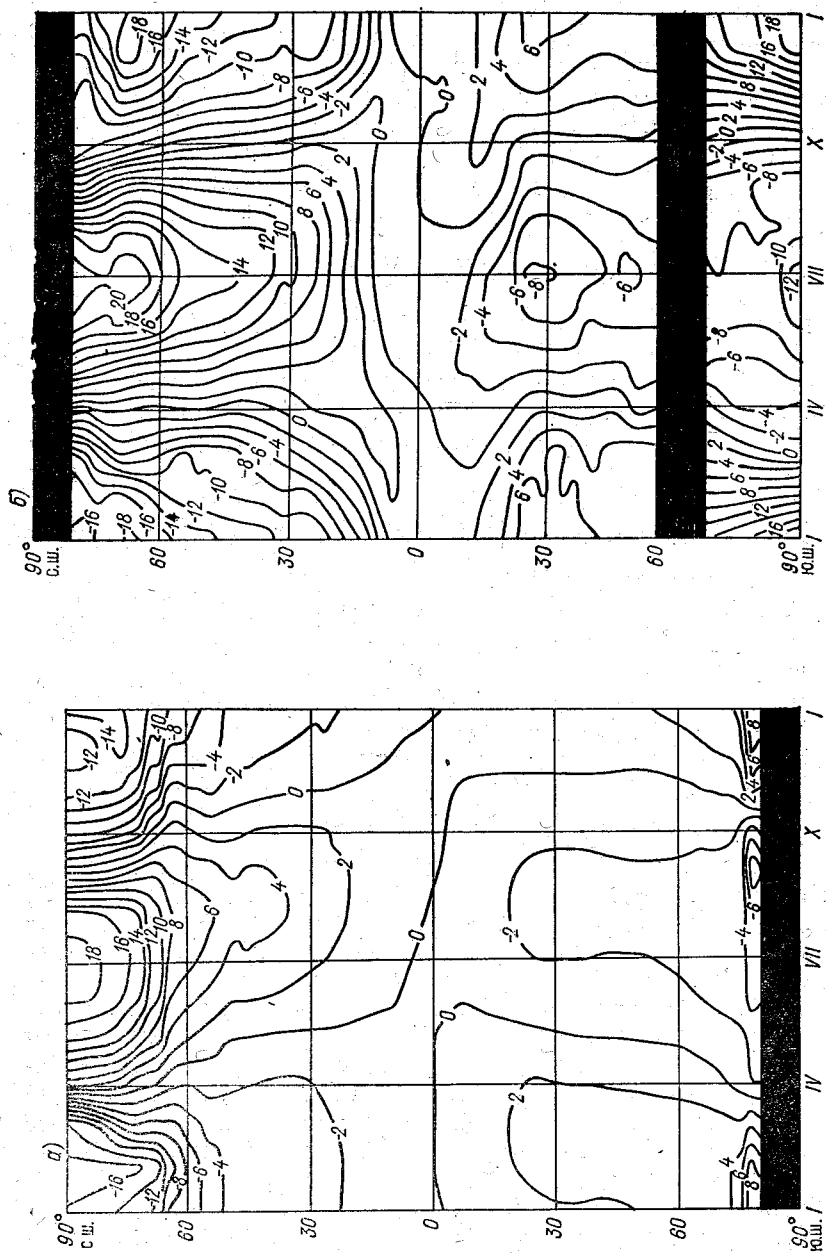


Рис. 28. Пространственно-временное распределение приземной температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) над океаном (а) и над сушей (б), по Манябе и др. [40].

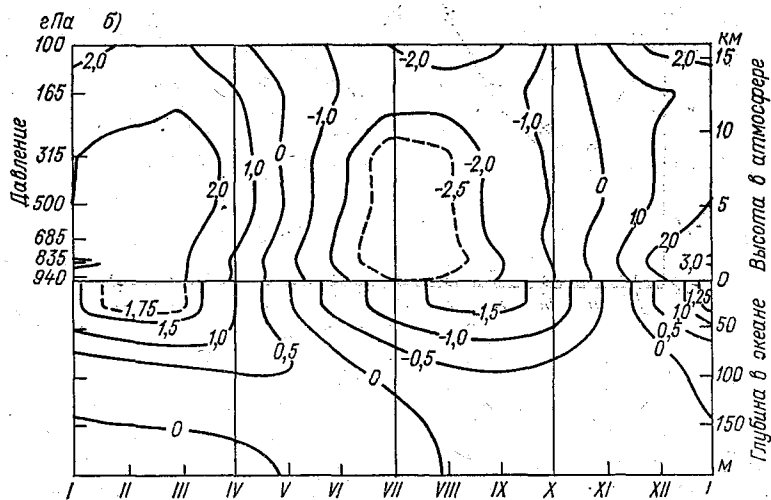
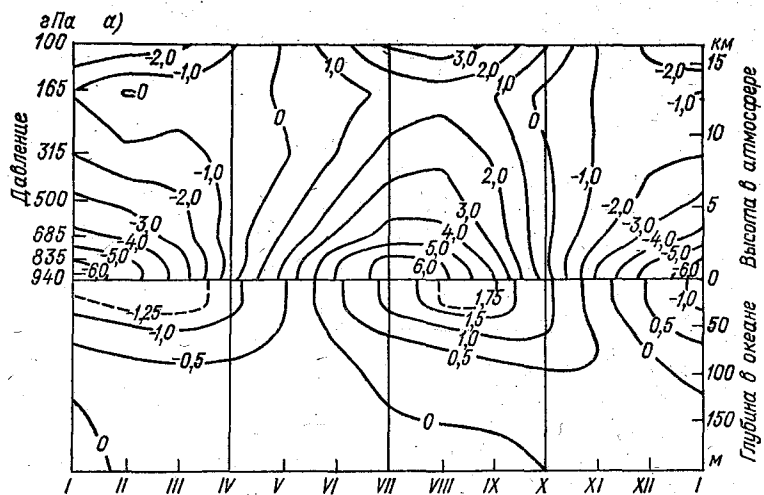


Рис. 29. Пространственно-временное распределение средних [в северном (а) и южном (б) полушариях] значений температуры ( $^{\circ}\text{C}$ ) на разных высотах в атмосфере и на разных глубинах в океане, по Манабе и др. [40].

в начале лета, главным образом благодаря соответствующим изменениям интенсивности бароклинической неустойчивости. В низких широтах меридиональный перенос тепла становится даже отрица-

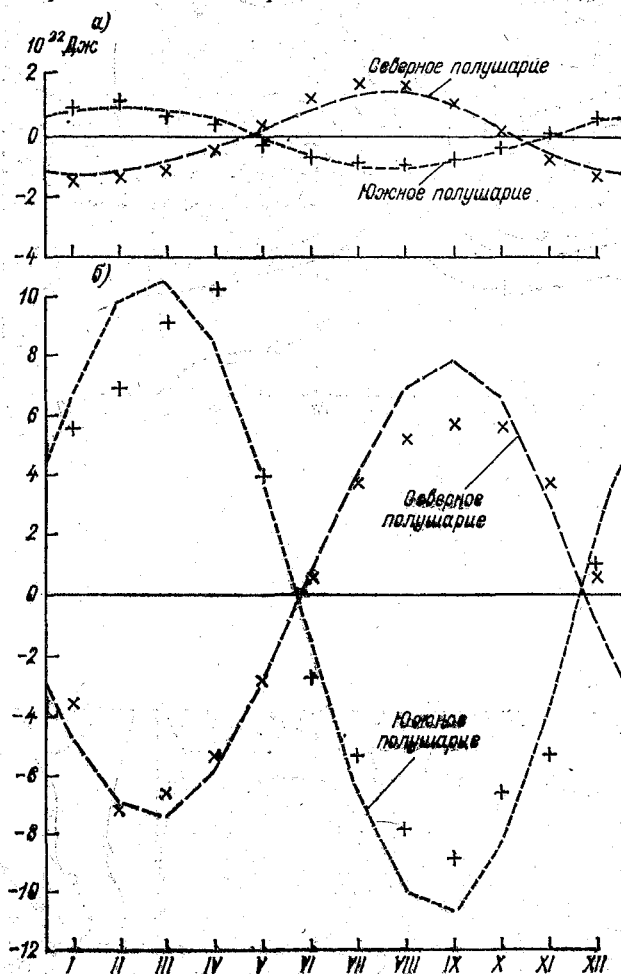


Рис. 30. Сезонная изменчивость теплосодержания ( $10^{22}$  Дж) океана (а) и атмосферы (б), по Манабе и др. [40].

Пунктир — результаты расчета, крестики — данные наблюдений.

тельным, т. е. направленным с севера на юг. В экваториальной области он осуществляется ячейкой Хэдли, транспортирующей тепло из летнего полушария в зимнее.

Полученные данные указывают на тесную связь между меридиональным переносом тепла в океане и интенсивностью зональной

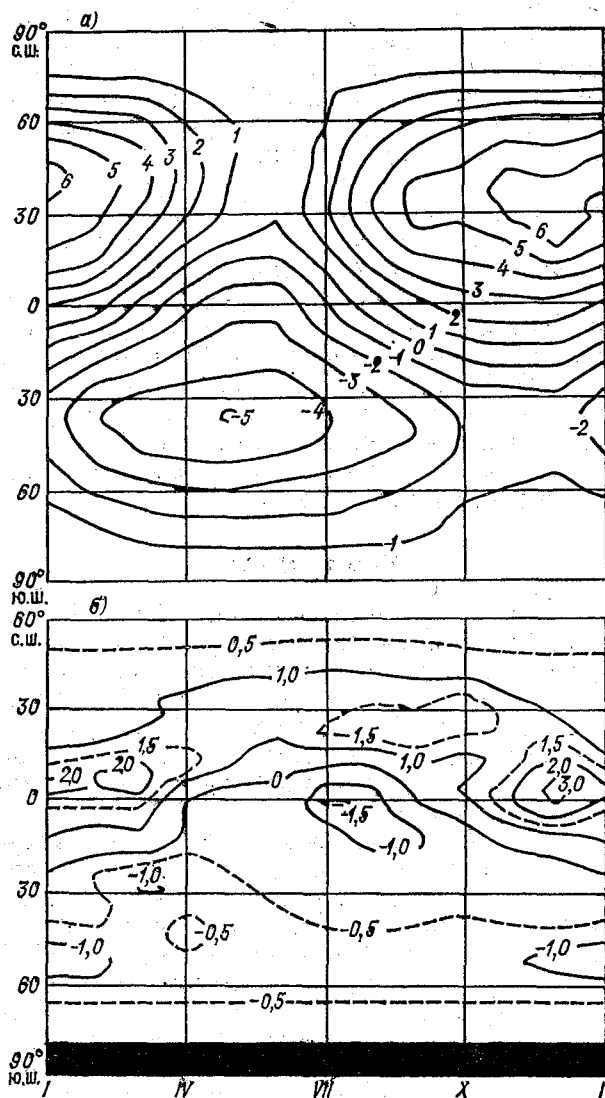


Рис. 31. Пространственно-временное распределение меридионального переноса тепла ( $10^{15}$  Вт) в атмосфере (а) и в океане (б), по Манабе и др. [40].

Положительные значения соответствуют переносу на север, отрицательные — на юг.

циркуляции атмосферы: перенос тепла к экватору происходит под действием западных ветров, к полюсу — восточных. Зимой, когда одновременно усиливаются и западные, и восточные ветры, перенос тепла к полюсу в тропических широтах океана увеличивается, а в умеренных широтах — уменьшается. Эта особенность, воспроизведенная моделью, неплохо согласуется с фактическими данными. Хуже согласуется и, главное, не поддается объяснению занижение (в несколько раз) амплитуд сезонных колебаний меридионального переноса тепла в океане.

Заниженными получились также амплитуды сезонных колебаний температуры поверхности океана в умеренных широтах северного полушария и температуры приземного слоя атмосферы в высоких широтах южного полушария. Напротив, амплитуды сезонных колебаний теплосодержания атмосферы в высоких широтах и запаса скрытого тепла в снеге и в морском льду оказались завышенными. Перечисленные расхождения объясняются авторами неточностью задания поля облачности. (в частности, из-за отсутствия данных наблюдений распределение облачности в южном полушарии принимается таким же, как в северном) и занижением расходов главных океанских течений.

### Модель ИОАН

Главным отличием этой модели от модели GFDL был отказ от искусственной синхронизации состояний океана и атмосферы и разделение океана на верхний деятельный слой, естественно синхронизируемый с атмосферой, и глубокий океан, состояние которого рассчитывается отдельно. Такой подход предназначался для описания сравнительно короткопериодных процессов, в которых состояние глубокого океана в первом приближении можно считать неизменным.

Модель состоит из четырех блоков: свободной атмосферы, планетарного пограничного слоя атмосферы, деятельного слоя океана и глубокого океана. Для воспроизведения климатического состояния свободной атмосферы используются уравнения гидротермодинамики практически в той же форме, что и в модели GFDL; различаются лишь способы параметризации физических процессов. Принятый в модели ИОАН способ параметризации мелкомасштабного взаимодействия атмосферы с подстилающей поверхностью основывается на теории подобия для экмановского пограничного слоя, причем последний считается погруженным в нижний расчетный слой, содержащий 15 % массы всей атмосферы. Временная и пространственная изменчивость этого слоя рассчитывается с помощью уравнений, а вертикальная структура принимается универсальной, т. е. такой, какой ее предсказывает теория подобия для экмановского пограничного слоя.

Расчет характеристик взаимодействия атмосферы и подстилаю-



щей поверхности производится с помощью законов сопротивления, влаго- и теплообмена с учетом влияния плотностной стратификации и изменения шероховатости подстилающей поверхности на суше. Температура подстилающей поверхности определяется из уравнения бюджета тепла; в океане это уравнение служит для определения потока тепла в воду. При наличии на поверхности океана ледяного покрова температура его верхней кромки находится, как на суше, т. е. предполагается, что лед полностью изолирует океан от атмосферы. Для постоянного ледяного покрова, к которому отнесены и многолетние льды, введено ограничение, не позволяющее температуре поверхности подниматься выше  $0^{\circ}\text{C}$ . Считается, что в этом случае результирующий поток тепла тратится на таяние льда.

В модели ИОАН используется грубое вертикальное разрешение атмосферы: она разбивается на четыре слоя с границами на высотах 1,5, 4,5 и 11 км. Зато, в отличие от модели GFDL, облачность не задается по климатическим данным, а определяется на каждом временном шаге по эмпирическим формулам [53]:

$$n_1 = -2 + \frac{10}{3} \frac{q_1}{q_{m_1}}; \quad n_2 = -0,7 + 2 \frac{q_2}{q_{m_2}};$$

$$n_3 = -0,43 + 1,73 \frac{q_3}{q_{m_3}},$$

так что суммарный балл облачности составляет

$$n = 1 - (1 - n_1)(1 - n_2)(1 - n_3).$$

Здесь  $n$  — балл облачности,  $q$  — удельная влажность;  $q_m$  — ее насыщающее значение; индексы 1, 2 и 3 указывают на принадлежность к нижнему, среднему и верхнему слоям.

В соответствии с грубым вертикальным разрешением атмосферы схема расчета радиационных притоков тепла также сильно упрощается. В ней учитываются эффекты трехслойной облачности и поглощения водяным паром. Мезомасштабная конвекция и фазовые переходы влаги рассчитываются приблизительно так же, как и в модели GFDL; однако вместо условия выравнивания с высотой относительной влажности используется условие подобия конвективного переноса удельной влажности и эквивалентно-потенциальной температуры.

Из-за необходимости экономии возможностей ЭВМ эффекты солёности в блоке деятельного слоя океана не учитываются. Не учитывается и влияние вертикальных движений, а средние по глубине деятельного слоя горизонтальные течения представляются в виде суммы климатических составляющих, заимствуемых из блока глубокого океана и дрейфовых течений, определяемых по напряжению трения ветра. Предполагается также, что термическая структура деятельного слоя океана обладает универсальностью: в нем выделяются верхний квазиоднородный слой и подстилающий его

сезонный термоклин с автомоделным распределением температуры. Температура на нижней границе деятельного слоя берется из блока глубинного слоя, а температура  $T_s$  и толщина  $h$  верхнего квазиоднородного слоя определяются из проинтегрированных по глубине деятельного слоя уравнений бюджета тепла и турбулентной энергии. С учетом гипотезы замыкания для интегральной диссипации турбулентной энергии эти уравнения записываются в виде

$$\frac{dT_s}{dt} = \frac{Q_s}{h_1 F_1} \left( 1 + \frac{c_1 F_1}{F_3} \right) - \frac{\varepsilon_s}{g \alpha_T \rho_0 h_1^2} \frac{c_1 c_3}{F_3} + k_H \Delta T_s; \quad (8.58)$$

$$\frac{dh}{dt} = - \frac{Q_s}{T_s - T_1} \frac{F_2}{F_3} + \frac{\varepsilon_s}{g \rho_0 h_1} \frac{c_3 F_1}{F_3} + k_H \Delta h, \quad (8.59)$$

где  $Q_s$  — нормированный на объемную теплоемкость морской воды результирующий поток тепла на поверхности раздела вода—воздух;  $\varepsilon_s$  — поток кинетической энергии из атмосферы в океан;  $T_1$  — температура на нижней границе деятельного слоя;  $h_1$  — толщина этого слоя, принимаемая равной 350 м;  $\rho_0$  и  $\alpha_T$  — средняя плотность и коэффициент теплового расширения морской воды;  $k_H = 2,5 \cdot 10^7$  см<sup>2</sup>/с — коэффициент горизонтальной турбулентной диффузии;  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$  — стандартные функции от аргумента  $\hat{h} = h/h_1$ , имеющие вид  $F_1 = 1 - c_1 (1 - \hat{h})$ ;  $F_2 = (1 - \hat{h}) F_1 - 0,5 + 0,5 c_4 \hat{h}^2 + c_2 (1 - \hat{h})^2$ ;  $F_3 = (c_1 - 2c_2) (1 - \hat{h}) F_1 - c_1 F_2$ ;  $c_1 \approx 0,73$ ;  $c_2 \approx 0,29$ ;  $c_3 \approx 0,13$ ;  $c_4 \approx 0,9$  — числовые константы.

Уравнения (8.58), (8.59) дополняются следующим алгоритмом, грубо описывающим влияние ледяного покрова: если температура  $T_s$ , определяемая из уравнения бюджета тепла на поверхности океана, становится ниже точки замерзания ( $-1,8^\circ\text{C}$ ) морской воды, то считается, что появляется лед, полностью изолирующий деятельный слой от атмосферы. Соответственно принимается, что  $Q_s = 0$ ,  $\varepsilon_s = 0$ , и температура верхнего квазиоднородного слоя подо льдом задается равной температуре замерзания морской воды. При этом температура  $T_s$  верхней кромки льда определяется из уравнения бюджета тепла океанской поверхности в предположении о равенстве нулю результирующего потока тепла. Как только температура  $T_s$  превысит температуру точки замерзания морской воды, считается, что лед исчезает.

В качестве блока глубокого океана используется двумерная модель общей циркуляции океана, предложенная в [6, 7]. В ее основе лежат следующие допущения: плотность морской воды зависит только от температуры; вариации последней имеют место лишь в бароклинном слое толщиной 2 км, ниже которого температура  $T_b$  фиксирована, а в самом слое она описывается выражением

$$T = T_b + A(z) \Phi(\lambda, \varphi, t),$$

где  $A(z)$  — заданная стандартная функция от глубины  $z$ ;  $\Phi(\lambda, \varphi, t)$  — искомая функция горизонтальных координат и времени,

определяемая из проинтегрированного по глубине (в пределах всей толщи океана) уравнения бюджета тепла. Фигурирующие в этом уравнении баротропные составляющие скорости находятся из уравнения для интегральной функции тока, средние по вертикали составляющие скорости дрейфового течения — из экмановских уравнений по заданному напряжению трения ветра на поверхности океана. Наконец, средние по вертикали бароклинные составляющие скорости определяются с помощью квазигеострофических соотношений. Граничные условия задаются так, чтобы обеспечить выполнение законов сохранения тепла и массы в Мировом океане.

Уравнения блока глубокого океана интегрируются на широтно-долготной сетке с шагом  $5^\circ$  от начального состояния, соответствующего состоянию покоя горизонтально-однородного (но стратифицированного по вертикали) океана, до установления равновесного режима. Составляющие напряжения трения ветра и результирующий поток тепла на поверхности океана рассчитываются по средним годовым полям атмосферного давления, температуры воздуха и радиационного бюджета на поверхности океана при фиксированном значении отношения Боуэна, равном 0,5. Напомним, что из результатов этого расчета для объединенной модели климатической системы нужны только поля горизонтальной скорости течения и температуры на нижней границе деятельного слоя.

Уравнения атмосферного блока и блока деятельного слоя океана интегрируются на сферической сетке Курихары с горизонтальным шагом около 1000 км. В качестве начальных условий задаются близкие к средним годовым меридиональные распределения температуры атмосферы и температуры верхнего квазиоднородного слоя океана, адиабатическое вертикальное распределение температуры воздуха, отсутствие ветра, а также неизменные в горизонтальной плоскости значения атмосферного давления на уровне моря, относительной влажности воздуха и толщины верхнего квазиоднородного слоя.

Расчет с естественной синхронизацией состояний атмосферы и океана был выполнен на период времени 1000 сут с учетом годового хода инсоляции. Равновесный квазипериодический режим системы атмосфера — деятельный слой океана был достигнут примерно за год. К этому времени средняя по массе тропосферы скорость ветра составила 17 м/с (в верхнем атмосферном слое — до 40 м/с), средняя температура атмосферы — 244 К, температура подстилающей поверхности — 282 К (минимальные средние месячные значения ее в Антарктиде и максимальные в северной части Африки достигали соответственно 234 и 308 К), средняя удельная влажность — 1,6 г/кг, суммарный балл облачности — 0,47, испарение и осадки — около 3,1 мм/сут, суммарный усваиваемый подстилающей поверхностью поток радиации — 470 Вт/м<sup>2</sup> (80 % этого потока, как оказалось, расходуется на длинноволновое излучение поверхности Земли, остальные 20 % — на испарение и

турбулентный теплообмен). Атмосферное давление над океаном получилось меньше, чем над сушей (994 против 1040 гПп), а температура воздуха, удельная влажность, облачность, испарение и осадки, напротив, больше (соответственно на 5 °С, 0,9 г/кг, 0,4 и 2,9 мм/сут).

Модель воспроизвела основные особенности пространственно временной изменчивости температуры атмосферы, количества осадков, испарения, облачности, составляющих бюджета тепла и вертикального потока массы на поверхности океана, равно как и характеристик

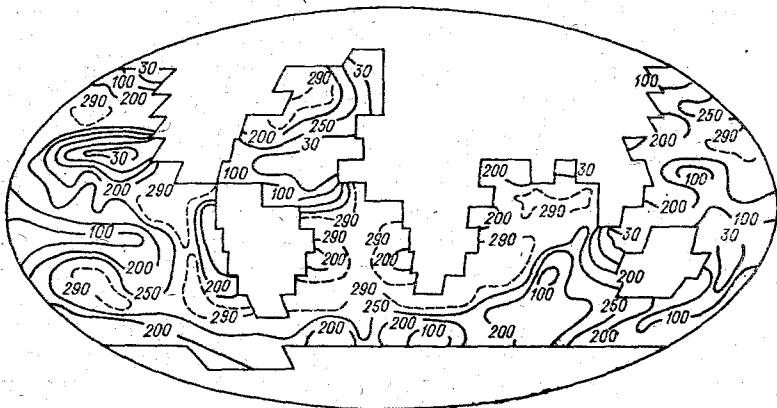


Рис. 32. Глобальное распределение толщины (м) верхнего квазиоднородного слоя океана в июле по модели ИОАН, согласно Монину [18].

верхнего квазиоднородного слоя океана — его температуру и толщину. Для подтверждения сказанного упомянем, в частности, выявленные моделью асимметрию сезонных изменений температуры воздуха относительно экватора, связанную с разным соотношением площадей суши и океана в обоих полушариях, зимний максимум осадков в районе экватора над океанами и летний максимум в тропических широтах над сушей, усиление испарения в умеренных широтах океана зимой и на суше летом, вызванное увеличением разности температур между подстилающей поверхностью и атмосферой, значительное преобладание облачности над океаном, нежели над сушей, полугодовой сдвиг фаз между сезонными колебаниями результирующего потока тепла на поверхности океана в северном и южном полушариях и, наконец, увеличение амплитуд сезонных колебаний потока массы в умеренных широтах океана и сохранение в течение всего года минимальных его значений на экваторе. Последняя особенность есть следствие малости перепада температур вода—воздух и экранирующего влияния мощной облачности.

Полученное по модели ИОАН глобальное распределение толщины верхнего квазиоднородного слоя океана приводится на рис. 32. Согласно этим и не представленным здесь данным, с началом весеннего прогрева толщина верхнего квазиоднородного слоя уменьшается до нескольких десятков метров в умеренных широтах и до 120—150 м в субтропиках. Летом ее распределение характеризуется сильной пространственной изменчивостью. В зимний период верхний квазиоднородный слой распространяется практически на весь деятельный слой океана.

### Модель ВЦ СОАН

Эта модель (ее подробное изложение можно найти в монографии Г. И. Марчука и др. [15], см. также [14]) отличается от рассмотренных выше более экономичным численным алгоритмом. В его основе лежит использование комбинации двух типов расщепления (для оператора временной производной и операторов переноса, диффузии и адвекции), обеспечивающей выполнение интегральных законов сохранения массы, углового момента, энергии (в адиабатическом приближении), влаги и пр. Здесь будет уместно подчеркнуть, что такой метод не только позволяет осуществить интегрирование с гораздо большим, чем это допускают традиционные разностные схемы, шагом по времени, но и гарантирует при прочих равных условиях достаточно хорошее воспроизведение многих характерных особенностей общей циркуляции атмосферы и океана.

Атмосферный блок модели ВЦ СОАН содержит эволюционные уравнения для зональной и меридиональной составляющих скорости ветра, температуры, удельной влажности и приземного давления, причем в целях построения абсолютно устойчивых разностных схем первые четыре уравнения «симметризируются» переходом от  $u$ ,  $v$ ,  $T$  и  $q$  к переменным  $p_s^{1/2}u$ ,  $p_s^{1/2}v$ ,  $p_s^{1/2}T$  и  $p_s^{1/2}q$ .

Параметризация горизонтальной турбулентной вязкости производится с учетом выполнения двух условий. Именно, требуется, чтобы член, описывающий горизонтальную диффузию импульса, был диссипативным и чтобы угловой момент системы сохранялся. Этим требованиям удовлетворяют следующие выражения:

$$F_\lambda = \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} k_H \pi \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} k_H \pi \cos^3 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u}{\cos \varphi} \right) \right];$$

$$F_\varphi = \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} k_H \pi \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} k_H \pi \cos^3 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{v}{\cos \varphi} \right) \right],$$

где  $k_H$  — коэффициент горизонтальной турбулентной вязкости;  $\pi = p/p_s$ .

Действительно, умножим  $F_\lambda$  на  $u$ , а  $F_\varphi$  на  $v$  и проинтегрируем по всей площади атмосферы. Тогда, например, для  $uF_\lambda$  будем иметь

$$\int u F_\lambda a^2 \cos \varphi d\lambda d\varphi = \int \frac{u}{\cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} k_H \pi \cos^3 \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u}{\cos \varphi} \right) d\lambda d\varphi =$$

$$= - \int k_H \pi \left[ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{u}{\cos \varphi} \right) \right]^2 \cos^2 \varphi d\lambda d\varphi \leq 0,$$

т. е. форма диссипативна.

Далее, умножим  $F_\lambda$  на  $\cos \varphi$  и проинтегрируем по всей площади атмосферы. В результате получим

$$\int F_\lambda a^2 \cos^2 \varphi d\lambda d\varphi = 0,$$

откуда следует сохранение углового момента.

Горизонтальная турбулентная диффузия тепла и влаги параметризуется традиционным образом:

$$F_{T, q} = \frac{1}{a^2 \cos^2 \varphi} \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( k_H \pi \frac{\partial}{\partial \lambda} T, q \right) + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( k_H \pi \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} T, q \right) \right].$$

Схема параметризации планетарного пограничного слоя атмосферы сводится к выделению логарифмического слоя и расположенного над ним хорошо перемешанного слоя, в котором скорость ветра, температура и влажность остаются неизменными по высоте. Одновременно предполагается, что положение верхней границы планетарного пограничного слоя совпадает с ближайшим к подстилающей поверхности расчетным уровнем в атмосфере, а угол между вектором скорости ветра в перемешанном слое и напряжением трения на поверхности остается неизменным и равным  $30^\circ$  во внетропической области над сушей,  $20^\circ$  над океаном и  $10^\circ$  над льдом. В тропиках этот угол принимается равным нулю.

Для оценки турбулентных потоков импульса, тепла и влаги на поверхности океана используются обычные диффузионные формулы с коэффициентами сопротивления и теплообмена вида

$$C_D = C_D^0 = \begin{cases} 0,0005 v_h^{1/2} & \text{при } v_h \leq 15 \text{ м/с,} \\ 0,026 & \text{при } v_h > 15 \text{ м/с;} \end{cases}$$

$$C_H = C_H^0 = \begin{cases} C_D/1,2 & \text{при } v_h < 5 \text{ м/с,} \\ C_D/1,0 & \text{при } 5 < v_h < 10 \text{ м/с,} \\ C_D/0,7 & \text{при } v_h > 10 \text{ м/с} \end{cases}$$

при нейтральной стратификации и

$$\begin{Bmatrix} C_D \\ C_H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_D^0 \\ C_H^0 \end{Bmatrix} f(Ri)$$

при устойчивой ( $Ri < 0$ ) и неустойчивой ( $Ri > 0$ ) стратификации. Здесь  $Ri$  — число Ричардсона, определяемое перепадом температур в приземном слое и скоростью ветра  $v_h$  на его верхней границе,

$$f(Ri) = \begin{cases} 1 + 3Ri & \text{при } Ri < 0, \\ 1 + 0,65 Ri^{1/2} & \text{при } Ri > 0. \end{cases}$$

Был реализован и другой вариант расчета  $C_D$  и  $C_H$ . Он основывался на теории подобия Монина—Обухова для приземного слоя с эмпирическими универсальными функциями, предусматривающими переход в формулы закона «степени —  $1/3$ » при режиме свободной конвекции. Для суши и льда коэффициенты сопротивления и теплообмена задавались равными 0,002. Эффект стратификации учитывался умножением этих коэффициентов на  $f(Ri)$ .

Температура  $T_h$  и влажность  $q_h$  на верхней границе приземного слоя определялись из условия непрерывности потока псевдопотенциальной температуры на этой границе, т. е.

$$-C_H v_h (\Theta_h - \Theta) = -k_1 \frac{\Theta_1 - \Theta_h}{z_1 - z_h},$$

где  $k_1 = \alpha v_h$  — коэффициент вертикальной диффузии тепла,  $\alpha \approx 1$  м — числовая константа, индекс «1» указывает на принадлежность к ближайшему (относительно земной поверхности) расчетному уровню в атмосфере.

Параметризация процессов конвективного приспособления и крупномасштабной конденсации осуществлялась аналогично принятой в модели GFDL. Балл облачности рассчитывался с помощью приведенных выше эмпирических соотношений. Толщина облаков, их альbedo и поглощательная способность, а также альbedo океанской поверхности и льдов, концентрация озона и углекислого газа считались фиксированными. Альbedo поверхности суши определялось как функция от толщины снежного покрова в водном эквиваленте.

Океанский блок модели ВЦ СОАН включал полную систему уравнений гидротермодинамики океана, мало отличающуюся от принятой в модели GFDL. Другим зато был метод решения. В качестве такового использовался метод расщепления сложного пространственного оператора задачи на ряд более простых и эффективно реализуемых на ЭВМ. Как и в модели GFDL, вводилась искусственная синхронизация состояний атмосферы и океана. При этом один атмосферный год приравнивался приблизительно 100 океанским годам. Время обмена информацией между атмосферным и океанским блоками выбиралось соответствующим характерному времени  $\tau$  перемешивания в верхнем квазигомогенном слое океана толщиной 100 м. При  $\tau = 14$  сут и шаге по времени, равном 40 мин в атмосфере и 2 сут в океане, обмен информацией производился через каждые 6 атмосферных и 7 океанских шагов, причем все атмосферные данные, передаваемые в океанский блок, сглаживались по времени с помощью разностного аналога экспоненциального фильтра.

Описанная модель была испытана применительно к средним январским условиям. Расчет производился в два этапа. Сначала рассчитывался равновесный режим циркуляции атмосферы при фиксированной температуре поверхности океана и заданном рас-

пределении морских и континентальных льдов. Затем подключался океанский блок, содержащий 4 уровня по вертикали. Последние располагались на горизонтах 100, 500, 1500 и 3000 м. Общая продолжительность счета составила 11 океанских лет или приблизительно 2 атмосферных месяца.

Анализ полученных результатов выявил общее понижение температуры воды в океане северного полушария и ее повышение

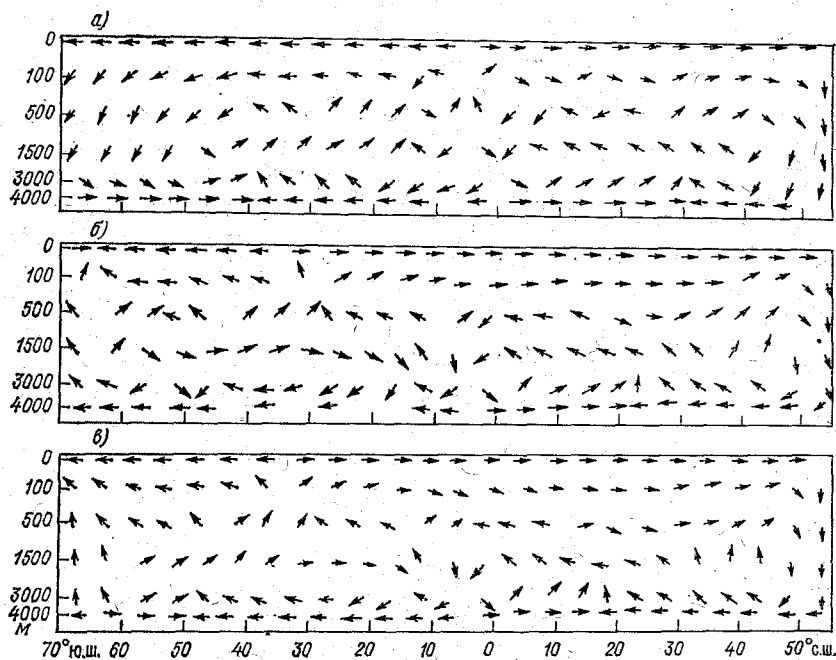


Рис. 33. Перестройка меридиональной циркуляции океана по модели ВЦ СОАН, согласно Марчуку и др. [15].

а — начальный момент времени; б — через 9 и в — через 11 лет модельного времени

в умеренных и высоких широтах южного полушария. Это, естественно, сказалось на атмосферной циркуляции. В частности, произошло смещение тропического пояса осадков примерно на  $10^\circ$  к югу, уменьшение (особенно в южном полушарии) меридионального градиента температуры, уменьшение (приблизительно на 25 %) доступной потенциальной энергии, скорости ее превращения в кинетическую энергию и диссипации последней, усиление прямой ячейки Хэдли в северном полушарии и ослабление обратной ячейки Феррела в обоих полушариях, уменьшение касательного напряжения ветра и углубление центров низкого давления над континентами южного полушария.

Учет эффектов взаимодействия океана и атмосферы повлек за



собой такую последовательность событий. Сначала у западных берегов Тихого океана и в северо-западной части Индийского океана возникли отрицательные аномалии температуры воды, обусловившие появление сильных западных пограничных течений и усиление апвеллинга. Это в свою очередь привело к интенсификации меридиональной циркуляции, сглаживанию горизонтальных градиентов температуры воды и ослаблению взаимодействия между океаном и атмосферой. О характере перестройки циркуляции в океане можно судить на основании рис. 33. Как видно, в начальный момент времени (фрагмент а) меридиональная циркуляция в Мировом океане определяется опусканием вод в высоких широтах и в области влияния субтропического антициклонического круговорота и их подъемом в умеренных широтах северного полушария (между 40 и 60° с. ш.) и в районе экватора. По прошествии 9 лет модельного времени (фрагмент б) область даунвеллинга в высоких широтах северного полушария и область апвеллинга в субтропических широтах южного полушария значительно расширились, сократив тем самым меридиональную протяженность области апвеллинга в тропических широтах северного полушария и области даунвеллинга в районе Антарктиды. В конце 11-го года (фрагмент в) вблизи Антарктиды образовалась зона подъема холодных глубинных вод, обострившая меридиональный градиент температуры в поверхностном слое Южного океана.

### Модель NCAR

Эта модель отличается от модели GFDL главным образом дискретизацией уравнений атмосферного блока в вертикальном направлении, параметризацией физических процессов подсеточного масштаба и способом синхронизации состояний атмосферы и океана. В модели NCAR атмосфера разбивается на 8 слоев трехкилометровой толщины каждый. Соответственно модифицируются методы расчета радиационных притоков, облачности и турбулентных потоков импульса, тепла и влаги на подстилающей поверхности, а также температуры последней. В частности, при расчете радиационных притоков используются более точные функции поглощения коротковолновой радиации и функции пропускания длинноволновой радиации и учитывается отличие поглощающих свойств различных типов подстилающей поверхности. Суточный ход инсоляции описывается явно. Количество облаков нижнего и среднего ярусов определяется по эмпирическим соотношениям типа тех, которые приводились выше. Основание облаков нижнего яруса располагается на высоте 1,5 км, вершина — фиксируется. Облака среднего яруса считаются бесконечно тонкими. Количество облаков верхнего яруса задается по климатологическим данным, их основание помещается на высоте 10,5 км над экватором и 7,5 км над полюсами, толщина задается равной 1,5 км.

Турбулентные потоки импульса, тепла и влаги рассчитываются с учетом зависимости коэффициентов сопротивления и теплообмена от стратификации приземного слоя атмосферы, а температура подстилающей поверхности — с учетом характера этой поверхности. Выделены четыре типа подстилающей поверхности: океанская поверхность; поверхность морского льда, покрытая и не покрытая растительностью поверхность суши. В свою очередь поверхность морского льда и не покрытая растительностью поверхность суши различаются в зависимости от того, покрыты они снегом или нет и какова влажность почвы. Каждому типу и подтипу подстилающей поверхности приписывается свое значение альбедо, причем оно считается функцией от толщины снега и зенитного угла Солнца. При наличии растительности учитываются различия температуры растительного покрова и подстилающей поверхности, транспирации и испарения с почвы, а также трансформация вертикальной структуры поля ветра в растительном покрове. Подробное описание атмосферного блока модели NCAR приводится в [1, 57].

Океанский блок модели NCAR почти не отличается от используемого в модели GFDL. По сравнению с последней в модели NCAR исключены эффекты горизонтального переноса и трения в уравнении, описывающем эволюцию толщины морского льда (тем самым модель морского льда становится чисто термодинамической), заданы другие значения коэффициентов горизонтальной и вертикальной турбулентной диффузии тепла и импульса, иначе произведена дискретизация океана в вертикальном направлении: он разделяется на 4 слоя толщиной (сверху вниз) 50, 450, 1500 и 2000 м.

Принятый в модели NCAR способ синхронизации состояний атмосферы и океана сводится к следующему. Уравнения океанского блока модели интегрируются при фиксированных для четырех месяцев (январь, апрель, июнь и октябрь) значениях атмосферных параметров на период времени, равный 5 годам. Полученные в последний год этого периода значения температуры подстилающей поверхности и площади морского льда используются в качестве исходной информации при интегрировании уравнений атмосферного блока отдельно для каждого из четырех указанных выше месяцев. Найденные значения атмосферных параметров считаются исходными при интегрировании уравнений океанского блока в течение второго пятилетнего периода. Затем вновь находятся атмосферные параметры, отвечающие каждому из четырех месяцев годового цикла, и так до установления квазиравновесного режима во всех звеньях системы океан—атмосфера. По оценкам Вашингтона и др. [57], этот способ синхронизации (его схематическое изображение приводится на рис. 34) с вычислительной точки зрения эффективнее апробированного в модели GFDL приблизительно в 10 раз.

Полученные в конце четвертого пятилетнего периода значения

средней зональной температуры воздуха, усредненной вдоль круга широты зональной составляющей скорости ветра, температуры поверхности океана, скорости течения в верхнем 50-метровом слое океана и, наконец, вертикальной скорости на границе раздела между этим и подстилающим его 450-метровым слоем представлены на рис. 35—39.

Как видно, рассчитанные и наблюдаемые широтно-высотные распределения средней зональной температуры воздуха качественно близки друг другу. Однако в количественном отношении

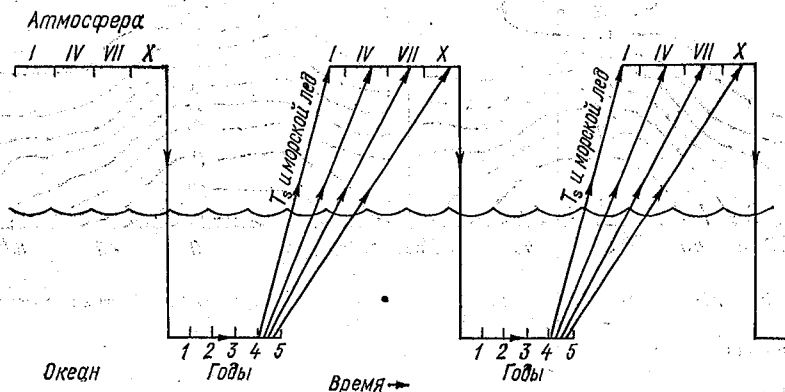


Рис. 34. Схематическое представление способа синхронизации состояний атмосферы и океана в модели NCAR, по Вашингтону и др. [57].

они заметно различаются между собой. То же самое можно сказать и применительно к усредненной вдоль круга широты зональной составляющей скорости ветра. Так, в январе нулевая изотерма пересекает земную поверхность на широте  $38^{\circ}$  с. по результатам расчета и  $50^{\circ}$  с. по данным наблюдений. Это указывает на занижение рассчитанных значений температуры воздуха в северном полушарии зимой. Далее, по результатам расчета летняя температура воздуха на всех уровнях в тропосфере имеет максимум в районе  $40\text{--}50^{\circ}$ , что не подтверждается данными наблюдений. Отметим также завышение меридионального градиента температуры воздуха в северном и южном полушариях, смещение экваториального пояса восточных ветров в южное полушарие зимой и в северное полушарие летом и значительные расхождения (как по величине, так и по направлению) рассчитанных и наблюдаемых скоростей ветра в высоких широтах южного полушария.

Модель правильно воспроизводит основные особенности сезонной изменчивости температуры поверхности океана и местоположения термического экватора. Вместе с тем горизонтальные градиенты температуры в районе Гольфстрима и Күросио получились зани-

женными, а сами значения температуры в субтропиках и в умеренных широтах океана — завышенными по сравнению с наблюдаемыми. Первое обстоятельство имеет своей причиной грубое (5-гра-

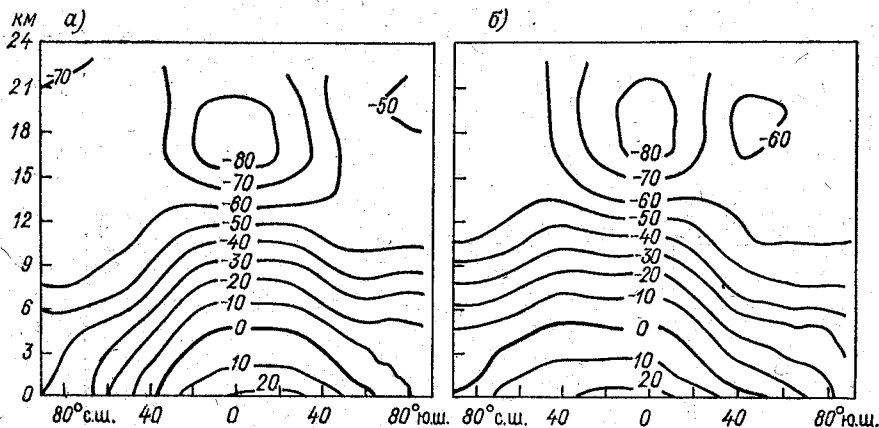


Рис. 35. Широтно-высотное распределение средней зональной температуры воздуха, по Вашингтону и др. [57].

а — январь, б — июль.

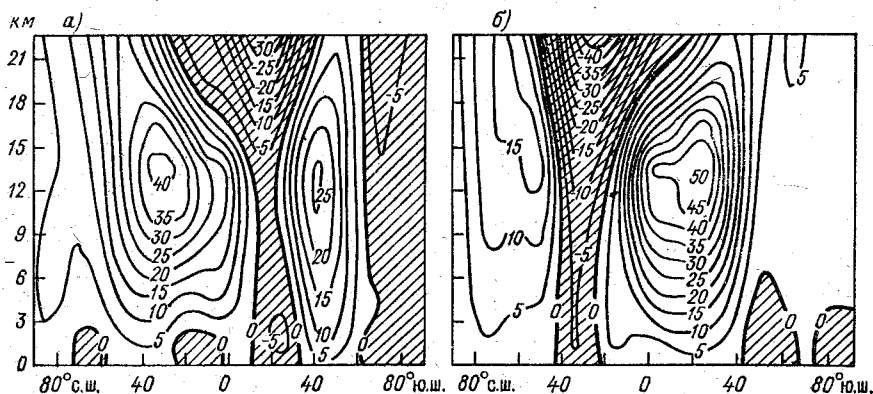


Рис. 36. Широтно-высотное распределение средней зональной  $u$ -составляющей скорости ветра, по Вашингтону и др. [57].

а — январь, б — июль.

дусное) разрешение сетки, второе — занижение скорости ветра и связанное с ним ослабление интенсивности теплообмена между океаном и атмосферой и переноса тепла дрейфовыми течениями. Обратим внимание на существенное завышение температуры поверхности в Южном океане, повлекшее за собой уменьшение пло-

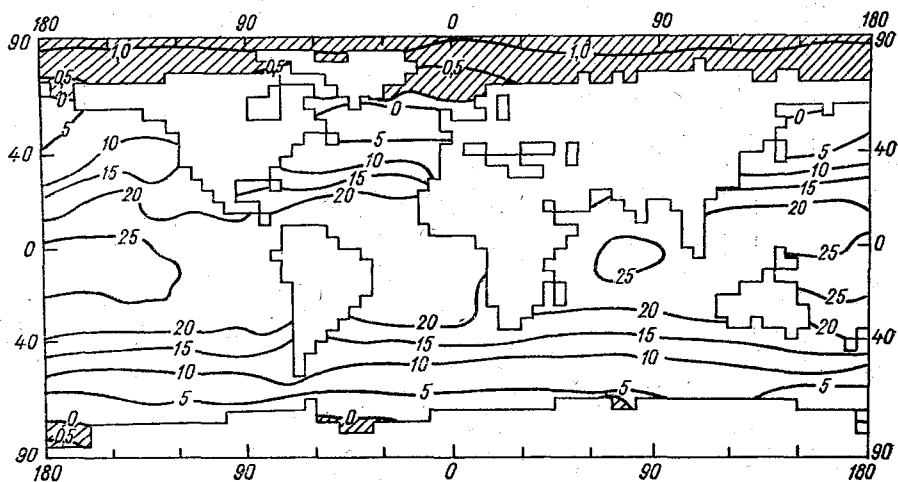


Рис. 37. Глобальные распределения температуры поверхности океана в январе, по Вашингтону и др. [57]. Штриховкой отмечена площадь морского льда.

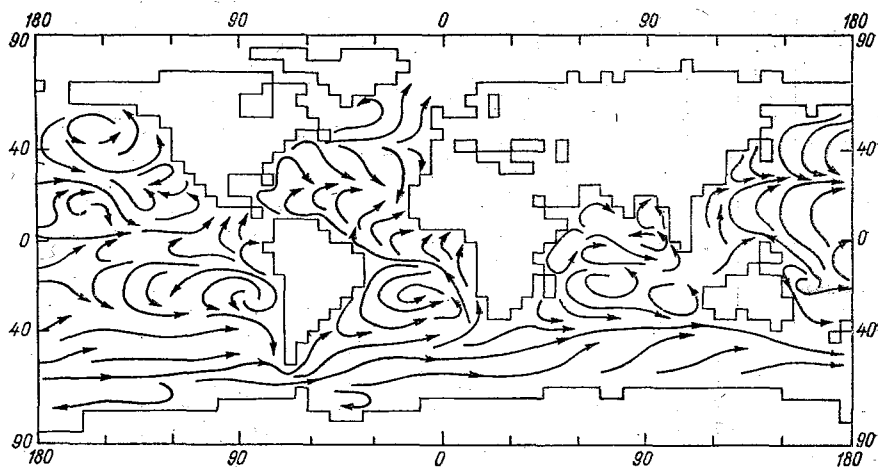


Рис. 38. Глобальное январское распределение скорости течения в верхнем 50-метровом слое океана по модели NCAR, согласно Вашингтону и др. [57]

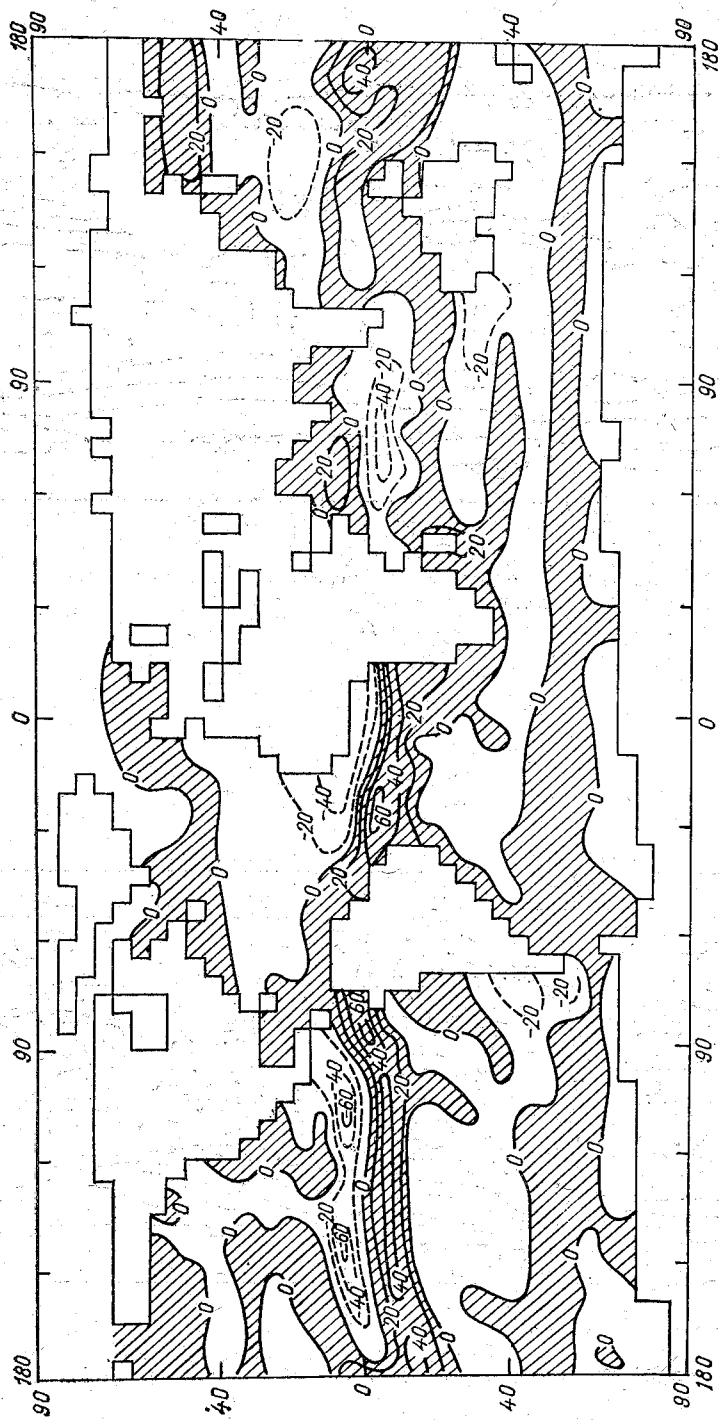


Рис. 39. Глобальное распределение скорости вертикальных движений ( $10^{-5}$  см/с) на глубине 50 м, по Вашингтону и др. [57].

щади морского льда вокруг Антарктиды. По мнению авторов модели [57], это вызвано теми же причинами и заданием чрезмерно большого значения коэффициента горизонтальной турбулентной диффузии тепла.

Качественное соответствие рассчитанных и наблюдаемых полей течений также можно признать удовлетворительным. Достаточно сказать, что на расчетных полях четко выявляются Антарктическое циркумполярное течение, Гольфстрим, Куроисио, Восточно-Австралийское, Калифорнийское и Бенгельское течения. Направленные на запад экваториальные течения в Атлантическом и Тихом океанах обнаруживаются во втором расчетном слое, а узкое тихоокеанское экваториальное противотечение — в первом. Некоторые течения (Мыса Игольного и Лабрадорское) вообще не представлены на расчетных картах из-за грубого горизонтального разрешения сетки. Естественно, что и скорости всех течений оказались меньше наблюдаемых примерно в 3 раза.

Буквально все сказанное выше можно повторить и в отношении скорости вертикальных движений. Модель хорошо воспроизвела интенсивный экваториальный апвеллинг и расположенные на  $15-20^\circ$  к северу и к югу от него области даунвеллинга. Экстремальные скорости восходящих движений в обоих случаях (по результатам расчета и данным наблюдений) отмечаются в восточной части Тихого океана. Однако рассчитанные значения вертикальной скорости в области прибрежного апвеллинга оказываются значительно меньше наблюдаемых. Причина та же — грубое пространственное разрешение сетки.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Вернемся к началу и вновь спросим себя: являются ли результаты модельных расчетов полезными? Ответ на этот вопрос однозначен. Да, несмотря на плохое в ряде случаев согласование с эмпирическими данными, модели позволили воспроизвести наиболее характерные особенности современного состояния климатической системы океан—атмосфера и, следовательно, могут быть использованы при решении одной из самых насущных проблем — оценки антропогенных изменений климата. Решение этой проблемы предполагает, что модели должны достигать высокого уровня сложности, т. е. из всей иерархии климатических моделей, предпочтение должно быть отдано трехмерным моделям. Однако в основе всех этих моделей лежит неявное предположение об интранзитивности (детерминистичности) климата — предположение, которое уже само по себе противоречит определению климата как статистического ансамбля состояний системы атмосфера—океан, реализуемых за достаточно большой промежуток времени.

Разумеется, с помощью трехмерных моделей в принципе можно попытаться проверить и концепцию интранзитивности, но если

учесть связанные с этим непомерно большие затраты машинного времени, то заранее станет ясно, что такая попытка обречена на неудачу. Мало того, необходимо помнить, что любая модель воспроизводит реальную картину мира только в рамках, обусловленных ограниченностью наших знаний о происходящих в нем процессах. Итак, использование существующих трехмерных моделей еще не гарантирует успешности прогноза изменений климата. Но, быть может, тогда имеет смысл привлечь более простые модели?

Этот путь привлекателен в двух отношениях. Во-первых, он избавляет от перерасхода дефицитного машинного времени и, во-вторых, позволяет сравнительно просто выделить и понять природу внутренних механизмов, управляющих поведением климатической системы. Однако чем проще модель, тем больше процессов она описывает в параметризованной форме. Но, как тонко подметил Э. Лоренц [12], «очень опасно доверять моделям, поведение которых слишком зависит от деталей параметризации». К тому же в основе любой параметризации лежат эмпирические данные, и потому, даже если эта параметризация применима для современного периода, распространение ее на другие периоды, строго говоря, не обосновано.

Остается одно — усовершенствовать климатические модели, которые, несмотря на все свои недостатки, остаются лучшим и, может быть, даже единственным инструментом познания причин естественных и антропогенных изменений климата. С этой целью необходимо:

- 1) стохастизировать модели, включив в них описание более близких к действительности статистических связей между параметрами климатической системы;

- 2) улучшить параметризацию механизмов обратных связей в атмосфере и океане, в частности между радиацией и облачностью, радиацией и гидрологическим циклом (обратная связь между альбедо и влагосодержанием почвы), между турбулентностью и упорядоченными движениями, между синоптическими вихрями и крупномасштабной циркуляцией океана, уточнить описание динамики криосферы, растительного покрова и пр.;

- 3) отказаться от искусственной синхронизации состояний атмосферы и океана, имея в виду, что такая синхронизация оправдана лишь для получения квазиравновесного режима климатической системы, но не ее эволюции;

- 4) исследовать статистическую значимость результатов моделирования при заданных изменениях внутренних и внешних параметров моделей.

Список необходимых усовершенствований можно было бы продолжить. Приведут ли все эти усовершенствования к успеху — покажет будущее.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вашингтон У., Вильямсон Д. Описание моделей глобальной циркуляции Национального центра атмосферных исследований.— В сб.: *Модели общей циркуляции атмосферы*. Пер. с англ. Л., Гидрометеоздат, 1981, с. 133—196.
2. Вийн-Нильсен А. Предсказуемость и изменения климата, иллюстрированные с помощью системы низкого порядка.— В сб.: *Теоретические основы прогноза погоды на средние сроки*. Пер. с англ. Л., Гидрометеоздат, 1979, с. 105—117.
3. Голицын Г. С. Введение в динамику планетных атмосфер.— Л.: Гидрометеоздат, 1973.— 103 с.
4. Зилитинкевич С. С., Монин А. С. Глобальное взаимодействие атмосферы и океана.— Л.: Гидрометеоздат, 1977.— 23 с.
5. Зилитинкевич С. С., Монин А. С., Чаликов Д. В. Взаимодействие океана и атмосферы.— В кн.: *Физика океана*, т. I. Гидрофизика океана. М. Наука, 1978, с. 208—339.
6. Каган Б. А., Лайхтман Д. Л., Оганесян Л. А., Пясковский Р. В. Двумерная термическая модель Мирового океана.— Изв. АН СССР, Физика атмосферы и океана, 1974, т. 10, № 10, с. 1118—1122.
7. Каган Б. А., Лайхтман Д. Л., Оганесян Л. А., Пясковский Р. В. Численный эксперимент по общей циркуляции океана.— *Океанология*, 1975, т. 15, вып. I, с. 5—11.
8. Каган Б. А., Цанкова И. С. Пространственно-временная изменчивость теплосодержания в Мировом океане.— *Метеорология и гидрология*, 1986, № 11, с. 111—114.
9. Каган Б. А., Цанкова И. С. Пространственно-временная изменчивость меридионального переноса тепла в Мировом океане.— *Метеорология и гидрология*, 1987, № 4, с. 66—71.
10. Краус Э., Тернер Дж. Одномерная модель сезонного термоклина. II. Общая теория и ее следствия.— В сб.: *Формирование структуры и флуктуации верхнего термоклина в океане*. Пер. с англ. Л., Гидрометеоздат, 1971, с. 44—48.
11. Лоренц Э. Н. Природа и теория общей циркуляции атмосферы. Пер. с англ.— Л.: Гидрометеоздат, 1970.— 259 с.
12. Лоренц Э. Н. Предсказуемость климата.— В сб.: *Физические основы теории климата и его моделирования*. Пер. с англ. Л., Гидрометеоздат, 1977, с. 137—141.
13. Манабе С., Брайен К. Климат и циркуляция океана. Пер. с англ.— Л.: Гидрометеоздат, 1972.— 190 с.
14. Марчук Г. И. и др. Математическая модель общей циркуляции атмосферы и океана.— Докл. АН СССР, 1980, т. 253, № 3, с. 577—581.
15. Марчук Г. И., Дымников В. П., Залесный В. Б. и др. Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана.— Л.: Гидрометеоздат, 1984.— 320 с.
16. Монин А. С. О свойствах симметрии турбулентности в приземном слое воздуха.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1965, т. 1, № 1, с. 45—54.
17. Монин А. С. Прогноз погоды как задача физики.— М.: Наука, 1969.— 184 с.
18. Монин А. С. Введение в теорию климата.— Л.: Гидрометеоздат, 1982.— 246 с.
19. Физические основы теории климата и его моделирования.— Л.: Гидрометеоздат, 1977.— 271 с.
20. Чаликов Д. В. Зональные модели атмосферы.— Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1982, т. 18, № 12, с. 1247—1255.
21. Вгуан К. Measurements of meridional heat transport by ocean currents.— *J. Geophys. Res.*, 1962, vol. 67, N 9, p. 3403—3414.

22. Bryan K., Lewis L. J. A water mass model of the World Ocean.— *J. Geophys. Res.*, 1979, vol. 84, N C5, p. 2503—2517.
23. Bryan K., Manabe S., Pacanowski R. C. A global ocean—atmosphere climate model. Part II. The oceanic circulation.— *J. Phys. Oceanogr.*, 1975, vol. 5, p. 30—46.
24. Budyko M. I. The effect of solar radiation variations on the climate of the Earth.— *Tellus*, 1969, vol. 21, N 5, p. 611—619.
25. Calahan R. F., North G. R. A stability theorem for energy-balance climate models.— *J. Atm. Sci.*, 1979, vol. 36, N 7, p. 1205—1216.
26. Campbell G. G., Vonder-Haar T. H. Climatology of radiation budget measurements from satellites.— *Atm. Sci. Paper N 323*, Dept. Atm. Sci., Colorado State Univ., Fort Collins, 1980.
27. Carissimo B. C., Oort A. H., Vonder-Haar T. H. Estimating the meridional energy transport in the atmosphere and ocean.— *J. Phys. Oceanogr.*, 1985, vol. 15, N 1, p. 82—91.
28. Faegre A. An intrapsive model of the Earth—atmosphere—ocean system.— *J. Appl. Meteorol.*, 1972, vol. 11, N 1, p. 4—6.
29. Green J. S. Transfer properties of the large-scale eddies and the general circulation of the atmosphere.— *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 1970, vol. 96, N 408, p. 157—185.
30. Hansen J., Lacis A., Rind D. e. a. Climate sensitivity: analysis of feedback mechanisms.— In: *Climate processes and climate sensitivity*. Geophys. Monogr. 29, M. Ewing vol. 5, 1984, p. 130—163.
31. Hansen J., Russell G., Rind D. e. a. Efficient three-dimensional global model for climate studies: Models I and II.— *Mon. Wea. Rev.*, 1983, vol. 111, N 4, p. 609—662.
32. Jaeger L. Monthly and annual patterns of mean global precipitation.— In: *Variations in the Global Water Budget*. Eds. A. Steet-Perrott e. a., 1983, p. 129—140.
33. Levitus S. Climatological atlas of the World Ocean.— NOAA Prof. Paper N 13, Wash. D. C., 1982.— 171 p.
34. Lorenz E. N. Climate determinism — *Meteorol. Monogr.*, 1968, N 30, p. 1—3.
35. Lorenz E. N. Climate change as a mathematical problem.— *J. Appl. Meteorol.*, 1970, vol. 9, p. 325—329.
36. Lorenz E. N. Predictability of weather and climate.— Rep. of Meeting on Weather-Food Interaction, MIT, May 9—11, 1975. Appendix B2. Cambridge, Mass., 1975.— 3p.
37. Lueck R., Reid R. On the production and dissipation of mechanical energy in the ocean.— *J. Geophys. Res.*, 1984, vol. 89, N C3, p. 3439—3445.
38. Manabe S., Bryan K. Climate calculations with a combined ocean—atmosphere model.— *J. Atm. Sci.*, 1969, vol. 26, N 4, p. 786—789.
39. Manabe S., Bryan K., Spelman M. J. A global ocean—atmosphere climate model. Part I. The atmospheric circulation.— *J. Phys. Oceanogr.*, 1975, vol. 5, N 1, p. 3—29.
40. Manabe S., Bryan K., Spelman M. J. A global ocean—atmosphere climate model with seasonal variation for future studies of climate sensitivity.— *Dyn. Atm. Oceans*, 1979, vol. 3, N 3, p. 395—426.
41. Meehl G. A., Washington W. M., Semtner A. J. Experiments with a global ocean model driven by observed atmospheric forcing.— *J. Phys. Oceanogr.*, 1982, vol. 12, N 4, p. 301—312.
42. Mitchell J. M. An overview of climatic variability and its causal mechanisms.— *Quart. Res.*, 1976, vol. 6, N 4, p. 1—13.
43. North G. L. Analytical solution to a simple climate model with diffusive heat transport.— *J. Atm. Sci.*, 1975, vol. 32, N 8, p. 1301—1307.
44. North G. B. Theory of energy-balance climate models.— *J. Atm. Sci.*, 1975, vol. 32, N 11, p. 2033—2043.

45. North G. R., Cahalan R. F., Coakley J. A. Energy-balance climate models.— *Rev. Geophys. Space Phys.*, 1981, vol. 19, N 1, p. 91—121.
46. Oort A. H. Balance conditions in the Earth's climate system.— *Adv. Geophys.*, 1985, vol. 28A, p. 75—98.
47. Oort A. H., Peixoto J. P. Global angular momentum and energy balance requirements from observations.— *Adv. Geophys.*, 1983, vol. 25, p. 355—490.
48. Oort A. H., Rasmusson E. M. Atmospheric circulation statistics.— NOAA Prof. Paper W5, 1971.— 323 p.
49. Oort A. H., Vonder-Haar W. S. On the observed annual cycle in the ocean-atmosphere heat balance over the northern hemisphere.— *J. Phys. Oceanogr.*, 1976, vol. 6, N 6, p. 781—800.
50. Peixoto J. P., Oort A. H. The atmospheric branch of the hydrological cycle and climate.— In: *Variations in the Global Water Budget*. Eds. A. Steet-Perrott et al., 1983, p. 5—65.
51. Peixoto J. P., Oort A. H. Physics of climate.— *Rev. Modern Phys.* 1984, vol. 56, N 3, p. 365—429.
52. Saltzman B. A. A survey of statistical-dynamical models of the terrestrial climate.— *Adv. Geophys.*, 1978, vol. 20, p. 183—304.
53. Smagorinsky J. General circulation experiments with the primitive equations: The basic experiment.— *Mon. Wea. Rev.*, 1963, vol. 91, N 3, p. 99—164.
54. Stone P. H. The effect of large-scale eddies on climatic change.— *J. Atm. Sci.*, 1972, vol. 29, N 3, p. 405—418; 419—428; *Ibid.*, 1973, vol. 30, N 4, p. 521—529.
55. Sverdrup H. U. Oceanography. — In: *Handbuch der Physik*, 1957, Bd. 48, S. 630—638.
56. Trenberth K. E. Mean annual poleward energy transports by the oceans on the Southern Hemisphere.— *Dyn. Atm. Oceans*, 1979, vol. 4, N 1, p. 57—64.
57. Washington W. M., Semtner A. J., Meehl G. A. et al. A general circulation experiment with a coupled atmosphere, ocean and sea ice model.— *J. Phys. Oceanogr.*, 1980, vol. 10, N 12, p. 1887—1908.
58. Williams G. P., Davis D. R. A mean motion model of the general circulation.— *Quart. J. Roy. Meteorol. Soc.*, 1965, vol. 91, N 390, p. 471—489.

# ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

## Работа № 1

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ОКЕАН — АТМОСФЕРА. ПРОВЕРКА ВОЗМОЖНОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ КЛИМАТОЛОГИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

#### Введение

Изучение процессов локального обмена импульсом, теплом, влагой и газами между океаном и атмосферой является центральной задачей исследования мелкомасштабного взаимодействия океана и атмосферы. Количественными характеристиками этого обмена могут служить вертикальные турбулентные потоки названных субстанций. В настоящее время известно много методов оценки этих потоков. Интенсивность газообмена между океаном и атмосферой изучена хуже. Однако и в этой области, особенно в последние годы, наметился определенный прогресс (см., например, [4]).

Существующие методы расчета вертикальных турбулентных потоков импульса ( $\tau$ ), тепла ( $P$ ) и влаги ( $E$ ) в приводном слое атмосферы можно объединить в три группы.

#### 1. Прямой метод

В его основе лежит представление потоков через корреляционные моменты, связывающие пульсации соответствующих метеорологических характеристик — продольной (относительно направления среднего потока) составляющей скорости  $u'$  ветра, температуры  $\theta'$  и удельной влажности  $q'$  воздуха с пульсациями вертикальной составляющей скорости  $w'$ , т. е.

$$\tau = \overline{\rho u' w'}; P = -c_p \rho \overline{\theta' w'}; E = -\rho \overline{q' w'}, \quad (1)$$

где  $\rho$  — средняя плотность воздуха;  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Пульсационные измерения в приводном слое атмосферы производятся с помощью специальной малоинерционной аппаратуры — акустических и ионизационных анемометров, термоанемометров, малоинерционных термометров и т. д. Статистическая обработка этих измерений сводится к вычислению функции  $\Phi_{ws}(f)$  взаимной спектральной плотности пульсаций  $s'$  и  $w'$  (здесь под  $s'$  понимается пульсация любой субстанции — продольной составляющей ско-

рости ветра, температуры или удельной влажности), и к последующему интегрированию  $\Phi_{ws}(f)$  по частоте  $f$

$$F_p = \overline{\rho s' \omega'} = \rho \int_0^{\infty} \Phi_{ws}(f) df. \quad (2)$$

Как известно, экспериментальные данные после усреднения и выделения пульсационных составляющих представляют собой дискретные ряды значений  $\omega'$  и  $s'$ , так что точность оценки  $\hat{\Phi}_{ws}(f)$  зависит от интервала дискретности  $\Delta$  измерений и их общей продолжительности. Интервал дискретности определяет максимально возможную частоту, выделяемую при анализе дискретных данных, — так называемую частоту Найквиста  $f_N = 1/(2\Delta)$ , а общая продолжительность ряда — статистическую значимость оценки  $\hat{\Phi}_{ws}(f)$ . Поскольку информация, содержащаяся в  $\Phi_{ws}(f)$  на некоторой фиксированной частоте  $f_0$ , распределена в полосе частот  $f_0 \pm 1/T$ , увеличение  $T$  приводит к тому, что ширина полосы будет уменьшаться, а оценка  $\hat{\Phi}_{ws}(f_0)$  будет стремиться к ее истинному значению  $\Phi_{ws}(f_0)$ .

Сформулируем основные требования, которым должны удовлетворять пульсационные измерения, используемые для оценки вертикальных турбулентных потоков импульса, тепла и влаги. Для определения  $\hat{\Phi}_{ws}(f)$  в диапазоне частот, соответствующем мелкомасштабной турбулентности (от нескольких герц и ниже), необходимо, чтобы дискретность наблюдений при  $f_N = 1$  Гц была не более 0,5 с. Далее, чтобы оценка  $\hat{\Phi}_{ws}(f)$  была статистически значимой, продолжительность измерений должна превышать 15—20 мин. Наконец, необходимо исключить искажения, связанные с движениями (горизонтальными и вертикальными) судна и влиянием ветрового волнения.

Оценки вертикальных турбулентных потоков по данным пульсационных измерений не содержат каких-либо предположений о вертикальной структуре турбулентности в приводном слое атмосферы. В этом смысле эти измерения можно рассматривать как наиболее репрезентативные. Однако имеющиеся в настоящее время данные все еще малочисленны, и потому они не могут служить подходящей основой для параметризации процессов мелкомасштабного взаимодействия океана и атмосферы.

## 2. Градиентные методы

В предположении о квазистационарности и горизонтальной однородности вертикальное распределение скорости ветра, температуры и удельной влажности в приводном слое описывается следующей системой уравнений:

$$k \frac{du}{dz} = \frac{\tau}{\rho} \equiv u_*^2; \quad \alpha_r k \frac{d\theta}{dz} = -\frac{P}{\rho c_p}; \quad \alpha_q k \frac{dq}{dz} = -\frac{E}{\rho}, \quad (3)$$

где  $u$ ,  $\Theta$ ,  $q$  — скорость ветра, температура и удельная влажность воздуха;  $k$  — коэффициент вертикальной турбулентной вязкости;  $u_*$  — динамическая скорость ветра;  $\alpha_T$ ,  $\alpha_q$  — параметры, обратно пропорциональные турбулентным (термическому и диффузионному) числам Прандтля  $Pr_{\Theta \text{ турб}} = k/k_\Theta$ ,  $Pr_{E \text{ турб}} = k/k_q$ ;  $k_\Theta$ ,  $k_q$  — коэффициенты турбулентной теплопроводности и диффузии.

Пренебрежем влиянием вязкого подслоя и эффектом ветрового волнения. Эти допущения ограничивают нижний предел изменения вертикальной координаты  $z$ : он должен быть больше толщины вязкого подслоя и высоты элементов шероховатости, т. е. исследуемая область должна быть ограничена областью развитой турбулентности. В режиме развитой турбулентности параметрами, определяющими вертикальную структуру приводного слоя, являются: динамическая скорость  $u_*$  ветра, параметр плавучести  $g/\Theta$ , поток тепла  $P$ , нормированный на объемную теплоемкость  $\rho c_p$ , и высота  $z$ , т. е.

$$k = F\left(u_*, \frac{g}{\Theta}, \frac{P}{\rho c_p}, z\right). \quad (4)$$

Отсюда на основании  $\pi$ -теоремы теории размерности получаем

$$k = u_* z F\left(\frac{z/u_*^3}{(g/\Theta) [P/(\rho c_p)]}\right). \quad (5)$$

Вводя обозначение  $L = \frac{u_*^3}{\kappa (g/\Theta) [P/(\rho c_p)]}$  (здесь  $\kappa$  — постоянная Кармана) для масштаба длины Монины—Обухова, характеризующего стратификацию приводного слоя атмосферы, получаем:

$$k = u_* z F(z/L), \quad (6)$$

где положительным значениям  $L$  соответствует устойчивая стратификация ( $\partial\Theta/\partial z > 0$ ,  $P/(\rho c_p) < 0$ ), отрицательным — неустойчивая ( $\partial\Theta/\partial z < 0$ ,  $P/(\rho c_p) > 0$ ).

Рассмотрим распределение метеорологических параметров в приводном слое атмосферы для условий нейтральной стратификации ( $L \rightarrow \infty$ ). В этом случае вертикальное распределение коэффициента вертикальной турбулентной вязкости определяется в соответствии с (6) как

$$k(z) = u_* z F(0), \quad (7)$$

или, полагая  $F(0) = \kappa$ ,

$$k(z) = \kappa u_* z, \quad (8)$$

откуда следует, что для условий нейтральной стратификации изменение коэффициента вертикальной турбулентной вязкости с высотой должно подчиняться линейному закону.

Потребуем, чтобы на подстилающей поверхности (точнее, на уровне шероховатости  $z_0$ ) выполнялись условия

$$u = 0; \quad \Theta = \Theta_0; \quad q = q_0 \text{ при } z = z_0, \quad (9)$$

причем, поскольку мы имеем дело с областью развитой турбулентности, то

$$z_0 > \delta_v, \quad (10)$$

где  $\delta_v$  — толщина вязкого подслоя.

Далее, при развитой турбулентности безразмерные числа  $\alpha_\Theta$  и  $\alpha_q$ , фигурирующие в (3), могут зависеть только от  $z/L$ . Более того, в случае слабостратифицированного приводного слоя они должны мало отличаться от 1 [6], так что при  $z \ll |L|$  и  $z \geq z_0$  коэффициенты  $k$ ,  $k_\Theta$  и  $k_q$  можно считать одинаковыми и для их определения использовать выражение (7). Тогда после интегрирования уравнений (3) по  $z$  от  $z_0$  до  $z$  получаем с учетом (9)

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}; \quad \Theta(z) - \Theta_0 = -\frac{P}{\rho c_p \kappa u_*} \ln \frac{z}{z_0}; \quad q(z) - \\ &- q_0 = -\frac{E}{\rho \kappa u_*} \ln \frac{z}{z_0}. \end{aligned} \quad (11)$$

Эти соотношения характеризуют логарифмическое распределение скорости ветра, температуры и удельной влажности в приводном слое при нейтральной стратификации. Они могут быть использованы для определения вертикальных турбулентных потоков  $\tau/\rho$ ,  $P/(\rho c_p)$ ,  $E/\rho$ , если известны значения  $u$ ,  $\Theta$  и  $q$  на двух или более уровнях (необходимость задания  $u$ ,  $\Theta$  и  $q$  на двух или более уровнях связана с тем, что в число неизвестных, подлежащих определению, входит и  $z_0$ ). Такой метод определения вертикальных турбулентных потоков называется *градиентным методом*.

Напомним теперь об ограничениях этого метода. В зависимости от характера вертикального переноса приводный слой атмосферы можно разделить на три подслоя: вязкий подслей, толщиной  $\delta_v$ , в котором преобладает механизм молекулярного переноса, подслей динамического взаимодействия толщиной  $z_c > \delta_v$  (в нем режим турбулентности и его отклонение от автомодельного обуславливаются взаимодействием турбулентного потока с неровностями подстилающей поверхности) и, наконец, область автомодельного режима турбулентности. Таким образом, для определения вертикальных потоков по данным градиентных измерений необходимо, чтобы нижний уровень измерений находился за пределами  $z_c$ . Проверим, выполняется ли это условие. С этой целью оценим толщину подслоя динамического взаимодействия  $z_c$  для каждого компонента спектра ветровых волн по отдельности. Если предположить, что спектральный компонент ветрового волнения с волновым числом  $k$  перемещается с фазовой скоростью  $c(k)$  под углом  $\alpha(k)$

относительно направления ветра  $u(z)$ , то уравнение, описывающее вертикальное распределение скорости ветра, будет иметь вид

$$u(z) - \frac{c(k)}{\cos \alpha(k)} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_c}, \quad z \geq z_c \gg z_0, \quad (12)$$

откуда следует

$$\kappa z_c = \kappa z_0 \exp \left\{ \kappa \frac{c(k)}{u_*} [\cos \alpha(k)]^{-1} \right\}. \quad (13)$$

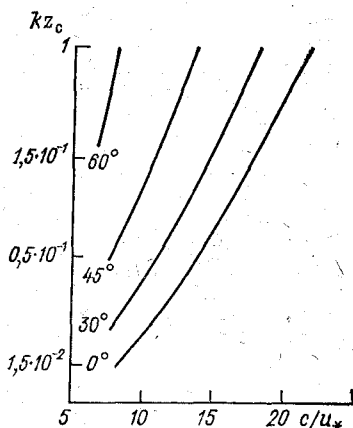


Рис. 1. Зависимость безразмерной высоты слоя динамического взаимодействия от  $c(k)/u_*$  по Китайгородскому [6]. Кривые соответствуют различным значениям угла  $\alpha = 0, 30, 45, 60^\circ$ .

Зависимость безразмерной толщины  $\kappa z_c$  слоя динамического взаимодействия от величины  $c(k)/u_*$  при различных  $\alpha(k)$  показана на рис. 1. Из рисунка следует, что для условий развивающегося волнения ( $c(k)/u_* \approx 20$ ) величина  $z_c$  может достигать 5 м. Таким образом, нижний уровень градиентных измерений должен располагаться на высоте, превышающей это значение. Согласно [5], для ориентировочной оценки толщины слоя динамического взаимодействия можно использовать формулу  $z_c = 0,3 \bar{\lambda}$ , где  $\bar{\lambda}$  — средняя длина ветровых волн.

При стратификации, отличной от нейтральной, уравнения (3), описывающие вертикальное распределение скорости ветра и температуры в приводном слое атмосферы, заменяются следующими:

$$\frac{du}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z} \Phi_u \left( \frac{z}{L} \right); \quad \frac{d\Theta}{dz} = \frac{T_*}{z} \Phi_\Theta \left( \frac{z}{L} \right), \quad (14)$$

где  $T_* = \frac{P}{\rho c_p \kappa u_*}$  — характерный масштаб изменения температуры;

$$\Phi_u \left( \frac{z}{L} \right) = \frac{1}{F(z/L)}; \quad \Phi_\Theta \left( \frac{z}{L} \right) = \frac{1}{\alpha_\Theta F(z/L)} \quad (15)$$

— универсальные функции, характеризующие влияние стратификации.

Интегрирование уравнений (14) по  $z$  от  $z_1$  до  $z_2$  дает

$$u(z_2) - u(z_1) = \frac{u_*}{\kappa} \left[ f_u \left( \frac{z_2}{L} \right) - f_u \left( \frac{z_1}{L} \right) \right];$$

$$\Theta(z_2) - \Theta(z_1) = T_* \left[ f_\Theta \left( \frac{z_2}{L} \right) - f_\Theta \left( \frac{z_1}{L} \right) \right], \quad (16)$$



где  $f_u(\zeta)$  и  $f_\theta(\zeta)$  — первообразные функции  $\zeta^{-1}\varphi_u(\zeta)$  и  $\zeta^{-1}\varphi_\theta(\zeta)$ , определяемые с точностью до константы;  $\zeta = z/L$ .

При выполнении массовых расчетов функции  $f_u(\zeta)$  и  $f_\theta(\zeta)$  можно аппроксимировать выражениями

$$\varphi_u(\zeta) = \varphi_\theta(\zeta) = \begin{cases} \ln \zeta + 10\zeta & \text{при } \zeta > 0, \\ \ln |\zeta| & \text{при } -0,07 \leq \zeta \leq 0, \\ 0,25 + 1,2\zeta^{-1/3} & \text{при } \zeta < -0,07, \end{cases} \quad (17)$$

удовлетворяющими переходам для нейтральной, предельно устойчивой и предельно неустойчивой стратификации.

Если теперь предположить, что вертикальные профили температуры и влажности подобны друг другу и принять  $f_q = \frac{1}{\alpha_q F(z/L)} = f_\theta$ ,

$q_* = -\frac{E}{\kappa r u_*}$ , то вертикальный турбулентный поток влаги будет определяться формулой типа (16).

### 3. Параметрические методы

Помимо методов определения вертикальных турбулентных потоков импульса, тепла и влаги, основанных на использовании специальных инструментальных измерений в приводном слое, существуют методы, позволяющие рассчитывать турбулентные потоки только по данным судовых наблюдений. В этом случае задача определения турбулентных потоков импульса, тепла и влаги сводится к отысканию коэффициентов сопротивления  $C_u$ , тепло- и влагообмена (последние два называются также числами Стентона  $C_T$  и Дальтона  $C_E$ ).

Как известно, комплекс стандартных метеорологических наблюдений в море включает измерение скорости ветра  $u$ , температуры  $\theta$  и удельной влажности  $q$  воздуха на некоторой фиксированной высоте в атмосфере, а также температуры  $\theta_0$  поверхности океана. Из этих параметров, дополненных плотностью воздуха  $\rho$ , удельной теплоемкостью  $c_p$  и насыщающей удельной влажностью  $q_0$  при температуре поверхности океана, можно составить комбинации, имеющие размерности потоков импульса, тепла и влаги. Отношения истинных вертикальных турбулентных потоков к их значениям, полученным с помощью перечисленных выше параметров, как раз и представляют собой искомые выражения для коэффициентов сопротивления и тепло- и влагообмена

$$C_u = \frac{\tau}{\rho u^2}; \quad C_T = \frac{P}{\rho c_p u (\theta_0 - \theta)}; \quad C_E = \frac{E}{\rho u (q_0 - q)}. \quad (18)$$

В настоящее время известно много эмпирических зависимостей  $C_u$ ,  $C_T$  и  $C_E$  от скорости ветра. Часть из них приводится в табл. 1.

При нейтральной стратификации связь между коэффициентом сопротивления и числом Дальтона определяется выражением

$$C_E = 0,63C_u + 0,32 \cdot 10^{-3}, \quad (19)$$

а между числом Дальтона и скоростью ветра  $u_{10}$  — выражением

$$C_E = (0,82 + 0,041u_{10}) \cdot 10^{-3}, \quad (20)$$

предложенным в [9]. Что касается числа Стентона, то для не очень больших скоростей ветра обычно принимается  $C_T = C_E$ . В то же время для больших скоростей ветра рекомендуется использовать выражение [3]

$$C_T = 1,44 \cdot 10^{-3} \frac{0,4 \pm 14}{\Delta T_s u_{10}} \cdot 10^{-3}, \quad (21)$$

где  $\Delta T_s$  измеряется в кельвинах,  $u_{10}$  — в метрах в секунду.

Таблица 1

Зависимость коэффициента сопротивления от скорости ветра  $u_{10}$  на высоте 10 м при нейтральной стратификации

| Автор                  | $C_u = C_u(u_{10})$                                                   | Диапазон изменения скорости ветра |
|------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|
| Смит и Банке (1975)    | $C_u = (0,63 + 0,066u_{10}) \cdot 10^{-3} \pm \pm 0,23 \cdot 10^{-3}$ | $7 \leq u_{10} \leq 21$ м/с       |
| Кондо (1975)           | $C_u = (0,87 + 0,06u_{10}) \cdot 10^{-3}$                             | $2 < u_{10} \leq 8$ м/с           |
|                        | $C_u = (1,2 + 0,025u_{10}) \cdot 10^{-3}$                             | $8 < u_{10} \leq 25$ м/с          |
|                        | $C_u = 0,073u_{10} \cdot 10^{-3}$                                     | $u_{10} > 25$ м/с                 |
| Хедegaард и Буш (1979) | $C_u = (0,64 + 0,14u_{10}) \cdot 10^{-3} \pm \pm 0,29 \cdot 10^{-3}$  | Для умеренных и сильных ветров    |
| Бу (1980)              | $C_u = (0,80 + 0,065u_{10}) \cdot 10^{-3}$                            | То же                             |

Заканчивая краткий обзор эмпирических оценок коэффициентов обмена, укажем на возможность существования специфического механизма обмена импульсом, теплом и влагой, связанного с обрушиванием ветровых волн. При обрушивании ветровых волн образуются брызги, перенос которых в воздухе способствует изменению вертикального турбулентного потока импульса. Между брызгами и окружающим воздухом происходит обмен теплом и влагой. Если учесть, что общая поверхность брызг достаточно велика, тепло- и влагообмен с такой поверхности может внести заметный вклад в формирование результирующих потоков импульса, тепла и влаги. Сказанное подтверждается данными, приведенными в табл. 2.

Для оценки коэффициента сопротивления воспользуемся его определением (18). Тогда после интегрирования (3) по  $z$  от  $z_0$  до  $z$  получаем

$$\sqrt{C_u(z)} = u_*/u = 1/\left[u_* \int_{z_0}^z dz/k(z)\right]. \quad (22)$$

Заметим, что существование вязкого подслоя здесь учитывается лишь косвенно — посредством выбора того или иного значения параметра шероховатости  $z_0$ . Иначе обстоит дело при выводе выражений для коэффициентов тепло- и влагообмена. В этом случае тепловое и диффузионное сопротивление вязкого подслоя необходимо учитывать явно. При учете молекулярной диффузии тепла и водяного пара уравнения, описывающие вертикальное распределение температуры и удельной влажности в приводном слое атмосферы, принимают вид

$$(v_\theta + k_\theta) \frac{d\theta}{dz} = - \frac{P}{\rho c_p}; \quad (v_q + k_q) \frac{dq}{dz} = - \frac{E}{\rho}, \quad (23)$$

где  $v_\theta$  и  $v_q$  — коэффициенты молекулярной теплопроводности и диффузии.

Таблица 2

Сравнение вертикального турбулентного потока  $\tau_T$  импульса и дополнительного потока  $\tau_k$ , связанного с брызгообразованием, по Бортковскому [2]

|                                 | u м/с |      |      |      |
|---------------------------------|-------|------|------|------|
|                                 | 10    | 15   | 20   | 25   |
| $\tau_T$ г/(см·с <sup>2</sup> ) | 2,2   | 6,0  | 12,5 | 22,3 |
| $\tau_k$ г/(см·с <sup>2</sup> ) | 0,02  | 0,12 | 1,14 | 10,5 |
| $\tau_k/\tau_T$                 | 0,01  | 0,02 | 0,09 | 0,47 |

Теперь, чтобы получить выражения для  $C_T$  и  $C_E$ , вновь воспользуемся определениями (18), затем проинтегрируем (23) по  $z$  от 0 до  $z$  и представим коэффициент сопротивления в виде (22). В результате имеем

$$C_T(z) = \sqrt{C_u(z)} \left/ \left[ u_* \int_0^z \frac{dz}{v_\theta + k_\theta(z)} \right] \right.;$$

$$C_E(z) = \sqrt{C_u(z)} \left/ \left[ u_* \int_0^z \frac{dz}{v_q + k_q(z)} \right] \right. \quad (24)$$

Выражения (22), (24) для коэффициентов сопротивления и тепло- и влагообмена положены в основу методики расчета турбулентных потоков импульса, тепла и влаги, разработанной в ГГО [1]. Ее физические предпосылки сводятся к следующему. В исследуемой области выделяются три зоны. Первая характеризуется преобладанием молекулярной диффузии тепла и влаги. При этом считается, что толщины слоев, в которых преобладает либо молекулярная диффузия тепла, либо молекулярная диффузия влаги, одинаковы, т. е.  $\delta_\theta^0 = \delta_q^0 = \delta_v$ . Толщина такого вязкобуферного подслоя принимается равной  $\delta_v = A_v \nu/u_*$ , где  $A_v = 30$  — числовая кон-

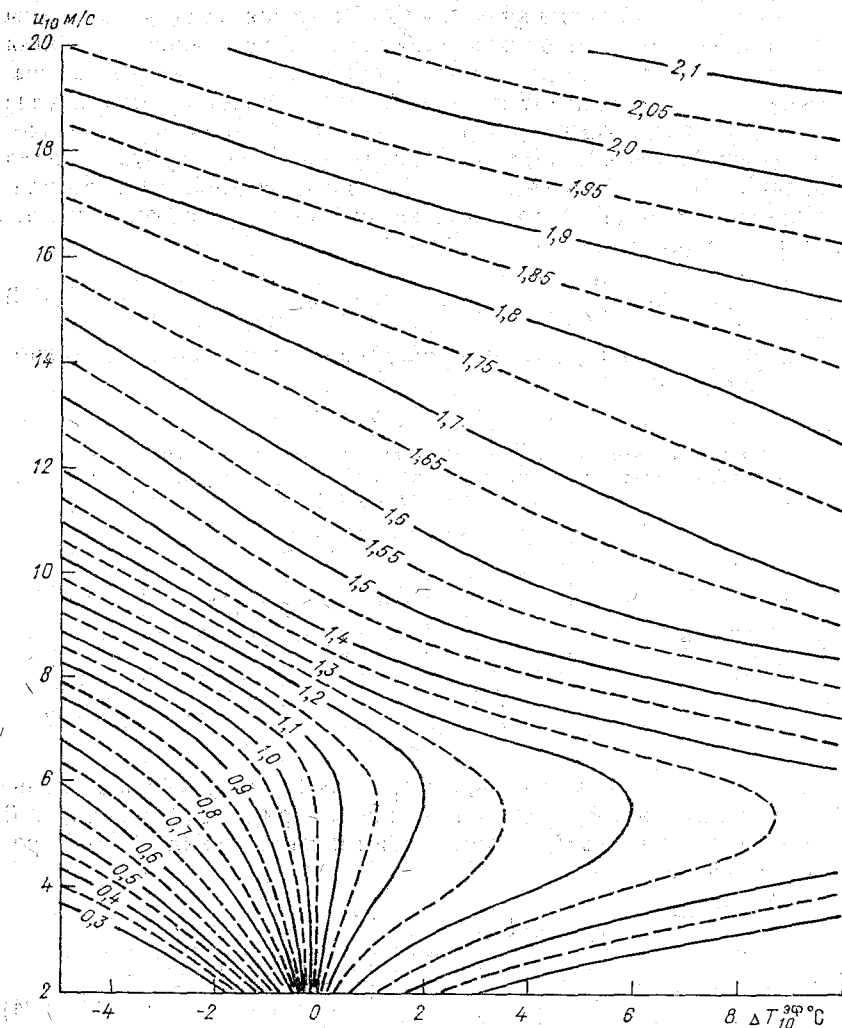


Рис. 2. Коэффициент сопротивления ( $C_u \cdot 10^3$ ) при умеренных скоростях ветра как функция скорости ветра на высоте 10 м и эффективного перепада температуры, по Арнель и Мурашовой [1].

станта. Во второй зоне турбулентный обмен осуществляется главным образом вихревыми движениями, образовавшимися при срыве вихрей с элементов шероховатостей. Третья зона соответствует подслою с автомодельным режимом турбулентности.

Коэффициенты турбулентной вязкости и турбулентной диффузии тепла и влаги определяются в терминах универсальных, функций  $\varphi_u(\zeta)$ ,  $\varphi_\theta(\zeta)$ ,  $\varphi_q(\zeta)$  следующим образом:

$$C_u(\xi) = 1 / \left[ u_* \int_{z_0}^z \frac{\varphi_u(\xi)}{\kappa z u_*} dz \right];$$

$$C_T(\xi) = \sqrt{C_u(\xi)} / \left[ r_T + u_* \int_{\delta_v}^z \frac{\varphi_\theta(\xi)}{\kappa z u_*} dz \right];$$

$$C_E(\xi) = \sqrt{C_u(\xi)} / \left[ r_E + u_* \int_{\delta_v}^z \frac{\varphi_q(\xi)}{\kappa z u_*} dz \right]; \quad (25)$$

здесь  $r_T$  и  $r_E$  — тепловое и диффузионное сопротивление вязкобу-

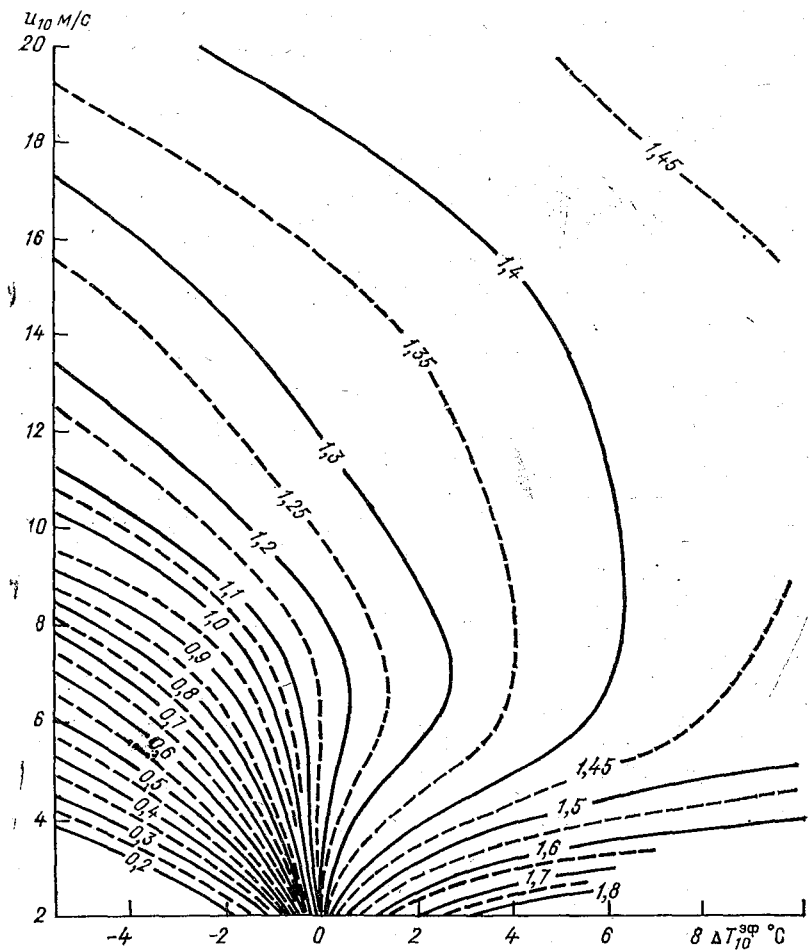


Рис. 3. Коэффициенты тепло- и влагообмена ( $C_T$ ,  $C_E \cdot 10^3$ ) при умеренных скоростях ветра как функции скорости ветра на высоте 10 м эффективного перепада температуры, по Ариель и Мурашовой [1].

ферного подслоя, принимаемые соответственно равными  $r_T = 11$ ,  $r_E = 10$ , функции  $\varphi_u(\xi)$ ,  $\varphi_\theta(\xi)$  и  $\varphi_q(\xi)$  аппроксимируются в виде

$$\left. \begin{aligned} \varphi_u(\xi) &= 1 + 6\xi \\ \varphi_\theta(\xi) &= \varphi_q(\xi) = 0,833 + 10\xi + 5\xi^2 \end{aligned} \right\} 0 \leq \xi < 1, \\ \left. \begin{aligned} \varphi_u(\xi) &= (1 - 16\xi)^{-1/4} \\ \varphi_\theta(\xi) &= \varphi_q(\xi) = (1,44 - 16\xi)^{-1/2} \end{aligned} \right\} 0 > \xi > -1. \quad (26)$$

Результаты расчета коэффициентов обмена для умеренных скоростей ветра представлены в виде номограмм на рис. 2. 3. Более подробное изложение методики расчета вертикальных турбулентных потоков импульса, тепла и влаги приводится ниже.

### Методика расчета

Основной целью лабораторной работы является оценка турбулентных потоков импульса, тепла и влаги по традиционно используемым в климатологии формулам, связывающим искомые характеристики с гидрометеорологическими элементами, входящими в состав стандартного комплекса судовых наблюдений. Эти формулы имеют вид

$$\tau/\rho = C_u u^2; \quad P/(\rho c_p) = C_T u (\Theta_0 - \Theta); \quad E/\rho = C_E u (e_0 - e) \cdot 0,622/p_{s0}, \quad (27)$$

где  $u$ ,  $\Theta$  и  $e$  — скорость ветра, температура воздуха и упругость водяного пара на некоторой высоте в приводном слое атмосферы;  $\Theta_0$  и  $e_0$  — температура и упругость водяного пара на поверхности океана, принимаемые соответственно равными температуре верхнего квазигомогенного слоя океана и упругости насыщения при  $\Theta = \Theta_0$ ;  $p_{s0}$  — атмосферное давление на уровне моря; остальные обозначения прежние.

Определение коэффициентов сопротивления и чисел Стентона и Дальтона, или, иначе, коэффициентов обмена импульсом, теплом и влагой, производится по методике, разработанной в ГГО [8]. В соответствии с этой методикой коэффициенты обмена определяются по скорости ветра на высоте 10 м ( $u_{10}$ ) и так называемому эффективному перепаду температуры  $\Delta T_{10}^{\text{эф}}$ , который вычисляется по формуле

$$\Delta T_{10}^{\text{эф}} = (\Theta_0 - \Theta_{10}) + 0,108 (e_0 - e_{10}). \quad (28)$$

Упругость насыщения водяного пара на поверхности океана ( $e_0$ ) находится по температуре морской воды (табл. 3). При выполнении расчетов соленость принимается равной 35 ‰. Упругость водяного пара на горизонте измерения находится по табл. 3 как упругость насыщения при температуре, равной температуре точки росы.

Таблица 3

Упругость насыщения водяного пара при различной температуре на высоте 10 м ( $e_{10}$ ) и на поверхности моря ( $e_0$ )

| $T$ °C | $e_{10}$ гПа | $e_0$ гПа | $T$ °C | $e_{10}$ гПа | $e_0$ гПа |
|--------|--------------|-----------|--------|--------------|-----------|
| -20    | 1,25         |           | 3      | 7,57         | 7,43      |
| -19    | 1,37         |           | 4      | 8,13         | 7,98      |
| -18    | 1,49         |           | 5      | 8,72         | 8,56      |
| -17    | 1,62         |           | 6      | 9,34         | 9,17      |
| -16    | 1,76         |           | 7      | 10,01        | 9,82      |
| -15    | 1,91         |           | 8      | 10,72        | 10,53     |
| -14    | 2,08         |           | 9      | 11,47        | 11,26     |
| -13    | 2,26         |           | 10     | 12,27        | 12,04     |
| -12    | 2,45         |           | 11     | 13,12        | 12,88     |
| -11    | 2,65         |           | 12     | 14,02        | 13,76     |
| -10    | 2,87         |           | 13     | 14,97        | 14,69     |
| -9     | 3,10         |           | 14     | 15,98        | 15,68     |
| -8     | 3,35         |           | 15     | 17,04        | 16,72     |
| -7     | 3,61         |           | 16     | 18,17        | 17,83     |
| -6     | 3,91         |           | 17     | 19,36        | 19,00     |
| -5     | 4,22         |           | 18     | 20,63        | 20,24     |
| -4     | 4,56         |           | 19     | 21,96        | 21,55     |
| -3     | 4,80         |           | 20     | 23,37        | 22,94     |
| -2     | 5,28         | 5,18      | 21     | 24,86        | 24,40     |
| -1     | 5,68         | 5,58      | 22     | 26,43        | 25,99     |
| 0      | 6,11         | 6,00      | 23     | 28,08        | 27,56     |
| 1      | 6,56         | 6,43      | 24     | 29,83        | 29,28     |
| 2      | 7,05         | 6,92      | 25     | 31,67        | 31,08     |

Примечание. Соленость морской воды принята равной 35 ‰.

Зависимость коэффициента сопротивления  $C_u$  от  $u_{10}$  и  $\Delta T_{10}^{\text{эф}}$  приводится в табл. 4. При небольших скоростях ветра ( $u_{10} \leq 14$  м/с), когда коэффициент сопротивления существенно зависит от стратификации, он представляется в виде набора значений, средних для некоторых интервалов изменения эффективного перепада температуры и скорости ветра (например, в интервале изменения  $u_{10}$  от 4 до 5 м/с и  $\Delta T_{10}^{\text{эф}}$  от 1 до 2 °C значение  $C_u$  принимается постоянным и равным  $1,20 \cdot 10^{-3}$ , см. табл. 4). При увеличении скорости ветра влияние стратификации на турбулентный обмен ослабевает, что позволяет использовать среднее для всего интервала  $\Delta T_{10}^{\text{эф}}$  значение  $C_u$ :

$$C_u = (1,15 + 0,05u_{10}) \cdot 10^{-3} \text{ при } u_{10} > 14 \text{ м/с.} \quad (29)$$

Значения коэффициентов тепло- и влагообмена ( $C_T$ ,  $C_E$ ) помещены в табл. 5, 6. При умеренных скоростях ветра ( $u_{10} \leq 14$  м/с) значения  $C_T$  и  $C_E$  считаются одинаковыми. Они представлены в табл. 5 в виде значений, осредненных по единичным интервалам изменения  $u_{10}$  и  $\Delta T_{10}^{\text{эф}}$ . Ориентировочные значения  $C_T$  и  $C_E$  при

Таблица 4

Коэффициент сопротивления ( $C_u \cdot 10^3$ ) как функция скорости ветра  $u_{10}$  и эффективного перепада температуры  $\Delta T_{10}^{\text{эф}}$

| $u_{10}$ м/с | $\Delta T_{10}^{\text{эф}} \text{ }^{\circ}\text{C}$ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |    | J |
|--------------|------------------------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|----|---|
|              | -5                                                   | -4   | -3   | -2   | -1   | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10 |   |
| 2            | 0,20                                                 | 0,25 | 0,30 | 0,50 | 0,75 | 1,25 | 1,32 | 1,40 | 1,45 | 1,50 | 1,52 | 1,53 | 1,54 | 1,55 | 1,56 | 1  |   |
| 3            | 0,30                                                 | 0,35 | 0,52 | 0,68 | 0,90 | 1,15 | 1,22 | 1,28 | 1,31 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1,45 | 1,47 | 1,50 | 2  |   |
| 4            | 0,45                                                 | 0,50 | 0,65 | 0,77 | 0,95 | 1,12 | 1,20 | 1,23 | 1,26 | 1,27 | 1,31 | 1,33 | 1,35 | 1,36 | 1,37 | 3  |   |
| 5            | 0,57                                                 | 0,66 | 0,75 | 0,85 | 1,00 | 1,10 | 1,16 | 1,22 | 1,25 | 1,27 | 1,29 | 1,31 | 1,32 | 1,34 | 1,36 | 4  |   |
| 6            | 0,70                                                 | 0,75 | 0,85 | 0,94 | 1,04 | 1,12 | 1,18 | 1,25 | 1,26 | 1,29 | 1,31 | 1,34 | 1,36 | 1,39 | 1,40 | 5  |   |
| 7            | 0,80                                                 | 0,90 | 0,98 | 1,05 | 1,15 | 1,20 | 1,29 | 1,33 | 1,36 | 1,40 | 1,42 | 1,45 | 1,46 | 1,49 | 1,51 | 6  |   |
| 8            | 0,96                                                 | 1,05 | 1,10 | 1,15 | 1,25 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1,46 | 1,50 | 1,52 | 1,55 | 1,56 | 1,58 | 1,60 | 7  |   |
| 9            | 1,14                                                 | 1,20 | 1,28 | 1,35 | 1,42 | 1,45 | 1,50 | 1,52 | 1,55 | 1,60 | 1,61 | 1,63 | 1,63 | 1,65 | 1,66 | 8  |   |
| 10           | 1,25                                                 | 1,35 | 1,40 | 1,45 | 1,50 | 1,53 | 1,56 | 1,59 | 1,61 | 1,63 | 1,65 | 1,66 | 1,68 | 1,70 | 1,72 | 9  |   |
| 11           | 1,38                                                 | 1,44 | 1,48 | 1,52 | 1,55 | 1,59 | 1,62 | 1,64 | 1,65 | 1,67 | 1,69 | 1,71 | 1,72 | 1,73 | 1,75 | 10 |   |
| 12           | 1,46                                                 | 1,50 | 1,54 | 1,57 | 1,60 | 1,63 | 1,65 | 1,67 | 1,70 | 1,72 | 1,74 | 1,75 | 1,76 | 1,77 | 1,79 | 11 |   |
| 13           | 1,52                                                 | 1,56 | 1,60 | 1,63 | 1,65 | 1,67 | 1,70 | 1,72 | 1,74 | 1,75 | 1,76 | 1,77 | 1,79 | 1,81 | 1,83 | 12 |   |
| 14           |                                                      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |    |   |
| I            | 1                                                    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   |    |   |



Таблица 5

Коэффициенты тепло- и влагообмена ( $C_T, C_E \cdot 10^3$ ) при умеренных скоростях ветра

| $u_{10}$ м/с | $\Delta T_{10}^{\Phi} \text{ } ^\circ\text{C}$ |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      | J |
|--------------|------------------------------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|---|
|              | -5                                             | -4   | -3   | -2   | -1   | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |   |
| 2            | 0,10                                           | 0,15 | 0,20 | 0,40 | 0,75 | 1,40 | 1,55 | 1,65 | 1,70 | 1,75 | 1,80 | 1,81 | 1,82 | 1,85 | 1,85 | 1,83 |   |
| 3            | 0,20                                           | 0,30 | 0,41 | 0,60 | 0,95 | 1,30 | 1,40 | 1,46 | 1,53 | 1,56 | 1,60 | 1,61 | 1,62 | 1,65 | 1,65 | 1,65 |   |
| 4            | 0,35                                           | 0,45 | 0,57 | 0,75 | 1,05 | 1,25 | 1,32 | 1,36 | 1,41 | 1,54 | 1,47 | 1,50 | 1,51 | 1,53 | 1,55 | 1,55 |   |
| 5            | 0,50                                           | 0,59 | 0,70 | 0,86 | 1,08 | 1,20 | 1,26 | 1,32 | 1,35 | 1,38 | 1,41 | 1,44 | 1,46 | 1,47 | 1,48 | 1,48 |   |
| 6            | 0,62                                           | 0,70 | 0,81 | 0,95 | 1,10 | 1,20 | 1,26 | 1,28 | 1,33 | 1,36 | 1,39 | 1,41 | 1,42 | 1,45 | 1,46 | 1,46 |   |
| 7            | 0,75                                           | 0,85 | 0,93 | 1,02 | 1,14 | 1,21 | 1,27 | 1,29 | 1,33 | 1,36 | 1,38 | 1,41 | 1,42 | 1,44 | 1,46 | 1,46 |   |
| 8            | 0,90                                           | 0,95 | 1,01 | 1,11 | 1,17 | 1,23 | 1,27 | 1,31 | 1,34 | 1,36 | 1,38 | 1,41 | 1,42 | 1,44 | 1,45 | 1,45 |   |
| 9            | 0,98                                           | 1,05 | 1,12 | 1,17 | 1,23 | 1,26 | 1,30 | 1,32 | 1,43 | 1,36 | 1,38 | 1,41 | 1,42 | 1,44 | 1,44 | 1,44 |   |
| 10           | 1,08                                           | 1,14 | 1,18 | 1,23 | 1,25 | 1,27 | 1,31 | 1,33 | 1,35 | 1,36 | 1,38 | 1,41 | 1,42 | 1,43 | 1,44 | 1,44 |   |
| 11           | 1,14                                           | 1,18 | 1,22 | 1,25 | 1,26 | 1,30 | 1,32 | 1,34 | 1,36 | 1,37 | 1,39 | 1,42 | 1,43 | 1,44 | 1,44 | 1,44 |   |
| 12           | 1,19                                           | 1,22 | 1,24 | 1,27 | 1,30 | 1,31 | 1,33 | 1,35 | 1,36 | 1,37 | 1,40 | 1,43 | 1,43 | 1,44 | 1,44 | 1,44 |   |
| 13           | 1,22                                           | 1,23 | 1,26 | 1,29 | 1,31 | 1,32 | 1,34 | 1,35 | 1,36 | 1,38 | 1,41 | 1,41 | 1,43 | 1,44 | 1,44 | 1,44 |   |
| 14           |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 1            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 2            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 3            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 4            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 5            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 6            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 7            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 8            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 9            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 10           |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 11           |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 12           |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 13           |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 14           |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 1            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 2            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 3            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 4            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 5            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 6            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 7            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 8            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 9            |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 10           |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 11           |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 12           |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 13           |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |
| 14           |                                                |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |   |

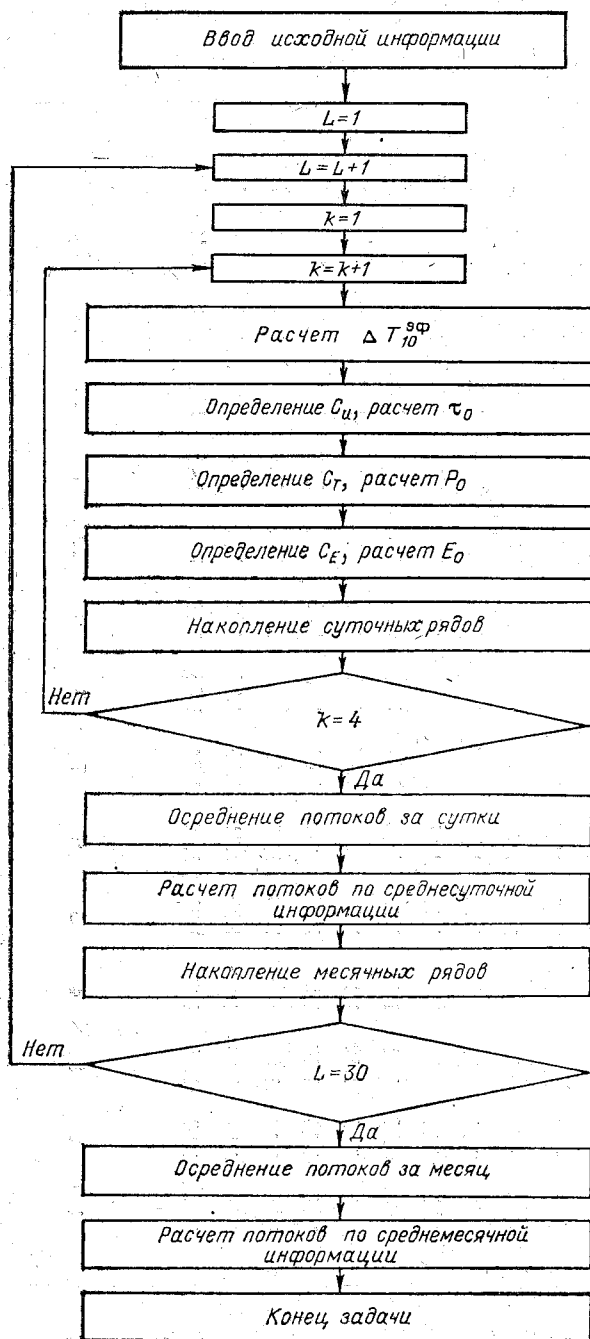


Рис. 4. Схема расчета потоков импульса, тепла и влаги с использованием различных периодов осреднения месячной серии наблюдений.

больших скоростях ветра указаны в табл. 6. Последовательность выполнения расчета с использованием месячной серии наблюдений иллюстрируется схемой на рис. 4.

Исходными данными для расчета потоков импульса, тепла и влаги служат материалы наблюдений на судах погоды, записанные на магнитном диске в виде «архива данных». Все расчеты выполняются с использованием ЭВМ.

Таблица 6  
Ориентировочные значения  $C_T$  и  $C_E$  при больших скоростях ветра

|                  | $u_{10}$ м/с |      |      |      |
|------------------|--------------|------|------|------|
|                  | 15           | 20   | 25   | 30   |
| $C_T \cdot 10^3$ | 1,66         | 2,83 | 3,25 | 3,58 |
| $C_E \cdot 10^3$ | 1,62         | 2,97 | 3,37 | 3,78 |

Значения упругости насыщения водяного пара, коэффициентов сопротивления и тепло- и влагообмена также записаны на магнитном диске в виде трех отдельных массивов, оформленных аналогично табл. 3—5. Инструкция по их вызову в рабочее поле программы приводится в Приложении к работе.

### Порядок выполнения и задачи работы

1. Ознакомиться с методикой расчета вертикальных турбулентных потоков импульса, тепла и влаги.
2. Составить программу расчета и произвести ее отладку.
3. Используя данные наблюдений на одном из судов погоды, рассчитать вертикальные турбулентные потоки импульса, тепла и влаги, а также затраты тепла на испарение для всех синоптических сроков в течение выбранного месяца. Получить средние суточные и средние месячные значения потоков.
4. По результатам расчетов произвести оценку интенсивности энергообмена между океаном и атмосферой с учетом количества штормовых дней (метеорологические условия считаются штормовыми, если средняя суточная скорость ветра превышает 15 м/с).
5. Получить оценку потоков импульса, тепла и влаги по средним суточным и средним месячным значениям гидрометеорологических элементов.
6. Сопоставить средние месячные значения потоков, рассчитанные по срочным данным и по данным наблюдений с различными интервалами усреднения (сутки, месяц). Сравнить полученные оценки с их средними многолетними значениями, помещенными в [7].

## Форма отчетности

Отчетными материалами являются: краткое описание составленной программы, распечатка с программой и результатами расчета, анализ полученных результатов, иллюстрированный необходимыми графиками и рисунками.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ариель Н. З., Мурашова А. В. Расчет уточненных номограмм для определения коэффициентов сопротивления, тепло- и влагообмена над морем.— Труды ГГО, 1981, вып. 454, с. 9—23.
2. Бортковский Р. С. Тепло- и влагообмен атмосферы и океана при шторме.— Л.: Гидрометеиздат, 1983.— 158 с.
3. Буш Н. Е. Потоки в приземном слое над морем.— В сб.: Моделирование и прогноз верхнего слоя океана. Пер. с англ. Л., Гидрометеиздат, 1979, с. 91—113.
4. Бютнер Э. К. Планетарный газообмен  $O_2$  и  $CO_2$ .— Л.: Гидрометеиздат, 1986.— 238 с.
5. Дубов А. С. (ред.) Процессы переноса вблизи поверхности раздела океан—атмосфера.— Л.: Гидрометеиздат, 1974.— 239 с.
6. Китайгородский С. А. Физика взаимодействия атмосферы и океана.— Л.: Гидрометеиздат, 1970.— 283 с.
7. Колесников А. Г. (ред.) Атлас теплового баланса океанов.— Севастополь, МГИ АН УССР, 1970.— 32 с.
8. Методические указания. Расчет турбулентных потоков, тепла, влаги и количества движения над морем.— Л.: ГГО, 1981.— 56 с.
9. Launiainen J. Parameterization of the water vapour flux over a water surface by the bulk aerodynamic method.— J. Annales Geophys., 1983, vol. 1, N 6, p. 481—492.

## Приложение

### ИНСТРУКЦИЯ ПО СЧИТЫВАНИЮ С МАГНИТНОГО ДИСКА ТАБЛИЦ УПРУГОСТИ НАСЫЩЕНИЯ ВОДЯНОГО ПАРА, А ТАКЖЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ СОПРОТИВЛЕНИЯ И ТЕПЛО- И ВЛАГООБМЕНА

В целях сокращения времени на перфорацию числового материала табулированные значения упругости водяного пара, а также коэффициентов сопротивления и тепло- и влагообмена, являющиеся едиными для всех пользователей, записаны на магнитном диске ЭВМ ЕС в виде трех массивов E (I, J), CU (I, J), ST (I, J). Каждый массив занимает один блок в наборе данных, отведенном для хранения Архива гидрометеорологической информации. Для подключения этой справочной информации к загрузочному модулю программы расчета потоков набор данных необходимо описать с помощью операторов языка управления заданием. Кроме того, в начале программы расчета потоков (в числе неисполняемых операторов) необходимо привести описание набора данных с помощью оператора.

DEFINE FILE 10 (230, 1000, L, N),

где 230 — число блоков в файле; 1000 — длина каждого блока; L — признак того, что длина дается в байтах; N — переменная связи.

Во избежание возможных сбоев при работе программы переменную N в самой программе использовать не рекомендуется. Далее, для сокращения количества обращений к внешним устройствам и сокращения времени счета справочную информацию сначала необходимо полностью считать с диска и занести в рабочее поле оперативной памяти, отведенной для решения задачи. С этой целью при составлении программы необходимо указать размеры считываемых массивов с помощью оператора DIMENSION. В соответствии с размерами табл. 3—5 этот оператор имеет вид

DIMENSION E (46,2), CU (15,12), CT (15,12)

Таким образом, значение E (I, 1) соответствует упругости насыщения на высоте измерения ( $e_{10}$ ), а E (I, 2) — на поверхности моря. При выборке значений коэффициентов обмена из массивов CU (I, J) и CT (I, J) индекс I определяется по эффективному перепаду  $\Delta T_{10}^{\text{эф}}$  температуры, а J — по скорости ветра.

Вызов и считывание справочной информации осуществляется оператором READ

READ (10'2) CU

READ (10'3) CT

READ (10'4) E

здесь 2, 3, 4 — номера блоков, в которых записана соответствующая информация (переменная связи).

# ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАКЦИИ СИСТЕМЫ ОКЕАН — АТМОСФЕРА НА ВНЕШНЕЕ ПОСТОЯННОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

## Основные пояснения

Одной из фундаментальных проблем теории климата является исследование реакции климатической системы на внешнее возмущение. С практической точки зрения наибольший интерес представляют изменения температуры поверхности (температуры приземного слоя атмосферы), создаваемые возмущениями солнечной постоянной или концентрации активных в радиационном отношении газов (таких, как  $\text{CO}_2$ ). Рассмотрим простейшую нульмерную модель системы океан—атмосфера и на ее основе исследуем качественные особенности реакции климатической системы на изменение внешних условий.

## Уравнения модели и ее параметры

Возмущения температуры в атмосфере ( $T_a$ ),<sup>1</sup> верхнем квазиоднородном слое ( $T_m$ ) и глубинном слое ( $T_d$ ) океана, порождаемые изменением притока тепла  $\Delta Q$ , могут быть описаны следующей системой уравнений [5]:

$$c_a dT_a/dt + \lambda_{am}(T_a - T_m) + \lambda_a T_a = \Delta Q; \quad (1)$$

$$c_m dT_m/dt + \lambda_{am}(T_m - T_a) + \lambda_{md}(T_m - T_d) = 0; \quad (2)$$

$$c_d dT_d/dt + \lambda_{md}(T_d - T_m) = 0; \quad (3)$$

здесь уравнения (1) — (3) характеризуют соответственно бюджет тепла в атмосфере, верхнем квазиоднородном слое (ВКС) и глубинном слое (ГС) океана, а отдельные слагаемые этих уравнений имеют смысл возмущений теплосодержания рассматриваемых звеньев климатической системы [первые члены в (1) — (3)], теплообмена между атмосферой и ВКС [вторые члены в (1), (2)], радиационных источников и стоков тепла в атмосфере [третий член в (1)] и теплообмена между ВКС и ГС [третий член в (2) и второй член в (3)];  $c_a$ ,  $c_m$  и  $c_d$  — теплоемкость атмосферы, ВКС и ГС;  $\lambda_a$  — параметр обратной связи между радиационными источниками и стоками тепла и температурой атмосферы;  $\lambda_{am}$  и  $\lambda_{md}$  — коэффициенты теплообмена на границах раздела атмосфера — ВКС и ВКС—ГС;  $t$  — время.

Пусть  $c_a$ ,  $c_m$  и  $c_d$  равны соответственно 0,45; 10 и 100 Вт/(м<sup>2</sup>·год<sup>-1</sup>·К). Эти значения теплоемкостей эквивалентны заданию следующих значений массы, отнесенной к единице площади поверхности океана: 14·10<sup>3</sup> кг/м<sup>2</sup> для атмосферы; 81·10<sup>3</sup> кг/м<sup>2</sup> для ВКС и 807·10<sup>3</sup> кг/м<sup>2</sup> для ГС. Последнее из них ограничивает

анализ сравнительно небольшими (порядка десятилетия) масштабами времени, на которых в теплообмене с атмосферой участвует только верхний 500—1000-метровый слой океана [3].

Обсудим теперь выбор значений параметров  $\lambda_a$ ,  $\lambda_{am}$  и  $\lambda_{md}$ . Согласно имеющимся данным, параметр  $\lambda_a$ , связывающий изменение радиационных источников и стоков тепла с изменением температуры атмосферы, составляет  $1,7 \pm 0,8$  Вт/(м<sup>2</sup>·К). Пересчитывая это значение на единицу площади поверхности океана (напомним, что рассматривается не вся земная поверхность, а только часть ее, покрытая океаном), получаем  $\lambda_a = 2,4 \pm 1,1$  Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Далее, известно, что теплообмен на границе раздела океан—атмосфера контролируется потоками коротковолновой и длинноволновой радиации, а также потоками явного и скрытого тепла. Если поступление коротковолновой солнечной радиации и альbedo океанской поверхности в невозмущенном и возмущенном случаях остаются одинаковыми, то уравнение теплового баланса подстилающей поверхности, записанное в терминах отклонений, будет включать только члены, характеризующие эффективное излучение подстилающей поверхности (разность восходящего  $F\uparrow$  и нисходящего  $F\downarrow$  потоков длинноволновой радиации) и потоки явного ( $P$ ) и скрытого ( $LE$ ) тепла. Напомним, что  $F\uparrow$  зависит от  $\hat{T}_m$ , а  $F\downarrow$  — от  $\hat{T}_a$ , причем при малых значениях отклонений  $\Delta F\uparrow = (\partial F\uparrow / \partial \hat{T}_m) \Delta \hat{T}_m$ ,  $\Delta F\downarrow = (\partial F\downarrow / \partial \hat{T}_a) \Delta \hat{T}_a$ , где  $\hat{T}_m$  и  $\hat{T}_a$  — температура ВКС и атмосферы,  $\Delta \hat{T}_m$  и  $\Delta \hat{T}_a$  — отклонения от невозмущенных значений, равные, по определению,  $T_m$  и  $T_a$  соответственно. Таким образом, представление эффективного излучения в виде разности  $(T_m - T_a)$  будет справедливым только в том случае, когда  $\partial F\uparrow / \partial \hat{T}_m = \partial F\downarrow / \partial \hat{T}_a$ . Судя по результатам расчетов Везеролда и Манабе [6], значения  $\partial F\downarrow / \partial \hat{T}_a$  и  $\partial F\uparrow / \partial \hat{T}_m$  близки между собой, что служит основанием для параметризации эффективного излучения в терминах  $(T_m - T_a)$ . Что касается потоков явного ( $P$ ) и скрытого ( $LE$ ) тепла, то их параметризация в терминах  $(T_m - T_a)$  является традиционной и, по-видимому, не требует дополнительного обоснования.

Воспользуемся этими соображениями и для оценки  $\partial F\uparrow / \partial \hat{T}_m$ ,  $\partial P / \partial \hat{T}_m$  и  $\partial LE / \partial \hat{T}_m$  привлечем данные, полученные в численных экспериментах по чувствительности общей циркуляции атмосферы к изменению внешних условий [3, 6]. В результате будем иметь [5]

$$\partial F\uparrow / \partial \hat{T}_m = 6 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)};$$

$$\partial P / \partial \hat{T}_m = 11 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)};$$

$$\partial LE / \partial \hat{T}_m = 28 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}$$

или, суммируя эти оценки,

$$\lambda_a = 45 \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К)}.$$

Обратимся к определению параметра  $\lambda_{md}$ , характеризующего теплообмен между ВКС и ГС. Как известно, этот теплообмен осуществляется упорядоченными вертикальными движениями, обусловливаемыми, например, дивергенцией дрейфовых течений в экмановском пограничном слое, и турбулентными возмущениями, испытывающими сильную изменчивость в течение года. Поэтому параметризация теплообмена между ВКС и ГС в терминах  $(T_m - T_d)$  с постоянным множителем пропорциональности  $\lambda_{md}$ , строго говоря, является необоснованной. В любом случае этот множитель пропорциональности должен рассматриваться не иначе, как некоторая мера временного масштаба для процессов обмена на границе раздела между ВКС и ГС. Упомянутый временной масштаб можно оценить двумя способами: 1) по данным о вертикальном распространении радиоактивных трассеров в океане и 2) используя предположение о диффузионном переносе тепла в океане, т. е. привлекая уравнение теплопроводности с постоянным по вертикали и заданным коэффициентом вертикальной турбулентной диффузии. В последнем случае временной масштаб вертикальной диффузии определяется как отношение квадрата глубины проникновения температурных возмущений и коэффициента вертикальной турбулентной диффузии. Найденные этими способами оценки  $\lambda_{md}$  варьируют в пределах от 1 до 4 Вт/(м<sup>2</sup>·К).

Заканчивая формулировку задачи, укажем начальные условия и характер изменения во времени притока тепла в атмосфере. Примем, что все возмущения температуры в начальный момент времени отсутствуют, т. е.

$$T_a = T_m = T_d = 0 \text{ при } t = 0, \quad (4)$$

а приток тепла меняется скачком от нуля до  $\Delta Q$  при  $t = 0$  и далее всюду (при  $t > 0$ ) остается постоянным.

**Аналитическое решение системы (1) — (4).** Уравнения (1) — (3), представляющие собой линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, в принципе допускают точное решение. Однако особенности этого решения легче понять, если воспользоваться методом сращиваемых асимптотических разложений (см. [1, 2, 4]).

Найдем прежде всего стационарное решение уравнений (1) — (3), описывающее предельную реакцию климатической системы на внешнее возмущение. При  $t \rightarrow \infty$  уравнения (1) — (3) сводятся к виду

$$\lambda_{am}(T_a - T_m) + \lambda_a T_a = \Delta Q; \quad (1')$$

$$\lambda_{am}(T_m - T_a) + \lambda_{md}(T_m - T_d) = 0; \quad (2')$$

$$\lambda_{md}(T_d - T_m) = 0, \quad (3')$$

откуда следует, что

$$T_a = T_m = T_d = \Delta Q / \lambda_a. \quad (5)$$



Учтем теперь, что теплоемкость атмосферы много меньше теплоемкости ВКС, а последняя в свою очередь много меньше теплоемкости ГС, т. е.  $c_a/c_m$  и  $c_m/c_d$  суть малые параметры. Это означает, что адаптация атмосферы происходит существенно быстрее, нежели ВКС и тем более ГС, и, следовательно, при определении  $T_a$  из (1) значение  $T_m$  можно считать заданным. Имея это в виду, зафиксируем  $T_m$  в (1) и перепишем первое уравнение системы (1) — (3) в виде

$$\frac{dT_a}{dt} + \frac{\lambda_a + \lambda_a m}{c_a} T_a = \frac{\Delta Q + \lambda_a m T_m}{c_a}. \quad (6)$$

Интегрируя его с учетом начального условия для  $T_a$  из (4), находим:

$$T_a = \frac{\Delta Q + \lambda_a m T_m}{\lambda_a + \lambda_a m} (1 - e^{-t/t_0}), \quad (7)$$

где  $t_0 = c_a/(\lambda_a + \lambda_a m) \approx 4$  сут.

При  $t = 0$  ( $t_0$ ) выражение (7) сводится к виду

$$T_a = \frac{\Delta Q + \lambda_a m T_m}{\lambda_a + \lambda_a m}, \quad (7')$$

откуда видно, что при  $T_m = 0$  возмущение  $T_a$  его предельное значение, определяемое в (5), соотносится между собой как  $\lambda_a$  к  $(\lambda_a + \lambda_{am})$ . Иначе говоря, на временных масштабах порядка недели отклик атмосферы на внешнее возмущение не превышает 4 % от его предельного значения.

Подставим (7') в (2) и перепишем систему уравнений (2), (3) в виде

$$\frac{dT_m}{dt} + \alpha (T_m - T_d) + \beta T_m = \frac{\beta}{\lambda_a} \Delta Q; \quad (8)$$

$$\frac{dT_d}{dt} + \varepsilon \alpha (T_d - T_m) = 0, \quad (9)$$

где

$$\alpha = \lambda_{md}/c_m; \quad \beta = \lambda_a \lambda_{am}/[c_m (\lambda_a + \lambda_{am})]; \quad \varepsilon = c_m/c_d.$$

Воспользуемся малостью параметра  $\varepsilon$  и введем медленное время  $\tau$ , связанное с быстрым временем  $t$  соотношением  $\tau = \varepsilon t$ . Тогда в шкале быстрого времени  $t$  уравнение (8) может быть преобразовано к виду

$$\frac{dT_m}{dt} + (\alpha + \beta) T_m = \alpha T_d + \frac{\beta}{\lambda_a} \Delta Q, \quad (10)$$

а в шкале медленного времени  $\tau$  — к виду

$$\left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) T_m(\tau) = \frac{\alpha}{\beta} T_d(\tau) + \frac{\Delta Q}{\lambda_a}, \quad (11)$$

откуда в соответствии с (11)

$$T_m(\tau) = \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1} [(\alpha/\beta) T_d(\tau) + \Delta Q/\lambda_a]. \quad (12)$$

Аналогично, уравнение (9) в шкале быстрого времени  $t$  сводится к виду

$$dT_d/dt = 0, \quad (13)$$

а в шкале медленного времени  $\tau$  — к виду

$$dT_d/d\tau + \alpha(T_d - T_m) = 0 \quad (14)$$

или после подстановки выражения для  $T_m$  из (12)

$$\kappa dT_d/d\tau + T_d = \Delta Q/\lambda_a, \quad (15)$$

где

$$\kappa = \alpha^{-1} + \beta^{-1}.$$

Решение уравнения (10), (13) с учетом начальных условий для  $T_m$  и  $T_d$  из (4) имеет вид

$$T_m(t) = \frac{\Delta Q/\lambda_a}{1 + \alpha/\beta} (1 - e^{-t/t_1}), \quad (16)$$

$$T_d(t) = 0; \quad (17)$$

здесь  $t_1 = (\alpha + \beta)^{-1} \approx 2,3$  года.

Таким образом, установление квазистационарного режима ВКС происходит за время порядка  $t_1$ , т. е. за несколько лет, причем на масштабах времени  $t = O(t_1)$  отклик ВКС на внешнее возмущение оказывается в  $(1 + \alpha/\beta)$  раз меньше его предельного значения, определяемого равенством (5). Перепишем множитель  $(1 + \alpha/\beta)$  в виде  $\left[1 + \frac{\lambda_{md}}{\lambda_{am}} \left(1 + \frac{\lambda_{am}}{\lambda_a}\right)\right]$  и подставим в него приведенные выше значения параметров  $\lambda_a$ ,  $\lambda_{am}$  и  $\lambda_{md}$ . В результате приходим к выводу, что на временных интервалах порядка  $t_1$  реакция ВКС на внешнее возмущение примерно в два раза меньше предельной.

С другой стороны, при  $t \gg t_1$ , решение уравнения (15) после перехода от  $\tau$  к  $t$  имеет вид

$$T_d = \frac{\Delta Q}{\lambda_a} (1 - e^{-t/t_2}), \quad (18)$$

где

$$t_2 = \varepsilon^{-1} \kappa = \varepsilon^{-1} (\alpha^{-1} + \beta^{-1}).$$

Объединяя (18) и (12), получаем выражение

$$T_m = \frac{\Delta Q/\lambda_a}{1 + \alpha/\beta} \left[1 + \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-t/t_2})\right], \quad (19)$$

справедливое при  $t \gg t_1$ .

Сравним периоды установления ВКС и ГС. Первый из них, как было показано выше, равен  $t_1 = (\alpha + \beta)^{-1} \approx 2,3$  года, второй —  $t_2 = \varepsilon^{-1} (\alpha^{-1} + \beta^{-1}) \approx 94$  года. Следовательно, время установления термического режима ВКС приблизительно в 50 раз меньше, нежели ГС.

Сращивая асимптотические решения (16) и (19), приходим к окончательному выражению для  $T_m$ . Оно имеет вид

$$T_m = \frac{\Delta Q / \lambda_a}{1 + \alpha / \beta} \left[ (1 - e^{-t/t_1}) + \frac{\alpha}{\beta} (1 - e^{-t/t_2}) \right]. \quad (20)$$

Равенства (7), (18), (20) представляют собой искомое решение системы (1) — (4).

### Порядок выполнения и задачи работы

1. Составить программу численного решения системы (1) — (4).
2. При задании различных значений шага по времени произвести расчет на ЭВМ временной эволюции климатической системы океан—атмосфера до выхода решения на стационарный режим. Критерием установления стационарного режима служит условие совпадения с некоторой наперед заданной точностью последующего и предыдущего значений  $T_d$ . Параметры климатической системы принять равными:  $c_a = 0,45$  Вт/(м<sup>2</sup>·год<sup>-1</sup>·К);  $c_m = 10$  Вт/(м<sup>2</sup>·год<sup>-1</sup>·К);  $c_d = 100$  Вт/(м<sup>2</sup>·год<sup>-1</sup>·К);  $\lambda_a = 2,4$  Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $\lambda_{am} = 45$  Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $\lambda_{md} = 2$  Вт/(м<sup>2</sup>·К);  $\Delta Q = 1$  Вт/м<sup>2</sup>.
3. Сопоставить результаты аналитического [равенства (7), (18), (20)] и численного решений и найти оценку оптимального шага по времени.
4. При заданном оптимальном шаге по времени получить численное решение системы (1) — (4) для следующих двух частных случаев:
  - а) взаимодействие между океаном и атмосферой отсутствует ( $\lambda_{am} = 0$ ,  $T_m = T_d = 0$ );
  - б) взаимодействие между ВКС и ГС отсутствует ( $\lambda_{md} = 0$ ,  $T_d = 0$ ).
5. Исследовать чувствительность решения системы (1) — (4) к вариациям коэффициента  $\lambda_{md}$ , для чего получить решение при задании  $\lambda_{md}$  равным 1 и 4 Вт/(м<sup>2</sup>·К).
6. Полученные данные использовать для анализа особенностей временной эволюции отдельных звеньев климатической системы и климатической системы в целом.

### Форма отчетности

В отчете приводятся распечатка программы, результаты расчета, сопоставление аналитического и численного решений, обоснование выбора оптимального шага по времени, графики, иллюстри-

рующие характер временной изменчивости отдельных звеньев климатической системы, анализ временной эволюции климатической системы океан—атмосфера и выводы относительно роли океана в формировании изменений термического режима атмосферы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ван - Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. Пер. с англ.— М.: Мир, 1967, с. 108—138.
2. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. Пер. с англ.— М.: Мир, 1972, с. 92—130.
3. Манabe С., Райен К. Климат и циркуляция океана. Пер. с англ.— Л.: Гидрометеоиздат, 1972.— 192 с.
4. Моисеев Н. Н. Асимптотические методы в нелинейной механике.— М.: Наука, 1981, с. 183—217.
5. Dickinson R. E. Convergence rate and stability of ocean-atmosphere coupling schemes with a zero dimensional climate model.— J. Atm. Sci., 1981, vol. 38, N 10, 2112—2120.
6. Wetherald R. T., Manabe S. The effects of changing the solar constant of the climate of a general circulation model.— J. Atm. Sci., 1975, vol. 32, N 10, p. 2044—2059.

## Приложение

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Пусть задана система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= f_1(t, y_1, y_2, \dots, y_N); \\ dy_2/dt &= f_2(t, y_1, y_2, \dots, y_N); \\ &\vdots \\ dy_N/dt &= f_N(t, y_1, y_2, \dots, y_N) \end{aligned} \quad (1)$$

и начальные условия

$$y_1(t_0) = y_{1,0}; \quad y_2(t_0) = y_{2,0}; \quad \dots; \quad y_N(t_0) = y_{N,0}. \quad (2)$$

Используя векторные обозначения

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{F}(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{bmatrix}; \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} y_{1,0} \\ y_{2,0} \\ \vdots \\ y_{N,0} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

представим исходную систему в векторной форме:

$$\mathbf{y}' = d\mathbf{y}/dt = F(t, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{y}_0. \quad (4)$$

Наиболее широко распространенными численными методами решения системы (4) являются метод Рунге—Кутты четвертой степени и метод предиктор—корректор, модифицированный Хеммингом. Алгоритмы этих методов реализованы на ЭВМ типа ЕС в виде стандартных подпрограмм.

## Метод Рунге—Кутта

Приближенные значения решения на каждом  $(j + 1)$ -м шаге интегрирования находятся по формуле Рунге—Кутта четвертой степени

$$y(t_{j+1}) = y(t_j) + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad (5)$$

где  $h$  — шаг интегрирования:

$$\begin{aligned} k_1 &= F(t_j, y(t_j)); \\ k_2 &= F\left(t_j + \frac{h}{2}, y(t_j) + \frac{h}{2} k_1\right); \\ k_3 &= F\left(t_j + \frac{h}{2}, y(t_j) + \frac{h}{2} k_2\right); \\ k_4 &= F(t_j + h, y(t_j) + h k_3). \end{aligned}$$

Соотношения (5) дают возможность определить приближенное значение решения в точке  $t_{j+1}$  только на основании информации в точке  $t_j$ . Такое приближенное решение при достаточно малом шаге интегрирования и малой вычислительной погрешности будет близким к точному [2].

Метод Рунге—Кутта удобен тем, что в ходе вычислений можно менять шаг интегрирования, не производя при этом дополнительных вычислений. Поэтому нетрудно уменьшить шаг там, где функция быстро меняется, и увеличить его в случае достаточной гладкости.

К числу недостатков метода относится отсутствие в его вычислительной схеме элементов контроля правильности вычислений. Отметим, что погрешность за один шаг интегрирования составляет  $\varepsilon = O(h^5)$ .

*Замечание.* Для единообразного представления всех переменных, входящих в систему, ее обычно дополняют еще одним уравнением  $dt/dt = 1$ . Его удобно записывать в системе первым. Естественно, что число уравнений в системе станет равно  $N + 1$ .

## Процедура RK

Для лучшего понимания процесса решения системы (4) целесообразно прежде всего рассмотреть принцип работы процедуры построения метода Рунге—Кутта, аналогичной соответствующей стандартной подпрограмме.

### Обращение к процедуре

CALL RK(N, N1, PRMT, H, F, OUT, TOSH, REZ, PR, PRIR).

Параметры  $F$  и  $OUT$  должны быть описаны оператором EXTERNAL.

### Описание параметров

#### Входные данные

$N$  — число уравнений в системе с учетом уравнения  $dt/dt = 1$ ,  
 $N1 = N + 1$

PRMT — вектор размерности  $N1$ , определяющий границы интервала интегрирования и начальные условия

PRMT(1) — нижняя граница интегрирования или начальное значение первой (независимой) переменной.

PRMT (2) — начальное значение второй переменной или первой зависимой переменной

PRMT (N) — начальное значение N-й переменной

PRMT (N1) — верхняя граница интегрирования

NNH — начальный шаг интегрирования

F — идентификатор процедуры вычисления правых частей системы

OUT — идентификатор процедуры выхода. В этой процедуре может быть оформлена печать текущих значений решения, правых частей системы, выполнены дополнительные вычисления

TOSH — вектор допустимых погрешностей локальной относительной ошибки для каждой переменной, размерность вектора — N. Оптимальные значения элементов этого вектора можно получить из численных экспериментов

#### *Выходные параметры*

REZ — вектор размерности N, в котором находится решение системы

PR — вектор размерности N с производными от решений системы

PRIR — вектор размерности N, содержащий приращения.

Процедуры F и OUT составляются пользователем. Процедура RK обращается к ним на каждом шаге интегрирования

#### **Заголовок процедуры расчета правых частей системы**

**SUBROUTINE F(N, A, S)**

#### *Формальные параметры*

N — размерность системы

A — выходной параметр размерности N, в который засылаются (в процедуре RK) аргументы правых частей системы или текущие значения решений

S — выходной вектор размерности N с численными значениями правых частей системы

#### **Заголовок процедуры выхода**

**SUBROUTINE OUT(N, N1, PRMT, REZ, PR, \*).**

Формальные параметры имеют тот же смысл, что и в процедуре RK.

#### *Алгоритм работы процедуры*

Для контроля точности вычислений по формулам (5) и выбора текущего шага интегрирования  $h$  дважды в одной точке  $t_j + 2h$  вычисляется значение решения  $y(t_j + 2h)$  при шаге  $2h$  и при шаге  $h$ . Назовем эти приближения соответственно  $y^{(1)}(t_j + 2h)$  и  $y^{(2)}(t_j + 2h)$ .

Величина

$$\delta_i = \text{abs}((y_i^{(1)} - y_i^{(2)})/y_i^{(1)}) \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (6)$$

используется в процедуре RK как мера локальной относительной ошибки в точке  $t_j + 2h$ . Если  $\delta_i$  больше заданной допустимой погрешности  $\varepsilon_i$  хотя бы для одного значения  $i$ , то шаг интегрирования делится пополам и интегрирование вновь начинается с точки  $t_j$ . Если  $\delta_i$  меньше  $\varepsilon_i$  для всех значений  $i$ , то для экономии машинного времени и для уменьшения накопления вычислительных погрешностей шаг удваивается.

При выполнении условия

$$\delta_i < \varepsilon_i \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

в качестве решения в точке  $t_j + 2h$  можно взять вектор  $y^{(1)}$ . Неравенство (7) проверяется для каждой зависимой переменной системы (4) с учетом значений компонент вектора TOSH.

Главный член погрешности на каждом шаге можно оценить с помощью следующего соотношения [1]:

$$y_i^{(1)} - y I_i(t_j + 2h) \approx \frac{y_i^{(2)} - y_i^{(1)}}{y^s - 1}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (8)$$

где  $y I_i(t_j + 2h)$  — компоненты вектора истинного решения  $y I$ ;  $s$  — порядок погрешности метода; для метода Рунге—Кутты четвертой степени  $s = 4$ .

Поэтому при желании можно уточнить полученное приближенное решение, положив

$$y I(t_j + 2h) \approx y^{(1)} - (y^{(2)} - y^{(1)})/15. \quad (9)$$

Для того чтобы дискретное значение независимой переменной  $t$  не вышло за верхний предел интегрирования, в процедуре предусмотрен дополнительный анализ текущего шага  $h$  с одновременным его уменьшением (если это необходимо), причем это уменьшение производится так, чтобы построение решения оставалось в заданной области интегрирования. Кроме того, в процедуре анализируется близость независимой переменной к верхнему пределу интегрирования. Если разность этих величин меньше текущего шага  $h$ , то последний перед интегрированием уменьшается на порядок. Такое уменьшение шага с последующим интегрированием происходит последовательно не более трех раз. На этом шаге процесс интегрирования полностью заканчивается.

**Замечание.** Расчет коэффициентов Рунге—Кутты и соответствующих приращений на каждом шаге интегрирования оформлен в виде процедуры K1234, которая элементарна по своей структуре и не требует дополнительных пояснений.

# Текст процедуры RK

```

SUBROUTINE BK(N,N1,PRMT,HHH,F,OUT,TOSH,REZ,PRIR)
DIMENSION PRMT(N1),REZ(N),PR(100),DT(100),
*DT1(100),
*TOSH(N),TOSH1(100)
DIMENSION PRIR(N)
C ПОСТРОЕНИЕ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ
DO 1 I=1,N
1 TOSH1(I)=TOSH(I)/10,
K=1
DO 2 I=1,N
2 REZ(I)=PRMT(I)
HTEK1=HHH
3 DO 4 I=1,N
DT(I)=REZ(I)
4 DT1(I)=REZ(I)
C ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДВА РАЗА С ШАГОМ H
DO 13 JJ=1,2
HTEK=HTEK1
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИРАЩЕНИЙ
CALL K1234 (N,DT,HTEK,F,PRIR,PR)
C ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ТЕКУЩЕЙ ТОЧКЕ
DO 14 I=1,N
14 DT(I)=DT(I)+PRIR(I)
13 CONTINUE
C ИНТЕГРИРОВАНИЕ ОДИН РАЗ С ШАГОМ 2*H
HTEK=2*HTEK1
C ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРИРАЩЕНИЙ
CALL K1234 (N,DT1,HTEK,F,PRIR,PR)
C ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ТЕКУЩЕЙ ТОЧКЕ
DO 15 I=1,N
15 DT1(I)=DT1(I)+PRIR(I)
C АНАЛИЗ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ОШИБКИ
DO 16 I=2,N
IF (ABS((DT(I)-DT1(I))/DT(I)).GT.TOSH(I)) GO TO 20
16 CONTINUE
C УТОЧНЕНИЕ РЕШЕНИЯ
DO 17 I=1,N
17 REZ(I)=DT(I)+(DT1(I)-DT(I))/15.
CALL OUT(N,N1,PRMT,REZ,PR,021)
C УМЕНЬШЕНИЕ ШАГА ПРИ ПОДХОДЕ К ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЕ
18 IF((REZ(I)+HTEK1).GT,PRMT(N1)) HTEK1=HTEK1/2
IF((REZ(I)+HTEK1).GT,PRMT(N1))GO TO 18
IF((PRMT(N1)-REZ(I)).LT,HTEK1)K=K+1
IF(K,GT,3)RETURN
IF(K,GT,1)HTEK1=HTEK1/10.
C АНАЛИЗ НИЖНЕЙ ГРАНИЦЫ ОТНОСИТЕЛЬНОЙ ОШИБКИ
DO 19 I=2,N
IF (ABS((DT(I)*DT1(I))/DT(I)).GT,TOSH1(I)) GO TO 3
19 CONTINUE
C УВЕЛИЧЕНИЕ ШАГА ИНТЕГРИРОВАНИЯ
HTEK1=HTEK1*2.
GOTO3
C УМЕНЬШЕНИЕ ШАГА ИНТЕГРИРОВАНИЯ
20 HTEK1=HTEK1/2.
GOTO3
21 RETURN
END

```



### Текст процедуры K1234

```

SUBROUTINE K1234(N,DT,HTEK,F,PRIR,PF)
DIMENSION PRIR(N),PR(N),DT(N),X0(100),
*K1(100),K2(100),K3(100),K4(100)
REAL K1,K2,K3,K4
DO 1 I=1,N
1 X0(I)=DT(I)
CALL F(N,X0,PR)
DO 2 I=1,N
K1(I)=HTEK*PR(I)
2 X0(I)=DT(I)+K1(I)/2.
CALL F(N,X0,PR)
DO 3 I=1,N
K2(I)=HTEK*PR(I)
3 X0(I)=DT(I)+K2(I)/2.
CALL F(N,X0,PR)
DO 4 I=1,N
K3(I)=HTEK*PR(I)
4 X0(I)=DT(I)+K3(I)
CALL F(N,X0,PR)
DO 5 I=1,N
K4(I)=HTEK*PR(I)
5 PRIR(I)=(K1(I)+2*K2(I)+2*K3(I)+K4(I))/6.
RETURN
END

```

*Замечание.* Размерность массивов DT, DT1, TOSH1, X0, K1, K2, K3, K4 в процедурах RK и K1234 больше или равна количеству уравнений в системе, и поскольку эти массивы являются локальными, то они должны быть описаны статически.

### Пример построения процедуры выхода

Предположим, что при интегрировании системы необходимо выводить на печать только значения первой построенной функции  $f_1$  через каждые десять секунд интегрирования по времени и прекратить интегрирование, если значение  $f_1$  превосходит YN:

```

SUBROUTINE DUT(N,N1,PRMT,REZ,PR,*)
DIMENSION PRMT(N1),REZ(N),PR(N)
COMMON YN,EPS1
NN=(PRMT(N1)-PRMT(1))/10.+1.
DO 1 I=1,NN
1 IF(ABS(REZ(I)-10.*1).LT.EPS1)PRINT 2,REZ(2)
2 FORMAT(1X,1Y(1)=,F10.1)
IF(ABS(REZ(2)=YN).LT.EPS1)RETURN1
RETURN
END

```

### Подпрограмма RKGS

Стандартная подпрограмма RKGS работает аналогично разобранный выше процедуре RK. Поэтому здесь мы ограничимся только краткими сведениями о ней.

### Обращение к подпрограмме

CALL RKGS (PRMT, Y, D, N, IHLF, F, OUT, AUX)

Параметры F и OUT должны быть описаны оператором EXTERNAL.

## Описание параметров

PRMT — вектор входных и выходных данных размерности большей или равной 5. Компоненты этого вектора, кроме PRMT (5), в подпрограмме сохраняются

### Входные параметры

- PRMT (1) — нижняя граница интегрирования  
PRMT (2) — верхняя граница интегрирования  
PRMT (3) — начальный шаг интегрирования  
PRMT (4) — верхняя граница погрешности  
PRMT (5) — не является входным параметром. Подпрограмма RKGS сама полагает PRMT (5) = 0. Если пользователю необходимо закончить интегрирование в некоторой внутренней точке области, то при приближении интегрирования к этой точке в процедуре OUT следует задать PRMT (5) любое ненулевое значение
- Y — входной вектор начальных значений. При работе подпрограммы RKGS в вектор Y засылаются значения зависимых переменных в промежуточных точках интегрирования
- D — входной вектор весовых коэффициентов погрешности. Сумма его компонентов должна быть равной единице. Во время интегрирования вектор D становится вектором производных функций  $y_i$  в текущей точке интегрирования
- N — число уравнений в исходной системе дифференциальных уравнений
- IHLF — выходной параметр числа делений пополам начального шага интегрирования. Если в процессе интегрирования число делений станет больше 10, или PRMT (3) = 0, или будет иметь место соотношение

$$\text{sign}(\text{PRMT}(3)) \neq \text{sign}(\text{PRMT}(2) - \text{PRMT}(3)),$$

то подпрограмма передает управление в основную программу (программу пользователя), присваивая параметру IHLF соответственно значения 11, 12, 13

- F — идентификатор внешней процедуры вычисления правых частей системы, численные значения которых присваиваются вектору D
- OUT — идентификатор внешней процедуры выхода
- AUX — вспомогательный двумерный массив с 8 строками и N столбцами
- Процедуры F и OUT должны быть составлены пользователем.

### Заголовок процедуры F

SUBROUTINE F(T, Y, D).

### Формальные параметры

- T — независимая переменная
- Y, D — имеют тот же смысл, что и в подпрограмме RKGS
- Процедура F не должна изменять значений вектора Y и переменной T.

### Заголовок процедуры выхода

SUBROUTINE OUT(T, Y, D, IHLF, N, PRMT).

Все формальные параметры имеют тот же смысл, что и в процедурах RKGS и F.

В рабочем массиве AUX хранятся следующие векторы:

| AUX (k, i) | Распределение при $i = 1, 2, 3, \dots, N$   |
|------------|---------------------------------------------|
| AUX (1, i) | Вектор значений функций $Y(t_j)$            |
| AUX (2, i) | Вектор производных $Y'(t_j)$                |
| AUX (3, i) | Вектор ошибок округления в точке $t_j + 2h$ |
| AUX (4, i) | Вектор значений функций $Y(t_j + 2h)$       |
| AUX (5, i) | Вектор значений функций $Y(t_j + h)$        |
| AUX (6, i) | Вектор ошибок округления в точке $t_j + h$  |
| AUX (7, i) | Вектор производных $F(t_j + h; Y(t_j + h))$ |
| AUX (8, i) | Вектор весовых коэффициентов $(1/15) D$     |

Параметр  $t_j$  в таблице означает текущую точку интегрирования.

*Замечание.* Следует отметить, что единственным существенным отличием в алгоритмах процедур RK и RKGS является мера локальной ошибки. В подпрограмме RKGS, в отличие от процедуры RK, используется только одна мера локальной ошибки — величина

$$\delta = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^N d_i |y_i^{(1)} - y_i^{(2)}|, \quad (10)$$

где  $d_i$  — весовые коэффициенты погрешности (компоненты вектора  $D$ ).

### Метод предиктор — корректор

Для отыскания численного решения системы (4) можно воспользоваться методом предиктор — корректор. Этот метод требует выполнения только двух вычислений правой части системы на каждом шаге интегрирования, что выгодно отличает его от других методов того же порядка точности, в том числе и метода Рунге—Кутты. Вторым его достоинством является то, что он позволяет оценивать локальную абсолютную погрешность расчета на каждом шаге интегрирования, а это дает возможность изменять величину шага без дополнительных затрат машинного времени.

Напомним математические соотношения лежащие, в основе этого метода.

Выберем шаг интегрирования  $h$  и будем искать приближенные значения  $y_j$  решения  $y(t)$  системы (4) при  $t_j = jh$ ,  $j = 4, 5, 6, \dots$  в следующей последовательности.

1. По формуле

$$p_{j+1} = y_{j-3} + \frac{4}{3} h (2y'_j - y'_{j-1} + 2y'_{j-2}) \quad (11)$$

находится предиктор  $p$  в точке  $t_{j+1}$ . Предполагается, что значения  $y_1, y_2, y_3, y'_1, y'_2, y'_3$  известны или предварительно найдены каким-либо другим способом, например методом Эйлера или Рунге—Кутты.

2. Вычисляется производная от  $p$  в той же точке  $t_{j+1}$

$$p'_{j+1} = F(t_{j+1}, p_{j+1}). \quad (12)$$

3. По формуле

$$c_{j+1} = y_{j-1} + \frac{h}{3} (p_{j+1} + 4y'_j + y'_{j-1}) \quad (13)$$

находится корректор  $c$  в точке  $t_{j+1}$ .

4. Абсолютная погрешность вычисления корректора равна

$$\varepsilon_{j+1} = \frac{1}{29} |c_{j+1} - p_{j+1}|, \quad (14)$$

так что решение в точке  $t_{j+1}$  представляется в виде

$$y_{j+1} = c_{j+1} + \frac{1}{29} (p_{j+1} - c_{j+1}). \quad (15)$$

5. С помощью выражения

$$y'_{j+1} = F(t_{j+1}, y_{j+1}) \quad (16)$$

определяется производная построенного решения, затем происходит переход к построению решения в точке  $t_{j+2}$  и т. д.

Отметим, что предельная абсолютная погрешность приближенного решения  $y_j = y(t_j)$  на отрезке  $[a, b]$  равна

$$E = \frac{b-a}{90} M h^4, \quad (17)$$

где  $M = \max |y^{(5)}(t)|$  при  $a \leq t \leq b$ .

Следовательно, погрешность метода составляет  $O(h^4)$ .

### Подпрограмма HPCG

Один из вариантов этого метода (метод Хемминга) реализован в стандартной подпрограмме HPCG.

#### Обращение к подпрограмме

CALL HPCG (PRMT, Y, D, N, IHLF, F, OUT, AUX).

Параметры F, OUT должны быть описаны оператором EXTERNAL.

#### Описание параметров

PRMT — входной вектор, размерность которого больше или равна 5  
PRMT (1) — нижняя граница интервала интегрирования

- PRMT (2) — верхняя граница интегрирования  
 PRMT (3) — начальный шаг интегрирования  
 PRMT (4) — допустимая погрешность вычислений (оптимальные значения PRMT (3) и PRMT (4) могут быть получены с помощью численных экспериментов)  
 PRMT (5) — не является входным элементом. Если пользователь хочет прекратить вычисления в подпрограмме HPCG в некоторой внутренней точке интервала интегрирования, то он должен задать в процедуре выхода OUT PRMT (5)  $\neq 0$ . Если необходимо интегрировать до конца интервала, то подпрограмма HPCG сама устанавливает PRMT (5) = 0  
 Y — входной вектор начальных значений. При работе подпрограммы он принимает значения решения в промежуточных точках интегрирования  
 D — входной вектор весовых коэффициентов погрешности. Сумма его компонентов должна быть равна единице. При работе подпрограммы вектор D не сохраняется, он принимает значения вектора производных от решения в промежуточных точках интегрирования  
 N — число уравнений в системе  
 INLF — выходной параметр числа делений пополам начального шага интегрирования. Если в процессе интегрирования число делений станет больше 10, а также если PRMT (3) = 0 или будет иметь место соотношение

$$\text{sign}(\text{PRMT}(3)) \neq \text{sign}(\text{PRMT}(2) - \text{PRMT}(3)),$$

то подпрограмма передает управление в основную программу (программу пользователя), присваивая параметру INLF соответственно значения 11, 12, 13

F — имя внешней процедуры вычисления правых частей системы, значения которых присваиваются вектору D

OUT — имя внешней процедуры выхода

AUX — вспомогательный массив (двумерный) с 16 строками и N столбцами

Процедуры F и OUT должны быть составлены пользователем.

### Заголовок процедуры F

SUBROUTINE F (T, Y, D)

#### *Формальные параметры*

T — независимая переменная

Y, D — имеют тот же смысл, что и в подпрограмме HPCG.

Процедура F не должна изменять значений вектора Y и переменной T.

### Заголовок процедуры выхода

SUBROUTINE OUT (T, Y, D, INLF, N, PRMT).

Все формальные параметры имеют тот же смысл, что и в процедурах F и HPCG. При работе процедуры HPCG в рабочем массиве AUX хранятся промежуточные значения решения Y и его производных в следующем порядке:

| AUX (k, i)  | Распределение значений при $i = 1, 2, 3, \dots, N$ |               |
|-------------|----------------------------------------------------|---------------|
| AUX (1, i)  | Вектор-функция                                     | $Y(t_{j-6})$  |
| AUX (2, i)  | То же                                              | $Y(t_{j-5})$  |
| AUX (3, i)  | »                                                  | $Y(t_{j-4})$  |
| AUX (4, i)  | »                                                  | $Y(t_{j-3})$  |
| AUX (5, i)  | »                                                  | $Y(t_{j-2})$  |
| AUX (6, i)  | »                                                  | $Y(t_{j-1})$  |
| AUX (7, i)  | »                                                  | $Y(t_j)$      |
| AUX (8, i)  | »                                                  | $Y'(t_{j-6})$ |
| AUX (9, i)  | »                                                  | $Y'(t_{j-5})$ |
| AUX (10, i) | »                                                  | $Y'(t_{j-4})$ |
| AUX (11, i) | »                                                  | $Y'(t_{j-3})$ |
| AUX (12, i) | »                                                  | $Y'(t_{j-2})$ |
| AUX (13, i) | »                                                  | $Y'(t_{j-1})$ |
| AUX (14, i) | »                                                  | $Y'(t_j)$     |
| AUX (15, i) | Вектор весовых коэффициентов ошибки D              |               |
| AUX (16, i) | Вектор P ( $t_j$ ) — C ( $t_j$ )                   |               |

Параметр  $t_j$  в таблице обозначает текущую точку интегрирования.

### Алгоритм работы подпрограммы HPCG

Вычисления в этой подпрограмме производятся по формулам модифицированного метода предиктор—корректор (метода Хемминга).

Предиктор, как и в классическом случае, вычисляется в каждой  $t_{j+1}$  точке интегрирования по формуле

$$p_{j+1} = y_{j-3} + \frac{4h}{3} (2y'_j - y'_{j-1} + 2y'_{j-2}), \quad (18)$$

где  $j = 3, 4, 5, \dots$

Затем определяются значения модификатора

$$M_{j+1} = p_{j+1} - \frac{112}{121} (p_j - c_j) \quad (19)$$

и его производной

$$M'_{j+1} + F(t_{j+1}, M_{j+1}). \quad (20)$$

Корректор в этом случае находится по формуле

$$c_{j+1} = \frac{1}{8} [9y_j - y_{j-2} + 3h (M'_{j+1} + 2y'_j - y'_{j-1})]. \quad (21)$$

Окончательное решение в точке  $t_{j+1}$  определяется по формуле

$$y_{j+1} = c_{j+1} + \frac{9}{121} (p_{j+1} - c_{j+1}). \quad (22)$$

Мерой локальной ошибки является разность между предиктором и корректором

$$c_{j+1} - p_{j+1} = \frac{121}{360} h^5 y^5(\theta), \quad \theta \in [t_{j-3}, t_{j+1}]. \quad (23)$$

Поэтому контроль точности и выбор шага  $h$  осуществляются в подпрограмме с помощью выражения

$$\delta = \sum_{i=1}^N d_i |p_{j+1,i} - c_{j+1,i}|, \quad (24)$$

где  $d_i, i = 1, 2, \dots, N$  — весовые коэффициенты ошибки, заданные исходным вектором  $D$ .

Если  $\delta$  не меньше заданной точности  $\varepsilon$ , то шаг  $h$  делится пополам. Вычисления при этом повторяются вновь с использованием специальных итерационных формул. Если  $\delta$  меньше  $\varepsilon$ , то решение считается найденным и вместе со значениями  $t_{j+1}$  и вектором производных  $F(t_{j+1}, y_{j+1})$  передается в процедуру выхода. Если  $\delta < \varepsilon/50$ , дальнейшие вычисления выполняются с удвоенным шагом интегрирования.

Для начала интегрирования по методу предиктор—корректор необходимо знать значения вектор-функции  $y$  и ее производных в четырех начальных точках. Для их вычисления в подпрограмме используется разновидность метода Рунге—Кутты, предложенная Ральстоном. Формулы Ральстона достаточно громоздки и поэтому здесь не приводятся. Отметим только, что они имеют наименьшую погрешность среди всех модификаций метода Рунге—Кутты четвертого порядка. Однако эта модификация неустойчива, и поэтому значения вектор-функции  $y$ , полученные в точках  $t_1, t_2, t_3$ , дополнительно уточняются итерациями с использованием интерполяционных формул четвертого порядка.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1973, с. 459—461.
2. Калиткин Н. Н. Численные методы. — М.: Наука, 1978, с. 246—250.

## Работа № 3

### ИССЛЕДОВАНИЕ РЕАКЦИИ СИСТЕМЫ АТМОСФЕРА — ВЕРХНИЙ КВАЗИОДНОРОДНЫЙ СЛОЙ ОКЕАНА НА ВНЕШНЕЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

#### Введение

Исследование реакции климатической системы океан—атмосфера на внешнее возмущение (см. лабораторную работу № 2) показало, что время установления равновесного термического режима ВКС приблизительно в 50 раз меньше, нежели ГС океана. Следовательно, при изучении реакции климатической системы на временных масштабах порядка 10 лет взаимодействие между ВКС и ГС можно не учитывать и тем самым обойти определенные трудности, связанные с заданием коэффициента теплообмена между ВКС и ГС.

#### Уравнения модели

Воспользуемся нульмерной моделью системы океан—атмосфера, рассмотренной в лабораторной работе № 2, исключив из рассмотрения ГС. Тогда исходные уравнения применительно к северному полушарию могут быть записаны в виде

$$c_a (dT_a/dt) + \lambda_{am} (T_a - T_m) + \lambda_a T_a = \Delta Q; \quad (1)$$

$$c_m (dT_m/dt) + \lambda_{am} (T_m - T_a) = 0; \quad (2)$$

здесь все обозначения прежние.

Пусть начальные возмущения глобальной температуры атмосферы и ВКС известны, т. е.

$$T_a = T_{a0}, \quad T_m = T_{m0} \quad \text{при } t = 0, \quad (3)$$

а приток тепла  $\Delta Q$  изменяется во времени по гармоническому закону

$$\Delta Q = A \sin[\sigma(t - t_0)],$$

где  $A$  — амплитуда и  $\sigma = 2\pi/T$  — частота сезонных колебаний,  $T = 1$  год.

Не нарушая общности задачи, предположим, что в начальный момент времени возмущение притока тепла отсутствует, т. е.

$$\Delta Q = A \sin(\sigma t). \quad (4)$$

Система (1) — (4) является исходной при решении сформулированной в названии работы задачи. Числовые значения параметров, фигурирующих в (1) — (4), можно найти в описании лабораторной работы № 2.



# Аналитическое решение системы (1) — (4)

Следуя [1], найдем аналитическое решение выписанной линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Продифференцировав (2) по времени

$$c_m d^2 T_m / dt^2 + \lambda_{a m} dT_m / dt - \lambda_{a m} dT_a / dt = 0$$

и подставив в результирующее уравнение соотношения

$$\frac{dT_a}{dt} = \frac{\Delta Q}{c_a} - \frac{\lambda_a}{c_a} T_a - \frac{\lambda_{a m}}{c_a} T_a + \frac{\lambda_{a m}}{c_a} T_m;$$

$$T_a = \frac{c_m}{\lambda_{a m}} \frac{dT_m}{dt} + T_m,$$

представляющие собой тождественные преобразования (1) и (2), получим линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции  $T_m(t)$ . Оно имеет вид

$$d^2 T_m / dt^2 + a dT_m / dt + b T_m = f_1(t), \quad (5)$$

где

$$a = \frac{\lambda_{a m}}{c_m} + \frac{\lambda_{a m}}{c_a} + \frac{\lambda_a}{c_a}; \quad b = \frac{\lambda_a \lambda_{a m}}{c_a c_m};$$

$$f_1(t) = \frac{\lambda_{a m}}{c_a c_m} \Delta Q.$$

Воспользуемся (2), (3) и перепишем начальные условия, которым должна удовлетворять функция  $T_m$ , в виде

$$T_m = T_{m0};$$

$$dT_m / dt = \lambda_{a m} (T_{a0} - T_{m0}) / c_m \text{ при } t = 0. \quad (6)$$

Общее решение дифференциального уравнения (5) имеет вид (см. [2], с. 375—376)

$$T_m = \frac{2}{\lambda} \int_0^t f_1(\tau) \exp \left[ \frac{1}{2} a (\tau - t) \right] \operatorname{sh} \left[ \frac{\lambda_0}{2} (t - \tau) \right] d\tau +$$

$$+ c_1 \exp \left( \frac{-a + \lambda_0}{2} t \right) + c_2 \exp \left( \frac{-a - \lambda_0}{2} t \right). \quad (7)$$

Преобразуем это выражение к виду

$$T_m = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t) +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_0} \int_0^t f_1(\tau) \exp[\lambda_1(t - \tau)] d\tau - \frac{1}{\lambda_0} \int_0^t f_1(\tau) \exp[\lambda_2(t - \tau)] d\tau, \quad (8)$$

где

$$\lambda_0 = \sqrt{a^2 - 4b}; \quad \lambda_{1,2} = (-a \pm \lambda_0) / 2.$$

Для определения констант  $c_1$  и  $c_2$  подставим (8) в (6). В результате получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= T_{m0}; \\ \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 &= \lambda_{am} (T_{a0} - T_{m0}) / c_m. \end{aligned}$$

Ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{\lambda_{am} (T_{m0} - T_{a0}) + \lambda_2 c_m T_{m0}}{c_m (\lambda_2 - \lambda_1)}, \\ c_2 &= \frac{\lambda_{am} (T_{m0} - T_{a0}) + \lambda_1 c_m T_{m0}}{c_m (\lambda_1 - \lambda_2)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Упростим выражения для  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  с учетом оценки  $4b/a^2 \approx 1,36 \cdot 10^{-4}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_1}{a} &= \frac{1}{2} \left( -1 + \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}} \right) \approx \frac{1}{2} \left( -1 + 1 - \frac{1}{2} \frac{4b}{a^2} \right) = -\frac{b}{a^2}; \\ \frac{\lambda_2}{a} &= \frac{1}{2} \left( -1 - \sqrt{1 - \frac{4b}{a^2}} \right) \approx \frac{1}{2} \left( -1 - 1 + \frac{1}{2} \frac{4b}{a^2} \right) \approx -1, \end{aligned} \quad (10)$$

откуда

$$\lambda_1 \approx -b/a; \quad \lambda_2 \approx -a.$$

Принимая значения параметров модели равными  $\lambda_{am} = 45 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ;  $\lambda_a = 2,4 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})$ ;  $c_m = 10 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{год})$ ;  $c_a = 0,45 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{год})$ , находим

$$\begin{aligned} a &\approx \lambda_{am} / c_m; \quad \lambda_1 \approx -b/a \approx -\lambda_a / c_m; \\ \lambda_2 &\approx -a; \quad \lambda_0 \approx -\lambda_a. \end{aligned} \quad (11)$$

Воспользуемся теперь оценкой (11) и предположим, что  $|T_{m0}| \ll |T_{a0}|$ . Тогда выражения для констант  $c_1$  и  $c_2$  примут вид

$$\begin{aligned} c_1 &\approx (c_m T_{m0} + c_a T_{a0}) / c_m; \\ c_2 &\approx c_a (T_{m0} - T_{a0}) / c_m. \end{aligned} \quad (12)$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\lambda_0} \approx -\frac{1}{\lambda_2} \approx \frac{1}{a} \approx \frac{c_a}{\lambda_{am}} = \frac{1}{c_m} \left( \frac{c_m c_a}{\lambda_{am}} \right), \quad (13)$$

и перепишем равенство (8) с учетом (4), (12) и (13) в виде

$$\begin{aligned} c_m T_m &= (c_m T_{m0} + c_a T_{a0}) \exp \left( -\frac{\lambda_a}{c_m} t \right) + c_a (T_{m0} - \\ &- T_{a0}) \exp \left( -\frac{\lambda_{am}}{c_a} t \right) + \int_0^t A \sin(\sigma t) \exp [\lambda_1 (t - \tau)] d\tau - \\ &- \int_0^t A \sin(\sigma \tau) \exp [\lambda_2 (t - \tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (14)$$

Преобразуем слагаемые, содержащие интегралы в правой части (14). Первое из этих слагаемых может быть записано следующим образом:

$$A \exp(\lambda_1 t) \int_0^t \sin(\sigma \tau) \exp(-\lambda_1 \tau) d\tau$$

или после интегрирования

$$A \exp(\lambda_1 t) \frac{\sigma}{\lambda_1^2 + \sigma^2} - A \frac{\lambda_1}{\lambda_1^2 + \sigma^2} \sin(\sigma t) - A \frac{\sigma}{\lambda_1^2 + \sigma^2} \cos(\sigma t). \quad (15)$$

При выбранных значениях параметров модели

$$|\lambda_1| \ll \sigma \ll |\lambda_2| \quad (16)$$

и, тем более,

$$|\lambda_1|^2 \ll \sigma^2 \ll |\lambda_2|^2. \quad (17)$$

Поэтому, вводя обозначение

$$-\lambda_1/(\lambda_1^2 + \sigma^2) = \cos \varphi \quad (18)$$

$$\sigma/(\lambda_1^2 + \sigma^2) = \sin \varphi, \quad (19)$$

где

$$\varphi = \arccos(-\lambda_1/\sqrt{\lambda_1^2 + \sigma^2}) = \pi - \arccos(\lambda_1/\sqrt{\lambda_1^2 + \sigma^2}) \approx \pi - \arccos(0) = \pi/2 = \sigma T/4, \quad (20)$$

перепишем (15) с учетом (16) — (20) в виде

$$\frac{A}{\sigma} \exp\left(-\frac{\lambda_a}{c_m} t\right) + \frac{A}{\sigma} \sin\left[\sigma\left(t - \frac{T}{4}\right)\right]. \quad (21)$$

Аналогично, второе слагаемое, содержащее интеграл в правой части (14), может быть представлено в виде

$$-\int_0^t A \sin(\sigma \tau) \exp[\lambda_2(t - \tau)] d\tau \approx \frac{A}{\lambda_2} \sin(\sigma t). \quad (22)$$

С учетом (21) и (22) решение (14) принимает окончательный вид:

$$\begin{aligned} c_m T_m = & (c_m T_{m0} + c_a T_{a0}) \exp\left(-\frac{\lambda_a}{c_m} t\right) + c_a (T_{m0} - \\ & - T_{a0}) \exp\left(-\frac{\lambda_a}{c_a} t\right) + \frac{A}{\sigma} \sin\left[\sigma\left(t - \frac{T}{4}\right)\right] + \\ & + \frac{A}{\lambda_2} \sin(\sigma t) + \frac{A}{\sigma} \exp\left(-\frac{\lambda_a}{c_m} t\right). \end{aligned} \quad (23)$$

Обсудим физический смысл отдельных членов решения. Левая часть (23) представляет собой изменение теплосодержания ВКС. Оно зависит от начального теплосодержания системы океан—атмосфера (первое слагаемое правой части решения) и от изменения

теплосодержания атмосферы, связанного с теплообменом на границе раздела вода—воздух (второе слагаемое). Третье и четвертое слагаемые описывают соответственно годовые гармоники теплосодержания ВКС с амплитудами  $A/\sigma$  и  $A/\lambda_2$  и фазами, равными 3 и 0 мес. Наконец, пятое слагаемое характеризует изменение теплосодержания ВКС, обусловленное начальным возмущением. При достаточно больших  $t$  выражение для изменения теплосодержания ВКС принимает вид

$$c_m T_m(t) = \frac{A}{\sigma} \sin \left[ \sigma \left( t - \frac{T}{4} \right) \right]. \quad (24)$$

### Порядок выполнения и задачи работы

1. Определить временной интервал, в течение которого справедливо выражение (24).

2. Получить выражение для изменения теплосодержания атмосферы, преобразовав исходную систему уравнений к уравнению относительно  $T_a(t)$ .

3. Модернизировать программу вычислений, составленную при выполнении работы № 2, и произвести расчет на ЭВМ эволюции системы атмосфера — ВКС для интервала времени, найденного в п. 1.

4. Сравнить результаты численного и аналитического решений.

5. Получить численное решение применительно к случаю, когда взаимодействие между атмосферой и океаном отсутствует.

### Форма отчетности

В отчете приводятся оценка интервала времени, для которого справедливо соотношение (24), вывод выражения для  $T_a(t)$ , распечатка программы, результаты расчетов, а также графики временных зависимостей, иллюстрирующие обсуждение полученных результатов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Пер. с нем.— М.: Наука, 1971.— 576 с.
2. Садков С. В. О реакции климатической системы океан — атмосфера на внешние периодические возбуждения годового периода.— Труды Гидрометцентра СССР, 1986, вып. 273, с. 114—118.

# ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В СИСТЕМЕ ОКЕАН — АТМОСФЕРА

## Введение

При изучении междугодовой изменчивости гидрометеорологических полей было замечено, что процессы в системе океан — атмосфера часто имеют колебательный характер, причем период этих колебаний составляет несколько лет. Следуя [1, 5], рассмотрим несколько схем, объясняющих колебательные режимы в системе океан — атмосфера.

Одна из таких схем, описывающая взаимодействие циркуляций в Северной Атлантике и в Арктическом бассейне, была предложена В. В. Шулейкиным [6]. Ее исходные предпосылки сводятся к следующему. Допустим, что в системе Гольфстрим — Северо-Атлантическое течение сформировалась аномалия температуры поверхности воды (ТПВ). Распространяясь вдоль этих течений, аномалия изменяет тепловой режим Арктического бассейна и как следствие этого площадь морских льдов, что в свою очередь влечет за собой изменение режима холодных течений (в частности, Лабрадорского). Это обстоятельство сказывается в районе смещения холодных вод с теплым Северо-Атлантическим течением и приводит к образованию новой аномалии, знак которой будет противоположен знаку первоначальной аномалии. Такой процесс описывается системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} dI/dt &= -m(Q - Q_0); \\ dQ/dt &= n(I - I_0), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $I$  — площадь льдов в Арктическом бассейне;  $Q$  — теплосодержание Северо-Атлантического течения;  $m$  и  $n$  — размерные множители, определяемые экспериментально.

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned} Q &= c_1 \cos \sqrt{mn} t + c_2 \sin \sqrt{mn} t; \\ I &= -c_1 \sqrt{\frac{m}{n}} \sin \sqrt{mn} t + c_2 \sqrt{\frac{m}{n}} \cos \sqrt{mn} t. \end{aligned}$$

Оно описывает колебания  $Q$  и  $I$  с периодом  $\tau = 2\pi/\sqrt{mn}$ . Лабораторные эксперименты [6], показали что  $\tau$  составляет приблизительно 2,5 года.

А. И. Дуванин [2, 3] предложил другую схему колебаний в системе североатлантической циркуляции. Близкая к ней схема для северной части Тихого океана была разработана В. Г. Кортон [5].

Они рассуждали следующим образом. Пусть в районе теплого течения (Гольфстрим или Куроисио) имеется положительная аномалия температуры воды. Эта аномалия должна усилить теплообмен между океаном и атмосферой и вызвать смещение полярного фронта на север. Соответственно переместится на север и атмосферный полярный фронт. Расстояние между арктическим и полярным фронтами уменьшится, что приведет к увеличению меридиональных градиентов температуры и усилению западно-восточного переноса. Это в свою очередь должно способствовать интенсификации, холодного течения (Лабрадорского в Северной Атлантике и Калифорнийского в северной части Тихого океана) и образованию холодной аномалии. Однако перенос холодных воздушных масс и холодной воды в восточную часть океана должен иметь своим следствием преобладание в этих районах сухой малооблачной погоды. Соответственно увеличится поступление солнечной радиации и сформируется новая положительная аномалия температуры поверхности океана. Период подобного рода колебаний составляет приблизительно 4—7 лет в Северной Атлантике и 6 лет в северной части Тихого океана.

Наиболее яркое проявление междугодовой изменчивости в системе океан—атмосфера представляет собой так называемое явление *Эль-Ниньо* — периодически повторяющееся крупномасштабное потепление восточной части экваториальной зоны Тихого океана, обусловленное аномальным продвижением на восток, а затем на юго-восток (вдоль побережья Южной Америки) теплых вод Межпассатного противотечения. По результатам многолетних наблюдений период проявления Эль-Ниньо в среднем за 50-летний период наблюдений составляет 3,2 года [8]. Как было показано в [7], существует тесная связь этого явления с крупномасштабными процессами в атмосфере над экваториальной и тропической частями Тихого и Индийского океанов. Крупномасштабное изменение состояния атмосферы над восточными и западными частями тропической зоны Тихого океана, приводящее к колебаниям атмосферного давления, а также преобладающих ветров, температуры и осадков в тропической зоне и в прилегающих к ней районах Индийского и Тихого океанов, получило название *Южного колебания*. Для того чтобы подчеркнуть тесную связь этих явлений, их называют Эль-Ниньо/Южное колебание или сокращенно *ENSO* (*El Niño/Southern Oscillation*) [8, 9].

В соответствии со схемой Бьеркнеса формирование *ENSO* происходит следующим образом. В экваториальной зоне существует значительный (до 8 °C) температурный контраст между западной и восточной частями Тихого океана. Аналогичный контраст температуры наблюдается и в нижней тропосфере. Это приводит к появлению зональной циркуляционной ячейки в атмосфере с опусканием воздуха на востоке экваториальной зоны и подъемом его на западе. Именно эта ячейка ответственна за поддержание значитель-

ного перепада атмосферного давления между восточной и западными частями Тихого океана (рис. 1).

Однако существование зональной циркуляционной ячейки вызывает усиление экваториального апвеллинга в океане. Его интенсивность достигает максимума в восточной части экваториальной зоны, над которой преобладает сухая, малооблачная погода. Над западной частью океана (здесь преобладает подъем воздушных масс) отмечается понижение атмосферного давления и усиление испарения и осадков. Такая картина наблюдается в «нормальные» годы (речь идет в основном о периоде с ноября по февраль).

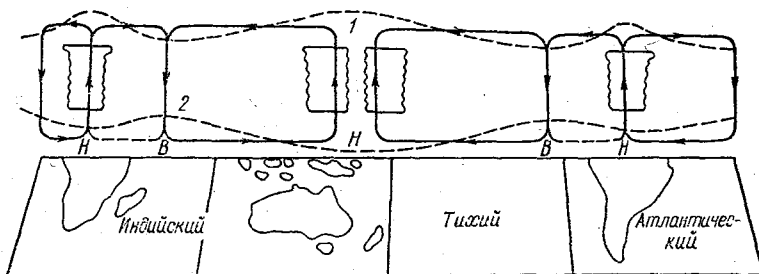


Рис. 1. Схема атмосферной циркуляции в экваториальной зоне Земли, по Йернелу и Киладису [9].

1 — уровень 200 гПа; 2 — уровень 700 гПа.

При уменьшении перепада атмосферного давления, наблюдавшемся в годы развития Эль-Ниньо, пассаты ослабевают. Это приводит к тому, что теплая поверхностная вода в системе Межпассатного противотечения проникает на восток значительно дальше, чем в обычные годы. Соответственно происходит углубление термоклина в восточной части Тихого океана и ослабление экваториального апвеллинга. В результате формируется положительная аномалия ТПВ, распространяющаяся на значительную часть экваториальной зоны Тихого океана (рис. 2). Следовательно, над восточными районами экваториальной зоны океана создаются условия, благоприятствующие развитию конвекции и увлажнению прилегающих к поверхности океана слоев атмосферы. Сильно увлажненный воздух смещается с Индонезийского бассейна на восток, что и приводит к ливням и штормам у побережья Южной Америки. В то же время над западной частью исследуемой области (индонезийский бассейн) преобладает более сухая и теплая погода. Она благоприятствует уменьшению контраста температур воды и воздуха между восточными и западными районами, а также уменьшению зонального перепада атмосферного давления и ослаблению пассатов.

Однако постепенно, благодаря ослаблению пассатов, в восточных частях экваториальной и тропической зон Тихого океана кон-

центрируются холодные воды, обязанные своим происхождением существованию Перуанского течения и апвеллинга у берегов Перу и Чили. Это приводит к обострению температурного контраста и восстановлению условий «нормального» года. Цикл ослабление—усиление зонального контраста температур воды и воздуха имеет период порядка двух лет. По мнению Бьеркнеса, двухгодичная цикличность взаимодействия пассатных ветров с экваториальными течениями обусловлена смещениями ячеек атмосферной циркуляции над экваториальной зоной земного шара. Проявления Эль-

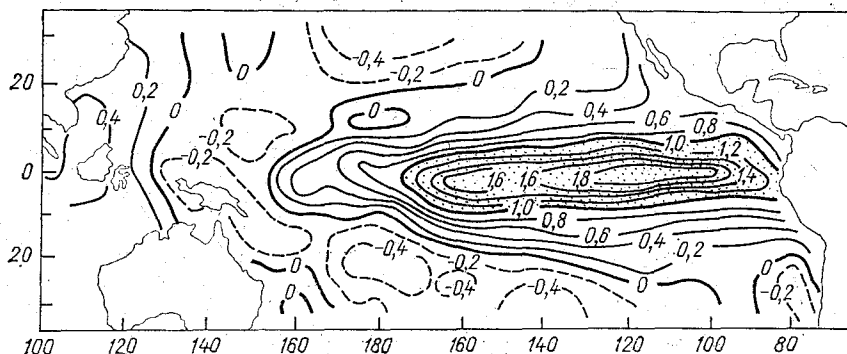


Рис. 2. Аномалия температуры поверхности океана в экваториальной и тропической зонах южной части Тихого океана, по Йернелу и Киладису [8] Получена усреднением данных измерений за ноябрь—январь 1957—1958, 1965—1966, 1969—1970 и 1972—1973 гг., т. е. за период проявления Эль-Ниньо.

Ниньо большей продолжительности связаны, как отмечено в [5], с перемещением температурных аномалий в системах северотихоокеанской и южнотихоокеанской циркуляций в океане.

### Уравнения модели

Рассмотрим систему атмосфера — ВКС—ГС океана, описываемую уравнениями

$$\begin{aligned} c_a dT_a/dt + \lambda_{am} (T_a - T_m) &= 0; \\ c_m dT_m/dt + \lambda_{am} (T_m - T_a) + \lambda_{md} (T_m - T_d) &= 0; \\ c_d dT_d/dt + \lambda_{md} (T_d - T_m) &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

и начальными условиями

$$T_a = T_a^0; T_m = T_m^0; T_d = T_d^0 \text{ при } t = 0, \quad (3)$$

где сохранены обозначения, принятые в работе № 2.

Эти уравнения отличаются от использованных в работе № 2 отсутствием источников и стоков тепла в атмосфере ( $\lambda_a, \Delta Q = 0$ ); значения коэффициентов теплообмена на границах раздела атмо-



сфера — ВКС ( $\lambda_{am}$ ) и ВКС—ГС ( $\lambda_{md}$ ), а также значения теплоемкости отдельных звеньев системы считаются такими же, как в работе № 2.

Цель настоящей работы заключается в том, чтобы определить периоды собственных колебаний в системе атмосфера — ВКС—ГС.

Введем вектор-функцию  $\mathbf{x} = (T_a T_m T_d)^T$  и перепишем систему (2), (3) в виде:

$$d\mathbf{x}/dt + A\mathbf{x} = 0; \quad (4)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 \text{ при } t = 0, \quad (5)$$

где  $A$  — матрица вида

$$\begin{pmatrix} \lambda_{am}/c_a & -\lambda_{am}/c_a & 0 \\ -\lambda_{am}/c_m & (\lambda_{am} + \lambda_{md})/c_m & -\lambda_{md}/c_m \\ 0 & -\lambda_{md}/c_d & \lambda_{md}/c_d \end{pmatrix}.$$

Решение системы (4), (5) имеет вид  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^0 e^{-At}$ , откуда следует, что в том случае, когда мнимая часть собственных значений матрицы  $A$  отлична от нуля, решение будет осциллировать во времени. Таким образом, рассматриваемая задача свелась к отысканию собственных значений матрицы  $A$ . Подробное изложение способа решения этой задачи приводится в Приложении № 1 (см. также [4]).

### Порядок выполнения и задачи работы

1. Составить программу для определения собственных значений матрицы  $A$ . Программа должна предусматривать возможность изменения параметров  $c_a$ ,  $c_m$ ,  $c_d$  и  $\lambda_{am}$ ,  $\lambda_{md}$ . Рекомендации по составлению программы можно найти в Приложении.

2. Рассчитать собственные значения матрицы  $A$  при  $c_a = 0,45$  Вт/(м<sup>2</sup>·год·К),  $c_m = 10$  Вт/(м<sup>2</sup>·год·К),  $c_d = 100$  Вт/(м<sup>2</sup>·год·К),  $\lambda_{am} = 45$  Вт/(м<sup>2</sup>·К),  $\lambda_{md} = 22$  Вт/(м<sup>2</sup>·К).

3. Повторить расчет при  $c_d = 150, 200, 300$  Вт/(м<sup>2</sup>·год·К) и прочих равных условиях.

4. Повторить п. 2, варьируя значение  $\lambda_{md}$ . Последнее принять равным 0, 1, 2, 3, 4 Вт/(м<sup>2</sup>·К).

5. Найденные решения использовать для определения периодов собственных колебаний в системе океан—атмосфера.

6. Проанализировать зависимость спектра собственных колебаний в системе океан—атмосфера от интенсивности взаимодействия между ВКС и ГС и от толщины ГС.

### Форма отчетности

Отчетными материалами являются: текст программы, распечатка и анализ результатов расчета.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Взаимодействие океана и атмосферы.— В кн.: Физика океана, т. 1. Гидрофизика океана. М., Наука, 1978, с. 329—339.
2. Дуванин А. И. Изменчивость течений в связи с колебаниями интенсивности циркуляции в северной части Атлантического океана.— Метеорология и гидрология, 1949, № 2, с. 131—136.
3. Дуванин А. И. О модели взаимодействия между макропроцессами в океане и атмосфере.— Океанология, 1968, т. 8, вып. 4, с. 571—580.
4. Матвеев Н. М. Сборник задач и упражнений по обыкновенным дифференциальным уравнениям.— Минск: Вышэйшая школа, 1967, с. 148—157.
5. Монин А. С., Каменкович В. М., Корт В. Г. Изменчивость Мирового океана.— Л.: Гидрометеиздат, 1974, с. 197—217.
6. Шулейкин В. В. Физика моря.— М.: Изд. АН СССР, 1968, с. 669—674.
7. Bjerkness G. Atmospheric teleconnections from the equatorial Pacific.— Mon. Wea. Rev., 1969, vol. 97, N 3, p. 163—173.
8. Yarnal B. Extratropical teleconnection with El-Nino/Southern Oscillation (ENSO) events.— Progress in Phys. Geography, 1985, vol. 9, N 3, p. 315—352.
9. Yarnal B., Kiladis G. Tropical teleconnections associated with El-Nino/Southern Oscillation (ENSO) events.— Progress in Phys. Geography, 1985, vol. 9, N 4, p. 524—558.

## Приложение

### АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ПРОБЛЕМА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Полная алгебраическая проблема собственных значений состоит в определении всех  $\lambda$ , при которых система  $N$  однородных линейных уравнений с  $N$  неизвестными

$$Ax = \lambda x \quad (1)$$

имеет нетривиальные решения  $x$ . Такие решения называются собственными векторами, а соответствующие им  $\lambda$  — собственными значениями матрицы  $A$ .

Из общей теории решения линейных алгебраических уравнений известно, что для существования нетривиального решения задачи (1) должно выполняться условие

$$|A - \lambda E| = 0. \quad (2)$$

Раскрывая определитель в левой части уравнения (2), получим уравнение  $N$ -го порядка относительно  $\lambda$

$$a_0 + a_1\lambda + \dots + a_{N-1}\lambda^{N-1} + (-1)\lambda^N = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) называется характеристическим. Корнями его являются собственные значения матрицы  $A$ .

В принципе можно вычислить собственные значения с помощью приближенного нахождения корней уравнения (3), например методом парабол или секущих. Однако такой способ имеет существенный недостаток: он чувствителен к малым изменениям (погрешностям) элементов матрицы  $A$  и поэтому может быть использован только при небольших значениях  $N$  ( $N \ll 10$ ).

Задача нахождения собственных значений легко и с достаточной точностью решается для простых форм матрицы  $A$ : диагональной, трехдиагональной и почти треугольной. Собственные значения треугольной и диаго-

нальной матриц равны диагональным элементам. Поэтому численные решения задач на собственные значения обычно начинаются с приведения матрицы  $A$  к одной из простых форм. Приведение осуществляется с помощью преобразования подобия, т. е. построения такой матрицы  $G$ , что

$$G = F^{-1}AF. \quad (4)$$

Можно показать, что собственные значения исходной матрицы  $A$  и подобной матрицы  $G$  одинаковы. Действительно, пусть  $\lambda$ ,  $x$  — собственное значение и собственный вектор матрицы  $G$ . Тогда

$$\lambda x = Gx = F^{-1}AFx. \quad (5)$$

При умножении слева на матрицу  $F$  получим

$$\lambda (Fx) = A(Fx), \quad (6)$$

откуда видно, что  $\lambda$  также является собственным значением матрицы  $A$ .

Последовательное построение таких преобразований подобия в конечном счете приводит исходную матрицу  $A$  к одной из простых форм.

Математическое обеспечение ЭВМ типа ЕС имеет различные стандартные подпрограммы, реализующие те или иные устойчивые и экономичные по времени численные методы решения полной проблемы собственных значений. Для нахождения собственных значений действительной симметричной матрицы  $A$  можно пользоваться стандартной подпрограммой EIGEN. В этой подпрограмме реализован итерационный метод вращений. Последний основан на подборе последовательности преобразований подобия с использованием функций  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$ , которая в пределе преобразует симметричную матрицу  $A$  в диагональную [1]. Диагональные элементы полученной матрицы и будут искомыми собственными значениями. Основное достоинство этого метода — единообразие вычислений, что позволяет без большого труда реализовать его на ЭВМ.

## 1. Подпрограмма вычисления собственных значений действительной симметричной матрицы

Обращение к подпрограмме

CALL EIGEN (A, R, N, MV).

Описание параметров

- A — матрица, которая содержит только верхний треугольник исходной матрицы и изменяется в процессе вычислений
- R — матрица собственных векторов, расположенных по столбцам соответственно собственным значениям
- N — порядок матрицы A и R
- MV — входной параметр, определяющий характер вычислений. При MV = 0 вычисляются собственные значения и собственные вектора, при MV = 1 — только собственные значения. Заметим, что имя матрицы собственных векторов в любом случае должно присутствовать в обращении к подпрограмме EIGEN и оно должно отличаться от имени исходной матрицы

Все найденные собственные значения — действительные числа, поскольку матрица A симметрична, и они располагаются на главной диагонали матрицы A в порядке убывания их значений.

## Алгоритм работы подпрограммы

1. По внедиагональным элементам матрицы  $A$  строится норма

$$v_0 = \left( \sum_{\substack{l, m=1 \\ l \neq m}}^N a_{lm}^2 \right)^{1/2} \quad (7)$$

и пороговое число

$$P = v_0/N. \quad (8)$$

2. Последовательно выбирается каждый внедиагональный элемент  $a_{lm}$  отличный от нуля, и выполняется элементарное вращение для исключения этого элемента.

Предварительно вычисляются значения  $\sin \theta$  и  $\cos \theta$  с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \lambda &= -a_{lm}; \quad \mu = \frac{1}{2} (a_{ll} - a_{mm}); \\ \omega &= \operatorname{sign}(\mu) \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + \mu^2}}; \\ \sin \theta &= \frac{\omega}{\sqrt{2(1 + \sqrt{1 - \omega^2})}}; \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}. \end{aligned} \quad (9)$$

Вращение осуществляется в такой последовательности. Для  $i = 1, 2, \dots, N$

$$\begin{aligned} a_{il} &= a_{il} \cos \theta - a_{im} \sin \theta; \\ a_{im} &= a_{il} \sin \theta + a_{im} \cos \theta; \\ a_{ll} &= a_{ll} \cos^2 \theta + a_{mm} \sin^2 \theta - 2a_{lm} \sin \theta \cos \theta; \\ a_{mm} &= a_{ll} \sin^2 \theta + a_{mm} \cos^2 \theta + 2a_{lm} \cos \theta \sin \theta; \\ a_{lm} &= (a_{ll} - a_{mm}) \sin \theta \cos \theta + a_{lm} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом строится цикл элементарных вращений, который заканчивается после того, как все внедиагональные элементы станут меньше по абсолютной величине порогового значения.

3. Вновь вычисляются по формулам (7) и (8) номера преобразованной матрицы и новое пороговое значение. Затем повторяется п. 2 и т. д.

Этот итерационный процесс заканчивается, когда для очередного порогового значения станет справедливым неравенство

$$v_k = v_0 \cdot 10^{-\epsilon}/N. \quad (11)$$

Описанный процесс для симметричных действительных матриц всегда сходится с высокой точностью. Обычно сходимость наступает через  $4N^2$  элементарных вращений, причем чем больше кратных собственных значений, тем быстрее сходится метод. Если в результате вращений все внедиагональные элементы отличаются от нуля на  $O(\epsilon)$ , то диагональные элементы отличаются от истинных собственных значений на  $O(\epsilon^2)$ .

Задача нахождения собственных значений несимметричной матрицы несколько сложнее. С помощью преобразований подобия с выбором главного элемента такая матрица может быть приведена только к почти треугольному виду. Последующий итерационный процесс преобразует на каждом  $p$ -м шаге

матрицу  $A_p$  в  $A_{p+1}$  ( $A_0 = A$ ) так, что при  $p \rightarrow \infty$  последовательность матриц  $A_p$  стремится к верхней треугольной матрице. Диагональные элементы предельной треугольной матрицы и будут являться собственными значениями исходной матрицы  $A$ .

Математическое обоснование и описание алгоритмов нахождения собственных значений несимметричной матрицы можно найти в [1]. Здесь мы ограничимся описанием соответствующих стандартных подпрограмм, с помощью которых можно найти все собственные значения несимметричной действительной матрицы.

## 2. Подпрограмма приведения действительной матрицы к верхней почти треугольной форме

Обращение к подпрограмме

CALL HSBG (N, A, IA).

Описание параметров

N — порядок матрицы

A — исходная матрица, на месте которой строится выходная почти треугольная матрица

IA = N

## 3. Вычисление собственных значений действительной почти треугольной матрицы

Обращение к подпрограмме

CALL ATEIG (N, A, RR, RI, IANA, IA).

Описание параметров

N — порядок матрицы

A — исходная почти треугольная матрица (результат работы процедуры HSBG), при выполнении процедуры матрица A не сохраняется

RR — вектор действительных частей собственных значений

RI — вектор мнимых частей собственных значений

IA = N

IANA — вектор размерности N, с помощью которого можно судить о точности построенных собственных значений. Если для найденного  $i$ -го собственного значения справедливо неравенство

$$|A(i, i-1)| \leq 10^{-7} (|RR(i)| + |RI(i)|), \quad (12)$$

то считается, что  $i$ -е собственное значение найдено с удовлетворительной точностью, а соответствующий элемент IANA ( $i$ ) имеет одно из трех значений 0, 1 или 2. Поэтому для качественной оценки точности полученных собственных значений можно проанализировать содержание массива IANA после работы подпрограммы

**Замечание.** Для использования подпрограмм EIGEN, HSBG и ATEIG следует описать в основной программе матрицу A как одномерный массив (вектор), причем элементы матрицы располагаются последовательно по столбцам.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уилкинсон Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений. Пер. с англ. — М.: Наука, 1970.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ УГЛЕРОДНОГО ЦИКЛА  
В СИСТЕМЕ ОКЕАН — АТМОСФЕРА

**Введение**

Основная климатическая роль углекислого газа заключается в том, что, пропуская нисходящий поток коротковолновой солнечной радиации, он поглощает длинноволновую радиацию, излучаемую поверхностью Земли, и тем самым создает в атмосфере парниковый эффект.

Результаты многочисленных исследований последних десятилетий [1, 2, 11, 15] свидетельствуют о том, что увеличение концентрации  $\text{CO}_2$  в атмосфере, предсказываемое на конец XXII в., может привести к повышению средней глобальной температуры приземного слоя атмосферы более чем на 3К. При этом повышение температуры в высоких широтах превысит указанное значение в несколько раз. Подобные изменения температуры, соизмеримые с происходившими в мезозойскую эру (70—100 млн. лет назад), могут оказать существенное воздействие на хозяйственную деятельность человечества. Эти соображения служат веским аргументом в пользу того, что проблема  $\text{CO}_2$  является одной из наиболее актуальных в современной геофизике.

Изложение вынесенного в название работы вопроса начнем с рассмотрения планетарного круговорота углерода. Его условно можно разделить на три основных цикла, различающиеся интенсивностью обменных потоков [4]. Первый цикл — так называемый цикл углерода «подвижного» фонда — включает в себя процессы фотосинтеза, дыхания и окисления органического вещества, а также газообмен между атмосферой и океаном. Характерный временной масштаб изменения содержания углерода в атмосфере, верхнем квазиоднородном слое океана и биомассе составляет около 10 лет, а интенсивность обмена между ними — 10 Гт/год ( $1 \text{ Гт} = 10^{12} \text{ кг}$ ).

Второй цикл углерода объединяет процессы выветривания, растворения и осаждения карбонатов, образования и разрушения органического углерода (гумуса), содержащегося в почвах и растворенного в океане. Характерное время этого цикла измеряется тысячелетиями, а интенсивность соответствующих потоков — 0,1—1 Гт/год.

Третий цикл углерода — геологический — включает процессы дегазации мантии и метаморфизированных пород земной коры и осаждение углерода в виде карбонатных пород и недоокисленного органического углерода. Порядок скоростей этих процессов  $10^{-2}$  Гт/год, а характерный временной масштаб  $10^7$  лет.

Приведем существующие количественные оценки содержания углерода в резервуарах климатической системы. Средняя глобаль-

ная концентрация углекислого газа в атмосфере на конец 1983 г. составляла  $(343 \pm 0,2)$  млн<sup>-1</sup> [3, 13], что в пересчете на углерод соответствует 728 Гт С. Уровень атмосферного CO<sub>2</sub> в допромышленную эпоху (на 1860 г.) равнялся приблизительно 617 Гт С [9]. Таким образом, за 123 года содержание атмосферного CO<sub>2</sub> увеличилось на 111 Гт С, или на 18 % относительно допромышленного уровня.

Содержание различных форм углерода в Мировом океане приводится в табл. 1. Из нее видно, что общее содержание углерода в океане приблизительно в 60 раз больше, чем в атмосфере.

Таблица 1  
Содержание углерода в различных формах в Мировом океане  
по А. С. Монину [7]

| № п/п | Форма                                   | Гт С   |
|-------|-----------------------------------------|--------|
| 1     | Неорганические формы в растворе         | 38 200 |
| 1а    | В том числе в верхнем 100-метровом слое | 864    |
| 2     | Растворенная органика                   | 1 800  |
| 2а    | В том числе в верхнем 100-метровом слое | 30     |
| 3     | Неживая органическая взвесь (детрит)    | 27     |
| 4     | Живые организмы                         | 1,4    |

Важным термодинамическим свойством морской воды является ее статическая емкость по отношению к поглощению избыточного атмосферного CO<sub>2</sub>. Она описывается *буферным фактором (фактором Ревелла)*, определяемым при постоянной температуре, солености и щелочности морской воды соотношением [14]

$$R = \frac{\partial \ln p_a^{\text{CO}_2}}{\partial \ln [\Sigma \text{CO}_2]} = \frac{\Delta p_a^{\text{CO}_2} / p_a^{\text{CO}_2}}{\Delta [\Sigma \text{CO}_2] / [\Sigma \text{CO}_2]},$$

где  $p_a^{\text{CO}_2}$  — парциальное давление углекислого газа в атмосфере;  $[\Sigma \text{CO}_2]$  — суммарная концентрация углекислоты в морской воде.

Фактор Ревелла для верхних слоев океана хорошо коррелирует с температурой, изменяясь в пределах от 8 для наиболее теплых до 15 для наиболее холодных вод. Смысл буферного эффекта состоит в том, что для морской воды, как и для раствора слабой кислоты вообще, небольшое изменение рН раствора может быть получено только путем больших добавок сильных кислот или сильных оснований. Следствием буферного эффекта является тот важный в климатическом отношении факт, что океан способен усвоить только около 10 % прироста атмосферного CO<sub>2</sub>, т. е. океан поглощает углекислый газ антропогенного происхождения значительно медленнее, чем газы, химически не взаимодействующие с морской водой.

Перейдем теперь к обсуждению вопроса о содержании углерода в различных формах на суше. Как следует из табл. 2, основным резервуаром углерода являются карбонатные осадочные породы. Оценка массы этого резервуара основана на предположении, что при выплавлении земной коры ( $\sim 5 \cdot 10^{10}$  Гт) из мантийного вещества выделилось 3 % вулканических газов, на 10 % состоящих из  $\text{CO}_2$ , перешедшего затем в карбонатные осадки [7].

Таблица 2  
Содержание углерода в различных формах на суше,  
по А. С. Монину [7]

| № п/п | Форма                                      | Гт С           |
|-------|--------------------------------------------|----------------|
| 1     | Неживое органическое вещество почв (гумус) | 2900           |
| 1а    | В том числе торфообразное вещество         | 860            |
| 2     | Углекислота в пресноводных бассейнах       | 450            |
| 3     | Растительность                             | 828            |
| 3а    | В том числе леса                           | 744            |
| 4     | Горючие полезные ископаемые                | 5037 (757)     |
| 4а    | Каменный уголь                             | 4306 (615)     |
| 4б    | Нефть                                      | 246 (72)       |
| 4в    | Горючие сланцы                             | 324 (41)       |
| 4г    | Газ                                        | 161 (29)       |
| 5     | Карбонатные осадочные породы               | $5 \cdot 10^7$ |

Оценка содержания углерода органического происхождения в верхнем слое почвы получена Боном по мировой почвенной карте ФАО—ЮНЕСКО. В соответствии с ней, из общего количества углерода 860 Гт содержится в торфе и практически не участвует в обмене с атмосферой. В органическом веществе почвы содержится 2000 Гт углерода, который, окисляясь, участвует в обмене с атмосферой, причем интенсивность этого обмена примерно равна интенсивности накопления в почве отмирающего органического вещества.

Оценка биомассы растительности на суше принадлежит Уиттеру и Лайкенсу [16]. Согласно этим авторам, 90 % биомассы всей растительности (744 Гт С) приходится на леса, из них более половины — на тропические леса. По оценкам Перри и Ландсберга [8], содержание углерода в горючих полезных ископаемых, пригодных к эксплуатации при современной технологии (в табл. 2 — цифры в скобках), относительно невелико и соизмеримо с содержанием углерода в атмосфере и биосфере.

Обсудим оценки потоков  $\text{CO}_2$  между отдельными резервуарами. Эти оценки сведены в табл. 3. В ней знак «плюс» соответствует поступлению, знак «минус» — стоку атмосферного  $\text{CO}_2$ . Как видно, основной сток атмосферного углерода обусловливается фотосинтезом растений. Около 60 % чистой первичной продукции растений



(т. е. полной продукции за вычетом затрат на дыхание) обеспечивается лесами, причем половина чистой продукции лесов относится к тропическим джунглям. В океане первичная продукция приблизительно вдвое меньше, чем на суше. Фотосинтез растений компенсируется процессами окисления органического вещества, а также лесными и степными пожарами. Потоки  $\text{CO}_2$ , связанные с геологическими процессами, на два-три порядка меньше перечисленных выше.

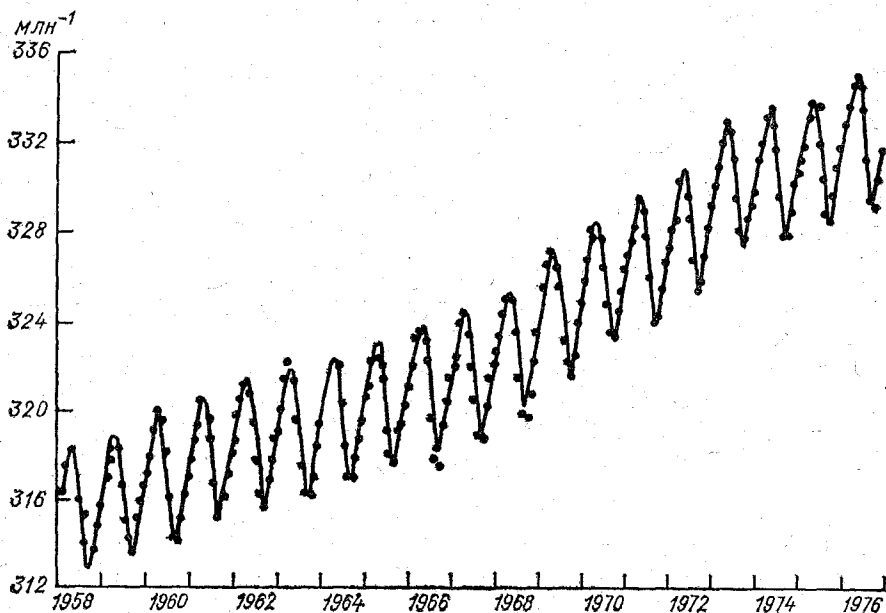
В современную эпоху естественный круговорот углерода подвергается воздействию хозяйственной деятельности человечества. Из общего количества углекислого газа, поступившего в атмосферу

Таблица 3  
Потоки  $\text{CO}_2$  между резервуарами, по А. С. Монину [7]

| № п/п | Вид тока                                                           | Гт С/год              |
|-------|--------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 1     | Фотосинтез растений (чистая продукция)                             | —77,61                |
| 1a    | Фотосинтез растений на суше                                        | —52,86                |
| 1aa   | В том числе фотосинтез в лесах                                     | —33,25                |
| 1б    | Фотосинтез растений в океане                                       | —24,75                |
| 2     | Окисление микроорганизмами и животными, лесные и степные пожары    | +78                   |
| 3     | Средняя скорость роста атмосферного $\text{CO}_2$ за 1958—1976 гг. | +2,134                |
| 4     | Выделение $\text{CO}_2$ промышленностью                            | +5                    |
| 5     | Выделение $\text{CO}_2$ при уничтожении лесов                      | +1                    |
| 6     | Поглощение $\text{CO}_2$ океаном и биосферой                       | —4                    |
| 7     | Выделение $\text{CO}_2$ вулканами                                  | +4 · 10 <sup>-2</sup> |
| 8     | Средняя за историю Земли скорость накопления карбонатных осадков   | —10 <sup>-2</sup>     |
| 9     | Выветривание карбонатных и силикатных пород                        | —10 <sup>-2</sup>     |

с начала промышленной революции (1860 г.) по 1983 г., 98 % приходится на сжигание ископаемого топлива и 2 % на производство цемента [10, 12]. Выделение  $\text{CO}_2$ , сопровождающее сведение лесов и превращение их в сельскохозяйственные угодья, наиболее детально изучено Манком и Ревеллом [9]. По их оценкам, за период 1860—1970 гг. мировые сельскохозяйственные угодья увеличились на 852 млн. га, из которых 30 % первоначально было занято лесами. Это привело к выбросу в атмосферу 50 Гт С. Если к этому количеству прибавить углерод, образующийся при окислении гумуса почвы, и вычесть биомассу культурных растений, то потери углерода биосферой за 110-летний период составляют 72 Гт С. Таким образом, суммарное антропогенное поступление углерода в атмосферу составляет около 40 % первоначального содержания углерода в атмосфере.

Увеличение концентрации атмосферного  $\text{CO}_2$  подтверждается данными мониторинга [6]. На рисунке приведены результаты измерений на станции Мауна-Лоа (о. Гавайи). Нетрудно видеть, что в изменении концентрации атмосферного  $\text{CO}_2$  наряду с сезонными колебаниями с амплитудой  $5 \text{ млн}^{-1}$  четко прослеживается междугодичный тренд, свидетельствующий об увеличении содержания



Изменения концентрации  $\text{CO}_2$  в атмосфере по данным измерений обсерватории Мауна-Лоа (о. Гавайи), согласно Килингу [6]. Точками указаны средние месячные значения концентрации.

$\text{CO}_2$  от  $315 \text{ млн}^{-1}$  в 1958 г. до  $335 \text{ млн}^{-1}$  в 1978. Однако увеличение концентрации атмосферного  $\text{CO}_2$  на  $20 \text{ млн}^{-1}$  соответствует поступлению в атмосферу  $42,5 \text{ Гт С}$ , что составляет около половины избыточного (связанного с хозяйственной деятельностью) прироста атмосферного  $\text{CO}_2$  за этот период. Вторая половина поглощается океаном и биотой.

Заканчивая обзор круговорота углерода в природе, отметим, что масштаб времени, в течение которого все запасы доступного ископаемого топлива могут оказаться исчерпанными, оценивается в 200—300 лет. Следовательно, антропогенный выброс  $\text{CO}_2$  приведет к нарушению равновесия прежде всего в цикле углерода «подвижного» фонда.

## Уравнения модели и ее параметры

Следуя [5], начнем с введения некоторых определений. Интегральное содержание  $\text{CO}_2$  в столбе атмосферы единичного сечения равно

$$\hat{C}_a^{\text{CO}_2} = \int_0^\infty C_a^{\text{CO}_2} \rho_a dz = \int_0^{p_{s0}} C_a^{\text{CO}_2} \rho_a \frac{dp}{\rho_a g} = \frac{p_{s0}}{g} C_a^{\text{CO}_2}, \quad (1)$$

где  $C_a^{\text{CO}_2}$  — удельная концентрация  $\text{CO}_2$  в атмосфере;  $p_{s0}$  — атмосферное давление на уровне моря;  $g$  — ускорение свободного падения.

Воспользуемся уравнениями состояния воздуха

$$p_{s0} V = \frac{m_s}{\mu} \tilde{R} T \quad (2)$$

и атмосферного  $\text{CO}_2$

$$p_a^{\text{CO}_2} V = \frac{m_{\text{CO}_2}}{\mu_{\text{CO}_2}} \tilde{R} T \quad (3)$$

и учтем что, отношение  $m_{\text{CO}_2}/m_s$ , по определению, есть удельная концентрация  $C_a^{\text{CO}_2}$  атмосферного  $\text{CO}_2$ . Тогда

$$C_a^{\text{CO}_2} = \frac{\mu_{\text{CO}_2}}{\mu} \frac{p_a^{\text{CO}_2}}{p_{s0}}, \quad (4)$$

где  $p_a^{\text{CO}_2}$  — парциальное давление  $\text{CO}_2$  в атмосфере;  $\mu_{\text{CO}_2}$  и  $\mu$  — относительные молекулярные массы  $\text{CO}_2$  и воздуха;  $m_s$  и  $m_{\text{CO}_2}$  — масса воздуха и  $\text{CO}_2$  в объеме  $V$ ;  $T$  — температура;  $\tilde{R}$  — универсальная газовая постоянная.

Изменение во времени  $\hat{C}_a^{\text{CO}_2}$  описывается уравнением

$$\frac{p_{s0}}{g} \frac{d}{dt} C_a^{\text{CO}_2} = -(1-f) q_0^{\text{CO}_2} + Q_1^{\text{CO}_2} - f Q_2^{\text{CO}_2}, \quad (5)$$

где  $q_0^{\text{CO}_2}$  — поток  $\text{CO}_2$  между океаном и атмосферой;  $Q_1^{\text{CO}_2}$  и  $Q_2^{\text{CO}_2}$  — источник и сток атмосферного  $\text{CO}_2$ , отнесенные к единице площади подстилающей поверхности;  $f$  — балл материков (отношение площади поверхности суши к площади поверхности всей Земли);  $t$  — время.

Варьируя (5), находим:

$$\frac{p_{s0}}{g} \frac{d}{dt} \delta C_a^{\text{CO}_2} = -(1-f) \delta q_0^{\text{CO}_2} + \delta Q_1^{\text{CO}_2} - f \delta Q_2^{\text{CO}_2}, \quad (6)$$

здесь и всюду далее  $\delta F$  имеет смысл возмущения произвольной функции  $F$  относительно ее значения в начале промышленной революции.

Будем считать, что возмущение источника атмосферного  $\text{CO}_2$  обусловлено исключительно сжиганием ископаемого топлива, а возмущение стока — взаимодействием атмосферного  $\text{CO}_2$  с биотой суши. Тогда

$$\delta Q_1^{\text{CO}_2} = \frac{1}{S} \frac{\mu_{\text{CO}_2}}{\mu_{\text{C}}} \frac{dN^{\text{C}}}{dt}; \quad (7)$$

$$\delta Q_2^{\text{CO}_2} = \lambda_{\text{B}} \frac{p_{\text{so}}}{g} \delta C_{\text{a}}^{\text{CO}_2}, \quad (8)$$

где  $N^{\text{C}}$  — количество углерода, выбрасываемого в атмосферу при сжигании ископаемого топлива;  $\mu_{\text{C}}$  — молекулярная масса углерода;  $\lambda_{\text{B}}$  — размерный параметр, обратно пропорциональный времени обновления биоты суши;  $S$  — площадь поверхности Земли.

Учтем (7) и (8) и перепишем (6) в терминах возмущения содержания углерода. Используя определения удельной концентрации

$$\text{углерода } C_{\text{a}}^{\text{C}} = \frac{\mu_{\text{C}}}{\mu_{\text{CO}_2}} C_{\text{a}}^{\text{CO}_2} \text{ и содержания углерода } C_{\text{a}} = \frac{p_{\text{so}}}{g} C_{\text{a}}^{\text{C}}$$

в столбе атмосферы единичного сечения, получаем:

$$\frac{d}{dt} \delta C_{\text{a}} = -(1-f) \frac{\mu_{\text{C}}}{\mu_{\text{CO}_2}} \delta q_0^{\text{CO}_2} + \frac{1}{S} \frac{dN^{\text{C}}}{dt} - f \lambda_{\text{B}} \delta C_{\text{a}}. \quad (9)$$

Представим  $q_0^{\text{CO}_2}$  в виде

$$q_0^{\text{CO}_2} = k(u_*) c_{\text{s}} (p_{\text{a}}^{\text{CO}_2}/p_{\text{so}} - p_{\text{w}}^{\text{CO}_2}/p_{\text{so}}), \quad (10)$$

где  $k(u_*)$  — скорость газообмена на границе раздела океан—атмосфера, зависящая от динамической скорости ветра  $u_*$ ;  $c_{\text{s}}$  — коэффициент растворимости  $\text{CO}_2$  в воде, являющийся функцией от температуры и солености;  $p_{\text{w}}^{\text{CO}_2}$  — парциальное давление  $\text{CO}_2$  в воде.

Варируя соотношение (10) и приписывая невозмущенные значения характеристик начальному моменту времени, имеем:

$$\delta q_0^{\text{CO}_2} = k(u_*) (c_{\text{so}}/p_{\text{so}}) (\delta p_{\text{a}}^{\text{CO}_2} - \delta p_{\text{w}}^{\text{CO}_2}); \quad (11)$$

здесь принято, что в невозмущенном состоянии глобальный газообмен между атмосферой и океаном близок к нулю (т. е.  $p_{\text{a}0}^{\text{CO}_2} \approx p_{\text{w}0}^{\text{CO}_2}$ ), индексом «0» отмечены характеристики, относящиеся к начальному моменту времени.

Заметим теперь, что возмущения парциального давления  $\text{CO}_2$  ( $\delta p_{\text{w}}^{\text{CO}_2}$ ) и содержания суммарного углерода ( $\delta C_{\text{m}}$ ) в ВКС связаны между собой соотношением

$$\delta p_{\text{w}}^{\text{CO}_2}/p_{\text{w}0}^{\text{CO}_2} = R \delta C_{\text{m}}/C_{\text{m}0}, \quad (12)$$

где  $R$  — буферный фактор (фактор Ревелла), являющийся функцией от парциального давления  $\text{CO}_2$  в атмосфере и температуры ( $T_{\text{m}}$ ) верхнего квазигомогенного слоя океана.

Представляя функцию  $R = R(p_a^{\text{CO}_2}, T_m)$  в виде ряда Тейлора и удерживая в нем члены, содержащие возмущения в степени не выше первой, получаем:

$$R = R_0 + \left. \frac{\partial R}{\partial p_a^{\text{CO}_2}} \right|_{T_{m0}} \delta p_a^{\text{CO}_2} + \left. \frac{\partial R}{\partial T_m} \right|_{p_a^{\text{CO}_2}} \delta T_m,$$

где, согласно [6, 9]

$$R_0 \approx 9, \quad p_a^{\text{CO}_2} \left. \frac{\partial R}{\partial p_a^{\text{CO}_2}} \right|_{T_{m0}} \approx 4,$$

$$T_{m0} \left. \frac{\partial R}{\partial T_m} \right|_{p_a^{\text{CO}_2}} \approx -4.$$

Тогда сомножитель в правой части (11) может быть переписан следующим образом:

$$\begin{aligned} (\delta p_a^{\text{CO}_2} - \delta p_w^{\text{CO}_2}) &= p_{a0}^{\text{CO}_2} \left( \frac{\delta p_a^{\text{CO}_2}}{p_{a0}^{\text{CO}_2}} - \frac{\delta p_w^{\text{CO}_2}}{p_{w0}^{\text{CO}_2}} \right) = \\ &= p_{a0}^{\text{CO}_2} \left[ \frac{\delta p_a^{\text{CO}_2}}{p_{a0}^{\text{CO}_2}} - \left( 9 + 4 \frac{\delta p_a^{\text{CO}_2}}{p_{a0}^{\text{CO}_2}} - 4 \frac{\delta T_m}{T_{m0}} \right) \frac{\delta C_m}{C_{m0}} \right] = \\ &= p_{a0}^{\text{CO}_2} \left[ \left( 1 - 4 \frac{\delta C_m}{C_{m0}} \right) \frac{\delta p_a^{\text{CO}_2}}{p_a^{\text{CO}_2}} - \left( 9 - 4 \frac{\delta T_m}{T_{m0}} \right) \frac{\delta C_m}{C_{m0}} \right]. \end{aligned}$$

Ограничиваясь линейными членами (тем самым пренебрегая  $4\delta C_m/C_{m0}$  по сравнению с 1 и  $4\delta T_m/T_{m0}$  по сравнению с 9), имеем:

$$(\delta p_a^{\text{CO}_2} - \delta p_w^{\text{CO}_2}) = p_{a0}^{\text{CO}_2} (\delta p_a^{\text{CO}_2}/p_{a0}^{\text{CO}_2} - R_0 \delta C_m/C_{m0}). \quad (13)$$

Перейдем от возмущения парциального давления к возмущению содержания углерода, для чего проварьируем (4) и воспользуемся соотношениями

$$C_a^{\text{CO}_2} = \frac{\mu_{\text{CO}_2}}{\mu} \frac{p_{a0}^{\text{CO}_2}}{p_{s0}}; \quad C_a^{\text{CO}_2} = \frac{\mu_{\text{CO}_2}}{\mu_C} C_a^C.$$

В результате находим

$$\delta p_a^{\text{CO}_2}/p_{a0}^{\text{CO}_2} = \delta C_a^C/C_{a0}^C = \delta C_a/C_{a0}. \quad (14)$$

Учитывая (14), перепишем (11) в виде

$$\delta q_0^{\text{CO}_2} = k(u_*) c_{s0} \frac{p_{a0}^{\text{CO}_2}}{p_{s0}} \left( \frac{\delta C_a}{C_{a0}} - R_0 \frac{\delta C_m}{C_{m0}} \right). \quad (15)$$

Затем воспользуемся соотношением

$$\frac{p_{a0}^{CO_2}}{p_{s0}} = \frac{\mu}{\mu_{CO_2}} C_{a0}^{CO_2} = \frac{\mu}{\mu_C} C_{a0}^C = \frac{\mu}{\mu_C} \frac{q}{p_{s0}} C_{a0} \quad (16)$$

и введем определение глобального содержания углерода в атмосфере  $\tilde{C}_{a0} = C_{a0}S$  и в верхнем квазиоднородном слое океана  $\tilde{C}_{m0} = (1-f)C_{m0}S$ . Тогда окончательное выражение для вариации газообмена между атмосферой и океаном примет вид

$$\checkmark \delta q_0^{CO_2} = k(u_*) c_{s0} \frac{\mu}{\mu_C} \frac{q}{p_{s0}} \left[ \delta C_a - R_0(1-f) \frac{\tilde{C}_{a0}}{\tilde{C}_{m0}} \delta C_m \right]. \quad (17)$$

Далее, уравнение для содержания  $C_m$  углерода в ВКС единичного сечения имеет вид

$$\frac{d}{dt} C_m = \frac{\mu_C}{\mu_{CO_2}} q_0^{CO_2} - q_h^C + Q_3^C - Q_4^C, \quad (18)$$

где

$$q_h^C = \frac{\kappa}{h} \left( C_m - \frac{h}{H} C_d \right) \quad (19)$$

— обмен углеродом между ВКС и ГС, принимаемый пропорциональным объемным концентрациям углерода в ВКС и ГС;  $\kappa$  — скорость обмена;  $h$  и  $H$  — толщины ВКС и ГС единичного сечения;  $Q_3^C$  и  $Q_4^C$  — источник и сток углерода органического происхождения.

Предположим, что продукция органического вещества в ВКС лимитируется не концентрацией  $CO_2$  в воде, а количеством биогенных элементов (т. е. поглощение антропогенного  $CO_2$  не сказывается на жизнедеятельности морской биоты), и что толщины ВКС и ГС и скорость обмена на границе раздела между этими слоями остаются неизменными во времени. Тогда на основании (18) и (19) получаем

$$\checkmark \frac{d}{dt} \delta C_m = \frac{\mu_C}{\mu_{CO_2}} \delta q_0^{CO_2} - \delta q_h^C; \quad (20)$$

$$\checkmark \delta q_h^C = \frac{\kappa}{h} \left( \delta C_m - \frac{h}{H} \delta C_d \right). \quad (21)$$

Аналогично, для вариаций  $\delta C_d$  содержания углерода в ГС единичного сечения имеем

$$\checkmark \frac{d}{dt} \delta C_d = \delta q_h^C. \quad (22)$$

Остается определить скорость производства  $dN^C/dt$  антропогенного углерода. С этой целью воспользуемся следующей аппроксимацией [6]:

$$\frac{dN^C}{dt} = rN^C \left(1 - \frac{N^C}{N_\infty^C}\right)^n, \quad (23)$$

где  $r$ ,  $n$ ,  $N_\infty^C$  — числовые константы.

Таким образом, задача свелась к решению системы уравнений (9), (17), (20) — (23), удовлетворяющему начальным условиям

$$\delta C_a = \delta C_m = \delta C_d = 0; N_0^C = 1,03 \text{ Гт С при } t = 0,$$

где  $N_0^C$  — количество углерода, поступившее в атмосферу до начала промышленной революции.

### Порядок выполнения и задачи работы

1. Составить программу численного решения системы (9), (17), (20) — (23), используя метод Рунге—Кутты (см. Приложение к лабораторной работе № 2).

2. Провести расчет перераспределения антропогенного  $\text{CO}_2$  до конца XXIII в., приняв следующие значения параметров:  $f = 0,29$ ,  $\mu_c = 12$ ,  $\mu_{\text{CO}_2} = 44$ ,  $\mu = 29$ ,  $S = 5,1 \cdot 10^{14} \text{ м}^3$ ,  $\lambda_B = 0,02 \text{ год}^{-1}$ ,  $k(u_*) = 5 \cdot 10^{-5} \text{ м/с}^{-1}$ ,  $c_{s0} = 0,4347 \text{ кг/м}^3$ ,  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ ,  $p_{s0} = 1000 \text{ гПа}$ ,  $R_0 = 9$ ,  $\tilde{C}_{a0} = 617 \text{ Гт С}$ ,  $\tilde{C}_{m0} = 690 \text{ Гт С}$ ,  $\kappa = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ м/с}$ ,  $h = 79 \text{ м}$ ,  $H = 790 \text{ м}$ ,  $r = 0,043$ ,  $n = 1$ ,  $N_\infty^C = 4281 \text{ Гт С}$ , шаг по времени ННН = 0,1 года, допустимая относительная ошибка интегрирования TOSH = 0,005.

3. Получить решение при отсутствии взаимодействия между ВКС и ГС ( $q_h^C = 0$ ).

4. Исследовать эволюцию углеродного цикла в системе океан—атмосфера при различных сценариях хозяйственной деятельности человека, положив  $n = 0,5$  и  $n = 2$ .

### Форма отчетности

В отчете приводятся распечатка программы, результаты численных расчетов, графики временной изменчивости элементов углеродного цикла в системе атмосфера—ВКС—ГС, анализ чувствительности решения к вариациям параметров модели.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б удько М. И. Проблема углекислого газа.— Л.: Гидрометеоздат, 1979.— 58 с.
2. Б удько М. И., Винников К. Я., Ефимова А. Н. Зависимость температуры воздуха и осадков от количества углекислого газа в атмосфере.— Метеорология и гидрология, 1983, № 4, с. 5—13.

3. Бютнер Э. К. Планетарный газообмен  $O_2$  и  $CO_2$ .— Л.: Гидрометеоиздат, 1986.— 238 с.

4. Бютнер Э. К., Захарова О. К., Турчинович И. Е., Лапенис А. Г. Антропогенные изменения концентрации углекислого газа в атмосфере в ближайшее пятидесятилетие.— Метеорология и гидрология, 1981, № 3, с. 18—31.

5. Каган Б. А., Маслова Н. Б. Оценка эффекта взаимодействия углеродного и термического циклов в системе океан—атмосфера.— Метеорология и гидрология, 1986, № 10, с. 66—75.

6. Килинг Ч. Д., Бакастоу Р. Б. Влияние промышленных газов на климат.— В сб.: Энергия и климат. Пер. с англ. Л., Гидрометеоиздат, 1981, с. 123—177.

7. Монин А. С. Введение в теорию климата.— Л.: Гидрометеоиздат, 1982.— 245 с.

8. Перри Г., Ландсберг Г. Х. Предполагаемое мировое потребление энергии.— В сб.: Энергия и климат. Пер. с англ. Л., Гидрометеоиздат, 1981, с. 55—79.

9. Ревелл Р., Манк У. Цикл углекислого газа в биосфере.— В сб.: Энергия и климат. Пер. с англ. Л., Гидрометеоиздат, 1981, с. 266—303.

10. Keeling C. D. Industrial production of carbon dioxide from fossil fuels and limestone — Tellus, 1973, vol. 25, N 3, p. 174—196.

11. Manabe S., Wetherald R. T. The effects of doubling the  $CO_2$  concentration on the climate of a general circulation model.— J. Atm. Sci., 1975, vol. 32, N 1, p. 3—15.

12. Marland G., Rotty R. M. Carbon dioxide emissions from fossil fuels: a procedure for estimation and results for 1950—1982.— Tellus, 1984, vol. 36B, N 4, p. 232—261.

13. Pearman G. I. Atmospheric  $CO_2$  concentration measurements. A review of methodologies, existing programmes and available data.— WMO Rep., 1980, N 3, 27 p.

14. Revelle R., Suess H. E. Carbon dioxide exchange between atmosphere and ocean, and the question of an increase of atmospheric  $CO_2$  during the past decades.— Tellus, 1957, vol. 9, N 1, p. 18—27.

15. Schlesinger M. E. A review of climate model and their simulation of  $CO_2$ -induced warming.— Intern. J. Environ. Studies, 1983, vol. 20, N 1, p. 103—114.



## Работа № 6

### ИССЛЕДОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ РЕАКЦИИ СИСТЕМЫ ОКЕАН — АТМОСФЕРА НА АНТРОПОГЕННЫЕ ИЗМЕНЕНИЯ СОДЕРЖАНИЯ АТМОСФЕРНОГО CO<sub>2</sub>

#### Введение

Исследование нестационарной реакции системы океан—атмосфера на антропогенные изменения содержания атмосферного CO<sub>2</sub> имеет непосредственное отношение к проблеме прогноза климата. Первые оценки климатических последствий увеличения содержания атмосферного CO<sub>2</sub>, образующегося при сжигании ископаемого топлива, были получены с использованием квазистационарного приближения: считалось, что климатическая система мгновенно приспосабливается к внешнему воздействию. В действительности из-за большой теплоемкости океана реакция климатической системы на внешнее воздействие является нестационарной. Более того, она зависит от интенсивности взаимодействия между отдельными звеньями климатической системы. Обсуждению этой зависимости и посвящена настоящая работа.

#### Уравнения модели и ее параметры

Воспользуемся простейшей нульмерной моделью системы океан—атмосфера, рассмотренной в работе № 2, и перепишем соответствующие ей уравнения и начальные условия в виде

$$c_p \frac{p_{so}}{g} \frac{d}{dt} \delta T_a = -(1-f) \lambda_{am} (\delta T_a - \delta T_m) - \lambda_a \delta T_a + \delta Q_T, \quad (1)$$

$$\rho c h \frac{d}{dt} \delta T_m = \lambda_{am} (\delta T_a - \delta T_m) - \rho c \kappa (\delta T_m - \delta T_d), \quad (2)$$

$$\rho c H \frac{d}{dt} \delta T_d = \rho c \kappa (\delta T_m - \delta T_d), \quad (3)$$

$$\delta T_a = \delta T_m = \delta T_d = 0 \text{ при } t = 0, \quad (4)$$

где  $\delta T_a$ ,  $\delta T_m$  и  $\delta T_d$  — возмущения глобальной температуры атмосферы, ВКС и ГС;  $\lambda_a$  — параметр обратной связи между радиационными источниками и стоками тепла и температурой атмосферы;  $\lambda_{am}$  — коэффициент теплообмена на границе раздела океан—атмосфера;  $\kappa$  — скорость теплообмена на границе раздела между верхним квазиоднородным и глубинным слоями океана;  $h$  и  $H$  — толщины этих слоев;  $\rho c$  — объемная теплоемкость морской воды;  $c_p$  — удельная теплоемкость воздуха при постоянном давлении;  $p_{so}$  — атмосферное давление на уровне моря;  $g$  — ускорение сво-

бодного падения,  $f$  — балл материков (отношение площади поверхности суши к общей площади  $S$  Земли);  $t$  — время.

Уравнение (1) содержит неизвестную функцию — приток тепла  $\delta Q_T$  в атмосфере, который в данном случае обусловлен влиянием антропогенного  $\text{CO}_2$ . Следуя [2], определим  $\delta Q_T$  в виде

$$\delta Q_T = \lambda_a \delta T_{\text{eq}} (2 \times \text{CO}_2) \frac{\ln(1 + \delta C_a / C_{a0})}{\ln 2}, \quad (5)$$

где  $\delta T_{\text{eq}} (2 \times \text{CO}_2)$  — изменение равновесной температуры системы океан—атмосфера при удвоении содержания атмосферного  $\text{CO}_2$ .

В (5) фигурирует еще одна неизвестная функция — возмущение содержания углерода в столбе атмосферы единичного сечения. Для ее отыскания привлечем уравнения модели углеродного цикла из работы № 5. Эти уравнения представим в виде

$$\frac{d}{dt} \delta C_a = -(1-f) \frac{\mu_C}{\mu_{\text{CO}_2}} \delta q_0^{\text{CO}_2} + \frac{1}{S} \frac{dN^C}{dt} - f \lambda_B \delta C_a; \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \delta C_m = \frac{\mu_C}{\mu_{\text{CO}_2}} \delta q_0^{\text{CO}_2} - \frac{\kappa}{h} \left( \delta C_m - \frac{h}{H} \delta C_d \right); \quad (7)$$

$$\frac{d}{dt} \delta C_d = \frac{\kappa}{h} \left( \delta C_m - \frac{h}{H} \delta C_d \right); \quad (8)$$

$$\delta C_a = \delta C_m = \delta C_d = 0 \text{ при } t = 0, \quad (9)$$

где, как и прежде,  $C_m$  и  $C_d$  — содержание суммарного углерода в ВКС и ГС;  $\delta C_m$  и  $\delta C_d$  — его возмущения;

$$\delta q_0^{\text{CO}_2} = k(u_*) c_{s0} \frac{\mu}{\mu_C} \frac{g}{p_{s0}} \left[ \left( 1 - 4 \frac{\delta C_m}{C_{m0}} \right) \delta C_a - R_0 \frac{C_{a0}}{C_{m0}} \delta C_m \right] \quad (10)$$

— возмущение обмена  $\text{CO}_2$  на границе раздела океан—атмосфера;  $k(u_*)$  — скорость газообмена между океаном и атмосферой, являющаяся функцией динамической скорости  $u_*$  ветра;  $\mu_{\text{CO}_2}$ ,  $\mu_C$  и  $\mu$  — относительные молекулярные массы  $\text{CO}_2$ , углерода и воздуха;  $R$  — буферный фактор;  $c_s$  — коэффициент растворимости  $\text{CO}_2$  в воде;  $\lambda_B$  — размерный параметр, обратно пропорциональный времени обновления биоты суши, индекс «0» указывает на принадлежность к начальному моменту времени.

Остается определить скорость производства  $dN^C/dt$  антропогенного углерода, и тогда система (1) — (10) при заданных значениях параметров  $\lambda_a$ ,  $\lambda_{am}$ ,  $\lambda_B$ ,  $k(u_*)$ ,  $\kappa$ ,  $R_0$ ,  $h$ ,  $H$  и  $\delta T_{\text{eq}} (2 \times \text{CO}_2)$  будет замкнута. С этой целью воспользуемся следующей аппроксимацией [2]:

$$dN^C/dt = r N^C (1 - N^C/N_\infty^C), \quad (11)$$

где  $r$  и  $N_\infty^C$  — числовые константы.

Введем новую зависимую переменную  $n = N^C/N_\infty^C$ , затем перепишем (11) в терминах  $n$  и полученное выражение

$$dn/dt = rn(1-n)$$

или эквивалентное ему

$$dn/[n(1-n)] = rdt$$

проинтегрируем по времени от 0 до  $t$ ; здесь начальный момент времени  $t = 0$  приурочен к началу промышленной революции (1860 г.). В результате будем иметь

$$n = [1 + (1/n_0 - 1)e^{-rt}]^{-1}$$

или после возвращения к старой переменной  $N^C$

$$N^C = N_\infty^C [1 + (N_\infty^C/N_0^C - 1)e^{-rt}]^{-1},$$

откуда

$$\frac{dN^C}{dt} = N_\infty^C \frac{r(N_\infty^C/N_0^C - 1)^{-1} e^{rt}}{[1 + (N_\infty^C/N_0^C - 1)^{-1} e^{rt}]^2}. \quad (12)$$

Таким образом, задача свелась к решению системы уравнений (1) — (3), (5) — (8), (10), (12), удовлетворяющему начальным условиям (4), (9).

Определим характерный масштаб  $N_\infty^C/S$  для возмущений содержания углерода,  $\delta T_{\text{eq}} (2 \times \text{CO}_2)$  для возмущений температуры  $t_0 = \left[ k(u_*) c'_{s0} \frac{\mu}{\mu_C} \frac{g}{p_{s0}} \right]^{-1}$  для времени (здесь  $c'_{s0} = \frac{\mu_C}{\mu_{\text{CO}_2}} c_{s0}$  — коэффициент растворимости, имеющий размерность  $\text{гС/м}^3$ ). Тогда после перехода к безразмерным переменным и сохранения за ними прежних обозначений получим вместо (1) — (3), (5) — (8), (10), (12) следующую задачу:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \gamma x_1 x_2 \begin{pmatrix} -(1-f)/\gamma \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (13)$$

$$\frac{dy}{dt} = By + p(x_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (14)$$

$$x = y = 0 \text{ при } t = 0, \quad (15)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (\gamma^{-1} \delta C_a, \delta C_m, \sqrt{\varepsilon_4} \delta C_d); \\ \mathbf{y} &= (\sqrt{\varepsilon_7/(1-f)} \delta T_a, \delta T_m, \delta T_d / \sqrt{\varepsilon_4}); \\ A &= \begin{pmatrix} -(1-f + \varepsilon_2 f) & \gamma & 0 \\ \gamma & -(aR_0 + \varepsilon_3) & \varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_4} \\ 0 & \varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_4} & -\varepsilon_3 \varepsilon_4 \end{pmatrix}; \\ B &= \begin{pmatrix} -(\varepsilon_5(1-f) + \varepsilon_6) & (1-f)^{1/2} \varepsilon_5 \sqrt{\varepsilon_7} & 0 \\ (1-f)^{1/2} \varepsilon_5 \sqrt{\varepsilon_7} & -(\varepsilon_5 \varepsilon_7 + \varepsilon_3) & \varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_4} \\ 0 & \varepsilon_3 \sqrt{\varepsilon_4} & -\varepsilon_3 \varepsilon_4 \end{pmatrix}; \\ q &= \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \frac{b^{-1} \exp(\varepsilon_1 t)}{[1 + b^{-1} \exp(\varepsilon_1 t)]^2}; \quad p(x_1) = \frac{\varepsilon_6}{\ln 2} \sqrt{\frac{\varepsilon_7}{1-f}} \ln\left(1 + \frac{\alpha \gamma}{4a} x_1\right); \\ \gamma &= [a(1-f)R_0]^{1/2}; \quad a = C_{a0}/C_{m0} \approx 0,5; \quad b = (N_\infty^C/N_0^C - 1) \approx 10^3; \\ \alpha &= 4N_\infty^C/(SC_{m0}) \approx 15; \quad \beta = 4\delta T_{eq}(2 \times \text{CO}_2)/T_{m0} \approx 0,5; \\ \varepsilon_1 &= rt_0 \approx 0,2; \quad \varepsilon_2 = \lambda_B t_0 \approx 0,1; \quad \varepsilon_3 = \kappa t_0/h \approx 0,2 \quad \varepsilon_4 = h/H \approx 0,1; \\ \varepsilon_5 &= \lambda_{am} t_0/[c_p(p_{s0}/g)] \approx 10^3, \quad \varepsilon_6 = \lambda_{at0}/[c_p(p_{s0}/g)] \approx 40; \\ \varepsilon_7 &= c_p(p_{s0}/g)/(\rho ch) \approx 0,03; \\ R_0 &\approx 10; \quad f \approx 0,3. \end{aligned}$$

### Аналитическое решение системы (13) — (15)

Уравнения (13), (14) и начальные условия (15) образуют нелинейную задачу. Точное решение соответствующей ей линейной задачи

$$\frac{d\mathbf{x}^{(0)}}{dt} = A\mathbf{x}^{(0)} + q \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (16)$$

$$\frac{d\mathbf{y}^{(0)}}{dt} = B\mathbf{y}^{(0)} + p(x_1^{(0)}) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad (17)$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{y}^{(0)} = 0 \quad \text{при } t=0 \quad (18)$$

имеет вид

$$x^{(0)} = \sum_{j=0,1,2} m_{jk} m_{j1} X_j(q); \quad (19)$$

$$y^{(0)} = \sum_{j=0,1,2} l_{jk} l_{j1} Y_j(p(x_1^{(0)})), \quad (20)$$

где

$$X_j = \int_0^t e^{-\mu_j(t-t')} F(t') dt';$$

$$Y_j = \int_0^t e^{-\lambda_j(t-t')} F(t') dt', \quad (21)$$

$F(t')$  — произвольная функция;  $t'$  — переменная интегрирования;  $\mu_j$  и  $\lambda_j$  — собственные числа;

$$m_{jk} = \begin{bmatrix} \frac{a_{12}}{-a_{11} - \mu_j} \\ 1 \\ \frac{a_{32}}{-a_{33} - \mu_j} \end{bmatrix} M_{jk}; \quad l_{jk} = \begin{bmatrix} \frac{b_{12}}{-b_{11} - \lambda_j} \\ 1 \\ \frac{b_{32}}{-b_{33} - \lambda_j} \end{bmatrix} L_{jk} \quad (22)$$

— собственные векторы матриц —  $A$  и —  $B$ ;

$$M_{jk} = \left[ \left( \frac{a_{12}}{a_{11} + \mu_j} \right)^2 + 1 + \left( \frac{a_{32}}{a_{33} + \mu_j} \right)^2 \right]^{-1/2};$$

$$L_{jk} = \left[ \left( \frac{b_{12}}{b_{11} + \lambda_j} \right)^2 + 1 + \left( \frac{b_{32}}{b_{33} + \lambda_j} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (23)$$

— нормировочные множители; вторым индексом в  $m_{jk}$  и  $l_{jk}$  обозначены номера соответствующих собственных векторов, двойным индексом — элементы матриц —  $A$  и —  $B$ , причем, как обычно, первый индекс указывает номер строки, второй — номер столбца.

Исследуем характер изменения функции  $q$ . Она принимает конечное значение при  $t = 0$ , достигает максимума при  $t = \varepsilon_1^{-1} \ln b \approx 3 \varepsilon_1^{-1} \ln 10$  и затем монотонно убывает, обращаясь в нуль при  $t \rightarrow \infty$ . Аппроксимируем эту функцию в интервале изменения  $t$  от 0 до  $2t_0$ , где  $t_0 = \varepsilon_1^{-1} \ln 10$ , в виде

$$q \approx \frac{\varepsilon_1}{\gamma} b^{-1} \exp(\varepsilon_1 t). \quad (24)$$

Подстановка (24) в определение  $X_j$  дает

$$X_j(q) = \frac{\varepsilon_1}{\gamma} b^{-1} \int_0^t e^{-\mu_j(t-t') + \varepsilon_1 t'} dt' = \frac{\varepsilon_1}{\gamma} b^{-1} e^{-\mu_j t} \times$$

$$\times \int_0^t e^{(\mu_j + \varepsilon_1)t'} dt' = \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \frac{b^{-1}}{\mu_j + \varepsilon_1} (e^{\varepsilon_1 t} + e^{-\mu_j t}),$$

откуда при  $t_0 \leq t \leq 2t_0$

$$X_j(q) \approx \frac{\varepsilon_1}{\gamma} \frac{b^{-1}}{\mu_j + \varepsilon_1} e^{\varepsilon_1 t}. \quad (25)$$

Объединяя (19) и (25), получаем:

$$x^{(0)} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma} b^{-1} e^{\varepsilon_1 t} \sum_{j=0,1,2} \frac{m_{jk} m_{j1}}{\mu_j + \varepsilon_1}. \quad (26)$$

Перейдем теперь к отысканию  $y^{(0)}$ . Предварительно выразим множитель  $\ln \left[ 1 + \frac{\alpha \gamma}{4a} x_1^{(0)} \right]$ , фигурирующий в определении  $p(x_1^{(0)})$ , в виде ряда и ограничимся первым членом разложения. Тогда

$$p(x_1^{(0)}) \approx \frac{\varepsilon_6}{\ln 2} \sqrt{\frac{\varepsilon_7}{1-f}} \frac{\alpha \gamma}{4a} x_1^{(0)}$$

или с учетом (26)

$$p(x_1^{(0)}) \approx \frac{\varepsilon_6}{\ln 2} \sqrt{\frac{\varepsilon_7}{1-f}} \frac{\alpha \varepsilon_1}{4a} b^{-1} e^{\varepsilon_1 t} \sum_{j=0,1,2} \frac{m_{jk} m_{j1}}{\mu_j + \varepsilon_1}. \quad (27)$$

После подстановки (27) в определение  $Y_j$  [см. (21)] имеем

$$\begin{aligned} Y_j(p(x_1^{(0)})) &= \frac{\varepsilon_6}{\ln 2} \sqrt{\frac{\varepsilon_7}{1-f}} \frac{\alpha \varepsilon_1}{4a} b^{-1} e^{-\lambda_j t} \times \\ &\times \sum_{j=0,1,2} \frac{m_{jk} m_{j1}}{\mu_j + \varepsilon_1} \int_0^t e^{(\lambda_j + \varepsilon_1)t'} dt' = \frac{\varepsilon_6}{\ln 2} \sqrt{\frac{\varepsilon_7}{1-f}} \frac{\alpha \varepsilon_1}{4a} b^{-1} \times \\ &\times \frac{e^{-\lambda_j t}}{\lambda_j + \varepsilon_1} [e^{(\lambda_j + \varepsilon_1)t} - 1] = \frac{\varepsilon_6}{\ln 2} \sqrt{\frac{\varepsilon_7}{1-f}} \frac{\alpha \varepsilon_1}{4a} b^{-1} \times \\ &\times \frac{e^{\varepsilon_1 t}}{\lambda_j + \varepsilon_1} [1 - e^{-(\lambda_j + \varepsilon_1)t}]. \end{aligned}$$

Отсюда при  $t_0 \leq t \leq 2t_0$  следует

$$Y_j(p(x_1^{(0)})) \approx \frac{\varepsilon_6}{\ln 2} \sqrt{\frac{\varepsilon_7}{1-f}} \frac{\alpha \gamma}{4a} \frac{x_1^{(0)}}{\lambda_j + \varepsilon_1}. \quad (28)$$

В комбинации с (20) это соотношение дает

$$y^{(0)} = \frac{\varepsilon_6}{\ln 2} \sqrt{\frac{\varepsilon_7}{1-f}} \frac{\alpha \gamma}{4a} x_1^{(0)} \sum_{j=0,1,2} \frac{l_{jk} l_{j1}}{\lambda_j + \varepsilon_1}. \quad (29)$$

Итак, решение линейной задачи (16) — (18) найдено. Решение нелинейного уравнения (13) можно искать методом последовательных приближений, используя в качестве нулевого приближения

решение (26), (29) линейной задачи. Поступая таким образом и ограничиваясь первым приближением, получаем:

$$x^{(1)} = x^{(0)} + \sum_{j=0,1,2} m_{jk} \left( m_{j1} \frac{1-f}{\gamma} - m_{j2} \right) \alpha \gamma X_j(x_1^{(0)} x_2^{(0)}), \quad (30)$$

где

$$X_j(x_1^{(0)} x_2^{(0)}) \approx \frac{x_1^{(0)} x_2^{(0)}}{\mu_j + 2\varepsilon_1}.$$

Соотношения (29), (30) представляют собой искомое решение системы (1) — (10), (12).

### Порядок выполнения и задачи работы

1. Составить программу вычисления собственных чисел и собственных векторов матриц —  $A$  и —  $B$  (необходимые рекомендации см. в Приложении к работе № 4).

2. При указанных в тексте значениях параметров модели произвести расчет эволюции термического режима системы океан—атмосфера с начала промышленной революции до конца XXI столетия.

3. Вариацией параметров  $\varepsilon_3$ ,  $\varepsilon_4$ ,  $\varepsilon_5$  и  $R_0$  исследовать зависимость полученного решения от интенсивности взаимодействия отдельных звеньев климатической системы.

4. Исследовать чувствительность решения к вариациям какого-либо одного (по собственному выбору) внутреннего или внешнего параметра модели.

5. Результаты расчета использовать для анализа особенностей эволюции термодинамического и углеродного циклов в системе океан—атмосфера и для характеристики возможных климатических последствий сжигания ископаемого топлива.

### Форма отчетности

В отчете приводятся распечатка программы, все результаты расчетов, графики, иллюстрирующие характер временной изменчивости элементов термодинамического и углеродного циклов в системе океан—атмосфера, анализ чувствительности решения к вариациям параметров модели, основанное на результатах вычислений обсуждение возможных климатических последствий антропогенных изменений содержания атмосферного  $\text{CO}_2$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ревелл Р., Манк У. Цикл углекислого газа и биосфера. — В сб.: Энергия и климат. Пер. с англ. Л., Гидрометеиздат, 1981, с. 266—303.
2. Schlesinger M. E. A review of climate models and their simulation of  $\text{CO}_2$  induced warming. — Intern. J. Environ. Studies, 1983, vol. 20, N 1, p. 103—114.

# РАСЧЕТ МЕРИДИОНАЛЬНОГО ПЕРЕНОСА ТЕПЛА В ОКЕАНЕ

## Введение

Меридиональный перенос тепла в океане является одним из наименее изученных элементов глобального климата. На первый взгляд эта точка зрения может показаться чрезмерно пессимистичной, особенно если учесть, что о меридиональном переносе тепла в системе океан—атмосфера известно не так уж и мало (см. раздел 4.2). В частности, известно, что меридиональный перенос тепла в системе океан—атмосфера ориентирован к полюсам, что такая его ориентация есть следствие преобладания коротковолновой солнечной радиации над уходящим длинноволновым излучением в низких широтах и обратного соотношения между этими потоками в высоких широтах, что меридиональный перенос тепла в океане соизмерим с меридиональным переносом тепла в атмосфере и что, наконец, меридиональные переносы тепла в океане и атмосфере имеют совершенно иную природу: максимальные значения меридионального переноса тепла в океане приурочены к низким широтам, где меридиональные градиенты температуры сравнительно невелики, тогда как максимальные значения меридионального переноса тепла в атмосфере сосредоточены в умеренных широтах, т. е. в области максимальных меридиональных градиентов температуры воздуха. Тем не менее большой разброс данных, опубликованных различными авторами, и почти полное отсутствие сведений о сезонной изменчивости меридионального переноса тепла в океане свидетельствуют о недостаточной изученности интересующего нас явления, определяющего не только современное состояние климатической системы, но и ее чувствительность к внешнему воздействию.

Цель настоящей работы состоит в выявлении особенностей сезонной изменчивости меридионального переноса тепла в океане.

## Определение меридионального переноса тепла в океане

При выводе выражения для меридионального переноса тепла в океане исходными уравнениями служат уравнение бюджета тепла

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} k_v \frac{\partial T}{\partial z} + F_T \quad (1)$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \varphi} v \cos \varphi \right) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2)$$

где  $T$  — температура воды;  $u$ ,  $v$ ,  $w$  — составляющие скорости те-



чения в направлении осей  $\lambda, \varphi, z$ ;  $\lambda$  — долгота;  $\varphi$  — широта;  $z$  — вертикальная координата, ориентированная вниз;  $k_v$  — коэффициент вертикальной турбулентной диффузии тепла;  $F_T$  — член, характеризующий горизонтальную турбулентную диффузию тепла;  $a$  — радиус Земли;  $t$  — время.

Перепишем уравнение (1) в дивергентной форме, для чего умножим уравнение (2) на  $T$  и затем сложим его с (1). В результате будем иметь

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} T u + \frac{\partial}{\partial \varphi} T v \cos \varphi \right) + \frac{\partial}{\partial z} T w = \\ = \frac{\partial}{\partial z} k_v \frac{\partial T}{\partial z} + F_T. \end{aligned} \quad (3)$$

Проинтегрируем (3) по вертикали от свободной поверхности ( $z = \zeta$ ) до дна ( $z = H$ ); здесь  $\zeta$  — отклонение свободной поверхности океана от ее среднего положения. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{\zeta}^H \frac{\partial T}{\partial t} dz + \frac{1}{a \cos \varphi} \int_{\zeta}^H \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} T u + \frac{\partial}{\partial \varphi} T v \cos \varphi \right) dz + (T w)_H - (T w)_{\zeta} = \\ = k_v \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_H - k_v \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\zeta} + \int_{\zeta}^H F_T dz. \end{aligned} \quad (4)$$

Однако

$$\begin{aligned} \int_{\zeta}^H \frac{\partial T}{\partial t} dz &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{\zeta}^H T dz + T_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \\ \int_{\zeta}^H \frac{\partial}{\partial \lambda} T u dz &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\zeta}^H T u dz - (T u)_H \frac{\partial H}{\partial \lambda} + (T u)_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda}; \\ \int_{\zeta}^H \frac{\partial}{\partial \varphi} T v \cos \varphi dz &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{\zeta}^H T v \cos \varphi dz - (T v \cos \varphi)_H \frac{\partial H}{\partial \varphi} - \\ &\quad - (T v \cos \varphi)_{\zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}. \end{aligned}$$

Подставляя эти соотношения в (4), находим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\zeta}^H T dz + \frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\zeta}^H T u dz + \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{\zeta}^H T v \cos \varphi dz \right) - \\ - \frac{T_H}{a \cos \varphi} \left( u_H \frac{\partial H}{\partial \lambda} + v_H \cos \varphi \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right) + T_{\zeta} \left( \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{u_{\zeta}}{a \cos \varphi} \times \right. \\ \times \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} + \frac{v_{\zeta}}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi} \Big) + (T w)_H - (T w)_{\zeta} = k_v \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_H - \\ - k_v \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\zeta} + \int_{\zeta}^H F_T dz. \end{aligned}$$

На свободной поверхности и дне океана должны выполняться условия:

$$w = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{u}{a \cos \varphi} \frac{\partial \zeta}{\partial \lambda} + \frac{v}{a} \frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}; \quad -k_v \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{\zeta} = \\ = \frac{q_0}{\rho c} \text{ при } z = \zeta$$

и

$$u = v = w = 0; \quad k_v \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_H = 0 \text{ при } z = H,$$

где  $q_0$  — результирующий поток тепла на поверхности раздела океан—атмосфера;  $\rho c$  — объемная теплоемкость морской воды.

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\zeta}^H T dz + \frac{1}{a \cos \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\zeta}^H T u dz + \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{\zeta}^H T v \cos \varphi dz \right) = \\ = \frac{q_0}{\rho c} + \int_{\zeta}^H F_T dz. \quad (5)$$

Параметризуем интегральный перенос тепла, обусловливаемый горизонтальной турбулентной диффузией, в виде

$$\int_{\zeta}^H F_T dz = \frac{k_h}{a^2 \cos \varphi} \left( \frac{\partial}{\partial \lambda} \frac{1}{\cos \varphi} \int_{\zeta}^H \frac{\partial T}{\partial \lambda} dz + \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{\zeta}^H \frac{\partial T}{\partial \varphi} \cos \varphi dz \right),$$

где  $k_h$  — коэффициент горизонтальной турбулентной диффузии. Подстановка этого выражения в (5) дает

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\zeta}^H T dz + \frac{1}{a \cos \varphi} \left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda} \int_{\zeta}^H \left( T u - \frac{k_h}{a \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right) dz + \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{\zeta}^H \left( T v - \frac{k_h}{a} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \cos \varphi dz \right\} = \frac{q_0}{\rho c}. \quad (6)$$

Умножим обе части равенства (6) на  $\rho c a \cos \varphi$  и затем проинтегрируем его по  $\lambda$  от  $\lambda_1$  до  $\lambda_2$ , где  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  — значения долготы восточной и западной границ океана. Учитывая, что на этих границах суммарный (адвективный плюс диффузионный) зональный поток тепла

$$\rho c \int_{\zeta}^H \left( T u - \frac{k_h}{a \cos \varphi} \frac{\partial T}{\partial \lambda} \right) dz$$

должен обращаться в нуль, получаем:

$$\rho c \frac{\partial}{\partial t} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} a \cos \varphi d\lambda \int_{\xi}^H T dz + \rho c \times \\ \times \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{\xi}^H \left( T v - \frac{k_h}{a} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \cos \varphi dz = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} q_0 a \cos \varphi d\lambda. \quad (7)$$

Обозначим символом  $Q$  теплосодержание

$$Q = \rho c \int_{\xi}^H T dz$$

столба воды единичного сечения, а символом  $[ \quad ]$  — операцию зонального усреднения. Тогда равенство (7) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} [Q] L(\varphi) + \rho c \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{\xi}^H \left( T v - \frac{k_h}{a} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \cos \varphi dz = [q_0] L(\varphi), \quad (8)$$

где

$$L(\varphi) = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} a \cos \varphi d\lambda$$

— зональная протяженность океана на широте  $\varphi$ .

Если теперь принять, что суммарный меридиональный перенос тепла

$$\rho c \int_{\xi}^H \left( T v - \frac{k_h}{a} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) \cos \varphi dz$$

равен нулю при  $\lambda = \lambda_1, \lambda_2$  или, иначе, если предположить, что на меридиональных границах океана средняя касательная составляющая скорости и ее флюктуации, создающие диффузионный перенос тепла в меридиональном направлении, обращаются в нуль, вместо (8) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} [Q] L(\varphi) + \rho c \frac{\partial}{\partial \varphi} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \cos \varphi d\lambda \int_{\xi}^H \left( T v - \frac{k_h}{a} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) dz = [q_0] L(\varphi). \quad (9)$$

Определим меридиональный перенос тепла в океане как

$$MHT_O = \rho c \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} a \cos \varphi d\lambda \int_{\xi}^H \left( T v - \frac{k_h}{a} \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) dz. \quad (10)$$

Тогда на основании (9)

$$\text{МНТ}_O = \text{МНТ}_O^0 + \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left( [q_0] - \frac{\partial [Q]}{\partial t} \right) L(\varphi) d\varphi,$$

где  $\text{МНТ}_O^0$  — меридиональный перенос тепла в океане на некоторой отсчетной широте  $\varphi_0$ .

Совмещая эту широту с побережьем Антарктиды, где, по определению,  $\text{МНТ}_O = 0$ , окончательно получаем (ср. с. [4, 5]):

$$\text{МНТ}_O = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \left( [q_0] - \frac{\partial [Q]}{\partial t} \right) L(\varphi) d\varphi. \quad (11)$$

Это и есть то искомое выражение, которое мы будем использовать для оценки меридионального переноса тепла в океане.

### Порядок выполнения и задачи работы

1. По своему усмотрению задать широту (кратную 6), для которой будет производиться расчет меридионального переноса тепла в океане.

2. Рассчитать  $L(\varphi)$ ,  $[Q]$  и  $[q_0]$  для всех 6-градусных зональных поясов океана, расположенных между выбранной широтой и широтой побережья Антарктиды. Расчет  $[Q]$  и  $[q_0]$  выполнить для каждого сезона года.

3. Реконструировать годовой ход  $[Q]$  и  $[q_0]$ . С этой целью приписать полученные в п. 2 значения климатических характеристик середине соответствующего сезона и подвергнуть их преобразованию Фурье по времени. Необходимые рекомендации по реализации дискретного преобразования Фурье приводятся в Приложении (см. также [1—3]).

Определить коэффициенты  $[Q^{(0)}]$ ,  $[Q^{(11)}]$ ,  $[Q^{(12)}]$ ,  $[Q^{(21)}]$  и  $[q_0^{(0)}]$ ,  $[q_0^{(11)}]$ ,  $[q_0^{(12)}]$ ,  $[q_0^{(21)}]$  первых четырех членов разложений

$$\begin{aligned} [Q(t)] &= [Q^{(0)}] + \begin{pmatrix} [Q^{(11)}] \cos(\sigma t) \\ [Q^{(12)}] \sin(\sigma t) \end{pmatrix} + [Q^{(21)}] \cos(2\sigma t); \\ [q_0(t)] &= [q_0^{(0)}] + \begin{pmatrix} [q_0^{(11)}] \cos(\sigma t) \\ [q_0^{(12)}] \sin(\sigma t) \end{pmatrix} + [q_0^{(21)}] \cos(2\sigma t), \end{aligned} \quad (12)$$

аппроксимирующих годовой ход  $[Q]$  и  $[q_0]$ .

4. С помощью первого из соотношений (12) найти скорость изменения теплосодержания  $\partial [Q]/\partial t$  в соответствующих зональных поясах океана.

5. Аппроксимировать выражение в правой части (11) его разностным аналогом.

6. Получить оценки меридионального переноса тепла на заданной широте в океане для каждого из 12 месяцев года.

### Форма отчетности

Отчетными материалами являются: результаты расчета средних сезонных зональных значений теплосодержания  $Q$  и результирующего потока тепла  $q_0$ , а также оценки зональной протяженности  $L$  ( $\varphi$ ) океана; распечатки программ дискретного преобразования Фурье и вычисления интеграла в (11); оценки коэффициентов разложений в (12); анализ сезонной изменчивости результирующего потока тепла на поверхности раздела океан—атмосфера, скорости изменения теплосодержания и меридионального переноса тепла в океане, иллюстрируемый надлежащими графиками.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С. Численные методы. Ч. I.— М.: Наука, 1973, с. 222—224.
2. Попов Б. А., Теслер Г. С. Приближение функций для технических приложений.— Киев: Наукова Думка, 1980, с. 48—51.
3. Хёмминг Р. В. Численные методы. Пер. с англ.— М.: Наука, 1972, с. 78—88.
4. Bryan K. Poleward heat transport by the ocean: observations and models.— Ann. Rev. Earth Planet. Sci., 1982, vol. 10, p. 15—38.
5. Bryan K. Poleward heat transport by the ocean.— Rev. Geophys. Space Phys., 1983, vol. 21, N 5, p. 1131—1137.

### Приложение

#### ПОНЯТИЕ О ПРЕОБРАЗОВАНИИ ФУРЬЕ И РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ЕГО РЕАЛИЗАЦИИ

Рассмотрим некоторую действительную функцию  $f(t)$  на интервале  $[\theta, \theta + 2\pi]$ . Предположим, что на этом интервале функция  $f(t)$  удовлетворяет следующим условиям Дирихле:

- 1)  $f(t)$  — однозначная, конечная и кусочно-непрерывная функция;
- 2)  $f(t)$  имеет ограниченное число максимумов и минимумов.

В этом случае функция  $f(t)$  может быть представлена на интервале  $[\theta, \theta + 2\pi]$  в виде ряда Фурье

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)), \quad (1)$$

где

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(t) \cos(nt) dt; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{\theta}^{\theta+2\pi} f(t) \sin(nt) dt. \quad (2)$$

Если  $f(t)$  — непериодическая функция, то ряд Фурье совпадает с самой функцией только на интервале  $[\theta, \theta + 2\pi]$ , если же  $f(t)$  имеет период  $2\pi$ , то ряд Фурье равен этой функции для всех значений  $t$  из области определения функции.

При рассмотрении функции  $f(t)$  на интервале  $[0, T]$  удобно ввести новую переменную  $\omega = 2\pi/T$ . В этом случае уравнение (1) сводится к виду

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t)); \quad (3)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\omega n t) dt; \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\omega n t) dt. \quad (4)$$

Разложение в ряд Фурье не только точно представляет функцию  $f(t)$  при  $N \rightarrow \infty$ , но и обеспечивает при фиксированном  $N$  наименьшую среднюю квадратическую ошибку по сравнению с любым другим представлением функции  $f(t)$  в виде тригонометрического ряда по  $\sin(\omega n t)$  и  $\cos(\omega n t)$  той же длины  $N$ . При увеличении числа членов в таком разложении все прежние коэффициенты сохраняют свой вид.

Слагаемые ряда Фурье

$$u_0 = a_0/2; \quad u_n = a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5)$$

называются гармониками, а параметр  $\omega$  — частотой.

Если ввести угол  $\varphi_n$  так, что

$$\cos \varphi_n = \frac{a_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}; \quad \sin \varphi_n = \frac{b_n}{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}, \quad (6)$$

то гармоника можно представить в более компактном виде:

$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}; \quad u_n = A_n \cos(\omega n t - \varphi_n). \quad (7)$$

Величины  $A_n$  и  $\varphi_n$  называются соответственно амплитудой и фазой гармоники.

Разложение в ряд Фурье можно осуществить и в том случае, когда вещественная функция  $f(t)$  задана лишь своими дискретными значениями

$$f_0, f_1, \dots, f_{K-1} \quad (8)$$

на системе равноотстоящих узлов

$$t_m = mT/K, \quad m = 0, 1, 2, \dots, K-1. \quad (9)$$

Ограничиваясь в разложении (3)  $N$  членами, получим многочлен Фурье  $N$ -го порядка:

$$Q(t_m) = a_0/2 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(\omega n t_m) + b_n \sin(\omega n t_m)). \quad (10)$$

Учтем, что функция задана на системе точек (9), и используем для интегрирования выражений (4) формулу прямоугольников. В результате получим следующее представление коэффициентов многочлена (10):

$$a_n = \frac{2}{K} \sum_{m=0}^{K-1} f_m \cos(\omega n m), \quad n = 0, 1, 2, \dots, N; \quad \omega = 2\pi/K;$$

$$b_n = \frac{2}{K} \sum_{m=0}^{K-1} f_m \sin(\omega n m), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (11)$$

Представление (10), (11) называется дискретным преобразованием Фурье.

При  $K = 2N$  выполняется соотношение

$$Q_N(t_m) = f_m \text{ для всех } t_m. \quad (12)$$

Следовательно, многочлен Фурье в этом случае превращается в интерполяционный многочлен. При  $K > 2N$  многочлен  $Q_N(t)$  дает наилучшее приближение к функции  $f(t)$  в смысле метода наименьших квадратов отклонений

$$\delta_N^2 = \sum_{m=0}^{k-1} [Q_N(t_m) - f_m]^2. \quad (13)$$

Если число точек  $K$ , в которых задана функция, четное, то коэффициенты последней гармоники имеют вид

$$a_n = \frac{1}{K} \sum_{m=0}^{k-1} f_m \cos(\omega n m); \quad b_n = 0. \quad (14)$$

Если  $K$  — нечетное число, то коэффициенты последней гармоники вычисляются по формулам (11). Подробнее изложение построения одномерного дискретного преобразования Фурье можно найти в [2, 3].

В настоящее время существуют несколько численных методов построения дискретного преобразования. К ним относятся рекуррентный метод и метод быстрого преобразования Фурье. Первый метод несколько экономичнее в смысле затрат машинного времени, чем непосредственные вычисления по формулам (10), (11).

Идея рекуррентного способа основана на том, что коэффициенты Фурье  $a_n$  и  $b_n$  можно вычислить, зная только значения  $\cos(\omega n)$  и  $\sin(\omega n)$ . Доказательство этого свойства дано в [3]. Здесь мы приведем только достаточно простые рекуррентные формулы, с помощью которых вычисляются коэффициенты Фурье для случая  $K = 2N$ .

Пусть

$$\begin{aligned} u_0 &= 0; \quad u_1 = f_{2N-1}; \quad u_j = 2 \cos(\omega n) u_{j-1} - u_{j-2} + f_{2N-j}, \\ j &= 2, 3, \dots, 2N-1. \end{aligned} \quad (15)$$

Тогда коэффициенты  $a_n$  и  $b_n$  можно выразить через функции  $u_j$  следующим образом:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{N} \left( \sum_{m=0}^{2N-1} f(m) \cos(\omega n m) \right) = \frac{1}{N} (\cos(\omega n) U_{2N-1} - U_{2N-2} + f(0)); \\ b_n &= \frac{1}{N} \left( \sum_{m=0}^{2N-1} f(m) \sin(\omega n m) \right) = \frac{1}{N} (\sin(\omega n) U_{2N-1}). \end{aligned} \quad (16)$$

Такой способ построения требует выполнения около  $6N^2$  операций.

Алгоритм быстрого преобразования Фурье обладает меньшей вычислительной погрешностью и более экономичен по сравнению с первым. Он требует для своей реализации всего  $O(N \log N)$  операций. Идея построения алгоритма быстрого преобразования состоит в том, что при  $N = p_1 p_2$ , где  $p_1, p_2$  — целые положительные числа, можно выделить одинаковые группы, которые входят в различные коэффициенты при построении многочлена Фурье (см. [1]).

Для дискретного преобразования Фурье при относительно небольших таблицах значений исходной функции можно использовать процедуру FURIER. Она вычисляет коэффициенты преобразования, амплитуды и фазы гармоник по формулам (10), (11) и (14).

# Текст процедуры FURIER

```

SUBROUTINE FURIER(K,Y,N,A,B,C,F,D)
C   ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ
C   DIMENSION Y(K),A(N),B(N),C(N),D(N),F(N)
C   ОПИСАНИЕ ФОРМАЛЬНЫХ ПАРАМЕТРОВ
C   ВХОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ
C   K-КОЛИЧЕСТВО ТОЧЕК В ИСХОДНОЙ ТАБЛИЦЕ
C   Y-ИСХОДНАЯ ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ
C   N-КОЛИЧЕСТВО СЛАГАЕМЫХ В ПРЕОБРАЗОВАНИИ
C   ВЫХОДНАЯ ИНФОРМАЦИЯ
C   A,B-КОЭФФИЦИЕНТЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ
C   C-АМПЛИТУДЫ ПРОСТЫХ ГАРМОНИК
C   F-НАЧАЛЬНЫЕ ФАЗЫ В ГРАДУСАХ
C   D-НАЧАЛЬНЫЕ ФАЗЫ В РАДИАНАХ
PI=3.14159
R=180./PI
A(1)=0.
G1=2*PI/K
DO 3I=2,N
C   ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ
A(I)=0.
B(I)=0.
DO 4J=1,K
G=G1*(I-1)*(J-1)
A(I)=A(I)+Y(J)*COS(G)
B(I)=B(I)+Y(J)*SIN(G)
4 CONTINUE
A(I)=2./K*A(I)
B(I)=2./K*B(I)
C   ПРОВЕРКА НА ЧЕТНОСТЬ K ДЛЯ
C   ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОСЛЕДНЕГО ЧЛЕНА РАЗЛОЖЕНИЯ
IF(K/2*2, EQ, K, AND, I, EQ, N) A(N)=A(N)/2
IF(K/2*2, EQ, K, AND, I, EQ, N) B(N)=0.
3 CONTINUE
C   ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЕРВОГО ЧЛЕНА РАЗЛОЖЕНИЯ
DO 13I=1,K
13 A(I)=A(I)+Y(I)
A(I)=A(I)/K*2.
C   ВЫЧИСЛЕНИЕ АМПЛИТУД И НАЧАЛЬНЫХ ФАЗ
DO 6I=2,N
C(I)=SQRT(A(I)**2+B(I)**2)
D(I)=ATAN(B(I)/A(I))
6 CONTINUE
DO 10I=2,N
IF(A(I), GT, 0, AND, B(I), GT, 0) F(I)=D(I)*R
IF(A(I), LE, 0, AND, B(I), GT, 0) F(I)=180.-D(I)*R
IF(A(I), LE, 0, AND, B(I), LE, 0) F(I)=180.+D(I)*R
IF(A(I), GT, 0, AND, B(I), LE, 0) F(I)=360.-D(I)*R
10 CONTINUE
RETURN
END

```