В. Б. ШТОКМАН

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ ПО ФИЗИКЕ МОРЯ

ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ЛЕНИНГРАД • 1970

УДК 551.46

СОСТАВИТЕЛИ

д-р физ.-мат. наук *В. М. КАМЕНКОВИЧ*,

д-р физ.-мат. наук *Р. В. ОЗМИДОВ*

Книга представляет собой сборник избранных трудов проф. В. Б. Штокмана (1909—1968), посвященных проблемам турбулентности и перемешивания водных масс в море, термике моря и теории морских и океанских течений. Эти работы полностью сохраняют свою научную актуальность и в настоящее время. Особенно велик вклад В. Б. Штокмана в теорию морских течений. Рациональное объяснение противотечений в морях и океанах; создание и развитие метода полных потоков; использование плотностных моделей при расчете течений на отдельных уровнях по известным полным потокам; истолкование своеобразия течений в проливах и вокруг островов — таков краткий перечень наиболее важных достижений проф. В. Б. Штокмана в этой области.

Сборник представляет интерес для научных работников; его можно также рекомендовать студентам старших курсов гидрометеорологических институтов и университетов в качестве введения в теоретическую океанологию.

This is a collection of Prof. W. B. Stockmann's papers devoted to problems of turbulence and mixing of water masses in the sea, thermal processes in the sea and theory of ocean currents. The papers present currently central problems. Of particular importance is the contribution made by W. B. Stockmann to the theory of sea currents. Rational explanation of counter-currents, the development of method of total flows, the application of density models to calculation of currents at different depths from the known values of total flows, the interpretation of specific features of the currents in straits and around the islands—that is a brief list of the most important achievements of Prof. W. B. Stockmann in oceanology.

The publication will prove valuable to research workers. It may be recommended to post-graduates of hydrometeorological institutes and universities as an introduction to theoretical oceanology.

2-9-7
71-70

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первые научные публикации Владимира Борисовича Штокмана появились в печати в середине 30-х годов нашего века, когда океанология переживала переломный момент, превращаясь из чисто описательной науки в точную дисциплину — раздел геофизики. Решающую роль в этом процессе и сыграл в нашей стране В. Б. Штокман, который, еще будучи студентом МГУ, а затем Гидрометеорологического института,[1] проявил живой интерес к приложению физико-математических методов к исследованию геофизических явлений. Начав свою деятельность как экспедиционный работник, В. Б. Штокман сразу же понял, что успех в динамической океанологии, которой он посвятил свою деятельность, может быть достигнут лишь при сочетании хороших натурных наблюдений с глубоким теоретическим анализом изучаемого явления. Такой подход был характерной чертой научной работы В. Б. Штокмана на протяжении всей его жизни.

Внимание В. Б Штокмана как ученого привлекали две основные проблемы динамики моря: турбулентность и течения. В краткой заметке трудно, конечно, достаточно полно охарактеризовать роль ученого в разработке этих проблем. Укажем лишь, что В. Б. Штокману принадлежат такие фундаментальные достижения, как выяснение важной роли пространственной неравномерности поля ветра над океанами при формировании горизонтальной структуры океанских течений, объяснение проти-

[1] Желающих ознакомиться с биографией В. Б. Штокмана более подробно мы отсылаем к статье А. Д. Добровольского в журнале «Океанология», т. IX, вып. 1. 1969.

вотечений в океанах и морях, создание основ метода полных потоков, внедрение новых статистических представлений и способов изучения турбулентных гидрологических полей в океане.

Включенные в настоящий сборник избранные статьи В. Б. Штокмана по физике моря отражают, на наш взгляд, основные направления научной деятельности ученого. В первой части вниманию читателей предлагается пять работ В. Б. Штокмана по вопросам турбулентности и турбулентного перемешивания в океане. В большой статье «Основы теории ϑ, s-кривых как метода изучения перемешивания и трансформации водных масс» изложены основные результаты В. Б. Штокмана, обосновывающие методику ϑ, s-анализа водных масс, широко используемую в современной океанологии. Этому вопросу посвящен ряд других статей В. Б. Штокмана, не вошедших в сборник (работы № 33, 34 и 52 в приводимом ниже списке трудов В. Б. Штокмана).

Во второй работе «Вертикальное распространение тепловых волн в море и косвенные методы определения коэффициента теплопроводности» классическая теория температурных волн, разработанная Фурье для твердых тел, была обобщена В. Б. Штокманом на типичный для морских условий случай переменного по глубине и во времени коэффициента обмена. Две следующие статьи «К вопросу о распространении теплых атлантических вод в арктических морях» и «Особенности распространения атлантических вод в Полярном бассейне» дают пример расчетов распределения гидрологических характеристик (температуры) в конкретных географических условиях. Эти расчеты, являвшиеся фактически первыми попытками прогноза гидрологических полей в океане, позволили В. Б. Штокману объяснить чрезвычайно интересные и казавшиеся в значительной степени загадочными особенности распространения теплых атлантических вод в Полярном бассейне.

В. Б. Штокману принадлежит большая заслуга во внедрении новых по тому времени представлений о гидрологических полях в океане как о полях случайных, подлежащих исследованию методами теории вероятностей и случайных функций. Такие представления, оказавшиеся, как мы теперь хорошо знаем, весьма перспективными, привели В. Б. Штокмана к необходимости внедрения новых методов экспедиционных исследований. Ему принадлежит совершенно новая для 30-х годов идея длительных, многократных измерений исследуемой величины в одной или нескольких точках избранного района океана (или, как теперь принято говорить, на «полигоне»). Подобного рода работы были осуществлены В. Б. Штокманом впервые в мировой практике в 1935 г. на Каспийском море. Обработка измерений на полигоне позволила получить интересные и важные статистические характеристики поля скорости в море. Представление об этой стороне деятельности В. Б. Штокмана может дать помещенная в сборнике статья «О пульсациях горизонтальных компонент скорости морских течений вследствие турбулентности большого масштаба». Следует отметить, что идею полигонных наблюдений и статистической обработки результатов измерений на них В. Б. Штокман успешно развивал и в последующие годы, примером чего может служить статья № 102, вышедшая из печати уже после кончины ученого.

Во второй части сборника помещены работы В. Б. Штокмана по динамике морских течений. Первая статья «Развитие теории морской и океанической циркуляции в СССР за 50 лет» вполне может рассматриваться как вводная ко всей части. Статья дает четкое представление о месте работ самого В. Б. Штокмана в океанологической литературе последних лет и о дальнейшем развитии его работ. По существу, все работы, приводимые во второй части, посвящены в той или иной степени изучению эффекта пространственной неравномерности касательного напряжения ветра при формировании горизонтальной структуры течений. Постановка и разработка этой проблемы является крупнейшим достижением В. Б. Штокмана, позволившим ему объяснить ряд важных и казавшихся загадочными явлений (противотечения в морях и океанах, особенности циркуляции вокруг островов и т. д.).

Начало работ этого направления было положено в 1941 г. статьей «Ветровой нагон и горизонтальная циркуляция в замкнутом море небольшой глубины», в которой на очень простой модели была продемонстрирована возможность появления поверхностного противотечения в замкнутом бассейне при поперечной неравномерности ветрового поля. В дальнейших работах эта идея обобщалась и развивалась (учет силы Кориолиса, рельефа дна и т. д.), что позволило В. Б. Штокману построить стройную теорию экваториальных противотечений в океанах и выяснить ветровое происхождение замкнутых циркуляций во внутренних морях (см. в настоящем сборнике статьи «Поперечная неравномерность нагонного ветра как одна из важных причин горизонтальной циркуляции в море», «Теория экваториальных противотечений в океанах». «Теоретическая модель циркуляции на поверхности океана в области экваториального противотечения», «Теоретическое определение меридиональных границ зональной циркуляции в северной половине Тихого океана», а также работы № 47, 49). Замечательно, что совместный учет рельефа дна и неравномерности ветрового поля позволил объяснить аномальную циркуляцию в Аральском море (статья

«Влияние рельефа дна и поперечной неравномерности ветра на горизонтальную циркуляцию в мелком море или водохранилище»). Вообще проблеме влияния рельефа дна на течения В. Б. Штокман придавал исключительно большое значение и неоднократно к ней возвращался (см. работы № 61, 62, 67, 76).

Следует отметить также, что при математической разработке своих идей В. Б. Штокману удалось создать очень плодотворный метод анализа течений в «срединном сечении» бассейна, позволивший простым путем получить многие важные результаты. Этот метод широко используется и в настоящее время.

Стремление на простой модели изучить влияние неравномерности поля ветра на течения в бароклинном океане привело В. Б. Штокмана к созданию основ метода полных потоков, сыгравшего исключительно большую роль при дальнейшем развитии теории морских течений. В пионерской работе «Уравнения поля полных потоков, возбуждаемых ветром в неоднородном море» В. Б. Штокман впервые показал возможность построения замкнутого уравнения для функции полных потоков (интегральное уравнение вихря). Дальнейшее развитие этой идеи привело к построению доступных для анализа моделей океанической циркуляции, позволивших выявить ряд исключительно важных факторов, формирующих течения в океане. Здесь в первую очередь следует отметить известную работу Г. Стоммела (Trans. Amer. Geophys. Union, 29, № 2, 1948), вскрывшую причину западной интенсификации океанских течений, а также обширное исследование У. Манка (Journal of Meteorology, 7, № 2, 1950).

В работе «Использование аналогии между полным потоком в море и изгибом закрепленной пластины для характеристики потоков в некоторых конкретных случаях» была найдена простая аналогия между распределением полных потоков в замкнутом море небольших размеров (эффект широтного изменения силы Кориолиса не учитывается) и прогибами пластины. Это позволило очень простым путем составлять схемы полных потоков.

В работе «Определение стационарных течений и поля масс, обусловленных ветром в бароклинном море» дано дальнейшее развитие метода полных потоков применительно к конкретной географической обстановке. В этой работе В. Б. Штокмана изложены также первые попытки вычисления скорости течения на отдельных уровнях по найденному из теории полному потоку течения. Для этого им были введены и проанализированы так называемые плотностные модели и указан метод расчета параметров таких моделей. Этот подход привлекает большое внимание исследователей и в настоящее время.

Статья «Качественный анализ причин аномальной циркуляции вокруг океанических островов» дает представление об идеях В. Б. Штокмана в связи с проблемой циркуляции вокруг островов (см. также работы № 94, 101). Эта интересная проблема особенно увлекала В. Б Штокмана в последние годы его жизни.

Последняя статья сборника публикуется впервые по найденной в архиве В. Б. Штокмана неоконченной рукописи. В определенном смысле эта статья выражает научное кредо Владимира Борисовича, и она, без сомнения, найдет соответствующий отклик у читателя.

В ограниченном по объему сборнике не представлялось возможным напечатать все важные работы В. Б. Штокмана по турбулентности и морским течениям. Например, весьма интересны исследования В. Б. Штокмана о влиянии плотностной стратификации вод на турбулентный обмен в океане (№ 6), о диссипации энергии в морских течениях (№ 42, 57), о причинах резкого различия в значениях коэффициентов вертикального и горизонтального турбулентного обмена в океане (№ 44). Большой интерес и поныне представляют работы В. Б. Штокмана по динамическому методу вычисления скоростей течения по известным из наблюдений полям температуры и солености в океане (№ 8, 26). Интересен также анализ циркуляции в двухслойном океане (№ 32). Перечислить все важные работы трудно, но мы надеемся, что публикуемый ниже список трудов В. Б. Штокмана поможет читателю в выборе соответствующих его интересам работ, не вошедших в сборник.

Со времени публикации первых работ В. Б. Штокмана прошло более 30 лет. За это время океанология сделала огромный шаг вперед. В нашей стране из созданного по инициативе В. И. Ленина Плавучего морского научно-исследовательского института выросли мощные научные учреждения, в которых заняты большие отряды ученых различных специальностей. Физико-математическое направление в океанологии разрабатывает теперь целая плеяда ученых, многие из которых являются учениками В. Б. Штокмана. Владимир Борисович является основоположником большой группы лабораторий по физическим проблемам в Институте океанологии им. П. П. Ширшова АН СССР, работе в котором он отдал около 25 лет своей жизни.

Естественно, что многие из работ В. Б. Штокмана получили за эти годы дальнейшее развитие, а в некоторых частях были уточнены или усовершенствованы. Однако выдвинутые

В. Б. Штокманом глубокие физические идеи и разработанные им оригинальные методы исследования еще далеко не исчерпаны. Поэтому и сегодня океанологи нередко испытывают необходимость в тщательном изучении работ В. Б. Штокмана. Думается, что и для студентов океанологов обязательным должно быть знакомство с его работами. Поэтому публикацию сборника избранных работ В. Б. Штокмана, разбросанных по отдельным, в ряде случаев довольно редким изданиям, безусловно следует приветствовать. Вне всякого сомнения, сборник найдет свое место в библиотеке каждого океанолога, а также лиц других специальностей, интересующихся проблемами динамики океана.

В. М. Каменкович

А. С. Монин

Р. В. Озмидов

СПИСОК НАУЧНЫХ РАБОТ
В. Б. ШТОКМАНА

1934 год

1. К методике обработки наблюдений над морскими течениями, измеренных вертушкой Экмана—Мерца. Зап. по гидрографии, № 3.

1936 год

2. О схеме течений Каспийского моря А. И. Михалевского. Метеорология и гидрология, № 4.

3. Несколько соображений о синоптическом анализе течений внутренних безливных морей небольшой глубины. Метеорология и гидрология, № 9.

4. Турбулентный обмен в районе Аграханского полуострова в Каспийском море. Коэффициенты виртуальной вязкости морской воды, перемешивания соли и тепла для случая градиентного течения. «Геофизика», т. 6, № 4 (22).

5. Опыт исследования кинематики течений северо-западного Каспия (резюме доклада). Тр. Всекаспийской научн. рыбохоз. конференции, 7—24/I 1935 г., т. I, М.—Л.

1937 год

6. Метод определения коэффициентов турбулентного обмена в зависимости от вертикальной устойчивости слоев морской воды на основе океанографических измерений. «Геофизика», т. 7, № 1 (25).

7. Результаты стационарного изучения течений у западного берега Среднего Каспия. Метеорология и гидрология, № 4—5 (совместно с И. И. Ивановским).

8. О применимости динамического метода обработки гидрологических данных в изучении течений Каспийского моря. «Геофизика», № 4 (28).

9. Краткая инструкция для наблюдений температуры поверхности морской воды, силы и направления ветра и морских течений (предназначается для рыболовецких колхозов и рыбозаводов Среднего и Южного Каспия). Азербайдж. н.-и. рыбохоз. ст., Баку.

1938 год

10. Исследование кинематики течений у западного берега в средней части Каспийского моря. ВНИРО. Изв. Азербайдж. н.-и. рыбохоз. ст., т. I.

11. Реферат ст. Ханса Эртеля. Развитие экмановской теории стационарных дрейфовых течений. Метеорология и гидрология, № 2.

12. К вопросу о построении линий тока в атмосфере и гидросфере по методу Сандстрема. Метеорология и гидрология, № 3.

13. Реферат ст. Веренщельда. Прибрежные течения. Метеорология и гидрология, № 3.

14. О косвенных методах изучения морских течений (динамический метод и метод М. Окада) на примере Каспийского моря. Метеорология и гидрология, № 8.

15. Конструкция прибора для изучения кривой подводной части троса, употребляемая при океанографических работах. Метеорология и гидрология, № 8.

16. Реферат ст. М. Люнц и А. Жапи. Турбулентная диффузия и измерение турбулентности. Метеорология и гидрология, № 9—10.

17. Реферат ст. Бьеркнес и Г. Сольберг. Целлюлярные инерционные волны и турбулентность. Метеорология и гидрология, № 9—10.

18. Некоторые характерные моменты горизонтального смешения водных масс Каспийского моря в системе $S=f(T)$. ДАН СССР, т. XVIII, № 8.

1939 год

19. Стационарные ветровые течения в море при наличии вертикального потока масс, обусловленного турбулентностью. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 1.

20. Полный поток дрейфового течения в средней и южной части Каспийского моря. ДАН СССР, т. XXIV, № 1.

21. О турбулентной диффузии атлантических вод в северо-западной части Каспийского моря. Проблемы Арктики, № 5.

1940 год

22. О турбулентном обмене в средней и южной части Каспийского моря. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 4.

23. О горизонтальном распространении температурных аномалий в океане. Проблемы Арктики, № 5.

24. К вопросу о распространении теплых атлантических вод в арктических морях. Проблемы Арктики, № 12.

1941 год

25. Ветровой нагон и горизонтальная циркуляция в замкнутом море небольшой глубины. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., т. V, № 1.

26. Теоретические основы вычисления стационарных геострофических течений по данным океанографических измерений. Проблемы Арктики, № 2.

27. Проф. В. А. Березкин. Динамика моря (рецензия). Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 3.

28. Реферат ст. Rossby C. G. Note on shearing stress caused by large scale lateral mixing. Proc. of the Fifth Congress for Applied Mechanics, Cambridge, U. S. A., 1939. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 3.

29. О пульсациях горизонтальных компонент скорости морских течений вследствие турбулентности большого масштаба. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 4—5.

1943 год

30. Основы теории ϑ, s-кривых как метода изучения перемешивания и трансформации водных масс моря. Проблемы Арктики, № 1.

31. О водных массах центральной части Ледовитого океана. Проблемы Арктики, № 2.

32. К вопросу о внутрислойной циркуляции, возбуждаемой ветром в фиордах и морских заливах небольшой глубины. Проблемы Арктики, № 2.

1944 год

33. Геометрические свойства T, S-кривых при смешении трех водных масс в неограниченном море. ДАН СССР, т. XLIII, № 8.

34. К определению коэффициента перемешивания в море с помощью T, S-кривых (о корректности метода Якобсена). ДАН СССР, т. XLIV, № 8.

35. Схемы стационарного поля языкообразных изотерм в море в случае изменения интенсивности турбулентного перемешивания и скорости течения. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 4.

36. Приближенный метод расчета теплового и солевого баланса моря и вычисления морских течений. Тр. АНИИ, т. 184.

37. Анализ применимости косвенных методов вычисления геострофических течений в условиях Гренландского моря. Тр. АНИИ, т. 184.

38. К теории суточного хода температуры на поверхности моря в связи с новым представлением об изменении коэффициента турбулентной теплопроводности в поверхностном слое морской воды. Тр. АНИИ, т. 184.

1945 год

39. Опыт качественного анализа температурного режима в области Куросио. ДАН СССР, т. XLVI, № 2.

40. Особенности распространения атлантических вод в Полярном бассейне. ДАН СССР, т. XLVIII, № 1.

41. Поперечная неравномерность нагонного ветра как одна из важных причин горизонтальной циркуляции в море. ДАН СССР, т. XLIX, № 2.

1946 год

42. О диссипации энергии в стационарных морских течениях. Тр. ИОАН, т. I.

43. К вопросу о тепловом режиме в области Куросио. Тр. ИОАН, т. I.

44. О соотношении между коэффициентами горизонтального и вертикального турбулентного обмена в море. Тр. ИОАН, т. I.

45. Вертикальное распространение тепловых волн в море и косвенные методы определения коэффициента теплопроводности. Тр. ИОАН, т. I.

46. Теория экваториальных противотечений в океанах. ДАН СССР, т. LII, № 4.

47. Теоретическое объяснение некоторых замечательных особенностей меридионального профиля поверхности Тихого океана. ДАН СССР, т. LIII, № 4.

48. Опыт косвенного определения скоростей пассатов в экваториальной части Тихого океана. ДАН СССР, т. LIII, № 6.

49. Наблюдаемые особенности прибрежной циркуляции в море и их связь с поперечной неравномерностью ветра. ДАН СССР, т. LIV, № 3.

50. Уравнения поля полных потоков, возбуждаемых ветром в неоднородном море. ДАН СССР, т. LIV, № 5.

51. Использование аналогии между полным потоком в море и изгибом закрепленной пластины для характеристики потоков в некоторых конкретных случаях. ДАН СССР, т. LIV, № 8.

52. A theory of ϑ, s curves as a method for studying the mixing of water masses in the sea. J. Marine Res., 6, No. 1.

53. Экваториальные противотечения. Газета «Красный флот», 30/III.

54. Теория экваториальных противотечений в океанах. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., т. X, № 6.

1947 год

55. О циркуляции, возбуждаемой ветром в глубоководных частях Каспийского моря. Метеорология и гидрология, № 2.

56. Возможны ли противотечения в безбрежном море, обусловленные локальной неравномерностью ветра. Метеорология и гидрология, № 5.

57. О диссипации энергии стационарных течений, возбуждаемых неравномерным ветром в замкнутом однородном бассейне. Метеорология и гидрология, № 6.

58. Теоретическая модель циркуляции на поверхности океана в области экваториального противотечения. ДАН СССР, т. LVII, № 7.

59. Новые доказательства значения неравномерности ветра как одной из причин циркуляции в море. ДАН СССР, т. LVIII, № 1.

1948 год

60. Соотношения между полем ветра, полем полных потоков и средним полем масс в неоднородном океане. ДАН СССР, т. LIX, № 4.

61. Влияние рельефа дна на направление среднего переноса, возбуждаемого ветром или полем масс в неоднородном океане. ДАН СССР, т. LIX, № 4.

62. Значение ветра и рельефа дна в образовании наблюдаемых особенностей динамической топографии южной части Атлантического океана. ДАН СССР, т. LX, № 6.

63. Экваториальные противотечения в океанах. Гидрометеоиздат, Л.

1949 год

64. К теории морских течений. Метеорология и гидрология, № 5.

65. О причинах отклонения Гольфстрима к югу от Ньюфаундленда. Метеорология и гидрология, № 6.

66. Влияние рельефа дна на направление морских течений. Газета «Красный флот», 15/V.

67. Исследование влияния ветра и рельефа дна на результирующую циркуляцию и распределение масс в неоднородном океане или в море. Тр. ИОАН, т. III.

68. Влияние рельефа дна на направление морских течений. «Природа», № 11.

1950 год

69. Определение скоростей течения и распределения плотности в поперечном сечении бесконечного канала в зависимости от эффекта ветра и бокового трения в поле силы Кориолиса. ДАН СССР, т. LXXI, № 1.

1951 год

70. Определение стационарных течений и поля масс, обусловленных ветром в бароклинном море. Тр. ИОАН, т. VI.

71. Морские течения и причины их возникновения. Газета «Красный флот», 26/VIII.

72. Локирование штормов и предсказание морской зыби. Газета «Красный флот», 28/X.

73. О некоторых укоренившихся заблуждениях в физической океанографии. «Природа», № 10.

74. Предисловие к книге «Основы предсказания ветровых волн, зыби и прибоя». Сб. статей. Перевод под ред. В. Б. Штокмана. ИЛ, М.

1952 год

75. Разрушительные морские волны сейсмического происхождения. Газета «Красный флот», 2/II.

76. О величине отклонения морских течений, обусловленного рельефом дна. Метеорология и гидрология, № 8.

77. Применение метода полных потоков для расчета циркуляции, возбуждаемой неравномерным ветром в море эллиптической формы. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 5.

78. Определение установившихся течений и распределения плотности в срединном поперечном сечении замкнутого моря удлиненной формы. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 6.

79. Влияние ветра на морские течения. Газета «Флаг Родины», Севастополь, 6/VI.

1953 год

80. Влияние поперечной неравномерности дрейфа льдов на горизонтальную циркуляцию в море. Метеорология и гидрология, № 2.

81. Некоторые вопросы динамики морских течений. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 1.

82. Влияние рельефа дна и поперечной неравномерности ветра на горизонтальную циркуляцию в мелком море или водохранилище. Метеорология и гидрология, № 8.

83. О моделировании полных потоков, возбуждаемых ветром в море. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 4.

84. Об учете «бокового» трения в динамике морских течений (критика результатов Хидака). ДАН СССР, т. LXXXVIII, № 5.

1954 год

85. Развитие полных потоков в море под действием ветра. Тр. ИОАН, т. IX (совместно с В. А. Цикуновым).

86. О причине круговых течений около островов и противоположных течений у берегов проливов. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 4.

87. Программа исследований по проблеме «Прогноз циркуляции вод океана». В серии «Ведущие проблемы науки», АН СССР.

1956 год

88. Теоретическое определение меридиональных границ зональной циркуляции в северной половине Тихого океана. Метеорология и гидрология, № 5.

1957 год

89. Влияние ветра на течения в Беринговом проливе, причины их больших скоростей и преобладающего северного направления. Критический обзор современных представлений о течениях в Беринговом проливе и об их причинах. Тр. ИОАН, т. XXV.

90. Метод расчета глубинных морских течений по поверхностному течению и градиенту атмосферного давления. Тр. ИОАН, т. XXV (совместно с А. И. Фельзенбаумом и Л. М. Фоминым).

1962 год

91. Замечание по поводу статьи О. И. Мамаева «T, S-анализ движущихся водных масс океана, ограниченных по вертикали». Океанология, т. II, вып. 5.

1964 год

92. К юбилею Кодзи Хидака (к 60-летию со дня рождения японского океанографа). «Океанология», т. IV, вып. 1.

93. Научная конференция по морским течениям. «Океанология», т. IV, вып. 5.

94. Влияние ветра и бокового трения на циркуляцию около островов. Studies on oceanography. A collection of papers dedicated to Koji Hidaka, Tokyo (совместно с В. М. Каменковичем).

1965 год

95. Предисловие к книге «Проблемы океанической циркуляции». (Сб. переводных статей под редакцией В. Б. Штокмана.) Изд-во «Мир», М.

96. Семен Владимирович Бруевич (к 50-летию научной деятельности специалиста в области океанологии). «Океанология», т. V, вып. 5 (совместно с Л. А. Зенкевичем и В. Г. Богоровым).

1966 год

97. Качественный анализ причин аномальной циркуляции вокруг океанических островов. Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», т. II, № 11.

1967 год

98. Развитие теории морской и океанической циркуляции в СССР за 50 лет. «Океанология», т. VII, вып. 5.

99. Об одной проблеме динамики океанической циркуляции. Симпозиум МАФО по математическим и гидродинамическим методам изучения физических процессов в океане. (Москва 25—28/V 1966 г.)

100. The theory of oceanic circulation developed in the U. S. S. R. over the past fifty years. Assoc. Intern. d'océanographie physique. Publ. Scientifique, n° 28.

1968 год

101. Исследование особенностей циркуляции вокруг океанических островов путем численного эксперимента. Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», т. IV, вып. 12 (совместно с Д. Г. Ржеплинским).

1969 год

102. Длительные измерения изменчивости физических полей на океанических полигонах как новый этап в исследовании океана. ДАН СССР, т. CLXXXVI, № 5 (совместно с М. Н. Кошляковым, Р. В. Озмидовым, Л. М. Фоминым и А. Д. Ямпольским).

103. Рецензия на монографию А. С. Монина и А. М. Яглома «Статистическая гидромеханика (механика турбулентности)». «Океанология», т. IX, вып. 1 (совместно с Р. В. Озмидовым).

1970 год

104. Некоторые соображения о состоянии и задачах теории океанической циркуляции. (См. настоящий сборник.)

ОТ СОСТАВИТЕЛЕЙ

При подготовке сборника к печати все статьи были тщательно просмотрены и выявившиеся технические погрешности и неточности были исправлены (часто в соответствии с последующими работами самого В. Б. Штокмана). Мы стремились не злоупотреблять примечаниями, однако в отдельных местах мы посчитали их необходимыми. В статье «Теория экваториальных противотечений в океанах» при выводе формул для наклонов свободной поверхности океана была допущена неточность, повлиявшая на окончательный вид соответствующих формул. Погрешность, однако, оказалась несущественной и потому не повлияла на правильность выводов о структуре экваториальных противотечений (в важном случае ветра, обладающего симметрией относительно оси канала, погрешность вообще не возникает). Мы позволили себе, полностью сохранив общий ход рассуждений автора, внести необходимые исправления прямо в текст статьи, поскольку подстрочные примечания в этом случае наверняка затруднили бы чтение работы. Соответствующие изменения внесены и в статью «Теоретическое определение меридиональных границ зональной циркуляции в северной половине Тихого океана», в которой использовались неточные формулы из статьи «Теория экваториальных противотечений в океанах».

Первая часть составлена и отредактирована Р. В. Озмидовым, вторая — В. М. Каменковичем.

В заключение нам приятно отметить, что в подготовке настоящего издания деятельное участие приняли многие бывшие сотрудники и ученики Владимира Борисовича. Всем им мы приносим свою благодарность. Мы благодарны также сотрудникам Гидрометеоиздата за большую помощь при подготовке сборника к печати.

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ И ТУРБУЛЕНТНОЕ ПЕРЕМЕШИВАНИЕ В МОРЕ

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ϑ, s-КРИВЫХ КАК МЕТОДА ИЗУЧЕНИЯ ПЕРЕМЕШИВАНИЯ И ТРАНСФОРМАЦИИ ВОДНЫХ МАСС МОРЯ [1]

«Практические потребности могут только выиграть от ясного понимания теоретических вопросов»

Гельмгольц

Введение

Понятие о водных массах впервые было введено в океанологию А. Дефантом [1]. Под водными массами моря или океана подразумевают, согласно Дефанту, такие однородные, ограниченные или неограниченные водные объемы, которые характеризуются вполне определенными физико-химическими свойствами, например температурой морской воды и ее соленостью.

Помимо важного вопроса о генезисе различных водных масс, не меньший интерес представляет изучение их трансформации вследствие процессов перемешивания. Весьма плодотворным методом является здесь так называемый метод ϑ, s-диаграмм Хелланд-Хансена [2]. Сущность этого метода заключается в том, что различные глубины данного вертикального сечения моря изображаются в прямоугольной системе координат ϑ, s (ϑ — температура, s — соленость).

Марки, поставленные в различных точках кривой на рис. 1, соответствуют глубинам от поверхности моря, измеряемым обычно в метрах.

Изображенная на рис. 1 кривая рисует, очевидно, функциональную связь, которая существует между температурой и соленостью на различных глубинах рассматриваемой вертикали.

[1] Опубликовано в Проблемах Арктики, № 1, 1943 г.

Замечательно, что ϑ, s-кривые, построенные в свое время Хелланд-Хансеном для Атлантического океана, позволили ему обнаружить весьма однообразную зависимость $s=f(\vartheta)$, несмотря на то, что температура и соленость в Атлантическом океане меняются, казалось бы, независимо друг от друга.

В качестве иллюстрации этому на рис. 2 изображена серия кривых $s=f(\vartheta)$, построенных А. Дефантом [3] по данным наблюдений на меридиональном разрезе западной половины Атлантического океана, осуществленном экспедицией на «Метеоре». Подобного рода однообразная картина изменения солености в зависимости от температуры является несомненным следствием смешения определенных водных масс, залегающих в известном порядке на различных глубинах в западной части Атлантического океана.

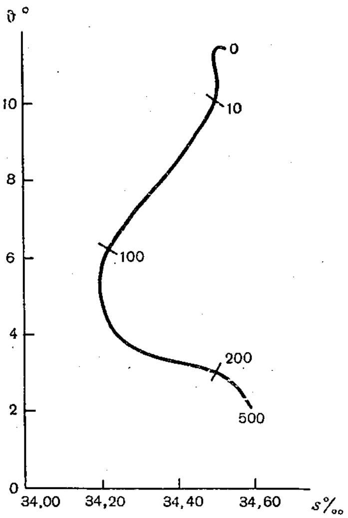

Рис. 1.

Согласно элементарному принципу, продукт смешения двух водных масс — I и II, изображающихся двумя точками в системе координат ϑ, s, находится на прямой, соединяющей эти точки. В самом деле, температура и соленость перемешивающихся водных масс вычисляются по следующим известным формулам смешения:

$$\vartheta = \frac{m_1\vartheta_1 + m_2\vartheta_2}{m_1 + m_2};$$

$$s = \frac{m_1 s_1 + m_2 s_2}{m_1 + m_2},$$

в которых через m_1 и m_2 обозначено число частей водных масс I и II соответственно. Очевидно, эти формулы определяют координаты точки, делящей отрезок прямой, соединяющей исходные водные массы, в отношении $\frac{m_1}{m_2}$ так, как это показано на рис. 3. Зная же относительную длину отрезков m_1 и m_2, легко подсчитать в процентах доли водных масс I и II, которые в результате перемешивания определили температуру и соленость на рассматриваемой глубине моря.

Следовательно, прямолинейные участки ϑ, s-диаграмм соответствуют таким глубинам, на которых температура и соленость морской воды являются результатом смешения водных масс в вертикальном направлении. Так, в приведенном примере (рис. 3) вода на глубине H является продуктом смешения 75% водной массы I и 25% водной массы II.

Не трудно сообразить, что в случае смешения трех водных масс, изображающихся в системе координат ϑ, s тремя точками, ϑ, s-диаграмма должна иметь форму, указанную на рис. 4. В этом случае точка A ϑ, s-кривой соответствует глубине залегания «ядра» промежуточной водной массы II, а закругленные части ϑ, s-кривой соответствуют воде, являющейся продуктом

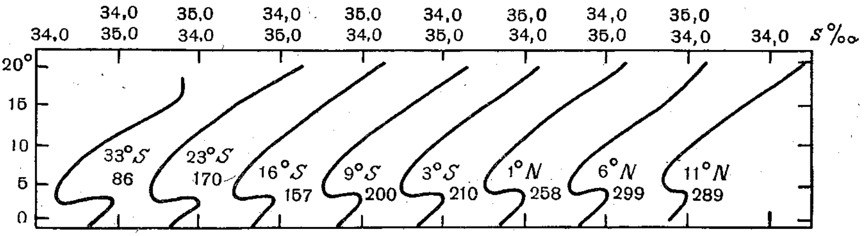

Рис. 2. ϑ, s-кривые в западной части Атлантического океана (по Дефанту и Вюсту).

86 — станция НИС «Метеор» № 86 и т. д.

смешения трех водных масс I, II и III. По этой последней причине точки в упомянутой части ϑ, s-кривой не ложатся на прямые, соединяющие (пунктиром) водные массы I, II и III в начальной стадии смешения. Прямолинейным участкам ϑ, s-кривой на рис. 4 соответствуют лишь марки на достаточном удалении от промежуточного слоя, где вода в основном определяется смешением двух водных масс — I и II либо II и III.

Такова в основных чертах элементарная теория ϑ, s-кривых, более подробно изложенная в единственно известной нам статье, посвященной этому вопросу, принадлежащей перу А. Дефанта и Г. Вюста [3]. Мы не встречали, однако, аналитической теории ϑ, s-кривых, позволяющей более глубоко проникнуть в сущность этого метода. Такой теории и посвящено содержание настоящей статьи.

В дальнейшем мы устанавливаем ряд теорем, составляющих основу своеобразной «геометрии ϑ, s-кривых», и пытаемся внести ясность в практически важный вопрос об определении свойств морской воды в результате **полного** перемешивания.

Применяемая нами геометрическая интерпретация процессов теплопроводности и диффузии позволяет путем простых геометрических построений решить одновременно «прямую» и «обратную» задачу математической физики. Иными словами, мы получаем возможность исследовать не только трансформацию вод-

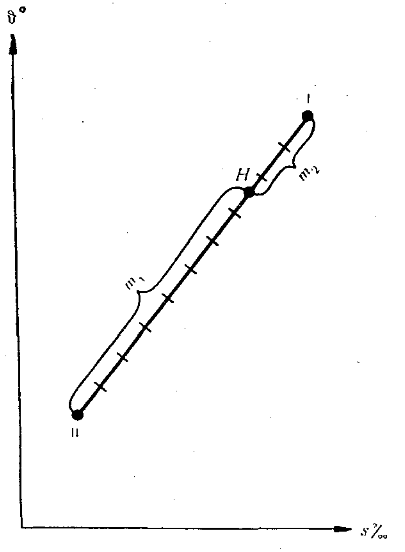

Рис. 3.

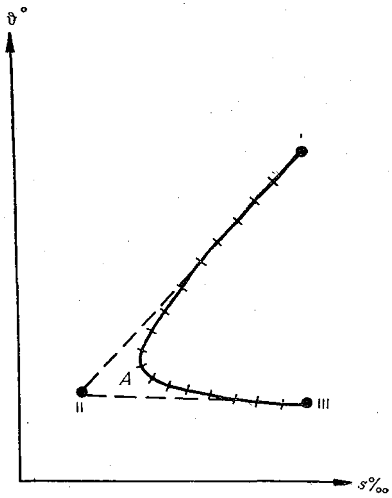

Рис. 4.

ных масс с течением времени, зная начальное состояние среды и характерные параметры, но и определить это начальное состояние водных масс, их вертикальную протяженность и интенсивность перемешивания, зная вертикальное распределение температуры и солености в любой последующий момент времени.

§ 1. Перемешивание и трансформация двух соприкасающихся неограниченных водных масс в системе $s=f(\vartheta)$

Мы рассмотрим здесь наиболее простой случай вертикального перемешивания двух неограниченных водных масс, соприкасающихся вдоль некоторой поверхности раздела, причем вначале мы исследуем процессы вертикального выравнивания температуры и солености обособленно друг от друга, а затем выясним, как изучаемое нами явление интерпретируется в системе $s=f(\vartheta)$. Такого принципа мы будем придерживаться и в дальнейшем.

Пусть температура и соленость водной массы *I* соответственно равны Θ_1 и S_1, а температура и соленость водной массы *II* равны Θ_2 и S_2. Поместим начало координат $(z=0)$ на поверхности раздела, расчленяющей водные массы в вертикальном направлении, и направим положительную ось z вертикально вниз, а отрицательные значения z будем отсчитывать по направлению вверх. Имея в виду лишь процессы вертикальной теплопроводности и диффузии, выравнивающие температуру и соленость водных масс, мы будем описывать эти процессы следующими дифференциальными уравнениями типа Фурье:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial s}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \text{ для области } z > 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}; \quad \frac{\partial s}{\partial t} = k_2 \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} \text{ для области } z < 0, \tag{2}$$

в которых через t обозначено время, а через k — постоянная в пределах данной водной массы величина коэффициента турбулентного обмена, размерность которого, очевидно, равна

$$[k] = [\text{см}^2/\text{сек.}].$$

В целях общности задачи мы допускаем, что коэффициенты турбулентного обмена k_1 и k_2 не равны между собой.

Исследуя выравнивание температуры и солености, мы подчиним решение уравнений (1)—(2) следующим граничным и начальным условиям.

В начальный момент времени, до смешения, температура и соленость каждой водной массы характеризуются указанными выше величинами.

Таким образом, при $t=0$

$$\text{для } z > 0 \quad \vartheta = \Theta_1, \quad s = S_1; \tag{3}$$

$$\text{для } z < 0 \quad \vartheta = \Theta_2, \quad s = S_2. \tag{4}$$

Теперь нам следует выбрать условие на границе раздела. Это требование основывается на том проверенном на опыте факте, что по истечении первого мгновения, т. е. при $t>0$, граница раздела уже не представляет собой поверхности разрыва температуры и солености, и эти свойства при переходе от одной водной массы к другой меняются непрерывно.

Следовательно, при $t>0$

$$\left(k_1 \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=+0} = \left(k_2 \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=-0}; \quad \left(k_1 \frac{\partial s}{\partial z}\right)_{z=+0} = \left(k_2 \frac{\partial s}{\partial z}\right)_{z=-0} \tag{5}$$

и, кроме того,

$$(\vartheta)_{z=+0} = (\vartheta)_{z=-0}; \quad (s)_{z=+0} = (s)_{z=-0}. \tag{6}$$

Заметим, что в процессе перемешивания температура и соленость обеих водных масс стремятся к некоторым стационарным величинам, равным температуре и солености в результате полного перемешивания. Очевидно, что это стационарное состояние достигается тем позднее, чем дальше от границы раздела находится рассматриваемая точка водной массы I и II. Ясно также, что для точек, бесконечно удаленных от границы раздела, стационарное состояние достигается лишь в пределе при $t=\infty$. Напротив, не трудно догадаться, что в другом предельном случае — на самой границе раздела — стационарные значения температуры и солености устанавливаются мгновенно, по исчезновении разрыва непрерывности свойств водных масс.

Имея в виду упомянутый вывод, к которому мы пришли в результате простых рассуждений и который может быть доказан лишь путем кропотливых вычислений, мы перепишем условия (6) так:

$$(\vartheta)_{z=+0}=(\vartheta)_{z=-0}=\Theta_m; \quad (s)_{z=+0}=(s)_{z=-0}=S_m, \qquad (6')$$

где Θ_m и S_m — постоянные значения температуры и солености на границе раздела, которые соответствуют стационарному состоянию водных масс в результате полного перемешивания.

Хорошо известно, что одним из интегралов уравнения типа Фурье (1) является так называемая функция Крампа (или интеграл ошибок):

$$\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^{\frac{z}{2\sqrt{kt}}} e^{-\eta^2}\,d\eta. \qquad (7)$$

Основываясь на этом, а также на условии (6), мы будем искать общие решения уравнения (1)—(2) в форме:

$$(\vartheta)_{z>0}=\Theta_m+D_1\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{k_1t}}\right); \quad (\vartheta)_{z<0}=\Theta_m+D_2\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{k_2t}}\right), \qquad (8)$$

где D_1 и D_2 — постоянные, которые следует определить из поставленных выше условий. Мы не выписываем выражений для солености водных масс, поскольку эти выражения совершенно аналогичны формулам (8).

Не трудно убедиться, что выражения (8) удовлетворяют условиям (6′), ибо $\Phi(0)=0$. С другой стороны, так как $\Phi(\infty)=1$, то, полагая в (8) $t=0$, мы, согласно условиям (3) и (4), получим:

$$\Theta_1=\Theta_m+D_1; \quad \Theta_2=\Theta_m-D_2,$$

откуда

$$D_1=\Theta_1-\Theta_m; \quad D_2=\Theta_m-\Theta_2,$$

и формулы (8) принимают вид:

$$(\vartheta)_{z>0}=\Theta_m+(\Theta_1-\Theta_m)\,\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{k_1t}}\right), \qquad (9)$$

$$(\vartheta)_{z<0}=\Theta_m-(\Theta_2-\Theta_m)\,\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{k_2t}}\right). \qquad (10)$$

Нам остается определить стационарное значение Θ_m, к которому стремится температура водных масс в результате полного перемешивания.

Для этой цели мы прибегнем к условиям (5).

Дифференцируя (9) и (10) по z и принимая во внимание, что при $z \gtrless 0$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi kt}}e^{-\frac{z^2}{4kt}},$$

мы получим

$$k_1\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_{z=+0}=k_1(\Theta_1-\Theta_m)\left[\frac{\partial}{\partial z}\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{k_1 t}}\right)\right]_{z=+0}=$$

$$=\frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{\pi t}}(\Theta_1-\Theta_m).$$

Аналогично

$$k_2\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_{z=-0}=-\frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{\pi t}}(\Theta_2-\Theta_m).$$

На основании (5)

$$\sqrt{k_1}(\Theta_1-\Theta_m)=\sqrt{k_2}(\Theta_m-\Theta_2), \tag{11}$$

откуда

$$\Theta_m=\frac{\sqrt{k_1}\Theta_1+\sqrt{k_2}\Theta_2}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}. \tag{12}$$

Совершенно так же найдем, что

$$S_m=\frac{\sqrt{k_1}S_1+\sqrt{k_2}S_2}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}. \tag{13}$$

Таким образом, решения уравнений (1)—(2) запишутся в виде:

$$\left.\begin{aligned}(\vartheta)_{z>0}&=\frac{\sqrt{k_1}\Theta_1+\sqrt{k_2}\Theta_2}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}+\\&+\frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}(\Theta_1-\Theta_2)\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{k_1 t}}\right);\\(s)_{z>0}&=\frac{\sqrt{k_1}S_1+\sqrt{k_2}S_2}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}+\frac{\sqrt{k_2}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}(S_1-S_2)\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{k_1 t}}\right),\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$$\left.\begin{aligned}(\vartheta)_{z<0}&=\frac{\sqrt{k_1}\Theta_1+\sqrt{k_2}\Theta_2}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}+\\&+\frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}(\Theta_1-\Theta_2)\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{k_2 t}}\right);\\(s)_{z<0}&=\frac{\sqrt{k_1}S_1+\sqrt{k_2}S_2}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}+\frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{k_1}+\sqrt{k_2}}(S_1-S_2)\Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{k_2 t}}\right).\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Выравнивание температуры и солености водных масс *I* и *II* схематически изображено на рис. 5 *а* и *б* (в предположении, что $\frac{\sqrt{k_1}}{\sqrt{k_2}}=\frac{1}{2}$). Согласно формуле (11), точки Θ_m и S_m делят от-

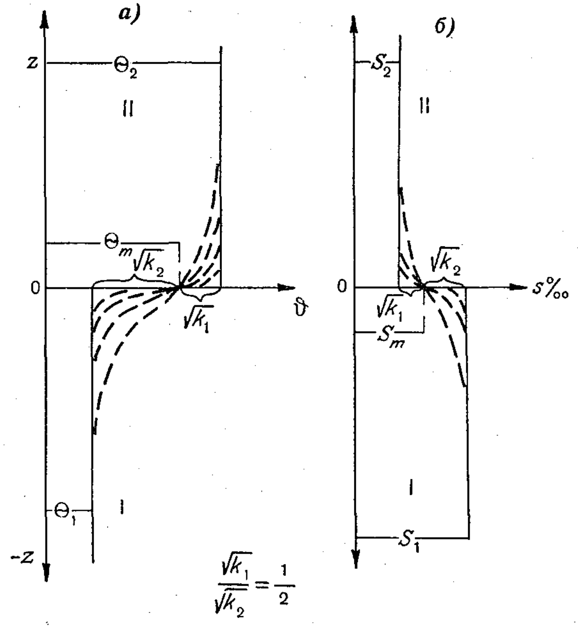

Рис. 5.

резки $\Theta_1-\Theta_2$ и S_1-S_2 на части, по величине обратно пропорциональные соответствующим значениям $\sqrt{k}$. В частном случае, когда величины коэффициента перемешивания в области водных масс *I* и *II* одинаковы ($k_1=k_2$), стационарные значения Θ_m и S_m представляют собой полусумму величин температуры и солености водных масс *I* и *II*. Этот частный случай был рассмотрен ранее Дефантом.

Посмотрим, как исследуемый нами процесс интерпретируется в системе $s=f(\vartheta)$. Для этого, очевидно, необходимо исключить координату z $\left[\text{иначе говоря } \Phi\left(\frac{z}{2\sqrt{kt}}\right)\right]$ из формул (14) и (15).

Проделав эту операцию, мы получим уравнение вида

$$\vartheta - \Theta_m = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{S_1 - S_2}(s - S_m),$$

представляющее собой уравнение прямой, проходящей через две точки Θ_2, S_2 и Θ_1, S_1.

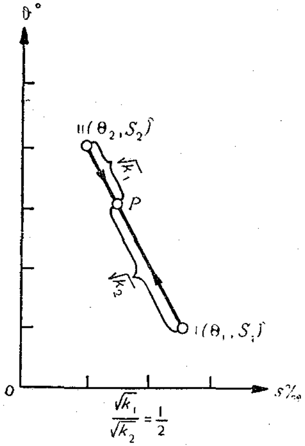

Рис. 6

Так как сама точка Θ_m, S_m, как это видно из формул (12) и (13), лежит на прямой, соединяющей данные водные массы *I* и *II*, то очевидно, что текущие координаты ϑ, s, характеризующие продукт смешения, также принадлежат прямой, соединяющей в системе $s = f(\vartheta)$ водные массы *I* и *II*.

Трансформация этих водных масс, преобразующихся в результате перемешивания в новую водную массу *P* с координатами Θ_m, S_m, схематически изображена на рис. 6. (Этот чертеж построен в том же масштабе ϑ, s, что и чертеж на рис. 5.) Точка *P* делит отрезок прямой *I—II* на части, обратно пропорциональные величинам $\sqrt{k_1}$ и $\sqrt{k_2}$.

Заметим, что формулы (12) и (13) аналогичны обычным формулам смешения, с той лишь разницей, что вместо объемов или вертикальной протяженности водных масс h_1 и h_2 в случае их ограниченности, в формулах (12) и (13), относящихся к смешению неограниченных объемов, фигурируют величины $\sqrt{k_1}$ и $\sqrt{k_2}$. Эти величины могут быть названы коэффициентами аккумуляции (тепла и солей).

§ 2. Трансформация и перемешивание трех водных масс, из которых одна, промежуточная, ограничена, а две другие — не ограничены. Геометрические свойства ϑ, s-кривых

Рассмотрим теперь более сложный случай вертикального перемешивания трех водных масс, из которых одна, промежуточная, ограничена.

Поместим начало координат ($z = 0$) в центре этой промежуточной водной массы, границы которой определяются значениями $z = +h$, $z = -h$. Две другие водные массы простираются неограниченно от $z = h$ до $z = +\infty$ и от $z = -h$ до $z = -\infty$.

Пусть температуры и соленость водных масс в начальный момент времени равны при $t=0$:

$$\left.\begin{array}{lll} 1) \text{ для } \infty > z > h & \vartheta=\Theta_1, & s=S_1; \\ 2) \text{ для } h > z > -h & \vartheta=\Theta_2, & s=S_2; \\ 3) \text{ для } -h > z > -\infty & \vartheta=\Theta_3, & s=S_3. \end{array}\right\} \quad (16)$$

Допустим, для простоты, что коэффициент турбулентного перемешивания k в области всех трех водных масс (от $-\infty$ до $+\infty$) остается неизменным. Присоединяя к условиям (16) условия, аналогичные (5) и (6), мы без труда получим для температуры водных масс, в качестве решения уравнения типа (1), формулу следующего вида:

$$\vartheta=\frac{1}{2}\left[\Theta_1+\Theta_3+(\Theta_1-\Theta_2)\,\Phi\left(\frac{z-h}{2\sqrt{kt}}\right)+\right.$$
$$\left.+(\Theta_2-\Theta_3)\,\Phi\left(\frac{z+h}{2\sqrt{kt}}\right)\right] \quad (17)$$

и подобную ей формулу для солености.

Эти формулы в дальнейшем позволят нам установить ряд важных следствий о геометрических свойствах ϑ, s-кривых.

Анализируя выражение (17), не трудно убедиться, что в частном случае, когда промежуточная водная масса отсутствует, т. е. когда $h=0$, формула (17) приобретает вид, совершенно аналогичный полученным ранее формулам (14) и (15), когда мы в этих последних положим $k_1=k_2$. Из формулы (17) можно видеть также, что температура и соленость на границе промежуточной водной массы не являются постоянными, как это было в случае смешения двух неограниченных водных масс [формулы (14) и (15) и рис. 5].

В самом деле, как это следует из выражения типа (17), термохалинные индексы водных масс на границе $z=+h$ изменяются по закону

$$\left.\begin{array}{l} (\vartheta)_{z=+h}=\dfrac{1}{2}\left[\Theta_1+\Theta_3+(\Theta_2-\Theta_3)\,\Phi\left(\dfrac{h}{\sqrt{kt}}\right)\right], \\ (s)_{z=+h}=\dfrac{1}{2}\left[S_1+S_3+(S_2-S_3)\,\Phi\left(\dfrac{h}{\sqrt{kt}}\right)\right], \end{array}\right\} \quad (18)$$

а на границе $z=-h$ — по закону

$$\left.\begin{array}{l} (\vartheta)_{z=-h}=\dfrac{1}{2}\left[\Theta_1+\Theta_3-(\Theta_1-\Theta_2)\,\Phi\left(\dfrac{h}{\sqrt{kt}}\right)\right], \\ (s)_{z=-h}=\dfrac{1}{2}\left[S_1+S_3-(S_1-S_2)\,\Phi\left(\dfrac{h}{\sqrt{kt}}\right)\right]. \end{array}\right\} \quad (19)$$

Так как $\Phi(\infty)=1$, то при $t=0$, т. е. в начальный момент времени, температура и соленость на границах промежуточной водной массы *II* равны полусумме температур и соленостей водных масс, прилегающих к данной границе раздела:

$$\left.\begin{aligned} \vartheta_{z=h} &= \frac{\Theta_1+\Theta_2}{2}; \quad (s)_{z=h} = \frac{S_1+S_2}{2}, \\ \vartheta_{z=-h} &= \frac{\Theta_2+\Theta_3}{2}; \quad (s)_{z=-h} = \frac{S_2+S_3}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Последние величины соответствуют, очевидно, тем стационарным значениям температуры и солености, которые установились бы с первого момента на поверхности раздела между двумя неограниченными водными массами (или двумя ограниченными водными массами в случае одинаковой их толщины). Однако, как это видно из формулы (17), с увеличением времени t промежуточный слой вырождается и температура и соленость всех трех водных масс стремятся к новым стационарным значениям:

$$\lim \vartheta_{t=\infty} = \frac{\Theta_1+\Theta_3}{2}; \quad \lim (s)_{t=\infty} = \frac{S_1+S_3}{2},$$

соответствующим конечной стадии перемешивания. Понятно, что к этим значениям стремятся температура и соленость на глубинах, соответствующих положению границ промежуточного слоя, где температура и соленость в начальной стадии смешения характеризовались формулами (20).

Схематическая картина изменения солености с течением времени изображена на рис. 7.

Проследим теперь за трансформацией в системе $s=f(\vartheta)$ «ядра» промежуточной водной массы *II*, подразумевая под этим термином центральную область, соответствующую значению параметра $z=0$. На основании формулы (17), полагая в ней $z=0$, мы получим для температуры «ядра» такое выражение:

$$\vartheta = \frac{\Theta_1+\Theta_3}{2} + \Phi\left(\frac{h}{2\sqrt{kt}}\right)\left(\Theta_2 - \frac{\Theta_1+\Theta_3}{2}\right) \tag{21}$$

и аналогичную ему формулу для солености

$$s = \frac{S_1+S_3}{2} + \Phi\left(\frac{h}{2\sqrt{kt}}\right)\left(S_2 - \frac{S_1+S_3}{2}\right). \tag{22}$$

Исключая из выражений (21) и (22) функцию $\Phi\left(\dfrac{h}{2\sqrt{kt}}\right)$, мы получим уравнение, характеризующее трансформацию ядра водной массы *II* в системе $s = f(\vartheta)$:

$$s - \frac{S_1 + S_3}{2} = \frac{S_2 - \dfrac{S_1 + S_3}{2}}{\Theta_2 - \dfrac{\Theta_1 + \Theta_3}{2}} \left(\vartheta - \frac{\Theta_1 + \Theta_3}{2}\right). \tag{23}$$

Формула (23) есть не что иное, как уравнение прямой, проходящей через две точки: точку *II* с координатами Θ_2, S_2 и

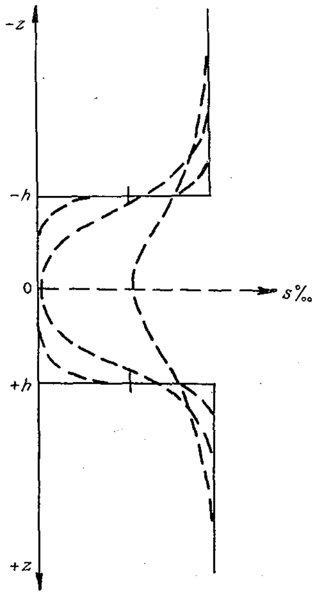

Рис. 7.

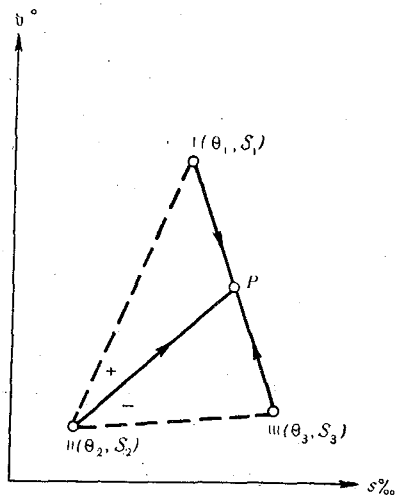

Рис. 8.

точку P с координатами $\dfrac{\Theta_1 + \Theta_3}{2}$, $\dfrac{S_1 + S_3}{2}$ (рис. 8).

Схема трансформации водных масс изображена на рис. 8 стрелками. Как видим, прямая *IIP* разделяет плоскость «треугольника смешения» на положительную и отрицательную области. Полученные результаты мы можем сформулировать в форме следующего положения:

1. *Геометрическое место точек со значением параметра $z = 0$, характеризующих трансформацию ядра промежуточной водной массы с течением времени, представляет собой «главную» медиану «треугольника смешения»* [образуемого данными тремя водными массами в системе $s = f(\vartheta)$], *проведенную из той*

вершины треугольника, которая соответствует промежуточной водной массе. В результате перемешивания водных масс они трансформируются в новую водную массу, термохалинные индексы которой соответствуют координатам середины стороны «треугольника смешения», противолежащей промежуточной водной массе.

Не следует забывать, что на ϑ, s-диаграмме каждой точке соответствуют определенные значения параметров z и t. Линии, которым на ϑ, s-диаграмме соответствует значение параметра $t=\text{const}$, мы будем называть ϑ, s-кривыми.

Мы уже отметили во введении, что в случае смешения трех водных масс ϑ, s-кривая обладает закруглением в области промежуточной водной массы (рис. 4) и только на достаточном удалении от «ядра» промежуточного слоя ветви ϑ, s-кривой прямолинейны.

Попытаемся математически обосновать справедливость этих предложений.

В каждой точке ϑ, s-кривой справедливо следующее соотношение:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial z}=\frac{d\vartheta}{ds}\,\frac{\partial s}{\partial z}. \tag{24}$$

Следовательно, направление касательной в каждой точке кривой должно вычисляться по формуле

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\bigg/\frac{\partial s}{\partial z}. \tag{24'}$$

Составляя $\dfrac{\partial\vartheta}{\partial z}$ и $\dfrac{\partial s}{\partial z}$ применительно к выражению (17), мы в соответствии с (24′) получим

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{(\Theta_1-\Theta_2)\,e^{-\frac{(z-h)^2}{4kt}}+(\Theta_2-\Theta_3)\,e^{-\frac{(z+h)^2}{4kt}}}{(S_1-S_2)\,e^{-\frac{(z-h)^2}{4kt}}+(S_2-S_3)\,e^{-\frac{(z+h)^2}{4kt}}}. \tag{25}$$

Сокращая числитель и знаменатель в выражении (25) на $e^{-\frac{(z-h)^2}{4kt}}$, будем иметь

$$\frac{d\vartheta}{ds}=\frac{\Theta_1-\Theta_2+(\Theta_2-\Theta_3)\,e^{-\frac{(z+h)^2+(z-h)^2}{4kt}}}{S_1-S_2+(S_2-S_3)\,e^{-\frac{(z+h)^2+(z-h)^2}{4kt}}},$$

или после соответствующих преобразований

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\Theta_1 - \Theta_2 + (\Theta_2 - \Theta_3)\, e^{-\frac{hz}{kt}}}{S_1 - S_2 + (S_2 - S_3)\, e^{-\frac{hz}{kt}}}. \tag{26}$$

Из формулы (26) явствует, что в начальный момент смешения, когда t очень мало́ и, следовательно, $\frac{hz}{kt}$ очень велико, направление наклона касательной в каждой точке ϑ, s-кривой для области $z>0$ определяется выражением

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{S_1 - S_2} = \text{const}, \tag{27}$$

а для области $z<0$ — выражением

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\Theta_2 - \Theta_3}{S_2 - S_3} = \text{const}. \tag{28}$$

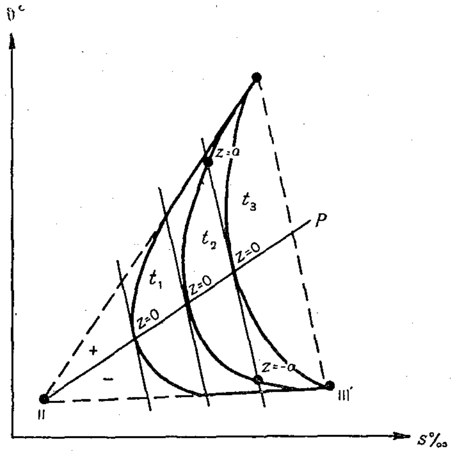

Рис. 9.

Таким образом, в начальный момент смешения ϑ, s-кривая представляет собой ломаную, характеризуемую прямыми, соединяющими на ϑ, s-диаграмме последовательно данные водные массы *I—II*, *II—III*, как это указано на рис. 9.

Из формул (17) и (26) очевидно также, что при $t=\text{const}$ ветви ϑ, s-кривой с возрастанием z, т. е. с возрастанием расстояния от центральной области промежуточной водной массы, асимптотически приближаются к тем же прямым *I—II* и *II—III*. Это приближение осуществляется тем быстрее, чем больше толщина ($2h$) промежуточной водной массы, либо чем меньше t при заданных h и z.

Из выражения (26) нетрудно видеть, что для точек ϑ, s-кривых, достаточно удаленных от центральной области, направления касательных практически совпадают с направлениями прямых, соединяющих на диаграмме водные массы *I—II*, *II—III*, как это изображено на том же рис. 9. Эти прямые являются огибающими заданного семейства ϑ, s-кривых. Наконец, из формулы (26) следует, что в тех точках, ϑ, s-кривых, которые соответствуют ядру промежуточной водной массы, т. е. в точках со значением параметра $z=0$, направление наклона касательной определяется выражением

$$\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)_0=\frac{\Theta_1-\Theta_3}{S_1-S_3}=\text{const}. \tag{29}$$

Это означает, что направление касательной в упомянутых точках параллельно той стороне «треугольника смешения» (рис. 9), которая противолежит промежуточной водной массе. Эту сторону мы будем называть основанием треугольника смешения. Так как направление наклона касательной при переходе через точку $z=0$ меняется по отношению к основанию треугольника смешения, то эту точку мы будем называть точкой экстремума ϑ, s-кривых. Можно поэтому сказать, что направление наклона касательных к ϑ, s-кривым в их экстремных точках всегда параллельно прямой, соединяющей на ϑ, s-диаграмме две крайние водные массы.

Суммируя наши выводы, можно считать доказанным справедливость следующих предложений.

2. *В начальный момент смешения ϑ, s-кривая является ломаной линией, состоящей из двух прямых, последовательно соединяющих на ϑ, s-диаграмме данные водные массы.*

3. *В точках ϑ, s-кривых, достаточно удаленных от границ промежуточной водной массы, касательные к ϑ, s-кривым практически совпадают с прямыми, последовательно соединяющими рассматриваемые три водные массы.*

4. *Точки ϑ, s-кривых, соответствующие «ядру» промежуточной водной массы и обладающие значением параметра $z=0$, являются одновременно точками экстремума ϑ, s-кривых. Направление касательных в этих точках параллельно прямой, соединяющей на ϑ, s-диаграмме две крайние водные массы* (основание треугольника смешения).

Определим теперь наклон прямой, соединяющей на ϑ, s-кривой две точки с одинаковыми, но противоположными по знаку значениями параметра z. Эти точки ϑ, s-кривой, очевидно, находятся по разные стороны упомянутой в теореме 1 «главной» медианы треугольника смешения, представляющей собой геометрическое место точек со значением параметра $z=0$.

Итак, рассмотрим две точки со значением параметра $z=+a$ и $z=-a$ (рис. 9). Наклон прямой, соединяющей эти точки, определяется по формуле

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\vartheta_{+a}-\vartheta_{-a}}{S_{+a}-S_{-a}}.$$

В соответствии с формулой (17) мы получим для температуры в упомянутых точках следующие выражения:

$$\vartheta_{+a}=\frac{1}{2}\left[\Theta_1+\Theta_3+(\Theta_1-\Theta_2)\,\Phi\left(\frac{a-h}{2\sqrt{kt}}\right)+\right.$$

$$\left.+(\Theta_2-\Theta_3)\,\Phi\left(\frac{a+h}{2\sqrt{kt}}\right)\right],$$

$$\vartheta_{-a}=\frac{1}{2}\left[\Theta_1+\Theta_3+(\Theta_1-\Theta_2)\,\Phi\left(\frac{-a-h}{2\sqrt{kt}}\right)+\right.$$

$$\left.+(\Theta_2-\Theta_3)\,\Phi\left(\frac{-a+h}{2\sqrt{kt}}\right)\right],$$

и аналогичные им формулы для солености.

Составляя разность $\vartheta_{+a}-\vartheta_{-a}$ и замечая, что $\Phi(-x)=-\Phi(x)$, будем иметь

$$\vartheta_{+a}-\vartheta_{-a}=\frac{1}{2}\left[(\Theta_1-\Theta_2)\,\Phi\left(\frac{a-h}{2\sqrt{kt}}\right)+\right.$$

$$+(\Theta_2-\Theta_3)\,\Phi\left(\frac{a-h}{2\sqrt{kt}}\right)+(\Theta_2-\Theta_3)\,\Phi\left(\frac{a+h}{2\sqrt{kt}}\right)+$$

$$\left.+(\Theta_1-\Theta_2)\,\Phi\left(\frac{a+h}{2\sqrt{kt}}\right)\right].$$

Группируя члены с одинаковыми значениями Φ, получим

$$\vartheta_{+a}-\vartheta_{-a}=\frac{1}{2}\left[\Phi\left(\frac{a-h}{2\sqrt{kt}}\right)(\Theta_1-\Theta_2+\Theta_2-\Theta_3)+\right.$$

$$\left.+\Phi\left(\frac{a+h}{2\sqrt{kt}}\right)(\Theta_2-\Theta_3+\Theta_1-\Theta_2)\right]$$

или

$$\vartheta_{+a}-\vartheta_{-a}=\frac{\Theta_1-\Theta_3}{2}\left[\Phi\left(\frac{a-h}{2\sqrt{kt}}\right)+\Phi\left(\frac{a+h}{2\sqrt{kt}}\right)\right].$$

Аналогично

$$s_{+a}-s_{-a}=\frac{S_1-S_3}{2}\left[\Phi\left(\frac{a-h}{2\sqrt{kt}}\right)+\Phi\left(\frac{a+h}{2\sqrt{kt}}\right)\right].$$

Следовательно, искомый наклон прямой, соединяющий две точки со значениями параметра $z=+a$, $z=-a$, выразится так:

$$\frac{\vartheta_{+a}-\vartheta_{-a}}{s_{+a}-s_{-a}}=\frac{\Theta_1-\Theta_3}{S_1-S_3}\,. \tag{30}$$

Как видим, рассматриваемая прямая параллельна той стороне треугольника смешения, которая противолежит промежуточной водной массе (*II*) (рис. 9). Но, согласно теореме 4, той же стороне параллельны все касательные, проведенные в точках экстремума ϑ, s-кривых, соответствующих значению параметра $z=0$ (геометрическим местом таких точек является, как мы знаем, медиана треугольника смешения).

Таким образом, мы может считать доказанным следующее предложение.

5. *Прямые, соединяющие на ϑ, s-кривой две точки, обладающие равными, но противоположными по знаку значениями параметра z, параллельны той стороне треугольника смешения, которая противолежит промежуточной водной массе.*

Объединяя же последнее с предложением 4, мы получим новое замечательное следствие.

6. *Касательная, проведенная в точке экстремума данной ϑ, s-кривой, отсекает на другой, предшествующей по времени ϑ, s-кривой две точки, обладающие равными, но противоположными по знаку значениями параметра z.*

Из формулы (17) вытекает еще одно, не менее замечательное свойство, которым обладают точки ϑ, s-кривых со значением параметра $z=\pm h$, т. е. точки на границах промежуточной водной массы.

Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим две точки Q и D (рис. 10) с одним и тем же значением параметра $z=h$, но различными значениями параметра $t=t'$ и $t=t''$, принадлежащие, следовательно, двум последовательным ϑ, s-кривым.

Проведем через данные точки $Q(h,\ t')$ и $D(h,\ t'')$ кривых, изображенных на рис. 10, прямую, уравнение которой запишется в виде

$$\vartheta-\vartheta(h,\ t')=\frac{\vartheta\,(h,\ t')-\vartheta\,(h,\ t'')}{s\,(h,\ t')-s\,(h,\ t'')}\,[s-s\,(h,\ t')].$$

Подставляя в последнее уравнение значения $\vartheta(h,\ t')$, $\vartheta(h,\ t'')$, $s(h,\ t')$ и $s(h,\ t'')$ из формул типа (17), не трудно убедиться в том, что это уравнение можно записать в форме

$$\vartheta-\frac{\Theta_1+\Theta_3}{2}-\frac{\Theta_2-\Theta_3}{2}\,\Phi\left(\frac{h}{\sqrt{kt'}}\right)=$$

$$=\frac{\Theta_2-\Theta_3}{S_2-S_3}\left[s-\frac{S_1+S_3}{2}-\frac{S_2-S_3}{2}\,\Phi\left(\frac{h}{\sqrt{kt'}}\right)\right]. \qquad (31)$$

Из уравнения (31) следует, что направление рассматриваемой прямой параллельно стороне $II—III$ треугольника смешения, ибо угловой коэффициент m_1 этой прямой равен

$$m_1 = \frac{\Theta_2 - \Theta_3}{S_2 - S_3}.$$

Аналогичным путем получим, что прямая, проходящая через точки $L(-h,\ t')$ и $R(-h,\ t'')$ (рис. 10), параллельна стороне $I—II$ треугольника смешения, ибо угловой коэффициент оказывается равным

$$m_2 = \frac{\Theta_1 - \Theta_2}{S_1 - S_2}.$$

На основании уравнения (31) не трудно также показать, что прямая, проходящая через точки $Q(h,\ t')$ и $D(h,\ t'')$, проходит также и через точку P, лежащую посредине стороны $I—III$ треугольника смешения. В самом деле, подставляя вместо текущих координат ϑ и s в уравнении (31) координаты точки P: $\frac{\Theta_1 + \Theta_3}{2}$, $\frac{S_1 + S_3}{2}$, мы убедимся, что эти координаты удовлетворяют уравнению (31), так как обе части последнего оказываются в таком случае тождественно равными между собой:

$$\frac{1}{2}\left[\Theta_1 + \Theta_3 - \Theta_1 - \Theta_3 - (\Theta_2 - \Theta_3)\,\Phi\left(\frac{h}{\sqrt{kt'}}\right)\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2}\,\frac{\Theta_2 - \Theta_3}{S_2 - S_3}\left[S_1 + S_3 - S_1 - S_3 - (S_2 - S_3)\,\Phi\left(\frac{h}{\sqrt{kt'}}\right)\right].$$

Но раз это так, то рассматриваемая прямая должна проходить через точку M, лежащую посередине стороны $I—II$ треугольника смешения. Действительно, подставляя в уравнение (31) вместо текущих координат координаты точки M: $\frac{\Theta_1 + \Theta_2}{2}$, $\frac{S_1 + S_2}{2}$, мы убедимся, что эти координаты по-прежнему удовлетворяют уравнению (31). К тому же результату легче прийти и путем элементарных геометрических рассуждений. Совершенно аналогичным образом можно доказать, что прямая, проходящая через точки $L(-h,\ t')$ и $R(-h,\ t'')$, проходит одновременно через точку P и через точку N, делящую сторону $II—III$ треугольника смешения пополам, как это и указано на рис. 10.

Как мы установили ранее [формула (20)], точки $M\left(\frac{\Theta_1 + \Theta_3}{2},\ \frac{S_1 + S_2}{2}\right)$ и $N\left(\frac{\Theta_2 + \Theta_3}{2},\ \frac{S_2 + S_3}{2}\right)$ характеризуют свойства воды на границах промежуточного слоя в первый момент смешения, причем свойства эти с течением времени непрерывно меняются. Сейчас же мы пришли к выводу, что указанный процесс изображается на ϑ, s-диаграмме двумя прямыми MP и NP, пересекающимися у основания главной медианы треугольника смешения. Прямые MP и NP являются в свою очередь медианами треугольников $IPII$ и $IIPIII$, отсекаемых от площади основного треугольника смешения его главной медианой IIP. Очевидно, что любая точка, лежащая внутри заштрихованного на рис. 10 параллелограмма $IIMPN$, образуемого отрезками двух сторон треугольника смешения и его «побочными медианами» MP и NP, характеризует в системе $s=f(\vartheta)$ воду промежуточного слоя. Этот параллелограмм является, таким образом, своеобразной геометрической интерпретацией трансформации промежуточного слоя, причем следует иметь в виду, что для границ этого слоя переход от точки II к точкам M и N осуществляется мгновенно, а дальнейшая трансформация вдоль побочных медиан происходит непрерывно с течением времени. Побочные медианы MP и NP отсекают на последовательных во времени ϑ, s-кривых дуги (изображенные на рис. 10 жирными линиями), каждая точка которых соответствует в системе $s=f(\vartheta)$ воде промежуточного слоя.

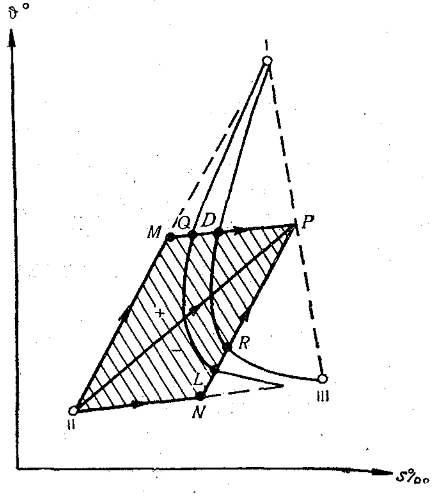

Рис. 10.

Это любопытные результаты мы резюмируем в форме следующего предложения.

7. *Все точки, соответствующие в системе $s=f(\vartheta)$ воде на границах промежуточного слоя, лежат на прямых, соединяющих середины двух сторон треугольника смешения с серединой третьей стороны, противолежащей промежуточной водной массе. Эти прямые отсекают на ϑ, s-кривых дуги, характеризующие в системе $s=f(\vartheta)$ воду промежуточного слоя.*

Доказанные здесь предложения, являющиеся по сути дела геометрической интерпретацией тех следствий, которые вытекают из анализа формулы (17), представляют интерес не только в смысле «геометрии ϑ, s-кривых», — эти предложения имеют также и практическую ценность.

Так, на основании предложения 3, мы зачастую располагаем возможностью восстановить первоначальные термохалинные индексы промежуточной водной массы. Для этой цели, согласно упомянутой теореме, следует провести касательные в точках данной ϑ, s-кривой, достаточно удаленных от точки ее экстремума. Пересечение касательных определит координаты точки, соответствующие температуре и солености промежуточной водной массы.

Правда, при попытках практического использования изложенного правила мы встречаемся с затруднением, связанным с недостаточной для практики определенностью понятия точек, «достаточно удаленных» от точки экстремума ϑ, s-кривой. Неопределенность эта всегда имеет место, потому что на практике заранее не известны вертикальная протяженность промежуточной водной массы II, а также время, прошедшее с начала перемешивания. Не зная величины упомянутых параметров, фигурирующих в формуле (26), нельзя безошибочно определить расстояние (в смысле параметра z) от экстремной точки ϑ, s-кривой, на котором направление касательной определялось бы формулами (27) и (28). Очевидно, однако, что наша ошибка будет тем меньше, чем дальше, считая по кривой, отстоят выбираемые нами точки от экстремной точки ϑ, s-кривой. Практически достаточно продолжить до пересечения прямолинейные отрезки ветвей ϑ, s-кривой для того, чтобы получить приближенно термохалинные индексы промежуточной водной массы в начальной стадии смешения.

Иллюстрацией практического приложения последнего правила служит рис. 11, на котором изображены две ϑ, s-кривые, построенные Дефантом и Вюстом по данным наблюдений в западной области Атлантического океана (из серии кривых, указанных ранее на рис. 2). Точка пересечения касательных к изображенным на рис. 11 кривым (или точка пересечения продолжения прямолинейных ветвей ϑ, s-кривых) определяет собой координаты (температура и соленость) некоторой промежуточной водной массы z. Эта водная масса, согласно Дефанту и Вюсту, является водой промежуточного «субантарктического» слоя, обладающая, как видим, температурой $\vartheta = 3{,}25°$ и соленостью $s = 34{,}15‰$. Сами же ϑ, s-кривые на рис. 2 и 11 являются результатом перемешивания пяти водных масс (включая и водную массу z), залегающих на различных глубинах Атлантического океана; классификация этих водных масс приводится в упоминавшейся в начале статье Дефанта и Вюста.

Заметим, что не меньшей практической ценностью обладает и предложение 7 о геометрических свойствах ϑ, s-кривых рассматриваемого типа.

Дело в том, что до настоящего времени оставался открытым вопрос о вертикальной протяженности водных масс, которые удается обнаружить в море с помощью метода ϑ, s-кривых. Суждения мореведов о вертикальных границах того или иного слоя в море обычно весьма расплывчаты и условны. Это объясняется тем, что вертикальное распределение различных свойств морской воды вследствие выравнивающего эффекта процессов перемешивания носит непрерывный характер.

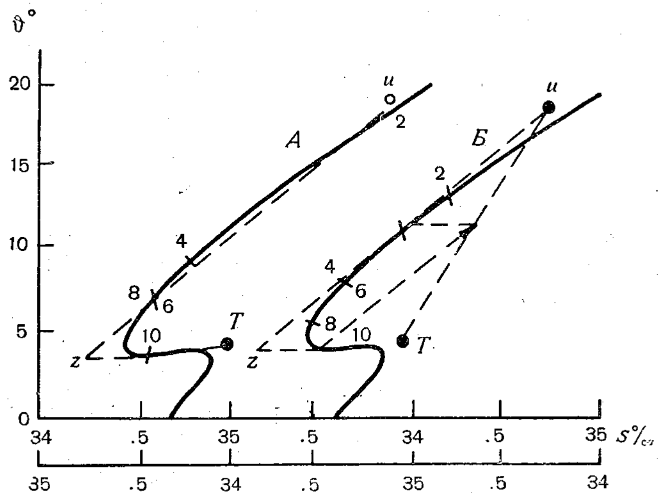

Рис. 11.

u — субтропическая подповерхностная вода (ϑ=18°; S=35,93‰), z — субантарктическая промежуточная вода (ϑ=3,25°, S=34,15‰), T — североатлантическая глубинная вода (ϑ=4,0°, S=35,00‰). Цифры — глубины в гектометрах.

Действительно, если обратиться, например, к рис. 12, на котором изображены кривые вертикального распределения температуры и солености в центральной части Тихого океана[1] ($\varphi = 33°22'$ N; $\lambda = 154°56'$ W), то сразу станут очевидными те затруднения, которые возникают при попытке определить (только по этим данным) вертикальные границы слоя опресненной субарктической воды, присутствие которой явно сказывается в своеобразном изгибе кривой вертикального распределения солености.[2] Неудивительно поэтому, что границы субарктического про-

[1] Эти кривые построены Г. Вюстом [4] по данным экспедиции на «Челленджере» (станция Ch. № 256).

[2] Упомянутая вода, как указывает Г. Вюст, приносится в данную область Тихого океана субарктическим промежуточным течением, зарождающимся в водах Охотского и Берингова морей.

межуточного слоя в Тихом океане Г. Вюст [4] выбирает условно. Однако отмеченные затруднения легко устранить, если воспользоваться доказанным нами предложением 7, с помощью которого можно вполне объективно определить вертикальные границы и толщину промежуточного субарктического слоя. Для нашей цели необходимо прежде всего восстановить по ϑ, s-кривой первоначальные термохалинные индексы водных масс, иначе

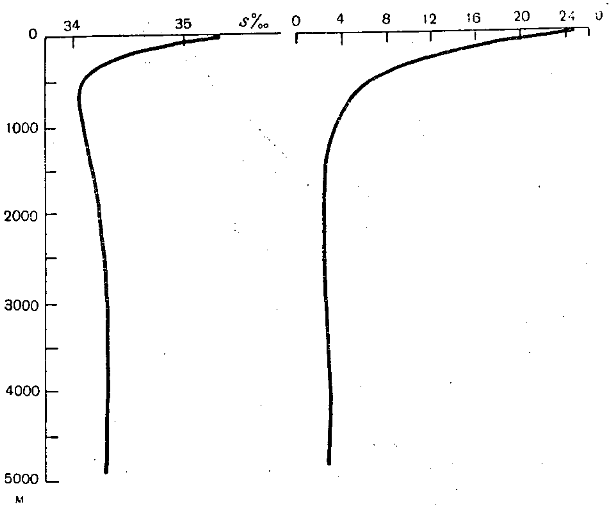

Рис. 12.

говоря — построить треугольник смешения. Соединяя затем середины двух сторон этого треугольника с серединой стороны, противолежащей промежуточной водной массе, следует определить глубины точек пересечения данной ϑ, s-кривой с побочными медианами треугольника смешения. Эти глубины, согласно предложению 7, будут соответствовать верхней и нижней границам промежуточного субарктического слоя.

На рис. 13 изображена построенная Г. Вюстом ϑ, s-кривая, соответствующая вертикальному распределению температуры и солености на рис. 12 в интересующей нас точке Тихого океана. На том же рис. 13 указаны простые построения, с помощью которых мы устанавливаем неизвестные пока границы промежуточного слоя.

Как видно из чертежа на рис. 13, побочные медианы треугольника смешения пересекают ϑ, s-кривую в точках со значением глубин 549 и 149 м. Последняя величина найдена путем интерполяции глубин вдоль ϑ, s-кривой. Отмеченные глубины соответствуют искомым границам промежуточного субарктического слоя. Для наглядности последний изображен на рис. 14 вместе с кривыми вертикального распределения солености и температуры, скопированными с чертежа на рис. 12.

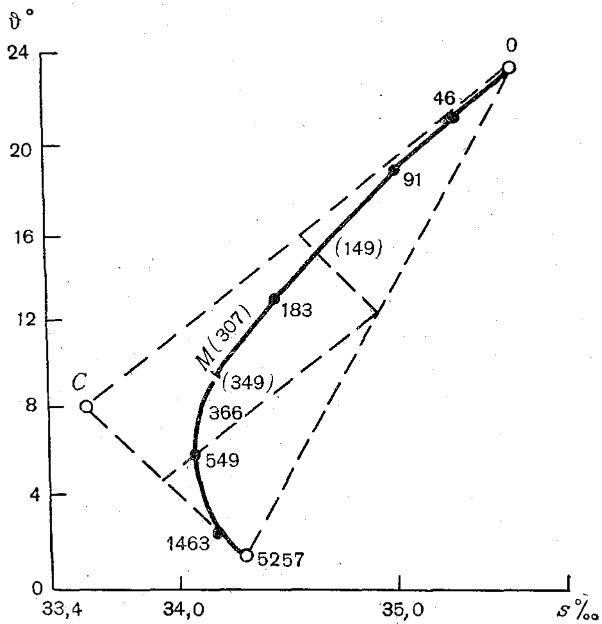

Рис. 13.

Ст. № 256 Ch. φ=33° 22′ N, λ=154° 56′ W

h м	S ‰	ϑ°	h м	S ‰	ϑ°
0	35,53	23,4	366	34,15	8,9
46	35,27	20,9	549	34,07	5,7
91	34,96	18,6	1463	34,18	2,5
183	34,44	13,0	5257	34,25	1,5

Тем же простым графическим путем можно решить и вопрос о вертикальных границах теплого промежуточного слоя атлантической воды в Полярном бассейне. Посмотрим, какова толщина этого теплого слоя в районе к северу от Шпицбергена. На рис. 15 изображена одна из ϑ, *s*-кривых, построенных Вс. А. Березкиным [5] по данным наблюдений на станции № 37 экспедиции л/п «Садко» в 1935 г. На том же рисунке сделаны

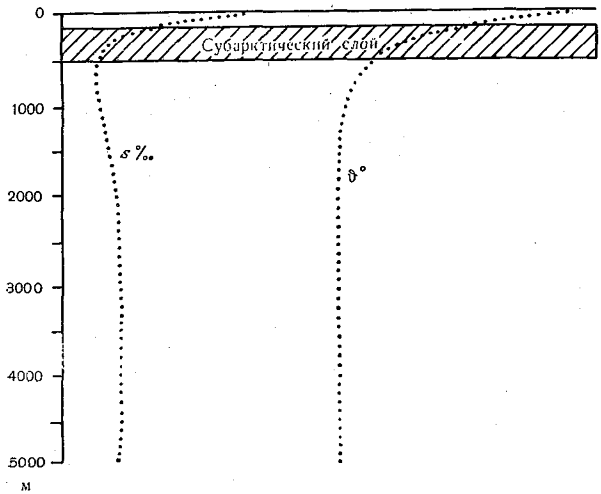
0
1000
2000
3000
4000
5000
м
Субарктический слой
s ‰
ϑ°

Рис. 14.

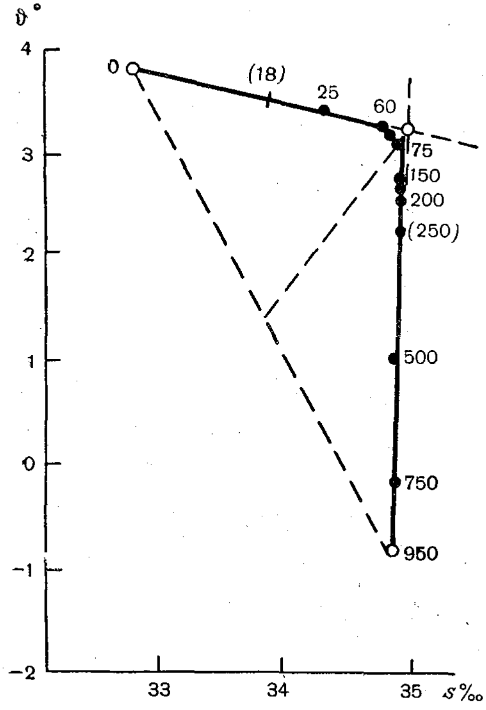
ϑ°
4
3
2
1
0
−1
−2
33
34
35
s ‰
0
(18)
25
60
75
150
200
(250)
500
750
950

Рис. 15.

нужные построения. Как видим, ветви ϑ, s-кривой на последнем рисунке, в отличие от ϑ, s-кривой для центральной области Тихого океана (рис. 13), почти целиком совпадают со сторонами треугольника смешения. Это обстоятельство, в свете доказанного ранее предложения 2, свидетельствует о том, что промежуток времени с начала перемешивания или с момента возникновения теплого слоя сравнительно невелик.

Последний вывод соответствует действительности, ибо зарождение теплого промежуточного слоя в Полярном бассейне как раз приурочено к району Шпицбергена.

Очевидно, что в данном случае для определения границ теплого слоя нет надобности проводить «побочные медианы» треугольника смешения. Для нашей цели совершенно достаточно определить глубины, соответствующие середине двух сторон упомянутого треугольника. Значения этих глубин, найденные путем интерполяции параметра z вдоль ϑ, s-кривой, оказываются равными 18 и 480 м. Таким образом, толщина промежуточного слоя атлантической воды в районе к северу от Шпицбергена составляет в данном случае примерно 462 м.

Здесь важно выяснить, насколько надежно определены указанным нами способом границы промежуточных слоев в Тихом и Ледовитом океанах.

Применяемое нами построение, очевидно, дает настолько же безупречный результат, насколько справедливы доказанные выше предложения в реальных условиях моря. Необходимо помнить, что упомянутые теоремы о геометрических свойствах ϑ, s-кривых справедливы, строго говоря, в случае неограниченного по вертикали моря, иными словами — при отсутствии верхней (поверхность моря) и нижней (дно моря) границ его. Практически это равносильно тому, что толщина промежуточного слоя должна быть намного меньше общей глубины моря. Но, так или иначе, совершенно достаточным критерием надежности результатов определения толщины промежуточного слоя в реальных условиях моря является степень оправдываемости на практике доказанных нами теорем о геометрических свойствах ϑ, s-кривых. Так, основываясь на упомянутых теоремах, следует ожидать, что точка пересечения главной медианы треугольника смешения с указанными на рис. 13 и 15 эмпирическими ϑ, s-кривыми, должна находиться на равном удалении (в смысле глубины z) от точек пересечения побочных медиан треугольников смешения с теми же ϑ, s-кривыми. Точка пересечения главной медианы треугольника смешения с ϑ, s-кривой, изображенной на рис. 13, обозначена буквой *М*. Этой точке соответствует глубина 307 м. Последняя, однако, не соответствует середине промежуточного слоя, который отвечает глубине 349 м. Положение середины промежуточного слоя (в смысле глубины z) указано на рассматриваемой кривой соответствующей засечкой.

Как видим, расхождение между глубинами точки M (307 м) и середины промежуточного слоя (глубина 349 м) невелико. Относительная величина погрешности в данном случае составляет всего лишь 12%. Таким образом, доказанные нами предложения, которыми мы руководствовались при определении толщины промежуточного слоя, оправдываются в условиях Тихого океана с вполне удовлетворительной точностью. Напротив, расхождение между глубинами точки пересечения главной медианы с ϑ, s-кривой на рис. 15 (75 м) и глубиной середины промежуточного теплого атлантического слоя (259 м) весьма значительно. Относительная ошибка в последнем случае достигает величины 71%. Столь большая погрешность объясняется, по-видимому, небольшой общей глубиной моря (950 м) в сравнении с толщиной промежуточного слоя (порядка 400 м). Мы не уверены также в том, является ли глубина 950 м фактической глубиной моря к северу от Шпицбергена.

В следующем параграфе мы убедимся, что и остальные из доказанных нами предложений весьма важны для правильного понимания такого общеупотребительного в практической океанологии метода, каким является способ определения коэффициента перемешивания в море, предложенный Якобсеном.

§ 3. Определение коэффициента перемешивания в море с помощью ϑ, s-кривых (о корректности метода Якобсена)

С помощью ϑ, s-кривых можно не только определить структуру водных масс в море и вычислить приближенно пропорцию, в какой эти массы перемешались на заданной глубине. Более того, как показал Якобсен [6], при помощи ϑ, s-кривых оказывается возможным вычислить и величину коэффициента перемешивания в море.

Заметим, что метод Якобсена приурочен к уже знакомому нам типу ϑ, s-кривых в случае смешения трех водных масс (тип кривой, изображенной на рис. 4). Сущность самого метода заключается в том, что выбирают одну из двух ϑ, s-кривых, соответствующую более позднему моменту времени, и в точке ее максимальной кривизны проводят касательную, которая отсекает на первой (по времени) ϑ, s-кривой две точки с известными значениями параметра z' и z''. Составляя затем разность параметров z, иначе говоря, определяя разность глубин между упомянутыми точками, можно вычислить, согласно Якобсену, коэффициент перемешивания k по следующей формуле:

$$k = \frac{(z' - z'')^2}{8\Delta t},$$

в которой через Δt обозначен промежуток времени, отделяющий первую ϑ, s-кривую от второй.

Благодаря необычайной простоте, остроумный метод Якобсена нашел широкое применение в первую очередь в руках таких авторитетных исследователей, какими являются Х. Свердруп, Х. Сейвелл и К. Суда.

Все это, однако, не мешает нам высказать сомнения в корректности упомянутого метода. Эти сомнения возникают при ближайшем ознакомлении с теорией метода Якобсена.

В самом деле, не говоря о том, что на практике весьма затруднительно провести касательную в точке максимальной кривизны ϑ, s-кривой, не следует забывать, что кривизна ϑ, s-кривой существенно меняется в зависимости от масштаба температуры и солености на ϑ, s-диаграмме. Очевидно, что положение точки максимальной кривизны ϑ, s-кривой на таком деформированном чертеже не соответствует положению этой точки в натуральных (не искаженных) координатах. А между тем это важное обстоятельство совершенно не учитывается как в теории самого метода, так и в приложениях его на практике. Более того, остается неясным вопрос о том, насколько существенным для метода является проведение касательной именно в точке максимальной кривизны, а не в какой-либо другой точке ϑ, s-кривой.

В свете сделанных замечаний более строгое обоснование теории метода Якобсена совершенно необходимо.

Как уже упоминалось, метод Якобсена приурочен к знакомому нам типу ϑ, s-кривых в случае смешения трех водных масс. Кроме того, как это явствует из теории метода в изложении ее автора, водная среда предполагается неограниченной (в выкладках Якобсена интегрирование по z осуществляется в пределах от $-\infty$ до $+\infty$). Словом, отправные положения теории метода Якобсена полностью отвечают условиям задачи, рассмотренной нами в предыдущем параграфе. Это обстоятельство позволяет целиком применить доказанные нами теоремы о геометрических свойствах ϑ, s-кривых для более строгого и вместе с тем очень простого обоснования теории метода Якобсена. Нам удается при этом обнаружить весьма существенные логические противоречия в рассуждениях Якобсена, влекущие за собой принципиальную погрешность в определении коэффициента перемешивания; эта погрешность может достигать произвольной величины. Напротив, применение теорем предыдущего параграфа к выводу формулы Якобсена позволяет избежать такого рода ошибки и определить величину коэффициента перемешивания в достаточно корректной форме.

Рассмотрим для этой цели две ϑ, s-кривые, изображенные на рис. 16. Пусть первая из них соответствует моменту времени t_0, а вторая — моменту $t_0 + \Delta t$. Из предыдущего параграфа мы уже знаем, что на достаточном удалении от точек перегиба рассматриваемых ϑ, s-кривых ветви их прямолинейны и касаются прямых *I—II* и *II—III*, последовательно соединяющих данные три водные массы в начальной стадии смешения.

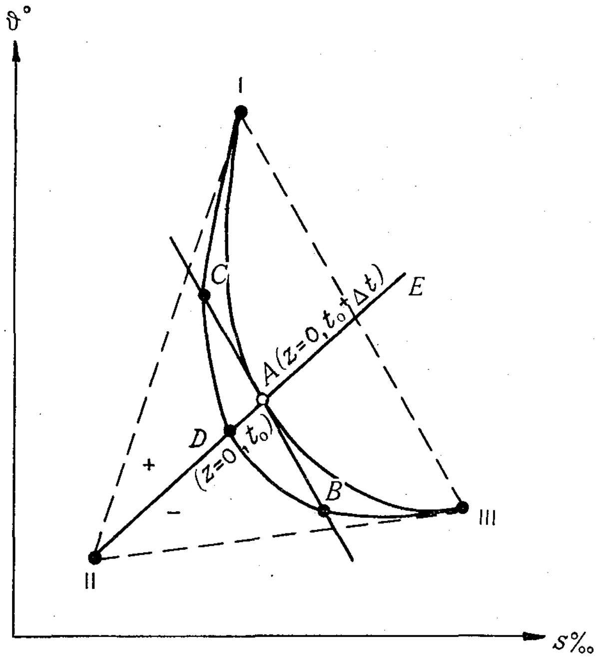

Рис. 16.

Проведем теперь в точке A, обладающей параметрами A ($z=0$, $t_0 + \Delta t$) и принадлежащей, следовательно, второй кривой, касательную, которая пересекает ветви первой кривой в точках B и C. Согласно теореме 1 предыдущего параграфа, точка A должна находиться на медиане IIE треугольника смешения и являться одновременно точкой экстремума второй ϑ, s-кривой по отношению к основанию треугольника смешения.

С другой стороны, согласно теоремам 5 и 6 того же параграфа, упомянутая касательная должна быть параллельна стороне *I—III* треугольника смешения, а точки B и C должны обладать равными, но противоположными по знаку значениями параметра z по отношению к точке D($z=0$, t_0). Подчеркнем, что последнее обстоятельство играет особо важную роль в последующих выкладках, приводящих в результате к формуле Якобсена. Пусть, в соответствии с изложенным, параметры точек B и C, принадлежащих первой ϑ, s-кривой, характеризуются величинами:

$$B\left(-\frac{\Delta z}{2},\ t_0\right),\quad C\left(\frac{\Delta z}{2},\quad t_0\right).$$

Следовательно, Δz представляет собой разность параметров z между точками B и C.

Допустим теперь, вместе с Якобсеном [6] и М. Окада [7], что температура и соленость в точках A, B и C могут быть с достаточной для практических целей точностью представлены в виде суммы первых членов разложения Тэйлора:

$$\left.\begin{aligned}
\vartheta_C &= \vartheta_0 + \frac{\Delta z}{2}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_0 + \frac{(\Delta z)^2}{8}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right)_0,\\
s_C &= s_0 + \frac{\Delta z}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)_0 + \frac{(\Delta z)^2}{8}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right)_0,\\
\vartheta_B &= \vartheta_0 - \frac{\Delta z}{2}\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_0 + \frac{(\Delta z)^2}{8}\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right)_0,\\
s_B &= s_0 - \frac{\Delta z}{2}\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)_0 + \frac{(\Delta z)^2}{8}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right)_0,\\
\vartheta_A &= \vartheta_0 + \frac{\partial\vartheta}{\partial t}\Delta t,\\
s_A &= s_0 + \frac{\partial s}{\partial t}\Delta t.
\end{aligned}\right\}\qquad (31')$$

В то же время уравнение касательной BC может быть записано в форме

$$\vartheta_A - \vartheta_B = \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)_0 (s_A - s_B), \qquad (32)$$

где $\left(\dfrac{d\vartheta}{ds}\right)$ — наклон касательной к ϑ, s-кривой в точке $z=0$.

Подставляем в формулу (32) выражения ϑ_A, ϑ_B, s_A и s_B из равенств (31′) и, делая перестановку членов, получим

$$\left[\frac{\partial\vartheta}{\partial t} - \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)_0\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)\right]\Delta t = -\frac{\Delta z}{2}\left[\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_0 - \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)_0\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)_0\right] +$$
$$+ \frac{(\Delta z)^2}{8}\left[\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right)_0 - \left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)_0\left(\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right)_0\right]. \qquad (33)$$

Займемся теперь расшифровкой выражений, заключенных в прямые скобки в формуле (33).

На основании формулы (24) предыдущего параграфа

$$\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)_0\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)_0=\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_0,$$

а потому первая скобка в правой части формулы (32) обращается в нуль.

Дифференцируя выражение (24) по z как сложную функцию, мы получим

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}=\frac{d^2\vartheta}{ds^2}\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2+\frac{d\vartheta}{ds}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right) \tag{34}$$

или

$$\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)_0\left(\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right)_0=\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right)_0-\left(\frac{d^2\vartheta}{ds^2}\right)_0\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)_0^2.$$

Следовательно, оставшееся слагаемое в правой части (33) можно записать в виде

$$\frac{(\Delta z)^2}{8}\left[\left(\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}\right)_0-\left(\frac{d\vartheta}{ds}\right)_0\left(\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right)_0\right]=\frac{(\Delta z)^2}{8}\left(\frac{d^2\vartheta}{ds^2}\right)_0\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2. \tag{35}$$

Комбинируя, в свою очередь, уравнения (1) с формулами (24) и (34), не трудно показать, что

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}-\frac{d\vartheta}{ds}\,\frac{\partial s}{\partial t}=k\,\frac{d^2\vartheta}{ds^2}\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2.$$

Подставляя правую часть последнего равенства на место скобки в левой части формулы (33) и опуская индекс «0», мы получим

$$k\,\frac{d^2\vartheta}{ds^2}\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2\Delta t=\frac{(\Delta z)^2}{8}\left(\frac{d^2\vartheta}{ds^2}\right)\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)^2$$

или окончательно

$$k=\frac{(\Delta z)^2}{8\Delta t}. \tag{36}$$

Как видим, последняя формула тождественна с формулой Якобсена, указанной в начале настоящего параграфа.

Существенная особенность наших рассуждений при выводе формулы Якобсена заключается в том, что мы проводим касательную BC (рис. 16) не в точке максимальной кривизны 2-й ϑ, s-кривой, как это делает Якобсен, а в точке пересечения главной медианы треугольника смешения с 2-й ϑ, s-кривой. Эта точка, соответствующая экстремной точке ϑ, s-кривой по отношению к основанию треугольника смешения, не совпадает, вообще говоря, с точкой максимальной кривизны ϑ, s-кривой. Если к тому же иметь в виду произвольное искажение масштабов прямоугольных координат ϑ, s, в которых строится ϑ, s-кривая, то вопрос об истинном положении точки максимальной кривизны на такой деформированной кривой без знания ее уравнения в натуральных координатах (которое очень сложно) остается совершенно неопределенным.

Представляет интерес построить по уравнению (17) ϑ, s-кривые для заданной первоначально структуры водных масс и известной величины коэффициента перемешивания и, таким путем, наглядно продемонстрировать справедливость сделанных замечаний.

Полагая: $\Theta_1=2°$, $S_1=34{,}00‰$; $\Theta_2=1°$, $S_2=33{,}10‰$; $\Theta_3=5°$, $S_3=33{,}20‰$, $h=60$ м (толщина промежуточного слоя $2h=$ $=120$ м), $k=10$ см^2/сек. и производя необходимые вычисления по формуле (17) для двух значений $t=30$ сут. и $t=50$ сут., мы получим значения ϑ и s, соответствующие различным расстояниям z от начального уровня ($z=0$). Результаты вычислений сведены в табл. 1.

На рис. 17 изображены две ϑ, s-кривые, построенные по данным табл. 1. Как и следовало ожидать, доказанные выше предложения полностью подтверждаются чертежом на рис. 17. Так, например, прямые, проведенные в точках пересечения главной медианы треугольника *I*, *II*, *III* с ϑ, s-кривыми параллельно стороне *I—III*, касаются ϑ, s-кривых в этих точках. Упомянутые точки не являются, однако, точками максимальной кривизны, построенными в указанном на рис. 17 масштабе ϑ, s-кривых. Как видно из чертежа, максимальная кривизна ϑ, s-кривой для $t=50$ сут. приурочена к окрестности точки с параметром $z=+60$ м. Следует подчеркнуть, что определение максимальной кривизны по чертежу на глаз порой весьма затруднительно, и мы легко можем впасть в зрительную ошибку.

Если определение зрительным путем точки максимальной кривизны ϑ, s-кривой встречает понятные затруднения, то неменьшие трудности возникают при проведении касательной в упомянутой точке. Очевидно, что от точности проведения касательной в точке максимальной кривизны ϑ, s-кривой существенно зависит и разность глубин, отсекаемых такой касательной на первой по времени ϑ, s-кривой, а следовательно, и точность вычисления коэффициента перемешивания по формуле Якобсена. Вот почему проведение касательной в точках пересечения кривых с главной медианой не только является единственно принципиально верным построением, но и обладает выгодными чисто техническими преимуществами, ибо касательная проводится в точке, заранее определяемой простым построением и в направлении не менее определенном — параллельно той стороне треугольника смешения, которая противолежит

Таблица 1

z м	$t=30$ сут.		$t=50$ сут.		$t=30$ сут.		$t=50$ сут.	
	$\Phi\left(\frac{z-h}{2\sqrt{kt}}\right)$	$\Phi\left(\frac{z+h}{2\sqrt{kt}}\right)$	$\Phi\left(\frac{z-h}{2\sqrt{kt}}\right)$	$\Phi\left(\frac{z+h}{2\sqrt{kt}}\right)$	ϑ	s	ϑ	s
—400	—	—	—1,0000	—0,9995	—	—	4,9990	33,1999
—300	—1,000	—0,9985	—0,9998	—0,9856	4,9970	33,19992	4,9713	33,199
—200	—0,9995	—0,9482	—0,9982	—0,8680	4,8866	33,19763	4,7399	33,1916
—180	—0,9987	—0,9046	—0,9856	—0,8029	4,8098	33,19581	4,6130	33,1966
—160	—0,9964	—0,8351	—0,9736	—0,7182	4,6720	33,19337	4,4496	33,1977
—140	—0,9915	—0,7331	—0,9663	—0,6101	4,47	33,19048	4,2370	33,1956
—120	—0,9818	—0,5951	—0,9471	—0,4810	4,1993	33,18794	3,9884	33,1978
—100	—0,9669	—0,4216	—0,9148	—0,3327	3,86	33,18597	3,7080	33,2049
—80	—0,9482	—0,2184	—0,8680	—0,1702	3,4627	33,18423	3,4064	33,218
—60	—0,9046	0,0000	—0,8029	0,0000	3,0477	33,19293	3,0985	33,2386
—40	—0,8351	0,2184	—0,7182	0,1702	2,6456	33,21327	2,8005	33,2683
—20	—0,7331	0,4216	—0,6101	0,3327	2,2902	33,24902	2,5295	33,308
0	—0,5951	0,5951	—0,4810	0,4810	2,0122	33,30245	2,2975	33,3595
20	—0,4216	0,7331	—0,3327	0,6101	1,8230	33,37362	2,1134	33,41978
40	—0,2184	0,8351	—0,1702	0,7182	1,7206	33,45996	1,4785	33,4875
60	0,0000	0,9046	0,0000	0,8029	1,6908	33,55477	1,8942	33,5594
80	0,2184	0,9482	0,1702	0,8680	1,7128	33,65087	1,8491	33,6332
100	0,4216	0,9669	0,3327	0,9148	1,7770	33,74137	1,8367	33,704
120	0,5951	0,9818	0,4810	0,9471	1,8339	33,81870	1,8463	33,76909
140	0,7331	0,9915	0,6101	0,9663	1,8885	33,88032	1,8724	33,82623
160	0,8351	0,9964	0,7182	0,9736	1,9247	33,92597	1,9119	33,8745
180	0,9046	0,9987	0,8029	0,9856	1,9549	33,95713	1,9302	33,9120
200	0,9482	0,9995	0,8680	0,9922	1,9751	33,97671	1,9496	33,941
300	0,9985	1,0000	0,9856	0,9998	1,9992	33,99932	1,9932	33,9935
400	—	—	0,9995	1,0000	—	—	1,9997	33,99977

промежуточной водной массе. Зная заранее величину коэффициента перемешивания ($k=10$), соответствующую указанным на рис. 17, ϑ, s-кривым, любопытно подсчитать этот параметр обрат-

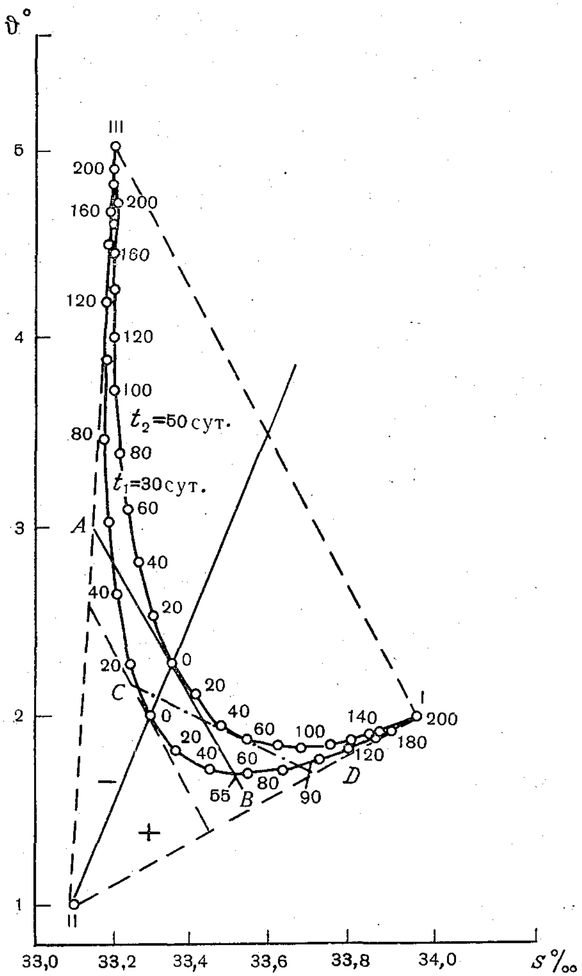

Рис. 17.

ным путем, применяя указанные нами построения и в то же время пользуясь обычным способом Якобсена. Как видно из чертежа на рис. 17, касательная AB, проведенная в точке пересечения 2-й ϑ, s-кривой с главной медианой треугольника смешения, отсекает на 1-й кривой две точки с равными, но противоположными значениями параметра $z=\pm 55$ м (этого и следовало ожидать согласно предложению предыдущего параграфа). Подставляя величину $\Delta z=110$ м$=11\cdot 10^3$ см в формулу (36) и принимая во внимание, что Δt в данном случае равна 30 суткам, мы получим для коэффициента перемешивания величину

$$k \approx 9 \text{ см}^2/\text{сек.},$$

которая отличается от истинного значения упомянутого коэффициента на 10%. Это сравнительно небольшое расхождение обусловлено неточностью чертежа и приближенным характером самой формулы (36), при выводе которой мы ограничивались лишь первыми членами разложения в ряд Тэйлора [формулы (30)]. В то же время другая касательная CD, проведенная в точке кажущейся максимальной кривизны[1] 2-й ϑ, s-кривой, согласно указаниям Якобсена, пересекает 1-ю кривую в точках со значениями параметра $z=-10$ м и $z=90$ м. Таким образом, Δz составляет 100 м, и мы по той же формуле (36) получим

$$k \approx 7 \text{ см}^2/\text{сек.}$$

Последнее значение отличается от истинной величины коэффициента перемешивания на 30%. Такое довольно значительное отклонение обусловлено, разумеется, не только погрешностью графических построений, но и принципиальной погрешностью, возникающей от того, что касательная ко 2-й ϑ, s-кривой проводится, вопреки изложенным выше правилам, в неопределенной точке максимальной кривизны ϑ, s-кривой. Если иметь в виду эту погрешность, то относительная ошибка в 30%, пожалуй, не так уж велика. Трудно, однако, заранее подобрать пример, который давал бы большие отклонения от истинного значения этого коэффициента. Тем не менее очевидно, что указанная погрешность может меняться совершенно произвольно в зависимости от искажения масштабов ϑ, s-диаграммы и промежутка времени t.

Здесь, естественно, возникает вопрос: почему неверные рассуждения Якобсена, существенно отличающиеся от наших, привели все же к одной и той же формуле (36)?

Не трудно догадаться, что построение Якобсена ничем не отличалось бы от нашего только в одном частном случае, когда треугольник смешения в отношении сторон *I—II* и *II—III* является равнобедренным и когда, следовательно, главная медиана его совпадет с осью симметрии ϑ, s-кривой (биссектрисой угла *I II III*). Поскольку в этом случае точка максимальной

[1] Мы применяем этот термин, желая подчеркнуть, что положение точки истинной максимальной кривизны нам неизвестно.

кривизны действительно находится на медиане (биссектрисе) треугольника смешения, оба построения по смыслу вполне тождественны. Именно этот частный случай и был рассмотрен Якобсеном, рассчитывавшим, однако, получить верный во всех случаях метод определения коэффициента k. Не удивительно поэтому, что выкладки Якобсена привели к результату, однотипному с формулой (36).

Не сложно также установить причину серьезного заблуждения Якобсена. Причина его кроется в том, что в теории Якобсена совершенно игнорируется такой важный элемент, как треугольник смешения. В противоположность нашему принципу, Якобсен не ограничивал ветви ϑ, s-кривой, которые в действительности должны обрываться в точках, соответствующих положению крайних водных масс. Понятно, что это важное обстоятельство существенно влияет на расположение промежуточных точек на ϑ, s-кривой, соответствующих тому или иному значению параметра z. Естественно, что, исключив из поля зрения совокупность водных масс, Якобсен располагал лишь единственным ориентиром, каким является ось симметрии ϑ, s-кривой с неограниченными ветвями.

Для того чтобы внести полную ясность в затронутый нами вопрос о корректности метода Якобсена, следует еще выяснить возможность трансформации любого треугольника смешения, образуемого произвольными водными массами, в треугольник равнобедренный. Если путем изменения масштабов по прямоугольным осям ϑ, s такая трансформация возможна, то очевидно, что построение Якобсена всегда можно будет привести в соответствии с указанным нами способом и оба метода дадут одинаково верный и не зависящий от выбора масштабов результат.

Если обозначить координаты вершин *I*, *II*, *III* данного треугольника смешения соответственно через (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), то, чтобы ответить на поставленный вопрос, необходимо исследовать следующее неопределенное уравнение, в котором обе части представляют собой длины сторон *I—II* и *II—III* треугольника смешения:

$$\sqrt{\alpha^2(x_1-x_2)^2+\beta^2(y_1-y_2)^2}=\sqrt{\alpha^2(x_3-x_2)^2+\beta^2(y_3-y_2)^2}, \tag{37}$$

где через α и β обозначены коэффициенты пропорциональности масштабов по осям x и y (s и ϑ) соответственно.

Последнее уравнение легко привести к виду

$$\alpha^2A+\beta^2B=0,$$

где

$$A=(x_1-x_2)^2-(x_3-x_2)^2;\quad B=(y_1-y_2)^2-(y_3-y_2)^2.$$

Следовательно, α связано с β зависимостью

$$\alpha=\sqrt{-\frac{B}{A}\beta}\,. \tag{38}$$

Из формулы (38) явствует, что трансформация в равнобедренный треугольник возможна и осуществляется множеством способов только в том случае, когда величина A и B обладают противоположными знаками. Напротив, в случае одинаковых знаков A и B подобного рода трансформацию осуществить нельзя.

Поясним в качестве примера возможность трансформации треугольника смешения, изображенного на рис. 17. Определяя в условном, но одинаковом масштабе (допустим, 1 см равен единице длины) координаты вершин треугольника на упомянутом чертеже, мы получим:

$$\text{I) } x_1=10,\ y_1=6;\ \text{II) } x_2=1,\ y_2=1;\ \text{III) } x_3=2,\ y_3=21.$$

Следовательно,

$$A=80;\quad B=-375.$$

Как видим, трансформация в данном случае возможна и

$$\alpha=2{,}166\beta.$$

Желая, допустим, трансформировать данный треугольник в равнобедренный путем изменения одного лишь масштаба по оси x (т. е. s), что равносильно $\beta=1$ (масштаб по оси y остается без изменения), мы получим

$$\alpha=2{,}166.$$

Отсюда следует, что данный треугольник трансформируется в равнобедренный при увеличении масштаба солености (указанного на рис. 17) в 2,166 раза.

В соответствии с полученными данными на рис. 18 изображена трансформация нашего треугольника в равнобедренный. Трансформированный равнобедренный треугольник обозначен непрерывными линиями, а оригинал (в прежнем масштабе m) — пунктиром. Из чертежа на рис. 18 видно, сколь существенно меняется кривизна ϑ, s-кривой в зависимости от изменения масштаба: так, точка максимальной кривизны ($z=40$) пунктирной ϑ, s-кривой превращается при изменении масштаба чуть ли не в точку минимальной кривизны (точка с параметром $z=40$ на трансформированной кривой). Как и следовало ожидать, при трансформации данного треугольника (пунктир на рис. 18) в равнобедренный трансформированная вместе с ним ϑ, s-кривая превращается в симметричную кривую относительно медианы (биссектрисы) треугольника. Естественно, что касательная, проведенная в точке максимальной кривизны такой симметричной ϑ, s-кривой, будет параллельна основанию равнобед-

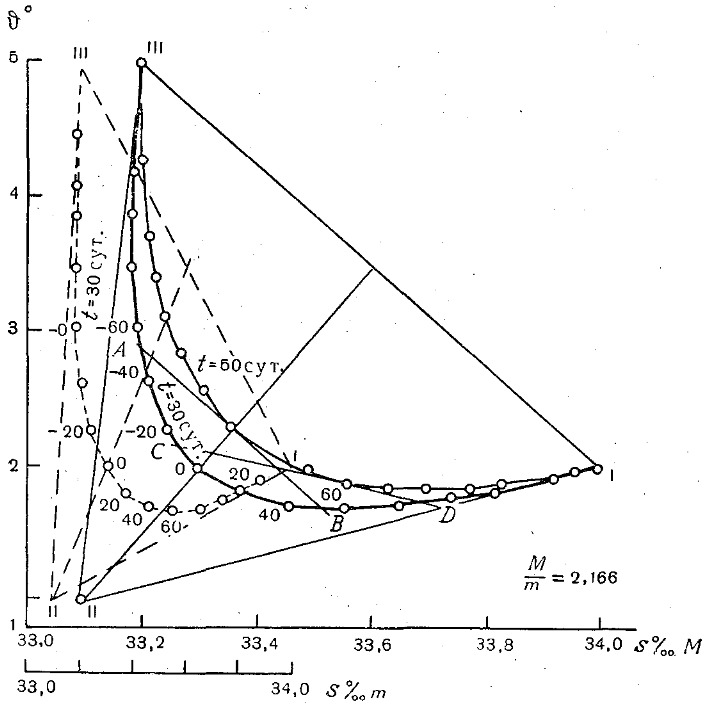

Рис. 18.

ренного треугольника смешения, а потому построение Якобсена в этом случае полностью совпадает с тем, которое требуется выводом формулы (36) и теоремами предыдущего параграфа.

Как это следует из формулы (38), далеко не все треугольники смешения можно путем изменения масштаба ϑ, s трансформировать в равнобедренные. Поясним это на конкретном примере.

Пусть координаты вершин треугольника смешения в одном условном масштабе выражаются величинами:

$$\text{I) } x_1 = 10,\ y_1 = 6;\quad \text{II) } x_2 = 0,\ y_2 = 0;\quad \text{III) } x_3 = 15,\ y_3 = 30.$$

В таком случае

$$A = -25 \text{ и } B = -875$$

и, согласно (38), треугольник не трансформируется в равнобедренный (α — мнимая величина).

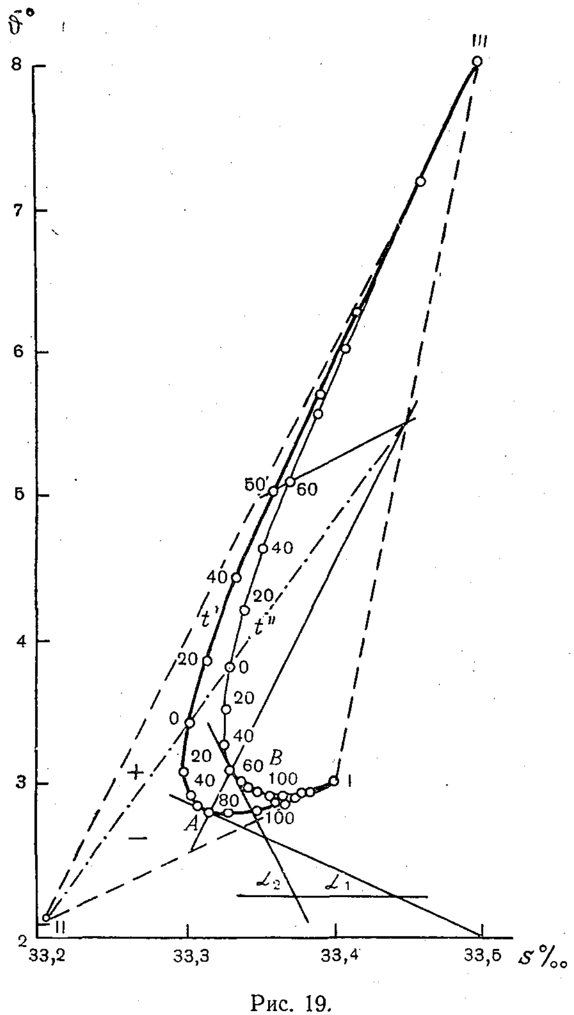

Рис. 19.

Этот треугольник изображен на рис. 19. На том же чертеже указаны и ϑ, s-кривые, вычисленные по данным табл. 1 и формуле (17) по-прежнему для двух моментов времени: $t_1=30$ сут.

и $t_2=50$ сут. и при условии, что $h=60$ м и $k=10$ см²/сек. Как видим, точки кажущейся «максимальной кривизны» ϑ, s-кривых (точки A и B на рис. 19) вновь не совпадают с медианой треугольника смешения. Однако в данном случае мы не имеем возможности преобразовать рассматриваемый треугольник в равнобедренный (как это было сделано в предыдущем примере) для того, чтобы привести построение Якобсена в соответствие с указанным нами приемом. Вот почему построение Якобсена является, вообще говоря, принципиально неверным. Напротив, в силу инвариантности наших построений по отношению к преобразованию масштабов ϑ, s-кривой указанный нами прием построения касательной является единственно верным во всех рассмотренных нами случаях трансформируемых и нетрансформируемых (в равнобедренные) треугольников смешения.

В заключение настоящего параграфа мы укажем новый и простой графический метод вычисления коэффициента перемешивания с помощью ϑ, s-кривых.

В самом деле, как это следует из формулы (26), тангенс угла наклона касательной в точке, соответствующей границе промежуточного слоя (допустим, $z=-h$), определяется для момента времени t_1 выражением

$$\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{\Theta_1-\Theta_2+(\Theta_2-\Theta_3)\,e^{\frac{h^2}{kt_1}}}{S_1-S_2+(S_2-S_3)\,e^{\frac{h^2}{kt_1}}},$$

для момента времени t_2 — выражением

$$\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{\Theta_1-\Theta_2+(\Theta_2-\Theta_3)\,e^{\frac{h^2}{kt_2}}}{S_1-S_2+(S_2-S_3)\,e^{\frac{h^2}{kt_2}}}.$$

Из этих формул следует, что

$$e^{\frac{h^2}{kt_1}}=A,\quad e^{\frac{h^2}{kt_2}}=B, \tag{39}$$

где через A и B обозначено:

$$A=\frac{\Theta_1-\Theta_2-(S_1-S_2)\operatorname{tg}\alpha_1}{(S_2-S_3)\operatorname{tg}\alpha_1-(\Theta_2-\Theta_3)};$$

$$B=\frac{\Theta_1-\Theta_2-(S_1-S_2)\operatorname{tg}\alpha_2}{(S_2-S_3)\operatorname{tg}\alpha_2-(\Theta_2-\Theta_3)}. \tag{40}$$

Логарифмируя (39), получим:

$$t_1=\frac{h^2}{k\ln A};\qquad t_2=\frac{h^2}{k\ln B}.$$

Составляя разность $t_2 - t_1 = \Delta t$, получим

$$\Delta t = \frac{h^2}{k}\left(\frac{\ln B - \ln A}{\ln A \ln B}\right),$$

откуда

$$k = \frac{h^2}{\Delta t}\left(\frac{\ln B - \ln A}{\ln A \ln B}\right). \tag{41}$$

Таков вид точной формулы для вычисления коэффициента перемешивания, заменяющей приближенную формулу (36). На основании предложения 7, доказанного в предыдущем параграфе, определение параметра h по данным ϑ, s-кривым весьма несложно. Следует при этом иметь в виду, что h равно половине толщины промежуточного слоя:

$$h = \frac{(z'' - z')}{2},$$

где $z'' - z'$ — разность глубин, отсекаемых на ϑ, s-кривой побочными медианами треугольника смешения.

Следовательно, формулу (41) можно записать в более удобном для практики виде

$$k = \frac{(z'' - z')^2}{4\Delta t} M. \tag{41'}$$

Любопытно, что формула (41′) несколько напоминает приближенную формулу (36) Якобсена, хотя смысл величин $(z'' - z')$ в упомянутых формулах совершенно различный. В формуле (41′) Δt означает по-прежнему промежуток времени, разделяющий две данные ϑ, s-кривые.

На практике вычисление множителя

$$M = \frac{\ln B - \ln A}{\ln A \ln B}$$

не встречает затруднений. Для этой цели в точках пересечений одной из побочных медиан треугольника смешения с двумя ϑ, s-кривыми следует провести касательные так, как это указано на рис. 19, и определить углы, образуемые упомянутыми касательными с осью s. Разумеется, что изложенный метод пригоден лишь в случае смешения трех водных масс; этот случай, однако, часто встречается в океанологической практике.

§ 4. Перемешивание водных масс в море конечной глубины. Определение свойств морской воды в результате полного перемешивания

Изложенная выше теория смешения водных масс в системе $s = f(\vartheta)$ была приурочена к идеальным условиям, когда вся толща воды неограниченно простирается вверх и вниз, считая от некоторого уровня ($z=0$) в гидросфере. Практически это равносильно тому, что общая глубина моря намного превышает толщину промежуточного слоя. Кроме того, для соблюдения аналогии с предыдущей задачей, в которой предполагалось, что на бесконечном удалении от первоначального уровня свойства водных масс остаются неизменными (эти свойства изменяются лишь в пределе, при $t=\infty$), мы должны допустить, что в природных условиях не происходит сколь-нибудь существенных изменений температуры и солености морской воды на поверхности и у дна моря.

Если подобного рода условия мыслимы в открытом океане, где вертикальное перемешивание балансируется притоком тепла и солей от морских течений и процессами теплообмена и испарения на поверхности моря, то в мелководных морях, подверженных в сильной степени ветровому перемешиванию, упомянутые условия часто нарушаются. Естественно поэтому, что полученные ранее выводы не всегда приложимы на практике.

Исследуя вертикальное выравнивание температуры и солености водных масс в результате, например, ветрового перемешивания, мы должны исключить влияние посторонних факторов (упомянутых выше), которые могут дополнительно изменять свойства морской воды у поверхности и дна моря. Мы должны, следовательно, изолировать всю толщу морской воды от внешней среды, а это равносильно требованию, что поток тепла и солей на вертикальных границах моря должен обращаться в нуль.

Допустим вначале, что коэффициент перемешивания k в пределах от $z=0$ до $z=H$ (поверхность и дно моря) остается неизменным. В таком случае к нашей задаче приложимы уравнения (1) § 1.

Решение этих уравнений необходимо подчинить следующим условиям изоляции:

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_{z=0}=\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)_{z=0}=0, \tag{42}$$

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)_{z=H}=\left(\frac{\partial s}{\partial z}\right)_{z=H}=0. \tag{43}$$

С другой стороны, при $t=0$

$$\vartheta=f(z), \quad s=\varphi(z). \tag{44}$$

Последнее условие предполагает заданным начальное вертикальное распределение температуры и солености в море. Частный интеграл уравнений (1) имеет, как известно, следующий вид:

$$\vartheta=-e^{-\lambda^2 kt}(A\cos\lambda z+B\sin\lambda z), \tag{45}$$

где λ, A и B — постоянные, определяемые из граничных и начальных условий.

Так как

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial z}=e^{-\lambda^2 kt}(-B\lambda\cos\lambda z+A\lambda\sin\lambda z), \tag{46}$$

то для выполнения условий (42) необходимо, чтобы $B=0$. Требуя в то же время, чтобы (46) обращалось в нуль для $z=H$ при любом t, мы получим трансцендентное уравнение $\sin\lambda H=0$, на основании которого определяются характеристические числа задачи:

$$\lambda_n=\frac{n\pi}{H}\quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ .\ .\ .). \tag{46'}$$

Следовательно, общее решение уравнений (1) представится в виде бесконечного ряда

$$\vartheta=\sum_{n=0}^{\infty}A_n e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{H^2}}\cos\frac{n\pi z}{H}. \tag{47}$$

Разумеется, формула для солености совершенно аналогична формуле (47).

Для определения коэффициента A_n мы положим в формуле (41) $t=0$ и воспользуемся условием (44). Тогда левая часть выражения (47) должна представлять заданное начальное распределение рассматриваемого свойства, а в правой части мы, очевидно, получим разложение этой функции в ряд Фурье по косинусам

$$f(z)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi z}{H}.$$

Согласно теории рядов Фурье, коэффициенты A_n и A_0 вычисляются по формулам:

$$A_0=\frac{1}{H}\int_0^H f(z)\,dz,$$

$$A_n=\frac{2}{H}\int_0^H f(z)\cos\frac{n\pi z}{H}\,dz.$$

Таким образом, общее решение уравнения (1), удовлетворяющее всем поставленным условиям, запишется в виде:

$$\vartheta=\frac{1}{H}\int_0^H f(z)\,dz+\frac{2}{H}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{H^2}}\cos\frac{n\pi z}{H}\int_0^H f(z)\cos\frac{n\pi z}{H}\,dz, \tag{48}$$

$$s=\frac{1}{H}\int_0^H \varphi(z)\,dz+\frac{2}{H}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{H^2}}\cos\frac{n\pi z}{H}\int_0^H \varphi(z)\cos\frac{n\pi z}{H}\,dz. \tag{49}$$

Очевидно, что при $t \to \infty$ бесконечные суммы в формулах (48) и (49) стремятся к нулю, а температура и соленость стремятся, в свою очередь, к стационарным значениям:

$$\lim (\vartheta)_{t=\infty} = \frac{1}{H} \int_0^H f(z)\, dz = \bar{\vartheta}, \tag{50}$$

$$\lim (s)_{t=\infty} = \frac{1}{H} \int_0^H \varphi(z)\, dz = \bar{s}, \tag{51}$$

определяемым первыми членами в формулах (48) и (49). Легко видеть, что упомянутые стационарные значения, к которым стремятся температура и соленость в результате полного перемешивания, представляют собой не что иное, как среднее вертикального распределения температуры и солености ($\bar{\vartheta}$, $\bar{s}$) в начальный момент времени. Таков наглядный физический смысл коэффициентов A_0, фигурирующих в формулх (48) и (49).

Если температура и соленость характеризуются в начальный момент времени по слоям постоянными величинами (расслоение по водным массам): Θ_1, S_1 для $0 < z < h_1$; Θ_2, S_2 для $h_1 < z < h_2$; Θ_3, S_3 для $h_2 < z < H$, то в соответствии с формулой (50) температура в результате полного перемешивания будет определяться таким выражением:

$$\bar{\vartheta} = \frac{1}{H} \int_0^H f(z)\, dz = \frac{1}{H} \left(\Theta_1 \int_0^{h_1} dz + \Theta_2 \int_{h_1}^{h_2} dz + \Theta_3 \int_{h_2}^{H} dz \right) = \\ = \frac{\Theta_1 \Delta_1 + \Theta_2 \Delta_2 + \Theta_3 \Delta_3}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}, \tag{52}$$

$$\bar{s} = \frac{S_1 \Delta_1 + S_2 \Delta_2 + S_3 \Delta_3}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}, \tag{52'}$$

где Δ_1, Δ_2, Δ_3 — толщины рассматриваемых слоев, а $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 = H$.

Очевидно, что формулы (52) и (52′) тождественны известным формулам смешения.

На основании формул (52) и (52′) можно утверждать, что рассматриваемые водные массы, изображаемые на ϑ, s-диаграмме тремя точками, образующими некоторый «треугольник смешения», трансформируются в результате полного перемешивания в новую водную массу: координаты этой последней ($\bar{\vartheta}$, $\bar{s}$) соответствуют в системе $s = f(\vartheta)$ координатам «центра тяжести» треугольника смешения. Если толщина Δ рассматриваемых слоев одна и та же, то координаты «результирующей» водной массы определяются на ϑ, *s*-диаграмме точкой пересечения медиан треугольника смешения.

Рассмотрим теперь конкретный пример смешения трех водных масс, вертикальная структура которых определяется следующими величинами:

$$\text{I)}\ \Theta_1 = 2°,\ S_1 = 34{,}00‰,\ \Delta_1 = 150\ \text{м};$$

$$\text{II)}\ \Theta_2 = 5°,\ S_2 = 34{,}50‰,\ \Delta_2 = 150\ \text{м};$$

$$\text{III)}\ \Theta_3 = 1°,\ S_3 = 35{,}00‰,\ \Delta_3 = 300\ \text{м}.$$

Общая глубина моря, таким образом, равна 600 м.

В этом случае, как не трудно показать, формула (48) преобразуется к виду

$$\vartheta = \bar{\vartheta} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi z}{H}}{n}e^{-\frac{n^2\pi^2 kt}{H}}\times$$

$$\times\left[(\Theta_1 - \Theta_2)\sin\frac{n\pi}{4} + (\Theta_2 - \Theta_3)\sin\frac{n\pi}{2}\right].$$

Аналогичную форму приобретает и выражение для солености. В наших расчетах мы принимали коэффициент турбулентного перемешивания k равным 10 CGS. Ввиду быстрой сходимости упомянутых рядов вычисление их не представляет затруднений, и в большинстве случаев возможно ограничиться пятью первыми членами бесконечных сумм.

Результаты вычисления температуры и солености для трех моментов времени: $t_1 = 100$ сут., $t_2 = 300$ сут., $t_3 = 400$ сут. изображены в виде ϑ, *s*-кривых на рис. 20. Цифры на этой фигуре, проставленные у соответственных точек ϑ, *s*-кривых, означают глубины в метрах, считая от поверхности моря. Из-за сильного увеличения масштаба по оси ϑ в поле чертежа попала лишь одна вершина треугольника смешения, соответствующая водной массе *I*. Конечный результат перемешивания изображен на ϑ, *s*-диаграмме точкой *M*.

Как видим, ϑ, *s*-кривые в процессе перемешивания претерпевают существенные изменения. Эти изменения, разумеется, не укладываются в рамки теоретических схем, рассмотренных нами в предыдущем параграфе. Действительно, по истечении 100 сут. с начала перемешивания (рис. 20) промежуточный слой хотя и слабо, но все же достаточно наглядно выражен в виде выпуклости ϑ, *s*-кривой. Однако в следующие моменты времени (300 и 400 сут.) промежуточный слой уже полностью ликвидируется и ϑ, *s*-кривые приобретают почти прямолинейную форму, постепенно стягиваясь к точке *M*, соответствующей конечной стадии перемешивания. Заметим также, что в дальнейшем, в ходе перемешивания, концевые точки ϑ, s-кривых могут выходить за пределы треугольника смешения. Совершенно очевидно, что в мелководном море с глубинами порядка 25—50 м исследуемый процесс протекает значительно быстрее, нежели в рассмотренном нами примере, когда конечная стадия

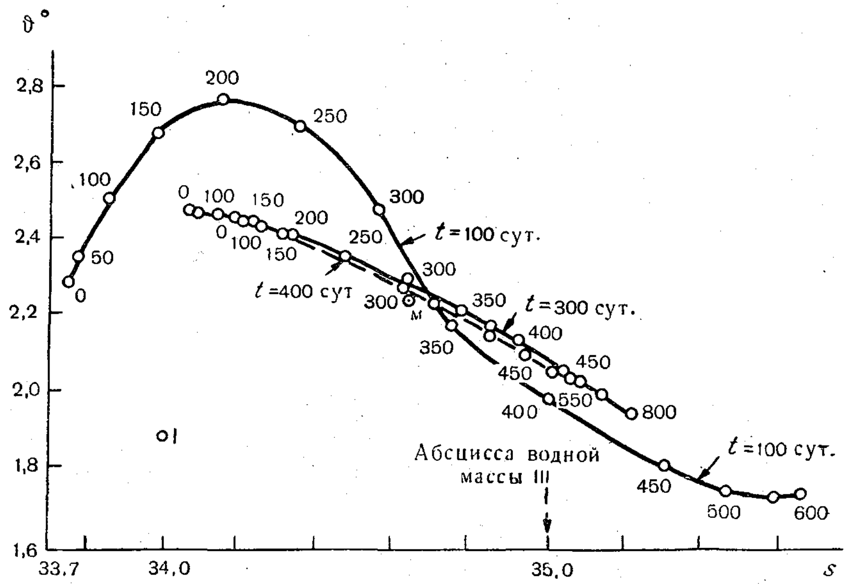

Рис. 20.

перемешивания при $H=600$ м и $k=10$ достигается, по-видимому, по истечении двух лет. Разнообразная форма ϑ, s-кривых, изображенных на рис. 20, очень напоминает ту пеструю картину зависимости $s=f(\vartheta)$, которая типична для мелководных морей, подверженных ветровому перемешиванию, и противоположна однообразной зависимости $s=f(\vartheta)$, наблюдаемой в открытом океане. Очевидно также, что в условиях мелководного моря ни о каком применении графических методов вычисления коэффициента перемешивания (о которых речь была выше) говорить не приходится.

Резюме

В результате нашего исследования мы создаем фундамент аналитической теории ϑ, s-кривых, широко применяемых в океанологической практике. Такой теории до настоящего времени не существовало.

Мы формулируем семь предложений о главных геометрических свойствах ϑ, s-кривых; эти теоремы имеют важное практическое приложение.

Мы исследуем также вопрос о корректности известного метода Якобсена для определения коэффициента перемешивания с помощью ϑ, s-кривых, и показываем, что этот метод, в геометрической его части, содержит серьезную принципиальную ошибку. Однако применяемый нами вывод основной формулы метода Якобсена, основанный на доказанных нами предложениях о геометрических свойствах ϑ, s-кривых, позволяет избежать такого рода ошибки и определить величину коэффициента перемешивания в достаточно корректной форме. Кроме того, мы указываем новый и простой графический метод определения коэффициента перемешивания в море с помощью ϑ, s-кривых.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Defant. Stabile Lagerung ozeanischer Wasserkörper und dazugehörige Stromsysteme. Veröff. des Inst. für Meereskunde. N. F. A. Heft 19, Berlin, 1929.
2. B. Helland-Hansen. Nogen hydrografiske metoder. Forh. ved de skand. naturforskers 16-de möte (Juli 1916), S. 357, Kristiania, 1918.
3. A. Defant, G. Wüst. Die Mischung von Wasserkörpern im System $s=f$ (ϑ). „Rapports et Proces Verbaux des reunions du Cons. perm. intern. pour l'exploration de la mer", vol. LXVII, 1930.
4. G. Wüst. Schichtung und Tiefenzirkulation des Pazifischen Ozeans (auf Grund zweier Längsschnitte). Veröff. des Inst. für Meereskunde. N. F. A., Heft 20, Berlin, 1929.
5. Вс. А. Березкин. Гренландское море и Полярный бассейн. Труды первой высокоширотной экспедиции на «Садко», т. I, вып. 1, стр. 136, 1939.
6. J. P. Jacobsen. Eine graphische Methode zur Bestimmung des Vermischungskoeffizienten im Meere. Gerlands Beitr. zur Geophys., Bd XVI, Heft 4, S. 404—412. (Содержание статьи Якобсена изложено на русском языке в книге В. В. Шулейкина «Физика моря», стр. 299—305. Изд. АН СССР, 1941.)
7. M. Okada. Use of ϑ, s-diagram for Determining the rates of mixing and of replacement of sea water in the coastal regions. Bull. Jap. Soc. Sci Fisheries, vol. 6, No. 5, 1938.

ВЕРТИКАЛЬНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛОВЫХ ВОЛН В МОРЕ И КОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ [1]

§ 1. Вертикальное распространение тепловых волн в бесконечно глубоком море. Метод Фурье—Шмидта для определения коэффициента теплопроводности

Задача о вертикальном распространении периодических колебаний температуры в бесконечно глубоком и однородном море впервые была рассмотрена В. Шмидтом [5]. Эта задача, по сути дела, ничем не отличается от давно известной задачи Фурье о распространении тепловых волн в односторонне ограниченном однородном твердом теле, а потому является лишь грубой интерпретацией интересующего нас явления. Допущение о постоянстве коэффициента теплопроводности, принятое Шмидтом по аналогии с задачей Фурье, принципиально неверное для пограничного слоя у поверхности моря, заставляет нас, строго говоря, считать, что температурные колебания заданы не на самой поверхности моря, а на некоторой глубине ниже пограничного слоя, где упомянутое допущение не является принципиально ошибочным.

Если колебания температуры на начальном уровне $z=0$ заданы в виде периодической функции времени t

$$\vartheta_{z=0}=\vartheta_m+\theta_0\cos\omega t, \tag{1}$$

где ϑ_m — средняя температура за период колебаний, θ_0 — их амплитуда, ω — их угловая частота ($\omega=\frac{2\pi}{\tau}$, где τ — период колебаний), то решение уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=K_z\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}, \tag{2}$$

[1] Опубликовано в Трудах Института океанологии АН СССР, т. I, 1946 г.

удовлетворяющее условию (1) и требованию ограниченности ϑ при $z \to \infty$, имеет следующий вид:

$$\vartheta = \vartheta_m + \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\pi}{K\tau}}\, z} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\pi}{K\tau}}\, z\right), \tag{3}$$

где $K = \text{const}$ — постоянная величина коэффициента температуропроводности, обладающего безразлично молекулярным (задача Фурье) или «турбулентным» значением (задача Шмидта).

Из формулы (3) следует, что амплитуда температурных колебаний

$$A = \theta_0 e^{-\sqrt{\frac{\pi}{K\tau}}\, z} \tag{4}$$

убывает с возрастанием глубины по экспоненциальному закону, а сдвиг фаз колебаний, оцениваемый величиной

$$\varphi = \sqrt{\frac{\pi}{K\tau}}\, z, \tag{5}$$

линейно возрастает с увеличением глубины.

На формулах (4)—(5) и основывается метод определения коэффициента температуропроводности в море, введенный в океанологическую практику В. Шмидтом.

Действительно, измеряя амплитуды колебаний температуры на глубинах z_1 и z_2, мы, на основании (4), после несложных преобразований получим

$$K = \frac{\pi}{\tau}\left(\frac{z_2 - z_1}{\ln \frac{A_1}{A_2}}\right)^2. \tag{6}$$

В то же время из выражения (5) нетрудно получить формулу для вычисления K по измеренному сдвигу фаз между глубинами z_1 и z_2:

$$K = \frac{\pi}{\tau}\left(\frac{z_2 - z_1}{\varphi_2 - \varphi_1}\right)^2. \tag{7}$$

Для упрощения расчета коэффициента турбулентной температуропроводности по наблюдаемому в природе сдвигу фаз температурной волны годового периода Н. Н. Зубов [1] построил график, представляющий собой, как нетрудно догадаться, пучок прямых, исходящих из общего начала. Однако, по мнению В. Шмидта, затухание амплитуды колебаний с увеличением глубины позволяет гораздо точнее вычислить K, чем с помощью формулы (7), ибо запаздывание экстремумов благодаря малости изменения вычисляется не точно и подвержено посторонним влияниям.

$\ln \frac{A_1}{A_2}$

К сожалению, в мореведческой практике формулами (6) и (7) одновременно не пользуются и предпочитают какой-либо один вариант метода по сравнению с другим.

С нашей же точки зрения, необходимо всегда одновременно пользоваться указанными вариантами одного и того же метода Фурье—Шмидта. Сопоставление величин K, определенных по двум формулам (6) и (7), вытекающим из одного и того же выражения (3), является лучшим критерием применимости метода, ибо одновременное определение K указанными способами теоретически должно привести к одному и тому же результату.

Следует всегда помнить, что в основу формул (6) и (7) положено допущение о постоянстве коэффициента турбулентной температуропроводности, далеко не всегда соответствующее действительности, а потому применение формул (6) и (7) зачастую может дать разноречивые результаты. Естественно, что в таких случаях очень затруднительно определить наиболее вероятное значение K, и можно допустить грубую ошибку, предпочитая, допустим, значение K, определенное из отношения амплитуд температурной волны [формула (6)], той величине K, которая получается на основании формулы (7). Еще бóльшую ошибку можно допустить, механически вычисляя среднее K из двух значений этого коэффициента, когда определения K изложенными способами значительно расходятся между собой.

В мореведческой практике, по примеру В. Шмидта, часто применяют формулы (6) и (7) ступенями, к отдельным слоям небольшой толщины, полагая, что в пределах такого тонкого слоя величина K остается неизменной, и получают при этом для различных слоев отличающиеся друг от друга значения K. Это обстоятельство, как полагают мореведы, позволяет якобы приближенно охарактеризовать вертикальное изменение коэффициента турбулентной температуропроводности по отдельным слоям в море и даже сделать некоторые заключения о связи между турбулентным обменом и вертикальной устойчивостью.

В действительности, однако, ни о каком сколько-нибудь достоверном определении K в таком случае говорить не приходится, ибо сама идея вычисления K по методу Фурье—Шмидта для отдельных слоев в море является следствием полного недоразумения. В самом деле, ведь формула (3) получена в предположении о постоянстве K не в пределах тонкого слоя, а, напротив, в слое бесконечно большой толщины. Практически толщина такого слоя определяется расстоянием (от начального уровня), на котором колебания температуры рассматриваемого периода становятся достаточно малыми.

Нетрудно сообразить, что допущение о постоянстве K в пределах тонкого слоя заставило бы задать условие на конечном расстоянии от начального уровня, где амплитуда колебаний температуры была бы отлична от нуля. Естественно, что, подчиняя решение уравнения (2) такому новому условию, мы получили бы результаты, отличные от формулы (3).

Резюмируя наши замечания, можно утверждать, что вычисление K по методу Фурье—Шмидта даст заведомо более надежный результат (в смысле среднего значения этого коэффициента) в том случае, когда формулы (6) и (7) применяются не к разным слоям в море, а, напротив, к одному слою возможно большей толщины, которая практически зависит от периода рассматриваемых колебаний.

Поскольку степень надежности вычисления K как некоторой средней величины коэффициента теплопроводности в пределах данного слоя контролируется согласованностью значений K, полученных по двум независимым вариантам метода Фурье—Шмидта, то следует ожидать, что различие между значениями K, определяемыми по формулам (6) и (7), должно уменьшаться с возрастанием толщины слоя и, наоборот, возрастать с уменьшением разности глубин.

В справедливости наших замечаний легко убедиться на следующем конкретном примере.

На рис. 1 изображены, согласно Айселину [4], кривые годового хода температуры на различных горизонтах (до глубин 300 м) в Саргассовом море. Из него явствует, что в Саргассовом море температурные колебания годового периода практически затухают на глубине 300 м. В свою очередь, на рис. 2 изображены кривые вертикального изменения размаха температурных колебаний и сдвига максимума температуры, построенные по данным рис. 1. Изменение амплитуды температурных колебаний в данном случае напоминает экспоненциальную кривую. Однако вертикальное изменение фазового угла φ значительно отклоняется от линейного закона (5), который должен иметь место в случае $K = \text{const}$.

Это свидетельствует о том, что в рассматриваемом примере величина коэффициента турбулентной температуропроводности меняется с глубиной, а потому применение метода Фурье—Шмидта может дать лишь грубую оценку средней величины K в пределах некоторого слоя воды в Саргассовом море.

Так как измерения температуры, относящиеся на практике к поверхности моря (0 м), заведомо осуществляются ниже тонкого пограничного слоя, то горизонт 0 м можно, не входя в противоречия со сделанными ранее оговорками, принять за начальный уровень при наших расчетах.

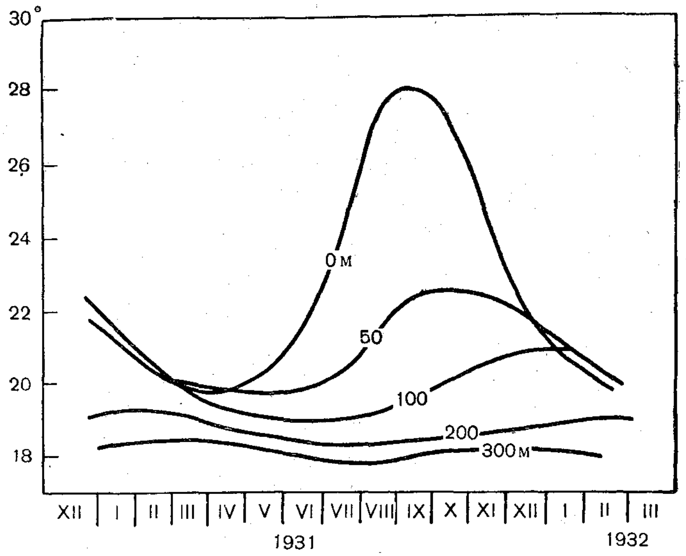

Рис. 1. Сезонный ход температуры в поверхностных слоях Саргассова моря (по Айселину).

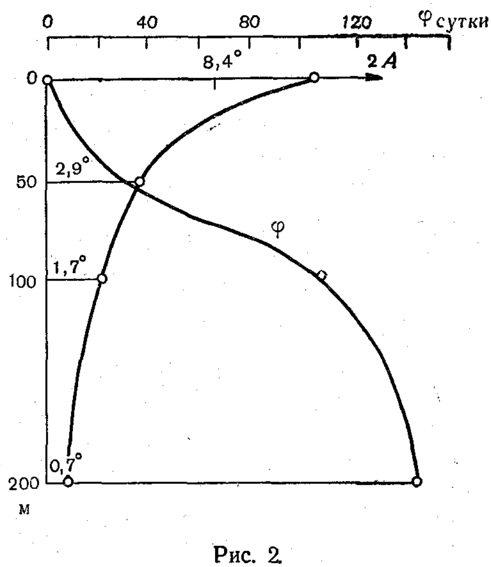

Рис. 2.

Основываясь на кривых рис. 2 и формулах (6) и (7), определим сначала величины K по отдельным слоям и посмотрим, насколько полученные значения K будут различаться между собой.

В следующей ниже табличке указаны необходимые данные, а также величины K по слоям 0—50, 50—100, 100—200 м, полученные по запаздыванию максимума температурных колебаний (K_φ) и отношению амплитуд (K_A):

z м	0		50		100		200
$\frac{A_1}{A_2}$		2,9		1,7		2,4	
φ сут.		30		80		40	
K_A см²/сек.		2,3		9		14	
K_φ см²/сек.		9,5		1,4		22	

Для наглядности результаты наших расчетов изображены на рис. 3 (пунктирные прямые по слоям). Как видно, расхождение

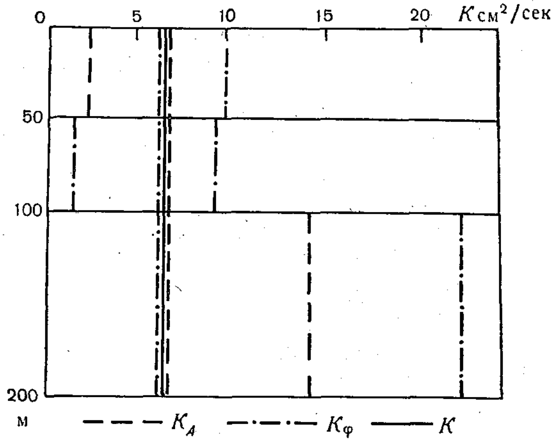

Рис. 3.

между величинами K, определенными по сдвигу фаз и отношению амплитуд температурных колебаний, чрезвычайно велико, а потому ни о каком сколько-нибудь достоверном определении K в данном случае говорить не приходится.

Вычисляя же K_A и K_φ для слоя 0—200 м, получим следующие значения интересующего нас коэффициента:

z м	0	200
$\frac{A_1}{A_2}$	12	
φ сут.	150	
K_A см²/сек.	6,5	
K_φ см²/сек.	6,0	

Таким образом, с увеличением толщины слоя различие в значениях K, определенных по сдвигу фаз и отношению амплитуд температурных колебаний, сглаживается, как и следовало ожидать. Поэтому есть основания полагать, что в последнем случае среднее из двух определений K (это значение изображено на рис. 3 непрерывной линией) независимыми способами, а именно значение $K \approx 6{,}3$ см²/сек., более надежно характеризует среднюю величину коэффициента температуропроводности в слое 0—200 м, чем обычное определение K по отдельным слоям в Саргассовом море. Разумеется, если бы в пределах слоя 0—200 м в Саргассовом море изменение K было бы значительным, мы по-прежнему не получили бы удовлетворительного согласия между величинами K_A и K_φ, определенными по двум вариантам метода Фурье—Шмидта.

В свете изложенного становится очевидным, что рабочей частью графика Н. Н. Зубова должен являться интервал глубин не менее 200 м, а потому этот график не имеет практического значения.

Так как в приведенном примере амплитуда годовых колебаний температуры в Саргассовом море практически затухает на глубине 300 м, то было бы целесообразным при вычислении K увеличить толщину слоя до указанного предела. К сожалению, при вычислении K по формуле (6) для слоя большой толщины возникают значительные погрешности иного рода, причину которых также нетрудно установить.

В самом деле, так как на нижней границе слоя, в пределах которого практически происходит гашение температурных колебаний, амплитуда их весьма мала, то, вычисляя величину $\ln \frac{A_1}{A_2}$ получим очень большое число, а потому с увеличением толщины слоя (начиная от некоторой оптимальной глубины) неминуемо будем получать все уменьшающиеся значения K, что обусловлено недостаточной точностью наших наблюдений. Очевидно также, что с увеличением толщины слоя возрастут погрешности и в определении сдвига фаз колебаний, а потому применение формул типа (7) также приведет к ошибочным результатам. Таким образом, если бы мы попытались качественно охарактеризовать изменение ошибки при вычислении K по формулам (6) и (7) в зависимости от толщины избранного слоя в море, то пришли бы к следующему выводу.

При малой толщине слоя ошибка в определении средней величины K очень велика; с увеличением толщины слоя эта ошибка постепенно уменьшается до некоторого минимального значения и затем вновь беспредельно возрастает при дальнейшем увеличении толщины слоя.

Определить оптимальную толщину слоя, при которой ошибка в определении K минимальна, вообще говоря, затруднительно. По-видимому, при современной точности наблюдения толщина такого слоя не должна быть меньше $^2/_3$ глубины, на которой практически затухают колебания рассматриваемого периода. Дальнейшие уточнения можно внести путем пробных изменений толщины слоя и сопоставления величин K, вычисляемых одновременно по формулам (6) и (7).

Следует также помнить, что температурные колебания на начальном уровне в действительности не следуют тому простому гармоническому закону (1), который был принят в качестве краевого условия при решении уравнения (2). Это обстоятельство заставляет путем гармонического анализа сложных колебаний температуры в море выделять волны интересующего периода (суточного или годового) и только к элементам таких о с н о в н ы х волн применять формулы (6) и (7).

Посмотрим, насколько могут отличаться величины K, определенные по элементам сложных колебаний (что обычно делается мореведами), от значений K, вычисленных более корректным способом, по элементам основных гармонических составляющих колебаний температуры.

Для этой цели мы воспользуемся в качестве примера кривыми суточного хода температуры в поверхностном слое пролива Каттегат, на основании которых О. Шубертом [6] была определена в свое время величина коэффициента турбулентной теплопроводности.

Эти кривые изображены на рис. 4.

Гармонический анализ их дает для основной температурной волны суточного периода следующие результаты:

$$\vartheta_0 = 16{,}922 - 0{,}256 \sin(159^\circ - x),$$

$$\vartheta_5 = 16{,}852 - 0{,}095 \sin(195^\circ - x),$$

$$\vartheta_{10} = 16{,}829 - 0{,}011 \sin(292^\circ - x).$$

Как видим, температурные колебания суточного периода почти затухают на глубине 10 м, где амплитуда колебаний температуры составляет всего 0,011° С. Определим коэффициент температуропроводности в слое 0—5 м по формуле (6), основываясь сначала на фактическом размахе сложных колебаний

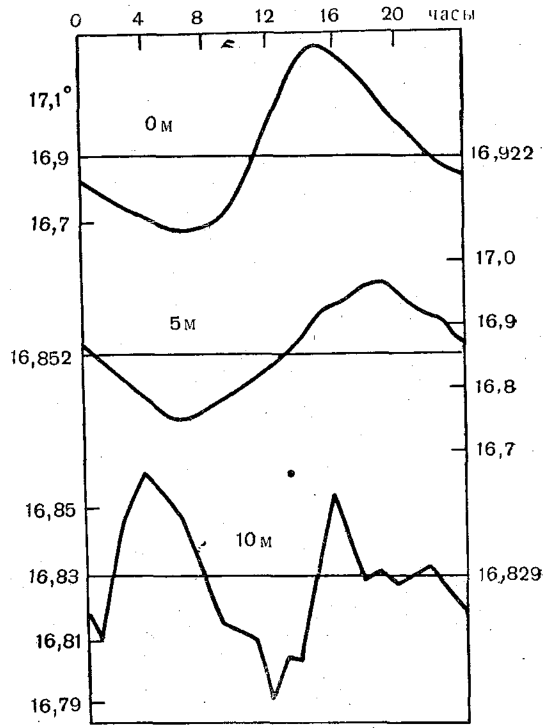

Рис. 4. Суточный ход температуры в поверхностном слое пролива Каттегат (из Шуберта).

температуры, аналогично тому, как это было сделано О. Шубертом. Согласно рис. 4, размах $2A$ температурных колебаний на поверхности равен $2A_0=0{,}58°$ С, а на глубине 5 м составляет $2A_5=0{,}23°$ С. Следовательно, $\frac{A_0}{A_5}=2{,}53$, и мы по формуле (6) получим

$$K_A\Big|_5^0=36\cdot 10^{-6}\left(\frac{500}{0{,}92}\right)^2\approx 10{,}6\ \text{см}^2/\text{сек}.^{1}$$

[1] Заметим, что Шуберт ошибочно получил величину K_A, в десять раз превышающую указанное выше значение.

С другой стороны, если основываться на амплитудах основных температурных волн суточного периода, полученных путем гармонического анализа, то $\frac{A_0}{A_5}=\frac{0,256}{0,095}\approx 2,60$, и K'_A будет выражаться величиной

$$K'_A\Big|_5^0=36\cdot 10^{-6}\left(\frac{500}{0,95}\right)^2\approx 9,9\ \text{см}^2/\text{сек.},$$

незначительно отличающейся от предыдущей величины K_A, полученной из отношения фактического размаха температурных колебаний.

Перейдем теперь к вычислению K_φ, основываясь на фактическом запаздывании максимума температурных колебаний Δt между глубинами 0 и 5 м.

Из рис. 4 видно, что сдвиг максимума в слое 0—5 м составляет 4 часа. Так как мы пользуемся фазовым углом, измеренным в единицах времени, то величина $\Delta\varphi$, фигурирующая в знаменателе формулы (7), равна

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi}{\tau}\Delta t,$$

а потому формула (7) преобразуется к виду

$$K_\varphi=\frac{\tau}{\pi}\left(\frac{\Delta z}{2\Delta t}\right)^2. \qquad (7')$$

Так как в данном случае $\Delta t=4,36\cdot 10^2$ сек., то

$$K_\varphi\Big|_5^0=8,8\ \text{см}^2/\text{сек.}$$ [1]

Эта величина также немногим отличается от значения коэффициента K_A, полученного выше из отношения фактических амплитуд температурных колебаний.

Однако совершенно иной результат мы получим, основывая расчеты на сдвиге фаз основных температурных волн суточного периода, выделенных путем гармонического анализа.

Действительно, в этом случае сдвиг фаз колебаний в слое 0—5 м составляет: $\Delta\varphi=36°=2,4$ часа, а поэтому для K'_φ получим значение

$$K'_\varphi\Big|_5^0=24,2\ \text{см}^2/\text{сек.},$$

намного превышающее значение K'_A и только что полученную величину K_φ.

[1] Курьезно, что при вычислении K_φ Шуберт вновь допустил ошибку, в результате чего найденное им значение по-прежнему в десять раз превышает полученное нами.

Так как расхождение между величинами K', определенными по формулам (6) и (7) для основных гармонических составляющих очень велико, то величину K в данном случае нельзя определить достаточно надежно, вопреки тому выводу, к которому можно прийти, основываясь лишь на удовлетворительном согласии между значениями K, полученными по сдвигу фаз и амплитудам фактических изменений температуры.

Попробуем добиться меньшего расхождения между величинами K'_A и K'_φ, а следовательно, и более надежного определения коэффициента теплопроводности путем увеличения толщины слоя.

Беря за основу первые гармонические составляющие для глубин 0 и 10 м, где $\frac{A_0}{A_{10}} = \frac{0{,}256}{0{,}011} \approx 23$, получим

$$K'_A\Big|_{10}^{0} \approx 4 \text{ см}^2/\text{сек}.$$

С другой стороны, принимая во внимание сдвиг фаз основных колебаний в том же слое $\Delta\varphi = 134°$ или $\Delta t = 9$ час.,

$$K'_\varphi\Big|_{10}^{0} \approx 7 \text{ см}^2/\text{сек}.$$

Последняя величина отклоняется от $K'_A\Big|_{10}^{0}$ на 75%, в то время как расхождение между аналогичными величинами в слое 0—5 м составляло ранее 147%. Как видим, с увеличением толщины слоя расхождение между K'_φ и K'_A значительно уменьшилось, но все же осталось таким, что определить достоверное среднее значение K в слое 0—10 м очень затруднительно.

Кстати сказать, в последнем случае невозможно определить K_A и K_φ по амплитудам и сдвигу фаз фактических изменений температуры, ибо температурная волна на глубине 10 м представляет собой колебание с ярко выраженным полусуточным периодом. Последнее обстоятельство, очевидно, связано с периодом приливо-отливных течений в проливе Каттегат.

Резюмируя наши выводы, можно сказать, что вычисление коэффициента турбулентной температуропроводности по размаху фактических изменений температуры и амплитуде их гармонической составляющей о с н о в н о г о периода дает на практике результаты, незначительно различающиеся между собой.

Напротив, вычисление K по сдвигу максимума «суммарной» кривой изменения температуры и сдвигу фаз основных гармонических составляющих волн может дать результаты, значительно отличающиеся друг от друга.

Последний вывод не должен являться для нас неожиданным. В самом деле, ведь вследствие несимметричного расположения экстремумов температурной кривой (относительно оси времени), что особенно заметно на кривой изменения температуры на глубине 0 м (рис. 4), можно заранее ожидать, что фазовый угол основной гармонической составляющей колебаний будет значительно отличаться от фазового угла, определяемого, допустим, по сдвигу максимума кривой фактического изменения температуры.

Одной из причин несимметричности экстремумов в суточном ходе температуры на поверхности моря является прерывный характер солнечного облучения. Другим фактором, обусловливающим несимметричность кривых суточных изменений температуры, может являться конвективный перенос тепла морскими течениями; это обстоятельство должно играть особо важную роль при наличии приливо-отливных течений. Заметим, что конвективный перенос тепла морскими течениями может существенно повлиять и на годовые колебания температуры в открытом океане.

В самом деле, если бы вертикальное распределение температуры в море являлось следствием одной лишь вертикальной теплопроводности, то очевидно [это следует из формулы (3)], что средняя годовая температура на больших глубинах в океане должна была бы весьма незначительно отличаться от средней годовой температуры на его поверхности. Так как это не соответствует действительности, в чем можно убедиться хотя бы на примере Атлантического океана, то для разумного применения формул (3), (6) и (7) в реальных условиях, помимо всего прочего, необходимо из данных наблюдений элиминировать искажающий эффект горизонтальной конвекции тепла в море для того, чтобы получить правильную картину изменений температуры, обусловленных одной лишь вертикальной теплопроводностью. Для этой цели можно с успехом применить метод построения «нормальных ϑ, s-кривых», указанный Хелланд-Хансеном.

§ 2. Вертикальное распространение тепловых волн в бесконечно глубоком море в случае переменной величины коэффициента турбулентной теплопроводности

Рассмотрим вертикальное распространение тепловых волн по-прежнему в бесконечно глубоком море, но полагая, в отличие от предыдущего, что коэффициент турбулентной температуропроводности зависит от глубины. Выясним, насколько это обстоятельство может повлиять на точность определения коэффициента турбулентного обмена по методу Фурье—Шмидта.

Допустим, как и прежде, что изменения температуры на некотором «начальном» уровне $z=0$ от поверхности моря (ось z

направлена вниз) являются простой периодической функцией времени

$$\vartheta_0 = \theta_0 \cos \omega t \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{\tau}\right). \tag{1'}$$

Примем далее, что изменение коэффициента турбулентной температуропроводности, начиная от уровня $z=0$, характеризуется убыванием этой величины по экспоненциальному закону

$$K = K_0 e^{-\beta z}, \tag{8}$$

где K_0 — величина коэффициента турбулентной температуропроводности на уровне $z=0$, а β — постоянный коэффициент.

В таком случае уравнение теплопроводности запишется в виде

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = K_0 \frac{\partial}{\partial z}\left[e^{-\beta z}\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right]. \tag{9}$$

Решение уравнения (9) будем искать в форме

$$\vartheta = e^{-\lambda i t}\psi(z) = \psi(z)(\cos \lambda t - i \sin \lambda t), \tag{10}$$

где λ — постоянная величина, $i = \sqrt{-1}$.

Подставляя (10) в уравнение (9), получим

$$\frac{d}{dz}\left[e^{-\beta z}\frac{d\psi}{dz}\right] + \frac{\lambda i \psi}{K_0} = 0. \tag{11}$$

Обозначая

$$e^{\beta z} = x \tag{12}$$

и преобразуя уравнение (11) к новой переменной x по формулам

$$\frac{dx}{dz} = \beta x; \qquad \frac{d}{dz} = \frac{dx}{dz}\frac{d}{dx} = \beta x \frac{d}{dx},$$

получим

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{\lambda i \psi}{\beta^2 K_0}\frac{1}{x} = 0. \tag{13}$$

Уравнение (13) является частным случаем более общего уравнения, интегрируемого в функциях Бесселя, а именно уравнения

$$y^2\frac{d^2 v}{dy^2} + (2\alpha + 1)y\frac{dv}{dy} + (\alpha^2 - \sigma^2 n^2 + \sigma^2\gamma^2 y^{2\sigma})v = 0, \tag{14}$$

общий интеграл которого имеет вид

$$v = y^{-\alpha}\left[C_1 J_n(\gamma y^\sigma) + C_2 N_n(\gamma y^\sigma)\right], \tag{15}$$

где J_n и N_n — функции Бесселя n-го порядка первого и второго рода соответственно, а C_1 и C_2 — произвольные постоянные интегрирования.

В самом деле, для того чтобы привести (14) к виду (13), достаточно положить

$$2\alpha+1=0, \text{ откуда } \alpha=-\frac{1}{2};$$

$$2\sigma-2=-1, \text{ откуда } \sigma=\frac{1}{2};$$

$$\alpha^2-\sigma^2 n^2=0, \text{ откуда } n=1;$$

$$\sigma^2\gamma^2=\frac{\lambda i}{\beta^2 K_0}, \quad \text{откуда } \gamma=\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\lambda i}{K_0}}.$$

Так как аргумент бесселевых функций в данном случае комплексный, то нам представилось более удобным перейти от функции Неймана N к линейно связанной с ней функции Ханкеля $H_1^{(1)}$, включая при этом переходные постоянные коэффициенты в неопределенные пока константы C_1 и C_2. Итак,

$$\psi=x^{\frac{1}{2}}\left[C_1 J_1\left(\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{x\lambda i}{K_0}}\right)+C_2 H_1^{(1)}\left(\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{x\lambda i}{K_0}}\right)\right],$$

$$\psi=\sqrt{e^{\beta z}}\left[C_1 J_1\left(\sqrt{e^{\beta z}}\,\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\lambda}{K_0}}\sqrt{i}\right)+\right.$$

$$\left.+C_2 H_1^{(1)}\left(\frac{2}{\beta}\sqrt{e^{\beta z}}\sqrt{\frac{\lambda}{K_0}}\sqrt{i}\right)\right]. \tag{16}$$

Обозначим

$$\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\lambda e^{\beta z}}{K_0}}=y \tag{17}$$

и заметим, что при $z\to\infty$ $y\to\infty$; при $z=0$ $y=y_0$, где

$$y_0=\frac{2}{\beta}\sqrt{\frac{\lambda}{K_0}}. \tag{18}$$

Тогда выражение (16) можно переписать в более компактной форме:

$$\psi=\frac{y}{y_0}\left[C_1 J_1(y\sqrt{i})+C_2 H_1^{(1)}(y\sqrt{i})\right]. \tag{19}$$

Так как при $y\to\infty$ функция $J_1(y\sqrt{i})$ стремится к бесконечности, в то время как температура при $z\to\infty$, а следовательно, и ψ должны оставаться ограниченными, то необходимо положить произвольную пока постоянную C_1 равной нулю. Следовательно,

$$\psi = \frac{y}{y_0} C_2 H_1^{(1)} \left(y \sqrt{i}\right) = \frac{y}{y_0} C_2 \left[\mathrm{her}_1 y + i\, \mathrm{hei}_1 y\right], \tag{20}$$

где через функции her_1 и hei_1 обозначены вещественные коэффициенты соответственно у действительной и мнимой частей функции Ханкеля.

На основании (10) и (20) получим для температуры выражение

$$\vartheta = \frac{y}{y_0} C_2 (\mathrm{her}_1 y + i\, \mathrm{hei}_1 y)(\cos \lambda t - i \sin \lambda t); \tag{21}$$

обозначая

$$C_2 i = B,$$

где B — постоянный произвольный коэффициент, можно формулу (21) записать в виде

$$\vartheta = \frac{y}{y_0} \left[(C_2 \mathrm{her}_1 y + B\, \mathrm{hei}_1 y) \cos \lambda t - \right.$$

$$\left. - (B\, \mathrm{her}_1 y - C_2 \mathrm{hei}_1 y) \sin \lambda t \right]. \tag{22}$$

Определим теперь произвольные постоянные C_2 и B на основании граничного условия (1′). Полагая в (22) $y = y_0$, что соответствует $z = 0$, получим

$$(C_2 \mathrm{her}_1 y_0 + B\, \mathrm{hei}_1 y_0) \cos \lambda t - (B\, \mathrm{her}_1 y_0 - C_2 \mathrm{hei}_1 y_0) \sin \lambda t =$$
$$= \theta_0 \cos \omega t.$$

Для того чтобы это равенство выполнялось тождественно, необходимо:

$$\omega = \lambda = \frac{2\pi}{\tau};$$

$$B\, \mathrm{her}_1 y_0 - C_2 \mathrm{hei}_1 y_0 = 0;$$
$$C_2 \mathrm{her}_1 y_0 + B\, \mathrm{hei}_1 y_0 = \theta_0,$$

откуда

$$B = \frac{\theta_0 \mathrm{hei}_1 y_0}{\mathrm{her}_1^2 y_0 + \mathrm{hei}_1^2 y_0},$$

$$C_2 = \frac{\theta_0 \mathrm{her}_1 y_0}{\mathrm{her}_1^2 y_0 + \mathrm{hei}_1^2 y_0}.$$

В результате получим

$$\vartheta = \frac{y}{y_0} \theta_0 \sqrt{\frac{\mathrm{hei}_1^2 y + \mathrm{her}_1^2 y}{\mathrm{her}_1^2 y_0 + \mathrm{hei}_1^2 y_0}} \cos(\omega t + \varphi), \tag{23}$$

где, в свою очередь,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{hei}_1 y_0 \operatorname{her}_1 y - \operatorname{her}_1 y_0 \operatorname{hei}_1 y}{\operatorname{her}_1 y_0 \operatorname{her}_1 y + \operatorname{hei}_1 y_0 \operatorname{hei}_1 y}\right). \qquad (24)$$

Согласно формуле (23), амплитуда температурных колебаний с увеличением глубины меняется по закону

$$A_\vartheta = \frac{y}{y_0}\theta_0 \sqrt{\frac{\operatorname{hei}_1^2 y + \operatorname{her}_1^2 y}{\operatorname{her}_1^2 y_0 + \operatorname{hei}_1^2 y_0}}. \qquad (25)$$

Посмотрим, насколько отличаются амплитуды колебаний температуры в случае постоянной и переменной величины коэффициента турбулентной температуропроводности, вычисляемые по формулам (4) и (25).

Пусть, в качестве примера, изменение K характеризуется зависимостью

$$K = 10e^{-2\cdot 10^{-4}z}. \qquad (26)$$

В соответствии с (26) значение K на начальном уровне $z=0$ составляет 10 $см^2$/сек. и затем уменьшается с возрастанием глубины таким образом, что на глубине 500 м$=5\cdot 10^4$ см K с достаточным приближением равно нулю.

Рассматривая амплитуду годовых колебаний температуры, когда $\lambda = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{6}{32\cdot 10^6 \text{ сек.}}$, в соответствии с (26) и равенством (18), получим

$$y_0 \approx 10^4 \sqrt{\frac{6}{32\cdot 10^6}} \approx 1{,}4.$$

С другой стороны, по формуле (17) будем иметь следующие значения для y:

Глубина, м	50	100	200
y	~2,4	3,8	10,53
$\frac{y}{y_0}$	~1,72	2,72	7,57

Дальнейшие вычисления, основанные на таблицах функций Ханкеля (см., например, таблицы специальных функций, составленные Янке и Эмде), сведены в табл. 1, причем амплитуду колебаний температуры на начальном уровне мы приняли равной 10°.

Таблица 1

Глубина, м	her_1	hei_1	her_1^2	hei_1^2	$her_1^2 + hei_1^2$	A_ϑ	A'_ϑ
0	0,019	0,297	0,0004	0,0882	0,0886	10°	10°
50	0,060	0,086	0,0036	0,0073	0,0109	5,95	6,1
100	0,030	0,000	0,0009	0,0000	0,001	2,72	3,7
200	0,000	0,000	0,0000	0,0000	0,00	0,00	1,4

В последнем столбце табл. 1 через A'_ϑ обозначены значения амплитуды колебаний температуры, соответствующие постоянному значению $K = 10$ и вычисленные по формуле (4).

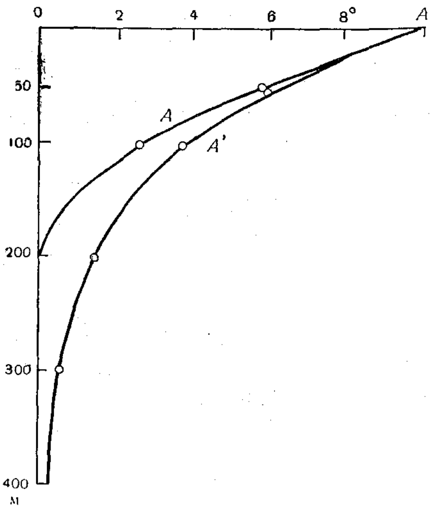

Рис. 5. Сравнение амплитуд температурных колебаний в случае постоянной и переменной величины коэффициента турбулентной температуропроводности.

Для наглядного сопоставления на рис. 5 изображено вертикальное изменение амплитуды годовых колебаний температуры в случае постоянной ($K = 10$) и переменной величины K, меняющейся по закону (26). Забудем на некоторое время, что амплитуды годовых колебаний температуры A_ϑ, указанные в табл. 1, соответствуют специальному случаю изменения коэффициента турбулентной температуропроводности по закону (26), и допустим, что упомянутые величины получены в результате непосредственных измерений годового хода температуры в море. Тогда ничто не помешает нам определить величину коэффициента турбулентной температуропроводности с помощью обычного метода Фурье—Шмидта, изложенного в предыдущем параграфе, а потом сравнить полученные величины K с истинными значениями интересующего нас коэффициента. Такое сравнение представляет интерес потому, что до сих пор оставался не выясненным вопрос о том, какие ошибки могут возникать при вычислении коэффициента турбулентной температуропроводности по методу Фурье—Шмидта, когда не исключена возможность непрерывного изменения K в зависимости от глубины. В таких случаях мореведы обычно полагают, что значения K, определенные по методу Фурье—Шмидта, приближенно соответствуют среднему значению коэффициента турбулентной температуропроводности в пределах рассматриваемого слоя в толще морской воды.

Итак, основываясь на значениях амплитуды A_ϑ, указанных в табл. 1, определим величину K по формуле (6) для слоев 0—50 и 50—100 м.

Результаты вычислений указаны в следующей таблице:

Глубина, м	A_ϑ	$\frac{A_1}{A_2}$	K см²/сек.
0	10		
		1,7	10
50	6		
		2,2	6
100	2,7		

На рис. 6 изображено в виде кривой истинное изменение K по экспоненциальному закону (26). На том же рисунке маленькими кружками отмечены значения K, только что полученные нами по методу Фурье—Шмидта.

Как видим, расхождение настолько значительно, что ни о каком соответствии между истинными средними значениями K по слоям 0—50 и 50—100 м (эти значения указаны пунктиром) и значениями K, определенными по методу Фурье—Шмидта, говорить не приходится. В самом деле, расхождение между величиной $K = 10$, определенной по методу Фурье—Шмидта для слоя 0—50 м, и истинным средним значением $K = 6{,}6$ в том же слое составляет примерно 52%. Еще большее расхождение имеет место в слое 50—100 м, где относительная величина погрешности составляет более 200%.

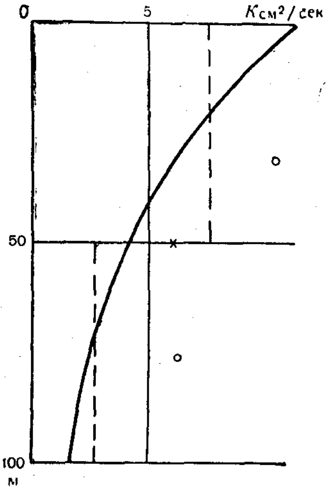

Рис. 6.

Приведенный пример наглядно демонстрирует значительные погрешности, которые могут возникать при определении коэффициента турбулентной температуропроводности в море по методу Фурье—Шмидта. При этом очевидно, что величина допускаемых ошибок в каждом конкретном случае остается совершенно неопределенной, так как неизвестно истинное изменение K в зависимости от глубины. Правда, с увеличением толщины слоя, для которого определяется отношение амплитуд колебаний температуры или запаздывание экстремумов, погрешность в определении K по формулам (6) и (7) уменьшается, аналогично примерам предыдущего параграфа. Действительно, если взять в данном случае вместо двух слоев лишь один, но удвоенной толщины (0—100 м), то получим, беря отношение амплитуд на верхней и нижней границах слоя, величину $K \approx 5{,}5$ см²/сек. (она обозначена на рис. 6 крестиком), которая менее отличается от истинной средней величины $\bar{K} = 4{,}3$ см²/сек. в том же слое (эта последняя обозначена на рис. 6 непрерывной вертикальной линией). Таким образом, величина погрешности в определении средней величины $\bar{K}$ при увеличении толщины слоя снизилась в этом частном случае до 28%. Конечно, не зная a priori величины вертикального градиента K, нельзя заранее установить границы слоя для того, чтобы исследуемая погрешность была минимальной. Кроме того, не следует забывать, что наряду с уменьшением такой «принципиальной» ошибки при увеличении толщины слоя неминуемо возрастут отмечавшиеся ранее погрешности иного характера, связанные с недостаточно точным измерением амплитуды весьма малых колебаний температуры на больших глубинах в море.

Вот почему, если пользоваться для определения коэффициента турбулентной теплопроводности в море методом Фурье—Шмидта, не только нельзя избежать грубых ошибок, но и нельзя, по сути дела, определить величину допускаемых погрешностей.

§ 3. Метод Фьельдстада для определения переменной величины коэффициента турбулентной теплопроводности

В предыдущих параграфах мы наглядно убедились в малой пригодности метода Фурье—Шмидта для вычисления коэффициента турбулентной теплопроводности в море, что обусловлено весьма искусственным предположением о постоянстве величины коэффициента теплопроводности, положенным в основу метода.

Не так давно Фьельдстадом [3] был указан простой метод вычисления коэффициента турбулентной теплопроводности в случае произвольного его изменения в зависимости от глубины. Этот метод по-прежнему приурочен к периодическим колебаниям температуры в море, распространяющимся вниз от поверхности моря путем теплопроводности.

Выведем формулу Фьельдстада несколько иным путем.

Допустим, что нам известны периодические колебания температуры на различных глубинах в море. Тогда, подвергая гармоническому анализу кривые изменения температуры, можно представить температуру ϑ на любой глубине в виде ряда Фурье

$$\vartheta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n), \tag{27}$$

причем амплитуда колебаний A_n и фазовый угол φ_n меняются с глубиной.

Если мы уверены в том, что изменения температуры обусловлены одной вертикальной теплопроводностью, то очевидно, что выражение (27) должно удовлетворять уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[K\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right],$$

где K — переменная величина коэффициента турбулентной температуропроводности, зависящая от глубины. Подставляя выражение (27) в последнее уравнение, мы, очевидно, должны получить следующее тождество:

$$\sum_{n=1}^{\infty} - A_n n\omega \sin(n\omega t - \varphi_n) \equiv \frac{\partial}{\partial z}\left[K\frac{\partial}{\partial z}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\omega t - \varphi_n)\right] \equiv$$

$$\equiv \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dz}\left(K\frac{dA_n}{dz}\right)\cos(n\omega t - \varphi_n) + K\frac{dA_n}{dz}\frac{d\varphi_n}{dz}\sin(n\omega t - \varphi_n) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{d}{dz}\left(KA_n\frac{d\varphi_n}{dz}\right)\sin(n\omega t - \varphi_n) - KA_n\left(\frac{d\varphi_n}{dz}\right)^2\cos(n\omega t - \varphi_n).$$

Так как написанное тождество должно выполняться при любом n, то, отбрасывая знаки сумм и группируя члены, получим

$$\left[\frac{d}{dz}\left(KA_n\frac{d\varphi_n}{dz}\right) + K\frac{dA_n}{dz}\frac{d\varphi_n}{dz} + A_n n\omega\right]\sin(n\omega t - \varphi_n) +$$
$$+ \left[\frac{d}{dz}\left(K\frac{dA_n}{dz}\right) - KA_n\left(\frac{d\varphi_n}{dz}\right)^2\right]\cos(n\omega t - \varphi_n) \equiv 0. \qquad (28)$$

Для выполнения (28), очевидно, необходимо, чтобы

$$\frac{d}{dz}\left(KA_n\frac{d\varphi_n}{dz}\right) + K\frac{dA_n}{dz}\frac{d\varphi_n}{dz} + A_n n\omega = 0 \qquad (29)$$

и

$$\frac{d}{dz}\left(K\frac{dA_n}{dz}\right) - KA_n\left(\frac{d\varphi_n}{dz}\right)^2 = 0. \qquad (30)$$

Из уравнения (29) легко определить, следуя Фьельдстаду, коэффициент турбулентной температуропроводности K. Для этого запишем (29) в развернутой форме:

$$KA_n\frac{d^2\varphi_n}{dz^2} + A_n\frac{d\varphi_n}{dz}\frac{dK}{dz} + 2K\frac{dA_n}{dz}\frac{d\varphi_n}{dz} + A_n n\omega = 0. \qquad (31)$$

6*

Если теперь умножить (31) на A_n, то последнее уравнение приведется к виду

$$\frac{d}{dz}\left(KA_n^2\frac{d\varphi_n}{dz}\right)+A_n^2 n\omega=0. \tag{32}$$

Интегрируя (32) в пределах от z до $z=h$, получим

$$\left(KA_n^2\frac{d\varphi_n}{dz}\right)_h-\left(KA_n^2\frac{d\varphi_n}{dz}\right)_z=-n\omega\int\limits_z^h A_n^2\,dz. \tag{33}$$

Выбирая уровень $z=h$ на такой глубине, где по данным гармонического анализа колебаний температуры их амплитуда с достаточным приближением равна нулю, в итоге получим формулу Фьельдстада

$$K_z=\frac{n\omega}{A_n^2\frac{d\varphi_n}{dz}}\int\limits_z^h A_n^2\,dz. \tag{34}$$

Заметим, что теоретически каждая пара величин A_1 и φ_1, A_2 и φ_2 и т. д. независимо определяет одну и ту же величину коэффициента теплопроводности. Однако вследствие небольшой точности построения кривых изменения температуры гармонический анализ дает мало надежные результаты для составляющих волн с номером выше первого. Вот почему при вычислении K по формуле Фьельдстада целесообразнее ограничиться лишь величинами A_1 и φ_1, соответствующими элементам основной (первой) волны суточного или годового периода. При графическом или численном определении интеграла в формуле (34) следует двигаться вверх от уровня на глубине h, где величина интеграла, а следовательно, и величина K всегда будут равны нулю. При этом необходимо помнить, что величина K, определяемая по формуле (34) для так называемой «поверхности» моря ($z=0$), в действительности соответствует глубине ниже пограничного слоя, которую невозможно изобразить при одном масштабе вертикального изменения K; не нужно поэтому смущаться большими значениями K, получаемыми по формуле (34) для значения $z=0$.

Так как при вычислении K по формуле Фьельдстада принимается, что амплитуда температурной волны приближенно равна нулю на глубине h от поверхности моря, то, в соответствии с формулой (34), на упомянутой глубине K автоматически обращается в нуль независимо от того, что в действительности K может быть там и отличным от нуля. В самом деле, обращаясь к примеру предыдущего параграфа (см. рис. 5), убеждаемся, что при одинаковой степени приближения «нулевые» значения K и A не соответствуют одной и той же глубине от поверхности моря.

Так, если амплитуда колебаний температуры, соответствующая убыванию K по экспоненциальному закону (26), обращается в нуль (с точностью до второго знака после запятой) на глубине 200 м, то на той же глубине, как это следует из формулы (26), коэффициент турбулентной температуропроводности отличен от нуля, а именно

$$K_{200} = 0{,}2 \text{ см}^2/\text{сек}.$$

Еще бо́льшие расхождения мы получим, рассматривая гашение амплитуды температурной волны при постоянном значении коэффициента турбулентной температуропроводности, когда при неизменном значении $K = 10\,\mathrm{CGS}$ амплитуда температурной волны годового периода фактически затухает (равна нулю до второго десятичного знака) на глубине 600 м от поверхности моря.

Естественно поэтому, что при расчете величины K по формуле Фьельдстада мы получаем неверные значения коэффициента турбулентной температуропроводности, причем величина погрешности остается в каждом конкретном случае по-прежнему неопределенной, так как неизвестно истинное значение K на глубине, где амплитуда температурной волны практически равна нулю.

Можно, однако, заранее предполагать, что в случае уменьшения K с глубиной ошибка будет значительной лишь в нижней части рассматриваемого слоя.

Любопытно определить величину интересующей нас погрешности в наиболее простом и вместе с тем крайнем случае, когда K не зависит от глубины. Для этой цели, поступая аналогично предыдущему, допустим, что вертикальное изменение амплитуды и фазового угла температурной волны годового периода, изображенное на рис. 7 и соответствующее в действительности постоянному значению коэффициента температуропроводности $K = 10\,\mathrm{CGS}$, представляет собой не что иное, как вертикальное изменение элементов годовой волны, полученное в результате наблюдений.

Вычисляя в таком случае K по формуле Фьельдстада, сопоставим результаты с заведомо известным нам значением $K = 10\,\mathrm{CGS}$ и определим таким образом величину погрешности.

Так как в рассматриваемом примере амплитуда температурной волны изменяется по известному нам закону

$$A(z) = A_1 e^{-mz}, \tag{35}$$

а величина φ линейно возрастает с глубиной

$$\varphi = mz, \tag{36}$$

то, подставляя (35) и (36) в формулу (34), получим

$$K_z = \frac{2\pi A_1^2}{\tau A_1^2 e^{-2mz} m} \int_z^h e^{-2mz} dz = \frac{\pi}{\tau m^2} [1 - e^{-2m(h-z)}]. \tag{37}$$

Имея в виду, что в действительности

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{K_{\text{ист}}\tau}}, \tag{38}$$

где $K_{\text{ист}}$ — истинное постоянное значение коэффициента температуропроводности, и подставляя (38) на место m в знаменателе формулы (37), получим

$$K_z = K_{\text{ист}} (1 - e^{-2m(h-z)}). \tag{39}$$

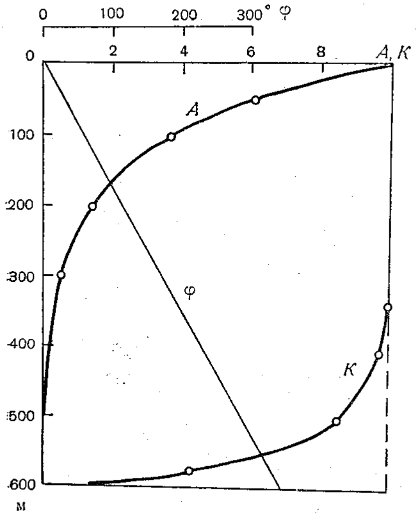

Рис. 7.

Так как, согласно условию, величина h есть глубина, на которой A с достаточным приближением обращается в нуль, то из соотношения (35) следует, что величина mh настолько велика, что значение e^{-mh} практически равно нулю.

Обращаясь теперь к формуле (39), видим, что при $z = 0$ экспоненциальным членом можно пренебречь в сравнении с единицей, а потому на «поверхности» моря мы всегда получим с достаточным приближением

$$K_0 = K_{\text{ист}}.$$

Таким образом, вычисляя K по формуле Фьельдстада для поверхностного слоя моря, мы не получим сколько-нибудь значительного расхождения между вычисленным значением K и истинной величиной коэффициента турбулентной температуропроводности. Однако, как это следует из формулы (39), с увеличением z величина K, определяемая по формуле Фьельдстада, будет уменьшаться, все более и более отличаясь от неизменной в данном случае величины коэффициента температуропроводности.

На рис. 7 изображено вертикальное изменение K, определяемое формулой (39), которая в данном случае равносильна формуле Фьельдстада. При расчетах мы приняли $m = 10^{-4}$, что соответствует значению этого параметра в случае

$$K = 10 \text{ CGS}.$$

и

$$\tau = 1 \text{ году.}$$

Из рис. 7 видно, что расхождение между величинами K, вычисленными по формуле Фьельдстада, и истинной величиной K начинает заметно сказываться лишь на глубинах свыше 300 м, т. е. на глубинах, превышающих половину толщины рассматриваемого слоя (600 м).

Сопоставляя полученный результат с выводами предыдущих параграфов, убеждаемся в том, что применение формулы Фьельдстада, приуроченной по существу к вычислению переменной величины коэффициента температуропроводности, дает и в случае постоянной величины K удовлетворительные результаты в пределах верхней половины избранного слоя.

Итак, страхуя себя от сколько-нибудь значительных ошибок, можно с уверенностью применять формулу Фьельдстада к глубинам, не превышающим половины толщины избранного слоя (считая от поверхности моря).

§ 4. Вертикальное распространение тепловых волн в бесконечно глубоком море при наличии радиационного притока тепла

Исследуя вертикальное распространение тепловых волн в море и обсуждая основанные на этом явлении методы определения коэффициента теплопроводности, мы не принимали до сих пор во внимание эффект радиационного притока тепла, иначе говоря, не считались с поглощением солнечной радиации в толще морской воды.

Важно выяснить, насколько может повлиять указанный фактор не только на элементы тепловых волн, но и на точность определения коэффициента теплопроводности в море по методу Фурье—Шмидта.

Очевидно, что это обстоятельство может иметь существенное значение лишь при распространении температурных волн суточного периода, ибо известно, что почти полное поглощение длинноволновой радиации солнца происходит в пределах нескольких метров от поверхности моря.

Так как наблюдениями установлено, что температурная волна суточного периода практически затухает в море уже на глубине 10—15 м, то любая, даже мелководная, часть моря с глубинами не менее 10—15 м может считаться приближенно «бесконечно глубокой» при математическом исследовании суточных колебаний температуры в море.

Если принять, что поток солнечной радиации является функцией лишь одной вертикальной координаты z, причем поглощение его осуществляется по экспоненциальному закону Бугэ

$$R(z,\ t)=R_0(t)\,e^{-\delta z}, \tag{40}$$

где $R_0(t)$ — напряжение радиации на начальном уровне, зависящем от времени t, а δ — постоянная величина коэффициента поглощения, то дифференциальное уравнение притока тепла для исследуемого процесса запишется в виде

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right)+R_0(t)\,\delta e^{-\delta z}.$$

Желая сопоставить результаты решения этой более сложной задачи с задачей Фурье—Шмидта, мы будем считать коэффициент турбулентной температуропроводности независящим от глубины. Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=K\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}+R_0(t)\,\delta e^{-\delta z}. \tag{41}$$

Пусть на начальном уровне $z=0$ температура воды изменяется по периодическому закону

$$\vartheta=\vartheta_m+\vartheta_0\cos(\omega t-\gamma), \tag{42}$$

где γ — сдвиг фазы колебаний по сравнению с фазой колебания солнечной радиации на том же уровне

$$R_0(t)=V_0+V_1\cos\omega t. \tag{43}$$

Граничному условию (42) следует подчинить решение уравнения (41), которое мы будем искать в форме

$$\vartheta=\theta_1+\theta_2, \tag{44}$$

причем в соответствии с (41), (42) и (44) функция θ_1 должна удовлетворять уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial t}=K\frac{\partial^2\theta_1}{\partial z^2} \tag{45}$$

и граничному условию (42), а функция θ_2 должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial t}=K\frac{\partial^2\theta_2}{\partial z^2}+R_0(t)\,\delta e^{-\delta z} \tag{46}$$

и условию при $z=0$

$$\theta_2=0. \tag{47}$$

Кроме того, очевидно, что функции θ_1 и θ_2 должны быть ограничены при $z=\infty$.

Периодическое решение уравнения (45), удовлетворяющее граничному условию (42) и требованию ограниченности при $z = \infty$, уже известно из первого параграфа; оно имеет вид

$$\theta_1 = \vartheta_m + \vartheta_0 e^{-mz} \cos(\omega t - mz - \gamma), \tag{3'}$$

где

$$m = \sqrt{\frac{\pi}{K\tau}}.$$

Таким образом, в дополнение к задаче Фурье—Шмидта нам следует решить уравнение (46) с условием (47). Так как очевидно, что функция θ_2, так же как и θ_1, должна быть периодической функцией времени, будем искать решение (46) в следующей форме:

$$\theta_2 = \xi_0(z) + \xi_1(z)\cos\omega t + \xi_2(z)\sin\omega t, \tag{48}$$

где ξ_0, ξ_1, ξ_2 — функции только вертикальной координаты z, подлежащие определению.

Подставляя выражение (48) в уравнение (46) и принимая во внимание (43), получим

$$-\xi_1\omega\sin\omega t + \xi_2\omega\cos\omega t = K\frac{d^2\xi_0}{dz^2} + K\cos\omega t\,\frac{d^2\xi_1}{dz^2} +$$

$$+ K\sin\omega t\,\frac{d^2\xi_2}{dz^2} + V_0\delta e^{-\delta z} + V_1\delta\cos\omega t e^{-\delta z}. \tag{49}$$

Так как по условию функции ξ_0, ξ_1, ξ_2 удовлетворяют уравнению (46), то, очевидно, для того, чтобы равенство (49) выполнялось тождественно, необходимо, во-первых, чтобы

$$\frac{d^2\xi_0}{dz^2} = -\frac{V_0\delta}{K}e^{-\delta z}, \tag{50}$$

откуда, интегрируя по z и налагая условие

$$\xi_0 = 0 \quad \text{при} \quad z = 0$$

и требование ограниченности ξ_0 при $z = \infty$, мы получим

$$\xi_0 = \frac{V_0}{K\delta}\left(1 - e^{-\delta z}\right). \tag{51}$$

Во-вторых, для тождественного выполнения равенства (49) необходимо, чтобы

$$\frac{d^2\xi_1}{dz^2} - \frac{\omega}{K}\xi_2 = -\frac{V_1\delta}{K}e^{-\delta z};$$

$$\frac{d^2\xi_2}{dz^2} + \frac{\omega}{K}\xi_1 = 0. \tag{52}$$

Из системы (52) определяются искомые функции ξ_1 и ξ_2, если мы подчиним решение (52) условиям, вытекающим из постановки задачи:

$$\xi_1 = \xi_2 = 0 \quad \text{при} \quad z = 0; \tag{53}$$

$$\xi_1 = \xi_2 = \text{const} \quad \text{при} \quad z = \infty. \tag{54}$$

Любопытно, что система уравнений (52) совершенно идентична известным уравнениям Экмана для стационарного градиентного течения в море большой глубины. В самом деле, если отождествить ξ_1 и ξ_2 с компонентами скорости течения, ω — с параметром Кориолиса, а $V_1 \delta e^{-\delta z}$ — с величиной горизонтального градиента давления, убывающего с глубиной по экспоненциальному закону, то уравнения (52) вместе с граничными условиями (53) и (54) будут описывать режим стационарного градиентного течения в области моря, поверхность которой покрыта, например, неподвижным льдом.

Займемся теперь интегрированием системы уравнений (52). Дважды дифференцируя последнее из уравнений (52), получим

$$\frac{d^2\xi_1}{dz^2} = -\frac{K}{\omega}\frac{d^4\xi_2}{dz^4}.$$

Подставляя этот результат в первое уравнение (52), получим следующее неоднородное уравнение:

$$\frac{d^4\xi_2}{dz^4} + \frac{\omega^2}{K^2}\xi_2 = \frac{V_1\delta\omega}{K^2}e^{-\delta z}. \tag{55}$$

Общий интеграл $\tilde{\xi}_2$ однородного уравнения

$$\frac{d^4\xi_2}{dz^4} + \frac{\omega^2}{K^2}\xi_2 = 0$$

имеет вид

$$\tilde{\xi}_2 = C_1 e^{-mz}\cos mz + C_2 e^{-mz}\sin mz + C_3 e^{mz}\cos mz + C_4 e^{mz}\sin mz,$$

где

$$m = \sqrt{\frac{\omega}{2K}} = \sqrt{\frac{\pi}{K\tau}},$$

а C_1, C_2, C_3 и C_4 — постоянные интегрирования.

Из требования ограниченности ξ_2 при $z = \infty$ вытекает, что

$$C_3 = C_4 = 0,$$

а потому

$$\tilde{\xi}_2 = C_1 e^{-mz}\cos mz + C_2 e^{-mz}\sin mz. \tag{56}$$

Найдем теперь частный интеграл $\approx\xi_2$ неоднородного уравнения (55). Применяя метод неопределенных коэффициентов, положим

$$\overset{\approx}{\xi}_2 = ae^{-\delta z}, \tag{57}$$

где a — постоянный коэффициент, подлежащий определению.

Подставляя (57) в (55), получим

$$a = \frac{V_1\delta\omega}{K^2\delta^4 + \omega^2} \tag{58}$$

и, следовательно, общий интеграл уравнения (55)

$$\xi_2 = \tilde{\xi}_2 + \overset{\approx}{\xi}_2.$$

запишется в виде

$$\xi_2 = C_1 e^{-mz}\cos mz + C_2 e^{-mz}\sin mz + \frac{V_1\delta\omega}{K^2\delta^4 + \omega^2} e^{-\delta z}. \tag{59}$$

Тогда из последнего уравнения (52) определится ξ_1:

$$\xi_1 = -C_1 e^{-mz}\sin mz + C_2 e^{-mz}\cos mz - \frac{V_1\delta^3 K}{K^2\delta^4 + \omega^2} e^{-\delta z}. \tag{60}$$

Так как при $z=0$ должно выполняться условие (53), то на этом основании из (59) и (60) определятся константы C_1 и C_2:

$$C_1 = -\frac{V_1\delta\omega}{K^2\delta^4 + \omega^2}, \quad C_2 = \frac{V_1\delta^3 K}{K^2\delta^4 + \omega^2}. \tag{61}$$

Вспоминая же (48), мы получим

$$\theta_2 = \frac{V_0}{K\delta}\left(1 - e^{-\delta z}\right) + \frac{V_1\delta\omega e^{-mz}}{K^2\delta^4 + \omega^2}\sin(mz - \omega t) +$$
$$+ \frac{V_1\delta^3 K e^{-mz}}{K^2\delta^4 + \omega^2}\cos(\omega t - mz) -$$
$$-\left(\frac{V_1\delta^3 K e^{-\delta z}}{K^2\delta^4 + \omega^2}\cos\omega t - \frac{V_1\delta\omega e^{-\delta z}}{K^2\delta^4 + \omega^2}\sin\omega t\right). \tag{62}$$

Если теперь ввести обозначения

$$-\frac{V_1\delta\omega}{K^2\delta^4 + \omega^2} = b\sin\gamma_1, \quad \frac{V_1\delta^3 K}{K^2\delta^4 + \omega^2} = b\cos\gamma_1, \tag{63}$$

где b и γ_1 — новые постоянные, то

$$\operatorname{tg}\gamma_1 = -\frac{\omega}{K\delta^2}, \tag{64}$$

$$b = \frac{V_1\delta}{\sqrt{K^2\delta^4 + \omega^2}}, \tag{65}$$

и выражение (62) перепишется в более компактной форме

$$\theta_2 = \frac{V_0}{K\delta}\left(1 - e^{-\delta z}\right) + \frac{V_1\delta}{\sqrt{K^2\delta^4 + \omega^2}} \times$$
$$\times \left[e^{-mz}\cos(\omega t + \gamma_1 - mz) - e^{-\delta z}\cos(\omega t - \gamma_1)\right]. \quad (66)$$

Соединяя на основании (44) формулы (3′) и (66), мы получим искомое выражение для температуры

$$\vartheta = \vartheta_m + \frac{V_0}{K\delta}\left(1 - e^{-\delta z}\right) + \vartheta_0 e^{-mz}\cos(\omega t - mz - \gamma) +$$
$$+ \frac{V_1\delta}{\sqrt{K^2\delta^4 + \omega^2}}\left[e^{-mz}\cos(\omega t + \gamma_1 - mz) - e^{-\delta z}\cos(\omega t - \gamma_1)\right]. \quad (67)$$

Как видим, температурная волна представляет собой в данном случае результат наложения трех составляющих волн (косинусоид) с одним и тем же периодом колебаний, равным периоду колебаний на начальном уровне, но с различными фазовыми углами. Результат наложения этих волн можно представить аналитически в виде одной, результирующей косинусоиды.

Действительно, нетрудно показать, что

$$a_1\cos(\alpha - \varphi_1) + a_2\cos(\alpha - \varphi_2) = C\cos(\alpha - \psi), \quad (68)$$

где

$$C = \sqrt{a_1^2 + 2a_1a_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + a_2^2} \quad (69)$$

и

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{a_1\sin\varphi_1 + a_2\sin\varphi_2}{a_1\cos\varphi_1 + a_2\cos\varphi_2}. \quad (70)$$

Используя формулы (68), (69) и (70), преобразуем выражение, заключенное в прямые скобки в правой части (67), а затем объединяя полученный результат с первым гармоническим членом в правой части (67), получим

$$\vartheta(z, t) = \vartheta_m + \frac{V_0}{K\delta}\left(1 - e^{-\delta z}\right) + A_\vartheta\cos(\omega t - \varepsilon), \quad (71)$$

где обозначено

$$A_\vartheta = \sqrt{\vartheta_0^2 e^{-2mz} + 2\vartheta_0 e^{-mz}\sqrt{e^{-2mz} - 2e^{-(m+\delta)z}\cos mz + e^{-2\delta z}} \times \cos(mz + \gamma - \psi + \gamma_1)\frac{V_1\delta}{\sqrt{K^2\delta^4 + \omega^2}} + \frac{V_1^2\delta^2\left(e^{-2mz} - 2e^{-(m+\delta)z} \times \cos mz + e^{-2\delta z}\right)}{K^2\delta^4 + \omega^2}}; \quad (72)$$

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{e^{-mz}\sin mz}{e^{-mz}\cos mz - e^{-\delta z}}. \quad (73)$$

В свою очередь

$$\operatorname{tg}\varepsilon=\frac{\vartheta_0 e^{-mz}\sin(\gamma+mz)+\dfrac{V_1\delta}{\sqrt{K^2\delta^4+\omega^2}}\times\sqrt{e^{-2mz}-2e^{-(m+\delta)z}\cos mz+e^{-2\delta z}}\sin(\psi-\gamma_1)}{\vartheta_0 e^{-mz}\cos(\gamma+mz)+\dfrac{V_1\delta}{\sqrt{K^2\delta^4+\omega^2}}\times\sqrt{e^{-2mz}-2e^{-(m+\delta)z}\cos mz+e^{-2\delta z}}\cos(\psi-\gamma_1)}. \tag{74}$$

Из формулы (71) следует, что средняя (за период колебаний) температура возрастает с глубиной по экспоненциальному закону. Подобного рода среднее вертикальное распределение температуры должно наблюдаться в стоячих водоемах озерного типа. Напротив, как указывают наблюдения в море, средняя температура там даже в поверхностном слое убывает с глубиной, что, очевидно, обусловлено горизонтальным переносом тепла морскими течениями.

Действительно, если добавить (со знаком минус) к правой части уравнения (41), помимо радиационного члена, некоторую убывающую функцию глубины, не зависящую от времени и рисующую собой адвективный перенос тепла в море, то при надлежащем выборе констант получим в качестве средней температуры не возрастающую, как прежде, а убывающую функцию глубины. Если горизонтальная конвекция тепла в поверхностном слое моря не зависит от времени, точнее — период ее изменений намного больше периода рассматриваемых (суточных) колебаний температуры, обусловленных колебанием солнечной радиации, то конвективный перенос тепла не исказит сколько-нибудь существенно амплитуду и фазовый угол температурной волны в формуле (71), а повлияет лишь на характер вертикального изменения средней температуры.

Выясним теперь, насколько существенно отличается амплитуда температурной волны, определяемая формулами (72) и (73), от амплитуды температурных колебаний, вычисляемой в задаче Фурье—Шмидта по формуле (4). Тем самым, очевидно, мы установим величину погрешности при вычислении коэффициента турбулентной теплопроводности по формуле (6), погрешности, возникающей вследствие пренебрежения радиационным притоком тепла в толще морской воды.

В качестве исходных данных для расчетов примем следующие значения:

$$\vartheta_0=1^\circ\,\text{C};\quad K=10\ \text{см}^2/\text{сек.};$$

$$\delta=0{,}4\cdot10^{-2}\ \text{см}^{-1};\quad V_0=0{,}02\ \text{кал/см}^2\,\text{сек.},$$

соответствующие обычному порядку приведенных величин в морских условиях.

Вычислим по формулам (72) и (73) амплитуду суточных колебаний температуры на расстоянии $z=1$ м $=10^2$ см от поверхности моря, получим:

$$\vartheta_0^2 e^{-2mz} \approx 0{,}68;$$

$$2\vartheta_0 e^{-mz} \sqrt{e^{-2mz} - 2e^{-(m+\delta)z} \cos mz + e^{-2\delta z}} \times$$
$$\times \frac{V_1 \delta}{\sqrt{K^2\delta^4 + \omega^2}} \cos(mz + \gamma - \psi + \gamma_1) \approx 0{,}14;$$

$$\frac{V_1^2 \delta^2 \left(e^{-2mz} - 2e^{-(m+\delta)z} \cos mz + e^{-2\delta z}\right)}{K^2\delta^4 + \omega^2} \approx 0{,}01.$$

Следовательно,

$$A'_\vartheta = \sqrt{0{,}68 + 0{,}14 + 0{,}01} \approx 0{,}91^\circ \text{ C},$$

вместо величины

$$A'_\vartheta = \sqrt{0{,}68} \approx 0{,}82^\circ \text{ C},$$

соответствующей значению амплитуды на той же глубине по формуле (4) Фурье—Шмидта. Расхождение в амплитудах сравнительно невелико и составляет 10%.

Однако такое небольшое различие в амплитудах существенно сказывается на точности определения коэффициента теплопроводности по формуле (4). Действительно, если принять $A_\vartheta \approx \approx 0{,}91^\circ$ за фактически измеренную амплитуду суточных колебаний на глубине 1 м от поверхности моря, то

$$\frac{A_0}{A_1} = 1{,}10;$$

и по формуле (4)

$$K = \frac{\pi}{\tau} \left(\frac{z_2 - z_1}{\ln \dfrac{A_0}{A_1}} \right)^2 = \frac{36 \cdot 10^{-6} \cdot 10^4}{0{,}0009} \approx 40 \text{ см}^2/\text{сек}.$$

вместо величины

$$K = 10 \text{ см}^2/\text{сек}.$$

Расхождение между истинной величиной K и определенной по формуле Фурье—Шмидта уже очень велико.

Очевидно, что мы получим еще бо́льшую ошибку, если будем применять формулу Фурье—Шмидта к колебаниям температуры еще меньшего периода, локализующимся в пределах тонкого поверхностного слоя. Такие колебания, например, могут возникать в поверхностном слое моря в связи с солнечным затмением.

Приведенные примеры наглядно свидетельствуют о том, насколько разнообразны источники ошибок при вычислении коэффициента турбулентной температуропроводности в море по методу Фурье—Шмидта.

§ 5. Вертикальное распространение тепловых волн в море конечной глубины

В предыдущих параграфах исследовано вертикальное распространение тепловых волн в бесконечно глубоком море, причем в качестве одного из граничных условий мы принимали требование о затухании амплитуды температурных колебаний на бесконечном удалении от поверхности моря. В настоящем параграфе исследуется та же задача, но при условии затухания колебаний на конечной глубине $z=H$. Если эта глубина соответствует дну моря, где, следовательно, температура должна оставаться неизменной, то выполнение упомянутого условия возможно, строго говоря, лишь в случае, когда дно моря покрыто льдом. (Температура на дне постоянна и равна температуре замерзания морской воды данной солености). Такое условие не является фиктивным, и в природе известны случаи, когда дно моря в действительности покрыто льдом (например, некоторые районы моря Лаптевых).

Вот к такому-то «морю с ледяным дном» и будут, строго говоря, приурочены наши расчеты температурных волн, сначала при самом общем предположении об изменении коэффициента турбулентной теплопроводности, который может меняться в зависимости не только от глубины, но и от времени.

Дифференциальное уравнение теплообмена с учетом радиационного притока тепла, заданного в виде произвольной функции глубины и времени $f(z, t)$, будет иметь вид

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) + f(z, t), \tag{75}$$

где K — заданная величина коэффициента турбулентной температуропроводности, зависящая от глубины и времени.

Допустим, что функцию K можно представить в виде

$$K(z, t) = \nu(z)\psi(t). \tag{76}$$

Тогда, вводя новую переменную

$$t_1 = \int_0^t \psi(t)\,dt, \tag{77}$$

и преобразуя к ней уравнение (75), получим

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t_1} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu(z)\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) + F(z, t_1), \tag{78}$$

где

$$F(z, t_1) = \frac{f(z, t_1)}{\psi(t_1)}. \tag{79}$$

Для того чтобы найти решение (78), удовлетворяющее граничным условиям:

$$\text{при} \quad z = 0, \quad \vartheta = \theta(t_1), \tag{80}$$

где $\theta(t_1)$ — произвольно заданная функция времени,

$$\text{при} \quad z = H \quad \vartheta = \text{const} = 0, \tag{81}$$

сделаем естественное предположение, что вертикальное распределение температуры является непрерывной функцией глубины в интервале $0 \leqslant z \leqslant H$ и, кроме того, первая и вторая производные этой функции также непрерывны в указанном интервале. Сделав эти оговорки, применим метод разложения искомой функции в ряд Штурма—Лиувилля, представляющий, как известно, нормированную и ортогональную последовательность фундаментальных функций некоторого обыкновенного дифференциального уравнения с известными краевыми условиями. Обоснование подобного рода разложения функций излагается обычно как в теории линейных интегральных уравнений с симметрическим ядром (теорема Гильберта—Шмидта), так и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений в связи с краевой проблемой Штурма.

Итак, мы разлагаем $\vartheta(z, t_1)$ в интервале $0 \leqslant z \leqslant H$ в ряд вида

$$\vartheta(z, t_1) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \varphi_n(z), \tag{82}$$

в котором постоянные коэффициенты разложения A_n определяются формулой

$$A_n = \int_0^H \vartheta(\xi, t_1)\, \varphi_n(\xi)\, d\xi. \tag{83}$$

Функции φ_n являются фундаментальными функциями следующего обыкновенного дифференциального уравнения типа Штурма—Лиувилля, к которому сводится обычное уравнение теплопроводности:

$$\frac{d}{dz}\left[\nu(z) \frac{d\varphi}{dz}\right] + \lambda\varphi = 0, \tag{84}$$

где λ — некоторая положительная постоянная величина.

В соответствии с условиями (80) и (81), фундаментальные функции φ_n должны удовлетворять таким краевым условиям:

$$\text{при} \quad z=0 \quad \varphi(0)=0; \tag{85}$$

$$\text{при} \quad z=H \quad \varphi(H)=0. \tag{86}$$

Произвольный множитель, содержащийся в функциях $\varphi_n(z)$, определяется из условия нормирования этих функций, т. е.

$$\int_0^H [\varphi_n(z)]^2 dz = 1. \tag{87}$$

Легко показать, следуя обычным в таких случаях приемам, что функции φ_n образуют ортогональную последовательность, т. е. что

$$\int_0^H \varphi_r \varphi_l \, dz = 0 \quad (r \neq l). \tag{88}$$

Аналогично (82) разложим функцию

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu(z)\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right]$$

в ряд по фундаментальным функциям φ_n:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu(z)\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \int_0^H \frac{d}{d\xi}\left[\nu(\xi)\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right] \varphi_n(\xi)\, d\xi. \tag{89}$$

Интегрируя в правой части (89) дважды по частям, получим

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\nu(\xi)\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\right] \varphi_n(\xi)\, d\xi = \left[\nu(\xi)\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\varphi_n(\xi)\right]_0^H -$$

$$- \left[\nu(\xi)\vartheta(\xi, t_1)\frac{d\varphi_n}{d\xi}\right]_0^H + \int_0^H \vartheta(\xi, t_1)\frac{d}{d\xi}\left[\nu(\xi)\frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi}\right] d\xi.$$

Но, на основании условий (85) и (86),

$$\left[\nu(\xi)\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\varphi_n(\xi)\right]_0^H = 0.$$

С другой стороны, из условий (80) и (81)

$$\left[\nu(\xi)\vartheta(\xi, t_1)\frac{d\varphi_l}{d\xi}\right]_0^H = -\nu(0)\,\theta(t_1)\,\varphi_n'(0).$$

Следовательно,

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\nu(\xi)\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right]\varphi_n(\xi)\,d\xi = \nu(0)\,\theta(t_1)\,\varphi_n'(0) + $$

$$+\int_0^H \vartheta(\xi, t_1)\frac{d}{d\xi}\left[\nu(\xi)\frac{d\varphi_n}{d\xi}\right]d\xi.$$

Но, на основании (84),

$$\frac{d}{d\xi}\left[\nu(\xi)\frac{d\varphi_n}{d\xi}\right] = -\lambda_n\varphi_n(\xi),$$

поэтому, вспоминая также формулу (83), получим

$$\int_0^H \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\nu(\xi)\frac{\partial\vartheta}{\partial\xi}\right]\varphi_n(\xi)\,d\xi = \nu(0)\,\theta(t_1)\,\varphi_n'(0) - \lambda_n A_n,$$

или окончательно

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu(z)\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)\left[\nu(0)\,\theta(t_1)\,\varphi_n'(0) - \lambda_n A_n\right]. \qquad (90)$$

Если теперь допустить, что $F(z, t_1)$ [см. (79)] непрерывна в интервале $0 \leqslant z \leqslant H$ вместе со своей первой и второй производными, то $F(z, t_1)$ также можно разложить в ряд по фундаментальным функциям φ_n:

$$F(z, t_1) = \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(z)\int_0^H F(\xi, t_1)\,\varphi_n(\xi)\,d\xi. \qquad (91)$$

Подставляя (91), (90) и (82) в уравнение (78) и освобождаясь от знаков сумм [так как уравнение (78) должно выполняться при всяком n], получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно коэффициента A_n

$$\frac{dA_n}{dt_1} + \lambda_n A_n = \nu(0)\,\theta(t_1)\,\varphi_n'(0) + \int_0^H F(\xi, t_1)\,\varphi_n(\xi)\,d\xi. \qquad (92)$$

Для определения A_n из уравнения (92) полагаем, как обычно, что

$$A_n = XY; \qquad (93)$$

тогда (92) перепишется в виде

$$Y\frac{dX}{dt_1} + \left(\frac{dY}{dt_1} + \lambda_n Y\right)X =$$

$$= \nu(0)\,\theta(t_1)\,\varphi_n'(0) + \int_0^H F(\xi, t_1)\,\varphi_n(\xi)\,d\xi.$$

Определим Y таким образом, чтобы

$$\frac{dY}{dt_1} + \lambda_n Y = 0,$$

отсюда интегрируя в пределах от 0 до t_1 и полагая $(Y)_{t_1=0} = 1$, получим

$$Y = e^{-\lambda_n t_1}. \tag{94}$$

Следовательно, X определится из уравнения

$$\frac{dX}{dt_1} = e^{\lambda_n t_1}\left[\nu(0)\,\theta(t_1)\,\varphi_n'(0)\right] + \int_0^H F(\xi,\ t_1)\,\varphi_n(\xi)\,d\xi. \tag{95}$$

Если помимо граничных условий (80) и (81) мы имеем заданное в начальный момент времени $t_1 = t = 0$ вертикальное распределение температуры

$$\text{при}\quad t_1 = t = 0\quad \vartheta = \beta(z), \tag{96}$$

то, вновь интегрируя (95) в пределах от 0 до t_1 и полагая

$$\text{при}\quad t_1 = 0\quad X = A_0 = \int_0^H \beta(z)\,\varphi_n(z)\,dz,$$

получим

$$X_{t_1} = \int_0^H \beta(z)\,\varphi_n(z)\,dz + \int_0^{t_1}\left[\nu(0)\,\theta(\tau_1)\,\varphi_n'(0) + \right.$$

$$\left. + \int_0^H F(z,\ \tau_1)\,\varphi_n(z)\,dz\right] e^{\lambda_n \tau_1}\,d\tau_1.$$

Следовательно,

$$A_n = e^{-\lambda_n t_1}\int_0^H \beta(z)\,\varphi_n(z)\,dz + e^{-\lambda_n t_1}\int_0^{t_1}\left[\nu(0)\,\theta(\tau_1)\,\varphi_n'(0) + \right.$$

$$\left. + \int_0^H F(z,\ \tau_1)\,\varphi_n(z)\,dz\right] e^{\lambda_n \tau_1}\,d\tau_1. \tag{97}$$

Поскольку интегрирование в последнем члене формулы (97) осуществляется по параметру τ_1, то формулу (97) можно представить несколько иначе:

$$A_n = e^{-\lambda_n t_1}\int_0^H \beta(z)\,\varphi_n(z)\,dz + \int_0^{t_1}\left[\nu(0)\,\theta(\tau_1)\,\varphi_n'(0) + \right.$$

$$\left. + \int_0^H F(z,\ \tau_1)\,\varphi_n(z)\,dz\right] e^{-\lambda_n (t_1-\tau_1)}\,d\tau_1. \tag{97'}$$

Вспоминая же формулу (77) и возвращаясь к старой переменной t, мы вместо (97′) получим

$$A_n = e^{-\lambda_n \int\limits_0^t \psi(\tau)\,d\tau} \int\limits_0^H \beta(z)\varphi_n(z)\,dz + \int\limits_0^{\int\limits_0^t \psi(\tau)\,d\tau} \left[\nu(0)\theta(\tau)\varphi_n'(0) + \int\limits_0^H F(z,\tau)\varphi_n(z)\,dz\right] e^{-\lambda_n \int\limits_\tau^t \psi(\xi)\,d\xi}\,d\tau. \qquad (97'')$$

Следовательно, формальное решение нашей задачи в соответствии с (82) в окончательном виде запишется так:

$$\vartheta(z,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) \left\{ e^{-\lambda_n \int\limits_0^t \psi(\tau)\,d\tau} \int\limits_0^H \beta(z)\varphi_n(z)\,dz + \int\limits_0^{\int\limits_0^t \psi(\tau)\,d\tau} \left[\nu(0)\theta(\tau)\varphi_n'(0) + \int\limits_0^H F(z,\tau)\varphi_n(z)\,dz\right] e^{-\lambda_n \int\limits_\tau^t \psi(\xi)\,d\xi}\,d\tau. \right. \qquad (98)$$

Главные трудности при нахождении численных результатов по формуле (98) связаны с определением фундаментальных функций $\varphi_n(z)$ уравнения (84) и характеристических чисел λ_n. При этом очевидно, что лишь для очень немногих частных видов функции $\nu(z)$ решение может быть проведено аналитически до конца; в остальных же случаях, особенно когда функция $\nu(z)$, рисующая вертикальное изменение коэффициента турбулентной температуропроводности, задана графически или таблично, не только решить, но и составить трансцендентное уравнение, определяющее характеристические числа λ, невозможно, и, следовательно, надо прибегать к приближенным способам, указанным, например, в известном курсе приближенных вычислений акад. А. Н. Крылова.

Для того чтобы выяснить, насколько отличается режим температурных колебаний в море конечной глубины от колебаний температуры в море бесконечно глубоком, соответствующих задаче Фурье—Шмидта, рассмотрим частный случай формулы (98), полагая в ней коэффициент турбулентной теплопроводности не зависящим от глубины и времени и пренебрегая радиационным притоком тепла. Так как нас будут интересовать установившиеся колебания температуры, то начальным распределением температуры, которое характеризуется первым слагаемым под знаком суммы в формуле (98), также можно будет пренебречь. Если в качестве $\theta(\tau)$ мы примем простую периодическую функцию времени

$$\theta(\tau)=\theta_0 \cos \omega t,$$

где $\omega=\frac{2\pi}{T}$, а T — период колебания, то, помня сделанные оговорки, вместо формулы (98) получим

$$\vartheta(z,\ t)=\theta_0 \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z) K \varphi_n'(0) \int_0^t \cos \omega\tau e^{-\lambda_n (t-\tau)}\, d\tau, \tag{99}$$

где $K=\text{const}$ — постоянная величина коэффициента теплопроводности.

Для определения фундаментальных функций $\varphi_n(z)$ служит уравнение (84). Последнее в случае $\nu(z)=K=\text{const}$ принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2}+\frac{\lambda}{K}\varphi=0.$$

Интеграл этого уравнения хорошо известен, а именно:

$$\varphi(z)=C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{K}}\, z\right)+C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{K}}\, z\right),$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы интегрирования.

Подчиняя последнее выражение условию (85), увидим, что $C_1=0$. С другой стороны, из условия (86) получим следующее трансцендентное уравнение для определения характеристических чисел λ:

$$\sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{K}}\, H\right)=0,$$

откуда

$$\lambda_n=\frac{n^2\pi^2 K}{H^2} \quad \ldots \ (n=1,\ 2,\ 3\ \ldots).$$

Определяя постоянную C_2 из условия нормирования (87) фундаментальных функций, получим

$$C_2=\sqrt{\frac{2}{H}},$$

и, следовательно, нормированная последовательность фундаментальных функций в рассматриваемом частном случае запишется в виде

$$\varphi_n(z)=\sqrt{\frac{2}{H}} \sin\frac{n\pi z}{H}, \tag{100}$$

откуда

$$\varphi'_n(0) = \sqrt{\frac{2}{H}}\,\frac{n\pi}{H}. \tag{101}$$

Подставляя (100) и (101) в формулу (99), получим

$$\vartheta(z, t) = \frac{2\theta_0\pi K}{H^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{n\pi z}{H}\int_0^t \cos\omega\tau e^{-\frac{n^2\pi^2K}{H^2}(t-\tau)}\,d\tau. \tag{102}$$

Входящий в формулу (102) интеграл легко вычислить. Обозначая для краткости

$$\frac{n^2\pi^2K}{H^2} = \eta,$$

получим

$$\int_0^t \cos\omega\tau e^{-\eta(t-\tau)}\,d\tau = \frac{\eta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\eta^2+\omega^2} - \frac{\eta e^{-\eta t}}{\eta^2+\omega^2}.$$

Ограничиваясь в последнем выражении только чисто периодическим членом, которым будет, очевидно, определяться интеграл по истечении достаточно большого промежутка времени (установившиеся колебания), перепишем формулу (102) в следующем виде:

$$\vartheta(z, t) = \frac{2\theta_0\pi K}{H^2}\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{n\pi z}{H}\,\frac{\eta\cos\omega t + \omega\sin\omega t}{\eta^2+\omega^2},$$

или

$$\vartheta(z, t) = \cos\omega t\,\frac{2\theta_0\pi K}{H^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\eta}{\eta^2+\omega^2}\sin\frac{n\pi z}{H} +$$

$$+\sin\omega t\,\frac{2\theta_0\pi K}{H^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\omega n}{\eta^2+\omega^2}\sin\frac{n\pi z}{H}. \tag{103}$$

Последнее выражение можно упростить, вводя обозначения

$$\xi(z) \equiv \frac{2\pi K}{H^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\eta}{\eta^2+\omega^2}\sin\frac{n\pi z}{H}, \tag{104}$$

$$\zeta(z) \equiv \frac{2\pi K}{H^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\omega}{\eta^2+\omega^2}\sin\frac{n\pi z}{H}. \tag{105}$$

Тогда

$$\vartheta(z,\ t) = \theta_0 \left[\xi(z) \cos \omega t + \zeta(z) \sin \omega t\right], \tag{106}$$

или окончательно

$$\vartheta(z,\ t) = \theta_0 \sqrt{\xi^2(z) + \zeta^2(z)} \cos(\omega t - \varphi), \tag{107}$$

где

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\zeta(z)}{\xi(z)}. \tag{108}$$

Из формулы (107) следует, что амплитуда температурной волны изменяется с глубиной по закону

$$A_\vartheta = \theta_0 \sqrt{\xi^2(z) + \zeta^2(z)}. \tag{109}$$

Для практических расчетов выражения (104) и (105) удобнее преобразовать к виду:

$$\xi(z) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1 + \frac{\chi}{n^4}\right)} \sin \frac{n\pi z}{H}; \tag{104'}$$

$$\zeta(z) = \frac{2H^2\omega}{\pi^3 K} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3\left(1 + \frac{\chi}{n^4}\right)} \sin \frac{n\pi z}{H}, \tag{105'}$$

где обозначено

$$\chi = \frac{\omega^2 H^4}{\pi^4 K^2}. \tag{110}$$

Очевидно, что ряд (105′) сходится значительно быстрее ряда (104′).

В качестве примера мы рассчитали изменение амплитуды годовых колебаний температуры по формулам (109), (104′) и (105′), принимая следующие значения:

$\theta_0 = 10{,}9°$; $H = 20$ м $= 2 \cdot 10^3$ см; $K = 20$ см^2/сек., $T = 1$ году.

Для расчета величины $\xi(z)$ пришлось взять 23 члена суммы (104′), а для расчета $\zeta(z)$ представилось возможным ограничиться пятью первыми слагаемыми суммы (105′). Результаты вычислений сведены в табл. 2, причем в последнем столбце этой таблицы приведены значения A'_ϑ, соответствующие изменению амплитуды колебаний при тех же значениях K и T, но в море бесконечно большой глубины [формула (4) Фурье—Шмидта].

Таблица 2

z	$\frac{z}{H}$	$\xi^2(z)$	$\zeta^2(z)$	A_ϑ	A'_ϑ
0	0	—	—	10,9	10,9
5	0,25	0,68	0,00	9,0	10,5
10	0,50	0,36	0,00	6,5	10,1
15	0,75	0,15	0,00	4,2	
20	1,00	0,00	0,00	0,00	9,5

Для наглядности сопоставления вертикальное изменение амплитуд, рассчитанное по формулам (109) и (4), изображено в виде кривых на рис. 8. Как видим, для годовых колебаний температуры при значении К=20 CGS море с глубиной H=20 м отнюдь нельзя считать «бесконечно глубоким», ибо разница в амплитудах A_ϑ (сплошная кривая) и A'_ϑ (пунктирная кривая) еще очень велика.

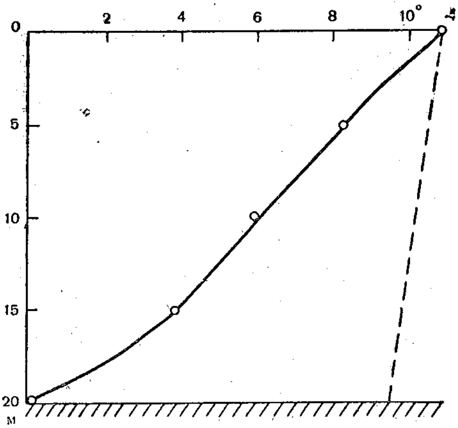

Рис. 8.

Очевидно, что по формулам (109), (104′) и (105′) можно также рассчитать изменение амплитуды колебаний температуры в толще морского (или речного) льда При этом следует заменить величину K коэффициентом молекулярной температуропроводности льда, считая этот коэффициент приближенно постоянным.

§ 6. Определение изменения коэффициента теплопроводности в море с течением времени

В предыдущем параграфе мы указали формальное решение (98) уравнения притока тепла в предположении, что коэффициент турбулентной теплопроводности является заданной функцией не только глубины, но и времени. Это обстоятельство, как увидим позднее, играет важную роль в вертикальном распространении тепла в море и тепловых волн, в частности. Изменение во времени коэффициента турбулентной теплопроводности в море обусловлено не только колебанием в скорости «основного» потока (течения), но также и сезонными изменениями вертикального градиента плотности, характеризующего, в известном смысле, вертикальную устойчивость слоев в море.

Имея в виду это последнее обстоятельство, представляет интерес определить возможные сезонные изменения величины коэффициента турбулентной теплопроводности на каком-нибудь фиксированном уровне в море, пренебрегая в первом приближении вертикальным изменением интенсивности турбулентного обмена (полагая K постоянным в пределах небольших интервалов глубины).

Для этой цели воспользуемся сначала первым приближением метода и определим изменения коэффициента теплопроводности, основываясь на уравнении теплопроводности (2), предполагая, что величины производных температуры по глубине и времени определены заранее путем наблюдений.

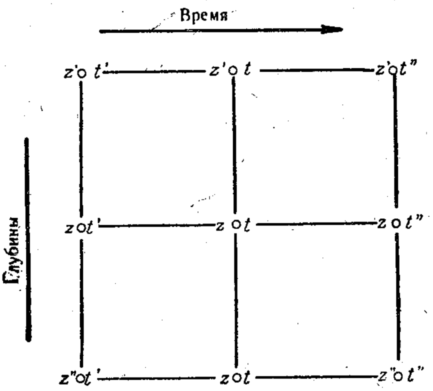

Рис. 9.

Для практических расчетов уравнение (2) удобнее представить в форме конечных разностей, ограничиваясь первыми членами (Δ, Δ^2) разложения первых и вторых производных по конечным разностям, а именно:

$$\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} = K_z \frac{\Delta^2\vartheta}{\Delta z^2}. \tag{111}$$

Схема расчета величины K_z наглядно поясняется рис. 9.

Обозначая через $\vartheta_{z,\,t}$ температуру на глубине z в момент времени t, применительно к чему мы желаем определить значение коэффициента турбулентной теплопроводности, вычислим $\left(\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}\right)_{z,\,t}$ по формуле

$$\left(\frac{\Delta\vartheta}{\Delta t}\right)_{z,\,t} = \frac{\vartheta_{z,\,t''} - \vartheta_{z,\,t'}}{t'' - t'}. \tag{112}$$

В свою очередь величина $\left(\frac{\Delta^2\vartheta}{\Delta z^2}\right)_{z,\,t}$, приуроченная к той же глубине и моменту времени, определится по формуле

$$\frac{\Delta^2\vartheta}{\Delta z^2} = \frac{\vartheta_{z'',\,t} + \vartheta_{z',\,t} - 2\vartheta_{z,\,t}}{h^2}, \tag{113}$$

где $h = z - z' = z'' - z$ (см. рис. 9).

Подставляя (113) и (112) в уравнение (111), окончательно получим

$$K_{z,t} = \frac{\vartheta_{z,\,t''} - \vartheta_{z,\,t'}}{t'' - t'} \cdot \frac{h^2}{\vartheta_{z'',\,t} + \vartheta_{z',\,t} - 2\vartheta_{z,\,t}}\,. \tag{114}$$

Одно из преимуществ изложенного метода по сравнению с методом определения K, предложенным В. Шмидтом, заключается в том, что вычисление коэффициента теплопроводности по формуле (114) совершенно свободно от тех очень жестких ограничений, какие налагаются на формулы (6) и (7) специфическими условиями задачи Фурье в тепловых волнах в односторонне ограниченном теле.

В силу того, что формула (114) не связана какими-либо граничными или начальными условиями, применение ее на практике позволяет вычислить значение K в случаях нестационарных процессов турбулентной теплопроводности вообще (а не только чисто периодических), протекающих в естественных условиях того или иного моря любой глубины, и проследить за изменением коэффициента турбулентной теплопроводности с течением времени. Ниже приведены примеры вычисления K по формуле (114) по данным измерений температуры в Каспийском, Баренцевом и Саргассовом морях.

Для вычисления K_z по формуле (114) применительно к Каспийскому морю мы воспользовались наблюдениями, осуществленными нами в 1936—1937 гг. в южной части этого моря.

В табл. 3 указаны значения температуры (с точностью до 0,1°) для каждого месяца и для глубин 0, 50 и 100 м от поверхности Каспийского моря.

Таблица 3

Южная часть Каспийского моря, 1936—1937 г.

Глубина, м	Месяцы					
	IX	X	XI	XII	I	II
0	25,0	22,0	19,0	16,3	13,4	10,5
50	10,0	11,0	11,8	11,7	10,6	9,5
100	7,0	6,5	6,0	6,1	6,6	7,2
$(\Delta\vartheta)_t$		1,8	0,7	—1,2	—2,2	—2,2
$(\Delta^2\vartheta)_z$		6,5	1,4	—1,0	—1,2	—1,3
K_z см²/сек.		1,3	2,4	5,8	10,6	8,2

Глубина, м	Месяцы					
	III	IV	V	VI	VII	VIII
0	7,9	10,0	13,5	17,5	21,4	25,0
50	8,4	7,9	8,3	8,8	9,2	9,7
100	7,6	7,8	7,5	7,2	6,8	6,3
$(\Delta\vartheta)_t$	−1,6	−0,1	0,9	0,9	0,9	
$(\Delta^2\vartheta)_z$	−1,3	2,0	4,4	7,1	−0,2	
K_z см²/сек.	6,8	−0,2	0,9	0,7	−2,2	

Кроме того, в этой таблице указаны величины первых разностей температуры по времени $(\Delta\vartheta)_t=\vartheta_{z,t''}-\vartheta_{z,t'}$ и вторых разностей температуры по глубине $(\Delta^2\vartheta)_z=\vartheta_{z'',t}+\vartheta_{z',t}-2\vartheta_{z,t}$, фигурирующие в формуле (114). Величины $(\Delta\vartheta)_t$ и $(\Delta^2\vartheta)_z$ соответствуют глубине 50 м, для которой вычисляется величина коэффициента турбулентной температуропроводности.

В табл. 4 приведены аналогичные данные для одной и той же точки в Баренцевом море по наблюдениям в 1931 г. Эти данные использовал в свое время Н. Н. Зубов для вычисления коэффициента турбулентной температуропроводности по методу Фурье—Шмидта [формула (7)] с помощью построенного им, упоминавшегося в § 1, графика.

Таблица 4

Баренцево море, 1931 г. $\varphi=71°$; $\lambda=33°\ 30'$ (Кольский меридиан)

Глубина, м	Месяцы									
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
0	4,4	3,8	3,4	3,2	3,3	4,4	6,2	7,7	8,0	7,0
25	4,8	4,2	3,7	3,3	3,3	4,0	5,2	6,8	7,5	6,8
50	4,8	4,2	3,7	3,3	3,3	3,9	4,5	6,3	7,4	6,3
$(\Delta\vartheta)_t$		−1,1	−0,9	−0,4	0,7	1,9	2,8	2,3	0	
$(\Delta^2\vartheta)_z$		−0,4	−0,3	−0,1	0	0,3	0,3	0,4	0,2	
K_z см²/сек.		3,3	3,6	4,8	?	6,3	9,3	6,0	0	

Указанные в табл. 4 значения $(\Delta\vartheta)_t$ и $(\Delta^2\vartheta)_z$ соответствуют глубине 25 м.

Наконец, в табл. 5 сведены значения температур на глубинах 0, 50 и 100 м и величины $(\Delta\vartheta)_t$ и $(\Delta^2\vartheta)_z$ на глубине 50 м по данным наблюдений в Саргассовом море.

Принимая во внимание интервал глубин $h=50$ м и интервал времени $t''-t'=2$ мес., можно записать формулу (114) для

Таблица 5

Саргассово море, 1933 г.

Глубина, м	Месяцы								
	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
0	19,7	20,4	21,7	24,2	27,3	28,0	26,8	23,9	21,5
50	19,7	19,7	19,9	20,6	21,6	22,4	22,5	22,4	21,5
100	19,3	19,0	18,9	19,0	19,4	19,6	20,2	20,6	20,9
$(\Delta\vartheta)_t$		0,2	0,9	1,7	1,8	0,9	0,0	—1,0	
$(\Delta^2\vartheta)_z$		0	0,8	2,0	3,5	2,8	2,0	—0,3	
K_z см²/сек.		?	5,3	4,1	2,4	1,5	0?	15,8	

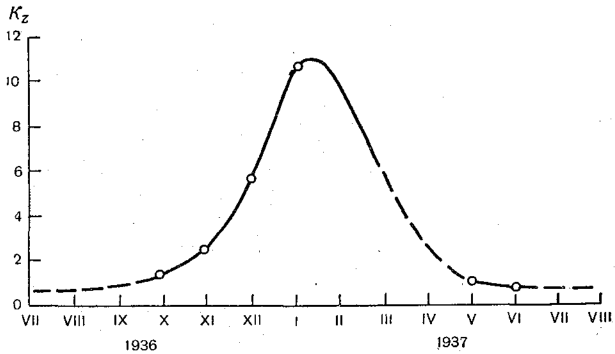

Рис. 10. Сезонные изменения коэффициента турбулентной температуропроводности в Каспийском море.

вычисления K_z в единицах CGS по данным табл. 3 и 5 в таком простом виде:

$$K_{z,\,t} = 4{,}8\,\frac{(\Delta\vartheta)_t}{(\Delta^2\vartheta)_z}\,, \tag{115}$$

а для вычисления K_z по данным табл. 4, когда $h=25$ м, $t''-t'=2$ мес., в виде

$$K_{z,\,t} = 1{,}2\,\frac{(\Delta\vartheta)_t}{(\Delta^2\vartheta)_z}\,. \tag{116}$$

Значения $K_{z,\,t}$, определенные по этим формулам и соответствующие каждому месяцу, указаны в нижней строке табл. 3, 4 и 5.

На рис. 10, 11 и 12 изображено в виде кривых изменение коэффициента турбулентной температуропроводности соответственно в Каспийском, Баренцевом и Саргассовом морях, при этом мы не принимали во внимание заведомо сомнительные значения K, указанные в табл. 3, 4 и 5, и в таких местах указывали предположительный ход кривой пунктиром. Детальному обсуждению достоверности полученных значений коэффициента температуропроводности будет посвящено содержание следующего параграфа.

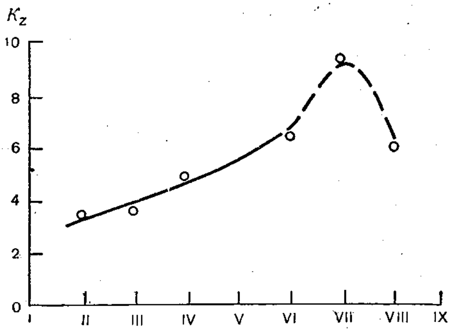

Рис. 11. Сезонные изменения коэффициента турбулентной температуропроводности в Баренцевом море.

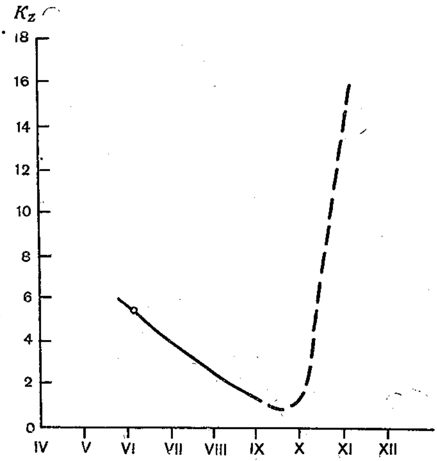

Рис. 12. Сезонные изменения коэффициента турбулентной температуропроводности в Саргассовом море.

Необходимо помнить, что определенные таким косвенным путем величины K представляют собой некие условные коэффициенты температуропроводности, отражающие суммарный эффект турбулентности (в самом широком понимании слова) и горизонтальной конвекции тепла посредством морских течений. Действительно, при наличии переноса тепла морскими течениями уравнения (2) и (111) должны дополниться конвективными членами. Пренебрегая же в первом приближении этими членами, мы, разумеется, допускаем некоторую принципиальную погрешность. Эту погрешность мы устраним во втором приближении метода, излагаемом в одном из следующих параграфов.

На основании кривой изменения коэффициента турбулентной температуропроводности на глубине 25 м в Баренцевом море (рис. 11) нетрудно определить среднюю величину этого коэффициента в интервале от февраля до августа. Курьезно, что эта средняя величина

$$K = 6{,}5 \text{ см}^2/\text{сек}.$$

почти не отличается от значения коэффициента температуропроводности

$$K = 6{,}3 \text{ см}^2/\text{сек},$$

приуроченного к слою 0—75 м и вычисленного Н. Н. Зубовым по методу Фурье—Шмидта. Величина K_z, достигающая в Баренцевом море максимального значения 9,3 см²/сек. в июле (рис. 11), немногим отличается от максимального значения $K = 10{,}6$ см²/сек. в Каспийском море; это значение коэффициента достигается там примерно в середине января (рис. 10).

К сожалению, по кривой изменения K_z в Саргассовом море (рис. 12) экстремальные значения коэффициента турбулентной температуропроводности не могут быть определены сколько-нибудь надежно.

Тем не менее, как это видно из табл. 3, 4 и 5, порядок величин коэффициента турбулентной температуропроводности в Баренцевом, Каспийском и Саргассовом морях оказался примерно одним и тем же, и определенные указанным путем значения K не выходят за пределы обычного порядка упомянутого коэффициента по данным многочисленных его определений самыми разнообразными косвенными приемами.

В заключение настоящего параграфа любопытно сравнить указанные выше кривые изменения коэффициента турбулентной температуропроводности с годовым изменением K в области Бискайского залива, определенным Фьельдстадом (l. c.) путем кропотливого подбора функциональной зависимости $K(t)$, на основании которой ему удалось добиться наилучшего согласия результатов интегрирования уравнения теплопроводности с данными наблюдений, обработанных Хелланд-Хансеном.

Зависимость K от t, подобранная Фьельдстадом, выражается функцией вида

$$K = K_0 \{ 1 + 0{,}7 \cos [0{,}52t - 1{,}17 - 0{,}7 \sin (\omega t - 67°)] \}.$$

В указанном выражении ω — угловая частота колебаний годового периода, а потому $\omega = \frac{2\pi}{12} = 30°$. Амплитуда колебаний, очевидно, равна $0{,}7K_0$, а максимальное значение $K_m = 1{,}7K_0$, как указывает Фьельдстад, не превышает величины 20 см²/сек.

Из приведенной формулы следует, что коэффициент турбулентной температуропроводности в Бискайском заливе очень незначительно меняется на протяжении всей зимы, обладая в это время максимальным значением. Резкое у м е н ь ш е н и е интенсивности турбулентного теплообмена намечается лишь с середины июня, и минимального значения коэффициент турбулентной температуропроводности достигает уже в августе, после чего начинается вновь резкое повышение интенсивности турбулентного перемешивания.

Таким образом, годовой ход интенсивности перемешивания в северной части Атлантического океана (Бискайский район) по характеру своему прямо противоположен сезонным изменениям коэффициента турбулентной температуропроводности в Каспийском море, где (как это видно из рис. 10) на протяжении длительного периода с мая по октябрь коэффициент турбулентной температуропроводности меняется в очень незначительных пределах, обладая минимальным значением. Напротив, максимальное значение K, которого этот коэффициент достигает в Каспийском море примерно в середине января, удерживается, по-видимому, не более месяца, после чего начинается довольно резкое уменьшение интенсивности турбулентного теплообмена. Отмеченное различие в годовом ходе интенсивности перемешивания в Каспийском море и Бискайском заливе, очевидно, обусловлено различным их географическим положением. В таком южном море, как Каспийское, в течение года удерживается преимущественно устойчивая вертикальная стратификация, не нарушаемая ветровым перемешиванием и тормозящая процессы вертикального теплообмена путем турбулентности. Напротив, в северной части Атлантического океана в течение зимы преобладают процессы вертикальной конвекции, связанные с охлаждением поверхностного слоя воды и создающие на протяжении многих месяцев однородное распределение температуры по вертикали. Пожалуй, еще большее значение имеют там процессы вертикального перемешивания, обусловленные штормовыми ветрами, как известно, преобладающими в Бискайском заливе.

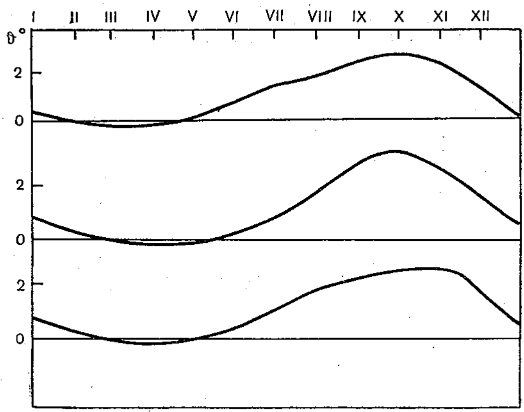

Рис. 13.

Насколько хорошо удовлетворяет указанная выше зависимость $K(t)$, подобранная Фьельдстадом, реальным условиям в Бискайском заливе, видно из рис. 13, в верхней части которого изображена кривая годового хода температуры на глубине 50 м. Ниже этой кривой изображен годовой ход температуры, вычисленный Фьельдстадом без учета сезонных изменений интенсивности перемешивания, и, наконец, в нижней части рисунка изображена кривая годового хода температуры, построенная с учетом изменения $K(t)$ по указанному выше закону. Прекрасное согласие фактического годового хода температуры и вычисленного в последнем случае показывает, какое в действительности большое значение имеют сезонные изменения интенсивности перемешивания в годовых колебаниях температуры на морских глубинах.

§ 7. Анализ ошибок при вычислении сезонных изменений коэффициента турбулентной температуропроводности

В настоящем параграфе мы остановимся на анализе ошибок, возникающих при вычислении коэффициента турбулентной температуропроводности. Этот анализ особенно просто осуществить применительно к методу вычисления K_z, изложенному выше, что составляет также одно из ценных преимуществ упомянутого способа.

Мы не будем рассматривать ошибки вследствие приближенного вычисления производных, фигурирующих в исходном уравнении (2). Эти погрешности в равной степени свойственны любым другим методам, основанным на дифференциальных зависимостях между входящими в эти зависимости океанологическими величинами. Поэтому они не имеют специального интереса. Мы не рассматриваем также принципиальных погрешностей, связанных с пренебрежением в уравнениях (2) и (111) адвективными членами.

Для оценки относительной ошибки, возникающей при вычислении K_z из уравнения (112), запишем его условно в виде

$$\frac{\alpha}{t} = K_z \frac{\beta}{z^2}, \tag{117}$$

где $\alpha = (\Delta\vartheta)_t$ — первая разность температуры по времени $t = \Delta t$; $\beta = (\Delta^2\vartheta)_z$ — вторая разность температуры по глубине $z^2 = \Delta z^2$.

Логарифмируя обе части (117) и производя затем почленное дифференцирование, получим следующее выражение для относительной ошибки коэффициента температуропроводности:

$$\frac{dK}{K} = \frac{d\alpha}{\alpha} - \frac{dt}{t} + \frac{2dz}{z} - \frac{d\beta}{\beta}. \tag{118}$$

Поскольку нас интересует максимальная величина относительной ошибки $\frac{dK}{K}$, примем во внимание лишь абсолютные величины относительных ошибок, фигурирующих в правой части формулы (118).

Следовательно,

$$\left|\frac{dK}{K}\right|=\left|\frac{d\alpha}{\alpha}\right|+\left|\frac{dt}{t}\right|+\left|\frac{2dz}{z}\right|+\left|\frac{d\beta}{\beta}\right|.$$

Так как относительная ошибка в отсчете времени при интервале $t=2$ мес. ничтожна, то этой ошибкой мы пренебрежем. То же можно сказать и об относительной ошибке при измерении глубины, за исключением, разумеется, тех случаев, когда угол отклонения троса от вертикали достигает значительной величины. Эти случаи, однако, подлежат специальному рассмотрению.

Принимая во внимание сделанные оговорки, можно записать формулу для определения относительной ошибки K в виде

$$\left|\frac{dK}{K}\right|=\left|\frac{d\alpha}{\alpha}\right|+\left|\frac{d\beta}{\beta}\right|. \qquad (119)$$

Точность, с какой указаны значения температуры в табл. 1 и 2, равна 0,1° С. В таком случае ошибка первой разности температуры будет $\alpha=0{,}2°$, а ошибка второй разности будет $\beta=$ $=0{,}4°$.

Итак, окончательно получим

$$\left|\frac{dK}{K}\right|=\frac{0{,}2}{|\alpha|}+\frac{0{,}4}{|\beta|}. \qquad (120)$$

Имея в виду, что величины α и β указаны в табл. 1 и 2, мы подсчитали, для примера, по формуле (120) относительные ошибки при вычислении коэффициентов турбулентной температуропроводности по данным наблюдений в Каспийском и Баренцевом морях. Результаты наших вычислений сведены в табл. 6 и 7. В средней строке каждой таблицы указаны величины K_z, вычисленные по формулам (115) и (116). Эти значения, как уже упоминалось, были положены в основу построения кривых изменения K_z на рис. 10 и 11. Так как коэффициент температуропроводности есть величина существенно положительная, то отрицательные значения K_z, встречающиеся, например, в табл. 3, не принимались во внимание. Наиболее вероятные значения K_z в таких случаях находились путем графической интерполяции (пунктирные части кривой на рис. 10).

Таблица 6

Максимальные относительные ошибки $\left|\frac{dK}{K}\right|$ в % (Каспийское море)

Месяцы . . .	X	XI	XII	I	II	III	IV	V	VI	VII
K_z см²/сек. .	1,3	2,4	5,8	10,6	8,2	6,8	—0,2	0,9	0,7	—2,2
$\left\|\frac{dK}{K}\right\|$ % . . .	17	58	57	39	39	43	220	31	22	222

Таблица 7

Максимальные относительные ошибки $\left|\frac{dK}{K}\right|$ в % (Баренцево море)

Месяцы	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
K_z см²/сек.	3,3	3,6	4,8	?	6,3	9,3	6,0	0
$\left\|\frac{dK}{K}\right\|$ %	118	155	450	∞	144	141	108	∞

Как видим, относительные ошибки при вычислении K_z по данным наблюдений в Каспийском и Баренцевом морях не только значительны, но и весьма различны.

Как и следовало ожидать, отрицательные значения K_z, полученные для апреля и июля в Каспийском море, определены с наименьшей точностью. Относительная ошибка при вычислении K_z в этих двух случаях достигает громадной величины 220—222%. К сожалению, и остальные значения K_z в этой таблице определены не всегда достаточно надежно.

Еще меньшей достоверностью обладают значения K_z, указанные в табл. 7. Наименьшая относительная ошибка K_z, по данным этой таблицы, составляет 108% (!).

Мы убеждаемся в том, насколько могут быть обманчивыми предварительные заключения о надежности вычисления коэффициента турбулентной температуропроводности в море, основанные на обычном в таких случаях сопоставлении порядка величин этих коэффициентов.

Действительно, вопреки тому, что порядок величины оказался в обоих случаях одним и тем же и, более того, совпал с порядком этого коэффициента по данным других многочисленых определений, значения K, вычисленные для Баренцева моря, оказались, против всяких ожиданий, совершенно недостоверными. Полученные результаты заставляют с большой осторожностью сравнивать величины коэффициента турбулентной температуропроводности в море, полученные не только различными косвенными методами, но даже, как мы сейчас убедились, путем одного и того же косвенного приема.

К сожалению, никакой количественной оценки надежности тех многочисленных вычислений K в море, которые осуществлялись различными исследователями, до настоящего времени не делалось. Это обстоятельство в очень сильной степени затрудняет суждения о достоверном характере изменения K_z в зависимости от глубины и времени.

Из формулы (120) и табл. 3 и 4 нетрудно установить причины таких больших ошибок в приведенных примерах вычисления K для Каспийского и Баренцева морей. Эти причины, очевидно, кроются в том, что $\alpha=(\Delta\vartheta)_t$ и главным образом $\beta=(\Delta^2\vartheta)_z$ в табл. 3 невелики и особенно малы в Баренцевом море, как следует из табл. 4.

Такое различие величины β для Каспийского и Баренцева морей обусловлено, разумеется, географическим положением этих водоемов.

Понятно поэтому, что при всех прочих равных условиях наиболее надежные результаты вычисления K по формуле (111) мы получим, применяя эту формулу к южным морям, где температурный режим более контрастен, чем в морях полярных. Кроме того, из тех же соображений, можно заранее утверждать, что лучшие результаты мы получим, применяя формулу (111) к поверхностным, чем к глубинным слоям моря.

§ 8. Метод вычисления коэффициента турбулентного обмена во втором приближении

В предыдущих параграфах, при вычислении коэффициента турбулентной температуропроводности, мы пренебрегали эффектом горизонтальной конвекции.

Допускаемая вследствие этого принципиальная погрешность не дает возможности определить истинную величину K_z при наличии течения.

В этом параграфе мы излагаем сущность метода второго приближения в целях устранения отмеченной погрешности.

Если мы будем пренебрегать горизонтальным перемешиванием, то при наличии течения известного нам направления, с которым мы совместим ось x, уравнение теплопроводности, в отличие от (2), запишется в виде

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=K\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}-u_x\frac{\partial\vartheta}{\partial x}. \qquad (121)$$

Очевидно, для того чтобы исключить неизвестную величину скорости течения u_x, к уравнению (121) следует присоединить уравнение

$$\frac{\partial s}{\partial t}=K\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}-u_x\frac{\partial s}{\partial x}, \qquad (122)$$

где через s обозначена соленость морской воды. В уравнениях (121) и (122) величина K — одна и та же, так как нет в настоящее время оснований предполагать, что между числовыми значениями коэффициента турбулентной теплопроводности и диффузии существует сколько-нибудь существенная разница.

Записывая (121) и (122) в форме конечных разностей

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta\vartheta}{\Delta t} &= K\frac{\Delta^2\vartheta}{\Delta z^2} - u_x\frac{\Delta\vartheta}{\Delta x}; \\ \frac{\Delta s}{\Delta t} &= K\frac{\Delta^2 s}{\Delta z^2} - u_x\frac{\Delta s}{\Delta x} \end{aligned}\right\} \tag{121'}$$

и исключая u_x, получим

$$K = \frac{\dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta t}\dfrac{\Delta s}{\Delta x} - \dfrac{\Delta s}{\Delta t}\dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta x}}{\dfrac{\Delta^2\vartheta}{\Delta z^2}\dfrac{\Delta s}{\Delta x} - \dfrac{\Delta^2 s}{\Delta z^2}\dfrac{\Delta\vartheta}{\Delta x}}. \tag{123}$$

Обозначая

$$\left.\begin{aligned} \frac{\Delta s}{\Delta x} &= \frac{s_{z,t,l''} - s_{z,t,l'}}{l'' - l'}; \\ \frac{\Delta\vartheta}{\Delta x} &= \frac{\vartheta_{z,t,l''} - \vartheta_{z,t,l'}}{l'' - l'}, \end{aligned}\right\} \tag{122'}$$

где $l'' - l' = L$ — одно и то же расстояние в направлении течения (x), в итоге получим формулу для определения величины K

$$K = \frac{h^2}{t'' - t'}A, \tag{124}$$

где A — безразмерная величина

$$A = \frac{(\vartheta_{z,t''} - \vartheta_{z,t'})(s_{z,t,l''} - s_{z,t,l'}) - (s_{z,t''} - s_{z,t'})(\vartheta_{z,t,l''} - \vartheta_{z,t,l'})}{(\vartheta_{z'',t} + \vartheta_{z',t} - 2\vartheta_{z,t})(s_{z,t,l''} - s_{z,t,l'}) - (s_{z'',t} + s_{z',t} - 2s_{z,t})(\vartheta_{z,t,l''} - \vartheta_{z,t,l'})}. \tag{125}$$

Если поле солености с т а ц и о н а р н о $\left(\dfrac{ds}{dt} = 0\right)$, что зачастую имеет место даже в верхнем, «деятельном» слое моря, то выражение (125) упростится:

$$A = \frac{(\vartheta_{z,t''} - \vartheta_{z,t'})(s_{z,t,l''} - s_{z,t,l'})}{(\vartheta_{z'',t} + \vartheta_{z',t} - 2\vartheta_{z,t})(s_{z,t,l''} - s_{z,t,l'}) - (s_{z'',t} + s_{z',t} - 2s_{z,t})(\vartheta_{z,t,l''} - \vartheta_{z,t,l'})}. \tag{126}$$

Согласно (124) и (125) или (126), для вычисления K необходимы повторяемые через известные промежутки времени измерения температуры и солености в двух точках, расположенных в направлении течения (расстояние между точками, как видим, значения не имеет). Если направление течения нам заранее не известно, то коэффициент турбулентного обмена должен вычисляться из уравнений

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=K\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}-u_x\frac{\partial\vartheta}{\partial x}-u_y\frac{\partial\vartheta}{\partial y};$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}=K\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}-u_x\frac{\partial s}{\partial x}-u_y\frac{\partial s}{\partial y},$$

которых, разумеется, недостаточно для исключения двух неизвестных величин компонент скорости течения u_x и u_y. Для этой цели к написанным выше уравнениям необходимо добавить еще третье, описывающее диффузию какого-либо другого достаточно консервативного элемента, например кремния SiO_2, растворенного в морской воде,

$$\frac{\partial s_i}{\partial t}=K\frac{\partial^2 s_i}{\partial z^2}-u_x\frac{\partial s_i}{\partial x}-u_y\frac{\partial s_i}{\partial y}.$$

Заметим, что распределение кремния, так же как и солености, в море в большинстве случаев носит стационарный характер. Понятно, что в этом более общем случае формула для вычисления K_z приобретает еще более сложный вид, чем формулы (124), (125) и (126). Осуществление одновременных измерений ϑ, s и SiO_2 не встретит, разумеется, никаких технических затруднений.

Дальнейшее уточнение метода должно заключаться в учете эффекта горизонтального перемешивания, которым, вообще говоря, пренебрегать нельзя.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зубов Н. Н. Морские воды и льды. Гидрометеоиздат, 1938, стр. 138.
2. Штокман В. Б. О турбулентном обмене в средней и южной части Каспийского моря. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 4, 1940.
3. Fjeldstad J. E. Wärmeleitung im Meere. Geophys. Publik, 1933.
4. Iselin D. C. Papers in Phys. Ocean. and Met. Mass. Inst. Techn. and Woods Hole Oceanogr. Inst., 4, No. 4, 1936.
5. Schmidt W. Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen. Hamburg, 1925.
6. Schubert O. Veröff. Inst. Meereskunde N.F.A.H., 25, 1934.

К ВОПРОСУ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕПЛЫХ АТЛАНТИЧЕСКИХ ВОД В АРКТИЧЕСКИХ МОРЯХ[1]

В одной из предыдущих статей [4] мы обратили внимание на весьма существенную роль горизонтального турбулентного перемешивания в распространении температурных аномалий в океане. Это объясняется тем, что интенсивность турбулентного перемешивания в горизонтальных направлениях неизмеримо больше интенсивности перемешивания по вертикали.

Представляет несомненный интерес рассмотреть с этой новой точки зрения вопрос о распространении теплых атлантических вод в арктических морях, так как до сих пор оставалась неясной роль горизонтального перемешивания в переносе тепла атлантическими водами, втекающими, например, в северо-западную часть Карского моря.

Изучая в свое время гашение теплой атлантической прослойки в упомянутой области [2], мы рассматривали двухмерный процесс теплопроводности с учетом горизонтальной конвекции в направлении течения, причем описывали стационарное температурное поле таким уравнением:

$$A_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

где ϑ — температура, u — скорость равномерного и стационарного горизонтального потока в направлении оси x, A_z — коэффициент турбулентной температуропроводности в вертикальном направлении (ось z).

Следует помнить, однако, что уравнение теплопроводости в рассматриваемом случае имеет более общий вид:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(A_z \frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(A_x \frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right) - u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

[1] Опубликовано в Проблемах Арктики, № 12, 1940 г.

который приводится к уравнению (1) лишь при условии постоянства коэффициента A_z и малости члена $A_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$ в сравнении с членом $A_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$. Последнее условие осуществимо в случае одинаковой величины коэффициентов турбулентной температуропроводности в вертикальном и горизонтальном направлениях:

$$A_x = A_z,$$

ибо тогда в силу малости производной $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$ по сравнению с $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$ (что подтверждается наблюдениями) член $A_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$ оказывается неизмеримо больше члена $A_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$ и последним a priori можно пренебречь.

Однако, если учесть характерную особенность турбулентного перемешивания в условиях моря — анизотропность процесса турбулентного обмена с весьма большими величинами A_x по сравнению с A_z, — то упрощение уравнения (2) не представляется возможным.

В самом деле, средняя величина A_x (по нашим вычислениям [3] и по данным других исследователей) обладает порядком $A_x \approx \approx 10^7$ CGS, в то время как порядок коэффициента турбулентной температуропроводности в вертикальном направлении оценивается величиной $A_z \approx 10$ CGS. Если при этом учесть, что величины $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2}$, $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$ в условиях северо-западной части Карского моря (например, по данным экспедиции на л/к «Седов» в 1934 г.) обладают порядком (в системе CGS)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \approx 10^{-7}; \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} \approx 10^{-13}; \quad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \approx 10^{-7},$$

а порядок скорости течения в свою очередь оценивается величиной $u \approx 10$ см/сек., то очевидно, что порядок членов в уравнении

$$A_x \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + A_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 \qquad (3)$$

будет одинаковым (10^{-6} CGS) и ни одним из них пренебречь нельзя.

Вот почему, исследуя гашение теплой атлантической прослойки в северо-западной части Карского моря, нам следует интегрировать дифференциальное уравнение (3) вместо уравнения (1), первоначально примененного нами в изучении аналогичного вопроса. Последствия такого уточнения, конечно, предвидеть нельзя. Однако можно предполагать, что введение дополнительного члена в уравнение (1), обладающего соизмеримой величиной с членами этого уравнения и изменяющего его тип [эллиптический тип уравнения (3) вместо параболического типа уравнения (1)], исказит первоначальные результаты.

Интегрируя уравнение (3), мы в целях сопоставляемости результатов будем руководствоваться теми же граничными условиями, которые были приняты нами ранее [2], при интегрировании уравнения (1).

Напомним эти граничные условия.

1. Температура на верхней и нижней границах потока задана и постоянна: при $z=\pm h$ $\vartheta=\vartheta_0=\text{const}$ ($2h$ — общая глубина потока).

2. В начальном вертикальном сечении потока распределение температуры симметрично относительно середины потока ($z=0$) и задано в виде простой тригонометрической функции глубины:

$$\text{при} \quad x=0 \quad \vartheta=\vartheta_0+C\cos\left(\frac{\pi}{2h}z\right).$$

3. При удалении в бесконечность температура потока стремится к конечной величине, равной температуре на верхней и нижней его границах:

$$\text{при} \quad x=\infty \quad \vartheta=\vartheta_0=\text{const}.$$

Мы будем по-прежнему искать решение уравнения (3) в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от x, а другая — только от z:

$$\vartheta=f(x)\varphi(z). \tag{4}$$

Вводя для удобства обозначения:

$$A_x\equiv a^2; \quad A_z\equiv b^2$$

и подставляя (4) в уравнение (3), мы получим

$$a^2\varphi(z)\frac{d^2f(x)}{dx^2}+b^2f(x)\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}-u\varphi(z)\frac{df(x)}{dx}=0. \tag{5}$$

Разделяя переменные в уравнении (5), будем иметь

$$\frac{u\dfrac{df(x)}{dx}-a^2\dfrac{d^2f(x)}{dx^2}}{f(x)}=\frac{b^2\dfrac{d^2\varphi(z)}{dz^2}}{\varphi(z)}=-\lambda^2, \tag{6}$$

где через λ^2 обозначена произвольная постоянная величина, значение которой определится из граничных условий. Следовательно, уравнение (6) распадается на два линейных однородных уравнения с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}+\frac{\lambda^2}{b^2}\varphi(z)=0, \tag{7}$$

$$\frac{d^2f(x)}{dx^2}-\frac{u}{a^2}\frac{df(x)}{dx}-\frac{\lambda^2}{a^2}f(x)=0. \tag{8}$$

Общий интеграл уравнения (7) имеет вид

$$\varphi(z)=A_1\cos\frac{\lambda}{b}z+B_1\sin\frac{\lambda}{b}z, \tag{9}$$

где A_1, B_1 — постоянные интегрирования. В свою очередь общий интеграл уравнения (8) запишется так:

$$f(x)=A_2e^{\alpha_1x}+B_2e^{\alpha_2x}, \tag{10}$$

где α_1 и α_2 — корни характеристического уравнения

$$\alpha^2-\frac{u}{a^2}\alpha-\frac{\lambda^2}{a^2}=0,$$

откуда

$$\alpha_1=\frac{u+\sqrt{u^2+4a^2\lambda^2}}{2a^2};\quad \alpha_2=\frac{u-\sqrt{u^2+4a^2\lambda^2}}{2a^2}. \tag{11}$$

Следовательно, интеграл уравнения (3) представится в виде

$$\vartheta=\varphi(z)f(x)=\left(A_2e^{\alpha_1x}+B_2e^{\alpha_2x}\right)\left(A_1\cos\frac{\lambda}{b}z+B_1\sin\frac{\lambda}{b}z\right). \tag{12}$$

Согласуем теперь выражение (12) с граничными условиями.

Так как, согласно третьему условию, при $x=\infty$ ϑ должна быть величиной конечной и в то же время α_1 существенно положительная величина, то очевидно, что произвольный постоянный коэффициент при e^{α_1x} должен быть равен нулю

$$A_2=0.$$

Далее, на основании второго условия, при $x=0$ получим

$$B_2\left(A_1\cos\frac{\lambda}{b}z+B_1\sin\frac{\lambda}{b}z\right)=C\cos\left(\frac{\pi}{2h}z\right),$$

откуда

$$B_1=0,\quad B_2A_1=C,\quad \frac{\lambda}{b}=\frac{\pi}{2h};\quad \lambda=\frac{\pi b}{2h}.$$

Подставляя найденное значение λ в выражение для α_2 и возвращаясь к обозначениям A_x и A_z, мы запишем общий интеграл уравнения (3) в окончательном виде:

$$\vartheta=\vartheta_0+Ce^{-\left\{\frac{\sqrt{u^2h^2+A_xA_z\pi^2}-uh}{2A_xh}\right\}x}\cos\left(\frac{\pi}{2h}z\right). \tag{13}$$

Нетрудно убедиться, что выражение (13) удовлетворяет всем поставленным условиям. Легко видеть, также, что при $A_x=0$ выражение (13) приобретает вид интеграла уравнения (1), полученного нами ранее.

Для того чтобы убедиться в этом, достаточно раскрыть неопределенность вида $e^{\frac{0}{0}}$, возникающую в выражении (13) при $A_x=$ $=0$.

Дифференцируя по A_x числитель и знаменатель выражения:

$$\frac{\sqrt{u^2h^2+A_xA_z\pi^2}-uh}{2A_xh},$$

мы найдем, что

$$\lim_{A_x=0}\left\{\frac{\sqrt{u^2h^2+A_xA_z\pi^2}-uh}{2A_xh}\right\}=$$

$$=\lim_{A_x=0}\left\{\frac{A_z\pi^2}{4h\sqrt{u^2h^2+A_xA_z\pi^2}}\right\}=\frac{A_z}{u}\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2.$$

Следовательно, в этом случае

$$\vartheta=\vartheta_0+Ce^{-\frac{A_z}{u}\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2x}\cos\left(\frac{\pi}{2h}z\right), \tag{14}$$

что соответствует формуле (16) упомянутой статьи [2].

С другой стороны, при $u=0$ (что равносительно отсутствию адвекции) выражение (13) приобретает вид

$$\vartheta=\vartheta_0+Ce^{-\frac{\pi}{2h}\sqrt{\frac{A_z}{A_x}}x}\cos\left(\frac{\pi}{2h}z\right). \tag{15}$$

Формула (15), очевидно, представляет собой общий интеграл уравнения

$$A_x\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2}+A_z\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2}=0, \tag{16}$$

удовлетворяющий поставленным выше условиям.

Здесь прежде всего любопытно выяснить вопрос о том, является ли наблюдаемое распределение температуры вдоль пути «ядра» атлантической прослойки в Карском море следствием одного лишь перемешивания в вертикальном и горизонтальном направлениях.

Задаваясь реальными значениями A_x и A_z, нам следует для этой цели сопоставить изменение температур вдоль оси прослойки, которое мы получим из формулы (15) при $z=0$, с температурами, наблюдаемым в действительности (рис. 1).

Полагая, как и прежде [2], $\vartheta_0=-1{,}6°$; $C=3{,}3°$, что хорошо соответствует распределению температуры в начальном сечении

($x=0$), и, с другой стороны, принимая $A_x=10^7$ CGS; $A_z=10$ CGS $h=3\cdot10^4$ см (общая глубина $2h=600$ м), мы из формулы (15) для $z=0$ получим

$$\vartheta=-1{,}6^\circ+3{,}3e^{-50\cdot10^{-9}x}.$$

Для $x=100$ км$=10^7$ см мы получим температуру $\vartheta=0{,}4^\circ$, т. е. температуру, весьма отличающуюся (на 0,9°) от наблюденной (см. рис. 1).

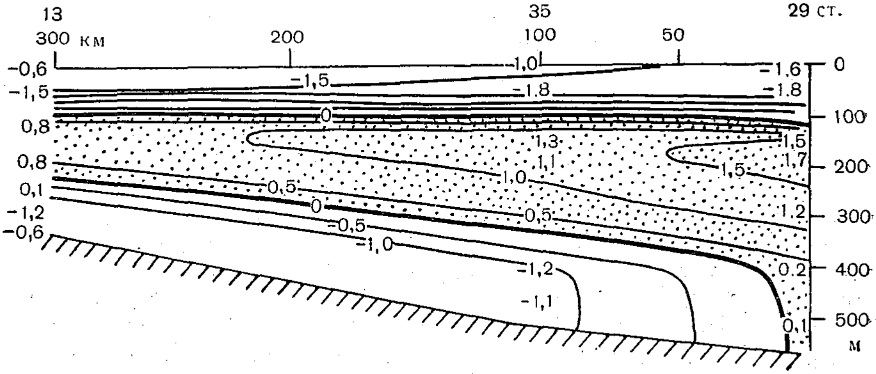

Рис. 1. Изотермы в продольном направлении «языка» атлантических вод в северо-западной части Карского моря (по данным наблюдений на л/п «Седов» в 1934 г.).

Полагая же $A_x=A_z=10$, мы будем иметь еще более резкое, совершенно невероятное затухание температуры теплой прослойки:

$$\vartheta=-1{,}6^\circ+3{,}3e^{-0{,}5\cdot10^{-4}x}.$$

Из выражения (15) видно, что медленного затухания ϑ, которое наблюдается в действительности, мы добьемся путем увеличения A_x.

Так, например, полагая $A_x=10^9$ CGS и считая величину остальных параметров прежней, мы получим следующее распределение температуры:

$$\vartheta=-1{,}6^\circ+3{,}3e^{-5\cdot10^{-9}x},$$

откуда

$$[\vartheta]_{x=10^7\text{ см}}=1{,}5^\circ.$$

Такого сравнительно близкого совпадения вычисленной температуры с наблюдаемой в действительности (разность 0,2°) мы достигли лишь путем увеличения A_x до величины $A_x=10^9$ CGS, мало вероятного не только в условиях моря, но и для атмосферных течений.

Мы должны, следовательно, придти к важному заключению, что наблюдаемое в действительности распределение температур в продольном направлении атлантической прослойки в Карском море не может являться следствием одного лишь турбулентного перемешивания по вертикали и в горизонтальном направлении, при отсутствии переноса тепла результирующим течением (адвекция).

Таким образом, мы должны одновременно придти к заключению и о важной роли горизонтальной конвекции (адвекции), как одной из причин, создающих действительное распределение температур атлантической прослойки в Карском море.

Каков же «удельный вес» адвекции, вертикального и горизонтального перемешивания, как факторов, совместно определяющих стационарное температурное поле атлантической прослойки в продольном ее направлении? Ответ на этот вопрос мы получим, если сопоставим температурное поле, вычисленное по формуле (14) без учета горизонтального перемешивания, с тем распределением температур, которое определяется более общим выражением (13), учитывающим эффект перемешивания в горизонтальном направлении. Очевидно, решающей величиной, определяющей «быстроту» затухания температуры, будет значение показателей степени e в том и другом случаях.

Принимая общую глубину потока, как и прежде, $2h = 600$ м, $h = 3 \cdot 10^4$ см, полагая для простоты $\pi^2 = 10$, $u = 10$ см/сек. и считая, что наиболее вероятный порядок коэффициентов перемешивания по вертикали и в горизонтальном направлении:

$$A_z = 10 \text{ CGS}; \quad A_x = 10^7 \text{ CGS},$$

мы получим для показателя степени в формуле (14) следующую величину:

$$1) \quad \frac{A_z}{u}\left(\frac{\pi}{2h}\right)^2 = 2{,}8 \cdot 10^{-9} \text{ см}^{-1}.$$

С другой стороны, для показателя степени в формуле (13) мы будем иметь

$$2) \quad \frac{\sqrt{u^2h^2 + A_xA_z\pi^2} - uh}{2A_xh} = 2{,}8 \cdot 10^{-9} \text{ см}^{-1},$$

что с точностью до первого десятичного знака совпадает с величиной показателя в первом случае.

Этот неожиданный результат свидетельствует о том, что распределение температуры вдоль «оси» теплой прослойки (при наиболее вероятном порядке величин коэффициентов перемешивания) совершенно не меняется от того, описываем ли мы это распределение уравнением (1), учитывающим лишь горизонтальную конвекцию и вертикальное перемешивание, или уравнением (3), учитывающим вдобавок и перемешивание в направлении горизонтального течения, хотя в последнем случае порядок членов в уравнении (3) таков, что ни одним из них пренебречь нельзя.

Таким образом, мы можем утверждать, что при решении задачи о гашении теплых атлантических вод, проникающих в Карское море, вполне достаточно описывать этот процесс уравнением (1), пренебрегая эффектом перемешивания в направлении течения. Влияние последнего, в отличие от примеров, рассмотренных нами в предыдущей статье [4], ничтожно малое, несмотря на громадную величину коэффициента горизонтального перемешивания по сравнению с коэффициентом вертикального обмена.

В то же время вертикальное и горизонтальное перемешивания совместно создают распределение температуры в поперечном направлении результирующего потока. Очевидно, в этом случае мы можем экстраполировать распределение температуры в поперечном направлении, зная вертикальное распределение температуры в данной точке моря, аналогично тому приему, который был применен нами при экстраполяции температур прослойки в продольном направлении «языка» теплой воды.

Для этой цели достаточно воспользоваться выражением (15), удовлетворяющим, при известных граничных условиях, уравнению (16) (заменив в этом выражении продольные размеры x на поперечные y). Таким путем мы вычислим, например, расположение нулевой изотермы в поперечном сечении потока и сопоставим экстраполированную величину области, ограниченную нулевой изотермой, с той, которую мы наблюдаем в действительности на разрезе от мыса Желания до Земли Франца-Иосифа, пересекающем в поперечном направлении «язык» теплой воды, вдающийся в Баренцево море [1].

На рис. 2 изображены изотермы в плоскости указанного гидрологического разреза, построенные по данным наблюдений на г/с «Таймыр» в 1934 г. [1]. Распределение температур в продольном направлении «языка» теплых вод было указано выше на рис. 1.

Отправляясь от того распределения температур на станции № 13, которое было вычислено ранее [2] и которое хорошо совпало с наблюдениями (рис. 1):

$$\vartheta = -1{,}6 + 2{,}5 \cos\left(\frac{\pi}{2h} z\right),$$

мы вычислим крайние границы нулевой изотермы в поперечном направлении по формуле (15) для $z=0$. Заменяя в упомянутой формуле x на y, мы будем иметь

$$y_0 = \frac{2h}{\pi} \sqrt{\frac{A_y}{A_z}} \ln\left(\frac{C}{\vartheta_0}\right),$$

или, полагая

$$\frac{A_y}{A_z} = 10^5, \quad 2h = 6 \cdot 10^4 \text{ см}, \quad \frac{C}{\vartheta_0} = 1{,}5,$$

мы получим:

$$y_0 \approx 26 \text{ км}; \quad 2y_0 \approx 52 \text{ км}.$$

Это хорошо совпадает с максимальными поперечными размерами области, ограниченной изотермой 0° на рис. 2 (на этом рисунке $2y_0 \approx 54$ км).

Контур нулевой изотермы, экстраполированный в поперечном сечении потока по формуле (15), изображен на рис. 3. Полагая в предыдущей формуле $\frac{A_y}{A_z} = 1$, мы бы получили совершенно невероятные по малости поперечные размеры интересующей нас области:

$$2y_0 \approx 2 \cdot 0{,}7 \cdot 10^4 \text{ см} \approx 140 \text{ м!}$$

Последний результат является новым косвенным подтверждением анизотропности турбулентного перемешивания в условиях моря.

Для экстраполяции температурного поля в поперечном сечении потока нет необходимости знать абсолютные значения коэффициентов A_y и A_z. Для практических расчетов, основанных на наблюдениях, отношение $\sqrt{\frac{A_y}{A_z}}$, которым определяется изменение температуры в поперечном направлении, заменяется, на основе уравнения (16), отношением средних градиентов температуры:

$$\sqrt{\frac{A_y}{A_z}} = \sqrt{-\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} \Big/ \frac{\partial^2\vartheta}{\partial y^2}}.$$

Убедившись в ничтожной роли горизонтального перемешивания по направлению распространения теплой струи в окружающих ее холодных водах, мы рассмотрим в заключение ту же задачу о распространении теплой прослойки, но с другими граничными условиями, отличающимися от тех, которыми мы пользовались ранее.

В качестве одного из таких условий само собой напрашивается условие, что дно моря представляет собой в первом приближении изолирующий материал, вследствие чего вертикальный градиент температуры (при условии, что дно горизонтально) на дне моря равен нулю.

Это условие физически более правдоподобно, нежели условие о постоянстве температуры на дне моря, которое принима-

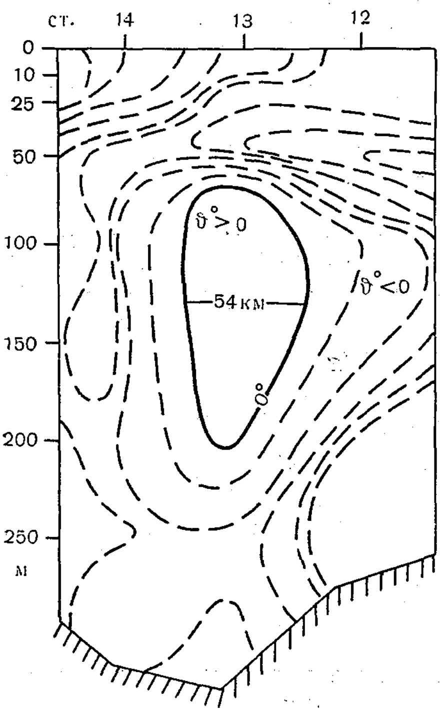

Рис. 2. Изотермы в поперечном сечении «языка» атлантических вод в разрезе мыс Желания—Земля Франца-Иосифа (по данным наблюдений на г/с «Таймыр» в 1934 г.).

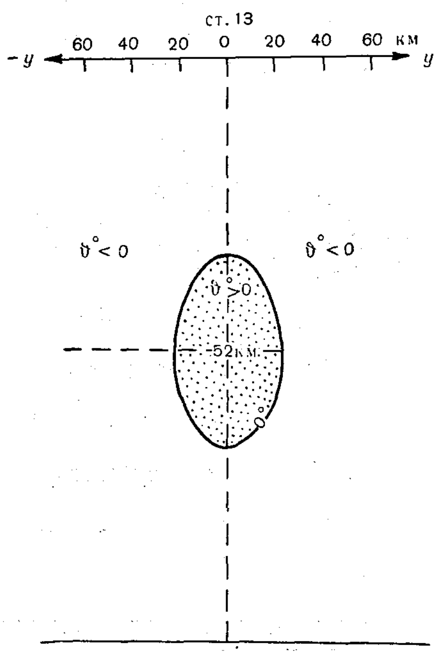

Рис. 3. Вычисленный контур нулевой изотермы в поперечном сечении «языка» атлантических вод на разрезе мыс Желания—Земля Франца-Иосифа (теоретическая модель).

лось нами ранее [2]. Последнее противоречит, вообще говоря, общеизвестному принципу, которым руководствуются гидрологи при проведении изотерм на гидрологических разрезах, когда принимают, что температура дна не отличается от температуры непосредственно прилегающего в данной точке тонкого слоя морской воды, вследствие чего изотермы на таких разрезах зачастую «упираются» в дно моря. А это как раз и соответствует условию тепловой изоляции на дне моря, которое не налагает каких-либо дополнительных ограничений на распределение температуры по дну моря, помимо указанного выше.

Мы будем рассматривать море постоянной глубины, безгранично простирающееся в горизонтальном направлении. Вся толща морской воды от поверхности до дна охвачена прямолинейным, стационарным и равномерным потоком скорости u, с направлением которого мы совместим горизонтальную ось x, направив в свою очередь ось z от поверхности моря вертикально вниз.

Описывая стационарное температурное поле в направлении течения уравнением

$$A_z \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} - u \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0,$$

мы подчиним его решение следующим граничным условиям:

1. В начальном вертикальном сечении ($x=0$) распределение температуры задано в виде совершенно произвольной функции глубины:

$$\text{при } x=0 \quad \vartheta = \vartheta(z).$$

2. На поверхности моря температура постоянна:

$$\text{при } z=0 \quad \vartheta = \vartheta_0 = \text{const}.$$

3. На дне моря существует тепловая изоляция:

$$\text{при } z=h \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0.$$

Частный интеграл написанного выше уравнения, удовлетворяющий условиям 1—3, нам уже известен [2]:

$$\vartheta = e^{-\frac{A_z}{u}\lambda^2 x} (A \cos \lambda z + B \sin \lambda z), \tag{17}$$

где A, B и λ — произвольные постоянные величины.

Если согласно второму условию полагать, что на поверхности моря температура равна нулю (мы можем придать ей впоследствии любое постоянное значение), то из этого условия следует, что в выражении (17)

$$A = 0.$$

С другой стороны, вычисляя производную выражения (17), мы на основании условия 3 получим

$$\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial z}\right)_{z=h} = B\lambda \cos \lambda h = 0, \tag{18}$$

откуда убеждаемся, что λ принимает бесконечное число значений:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2h}, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Следовательно, общий интеграл нашего уравнения представится в виде бесконечной суммы частных интегралов, соответствующих частным значениям характеристического числа λ_k.

Именно:

$$\vartheta = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{A_z}{u}\left[\frac{(2k+1)\pi}{2h}\right]^2 x} B_k \sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}. \tag{19}$$

Полагая в формуле (19) $x=0$, из первого условия получим

$$\vartheta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}. \tag{20}$$

Последняя формула представляет собой не что иное, как разложение $\vartheta(z)$ в ряд, расположенный по фундаментальным функциям:

$$\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}.$$

На основании теории рядов Фурье мы будем иметь

$$B_k = \frac{2}{h}\int_0^h \vartheta(z)\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}\,dz, \tag{21}$$

и точное решение нашего уравнения, удовлетворяющее всем поставленным условиям, запишется в виде

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{2}{h}\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{A_z}{u}\left(\frac{(2k+1)\pi}{2h}\right)^2 x} \sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h} \times$$

$$\times \int_0^h \vartheta(z)\sin\frac{(2k+1)\pi z}{2h}\,dz. \tag{22}$$

Выберем теперь распределение температуры $\vartheta(z)$ в начальном сечении $(x=0)$. Принципиально $\vartheta(z)$ может быть любой функцией от z. Однако мы зададимся в качестве примера такой зависимостью $\vartheta(z)$, которая, близко соответствуя наблюдаемому характеру распределения температуры по вертикали, позволит в то же время быстро вычислить интересующее нас стационарное температурное поле по формуле (22).

В качестве такой функции мы возьмем следующую:

$$\vartheta(z) = 10(e^{-z} - e^{-2z}).$$

Как видим, эта функция удовлетворяет второму из поставленных нами граничных условий, обращаясь на поверхности моря в нуль.

Полагая $h=3$ (в условных единицах), мы вычислим затем величину интеграла:

$$I_1 = 10\int_0^3 (e^{-z} - e^{-2z}) \sin \frac{(2k+1)\pi z}{6} dz.$$

Вспоминая, что

$$I_2 = \int_0^h e^{-az} \sin bz\, dz = \frac{e^{-ah}\{-a \sin bh - b \cos bh\} + b}{a^2 + b^2},$$

и принимая во внимание, что

$$b = \frac{(2k+1)\pi}{2h},$$

мы получим

$$I_2 = \frac{\frac{(2k+1)\pi}{2h} - ae^{-ah}(-1)^k}{a^2 + \left[\frac{(2k+1)\pi}{2h}\right]^2},$$

откуда при $h=3$, полагая последовательно $a=1$ и $a=2$, будем иметь

$$I_1 = 10\left\{\frac{\frac{(2k+1)\pi}{6} - 0{,}05(-1)^k}{1 + \left[\frac{(2k+1)\pi}{6}\right]^2} - \frac{\frac{(2k+1)\pi}{6} - 0{,}005(-1)^k}{4 + \left[\frac{(2k+1)\pi}{6}\right]^2}\right\}.$$

Условно считая $\vartheta_0 = -1^\circ$ и $\frac{A_z}{u} = 1$, мы получим в итоге следующую формулу для расчета температурного поля:

$$\vartheta = -1 + \frac{10 \cdot 2}{3} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\left[\frac{(2k+1)\pi}{6}\right]^2 x} \sin \frac{(2k+1)\pi z}{6} \times$$

$$\times \left\{\frac{\frac{(2k+1)\pi}{6} - 0{,}05(-1)^k}{1 + \left[\frac{(2k+1)\pi}{6}\right]^2} - \frac{\frac{(2k+1)\pi}{6} - 0{,}005(-1)^k}{4 + \left[\frac{(2k+1)\pi}{6}\right]^2}\right\}. \quad (23)$$

Как легко видеть, ряд (23) весьма быстро сходится, и для вычисления ϑ достаточно ограничиться такими первыми тремя членами разложения:

$$\vartheta = -1 + 6{,}67\left\{e^{-\frac{\pi^2}{36}x}\sin\left(\frac{\pi z}{6}\right)\left[\frac{\frac{\pi}{6} - 0{,}05}{1 + \frac{\pi^2}{36}} - \frac{\frac{\pi}{6}}{4 + \frac{\pi^2}{36}}\right] + \right.$$

$$+ e^{-\frac{\pi^2}{4}x}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)\left[\frac{\frac{\pi}{2} + 0{,}05}{1 + \frac{\pi^2}{4}} - \frac{\frac{\pi}{2}}{4 + \frac{\pi^2}{4}}\right] +$$

$$\left. + e^{-\frac{25\pi^2}{36}x}\sin\left(\frac{5\pi z}{6}\right)\left[\frac{\frac{5\pi}{6}}{1 + \frac{25\pi^2}{36}} - \frac{\frac{5\pi}{6}}{4 + \frac{25\pi^2}{36}}\right]\right\}$$

или

$$\vartheta = -1 + 6{,}67\left\{0{,}26e^{-0{,}25x}\sin\left(\frac{\pi z}{6}\right) + 0{,}22e^{-2{,}45x}\sin\left(\frac{\pi z}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + 0{,}09e^{-6{,}85x}\sin\left(\frac{5\pi z}{6}\right) + \ldots\right\}. \qquad (24)$$

Расчет температурного поля теперь не составит труда. На основании формулы (24) нами были вычислены температуры для интервалов:

$$z = 0,\ 1,\ 2,\ 3; \quad x = 0,\ 0{,}25,\ 0{,}50,\ 0{,}75,\ 1{,}00,\ 1{,}25$$

и проведены изотермы через 0,2°.

Эти любопытные изотермы изображены на рис. 4. Вместе с тем на рис. 5 указано распределение температуры в начальном сечении ($x=0$), которое мы сопоставляем с действительно наблюдаемым распределением по вертикали в стрежне теплого языка в Карском море. Рисунок 4 обнаруживает весьма характерные особенности распространения тепла в окружающих холодных водах. Языкообразные изотермы по мере удаления от начального сечения изгибаются по направлению ко дну, вследствие чего ось «теплой прослойки» не направлена, как прежде, горизонтально и теплая вода на некотором расстоянии от начального сечения «стелется» по дну.

До настоящего времени предполагали, что единственной причиной погружения теплых атлантических вод при их проникновении в воды Полярного бассейна является бóльшая плотность атлантической воды по сравнению с окружающими водными массами. Приведенный пример указывает, однако, на возможность такого погружения теплой воды вне всякой зависимости от ее плотности.

В самом деле, коль скоро в начальном сечении ($x=0$) распределение плотности по вертикали носит устойчивый характер (вследствие компенсирующего изменения солености), то такое же устойчивое распределение плотности можно ожидать и в направлении течения, ибо с потерей тепла вследствие перемешивания по той же причине соответственно уменьшается и соленость в направлении потока. Изменение солености, вообще говоря, следует тому же закону, по какому изменяется и температура водных масс. При этом разумеется, что в направлении потока не происходит каких-либо изменений температуры и солености воды вследствие других (климатических) факторов, помимо тех,

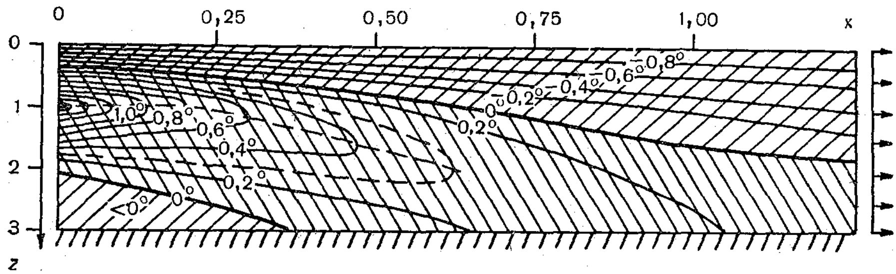

Рис. 4. Теоретическая модель стационарного температурного поля в продольном направлении «языка» теплой воды (асимметричное распределение $\vartheta°$ в начальном сечении и тепловая изоляция на дне).

которые обусловливают стационарность температурного поля в нашем примере (адвекция и вертикальное перемешивание). Погружение теплой воды определяется в данном случае несимметричностью распределения температуры в начальном сечении (см. рис. 5) и тем условием тепловой изоляции, которое мы приняли на дне потока. Последнее сказывается в еще более резком изгибании изотерм по направлению ко дну в сравнении с более простым случаем, проанализированным ранее Торадэ [6].

Отмеченная выше характерная особенность вычисленного нами температурного поля весьма отчетливо вскрывает ошибочность общеизвестного в океанографии принципа, согласно которому изгиб языкообразных изолиний гидрологических элементов отождествляется с направлением течения в плоскости гидрологического разреза. В данном случае этот принцип привел бы к совершенно неверным выводам, ибо течение всюду направлено параллельно дну, а не под углом к последнему, как можно было бы думать, если руководствоваться направлением «оси» теплого языка, указанным на рис. 4 пунктиром. Этот принцип, как известно, впервые был подвергнут критике в работах Кастенса [5] и Торадэ [6].

На основании температурного поля, изображенного на рис. 4, мы можем прийти еще к одному, дополнительному заключению. Одной из особенностей этого рисунка является то, что изотермы в придонной части разреза упираются в грунт, что весьма напоминает обычное распределение температур у дна моря. Как

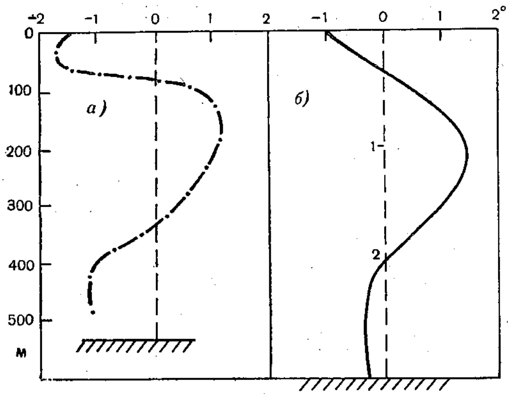

Рис. 5. Распределение температуры на станции 35 по данным экспедиции на л/п «Седов» в 1934 г. (*а*) и условное распределение температуры (*б*) в начальном сечении на рис. 4.

видно из рис. 4, выпуклость изотерм в придонном слое разреза обращена в направлении течения, т. е. прямо противоположна тому направлению изгиба изотерм, который существует в придонном слое разреза в Карском море (рис. 1).

Легко видеть, что выпуклость изотерм в придонном слое обращена в этом последнем случае в сторону, обратную распространению языка теплой воды.

Это обстоятельство наводит на мысль о том, что в плоскости указанного гидрологического разреза у дна существует течение, имеющее направление, обратное направлению втекающих атлантических вод. Такое (по-видимому, слабое) течение может быть обусловлено «сползанием» придонного слоя воды по склону из Карского моря в Полярный бассейн.

Выводы

Результаты настоящего исследования мы резюмируем в форме следующих выводов.

1. Наблюдаемое в действительности распределение температур «ядра» атлантических вод в Карском море не может

являться следствием одного лишь турбулентного перемешивания по вертикали и в продольном направлении «языка» теплой прослойки, при отсутствии переноса тепла результирующим течением (адвекция).

2. Одновременно с этим выясняется важная роль горизонтальной конвекции (адвекции), как одной из причин, создающих действительное распределение температур атлантической прослойки в Карском море в продольном направлении.

3. Распределение температуры теплой прослойки (при наиболее вероятном порядке величин коэффициентов перемешивания в природных условиях) совершенно не меняется от того, описываем ли мы это распределение уравнением, учитывающим лишь горизонтальную конвекцию (адвекцию) и вертикальное перемешивание, или уравнением, учитывающим вдобавок и перемешивание в направлении горизонтального течения.

4. Мы можем утверждать, что при анализе процесса гашения теплых вод, проникающих в более холодные водные массы (и наоборот), вполне достаточно описывать этот процесс уравнением (1), пренебрегая эффектом перемешивания в продольном направлении «языка» теплых вод, в отличие от других примеров, рассмотренных нами ранее. Эффект такого перемешивания ничтожно мал, несмотря на громадную величину коэффициента горизонтального перемешивания в сравнении с коэффициентом вертикального обмена.

5. Горизонтальное турбулентное перемешивание совместно с турбулентным обменом по вертикали определяет распределение температур в поперечном направлении результирующего горизонтального переноса теплых атлантических вод. При этом интенсивность поперечного смешивания должна во много раз (10^5—10^6) превышать интенсивность вертикального обмена, ибо в противном случае наблюдаемое распределение температуры в поперечном сечении теплой прослойки не может являться следствием турбулентной теплопроводности. Это обстоятельство служит новым косвенным подтверждением анизотропности турбулентного перемешивания в условиях моря.

6. Выяснена возможность погружения теплых атлантических вод при проникновении их в воды Полярного бассейна вне всякой зависимости от изменения плотности водных масс. Причинами такого явления в исследованном случае являются тепловая изоляция на дне моря и асимметричное (по отношению к глубине) распределение температуры в начальном сечении потока.

7. В придонном слое северо-западной части Карского моря в некоторых случаях, по-видимому, существует слабое течение, имеющее направление, обратное направлению втекающих в море

атлантических вод. Это слабое движение может являться следствием «сползания» придонного слоя воды по склону из Карского моря в Полярный бассейн.

Институт теоретической геофизики
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Лактионов А. Ф., Балакшин Л. Л. Глубоководные гидрологические наблюдения экспедиции на «Седове» в 1934 г. Тр. АНИИ, т. LXIV, Л., 1936.
2. Штокман В. Б. О турбулентной диффузии атлантических вод в северо-западной части Карского моря. Проблемы Арктики, № 5, 1939.
3. Штокман В. Б. О турбулентном обмене в средней и южной части Каспийского моря. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 4, 1940.
4. Штокман В. Б. О горизонтальном распространении температурных аномалий в океане. Проблемы Арктики, № 5, 1940.
5. Castens H. Strömung und Isolinienform. Ann. d. Hydr. u. Marit. Met., H. II, 1931.
6. Thorade H. Strömung und zungenförmige Ausbreitung des Wassers. Gerlands Beiträge zur Geophysik. Bd 34 (Köppen-Band III), 1931.

ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ АТЛАНТИЧЕСКИХ ВОД В ПОЛЯРНОМ БАССЕЙНЕ[1]

Четыре года назад я пытался теоретическим путем предугадать особенности температурного поля в направлении движения атлантических вод, распространяющихся среди более холодных водных масс арктических морей и Полярного бассейна [1].

Я исходил при этом из следующих предположений и упрощающих допущений: 1) температурное поле в направлении движения атлантических вод стационарно и определяется перемешиванием (неизменной интенсивности) и адвективным переносом тепла; 2) скорость движения атлантических вод, так же как и подстилающих их полярных водных масс, одна и та же как по величине, так и по направлению; 3) на поверхности полярного океана (или моря), обычно покрытой льдом, температура постоянна (температура замерзания); 4) в направлении движения глубина моря неизменна; 5) на дне имеет место тепловая изоляция (вертикальный поток тепла равен нулю); 6) предполагается известным распределение температуры на некоторой «начальной» вертикали.

При этих условиях нетрудно получить решение дифференциального уравнения:

$$k\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} - u\frac{\partial\vartheta}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

которым описывается двумерное стационарное температурное поле по направлению движения атлантических вод. Решение уравнения (1) имеет вид

$$\vartheta = \vartheta_0 + \frac{2}{h}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{k}{u}\left[\frac{(2n+1)\pi}{2h}\right]^2 x} \sin\frac{(2n+1)\pi z}{2h}\int_0^h \vartheta(z)\times$$
$$\times \sin\frac{(2n+1)\pi z}{2h}\,dz. \tag{2}$$

[1] Опубликовано в Докладах АН СССР, новая серия, т. XLVIII, № 1, 1945 г. Представлено академиком П. П. Ширшовым 2/VI 1944 г.

В формулах (1) и (2) через ϑ обозначена температура, u — постоянная величина скорости течения в направлении горизонтальной оси x, k — постоянная величина коэффициента турбу-

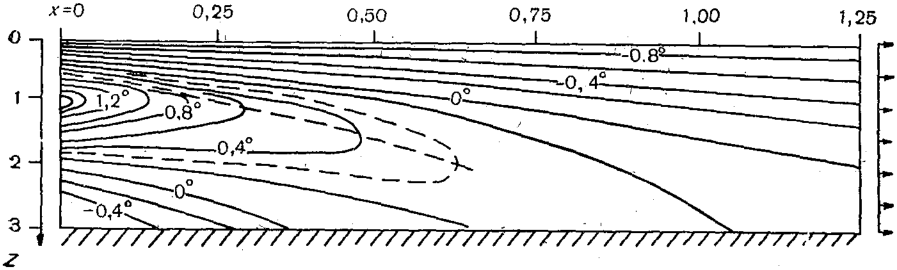

Рис. 1.

лентного перемешивания, h — глубина моря, $\vartheta(z)$ — функция, описывающая вертикальное распределение температуры на некоторой начальной вертикали ($x=0$).

Преследуя в свое время лишь цель построения теоретической модели температурного поля, я выбрал такой условный закон начального распределения температуры:

$$\vartheta(z) = 10\left(e^{-z} - e^{-2z}\right).$$

Эта функция достаточно хорошо описывает основные черты вертикального распределения температуры в области втекания атлантических вод в Полярный бассейн (к северу от Шпицбергена). Модель температурного поля, соответствующая некоторым условным значениям k, u, z и x, изображена на рис. 1. На рис. 2 изображены кривые вертикального распределения температуры на вертикалях: *I* ($x=0$), *II* ($x=0{,}25$) и *III* ($x=0{,}375$), согласно данным рис. 1.

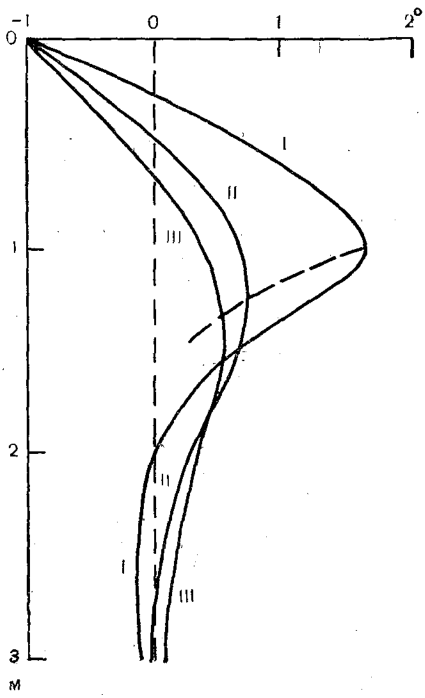

Рис. 2.

Рассматривая рис. 1 и 2, нетрудно подметить типичные особенности предполагаемого мною температурного поля в направлении движения атлантических вод. Эти особенности заключаются в том, что по мере продвижения атлантических вод в глубь Полярного бассейна максимум температуры постепенно сдвигается вниз. Кроме того, по мере удаления от начальной вертикали, вместе с уменьшением температуры ядра атлантических вод, температура в придонных слоях увеличивается. Как видно из рис. 1, повышение температуры в придонных слоях достигает максимума на некотором расстоянии от начальной вертикали,

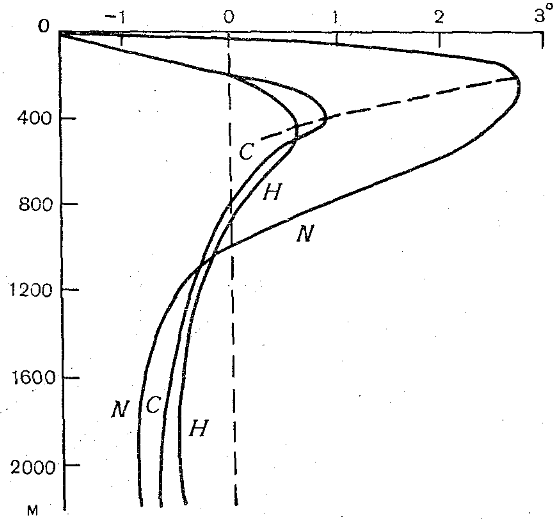

Рис. 3.

после чего следует падение температуры до тех пор, пока атлантическая вода окончательно не «растворится» в окружающих ее более холодных водах Полярного бассейна.

Четыре года назад я не располагал данными, которые могли бы подтвердить или опровергнуть предсказываемые особенности в распространении атлантических вод. Однако после того, как гидрологические наблюдения, проводившиеся в течение дрейфа «Седова», были обработаны, а в 1941 г. были осуществлены на самолете Н-169 измерения температуры в районе «Полюса недоступности», такая проверка оказалась возможной. С этой целью я сопоставил вертикальное распределение температуры в трех достаточно удаленных друг от друга точках, расположенных примерно в направлении движения атлантических вод и соответствующих станциям: № 2 «Nautilus», обозначаемой буквой *N*, с координатами $\varphi = 81°59'$ N, $\lambda = 17°30'$ E; № 7 «Седов», обозначаемой буквой *C*, с координатами $\varphi = 85°03'$ N, $\lambda = 131°48'$ E и № 1 самолета Н-169, обозначаемой буквой *H*, с координатами $\varphi = 81°38'$ N, $\lambda = 179°02'$ W. На рис. 3 изображены кривые вертикального распределения температуры на указанных станциях, а на рис. 4 — изотермы в плоскости избранного разреза.

Сопоставляя рис. 3 и 4 с рис. 1 и 2, мы видим, что наблюдаемое в действительности распределение температуры по направлению движения атлантических вод обладает всеми характерными особенностями построенной мною ранее теоретической схемы явления. Так, например, на рис. 3, так же как и на рис. 2,

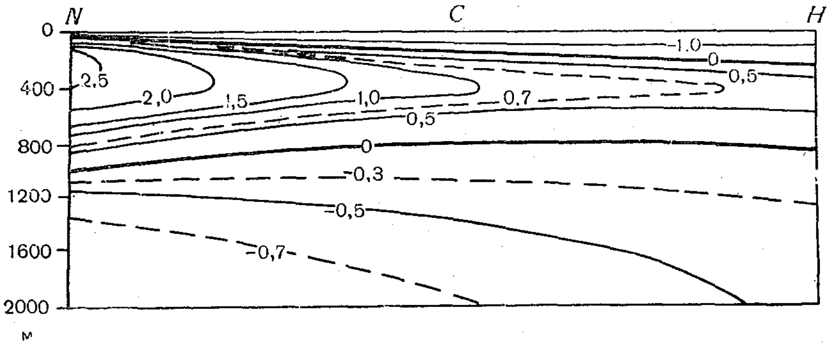

Рис. 4.

температура в нижних слоях разреза (1100—2200 м) закономерно повышается по мере удаления от начальной вертикали (станция *N*), в противоположность уменьшению абсолютной величины максимума температуры в верхних слоях. При всем том положение максимума температуры постоянно сдвигается вниз, что также согласуется с полученными ранее результатами. В то же время распределение изотерм на рис. 4 весьма близко напоминает схему на рис. 1 в пределах от $x=0$ до $x=0{,}25$.

Таким образом, наблюдения не только хорошо подтверждают правильность наших теоретических предсказаний[1], но, с другой стороны, замечательные особенности распространения атлантических вод в Полярном бассейне, обнаруживаемые путем наблюдений, получают свое теоретическое объяснение. Сопоставление рис. 1 и 4 убеждает нас также и в том, что глубинные воды Полярного бассейна, попадающие туда, согласно гипотезе Нансена, из Гренландского моря, движутся вместе

[1] Теоретическую схему явления подтверждают также и результаты, сообщенные академиком П. П. Ширшовым.

с атлантической водой примерно в одном направлении. Следует также подчеркнуть, что наблюдаемое в действительности опускание максимума температуры атлантических вод может не являться — как предполагали ранее — результатом динамического погружения атлантической прослойки, а представлять собой эффект вертикального перемешивания.

Разумеется, что при сопоставлении рис. 1, 2, 3 и 4 нельзя ожидать количественного их соответствия не только потому, что теоретическая схема явления была построена в условных единицах, но также и потому, что при построении ее не были учтены такие обстоятельства, как изменение коэффициента перемешивания и скорости течения. Учет их, принципиально не изменяя общей картины явления, позволит перейти от схемы процесса к детальному расчету температурного поля в направлении движения атлантических вод, что будет сделано в другом месте.

Лаборатория океанологии
Академии наук СССР

Поступило 2/VI 1944 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штокман В. Б. Проблемы Арктики, 12, 1940.

О ПУЛЬСАЦИЯХ ГОРИЗОНТАЛЬНЫХ КОМПОНЕНТ СКОРОСТИ МОРСКИХ ТЕЧЕНИЙ ВСЛЕДСТВИЕ ТУРБУЛЕНТНОСТИ БОЛЬШОГО МАСШТАБА [1]

Автор связывает горизонтальные пульсации скорости морских течений, измеряемые обычными приборами, с представлениями о турбулентности большого масштаба. Подвергая статистическому анализу результаты измерений, автор вычисляет эллипсы рассеяния пульсирующего вектора скорости и коэффициенты корреляции между пульсационными компонентами скорости. Вычисляются также различными методами коэффициенты обмена в горизонтальных направлениях и путь смешения в смысле Прандтля. Обсуждается смысл последней величины в применении к турбулентности большого масштаба. В результате анализа коэффициентов корреляции автор приходит к заключению, что наибольшие размеры элементов турбулентности преобладают в центральных областях потока в удалении от поверхности и дна моря.

Можно с уверенностью сказать, что ни одна из современных теорий турбулентности не в состоянии охарактеризовать детали этого явления и дать сколь-нибудь отчетливое представление о внутреннем механизме перемешивания, составляющего неотъемлемую черту всякого турбулентного течения жидкости. Мы знаем только одно, что вполне развитая турбулентность характеризуется беспорядочными движениями большого числа «молярных» масс жидкости, «блуждающих» внутри потока. Естественным следствием неупорядоченного «молярного» движения являются случайные отклонения (пульсация) скорости и консервативных свойств жидкости от средних их значений в фиксированной области потока.

Такое общее представление о турбулентности и основанные на нем статистические методы анализа этого явления не налагают каких-либо ограничений на размеры молярных масс, «блуждающих» в турбулентном потоке. Массы эти, по-видимому, могут обладать самыми разнообразными размерами,

---

[1] Опубликовано в Известиях Академии наук СССР, серия геогр. и геофиз., № 4—5, 1941 г. Представлено академиком О. Ю. Шмидтом.

начиная от весьма небольших, характерных для «мелкозернистого» турбулентного поля в трубах и лотках гидродинамических лабораторий, вплоть до очень больших вихревых масс, наблюдаемых в атмосфере и в море.

Все попытки изучения турбулентности в условиях моря до настоящего времени ограничивались вычислением так называемых коэффициентов «турбулентного обмена» (Austauschkoeffizienten) с помощью либо осредненных уравнений диффузии или теплопроводности, либо осредненных уравнений движения для некоторых простейших типов морских течений.

Совершенно очевидно, что вычисляемые таким путем коэффициенты турбулентного обмена, которыми заменяют обычные коэффициенты молекулярной вязкости, теплопроводности и диффузии, являются не более как искусственно подобранными величинами, с помощью которых добиваются более или менее удовлетворительного согласия исходных уравнений с данными наблюдений. Ясно также, что подобного рода косвенный путь не позволяет обнаружить своеобразия турбулентных процессов в море, ибо сами исходные уравнения, на основе которых выводятся формулы для вычисления коэффициентов турбулентного обмена, зачастую строятся на совершенно произвольных допущениях. К последним следует отнести, например, предположение об изотропности турбулентного обмена (одинаковые значения коэффициентов обмена во всех направлениях), вследствие которого представляется возможным пренебречь горизонтальным перемешиванием (вследствие малости горизонтальных градиентов свойств морской воды в сравнении с градиентами по вертикали) в уравнении турбулентной диффузии и вычислять лишь один «скалярный» коэффициент вертикального обмена.

В исследовании турбулентности морских течений наиболее естественным кажется путь изучения одной из характерных особенностей этого явления, именно — пульсаций в различных векториальных и скалярных полях, какими являются поля скоростей, температуры и солености в море.

К сожалению, измерения пульсаций (в особенности вертикальных пульсационных компонент скорости), обусловленных «мелкозернистой» турбулентностью, в настоящее время неосуществимы в море по причине исключительных трудностей, возникающих при попытках применения тонкой аппаратуры в весьма сложных условиях наблюдений на корабле, неподвижность которого не может быть обеспечена при наличии волнения. В то же время более грубые измерения горизонтальных компонент скорости морских течений, осуществляемые с заякоренного корабля вертушками Экмана—Мерца, могут быть использованы, по нашему мнению, для изучения пульсаций горизонтального вектора скорости, обусловленных турбулентностью большого масштаба. Разумеется, помимо всех прочих условий, обеспечивающих надежность измерений, регистрируемые колебания должны быть свободны от воздействия периодических возмущений, какие могут вноситься приливо-отливными течениями на протяжении длительного интервала последовательных измерений. Подобного рода измерения горизонтальных составляющих течения, чередующиеся через каждые 2 часа на протяжении 23 суток, были осуществлены нами [1] на расстоянии 6 км от западного побережья средней части Каспийского моря в начале крутого склона дна. Глубина моря в точке измерений составляла 35 м и достигала 200 м на расстоянии 14 км от берега.

Результаты этих измерений были положены нами ранее [2] в основу вычисления коэффициентов «макрообмена» в горизонтальных направлениях, которые мы получили, анализируя ряды средних 12-часовых значений компонент скорости с помощью формул Эртеля [8].

Напротив, в настоящей статье мы базируемся на рядах средних 10-минутных компонент скорости по данным тех же измерений. Целью нашей работы является не только вычисление коэффициентов обмена другими методами и сопоставление полученных результатов. Мы подвергаем также статистической обработке ряды случайных отклонений компонент скорости и вычисляем корреляцию между пульсационными компонентами, аналогично приемам, широко применяемым в изучении турбулентности малого масштаба, в условиях лабораторного эксперимента. Помимо этого, представляет интерес оценка порядка величины тех тангенциальных напряжений сдвига, которые обусловлены горизонтальным обменом рассматриваемого типа. Любопытна также и величина пути смешения в духе теории Прандтля, хотя смысл этой величины в применении к турбулентности большого масштаба далеко не ясен, и этот вопрос подлежит специальному обсуждению.

Мы вычислили проекцию u каждого измеренного вектора скорости на направление результирующего течения (горизонтальная ось X) и определили проекции v на направление, перпендикулярное результирующему течению (Y).[1] Пульсации u', v' находились из соотношений $u' = u - \overline{u}$; $v' = v - \overline{v}$, в которых черта сверху означает осреднение в течение всего интервала

[1] В предыдущей работе [2] мы вычисляли компоненты на направление меридиана (φ) и параллели (λ). Проектирование «мгновенного» вектора скорости на направление результирующего течения обладает своими преимуществами, как мы увидим в дальнейшем [формулы (9)].

наблюдений. На рис. 1 в качестве примера изображена кривая пульсаций u' с течением времени (для глубины 5 м).

Если пульсации компонент скорости носят случайный характер, подчиняющийся нормальному распределению Гаусса, то в этом случае должно выполняться известное соотношение Корню

$$\frac{\overline{u'^2}}{(\overline{|u'|})^2} = m = \frac{\pi}{2} = 1{,}57. \tag{1}$$

В первых столбцах следующей таблицы указаны величины средних квадратичных пульсаций и квадраты средних их зна-

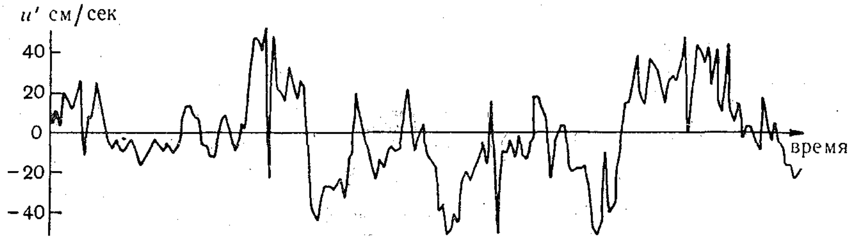

Рис. 1.

чений (по абсолютной величине), вычисленные нами для различных глубин от поверхности моря.

Глубина, м	$\overline{u'^2}$ см²/сек²	$(\overline{\lvert u'\rvert})^2$ см²/сек²	m	δ %	$\overline{v'^2}$ см²/сек²	$\sqrt{\overline{u'^2}}$ см/сек.	$\sqrt{\overline{v'^2}}$ см/сек.	$A_x\cdot10^{-6}$ см²/сек.	$A_y\cdot10^{-6}$ см²/сек.
5	481	310	1,55	1	167	21,9	12,9	4,9	1,7
10	494	334	1,51	4	144	22,2	12,0	4,8	1,4
20	527	350	1,51	4	135	23,0	11,6	5,2	1,4
30	261	180	1,45	8	73	16,2	8,5	2,8	0,8

Как видим, значения m по данным наших измерений отклоняются от величины $\frac{\pi}{2}$ не более чем на 8%, а для глубины 5 м это отклонение (δ) составляет всего 1%, что значительно меньше отклонений от закона Корню, полученных Мюллером [3] и Леттау [4] в случае атмосферной турбулентности.

Как следует из той же таблицы, поле пульсаций горизонтального вектора скорости не изотропно, что также отчетливо видно из рис. 2, на котором изображен один из эллипсов рассеяния вектора скорости (глубина 10 м), построенных нами по известным формулам теории вероятностей. Внутри такого эллипса блуждает пульсирующий вектор скорости, начало которого совпадает с центром эллипса. Замечательно, что для всех глубин большая ось эллипсов рассеяния оказалась почти параллельной береговой черте — она незначительно отклоняется от направления результирующего течения.

Такая картина хорошо согласуется с результатами весьма тонких измерений, осуществленных Рейхардтом [5] и М. Д. Миллионщиковым вблизи твердой стенки канала в лабораторных условиях. По данным упомянутых исследователей, эллипс рассеяния по мере удаления от стенки канала деформируется и превращается наконец в окружность, что свидетельствует об изотропности турбулентных пульсаций и отсутствии корреляции между горизонтальными пульсационными компонентами скорости на достаточном удалении от стенок канала.

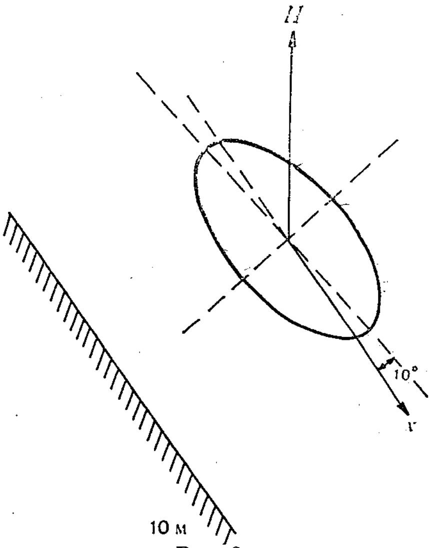

Рис. 2.

Коэффициент корреляции между пульсационными компонентами скорости u' и v', вычисляемый по формуле

$$r(u, v) = \frac{\overline{u'v'}}{\sqrt{\overline{u'^2}}\sqrt{\overline{v'^2}}},$$

в нашем случае незначительно изменялся по глубине и в среднем его величина

$$r(u, v) = -0{,}27 \pm 0{,}001.$$

Весьма любопытно, что рассеяние вектора скорости в данном случае на расстоянии 6 км от берега по характеру совершенно аналогично рассеянию вектора скорости на расстоянии нескольких сантиметров от стенки канала в условиях лабораторного эксперимента.

К сожалению, мы не располагали возможностью изучить пульсации скорости на различных расстояниях от берега моря, роль которого аналогична роли стенки канала, деформировавшей изотропное поле пульсаций в опытах Рейхардта и Миллионщикова. Представляет интерес установить в дальнейшем границу возмущающего влияния береговой черты на поле пульсаций горизонтальных компонент скорости, которое, по аналогии с лабораторным экспериментом, вероятно изотропно и в случае турбулентности большого масштаба на более значительном расстоянии от берега.

Каковы же величины коэффициентов турбулентности обмена в горизонтальных направлениях и пути пробега молярных масс, характерные для исследуемого типа турбулентных пульсаций?

Мы вычислили коэффициенты турбулентного обмена A_x и A_y по формулам Хессельберга [6]:

$$A_x = \frac{\rho p}{2} \int_0^\infty F_x u'^2 \, du' = \frac{\rho p}{4} \overline{u'^2};$$

$$A_y = \frac{\rho p}{2} \int_0^\infty F_y v'^2 \, dv' = \frac{\rho p}{4} \overline{v'^2}, \tag{2}$$

где F — функция распределения пульсационных компонент, ρ — плотность жидкости ($\rho = 1$), p — период турбулентных пульсаций. В качестве периода p мы выбрали средний период пульсаций: $p = \frac{t}{n}$, где t — общий интервал времени, n — половина числа экстремумов, усматриваемых на кривой пульсаций компонент скорости. Этот средний период для различных глубин колеблется в пределах 10—11 час. Вычисленные по формулам (2) величины A_x и A_y приведены в таблице. Такой порядок величин коэффициентов горизонтального обмена хорошо согласуется с порядком коэффициента горизонтального обмена ($2 \cdot 10^6$ CGS) по косвенным данным Свердрупа [7] для течения у берегов Калифорнии. Величины A_x и A_y несколько отличаются от тех, которые мы вычислили ранее, применяя формулы Эртеля [8] к осредненным (за 12 час.) компонентам скорости[1], однако порядок величины этих коэффициентов остался прежним. На рис. 3 изображены эпюра средних скоростей и изменение A_{xx} и $\sqrt{\overline{u'^2}}$ в вертикальном направлении.

Максимальную величину пути пробега молярных масс в направлении X можно вычислить по формуле

$$L_x = \int_t^{t+\tau} u' \, dt = \tau u'^*, \tag{3}$$

[1] Главным образом изменялось отношение A_x к A_y, что обусловлено в первую очередь различием интервалов осреднения.

в которой τ означает промежуток времени, в течение которого сохраняется определенный знак пульсационных отклонений u; u'^{*} означает среднее значение в том же интервале времени.

Путь пробега в указанном смысле равен удвоенному пути смешения l в духе Прандтля

$$L = 2l \quad \text{или} \quad l = \frac{L}{2}. \tag{4}$$

В то же время по теории Прандтля величину l можно определить из выражений

$$l_x = \sqrt{A_x \Big/ \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}}\,; \qquad l_y = \sqrt{A_y \Big/ \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}}\,. \tag{5}$$

Для L_x мы получили величину ≈ 16 км. На основании (4) найдем $l_x \approx 8$ км. С другой стороны, по нашим измерениям у западного берега Каспийского моря

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \approx 9 \cdot 10^{-6}\ \text{сек}^{-1}.,$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \approx 22 \cdot 10^{-6}\ \text{сек}^{-1}.,$$

Следовательно, на основании (5) мы получим $l \approx 6$ км, что удовлетворительно согласуется с предыдущим значением l_x, которое мы нашли путем иных соображений. Для l_y получим из (5) величину ≈ 2 км. В свою очередь величина тангенциального напряжения сдвига τ_{yx}, возникающего в вертикальной плоскости, параллельной направлению результирующего течения, окажется равной

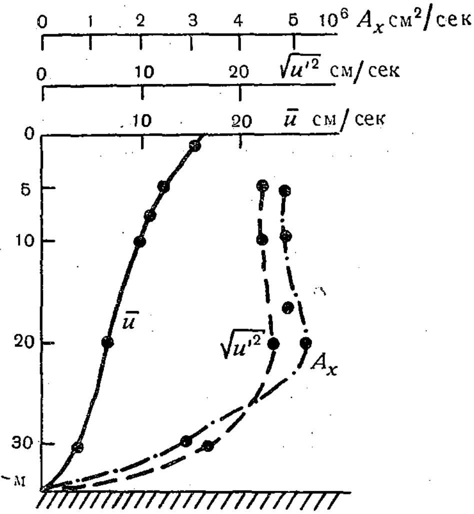

Рис. 3.

$$\tau_{yx} = A_y \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \approx 40\ \text{дин/см}^2.$$

Порядок этой величины намного превышает величину касательных напряжений: $\tau_{zx} = A_z \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \approx 10^{-1}$ дин/см², обусловленных вертикальным турбулентным обменом в условиях моря. Вот почему «боковым» напряжениям (lateral stress) Россби [9] придает особо важное значение в вопросах динамики стационарных морских течений.

Коэффициенты турбулентного обмена и путь смешения можно вычислить и другим путем, независимо от формул (2), в которые входит не совсем ясная величина периода турбулентных пульсаций (p). В общем случае, обозначая $x=x_1$; $y=x_2$; $z=x_3$, имеем:

$$\tau_{ik}=\rho\,\overline{u'_i u'_k} \quad (i,\ k=1,\ 2,\ 3). \tag{6}$$

С другой стороны, согласно Эртелю [8], мы можем написать:

$$\tau_{ik}=A_{jk}\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (i=1,\ 2;\ \ j,\ k=1,\ 2,\ 3),^1 \tag{7}$$

откуда при предположении, что $A_{jk}=0$ при $j\neq k$ и считая $\rho=1$, получим такие выражения:

$$A_{xx}=\frac{\overline{u'^2}}{\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}};\quad A_{yy}=\frac{\overline{u'v'}}{\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}};\quad l_x=\frac{\sqrt{\overline{u'^2}}}{\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}};\quad l_y=\frac{\sqrt{\overline{u'v'}}}{\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}}; \tag{8}$$

$$\tau_{yx}=\overline{u'v'}, \tag{9}$$

на основе которых для глубины 5 м будем иметь:

$$A_{xx}\approx 55\cdot 10^6\ \text{см}^2/\text{сек.};\quad A_{yy}\approx 7\cdot 10^6\ \text{см}^2/\text{сек.};\quad l_x\approx 24\ \text{км};$$

$$l_y\approx 4\ \text{км};\quad \tau_{yx}\approx 60\ \text{дин/см}^2.$$

Последние величины значительно расходятся с вычисленными выше, однако порядок их остается прежним.

В качестве наиболее вероятной средней величины пути смешения в поперечном направлении потока мы примем величину $l_y\approx 3$ км. Порядок l_x в продольном направлении ≈ 10 км.

Изложенные здесь результаты совпадают с общими соображениями Россби [10] по поводу горизонтальной турбулентности большого масштаба. Так, например, порядок величины пути смешения l, согласно его теории, заключен в пределах 13—130 км (для открытых частей океана). Россби отождествляет эту величину с размерами «элементов» макротурбулентности, указывая, что вихри таких больших размеров часто наблюдаются в области Гольфстрима.

[1] Выражения (7)—(9) более строго должны записываться в предположении, что величина A является тензором 4-го ранга (см. на этот счет А. С. Монин, А. М. Яглом «Статистическая гидромеханика», часть I, § 6.3. Изд-во «Наука», 1965 г. (*Прим. сост.*).

Вряд ли, однако, можно отождествлять величину l, определяемую в соответствии с теорией Прандтля, с размерами элементов макротурбулентности — так, как это делает Россби. Дело в том, что, по теории Прандтля, путь смешения l отнюдь не равен, а лишь пропорционален поперечным размерам d элемента турбулентности, причем эту пропорциональность Прандтль получает путем весьма рискованных допущений, оправдываемых, по нашему мнению, лишь в условиях «мелкозернистой» турбулентности. Именно, рассматривая перемещение элемента турбулентности с поперчником d, Прандтль допускает, что сопротивление движению такого объема подобно сопротивлению твердого тела (!), т. е. пропорционально поперечному сечению и динамическому давлению $\frac{\rho u'^2}{2}$. Работа сопротивления на протяжении l равна

$$\left[(\text{числовой множитель}) \cdot d^2\left(\frac{\rho u'^2}{2}\right) l\right],$$

а потерянная кинетическая энергия в свою очередь равна

$$\left[(\text{числовой множитель}) \cdot \rho d^3\left(\frac{u'^2}{2}\right)\right].$$

Сравнение этих величин и устанавливает пропорциональность l и d:

$$l = (\text{числовой множитель}) \cdot d.$$

Учитывая изложенное, недопустимо отождествлять величины l, полученные Россби, с размерами вихрей, наблюдаемых в области Гольфстрима, если рассматривать эти вихри в качестве элементов турбулентности. Более того, мало вероятно, что l (в смысле Прандтля) пропорционален поперечным размерам таких вихрей, если иметь в виду указанные выше грубые допущения Прандтля, вряд ли оправдываемые в условиях турбулентности большого масштаба.

Вот почему для определения некоторой горизонтальной длины l, характерной для макротурбулентности, рациональнее воспользоваться статистическим методом, указанным Тэйлором [11] (исследование корреляции скорости в различных точках скоростного поля). Однако для этого необходимы специальные измерения в море, организовать которые весьма желательно в дальнейшем.

В заключение мы коснемся важного вопроса о корреляции между пульсациями одноименных горизонтальных компонент скорости в двух точках в зависимости от изменения расстояния (по вертикали) между ними и положения этих точек (при неизменном расстоянии) внутри потока:

$$r(u,\ u)=\frac{\overline{u'(z_1)\,u'(z_2)}}{\sqrt{\overline{u'^2(z_1)}\ \overline{u'^2(z_2)}}}\,;\quad r(v,\ v)=\frac{\overline{v'(z_1)\,v'(z_2)}}{\sqrt{\overline{v'^2(z_1)}\ \overline{v'^2(z_2)}}}\,. \qquad (10)$$

В первом случае корреляция вычислялась между глубиной 5 м и четырьмя последовательными горизонталями, расположенными ниже 5 м. На рис. 4 изображены соответствующие

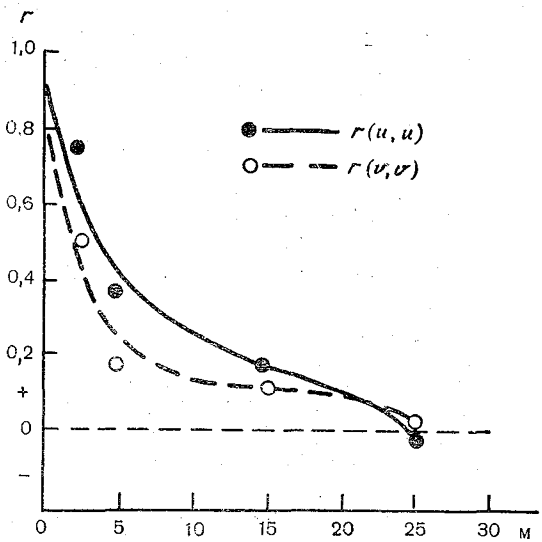

Рис. 4.

кривые корреляции, в общих чертах напоминающие кривые, полученные Минским [12] в условиях лабораторного эксперимента. Замечательно, что корреляция, вычисленная для одного и того же расстояния между двумя точками (10 м), весьма резко изменялась в зависимости от положения данных точек в той или иной области потока. Наибольшую корреляцию мы обнаружили в центральной области потока (горизонты 10—20 м), где $r(u,\ u)=0{,}67$; $r(v,\ v)=0{,}19$, в то время как в придонной области (горизонты 20÷30 м) корреляция оказалась наименьшей: $r(u,\ u)=0{,}04$; $r(v,\ v)=0{,}01$. Этот результат свидетельствует не только о том, что поле пульсаций в данном случае анизотропно, но также и о том, что наибольшие вертикальные размеры «элементов турбулентности», по-видимому, преобладают в центральных областях потока, в удалении от поверхности и дна моря.

В самом деле, если рассматриваемые точки *A* и *B* (рис. 5) находятся внутри молярной массы («элемента» турбулентности), то естественно предположить, что корреляция в этом случае между пульсациями в *A* и *B* будет больше, нежели тогда, когда эти точки не попадают одновременно в область скоростного поля молярной массы, блуждающей в потоке. Следовательно, если корреляция между пульсациями на горизонтах 10 и 20 м больше корреляции между глубинами 20 и 30 м (длина отрезка одна и та же 10 м), то из этого мы можем заключить, что первая картина, схематически изображенная на рис. 5, чаще имеет место, нежели схема *II* на том же рисунке. Иначе говоря, молярные массы больших размеров (каких мы не знаем) преобладают в центральных областях потока. Заметим при этом, что изложенные простые рассуждения не позволяют судить не только о горизонтальных, но и о вертикальных размерах молярных масс в турбулентном потоке.

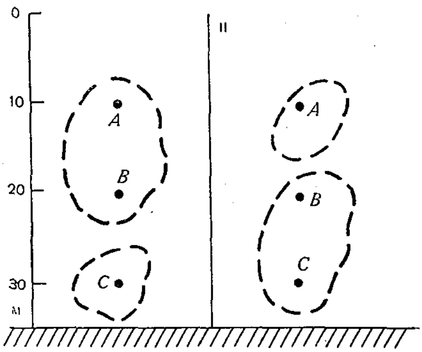

Рис. 5.

Институт теоретической геофизики
Академии наук СССР

Получено 20/II 1941 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штокман В. Б., Ивановский И. И. Результаты стационарного изучения течений у западного берега Среднего Каспия. Метеорология и гидрология, № 4—5, 1937.
2. Штокман В. Б. О турбулентном обмене в средней и южной части Каспийского моря. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 4, 1940.
3. Müller H. Störung der Windsströmung und des Austausches über einem Gebäude. Zeitschr. f. Geophys., 1936, H. 4.
4. Lettau H. und Schwerdtfeger W. Untersuchungen über atmosphärische Turbulenz und Vertikalaustausch vom Freiballon aus. Met. Zeitschr., 50, 1933, H. 7.
5. Reichardt. Messungen turbulenter Schwankungen. Naturwiss., 26, 1938, Nr 404.
6. Hesselberg Th. Ein neur Ausdruck für den Austauschkoeffizienten. Ann. der Hydr. und Marit. Met., 1929.
7. Sverdrup H. U. Ocean circulation. Proc. Fifth Intern. Congress for Applied Mechanics, USA, 1939.

8. Ertel H. Allgemeine Theorie der Turbulenzenreibung und des Austausches. Sitz. Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss., math.-phys. Kl., XXVI, 1932.
9. Rossby C. G. Dynamics of steady ocean currents in the light of experimental fluid mechanics. Pap. in Phys. Oceanogr. and Met., Cambridge, Mass., V. 1936, No 1.
10. Rossby C. G., Note on shearing stress caused by large-scale lateral mixing. Proc. of the Fifth Intern. Congress for Applied Mechanics, USA, 1939.
11. Taylor G. I., Diffusion by continuous movements. Proc. Lond. Math. Soc., 20, 1921.
12. Минский Е. М. Статистическое определение пути смешения в турбулентном потоке. ДАН СССР, т. XXVIII, № 8, 1940.

ДИНАМИКА МОРСКИХ ТЕЧЕНИЙ

РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ МОРСКОЙ И ОКЕАНИЧЕСКОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ В СССР ЗА 50 ЛЕТ [1]

Большие трудности, возникающие при непосредственном измерении приборами морских и океанических течений, давно породили попытки косвенного их определения. В основу таких косвенных определений были положены гидростатические соображения о связи между установившимися течениями и стационарным распределением плотности морской воды (либо ее температуры и солености) при одновременном учете отклоняющего влияния вращения Земли. На основании этих простых соображений еще в 80-х годах прошлого века норвежский метеоролог Мон [59] построил карту течений в Норвежском море, использовав для этой цели распределение плотности, известное на основании измеренных температуры и солености воды в различных точках моря и на разных глубинах. Большие преимущества подобного косвенного определения морских течений, позволяющего построить систему горизонтальной циркуляции вод данного моря или океана, были несомненными.

Однако упомянутая здесь первая попытка Мона страдала недостатками, обусловленными неясностями в решении главных вопросов поставленной задачи. Неясным, например, оставался вопрос, как удалить большие ошибки в вычислении небольших разностей давлений в толще воды. Главное же затруднение состояло в том, что было не ясно, к какому уровню следовало относить вычисленные Моном веса вертикальных столбов воды разной плотности. Вследствие этого составленная Моном карта течений Норвежского моря не только не могла носить количественный характер, но и общая картина циркуляции вызывала законные сомнения.

Разработанные В. Бьеркнесом и его учениками в конце прошлого — начале нынешнего столетия основы физической гид-

---

[1] Опубликовано в журнале «Океанология», т. VII, вып. 5, 1967.

родинамики, содержащие ряд важных теорем динамики бароклинной жидкости, в частности и знаменитую теорему Бьеркнеса об относительной циркуляции, вместе с новой «динамической» системой единиц, введенной Бьеркнесом для измерения вертикальных координат в атмосфере и море, послужили рациональной основой для разработки практических методов вычисления морских течений. Впервые подобный метод был сформулирован учениками Бьеркнеса — Сандстремом и Хелланд-Хансеном в 1903 г. [63]. В основу его были положены упомянутая теорема Бьеркнеса об относительной циркуляции в бароклинной жидкости и представление о горизонтальной «нулевой» изобарической поверхности, располагающейся на некоторой глубине в море, где движение морской воды практически отсутствует. Относительно «нулевой» изобарической поверхности отсчитывались динамические высоты вышележащих изобарических поверхностей, наклон которых связывался в итоге простым соотношением с горизонтальной составляющей скорости течения. В 1905 г. другим учеником Б. Бьеркнеса, Вальфридом Экманом, были сформулированы основы теории течений, возбуждаемых ветром в море.

Одним из наиболее замечательных результатов этой теории было открытие так называемой спирали Экмана, по которой вращается вектор скорости ветрового течения с увеличением глубины. Справедливость требует заметить, что на построение теории ветровых течений Экмана натолкнул Фритьоф Нансен, который первый заметил вращение течений с глубиной, измеряя их в Арктическом бассейне. Нансен с поразительной интуицией правильно объяснил это замечательное явление действием отклоняющей силы вращения Земли, но, не обладая достаточными знаниями в области математики и гидродинамики, обратился к В. Бьеркнесу с просьбой математически исследовать это интересное явление.

В своих воспоминаниях Бьеркнес пишет [55], что в ответ на просьбу Нансена он пригласил своего молодого тогда ученика В. Экмана, которому Нансен и изложил результаты наблюдений и свои догадки о причинах вращения течений с глубиной. «Уже к вечеру, — пишет Бьеркнес, — решение поставленной Нансеном задачи было получено Экманом в виде известной спирали».

Таким образом, к началу нынешнего века не только были созданы основы теории морских течений, но были разработаны в известной мере и методы их вычисления по наблюденному распределению плотности в море. Однако применение теории Бьеркнеса и Экмана к анализу результатов наблюдений развивалось чрезвычайно медленно.

До революции в России вовсе отсутствовали попытки применения формулы Хелланд-Хансена—Сандстрема для косвенного определения морских течений. Достаточно сказать, что отечественные гидрологи-мореведы получили возможность ознакомиться с циркуляционной теорией Бьеркнеса по статье Вознесенского [1] лишь спустя 15 лет после опубликования основных результатов этой теории.

Такая же участь постигла и теорию Экмана, изложение которой в переводе Пиотровского [16] появилось в России также в 1915 г., т. е. на 9 лет позднее популярного изложения экмановской теории, опубликованного в 1906 г. самим автором [58]. Применение «динамического метода» вычисления морских течений, основанного на формуле Хелланд-Хансена—Сандстрема, началось в СССР лишь в конце 20-х годов благодаря трудам Н. Н. Зубова. Этому ученому принадлежит несомненная и важная заслуга популяризации и широкого внедрения динамического метода в практику отечественного мореведения. В 1929 г. была опубликована первая работа Зубова [2], в которой приведен очень простой и поэтому понятный мореведам разных специальностей вывод формулы Хелланд-Хансена—Сандстрема. Вывод этой формулы, предложенный Зубовым из гидростатических соображений, весьма напоминал по идее первую, упоминавшуюся выше попытку, сделанную Моном еще в начале 80-х годов прошлого века. Однако, в отличие от Мона, рассуждения Зубова были физически более строгими и основывались на всем том принципиально важном, что давали динамическая система единиц Бьеркнеса и представление о «нулевой поверхности» как нижней границе бароклинного слоя в море. Сверх того, динамический метод в интерпретации Зубова содержал и важные упрощения вычислительной техники динамического метода, главное из которых состояло в замене употреблявшихся за рубежом аномалий удельного объема морской воды величиной условного удельного объема.

Значительно упрощали расчеты и составленные Н. Н. Зубовым таблицы, графики и номограммы. Работы Зубова [3, 4, 7] послужили толчком к массовому применению динамического метода в СССР для косвенного вычисления морских течений и составлению карт течений (так называемых динамических карт) для различных внутренних и окраинных морей в СССР. На рис. 1 приведена первая и наиболее подробная динамическая карта поверхности Баренцева моря, составленная Соколовым [23]; непрерывными линиями на ней изображены динамические горизонтали поверхности моря, а стрелками — направление течений.

Широкие возможности, открывающиеся благодаря «динамическому» методу, и первоначальные успехи в составлении динамических карт течений дали повод выводам о его универсальности. Однако, строго говоря, условия применимости динамического метода были неясными. За исключением условия стационарности движения, с очевидностью вытекавшего из вывода формул Хелланд-Хансена—Сандстрема на основании циркуляционной теоремы Бьеркнеса и из гидростатических соображений

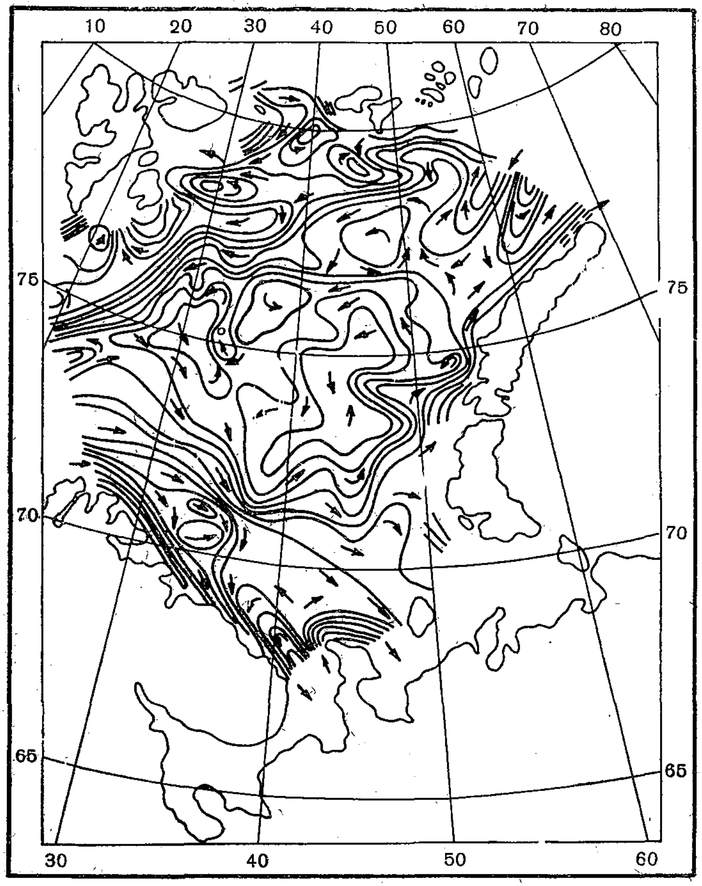

Рис. 1. Динамическая карта Баренцева моря, составленная А. В. Соколовым.

Мона—Зубова, было не ясно, к каким установившимся течениям динамический метод применим. Довольно громоздкий вывод расчетной формулы динамического метода из циркуляционной теоремы Бьеркнеса не давал отчетливого представления об условиях его применимости. Из этого вывода создавалось лишь впечатление, что динамический метод применим к течениям, обязанным своим происхождением неоднородности плотности воды, и притом к таким течениям, в которых роль трения пренебрежимо мала́. С другой стороны, геометрический вывод расчетной формулы динамического метода, предложенный Зубовым, давал повод последнему сделать утверждения о сравнительной универсальности динамического метода, пригодного, по мнению Зубова, для расчета любых установившихся течений.

Первые, отчетливо выраженные сомнения об универсальности динамического метода были высказаны Штокманом [39], а затем Парром [61]. С тех пор к применению динамического метода мореведы стали относиться с большей осторожностью. Не прекращались и попытки отчетливо установить границы применимости динамического метода. С этой целью, как указал Штокман [40], наиболее поучительно рассмотреть вывод расчетной формулы динамического метода не из циркуляционной теоремы Бьеркнеса или из гидростатических соображений Мона — Зубова, а непосредственно из исходных уравнений гидродинамики, применительно к случаю геострофического течения. Этим термином, как известно, называют установившееся течение, определяемое равновесием горизонтального градиента давления в морской воде и отклоняющей силой вращения Земли.

Позднее указанным путем воспользовался Фомин [36] в своей монографии о динамическом методе, являющейся полным и строгим, критическим изложением теоретических основ динамического метода и его применения в океанологической практике не только в СССР, но и за рубежом. Выдающиеся достоинства этой монографии явились причиной издания ее перевода за границей [67]. Фомин показал неточность представлений Зубова и Свердрупа о границах применимости динамического метода и более строгим, нежели Штокман, путем пришел к выводу, что динамическим методом вычисляются лишь геострофические или градиентные течения в море. Течения же, непосредственно возбуждаемые ветром, динамическим методом вычислять нельзя. При этом Фомин расшифровал понятие о «нулевой поверхности» как о поверхности, на которой должна достигаться взаимная компенсация составляющей градиента давления, обусловленной наклоном поверхности моря, и составляющей градиента давления, обусловленной неоднородностью поля масс. Фоминым были рассмотрены также вопросы точности динамического метода, приемы определения «нулевой поверхности» и другие важные вопросы практического применения динамического метода. Изложение проблемы в целом было сделано Фоминым в аспекте наиболее современных результатов теории морских течений.

Изучение влияния ветра на морские течения представляет собой важнейший раздел современной морской гидродинамики.

С этой проблемой мореведы и практики-мореплаватели сталкивались постоянно на протяжении многих десятилетий.

Любопытно, что создание в 1905 г. теории ветровых течений Экмана мало помогло разъяснению многочисленных вопросов, которые возникали у каждого, кто пытался объяснить различные особенности морских течений, наблюдаемые в действительности.

До начала 40-х годов XX века ведущая роль ветра как фактора, возбуждающего движение в поверхностных слоях морей и океанов, не отрицалась лишь в тех очевидных случаях, когда морские течения были направлены по ветру, как, например, в случаях пассатных течений в океанах и течений, обусловленных ветровым нагоном воды в мелководных морях, приводящим к резкому подъему уровня моря у наветренного берега.

Теория Экмана, рассматривавшая влияние ветра на течение в безбрежном океане, также указывала лишь на то, что на поверхности ветровое течение должно быть отклонено вправо от ветра в северном полушарии, обладая в направлении ветра определенной составляющей. Поэтому многие течения, направленные частично, а иногда и целиком против ветра, приписывались действию иных, нежели ветер, причин. К таким, несогласующимся с представлениями о влиянии ветра течениям относились в первую очередь экваториальные противотечения в океанах, располагающиеся в штилевой полосе между пассатами, но по бокам своим, а иногда целиком (зимой) направленные против пассатов. Не связывались с влиянием ветра и другие направленные против ветра течения в океанах и морях. Так, например, циркуляция против часовой стрелки, преимущественно существующая во внутренних морях типа Каспийского и Азовского морей и не нарушаемая ветрами одного и того же направления, часто дующими над всей акваторией упомянутых морей, не связывалась с ветром потому, что в этих случаях течения всегда в одной половине моря были направлены против ветра (против северного ветра у восточного берега Каспия и против восточного ветра в южной половине Азовского моря).

По этим причинам мореведы долгое время упорно приписывали речному стоку и отклоняющему влиянию вращения Земли главенствующую роль в возбуждении циклонической циркуляции во внутренних морях типа Азовского, Каспийского и Балтийского. Неразрешимой загадкой оставалась причина аномальной циркуляции по часовой стрелке в Аральском море. Происхождение экваториальных противотечений также было неясным. Уместно заметить, что над разрешением этой последней проблемы географы и геофизики безуспешно работали на протяжении шестидесяти лет, несмотря на то, что среди них были такие выдающиеся ученые, как Шотт и Крюммель, Свердруп и Дефант.

Итак, до начала 40-х годов нынешнего века лейтмотивом всех объяснений общих черт океанической и морской циркуляции и ее особенностей было признание ведущей роли «климатических» факторов (речной сток, конвективное и радиационное охлаждение и нагревание морской воды, испарение), создающих неоднородное поле плотности в море. Влиянию ветра приписывалась второстепенная и подчиненная роль, роль временного фактора, могущего лишь повлиять на распределение течений в поверхностном слое моря.

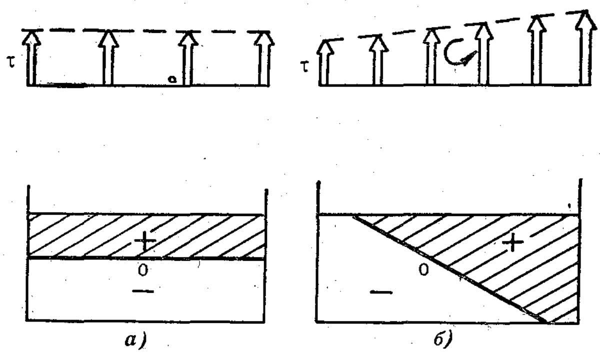

Рис. 2. Схемы горизонтальной циркуляции в вертикальном сечении моря, возбуждаемой равномерным (*а*) и поперечно-неравномерным (*б*) ветром.

Вверху — скорость ветра τ; внизу — направление течений: плюс (+) — по ветру; минус (—) — против ветра.

В 1940 г. Штокман [41] рассмотрел простейший случай циркуляции, возбуждаемой постоянным поперечным градиентом скорости прямолинейного ветра в срединном, поперечном ветру сечении замкнутого моря постоянной глубины. Эта простая задача позволила прийти к выводам, вся важность которых для объяснения закономерностей циркуляции в морях и океанах была осознана несколько позднее. Выводы эти заключались в том, что, в отличие от установившейся циркуляции в замкнутом бассейне, возбуждаемой равномерным ветром и осуществляющейся в вертикальной плоскости, когда в поверхностном слое вода всюду движется по ветру, а на некоторой глубине в силу компенсации существует всюду противоположное ветру течение (рис. 2 *а*), поперечная неравномерность ветра приводит к замкнутой циркуляции не только в вертикальной, но и в горизонтальной плоскости. В зависимости от «перепада» скорости прямолинейного ветра в поперечном его направлении замкнутая циркуляция в горизонтальной плоскости может быть ярко выражена не только в глубинных слоях, но и на поверхности моря, где движение воды в некоторой части моря будет направлено против ветра (рис. 2 *б*), причем, если скорость ветра убывает справа налево (если смотреть по ветру), т. е. обладает циклонической завихренностью, то циркуляция воды в горизонтальной плоскости бассейна будет направлена против часовой стрелки, и наоборот (рис. 2 *б*). Этот результат еще в 1940 г. навел Штокмана на мысль, что обычная циклоническая циркуляция, наблюдаемая в морях даже при ветрах одного и того же направления над всей поверхностью моря, как, например, при восточных ветрах над Азовским морем или северо-восточных и юго-западных ветрах над Каспийским морем, может быть обязана своим происхождением не только (как думали ранее) речному стоку и эффекту вращения Земли, но в большей мере динамическому эффекту поперечной неравномерности ветра. В самом деле, поскольку в ветровых полях в северном полушарии преобладает циклоническая завихренность (убывание скорости справа налево, смотря по ветру), то эта преобладающая неравномерность ветра приведет в итоге к преобладанию циклонической циркуляции (против часовой стрелки) во внутренних морях и озерах северного полушария во всех случаях прохождения циклонов над тем или иным морем, как это изображено на рис. 3 [1].

Обобщение этих выводов на случай произвольной поперечной неравномерности ветра позволило Штокману в 1944 г. прийти к заключению о важной роли поперечной неравномерности ветра в возбуждении горизонтальной циркуляции не только во внутренних морях, но и высказать предположение, что причиной экваториальных противотечений в океанах является поперечная неравномерность скорости пассатов [42].

Поскольку приведенные выводы были сделаны без учета эффекта вращения Земли, то для распространения их на проблему экваториальных противотечений необходимо было учесть и влияние силы Кориолиса. Это и было сделано Штокманом [43, 45] путем обобщения теории Экмана о течениях в однородном океане на случай поперечной неравномерности ветра (рассматривалось по-прежнему срединное сечение некоторой замкнутой области). Оказалось, что все главные особенности экваториальных противотечений можно объяснить как следствие

[1] В свете этой современной концепции более пресная вода, прижатая к берегам внутренних морей северного полушария, является не причиной, а следствием антициклонической циркуляции, порождаемой поперечной неравномерностью ветра и силой Кориолиса.

сгонно-нагонного эффекта поперечной неравномерности зональных ветров (пассатов) над океанами. Примечательно, что многие количественные результаты теории, построенной на таком, казалось бы, рискованном допущении, как однородность морской воды, все же оказались в очень хорошем согласии с данными наблюдений [45].

Так, например, теория указывала способ определения границ противотечений, опирающийся на фактическое изменение зональной составляющей касательного трения ветра над океанами [45]. Определенные этим способом границы противотечения очень хорошо совпали с наблюдениями [52].

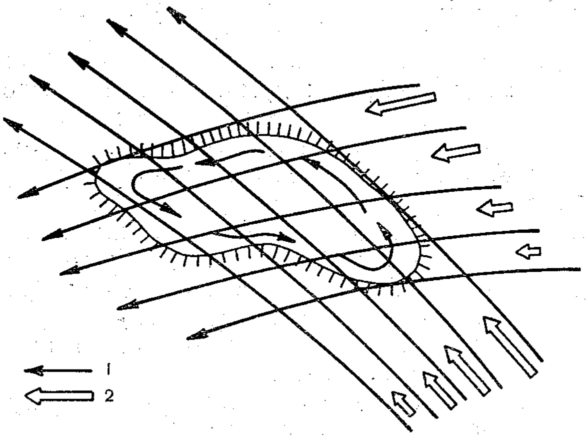

Рис. 3. Схема горизонтальной циркуляции в замкнутом море, возбуждаемой ветрами разных направлений с одной и той же поперечной неравномерностью.

1 — направление ветра; *2* — скорость ветра.

Важные теоретические результаты, полученные весьма простым путем для однородного моря постоянной глубины, естественно, породили желание обобщить их и на случай меняющейся глубины мелкого моря или озера. Применяя тот же простой метод «срединного сечения», т. е. рассматривая продольные составляющие течения в поперечном неравномерному ветру срединном сечении моря удлиненной формы, Штокман учел и меняющуюся глубину в поперечном сечении моря [50]. Сверх ожидания, подобного рода усложнение задачи, приближающее ее к реальным условиям, не только не усложнило ее решения, но позволило сразу удовлетворить два естественных граничных условия: равенство нулю продольной (по ветру) составляющей течения на дне и на берегу моря, чего нельзя было достичь в задаче о море постоянной глубины, неизбежно представляющем собой в поперечном сечении форму прямоугольника.

Полученные в итоге подобного обобщения результаты не только позволили сделать выводы о распределении противотечений, концентрирующихся в море переменной глубины в области желобообразных углублений дна, но, главное, позволили решить вопрос о причинах аномальной циркуляции в Аральском море, осуществляющейся там по часовой стрелке. Прилагая вывод теории Штокмана к условиям Аральского моря, Симонов показал [22], что причина упомянутого странного явления — это характерная для Аральского моря антициклоническая поперечная неравномерность преобладающих там северных ветров (убывание скорости ветра слева направо, если смотреть по ветру) и специфическое распределение глубин, характеризующееся удлиненной впадиной дна в западной части моря. В свою очередь, обобщение задачи о течениях, возбуждаемых неравномерным ветром в срединном поперечном сечении моря переменной и значительной глубины, когда следует учитывать и эффект силы Кориолиса, было сделано Федоровым [34], с успехом применившим свои результаты к расчету катастрофического штормового нагона в Северном море [35].

Однако все перечисленные теоретические результаты, позволившие вскрыть причину многих особенностей горизонтальной циркуляции в морях и океанах, базировались все же на представлении об однородности морской воды. Поэтому понятно было стремление исследовать циркуляцию, возбуждаемую ветром в неоднородной по плотности воде, считаясь вместе с тем и с ограниченностью морей и океанов в реальных условиях. Обобщение экмановской теории в этом случае было малоэффективным, так как, помимо однородности воды, фигурировавшие в этой теории граничные условия были очень сложны, что и не дало возможности Экману рассмотреть приложение выведенных им уравнений к реальным условиям ограниченного океана. С целью обойти указанные затруднения Штокман предложил в 1946 г. [44] рассматривать не течения на отдельных глубинах неоднородного океана, а интегральный, результирующий перенос масс или полные потоки от поверхности моря до некоторой глубины, ниже которой движение отсутствует (нижняя граница бароклинного слоя). Идея Штокмана заключалась в том, чтобы путем преобразования исходных дифференциальных уравнений движения на отдельных уровнях получить в итоге дифференциальное уравнение относительно полных потоков. Помимо простых граничных условий, которым должно было подчиняться уравнение полных потоков, это уравнение не содержало в явной форме не только неизвестную величину плотности морской воды, но и величину коэффициента турбулентного трения, обусловленную вертикальным обменом количества движения.

В итоге дифференциальное уравнение полных потоков связывало искомую величину полных потоков (выражаемую посредством другой величины — функции полных потоков) с завихренностью касательного трения ветра на поверхности моря и величиной «бокового» турбулентного трения. Сначала уравнение полных потоков было введено Штокманом в предположении постоянства отклоняющей силы вращения Земли. В этом случае оказалось, что интегральная (по вертикали) горизонтальная циркуляция в океане вообще не зависит от силы Кориолиса и движение осуществляется так, как будто Земля не вращается. В аспекте теории полных потоков Штокманом были исследованы различные типы циркуляций, возбуждаемых завихренностью ветрового поля над океанами, а также получены соотношения между полем масс, ветром и полными потоками и качественно исследовано влияние рельефа дна на циркуляцию в неоднородном океане [46, 47].

Метод полных потоков оказался весьма плодотворным и нашел широкое применение в решении разнообразных проблем современной динамической океанологии.

Так, в 1947 г. Свердруп с позиции метода полных потоков исследовал экваториальную циркуляцию в Тихом океане. Самым же важным событием в динамической океанологии, обязанным применению метода полных потоков, было открытие Стоммелом [64] причины интенсификации течений у западных окраин океанов. Причина эта, как показал Стоммел, кроется в широтном изменении силы Кориолиса, в результате чего в возбуждаемой завихренностью ветра горизонтальной циркуляции у западных берегов возникают пограничные слои с большими значениями скоростей и их поперечных градиентов, т. е. хорошо знакомые всем Гольфстрим и Куросио. Вслед за работой Стоммела появилось исследование Манка [60], который посредством того же метода полных потоков подробно исследовал многие важные детали горизонтальной циркуляции, возбуждаемой поперечной неравномерностью зональных ветров над океанами. С тех пор количество работ по динамике морских течений, базирующихся на методе полных потоков, непрерывно возрастало. Были исследованы не только установившаяся циркуляция при различных очертаниях берегов морских бассейнов, но и развитие полных потоков под действием ветра.

Наконец, недавно метод полных потоков был применен в исследовании эффекта нелинейных, инерционных членов в исходных уравнениях движения. Следуя этому пути, Кэрриер и Робинсон [56] попытались объяснить эффектом инерции причину отрыва Гольфстрима от побережья Америки. Однако это интереснейшее явление не получило в упомянутой работе удовлетворительного объяснения, так как в ней были допущены неточности и ошибочные выводы, не позволяющие уверенно судить о причинах отрыва Гольфстрима от побережья Америки.

Наиболее общий и достаточно строгий подход к этой проблеме был указан в работах Ильина и Каменковича [8, 9], которые учли не только эффект инерции, но и эффект «бокового» турбулентного трения. Существенное развитие метод полных потоков получил в работе Каменковича [10], сформулировавшего в дополнение к граничным условиям на «внешних» берегах морских бассейнов и условия, которые должны выполняться на внутренних контурах «многосвязных областей», какими являются океаны, ограниченные извне не только материками, но и изнутри многочисленными островами любой формы. Этот существенный результат Каменковича позволил ему получить реальную величину расхода Антарктического кругового течения исходя лишь из поля ветра, что не удавалось предыдущим исследователям [11].

Вместе с развитием метода полных потоков применительно к неоднородному океану этот метод получил существенное развитие применительно к однородному морю малой и средней глубины. Развитие это целиком обязано многочисленным трудам Фельзенбаума, не только обобщившего результаты Штокмана и Федорова и строго доказавшего некоторые гипотетические и интуитивные положения, содержащиеся в приближенных методах, примененных Штокманом, но и разработавшего общий метод расчета течений на разных уровнях в морях малой и средней глубины в реальных географических условиях. Наиболее существенные из полученных Фельзенбаумом результатов изложены им в работах [25—27] и обобщающей монографии по теории и методам расчета морских течений [32].

Несмотря на ряд преимуществ метода полных потоков в изучении горизонтальной циркуляции в океанах, позволивших установить генезис многих важных ее особенностей, этот метод все же обладает одним существенным недостатком, который заключается в невозможности вычислить течения на отдельных горизонтах.

Правда, для устранения этого недостатка Ридом [62] и Штокманом [48] были предложены модели плотности, позволяющие перейти от величин полных потоков к скорости на отдельных уровнях. Хотя эти методы и могут привести во многих случаях к удовлетворительным результатам [49, 28], все же модели плотности служат лишь паллиативом, исключающим возможность расчета течений по полю полных потоков в случае многослойной циркуляции, когда ниже определенной глубины течение направлено в сторону, противоположную течению в вышележащих слоях. Указанный недостаток коренится в самом методе полных потоков, исключающем возможность однозначно выделить из результирующего переноса его составляющие на отдельных уровнях без того, чтобы в известной мере не предопределить искомый результат, заданный моделью плотности, какой бы общностью последняя ни обладала. Собственно говоря, одна из основных идей метода полных потоков и состояла в том, чтобы исключить в явной форме распределение плотности при изучении течений неоднородного океана. Это объясняется тем, что в трех исходных уравнениях движения в неоднородном океане вместе с четвертым уравнением неразрывности оказывалось пять неизвестных величин (три компоненты скорости, плотность и давление), что не давало возможности вместе с реальными граничными условиями «замкнуть» исходную систему уравнений, т. е. сделать задачу математически определенной. Итак, не задавая a priori схему распределения плотности, нельзя было вычислить распределение скоростей течения на отдельных уровнях, что и привело, как указывалось выше, к созданию «обходного» пути, к расчету интегрального переноса методом полных потоков.

Выход из обрисованного и, казалось, безнадежного положения был указан Линейкиным [12, 13], предложившим замкнуть обычную исходную систему четырех дифференциальных уравнений своеобразным пятым уравнением «диффузии плотности», аналогичным уравнению диффузии солености и тепла в море (получаемом из них приближенно). Эта исключительно оригинальная и плодотворная идея позволила Линейкину рассчитать применительно к движению, возбуждаемому ветром в прямолинейной канале, вертикальное распределение скоростей течения и распределение плотности в поперечном сечении канала. Помимо этого, Линейкиным было исследовано вертикальное затухание скоростей течения вследствие эффекта бокового трения и определена толщина бароклинного слоя (в котором сконцентрировано движение) в зависимости от ряда определяющих параметров. Эти важные результаты Линейкина, суммированные им в специальной монографии [14], произвели сильное впечатление на мореведов и нашли заслуженное признание за рубежом [24].

Но как всегда бывает в истории науки, пролагателям новых путей не всегда дано сколько-нибудь полно завершить постройку того нового здания науки, фундамент которого заложен их новыми идеями. Эта не менее важная задача обычно выпадает на долю других ученых, развивающих идеи своих предшественников и доводящих их до большей логической стройности и широкого практического применения.

Так было, например, с динамическим методом и с методом полных потоков, так случилось и с идеями Линейкина. Их развитие и практическое совершенствование выпало на долю Саркисяна. Правда, одна из его ранних работ касалась развития метода полных потоков применительно к реальным очертаниям берегов Северной Атлантики [17]. Однако последующие исследования Саркисяна [19, 18] касаются проблем расчета неустановившейся циркуляции в океане с учетом уравнения диффузии плотности Линейкина, пополненного членами адвекции плотности, не учитывавшимися Линейкиным в его первоначальной модели.

Как показал Саркисян [20], учет адвекции плотности играет очень существенную роль в распределении течений и поля масс в реальных условиях. В частности, адвекция плотности способствует аналогичной широтному изменению силы Кориолиса интенсификации течений у западных окраин океанов. Учет этого фактора позволяет устранить и некоторые несоответствия с данными наблюдений, имевшими место в теории Линейкина. Помимо учета нелинейных эффектов инерции, адвекции плотности и эффекта широтного изменения силы Кориолиса, теория Саркисяна упразднила концепцию[1] о «нулевой поверхности» (являющейся нижней границей бароклинного слоя в океане), фигурировавшей во многих теориях морских течений и в методе полных потоков. При этом Саркисяну удалось количественно оценить и эффект рельефа дна. Широко используя возможности, открывшиеся благодаря электронно-вычислительным машинам, Саркисян довел свою обобщенную теорию до уровня методов практического расчета течений в реальных географических условиях.

Результаты его многочисленных работ обобщены в монографии [21], служащей ценным пособием как для теоретика, так и для практика.

Возможности расчета течений на отдельных уровнях реального, неоднородного океана, открывшиеся благодаря фундаментальным работам Линейкина и Саркисяна, давали повод, казалось, навсегда распрощаться с динамическими моделями циркуляции в однородном океане при решении теоретических проблем океанической циркуляции, возникших в последнее время. К одной из таких проблем относится вопрос о причинах недавно

[1] Как показали недавние измерения, океанические течения обладают весьма ощутимой скоростью на больших глубинах порядка 2000—3000 м.

открытых глубинных экваториальных противотечений в Тихом и Атлантическом океанах (течения Кромвелла и Ломоносова). Первые попытки, предпринятые в указанном направлении Стоммелом [65] и Чарни [57], нельзя признать вполне удачными, так как названные авторы рассматривали лишь локальную структуру течений на экваторе вне всякой связи с полем течений в окружающей области и притом a priori задавали некоторые величины, связанные в завуалированой форме с искомыми. Однако в недавно опубликованных работах Фельзенбаума [33] и Шапиро [37] убедительно показано, что все главные особенности экваториальной циркуляции в океанах, включая и загадочные противотечения Кромвелла и Ломоносова, можно объяснить с позиций теории циркуляции в однородном океане.

Работами Фельзенбаума и Шапиро вновь подтверждена правильность современного взгляда на океаническую циркуляцию как неразрывное целое, в математическом описании которой вполне пригодны модели однородной жидкости. Оказывается, что возникновение экваториальных противотечений Кромвелла и Ломоносова в первую очередь обязано не бароклинности океана или инерционным эффектам, а совместному действию поля ветра, отклоняющей силы вращения Земли (меняющейся по широте) и ограниченности океанических областей, что создает неразрывное в своем единстве поле океанических течений.

Говоря об успехах советских ученых в построении современной теории морских течений, нельзя обойти молчанием и проблему дрейфа льдов. Эта практически важная проблема, тесно связанная с теорией морских течений, впервые была сформулирована Зубовым в СССР [5] и Свердрупом в Норвегии [66].

Позднее Шулейкин [54] и Швец [38] существенно продвинулись вперед по сравнению с результатами своих предшественников. Однако теории Зубова, Свердрупа, Шулейкина и Швеца страдали тем же существенным недостатком, что и теория морских течений Экмана, а именно, так же как и в теории Экмана, анализировавшей поведение течения в изолированной точке моря вне связи с полем течений в окружающей ее области, упомянутые теории дрейфа льдов были приурочены к дрейфу изолированной льдины вне всякой связи с дрейфом соседних льдин, рассматриваемых в совокупности. Развитие теории морских течений как теории поля течений, что впервые осуществилось благодаря идеям метода полных потоков, позволило Фельзенбауму построить совершенно новую теорию дрейфа множества льдов [29—31]. Теория дрейфа льдов Фельзенбаума является крупным достижением современной динамики моря. Этой теорией разрешены, например, такие важные для практики вопросы, как определение областей сжатия и разрежения льдов, решить которые теории дрейфа одиночной льдины Зубова и Шулейкина вообще были не в состоянии.

Наконец, следует упомянуть об одной важной проблеме динамики морских течений, постановка и разработка которой принадлежит исключительно трудам русских и советских ученых, — это вопрос о причинах аномальной циркуляции около островов, на который впервые обратил внимание в конце прошлого века адмирал Макаров [15].

Этот выдающийся флотоводец и океанограф заметил, что вокруг некоторых островов наблюдается циркуляция, противоположная той, какая имеет место в области океана, включающей остров. В качестве такой аномальной циркуляции Макаров указал на циркуляцию вокруг о. Тайвань (Формоза) и объяснил ее совместным эффектом стока пресной воды у острова и силы Кориолиса.

Действием же силы Кориолиса Зубов объяснил и противоположные течения, наблюдаемые у противоположных берегов морских проливов [6]. Однако, как показал Штокман [51], объяснения Макарова и Зубова нельзя считать убедительными. Причина указанного загадочного явления, по мнению Штокмана, по-прежнему кроется в эффекте поперечной неравномерности ветров, изменяющих, в зависимости от размеров острова, водообмен в пределах области океана, включающей остров. Исходя из концепции Штокмана [53], можно указать такие «критические» размеры острова, когда должна наступить смена противоположной циркуляции у острова на циркуляцию, согласную с общим круговоротом воды в области, включающей остров.

Хотя разработка этой проблемы еще далека от своего завершения, сформулированные взгляды на причину аномальных циркуляций у островов (и, следовательно, в проливах) ставят определенные задачи и намечают пути как для дальнейшего теоретического исследования, так и для получения важных для теории фактов путем организации океанографических наблюдений.

Институт океанологии
Академии наук СССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Вознесенский А. О циркуляции морской воды. Зап. по гидрографии, XXXIX, вып. 2, 1915.
2. Зубов Н. Н. Вычисление элементов морских течений по данным гидрологических разрезов. Зап. по гидрографии, LVIII, 1929.
3. Зубов Н. Н. Гидрологические работы в юго-западной части Баренцева моря летом 1928 г. Тр. ГОИН, 11, вып. 4, 1932.
4. Зубов Н. Н. Динамический метод обработки океанологических наблюдений. ЦУЕГМС, Л.—М., 1935.

5. Зубов Н. Н. Соображения о движении льдов под влиянием ветра. Исследования морей СССР, вып. 21, 1935.
6. Зубов Н. Н. Динамическая океанология. М.—Л., 1947.
7. Зубов Н. Н., Мамаев О. И. Динамический метод вычисления элементов морских течений. Гидрометеоиздат, 1956.
8. Ильин А. М., Каменкович В. М. О влиянии трения на океанические течения. ДАН СССР, т. CL, № 6, 1963.
9. Ильин А. М., Каменкович В. М. О структуре пограничного слоя в двумерной теории океанических течений. Океанология, т. IV, вып. 5, 1964.
10. Каменкович В. М. Об интегрировании уравнений теории морских течений в неодносвязных областях. ДАН СССР, т. CXXXVIII, № 5, 1961.
11. Каменкович В. М. К теории Антарктического кругового течения. Тр. ИОАН, т. LVI, 1962.
12. Линейкин П. С. К динамике установившихся течений в неоднородном море. ДАН СССР, т. CV, № 6, 1955.
13. Линейкин П. С. К теории неустановившихся ветровых течений в глубоком море. ДАН СССР, т. CVI, № 1, 1956.
14. Линейкин П. С. Основные вопросы динамической теории бароклинного слоя моря. Гидрометеоиздат, 1957.
15. Макаров С. О. Океанологические работы, стр. 207. Географгиз, 1950.
16. Пиотровский В. К теории морских течений. Зап. по гидрографии, XXXI, вып. 4, 1915.
17. Саркисян А. С. Расчет стационарных ветровых течений в океане. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 6, 1954.
18. Саркисян А. С. К теории неустановившихся ветровых течений в однородном океане. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 10, 1957.
19. Саркисян А. С. О нестационарных ветровых течениях в бароклинном океане. ДАН СССР, т. CXIX, № 4, 1958.
20. Саркисян А. С. Адвекция плотности и интенсификация ветровых течений к западному побережью океана. ДАН СССР, т. CXXXIV, № 6, 1960.
21. Саркисян А. С. Основы теории и расчет океанических течений. Гидрометеоиздат, 1966.
22. Симонов А. И. К вопросу о причинах антициклонической циркуляции вод Аральского моря. Метеорология и гидрология, № 2, 1954.
23. Соколов А. В. Динамическая карта Баренцева моря. Тр. Океаногр. ин-та, т. II, вып. 2, 1932.
24. Стоммел Г. Обзор теорий морских течений. «Проблемы океанической циркуляции». Сб. переводов. Изд-во «Мир», М., 1965.
25. Фельзенбаум А. И. Связь ветра с уровнем и установившимися течениями мелкого моря. ДАН СССР, т. CIX, № 1, 1956.
26. Фельзенбаум А. И. Обобщение теории Экмана на случай неравномерного ветра и произвольного рельефа дна замкнутого моря. ДАН СССР, т. CIX, № 2, 1956.
27. Фельзенбаум А. И. Метод полных потоков в классической теории морских течений. Тр. ИОАН, т. XIX, 1956.
28. Фельзенбаум А. И. Теоретические основы расчета дрейфа льдов в Центральном Арктическом бассейне. ДАН СССР, т. CXIII, № 2, 1957.
29. Фельзенбаум А. И. О сжатиях и разрежениях льдов в Арктическом бассейне. ДАН СССР, т. CXVI, № 2, 1957.
30. Фельзенбаум А. И. Теории установившегося дрейфа льдов и расчет их среднего многолетнего дрейфа в Арктическом бассейне. Проблемы Севера, вып. 2, 1958.

31. Фельзенбаум А. И. Теоретические основы и методы расчета установившихся морских течений. Изд. АН СССР, 1960.
32. Фельзенбаум А. И. К теории установившихся ветровых течений в океане. Сб. «Течение Ломоносова». Тр. Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, вып. 34, Киев, 1966.
33. Фельзенбаум А. И., Фомин Л. М., Штокман В. Б. Метод расчета глубинных морских течений по поверхностному течению и градиенту атмосферного давления. Тр. ИОАН, т. XXV, 1957.
34. Федоров К. Н. Ветровые течения в море переменной глубины. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 3, 1955.
35. Федоров К. Н. Уровень и течения во время катастрофического шторма в Северном море в 1953 г. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 4, 1956.
36. Фомин Л. М. Теоретические основы динамического метода и его применение в океанологии. Изд. АН СССР, 1961.
37. Шапиро Н. Б. Влияние ветра на течение в экваториальной зоне океана. Сб. «Течение Ломоносова». Тр. Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, вып. 34, Киев, 1966.
38. Швец М. Е. К гидромеханической теории дрейфа ледяных полей. Метеорология и гидрология, № 6, 1946.
39. Штокман В. Б. О применимости динамического метода обработки гидрологических данных в изучении течений Каспийского моря. Ж. геофизики, № 4, 1937.
40. Штокман В. Б. Теоретические основы вычисления стационарных геострофических течений по данным океанографических измерений. Проблемы Арктики, № 2, 1941.
41. Штокман В. Б. Ветровой нагон и горизонтальная циркуляция в замкнутом море небольшой глубины. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 1, 1941.
42. Штокман В. Б. Поперечная неравномерность нагонного ветра как одна из важных причин горизонтальной циркуляции в море. ДАН СССР, т. XLIX, № 2, 1945.
43. Штокман В. Б. Теория экваториальных противотечений в океанах. ДАН СССР, т. LII, № 4, 1946.
44. Штокман В. Б. Уравнения поля полных потоков, возбуждаемых ветром в неоднородном море. ДАН СССР, т. LIV, № 5, 1946.
45. Штокман В. Б. Экваториальные противотечения в океанах. Гидрометеоиздат, Л., 1948.
46. Штокман В. Б. Исследование влияния ветра и рельефа дна на результирующую циркуляцию и распределение масс в неоднородном океане или в море. Тр. ИОАН, т. III, 1949.
47. Штокман В. Б. Влияние рельефа дна на направление морских течений. Природа, № 11, 1949.
48. Штокман В. Б. Определение скоростей течения и распределения плотности в поперечном сечении бесконечного канала в зависимости от эффекта ветра и бокового трения в поле силы Кориолиса. ДАН СССР, т. LXXI, № 1, 1950.
49. Штокман В. Б. Определение стационарных течений и поля масс, обусловленных ветром в бароклинном море. Тр. ИОАН, т. VI, 1951.
50. Штокман В. Б. Влияние рельефа дна и поперечной неравномерности ветра на горизонтальную циркуляцию в мелком море или водохранилище. Метеорология и гидрология, № 8, 1953.
51. Штокман В. Б. О причине круговых течений около островов и противоположных течений у берегов проливов. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 4, 1954.

52. Штокман В. Б. Теоретическое определение меридиональных границ зональной циркуляции в северной половине Тихого океана. Метеорология и гидрология, № 5, 1956.
53. Штокман В. Б. Качественный анализ причин аномальной циркуляции вокруг океанических островов. Изв. АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», т. II, № 11, 1966.
54. Шулейкин В. В. Дрейф ледяных полей. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 1, 1938.
55. Bjerknes V., Bjerknes J., Solberg H., et a. Hydrodynamique physique (avec applications à la météorologie dynamique), III. Les presses Universitaires de France, 1934.
56. Carrier G. F. and Robinson A. R. On the theory of a wind-driven ocean circulation. J. Fluid Mech., 20, No. 6. 1962. (См. также сб. «Проблемы океанической циркуляции». Изд-во «Мир», 1965.)
57. Charney J. Non-linear theory of a wind-driven homogeneous layer near the equator. Deep-Sea Res., 6, No. 4, 1960.
58. Ekman V. W. Beiträge zur Theorie der Meeresströmungen. Annalen der Hydr. u. Marit. Met., 34, 1906.
59. Mohn H. Die Strömungen des Europäischen Nordmeeres. Petermann's Mitteilungen. Erganzungsheft, No. 79, Gotha, 1885. (См. также Krümmel O. Handbuch der Ozeanographie, Stuttgart, II, 1911.)
60. Munk W. On the wind-driven ocean circulation. J. Meteorol., 7, No. 2, 1950. (См. также указанную в п. 64 книгу Стоммела о Гольфстриме.)
61. Parr A. E. On the validity of the dynamic topographic method for the determination of ocean current trajectories. J. Mar. Res., I, No. 2, 1938.
62. Reid R. O. A model of the vertical structure of mass in equatorial wind-driven currents of a baroclinic ocean. J. Marine Res., III, No. 3, 1948.
63. Sandström J. W. und Helland-Hansen B. Über die Berechnung von Meeresströmungen. Rep. on Norw. Fish. and Marine Investig., 1903.
64. Stommel H. The westward intensification of wind-driven ocean currents. Trans. Amer. Geophys. Un., 29, No. 2, 1948. (См. также: Стоммел Г. «Гольфстрим». ИЛ, 1963.)
65. Stommel H. Wind-drift near the equator. Deep-Sea Res., 6, No. 4, 1960.
66. Sverdrup H. The wind-drift of the ice on the North-Siberian Shelf. Sci. Rep. of Norwegian North Exped., II, No. 1, Bergen, 1928.
67. Fomin L. M. The dynamic method in oceanography. Elsevier Oceanograph. Series, 2, Elsevier Publ. Comp. Amsterdam—London—New York, 1964.

ВЕТРОВОЙ НАГОН И ГОРИЗОНТАЛЬНАЯ ЦИРКУЛЯЦИЯ В ЗАМКНУТОМ МОРЕ НЕБОЛЬШОЙ ГЛУБИНЫ[1]

В статье излагаются результаты приближенного расчета стационарной (горизонтальной) циркуляции, возбуждаемой ветром в центральной области замкнутого бассейна постоянной глубины, продольные размеры которого намного ($10^5 \div 10^6$) превышают глубину. Учтено влияние переменного коэффициента внутреннего турбулентного трения, меняющегося в зависимости от глубины по эмпирическому закону Прандтля. Указаны возможные пределы для угла наклона свободной поверхности. Указана возможность возникновения противотечения на поверхности вследствие неравномерности ветра (при одном и том же направлении ветра). Результаты вычислений применяются к типичному случаю ветрового нагона в заливе Карабогаз (Кара-Богаз-Гол) и сопоставляются с экспериментальными данными.

Сгонно-нагонный эффект и связанный с ним наклон поверхности моря в направлении, обратном ветру, хорошо известен с давних пор на примере таких замкнутых водоемов морского типа, какими являются Азовское и Аральское моря, а также заливы Каспийского и Аральского морей.

Сложный механизм ветрового нагона в замкнутом море небольшой глубины, мало подверженном влиянию вращения Земли, неизвестен во всех деталях. Тем не менее можно в общих чертах, a priori, установить основные характерные особенности циркуляции, возбуждаемой ветром в замкнутом море, когда компонентами кориолисовой силы можно пренебречь в сравнении с компонентами сил трения, возникающих в вязкой жидкости.

Вследствие вязкости поверхностный слой моря увлекается в направлении действующей силы (тангенциальное давление ветра), что приводит к накоплению жидкости у наветренного берега («подпор») и, следовательно, к наклону поверхности

[1] Опубликовано в Известиях Академии наук СССР, серия геогр. и геофиз., № 1, 1941 г. Представлено академиком О. Ю. Шмидтом.

моря. Возникающий при этом градиент давления, направленный в сторону, противоположную ветру, обусловливает в свою очередь глубинное течение, направленное в придонном слое против ветра и компенсирующее непрерывный приток воды у наветренного берега в поверхностном слое моря. Полная компенсация «нагонного» потока глубинным противотечением достигается, по-видимому, не мгновенно, в силу чего при развитии такой циркуляции на первых порах, как показывают наблюдения, уровень у наветренного берега быстро повышается. Однако с увеличением горизонтального градиента давления увеличивается и мощность глубинного противотечения, вследствие чего наклон поверхности моря начинает уменьшаться, приближаясь к стационарному наклону, который, очевидно, наступит тогда, когда тангенциальные напряжения, обусловленные вязкостью и отнесенные к единице объема жидкости, уравновесятся градиентом давления и наступит полная компенсация нагонного потока глубинным противотечением.

Приближенный расчет такой установившейся циркуляции и величины наклона поверхности моря составляет содержание настоящей статьи. Нужно при этом отметить, что расчету указанной циркуляции было посвящено в свое время исследование Аракава [1]. Еще ранее В. Экман [2] определил величину наклона поверхности моря как следствие ветрового нагона. Вот почему, останавливаясь в начале статьи на более простом, хотя и менее строгом выводе основных соотношений, полученных Аракава, мы уделяем основное внимание в дальнейшем тому изменению результатов расчета, которое мы получаем, учитывая переменную величину коэффициента внутреннего турбулентного трения, приближая тем самым условия задачи к реальным условиям морской циркуляции.

Измерения нагона, осуществленные недавно Н. И. Разумовским [3] в заливе Карабогаз, позволили нам в заключение применить полученные соотношения к реальному объекту с целью вычисления важных эмпирических коэффициентов, фигурирующих в общепринятой квадратичной зависимости между скоростью ветра и его тангенциальным давлением на поверхности моря, а также величины параметра «шероховатости» (в смысле Прандтля) водной поверхности залива.

1. Приближенный расчет горизонтальной ветровой циркуляции и наклона уровня замкнутого однородного моря

Выясним прежде всего элементы горизонтальной циркуляции, возбуждаемой равномерным и стационарным ветром в некотором идеализированном море, имеющем форму двухразмерного замкнутого бассейна постоянной глубины h и наполненном однородной жидкостью плотности ρ.

Начало прямоугольной системы координат xy совместим с невозмущенной горизонтальной свободной поверхностью жидкости в бассейне. Ось z направим вниз.

Если отклоняющая сила вращения Земли отсутствует, то стационарная циркуляция воды в бассейне будет описываться следующей системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=u\frac{\partial u}{\partial x}+w\frac{\partial u}{\partial z},\\ &g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\mu}{\rho}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)=u\frac{\partial w}{\partial x}+w\frac{\partial w}{\partial z}\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

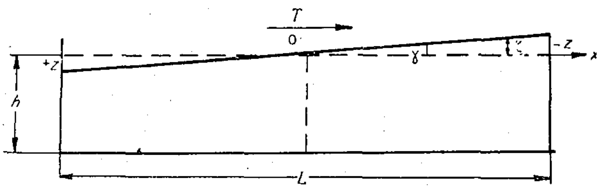

Рис. 1.

и уравнением неразрывности, которое применительно к рассматриваемому движению имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{2}$$

где через u и w обозначены компоненты скорости в направлении осей x и z соответственно, g — ускорение силы тяжести, p — давление, μ — коэффициент турбулентного внутреннего трения, величину которого мы полагаем постоянной, ρ — неизменяющаяся плотность жидкости.

Если мы заранее условимся, что продольные размеры бассейна L (направление x) велики и намного превышают его глубину $\left(\frac{L}{h}=10^6\div10^5\right)$, что обычно имеет место в природных условиях, то всеми членами, содержащими вертикальную компоненту скорости w, можно будет пренебречь в центральных областях бассейна (рис. 1). Равным образом при сделанных допущениях мы можем пренебречь и членами $u\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

Рассматривая циркуляцию в центре бассейна, мы будем, пренебрегая условиями на продольных границах, описывать ее приближенно вместо уравнений (1) такими уравнениями:

$$\frac{\mu}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = g\rho, \tag{3}$$

которые, если учесть порядок отброшенных членов (в природных условиях), выполняются примерно с точностью до 0,001.

Считая поверхность воды в бассейне поверхностью плоской, выразим, далее, величину $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}$, фигурирующую в первом уравнении (3), через постоянный угол γ (см. рис. 1) наклона свободной поверхности жидкости в бассейне по отношению к горизонтальному ее положению (OX) в невозмущенном состоянии.

Надобно при этом отметить, что в природных условиях угол наклона свободной поверхности моря, который создается вследствие сгонно-нагонного эффекта ветра, — величина весьма малая, и $\operatorname{tg}\gamma$ в большинстве случаев не превышает 10^{-6}.

Из второго уравнения (3), интегрируя его в пределах от ζ до z, мы получим

$$p = g\rho(z-\zeta) + p_0,$$

где через ζ обозначено вертикальное отклонение точки свободной поверхности по отношению к горизонтальной линии OX (рис. 1), а через p_0 — внешнее, статическое (атмосферное) давление. Считая $p_0 = \mathrm{const}$ и дифференцируя последнее выражение для p по x, мы получим [1]

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = -g\operatorname{tg}\gamma = \mathrm{const}.$$

Анализ рассматриваемого движения сводится к исследованию одного дифференциального уравнения

$$\mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g\rho\operatorname{tg}\gamma = 0, \tag{4}$$

[1] По справедливому замечанию Е. С. Кузнецова, указанное соотношение верно в том случае, когда свободная поверхность является поверхностью изобарической. Изобарическая же поверхность не является, строго говоря, поверхностью тока, как это должно быть для свободной поверхности в случае установившегося движения. Мы допускаем это приближенно, основываясь на том, что отклонения свободной поверхности ζ от горизонтального уровня в центральных областях длинного бассейна ничтожно малы в сравнении с глубиной h жидкости в невозмущенном состоянии. Разумеется, мы не смогли бы сделать аналогичного допущения в «прибрежных» областях бассейна, где движение мы и не рассматриваем.

общий интеграл которого имеет вид

$$u = -\frac{g\rho \operatorname{tg} \gamma}{2\mu} z^2 + C_1 z + C_2. \tag{5}$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 мы определим на основе следующих граничных условий.

Нашим первым условием на свободной поверхности в центре бассейна ($z=0$) будет равенство напряжений

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = -\frac{T}{\mu}, \tag{6}$$

где через T обозначено тангенциальное давление ветра на поверхности воды в бассейне. Это условие, верное, строго говоря, для горизонтальной свободной поверхности, принимается нами приближенно и для поверхности, обладающей наклоном, ибо угол наклона γ, как указывалось ранее, чрезвычайно мал.

В качестве второго условия мы требуем, чтобы скорость течения обращалась в нуль на дне бассейна (условие прилипания):

$$(u)_{z=h} = 0. \tag{7}$$

В соответствии с граничными условиями (6) и (7), распределение горизонтальной компоненты скорости течения по вертикали, в удалении от продольных границ бассейна, будет определяться выражением

$$u = \frac{g\rho \operatorname{tg} \gamma}{2\mu} (h^2 - z^2) + \frac{T}{\mu} (h - z). \tag{8}$$

Выразим теперь постоянную величину $\operatorname{tg}\gamma$ в зависимости от тангенциального давления ветра. Заметим, что в замкнутом водоеме рассматриваемого типа при условии $\gamma = \text{const}$ полный расход через любую вертикаль должен равняться нулю. Иначе говоря,

$$\int_0^h u\, dz = 0. \tag{9}$$

Интегрирование (9) осуществляется в пределах от 0 до h, потому что нет оснований полагать нарушения симметрии в отклонениях уровня по отношению к центру бассейна, и в центре бассейна, где и рассматривается движение, отклонение ζ равно нулю.

Выполняя интегрирование выражения (8) в пределах от $z=0$ до $z=h$, получим, что

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{3T}{2g\rho h}. \tag{10}$$

Это соотношение было получено в свое время Экманом, который и воспользовался им для определения зависимости между скоростью ветра и его тангенциальным давлением на поверхности моря.[1]

Подставляя выражение (10) в уравнение (8), будем иметь

$$u = -\frac{3T}{4\mu h}(h^2 - z^2) + \frac{T}{\mu}(h - z). \tag{11}$$

Приравнивая правую часть (11) нулю и решая полученное таким образом уравнение относительно z, найдем, что скорость течения обращается в нуль не только на дне бассейна, но и на одной трети глубины от поверхности. В слое от $z = \frac{h}{3}$ до $z = h$ имеет место течение, направленное в сторону, противоположную ветру, и компенсирующее, согласно условию (9), нагонное течение, существующее в слое от поверхности до $z = \frac{h}{3}$. При этом, как легко убедиться из соотношения (11), скорость течения на поверхности определяется величиной

$$u_0 = \frac{Th}{4\mu}. \tag{12}$$

Заметим, что, интегрируя уравнение (4) при постоянном μ с условием скольжения жидкости на дне потока $\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=h} = 0$, мы получили бы такие выражения для $\operatorname{tg}\gamma$ и глубины возникновения компенсационного противотечения:

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{T}{g\rho h}; \quad z = 0{,}42h. \tag{13}$$

Последние величины γ и z, а также выражение (10) при соот-

[1] По существу, в этой статье впервые вводится метод срединного сечения, широко используемый в дальнейшем. Дело в том, что при изучении движения вдали от стенок $x=0$ и $x=L$ вытянутого вдоль оси x замкнутого бассейна можно считать, что все характеристики, входящие в уравнения движения, не зависят от продольной координаты x (естественно, что внешняя сила зависит только от y). Но если $\partial\zeta/\partial y$ не зависит от x, то $\partial^2\zeta/\partial x\,\partial y = 0$, и $d\zeta/dx$ оказывается постоянной величиной. Эта величина находится из условия $\int\limits_0^h\int\limits_0^l u\,dy\,dz = 0$, справедливого при любом x в силу замкнутости бассейна и несжимаемости воды. Впоследствии на примере одного точного решения задачи В. Б. Штокман оценил погрешность метода (например, когда продольный размер бассейна превышает поперечный в три раза, погрешность метода составляет около 5%, см. В. Б. Штокман, Изв. АН СССР, серия геофиз., № 5, 1952). (*Прим. сост.*)

ветственных условиях были получены более строгим путем Аракава [1], который и указал возможные пределы изменения $\operatorname{tg}\gamma$:

$$\frac{|T|}{g\rho h} \leqslant |\operatorname{tg}\gamma| \leqslant \frac{3|T|}{2g\rho h}.$$

Заметим, что формулу (13) для $\operatorname{tg}\gamma$ можно получить и совершенно элементарным путем. Для этой цели мы будем иметь в виду, что свободная поверхность жидкости плоская и что изменение тангенциального давления по вертикали есть линейная функция глубины. Последнее приближенно справедливо в случае небольшой глубины (h) жидкости. Если обозначить через $\pm z$ отметки уровня у наветренного и подветренного берегов бассейна (рис. 1), то очевидно, что разность гидростатического давления у наветренного и подветренного берега будет

$$\Delta p = g\rho \cdot 2z.$$

Отнеся эту разность давлений к длине бассейна L, получим силу, отнесенную к единице объема жидкости. Эта сила в стационарных условиях должна уравновешиваться другой, а именно — разностью тангенциального давления на поверхности и у дна бассейна, отнесенной к глубине жидкости. Следовательно,

$$\frac{g\rho \cdot 2z}{L} = \frac{T_0 - T_h}{h}. \tag{A}$$

Так как, с одной стороны, по условию скольжения $T_h = 0$ (дно бассейна), и с другой стороны, $\operatorname{tg}\gamma = \frac{2z}{L}$, то

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{T}{g\rho h}.$$

Чтобы получить формулу (10), достаточно в соотношении (А) положить $T_h = -\frac{T_0}{2}$ (обратный знак естествен из физических соображений о направлении циркуляции), откуда следует, что в случае прилипания на дне тангенциальное давление там по величине равно половине тангенциального давления на поверхности жидкости.

Упомянем также, что Джеффрис [4] получил ту же величину $\operatorname{tg}\gamma = -\frac{T}{g\rho h}$ для ветрового нагона у прямолинейного берега мелководного моря — в частном случае задачи о ветровых течениях в поле кориолисовой силы. В качестве граничного условия на дне моря Джеффрис принимал скольжение с трением, определяемое соотношением

$$\mu\rho \frac{du}{dz} = \chi^2 \rho u^2,$$

где u — скорость придонного течения, а χ — коэффициент пропорциональности ($\chi = 0{,}002$).

Однако в поисках возможных пределов изменения $\operatorname{tg}\gamma$, которые могут быть интересны в целях практических приложений, вряд ли следует идти по пути варьирования граничных условий на дне потока, избранному Аракава и Джеффрисом. Искусственность условия о скользящем движении жидкости на шероховатом ложе потока в реальных условиях с физической точки зрения достаточно очевидна. Скользящее движение с бóльшим основанием можно допустить на границе раздела двух слоев жидкости различной плотности (Gleitfläche), нежели на дне потока. Вот почему нам кажется более целесообразным исследовать возможные пределы изменения $\operatorname{tg}\gamma$, обусловленные непостоянством коэффициента внутреннего турбулентного трения по вертикали, ибо пространственная изменчивость коэффициента виртуальной вязкости наряду с самим порядком величин этого коэффициента является, пожалуй, основным отличием турбулентной вязкости от вязкости молекулярной, и допущение $\mu = \text{const}$ не соответствует действительности. Этому вопросу мы посвятим содержание следующего параграфа.

Здесь же в заключение мы считаем необходимым обратить внимание на одно обстоятельство, которое не учитывается мореведами, изучающими циркуляцию в замкнутых мелководных водоемах, какими, например, являются Азовское и Аральское моря.

Дело в том, что замкнутая циркуляция, нередко наблюдаемая в действительности на поверхности указанных морей, не может быть объяснена лишь исключительно как следствие речного стока.

Подтверждение того, что в замкнутой циркуляции против часовой стрелки на поверхности Азовского моря преобладающую роль играет сток реки Дона, многие исследователи (например, Г. К. Ижевский) видят в том, что эта круговая циркуляция сохраняется и при сильных ветрах восточного и юго-восточного направлений, когда вода на поверхности в южной половине моря движется против ветра (что подтверждено и наблюдениями Г. К. Ижевского). Мы считаем, однако, что роль речного стока в возбуждении подобного рода замкнутой циркуляции, если в особенности учесть наблюдаемые большие скорости течения, вряд ли значительна. Более существенным фактором, по нашему мнению, является неравномерность результирующего ветрового поля над акваторией замкнутых водоемов, когда скорость ветра изменяется в поперечном направлении последнего.

В качестве примера, иллюстрирующего изложенные соображения, мы рассмотрим положение границы между нагонным и компенсационным течением в замкнутом прямоугольнике бассейна постоянной глубины, продольные размеры которого по-прежнему превышают глубину, считая, что скорость стационарного ветра изменяется в поперечном направлении бассейна (ось Y), а направление ветра совпадает с продольной осью бассейна (ось X).

Желая получить приближенные и притом лишь качественные результаты, мы сознательно упростим эту, вообще говоря, сложную гидродинамическую задачу, имеющую самостоятельный интерес, и будем рассматривать продольную компоненту u скорости течения в вертикальной плоскости поперечного сечения бассейна в его центре, так же, как и в предыдущем, приближенно описывая стационарное движение в направлении ветра уравнением

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g\rho \operatorname{tg} \gamma = 0 \qquad (14)$$

с граничными условиями

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = -T(y); \quad (u)_{z=h} = 0. \qquad (15)$$

Если тангенциальное давление ветра в поперечном направлении бассейна меняется по линейному закону $T(y) = my + k$, то интеграл уравнения (14) имеет вид

$$u = \frac{g\rho \operatorname{tg} \gamma}{2\mu}(h^2 - z^2) + \frac{my + k}{\mu}(h - z), \qquad (16)$$

причем константы интегрирования уравнения были определены из условий (15).

Для определения $\operatorname{tg} \gamma$ мы будем исходить из дополнительного условия, что при стационарном наклоне уровенной поверхности полное количество жидкости, протекающее через поперечное сечение бассейна, должно равняться нулю:

$$\int_0^l \int_0^h u\, dz\, dy = 0,$$

где l — поперечные размеры бассейна.

При этом условии окажется, что

$$\operatorname{tg} \gamma = -\frac{3(ml + 2k)}{4g\rho h}. \qquad (17)$$

и выражение (16) перепишется в следующем виде:

$$u = -\frac{3(ml+2k)}{8\mu h}(h^2 - z^2) + \frac{my+k}{\mu}(h-z). \qquad (18)$$

Согласно (18), глубина, на которой возникает компенсационное противотечение, определяется из соотношения

$$z = \frac{h\,[2k + m(8y - 3l)]}{3(ml+2k)}, \qquad (19)$$

откуда непосредственно убеждаемся, что глубина эта меняется по ширине потока и зависит от начальной скорости ветра $[T(y)$

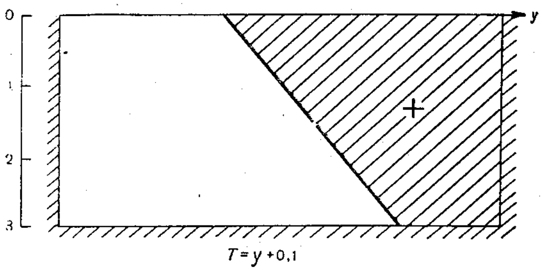

Рис. 2.

при $y=0]$ и возрастания скорости его в направлении оси Y. В том случае, когда $m=0$ (поле ветра равномерно), глубина, на которой возникает противотечение, равна той, которая была получена нами выше $\left(z=\frac{h}{3}\right)$.

Рисунок 2 иллюстрирует положение границы противотечения в поперечном сечении бассейна, соответствующее определенному характеру линейного возрастания скорости ветра от левого к правому «берегу» бассейна. Направление ветра на этом рисунке соответствует направлению перпендикуляра, опущенного на плоскость чертежа. Знаком плюс и штриховкой обозначены области потока, где течение направлено по ветру, а знаком минус — течение обратного направления.

Как видно из рис. 2, при $m=1$, когда скорость ветра резко возрастает от левого к правому «берегу» бассейна $(T=y+0{,}1)$, граница между нагонным течением, направленным по ветру, и компенсационным потоком в противоположном направлении располагается почти отвесно. В области поперечного сечения бассейна, примыкающей к левому «берегу», течение направлено против ветра во всей толще жидкого слоя от поверхности до дна бассейна, а нагонное течение прижато к правому «берегу».

Центр замкнутой циркуляции, существующей в данном случае на поверхности воды в бассейне (рис. 3), сдвинут по отношению к средине поперечного сечения бассейна ближе к левому «берегу».

Следует помнить, что в данном примере мы описывали движение одним уравнением (14), тогда как режим потока более точно должен описываться системой уравнений:

$$\frac{1}{\rho}\mu\nabla^2 u-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}=0,$$

$$\frac{1}{\rho}\mu\nabla^2 v-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}=0,$$

$$g-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{1}{\rho}\mu\nabla^2 w=0$$

с учетом граничных условий на вертикальных стенках бассейна.

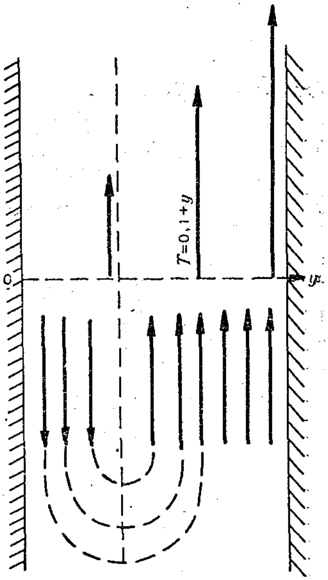

Рис. 3.

Естественно поэтому, что последние результаты могут характеризовать лишь в самых общих чертах взаимное расположение нагонного и компенсационных течений в случае неравномерности ветра в поперечном направлении. Тем не менее изложенное достаточно отчетливо вскрывает с качественной стороны одну из возможных причин возникновения кругового движения воды в мелководном замкнутом водоеме, каким, например, является Азовское море. Там, как уже упоминалось, при ветрах одного и того же направления (по всей поверхности моря) нередко наблюдается замкнутое циркуляционное движение воды, аналогичное тому, которое было разобрано нами в предыдущем примере (рис. 3). Возможной причиной подобной циркуляции является, как мы выяснили, изменение скорости ветра в поперечном направлении.

2. Видоизменения, вносимые в задачу переменным коэффициентом турбулентного внутреннего трения

В предыдущих выкладках мы полагали коэффициент турбулентного трения жидкости постоянным, не зависящим от глубины. Однако это допущение не соответствует действительности.

Посмотрим теперь, какие видоизменения в рассматриваемую нами задачу вносятся переменным коэффициентом внутреннего турбулентного трения, зависящим от вертикальной координаты z.

Изменение коэффициента виртуальной вязкости в зависимости от глубины турбулентного потока экспериментально изучалось многими исследователями. Так, например, Прандтль и Толлмин [5] установили эмпирическую зависимость μ от z:

$$\mu = \mu_0 \left(\frac{h - z}{h} \right)^{\alpha}, \tag{20}$$

где h — глубина потока, α — постоянная положительная величина, меньшая единицы (по данным Прандтля и Толлмина для течений в трубах $\alpha = {}^6/_7$).

Согласно выражению (20), коэффициент μ с возрастанием z уменьшается от некоторого постоянного значения μ_0 на поверхности до нуля на дне потока, вследствие чего в непосредственной близости у дна должно иметь место скользящее движение жидкости. Последнее, однако, физически несовместимо с весьма правдоподобным условием о том, что на дне потока скорость течения должна равняться нулю (условие прилипания), которое обычно принимается в качестве одного из граничных условий в решении задач по динамике воздушных и морских течений.

Чтобы устранить указанные физические противоречия, Фьельдстад [6] предложил на примере дрейфовых течений в Восточно-Сибирском море несколько видоизменить эмпирическую формулу Прандтля и Толлмина, придав ей следующий вид:

$$\mu = \mu_0 \left(1 - \frac{z}{h + \varepsilon} \right)^{\alpha}, \tag{21}$$

где ε — малая по сравнению с h положительная величина, имеющая размерность длины.

По вычислениям Фьельдстада, величины ε и α применительно к рассматриваемому им случаю оказались равными $\varepsilon = 0{,}1$ м, $\alpha = {}^3/_4$ при $h = 22$ м и $\mu_0 = 385$ CGS. Согласно формуле (21), коэффициент μ на дне потока отличается от нуля на очень малую величину.

Разумеется, числовые значения, полученные Фьельдстадом для входящих в формулу (21) параметров, не могут быть универсальными. Все же эта формула может быть использована в качестве достаточно хорошей иллюстрации тех изменений, которые могут вноситься в рассматриваемую нами задачу переменным коэффициентом турбулентного внутреннего трения.

Для этой цели мы пренебрежем в формуле (21) малой по сравнению с h величиной ε, а показатель степени α примем равным ${}^1/_2$, что соответствует величине этого показателя по определению Свердрупа [7].

Зависимость μ от z, которой мы будем пользоваться в дальнейшем, запишется, следовательно, в виде

$$\mu=\mu_0\left(\frac{h-z}{h}\right)^{1/2}. \tag{22}$$

Мы будем при этом рассматривать два случая режима потока, которые соответствуют двум различным обозначениям силы трения, фигурирующей в уравнении (4), и которые вытекают из обобщенного выражения для компоненты силы турбулентного трения в тензорной форме.

Если обозначить через $\zeta_j (j=1,\ 2,\ 3)$ пульсационные компоненты скорости $(\overline{\zeta_j}=0)$, а через $\xi_k (k=1,\ 2,\ 3)$ обобщенный в духе Прандтля путь смешения, то согласно Эртелю [8] компоненты силы трения, фигурирующие в уравнениях для осредненных скоростей $v_i (i=1,\ 2)$ турбулентного потока, записываются в виде[1]

$$R_i=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\eta_{jk}\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right), \tag{23}$$

где $\eta_{jk}=\rho\overline{\zeta_j\xi_k}$ — симметричный тензор второго ранга, именуемый Эртелем «тензором турбулентного обмена» с компонентами

$$\eta_{xy}=\eta_{yx};\quad \eta_{xz}=\eta_{zx};\quad \eta_{yz}=\eta_{zy};\quad \eta_{xx},\quad \eta_{yy},\quad \eta_{zz}.$$

Последняя компонента аналогична «скалярному» коэффициенту обмена количества движения (виртуальной вязкости), которым обычно подменяют коэффициент молекулярной вязкости в уравнениях движения для осредненных скоростей турбулентного течения.

Если считать η_{jk} не только функцией вертикальной координаты z, но и координат x, y

$$\eta_{jk}=\eta_{jk}(x,\ y,\ z),$$

а v_i полагать зависящей лишь от одной вертикальной координаты z, то выражение (23) запишется так:

$$R_i=\eta_{zz}\frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2}+\left(\frac{\partial\eta_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\eta_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\eta_{zz}}{\partial z}\right)\frac{\partial v_i}{\partial z}. \tag{24}$$

В случае

$$\frac{\partial\eta_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\eta_{yz}}{\partial y}=0 \tag{25}$$

выражение (24) принимает вид

$$R_i=\eta_{zz}\frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2}+\frac{\partial\eta_{zz}}{\partial z}\frac{\partial v_i}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\eta_{zz}\frac{\partial v_i}{\partial z}\right), \tag{26}$$

---

[1] См. примечание на стр. 148.

формально аналогичный выражению для компоненты силы турбулентного трения, вытекающему из теории обмена количества движения Прандтля [9]. Напротив, в случае

$$\frac{\partial \eta_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \eta_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial \eta_{zz}}{\partial z}=0 \tag{27}$$

выражение для R_i приобретает вид

$$R_i=\eta_{zz}\frac{\partial^2 v_i}{\partial z^2}, \tag{28}$$

формально аналогичный выражению для компоненты силы турбулентного трения, которое следует из теории вихревого переноса Тэйлора.

Следовательно, считая v_i [аналогично u в уравнении (4)] функцией вертикальной координаты z, мы можем записать компоненту силы турбулентного трения в уравнении (4) в виде (26) или (28) в зависимости от того, имеем ли мы в виду соответственно условия (25) или (27).

Совершенно очевидно, что, не располагая экспериментальными данными, невозможно a priori утверждать, какое из условий, (25) или (27), соблюдается в море. Изложенное дает нам основания лишний раз подчеркнуть насущную необходимость исследований виртуальной вязкости в море именно в аспекте тензорной теории турбулентности.

Выражения для R_i (26) и (28), которыми мы воспользуемся в дальнейшем, будем называть для краткости, руководствуясь лишь формальной аналогией, «формой Прандтля» и «формой Тэйлора» соответственно.

Проинтегрируем сперва уравнение (4) при переменном μ, определяемом зависимостью (22), записывая компоненту силы трения в форме Прандтля (26).

Уравнение (4) перепишется, следовательно, так:

$$\frac{d}{dz}\left[(h-z)^{1/2}\frac{du}{dz}\right]=-k=\text{const}, \tag{29}$$

где через k обозначено

$$k=\frac{g\rho\,\mathrm{tg}\,\gamma\sqrt{h}}{\mu_0}. \tag{30}$$

Дважды интегрируя обе части уравнения (29), мы найдем общий интеграл дифференциального уравнения (29) в виде

$$u=2kh(h-z)^{1/2}-\frac{2k}{3}(h-z)^{3/2}-2C_1(h-z)^{1/2}+C_2. \tag{31}$$

Согласуя константы интегрирования с граничными условиями (6) и (7), получим:

$$C_1 = -\frac{T\sqrt{h}}{\mu_0}; \quad C_2 = 0.$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в выражение (31), будем иметь

$$u = 2kh(h-z)^{1/2} - \frac{2k}{3}(h-z)^{3/2} + \frac{2T\sqrt{h}}{\mu_0}(h-z)^{1/2}. \quad (32)$$

На основании условия (9) найдем, что

$$k = -\frac{5T}{4\mu_0\sqrt{h}},$$

откуда определится

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{5}{4}\frac{T}{g\rho h}. \quad (33)$$

Подставляя k в выражение (32), после несложных преобразований окончательно получим

$$u = \frac{T}{6\mu_0}\sqrt{\frac{h-z}{h}}(2h-5z). \quad (34)$$

Согласно соотношению (34), глубина, на которой возникает компенсационное противотечение, равна

$$z = \frac{2h}{5}, \quad (35)$$

а скорость течения на поверхности ($z=0$) определяется величиной

$$u_0 = \frac{Th}{3\mu}. \quad (36)$$

Займемся теперь интегрированием уравнения движения (4), в котором компоненту силы трения будем записывать в форме Тэйлора, при той же зависимости μ от z, что и в предыдущем примере. Наше уравнение примет вид

$$(h-z)^{1/2}\frac{d^2u}{dz^2} = -k. \quad (37)$$

Общий интеграл уравнения (37) выражается так:

$$u = -\frac{4k}{3}(h-z)^{3/2} + C_1 z + C_2. \quad (38)$$

Определяя константы C_1 и C_2, получим:

$$C_1 = -\frac{T}{\mu_0} - 2kh^{1/2};$$

$$C_2 = \frac{Th}{\mu_0} + 2kh^{1/2},$$

откуда выражение для вертикального распределения скоростей течения запишется в виде

$$u = -\frac{4k}{3}(h-z)^{3/2} + \left(\frac{T}{\mu_0} + 2kh^{1/2}\right)(h-z). \tag{39}$$

По-прежнему применяя к (39) условие (9), получим

$$k = -\frac{15T}{14\mu_0\sqrt{h}}.$$

Величина $\operatorname{tg}\gamma$, следовательно, будет определена соотношением

$$\operatorname{tg}\gamma = -\frac{15}{14}\frac{T}{g\rho h}, \tag{40}$$

и окончательному выражению для вертикального распределения скоростей течения можно будет придать следующий вид:

$$u = \frac{2T}{7\mu_0}(h-z)\left(5\sqrt{\frac{h-z}{h}} - 4\right). \tag{41}$$

Приравнивая правую часть (41) нулю, получим, что глубина, на которой возникает противотечение, в данном случае равна

$$z = \frac{9h}{25}. \tag{42}$$

В свою очередь скорость поверхностного течения окажется равной

$$u_0 = \frac{2Th}{7\mu_0}. \tag{43}$$

Анализируя полученные результаты, легко видеть, что учет вертикального изменения коэффициента турбулентного трения заметно повлиял на режим потока, рассматривавшийся нами ранее при постоянном μ; изменились как угол наклона уровенной поверхности воды в бассейне и скорости течения, так и глубина, на которой возникает компенсационное противотечение.

Отмеченные различия при этом определяются не только избранным нами законом вертикального изменения μ, но и существенно зависят от формы записи компоненты силы трения в уравнении движения рассматриваемого потока (форма Прандтля и Тэйлора).

В целях более наглядного сопоставления трех рассмотренных нами случаев режима потока мы будем отправляться от одной и той же наперед заданной скорости поверхностного течения (наиболее доступной непосредственным наблюдениям) и вычислим затем вертикальное распределение скоростей потока, соответствующее каждому из этих случаев. Рисунок 4 иллюстрирует результаты подобного рода вычислений. Скорости течения на этом рисунке указаны в единицах u_0.

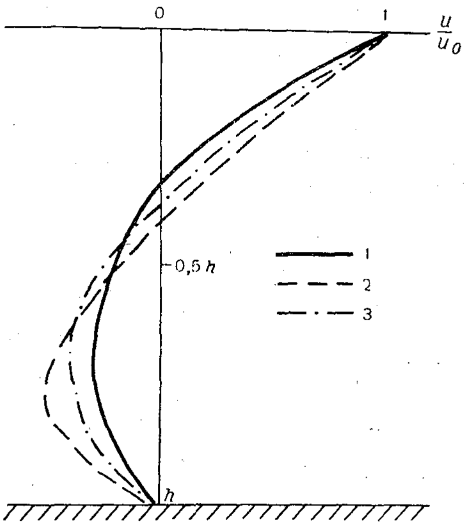

Рис. 4.

$1 - \mu = \text{const}$, $2 - \mu = f(z)$ (Прандтль), $3 - \mu = f(z)$ (Тэйлор), $\mu = f(z) = \mu_0 \left(\frac{h-z}{h}\right)^{1/2}$.

Как видно из рис. 4, режим потока в случае переменного коэффициента турбулентного трения характеризуется весьма заметным увеличением скоростей глубинного противотечения по сравнению со скоростями его при постоянном μ; вертикальное распределение скоростей при записи силы трения в форме Прандтля почти линейно для нагонного потока, а в придонном слое вертикальный градиент скорости значительно больше того (максимум скорости противотечения находится на $0{,}26h$ от дна), который имеет место при $\mu = \text{const}$.

Эпюра скорости течения при записи силы трения в форме Тэйлора является, грубо говоря, промежуточной между эпюрами, соответствующими постоянному и переменному μ с силой трения в форме Прандтля. Плавный характер этой эпюры, пожалуй, наиболее согласуется с наблюдаемым в природе вертикальным распределением скоростей течения.

Как указывалось ранее, показатель степени α в эмпирической зависимости μ от z (20) заключен в пределах $0 < \alpha < 1$. Мы рассмотрели два примера, соответствующие срединному значению этого показателя, равному $1/2$. Легко видеть, что нижний предел изменения α ($\alpha=0$) соответствует постоянной величине коэффициента турбулентного трения по вертикали.

Нам остается выяснить режим потока, который будет иметь место, если пользоваться верхним пределом для α в формуле (20): $\alpha=1$. При записи силы трения в форме Тэйлора (28) уравнение движения запишется в виде

$$\mu_0\left(\frac{h-z}{h}\right)\frac{d^2u}{dz^2}+g\rho\operatorname{tg}\gamma=0. \tag{44}$$

Общий интеграл этого уравнения определяется выражением

$$u=\frac{g\rho h\operatorname{tg}\gamma}{\mu_0}\left[\ln(h-z)-1\right](z-h)+C_1z+C_2. \tag{45}$$

Выражение (45) для общего интеграла уравнения (44) после определения констант интегрирования и некоторых преобразований перепишется в виде

$$u=\frac{hg\rho\operatorname{tg}\gamma}{\mu_0}\ln\left(\frac{h-z}{eh}\right)^{z-h}+\frac{T}{\mu_0}(h-z), \tag{46}$$

где e — основание натуральных логарифмов. Поступая аналогично предыдущему, найдем, что $\operatorname{tg}\gamma$ определяется из соотношения

$$\operatorname{tg}\gamma=-\frac{2}{3}\frac{T}{g\rho h}, \tag{47}$$

следовательно,

$$u=-\frac{2T}{3\mu_0}\ln\left(\frac{h-z}{eh}\right)^{z-h}+\frac{T}{\mu_0}(h-z). \tag{48}$$

Скорость течения на поверхности равна

$$u_0=\frac{Th}{3\mu_0}, \tag{49}$$

что соответствует скорости поверхностного течения при $\alpha=1/2$, полученной нам ранее, руководствуясь выражением силы трения в форме Прандтля [формула (36)]. Глубина, на которой возникает противотечение, в соответствии с уравнением (48), будет равна

$$z=h\left(1-e^{-0,5}\right)\approx 0,39h. \tag{50}$$

В то же время, если пользоваться выражением для силы трения в форме Прандтля, интеграл уравнения

$$\frac{\mu_0}{h}\frac{d}{dz}\left[(h-z)\frac{du}{dz}\right]+g\rho\operatorname{tg}\gamma=0 \tag{51}$$

выразится так:

$$u = -C_1 \ln(h - z) + \frac{g\rho h \operatorname{tg}\gamma}{\mu_0} z + C_2. \qquad (52)$$

Для того чтобы скорость течения на дне потока ($z = h$) была величиной конечной, необходимо, чтобы член, содержащий $\ln(h-z)$, в уравнении (52) отсутствовал, — иначе говоря, константа C_1 должна равняться нулю. При этом очевидно, что полученное выражение для общего интеграла уравнения (51) не может быть одновременно согласовано с граничными условиями (6), (7) и условием (9). Указанное обстоятельство свидетельствует о том, что в данном случае, интегрируя уравнение движения потока, нельзя пользоваться зависимостью μ от z согласно формуле (20), пренебрегая величиной ε, фигурирующей в формуле Фьельдстада (21). Параметр ε, который вследствие его малости по сравнению с h не мог ранее существенно изменить результата интегрирования уравнения движения при значениях α, заключенных между нулем и единицей, в данном случае, при $\alpha = 1$ и при записи силы трения в форме Прандтля, оказался решающим при интегрировании уравнения (51).

В силу сказанного, не касаясь притом физической стороны вопроса, выражение для силы турбулентного трения в форме Тэйлора с формально математической точки зрения обладает большими преимуществами при интегрировании уравнения движения в рассматриваемой нами задаче.

Нелишним будет подчеркнуть, что мы выяснили здесь лишь общий характер вертикального распределения горизонтальной компоненты скорости течения в продольном направлении нашего бассейна, определяемый в значительной степени условной зависимостью коэффициента турбулентного трения от глубины потока. Вследствие этого полученные цифровые результаты не должны рассматриваться в качестве абсолютных. С другой стороны, констатируя существенное различие решений нашей задачи в зависимости от записи силы трения в форме Прандтля или в форме Тэйлора, мы в то же время не располагаем достаточными основаниями к тому, чтобы остановить свой выбор на каком-либо одном из этих выражений. Такой выбор за неимением экспериментальных данных остается, к сожалению, совершенно произвольным.

В заключение отметим, что возможные пределы изменения $\operatorname{tg}\gamma$, полученные нами в настоящем параграфе

$$\frac{2}{3}\frac{|T|}{g\rho h} \leqslant |\operatorname{tg}\gamma| \leqslant \frac{3}{2}\frac{|T|}{g\rho h}, \qquad (53)$$

превышают те, которые были найдены Аракава путем варьирования граничных условий на дне потока. Этими предельными значениями для $\operatorname{tg}\gamma$ мы воспользуемся в следующем параграфе, где попытаемся приложить полученные результаты к заливу Карабогаз.

3. Вычисление тангенциального давления ветра и скорости течения применительно к случаю ветрового нагона в заливе Карабогаз

Полученные в предыдущих параграфах выводы могут быть применены к мелководным замкнутым водоемам, в частности к Азовскому морю и некоторым частям Каспийского моря, словом, там, где отклоняющим влиянием вращения Земли можно пренебречь.

Как показал Экман [2], влияние вращения Земли на величину нагона в замкнутом море начинает заметно сказываться лишь в том случае, когда глубина моря превышает верхнюю глубину трения. Вообще говоря, отклоняющая сила вращения Земли уменьшает угол наклона уровенной поверхности по сравнению с тем, который был получен в § 1 [формула (10)]. Однако, как показал тот же Экман, даже в очень глубоком замкнутом море угол наклона его поверхности при ветровом нагоне не меньше $^2/_3$ от величины этого угла, определяемой соотношением (10), т. е.

$$|\operatorname{tg}\gamma| \geqslant \frac{|T|}{g\rho h}.$$

В настоящем параграфе мы используем полученные нами результаты для вычисления величины тангенциального давления ветра и скорости течения применительно к ветровому нагону в заливе Карабогаз. По наблюдениям Н. И. Разумовского [3], 18 июля 1934 г. в этом заливе имел место резко выраженный нагон, носивший стационарный характер и обусловленный крепким северным ветром 12 м/сек., направленным по длине залива.

Отметки уровня у наветренного (Чагала) и подветренного (Кизилкуп) берегов залива одновременно регистрировались по футштокам. Сам Разумовский, по нашему совету, воспользовался этими данными для проверки известной эмпирической формулы Кольдинга, не давшей, впрочем, удовлетворительных результатов. Разность уровней у наветренного и подветренного берегов Карабогаза в данном случае была равна 1,32 м. Зная расстояние между наветренным и подветренным берегами, измеренное в направлении ветра, $L = 238{,}6$ км, получим следующую величину для $\operatorname{tg}\gamma$:

$$\operatorname{tg}\gamma = 6 \cdot 10^{-6}.$$

В свою очередь, зная угол наклона поверхности воды в заливе, нетрудно подсчитать величину безразмерного коэффициента χ^2 в известном соотношении между скоростью ветра и его тангенциальным давлением

$$T = \delta\chi^2 w^2,$$

где δ — плотность воздуха.

Выражая, например, T через $\operatorname{tg}\gamma$, ρ, g и h на основе соотношения (10) и подставляя это выражение в левую часть написанной выше зависимости, мы, очевидно, получим

$$\chi^2 = \frac{2g\rho h \operatorname{tg}\gamma}{3\delta w^2}. \qquad (54)$$

Используя наблюдения Разумовского, получим:

$$\rho = 1{,}5 \text{ г/см}^3; \quad h = 660 \text{ см};$$
$$\operatorname{tg}\gamma = 6 \cdot 10^{-6}; \quad \delta = 1{,}3 \cdot 10^{-3} \text{ г/см}^3;$$
$$w_0 = 12 \text{ м/сек.}; \quad w^2 = w_0^2 \sin\alpha = 144 \cdot 10^4 \cdot 0{,}98 \text{ см}^2/\text{сек.}^2,$$

где α — угол между направлением ветра и береговой чертой, равный в данном случае 80°. Подставляя перечисленные величины в формулу (54) и полагая $g=981$ см/сек²., получим

$$\chi^2 = 21 \cdot 10^{-4}.$$

Найденная таким путем величина χ^2 весьма хорошо согласуется с величиной аналогичного коэффициента $\chi^2 = 22 \cdot 10^{-4}$, определенной Пальменом [11] для случая ветрового нагона в Ботническом заливе при скорости ветра, близкой к наблюдавшейся в Карабогазе (10,5 м/сек.). Напомним при этом, что указанный коэффициент, определенный Экманом [2] для штормового нагона в Балтийском море ($w=20$ м/сек.)

$$\chi^2 = 25 \cdot 10^{-4},$$

также немногим отличается от вычисленного нами значения.

Однако, если вместо соотношения (10) пользоваться нижним пределом полученных нами выражений для величины $\operatorname{tg}\gamma$, т. е. $\operatorname{tg}\gamma = \frac{2}{3}\frac{T}{g\rho h}$, то коэффициент χ^2 по тем же данным Разумовского окажется равным

$$\chi^2 = 46 \cdot 10^{-4}.$$

Как видим, величины χ^2, определяемые для заданных значений скорости ветра и угла наклона поверхности уровня, могут быть весьма различны в зависимости от тех допущений, которые были положены в основу вывода зависимости $\operatorname{tg}\gamma = f(T)$.

Любопытно отметить, что коэффициент χ^2, фигурирующий в квадратичной зависимости между скоростью потока и его тангенциальным давлением, оказываемым на подстилающую поверхность, по определениям Джеффриса [12] для твердой стенки канала, оказался равным $\chi^2=29\cdot10^{-4}$, что превышает не только полученную нами величину $(21\cdot10^{-4})$, но и ту, которую нашел Экман для тангенциального давления штормового ветра на поверхности Балтийского моря.

Вполне естественно, что величина коэффициента χ^2 применительно к условиям, существующим на дне моря, должна во много раз превышать значения для воздушных потоков, проносящихся над подстилающей их водной поверхностью. Так, например, по вычислениям Дефанта [13] для условий, существующих на дне проливов Босфор и Дарданеллы, коэффициент χ^2 колеблется в пределах

$$\chi^2=17\cdot10^{-3};$$

$$\chi^2=155\cdot10^{-3}.$$

Основываясь на величине $\chi^2=21\cdot10^{-4}$, вычислим далее параметр «шероховатости» z_0 (в смысле Прандтля) по известной формуле [14]

$$\chi^2=\frac{0{,}165}{\left[\ln\frac{z+z_0}{z_0}\right]^2}.$$

Полагая высоту z, на которой измерялась скорость ветра в заливе Карабогаз, равной $12\cdot10^2$ см, получим

$$z_0=0{,}30 \text{ см}.$$

Сопоставляя эту величину параметра шероховатости со значениями z_0, вычисленными Россби [14] по определениям χ^2 различных авторов и приводимыми в нижеследующей таблице, увидим, что найденное нами значение z_0 ближе всего к величинам $z_0=0{,}36$ см и $z_0=0{,}32$ см по данным Джеффриса.

Разумеется, при таком сравнении следует иметь в виду специфические особенности взволнованной поверхности залива Карабогаз, обусловленные его сравнительно небольшими размерами и мелководностью. Вряд ли при этом параметр шероховатости можно рассматривать как функцию высоты «основных» волн на поверхности моря, подобно тому, как это формально допускает Свердруп [15], считая по аналогии с течением в трубах, что $z_0=\varepsilon h\left(\varepsilon=\frac{1}{30}, \frac{1}{40}\right)$, где h не является уже вертикальным размером неровностей на твердой стенке трубы в смысле Прандтля, а представляет собой высоту «основных» волн для данной скорости ветра.

Автор	Метод	z_0 см	w м/сек.
Экман	Ветровой нагон в море	0,75	20
Вюст	Градиент скорости ветра вблизи поверхности моря	0,6	—
Джеффрис	Угол между направлением ветра у поверхности и градиентным ветром	0,70 0,49 0,32	10,25 15,25 22
Джеффрис	Соотношение между скоростью ветра у поверхности и скоростью градиентного ветра	0,85 0,36 0,64	10,25 15,25 22

Величина z_0, рассматриваемая Прандтлем в связи с толщиной пограничного слоя, теряет уже тот физический смысл, какой она имела, если связать ее с высотой основных волн на поверхности моря безотносительно к толщине пограничного слоя, существующего на поверхности воды, обтекаемой ветром. С нашей точки зрения имеется больше оснований к тому, чтобы считать z_0 в качестве характеристики шероховатости самой поверхности «основных» волн, нежели полагать эту величину линейной функцией высоты основных волн на поверхности моря.

Вычислим, наконец, скорость течения на поверхности воды в Карабогазе, руководствуясь величиной коэффициента внутреннего турбулентного трения $\mu/\rho = 10^2$ см^2/сек. Считая ее постоянной, мы из соотношения (12) при $\chi^2 = 21 \cdot 10^{-4}$ получим

$$u_0 = \frac{Th}{4\mu} \approx 7 \text{ см/сек.}$$

Если в то же время руководствоваться зависимостью $\operatorname{tg}\gamma = \frac{2}{3}\frac{T}{g\rho h}$, пользуясь которой, мы нашли $\chi^2 = 46 \cdot 10^{-4}$, то u_0 мы должны вычислять по формуле (49), выведенной в предположении переменного μ, изменяющегося по закону $\mu = \mu_0\left(\frac{h-z}{h}\right)$ при записи силы внутреннего трения в форме Тэйлора. Полагая μ_0/ρ по-прежнему равным 10^2 см^2/сек., получим

$$u_0 = \frac{Th}{3\mu_0} \approx 19 \text{ см/сек.}$$

В качестве наиболее вероятной скорости поверхностного течения в Карабогазе, которую можно ожидать при данной скорости ветра (12 м/сек.), примем среднюю величину $u_0 = 13$ см/сек., которая хорошо согласуется с наблюдениями.

Необходимо в заключение отметить, что величина скорости, определяемая полутеоретическим путем, не только существенно зависит от допущений, положенных в основу вывода соотношений $\operatorname{tg}\gamma = f(T)$, обусловливающих значения коэффициента χ^2, но и зависит также от величины коэффициента турбулентного внутреннего трения. В нашем случае мы приняли последний равным 100 CGS — наиболее вероятной средней величине этого коэффициента по данным различных определений в условиях моря.

Получено 23/X 1940 г.

Добавление

Уже после того как настоящая статья была сдана в редакцию, автор, по счастливой случайности, ознакомился с результатами экспериментального изучения ветровой циркуляции, полученными П. К. Божичем. С его любезного разрешения мы приведем здесь полученные им предварительные данные о вертикальном распределении скорости течения, возбуждаемого ветром в центральной области замкнутого лотка прямоугольной формы (длина лотка около 3 м, ширина 80 см, глубина жидкости в лотке 70 см).

Результаты этого опыта особенно любопытно сопоставить с теми эпюрами скорости, которые были получены выше путем приближенного расчета горизонтальной циркуляции на основе уравнения (4) (при постоянном и переменном значениях коэффициента внутреннего турбулентного трения).

Эпюра скорости течения, построенная по данным эксперимента П. К. Божича, изображена пунктиром на рис. 5 (глубина жидкости и скорость течения указаны в условных единицах). Сопоставляя эту кривую с эпюрами, изображенными на рис. 4, легко убедиться в том, что результаты измерений весьма близко соответствуют тому распределению скоростей, которое было вычислено нами по формуле (34), полученной путем интегрирования уравнения (29) в случае п е р е м е н н о г о μ, изменяющегося согласно эмпирической формуле Прандтля [формула (21) при $\alpha = 0{,}5$]. Наша эпюра, вычисленная теоретическим путем, изображена на том же рис. 5 непрерывной линией.

Согласно данным опыта П. К. Божича, противотечение начинается на глубине z, составляющей $^3/_8 = 0{,}375$ общей глубины жидкости (считая от свободной поверхности), тогда как в результате вычислений мы получили ранее $z = {}^2/_5 = 0{,}400$.

Отклонение наблюдаемой глубины противотечения от вычисленной не превышает 8%. Расхождение величин наблюденного и вычисленного максимума скорости в придонном слое в свою очередь составляет 20%. Лучшего совпадения трудно ожидать хотя бы по одному тому, что показатель степени α в эмпирической зависимости (21) мы выбрали равным 0,5 совершенно независимо от экспериментов П. К. Божича. Весьма вероятно, что при соответствующем подборе α можно добиться еще лучшего согласия с экспериментальными данными.

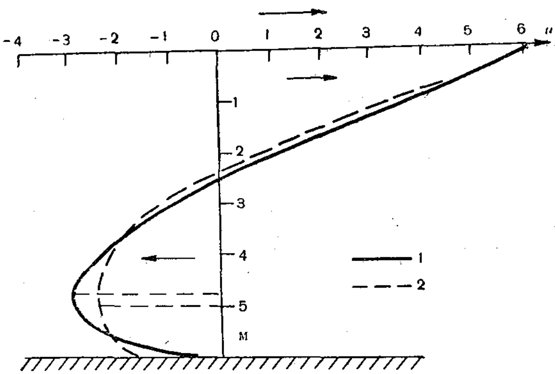

Рис. 5.
1 — теория, *2* — эксперимент.

Сопоставление результатов опыта с приближенным теоретическим расчетом одномерной ветровой циркуляции в центральных областях замкнутого прямоугольного бассейна свидетельствует о том, что при подобном расчете необходимо считаться с вертикальным изменением коэффициента турбулентного трения, которое для условия движения в открытом лотке, по-видимому, близко соответствует эмпирической зависимости $\mu = f(z)$, установленной опытами Прандтля и Толлмина для течений в закрытых трубах.

Результаты нашего сопоставления свидетельствуют также и о том, что примененный нами прием приближенного расчета одномерной циркуляции [путем упрощения системы уравнений (1) и пренебрежения граничными условиями на вертикальных стенках] справедлив и для центральных областей даже такого сравнительно небольших размеров бассейна, как лоток П. К. Божича (отношение продольных размеров к глубине примерно равно 3), вместо предполагавшегося нами замкнутого мелководного бассейна морского или озерного типа (отношение продольных размеров к глубине $10^5 \div 10^6$).

В заключение автор выражает искреннюю признательность П. К. Божичу за любезное разрешение воспользоваться результатами его эксперимента.

Институт теоретической геофизики
Академии наук СССР

Получено 10/XI 1940 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Arakawa H. On the general and secondary circulation of the ocean. Mem. Imp. Mar. Observ., Kobe, Japan, VI, No. 1, 1935.
2. Ekman V. W. On the influence of the Earth's rotation on ocean currents. Arkiv för Mat. Astr. o. Fys., II, No. 11, 1905.
3. Разумовский Н. И. Проверка формулы Кольдинга при нагонно-сгонном ветре в Карабогазском заливе. Метеорология и гидрология, № 4—5, 1937.
4. Jeffreys H. The effect of a steady wind on the sea level, near a straight shore. Phil. Mag., XLVI, 114, 1923.
5. Prandtl L. u. Tollmien H. Die Windverteilung über dem Boden, errechnet aus den Gesetzen der Rohrströmungen. Zs. Geophys., No. 1, 1924/25.
6. Fjeldstad J. E. Ein Beitrag zur Theorie der winderzeugten Meeresströmungen. Gerlands Beitr. zur Geophys., 23, 1929.
7. Sverdrup H. U. The waters on the North Siberian shelf. The Norwegian North Polar Expedition with the *Maud*. Sci. Res., IV, No. 2, 1929, Bergen.
8. Ertel H. Allgemeine Theorie der Turbulenzreibung und des *Austausches*. Sitz. Ber. d. Preuss Ak. d. Wiss. phys.-math. Kl., XXVI, 1932.
9. Prandtl L. Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz. Zs. f. Angew. Math. u Mech., 5, 1925.
10. Taylor G. I. The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. Proc. Roy. Soc., A, 135, No. 828, 1932.
11. Palmén E. Über die von einem stationären Wind verursachte Wasserstauung, V. Hydr. Konf. der Baltischen Staaten. Bericht 15 B, 1936.
12. Jeffreys H. The flow of water in an inclined channel of rectangular section. Phil. Mag., 29, May 1925.
13. Defant A. Die Bewegungen und der thermohaline Aufbau der Wassermassen in Meeresstrassen. Sitz. Ber. d. Preuss. Akad. d. Wiss. phys.-math. Kl., 13—15, 1930, Pp. 193—208.
14. Rossby C. G. On the frictional force between air and water and on the occurrence of a laminar boundary layer next to the surface of the sea. Pap. Phys. Ocean. a. Met., IV, No. 3, Cambridge Mass., 1936.
15. Sverdrup H. U. Die maritime Verdunstungsproblem. Ann. d. Hydr. u. Marit. Met., LXIV, H. V, 1936.

ПОПЕРЕЧНАЯ НЕРАВНОМЕРНОСТЬ НАГОННОГО ВЕТРА КАК ОДНА ИЗ ВАЖНЫХ ПРИЧИН ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ В МОРЕ[1]

Рассматривая в свое время [1] стационарную циркуляцию, возбуждаемую ветром в замкнутом однородном море, я путем приближенного анализа явления показал, что поперечная неравномерность скорости ветра (одного и того же направления) приводит в результате к циркуляции не только в вертикальной, но и в горизонтальной плоскостях; таким образом, на поверхности моря могут существовать компенсационные течения, направленные обратно ветру.

В настоящей заметке я пытаюсь развить соображения о той, на мой взгляд, большой роли, какую должна играть поперечная неравномерность нагонного ветра в горизонтальной циркуляции, существующей в мелководных замкнутых морях, больших заливах и в экваториальных областях океана.

Для решения вопроса в самом первом приближении я пренебрегаю в уравнениях движения инерционными членами и эффектом вращения Земли и по-прежнему рассматриваю, опуская условия на боковых границах, лишь продольные (в направлении ветра) компоненты скорости течения в бассейне постоянной глубины H. Если иметь в виду, что в реальных условиях горизонтальные размеры морских бассейнов намного превышают их глубину, то, как известно [2], вертикальными составляющими течения можно пренебрегать практически на всем протяжении бассейна и приближенно описывать стационарное движение в направлении ветра одним уравнением:

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g\rho \operatorname{tg} \gamma = 0, \tag{1}$$

являющимся результатом упрощений уравнений Стокса—Навье.

---

[1] Опубликовано в Докладах Академии наук СССР, новая серия, т. XLIX, № 2, 1945 г. Представлено академиком П. П. Ширшовым 30/XI 1944 г.

Здесь u — компонента скорости в направлении горизонтальной оси X (положительное направление по ветру); g — ускорение силы тяжести; ρ — постоянная плотность воды; γ — угол наклона свободной поверхности воды в бассейне (приближенно принимаемой за плоскость), создаваемого нагонным эффектом ветра в продольном его направлении; z — вертикальная координата, отсчитываемая вниз от поверхности ($z=0$) воды в бассейне; μ — величина коэффициента турбулентной вязкости, принимаемая сначала в качестве постоянной величины. Следует при этом заметить, что поперечным ветру наклоном уровня я пренебрегаю и считаю γ приближенно постоянной величиной, не зависящей от поперечной координаты y.

Решение (1) подчиняется граничным условиям:

$$\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}=-T(y); \quad (u)_{z=H}=0, \tag{2}$$

где $T(y)$ — тангенциальное давление ветра на поверхности воды, меняющееся в поперечном направлении ветра (ось Y) по любому заданному закону.

При этих условиях решение (1) представится в виде

$$u=\frac{g\rho\,\mathrm{tg}\,\gamma}{2\mu}(H^2-z^2)+\frac{T(y)}{\mu}(H-z). \tag{3}$$

Постоянную величину $\mathrm{tg}\,\gamma$ я, как и ранее, определяю из условия, что в стационарном случае полный расход воды через поперечное сечение бассейна равен нулю, т. е.

$$\int_0^L\int_0^H u\,dz\,dy=0, \tag{4}$$

где L — поперечный ветру горизонтальный размер бассейна. Подставляя (3) в (4), получим

$$\mathrm{tg}\,\gamma=-\frac{3}{2g\rho H}\frac{1}{L}\int_0^L T(y)\,dy. \tag{5}$$

Но

$$\frac{1}{L}\int_0^L T(y)\,dy=\overline{T},$$

где $\overline{T}$ — величина тангенциального давления ветра, осредненная по поперечному (ветру) сечению бассейна. Следовательно, (3) можно представить в виде

$$u=\frac{(H-z)}{\mu}\left[T(y)-\frac{3\overline{T}(H+z)}{4H}\right], \tag{6}$$

откуда явствует, что противотечение ($u<0$) на поверхности ($z=0$) возможно при условии

$$\overline{T}/T \geqslant 1{,}33, \tag{7}$$

иными словами, там, где тангенциальное давление ветра отклоняется от среднего (в сторону меньших T) более чем на 25%.

Пользуясь общепринятой зависимостью

$$T=\rho' k W^2, \tag{8}$$

где ρ' — плотность воздуха, k — постоянный коэффициент, W — скорость ветра, можно переписать (7) в более удобной для практики форме:

$$\overline{W^2}/W^2 \geqslant 1{,}33. \tag{7'}$$

К сожалению, (7′) нельзя выразить непосредственно в скоростях ветра, ибо $\overline{W^2} \geqslant (\overline{W})^2$. Тем не менее, очевидно, что даже очень небольшая поперечная неравномерность ветра в состоянии возбудить на поверхности воды компенсационное течение, направленное обратно ветру.

Легко видеть, что (7) и (7′) не зависят от абсолютного значения коэффициента внутреннего турбулентного трения μ: на величину указанных критериев влияет лишь ф о р м а избранной зависимости $\mu(z)$. Так, например, в случае оправданной в мореведческой практике зависимости $\mu=\mu_0\left(\frac{H-z}{H}\right)^{1/2}$ возможность противотечения на поверхности вместо (7′) оценивается неравенством

$$\overline{W^2}/W^2 \geqslant 1{,}20. \tag{7''}$$

Как видим, возможность существования противотечения на поверхности в последнем случае заметно повысилась по сравнению со случаем $\mu=\text{const}$.

Из (6) легко получить уравнение нулевой изотахи ($u=0$), разграничивающей в вертикальной плоскости поперечного сечения бассейна нагонный поток и компенсационное противотечение. Это уравнение имеет вид

$$z=\frac{H}{3\overline{T}}\left[4T(y)-3\overline{T}\right]. \tag{9}$$

Из (9), между прочим, вытекает известный результат, что в случае равномерного ветра, когда $T(y)=\overline{T}=\text{const}$, граница раздела является прямой, параллельной Y, и расположена на расстоянии от поверхности, равном одной трети глубины бассейна ($z=H/3$). Из (9) следует также, что в общем случае наклон границы раздела (по отношению к горизонтальной оси Y) в некоторой точке (z, y) внутри бассейна определяется выражением

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{dz}{dy} = -\frac{4H\,dT}{3\overline{T}\,dy} = -\frac{2{,}67HW}{\overline{W^2}}\frac{dW}{dy}, \tag{10}$$

откуда явствует, что интересующая нас граница раздела обладает наклоном, обратным наклону кривой поперечного изменения скорости ветра (в той же точке y); другими словами, зеркально копирует, но в ином масштабе, кривую поперечного изменения скорости ветра. Нетрудно сообразить, что величина $\operatorname{tg}\alpha$ до некоторой степени является качественным мерилом отношения между поперечной ветру горизонтальной компонентой скорости v и вертикальной компонентой скорости w движения воды в бассейне.

Очевидно, что в предельном случае, когда $\operatorname{tg}\alpha=0$, $v=0$, и, наоборот, когда $\operatorname{tg}\alpha=\infty$, $w=0$. Из (9) поэтому следует, что при неизменной средней квадратичной скорости ветра отношение v/w возрастает либо с увеличением глубины бассейна, либо с увеличением скорости ветра и ее поперечного градиента.

Определение границ раздела между течениями, направленными по ветру и против ветра (в вертикальной плоскости поперечного ветру сечения бассейна), может быть осуществлено весьма быстро очень простым приемом, вытекающим из указанного здесь приближенного анализа явления.

Для этой цели уравнение (9) удобнее представить иначе, а именно:

$$T(y) = \frac{3\overline{T}}{4}\left(1+\frac{z}{H}\right),$$

или, пользуясь зависимостью (8), так:

$$W^2(y) = \frac{3\overline{W^2}}{4}\left(1+\frac{z}{H}\right). \tag{11}$$

Легко видеть, что уравнение (11) удовлетворяется для точек пересечения кривой поперечного изменения квадратов скорости ветра с прямыми, параллельными оси Y, ординаты которых составляют $\frac{3}{4}\left(1+\frac{z}{H}\right)$ от $\overline{W^2}$. Так, например, для определения возможности противотечения на поверхности воды ($z=0$) и положения границ его необходимо на графике поперечного изменения квадратов скорости ветра провести прямую, параллельную Y, ординаты точек которой составляют $^3/_4$ $\overline{W^2}$. В случае пересечения этой прямой с кривой квадратов скорости ветра (тем самым уже решается вопрос о возможности противотечения на поверхности) абсциссы точек пересечения определят положение границ противотечения на поверхности воды в бассейне.

Вопрос о том, упираются ли границы противотечения в дно бассейна, и определение положения их на дне решаются путем проведения прямой $^3/_2\ \overline{W^2}$ и нахождения абсцисс точек ее пересечения с заданной кривой $W^2(y)$. Наконец, контуры границ

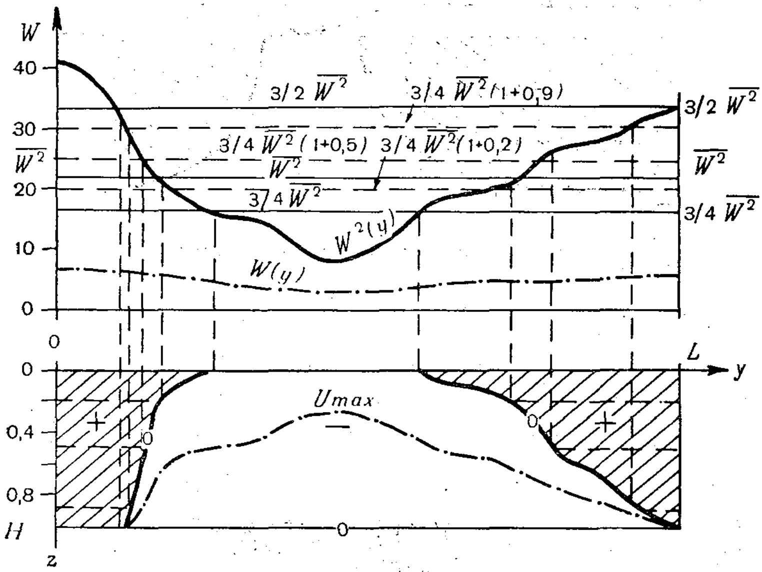

Рис. 1.

противотечения на промежуточных глубинах определяются проекциями точек пересечения прямых с ординатами $^3/_4\ \overline{W^2}$ $(1+0{,}1)$, $^3/_4\ \overline{W^2}$ $(1+0{,}2)$ и т. д., в зависимости от значений промежуточных глубин $z=0{,}1\,H$, $z=0{,}2\,H$ и т. д., на которых желательно определить положение границ противотечения.

Аналогичным графическим приемом решается вопрос о положении максимума скоростей противотечения. Максимум этот путем дифференцирования (6) по z определяется уравнением

$$W^2(y)=1{,}5\ \overline{W^2}\,\frac{z}{H}.$$

Рисунок 1 служит образцом указанных построений. В верхней части пунктиром изображено поперечное изменение скорости ветра $W(y)$, направленного перпендикулярно чертежу, а сплошной кривой — изменение квадратов скорости ветра $W^2(y)$. В нижней части намечены контуры поперечного верти-

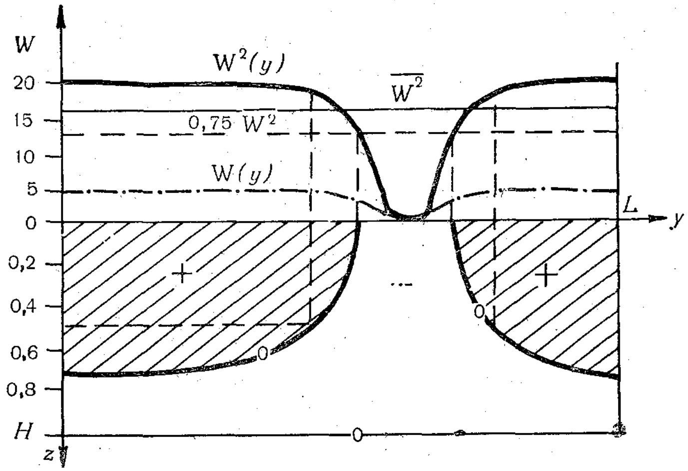

Рис. 2.

кального сечения бассейна и нанесены границы между течением, направленным по ветру (+), и компенсационным (—) противотечением. Наконец, штрихами с пунктиром обозначено

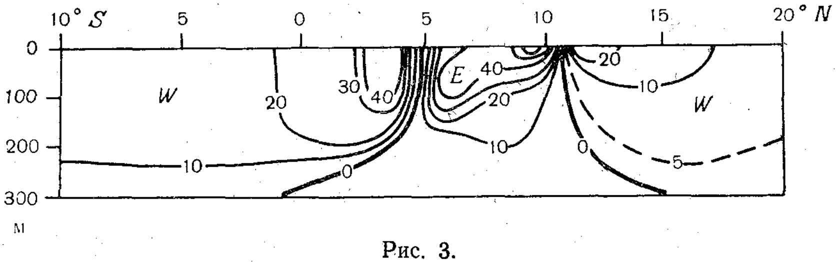

Рис. 3.

положение максимума скоростей противотечения, который в данном случае всюду находится ниже поверхности воды в бассейне.

Столь же легко наметить границы противотечения в особо интересном для нас случае, когда скорость нагонного ветра резко уменьшается в узкой центральной области бассейна, тогда как за пределами этой области она постоянна (рис. 2). Подобного рода характер поперечной неравномерности нагонного ветра близко напоминает условия, встречающиеся в экваториальной области Тихого океана, где в основном равномерная скорость пассатов, нагоняющих воду в западную часть океана, резко снижается до нуля в узкой штилевой полосе, расположенной к северу от экватора.

Замечательно, что форма границ противотечения, изображенного на рис. 2 (находящаяся, согласно нашей теории, в тесном соответствии с характером поперечной неравномерности ветра), в точности совпадает с формой поперечных границ экваториального противотечения в Тихом океане (рис. 3), намеченных Свердрупом [3] на основании обработки гидрологических наблюдений.

Тем самым, по-видимому, проливается новый свет на природу экваториальных противотечений, возникающих, как показано, вследствие поперечной неравномерности нагонных ветров, какими являются пассаты в экваториальных областях океанов.

Отметим в заключение, что по заданной форме границ противотечения и средней квадратичной скорости ветра можно судить о характере поперечной неравномерности ветра и на некоторых участках восстановить (обратным построением) поперечный профиль скорости ветра. Более того, на основании указанных построений и формулы (10) нетрудно прийти к выводу, что в случае стационарности ветра направление наклона границы противотечения не может изменяться с изменением глубины. В противном случае скорость ветра должна меняться с течением времени. Таким образом, мы получаем дополнительно простой качественный критерий, позволяющий распознать случаи нестационарности ветра и возбуждаемой им циркуляции в море.

Лаборатория океанологии
Академии наук СССР

Поступило 30/XI 1944 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штокман В. Б. Ветровой нагон и горизонтальная циркуляция в замкнутом море небольшой глубины. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 1, 1941.
2. Hidaka K. Memoirs of the Imperial Marine Observatory. Kobe VII, 1, 1939
3. Sverdrup H. U., Johnson M. W., Fleming R. H. The Oceans, their Physics, Chemistry and General Biology. N. Y., 1942.

ТЕОРИЯ ЭКВАТОРИАЛЬНЫХ ПРОТИВОТЕЧЕНИЙ В ОКЕАНАХ[1]

Обобщая задачу Экмана о нагоне в замкнутом однородном море на случай поперечной неравномерности ветра, автор основывает теорию экваториальных противотечений в океанах. Получены формулы, определяющие профиль поверхности океана в поперечном пассатам направлении и величину скоростей течений. Найдены критерии возможности противотечения на поверхности океана, указывающие, что очень небольшая поперечная неравномерность скорости пассатов в состоянии привести к образованию противотечения. Количественные и качественные результаты теории хорошо согласуются с действительностью.

В системе океанической циркуляции самым замечательным, пожалуй, является экваториальное противотечение. Это странное по своему происхождению течение расположено в виде узкой полосы между обоими экваториальными потоками (северным и южным) и направлено в сторону, им противоположную,— на восток. Особенно сильно экваториальное противотечение летом в Тихом океане, когда поверхностные скорости этого течения превышают 50 см/сек. и оно, подобно реке, зажатой между экваториальными потоками, пересекает Тихий океан от западных его окраин до берегов Америки.

Отметим также и тот загадочный факт, что экваториальное противотечение в Тихом океане местами направлено против ветра, т. е. не всегда расположено в штилевой полосе между пассатами. Последнее обстоятельство, по мнению многих ученых, исключает возможность истолкования экваториального противотечения как течения, вызванного ветром.

Проблеме экваториальных противотечений посвящено немало исследований. Однако все многочисленные попытки проникнуть в природу этого таинственного явления не привели к желаемой цели, так как носили чисто спекулятивный характер и нередко

---

[1] Опубликовано в Известиях АН СССР, серия геогр. и геофиз., т. X, № 6, 1946 г. Представлено академиком Л. С. Лейбензоном.

были явно ошибочными. Сколько-нибудь полной теории экваториальных противотечений, отвечающей на все главные вопросы этой проблемы, также, насколько мне известно, нет.

В предыдущем сообщении [1] я путем приближенного математического анализа циркуляции, возбуждаемой ветром в замкнутом море, показал, что даже очень небольшая поперечная неравномерность скорости ветра одного и того же направления может привести к возникновению на поверхности моря течений, направленных обратно ветру.

Полученный результат важен не только для объяснения особенностей горизонтальной циркуляции, существующей порой в мелководных замкнутых морях, но и для уяснения основной

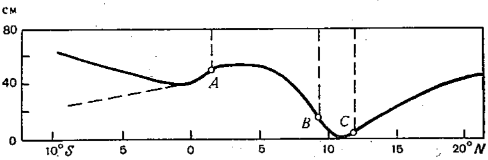

Рис. 1.

причины возникновения экваториальных противотечений в океанах.

Однако для построения полной, хотя бы и приближенной, теории экваториальных противотечений необходимо было учесть эффект отклоняющей силы вращения Земли, не принимавшийся мною ранее во внимание. Вследствие этого не мог быть ранее получен поперечный ветру профиль поверхности океана. Профиль этот, как показывают наблюдения в Тихом океане на меридиональном разрезе, перпендикулярном экваториальным потокам [2] (рис. 1), находится в соответствии с направлением и скоростями потоков в поле кориолисовой силы. Пунктиром обозначен наклон поверхности в том случае, если бы вся система находилась в северном полушарии.

В настоящем сообщении я учитываю и это важное обстоятельство, пытаясь построить теорию экваториальных противотечений путем обобщения задачи Экмана о течениях в замкнутом однородном море на случай поперечной неравномерности ветра. В результате я имею возможность ответить на все главные вопросы, связанные с проблемой экваториальных противотечений, и получить некоторые количественные результаты, хорошо отвечающие действительности.

Представим себе прямоугольный контур, которым мы ограничиваем некоторую область в океане постоянной глубины H, вытянутый в зональном направлении, вдоль параллели, с которой мы совместим ось X прямоугольной системы координат. Большую длину контура в указанном направлении обозначим через L, а поперечный этому направлению меньший размер контура, совпадающий с осью Y, обозначим через $l(L \gg l)$. За положительное направление оси X примем направление на восток; положительное направление оси Y будет ориентировано на север.

Если вода океана однородна (плотность ее ρ принимаем постоянной), то при наличии стационарного ветра и наклона уровня океана, создаваемого сгонно-нагонным эффектом ветра, выражения для компонент полного потока S от поверхности ($z=0$) до дна океана ($z=H$), имеют, согласно Экману [3], следующий вид:

$$S_x = \int_0^H u\,dz = B\gamma_x + b\gamma_y + cT_y, \tag{1}$$

$$S_y = \int_0^H v\,dz = B\gamma_y - b\gamma_x - cT_x; \tag{2}$$

здесь u и v — соответствующие компоненты горизонтального вектора скорости течения, а T_x и T_y — компоненты тангенциального давления ветра на поверхности океана; кроме того, в (1) и (2) приняты следующие сокращенные обозначения:

$$\gamma_x = -\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \tag{3}$$

$$\gamma_y = -\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \tag{4}$$

$$b = kH - B, \tag{5}$$

$$B = \frac{gD}{4\pi\omega \sin\varphi}, \tag{6}$$

$$k = \frac{g}{2\omega \sin\varphi}, \tag{7}$$

$$c = \frac{1}{2\omega\rho \sin\varphi}, \tag{8}$$

в которых ζ — высота точек свободной поверхности океана над некоторой горизонтальной плоскостью XOY, параллельной дну и невозмущенной поверхности океана, g — ускорение силы тяжести, ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта места, D — «глубина трения», связанная в свою очередь с коэффициентом внутреннего турбулентного трения A_z (A_z=const) соотношением [1]

$$D=\pi\sqrt{\frac{A_z}{\omega\sin\varphi}}. \tag{9}$$

Имея в виду пассаты, будем считать, что скорость ветра направлена вдоль оси X и меняется лишь в поперечном ветру направлении Y. Так как длина L стороны нашего контура, вытянутая в зональном направлении, по ветру, значительно превышает поперечный размер контура l, то с достаточным приближением можно считать, что возвышение поверхности океана в направлении ветра будет линейной функцией лишь одной координаты x; иными словами, γ_x — постоянная величина. В отношении γ_y условимся, что эта величина — функция одного только y. Последнее означает, что рассматриваемое движение совершается одинаково в любом поперечном ветру сечении рассматриваемой области, что в приближении отвечает условиям, встречаемым в области экваториального противотечения в Тихом океане.

При сделанных допущениях выражения (1), (2) запишутся в виде:

$$S_x=B\gamma_x+b\gamma_y(y), \tag{10}$$

$$S_y=B\gamma_y(y)-b\gamma_x-cT_x(y). \tag{11}$$

Очевидно, что в силу условия замкнутости канала должно выполняться следующее условие:

$$\int_0^l S_x\,dy=\int_0^l\int_0^H u\,dz\,dy=0. \tag{12}$$

Далее, вдали от границ бассейна $x=0$ и $x=L$ в силу условия неразрывности $\partial S_y/\partial y=0$ и, поскольку $S_y=0$ на границах бассейна $y=0$ и $y=l$, то

$$S_y\equiv 0. \tag{13}$$

Используя условие (13), находим из (11) величину γ_y

$$\gamma_y=\frac{b}{B}\gamma_x+\frac{c}{B}T_x(y). \tag{14}$$

Подставим выражение (14) в (10). Имеем

$$S_x=\frac{b^2+B^2}{B}\gamma_x+\frac{bc}{B}T_x(y). \tag{15}$$

[1] При записи выражений (1) — (8) предполагается, что $H/D\geqslant 3$. При анализе течений в экваториальной области океана это условие можно считать выполненным. Более подробно см. В. Б. Штокман «Экваториальные противотечения в океанах» (Гидрометеоиздат, 1948). (*Прим. сост.*)

Используя условие (12), определим постоянную γ_x:

$$\gamma_x = -\frac{bc}{b^2+B^2}\overline{T}_x, \tag{16}$$

где

$$\overline{T}_x = \frac{1}{l}\int_0^l T_x\,dy. \tag{17}$$

Формула (14) перепишется теперь в виде

$$\gamma_y = \frac{c}{B}\left(T_x - \frac{b^2}{b^2+B^2}\overline{T}_x\right). \tag{18}$$

Выражения (16) и (18) позволяют выписать формулу для уровня:

$$\zeta = -\frac{c}{B}\left(\frac{1}{1+\left(\frac{b}{B}\right)^2}\overline{T}_x y + \int_0^y \left(T_x - \overline{T}_x\right)dy\right) + $$
$$+\frac{bc}{b^2+B^2}\overline{T}_x x + \text{const}. \tag{19}$$

Формула (19) записана так, чтобы явно выделить член, описывающий эффект поперечной неравномерности ветрового поля.

В целях приложения нашей простой теории к проблеме экваториального противотечения в Тихом океане примем во внимание, что пассаты там обладают главной составляющей, направленной на запад, т. е. в сторону отрицательной оси X (при избранной нами системе координат). Следовательно, $T_x = -|T_x|$.

Для выражения интегралов в элементарных функциях допустим, что тангенциальное давление ветра в интересующей нас области меняется по следующему простому закону:

$$T_x(y) = -\frac{|T_0|}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi y}{l}\right). \tag{20}$$

Выражение (20) описывает лишь главные черты неравномерности ветрового поля пассатов в экваториальной области Тихого океана, детали которой, к сожалению, до сих пор не известны.

Подставляя (20) в (19), мы после некоторых преобразований получим

$$\zeta = \frac{cl\,|T_0|}{2B}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{b}{B}\right)^2}\frac{y}{l} + \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi y}{l}\right] -$$
$$-\frac{cb}{B^2+b^2}\frac{|T_0|}{2}x + \text{const}. \tag{21}$$

Скорость же геострофического течения U_G в направлении X определится выражением

$$U_G = -k\frac{\partial\zeta}{\partial y} = -\frac{kc\,|T_0|}{2B}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{b}{B}\right)^2} + \cos\frac{2\pi y}{l}\right]. \tag{22}$$

Так как согласно (20) скорость ветра в точке $y=l/2$ равна нулю, то фактическая скорость течения на поверхности океана в этой точке заведомо равна скорости геострофического течения, вычисляемой из (22) при $y=\frac{l}{2}$. Однако из (21) явствует, что, чем больше коэффициент $\frac{1}{1+\left(\frac{b}{B}\right)^2}$ линейного изменения поверхности уровня $\zeta(y)$ по сравнению с амплитудой $\frac{1}{2\pi}$ функции $\sin\frac{2\pi y}{l}$, тем меньше влияние последней, и противотечения даже в «штилевой области» $\left(y=\frac{l}{2}\right)$ в некоторых случаях может и не быть.

Нетрудно показать, что в Тихом океане эта возможность нереальна. Для этого, воспользовавшись (5), (6) и (7), преобразуем $\frac{1}{1+\left(\frac{b}{B}\right)^2}$ к виду

$$\frac{1}{1+\left(\frac{b}{B}\right)^2} = \frac{1}{4\pi^2\left(\frac{H}{D}\right)^2 - 4\pi\left(\frac{H}{D}\right) + 2}.$$

Последнее соотношение убеждает нас в том, что чем больше глубина моря по сравнению с глубиной трения D, тем меньше коэффициент линейного изменения уровня по сравнению с амплитудой $\frac{1}{2\pi}$ функции $\sin\frac{2\pi y}{l}$. Следовательно, при большом $\frac{H}{D}$ влияние линейного члена на поведение $\zeta(y)$ ощутимо сказывается лишь у самых краев рассматриваемой области и совершенно ничтожно в центральной ее части.

Рассматривая область экваториального противотечения в Тихом океане, примем $\varphi=5°$ N, а величину A_z вместе с Дефантом [4] будем считать равной $A_z=10^2$ см²/сек. Тогда согласно (9) окажется, что $D\sim123$ м. Если даже $H=400$ м (глубина

14*

распространения системы экваториального противотечения), не говоря уже о значительно большей фактической глубине Тихого океана, то $\frac{H}{D}\sim 3{,}3$ и для первого члена в (22) мы получим величину, меньшую 0,01, которой $\left(\text{при } y=\frac{l}{2}\right)$ свободно можно пренебречь по сравнению с единицей. Поэтому максимальная скорость противотечения на поверхности с достаточной точностью определяется выражением

$$U_G=\frac{kc\,|T_0|}{2B}=\frac{\pi\,|T_0|}{2D\omega\rho\sin\varphi}. \tag{23}$$

В условиях Тихого океана скорость пассатов равна, вероятно, 10 м/сек., что соответствует величине $|T_0|=3{,}2$ дин/см^2.

Подставляя в (30) принятые значения, получим

$$U_G=\frac{3\cdot 3{,}2}{123\cdot 10^2\cdot 128\cdot 10^{-7}}=60 \text{ см/сек.}$$

Вычисленная таким путем величина U_G очень хорошо совпадет с данными наблюдений [5], согласно которым скорость экваториального противотечения немного превышает 50 см/сек.

Необходимо помнить, что фактическая скорость течения U_0, на поверхности моря слагается из скорости геострофического течения U_G и скорости чисто дрейфового течения на поверхности $U_{0,W}$. Последнюю, согласно Экману, можно выразить так:

$$U_{0,W}=\frac{\pi T}{2D\omega\rho\sin\varphi}.$$

Следовательно, имея в виду (20), получим

$$U_0=U_{0,W}+U_G=-\frac{\pi\,|T_0|}{4D\omega\rho\sin\varphi}\left(1+3\cos\frac{2\pi y}{l}\right),$$

откуда явствует, что фактические границы противотечения на поверхности океана не совпадают с поперечной деформацией его поверхности, деформацией, определяющей собственно скорости геострофического противотечения U_G. Фактические границы противотечения на поверхности моря мы получим, полагая в последнем выражении $U_0=0$. Тогда окажется, что $y_1\sim 0{,}3l$, $y_2\sim 0{,}7\,l$.

В верхней части рис. 2 изображено в условных единицах изменение $T_x(y)$ по закону (20), а в средней части изображен ход функции $\Psi(y)=-\frac{c}{B}\int\limits_0^y(T_x-\overline{T}_x)dy$, совпадающей для данного случая (в пределах точности чертежа) с поперечным профилем поверхности океана $\zeta(y)$ (с точностью до произвольной постоянной). Этот профиль обладает всеми главными особенностями изменения поверхности Тихого океана в сечении, поперечном экваториальному противотечению между экватором и 20° N (см. рис. 1). Пунктиром на рис. 2 указано линейное изменение уровня, практически не влияющее на поведение кривой $\zeta(y)$, а буквами A и B обозначена область фактического противотечения на поверхности, которое по краям своим направлено против ветра. Наконец, на рис. 2 указаны вертикальные границы противотечения от поверхности до глубины D, построенные с учетом экмановской формулы для скорости чисто дрейфового течения. Форма этих границ, также в общих чертах, хорошо совпадает с формой вертикальных границ экваториального противотечения, намеченных Свердрупом [5] на основании обработки наблюдений.

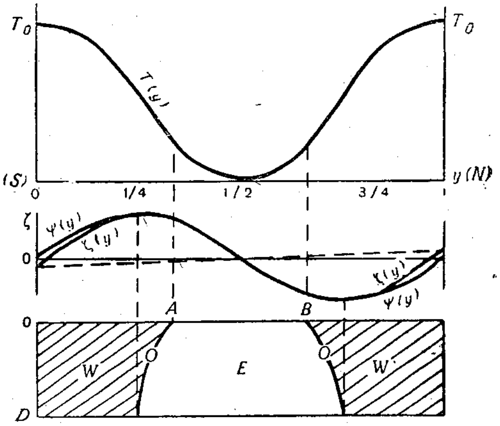

Рис. 2.

Любопытно, наконец, выяснить вопрос о том, могло бы существовать экваториальное противотечение при отсутствии штилевой области между пассатами. Для этой цели положим

$$T_x(y) = -\left(\frac{|T_0| + |T_{\min}|}{2} + \frac{|T_0| - |T_{\min}|}{2} \cos\frac{2\pi y}{l}\right), \qquad (24)$$

где $T_{\min}$ — минимальное значение тангенциального давления ветра в центре рассматриваемой области. В этом случае условие существования геострофического противотечения в центре области $\left(y = \frac{l}{2}\right)$, а следовательно, и характерной для него деформации поверхности моря запишется так:

$$\frac{|\overline{T}| - |T_{\min}|}{|\overline{T}|} > \frac{0{,}5}{2\pi^2\left(\frac{H}{D}\right)^2 - 2\pi\left(\frac{H}{D}\right) + 1}.$$

Принимая во внимание, что $T = \rho'\chi W^2$ (ρ' — плотность воздуха, χ — постоянный коэффициент, W — скорость ветра), можно выразить предыдущий критерий непосредственно в скоростях ветра:

$$\frac{W_{\min}}{\sqrt{\overline{W^2}}} < \sqrt{1 - \frac{0,5}{2\pi^2\left(\frac{H}{D}\right)^2 - 2\pi\left(\frac{H}{D}\right) + 1}}\,. \tag{25}$$

Если $\frac{H}{D} = 3,3$, то второй член под знаком корня равен 0,005 и, следовательно,

$$\frac{W_{\min}}{\sqrt{\overline{W^2}}} < 0,9995.$$

Таким образом, для существования геострофического противотечения вполне достаточно, чтобы скорость ветра в центре области была меньше среднеквадратической скорости на ее краях всего лишь на 0,1%!

Из (25) следует, что при большой по сравнению с D глубине моря градиентное противотечение и соответствующий ему наклон уровня моря могут существовать при совершенно ничтожной поперечной неравномерности ветра. Разумеется, скорость геострофического противотечения и наклон уровня моря при этом будут значительно меньше скорости и наклона уровня при наличии штилевой области.

Возможность же существования фактического противотечения на поверхности моря при том же законе поперечной неравномерности ветра (24), как нетрудно показать, определяется критерием

$$\frac{2|\overline{T}| - 3|T_{\min}|}{2|\overline{T}|} > \frac{0,5}{2\pi^2\left(\frac{H}{D}\right)^2 - 2\pi\left(\frac{H}{D}\right) + 1}$$

или

$$\frac{W_{\min}}{\sqrt{\overline{W^2}}} < \sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{1 - \frac{0,5}{2\pi^2\left(\frac{H}{D}\right)^2 - 2\pi\left(\frac{H}{D}\right) + 1}}\,. \tag{26}$$

Если $\frac{H}{D}$ велико, то

$$\frac{W_{\min}}{\sqrt{\overline{W^2}}} < 0,817.$$

Следовательно, для возможности существования фактического противотечения в данном случае достаточно, чтобы скорость ветра в центре области была меньше среднеквадратической скорости на 19%; иными словами, при скорости пассатов на краях области 10 м/сек. течение на поверхности будет направлено в центре области против ветра, скорость которого там может достигать величины 7,1 м/сек.

Теперь становится ясным, почему экваториальные противотечения, обусловленные, как показано, эффектом поперечной неравномерности ветрового поля, могут быть направлены в некоторых местах целиком против ветра.

При любом поперечном изменении скорости ветра критерии возможности противотечения не могут быть выражены в явной зависимости от отношения скоростей ветра. Вопрос решается путем несложных графических приемов, излагаемых в другом месте.

Расшифруем, наконец, причину наличия точек перегиба на меридиональном профиле поверхности Тихого океана вблизи экватора (рис. 1). Положение точек перегиба на профиле, построенном по данным наблюдений, отмечено на рис. 1 пунктиром (пунктирные вертикали A, B и C). На эту особенность топографии поверхности Тихого океана, не укладывающуюся в рамки упрощенной теоретической схемы рис. 2, до настоящего времени совсем не обращали внимания. Ответ на поставленный вопрос легко найти, если обратиться к уравнению (19). Дифференцируя дважды последнее по y, мы убедимся в том, что положение точек перегиба кривой $\zeta(y)$ совпадает с экстремальными значениями T (иначе говоря, скорости ветра). Очевидно, что экстремум T, соответствующий точке перегиба B (см. рис. 1), не что иное, как минимальное значение скорости ветра в штилевой области. Следовательно, точки перегиба профиля океана A и C соответствуют максимумам T (скорости ветра).

Нетрудно также объяснить причину указанных теорией максимумов скорости ветра по краям штилевой зоны. В самом деле, ведь по бокам от термического экватора, сдвинутого к северу от экватора географического и совпадающего в Тихом океане с штилевой зоной, скорость ветра должна резко возрастать вследствие увеличенных градиентов температуры и вместе с ними градиентов атмосферного давления. Лишь на некотором расстоянии от термического экватора, где градиенты температурного и барического полей уменьшаются, скорость ветра может приближаться к обычной, равномерной скорости пассатов. Таким образом, поперечная неравномерность пассатов в экваториальной области Тихого океана должна более точно, по сравнению с (20), характеризоваться кривой $T_x(y)$, схематически изображенной на рис. 3.

Для того чтобы наметить общий ход результирующего (поперечного ветру) профиля поверхности океана в этом более сложном случае, нет нужды знать аналитическое выражение $T_x(y)$. Для любой функции $T_x(y)$ не составляет труда схематически наметить общий ход интегральной кривой $\Psi(y) = -\frac{c}{B}\int_0^y (T_x - \overline{T_x})\,dy$, что указано на рис. 3 вместе с линейным изменением уровня, определяемым первым членом в (19). На рис. 3 отмечено положение точек перегиба и экстремума интегральной кривой $\Psi(y)$ в соответствии с формой данной кривой $T_x(y)$.

Как видим, поперечный ветру профиль океана, схематически изображенный на рис. 3 кривой $\zeta(y)$, в точности воспроизводит

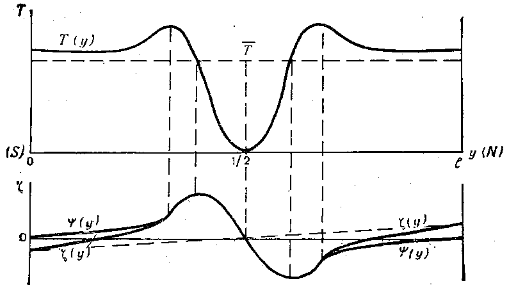

Рис. 3.

наблюдаемые и заинтересовавшие нас особенности меридионального профиля поверхности Тихого океана, получившие теперь свое объяснение.

Очевидно, что для развития теории экваториальных течений в Тихом океане необходимо детальное изучение поперечной неравномерности пассатов, особенно вблизи термического экватора.

Институт океанологии
Академии наук СССР

Поступило 22/III 1946 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штокман В. Б. Поперечная неравномерность нагонного ветра как одна из важных причин горизонтальной циркуляции в море. ДАН СССР, т. XLIX, № 2, 1945.
2. Defant A. Der äquatoriale Gegenstrom. Sitzungsber. d. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Klasse, XXVIII, 1935.
3. Шулейкин В. В. Физика моря. Изд. АН СССР, 1941.
4. Defant A. Die Troposphäre des Atlantischen Ozeans, Wiss. Erg. d. Deutsch. Atl. Exp. auf dem „Meteor", 6, Teil 1, 1936.
5. Sverdrup H. U. The Oceans, their Physics, Chemistry and General Biology. N. Y., 1942.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦИРКУЛЯЦИИ НА ПОВЕРХНОСТИ ОКЕАНА В ОБЛАСТИ ЭКВАТОРИАЛЬНОГО ПРОТИВОТЕЧЕНИЯ[1]

Основываясь на предложенной нами теории экваториальных противотечений [1], мы в настоящей заметке исследуем нерешенный до настоящего времени вопрос о циркуляции на поверхности океана в интересующей нас области. Пользуясь обозначениями цитированной работы [1],[2] напомним выражение для зональной (ось X) составляющей геострофического течения

$$u_g = -\frac{kc\,|T_{\max}|}{2}\left(\frac{B}{B^2+b^2} + \frac{1}{B}\cos\frac{2\pi y}{l}\right) \tag{1}$$

и зональной составляющей результирующего (дрейфовое + геострофическое) течения на поверхности океана в случае, когда глубина H слоя, в котором осуществляется движение, больше или равна $3D$ (D — глубина трения в смысле Экмана):

$$u_0 = -\frac{kc\,|T_{\max}|}{4B}\left(\frac{2B^2}{B^2+b^2} + 1 + 3\cos\frac{2\pi y}{l}\right). \tag{2}$$

При этом для простоты мы полагаем, что тангенциальное давление пассатов меняется по закону

$$T_x(y) = -\frac{|T_{\max}|}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi y}{l}\right),$$

будучи направлено на запад ($-X$). Ось Y направлена на север.

---

[1] Опубликовано в Докладах Академии наук СССР, новая серия, т. LVII, № 7, 1947 г. Представлено академиком П. П. Ширшовым 20/III 1947 г.

[2] Необходимые для чтения этой статьи обозначения и формулы можно найти в предыдущей статье. Укажем лишь формулы для скоростей дрейфового течения на поверхности: $u_w = \frac{kc}{2B}T_x$, $v_w = -\frac{kc}{2B}T_x$. *(Прим. сост.)*

Пользуясь формулой (5) [1], можно показать, что меридиональная составляющая геострофического течения равна

$$v_g = -\frac{kcb\,|T_{\max}|}{2(B^2+b^2)}, \tag{3}$$

а меридиональная составляющая результирующего течения на поверхности океана меняется по закону

$$v_0 = \frac{kc\,|T_{\max}|}{4B}\left[\frac{(B-b)^2}{B^2+b^2} + \cos\frac{2\pi y}{l}\right]. \tag{4}$$

Заметим, что

$$Q = \frac{(B-b)^2}{B^2+b^2} = \frac{\left(\frac{\pi H}{D}-1\right)^2}{\left(\frac{\pi H}{D}-1\right)^2+\left(\frac{\pi H}{D}-\frac{1}{2}\right)}. \tag{5}$$

Из (5) следует, что в случае $H/D > 1/\pi$ $Q < 1$. Таким образом, в некоторой центральной области меридиональная компонента результирующего течения на поверхности океана направлена на юг, тогда как по бокам от этой области меридиональные составляющие направлены на север. Значения y, для которых $v_0 = 0$, соответствуют зонам конвергенции и дивергенции течений, т. е. местам нисходящих и восходящих течений. Простые вычисления показывают, что, например, в случае $H/D = 3$ $v_0 = 0$ при $y_1 = 0{,}43\,l$, $y_2 = 0{,}57\,l$.

Уравнение линий тока результирующей циркуляции на поверхности океана мы получим из (2) и (4). Полагая в них для простоты $l = 2\pi$, найдем, что

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0}{u_0} = -\frac{Q+\cos y}{\frac{2B^2}{B^2+b^2}+1+3\cos y},$$

откуда, интегрируя, получим

$$x = -\left(\frac{2B^2}{B^2+b^2}+1\right)\int\frac{dy}{Q+\cos y} - 3\int\frac{\cos y\,dy}{Q+\cos y}.$$

В случае, когда $H/D > 1/\pi$, т. е. когда $Q < 1$, уравнение линий тока принимает вид

$$x = \frac{3Q-\left(\frac{2B^2}{B^2+b^2}+1\right)}{\sqrt{1-Q^2}}\times$$

$$\times\ln\left|\frac{\sqrt{1-Q}\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}+\sqrt{1+Q}}{\sqrt{1-Q}\,\mathrm{tg}\,\frac{y}{2}-\sqrt{1+Q}}\right| - 3y + C, \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная.

На рис. 1 изображена система линий тока результирующей циркуляции на поверхности океана, построенная согласно (6) в случае $H/D=3$.

Слева от картины линий тока указано изменение величины тангенциального давления ветра T. На рис. 1 отчетливо видна область CF «ядра» противотечения, ограниченная с севера линией дивергенции, а с юга — линией конвергенции. Ширина этой области зависит от величины (5). Собственно границы противотечения AP обозначены на рис. 1 пунктиром. В интерпретации теории течения к северу и югу от границ A и P противотечения соответствуют северному и южному экваториальным течениям.

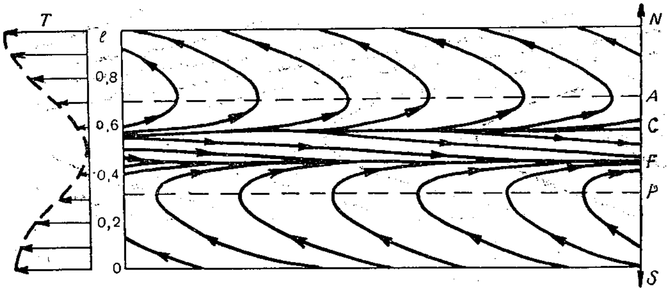

Рис. 1.

Как видим, направление течения на северном (N) и южном (S) крае рассматриваемой области отклонено вправо от направления ветра на угол, значительно меньший 45°.

Уравнение линий тока геострофической циркуляции, совпадающих, очевидно, с горизонталями (топографией) поверхности океана, мы получим из выражения

$$\frac{dy}{dx}=\frac{v_g}{u_g}=\frac{Bb}{B^2+(B^2+b^2)\cos\frac{2\pi y}{l}},$$

интегрируя которое (при $l=2\pi$), найдем

$$x=\frac{B}{b}y+\frac{B^2+b^2}{Bb}\sin y+C. \tag{7}$$

В случае $H/D=3$ первый член в (7) очень мал. Следовательно, горизонтали поверхности океана, совпадающие с линиями тока геострофической циркуляции, характеризуются системой синусоид, изображенной на рис. 2. Заметим, что рис. 2 очень хорошо копирует главные особенности топографии поверхности Тихого и Атлантического океанов в области противотечения, как это видно, например, из рис. 3, на котором изображены кривые, подобные «динамическим» горизонталям поверхности Тихого океана [2] (данные наблюдений). Сопоставление же рис. 1 и 2 служит, с другой стороны, наглядной иллюстрацией тех грубых ошибок, которые могут возникать при обычном в мореведческой практике отождествлении фактической циркуляции, вызванной ветром на поверхности океана, с ее «динамической» топографией.

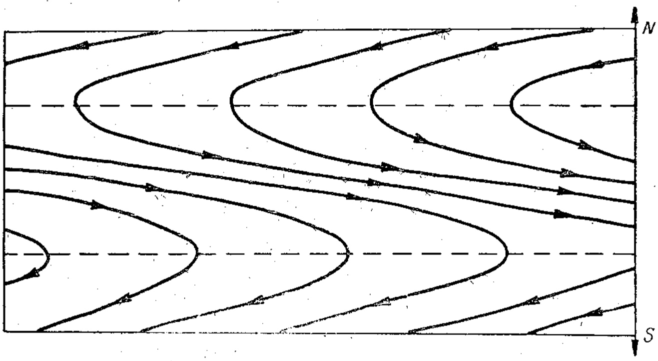

Рис. 2.

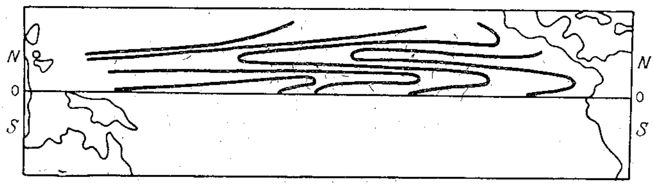

Рис. 3.

Вертикальная циркуляция в плоскости меридиана будет исследована в другом месте.

Институт океанологии
Академии наук СССР

Поступило 20/III 1947 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штокман В. Б. Теория экваториальных противотечений в океанах. ДАН, т. LII, № 4, 1946.
2. Sverdrup H. U. The Oceans, their Physics, Chemistry and General Biology. N. Y., 1942, p. 708.

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ МЕРИДИОНАЛЬНЫХ ГРАНИЦ ЗОНАЛЬНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ В СЕВЕРНОЙ ПОЛОВИНЕ ТИХОГО ОКЕАНА [1]

В свое время автором была построена теория экваториальных противотечений [1, 2], не только объясняющая причины их возникновения, но и дающая рациональное толкование ряду важных особенностей их структуры.

Однако упрощенный характер теории, основанной на предположении об однородности воды в океане и других схематизациях, мог давать повод к сомнениям о применимости некоторых количественных выводов теории в реальных условиях. В частности, к подобного рода сомнениям относился вопрос о применимости указываемого теорией простого способа определения меридиональных границ противотечений и линий конвергенции и дивергенции на поверхности океана. При всем том отсутствие в момент разработки теории надежных данных о меридиональном распределении зональной составляющей скорости пассатов лишало возможности тогда же предпринять сравнение количественных выводов теории с данными наблюдений.

В настоящее время такая возможность появилась благодаря опубликованным Пристли [4] данным о среднем месячном и годовом меридиональном распределении зональной составляющей касательного трения ветра над поверхностью Атлантического, Индийского и Тихого океанов.

На рис. 1 приведены построенные Пристли кривые среднего меридионального изменения зональной составляющей касательного трения ветра (дин/см^2) для января, июля и года в целом над поверхностью Тихого океана. Как видно на рисунке, касательное трение ветра обладает резко выраженным минимумом в июле, приуроченным примерно к 7° N.

---

[1] Опубликовано в журнале «Метеорология и гидрология», № 5, 1956 г.

Основываясь на кривой распределения зональной составляющей касательного трения ветра в июле, можно попытаться, пользуясь указанным нами ранее методом, определить меридиональные границы экваториального противотечения и затем сравнить полученные результаты с данными наблюдений. Мы намеренно

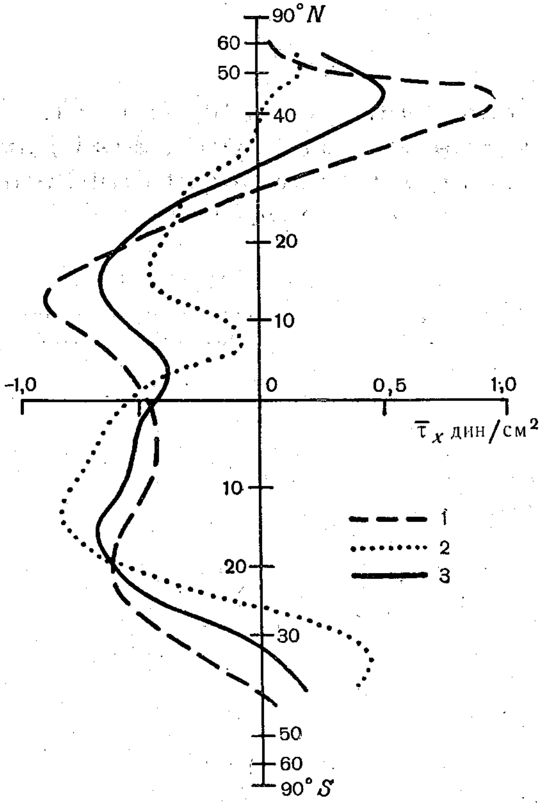

Рис. 1.

1 — январь, *2* — июль, *3* — год.

останавливаем свое внимание на теоретическом определении летних границ экваториального противотечения в Тихом океане, так как летом там экваториальное противотечение достигает своего наибольшего развития, меридиональные границы его особенно ярко выражены, а поэтому наиболее надежно определены из наблюдений.

Как это следует из упоминавшейся выше теории, меридиональные границы противотечения на поверхности определяются из соотношения

$$\tau_x(y) = \frac{2}{3}\bar{\tau}_x, \qquad (1)$$

где

$$\bar{\tau}_x = \frac{1}{l}\int_0^l \tau_x dy, \qquad (2)$$

причем $\tau_x(y)$ обозначает касательное трение ветра, имеющее зональное направление (x) и меняющееся по любому заданному из наблюдений закону вдоль меридиана (ось Y); знак — означает осреднение на протяжении отрезка l.[1]

На основании (1) положение меридиональных границ противотечения на поверхности океана определяется проекциями на меридиан точек пересечения кривой зонального касательного трения ветра с «критериальной» прямой, ордината которой составляет $^2/_3$ величины $\bar{\tau}_x$, определяемой формулой (2). Для вычисления величины $\bar{\tau}_x$ нужно знать изменение $\tau_x(y)$ в пределах интервала l, равного меридиональному поперечнику области сгона. Заметим также, что указанный интервал l может быть выражен в условных единицах, например в миллиметрах, если пользоваться кривой $\tau_x(y)$, нанесенной на миллиметровой бумаге.

На рис. 2 изображен в другом, чем на рис. 1, масштабе отрезок кривой $\tau_x(y)$ для июля между экватором ($\varphi=0$) и 40° N. Интервал от $\varphi=0$ до $\varphi=40°$ N был принят в качестве интервала l, фигурирующего в формулах (1) и (2), т. е. в качестве меридиональной протяженности области сгона—нагона. Основанием для такого выбора l послужили следующие соображения. Во-первых, как мы указывали ранее, линия экватора может рассматриваться в качестве южной границы области сгона—нагона, в которой формируется экваториальное противотечение, ибо по разные стороны от экватора пассат вызывает противоположно направленный отток воды; поэтому на экваторе должна иметь

[1] См. статью «Теория экваториальных противотечений в океанах», опубликованную в настоящем сборнике. Пренебрегая малой величиной $1\Big/\left\{1+\left(\frac{b}{B}\right)^2\right\}$ по сравнению с единицей, находим выражение для зональной скорости результирующего течения на поверхности $U_0 = \frac{kc}{2B}(3\tau_x - 2\bar{\tau}_x)$. Отсюда и следует неравенство (1). Аналогично выводится и формула (3). (*Прим. сост.*)

место линия дивергенции с восходящими токами воды. Во-вторых, за северную границу действия пассатов естественнее всего принять широту, на которой происходит смена пассата на западные ветры. Эта граница, как видно на рис. 1, приурочена к 40° N.

В табл. 1 сведены все вычисления, необходимые для расчета величины $\overline{\tau_x}$ по формуле (2). В первой графе таблицы указаны условные расстояния l (выраженные в мм), для которых с кривой на рис. 2 были сняты значения касательного трения τ_x[1], умноженные на 10^2. По этой причине конечный результат расчета

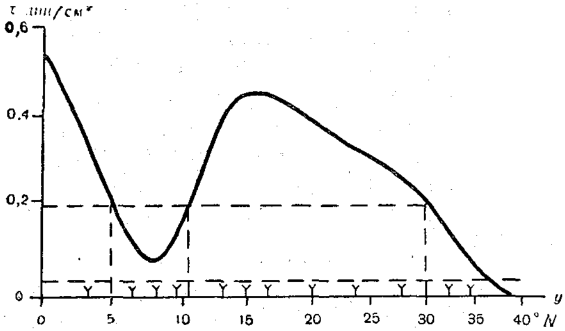

Рис. 2.

величины $\overline{\tau_x}$, указанного в последней строке последнего столбца табл. 1, нужно разделить на 10^2.

Следовательно, на основании табл. 1

$$\overline{\tau_x} = \frac{1}{l}\int_0^l \tau_x\,dy = 0{,}28$$

и для ординаты критериальной прямой мы получим значение

$$\frac{2}{3}\overline{\tau_x} = 0{,}19.$$

На рис. 2 пунктиром дана критериальная прямая с указанным значением ординаты. Как видно на рисунке, критериальная прямая пересекает кривую τ_x в трех точках, проекции которых на меридиан соответствуют 5, 10 и 30° N. Эти точки определяют, очевидно, границы противотечений, направленных против восточных ветров (пассатов), т. е. на запад.

[1] Точки, в которых были сняты значения τ_x, указаны на рис. 2 значками γ сверху абсциссы, тогда как снизу указано положение градусов широты в соответствии с рис. 1.

Таблица 1

l	$\tau\cdot10^2$	Ср. $\tau\cdot10^2$	$\overline{\tau}\Delta l\cdot10^2$	$10^2\sum\overline{\tau}\Delta l$
0	55,0	44,0	440,0	0
10	33,0	23,0	230,0	440,0
20	13,0	11,0	55,0	670,0
25	9,0	12,5	62,5	725,0
30	16,0	27,8	278,0	787,5
40	39,5	42,8	214,0	1065,5
45	46,0	45,8	229,0	1279,5
50	45,5	42,8	428,0	1508,5
60	40,0	36,5	365,0	1936,5
70	33,0	29,3	293,0	2301,5
80	25,5	20,3	203,0	2594,5
90	15,0	11,3	56,5	2797,5
95	7,5	5,3	26,5	2854,0
100	3,0	1,5	6,0	2880,5
104	0			2886,5

Ясно также, что границы противотечения, приуроченные к 5 и 10° N, есть не что иное, как границы экваториального противотечения. Замечательно, что полученные результаты теоретического определения меридиональных границ экваториального противотечения очень хорошо согласуются с известными из наблюдений меридиональными границами этого противотечения для лета (V—IX) в Тихом океане, как это видно из данных табл. 2, заимствованной нами у Дефанта [3]. Следует при этом иметь в виду, что наши расчеты могут дать меридиональные границы именно средней части экваториального противотечения, вдали от западных и восточных границ Тихого океана, как это следует из основных предпосылок теории.

Таблица 2

Меридиональные границы экваториального противотечения для лета (V—IX) в Тихом океане

Западная часть	Средняя часть	Восточная часть
3—9° N	5—9° N	4—12° N

Как указывалось выше, критериальная прямая пересекает кривую τ_x (рис. 2) не только в точках, определяющих границы экваториального противотечения, но и в точке, соответствующей 30° N. Следовательно, с этой широты должно, согласно теории, начинаться другое противотечение, порожденное убыванием к северу скорости пассатов.

Здесь невольно возникает вопрос, что это за противотечение. Обращаясь к схеме поверхностных течений Тихого океана для лета северного полушария, изображенной на рис. 3, мы видим, что полученная теоретическим путем граница противотечения не только в действительности существует, но и приурочена именно к 30° N.

В самом деле, с 30° N в северной половине Тихого океана начинается западный перенос воды, который обычно связывали с западными ветрами. Но западный ветер, как это видно на рис. 1, начинается лишь с 40° N. Следовательно, западный перенос воды, начинающийся с 30° N, направлен там

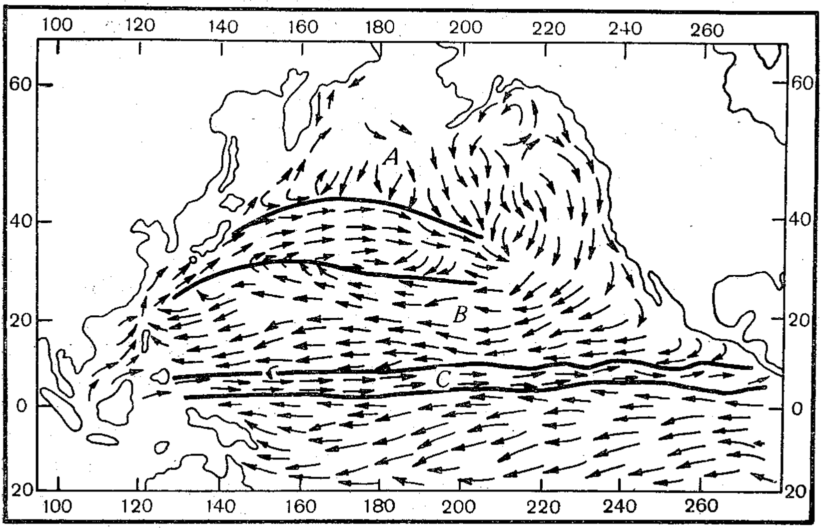

Рис. 3.

А — полярный фронт, *В* — смена восточного переноса (субтропическая конвергенция), *С* — экваториальное противотечение.

против пассата, что находится в полном согласии с выводами теории. Интересно отметить, что в свете теории автора западный перенос воды частично порождается неравномерностью восточного ветра (пассата). Именно поэтому граница раздела противоположно направленных течений (30° N) находится намного южнее линии раздела между западным ветром и пассатом (40° N).

Кстати говоря, несоответствие меридиональной границы противоположно направленных течений и границы между западными ветрами и пассатами в Тихом океане никем, насколько нам известно, до настоящего времени не отмечалось. Таким образом, выводы теории не только получили подтверждение данными наблюдений, но в то же время позволили обратить внимание на такую особенность фактической зональной циркуляции в Тихом океане, которая, как это ни странно, до сих пор оставалась незамеченной.

Помимо теоретического определения границ противотечений внутри области сгона—нагона пассата, можно на основе теории определить положение линий дивергенции и конвергенции, если они существуют внутри области.

Положение линий дивергенции и конвергенции определяется, согласно теории, из условия

$$\tau_x = \frac{2B}{b}\bar{\tau}_x, \tag{3}$$

где

$$B = \frac{gD}{4\pi\omega \sin\varphi}; \quad b = kh - B;$$

$$k = \frac{g}{2\omega \sin\varphi},$$

причем D, так называемая глубина трения, определяется равенством

$$D = \pi\sqrt{\frac{\mu}{\omega \sin\varphi}}.$$

В написанных выражениях g — ускорение силы тяжести, ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта места, h — глубина моря, μ — коэффициент турбулентной вязкости морской воды.

Пользуясь указанными равенствами, можно соотношение (3) представить в форме

$$\tau_x = \frac{1}{2\pi\frac{h}{D} - 1}\cdot 2\bar{\tau}_x. \tag{3'}$$

Принимая, как и ранее [2], $\frac{h}{D} = 3$, $\pi \approx 3$ и вспоминая указанные выше значения $\bar{\tau}_x$ и l, получим

$$\tau_x = 0{,}03.$$

На рис. 2 нанесена пунктиром вторая критериальная прямая со значением ординаты $\tau_x = 0{,}03$. Как видим, эта прямая не пересекает кривую τ_x в области противотечения; следовательно, там линий конвергенции или дивергенции на поверхности океана быть не может. Разумеется, что этот вывод относится лишь к средним условиям, для которых была построена кривая

15*

меридиональной неравномерности ветра на рис. 2 (т. е. для летнего сезона).

Для отдельных же моментов времени, характеризуемых иной меридиональной неравномерностью зональных ветров, линии конвергенции и дивергенции на поверхности океана могут наблюдаться. Заметим, что полученный вывод совпадает с тем, который был сделан нами ранее [2], а именно с выводом о лабильности линий конвергенции и дивергенции внутри экваториального противотечения. Этот вывод кажется весьма правдоподобным, ибо в противном случае устойчивая линия дивергенции внутри противотечения отразилась бы на картах изотерм в виде отрицательной аномалии, действительно наблюдаемой вдоль экватора.

Обращаясь снова к рис. 2, мы видим, что благодаря смене восточных ветров на западные критериальная прямая $\tau_x=0{,}03$ пересекает кривую касательного трения ветра в точке, соответствующей около 37° N. Следовательно, к указанной широте должна быть приурочена линия конвергенции, постоянно имеющая место не вследствие меридиональной неравномерности ветра одного и того же направления, а вследствие перемены направления зональной составляющей ветра. Данные наблюдений (рис. 3) подтверждают сделанный вывод. Согласно этим данным линия конвергенции в действительности существует в среднем около 42° N и спускается в центральной части океана до 37° N.

Таким образом, вывод теории и в этом случае качественно согласуется с фактическими данными, хотя в последнем случае количественное согласие теоретического результата с данными наблюдений значительно хуже того почти идеального соответствия, которое отмечалось в отношении границ экваториального противотечения и границы между восточным и западным переносом.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штокман В. Б. Теория экваториальных противотечений в океанах. ДАН СССР, т. LII, N 4, стр. 311—314, 1946.
2. Штокман В. Б. Экваториальные противотечения в океанах. Гидрометеоиздат, Л., 1948.
3. Defant A. Die Äquatoriale Gegenstrom. Sitz. Berichte der Preuss. Akad. d. wiss. Phys. Math. Klasse XXVIII, 1935. Pp. 450—472.
4. Priestley C. H. B. A survey of the stress between the ocean and atmosphere. Australian Journal of Scientific Research. Serie A. Phys. Sci., Vol. 4, No. 3, 1951. Pp. 315—328.

ВЛИЯНИЕ РЕЛЬЕФА ДНА И ПОПЕРЕЧНОЙ НЕРАВНОМЕРНОСТИ ВЕТРА НА ГОРИЗОНТАЛЬНУЮ ЦИРКУЛЯЦИЮ В МЕЛКОМ МОРЕ ИЛИ ВОДОХРАНИЛИЩЕ [1]

В свое время [1, 2] для решения вопроса о противотечениях, обусловленных поперечной неравномерностью ветра в мелком море, имеющем вытянутую по направлению ветра форму, мы воспользовались уравнением

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + g\rho \operatorname{tg} \gamma = 0, \tag{1}$$

приближенно (без учета силы Кориолиса) описывающим распределение продольных составляющих скорости течения в направлении оси X, совпадающей с направлением ветра. Распределение составляющих течения рассматривалось в некотором, поперечном ветру (вдоль оси Y) сечении моря, удаленном от продольных его границ. Буквой z в уравнении (1) обозначена вертикальная координата, μ означает постоянную величину коэффициента внутреннего турбулентного трения, g — ускорение силы тяжести, ρ — постоянная плотность воды, γ — угол продольного уклона поверхности воды в направлении ветра, осредненный в поперечном направлении последнего. Иначе говоря,

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\partial \zeta}{\partial x} dy,$$

где l — поперечный ветру размер бассейна, а ζ — превышение точек поверхности воды по отношению к некоторой горизонтальной плоскости.

Уравнение (1) было первоначально использовано нами для приближенного расчета противотечений в мелком море

[1] Опубликовано в журнале «Метеорология и гидрология», № 8, 1953 г.

постоянной глубины H, берега которого представляют собой отвесные стенки.

Так как уравнение (1) есть уравнение второго порядка, то общее решение его можно подчинить всего лишь двум граничным условиям, в качестве которых естественно выбрать условие равенства нулю скорости течения на дне бассейна ($z=H$) и условие равенства касательных напряжений трения на поверхности воды ($z=0$). Иными словами,

$$(u)_{z=H}=0; \quad \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0}=-\tau(y). \tag{2}$$

Во втором условии (2) через $\tau(y)$ обозначено касательное трение ветра, меняющееся в поперечном направлении (y) по любому заданному закону.

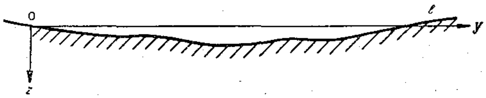

Рис. 1.

Однако применение уравнения (1) с условиями (2) для определения продольных составляющих скорости течения в срединном поперечном ветру сечении моря обладает одним очень существенным недостатком. Недостаток этот заключается в том, что при указанной постановке задачи не обеспечивается обращение в нуль продольной составляющей скорости течения на боковых, вертикальных стенках бассейна, неизбежно существующих в случае бассейна постоянной глубины. Выполнение же условия прилипания на дне бассейна и несоблюдение этого условия на его вертикальных стенках является ничем не оправданным нарушением естественных граничных условий.

Легко понять, что указанные выше затруднения обусловлены прерывностью (в математическом смысле) контура поперечного сечения моря постоянной глубины, состоящего из четырех звеньев, тогда как уравнение (1) второго порядка. Однако отмеченное затруднение исчезнет, если вместо несуществующего в природе прерывного прямоугольного контура, слишком грубо стилизующего поперечное сечение моря, мы будем рассматривать реальный контур дна мелкого моря с глубинами, плавно убывающими до нуля в точках $y=0$, $y=l$, соответствующих собственно берегам моря, как это изображено на рис. 1. Таким образом, реальный контур поперечного сечения моря состоит всего лишь из двух звеньев (горизонтальной линии поверхности воды и произвольной непрерывной линии профиля дна), на которых должны выполняться граничные условия (2).

Так как глубина у берегов равна нулю, то в силу первого условия скорость течения там автоматически будет равна нулю. Подобного рода постановка задачи, отвечая реальным условиям мелкого моря, соответствует в то же время и духу «классической» теории, в которой эффект бокового трения считается пренебрежимо малым. Это допущение реально лишь в условиях рассматриваемого здесь мелкого моря, где трение о дно несомненно должно преобладать над боковым трением.[1]

Опираясь на изложенные здесь простые и вместе с тем вполне естественные соображения, мы будем по-прежнему описывать продольное движение в мелком море на достаточном удалении от продольных его границ уравнением (1) с условием (2), рассматривая при этом контур дна $h(y)$ и изменение касательного трения ветра $\tau(y)$ произвольно заданными функциями поперечной ветру координаты y.

Решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям (2), запишется в виде

$$u=\frac{g\rho \operatorname{tg}\gamma}{2\mu}\left[h^2(y)-z^2\right]+\frac{\tau(y)}{\mu}\left[h(y)-z\right]. \tag{3}$$

Неопределенную пока постоянную величину $\operatorname{tg}\gamma$ можно найти из условия, равносильного уравнению неразрывности,

$$\int\limits_0^l dy\int\limits_0^h u\,dz=0. \tag{4}$$

Условие (4) означает, что в установившемся состоянии расход воды через все поперечное сечение моря должен быть равен нулю.

Применяя условие (4) к решению (3), получим, что

$$\operatorname{tg}\gamma=-\frac{3A}{2g\rho}, \tag{5}$$

[1] Следствием преобладания вертикального обмена в мелком море над горизонтальным является почти полная вертикальная однородность воды при наличии горизонтальной ее неоднородности. Указанное обстоятельство обусловлено тем, что в мелком море благодаря близости дна преимущественно развиваются вихри с горизонтальной осью вращения, обусловливающие интенсивное вертикальное перемешивание, тогда как вихри с вертикальной осью, обусловливающие горизонтальный обмен, в значительной мере гасятся трением о дно.

где

$$A = \frac{\int\limits_0^l \tau(y)\, h^2\, dy}{\int\limits_0^l h^3\, dy}. \tag{6}$$

Подставляя (5) в формулу (3), получим окончательное выражение для продольной составляющей течения

$$u = \frac{(h-z)}{\mu}\left[\tau(y) - \frac{3A}{4}(h+z)\right]. \tag{7}$$

Согласно (7), продольная составляющая скорости не только всегда равна нулю на дне бассейна при $z=h$, но и там, где

$$\frac{3A}{4}(h+z) = \tau(y).$$

Последнее уравнение можно записать иначе:

$$\tilde{z} = \frac{4\tau(y)}{3Ah} - 1, \tag{8}$$

где через $\tilde{z}$ обозначена безразмерная глубина

$$\tilde{z} = \frac{z}{h}.$$

Уравнение (8) представляет собой, очевидно, уравнение нулевой изотахи, разграничивающей течение по ветру от противотечения.

Согласно (7), возможность противотечения ($u<0$) в той или иной точке поперечного сечения моря оценивается неравенством

$$\tau(y) \leqslant \frac{3A\left(1+\tilde{z}\right)}{4} h(y). \tag{9}$$

Из формул (5)—(9) могут быть получены известные ранее [1, 2] результаты, соответствующие случаям равномерного или неравномерного ветра для моря постоянной глубины.

Как видно из формул (9) и (6), *возможность противотечения в поперечном сечении мелкого моря переменной глубины зависит не только от поперечной неравномерности касательного трения ветра τ, но и от глубины в том или ином месте поперечного сечения моря*, тогда как в море постоянной глубины (с вертикальными стенками) возможность противотечения целиком определяется поперечной неравномерностью касательного трения ветра. При всем том важно подчеркнуть, что критерий возможности противотечения в той или иной точке поперечного сечения моря зависит лишь от формы выбранной зависимости μ от z, но не от абсолютных значений коэффициента турбулентного внутреннего трения. Как это видно из формулы (7), величина коэффициента μ влияет лишь на величину скорости течения, но не на положение границ противотечения в поперечном сечении моря.

Критерий (9) указывает на то, что возможность противотечения увеличивается с возрастанием глубины и уменьшается с уменьшением последней. Таким образом, при всех прочих равных условиях, *противотечение вероятнее ожидать в желобообразных углублениях дна* мелкого моря или водохранилища, нежели в мелководных их частях.

В справедливости сделанных выводов можно наглядно убедиться на примере расчета границ противотечения в плоскости поперечного сечения моря с произвольным профилем дна. В качестве такого примера рассмотрим поперечный профиль дна, изображенный на рис. 2.

Прежде всего заметим, что вместо величин τ, фигурирующих в критерии (9), выгоднее пользоваться квадратами скорости ветра w на основании зависимости

$$\tau = \rho' \gamma^2 w^2,$$

где ρ' — плотность воздуха, а γ^2 — коэффициент, который можно в первом приближении считать постоянным. Следовательно, критерий (9) можно записать в виде

$$w^2(y) \leqslant \frac{3a\left(1+\widetilde{z}\right)}{4} h(y),$$

$$a = \frac{\int_0^l w^2 h^2 \, dy}{\int_0^l h^3 \, dy}. \tag{9'}$$

В верхней половине рис. 2 изображена кривая квадратов скорости ветра w^2 с минимумом в области вертикали № 13 данного разреза.

Положение границ противотечения можно определить не только чисто аналитическим путем, вычисляя глубину z нулевой изотахи для различных вертикалей y на основании уравнения (8), но и более наглядным, графоаналитическим способом, вытекающим из того же уравнения (8) и критерия (9′). Именно на основании упомянутого критерия можно заключить, что границы противотечения (нулевая изотаха) будут находиться в таких точках y поперечного сечения моря, в которых кривая w^2 пересекается с кривой $\frac{3a(1+\tilde{z})}{4}h(y)$. Последняя, очевидно, подобна кривой профиля дна $h(y)$. Множитель подо-

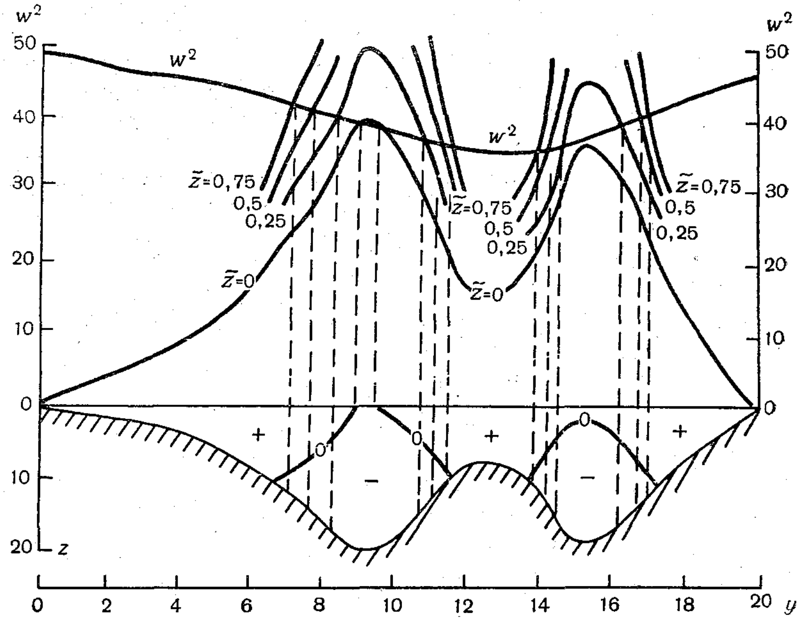

Рис. 2.

бия (или искажения масштаба) $\frac{3a(1+\tilde{z})}{4}$ может обладать различными значениями в зависимости от значения безразмерной вертикальной координаты $\tilde{z}$, выражаемой в долях фактической глубины, соответствующей той или иной вертикали y разреза. Каждому значению $\tilde{z}$ соответствует своя «критериальная» кривая. Эти кривые должны строиться в верхней половине рисунка в масштабе шкалы w^2.

Если критериальная кривая $\frac{3a}{4}h(y)$, соответствующая значению $\tilde{z}=0$, пересечет в точке y_1 кривую w^2, то эта точка y_1 будет одной из границ противотечения на поверхности моря. Если пересечения упомянутых кривых нет, то противотечение на поверхности не имеет места. Аналогичным образом решается вопрос о противотечении на глубине $\tilde{z}=0{,}25$. В этом случае следует искать точки пересечения кривой w^2 с критериальной кривой $\frac{3a}{4}\cdot 1{,}25h$. Проекция указанных точек на горизонты $z=0{,}25h(y)$ определит положение границ противотечения на соответствующих вертикалях и т. д.

Интегралы, фигурирующие в (9′), вычисляются, например, по способу трапеции. На рис. 2 изображены кривые $\frac{3a}{4}(1+$ $+\tilde{z})\,h(y)$ для значений $\tilde{z}=0$; 0,25; 0,50; 0,75, пересечение которых с кривой w^2 определяет положение противотечения на соответствующих глубинах. Вода, движущаяся по ветру (направленному перпендикулярно к плоскости чертежа), обозначена на рис. 2 знаком плюс (+), а в области противотечения — знаком минус (—).

Рисунок 2 наглядно демонстрирует существенное различие между распределением противотечений в реальном море с переменным рельефом дна и в идеализированном море постоянной глубины. В последнем случае, как это следует из критериев (9) и (9′), противотечение должно всегда иметь место в области минимума касательного трения (скорости) ветра. В рассматриваемом же случае моря переменной глубины (рис. 2) в области минимума скорости ветра противотечения вовсе нет потому, что там имеет место поднятие дна. Как видно на том же рисунке, противотечения наблюдаются в двух желобообразных углублениях дна, причем в области левого желоба, обладающего большей глубиной, противотечение достигает поверхности воды (между вертикалями 9 и 10). При *равномерном* ветре особенно велико различие между распределением продольных составляющих скорости течения в мелком море (водохранилище) постоянной и переменной глубины. В этом случае в море постоянной глубины граница между нагонным потоком и противотечением располагается *горизонтально* во всем поперечном сечении моря (на расстоянии $^1/_3$ глубины, считая от поверхности воды). В море же переменной глубины при равномерном ветре противотечение хотя и существует в виде глубинного противотока, но оно по-прежнему приурочено там к впадинам-желобам, тогда как в наиболее мелких частях поперечного сечения моря вода от поверхности до дна движется по ветру. В этом можно убедиться на основании критерия (9) и (9′), который в случае равномерного ветра (w=const) принимает вид

$$1 \leqslant \frac{3\alpha(1+\widetilde{z})}{4} h(y), \qquad \alpha = \frac{\int\limits_0^l h^2\,dy}{\int\limits_0^l h^3\,dy}. \tag{10}$$

Уравнение же нулевой изотахи в этом случае вместо (8) запишется в форме

$$\widetilde{z} = \frac{4}{3\alpha h} - 1. \tag{11}$$

Критерий (10) особенно применим для узких озер или водохранилищ, в поперечном сечении которых скорость ветра не претерпевает сколько-нибудь значительных изменений, так что величину касательного трения ветра практически можно считать постоянной.

На основании (7) легко получить выражение для касательного напряжения τ_h в любой точке дна моря. Это выражение имеет вид

$$\tau_h = \mu\left(\frac{du}{dz}\right)_{z=h} = -\tau_0(y) + \frac{3A}{2} h(y) =$$

$$= \rho'\gamma^2\left[\frac{3a}{2} h(y) - w^2(y)\right]. \tag{12}$$

Согласно (12) и (7), τ_h равно нулю в точках пересечения профиля дна моря с нулевыми изотахами, разграничивающими течения по ветру и противотечения. Очевидно, что в этих точках, положение которых определяется пересечением кривой w^2 с кривой $\frac{3a}{2}h(y)$, *условия для размыва дна наименее благоприятны*. Напротив, там, где τ_h достигает максимальных значений, *условия для размыва грунта наиболее благоприятны*. Положение точек, где τ_h=max, легко определить графически, сравнивая ход кривой $w^2(y)$ и кривой $\frac{3a}{2}h(y)$. Там, где эти кривые удаляются друг от друга на наибольшие (по сравнению с соседними точками) расстояния, очевидно, τ_h=max.

Как видно из выражения (12), в случае равномерного ветра точки с максимальными значениями τ_h соответствуют экстремумам профиля дна, т. е. наиболее глубоким и наиболее отмелым его частям. В случае же неравномерного ветра положение указанных точек несколько сдвигается по отношению к точкам экстремума профиля дна. Из (12) легко получить выражение для критического уклона дна, при котором τ_h достигает максимума (наиболее благоприятные условия для размыва дна). Дифференцируя (12) по y и приравнивая результат нулю, получим

$$\frac{dh(y)}{dy} = \frac{2}{3A}\frac{d\tau(y)}{dy} = \frac{4}{3a}w\frac{dw}{dy}. \qquad (13)$$

Разумеется, абсолютное значение максимумов τ_h может быть различным в зависимости от характера неравномерности ветра и профиля дна. Так, может оказаться, что τ_h в желобообразном углублении дна будет превышать τ_h в вершине поднятия дна и наоборот.

Следует отметить также интересный вывод, вытекающий из формулы (7) и из описанных здесь графических построений. Вывод этот заключается в том, что *нулевая изотаха более одного раза не может пересекать данную вертикаль*, ибо уравнение (7) первого порядка. В противном случае скорость ветра в данной точке моря не может быть одной и той же, т. е. она должна меняться с течением времени. Случаи многократного пересечения нулевой изотахи с какой-либо вертикалью (при извилистой или замкнутой их форме) не могут соответствовать установившимся условиям. Таким образом, мы получаем простой, но важный для практики качественный критерий, позволяющий лишь по одной форме нулевых изотах распознать случаи нестационарности ветра или возбуждаемой им циркуляции в мелком море.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штокман В. Б. Ветровой нагон и горизонтальная циркуляция в замкнутом море небольшой глубины. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 1, 1941.
2. Штокман В. Б. Поперечная неравномерность нагонного ветра как одна из важных причин горизонтальной циркуляции в море. ДАН СССР, т. IL, № 2, 1945.

УРАВНЕНИЯ ПОЛЯ ПОЛНЫХ ПОТОКОВ, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ВЕТРОМ В НЕОДНОРОДНОМ МОРЕ[1]

Рассматривая установившееся движение в некоторой области неоднородного океана или замкнутого моря, мы будем, как обычно, пренебрегать вертикальными составляющими скорости течения и инерционными членами и опишем такое движение следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A_l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+2\rho\omega v\sin\varphi&=\frac{\partial p}{\partial x},\\ A_l\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)-2\rho\omega u\sin\varphi&=\frac{\partial p}{\partial y}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

вместе с уравнением неразрывности

$$\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}=0.^{2}\tag{2}$$

В уравнениях (1), (2) u и v означают горизонтальные компоненты скорости по направлению осей X и Y декартовой системы координат, p — давление, ρ — плотность воды, φ — средняя широта места, ω — угловая скорость вращения Земли, A_z — коэффициент турбулентного трения, обусловленного обменом количества движения по вертикали Z. На этот коэффициент мы не налагаем каких-либо ограничений, и величина A_z может ме-

[1] Опубликовано в Докладах АН СССР, новая серия, т. LIV, № 5, 1946 г. Представлено академиком П. П. Ширшовым 27/V 1946 г.

[2] Уравнение неразрывности в данной работе записано неточно. Правильная форма записи: $\partial(\rho u)/\partial x+\partial(\rho v)/\partial y+\partial(\rho w)/\partial z=0$, где w — вертикальная компонента скорости. Однако при осреднении этого уравнения по z от H_1 до H_2 мы получим то же уравнение (8) и для вывода основного уравнения работы (10) следует лишь изменить порядок преобразований (1) и (2), а именно, сначала осреднить эти уравнения по z от H_1 до H_2, а затем исключить давление. Более подробно см. работу В. Б. Штокмана «Определение стационарных течений и поля масс, обусловленных ветром в бароклинном море», опубликованную в данном сборнике. (*Прим. сост.*)

няться вдоль вертикали по любому закону. Наконец, через A_l обозначен коэффициент турбулентного трения, обусловленного обменом количества движения в горизонтальных направлениях. Определения A_l показывают, что эта величина, превышающая A_z примерно в 10^6 раз, подвержена незначительным изменениям в сравнении с A_z; поэтому A_l с совершенно достаточным приближением можно считать постоянной величиной.

Интегрирование системы (1), особенно при условиях, существующих на краях замкнутых морских бассейнов (прилипание), представляет исключительные трудности. Чтобы обойти отмеченные затруднения и получить в то же время представление об осредненной циркуляции в море с соблюдением реальных условий на его краях, я пользуюсь понятием полного потока S от поверхности моря $z=H_1$ до некоторой глубины $z=H_2$, компоненты которого определяются выражениями:

$$S_x = \int_{H_1}^{H_2} u\,dz, \qquad S_y = \int_{H_1}^{H_2} v\,dz, \tag{3}$$

и преобразую систему (1) к новому уравнению, связывающему распределение полных потоков в неоднородном море с вихрем тангенциального давления ветра на его поверхности.

Преобразование системы (1) мы начнем с того, что продифференцируем первое уравнение (1) по y, второе по x и вычтем из первого уравнения второе. Мы получим

$$A_l\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\,\partial y} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 v}{\partial y^2\,\partial x}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)\right] = 0. \tag{4}$$

Проинтегрируем затем (4) в пределах от $z=H_1$ (поверхность моря) до глубины $z=H_2$, несколько выше которой и ниже изобары горизонтальны и где движение отсутствует.

Основываясь на том, что в условиях моря с достаточным приближением выполняются равенства:

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial^n}{\partial y^n}\,[F(z,\ x,\ y)]\,dz \cong \frac{\partial^n}{\partial y^n}\int_{H_1}^{H_2} F(z,\ x,\ y)\,dz;$$

$$\int_{H_1}^{H_2} \frac{\partial^n}{\partial x^n}\,[F(z,\ x,\ y)]\,dz \cong \frac{\partial^n}{\partial x^n}\int_{H_1}^{H_2} F(z,\ x,\ y)\,dz,$$

мы вместо (4) получим

$$A_l\left(\frac{\partial^3}{\partial x^2\,\partial y}\int\limits_{H_1}^{H_2} u\,dz+\frac{\partial^3}{\partial y^3}\int\limits_{H_1}^{H_2} u\,dz-\frac{\partial^3}{\partial x^3}\int\limits_{H_1}^{H_2} v\,dz-\frac{\partial^3}{\partial y^2\,\partial x}\int\limits_{H_1}^{H_2} v\,dz\right)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial y}\int\limits_{H_1}^{H_2}\frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)dz-\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{H_1}^{H_2}\frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)dz=0. \tag{5}$$

Имея в виду, что

$$\left.\begin{aligned}&\left(A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{H_1}=-T_x,\\&\left(A_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{H_1}=-T_y,\\&\left(A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{H_2}=0,\quad\left(A_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{H_2}=0,\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

где T_x и T_y — компоненты тангенциального давления ветра на поверхности моря, и вспоминая (3), мы вместо (5) будем иметь

$$A_l\left(\frac{\partial^3 S_x}{\partial y^3}+\frac{\partial^3 S_x}{\partial x^2\,\partial y}-\frac{\partial^3 S_y}{\partial x^3}-\frac{\partial^3 S_y}{\partial y^2\,\partial x}\right)=\operatorname{curl}_z\mathbf{T}, \tag{7}$$

где

$$\operatorname{curl}_z\mathbf{T}=\frac{\partial T_y}{\partial x}-\frac{\partial T_x}{\partial y}.$$

Так как ρ, вообще говоря, незначительно меняется с глубиной, то, интегрируя (2) в пределах $z=H_1$, $z=H_2$ и заменяя ρ средней величиной $\bar\rho$ в указанных пределах, мы вместо (2) получим

$$\frac{\partial}{\partial x}(\bar\rho S_x)+\frac{\partial}{\partial y}(\bar\rho S_y)=0. \tag{8}$$

Пусть

$$S_x=-\bar\alpha\frac{\partial\psi}{\partial y},\qquad S_y=\bar\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x}, \tag{9}$$

где $\bar\alpha=1/\bar\rho$ (средний удельный объем морской воды). Выражения (9), очевидно, удовлетворяют уравнению неразрывности (8). Подставляя (9) в (7) и пренебрегая членами, содержащими комбинации производных ψ с производными $\bar\alpha$, в силу малости этих членов, мы получим такое компактное уравнение, связывающее с достаточным приближением поле полных потоков в море с заданными полями $\bar{\rho}$ и вихря T:

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}=-\frac{\bar{\rho}\,(x,\ y)}{A_l}\operatorname{curl}_z\mathbf{T}\,(x,\ y). \qquad (10)$$

~~Это новое~~ уравнение замечательно не только тем, что оно формально аналогично уравнению изгиба пластинки под действием внешней силы, но также и тем, что поле полных потоков с учетом горизонтального перемешивания не зависит от эффекта вращения Земли. Краевые условия, налагаемые на решение (10), весьма просты: на краях морского бассейна касательная и нормальная к контуру бассейна компоненты полного потока должны обращаться в нуль. Следовательно, для моря, имеющего, например, в плане форму прямоугольника со сторонами $x=0$, $x=L$, $y=0$, $y=l$, должны соблюдаться восемь условий, аналогичных условиям закрепления пластины:

$$\psi_{x=0,\,L}=0,\quad \left[\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]_{x=0,\,L}=0,$$

$$\left[\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]_{y=0,\,l}=0,\quad \psi_{y=0,\,l}=0, \qquad (11)$$

достаточных для определения постоянных в общем интеграле (10). Если в (1) отбросить члены $\partial^2u/\partial x^2$ и $\partial^2v/\partial y^2$, что, по мнению Россби [1] и Свердрупа [2], допустимо в морских условиях, то, как нетрудно показать, в нашем уравнении (10) пропадет средний член, и оно приобретет вид

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}=-\frac{\bar{\rho}\,(x,\ y)}{A_l}\operatorname{curl}_z\mathbf{T}\,(x,\ y). \qquad (10')$$

Решение (10′) по-прежнему должно удовлетворять условиям (11).

В качестве примера мы приведем здесь решение (10′) с условиями (11) при любом заданном изменении $-\frac{\bar{\rho}}{A_l}\operatorname{curl}_z\mathbf{T}\,(x,\ y)=$ $=F\,(x,\ y)$.

Найдем сначала методом Фурье решение уравнения

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}+\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}=\lambda\psi, \qquad (12)$$

где λ — постоянная. Полагая $\psi=X(x)Y(y)$, мы вместо (12) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$X^{\mathrm{IV}}-\alpha^4X=0,\quad Y^{\mathrm{IV}}-\beta^4Y=0, \qquad (13)$$

где $\alpha^4+\beta^4=\lambda$. Решение (13), в соответствии с (11), подчиняется условиям:

$$X_{0,\,L}=0, \quad X'_{0,\,L}=0; \quad Y_{0,\,l}=0, \quad Y'_{0,\,l}=0. \tag{14}$$

Общие интегралы (13) имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} X&=A\sin\alpha x+B\cos\alpha x+C\operatorname{sh}\alpha x+D\operatorname{ch}\alpha x,\\ Y&=A_1\sin\beta y+B_1\cos\beta y+C_1\operatorname{sh}\beta y+D_1\operatorname{ch}\beta y.\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Подчиняя (15) условиям (14), мы получим следующие трансцендентные уравнения для определения собственных значений α и β:

$$\operatorname{ch}\alpha L\cos\alpha L=1, \quad \operatorname{ch}\beta l\cos\beta l=1. \tag{16}$$

Корни уравнений (16) выражаются так:

$$\begin{aligned} L\alpha_n&=\frac{(2n+1)\,\pi}{2}+(-1)^{n+1}\gamma_n,\\ l\beta_m&=\frac{(2m+1)\,\pi}{2}+(-1)^{m+1}\mu_m,\end{aligned} \tag{17}$$

причем $0<\gamma_n<\pi/2$, $0<\mu_m<\pi/2$, n, $m=1, 2, \ldots$ По мере возрастания n и m γ_n и μ_m быстро убывают, и для всякого m, $n>3$ с достаточным приближением

$$L\alpha_n=\frac{(2n+1)\,\pi}{2}, \quad l\beta_m=\frac{(2m+1)\,\pi}{2}. \tag{17'}$$

В промежутке 0, $\pi/2$ уравнения (16) корней не имеют. Фундаментальные функции X_n, Y_m нашей задачи имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} X_n&=(\sin\alpha_n x-\operatorname{sh}\alpha_n x)(\cos\alpha_n L-\operatorname{ch}\alpha_n L)-\\ &-(\cos\alpha_n x-\operatorname{ch}\alpha_n x)(\sin\alpha_n L-\operatorname{sh}\alpha_n L),\\ Y_m&=(\sin\beta_m y-\operatorname{sh}\beta_m y)(\cos\beta_m l-\operatorname{ch}\beta_m l)-\\ &-(\cos\beta_m y-\operatorname{ch}\beta_m y)(\sin\beta_m l-\operatorname{sh}\beta_m l).\end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Они образуют, как нетрудно убедиться, ортогональную систему.

Разложим $F(x, y)$ в двойной ряд Фурье по найденным фундаментальным функциям уравнения (12):

$$F(x,\ y)=\sum_{m,\,n}^{\infty}A_{m,\,n}X(\alpha_n,\ x)\,Y(\beta_m,\ y). \tag{19}$$

Коэффициент $A_{m,n}$ определяется, как известно, выражением

$$A_{m,n} = \frac{\int\limits_0^L \int\limits_0^l F(\zeta, \eta) X(\alpha_n, \zeta) Y(\beta_m, \eta)\, d\zeta\, d\eta}{\int\limits_0^L \int\limits_0^l [X(\alpha_n, \zeta) Y(\beta_m, \eta)]^2\, d\zeta\, d\eta}. \tag{20}$$

Опираясь на (18) и граничные условия (14), можно после некоторых вычислений показать, что

$$\int\limits_0^L \int\limits_0^l [X(\alpha_n, \zeta) Y(\beta_m, \eta)]^2\, d\zeta\, d\eta = \frac{1}{16} Ll [X''(L) Y''(l)]^2 =$$
$$= \beta_m^4 \alpha_n^4 Ll [(\sin \alpha_n L \operatorname{ch} \alpha_n L - \operatorname{sh} \alpha_n L \cos \alpha_n L) \times$$
$$\times (\sin \beta_m l \operatorname{ch} \beta_m l - \operatorname{sh} \beta_m l \cos \beta_m l)]^2. \tag{21}$$

Искомое решение задачи представится двойным рядом:

$$\psi = \sum_{m,n}^{\infty} \frac{A_{m,n}}{\alpha_n^4 + \beta_m^4} X(\alpha_n, x) Y(\beta_m, y), \tag{22}$$

причем нужно иметь в виду (17), (17′), (18), (20) и (21).

Институт океанологии
Академии наук СССР

Поступило 27/V 1946 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rossby C. G. Pap. Phys. Ocean. and Meteorology, 5, 1, 1936.
2. Sverdrup H. U. The Oceans, their Physics, Chemistry and General Biology. N. Y., 1942.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ АНАЛОГИИ МЕЖДУ ПОЛНЫМ ПОТОКОМ В МОРЕ И ИЗГИБОМ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ПЛАСТИНЫ ДЛЯ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОТОКОВ В НЕКОТОРЫХ КОНКРЕТНЫХ СЛУЧАЯХ [1]

Как было показано нами [1], уравнение поля полных потоков (или расходов) в неоднородном море записывается в следующей приближенной форме:

$$\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4\psi}{\partial y^4} = \frac{-\bar{\rho}\,(x,\ y)}{A_l}\,\mathrm{curl}_z\,\mathbf{T}\,(x,\ y), \qquad (1)$$

где ψ — функция полного потока, связанная с компонентами элементарного расхода S выражениями

$$S_x = \int_{H_1}^{H_2} u\,dz = -\bar{\alpha}\,\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$S_y = \int_{H_1}^{H_2} v\,dz = \bar{\alpha}\,\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$\bar{\alpha} = \dfrac{1}{\bar{\rho}}$ — осредненный по вертикали в пределах рассматриваемого слоя H_2, H_1 удельный объем морской воды, $\mathbf{T}$ — тангенциальное давление ветра на поверхности моря, A_l — коэффициент горизонтального турбулентного обмена. Краевые условия, которые должны выполняться на контуре Γ берега моря, таковы:

$$\psi_\Gamma = \mathrm{const} = 0, \qquad \left(\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)_\Gamma = 0, \qquad (2)$$

где n — направление нормали к контуру береговой черты.

---

[1] Опубликовано в Докладах АН СССР, новая серия, т. LIV, № 8, 1946. Представлено академиком П. П. Ширшовым 18/VI 1946 г.

Уравнение (1) с условиями (2) формально аналогично уравнению изгиба закрепленной на краях пластины, а именно: ψ заменяет собой прогиб ζ срединной поверхности пластины, $-\bar{\rho}\,\mathrm{curl}_z\,\mathbf{T}(x, y)$ — приложенную к единице поверхности пластины силу $q(x, y)$, A_l — так называемую «цилиндрическую жесткость» пластины.

Таким образом, по-видимому, открывается возможность непосредственного приложения имеющихся уже в теории упругости результатов к расчету полных потоков в неоднородном море, обусловленных заданным $\mathrm{curl}_z\mathbf{T}$.

Покажем это на примере расчета полных потоков, возбуждаемых муссоном в круглом неоднородном море.

Как известно, интересная задача о дрейфовых течениях, порождаемых муссоном в круглом море, была впервые поставлена и решена В. В. Шулейкиным [3]. При этом В. В. Шулейкин основывал свои расчеты на уравнении поля глубинного течения, полученном Экманом в случае однородного моря. Представляет поэтому интерес дополнить выводы Шулейкина теми результатами, которые вытекают из уравнения полных потоков (1).

Допустим, вместе с Шулейкиным, что поле муссона симметрично центру круглого моря, причем тангенциальное давление ветра возрастает от центра моря к его берегу по линейному закону $T_\theta(r) = \frac{T_0 r}{R}\sin\alpha$, где R — радиус моря, θ — полярный угол, а α — постоянный угол, образуемый ветром с направлением радиуса-вектора r. Тогда $\mathrm{curl}_z\mathbf{T} = \frac{2T_0\sin\alpha}{R} = \mathrm{const}$. Естественно, что вследствие симметрии ψ будет зависеть только от r. В этом случае уравнение (1), преобразованное к полярным координатам, запишется в виде

$$\frac{d^4\psi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\psi}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\psi}{dr} = -\frac{2T_0\sin\alpha}{A_l R}, \tag{3}$$

причем для простоты $\bar{\rho} = 1$. Краевые условия (2) приобретут вид:

$$\psi_{r=R} = 0, \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)_{r=R} = 0. \tag{4}$$

Так как величина $\mathrm{curl}_z\mathbf{T}$ в данном случае постоянна, то наша задача аналогична задаче о прогибе круглой, закрепленной по контуру пластины под действием равномерной нагрузки, решение которой известно в теории упругости [3]. Остается лишь перевести это решение на язык нашей гидродинамической задачи, и мы получим

$$\psi = -\frac{T_0 \sin\alpha}{32 A_l R}(R^2 - r^2)^2. \tag{5}$$

Тотальный расход от центра моря до его берега определится выражением

$$S_t = \int_0^R \frac{\partial\psi}{\partial r} dr = \psi R - \psi_0 = \frac{T_0 R^3 \sin\alpha}{32 A_l}. \tag{6}$$

Положим $T_0 = 1$ дин/см^2, что соответствует примерно скорости ветра 5 м/сек., $\alpha = 30°$, $R = 500$ км, $A_l = 10^8$ CGS. Последняя величина является обычным порядком A_l для больших масштабов морской и океанической циркуляции. Подставляя принятые значения в (6), мы получим $S_t = 15 \cdot 10^6$ м^3/сек. Найденная величина расхода хорошо согласуется с порядком его, характерным для систем морских течений принятого выше масштаба. На основании (5) максимальное значение расхода $S_{max} = \frac{T_0 R^2 \sin\alpha}{12\sqrt{3} A_l} \cong 0{,}6 \cdot 10^6$ см^2/сек. соответствует расстоянию от берега, равному $R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \cong 0{,}4R$. На таком расстоянии, очевидно, располагается «стрежень» потоков.

В других случаях «стрежень» потоков может ближе придвигаться к берегу, но всегда на контуре береговой черты расход равен нулю, в противоположность физически нереальному результату экмановской теории, согласно которой в данном случае максимум расхода приурочен именно к береговой черте. Среднюю величину скорости, соответствующую максимальному расходу, мы найдем, разделив S_{max} на толщину слоя $H_2 - H_1$, в котором осуществляется движение. Полагая $H_2 - H_1 = 1000$ м, мы получим $\bar{u} \cong 6$ см/сек., т. е. вполне реальную величину, согласующуюся с данными непосредственных измерений. Очевидно в то же время, что изолинии ψ в плане нашего круглого моря копируют топографию изогнутой под действием равномерной нагрузки и закрепленной по контуру круглой пластины. Весьма соблазнительна поэтому перспектива моделирования поля полных потоков при любом заданном $\mathrm{curl}_z \mathbf{T}$ путем изгибания пластин, закрепленных на контуре, соответствующем профилю береговой черты моря. Для этого необходимо лишь подобрать величину нагрузок и жесткость пластины в соответствии с величинами $\mathrm{curl}_z \mathbf{T}$ и A_l.

Обнаруженная мной аналогия полезна не только в целях моделирования, но также и в тех случаях, когда при заданном $\text{curl}_z\mathbf{T}$ нужно быстро дать качественную характеристику поля полных потоков в море. Качественная оценка облегчается тем, что общий характер изгибания пластины под действием заданных нагрузок может быть указан путем самых элементарных соображений, не выходящих за пределы обыденного опыта.

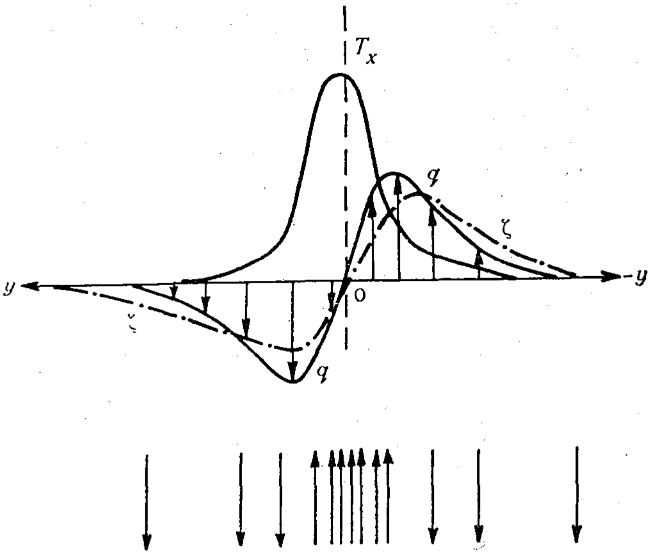

Рис. 1.

Поясню сказанное на следующем примере. Допустим, что требуется ответить на вопрос, какова будет система полных потоков в безграничном океане, возбуждаемых прямолинейной полосой ветра также безграничной протяженности.

Пусть ветер дует в направлении положительной оси X, а тангенциальное давление его на поверхности моря быстро убывает в направлениях $\pm Y$ по закону $T_x = T_0 e^{-\alpha y^2}$, как это изображено кривой T_x на рисунке (ветер в чертеж). Вычисляя $\text{curl}_z\mathbf{T}$, иными словами, определяя характер нагрузок, действующих на безграничную, в данном случае горизонтальную, пластину, мы получим, что нормальная к поверхности пластины сила будет меняться по закону $q(y) = -\text{curl}_z\mathbf{T} = -2\alpha T_0 y e^{-\alpha y^2}$, изображенному на рисунке кривой q. Заметим при этом, что при положительных y значения q соответствуют нормальным силам, действующим на пластину снизу вверх.

Не составляет теперь труда наметить общий характер изгибания пластины под действием приложенных сил. Примерный профиль изогнутой пластины указан на том же рисунке кривой ζ. Переводя полученные качественные результаты на язык нашей гидродинамической задачи (отождествляя ζ с ψ), мы можем утверждать, что по бокам от полосы основного течения, направленного по ветру, в данном случае должны возникать потоки обратного направления, величина которых быстро затухает по мере удаления от границ основного течения (см. план в нижней части рисунка). Таким образом, с помощью обоснованной мной аналогии можно быстро набросать картину потоков, возбуждаемых прямолинейной полосой ветра в безграничном море.

Замечу в заключение, что полученный результат совпадает с выводами Россби [4], который пришел к ним на основании совершенно иных соображений.

Институт океанологии
Академии наук СССР

Поступило 18/VI 1946 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штокман В. Б. Уравнения поля полных потоков, возбуждаемых ветром в неоднородном море. ДАН СССР, т. LIV, № 5, 1946.
2. Шулейкин В. В. ДАН СССР, т. VL, 8, 1944.
3. Ландау Л. и Лифшиц Е. Механика сплошных сред. 1944, стр. 535.
4. Rossby C. G. Marine Research, 1, No. 3, 1938.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ И ПОЛЯ МАСС, ОБУСЛОВЛЕННЫХ ВЕТРОМ В БАРОКЛИННОМ МОРЕ [1]

I. Определение полных потоков в море с учетом эффекта ветра и бокового трения

По сравнению с косвенным вычислением течений на одной какой-либо глубине в море косвенное определение полных потоков, т. е. интегрального переноса воды, обладает некоторыми существенными преимуществами.

Одно из этих преимуществ, указанное нами ранее [1], заключается в том, что при вычислении интегрального переноса сглаживаются отдельные детали динамических карт течений, носящие порой фиктивный характер вследствие того, что распределение удельных объемов на данном уровне в море не всегда связано с системой горизонтальной циркуляции на том же уровне, а является следствием вертикальной конвекции.

Другое, особенно важное, преимущество вычисления полных потоков, указанное впервые Экманом [5], состоит в том, что при вычислении полного потока в бароклинном море исключается мало известная и весьма изменчивая величина коэффициента турбулентного трения, обусловленного обменом количества движения в вертикальном направлении.

Правда, в свое время Окада [8, 9] показал, что при вычислении течений на данном уровне можно, применяя метод последовательных приближений, учесть эффект турбулентного трения, обусловленного обменом количества движения в вертикальном направлении. Однако в приближенном методе Окада вовсе не учитывается эффект бокового турбулентного трения, обусловленного обменом количества движения в горизонтальных направлениях.

---

[1] Опубликовано в Трудах Института океанологии АН СССР, т. VI, 1951 г.

Третье преимущество вычисления полных потоков, как мы покажем в настоящем разделе, состоит в том, что при косвенном определении интегрального переноса можно в замкнутой форме точно учесть эффект бокового трения.

Напишем для нашей цели систему уравнений установившегося движения в море:

$$\left.\begin{aligned} A_l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)+c\rho v=\frac{\partial p}{\partial x},\\ A_l\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)-c\rho u=\frac{\partial p}{\partial y},\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

пренебрегая, как обычно, инерционными членами и вертикальной составляющей течения.

В уравнениях (1) через u и v обозначены горизонтальные компоненты скорости течения вдоль осей X, Y декартовой системы координат, причем положительная ось Y считается повернутой против часовой стрелки относительно положительной оси X. Кроме того, в уравнениях (1) через p обозначено давление, ρ — плотность воды, $c=2\omega\sin\varphi$ — параметр Кориолиса, в котором ω означает угловую скорость вращения Земли, а φ — широту места, A_z — коэффициент турбулентного трения, обусловленного обменом количества движения по вертикали z, A_l — коэффициент «бокового» турбулентного трения, определяемого обменом количества движения в горизонтальных направлениях (x, y). Как показывают различные определения коэффициентов турбулентного обмена в море, коэффициент горизонтального обмена A_l примерно в 10^6 раз больше коэффициента вертикального обмена A_z, благодаря чему напряжения трения, действующие в вертикальных и горизонтальных плоскостях в море, обладают одним и тем же порядком, несмотря на то, что вертикальное изменение компонент u и v скорости течения в море значительно больше изменения этих компонент в горизонтальных направлениях (примерно в той же пропорции, что и отношение A_l/A_z). Кроме того, изменения величины A_l в зависимости от горизонтальных координат невелики сравнительно с изменением коэффициента A_z, который резко меняется в зависимости от вертикального градиента плотности. На этом основании мы считаем величину A_l в уравнениях (1) постоянной, иначе говоря, заменяем слабо меняющийся коэффициент A_l его средним значением в пределах рассматриваемой области моря. Напротив, величину A_z в уравнениях (1) мы будем считать переменной, меняющейся в зависимости от z по любому закону.

Величины горизонтальных компонент градиента давления, фигурирующие в правой части уравнения (1), можно выразить, как обычно, через измеряемые величины плотности морской воды посредством уравнения статики, которое выполняется с достаточным приближением в условиях реального моря.

Нам будет выгоднее расположить горизонтальную координатную плоскость XOY на некоторой глубине от поверхности моря и направить положительную ось z вертикально вверх. В таком случае уравнение статического равновесия запишется так:

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -g\rho. \tag{2}$$

Наблюдения показывают, что в условиях реального бароклинного моря горизонтальный градиент давления затухает с глубиной, и на некоторой глубине, являющейся нижней границей бароклинного слоя, изостеры и изобары горизонтальны, т. е. там движение отсутствует. Не касаясь объяснения причин этого факта, расположим горизонтальную плоскость XOY на указанной глубине (плоскость XOY будет, следовательно, изобарической плоскостью) и проинтегрируем уравнение (2) в пределах от $z=0$ до некоторой высоты z над плоскостью XOY. Мы получим

$$p_z - p_0 = -g\int_0^z \rho\, dz.$$

Дифференцируя написанное выражение сначала по x, а затем по y и принимая во внимание, что

$$\frac{\partial p_0}{\partial x} = \frac{\partial p_0}{\partial y} = 0,$$

мы получим следующие выражения:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z = -g\,\frac{\partial q}{\partial x}; \quad \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z = -g\,\frac{\partial q}{\partial y}, \tag{3}$$

где через q обозначена величина интеграла

$$q = \int_0^z \rho\, dz, \tag{4}$$

определяемая по данным наблюдений.

Преобразуем теперь уравнения (1) в уравнения для полных потоков. Подставляя (3) в уравнения (1) и интегрируя их почленно в пределах от $z=0$ до поверхности моря $z=H$, т. е.

в пределах бароклинного слоя, в котором осуществляется движение, мы получим:

$$\left.\begin{aligned} &A_l\left(\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2}\right)+\left(A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)_H-\\ &-\left(A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0+c\bar{\rho}S_y=-g\frac{\partial Q}{\partial x},\\ &A_l\left(\frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2}\right)+\left(A_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)_H-\\ &-\left(A_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0-c\bar{\rho}S_x=-g\frac{\partial Q}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

В уравнениях (5) через S_x и S_y обозначены компоненты горизонтального вектора полного потока в пределах бароклинного слоя, т. е.

$$S_x=\int_0^H u\,dz,\quad S_y=\int_0^H v\,dz; \tag{6}$$

$\bar{\rho}$ означает среднюю величину плотности в тех же пределах, а через Q обозначена величина

$$Q=\int_0^H dz\int_0^z \rho\,dz, \tag{7}$$

вычисляемая на основании известного из наблюдений вертикального распределения плотности.

Так как нижняя граница слоя $z=0$ выбрана на глубине, где изобары и изостеры горизонтальны и ниже которой движение отсутствует (или практически ничтожно мало), то горизонтальные составляющие напряжения трения на этой границе равны нулю:

$$\left(A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0=\left(A_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0=0. \tag{8}$$

Если на поверхности моря действует ветер, то

$$\left(A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)_H=T_x,\quad \left(A_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)_H=T_y, \tag{9}$$

где T_x и T_y — тангенциальные компоненты давления ветра на поверхности моря вдоль осей X и Y соответственно[1]. Заметим также, что величина $\bar{\rho}$ в уравнениях (5) мало отличается от единицы, и ее изменения в горизонтальных направлениях значительно меньше аналогичных изменений компонент полных потоков. Мы не сделаем поэтому сколько-нибудь существенной ошибки, полагая в уравнениях (5) $\bar{\rho}=1$.[2]

Имея это в виду, а также условия (8) и (9), мы перепишем уравнения (5) в следующей форме:

$$\left.\begin{aligned} A_l\left(\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2}\right)+T_x+cS_y&=-g\frac{\partial Q}{\partial x},\\ A_l\left(\frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2}\right)+T_y-cS_x&=-g\frac{\partial Q}{\partial y}.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Наша задача будет теперь заключаться в том, чтобы с помощью уравнений (10) найти явную зависимость между искомыми компонентами полного потока S_x и S_y и определяемыми из наблюдений величинами, какими являются величины T и Q и их изменения в горизонтальных направлениях.

На основании второго уравнения (10) можно написать

$$S_x=\frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{T_y}{c}+\frac{A_l}{c}\left(\frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2}\right).$$

Подставляя это выражение на место S_x в первое уравнение и решая его относительно S_y, получим

$$\begin{aligned} S_y=-\frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{T_x}{c}-\frac{A_l g}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 Q-\\ -\frac{A_l}{c^2}\nabla^2 T_y-\frac{A_l^2}{c^2}\nabla^4 S_y.\end{aligned} \tag{11}$$

---

[1] Заметим, что если бы начало координат было расположено на поверхности моря, то в выражениях (9) должен был бы появиться знак минус:

$$\left(A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)_H=-T_x,\qquad \left(A_z\frac{\partial v}{\partial z}\right)_H=-T_y,$$

ибо отсчет вертикальных градиентов скорости в воде и в воздухе осуществлялся бы в противоположных направлениях.

[2] Для сохранения правильных размерностей в последующих формулах [вплоть до формулы (65)] можно считать, что $c=2\bar{\rho}\omega\sin\varphi$. Подчеркнем, что эффект широтного изменения параметра Кориолиса в этой статье не учитывается и параметр c считается постоянным. (*Прим. сост.*)

Аналогично

$$S_x = \frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{T_y}{c} - \frac{A_l g}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 Q -$$

$$- \frac{A_l}{c^2}\nabla^2 T_x - \frac{A_l^2}{c^2}\nabla^4 S_x. \qquad (12)$$

В выражениях (11) и (12) через ∇^2 и ∇^4 обозначены операторы:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}; \quad \nabla^4 \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \qquad (13)$$

Как видим, в правой части выражений (11) и (12), помимо величин, определяемых из наблюдений, фигурируют неизвестные величины $\nabla^4 S_y$ и $\nabla^4 S_x$. Естественно поэтому, что выражения (11) и (12) не могут пока являться формулами, пригодными для практического расчета компонент полного потока по заданному из наблюдений полю масс и ветра. Можно, однако, показать, что величины $\nabla^4 S_y$ и $\nabla^4 S_x$ явно связаны с полем ветра. Для этой цели обратимся вновь к уравнениям (10) и продифференцируем первое из них по y, а второе по x. Вычитая затем из первого уравнения второе, мы исключим величину Q и в результате получим

$$A\,\nabla^2\left(\frac{\partial S_x}{\partial y} - \frac{\partial S_y}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial T_x}{\partial y} - \frac{\partial T_y}{\partial x}\right) +$$

$$+ c\left(\frac{\partial S_y}{\partial y} + \frac{\partial S_x}{\partial x}\right) = 0; \qquad (14)$$

замечая, что

$$\operatorname{div}\mathbf{S} = \frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = 0^{1} \qquad (15)$$

---

[1] Уравнение (15) получается из общего уравнения неразрывности для установившегося движения в самом общем случае с учетом уклонов поверхности моря и вертикальной составляющей w скорости течения. В самом деле, интегрируя в пределах 0—H уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0, \qquad (\text{А})$$

мы получим

$$\int\limits_0^H \frac{\partial \rho u}{\partial x}\,dz + \int\limits_0^H \frac{\partial \rho v}{\partial y}\,dz + \rho_H w_H - \rho_0 w_0 = 0. \qquad (\text{Б})$$

Так как на нижней границе бароклинного слоя ($z=0$) движение отсутствует, то $w_0=0$. В то же время на поверхности моря ($z=H$), обладающей в силу неразрывности движения, мы вместо (14) получим уравнение

$$\nabla^2 \mathrm{rot}_z \mathbf{S} = -\frac{\mathrm{rot}_z \mathbf{T}}{A_l}. \tag{16}$$

В уравнении (16) значком rot обозначены вихри в поле полного потока и тангенциального давления ветра. Именно:

$$\mathrm{rot}_z \mathbf{S} = \frac{\partial S_y}{\partial x} - \frac{\partial S_x}{\partial y}, \tag{17}$$

$$\mathrm{rot}_z \mathbf{T} = \frac{\partial T_y}{\partial x} - \frac{\partial T_x}{\partial y}. \tag{18}$$

Из уравнения неразрывности для полных потоков (15) следует, что компоненты вектора S можно выразить посредством некоторой «функции полного потока» ψ, связанной с компонентами полного потока соотношениями:

$$S_y = \frac{\partial \psi}{\partial x}; \quad S_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y}. \tag{19}$$

стационарным наклоном, $w_H \neq 0$. Величина w_H связана с u_H и v_H следующим соотношением:

$$w_H = u_H \frac{\partial H}{\partial x} + v_H \frac{\partial H}{\partial y}, \tag{В}$$

где $\frac{\partial H}{\partial x}$ и $\frac{\partial H}{\partial y}$ — уклоны поверхности моря в направлениях x, y. Вынося знаки дифференцирования из-под знаков интегралов в (Б), мы, согласно известным правилам, должны написать

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H \rho u\, dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_0^H \rho v\, dz - \rho_H u_H \frac{\partial H}{\partial x} - \rho_H v_H \frac{\partial H}{\partial y} + \rho_H w_H = 0.$$

Подставляя в последнее уравнение значение w_H из (В), получим

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^H \rho u\, dz + \frac{\partial}{\partial y}\int_0^H \rho v\, dz = 0,$$

или

$$\frac{\partial \bar{\rho} S_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} S_y}{\partial y} = 0, \tag{Г}$$

где $\bar{\rho}$ — среднее значение плотности в пределах 0—H. Так как изменения $\bar{\rho}$ в направлениях x, y значительно меньше аналогичных изменений компонент скорости u, v и сами значения $\bar{\rho}$ мало отличаются от единицы, то вместо (Г) можно с большой точностью писать

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = 0.$$

Имея в виду соотношения (19) и (17), мы запишем уравнение (16) в форме

$$\nabla^4\psi = -\frac{\operatorname{rot}_z \mathbf{T}}{A_l}. \tag{20}$$

В свою очередь, действуя на обе части соотношений (19) оператором ∇^4, получим:

$$\nabla^4 S_y = \frac{\partial}{\partial x}\nabla^4\psi; \qquad \nabla^4 S_x = -\frac{\partial}{\partial y}\nabla^4\psi,$$

или на основании (20):

$$\nabla^4 S_y = -\frac{1}{A_l}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{rot}_z \mathbf{T}; \qquad \nabla^4 S_x = \frac{1}{A_l}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{rot}_z \mathbf{T}. \tag{21}$$

Таким образом, нам удалось связать неизвестные величины $\nabla^4 S_y$, $\nabla^4 S_x$ с величиной ротора тангенциального давления ветра, которую легко определить по данным наблюдений. На основании соотношений (21) правые части формул (11) и (12) будут теперь содержать лишь измеряемые величины, а левые части — искомые значения компонент полного потока:

$$S_y = -\frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{T_x}{c} - \frac{A_l g}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 Q - \\ - \frac{A_l}{c^2}\nabla^2 T_y + \frac{A_l}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{rot}_z \mathbf{T}, \tag{22}$$

$$S_x = \frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{T_y}{c} - \frac{A_l g}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 Q - \\ - \frac{A_l}{c^2}\nabla^2 T_x - \frac{A_l}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{rot}_z \mathbf{T}. \tag{23}$$

Выражения (22) и (23) можно упростить. В самом деле, группируя два последних члена в (22) и раскрывая операторы ∇^2 и rot согласно (13) и (18), получим

$$-\frac{A_l}{c^2}\nabla^2 T_y + \frac{A_l}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{rot}_z \mathbf{T} =$$

$$= -\frac{A_l}{c^2}\left(\frac{\partial^2 T_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 T_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T_x}{\partial y\,\partial x}\right) = -\frac{A_l}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\mathbf{T},$$

где

$$\operatorname{div}\mathbf{T} = \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y}.$$

Следовательно, формулу (22) можно переписать в виде

$$S_y = -\frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{T_x}{c} - \frac{A_l}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}(g\nabla^2 Q + \operatorname{div}\mathbf{T}). \tag{24}$$

Поступая точно так же в отношении формулы (23), получим

$$S_x = \frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{T_y}{c} - \frac{A_l}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}(g\nabla^2 Q + \operatorname{div}\mathbf{T}). \tag{25}$$

Таковы окончательные выражения для вычисления компонент полного потока по заданным из наблюдений полям масс и ветра с учетом эффекта «бокового» трения.

Вместо величины Q в формулах (24) и (25) можно ввести величину P, связанную с вертикальным распределением динамических высот H_d изобарических поверхностей следующим соотношением:

$$P = \bar{\rho}\int_0^H H_d\,dz, \tag{26}$$

причем H_d, как известно, вычисляется по формуле

$$H_d = \int_{p_0}^{p} \alpha\,dp, \tag{27}$$

где α — удельный объем морской воды.

Имея в виду соотношения (26) и (27) и пользуясь для измерения динамических высот динамическими сантиметрами Бьеркнеса, связанными с обычными «геометрическими» сантиметрами соотношением

$$z = -\frac{10^3}{g}H_d,$$

мы вместо формул (24) и (25) получим:[1]

$$S_y = \frac{10^3}{c}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{T_x}{c} + \frac{A_l}{c^2}\frac{\partial}{\partial y}(10^3\nabla^2 P - \operatorname{div}\mathbf{T}), \tag{24'}$$

$$S_x = -\frac{10^3}{c}\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{T_y}{c} + \frac{A_l}{c^2}\frac{\partial}{\partial x}(10^3\nabla^2 P - \operatorname{div}\mathbf{T}). \tag{25'}$$

---

[1] Введение в рассмотрение высоты изобарических поверхностей z_p (относительно горизонтальной плоскости $p=p_0$) как искомой функции означает, по существу, переход от системы независимых переменных x, y, z к переменным $x_p=x$, $y_p=y$, $p=p(x, y, z)$. Тогда, если определить $H_d=-gz_p$, то в силу (2) для H_d мы получим формулу (27). Далее, $\partial p/\partial x=-\rho\partial H_d/\partial x_p$ и $\partial p/\partial y=-\rho\partial H_d/\partial y_p$. Удобно, однако, изменить единицы измерения и ввести $\tilde{p}=(p_0-p)/g\bar{\rho}$ и $H_d=-10^{-3}gz_p$. Если принять во внимание, что в море изобарические поверхности мало отличаются от горизонтальных плоскостей, то приближенно можно считать, что $\partial/\partial x \simeq \partial/\partial x_p$, $\partial/\partial y \simeq \partial/\partial y_p$, $z\simeq\tilde{p}$ и $gQ = -\bar{\rho}\int_0^H H_d dz$. Наконец, определив P согласно (26), мы и получим нижеследующие формулы. (*Прим. сост.*)

Легко видеть, что в частном случае, когда влиянием ветра и бокового трения можно пренебречь, формулы (24), (25), (24′) и (25′) превращаются в формулы, указанные в свое время Экманом [5] и Якхеллном [6]:

$$S_y'' = -\frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{10^3}{c}\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{28}$$

$$S_x'' = \frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial y} = -\frac{10^3}{c}\frac{\partial P}{\partial y}. \tag{29}$$

В этом случае вектор полного потока в данной точке моря направлен по касательной к изолиниям Q или P в той же точке так, что справа от направления S находятся бо́льшие значения P (меньшие значения Q), если движение рассматривается в северном полушарии. Если в формулах (24) и (25) можно лишь пренебречь эффектом бокового трения, но не эффектом ветра, то мы получаем формулы, указанные в одной из наших предыдущих работ [1]. Таким образом, формулы (24) и (25) являются наиболее общими выражениями для расчета полных потоков в море. Этим формулам можно дать наглядное геометрическое толкование.

В самом деле, компоненты полного потока S_x'' и S_y'', определяемые соотношениями (28) и (29) и являющиеся первыми членами в общих выражениях (24) и (25), можно рассматривать в качестве компонент потока, обусловленного заданным распределением масс без дополнительного учета эффекта ветра и бокового трения, когда в исходных уравнениях (10) $A_l = T_x = T_y = 0$. В то же время вторые члены в выражениях (24) и (25), а именно

$$S_x' = \frac{T_y}{c}, \tag{30}$$

$$S_y' = -\frac{T_x}{c}, \tag{31}$$

можно рассматривать в качестве компонент чисто дрейфового потока, обусловленного исключительно тангенциальным давлением ветра T, когда в исходных уравнениях (10) члены бокового трения и члены, содержащие величину Q, равны нулю. Как видно из выражений (30) и (31), вектор чисто дрейфового потока S' ориентирован в северном полушарии перпендикулярно вправо к направлению тангенциального давления ветра T, тогда как вектор S'' потока, обусловленного распределением масс, ориентирован по касательной к изолиниям Q или P.

Дифференцируя (28) по x, (29) по y и вычитая из первого второе, получим

$$\frac{g}{c}\nabla^2 Q = -\mathrm{rot}_z \mathbf{S}'' \quad \text{или} \quad \frac{10^3}{c}\nabla^2 P = \mathrm{rot}_z \mathbf{S}''. \tag{32}$$

В свою очередь, дифференцируя (30) по y, (31) по x и вычитая из первого второе, найдем, что

$$\frac{\mathrm{div}\,\mathbf{T}}{c} = -\mathrm{rot}_z \mathbf{S}'. \tag{33}$$

Опираясь на соотношения (28), (29), (30), (31), (32) и (33), можно записать формулы (24) и (25) в виде:

$$S_x = S''_x + S'_x + \frac{A_l}{c}\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{rot}_z(\mathbf{S}'' + \mathbf{S}').$$

$$S_y = S''_y + S'_y + \frac{A_l}{c}\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{rot}_z(\mathbf{S}'' + \mathbf{S}'),$$

или в векторной форме

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}'' + \mathbf{S}' + \frac{A_l}{c}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{rot}_z(\mathbf{S}'' + \mathbf{S}'). \tag{34}$$

Мы получили, таким образом, простое, но важное соотношение, показывающее, что вектор полного потока в бароклинном море, вообще говоря, является суммой трех векторов:

1) вектора потока, обусловленного полем масс,
2) вектора чисто дрейфового потока,
3) вектора потока, обусловленного эффектом бокового трения в поле силы Кориолиса. Величина этого вектора пропорциональна вектору-градиенту завихренности в поле первых двух потоков и коэффициенту бокового трения A_l и обратно пропорциональна параметру Кориолиса.

Рисунок 1 служит пояснением графического метода определения полного потока, вытекающего из формулы (34). На рис. 1 вектор $\mathbf{S}'$ изображает вектор чисто дрейфового потока; этот вектор направлен в северном полушарии перпендикулярно вправо от направления тангенциального давления ветра в данной точке моря, изображенного на рис. 1 стрелкой T. Абсолютная же величина S' равна $S' = \frac{T}{c}$.

В свою очередь вектор $\mathbf{S}''$ на рис. 1 означает вектор потока обусловленного распределением масс. Распределение масс, характеризуемое величинами P (или Q), изображено на рис. 1

в виде изолиний, перенумерованных в соответствии с изменением величины P. Как указывалось выше, величина потока $\mathbf{S}''$ пропорциональна градиенту величины P в данной точке моря, а именно $S''=\frac{10^3}{c}\operatorname{grad} P$. Сам же вектор $\mathbf{S}''$ ориентирован по касательной к изолинии P в данной точке моря таким образом, что справа от $\mathbf{S}''$ находятся бо́льшие величины P (или меньшие величины Q), если рассматриваемая область моря находится в северном полушарии. В свою очередь вектор $\mathbf{S}''$ рис. 1 изображает собой

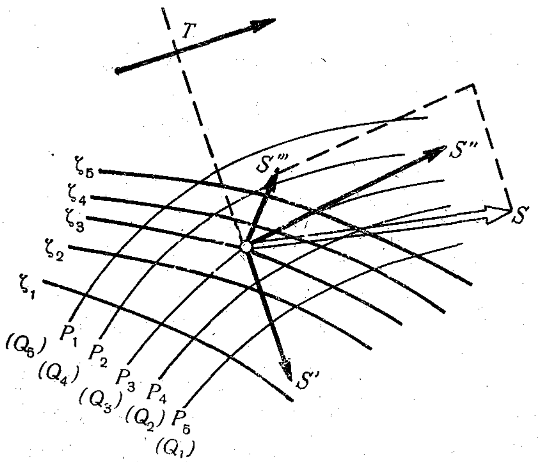

Рис. 1.

поток, обусловленный эффектом бокового трения; он направлен перпендикулярно к изолиниям ζ ротора в поле потоков $\mathbf{S}'$ и $\mathbf{S}''$ $[\zeta=\operatorname{rot}_z(\mathbf{S}'+\mathbf{S}'')]$, а абсолютная величина его равна: $S'''=\frac{A_l}{c}\operatorname{grad}\zeta$. Наконец, вектор $\mathbf{S}$, являющийся геометрической суммой векторов $\mathbf{S}'$, $\mathbf{S}''$ и $\mathbf{S}'''$, представляет собой результирующий полный поток, который и требовалось определить в данной точке моря.

Для определения величины чисто дрейфового потока $\mathbf{S}'$ следует пользоваться общепринятой квадратичной зависимостью между тангенциальным давлением ветра T и скоростью ветра W

$$T=\rho'\gamma^2 W_z^2, \tag{35}$$

где ρ' — плотность воздуха, равная $\rho' = 1{,}28 \cdot 10^{-3}$ г/см^3, W_z — скорость ветра в см/сек., измеренная на некоторой высоте z над поверхностью моря, γ^2 — безразмерный коэффициент, зависящий от шероховатости поверхности моря и высоты, на которой измеряется скорость ветра. Как показали исследования Россби и Монтгомери [12], а также Манка [7], величину γ^2 можно рассматривать постоянной, но меняющейся скачком при известной критической скорости ветра. Если скорость ветра измеряется, как обычно, на высоте около 8 м над поверхностью моря, то γ^2 обладает следующими двумя постоянными значениями, соответствующими скоростям ветра ниже или выше 5 м/сек., а именно:

$$\gamma_1^2 = 0{,}8 \cdot 10^{-3} \quad \text{при} \quad W_z < 5 \text{ м/сек.},$$

$$\gamma_2^2 = 2{,}6 \cdot 10^{-3} \quad \text{при} \quad W_z > 5 \text{ м/сек.}$$

Вычисление величин P или Q, необходимых для определения потока S'', обусловленного полем масс, не составляет труда. Для этой цели, пользуясь формулами (7) или (26), нужно над динамическими высотами различных изобарических поверхностей проделать те же операции, которые обычно делаются над удельными объемами in situ для определения динамической высоты; эти операции хорошо знакомы практикам-мореведам.

Нам остается сделать несколько замечаний по поводу вычисления величины $\zeta = \mathrm{rot}_z(\mathbf{S}' + \mathbf{S}'')$. Для этого необходимо вычислить значения $g\nabla^2 Q$ или $10^3\ \nabla^2 P$ и величину $\mathrm{div}\,\mathbf{T}$. Складывая или вычитая указанные значения в данной точке моря, необходимо затем провести линии одинаковых значений $(g\nabla^2 Q + \mathrm{div}\,\mathbf{T})$ или $(10^3\nabla^2 P - \mathrm{div}\,\mathbf{T})$, которые будут являться линиями одинаковой завихренности в поле чисто дрейфового потока и потока, обусловленного распределением масс. Как указывалось выше, вектор потока, обусловленного боковым трением, направлен в каждой точке по нормали к изолиниям завихренности от меньших к бо́льшим ее значениям. Для вычисления величины $\nabla^2 Q$ (или $\nabla^2 P$), определяющей завихренность в поле потока, обусловленного распределением масс, можно указать простой способ, вытекающий из представления этой величины в форме конечных разностей. Именно, для вычисления указанной величины в данной точке с координатами (x, y) необходимо снять с карты изолиний Q (или P), помимо значения Q (или P) в данной точке, также и ее значения в четырех точках с координатами $(x - l, y)$, $(x + l, y)$, $(x, y + l)$, $(x, y - l)$, как это указано на схеме рис. 2, причем l означает некоторый стандартный для расчетов отрезок в направлениях осей x и y. Сами вычисления осуществляются по формуле

$$\nabla^2 Q = \frac{1}{l^2}\left[Q(x+l,\ y) + Q(x-l,\ y) + Q(x,\ y+l) + \right.$$
$$\left. + Q(x,\ y-l) - 4Q(x,\ y)\right]. \qquad (36)$$

Знак величины $\nabla^2 Q$ соответствует знаку завихренности в поле потока $\mathbf{S}''$. Положительный знак завихренности соответствует вращению элементарных частиц жидкости в направлении против часовой стрелки, и наоборот. Вращение же элементарных частиц определяется как кривизной линий тока, так и изменением величины потока в поперечном направлении, именно:

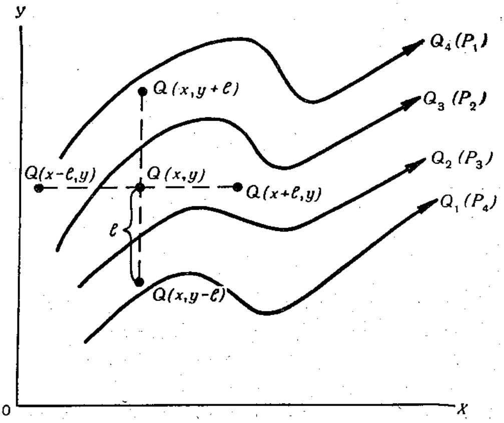

Рис. 2.

$$\operatorname{rot}_z \mathbf{S} = K_S S - \frac{\partial S}{\partial n}, \qquad (37)$$

где K_S — кривизна линий потока, а n — направление, нормальное к этим линиям, отсчитываемое против часовой стрелки от направления потока в данной точке.

Заметим, что с помощью выражения (37) можно предварительно оценить порядок эффекта бокового трения.

В самом деле, обозначая

$$\mathbf{S}_R = \mathbf{S}' + \mathbf{S}''$$

и полагая для простоты, что линии суммарного потока $\mathbf{S}_R$ являются прямыми, мы на основании (37) и (34) можем написать

$$S = S_R - \frac{A_l}{c}\,\frac{\partial^2 S_R}{\partial n^2} = S_R\left(1 - \frac{A_l}{c}\,\frac{\partial^2 S_R}{\partial n^2}\Big/ S_R\right),$$

но

$$S_R = \bar{u}_R h,$$

где $\bar{u}_R$ — средняя скорость в слое толщиной h. Поэтому

$$S = S_R\left(1 - \frac{A_l}{c}\,\frac{\partial^2 \bar{u}_R}{\partial n^2}\Big/ \bar{u}_R\right). \qquad (38)$$

Таким образом, эффект бокового трения в случае прямолинейного суммарного потока S_R зависит от отношения нормальной производной поперечного градиента суммарной средней скорости течения к величине этой скорости. Если второй член в скобках правой части (38) значительно меньше единицы, то эффектом бокового трения можно пренебречь.

Рассматривая движение в умеренных широтах, положим $c = 10^{-4}$ CGS, порядок средней скорости течения можно оценить величиной $\overline{u}_R = 10$ см/сек. Что же касается величины $\frac{\partial^2 \overline{u}_R}{\partial n^2}$, то порядок ее, вероятно, заключен в пределах 10^{-11}—10^{-12} CGS. В то же время порядок коэффициента бокового трения A_l оценивается величинами 10^7—10^8 CGS. Следовательно, порядок второго члена в скобках правой части (38) оценивается в среднем величиной 10^{-1}; поэтому искажение величины полного потока вследствие бокового трения, вообще говоря, невелико и достигает в среднем величины 10%. Конечно, в отдельных случаях, когда кривизна линий суммарного потока S_R значительна и при этом велик и поперечный градиент средней скорости, рассматриваемый эффект может достигать бóльших значений.

Для практического применения указанных здесь формул мы воспользовались данными стандартных океанографических наблюдений, осуществленных у берегов Калифорнии Скриппсовским океанографическим институтом в 1940 г. [14]. Эти наблюдения охватывают промежуток времени с 10 по 21 мая.

На основании опубликованных значений динамических высот были вычислены по формуле (26) величины P, изолинии которых изображены на схеме рис. 3. Эти изолинии рисуют направление потока S'', обусловленного распределением масс в слое от поверхности моря до глубины 500 м, принятой Скриппсовским институтом за нулевую глубину для вычисления динамических высот. Направление потока S'' указано на изолиниях P стрелками (бóльшие значения P находятся справа от потока). Величина же потока S'' пропорциональна густоте изолиний P. Распределение изолиний P на рис. 3 очень напоминает распределение динамических горизонталей на различных глубинах за тот же период наблюдений, представляя, однако, более сглаженную, осредненную картину движения в рассматриваемом слое.

Для того чтобы схематически учесть возможный эффект ветра, мы воспользовались климатологическими данными о распределении ветров в мае у берегов Калифорнии [19]. Согласно этим данным, в рассматриваемой области океана господствует с е в е р о - з а п а д н ы й ветер, скорость которого в среднем составляет 5 м/сек. Мы вычислили далее величину чисто дрейфового потока $S' = \frac{T}{c}$, руководствуясь соотношением (35) и полагая в нем $\gamma^2 = 2{,}6 \cdot 10^{-3}$. Направление чисто дрейфового потока $\mathbf{S}'$ ориентировано перпендикулярно вправо от направления ветра. Для простоты мы полагали поле ветра равномерным и прямолинейным. Путем сложения векторов $\mathbf{S}''$ и $\mathbf{S}'$ в отдельных точках рассматриваемой области океана было определено направление суммарного потока $\mathbf{S}_R$, обусловленного распределением масс и эффектом ветра. Направления суммарного потока

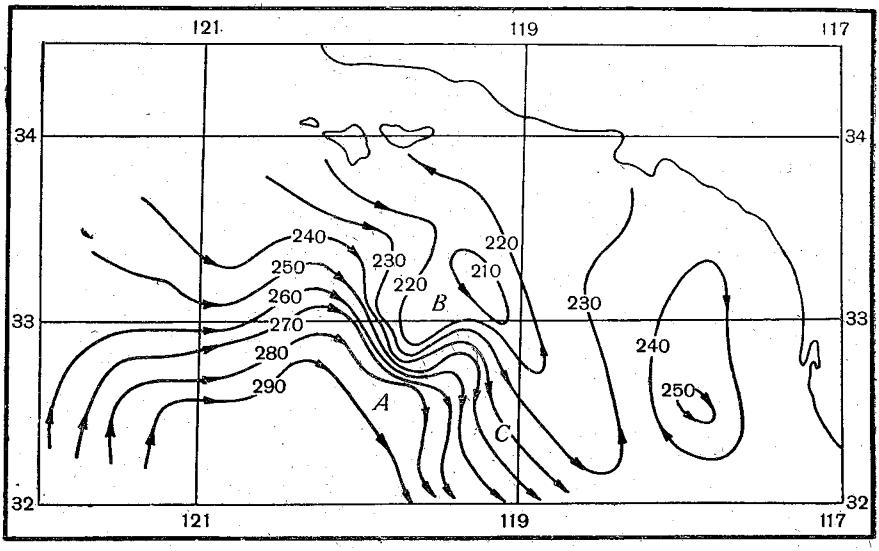

Рис. 3.

$\mathbf{S}_R$ указаны на карте рис. 4 стрелками одинаковой длины, а линии, касательные к этим стрелкам, схематически рисуют результирующее перемещение водных масс (без учета эффекта бокового трения).

Сравнивая схему осредненной циркуляции без учета эффекта ветра (рис. 3) со схемой результирующего движения, построенной с учетом влияния ветра (рис. 4), мы видим, что учет чисто дрейфового потока в некоторых случаях сильно исказил движение, намечаемое изолиниями P. Это искажение особенно велико в западной части области между долготами 120 и 122° W, где линии суммарного потока $\mathbf{S}_R$ не только пересекают по нормали изолинии P, но и направлены в некоторых случаях противоположно тому направлению, которое указывается изолиниями P.

Таким образом, учет чисто дрейфового потока в данном случае вносит очень существенный корректив к направлению потока, определяемому лишь поведением изолиний P. В то же время из сравнения рис. 3 и 4 легко видеть, что изменения, вносимые в направление изолиний P чисто дрейфовой составляющей S' полного потока, очень незначительны в области между долготами 119 и 120° W и широтами 32° 30′ и 33° 20′ N, где изолинии суммарного потока S_R почти в точности повторяют характерный V-образный изгиб изолиний P. Это объясняется тем, что в указанной области градиент величины P очень велик (см. рис. 3),

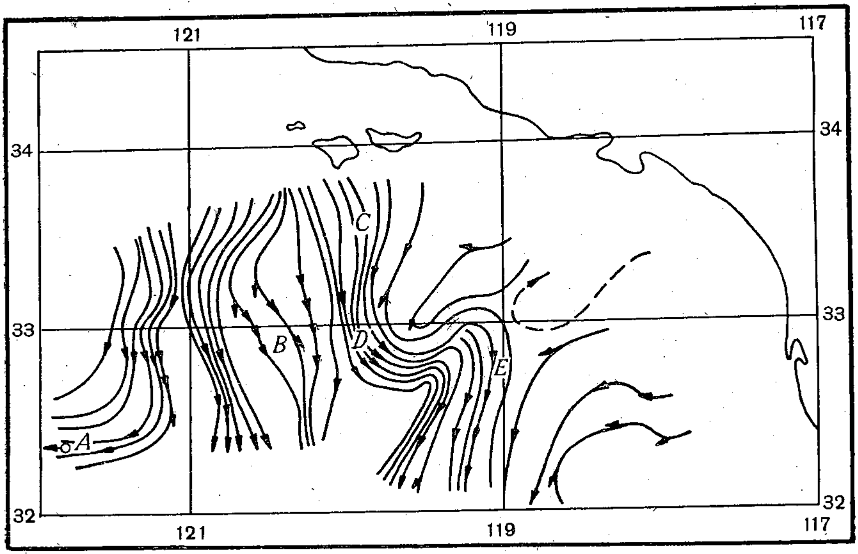

Рис. 4.

а потому составляющая полного потока S'', обусловленная распределением масс, значительно превышает чисто дрейфовую составляющую потока S'. Здесь следует предостеречь читателя от ложного вывода о том, что в данном случае эффект ветра якобы не в состоянии нарушить поля масс, обусловливающего составляющую потока S''. Хотя этот вывод и может казаться, на первый взгляд, вполне естественным, но он был бы неверным потому, что распределение масс, характеризуемое величиной P, а вместе с ним и составляющая потока S'' в формулах (24′) и (25′) в неявной форме зависят от ветра.

В самом деле, как было показано ранее [2], движение поверхностного слоя, возбуждаемое ветром в неоднородном море, приводит к перестройке первоначального поля масс в значительной толще воды, в результате чего поле масс оказывается приспособленным к системе течений, порожденной ветром. Заметим, чисто дрейфовая составляющая потока $\mathbf{S}'$ осталась бы без изменения и в случае однородного моря, но составляющая $\mathbf{S}''$, обусловленная полем масс, была бы иной при отсутствии ветра. Упомянутое сгущение изолиний P у Калифорнийского побережья является ярким примером перестройки поля масс, обусловленной ветром. Действительно, преобладающие в весеннее время северо-западные ветры, дующие параллельно берегу Калифорнии, являются для прибрежной части моря сгонными ветрами, сгоняющими легкую нагретую воду поверхностного слоя от берега в море. На место этой воды у берега поднимается более тяжелая, холодная вода глубинных слоев, которая также постепенно сгоняется от берега в море. Как показало исследование Свердрупа [15], в результате процесса сгона между теплой и холодной водой на некотором расстоянии от берега возникает своего рода жидкий «барьер», в области которого горизонтальное изменение плотности очень велико. Там возникает поэтому быстрое течение, направленное по ветру вдоль берега. Это течение, усиленное сгонным эффектом ветра, и отражается на карте рис. 4 упоминавшимся выше сгущением изолиний P. Заметим, что схема на рис. 4 дает лишь в сравнении с рис. 3 представление об изменениях в направлении результирующей циркуляции, которые вносятся учетом эффекта ветра, точнее — чисто дрейфовой составляющей полного потока. Линии со стрелками на схеме рис. 4 не являются линиями тока; они проведены лишь для того, чтобы обрисовать в общих чертах направление результирующего переноса. По густоте этих линий нельзя судить об абсолютной величине результирующего потока.

Представляет поэтому интерес остановиться на сравнительной характеристике абсолютной величины результирующей потока $S_R = S' + S''$, определяемой с учетом чисто дрейфовой его составляющей S', и абсолютной величины полного потока S'', определяемой лишь на основании распределения масс, характеризуемого значениями P. В приводимой ниже табличке указаны в процентах величины $\Delta\% = \frac{S_R - S''}{S''} \cdot 100 = \frac{S'}{S''} \cdot 100$, вычисленные для пяти точек, обозначенных на схеме рис. 4 буквами A, B, C, D и E.

Точки	A	B	C	D	E
Δ %	—25	—65	46	10	29

Абсолютные значения S' и S'' определялись из соотношений:

$$S' = \sqrt{S_x'^2 + S_y'^2} = \frac{T}{c};$$

$$S'' = \sqrt{S_x''^2 + S_y''^2} = \frac{10^3}{c}\,\mathrm{grad}\,P.$$

Знак минус в таблице означает, что результирующая, с учетом ветра, величина полного потока меньше величины полного потока, определяемой лишь на основании градиента поля P. Как видно из таблицы, величина результирующего потока S_R в большинстве случаев существенно отличается от величины потока, определяемой $\mathrm{grad}\,P$. Так, например, в точке B (рис. 4) величина S_R на 65% меньше S''. В области же упомянутого выше сгущения изолиний P, обусловленного сгонным эффектом ветра, а именно в точке D, величина результирующего потока незначительно превышает (на 10%) компоненту потока S'', обусловленную полем масс.

Перейдем теперь к характеристике составляющей $\mathbf{S}'''$ результирующего потока в рассматриваемой области, обусловленной боковым трением. Для этой цели, как было показано выше, необходимо сначала вычислить завихренность в поле потоков $\mathbf{S}''$ и $\mathbf{S}'$. Так как завихренность поля чисто дрейфовой составляющей потока $\mathbf{S}'$, согласно (33), определяется величиной $\mathrm{div}\,\mathbf{T}$, то в рассматриваемом случае, когда поле $\mathbf{T}$ равномерно, $\mathrm{div}\,\mathbf{T}$ и, следовательно, $\mathrm{rot}_z\,\mathbf{S}'$ равны нулю. Необходимо поэтому лишь вычислить завихренность поля потока $\mathbf{S}''$, обусловленного распределением масс, иначе говоря, завихренность потока, характеризуемого изолиниями P.

Для определения $\mathrm{rot}_z S'' = \dfrac{10}{c}\nabla^2 P$ (в системе MTS) мы вычислили по формуле (36) и схеме рис. 2 величину $\nabla^2 P$ для 13 точек, положение которых указано на рис. 5, изображающем в увеличенном масштабе (по сравнению с рис. 3) распределение изолиний P в рассматриваемой области океана. В качестве стандартного отрезка l было принято расстояние $l = 10$ миль $= 18\,520$ м.

Для примера приведем вычисление величины $\nabla^2 P$ для точки № 1 (рис. 5). Определяя путем интерполяции значения P как в точке № 1, так и в четырех концевых точках креста, указанного пунктиром на рис. 5, мы получим, согласно (36), следующее значение $l^2 \times \nabla^2 P_1$:

$$l^2 \times \nabla^2 P_1 = 244 + 269 + 262 + 255 - (4 \times 255) = 10.$$

Аналогичным путем были найдены значения $l^2 \times \nabla^2 P$ в остальных 12 точках и затем проведены линии равных значений $l^2 \times \nabla^2 P$, указанные на рис. 6 (сплошные линии). Для того чтобы получить величины $\nabla^2 P$, следует, очевидно, разделить приведенные на рис. 6 цифры на одну и ту же величину $l^2 = 18\,520^2$. В свою очередь, для того чтобы получить абсолютную величину завихренности в поле потока $\mathbf{S}''$, необходимо значение $\nabla^2 P$ умножить на постоянную величину $\frac{10}{c}$, имея в виду, что для данного диапазона широт $c = 794 \cdot 10^{-7}$.

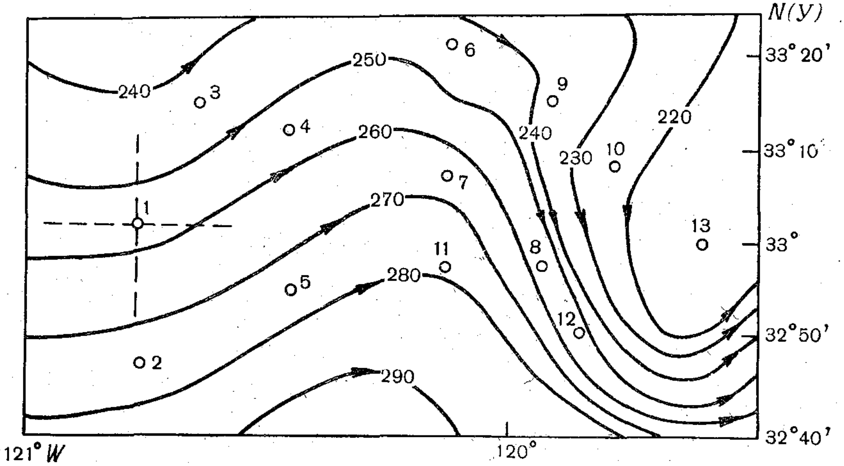

Рис. 5.

Так, например, абсолютная величина завихренности в точке № 1 будет равна

$$(\mathrm{rot}_z \mathbf{S}'')_1 = \frac{10}{c} \nabla^2 P = \frac{10^2}{794 \cdot 10^{-7} \cdot 281\,504 \cdot 10^2} \cong 0{,}04.$$

Для наглядной интерпретации полученной величины $\mathrm{rot}_z \mathbf{S}''$ заметим, что определенная таким образом величина завихренности в данной точке потока $\mathbf{S}''$ равна удвоенной средней угловой скорости вращения частиц жидкости[1], расположенных на вертикали, проходящей через данную точку во всем слое, охваченном потоком (0—500 м). Поэтому средняя угловая скорость

[1] Точнее говоря, величина $\mathrm{rot}_z S''$ в данной точке представляет собой удвоенную величину средней угловой скорости, с какой поворачиваются все бесконечно малые радиусы, проведенные из данной точки во всех горизонтальных сечениях слоя от поверхности моря до нижней границы потока.

$\overline{\omega}$ вращения частиц жидкости в точке № 1 будет равна $\overline{\omega}=0{,}02$, что соответствует полному обороту частиц в среднем за время $t \cong 300$ сек.$\cong 5$ мин.

Так как цифры, указанные на рис. 5, умножаются для получения завихренности на одну и ту же постоянную величину, то сплошные линии равных значений $l^2 \times \nabla^2 P$ на рис. 6 дают представление о поле относительной завихренности потока S''. Области положительных значений $l^2 \times \nabla^2 P$ на рис. 6 соответствуют положительной завихренности, т. е. вращению элементарных частиц в направлении против часовой стрелки, а отри-

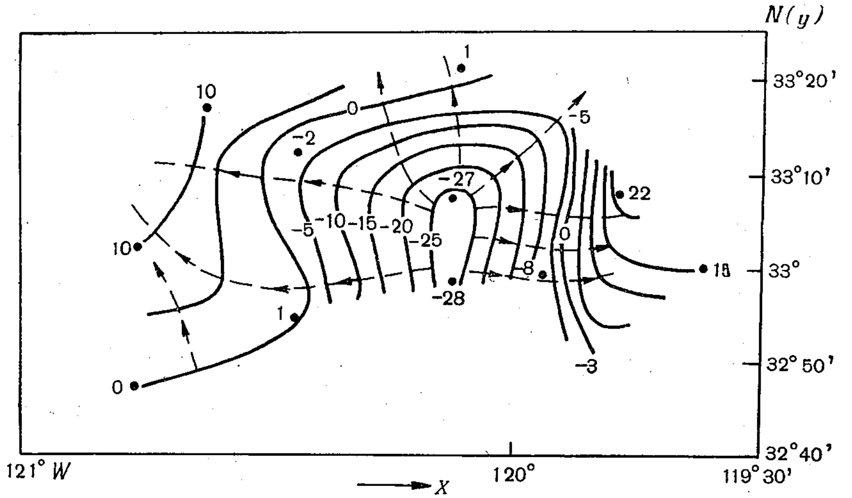

Рис. 6.

цательные значения — вращению элементарных частиц по часовой стрелке.

Направление составляющей полного потока, обусловленной эффектом бокового трения, определяется, согласно (34), направлением вектора-градиента завихренности в поле потоков S'' и S', т. е. в данном случае направлением ортогоналей к изолиниям $l^2 \times \nabla^2 P$, считая от меньших к бо́льшим значениям величины $l^2 \times \nabla^2 P$. Эти ортогонали на рис. 6 указаны прерывистыми линиями. Стрелки на ортогоналях указывают направление составляющей полного потока, обусловленной боковым трением. Сравнивая направление ортогоналей на рис. 6 с направлением изолиний P на рис. 5, мы видим, что составляющая полного потока, обусловленная боковым трением, пересекает направление изолиний P, составляя различные углы с вектором потока S''.

Следовательно, направление результирующего потока, являющегося суммой потока $\mathbf{S}''$, и потока, обусловленного боковым трением, вообще говоря, не совпадает с направлением изолиний P на рис. 5.

Зная направление и величину потока $\mathbf{S}'''$, обусловленного боковым трением, так же как и величину и направление потока $\mathbf{S}''$, нетрудно подсчитать величину угла α, на который отклоняется направление результирующего потока от направления изолиний P в результате эффекта бокового трения.

Эти расчеты были проделаны для четырех точек A, B, C и D, положение которых указано на рис. 3. Величина коэффициента бокового турбулентного трения A_l, определяющая вместе с параметром c величину потока S''', была принята, согласно Свердрупу [18], равной $2 \cdot 10^6$ CGS.

Результаты вычисления угла α сведены в следующую таблицу:

$A_l = 2 \cdot 10^6$ CGS

Точки	A	B	C	D
α°	2	15	1	1

Как видим, отклонение результирующего потока от изолиний P, вообще говоря, невелико и в крайнем случае достигает 15°. Однако с увеличением коэффициента бокового трения A_l будет возрастать и угол α. Так, например, в случае $A_l = 10^7$ CGS, что является вероятным верхним пределом A_l в исследуемом районе, указанные в табличке углы увеличились бы в п я т ь раз.

К сожалению, величина коэффициента бокового турбулентного трения A_l далеко не всегда известна, что затрудняет определение составляющей потока, обусловленной боковым трением. Однако в этих неблагоприятных случаях проведение изолиний относительной завихренности в поле потока $\mathbf{S}''$ может принести известную пользу, так как по направлению ортогоналей к этим изолиниям можно заранее судить о направлении, в котором отклонится результирующий поток по сравнению с направлением изолиний P. Следует также отметить, что указанные нами формулы для вычисления полного потока с учетом ветра и бокового трения могут быть использованы для определения малоизученной величины коэффициента бокового трения A_l в данной точке моря, если помимо известного поля масс, характеризуемого величинами P, в окрестности данной точки, известны ф а к т и ч е с к и е, измеренные прибором, скорости течения в той же точке.

II. Анализ эффекта бокового трения в поле кориолисовой силы. Распределение плотности и скоростей течения, обусловленное ветром, в некоторых конкретных случаях

В настоящем разделе мы исследуем эффект бокового трения в поле кориолисовой силы в двух случаях прямолинейных течений и покажем, что развиваемая нами теория дает возможность при небольшом числе исходных данных наблюдений просто вычислить скорости течения и распределение плотности, обусловленные ветром в поперечном сечении бесконечного канала или круглого моря.

Для этой цели мы вновь обратимся к уравнению (34). Заметим, что, делая операцию rot_z над обеими частями этого уравнения, мы в силу того что

$$\mathrm{rot}_z\,[\mathrm{grad}\,\mathrm{rot}_z\,(\mathbf{S}' + \mathbb{S}'')] = 0,$$

получим

$$\mathrm{rot}_z\,\mathbf{S} = \mathrm{rot}_z\,(\mathbf{S}' + \mathbb{S}'') = \mathrm{rot}_z\,\mathbb{S}' + \mathrm{rot}_z\,\mathbb{S}'';$$

таким образом, ротор фактического, результирующего потока в бароклинном море равен сумме роторов в поле чисто дрейфового потока $\mathbf{S}'$ и потока $\mathbf{S}''$, обусловленного полем масс. Следовательно, уравнение (34) можно переписать в форме

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}' + \mathbb{S}'' + \frac{A_l}{c}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{rot}_z\,\mathbb{S}. \tag{39}$$

Применим сначала уравнение (39) к случаю прямолинейного струйного потока в безграничном океане. Пусть рассматриваемый струйный поток ориентирован в направлении оси Y, а величина потока S, обладая максимумом при $x=0$, быстро убывает по мере удаления от оси потока в направлениях $\pm x$, как это схематически изображено на рис. 7*а*. Очевидно, что в данном случае изолинии $\mathrm{rot}_z\mathbf{S}$ будут прямыми, вытянутыми параллельно оси Y, а потому, как это следует из уравнения (39), составляющая потока, обусловленная эффектом бокового трения в поле силы Кориолиса, будет всюду направлена в поперечном направлении потока ($\pm x$). Величина поперечной составляющей потока, S'''_x, равна

$$S'''_x = \frac{A_l}{c}\,\mathrm{grad}_x\,\mathrm{rot}_z\,\mathbf{S} = \frac{A_l}{c}\,\frac{d^2 S_y}{dx^2}. \tag{40}$$

Из выражения (40) следует, что поперечная составляющая S'''_x меняет знак в точках перегиба эпюры результирующего потока S. Поперечная составляющая S_x''' отрицательна, т. е. направлена в сторону отрицательной оси X там, где эпюра результирующего потока S вогнута в сторону отрицательной оси Y, и наоборот, поперечная составляющая S_x''' положительна там, где эпюра потока S вогнута в сторону $+Y$. Направление поперечной составляющей S_x''' указано на рис. 7 *а* сплошными стрелками. В точках перегиба эпюры потока S поперечная составляющая равна нулю и достигает абсолютного максимума

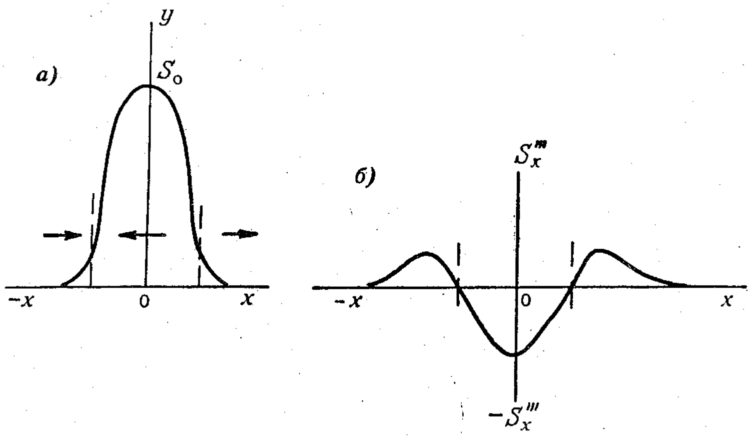

Рис. 7.

в стрежне потока ($x=0$). Изменение величины и знака составляющей S_x''', в соответствии с (40) и эпюрой S на рис. 7 *а*, изображено на рис. 7 *б*.

Полученные на основании (39) выводы относительно поперечной составляющей, обусловленной эффектом бокового трения в поле силы Кориолиса, полностью совпадают с аналогичными выводами, к которым пришел в свое время Россби [11] на основании чисто качественных соображений. Эффект бокового трения в поле кориолисовой силы в случае рассматриваемого здесь струйного потока можно истолковать, следуя Россби, следующим образом. При распространении струйного потока в окружающих его неподвижных водных массах центральная часть потока благодаря боковому трению будет испытывать торможение, тогда как первоначально неподвижные массы по краям потока благодаря тому же трению будут вовлекаться в движение, испытывая ускорение в направлении потока.

Торможение ядра потока равносильно появлению составляющей, направленной противоположно потоку. С этой составляющей, обусловленной эффектом трения, связано благодаря вращению Земли перемещение справа налево, что совпадает с полученными нами аналитическим путем результатами. В свою очередь ускоряющий эффект бокового трения для ранее неподвижных водных масс равносилен появлению по бокам ядра потока составляющих в направлении потока. С этими дополнительными составляющими связано благодаря вращению Земли перемещение слева направо, что вновь совпадает с полученными нами аналитическими результатами. В дополнение к качественным результатам Россби мы на основании (39) можем количественно оценить величину поперечной составляющей S'''_x применительно к эпюре потока S на рис. 7 *а*, характерной для струйных течений. Допустим для этой цели, что величина результирующего потока, направленного вдоль оси Y, изменяется в зависимости от x по следующему закону:

$$S = S_0 e^{-\alpha x^2}, \tag{А}$$

как это схематически изображено на рис. 7 *а*. Подставляя (А) в (40), получим

$$S'''_x = -\frac{A_l}{c} 2S_0\alpha \left(1 - 2x^2\alpha\right) e^{-\alpha x^2}.$$

Максимальная величина, которой достигает S'''_x в стрежне потока, при $x=0$, равна

$$S'''_{\max} = -\frac{2A_l S_0 \alpha}{c}. \tag{Б}$$

Пусть максимальная величина S_0 результирующего потока в стрежне течения равна $S_0 = 10^7$ см²/сек., что при глубине $H = 2000$ м нижней границы бароклинного слоя соответствовало бы средней скорости течения $\bar{u}_0 = 50$ см/сек. Указанный порядок величин H, $\bar{u}_0$ и, следовательно, S_0 характерен, например, для «ядра» Гольфстрима. Допустим, далее, что величина результирующего потока становится исчезающе малой на расстоянии 50 км от его оси ($x=0$), т. е. что ширина потока $l = 100$ км. Указанная величина характеризует порядок поперечника Гольфстрима. В соответствии с принятым порядком l и S_0 порядок параметра α в формуле (Б) должен оцениваться величиной $\alpha = 10^{-12}$ CGS. В качестве порядка величин коэффициента бокового турбулентного трения и параметра Кориолиса примем следующие значения: $A_l = 10^7$ CGS, $c = 10^{-4}$ CGS. Подставляя, наконец, принятые значения в формулу (Б), получим для поперечной составляющей величину

$$S'''_{\max} = -2 \cdot 10^6 \text{ см}^2/\text{сек}.$$

Как видим, найденная величина $S'''_{x=0}$ довольно значительна и составляет 20% максимальной величины S_0 результирующего потока. Следовательно, при средней скорости течения $\overline{u}_0 = 50$ см/сек., соответствующей указанным ранее значениям H и S_0, средняя величина поперечной составляющей скорости, обусловленной эффектом бокового трения, равна $\overline{u'''_0} = 10$ см/сек.

Если ветер отсутствует, то наличие поперечных составляющих, возникающих, как показано, в прямолинейном струйном потоке вследствие эффекта бокового трения в поле силы Кориолиса, должно привести к такому перераспределению масс, которое компенсировало бы поперечный перенос, обусловленный боковым трением. При этом вследствие неограниченности моря рассматриваемое движение не может быть стационарным, так как с течением времени границы струйного потока будут расширяться и струя будет постепенно «расплываться» по всему пространству неограниченного океана. Движение подобного типа было изучено Россби в его упоминавшейся выше работе. При этом следует подчеркнуть, что Россби рассматривал движение струйного потока не только в безграничном, но и однородном океане.

В отличие от исследования Россби, полученные нами уравнения (34) и (39) позволяют очень простым путем рассмотреть несколько случаев установившегося движения в ограниченной области бароклинного моря с учетом не только эффекта бокового трения, но и эффекта ветра. Рассмотрим сначала установившееся движение, возбуждаемое ветром, дующим вдоль бесконечно длинного канала (практически — узкого и длинного пролива), ограниченного с боков прямолинейными берегами. Скорость ветра будем считать меняющейся в поперечном направлении канала (ось X). Положительную ось Y мы направим по ветру, вдоль канала, а начало координат поместим на левом (смотря по ветру) берегу канала. В силу неограниченности канала и неизменной величины скорости ветра в продольном его направлении результирующий поток, возбуждаемый ветром, будет направлен по ветру, т. е. в направлении канала, и, следовательно, поперечная составляющая в таком потоке должна быть равна нулю. Так как в бесконечно длинном канале нет оснований ожидать нагона в направлении ветра, то поле масс не будет меняться в направлении ветра, а потому составляющая S''

результирующего потока, обусловленная полем масс, также будет направлена по ветру, меняясь лишь в поперечном его направлении. На этих основаниях из уравнения (39) немедленно вытекает вывод, что в рассматриваемом случае поперечная составляющая потока, обусловленная эффектом бокового трения, должна уравновешиваться чисто дрейфовой составляющей S' результирующего потока, и уравнение (39) в координатной форме запишется в виде следующих двух уравнений:

$$\frac{A_l}{c} \operatorname{grad}_x \operatorname{rot}_z \mathbf{S} = -S'_x,$$

$$S_y = S''_y.$$

Эти уравнения, пользуясь указанными выше формулами [(28), (30)], можно записать в форме:

$$\frac{d^2 S_y(x)}{dx^2} = -\frac{T_y(x)}{A_l}, \tag{41}$$

$$S_y(x) = -\frac{g}{c}\frac{dQ}{dx}. \tag{42}$$

Интегрируя (41) дважды по x, мы получим

$$S_y(x) = -\frac{1}{A_l} F(x) + C_1 x + C_2, \tag{43}$$

где C_1 и C_2 — константы интегрирования, а

$$F(x) = \int_0^x dx \int_0^x T_y(x)\, dx. \tag{44}$$

Константы C_1 и C_2 определяются из условий на стенках канала, где результирующий поток должен быть равен нулю:

$$S_y(0) = 0; \quad S_y(l) = 0, \tag{45}$$

где l — поперечный размер канала.

Согласуя уравнение (43) с условиями (45), мы окончательно получим:

$$S_y(x) = -\frac{1}{A_l} F(x) + \frac{x}{A_l l} F(l). \tag{46}$$

Уравнение (46) определяет величину потока S_y в зависимости от поля ветра в любой точке поперечного сечения канала. Подставляя (46) в уравнение (42) и интегрируя по x, будем иметь

$$Q = \frac{c}{gA_l}\left[\int_0^x F(x)\, dx - \frac{F(l)}{2l} x^2\right] + Q_0. \tag{47}$$

Уравнение (47) связывает распределение масс на любой вертикали в поперечном сечении канала с полем ветра. В уравнении (47) через Q_0 обозначена постоянная величина, соответствующая значению Q у левого «берега» канала (при $x=0$). Таким образом, зная распределение масс на одной вертикали какого-либо поперечного сечения канала, можно по формуле (47) вычислить поле масс во всем поперечном сечении канала в зависимости от поля ветра. На эту возможность мы обратили внимание ранее на примере циркуляции, возбуждаемой ветром в круглом бароклинном море [2].

В качестве простого конкретного примера расчета полей S и Q по общим формулам (46) и (47) рассмотрим случай линейного изменения тангенциального давления ветра, а именно, допустим, что

$$T_y = \frac{T}{l} x. \tag{48}$$

Тогда, согласно (44),

$$F(x) = \frac{T}{6l} x^3,$$

и мы на основании (46) и (47) легко получим следующие выражения:

$$S_y = \frac{Tx}{A_l 6l} (l^2 - x^2), \tag{49}$$

$$Q = -\frac{cTx^2}{24glA_l} (2l^2 - x^2) + Q_0. \tag{50}$$

Согласно (49), результирующий поток равен нулю у берегов канала и достигает максимального значения при $x = \frac{l}{\sqrt{3}}$. Максимальная величина S равна

$$S_{\max} = \frac{Tl^2}{9A_l \sqrt{3}}. \tag{51}$$

Общая же величина расхода во всем поперечном сечении канала равна

$$S_m = \int_0^l S\,dx = \frac{Tl^3}{24A_l}. \tag{52}$$

Полученные результаты любопытно сравнить со значениями S и Q, полученными ранее [2] для случая стационарной циркуляции, возбуждаемой в круглом бароклинном море круговой системой ветра, симметричной центру моря.

Указанная задача в известном смысле аналогична только что рассматриваемому примеру установившегося движения в бесконечно длинном прямолинейном канале. Аналогия заключается в том, что и в случае стационарной циркуляции, симметричной центру круглого моря, результирующий поток не будет встречать на своем пути препятствий, а потому величина потока и поле масс будут изменяться лишь в радиальном, поперечном общему движению, направлении. Так как полный поток должен быть равен нулю как в центре круглого моря ($r=0$), так и у его берега ($r=R$), то движение в области $r=0$, $r=R$ можно рассматривать как циркуляцию в кольцевом канале и применить для ее расчета уравнение (39), преобразовав его к полярной системе координат r, θ. Совершенно аналогично случаю движения в бесконечно длинном, прямолинейном канале поперечная компонента полного потока S, обусловленная боковым трением в поле силы Кориолиса, должна балансироваться составляющей чисто дрейфового потока и в случае установившегося потока в круглом море или кольцевом канале. Полагая вместо (48)

$$T_\theta = \frac{Tr}{R},$$

мы вместо уравнений (41) и (42) должны в полярной системе координат написать:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{S_\theta}{r} + \frac{\partial S_\theta}{\partial r}\right) = -\frac{Tr}{RA_l},$$

$$S_\theta(r) = -\frac{g}{c}\frac{\partial Q}{\partial r}.$$

Интегрируя сначала первое уравнение и подчиняя его решение условиям, аналогичным (45), мы более простым путем получим найденный нами ранее результат, а именно:

$$S_\theta = \frac{Tr}{8A_lR}(R^2 - r^2). \tag{53}$$

Подставляя (53) во второе из написанных уравнений и интегрируя, получим также найденный ранее результат:

$$Q(r) = -\frac{cTr^2}{32gA_lR}(2R^2 - r^2) + Q_0. \tag{54}$$

Сравнивая (54) и (53) с (50) и (49), мы видим, что изменение S и Q в случае циркуляции в круглом море или кольцевом канале описывается выражениями, аналогичными формулам, полученным для случая движения в прямолинейном бесконечно длинном канале. Различие заключается лишь в постоянных коэффициентах в формулах (49), (50), (53) и (54), которые влияют не на характер изменения S и Q, а на их абсолютные значения. Именно, величины S и Q в случае круглого моря (или кольцевого канала) оказываются на 30% меньше величин S и Q в случае движения в бесконечно длинном канале. Это уменьшение величин S и Q является результатом кривизны линий тока при циркуляции в круглом море. Если величину результирующего потока S представить в виде $S=\bar{u}H$, где H — глубина нижней границы бароклинного слоя, а $\bar{u}$ — средняя скорость течения в пределах бароклинного слоя, то из полученных здесь формул для S вытекает вывод, что толщина бароклинного слоя тем меньше, чем больше $\bar{u}$ и A_l. Этот вывод не только хорошо согласуется с наблюдениями, но и служит подтверждением правильности объяснения причин быстрого затухания скоростей с увеличением расстояния от поверхности реального бароклинного моря, которое было предложено нами в одной из предыдущих работ [2]. В самом деле, если вместо обычного порядка коэффициента бокового трения $A_l=10^7$—10^8 CGS принять его значение равным 10^2 CGS, что соответствовало бы порядку коэффициента турбулентного трения A_z, то, как легко убедиться, например, на основании (52), мы получили бы при обычном порядке величин $\bar{u}=10$ см/сек., $T=1$ дин/см², $l=10^7$ см (поперечник морского течения) для толщины бароклинного слоя H громадную величину, во много раз превышающую наибольшие океанские глубины, а именно $H=4\cdot10^6$ см (40 км!).

Таким образом, анизотропность турбулентного обмена в море, возникающая вследствие вертикального переслоения его водных масс и характеризуемая тем, что интенсивность горизонтального обмена во много раз превышает интенсивность обмена по вертикали, является главной причиной быстрого затухания скоростей течения с увеличением глубины от поверхности моря, т. е. причиной сравнительно малой толщины бароклинного слоя.

В случае постоянной величины $T_y=\text{const}$ в пределах поперечного сечения рассматриваемого канала мы на основании (46) и (47) получим:

$$S_y=\frac{T_y}{2A_l}x(l-x), \tag{55}$$

$$Q=-\frac{cT_y}{12gA_l}x^2(3l-2x)+Q_0. \tag{56}$$

Покажем теперь, каким путем можно вычислить изменение плотности ρ на различных глубинах поперечного сечения канала, имея в виду, что искомое распределение плотности в стационарных условиях является результатом приспособления первоначального поля масс к системе течений, вызванной ветром. Мы будем исходить из естественного предположения, что на нижней границе бароклинного слоя изобары и изопикны горизонтальны. Следовательно, при $z=0$ (нижняя граница бароклинного слоя) плотность должна быть постоянной. Это постоянное значение плотности мы обозначим через $\rho(x, 0)=\rho(0)=\mathrm{const}$. Полагая известным из наблюдений вертикальное распределение плотности у левого берега канала ($x=0$), которое мы обозначим через $\rho_0(z)$, представим искомое значение плотности $\rho(x, z)$ в любой точке поперечного сечения канала в следующей общей форме:

$$\rho(x, z)=\rho(0)-\delta(z) f(x), \tag{57}$$

причем $\delta(z)=\rho(0)-\rho_0(z)$, где, как уже упоминалось, $\rho_0(z)$ — совершенно произвольное, заданное из наблюдений, вертикальное распределение плотности у левого берега канала. Следует иметь в виду, что $\rho_0(0)=\rho(0)=\mathrm{const}$. В свою очередь через $f(x)$ обозначена некоторая функция от x, удовлетворяющая условию $f(0)=1$, так как при $x=0$ должно выполняться тождество $\rho(0, z)\equiv\rho_0(z)$. Пока еще не определенная функция $f(x)$, которую мы будем называть «функцией влияния», характеризует собой те изменения плотности, которые происходят вследствие перестройки поля масс, приспосабливающегося к системе потоков, порождаемых ветром. Для того чтобы связать $f(x)$ с тангенциальным давлением ветра, коэффициентом бокового трения и параметром Кориолиса, подставим (57) в выражение (7), связывающее распределение плотности с величиной Q. Мы получим

$$Q=Q_0 f(x)-\rho(0)\frac{H^2}{2} f(x)+\rho(0)\frac{H^2}{2}. \tag{58}$$

Величину H всегда можно представить в виде $H=H_0+\xi(x)$, где H_0 — толщина бароклинного слоя у левого берега канала, а $\xi(x)$ — изменение высот точек поверхности воды в поперечном сечении канала по отношению к горизонтальной нижней границе бароклинного слоя. Заметим при этом, что $H_0\gg\xi(x)$. Дифференцируя (58) по x и отбрасывая в итоге малую величину ξ по сравнению с H_0, будем иметь

$$\frac{dQ}{dx}\cong Q_0\frac{df(x)}{dx}-\rho(0)\frac{H_0^2}{2}\frac{df(x)}{dx}-$$
$$-\rho(0) f(x) H_0\frac{d\xi}{dx}+\rho(0) H_0\frac{d\xi}{dx}, \tag{59}$$

где $\frac{d\xi}{dx}$ — поперечный уклон поверхности воды в канале.

Займемся теперь оценкой порядка величины членов, фигурирующих в правой части (59). Прежде всего заметим, что на основании (7) величину Q_0 можно приближенно оценить выражением

$$Q_0 \cong \bar{\rho}_0 \frac{H_0^2}{2},$$

где $\bar{\rho}_0$ — среднее значение плотности у левого берега в пределах бароклинного слоя $(0-H)$. С другой стороны, на основании (57):

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{1}{\rho(0)-\rho_0(z)} \frac{d\rho(x, z)}{dx}.$$

Пользуясь указанными соотношениями, можно первые два члена в правой части (59) записать для оценки их порядка в следующей форме:

$$Q_0 \frac{df(x)}{dx} - \rho(0) \frac{H_0^2}{2} \frac{df(x)}{dx} \cong \frac{\rho(0)-\bar{\rho}_0}{\rho(0)-\rho_0(z)} \frac{H_0^2}{2} \frac{d\rho(x, z)}{dx}. \tag{60}$$

Последние два члена в (59) можно на основании (57) оценить следующим образом:

$$\rho(0) H_0 \frac{d\xi}{dx} [1-f(x)] = \rho(0) H_0 \frac{d\xi}{dx} \frac{\rho(x, z)-\rho_0(z)}{\rho(0)-\rho_0(z)}. \tag{61}$$

Заметим, что порядок горизонтального градиента плотности при толщине бароклинного слоя $H_0 = 10^5$ см заключен в пределах

$$O\left\{\frac{d\rho(x, z)}{dx}\right\} = 10^{-10} - 10^{-9} \text{ CGS}.$$

В свою очередь порядок поперечного уклона поверхности при той же толщине бароклинного слоя заключен в пределах

$$O\left\{\frac{d\xi}{dx}\right\} = 10^{-7} - 10^{-6} \text{ CGS},$$

причем меньшие значения горизонтального градиента плотности сочетаются с меньшими значениями поперечных уклонов поверхности. Следовательно,

$$O\left\{\frac{H_0^2}{2} \frac{d\rho(x, z)}{dx}\right\} = 10^0 - 10^1 \text{ CGS};$$

$$O\left\{H_0 \frac{d\xi}{dx}\right\} = 10^{-2} - 10^{-1} \text{ CGS}.$$

Таким образом, если не принимать пока во внимание порядок дополнительных множителей в (60) и (61), то порядок первых двух членов в (59) в сто раз более последних двух. Легко показать, что неучтенные нами множители, фигурирующие в (60) и (61) и зависящие от отношения разностей плотностей, только усиливают различие порядка упомянутых членов.

В самом деле, так как $\rho(0)-\bar{\rho}_0=\text{const}$, то множитель в (60), а именно:

$$\frac{\rho(0)-\bar{\rho}_0}{\rho(0)-\rho_0(z)},$$

может меняться в пределах от очень большой величины, когда $\rho(0)-\rho_0(z)$ мало́, до некоторого минимального значения, когда $\rho(0)-\rho_0(z)>\rho(0)-\bar{\rho}_0$. Это минимальное значение можно приближенно оценить, если положить

$$\bar{\rho}_0 \cong \frac{\rho(0)+\rho_0(H_0)}{2}.$$

Тогда минимальное значение упомянутого множителя, которого он будет достигать, когда $\rho_0(z)=\rho_0(H_0)$, будет, очевидно, равно $^1/_2$. Что же касается множителя, фигурирующего в (61),

$$\rho(0)\frac{\rho(x, z)-\rho_0(z)}{\rho(0)-\rho_0(z)},$$

то величина его обычно значительно меньше $^1/_2$. Заметим, что порядок $\rho(0)$ с большой степенью точности оценивается единицей. В то же время числитель указанной дроби представляет собой горизонтальную разность плотностей, которая намного (раз в десять) меньше вертикальной разности плотностей, стоящей в знаменателе той же дроби.

Таким образом, можно считать доказанным, что порядок первых двух членов в правой части (59) не менее чем в сто раз превышает порядок последних двух членов в том же выражении, а потому вместо (59) можно с большой степенью точности (не меньшей 0,01) писать

$$\frac{dQ}{dx}=-\Delta\frac{df(x)}{dx}, \tag{62}$$

где

$$\Delta=\left[\rho(0)\frac{H_0^2}{2}-Q_0\right]. \tag{63}$$

Подставляя (62) в правую часть уравнения (42), интегрируя его по x и принимая во внимание (46), мы с учетом условия $f(0)=1$ получим

$$f(x)=\frac{c}{gA_l\Delta}\left[-\int_0^x F(x)\,dx+\frac{F(l)}{2l}x^2\right]+1. \tag{64}$$

Подставляя выражение (64) для «функции влияния» в (57), мы найдем значение плотности в любой точке поперечного сечения канала. Зная же распределение плотности, можно определить величину скорости течения, считая его, в приближении, геострофическим. Насколько такое приближение окажется удовлетворительным, мы выясним впоследствии.

Уравнение геострофического течения в нашем случае имеет вид

$$c\rho v_{\Gamma}=\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{65}$$

где v_{Γ} — скорость геострофического течения в направлении оси канала, определяемая балансом поперечного градиента давления и силы Кориолиса.

Дифференцируя (65) по z и принимая во внимание уравнение статики (2), мы получим

$$\rho\frac{\partial v_{\Gamma}}{\partial z}+v_{\Gamma}\frac{\partial\rho}{\partial z}=-\frac{g}{c}\frac{\partial\rho}{\partial x}. \tag{66}$$

Так как вертикальные градиенты скорости v_{Γ} обычно значительно больше вертикальных градиентов плотности, то в уравнении (66) пренебрегают вторым членом в его левой части. В таком случае

$$\frac{\partial v_{\Gamma}}{\partial z}=-\frac{g}{c\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}.$$

Интегрируя последнее уравнение в пределах от $z=0$, где $v_{\Gamma}(0, x)=0$, до z, мы получим

$$v_{\Gamma}(z, x)=-\frac{g}{c}\int_0^z\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho(x, z)}{\partial x}dz. \tag{67}$$

Таков вид приближенной формулы для определения скоростей геострофического течения по заданному распределению плотности. Можно, однако, легко указать точную формулу для вычисления v_{Γ}, не отбрасывая в левой части (66) члена $v_{\Gamma}\frac{\partial\rho}{\partial z}$. Для этой цели уравнение (66) удобнее записать в форме

$$\frac{\partial v_{\Gamma}}{\partial z}+\frac{\partial}{\partial z}(\ln\rho)\,v_{\Gamma}=-\frac{g}{c\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}. \tag{66'}$$

Решение (66′) имеет вид

$$v_{\Gamma} = -\frac{g}{c} e^{-\int\limits_0^z \frac{\partial}{\partial z}(\ln\rho)\,dz} \int\limits_0^z \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} e^{\int\limits_0^z \frac{\partial}{\partial z}(\ln\rho)\,dz} dz$$

или

$$v_{\Gamma} = -\frac{g}{c} e^{\ln\frac{\rho_0}{\rho}} \int\limits_0^z \frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} e^{\ln\frac{\rho}{\rho_0}} dz,$$

и мы в результате получим совершенно точное выражение для v_{Γ}

$$v_{\Gamma} = -\frac{g}{c\rho}\int\limits_0^z \frac{\partial\rho}{\partial x} dz. \tag{68}$$

Как видим, точная формула (68) отличается от приближенной формулы (67) лишь величиной ρ, вынесенной за знак интеграла.

Так как величины ρ даже в случае больших вертикальных градиентов плотности отличаются лишь в третьем знаке после запятой, то и в этих случаях можно, пользуясь формулой (68), полагать в ней с достаточным приближением $\rho \cong 1$ CGS.

Применяя формулу (68) для нашей цели, продифференцируем по x выражение (57):

$$\frac{\partial\rho(x, z)}{\partial x} = -\delta(z)\frac{df(x)}{dx}.$$

Пользуясь же (62), получим

$$\frac{\partial\rho(x, z)}{\partial x} = \frac{\delta(z)}{\Delta}\frac{dQ}{dx}$$

или на основании (42)

$$\frac{\partial\rho(x, z)}{\partial x} = -\frac{\bar{\rho}c}{g}\frac{\delta(z)}{\Delta}S_y(x), \tag{69}$$

где $S_y(x)$ — точное значение полного потока в любой точке поперечного сечения канала, определяемое формулой (46). Подставляя (69) в (68) и полагая $\rho \cong 1$ CGS, мы получим следующую формулу для вычисления скорости геострофического течения:

$$v_{\Gamma}(x, z) = \frac{S_y(x)}{\Delta}\int\limits_0^z \delta(z)\,dz =$$

$$= \frac{S_y(x)}{\Delta}\left[\rho(0)z - \int\limits_0^z \rho_0(z)\,dz\right]. \tag{70}$$

Здесь, естественно, возникает вопрос, насколько соответствуют значения скоростей, вычисляемые по формуле (68), истинным скоростям течения, ибо при выводе этой формулы мы пренебрегали эффектом трения. На этот вопрос можно было бы ответить, решая систему уравнений (1) для рассматриваемого случая движения в безграничном канале. При этом, однако, мы встретились бы с серьезным затруднением, ибо нам неизвестно фактическое изменение коэффициента турбулентного трения A_z, меняющегося по вертикали в значительных пределах; произвольный же выбор величины A_z свел бы нашу задачу до уровня слишком искусственного примера, заведомо далекого от реальной действительности. Указанные затруднения легко обойти, по-прежнему пользуясь интегральным методом, сравнивая точное значение результирующего потока согласно формуле (46) с величиной геострофического потока, определяемого формулой (70). Интегрируя (70) в пределах $z=0$, $z=H$, мы получим следующее значение геострофического потока S_Γ :

$$S_\Gamma(x) = \int\limits_0^H v_\Gamma(z,\ x)\,dz = \frac{S_y(x)}{\Delta}\left[\rho(0)\frac{H^2}{2} - Q_0\right],$$

где, как уже упоминалось, $S_y(x)$ — точное значение потока, определяемое формулой (46) и явно не зависящее от фактической толщины бароклинного слоя (важно лишь то, что этот слой существует!). Вспоминая (63), нетрудно заметить, что дробь

$$\frac{\rho(0)\dfrac{H^2}{2} - Q_0}{\Delta}$$

немного больше единицы. Следовательно, величина геострофического потока S_Γ в данном случае незначительно превышает точное значение результирующего потока $S_y(x)$ (различие не более 1%). Это небольшое превышение S_Γ по сравнению с $S_y(x)$ является, естественно, следствием того, что при вычислении скоростей геострофического течения мы пренебрегли эффектом трения. Так как указанная погрешность является интегральной, относящейся ко всему бароклинному слою, то очевидно, что погрешность при вычислении скоростей по формуле (70) должна быть очень небольшой. Легко сообразить, что максимальное значение этой малой ошибки приходится на приповерхностный слой, где, очевидно, не соблюдается равенство

$$\left(A_z\frac{\partial v_\Gamma}{\partial z}\right)_{z=H} = T_y,$$

т. е. напряжение трения в геострофическом течении у поверхности воды не может целиком балансировать тангенциального давления ветра, в противоположность условиям (9), относящимся к результирующему, а не геострофическому течению. К этому вопросу мы еще раз вернемся позднее, а сейчас, в виде примера, займемся вычислением распределения плотности и скоростей течения в поперечном сечении рассматриваемого канала для некоторого конкретного случая. Для вычисления функции влияния $f(x)$, определяющей изменение плотности в поперечном сечении канала, необходимо задать поперечный размер канала, величину тангенциального давления ветра, коэффициент бокового турбулентного трения и распределение по вертикали плотности у левого берега канала. Примем поперечник канала l равным 100 км (10^7 см). Величину тангенциального давления ветра T_y мы для простоты будем считать постоянной и равной 3,2 дин/см², что соответствует скорости ветра 10 м/сек. Заметим, что читателю, проследившему за нашими выкладками, легко будет применить выведенные здесь общие соотношения к любому, заданному из наблюдений изменению T_y. Переходя к выбору коэффициента A_l, подчеркнем, что его величина существенно зависит от масштабов рассматриваемой циркуляции. К сожалению, в настоящее время мы не располагаем достаточным количеством определений A_l в различных условиях. Однако имеющиеся данные позволяют все же указать вероятный порядок A_l, соответствующий принятым нами масштабам циркуляции (т. е. поперечнику канала), а именно: $A_l = 10^8$ CGS. Полагая далее движение осуществляющимся в умеренных широтах (северное полушарие), мы примем параметр Кориолиса равным $c = 10^{-4}$ CGS.

В качестве заданного из наблюдений вертикального распределения плотности у левого берега канала мы выбрали совершенно произвольно вертикальное распределение плотности в одной из точек Тихого океана (станция № 31 экспедиции Карнеджи. См. [13]). Это вертикальное распределение плотности в условных единицах $\sigma_t = (\rho - 1) \cdot 10^4$ указано во втором столбце нашей табл. 1. В первом столбце той же таблицы указаны соответствующие условным плотностям глубины в метрах. Глубина 1000 м принята за нижнюю границу бароклинного слоя, ниже которой плотность в горизонтальном направлении не меняется.

Таблица 1 представляет собой первый этап вычислений — расчета величины Q_0, необходимой для определения значения Δ согласно формуле (63). Так как в наших формулах фигурируют значения плотности ρ вместо обычно употребляемых условных плотностей σ_t, помещенных и в табл. 1, то следует сначала выразить Δ посредством σ_t. Так как

$$\rho = \sigma_t \cdot 10^{-4} + 1,$$

Таблица 1

Глубина, м	σ_t	$\overline{\sigma_t}$	$\overline{\sigma_t}\cdot\Delta z$	$J_0\cdot10^{-4}$	$\overline{J_0}\cdot10^{-4}$	$10^{-4}\,\overline{J_0}\cdot\Delta z$	$Q_0^\sigma\cdot10^{-4}$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	218	218	1 090	26,705	26,65	133,25	13 649,1
5	218	219	4 380	26,596	26,38	527,6	13 505,85
25	219	223	5 575	26,158	25,88	647,0	12 978,25
50	226	233	5 825	25,600	25,31	632,75	12 331,25
75	239	245	6 125	25,018	24,72	618,0	11 698,5
100	250	255	12 750	24,405	23,77	1188,50	11 080,5
150	259	263	13 150	23,130	22,48	1124,0	9 892
200	266	268	13 400	21,815	21,15	1057,50	8 768
250	269	269	13 450	20,475	19,81	990,50	7 710,5
300	269	270	27 000	19,130	17,78	1778	6 720
400	271	272	27 200	16,430	15,07	1507	4 942
500	272	273	54 600	13,710	10,98	2196	3 435
700	273	275	82 500	8,250	4,13	1239	1 239
1000	276	—		0	—	—	0

то, подставляя написанное выражение для ρ в (63) и (7), мы получим

$$\Delta = \left[\sigma_t(0)\cdot 10^{-4}\frac{H_0^2}{2} - Q_0^\sigma\right],$$

где

$$Q_0^\sigma = 10^{-4}\int\limits_0^{H_0} dz \int\limits_0^z \sigma_{0,\,t}(z)\,dz.$$

Величина Q_0^σ в табл. 1 вычисляется по методу трапеций. Третий столбец таблицы представляет собой полусумму смежных значений σ_t, обозначаемую $\overline{\sigma_t}$. В четвертом столбце данные предыдущего столбца умножаются на соответствующие интервалы глубин (в метрах). Пятый столбец дает значения интеграла $J\cdot10^{-4}$:

$$J_0\cdot 10^{-4} = \int\limits_0^z \sigma_t(z)\,dz,$$

получающиеся путем последовательного суммирования цифр четвертого столбца в направлении снизу вверх. С величиной J_0 проделываются в следующих столбцах те же операции, что и с величинами σ_t, в результате которых получается величина $Q_0^\sigma\cdot10^{-4}$ в последнем столбце таблицы:

$$Q_0^\sigma\cdot 10^{-4} = 13\,649.$$

В свою очередь для величины $\sigma_t(0)\cdot 10^{-4}\frac{H_0^2}{2}$ получим значение:

$$\sigma_t(0)\cdot 10^{-4}\frac{H_0^2}{2}=276\cdot 10^{-4}\cdot 0{,}5\cdot 10^6=13\,800.$$

Следовательно,

$$\Delta=13\,800-13\,649=151.$$

Так как вычисления удобнее вести в системе CGS, то величину Δ необходимо умножить на 10^4, ибо в Δ входят квадраты глубин, выражавшиеся ранее в метрах. Итак,

$$\Delta=151\cdot 10^4\ \text{CGS}.$$

Значения $f(x)$ в данном случае ($T_y=\text{const}$) определяются формулой

$$f(x)=\frac{\bar{\rho}cT_y l^3}{24gA_l\Delta}\left(\frac{x}{l}\right)^2\left(6-4\frac{x}{l}\right)+1. \tag{71}$$

Вычисляя постоянный множитель в этой формуле в соответствии со значениями c, T, l, g, A_l и Δ, получим

$$\frac{\bar{\rho}cT_y l^3}{24gA_l\Delta}=\frac{1\cdot 10^{-4}\cdot 3{,}2\cdot 10^{21}}{24\cdot 10^3\cdot 10^8\cdot 151\cdot 10^4}=883\cdot 10^{-4}.$$

Вычисленные по формуле (71) значения функции влияния сведены в табл. 2.

Вычисляя затем по данным второго столбца табл. 1 разность $\delta_t(z)=\sigma_t(0)-\sigma_{0,t}(z)$ и умножая ее на соответствующие расстояниям x/l значения $f(x)$, мы, согласно (57), получим значения σ_t, указанные в табл. 3.

В табл. 3 опущены значения σ_t при $x/l=0$, указанные в табл. 1. Кроме того, в табл. 3 не указаны значения σ_t, соответствующие поверхности воды, ибо из табл. 1 видно, что заданные у левого берега σ_t одинаковы для глубин 0 и 5 м, а поэтому, согласно (57), изменение σ_t на поверхности воды будет одинаковым с изменением σ_t на глубине 5 м, указанным в табл. 3.

На рис. 8 изображено вертикальное распределение σ_t, заданное у левого берега (сплошная кривая) и вычисленное согласно нашей теории $\sigma_t(l)$ (пунктирная кривая, построенная по данным табл. 3).

Как видим, перестройка поля масс в поперечном сечении канала осуществляется таким образом, что у правого берега плотность воды в поверхностном слое значительно меньше плотности у левого берега. Кроме того, как видно из рис. 8, вертикальный

Таблица 2

x/l	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$f(x/l)$	1,00	1,01	1,02	1,04	1,07	1,09	1,11	1,14	1,16	1,17	1,18

Таблица 3

z м	x/l									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
5	217,4	216,8	215,7	213,9	212,8	211,8	209,9	208,7	208,1	207,6
25	218,4	217,9	216,7	215,0	213,9	212,7	211,0	209,9	209,3	208,7
50	225,5	225,0	224,0	222,5	221,5	220,5	219,0	218,0	217,5	217,0
75	238,6	238,0	237,0	236,4	235,7	235,0	234,0	233,0	233,0	232,0
100	249,7	249,0	249,0	248,0	248,0	247,0	246,0	246,0	246,0	245,0
150	258,8	258,7	258,3	257,8	257,5	257,1	256,6	256,3	256,1	255,9
200	265,9	265,8	265,6	265,3	265,1	264,9	264,6	264,4	264,3	264,2
250	268,9	268,9	268,7	268,5	268,4	268,2	268,0	267,9	267,8	267,7
300	268,9	268,9	268,7	268,5	268,4	268,2	268,0	267,9	267,8	267,7
400	270,9	270,9	270,8	270,8	270,5	270,4	270,3	270,2	270,1	270,1
500	272,0	271,9	271,8	271,7	271,6	271,6	271,4	271,4	271,3	271,3
700	273,0	272,9	272,9	272,8	272,7	272,7	272,6	272,5	272,5	272,5
1000	276,0	276,0	276,0	276,0	276,0	276,0	276,0	276,0	276,0	276,0

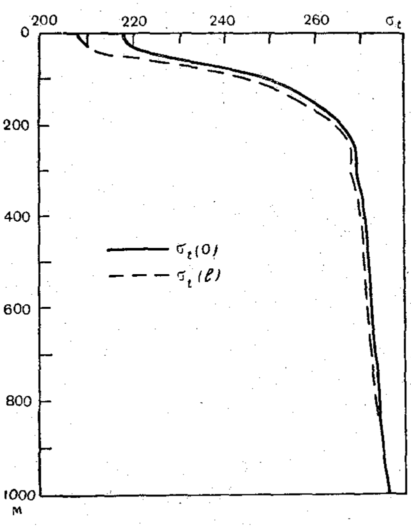

Рис. 8.

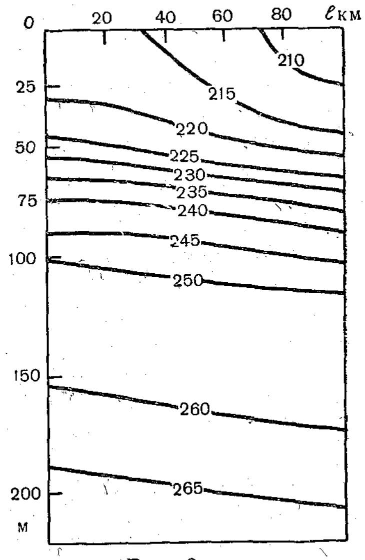

Рис. 9.

градиент плотности между глубинами 50—100 м у правого берега **больше** соответственного градиента у левого берега. Еще более наглядную картину распределения плотности в поперечном сечении канала дает рис. 9, на котором изображены изопикны, построенные согласно табл. 3. На этом рисунке легкая поверхностная вода клинообразно прижата к правому берегу канала (ветер направлен на наблюдателя, смотрящего на рисунок).

Таким образом, развиваемая нами теория дает возможность предсказать стационарное распределение плотности во всем поперечном сечении канала, являющееся результатом приспособления поля масс к системе потоков, обусловленных ветром. Более того, можно попытаться предсказать и распределение температуры ϑ и солености s, соответствующее распределению плотностей на рис. 9 (данные табл. 3). В самом деле, так как вертикальное распределение плотности у левого берега канала предполагается известным из наблюдений, то это равносильно тому, что у левого берега канала известно вертикальное распределение температуры и солености [на основании этих данных и вычисляется $\rho_0(z)$ или $\sigma_{0,t}(z)$]. Однако для того чтобы по вычисленному полю плотности, являющейся функцией температуры и солености, однозначно восстановить распределение ϑ и s, соответствующее этому полю, необходимо сделать одно допущение. Допущение это должно, очевидно, состоять в том, что зависимость $s=f(\vartheta)$, известная из наблюдений для вертикали у левого берега канала, должна оставаться **неизменной** на всех вертикалях его поперечного сечения. Следует заметить, что требование постоянства ϑ, s-кривой отнюдь не должно рассматриваться в качестве какого-то противоестественного допущения, ибо, как показывают наблюдения, постоянство ϑ, s-кривых сохраняется порой на очень больших пространствах океана.

На рис. 10 (*а*, *б*) изображены части ϑ, s-кривой, связывающей распределение температуры и солености по вертикали у левого берега нашего канала, на основании которого были вычислены и приняты за данные значения $\sigma_{0,t}$, указанные во втором столбце табл. 1. В качестве фона на рис. 10 нанесены линии равных значений σ_t, соответствующих диапазону изменения ϑ и s. Вооружившись ϑ, s-кривой, указанной на рис. 10, и помня сделанное допущение, не составляет труда по данным табл. 3 предсказать изменение солености (температуры) во всем поперечном сечении канала, пользуясь для этой цели графическим приемом. Так, например, желая определить температуру и соленость, соответствующие предвычисленной плотности на глубине 100 м у правого берега (см. табл. 3), следует найти точку пересечения изопикны $\sigma_t=245$ с ϑ, s-кривой на рис. 10.

Снимая на шкале ϑ и s координаты упомянутой точки, мы получим значения: $\vartheta=24{,}6°$; $s=36{,}34‰$. Аналогичным путем можно быстро найти значения ϑ и s, соответствующие данным табл. 3. Проделывая эти несложные операции, читатель, однако, заметит, что найти значения ϑ и s по указанной на рис. 10 ϑ, s-кривой и данным табл. 3 представляется возможным не во всех случаях. В самом деле, пытаясь, например, восстановить ϑ и s по вычисленному нами вертикальному распределению σ_t у правого

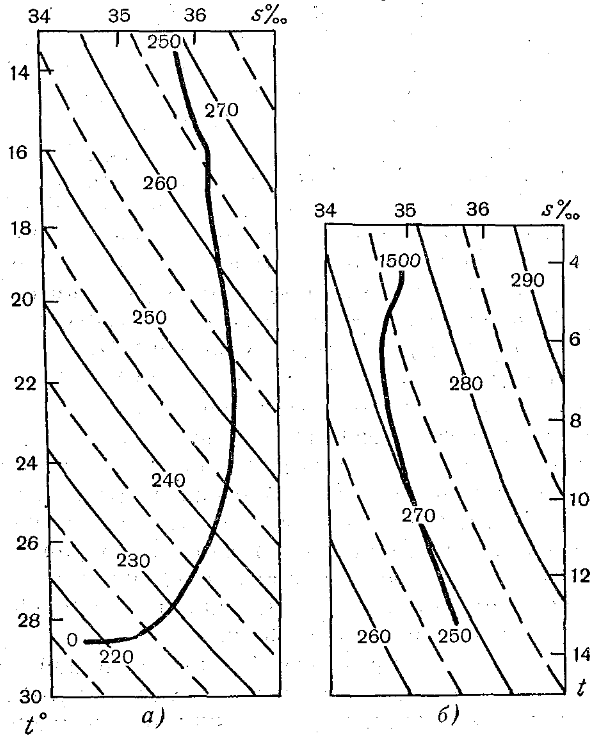

Рис. 10.

берега канала ($x/l=1$, табл. 3), мы убеждаемся в том, что плотности верхнего 50-метрового слоя на этой вертикали выходят за пределы диапазона плотностей, соответствующего ϑ, s-кривой на рис. 10 *а*. Как видно из сопоставления табл. 3 и ϑ, s-кривой рис. 10 *а*, толщина поверхностного слоя, в котором плотности меньше минимального значения плотности ($\sigma_t \cong 217$), соответствующего концевой точке ϑ, s-кривой, постепенно уменьшается от правого к левому берегу канала. Так, на расстоянии $x/l=0{,}2$ толщина поверхностного слоя, в котором σ_t выходят за пределы ϑ, s-кривой, составляет около 15 м.

Здесь естественно возникает вопрос, откуда же появились столь малые значения плотности, которыми характеризуется поверхностный слой, утолщающийся к правому берегу канала, что исключает возможность определения температуры и солености для этого слоя по ϑ, s-кривой для левого берега канала. Ведь указанное обстоятельство находится в противоречии с нашим допущением неизменности ϑ, s-кривой, которое, очевидно, нарушилось в поверхностном слое. Для того чтобы разъяснить эти законные недоумения, следует вспомнить, что с помощью нашей теории решается лишь вопрос о том, каково должно быть стационарное поле плотностей в результате его приспособления к системе циркуляции, возбуждаемой установившимся ветром в поле кориолисовой силы. При этом исключается из рассмотрения начальное, до действия ветра, распределение плотности, ибо нами не исследуется сам процесс адаптации поля масс, носящий явно нестационарный характер. Мы в состоянии лишь предсказать конечный результат такого процесса, когда поле масс становится стационарным, окончательно приспособившись к установившейся системе течений. В самом деле, отмечавшаяся выше легкая вода, вовсе не наблюдаемая в итоге процесса приспособления масс на вертикали, у левого берега, должна была, очевидно, занимать весь поверхностный слой до действия ветра.

В процессе возникновения течений, вызванных ветром, более легкая вода должна была относиться вправо, так как поперечный перенос в чисто дрейфовом потоке еще не уравновесился поперечным переносом благодаря эффекту бокового трения. Вследствие этого у левого берега канала должна была подниматься более тяжелая глубинная вода, частью перемешивающаяся с легкой водой поверхностного слоя. Таким образом, в итоге процесса адаптации масс к системе установившихся потоков у левого берега канала в поверхностном слое окажется вода, отличающаяся в смысле зависимости $s=f(\vartheta)$ от воды поверхностного слоя у правого берега канала. Итак, постоянство зависимости $s=f(\vartheta)$ принципиально не может сохраняться в поверхностном слое, охваченном в процессе развития течений поперечной циркуляцией. Этот вывод подтверждается наблюдениями, согласно которым подобие кривых сохраняется лишь ниже слоя ветрового перемешивания [1].

---

[1] Зная начальное, до действия ветра, распределение ϑ, s и σ_t во всем поперечнике канала и вертикальное распределение тех же элементов лишь на одной вертикали у левого берега во время действия стационарного ветра, когда режим уже установился, можно, на основе нашей теории, исследовать глубину ветрового перемешивания.

На рис. 11 изображены кривые вертикального распределения солености. Одна из них, а именно сплошная кривая, отвечает «известному из наблюдений» распределению солености у левого берега. Пунктирная кривая являет собой предсказываемое распределение солености у правого берега канала. В соответствии со сделанными замечаниями наши предсказания ограничиваются слоем ниже глубины 50 м. Рисунок 12 дает картину предсказываемого распределения солености (изохалины) во всем поперечнике канала. Наконец, в табл. 4 сведены ϑ и s, заданные у левого берега канала и вычисленные для правого берега канала.

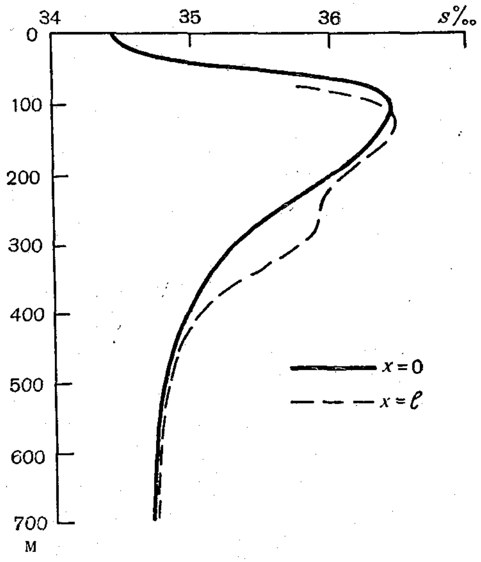

Рис. 11.

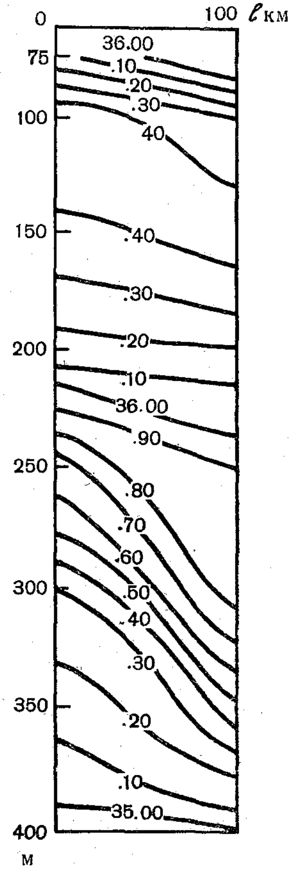

Рис. 12.

Перейдем теперь к вычислению скоростей течения, руководствуясь при этом формулой (70). Как видно из этой формулы, величина скорости течения получается путем умножения результирующего потока $S_y(x)$ на величину

$$M(z) = \frac{1}{\Delta}\left[\sigma_t(0)\cdot 10^{-4}z - 10^{-4}\int_0^z \sigma_{0,\,t}(z)\,dz\right].$$

Таблица 4

z м	Дано ($x=0$)		Вычислено ($x=l$)	
	$\vartheta°$	s ‰	$\vartheta°$	s ‰
75	25,9	36,12	27,3	35,75
100	23,5	36,49	24,6	36,34
150	19,9	36,38	21,2	36,45
200	16,1	36,12	16,9	36,15
250	13,25	35,66	14,6	35,90
300	11,5	35,30	14,6	35,90
400	9,3	34,98	9,8	35,00
500	8,0	34,84	8,2	34,85
700	6,1	34,68	6,7	34,70

Значения Δ и фигурирующего в $M(z)$ интеграла $10^{-4}\ J_0$ уже определены нами ранее (табл. 1); поэтому вычисление $M(z)$ не составит труда. Результаты этих вычислений сведены в табл. 5.

Таблица 5

Глубина, м	z м	$\sigma_t(0)\cdot 10^{-4}\, z$	$\sigma_t(0)\cdot 10^{-4}\times$ $\times z - 10^{-4}\, J_0$	$M(z)\cdot 10^6$
1	2	3	4	5
0	1000	27,60	0,90	59
5	995	27,46	0,86	57
25	975	26,91	0,75	50
50	950	26,22	0,62	41
75	925	25,53	0,51	34
100	900	24,86	0,45	30
150	850	23,46	0,33	22
200	800	22,08	0,26	17
250	750	20,70	0,22	15
300	700	19,32	0,19	13
400	600	16,56	0,13	9
500	500	13,80	0,09	6
700	300	8,28	0,03	2
1000	0	0	0	0

В первом столбце этой таблицы указаны глубины в метрах от поверхности моря, во втором — соответствующие высоты (также в метрах) над уровнем 1000 м. В третьем столбце указаны произведения постоянной величины $\sigma_t(0)=276$ на соответствующие высоты z. В четвертом столбце указаны разности между цифрами третьего столбца и цифрами пятого столбца табл. 1, представляющими значение интеграла J_0. Наконец, в последнем столбце табл. 5 указаны значения $M(z)$, получающиеся путем деления данных четвертого столбца на величину $\Delta = 151 \cdot 10^4$. При этом, так как вычисления ведутся в системе CGS, данные четвертого столбца умножены на 10^2.

На рис. 13 изображено изменение множителя $M(z)$ в зависимости от глубины (сплошная кривая). Нам остается определить значения полного потока $S_y(x)$, имеющие, помимо цели вычисления скоростей на отдельных глубинах, и самостоятельное значение.

В табл. 6 указаны значения $S_y(x)$, вычисленные нами согласно формуле (55) и принятым выше значениям T, l и A_l.

Таблица 6

x/l	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$S_y(x) \cdot 10^{-6}$ . . .	0,08	0,14	0,26	0,34	0,38	0,40

Вычисления $S_y(z)$ доведены до расстояния $x/l = 0{,}5$, где величина потока достигает максимума. Дальнейшие значения $S_y(x)$ повторяют значения в левой половине разреза. Как видим, максимальная величина потока в центре канала равна

$$S_y(x) = 0{,}40 \cdot 10^6 \text{ см}^2/\text{сек.} = 40 \text{ м}^2/\text{сек}.$$

Путем перемножения пятого столбца табл. 5 на значения S_y по табл. 6 мы получим величины скоростей течения на различных глубинах и горизонтальных расстояниях в поперечном сечении канала. Вычисленные значения скоростей указаны (в см/сек.) в табл. 7. Из таблицы видно, что максимальное значение скорости, которого она достигает на поверхности в центре канала, равно 23,6 см/сек. Из той же таблицы явствует, что скорость течения быстро затухает с увеличением глубины и, хотя глубина 1000 м взята в качестве неподвижной границы бароклинного слоя, скорости течения практически ничтожны уже на глубине 700 м. Эти результаты наглядно демонстрируются пунктирной кривой на рис. 13, рисующей вертикальное изменение скорости в центре канала, и рис. 14, изображающем в виде изотах распределение скоростей течения во всем поперечном сечении канала.

Как мы показали выше, приведенные в табл. 7 скорости геострофического течения очень незначительно должны отличаться от фактических скоростей. Действительно, порядок скоростей в табл. 7 весьма правдоподобен. В связи со сделанным ранее замечанием попытаемся выяснить, насколько может отличаться величина $A_z \dfrac{\partial v_\Gamma}{\partial z}$ в приповерхностном слое от величины T_y. Если в качестве величины коэффициента турбулентного трения принять значение $A_z=430$ CGS, соответствующее, по вычислениям В. Шмидта (см. [3]), скорости ветра 10 м/сек. (т. е. нашему примеру), то в случае равенства

$$A_z \frac{\partial v_\Gamma}{\partial z} = T_y$$

на поверхности воды мы получим

$$430 \frac{\partial v_\Gamma}{\partial z} = 3{,}2\ CGS.$$

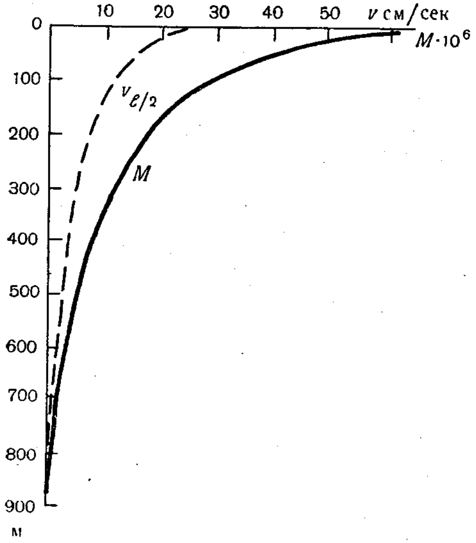

Рис. 13.

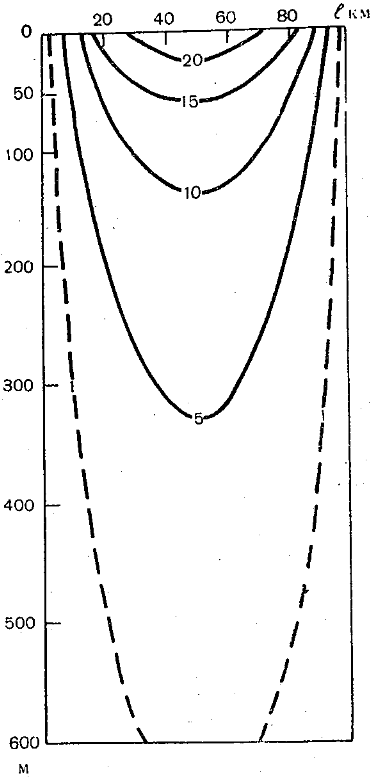

Рис. 14.

Поэтому в приповерхностном слое вертикальный градиент скорости должен был бы обладать величиной

$$\frac{\partial v_\Gamma}{\partial z} = 0{,}007\ \text{сек.}^{-1}$$

В действительности по данным табл. 7 на вертикали $x/l=0{,}5$ разность скоростей между глубинами 0 и 5 м составляет 0,8 см/сек. Поэтому вертикальный градиент скорости геострофического течения в приповерхностном слое (если допустить линейное изменение скорости) равен

$$\frac{\partial v_\Gamma}{\partial z} = 0{,}001\ \text{сек.}^{-1},$$

Таблица 7

z м	x/l					
	0,05	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
0	4,7	8,3	15,3	20,1	22,4	23,6
5	4,6	8,6	14,8	19,4	21,7	22,8
25	4,0	7,0	13,0	17,0	19,0	20,0
50	3,3	5,7	10,7	13,9	15,6	16,4
75	2,7	4,8	8,8	11,6	12,9	13,6
100	2,4	4,2	7,8	10,2	11,4	12,0
150	1,8	3,1	5,7	7,5	8,4	8,8
200	1,4	2,4	4,4	5,8	6,5	7,8
250	1,2	2,1	3,9	5,1	5,7	6,0
300	1,0	1,8	3,4	4,4	4,9	5,2
400	0,7	1,3	2,3	3,1	3,4	3,6
500	0,5	0,8	1,6	2,0	2,3	2,4
700	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	0,8
1000	0	0	0	0	0	0

т. е. в семь раз менее вертикального градиента скорости, требующегося для баланса напряжений на границе раздела вода—воздух. Понятно поэтому, что значения геострофических скоростей в табл. 7 не могут быть фактическими скоростями течения. Однако, как указывалось ранее, различие невелико. Посмотрим, насколько нужно изменить скорость геострофического течения на поверхности в центре канала для того, чтобы в поверхностном слое 0—5 м образовался вертикальный градиент скорости, равный 0,007 сек.$^{-1}$ Фиксируя скорость на 5 м глубины, мы найдем искомую скорость на поверхности из условия

$$\frac{v - 22{,}8}{5 \cdot 10^2} = 0{,}007,$$

откуда

$$v = 26{,}3 \text{ см/сек}.$$

Таким образом, при неизменной скорости на глубине 5 м геострофическая скорость на поверхности всего лишь на 2,7 см/сек. менее той, которая необходима для баланса напряжений на границе раздела вода—воздух. Следовательно, ошибка при отождествлении скоростей геострофического течения (табл. 7) с фактическими скоростями, по-видимому, невелика даже для поверхностного слоя, где она должна обладать, вообще говоря, максимальным значением (в данном случае около 10%), ибо различие между геострофическими и истинными скоростями должно быстро стираться с увеличением глубины от поверхности моря.

Полученные нами выводы являются практически важными потому, что мы имеем возможность не только предсказывать вертикальное распределение плотности, обусловленное приспособлением масс к потокам, возбуждаемым ветром (с учетом бокового трения и кориолисовой силы), но, что не менее важно, предсказывать и фактическое распределение скоростей течения, мало уклоняющихся (за исключением поверхности) от геострофического режима. Таким образом, можно надеяться, что намеченный нами ранее путь исследования результирующего переноса и распределения масс может оказаться эффективным методом для прогноза скоростей течения и распределения плотности на различных глубинах в пределах бароклинного слоя. Попутно заметим, что аналогичным образом можно быстро решить вопрос о распределении скоростей течения и плотности в пределах бароклинного слоя в круглом морском бассейне при симметричной его центру системе ветра (циклон, антициклон, ветры муссонного типа). В случае же произвольного контура моря и произвольной, заданной из наблюдений системы ветра для предвычисления плотностей и скоростей течения вместо уравнения (39) следует пользоваться бигармоническими уравнениями, связывающими величины Q и ψ (функция полного потока) с полем T, указанными ранее [2]. Решение наших уравнений в этих сложных, но практически важных случаях можно быстро находить с помощью электроинтегратора.[1] Заметим также, что полученные здесь результаты являются важными еще и потому, что они отчетливо выясняют существенную роль бокового трения в динамике течений бароклинного моря.

В самом деле, хотя в исследованном случае неограниченного канала скоростное поле и мало уклоняется от геострофического режима, что позволяет пренебречь при вычислении скоростей эффектом трения, но это обстоятельство еще не означает, что роль бокового трения несущественна. Напротив, как мы убедились, эффект бокового трения играет решающую роль в *формировании* наблюдаемого распределения плотности, являющегося результатом приспособления поля масс к системе потоков, возбуждаемых ветром. Таким образом, если скоростное поле определяется не на основании данного, а предвычисленного по полю ветра распределения плотности, то тем самым эффект бокового трения учитывается в неявной форме. Кроме того, и толщина бароклинного слоя, по-видимому, целиком определяется эффектом бокового трения в поле кориолисовой силы.

---

[1] Возможно также моделирование потоков путем изгибания пластин, защемленных на сложном контуре, соответствующем берегу моря [2].

Заметим также, что только благодаря учету бокового трения при определении стационарных потоков, возбуждаемых ветром в неограниченном канале, мы получили порядок скоростей, хорошо согласующийся с действительностью. При этом, как видно из формул (70) и (46), скорости течения находятся в обратной зависимости от толщины бароклинного слоя, т. е. уменьшаются с возрастанием его толщины и, напротив, увеличиваются с уменьшением последней, что также находится в полном согласии с данными наблюдений. Здесь поучительно вспомнить результаты Свердрупа [14], рассмотревшего в свое время вопрос о течениях в бесконечном канале, но без учета бокового трения, и потому пришедшего к ложным выводам, пытаясь доказать невозможность стационарной циркуляции, возбуждаемой ветром в неоднородном океане. Так же, как и в нашей задаче, Свердруп рассматривал бесконечный канал, наполненный неоднородной водой, к поверхности которой прилагалось тангенциальное давление ветра, направленное вдоль оси канала (ось Y). Однако вместо системы уравнений (1), положенных в основу нашей теории, Свердруп рассматривал установившееся движение без учета бокового трения, описывая движение уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dz}\left(A_z \frac{du}{dz}\right) + 2\omega\rho \sin\varphi v &= \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{d}{dz}\left(A_z \frac{dv}{dz}\right) - 2\omega\rho u \sin\varphi &= \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{a}$$

Так же, как и в рассмотренной выше задаче, Свердруп полагал:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f(z), \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{b}$$

$$\left(A_z \frac{dv}{dz}\right)_0 = -T_y = -T^1. \tag{c}$$

Дальнейшие расчеты Свердрупа покоятся на соображении, что установившееся движение неоднородной воды в канале возможно лишь при условии, что поперечная циркуляция отсутствует, т. е. что на всех уровнях поперечная составляющая скорости должна быть равна нулю. Это условие, по мнению Свердрупа, необходимо потому, что в противном случае благодаря оттоку легкой поверхностной воды от левого берега канала (если движение совершается в северном полушарии) и подъема там более тяжелой глубинной воды будет меняться с течением времени поле соленоидов и связанное с ним конвекционное течение не будет стационарным.

[1] Начало координат $z=0$ совмещено с невозмущенной поверхностью моря.

Итак, на основании того, что $u=0$, Свердруп из уравнений (а) получает уравнение

$$\frac{d}{dz}\left(A_z \frac{dv}{dz}\right)=0.$$

Следовательно, на основании (с),

$$A_z \frac{dv}{dz}=-T=\text{const}. \tag{d}$$

Наконец, так же, как и в нашем случае, Свердруп полагает, что на дне канала или на нижней границе бароклинного слоя, при $z=h$, поперечный градиент давления равен нулю, т. е. на указанной глубине изобары горизонтальны. Таким образом, при условии стационарности движения получаются следующие соотношения:

$$\text{при} \quad z=h, \quad f(z)=0;$$

$$v=\frac{f(z)}{2\omega\rho \sin\varphi}; \quad u=0,$$

$$A_z \frac{dv}{dz}=-T.$$

На основании последнего соотношения легко определить **минимальное** значение $v_{\min}$ скорости на поверхности воды в канале в зависимости от заданных значений T. Очевидно, что это минимальное значение $v_{\min}$ соответствует случаю постоянного значения $A_z=A_0$ и определяется соотношением

$$-T=A_0 \frac{v_{\min}}{h},$$

где h — глубина канала или толщина бароклинного слоя. Величину T Свердруп связывает со скоростью ветра обычным квадратичным законом

$$T=3{,}2 \cdot 10^{-6}(W-v_0)^2,$$

в котором W означает скорость ветра, а v_0 — скорость поверхностного течения. Обычно величиной v_0 в силу ее малости по сравнению с W пренебрегают, однако в данном случае величиной v_0 пренебрегать нельзя. Таким образом, $v_{\min}$ определяется из уравнения

$$3{,}2 \cdot 10^{-6}(W-v_{\min})^2 h+A_0 v_{\min}=0.$$

Очевидно, что из двух значений $v_{\min}$ имеет смысл лишь то, которое меньше скорости ветра. Из уравнения для $v_{\min}$ следует также, что с увеличением глубины h поверхностная скорость течения возрастает, асимптотически приближаясь к скорости ветра. Этот результат Свердрупа противоречит данным наблюдений и нашим теоретическим выводам, согласно которым с увеличением толщины бароклинного слоя скорость как на отдельных глубинах, так и в среднем уменьшается.

Ниже приводятся значения минимальной скорости поверхностного течения, вычисленные Свердрупом для различных величин h по одной и той же скорости ветра $W=10$ м/сек. и соответствующей этой скорости ветра величине коэффициента турбулентного трения $A_0=430$ CGS, взятой Свердрупом в согласии с данными Шмидта (см. [3]).

$v_{\min}$ см/сек.	38	66	206	332	599
h м	50	100	500	1000	5000

Как видим, в случае толщины бароклинного слоя $h=1000$ м скорость течения на поверхности обладает минимальной величиной 3,32 м/сек.! Эти фантастические результаты и привели Свердрупа к ложному выводу, что «стационарные течения, обусловленные влиянием ветра на распределение плотности, не могут существовать в океанах». Курьезно, что эти ошибочные выводы Свердрупа целиком разделялись впоследствии Дефантом [4].

В действительности, как мы убедились выше, принимая в расчет эффект бокового турбулентного трения, максимальная величина скорости на поверхности воды в канале при той же скорости ветра и толщине бароклинного слоя составляет всего лишь 24—26 см/сек., что очень хорошо согласуется с порядком скоростей, наблюдаемых в природе, а потому установившиеся течения, обусловленные воздействием ветра на поле масс, вполне возможны в океане.

Возвратимся к избранному нами закону (57), описывающему изменение плотности в пределах бароклинного слоя, и подчеркнем некоторые его особенности в сравнении с другой возможной моделью распределения плотности в море.

Следует особо подчеркнуть достаточную общность зависимости (57), согласно которой вертикальный градиент плотности в любой точке (x, z) моря получается путем умножения вертикального градиента плотности на глубине z прибрежной станции $(x=0)$ на некий множитель $f(x)$, связываемый впоследствии с эффектом ветра и бокового трения:

$$\frac{d\rho(x, z)}{dz} = \frac{d\rho_0(z)}{dz} f(x).$$

При этом вертикальное распределение плотности у берега $\rho_0(z)$ не ограничивается каким-либо специальным законом, а может быть совершенно произвольным. В частности, например, у берега канала (или моря) может существовать поверхностный однородный слой, отделенный от нижележащих слоев слоем «скачка» плотности, как это схематически изображено на рис. 15. Из формулы (57) следует, что в этом случае **вертикальной однородностью** будет обладать некоторый поверхностный слой во всем поперечном сечении канала. Однако из формулы (57) видно, что плотность воды в пределах указанного слоя все же будет меняться в горизонтальном направлении, как это схематически указано на рис. 16. Заметим, что такое сочетание вертикальной однородности с горизонтальной неоднородностью воды

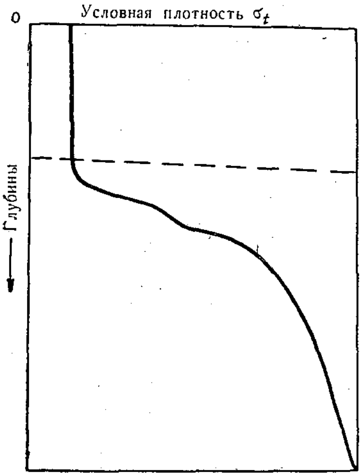

Рис. 15.

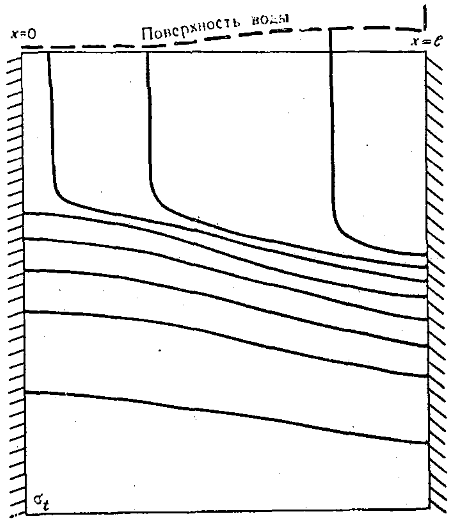

Рис. 16.

в пределах поверхностного слоя часто встречается в природе, именно в случаях сгонно-нагонного эффекта ветра.

Единственное допущение, положенное в основу общей зависимости (57), состоит в том, что на некоторой глубине от поверхности моря, где движение отсутствует, изопикны горизонтальны. Хотя это допущение и не всегда оправдывается в действительности, тем не менее оно отнюдь не является противоестественным, а напротив, широко распространено в практике мореведческих расчетов. Горизонтальность изопикн на некоторой глубине от поверхности моря обусловливает распределение изопикн в вышележащих слоях таким образом, что у правого (смотря по ветру) берега канала вертикальный градиент плотности в переходном слое оказывается больше, нежели у левого берега канала.

Структура поля масс, описываемая законом (57), существенно отличается от недавно предложенной Рейдом [10] модели изменения плотности. Модель Рейда была продемонстрирована им в специальном случае приспособления поля масс к системе возбуждаемых ветром течений в экваториальной и субтропической области Тихого океана. При этом в расчетах Рейда, основанных на теории Свердрупа [17], учитывалось широтное изменение кориолисовой силы, тогда как эффект бокового трения не принимался во внимание. Представляет поэтому интерес рассмотреть модель Рейда в аспекте развиваемой здесь теории. Рейд интерпретирует распределение плотности следующей зависимостью:

$$\rho(x, z) = \rho_H - \Delta\rho e^{1-z/h}, \quad (z \geqslant h). \tag{72}$$

где $\Delta\rho = \rho_H - \rho_0$. В свою очередь ρ_0 представляет собой постоянное значение плотности в пределах верхнего однородного слоя толщиной h, меняющейся в горизонтальных направлениях, x, y, а ρ_H — постоянное значение плотности, к которому она стремится с увеличением глубины z от поверхности моря (ось z направлена вниз и глубины отсчитываются от горизонтального уровня, с которым совпадает поверхность моря в невозмущенном течениями состоянии). Постоянное значение плотности ρ_H фактически достигается при достаточно большом значении $z = H$.

Как видим, изменение плотности, интерпретируемое (72), определяется отнюдь не произвольным распределением ρ на начальной вертикали ($x=0$), а лишь таким, которое достаточно близко соответствует экспоненциальному закону. Разумеется, что в реальных условиях подобного рода распределение плотности далеко не всегда имеет место, и поэтому модель Рейда в смысле общности и практического использования уступает принятой нами зависимости (57). Согласно (72), плотность воды в пределах $z = -\xi$ (поверхность моря), $z = h$ постоянна и, таким образом, в противоположность (57), плотность в поверхностном слое не меняется ни в вертикальном, ни в горизонтальном направлениях. Подобного рода полная гомогенность поверхностного слоя далеко не всегда встречается в натуре, а если и имеет место, то лишь на небольшом пространстве открытой части океана. Наконец, в сравнении с (57) зависимость (72) отличается тем, что изопикны даже на большой глубине z от поверхности моря не горизонтальны и вода там обладает горизонтальной неоднородностью. Это объясняется тем, что величина h меняется в зависимости от x, y, а потому постоянное значение плотности ρ_H достигается при различных x, y не на одной и той же глубине z от поверхности моря. Таким образом, модель Рейда характеризуется полной пространственной однородностью приповерхностного слоя и неоднородностью глубинных слоев, в противоположность принятой нами интерпретации, согласно которой поверхностный слой может быть однородным лишь по вертикали, тогда как плотность воды ниже некоторой глубины от поверхности моря однородна как в вертикальном, так и в горизонтальном направлениях.

Посмотрим, как будет меняться толщина однородного слоя в поперечном сечении рассматриваемого нами канала, если распределение плотности интерпретировать законом (72). Удобно отсчитывать z от поверхности океана вниз. Тогда, следуя Рейду, можно показать, что

$$\int_0^H \frac{\partial p}{\partial x} dz = \frac{5g\,\Delta\rho}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x}. \tag{73}$$

В рассматриваемом случае формула, аналогичная (42), запишется в виде

$$\bar{\rho} c S_y = \frac{5g\,\Delta\rho}{2} \frac{\partial h^2}{\partial x}. \tag{74}$$

Интегрируя это уравнение и используя для S_y выражение (55), имеем

$$h = \sqrt{\frac{\bar{\rho} c T_y}{30 A_l g\,\Delta\rho} x^2 (3l - 2x) + h_0^2}, \tag{75}$$

где h_0 — глубина однородного слоя у левого берега канала при $x=0$.

Формулой (75) определяется толщина однородного слоя, иначе говоря — глубина верхней границы скачка плотности, на любой вертикали поперечного сечения нашего канала. Покажем, для примера, как меняется толщина однородного слоя h у правого берега канала $(x=l)$ в зависимости от величины A_l, в то время как T_y и h_0 остаются неизменными. Положим $T=3{,}2$ дин/см^2 ($W=10$ м/сек.), $l=50$ км$=5\cdot10^6$ см, $h_0=25$ м, $\rho_0=1{,}0230$ г, $\rho_H=1{,}0274$ г, $\Delta\rho=44\cdot10^{-4}$ г, $c=10^{-4}$ CGS (умеренные широты); принимая A_l последовательно равным 10^8, 10^7, 10^6 CGS, мы на основании (75) получим следующие значения $h_{x=l}$:

$$A_l = 10^8 \text{ CGS}, \quad h_{x=l} = 30{,}2 \text{ м}; \quad A_l = 10^7 \text{ CGS},$$
$$h_{x=l} = 50{,}3 \text{ м}; \quad A_l = 10^6 \text{ CGS}, \quad h_{x=l} = 173 \text{ м}.$$

На рис. 17 изображено изменение толщины однородного слоя (глубины изопикны $\rho_0=1{,}0230$), соответствующее, согласно (75), значениям $A_l=10^8$, 10^7, 10^6 CGS и принятым величинам T_y, c и h_0. Как видим, изменение толщины однородного слоя, вычисляемое по формуле (75) по заданной величине h_0 у одного из берегов канала, сильно меняется в зависимости от принятых значений A_l, что лишний раз подчеркивает необходимость определения коэффициента горизонтального турбулентного обмена (бокового трения) в самых разнообразных морских условиях.

Как уже упоминалось выше, величина коэффициента бокового трения не только зависит от скорости ветра, но главным образом определяется масштабами процесса, т. е. в нашем случае поперечными размерами канала. Для принятого поперечника канала $l=5\cdot10^6$ см наиболее вероятным порядком A_l будет $A_l=10^7$ CGS.

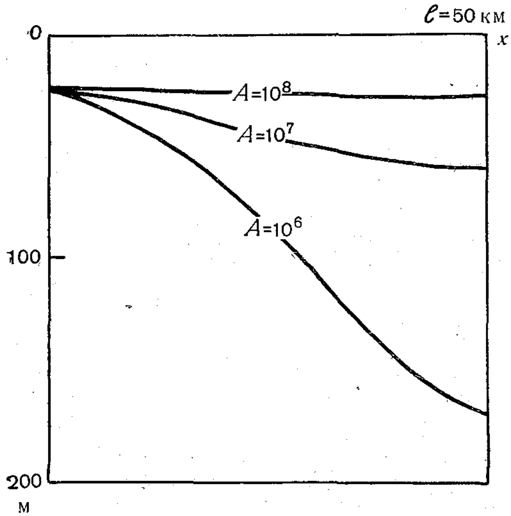

Рис. 17.

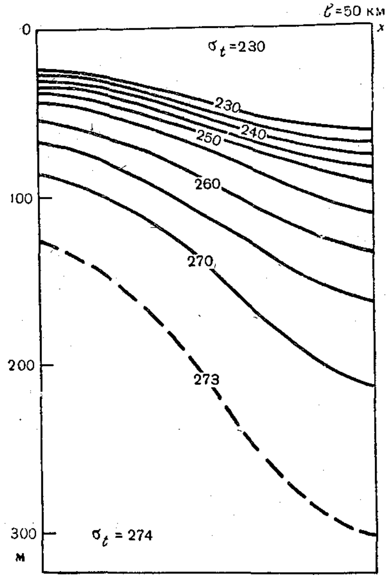

Рис. 18.

Именно для этого порядка A_l и принятых выше значений T_y, c и l мы рассчитали по формулам (75) и (72) распределение условной плотности $\sigma_t=(\rho-1)\cdot10^4$ на различных вертикалях. Результаты вычислений изображены на рис. 18 в виде изопикн (σ_t) в плоскости поперечного сечения канала (ветер направлен от наблюдателя, смотрящего на рис. 18). Как видим, у левого берега канала происходит резкое сгущение изопикн, а у правого берега — их разрежение. Эта картина распределения изопикн противоположна изображенной ранее на рис. 9.

Рассчитав изменение плотности в поперечном сечении канала, отвечающее модели Рейда, можно определить и скорость течения по полученному полю масс, аналогичному тому, как это мы сделали выше, полагая течение геострофическим.

Скорость геострофического течения v_{Γ} мы определим по обычной формуле

$$v_{\Gamma}=\frac{gi_p}{c}, \tag{76}$$

где i_p — наклон изобар по отношению к горизонту в плоскости поперечного сечения канала.

Наклон изобар i_{p_1} в пределах однородного слоя будет связан с наклоном его нижней границы, являющейся изопикной $\sigma_t=230$, следующим соотношением:

$$i_{p_1}=-\frac{2\Delta\rho}{\rho_0}i_h, \tag{77}$$

где i_h — изменение глубины однородного слоя, определяемой формулой (75) и отнесенное к единице горизонтального расстояния x[1]. В свою очередь наклон изобар на глубинах ниже однородного слоя будет связан с той же величиной i_h следующим соотношением:

$$i_{p_2}=-\frac{\Delta\rho}{\rho}\left(1+\frac{z}{h}\right)e^{1-z/h}i_h=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{h}\right)e^{1-z/h}i_{p_1}. \tag{78}$$

Очевидно, что в пределах однородного слоя скорость течения постоянна, а затем убывает по экспоненциальному закону:

$$v_{\Gamma}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{h}\right)e^{1-z/h}v_h, \tag{79}$$

где v_h — скорость течения в пределах однородного слоя. Вычисления скоростей были проделаны для центральной части канала $\left(x=\frac{l}{2}\right)$, где скорости течения достигают максимума. Согласно вычисленным ранее глубинам однородного слоя, мы для центральной части канала получили

$$(i_h)_{x=\frac{l}{2}}=9{,}67\cdot 10^{-4}.$$

Следовательно, в согласии с (77), будем иметь

$$i_{p_1}\cong 88\cdot 10^{-4}\cdot 9{,}67\cdot 10^{-4}=851\cdot 10^{-8}$$

и на основании (76) найдем

$$(v_h)_{x=0{,}5l}=\frac{10^3\cdot 851\cdot 10^{-8}}{10^{-4}}\cong 85 \text{ см/сек}.$$

[1] i_h — наклон нижней границы однородного слоя.

Распределение скоростей на глубинах ниже однородного слоя дается формулой (79), в которую вместо h следует подставить, согласно (75), значение $h_{x=0,5l}=50$ м. Результаты вычислений изображены на рис. 19 в виде кривой вертикального изменения скорости течения в центральной части канала. Как видим, скорости течения быстро затухают с увеличением глубины, и на расстоянии 300 м от поверхности воды движение практически отсутствует. Заметим, что если вместо $A_l=10^7$ CGS мы бы приняли значение $A_l=10^8$ CGS, то при прочих равных условиях мы бы получили для поверхностной скорости в центре канала величину $v_h=$ $=14$ см/сек.

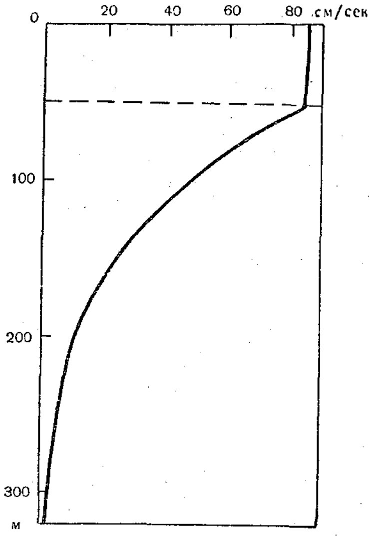

Рис. 19.

Вычислим, наконец, величину полного геострофического потока $S_Г$ в центре канала. Интегрируя для этой цели (79) в пределах от $z=h$ до $z=H$ и придавая к результату перенос в однородном слое $v_h h$, мы получим

$$S_Г=v_h h+\frac{v_h}{2}\times$$

$$\times\left[3h-(H+h)\,e^{1-H/h}\right].$$

Так как по условию $H\gg h$, то вместо предыдущей формулы можно с большей точностью писать

$$S_Г=\frac{5}{2}v_h h.$$

Подставляя в последнюю формулу найденные выше значения $v_h=0{,}85$ м/сек., $h=50$ м, получим

$$S_Г=106{,}3 \text{ м}^2/\text{сек}.$$

В то же время истинное значение полного потока в центре канала, согласно (55), в случае $l=5\cdot10^4$ м, $A_l=10^7$ CGS, $T=$ $=3{,}2$ CGS будет равно

$$S_{x=0,5l}=\frac{3{,}2\cdot25\cdot10^8}{8\cdot10^7}\simeq100 \text{ м}^2/\text{сек}.$$

Таким образом, величина геострофического потока всего лишь на 6% более истинного значения S, определяемого формулой (55), а потому распределение скоростей течения, соответствующее модели Рейда, так же как и в рассмотренном ранее общем случае, мало уклоняется от геострофического режима.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штокман В. Б. Анализ применимости косвенных методов вычисления геострофических течений в условиях Гренландского моря. Тр. АНИИ, т. 184, 1944.
2. Штокман В. Б. Исследование влияния ветра и рельефа дна на результирующую циркуляцию и распределение масс в неоднородном океане или в море. Тр. ИОАН, т. III, 1949.
3. Шулейкин В. В. Физика моря. Изд. АН СССР, 1941, стр. 9.
4. Defant A. Schichtung und Zirkulation des Atlantischen Ozeans. Die Troposphäre. Wiss. Erg. d. Deutsch. Atl. Exp. auf d. «Meteor». Bd. VI, Erster Teil, 1936.
5. Ekman V. W. Über die Strommenge der Konvektionsströmungen im Meere. Lund's Univers, Arsskr., N. F., Avd. 2, Bd. 25, Nr 6, Lund, 1929.
6. Jakhelln A. The water transport of gradient currents. Geophys. Publ. v. XI, N 11, Oslo, 1936.
7. Munk W. H. A critical wind speed for air-sea boundary processes. J. of Marine Res., v. VI, N 3, 1947.
8. Okada M. An approximative calculation of the turbulent ocean current. Bull. of the Jap. Soc. Sci. Fisheries, v. 5, N 6, Tokyo, 1937.
9. Okada M. Deviation of the calculated ocean current due to turbulence. Bull. of the Jap. Soc. Sci. Fisheries, v. 6, N 1, Tokyo, 1937.
10. Reid R. O. A model of the vertical structure of mass in equatorial wind-driven currents of a baroclinic ocean. J. of Marine Res., v. VII, No 3, 1948.
11. Rossby C. G. On the mutual adjustment of pressure and velocity distribution in certain simple current systems. J. of Marine Res., v. 1, N 1, 1937.
12. Rossby C. G. and Montgomery R. B. The layer of frictional influence in wind and ocean currents. Pap. in Phys. Oceanogr. and Meteor., v. III, N 3, 1935.
13. Scientific Results of Cruise VII of the Carnegie during 1928—1929. Oceanography I—B. Carnegie Inst. of Wash. Publ., 1945.
14. Sverdrup H. U. On vertical circulation in the ocean due to the action of the wind with application to conditions within the antarctic circumpolar current. Discovery Rep., v. VII, 1933, pp. 139—170.
15. Sverdrup H. U. On the process of upwelling. J. of Marine Res., I, 1938, pp. 155—164.
16. Sverdrup H. U. and staff. Oceanographic observations of the «E. W. Scripps» cruises of 1940. Res. Observ. Scripps. Inst. Oceanogr., v. I, No 3, 1944.
17. Sverdrup H. U. Wind-driven currents in a baroclinic ocean; with application to the equatorial currents of the eastern Pacific. Proc. Nat. Acad. Sci., v. 33, 1947, pp. 318—326.
18. Sverdrup H. U. and Fleming R. H. The waters off the coast of Southern California. Bull. of the Scripps Inst. Oceanogr., v. 4, N 10, 1941.
19. Werenskiold W. Mean monthly air transport over the North Pacific Ocean. Geophys. Publ., v. 11, No 9, Oslo, 1924.

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРИЧИН АНОМАЛЬНОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ ВОКРУГ ОКЕАНИЧЕСКИХ ОСТРОВОВ [1]

Обращается внимание на тот факт, что реальные океаны в смысле контура береговой черты представляют не односвязную, а многосвязную область. Это обстоятельство вместе с эффектом завихренности ветра может привести к аномальным циркуляциям около островов, что подтверждается наблюдениями на примерах о. Тайвань (Кит.), Исландии и Курильских островов. Качественный анализ этого явления, который основан на комбинации известных моделей горизонтальной циркуляции, возбуждаемой завихренностью ветра, показывает, что аномальная циркуляция около островов зависит от ряда обстоятельств, делающих поставленную проблему весьма тонкой и сложной задачей динамики океана.

Качественно объясняется происхождение антициклонических циркуляций около островов, возбуждаемых циклонической завихренностью ветровых полей.

Успехи, достигнутые за последние 20—25 лет в теории горизонтальной циркуляции океана, объясняются прежде всего тем, что океанографами была осознана необходимость изучения этого процесса как краевой задачи, в математическом исследовании которой существенную роль сыграл специально разработанный для этой цели метод «полных потоков» [1, 2].

Учет ограниченности океанов по внешнему контуру вместе с динамическим эффектом поперечной неравномерности (завихренности) ветра и широтным изменением параметра Кориолиса позволили правильно истолковать главные особенности горизонтальной циркуляции океанов, до тех пор остававшиеся загадочными: экваториальные, межпассатные противотечения, интенсификацию течений у западных берегов океанов, ярко выраженную такими быстрыми течениями, как Гольфстрим и

[1] Опубликовано в Известиях АН СССР, серия «Физика атмосферы и океана», т. II, № 11, 1966 г.

Куросио, и наконец, глубинное экваториальное противотечение Кромвелла. Учет нелинейных эффектов и горизонтального «бокового» трения позволил, с другой стороны, объяснить многие детали горизонтальной океанической циркуляции.

Однако до сих пор океанографы вовсе не обращали внимания на тот существенный факт, что океаны ограничены не только извне — контурами материков, но и изнутри — островами, так что в смысле контура береговой черты океаны представляют не односвязную, а многосвязную область. Как ни странно, но забвение этого факта привело к тому, что причины одной весьма примечательной особенности океанической циркуляции не только остались до сих пор неразгаданными, но и сама эта особенность по сей день оставлена без должного внимания; я имею в виду особенности циркуляции около островов.

Логично предположить, что многосвязность океанических областей (т. е. наличие островов) вместе с эффектом поперечной неравномерности ветра может служить причиной противоположных, аномальных циркуляций около островов аналогично тому, как в замкнутой односвязной области тот же эффект поперечной неравномерности ветра является причиной известных противотечений. Действительно, циркуляция около океанических островов в некоторых случаях обладает удивительной особенностью: направление циркуляции около острова противоположно общей циркуляции в области океана, включающей остров. В большинстве случаев такая аномальная противоположная циркуляция вдоль острова носит в северном полушарии антициклонический характер, т. е. направлена по часовой стрелке.

Один из примеров указанного любопытного явления — циркуляция о. Тайвань (о. Формоза), на которую впервые обратил внимание и которую пытался объяснить адмирал С. О. Макаров еще в конце прошлого века [3]. На рис. 1 указана схема течений зимой около Тайваня и в прилегающей области Тихого океана. Черные жирные стрелки — направление и скорости северо-восточного муссона, дующего зимой у побережья Китая. По этому поводу С. О. Макаров писал: «Северо-восточный муссон по западную сторону Формозы дует сильнее, чем по восточную, между тем по западную сторону течение идет против ветра, а по восточную оно идет по ветру и навстречу главному океанскому потоку» [3].

Подчеркнем, что аномальная, антициклоническая циркуляция у Тайваня существует лишь зимой, когда поле ветра там обладает циклонической поперечной неравномерностью, т. е. когда скорости северо-восточного муссона убывают справа налево (если смотреть по ветру). Как показано ранее [4], объяснение аномальной циркуляции у Тайваня, предложенное С. О. Макаровым, было ошибочным; знаменитый флотоводец и океанограф пытался объяснить это явление там эффектом силы Кориолиса и обилием пресной воды, не подозревая, что столь странная циркуляция может быть результатом непосредственного влияния отмеченной им же поперечной неравномерности ветра.

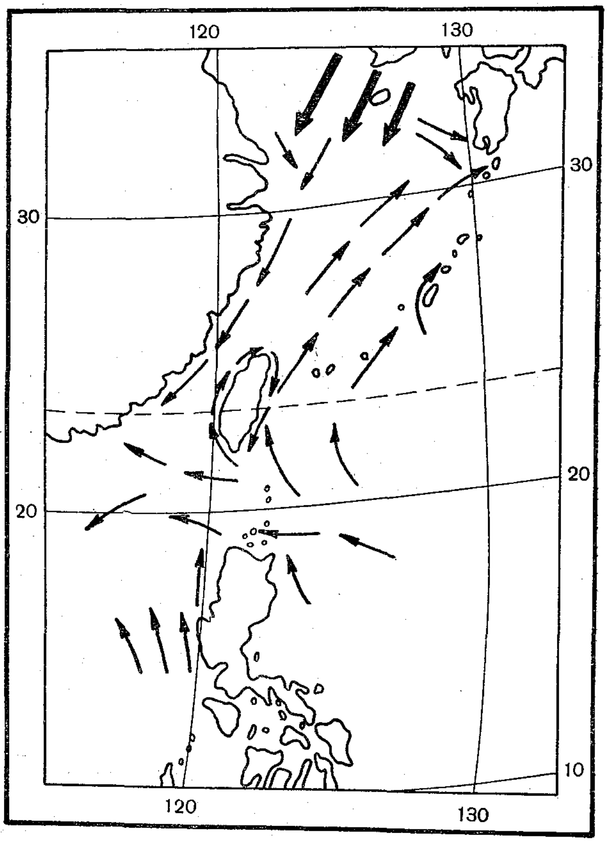

Рис. 1. Схема циркуляции зимой около о. Тайвань.

Тонкие стрелки — направление течения, черные жирные стрелки — относительные скорости и направление ветра.

В поисках дальнейших подтверждений высказанного мною предположения о характере динамического эффекта поперечной неравномерности ветра на циркуляцию в многосвязной области океана я обратил внимание на своеобразную циркуляцию вокруг Исландии, с поразительным постоянством наблюдаемую в течение всего года. Весьма любопытно, что циркуляции вокруг Исландии и Тайваня как в смысле направления, так и характера ветровых полей совершенно аналогичны!

Как видно из рис. 2, на котором изображена, согласно Брауну [5], схема циркуляции в Норвежском море, течение, огибающее Исландию по часовой стрелке (течение Ирмингера), направлено противоположно главным течениям этой области Атлантики — Восточно-Гренландскому и Норвежскому. Эта аналогия с Тайванем распространяется и на ветер, так как в районе

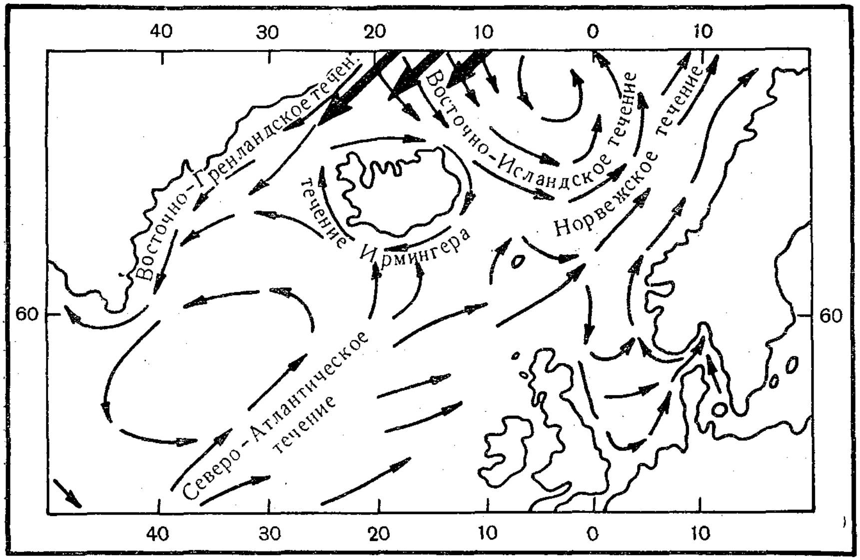

Рис. 2. Схема циркуляции около Исландии.
Обозначения см. рис. 1.

Исландии дует северо-восточный «гренландский муссон», скорость которого убывает от берегов Гренландии в море (направление и скорость ветра на рис. 2 изображены черными жирными стрелками). Таким образом, прямолинейный ветровой поток гренландского муссона обладает циклонической завихренностью, так же как и северо-восточный муссон у берегов Китая (рис. 1). Единственное различие приведенных примеров состоит в том, что аномальная циркуляция вокруг Исландии наблюдается круглый год, тогда как аномальная циркуляция вокруг Тайваня — лишь зимой. Различие это весьма симптоматично: северо-восточный китайский муссон дует лишь зимой, тогда как гренландский муссон — во все времена года.

Поэтому пример аномальной антициклонической циркуляции вокруг Исландии является, пожалуй, столь же уникальным таинственным фактом в океанографии, каким до недавнего времени являлись межпассатные экваториальные противотечения.

Подобные странные, аномальные циркуляции наблюдаются и вокруг Курильских островов, как это видно из рис. 3, на котором очень схематично изображены контуры Охотского моря с пересекающей его у входа цепью Курильских островов. В данном случае поперечная неравномерность ветра аналогична рассмотренным выше примерам, т. е. преобладающий ветер характеризуется циклонической завихренностью. Как видно из рис. 3, вокруг островов Курильской гряды имеет место антициклоническая циркуляция, подобная циркуляции вокруг Исландии и Тайваня и противоположная циклонической циркуляции вод Охотского моря.

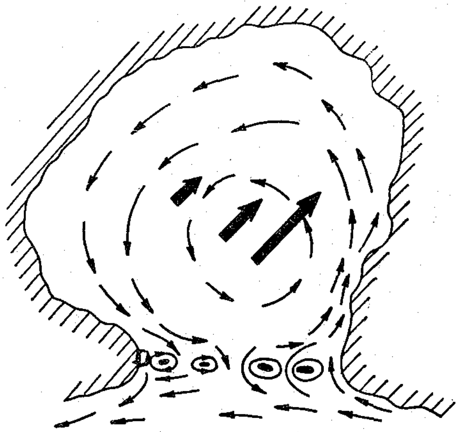

Рис. 3. Схема циркуляции в Охотском море.

Обозначения см. рис. 1.

Математическое исследование интегральной горизонтальной циркуляции, возбуждаемой завихренностью ветра в многосвязной области, оказалось возможным сравнительно недавно, благодаря сформулированным В. М. Каменковичем граничным условиям на внутренних контурах многосвязной океанской области [6]. К сожалению, математическая сложность проблемы не позволяет получить решение в обозримой, замкнутой аналитической форме и задача может быть исследована лишь в результате приближенного численного решения на цифровой ЭВМ. Именно поэтому нельзя a priori сделать столь необходимые качественные и количественные оценки результата решения интересующей нас задачи хотя бы в двухсвязной области.

Возможность же оценить направление циркуляции вокруг острова, не решая самой задачи, а исходя лишь из интегрального соотношения, установленного В. М. Каменковичем для контура острова (на эту возможность указывал и автор [6]), для интересующего нас случая малоэффективна. В самом деле, интегральное соотношение В. М. Каменковича оказывается столь же неопределенным для суждения о направлении полного потока на отдельных звеньях контура, сколь неопределенны наши суждения о направлении течения на отдельных отрезках вертикали, если базироваться на интегральной скорости, даваемой величиной полного потока.

Тем не менее уже сейчас, не занимаясь численным решением интересующей нас задачи, а простыми наглядными рассуждениями, основанными на комбинации уже известных моделей циркуляции, возбуждаемой завихренностью прямолинейного ветра в односвязных областях однородной жидкости, могут быть получены качественные выводы о причинах аномальной циркуляции около островов, преследующие цели: 1) решения интересующей нас проблемы в главных чертах, 2) облегчения численного решения нашей задачи, так как основные моменты, определяющие характер решения в многосвязной области, будут заранее выяснены так же, как станут известными и некоторые особенности этого решения: существование и характер особых точек в поле течения, в окрестности которых численное решение задачи должно быть проведено с особой тщательностью.

Излагаемые далее рассуждения свободны от неопределенности, присущей результатам [4], основанным на аналогии распределения полных потоков с изгибом защемленной по контуру и нагруженной пластины, учитывающим, помимо поперечной неравномерности ветра, и эффект бокового трения. Как выяснилось теперь, автор ошибочно приписывал последнему фактору доминирующую роль в формировании аномальной циркуляции около островов. Приводимые ниже рассуждения не только принципиально отличаются от опубликованных нами ранее [4], но и содержат новые качественные результаты, свидетельствующие о зависимости интересующего нас явления от ряда обстоятельств, делающих рассматриваемую проблему весьма тонким вопросом динамики океана. Основная мысль, высказанная еще в 1954 г. [4], о роли поперечной неравномерности ветра в формировании аномальных циркуляций около островов, осталась вполне справедливой.

Обзор решений различных задач об интегральной (по вертикали) горизонтальной циркуляции, возбуждаемой завихренностью ветрового поля, показывает, что как самые примитивные модели, построенные лишь с учетом «вертикального» трения в однородной жидкости для срединного сечения удлиненного мелкого моря без учета вращения Земли [7, 8], так и более сложные модели циркуляции в ограниченном пространстве вращающейся с Землей бароклинной жидкости с учетом не только «вертикального», но и «бокового» трения, дают одинаковые качественные результаты. Оказывается, что общие черты возбуждаемой ветром интегральной горизонтальной циркуляции в смысле как общего ее направления, так и положения центров возникающих круговоротов и границ противоположно направленных потоков совершенно (или в очень малой степени) не зависят от того, рассматриваем ли мы интегральное движение в баротропной или бароклинной жидкости, учитываем ли эффект вертикального обмена количества движения или присоединяем к нему эффект «бокового» трения, рассматриваем ли мы движение на неподвижной Земле или учитываем вращение последней, полагая параметр Кориолиса постоянным. Учет этих обстоятельств существенно отражается лишь на величине полных потоков (а следовательно, и на скоростях), но не на общей картине движения в горизонтальной плоскости.

Поэтому в приводимых ниже рассуждениях мы будем основываться на известных результатах, одинаковых как в случае однородной, так и бароклинной жидкости и не зависящих от дополнительного учета бокового трения и вращения Земли (широтным изменением силы Кориолиса в небольшой области пренебрегаем).

Обратимся к рис. 4. На схеме *I* рис. 4 изображена горизонтальная интегральная циклоническая циркуляция, возбуждаемая циклонической завихренностью п р я м о л и н е й н о г о ветра, скорости которого указаны (в плане) в верхней части схемы либо в виде черных жирных, либо в виде широких светлых стрелок. Последние указывают, что направление ветра по отношению к рассматриваемому прямоугольному контуру может быть совершенно произвольным; важно лишь, чтобы скорость ветра убывала справа налево (если смотреть по ветру). Этот отнюдь не тривиальный, хотя и хорошо известный сейчас результат был получен нами еще в 1940 г. [7].

Перегородим рассматриваемую область полосой «суши» на две обособленные области *A* и *B* (схема *II*, рис. 4). Так как поперечная неравномерность ветра осталась прежней, то в полученных двух обособленных областях *A* и *B* возникнут циклонические циркуляции, указанные тонкими стрелками на схеме *II* рис. 4, аналогичные циркуляции на схеме *I*.

Перешеек на схеме *II* превратим в удлиненный остров, открыв с боков проливы *C* и *D* (схема *III*). Если размеры удлиненного острова настолько велики, или проливы *C* и *D* настолько узки, что остров по-прежнему будет разделять основную область на две приближенно изолированные части *A* и *B*, препятствуя свободному водообмену между ними, то в областях *A* и *B* вновь возникнут циклонические циркуляции, подобные циркуляциям на схеме *II*. Частичная изолированность областей *A* и *B* равносильна частичной изолированности проливов *C* и *D*, в которых, согласно схемам *I* и *II*, также должны возникнуть одноименные циклонические циркуляции, определяемые знаком завихренности ветра. В результате слабый водообмен между областями *А* и *В* все же будет иметь место.

Рассматривая схему *III* рис. 4, убеждаемся в том, что при

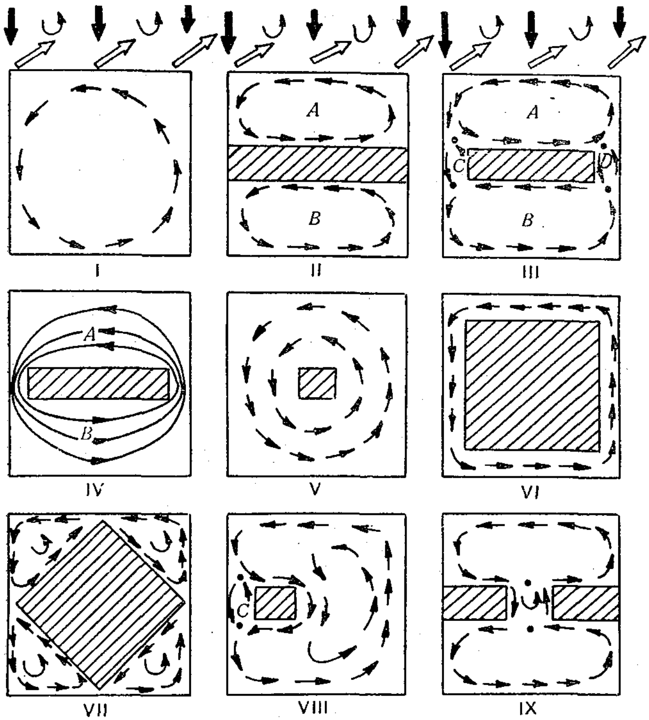

Рис. 4. Схемы циркуляции в односвязной и двухсвязной областях.

Тонкие стрелки — направление течения. Черные жирные и светлые стрелки — относительные скорости и направление ветра. Искривленными стрелками в поле ветра указано направление вращения (завихренность) в ветровом потоке.

отмеченных условиях вдоль контура нашего удлиненного острова возникнет своеобразная «аномальная» антициклоническая циркуляция (по часовой стрелке), противоположная циклонической циркуляции, какая сохранится на периферии основной области, т. е. так, как это имеет место в природе у берегов Тайваня, Исландии и Курильских островов (поперечная неравномерность ветра на схемах рис. 4 аналогична неравномерности ветра на рис. 1—3!). Заметим также, что при сочетании циклонических круговоротов, существующих в областях A и B и в проливах C и D, между круговоротами должны возникнуть особые точки гиперболического типа, положение которых приблизительно указано на схеме *III* (в этих особых точках величина полного потока обращается в нуль). Таким образом, схема *III* рис. 4 убедительно разъясняет причину аномальных циркуляций около островов, однако не полностью исчерпывает интересующий нас вопрос.

Чтобы показать, что схема *III* при данных условиях — единственно возможная, предположим, что наши рассуждения, положенные в ее основу, ошибочны и что даже в случае удлиненного острова основная циклоническая циркуляция не будет дробиться на отдельные циклонические круговороты, и общее циклоническое круговращение сохранится во всей области, пересекаемой островом. Но в таком случае, изображенном на схеме *IV*, очевидно, что с уменьшением ширины проливов величина полных потоков там в силу неразрывности движения должна возрастать до бесконечности, что, разумеется, лишено смысла. Вот почему дробление основной циклонической циркуляции в случае удлиненного острова достаточно больших размеров (в сравнении с размерами внешнего контура), приводящее к противоположной циркуляции вдоль контура острова, является единственно возможным результатом динамического эффекта завихренности ветра в двухсвязной области.

Продолжим наши рассуждения и уменьшим размеры острова настолько, что расстояния между контуром острова и внешним контуром области станут практически одинаковыми. Так как в этом случае уже не будет обособленных областей, дробящих основную интегральную циркуляцию на отдельные круговороты, то эта циркуляция, очевидно, осуществляется подобно схеме *I*, т. е. так, как это изображено на схеме *V* рис. 4. Иными словами, небольшой (по отношению к размерам внешнего контура области), но симметричный относительно центра области остров не вызовет аномальной антициклонической циркуляции вокруг контура острова, какая наблюдалась бы в случае резкой «анизотропии» контура острова по отношению к внешнему контуру области (схема *III*, рис. 4).

Отсутствие противоположной циркуляции вокруг контура острова будет иметь место не только в случае острова малого размера, но и в случае очень большого острова при условии, что контур его симметричен внешнему контуру области (схема *VI*, рис. 4). В этом случае «проливы» между островом и контуром области равноправны между собой, обладая одинаковым поперечным сечением, и общая циклоническая циркуляция осуществится без дробления на отдельные циклонические круговороты (приводящие, как мы убедились, к антициклонической циркуляции вокруг острова). Так как, однако, условие симметрии контура большого острова по отношению к внешнему контуру области практически невероятно, то схема *VI* имеет лишь теоретический интерес. Достаточно повернуть большой остров схемы *VI* на 45°, нарушив тем самым контурную симметрию, как вокруг острова неизбежно возникнет «аномальная» антициклоническая циркуляция (вдоль внешнего контура области движение сохранит циклоническое направление) вследствие дробления основной циклонической циркуляции на ряд обособленных циклонических круговоротов (схема *VII*, рис. 4).

Теперь нетрудно наметить в общих чертах картину интегральной горизонтальной циркуляции внутри рассматриваемой области, когда там расположен небольшой остров, несимметричный центру внешнего контура[1] (схема *VIII*, рис. 4.). Схема *VIII* весьма напоминает картину циркуляции вокруг Тайваня и Исландии; на ней указаны две особые точки гиперболического типа, которые по-прежнему должны существовать в полученном поле течения.

Применяя далее наши рассуждения к проливу, получим картину интегральной горизонтальной циркуляции (с двумя особыми точками), изображенную на схеме *IX* рис. 4. Как видим, у противоположных берегов пролива имеют место противоположные течения, направленные согласно известному мнемоническому правилу Н. Н. Зубова [9]: «если встать поперек пролива и вытянуть правую руку вперед, а левую назад, то направление вытянутых рук покажет направления течений у соответствующих берегов». Это мнемоническое правило обобщает большое число наблюдений. Наши же рассуждения объясняют причину наблюдаемых фактов, которая кроется в циклонической поперечной неравномерности ветра. Так как в природе циклоны значительно преобладают над антициклонами, то, естественно, должны преобладать и схемы циркуляции, соответствующие циклонической неравномерности (завихренности) ветров, изображенные на рис. 4. Эта же причина вызывает смущавшее ранее С. О. Макарова [3] и Н. М. Книповича [10] преобладание циклонических циркуляций в замкнутых морях типа Азовского, Черного и Каспийского[2]. Аномальная же антициклоническая циркуляция в Аральском море обусловлена, как показал А. И. Симонов [11], преобладанием антицик-

[1] Случай, противоположный схеме *V* рис. 4.

[2] В свете нашей теории важно не направление ветра, которое может быть произвольным, а характерная для любых частей циклона поперечная неравномерность ветра.

лонических ветров (обусловленных близостью пустыни Каракум) и своеобразным рельефом дна этого водоема, вызывающим, в свете нашей теории [12], определенный характер горизонтальной циркуляции.

Наконец, без труда можно наметить общие черты горизонтальной циркуляции, возбуждаемой циклонической поперечной неравномерностью ветра в некоторой замкнутой области, пересекаемой цепью островов, имитирующих острова Курильской гряды (схемы *I* и *II*, рис. 5). Видно, что эти схемы в основных чертах соответствуют известной схеме (рис. 3) циркуляции

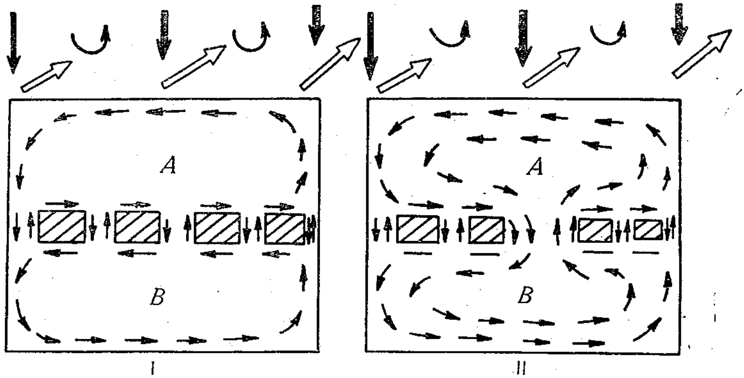

Рис. 5. Схемы циркуляции, возбуждаемой цепью островов.
Обозначения см. рис. 4.

у Курильских островов с характерной **вытянутостью линий тока вдоль цепи островов и антициклоническими циркуляциями вокруг каждого острова**. Очевидно, что, чем ближе острова расположены друг к другу (цепь островов), тем больше вероятности ожидать противоположной (антициклонической) циркуляции вокруг каждого острова; при наличии же широких проливов между некоторыми островами будет иметь место и интенсивный водообмен между частями *A* и *B* основной области (схема *II*, рис. 5).

Резюмируем изложенные результаты.

1. Причина аномальных циркуляций около островов кроется в возмущающем эффекте (нарушении водообмена), привносимом островом на горизонтальную циркуляцию, возбуждаемую в пределах некоторой замкнутой области поперечной неравномерностью (завихренностью) ветра.

2. Преобладание аномальных антициклонических циркуляций около некоторых островов — следствие преобладания циклонической поперечной неравномерности ветровых полей, т. е.

преобладания циклонов. Этим же объясняются и причины противоположно направленных течений у берегов проливов, когда у правого берега течение идет от наблюдателя, а у левого — навстречу ему (циклоническое вращение).

3. Аномальная циркуляция около острова может возникать далеко не всегда, а при определенном соотношении между размерами острова и размерами внешнего контура, т. е. размерами области ветрового сгонно-нагонного эффекта, включающей остров.

4. В возникновении аномальной циркуляции около острова существенную роль играют не только его размеры, но и степень асимметрии контура острова по отношению к внешнему контуру. Если внешний контур области сгона-нагона и контур острова обладают одной общей центральной симметрией, то аномальной циркуляции около острова не будет, независимо от размеров последнего. Напротив, если контур острова асимметричен внешнему контуру области сгона-нагона, то аномальная циркуляция будет иметь место около островов относительно больших размеров и не наблюдается вдоль острова относительно небольшой величины. Все же аномальная циркуляция может возникнуть и около небольшого острова в случае очень резкого смещения центра его контура по отношению к центру основной области, что имеет место у островов, близко расположенных к материкам. Следовательно, вероятность аномальных циркуляций должна быть больше около островов типа Тайваня и Исландии, т. е. около островов, близко расположенных к берегам материков (являющихся естественной внешней границей в области сгона-нагона), чем у островов, находящихся вдали от материков в открытых частях океанов. Но и там аномальные циркуляции должны возникать около цепи островов, пересекающих основную область сгона-нагона.

Оценка критических размеров острова по отношению к внешнему контуру области сгона-нагона и оценка критической асимметрии контуров, например двухсвязной области, представляют сложную задачу. Эту задачу вначале целесообразно упростить, рассматривая численные решения уравнения типа Пуассона для функции полных потоков (например, в прямоугольной двухсвязной области типа рис. 4), к которому сводится система уравнений Экмана:

$$\nu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \lambda v = g \frac{\partial \xi}{\partial x}, \qquad \nu \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \lambda u = g \frac{\partial \xi}{\partial y}, \tag{1}$$

где u и v — горизонтальные компоненты скорости вдоль прямоугольных осей координат x и y соответственно; z — вертикальная координата; $\lambda=2\omega \sin\varphi$ — параметр Кориолиса, рассматриваемый постоянным (ω — угловая скорость вращения Земли, φ — широта места) для небольшой области океана; g — ускорение силы тяжести; ξ — превышение уровня моря над горизонтальной плоскостью ($z=0$), соответствующей поверхности океана в невозмущенном состоянии. Плотность морской воды можно считать постоянной и равной единице.

Интегрируя уравнения (1) по вертикали от $z=0$ до дна $z=h$ и принимая во внимание следующие граничные условия:

$$\left.\begin{aligned} \nu \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} &= -\tau_x, & \nu \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0} &= -\tau_y, \\ \nu \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=h} &= -RS_x, & \nu \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=h} &= -RS_y, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

где τ_x и τ_y — соответствующие компоненты касательного трения ветра на поверхности океана, а трение на дне ($z=h$) упрощенно можно считать пропорциональным (R — коэффициент пропорциональности) соответственным компонентам полного потока S_x и S_y.

$$S_x=\int_0^h u dz, \quad S_y=\int_0^h v\, dz. \quad (3)$$

Для исключения интегральной функции давления (зависящей от возвышения уровня ξ), фигурирующей после операции интегрирования в пределах от $z=0$ до $z=h$ уравнений (1) в их правой части, произведем перекрестное дифференцирование системы (1), записанной в интегральной форме, и, вычтя из первого уравнения второе, приняв во внимание условие неразрывности, путем введения функции полных потоков ψ, определяемой соотношениями

$$S_x=-\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad S_y=\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (4)$$

получим в итоге следующее уравнение для функции полных потоков:

$$\Delta\psi=\frac{\mathrm{rot}_z \tau}{R}, \quad (5)$$

где Δ — оператор Лапласа. Решение (5) нужно подчинить следующим условиям.

На внешнем контуре области Γ_0 должно выполняться обычное для функции полных потоков условие:

$$\psi|_{\Gamma_0}=0. \quad (6)$$

На внутреннем контуре области Γ_1, т. е. на контуре острова, должно выполняться условие [6]:

$$\psi|_{\Gamma_1} = \mathrm{const}, \quad R \oint_{\Gamma_1} \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma_t + \oint_{\Gamma_1} \tau_t \, d\sigma_t = 0, \tag{7}$$

где σ_t — элемент дуги контура острова; τ_t — касательная к этому контуру компонента напряжения трения ветра, n — нормаль к контуру. Условия (6), (7) однозначно определяют распределение ψ в рассматриваемой двухсвязной области, которую удобно имитировать схемами рис. 4.

Поставленная проблема требует не только математического, численного исследования на цифровой ЭВМ, но и специальных тщательных океанографических наблюдений около островов, находящихся в типичных в смысле теории условиях (например, о. Тайвань, Исландия, Курильские острова и др.), с целью экспериментального изучения деталей циркуляции около островов и определения границ областей сгона-нагона, которые можно было бы рассматривать в известном смысле изолированно от других областей океана (в выделении подобных областей, вероятно, можно использовать метод ϑ, s-диаграмм). Организация специальных наблюдений около островов необходима хотя бы потому, что в аспекте поставленной здесь новой проблемы они совсем не проводились.

Академия наук СССР
Институт океанологии

Поступило в редакцию 8/VI 1966 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Штокман В. Б. Уравнения поля полных потоков, возбуждаемых ветром в неоднородном море. ДАН СССР, т. LIV, № 5, 1946.
2. Фельзенбаум А. И. Метод полных потоков в классической теории морских течений. Тр. ИОАН, т. XIX, 1956.
3. Макаров С. О. Океанографические работы. Географгиз, 1950, стр. 207—208.
4. Штокман В. Б. О причине круговых течений около островов и противоположных течений у берегов проливов. Изв. АН СССР, серия геофиз., № 4, 1954.
5. Brown P. R. Climatic fluctuation in the Greenland and Norwegian Seas. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 79, No. 340, 1953.
6. Каменкович В. М. Об интегрировании уравнений теории морских течений в неодносвязных областях. ДАН СССР, т. CXXXVIII, № 5, 1961.
7. Штокман В. Б. Ветровой нагон и горизонтальная циркуляция в замкнутом море небольшой глубины. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., т. V, № 1, 1941.

8. Штокман В. Б. Поперечная неравномерность нагонного ветра как одна из важных причин горизонтальной циркуляции в море. ДАН СССР, т. XLIX, № 2, 1945.
9. Зубов Н. Н. Динамическая океанология. Гидрометеоиздат, 1947, стр. 321.
10. Книпович Н. М. Гидрологические исследования в Каспийском море в 1914—1915 гг. Тр. Каспийской экспедиции, 1, 1921.
11. Симонов А. И. К вопросу о причинах антициклонической циркуляции вод Аральского моря. Метеорология и гидрология, № 2, 1954.
12. Штокман В. Б. Влияние рельефа дна и поперечной неравномерности ветра на горизонтальную циркуляцию в мелком море или водохранилище. Метеорология и гидрология, № 8, 1953.

НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О СОСТОЯНИИ И ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ ОКЕАНИЧЕСКОЙ ЦИРКУЛЯЦИИ [1]

«Его величие заключалось
в чрезвычайно хорошо развитой
способности улавливать
самое существо теоретического понятия
и настолько освобождать теорию
от ее математического наряда,
что лежащая в ее основе простая идея
проявлялась со всей ясностью».

А. Эйнштейн
(из некролога «Памяти Пауля Эренфеста»)

Несмотря на глубокую убежденность автора в справедливости давно выношенных им мыслей и критических оценок, он не менее уверен в том, что излагаемые здесь соображения вряд ли будут разделены большинством теоретиков-мореведов и послужат, может быть, основанием к полемике разного толка.

Именно по этой причине я долго не решался их опубликовать, так как с течением времени все более и более убеждался в справедливости мнения Чарльза Дарвина, который в своей замечательной автобиографии писал: «Я рад, что избегал полемики и этим я обязан Лайеллю, который еще много лет назад по поводу моих геологических работ настоятельно рекомендовал мне никогда не ввязываться в полемику, так как она редко приносит пользу и не стоит той потери времени и того плохого настроения, которые она вызывает» [1].

Действительно, история не только различных наук, но и искусств ясно показывает, что правильная оценка того или иного взгляда или теории отнюдь не обеспечивается победой на «полемическом турнире» их автора, а беспристрастной оценкой последующих поколений ученых, иными словами,

[1] Неоконченная рукопись этой статьи была обнаружена в архиве В. Б. Штокмана.

естественным развитием самой науки. Несомненно, что со временем наука сама делает свой правильный выбор, отбрасывая все «наносное», навязанное ей не объективным критерием фактов или внутренней логикой развития самой науки, а временными, пристрастными увлечениями людей.

Разумеется, что сделанные здесь замечания, поясняющие мнение Дарвина, отнюдь нельзя понимать в том смысле, что дискуссии и советы по различным научным вопросам вообще бесплодны. Подобное утверждение могут сделать лишь заядлые полемисты, но не ученые, ясно понимающие, что без обмена мнений и дискуссий не может развиваться ни одна наука. Однако, чтобы не вызвать противоречия между сказанным, следует учесть, что первоначальные наши замечания относятся, так сказать, к «крупномасштабным» аспектам науки, развиваемым яркими научными индивидуальностями, в то время как дискуссии приносят пользу и могут повлиять лишь на «мелкомасштабную» часть этого развития, подобно тому, как направление течения горного потока определяется генеральным уклоном рельефа, которое не в состоянии изменить различные возмущения, обусловленные второстепенными неровностями этого уклона, определяющими лишь локальную структуру горного потока.

Для того чтобы сразу же сделать ясной основную точку зрения автора, которую он будет затем развивать концентрически, вспомним остроумные слова Харальда Свердрупа, произнесенные им более 20 лет назад на Симпозиуме при Национальной Академии наук США 21 октября 1946 г., посвященном современным аспектам науки [2]. Анализируя причины медленного развития теоретической океанографии, Свердруп заявил: «Причины медленного развития теоретических работ в области океанографии кроются в том, что слишком много людей делают наблюдения и слишком мало людей над ними размышляют». Эта меткая характеристика Свердрупа отражала состояние динамической океанографии в самом начале послевоенного времени, когда ее большое практическое значение стало особенно очевидным.

С тех пор прошло более двадцати лет и положение, например в области исследований океанической циркуляции, изменилось настолько, что, по мнению автора, развитие этой области океанографии вновь испытывает затруднения, причину которых можно выразить уже тезисом, по смыслу противоположным цитированному тезису Свердрупа. Я глубоко убежден, что в развитии теории океанической циркуляции близится кризис, обусловленный тем, что **слишком много людей вычисляют и слишком мало людей делают хорошие наблюдения!**

Многие говорят о пользе теории и необходимости проверки ее наблюдениями, но мало кто даже среди ученых задумывался над тем, чем же должна являться теория и насколько правомочны факты для подтверждения или опровержения ее результатов. Казалось бы, затрагиваемые сегодня вопросы давно стали тривиальными, но, несмотря на их банальность, эти вопросы по-прежнему новы, ибо ответы на них и по сей день пестрят самым причудливым разнообразием.

Наиболее просто и вместе с тем точно задачи теории, пожалуй, определяются так: теория есть система взглядов на причины протекающих в природе явлений.

В обосновании этой системы взглядов весьма существенна логическая дедукция, которая в наиболее совершенном виде обеспечивается применением математического аппарата, являющегося, образно говоря, «стенографией человеческой мысли». Естественно поэтому, что наиболее безупречными в указанном смысле являются физические теории, развивающие систему взглядов на природу физических явлений при помощи математики. Но как ни велика дедуктивная роль математики в построении физической теории, ее основные концепции и отправные положения черпаются из данных опыта.

Измеряя совершенство дедукции при построении теории применением математики, не следует все же переоценивать роль математики в разработке теории. Система взглядов на природу того или иного явления может быть убедительно развита и без применения математического аппарата, примером чему из области физики являются гениальные идеи и замечательная серия опытов Фарадея по электромагнетизму. С этой же точки зрения совершенно равноценны теория происхождения видов Дарвина и работы Пастера о роли микроорганизмов в возникновении заразных болезней, развитые без единого математического символа, и общая теория относительности А. Эйнштейна, при построении которой автор прибегал к разнообразным и сложнейшим разделам математики.

К сожалению, в настоящее время многие геофизики-океанографы, впрочем как и представители других областей знания, ложно понимая задачи теории, попросту занимаются математическими упражнениями с целью придать их работам якобы «теоретический» характер.

Такие псевдотеоретические работы рождаются и умирают с быстротой мотыльков, не оставляя за собой сколь-нибудь заметного следа в науке. Истинный же ученый, развивающий полноценную теорию, всегда будет руководствоваться принципом, в наиболее ясной и глубокой форме выраженным Максвеллом в его знаменитом «Трактате по электричеству и магнетизму», в котором гениальный физик-теоретик, между прочим, писал: «Насколько возможно, я буду избегать вопросов, которые хотя и могут явиться предметом полезных упражнений для математиков, но не в состоянии расширить наших научных знаний» [3].

Резюмируя изложенные мысли в виде афоризма, который звучит, может быть, несколько парадоксально, я бы сказал: любая теория (в том числе и физико-математическая) тем более разработана, чем **меньше** требуется математики для разъяснения ее результатов (не получения, а разъяснения).

С давних пор признано бесспорной необходимостью проверять теорию данными опыта. Но очень мало тех, кто с осторожностью относится не только к результатам теории, но и к проверке их опытными фактами. Может быть это легкомысленное отношение к важнейшей проблеме человеческого познания и привело к насмешливым нападкам на теории, которые, как ехидно замечают их критики, всегда безупречно совпадают с данными наблюдений!

Подобного рода совпадения между результатами разных теорий и одними и теми же опытными данными зачастую служат в руках людей, мало сведущих в науке, орудием язвительных нападок на «теоретиков», представляющихся какими-то ловкими, изворотливыми фокусниками, подгоняющими любую теорию к результатам опыта. Такая ложная точка зрения, особенно бытующая среди практиков, порочит величие подлинной теории, являющейся не досужими упражнениями человеческого ума, а венцом человеческого познания.

Но и среди ученых, задумывавшихся над причиной странных совпадений результатов различных теорий с одними и теми же опытными данными, автор не встречал правильных объяснений этого удивительного обстоятельства. Обычно подобные совпадения объясняются тем, что в каждой, например физической, теории содержится ряд определяющих процесс параметров, которые при математическом выражении этого процесса легко подобрать, не выходя слишком за границы допустимых их значений, таким образом, что результаты расчета безупречно совпадут с данными опыта. Но такое, хотя и не лишенное оснований, толкование мы, безусловно, должны отвергнуть, как объяснение, принижающее роль истинной теории, низводящее ее результаты до уровня формальной интерполяции и бросающее упрек автору подобных спекуляций, весьма близкий к обвинению в недобросовестности. Конечно, в истории наук немало подобных «теорий», но не их следует иметь в виду, пытаясь понять причину таинственных совпадений результатов различных теорий с одними и теми же опытными данными. Причина этих совпадений кроется, конечно, не в обилии определяющих параметров (число которых в истинной теории должно быть минимальным), а **в несовершенстве наших наблюдений,** что и дает возможность объяснить одно и то же явление с различных теоретических позиций. Достаточно вспомнить космологическую теорию Птоломея, вполне удовлетворительно объяснившую известные в то время астрономические факты, и противоположную ей концепцию Коперника, с абсолютно иной точки зрения объяснившую те же факты, чтобы убедиться в справедливости сделанного замечания. По мере расширения наших знаний, даваемых опытом, ряд неполноценных теоретических концепций полностью отмирает. С другой стороны, полноценная теория при расширении наших знаний хотя и заменяется другой, более совершенной, но включает в себя как частный случай и старую теоретическую концепцию, полноправно продолжающую существовать, в известных пределах и при дальнейшем увеличении объема опытных данных (например, механика Галилея—Ньютона как частный случай специальной теории относительности Эйнштейна). Здесь следует обратить внимание на одно обстоятельство, особенно важное при построении геофизической теории. Я придерживаюсь убеждения, что в противоположность, например, теории астрономической на первом этапе развития любой геофизической теории в силу обилия факторов, в разной мере причастных к физическим явлениям в атмосфере или океане, совершенно необходима **схематизация** изучаемого явления. Эта схематизация, т. е. рассмотрение процесса на примере упрощенной теоретической модели, облегчает математическую дедукцию, например, в том смысле, в каком это было показано на примере теории экваториальных противотечений в океанах [4], или еще ранее на примерах исключительно простых, элементарных моделей, продемонстрировавших эффект поперечной неравномерности прямолинейного ветра как важнейшего фактора, возбуждающего горизонтальную циркуляцию в морях и океанах [5]. Именно эта схематизация, обнажающая самую сущность явления, сделала совершенно прозрачной внутреннюю связь между скоростным полем в ограниченном море или океане и поперечной неравномерностью (завихренностью) ветра и позволила придти к ряду многочисленных важных выводов (систематически развивавшихся впоследствии), что вряд ли можно было сразу сделать при наиболее полной математической трактовке вопроса.

Подтверждением справедливости этой точки зрения является, например, попытка Гольдсброу [6] рассмотреть проблему дрейфовой циркуляции без всякой схематизации в сферической системе координат для океана конечной глубины на вращающемся шаре. Очень громоздкие выражения, полученные Гольдсброу в итоге столь сложной постановки задачи, послужили поводом к тому, что этот выдающийся ученый не заметил результата исключительной важности, какой содержался в итоге его сложных выкладок. Именно, Гольдсброу не обратил должного внимания на западное смещение центров циркуляции в океане по сравнению с центрами атмосферной циркуляции, являющееся следствием широтного изменения силы Кориолиса и могущее привести к наблюдаемой интенсификации течений у западных границ океанов. Это важнейшее открытие было сделано лишь в итоге целесообразного упрощения задачи тринадцать лет спустя Г. Стоммелом [7], которому и принадлежит сенсационное объяснение причины столь быстрых течений, как Гольфстрим и Куросио, являющихся следствием широтного изменения силы Кориолиса. Таким образом, схематизация процесса при построении теории, заключающаяся в **искусстве выделять главное**, отбрасывая множество второстепенных моментов, является залогом успешного построения любой и особенно **геофизической теории**.

Вот почему кажутся неуместными насмешливые сетования на то, что в решении, например, главных теоретических проблем океанической циркуляции ученым пришлось прибегать к стилизации реальных «географических» условий, рассматривая «прямоугольные», «треугольные» моря и «замкнутые на бесконечности каналы», задавать «прямолинейные» системы ветров и некоторые другие условия (например, однородную плотность воды морей или океанов), не являющиеся **точной копией** действительности. Такого рода замечания кажутся особенно странными, когда они исходят от лиц, безусловно весьма искушенных в теории [8], ибо эти ученые не могут не понимать, что подобная идеализация является не недостатком, а необходимым и весьма положительным свойством любой геофизической теории. Именно благодаря исследованиям главных особенностей интересующих нас явлений на примерах «прямоугольных» и «однородных» морей и «удлиненных каналов», **сделавших доступным ясное понимание главных причин, управляющих океанической циркуляцией**, сторонники учета «реальных географических условий» и получили возможность успешно развивать уже, собственно, не теорию, а **ее практические применения** в виде **расчетов** океанических и морских течений в реальной обстановке. Насколько такие расчеты на самом деле обладают практической или познавательной ценностью, является вопросом, на котором я остановлюсь впоследствии.

За время почти восьмидесятилетнего существования океанографии, к началу 40-х годов нашего века, было накоплено громадное число гидрологических наблюдений, обрисовавших в общем стройную картину горизонтальной циркуляции вод как в замкнутых, внутренних морях (многочисленных в нашей стране), так и в окраинных морях и океанах. Полученная в результате обработки наблюдений циркуляции обладала многими особенностями, происхождение которых вызывало различные смутные догадки, порождавшие оживленные споры. Так, причины существующей в замкнутых морях типа Азовского, Черного и Каспийского **циклонической** циркуляции (против часовой стрелки), казалось, никак нельзя было связать с действием ветра, ибо циклоны, которые, еще по мнению С. О. Макарова [9], могли бы вызвать подобную циркуляцию, настолько обширны, что лишь в редчайших случаях располагаются «посреди» указанных морей, а это последнее обстоятельство, как считал сам Макаров, было совершенно необходимым для возбуждения циклонической циркуляции в море посредством ветра. В действительности линии тока ветра над названными морями никогда не бывают замкнутыми, а носят преимущественно прямолинейный или искривленный характер, почему над всей акваторией того или иного внутреннего моря господствуют ветры почти одного направления, что никак не вязалось с удивительным преобладанием в указанных морях горизонтальной, циклонической циркуляции.

Поэтому большинство географов-мореведов вместе с Книповичем склонялись к тому, что причиной циклонических циркуляций во внутренних морях является не ветер, а распресняющее влияние рек совместно с отклоняющим эффектом вращения Земли. Сторонники подобного воззрения совсем не замечали его противоречивости, которую легко убедительно вскрыть, приняв во внимание сгонно-нагонный эффект ветра, постоянно дующего над морем в различных направлениях, который неминуемо должен разорвать слой опресненной воды то в одном, то в другом месте береговой черты внутреннего моря и нарушить его непрерывность. Тот факт, что при указанных условиях слой опресненной воды все же неизменно (в среднем) опоясывает побережье внутренних морей, был столь же загадочным для вдумчивых исследователей явлением, как и причастность ветра к возбуждению горизонтальной циклонической циркуляции во внутренних морях.[1] По этому поводу Н. М. Книпович [11] писал: «Что действие ветров вызывает в Каспийском море течения в различных направлениях — факт общеизвестный.

---

[1] В интерпретации этой циркуляции исключительно большую роль сыграл так называемый динамический метод, широкое применение которого у нас в стране обязано многим трудам Н. Н. Зубова (см., например, [11]).

Вопрос лишь в том, в какой степени описанная выше общая (циклоническая, *В. Ш.*) система течений этого водоема может быть объяснена действием ветров». Подобные вопросы не возникали при рассмотрении общей антициклонической (по часовой стрелке) циркуляции в Северной Атлантике и Северном Тихом океане, так как эта циркуляция в общих чертах совпадала с антициклонической системой ветров, господствующей там во все времена года, и поэтому связь между общей циркуляцией в океанах и ветровым режимом никогда не вызывала сомнений.

В отношении причин особенностей океанических течений возникали вопросы и иного рода. Загадочным, например, казалось происхождение экваториальных «межпассатных» противотечений, пересекающих океаны в зональном направлении и местами целиком направленных против ветра. Очень смущало океанографов и происхождение таких быстрых и ограниченных наподобие рек течений, как Гольфстрим и Куросио.

Закономерности движения льдов в Полярном бассейне, их сжатия и разрежения, определяющиеся, по-видимому, ветром и течениями в названной и труднодоступной части Мирового океана, также издавна привлекали внимание ученых. Это внимание зародилось после дрейфа нансеновского «Фрама», подтвердившего его гипотезу о «сквозном» дрейфе льдов через Полярный бассейн, и особенно возросло после знаменитого дрейфа «Папанинской» льдины. Громадное практическое значение этой проблемы для навигации среди льдов Полярного бассейна давно было очевидным. Наконец, возбудили много споров причины недавно открытых глубинных экваториальных противотечений Кромвелла и Ломоносова, обладающих еще бо́льшими скоростями, нежели «поверхностные» межпассатные противотечения.

Разобраться во всех этих вопросах представляло для геофизиков-мореведов увлекательную, но нелегкую задачу, тем более, что в океанографии давно и прочно укоренились запутанные, неверные взгляды на природу океанических и морских течений, сложившиеся у географов, не имевших необходимых знаний, чтобы проникнуть в существо тех физических явлений, которые они отображали на своих картах. Тем не менее на протяжении последних 20—25 лет все отмеченные здесь вопросы оказались разрешенными.

Первый результат из перечисленной серии вопросов был получен автором еще в 1940 г. [5], когда на примере чрезвычайно простой модели циркуляции, возбуждаемой ветром в удлиненном (по ветру) замкнутом однородном море постоянной глубины, он показал, что поперечная неравномерность прямолинейного ветра приводит к циркуляции в горизонтальной плоскости. Эта циркуляция осуществлялась таким образом, что жидкость приходила во вращение с направлением, которое соответствовало знаку завихренности (поперечному градиенту скорости) прямолинейного ветра. Простая теоретическая модель автора ясно указывала, что в случае поперечной неравномерности ветра ось горизонтальной циркуляции могла приобрести почти отвесную форму, вследствие чего не только на глубине, но и на поверхности жидкости должна наблюдаться замкнутая циркуляция определенного направления так, что в некоторой части рассматриваемого идеализированного моря вода устремлялась **противоположно** ветру.

Этот результат имел фундаментальное значение для объяснения преобладания упоминавшейся циклонической циркуляции в замкнутых морях. В самом деле, благодаря несомненному преобладанию в природе циклонов над антициклонами любой циклон, хотя бы частично захватывающий акваторию данного внутреннего моря, должен был вызвать в нем циклоническую циркуляцию, **независимо от направления** ветра, ибо в свете теории оказалось важным лишь то, что в любых частях циклонических ветровых полей сохраняется один и тот же знак поперечной неравномерности ветра (убывание скорости справа налево, если смотреть по ветру).

Те же результаты, но в несколько обобщенном виде проливали свет и на природу экваториальных, «межпассатных» противоречий в океанах, причина которых, как стало ясно, крылась в поперечной (меридиональной) неравномерности скорости зональных ветров (пассатов). Так как, однако, приведенные выводы были сделаны без учета эффекта вращения Земли, то для распространения их на проблему экваториальных противотечений необходимо было учесть и последнее обстоятельство. Это и было сделано автором [4] путем обобщения теории Экмана о течениях в однородном океане на случай поперечной неравномерности ветра (рассматривалось, так же как и в первоначальных моделях, срединное сечение некоторой вытянутой в направлении ветра замкнутой области). В итоге выяснилось, что все **главные особенности** экваториальных противотечений являются следствием сгонно-нагонного эффекта поперечной неравномерности зональных ветров (пассатов) над океанами. Весьма примечательно, что многие количественные и качественные результаты теории, построенной на основе такой, казалось, чрезмерной идеализации реальных условий, как однородность морской воды, все же очень хорошо совпали с данными наблюдений. Так, например, теория указывала способ определения границ противотечений, опирающийся на фактическое изменение зональной составляющей касательного трения ветра над океанами. Определенные этим способом границы противотечений летом в Тихом океане почти в точности копировали их положение в действительности [12].

Важные теоретические результаты, полученные весьма простым путем для однородного моря постоянной глубины, естественно, породили желание обобщить их и на случай меняющейся глубины мелкого моря или озера. Полученные автором в итоге подобного обобщения результаты [13] не только позволили сделать выводы о распределении противотечений, концентрирующихся в море переменной глубины в области желобообразных углублений дна, но, главное, позволили решить и другую загадку, а именно вопрос о причинах «аномальной» (антициклонической) циркуляции в Аральском море, осуществляющейся там, в противоположность другим внутренним морям, **по часовой стрелке.** Применяя выводы теории автора к условиям Аральского моря, Симонов [14] показал, что одной из причин упомянутого странного явления является характерная для Аральского моря антициклоническая неравномерность преобладающих там северных ветров (вследствие близости пустыни Каракум), когда скорость ветра убывает слева направо, если смотреть по ветру. Главная же причина аномальной циркуляции в Аральском море в свете результатов теории автора кроется в специфическом распределении глубин этого моря, характеризующемся удлиненной впадиной дна в его западной части.

Я остановился подробно на этих первых теоретических результатах с целью обратить внимание на то, что основным достижением *автора отнюдь не явилось, как думают (и пишут)* многие, создание «метода полных потоков». Этот метод, по сути дела, был лишь техническим средством для дальнейшей математической дедукции из высказанных автором идей (применительно уже к бароклинному океану). Несомненно, что более важными явились сами эти идеи, достаточно убедительно оформленные на простейших моделях ограниченной, однородной жидкости еще до зарождения метода полных потоков. Следует помнить, что ценность теории **прежде всего** заключается **не в средстве дедукции**, а в системе взглядов, положенных в ее основу.

Дальнейшим шагом в объяснении перечисленных выше загадочных особенностей морской и океанической циркуляции явилось уже отмеченное мною замечательно эффектное открытие Стоммела [7] причины западной интенсификации океанических течений, ярко выраженной в виде таких «узких» и «быстрых» течений, как Гольфстрим и Куросио.

Максимально упростив математическую дедукцию, оставив в поставленной им задаче лишь самое существенное, что и составляло, на мой взгляд, главную ценность его рекогносцировочного подхода, Стоммел на простейшей модели однородной жидкости совершенно прозрачно показал, что причина западной интенсификации течений кроется в широтном изменении параметра Кориолиса (так называемый β-эффект). Это важнейшее в океанографии открытие Стоммела, носившее вследствие упрощенной трактовки явления лишь качественный характер, естественно, нуждалось в дальнейшей и более совершенной математической дедукции для получения уже не только качественных, но и количественных результатов. Такое развитие теории Стоммела было с успехом предпринято Манком [15], который для математической дедукции воспользовался методом «полных потоков», за несколько лет до этого предложенным автором настоящих строк [16] для изучения ветровой циркуляции в неоднородном, бароклинном океане с учетом эффекта «бокового» трения.

Дополнив бигармоническое уравнение полных потоков членом, учитывающим широтное изменение параметра Кориолиса в форме, предложенной еще Экманом [17], и схематически задавая реальное поле ветра над замкнутым пространством «прямоугольного океана», Манк с большим искусством получил в замкнутой форме сравнительно простое решение сложного обобщенного уравнения полных потоков, легко поддающееся качественному и количественному анализу. В результате этого анализа Манк убедительно показал, что почти все главные качественные и количественные особенности горизонтальной океанической циркуляции обусловлены совместным эффектом ограниченности океанов, завихренности ветровых полей над ними, широтным изменением силы Кориолиса и боковым трением.

В итоге этого выдающегося исследования Манка была создана стройная теория горизонтальной океанической циркуляции, отвечавшая почти на все главные вопросы этой проблемы, вытекавшие из данных наблюдений. Оценивая значение результатов, полученных Стоммелом и Манком, некоторые видные мореведы-теоретики высказываются даже в том смысле, что главный успех в построении теории горизонтальной океанической циркуляции принадлежит не Стоммелу, а Манку. Собственная скромная оценка полученных им результатов вполне естественна для высказываний Стоммела в его книге о Гольфстриме [18]. Но с этим взглядом никак нельзя согласиться, если его поддерживают такие крупные теоретики, как, например, Р. Стюарт [19] и А. Саркисян [8]. Ведь следует учесть, что трудности, с которыми пришлось столкнуться Стоммелу и Манку, не только были большими, но, главное, эти трудности были **совершенно различными.** Трудности, которые пришлось преодолеть Стоммелу, носили характер эвристических трудностей, с которыми сталкивается любой пионер, делающий решающий шаг в науке. Стоммел при этом не только высказал совершенно новый, глубокий взгляд на причину западной интенсификации океанической циркуляции, но и дедуктивно обосновал правильность этого нового взгляда.

Заметим при этом, что новатором Стоммел оказался не только в смысле нового взгляда на причину явления, но и в методе дедукции, так как он одновременно и, по-видимому, независимо от Свердрупа [20] воспользовался представлением об интегральном (по вертикали) потоке водных масс и линейным приближением для широтного изменения силы Кориолиса. Несмотря на примитивность математической дедукции Стоммела, она была все же достаточно убедительной как для него самого, так и для остальных океанографов, на которых результаты Стоммела произвели поистине ошеломляющее впечатление.

Трудности, с которыми пришлось столкнуться Манку, были совершенно иного рода и носили скорее **технический** характер. В самом деле, Манк не только проникся основной идеей Стоммела, достаточно убедительно обоснованной последним, но не испытал и трудностей в выборе метода математической дедукции, так как бигармоническое уравнение полных потоков было ему хорошо известно, так же как были ясны выводы, связанные с интегральным представлением горизонтальной циркуляции океана. Однако, несмотря на подготовленную во многих отношениях почву для исследования Манка, ему пришлось проявить много тонкой изобретательности для того, чтобы поразительно простым путем получить легко осязаемое решение значительно более сложной, чем у Стоммела, математической задачи, анализируя которое он пришел к разнообразным и важным выводам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Дарвин Ч. Воспоминания о развитии моего ума и характера (автобиография). Дневник жизни и работы. Изд. АН СССР М., 1957, стр. 136.
2. Sverdrup H. U. New international aspects of oceanography. Proc. Amer. Philos. Soc., vol. 91, No. 1, 1947, pp. 75—78.
3. Maxwell J. Cl. Treatise on Electricity and Magnetism. Dover Publication, 1954.
4. Штокман В. Б. Экваториальные противотечения в океанах. Гидрометеоиздат, Л., 1948.
5. Штокман В. Б. Ветровой нагон и горизонтальная циркуляция в замкнутом море небольшой глубины. Изв. АН СССР, серия геогр. и геофиз., № 1, 1941.
6. Goldsborough G. R. On ocean currents produced by winds. Proc. Roy. Soc., ser. A, 148, 1935, pp. 47—58.

7. Stommel H. The westward intensification of wind-driven ocean currents. Trans. Amer. Geophys. Union, vol. 29, No. 2, 1948.
8. Саркисян А. С. Основы теории и расчет океанических течений. Гидрометеоиздат, Л., 1966.
9. Макаров С. О. Океанографические работы. Географгиз, М., 1950, стр. 207.
10. Зубов Н. Н. Динамический метод обработки океанологических наблюдений. ЦУЕГМС, Л.—М., 1935.
11. Книпович Н. М. Гидрологические исследования в Каспийском море в 1914—1915 гг. Труды Каспийской экспедиции 1914—1915 гг., I, 1921, стр. 137.
12. Штокман В. Б. Теоретическое определение меридиональных границ зональной циркуляции в северной половине Тихого океана. Метеорология и гидрология, № 5, 1956.
13. Штокман В. Б. Влияние рельефа дна и поперечной неравномерности ветра на горизонтальную циркуляцию в мелком море или водохранилище. Метеорология и гидрология, № 8, 1953.
14. Симонов А. И. К вопросу о причинах антициклонической циркуляции вод Аральского моря. Метеорология и гидрология, № 2, 1954.
15. *Munk* W. H. On the wind-driven ocean circulation. J. Meteor., vol. 7, No. 2, 1950.
16. Штокман В. Б. Уравнения поля полных потоков, возбуждаемых ветром в неоднородном море. ДАН СССР, т. LIV, № 5, 1946.
17. Ekman V. W. Über Horizontalzirkulation bei winderzeugten Meeresströmungen. Ark. f. Mat. Astr. och. Fys, Bd. 17, Nr. 26, 1923.
18. Stommel H. Gulf Stream. Cambr. Univ. Press., 1958.
19. Stewart R. W. The influence of friction on inertial models of oceanic circulation. Studies on Oceanogr., Hidaka Annivers. Volume, Tokyo, 1964.
20. Sverdrup H. U. Wind-driven currents in a baroclinic ocean; with application to the equatorial currents of the eastern Pacific. Proc. Nat. Acad. Sci., vol. 33, No. 11, 1947

СОДЕРЖАНИЕ

Штокман Владимир Борисович

ИЗБРАННЫЕ ТРУДЫ ПО ФИЗИКЕ МОРЯ

Редактор *З. И. Мироненко*
Технич. редактор *Г. С. Орлова*
Корректоры: *Г. С. Макарова* и *О. Д. Рейнгеверц*

Сдано в набор 21/I 1970 г. Подписано к печати 27/V 1970 г. Бумага тип. № 1 60×90[1]/16. Бум. л. 10,5+1 вкл. Печ. л. 21,125. Уч.-изд. л. 20,25. М-12267. Индекс ОЛ-303. Тираж 1300 экз.
Заказ № 4. Цена 1 руб. 50 коп.

Гидрометеорологическое издательство. Ленинград, В-53, 2-я линия, д. 23.

Ленинградская типография № 8 Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Ленинград, Прачечный пер., д. 6.