Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В. Н. ВЕРЕТЕННИКОВ

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-методическое пособие

РГГМУ

Санкт-Петербург
2008

УДК 51

Веретенников В.Н. Высшая математика. Математический анализ функций одной переменной – СПб.: Изд. РГГМУ. 2008. – 254 с.

В учебном пособии предпринята попытка, реализовать идею изложения дисциплины высшая математика в виде компактного пособия-конспекта, содержащего, тем не менее, весь излагаемый на лекциях материал. Уровень подробности доказательств рассчитан на студента, активно работающего над лекциями.

После изложения каждой темы выделены базисные понятия, основные задачи, базисные методы решения основных задач. Дан перечень умений и навыков, которыми должен владеть студент, изучивший курс.

Пособие, не заменяя собой обстоятельного учебника, может быть полезно для текущей работы над курсом для самостоятельной работы и при подготовке к экзаменам студентам гидрометеорологического университета.

Рецензент: Вагер Б.Г., д-р физ.-мат. наук, проф. СПбАСУ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Переход на двухуровенную систему образования сопровождается перестройкой курса высшей математики с целью более экономного и эффективного его преподавания. Для этого нужно более четко представлять структуру курса, уметь выделять в каждом разделе основное, чтобы сосредоточить на нем внимание, как преподавателей, так и студентов.

Основу любого курса составляют понятия, среди которых есть базисные (основные, фундаментальные). Если эти понятия не выделены, не показаны в развитии, не показана их связь с приложениями, студент курс усваивает плохо, фрагментарно, формально. Поставленные цели преподавания должны сопровождаться конкретным перечнем знаний и умений, наличие которых у студентов можно проверить и оценить с помощью соответствующего контроля.

Учебная дисциплина отличается от науки, прежде всего, тем, что в ней имеется технология преподавания. Поэтому базис дисциплины должен состоять из теоретической части и технологической части.

Технологическая часть базиса включает в себя:

1. Организационные формы работы – технологию изучения дисциплины по разделам (лекции, практические занятия, контрольные мероприятия).
2. Организационные формы контроля – контроль усвоения курса, теоретической и практической частей (экзамены, зачеты, коллоквиумы, контрольные и проверочные работы, защиты отчетов по контрольным мероприятиям и др.).
3. Методическое обеспечение – учебную литературу, банки тестов и задач для контроля.

Теоретическая часть базиса включает в себя:

1. Методологию дисциплины.
2. Цели курса.
3. Разделы курса, обеспечивающие направление специальности студента.
4. Базисные понятия разделов.
5. Основные задачи, решаемые в разделах.

6. Базисные методы решения основных задач.

7. Перечень теоретических знаний, умений и навыков в решении задач.

8. Образцы задач, фиксирующие уровень задач для упражнений и контроля.

Методология

Методология обеспечивает вклад математики, как дисциплины, в формирование научной картины мира, мировоззрения студента. Это отражается в прикладной направленности курса, т. е. в рассмотрении и решении математическими методами прикладных задач, в указании происхождения основных понятий математики из решения практических задач (например, классические задачи, приводящие к понятиям производной и интеграла). Мировоззренческая направленность курса обеспечивается также историческим аспектом преподавания.

Методология дисциплины отражена в перечнях разделов, основных задач, знаний и умений.

Цели курса:

1. Знание базисных математических понятий, базисных методов решения основных задач, возникающих при изучении общенаучных, общеинженерных и специальных дисциплин, в практике работы инженера, доказательств наиболее важных теорем, лежащих в основе этих методов, и выясняющих свойства базисных понятий.

2. Умения решать основные математические задачи с доведением решения до практически приемлемого результата.

3. Умение ориентироваться в математическом аппарате, содержащемся в литературных источниках, работать с математическими таблицами, справочниками, выбирать простейшие математические модели для описания физических явлений специальности из числа изученных в курсе, обрабатывать экспериментальный материал.

4. Общие представления о применении математических методов при построении и исследовании моделей сложных гидрометеорологических явлений

5. Цели курса – базисные понятия, основные задачи и методы их решения – конкретизируются в каждом изучаемом разделе. При этом в каждом разделе вводятся 3 блока.

Блок А включает:

1. Темы раздела.
2. Базисные понятия раздела.
3. Основные задачи раздела.
4. Базисные методы решения основных задач.

Блок В включает:

1. Перечень знаний на уровне понятий, определений, описаний, формулировок.
2. Перечень знаний, требующих доказательств и выводов.
3. Перечень умений и навыков в решении задач.

Перечень знаний и умений блока В – это, по сути дела, экзаменационная программа и программа практического контроля (контрольные мероприятия, экзаменационные задачи).

Входной тест предшествует изучению раздела и состоит из простых задач и вопросов, выясняющих, готов ли студент к восприятию раздела.

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Математический анализ – раздел математики, в котором изучаются функции. Основу математического анализа составляют дифференциальное и интегральное исчисление, теория рядов. Заслуга открытия дифференциального и интегрального исчисления (или анализа бесконечно малых функций) принадлежит Ньютону[1] и Лейбницу[2]. Развитие анализа бесконечно малых оказало огромное влияние на прогресс науки и техники.

1. Вещественные (действительные) числа

Математические теории, как правило, находят свой выход в том, что позволяют перерабатывать один набор чисел (исходные данные) в другой набор чисел, составляющих промежуточную или окончательную цель вычислений. По этой причине особое место в математике и ее приложениях занимают числовые функции (точнее, так

---

[1] Исаак Ньютон (Isaac Newton, 1643-1727) – английский математик и физик.

[2] Готфрид Вильгельм Лейбниц (Got fried Wilhelm Leibniz, 1646-1715) – немецкий математик и философ.

называемые дифференцируемые числовые функции). Они составляют главный объект исследования классического анализа. Но сколь-нибудь полное с точки зрения современной математики описание свойств этих функций невозможно без точного определения множества вещественных чисел, на котором эти функции действуют.

Число в математике, как ***время*** в физике, известно каждому, но непонятно лишь специалистам. Это одна из основных математических абстракций. Рассказу о ней может быть посвящен самостоятельный насыщенный курс. Здесь же мы имеем в виду, только свести воедино то, что читателю в основном известно о вещественных числах из средней школы, выделив в виде аксиом фундаментальные и независимые свойства чисел. При этом наша цель состоит в том, чтобы дать точное, пригодное для последующего математического использования определение вещественных чисел и обратить особое внимание на их свойство непрерывности, являющееся зародышем предельного перехода – основной неарифметической операции анализа.

1.1. Аксиоматика и некоторые общие свойства

Определение множества вещественных чисел.

Определение. Множество $\mathbf{R}$ называется множеством ***действительных*** (***вещественных***) ***чисел***, а его элементы – ***действительными*** (***вещественными***) ***числами***, если выполнен следующий комплекс условий, называемый аксиоматикой вещественных чисел:

(I) Аксиомы сложения

Определено отображение (операция сложения), сопоставляющее каждой упорядоченной паре $(x; y)$ элементов x, y из $\mathbf{R}$ некоторый элемент $x + y \in \mathbf{R}$, называемый суммой x и y. При этом выполнены следующие условия:

Существует ***нейтральный*** элемент 0 (называемый в случае сложения ***нулем***) такой, что для любого $x \in \mathbf{R}$

$$x + 0 = 0 + x = x .$$

Для любого элемента $x \in \mathbf{R}$ имеется элемент $-x \in \mathbf{R}$, называемый ***противоположным*** к x, такой, что

$$x + (-x) - (-x) + x = 0 .$$

Операция сложения ассоциативна, т. е. для любых элементов x, y, z из $\mathbf{R}$ выполнено

$$x+(y+z)=(x+y)+z.$$

Операция сложения коммутативна, т. е. для любых элементов x, y из $\mathbf{R}$ выполнено

$$x+y=y+x.$$

(II) Аксиомы умножения

Определено отображение (операция умножения), сопоставляющее каждой упорядоченной паре $(x; y)$ элементов x, y из $\mathbf{R}$ некоторый элемент $x \cdot y \in \mathbf{R}$, называемый произведением x и y. При этом выполнены следующие условия:

1. Существует нейтральный элемент $1 \in \mathbf{R}\setminus 0$ (называемый в случае умножения ***единицей***) такой, что $\forall x \in \mathbf{R}\setminus 0$

$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x.$$

2. Для любого элемента $x \in \mathbf{R}\setminus 0$ имеется элемент $x^{-1} \in \mathbf{R}\setminus 0$, называемый ***обратным***, такой, что

$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

3. Операция умножения ассоциативна, т. е. для любых x, y, z из $\mathbf{R}\setminus 0$

$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z.$$

4. Операция умножения коммутативна, т. е. для любых x, y из $\mathbf{R}\setminus 0$

$$x \cdot y = y \cdot x.$$

(I, II) Связь сложения и умножения

Умножение дистрибутивно по отношению к сложению, т.е. $\forall x,\ y,\ z \in \mathbf{R}$

$$(x+y)z = xz + yz.$$

(III) Аксиомы порядка

Между элементами $\mathbf{R}$ имеется отношение $\le$, т. е. для элементов x, y из $\mathbf{R}$ установлено, выполняется $x \le y$ или нет. При этом должны выполняться следующие условия:

1. $\forall x \in \mathbf{R} \quad (x \le x)$.
2. $(x \le y) \wedge (y \le x) \Rightarrow (x = y)$.
3. $(x \le y) \wedge (y \le z) \Rightarrow (x \le z)$.

4. $\forall x \in \mathbf{R} \quad \forall y \in \mathbf{R} \quad (x \le y) \vee (y \le x)$.

Отношение $\le$ в R называется отношением неравенства.

Множество, между некоторыми элементами которого имеется отношение, удовлетворяющее аксиомам 0, 1, 2, как известно, называется частично упорядоченным, а если, сверх того, выполнена аксиома 3, т. е. любые два элемента множества сравнимы, множество называется линейно упорядоченным.

Таким образом, множество вещественных чисел линейно упорядочено отношением неравенства между его элементами.

(I, III) Связь сложения и порядка в $\mathbf{R}$

Если x, y, z – элементы $\mathbf{R}$, то

$$(x \le y) \Rightarrow (x + z \le y + z).$$

(II, III) Связь умножения и порядка в $\mathbf{R}$

Если x, y – элементы R, то

$$(0 \le x) \wedge (0 \le y) \Rightarrow (0 \le x \cdot y).$$

(IV) Аксиома полноты (непрерывности)

Если X и Y – непустые подмножества $\mathbf{R}$, обладающие тем свойством, что для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$ выполнено $x \le y$, то существует такое $c \in \mathbf{R}$, что $x \le c \le y$ для любых элементов $x \in X$ и $y \in Y$.

Этим завершается список аксиом, выполнение которых, на каком бы то ни было множестве $\mathbf{R}$, позволяет считать это множество конкретной реализацией или, как говорят, **моделью вещественных чисел.**

Это определение формально не предполагает никакой предварительной информации о числах, и из него, «включив математическую мысль», опять-таки формально мы должны получить уже в качестве теорем остальные свойства вещественных чисел. По поводу этого аксиоматического формализма хотелось бы сделать несколько неформальных замечаний.

Представьте себе, что вы не прошли стадию от складывания яблок, кубиков или других именованных величин к сложению абстрактных натуральных чисел; что вы не занимались измерением отрезков и не пришли к рациональным числам; что вам неизвестно великое открытие древних о том, что диагональ квадрата несоизмерима с его стороной и потому ее длина не может быть рациональным числом, т. е. нужны иррациональные числа; что у вас нет возникающего в процессе измерений понятия **больше (меньше)**; что вы не иллюстрируете себе порядок, например, образом числовой прямой. Если бы всего этого предварительно не было, то перечисленный набор аксиом не только не воспринимался бы как определенный итог духовного развития, но скорее показался бы, по меньшей мере, странным и, во всяком случае, произвольным плодом фантазии.

Относительно любой абстрактной системы аксиом сразу же возникают, по крайней мере, два вопроса.

Во-первых, совместимы ли эти аксиомы, т. е. существует ли множество, удовлетворяющее всем перечисленным условиям. Это вопрос о **непротиворечивости аксиоматики**.

Во-вторых, однозначно ли данная система аксиом определяет математический объект, т. е., как бы сказали логики, **категорична** ли система аксиом.

Мы не будем здесь обсуждать поставленные выше вопросы и ограничимся только информативными ответами на них.

Положительный ответ на вопрос о непротиворечивости аксиоматики всегда носит условный характер. В отношении чисел он выглядит так: исходя из принятой нами аксиоматики теории множеств, можно построить множество натуральных, затем множество рациональных и, наконец, множество **R** всех вещественных чисел, удовлетворяющее всем перечисленным свойствам.

Некоторые общие алгебраические свойства вещественных чисел

Покажем на примерах, как известные свойства чисел получаются из приведенных аксиом.

a. Следствия аксиом сложения

1. *Во множестве вещественных чисел имеется только один нуль.*

▲ Если 0_1 и 0_2 – нули в R, то по определению нуля находим

$$0_1 = 0_1 + 0_2 = 0_2 + 0_1 = 0_2 \,. \blacktriangledown$$

2. *Во множестве вещественных чисел у каждого элемента имеется единственный противоположный элемент.*

▲ Если x_1 и x_2 – элементы, противоположные $x \in R$, то

$$x_1 = x_1 + 0 = x_1 + (x + x_2) = (x_1 + x) + x_2 = x_2 + (x + x_1) = x_2 + 0 = x_2 .$$ ▼

Здесь мы использовали последовательно определение нуля, определение противоположного элемента, ассоциативность сложения, снова определение противоположного элемента и, наконец, снова определение нуля.

3. *Уравнение* $a + x = b$ в $\mathbf{R}$ *имеет и притом единственное решение* $x = b + (-a)$.

То, что $x = b + (-a)$ есть решение, проверяется непосредственно:

$$a + (b + (-a)) = a + ((-a) + b) = (a + (-a)) + b = 0 + b = b + 0 = b$$

То, что это единственное решение, вытекает из единственности обратного элемента:

$$(a + x = b) \Rightarrow ((a + x) + (-a) = b + (-a)) \Rightarrow ((x + a) + (-a) = b + (-a)),$$

$$(x + (a + (-a) = b + (-a)) \Rightarrow (x + 0 = b = (-a)) \Rightarrow (x = b = (-a)).$$ ▼

Выражение $b + (-a)$ записывается также в виде $b - a$. Этой более короткой и привычной записи мы, как правило, и будем придерживаться.

b. Следствия аксиом умножения

1. *Во множестве вещественных чисел имеется только одна единица.*
2. *Для каждого числа* $x \neq 0$ *имеется только один обратный элемент* x^{-1}.
3. *Уравнение* $a \cdot x = b$ *при* $a \in \mathbf{R} \setminus 0$ *имеет и притом единственное решение* $x = b \cdot a^{-1}$.

Доказательство этих утверждений, разумеется, повторяют доказательства соответствующих утверждений для сложения (с точностью до замены символа и названия операции), поэтому мы их опустим.

c. Следствия аксиомы связи сложения и умножения.

Привлекая дополнительно аксиому (I, II), связывающую сложение и умножение, получаем дальнейшие следствия.

1. *Для любого* $x \in \mathbf{R}$ $x \cdot 0 = 0$.

▲ $x + x \cdot 0 = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x(1 + 0) = x \cdot 1 = x$.

$$(x + x \cdot 0 = x) \Rightarrow (x \cdot 0 = 0)$$

в силу единственности нуля. ▼

2. $(x \cdot y = 0) \Rightarrow (x = 0) \vee (y = 0)$.

▲ Если, например, $y \neq 0$, то из единственности решения уравнения $x \cdot y = 0$ относительно x находим $x = 0 \cdot y^{-1} = 0$. ▼

Для любого $x \in \mathrm{R}$ $\quad -x = (-1) \cdot x$.

$$▲\ x + (-1) \cdot x = (+(-1))x = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0,$$

и утверждение следует из единственности противоположного элемента. ▼

3. *Для любого* $x \in \mathbf{R}$ $\quad (-1)(-x) = x$.

▲ Следует из 3 и единственности элемента x, противоположного $-x$. ▼

4. *Для любого* $x \in \mathbf{R}$ $\quad (-x)(-x) = x \cdot x$.

$$▲\ (-x)(-x) = ((-1) \cdot x)(-x) = (x \cdot (-1))(-x) = x((-1)(-x)) = x \cdot x.$$

Мы последовательно воспользовались двумя предыдущими утверждениями, а также коммутативностью и ассоциативностью умножения. ▼

d. Следствия аксиом порядка

Отметим сначала, что отношение $x \leq y$ (читается x меньше или равно y) записывают также в виде $y \geq x$ (y больше или равно x); отношение $x \leq y$ при $x \neq y$ записывают в виде $x < y$ (читается x меньше y) или в виде $y > x$ (y больше x) и называют строгим неравенством.

1. *Для любых* $x, y \in \mathbf{R}$ *всегда имеет место в точности одно из соотношений:*

$$x < y, \quad x = y, \quad x > y.$$

▲ Это следует из приведенного определения строгого неравенства и аксиом III.1 и III.3. ▼

2. *Для любых чисел* x, y из $\mathbf{R}$

$$(x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z),$$
$$(x \leq z) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z).$$

▲ Приведем для примера доказательство последнего утверждения

По аксиоме III.2 транзитивности отношения неравенства имеем

$$(x \le y) \wedge (y < z) \Leftrightarrow (x \le y) \wedge (y \le z) \wedge (y \ne z) \Rightarrow (x \le z).$$

Осталось проверить, что $x \ne z$. Но в противном случае

$$(x \le y) \wedge (y < z) \Leftrightarrow (z \le y) \wedge (y < z) \Leftrightarrow (z \le y) \wedge (y \le z) \wedge (y \ne z)$$

В силу аксиомы III.1 отсюда следует

$$(y = z) \wedge (y \ne z)$$

– противоречие. ▼

е. Следствия аксиом связи порядка со сложением и умножением.

Если в дополнение к аксиомам сложения, умножения и порядка использовать аксиомы (I, III), (II, III), связывающие порядок с арифметическими операциями, то можно получить, например, следующие утверждения:

1. *Для любых чисел* x, y, z, w из $\mathbf{R}$

$$(x < y) \Rightarrow (x + z) < (y + z),$$

$$(0 < x) \Rightarrow (-x < 0),$$

$$(x \le y) \wedge (z \le w) \Rightarrow (x + z \le y + w),$$

$$(x \le y) \wedge (z < w) \Rightarrow (x + z < y + w).$$

▲ Проверим первое из этих утверждений.

По определению строгого неравенства и аксиоме (I, III) имеем

$$(x < y) \Rightarrow (x \le y) \Rightarrow (x + z) \le (y + z).$$

Остается проверить, что $x + z \ne y + z$,

$$((x + z) = (y + z)) \Rightarrow (x = (y + z) - z = y + (z - z) = y),$$

что несовместимо с условием $x < y$. ▼

2. *Если* x, y, z *– числа из* $\mathbf{R}$, *то*

$$(0 < x) \wedge (0 < y) \Rightarrow (0 < x \cdot y),$$

$$(x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow (0 < xy),$$

$$(x < 0) \wedge (0 < y) \Rightarrow (xy < 0),$$

$$(x < y) \wedge (0 < z) \Rightarrow (xz < yz),$$

$$(x < y) \wedge (z < 0) \Rightarrow (yz < xz).$$

▲ Проверим первое из этих утверждений. По определению строгого неравенства и аксиоме (II, III)

$$(0<x)\wedge(0<y)\Rightarrow(0\le x)\wedge(0\le y)\Rightarrow(0\le xy).$$

Кроме того, $0\ne xy$, поскольку, как уже было показано,

$$(x\cdot y=0)\Rightarrow(x=0)\vee(y=0).$$

Проверим еще, например, и третье утверждение:

$$(x<0)\wedge(0<y)\Rightarrow(0<-x)\wedge(0<y)\Rightarrow(0<(-x)\cdot y)\Rightarrow(0<((-1)\cdot x)y)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(0<-1\cdot(xy))\Rightarrow(0<-(xy))\Rightarrow(xy<0).\ \blacktriangledown$$

Читателю предоставляется возможность доказать самостоятельно остальные соотношения, а также проверить, что если в одной из скобок левой части наших утверждений стоит нестрогое неравенство, то следствием его также буде нестрогое неравенство в правой части.

3. $0<1$.

$$\blacktriangle\ 1\in\mathrm{R}\setminus 0,\ \text{т.е.}\ 0\ne 1.$$

Если предположить, что справедливо неравенство $1<0$, то по только что доказанному утверждению

$$(1<0)\wedge(1<0)\Rightarrow(0<1\cdot 1)\Rightarrow(0<1).$$

Но мы знаем, что для любой пары чисел $x,\ y\in\mathrm{R}$ реализуется и притом только одна из возможностей: $x<y$, $x=y$, $x>y$. Поскольку $0\ne 1$, а предположение $1<0$ ведет к несовместимому с ним соотношению $0<1$, остается единственная возможность, указанная в утверждении. $\blacktriangledown$

4. $(0<x)\Rightarrow(0<x^{-1})$,

$(0<x)\wedge(x<y)\Rightarrow(0<y^{-1})\wedge(y^{-1}<x^{-1})$.

$\blacktriangle$ Проверим первое из этих утверждений.

Прежде всего $x^{-1}\ne 0$. Предположив, что $x^{-1}<0$, получим

$$(x^{-1}<0)\wedge(0<x)\Rightarrow(x\cdot x^{-1}<0)\Rightarrow(1<0).$$

Это противоречие завершает доказательство. $\blacktriangledown$

Напомним, что числа, которые больше нуля, называются **положительными**, а числа, меньше нуля, – **отрицательными**.

Таким образом, мы доказали, например, что единица – положительное число, что произведение положительного и отрицательного чисел есть число отрицательное, а величина, обратная положительному числу, также положительна.

Аксиома полноты (непрерывности) и существование верхней (нижней) грани числового множества.

Определение. Говорят, что множество $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}$ ***ограничено сверху*** (***снизу***), если существует число $x \in \mathbf{R}$ такое, что $x \leq c$ (соответственно $c \leq x$) для любого $x \in \mathbf{X}$.

Число c в этом случае называют **верхней** (соответственно **нижней**) **границей** множества X или также **мажорантой (минорантой)** множества X.

Определение. Множество, ограниченное и сверху и снизу, называется ***ограниченным***.

Определение. Элемент $a \in \mathbf{X}$ называется ***наибольшим*** или ***максимальным*** (***наименьшим*** или ***минимальным***) элементом множества $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}$, если $x \leq a$ (соответственно $a \leq x$) для любого элемента $x \in \mathrm{X}$.

Введем обозначения и заодно приведем формальную запись определения максимального и минимального элементов соответственно:

$$(a = \max \mathbf{X}) := (a \in \mathbf{X} \wedge \forall x \in \mathbf{X}(x \leq a)),$$

$$(a = \min \mathbf{X}) := (a \in \mathbf{X} \wedge \forall x \in \mathbf{X}(a \leq x)).$$

Наряду с обозначением $\max \mathrm{X}$ (читается максимум X) и $\min \mathrm{X}$ (читается минимум X) в том же смысле используются соответственно символы $\max\limits_{x \in X} x$ и $\min\limits_{x \in X} x$.

Из аксиомы III.1 порядка сразу следует, что если в числовом множестве есть максимальный (минимальный) элемент, то он только один.

Однако не во всяком даже ограниченном множестве имеется максимальный (минимальный) элемент.

Например, множество $\mathrm{X} = \{x \in \mathrm{R} \mid 0 \leq x < 1\}$ имеет минимальный элемент, но, как легко проверить, не имеет максимального элемента.

Определение. Наименьшее из чисел, ограничивающих множество $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}$ сверху, называется ***верхней гранью*** (или ***точной верхней границей***) множества $\mathbf{X}$.

Обозначение: $\sup \mathbf{X}$ (читается ***супремум*** $\mathbf{X}$) или $\sup\limits_{x \in \mathbf{X}} x$

Это основное определение настоящего пункта. Итак,

$$s = \sup \mathbf{X} := \forall x \in \mathbf{X}((x \le s) \wedge (\forall s' < s \ \exists x' \in \mathbf{X}(s' < x'))).$$

В первой скобке, стоящей справа от определяемого понятия, написано, что s ограничивает X сверху; вторая скобка говорит, что s – минимальное из чисел, обладающих этим свойством. Точнее вторая скобка утверждает, что любое число, меньшее s, уже не является верхней границей X.

Аналогично вводится понятие нижней грани (точной нижней границы) множества X как наибольшей из нижних границ множества $\mathbf{X}$.

Определение.
$i = \inf \mathbf{X} := \forall x \in \mathbf{X}((i \le x) \wedge (\forall i < i' \ \exists x' \in \mathbf{X}(x' < i')))$.

Таким образом, даны следующие определения:

$$\sup \mathbf{X} := \min \{c \in \mathbf{R} \mid \forall x \in \mathbf{X} \ (x \le c)\},$$
$$\inf \mathbf{X} := \max \{c \in \mathbf{R} \mid \forall x \in \mathbf{X} \ (c \le x)\}.$$

1.2. Важнейшие классы вещественных чисел

Натуральные числа и принцип математической индукции.

а. Определение множества натуральных чисел.

Числа вида 1, $1+1$, $(1+1)+1$ и так далее обозначают соответственно символами 1, 2, 3 и так далее и называют натуральными числами.

Принять такое определение может только тот, кто и без него имеет полное представление о натуральных числах, включая их запись, например, в десятичной системе счисления.

Продолжение какого-то процесса далеко не всегда бывает однозначным, поэтому вездесущее «и так далее» на самом деле требует уточнения, которое доставляет фундаментальный принцип математической индукции.

Определение. Множество $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}$ называется ***индуктивным***, если вместе с каждым числом $x \in \mathbf{X}$ ему принадлежит также число $x+1$.

Например, $\mathbf{R}$ является индуктивным множеством; множество положительных чисел также является индуктивным множеством.

Пересечение $X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha$ любого семейства индуктивных множеств X_α, если оно не пусто, является индуктивным множеством.

Действительно,

$$\left(x \in X = \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha\right) \Rightarrow (\forall \alpha \in A \ (x \in X_\alpha)) \Rightarrow (\forall \alpha \in A((x+1) \in X_\alpha)) \Rightarrow$$

$$\left((x+1) \in \bigcap_{\alpha \in A} X_\alpha = X\right)$$

Теперь примем следующее.

Определение. Множеством ***натуральных чисел*** называется наименьшее индуктивное множество, содержащее 1, т. е. пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число 1.

Множество натуральных чисел обозначают символом N; его элементы называются натуральными числами.

Следующий фундаментальный и широко используемый принцип является прямым следствием определения множества натуральных чисел.

b. Принцип математической индукции.

Если подмножество E множества натуральных чисел N таково, что $1 \in N$ и вместе с числом $x \in E$ множеству E принадлежит число $x+1$, то $E = N$.

С помощью этого принципа можно доказать несколько полезных и постоянно в дальнейшем используемых свойств натуральных чисел.

1. Сумма и произведение натуральных чисел является натуральными числами.

2. $(n \in \mathbf{N}) \wedge (n \neq 1) \Rightarrow ((n-1) \in \mathbf{N})$.

3. *Для любого элемента* $n \in \mathbf{N}$ *во множестве* $\{x \in \mathbf{N} \mid n < x\}$

$$\min \{x \in \mathbf{N} \mid n < x\} = n+1.$$

В качестве прямых следствий утверждений 2 и 3 получаем следующие свойства 4, 5, 6 натуральных чисел:

4. $(m \in \mathbf{N}) \wedge (n \in \mathbf{N}) \wedge (n < m) \Rightarrow (n+1 \le m)$.

5. *Число* $(n+1) \in \mathbf{N}$ *непосредственно следует* в $\mathbf{N}$ *за натуральным числом* n, *т. е. нет натуральных чисел* x, *удовлетворяющих условию* $n < x < n+1$, *если* $n \in \mathbf{N}$.

6. *Если* $n \in \mathbf{N}$ и $n \ne 1$, *то число* $(n-1) \in \mathbf{N}$ и $(n-1)$ *непосредственно предшествует числу* n в $\mathbf{N}$, *т. е. нет натуральных чисел* x, *удовлетворяющих условию* $n-1 < x < n$, *если* $n \in \mathbf{N}$.

7. *В любом непустом подмножестве множества натуральных чисел имеется минимальный элемент.*

Рациональные и иррациональные числа

а. Целые числа

Определение. Объединение множества натуральных чисел, множества чисел, противоположных натуральным числам, и нуля называется множеством целых чисел.

Обозначение: $\mathbf{Z}$.

Поскольку сложение и умножение натуральных чисел не выводит за пределы N, то эти же операции над целыми числами не выводят за пределы множества Z.

В том случае, когда для чисел m, $n \in \mathrm{Z}$ число $k = m \cdot n^{-1} \in \mathrm{Z}$, т. е. когда $m = k \cdot n$, где $k \in \mathrm{Z}$, говорят, что целое число m делится на целое число n, или кратно n, или n есть делитель m.

Делимость целых чисел путем надлежащих изменений знаков, т. е. домножением на число –1, если в этом есть необходимость, немедленно приводится к делимости соответствующих натуральных чисел, в рамках которых она и изучается в арифметике.

Напомним без доказательства так называемую основную теорему арифметики, которой при рассмотрении некоторых примеров мы будем пользоваться.

Число $p \in \mathrm{N}$, $p \ne 1$, называется простым, если в N у него нет делителей, отличных от 1 и p.

Основная теорема арифметики. Каждое натуральное число допускает и притом единственное (с точностью до порядка сомножителей) представление в виде произведения

$$n = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k,$$

где $p_1, \ldots, p_k$ – простые числа.

Числа m, $n \in \mathrm{Z}$ называются взаимно простыми, если у них нет общих делителей, отличных от 1 и -1.

Из приведенной теоремы, в частности, видно, что если произведение $m \cdot n$ делится на простое число p, то одно из чисел m, n также делится на p.

b. Рациональные числа.

Определение. Числа вида $m \cdot n^{-1}$, где m, $n \in \mathbf{Z}$, называются ***рациональными***.

Обозначение: Q

Таким образом, упорядоченная пара (m, n) целых чисел определяет рациональное число $q = m \cdot n^{-1}$, если $n \neq 0$.

Число $q = m \cdot n^{-1}$ записывают также в виде отношения [3] m и n или так называемой рациональной дроби $\frac{m}{n}$.

Правила действий с рациональными числами, относящиеся к такой форме их представления дробями, изучавшиеся в школе, немедленно вытекают из определения рационального числа и аксиом вещественных чисел. В частности, «от умножения числителя и знаменателя дроби на одно и то же отличное от нуля целое число величина дроби не изменится», т. е. дроби $\frac{mk}{nk}$ и $\frac{m}{n}$ представляют одно и то же рациональное число. В самом деле, поскольку $(nk)(k^{-1}n^{-1}) = 1$, т. е. $(n \cdot k)^{-1} = k^{-1} \cdot n^{-1}$, то $(mk)(nk)^{-1} = (mk)(k^{-1}n^{-1}) = m \cdot n^{-1}$.

Таким образом, различные упорядоченные пары (m, n) и (mk, nk) задают одно и то же рациональное число. Следовательно, после соответствующих сокращений любое рациональное число можно задать упорядоченной парой взаимно простых целых чисел.

С другой стороны, если пары (m_1, n_1) и (m_2, n_2) задают одно и то же рациональное число, т. е. $m_1 \cdot n_1^{-1} = m_2 \cdot n_2^{-1}$, то $m_1 n_2 = m_2 n_1$,

[3] **Q**– начальная буква quotient – отношение.

и если, например, m_1 и n_1 взаимно просты, то в силу упомянутого следствия основной теоремы арифметики $n_2 \cdot n_1^{-1} = m_2 \cdot m_1^{-1} = k \in \mathrm{Z}$.

Мы показали, таким образом, что две упорядоченные пары (m_1, n_1), (m_2, n_2) задают одно и то же рациональное число тогда и только тогда, когда они пропорциональны, т. е. существует число $k \in \mathrm{Z}$ такое, что, например, $m_2 = km_1$ и $n_2 = kn_1$.

с. Иррациональные числа.

Определение. Вещественные числа, не являющиеся рациональными, называются ***иррациональными***.

Классическим примером иррационального вещественного числа является $\sqrt{2}$, т. е. число $s \in \mathrm{R}$ такое, что $s > 0$ и $s^2 = 2$. Иррациональность $\sqrt{2}$ в силу теоремы Пифагора как раз эквивалентна утверждению о несоизмеримости диагонали и стороны квадрата.

Можно показать, что в некотором смысле почти все вещественные числа иррациональны. Среди иррациональных чисел выделяют еще так называемые алгебраические иррациональности и трансцендентные числа.

Вещественное число называется алгебраическим, если оно является корнем некоторого алгебраического уравнения

$$a_0 x^n + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

с рациональными (или, что эквивалентно, с целыми) коэффициентами.

В противном случае число называется трансцендентным. Только в 1882 г. было доказано, что знаменитое геометрическое число π трансцендентно[4].

---

[4] π– число, равное в евклидовой геометрии отношению длины окружности к ее диаметру. Отсюда общепринятое с XVIII века обозначение этого числа начальной буквой греческого слова περιφερια – периферия (окружность). Трансцендентность π доказана немецким математиком Ф. Линдеманом. Из трансцендентности π, в частности, вытекает невозможность построения циркулем и линейкой отрезка длины π (задача о спрямлении окружности), как и неразрешимость, этими средствами древней задачи о квадратуре круга.

Принцип Архимеда[5]

Переходим к важному как в теоретическом отношении, так и в плане конкретного использования чисел при измерениях и вычислениях принципу Архимеда. Принцип Архимеда, в сущности, отражает свойства натуральных и целых чисел, связанные с аксиомой полноты (непрерывности).

***1.* В любом непустом ограниченном сверху подмножестве множества натуральных чисел имеется максимальный элемент.**

***2.* Множество натуральных чисел неограниченно сверху.**

▲ В противном случае существовало бы натуральное максимальное число. Но $n < n+1$. ▼

***3.* В любом непустом ограниченном сверху подмножестве множества целых чисел имеется максимальный элемент.**

***4.* В любом непустом ограниченном снизу подмножестве множества натуральных чисел имеется минимальный элемент.**

***5.* Множество целых чисел неограниченно ни сверху, ни снизу.**

***6.* Принцип Архимеда. Если фиксировать произвольное положительное число h, то для любого вещественного числа x найдется и притом единственное целое число k такое, что $(k-1)h \le h < kh$.**

***7.* Для любого положительного числа ε существует натуральное число n такое, что $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$**

▲ По принципу Архимеда найдется $n \in Z$ такое, что $1 < \varepsilon \cdot n$. Поскольку $0 < 1$ и $0 < \varepsilon$, имеем $0 < n$. Таким образом, $n \in N$ и $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$. ▼

***8.* Ели число $x \in \mathbf{R}$ таково, что $0 \le x$ и для любого $n \in \mathbf{N}$ $x < \frac{1}{n}$, то $x = 0$.**

[5] Архимед (287-212 гг. до нашей эры) – гениальный греческий ученый, про которого один из основоположников анализа Лейбниц в свое время сказал: «Изучая труды Архимеда, перестаешь удивляться успехам современных математиков».

9. Для любых чисел $a, b \in \mathbf{R}$ ***таких, что*** $a < b$***, найдется рациональное число*** $r \in \mathbf{Q}$ ***такое, что*** $a < r < b$.

10. Для любого числа $x \in \mathbf{R}$ ***существует и притом единственное целое число*** $k \in \mathbf{Z}$ ***такое, что*** $k \le x < k - 1$.

Указанное число k обозначается $[x]$ и называется целой частью числа x. Величина $\{x\} := x - [x]$ называется дробной частью числа x. Итак,

$$x = [x] + \{x\},$$

причем $\{x\} \ge 0$.

Геометрическая интерпретация множества вещественных чисел

а. Числовая ось

По отношению к вещественным числам часто используют образный геометрический язык, связанный с тем обстоятельством, что, как в общих чертах из школы известно, в силу аксиом геометрии между точками прямой ℓ и множеством R вещественных чисел можно установить взаимно однозначное соответствие $f : \ell \to \mathrm{R}$. Причем это соответствие связано с движениями прямой. А именно, если T – параллельный перенос прямой ℓ по себе, то существует число $t \in \mathrm{R}$ (зависящее только от T) такое, что $f(T(x)) = f(x) + t$ для любой точки $x \in \ell$.

Число, соответствующее точке $x \in \ell$ называется **координатой** точки x. Ввиду взаимной однозначности координату точки часто называют просто точкой. Например, вместо фразы «отметим точку, координата которой 1», говорят «отметим точку 1». Прямую линию ℓ при наличии указанного соответствия $f : \ell \to \mathrm{R}$ называют **координатной осью, числовой осью** или **числовой прямой**. Само множество R вещественных чисел также часто называют числовой прямой, и его элементы – точками числовой прямой.

Как отмечалось, отображение $f : \ell \to \mathrm{R}$, задающее на ℓ координаты, таково, что при параллельном переносе T координаты образов точек прямой ℓ отличаются от координат самих точек на одну и ту же величину $t \in \mathrm{R}$. Ввиду этого f полностью определяется указанием точки с координатой 0 и точки с координатой 1 или, короче, точки нуль, называемой началом координат, и точки 1. Отрезок, определяемый этими точками, называется единичным отрезком. Направление, определяемое лучом с вершиной 0, содержащим точку 1, называется положительным, а движение в этом направлении (от 0 к 1) – движением слева направо. В соответствии с этим соглашением 1 лежит правее 0, а 0 – левее 1.

Описанное сопоставление точкам прямой их координат доставляет наглядную модель как отношению порядка в множестве R (отсюда термин **линейная упорядоченность**), так и аксиоме полноты или непрерывности множества $\mathbf{R}$, которая на геометрическом языке означает, что в прямой ℓ «нет дыр», разбивающих ее на два не имеющих общих точек куска (такое разбиение осуществляется некоторой точкой прямой ℓ).

b. Некоторые наиболее употребительные числовые множества.

Введем следующие обозначения и названия для перечисленных ниже числовых множеств:

$(a;b) := \{x \in \mathrm{R} \mid a < x < b\}$ – интервал ab;

$[a;b] := \{x \in \mathrm{R} \mid a \le x \le b\}$ – отрезок ab;

$(a;b] := \{x \in \mathrm{R} \mid a < x \le b\}$ – полуинтервал ab, содержащий конец b;

$[a;b) := \{x \in \mathrm{R} \mid a \le x < b\}$ – полуинтервал ab, содержащий конец a.

> **Определение**. Интервалы, отрезки и полуинтервалы называются числовыми промежутками или просто промежутками. Числа, определяющие промежуток, называются его концами.

Величина $b-a$ называется **длиной** промежутка ab. Если I – некоторый промежуток, то длину его мы будем обозначать через $|I|$.

Множества

$$(a;+\infty) := \{x \in \mathbf{R} \mid a < x\},$$
$$[a;+\infty) := \{x \in \mathbf{R} \mid a \le x\},$$
$$(-\infty;b) := \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\},$$
$$(-\infty;b] := \{x \in \mathbf{R} \mid x \le b\},$$

$$(-\infty; +\infty) := \mathbf{R}$$

принято называть **неограниченными промежутками.**

В соответствии с таким употреблением символов $+\infty$ (читается «плюс бесконечность») и $-\infty$ (читается «минус бесконечность») для обозначения неограниченности числового множества X сверху (снизу), принято писать $\sup X = +\infty$ $(\inf X = -\infty)$.

Определение. Интервал, содержащий точку $x \in \mathbf{R}$, будем называть ***окрестностью*** этой точки.

В частности, при $\delta > 0$ интервал $(x - \delta; x + \delta)$ называется δ-*окрестностью* точки x. Его длина 2δ.

Расстояние между числами x, $y \in \mathrm{R}$ измеряется длиной промежутка, концами которого они являются.

Чтобы не разбираться, «где при этом лево, а где право», т. е. $x < y$ или $y < x$, и чему равна длина $y - x$ или $x - y$, можно использовать полезную функцию

$$|x| = \begin{cases} x & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ -x & \text{при} \, x < 0, \end{cases}$$

называемую модулем или абсолютной величиной числа.

Определение. ***Расстоянием*** между x, $y \in \mathbf{R}$ называется величина $|x - y|$.

Расстояние неотрицательно, равно нулю только при совпадении x и y; расстояние от x до y и от y до x одно и то же, ибо

$$|x - y| = |y - x|;$$

наконец, если $z \in \mathrm{R}$, то

$$|x - y| \leq |x - z| + |z - y|,$$

т. е. имеет место так называемое неравенство треугольника.

Неравенство треугольника следует из свойства абсолютной величины числа, которое также называется неравенством треугольника (ибо получается из предыдущего при $z = 0$ и замене y на $-y$). А именно, для любых чисел x, y справедливо неравенство

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

причем равенство в нем имеет место в том и только в том случае, когда оба числа x, y неотрицательны или положительны.

▲ Если $0 \le x$ и $0 \le y$, то $0 \le x+y$, $|x+y| = x+y$, $|x| = x$, $|y| = y$ и равенство установлено.

Если
$x \le 0$ и $y \le 0$, то $x+y \le 0$, $|x+y| = -(x+y) = -x-y$, $|x| = -x$, $|y| = -y$ и опять равенство имеет место.

Пусть теперь одно из чисел отрицательно, а другое положительно, например, $x < 0 < y$.

Тогда либо $x < x+y \le 0$, либо $0 \le x+y < y$. В первом случае $|x+y| < |x|$, во втором $|x+y| < |y|$, т. е. в обоих случаях $|x+y| < |x| + |y|$. ▼

Используя принцип индукции, можно проверить, что

$$|x_1 + \ldots x_n| \le |x_1| + \ldots |x_n|,$$

причем равенство имеет место, если и только если все числа $x_1, \ldots, x_n$ одновременно неотрицательны или одновременно неположительны.

Число $\frac{a+b}{2}$ часто называют серединой или центром промежутка с концами a, b, поскольку оно равноудалено от концов промежутка.

В частности, точка $x \in \mathrm{R}$ является центром своей δ-окрестности $(x-\delta; x+\delta)$, и все точки δ-окрестности удалены от x меньше чем на δ.

1.3. Основные леммы, связанные с полнотой множества вещественных чисел

Остановимся на нескольких принципах, каждый из которых можно было бы положить в основу построения теории вещественных чисел в качестве аксиомы полноты. Эти принципы названы основными леммами в соответствии с их широким использованием во всевозможных доказательствах теорем анализа.

а. Лемма о вложенных отрезках (принцип Коши[6]- Кантора).

Определение. Функцию f натурального аргумента называют ***последовательностью*** или, полнее, ***последовательностью элементов множества*** $\mathbf{X}$.

Значение $f(n)$ функции f, соответствующее числу $n \in \mathrm{N}$, часто обозначают через x_n и называют n-м членом последовательности.

Определение. Пусть $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_n, \ldots$ – последовательность каких-то множеств. Если

$$\mathbf{X}_1 \supset \mathbf{X}_2 \supset \ldots \supset \mathbf{X}_n \supset \ldots \text{ т. е. } \forall n \in \mathbf{N} \quad (\mathbf{X}_n \supset \mathbf{X}_{n+1}),$$

то говорят, что имеется последовательность ***вложенных*** множеств.

Лемма. Для любой последовательности $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots$ вложенных отрезков найдется точка $c \in \mathrm{R}$, принадлежащая всем этим отрезкам.

Если, кроме того, известно, что для любого $\varepsilon > 0$ в последовательности можно найти отрезок I_k, длина которого $|I_k| < \varepsilon$, то c – единственная общая точка всех отрезков.

▲ Заметим, прежде всего, что для любых двух отрезков $I_m = [a_m; b_m]$, $I_n = [a_n; b_n]$ нашей последовательности $a_m \le b_n$. Действительно, в противном случае мы получили бы $a_n \le b_n < a_m \le b_m$, т. е. отрезки I_m, I_n не имели бы общих точек, в то время как один из них (имеющий больший номер) должен содержаться в другом.

Таким образом, для числовых множеств

$\mathrm{A} = \{a_m,\ m \in \mathrm{N}\}$, $\mathrm{B} = \{b_n, n \in \mathrm{N}\}$ выполнены условия аксиомы полноты, в силу которой найдется число $c \in \mathrm{R}$ такое, что $\forall a_m \in \mathrm{A}$, $\forall b \in \mathrm{B}$ выполнено $a_m \le c \le b_n$. В частности, $a_n \le c \le b_n$

---

[6] Э. Борель (1871-1956) – известный французский математик, специалист в области теории функций.

для любого $n \in \mathrm{N}$. Но это и означает, что точка c принадлежит всем отрезкам I_n.

Пусть теперь c_1 и c_2 – две точки, обладающие эти свойством. Если они различны и, например, $c_1 < c_2$, то при любом $n \in \mathrm{N}$ $a_n \le c_1 < c_2 \le b_n$, поэтому $0 < c_2 - c_1 < b_n - a_n$ и длина каждого отрезка нашей последовательности не может быть меньше положительной величины $c_2 - c_1$. Значит, если в последовательности есть отрезки сколь угодно малой длины, то общая точка у них единственная. ▼

b. Лемма о конечном покрытии (принцип Бореля– Лебега[7]).

Определение. Говорят, что система $\mathbf{S} = \{\mathbf{X}\}$ множеств $\mathbf{X}$ ***покрывает*** множество $\mathbf{Y}$, если $\mathbf{Y} \subset \bigcup_{\mathbf{X} \in \mathbf{S}} \mathbf{X}$ (т. е. если любой элемент y множества $\mathbf{Y}$ содержится, по крайней мере, в одном из множеств $\mathbf{X}$ системы $\mathbf{S}$).

Подмножество множества $\mathrm{S} = \{\mathrm{X}\}$, являющегося системой множеств, будем называть подсистемой системы *s*. Таким образом, подсистема системы множеств сама является системой множеств того же типа.

Лемма. В любой системе интервалов, покрывающей отрезок, имеется конечная подсистема, покрывающая этот отрезок.

c. Лемма о предельной точке (принцип Больцано[8]- Вейерштрасса[9]).

Напомним, что окрестностью точки $x \in \mathrm{R}$ мы назвали интервал, содержащий эту точку; δ-окрестностью точки x назвали интервал $(x - \delta; x + \delta)$.

Определение. Точка $p \in \mathbf{R}$ называется ***предельной точкой*** множества $\mathbf{X} \subset \mathbf{R}$, если любая окрестность этой точки содержит бесконечное подмножество множества $\mathbf{X}$.

---

[7] А. Лебег (1875-1941) – известный французский математик, специалист в области теории функций.

[8] Б. Больцано (1781-1848) – чешский математик и философ.

[9] К. Вейерштрасс (1816-1897) – немецкий математик, уделявший большое внимание логическому обоснованию математического анализа.

Это условие, очевидно, равносильно тому, что в любой окрестности точки p есть, по крайней мере, одна, не совпадающая с p, точка множества X.

Приведем несколько примеров.

Если $\mathrm{X} = \left\{ \frac{1}{n} \in \mathrm{R} \;\middle|\; n \in \mathrm{N} \right\}$, то предельной для X является только точка $0 \in \mathrm{R}$.

Для интервала $(a; b)$ предельной является каждая точка отрезка $[a; b]$, и других предельных точек в этом случае нет.

Для интервала $(a; b)$ предельной является каждая точка отрезка $[a; b]$, и других предельных точек в этом случае нет.

Для множества Q рациональных чисел предельной является каждая точка R, ибо, как мы знаем, в любом интервале вещественных чисел имеются рациональные числа.

Лемма. Всякое бесконечное ограниченное числовое множество имеет, по крайней мере, одну предельную точку.

1.5. Счетные и несчетные множества

Сейчас мы сделаем небольшое, но весьма полезное для дальнейшего, добавление к тем сведениям о множествах, которые уже были изложены.

а. Мощность множества (кардинальные числа)

Говорят, что множество X равномощно множеству Y, если существует биективное отображение X на Y, т. е. каждому элементу $x \in \mathrm{X}$ сопоставляется элемент $y \in \mathrm{Y}$, причем различным элементам множества X отвечают различные элементы множества Y и каждый элемент $y \in \mathrm{Y}$ сопоставлен некоторому элементу множества X.

Описательно говоря, каждый элемент $x \in \mathrm{X}$ сидит на своем месте $y \in \mathrm{Y}$, все элементы X сидят, и свободных мест $y \in \mathrm{Y}$ нет.

Ясно, что введенное отношение является отношением эквивалентности, поэтому мы будем писать в этом случае $\mathrm{X} \Leftrightarrow \mathrm{Y}$ (иил $\mathrm{X} \sim \mathrm{Y}$).

Отношение равномощности разбивает совокупность всех множеств на классы эквивалентных между собой множеств. Множества одного класса эквивалентности имеют одинаковое количество элементов (равномощны), а разных классов – разное количество элементов.

Класс, которому принадлежит множество X, называется мощностью множества X, кардиналом или кардинальным числом множества и обозначается символом $\mathrm{card}X$. Если $X \Leftrightarrow Y$, то пишут, что $\mathrm{card}X = \mathrm{card}Y$.

Говорят, что кардинальное число множества X не больше кардинального числа множества Y и пишут $\mathrm{card}X \le \mathrm{card}Y$, если X равномощно некоторому подмножеству Y.

Возможность для множества быть равномощным своей части является характерным признаком бесконечных множеств, который Дедекинд[10] даже предложил считать определением бесконечного множества. Таким образом, множество называется конечным (по Дедекинду), если оно не равномощно никакому своему собственному подмножеству; в противном случае оно называется бесконечным.

Подобно тому, как отношение неравенства упорядочивает числа на числовой прямой, введенное отношение неравенства упорядочивает мощности или кардинальные числа множеств. А именно, можно доказать, что справедливы следующие свойства построенного отношения:

1. $(\mathrm{card}X \le \mathrm{card}Y) \wedge (\mathrm{card}Y \le \mathrm{card}Z) \Rightarrow (\mathrm{card}X \le \mathrm{card}Z)$.

2. $(\mathrm{card}X \le \mathrm{card}Y) \wedge (\mathrm{card}Y \le \mathrm{card}X) \Rightarrow (\mathrm{card}X = \mathrm{card}Y)$ (теорема Шредера-Бернштейна[11]).

3. $\forall X,\ \forall Y\ (\mathrm{card}X \le \mathrm{card}Y) \vee (\mathrm{card}Y \le \mathrm{card}X)$ (теорема К)

Таким образом, класс кардинальных чисел оказывается линейно упорядоченным.

---

[10] Р. Дедекинд (1831-1916) – немецкий математик-алгебраист, принявший активное участие в развитии теории действительного числа, впервые предложивший аксиоматику множества натуральных чисел, называемую обычно аксиоматикой Пеано – по имени Пеано (1852-1932), итальянского математика, сформулировавшего ее несколько позже.

[11] Ф. Бернштейн (1878-1956) – немецкий математик, ученик Г. Кантора, Э. Шредер (1841-1902) – немецкий математик.

Говорят, что мощность множества X меньше мощности множества Y, и пишут $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$, если $\operatorname{card} X < \operatorname{card} Y$ и в то же время $\operatorname{card} X \neq \operatorname{card} Y$.

Пусть, как и прежде, $\varnothing$ – знак пустого множества, а $P(X)$ – символ множества всех подмножеств множества X.

Имеет место следующая теорема, открытая Кантором.

Теорема. $\operatorname{card} X < \operatorname{card} P(X)$.

Эта теорема, в частности, показывает, что если бесконечные множества существуют, то и «бесконечности» бывают разные.

b. Счетные множества

Определение. Множество $\mathbf{X}$ называется ***счетным***, если оно равномощно множеству $\mathbf{N}$ натуральных чисел, т. е. $\operatorname{card} \mathbf{X} = \operatorname{card} \mathbf{N}$.

Утверждение. *1) Бесконечное подмножество счетного множества счетно.*

2) Объединение множеств конечной или счетной системы счетных множеств есть множество счетное.

Из утверждения следует, что любое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно. Если про множество известно, что оно либо конечно, либо счетно, то говорят, что оно не более чем счетно (равносильная запись $\operatorname{card} X \leq \operatorname{card} N$).

Мы можем, в частности, утверждать теперь, что объединение не более чем счетного семейства не более чем счетных множеств само не более чем счетно.

Следствия. 1) $\operatorname{card} Z = \operatorname{card} N$.

2) $\operatorname{card} N^2 = \operatorname{card} N$. Этот результат означает, что прямое произведение счетных множеств счетно.

3) $\operatorname{card} Q = \operatorname{card} N$, т. е. множество рациональных чисел счетно.

4) Множество алгебраических чисел счетно.

c. Мощность континуума

Определение. Множество $\mathbf{R}$ вещественных чисел называют также ***числовым континуумом***[12], а его мощность – ***мощностью континуума***.

Теорема (Кантор). $\operatorname{card} N < \operatorname{card} R$.

Теорема утверждает, что бесконечное множество R имеет мощность, большую, чем бесконечное множество N.

Следствия. 1) $Q \neq R$, и существуют иррациональные числа.

2) Существуют трансцендентные числа, поскольку множество алгебраических чисел счетно.

2. Предел

Обсуждая различные стороны понятия вещественного числа, мы, в частности, отметили, что при измерении реальных физических величин получаются последовательности их приближенных значений, с которыми затем и приходится работать.

Такое положение дел немедленно вызывает, по крайней мере, три следующих вопроса:

1)Какое отношение имеет полученная последовательность приближений к измеряемой величине? Мы имеем в виду математическую сторону дела, т. е. мы хотим получить точную запись того, что вообще означает выражение «последовательность приближенных значений» и в какой мере такая последовательность описывает значение величины; однозначно ли это описание или одна и та же последовательность может отвечать разным значениям измеряемой величины.

2)Как связаны операции над приближенными значениями величин с теми же операциями над их точными значениями и чем характеризуются те операции, при выполнении которых допустима подмена точных значений величин приближенными?

3)Как по самой последовательности чисел определить, может ли она быть последовательностью сколь угодно точных приближений значения некоторой величины?

Ответом на эти и близкие к ним вопросы служит понятие предела функции – одно из основных понятий анализа.

---

12 Continuum – (лат) непрерывное, сплошное.

Изложение теории предела мы начнем с рассмотрения предела функции натурального аргумента (последовательностей) ввиду уже выяснившейся фундаментальной роли этих функций.

2.1. Предел последовательности

Начало изучению понятия предела числовой последовательности положено уже в элементарной математике. Примерами таких последовательностей могут служить: последовательность всех членов арифметической и геометрической последовательностей; последовательность периметров правильных n-угольников, вписанных в данную окружность; последовательность $x_1 = 1$, $x_2 = 1.4$, $x_2 = 1.41$, ... приближенных значений $\sqrt{2}$.

2.1.1. Определения и примеры

Уточним и расширим понятие числовой последовательности.

Определение 1. Если каждому числу n из натурального ряда чисел $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ по некоторому закону поставлено в соответствие вещественное число x_n, то множество вещественных чисел

$$x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$$

называется ***числовой последовательностью*** или просто ***последовательностью***.

Другими словами, числовую последовательность можно определить как множество пар чисел $(n; x_n)$, в которых первое число принимает последовательно значения $1, 2, 3, \ldots$.

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называются элементами (или членами) последовательности. Символ x_n – общим элементом (n-членом) последовательности; а число n – его номером.

Сокращенно последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ будем обозначать символом $\{x_n\}$.

Замечание. Не следует путать последовательность $\{x_n\}$ с множеством $\{x_n\}$. Так, например, последовательность $\{5\} = 5, 5, \ldots, 5, \ldots$, в то время как множество $\{5\}$ состоит из одного элемента 5.

Пример 1.1. Символ $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ обозначает последовательность $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

Последовательность считается заданной, если указан способ получения любого ее члена.

1. Последовательности могут быть заданы посредством ***описания*** их словами:

- последовательность всех натуральных чисел $1, 2, 3, \ldots$;
- последовательность всех членов, обратных натуральным числам $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$;
- последовательность всех нечетных чисел первого десятка 1, 3, 5, 7, 9;
- последовательность $1, 0, 1, 0, \ldots$, в которой на местах с нечетными номерами находится 1, а на местах с четными номерами находится 0;
- последовательность $5, 5, 5, 5, \ldots$, на каждом месте которой находится число 5.

2. Другой способ задания последовательности состоит в том, что дают формулу ее общего члена.

Пример 1.2. Формула $x_n = 1 + (-1)^n$ задает последовательность: $0, 2, 0, 2, \ldots$.

Формула $x_n = \frac{1}{n}$ задает последовательность: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$.

Формула $x_n = \frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$ задает последовательность: $1, 0, 1, 0, \ldots$.

Если формула общего члена известна, можно по этой формуле вычислить любой член последовательности, не вычисляя при этом предыдущих членов последовательности.

3. Бывают случаи, когда формула общего члена последовательности неизвестна, но известно правило, пользуясь которым, можно

вычислить любой ее член. В таких случаях последовательность считается также заданной.

Правило приближенного извлечения квадратного корня из чисел известно, поэтому можно считать заданной последовательность

$$1; 1.4; 1.41; \ldots$$

десятичных приближенных значений $\sqrt{2}$ с точностью до 1; 0,1; 0,01, с недостатком.

При любом способе задания последовательности каждый член ее определяется номером занимаемого места. Поэтому возможно такое определение последовательности.

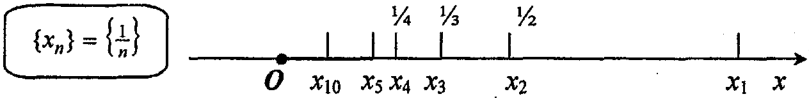
> **Определение 2.** Функция f, областью определения которой является множество натуральных чисел, называется последовательностью.

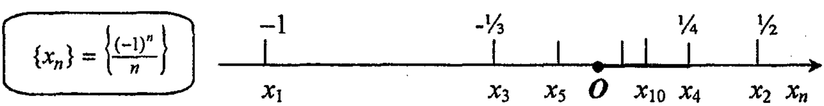
Значения $f(n)$ функции f называются членами последовательности. Их принято обозначать символом элемента того множества, в которое идет отображение, снабжая символ соответствующим индексом аргумента, $x_n = f(n)$.

Саму последовательность $\{x_n\} = x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ называют последовательностью в X или последовательностью элементов множества X.

По самому определению, последовательность содержит бесконечное число элементов: любые два ее элемента отличаются, по крайней мере, своими номерами.

Геометрически последовательность изображается на координатной прямой в виде последовательности точек, координаты которых равны соответствующим элементам последовательности.





Арифметические операции над последовательностями.

Арифметические операции над числовыми последовательностями вводят следующим образом. Пусть даны последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$.

Произведением последовательности $\{x_n\}$ на вещественное число λ, назовем последовательность

$\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n, \ldots$, т. е. $\lambda \cdot \{x_n\} = \{\lambda x_n\}$.

Суммой данных последовательностей назовем последовательность $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n, \ldots$, т. е.

$$\{x_n\} + \{y_n\} = \{x_n + y_n\}.$$

Аналогично определяется разность последовательностей. Рассмотрим понятие более общее, чем сумма и разность последовательностей, а именно, линейную комбинацию последовательностей. Так называется последовательность $\{z_n\}$, члены которой образованы по правилу $z_n = \lambda_1 x_n + \lambda_2 y_n$, где λ_1, λ_2 – заданные вещественные числа.

Произведением данных последовательностей назовем последовательность $x_1 y_1, x_2 y_2, \ldots, x_n y_n, \cdots$, т. е.

$$\{x_n\} \cdot \{y_n\} = \{x_n y_n\}.$$

Частным данных последовательностей назовем последовательность $\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \ldots, \frac{x_n}{y_n}, \ldots$, если все члены последовательности $\{y_n\}$ отличны от нуля, т. е.

$\frac{\{x_n\}}{\{y_n\}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$, $y_n \neq 0$ ($y_n \neq 0$ означает, что значения y_n отличны от нуля при любом n).

2.1.2. Ограниченные и неограниченные последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной сверху***, если существует число M такое, что $\forall n \in \mathbf{N} \quad (x_n \leq M)$.

Геометрически из данного определения следует, что если последовательность ограничена сверху, то все ее элементы принадлежат промежутку $(-\infty; M]$

Пример 2.1. Последовательность $\ldots, -n, -(n-1), \ldots, -3, -2, -1$ ограничена сверху: любой член этой последовательности меньше нуля.

. **Определение**. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной снизу***, если существует число m такое, что $\forall n \in \mathbf{N} \quad (x_n \geq m)$.

Геометрически из данного определения следует, что если последовательность ограничена снизу, то все ее элементы принадлежат промежутку $[m; +\infty)$.

Пример 2.2. Последовательность $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ ограничена снизу: любой член этой последовательности не меньше единицы.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если она ограничена и сверху, и снизу, т. е. если существуют числа m и M такие, что

$$\forall n \in \mathbf{N} \quad m \leq x_n \leq M.$$

Геометрически это означает, что все точки, изображающие члены последовательности $\{x_n\}$, лежат на отрезке $[m; M]$.

Пример 2.3. Последовательность $\{x_n\}$ с общим членом $x_n = \frac{n+1}{n}$ ограничена: при всяком n имеем $1 < x_n \leq 2$.

Иногда бывает удобнее другое, равносильное определение. Пусть $A = \max\{|m|; |M|\}$.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует число $A > 0$ такое, что для любого n выполнено неравенство $|x_n| \leq A$.

Сформулируем определение ограниченности последовательности с помощью логических символов:

$$\boxed{(\text{последовательность } \{x_n\} \text{ ограничена}) \Leftrightarrow \exists A > 0 \,\big|\, \forall n \quad |x_n| \leq A}$$

Определение неограниченной последовательности получаем из предыдущего заменой квантора существования на квантор общности, квантора общности на квантор существования и обращения неравенства:

$$\boxed{(\text{последовательность } \{x_n\} \text{ неограничена}) \Leftrightarrow \forall A > 0 \,\exists n \mid x_n > A}$$

Пример 2.4. Последовательность $\{(-1)^n n\}$ – неограниченная.

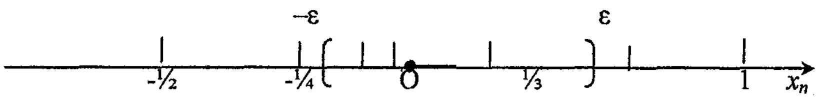
▲ В самом деле, каково бы ни было число $A > 0$, среди элементов x_n этой последовательности найдутся элементы, для которых будет выполняться неравенство $|\, x_n \,| > A$ ▼

2.1.3. Сходящиеся последовательности

Прежде чем дать определение понятия **предел**, рассмотрим следующие примеры.

Пример 3.1. Рассмотрим последовательность

$$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots, \frac{(-1)^{n+1}}{n}, \ldots.$$



Наблюдая за расположением точек последовательности, легко заметить, что они ближе и ближе подходят к нулю, накапливаясь около нуля.

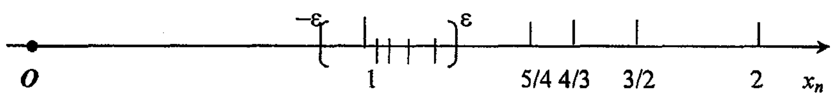
Пусть ε – любое положительное число. Возьмем на числовой оси отрезок длиной 2ε с центром в точке O. Найдется такой номер N, что всякая точка последовательности с номером большим N, будет находиться внутри этого отрезка.

Число N, конечно, зависит от числа ε. Чем меньше ε, тем вообще больше будет N. Если, например, $\varepsilon = \frac{1}{10}$, за N можно принять 10.

Действительно, точки $\frac{1}{11}, -\frac{1}{12}, \frac{1}{13}, -\frac{1}{14}, \ldots$ все находятся внутри отрезка $\left(-\frac{1}{10}; \frac{1}{10}\right)$.

Конечно, за N можно здесь принять и любое целое число, больше 10. Например, можно считать, что $N=100$, так как точки $\frac{1}{101}, -\frac{1}{102}, \ldots$ опять все находятся внутри отрезка $\left(-\frac{1}{100}; \frac{1}{100}\right)$.

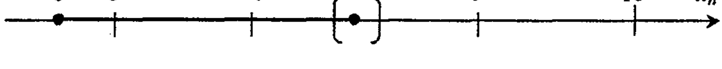
Пример 3.2. Рассмотрим последовательность $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \ldots,$ общий член которой $x_n = \frac{n+1}{n}$; она изображается на числовой оси последовательностью точек, накапливающихся около 1. Возьмем на числовой оси отрезок длиной 2ε с центром в точке 1.



Здесь также найдется такой номер N (N и здесь, конечно, зависит от ε), что всякая точка последовательности с номером, большим N, будет находиться внутри этого отрезка или, что все равно, на расстоянии, меньшем ε от 1. Пусть, например, $\varepsilon = \frac{1}{25}$. Все точки $\frac{27}{26}, \frac{28}{27}, \frac{29}{28}, \ldots$ находятся от 1 на расстоянии, меньшем чем $\frac{1}{25}$. Так, первая из этих точек находится от 1 на расстоянии $\frac{1}{26}$, вторая – на расстоянии $\frac{1}{27}$ и т. д. Таким образом, при $\varepsilon = \frac{1}{25}$ за N можно принять 25 (а также любое целое число, большее, чем 25).

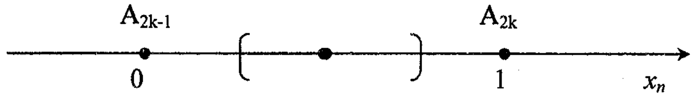
Отличие рассмотренной последовательности от последовательности, рассмотренной в примере 4.1, заключается только в том, что здесь точки последовательности накапливаются не около 0, а около 1 и что все точки последовательности расположены справа от 1, в то время как в примере 4.1 они расположены справа и слева от 0.

Пример 3.3. Рассмотрим последовательность $1, 4, 9, 16, \ldots,$ общий член которой $x_n = n^2$. Она изображается на числовой оси последовательностью точек, которые нигде не накапливаются.



Возьмем на числовой оси отрезок длиной 1 с центром в произвольной точке. Здесь не удается указать такой номер N, что всякая точка с номером, большим N, будет лежать внутри этого отрезка.

Пример 3.4. Рассмотрим последовательность $0, 1, 0, 1, \ldots$, общий член которой $x_n = \frac{1+(-1)^n}{2}$. Она изображается на числовой оси последовательностью точек $A_1, A_2, \ldots$. Точки с нечетными номерами совпадают с нулем, а точки с четными номерами совпадают с 1.



Возьмем на числовой оси отрезок длиной $\frac{1}{2}$ с центром в произвольной точке. Здесь не удается указать такой номер N, что всякая точка с номером, большим N, будет лежать внутри этого отрезка.

Введем важное понятие предела числовой последовательности.

> **Определение**. Число $a \in \mathbf{R}$ называется ***пределом*** последовательности $\{x_n\}$, если для любого $\varepsilon < 0$ существует номер N такой, что при всех $n > N$ выполняется неравенство
>
> $$|x_n - a| < \varepsilon. \qquad (3.1)$$

Обозначения: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ или $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$.

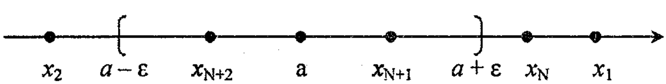
Читается: x_n стремится к a, когда n стремится к бесконечности ($\lim$es (лат.) – предел).

Запишем приведенную формулировку определения предела в логической символике:

$$\boxed{(\lim_{n\to\infty} x_n = a) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists N \in \mathbf{N})\ (\forall n > N) \Rightarrow (|x_n - a| < \varepsilon).}$$

Геометрический смысл предела последовательности

Изобразим члены последовательности $\{x_n\}$ точками числовой оси.



Неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, равносильное двойному неравенству $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$, означает, что точка x_n находится в ε – окрестности точки a.

Таким образом, число a есть предел последовательности $\{x_n\}$, если какова бы ни была ε-окрестность точки a, найдется такой номер N, что все точки x_n с номерами $n > N$ будут содержаться в этой окрестности точки a, т. е. в интервале $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$; вне этого интервала может оказаться лишь конечное множество точек данной последовательности.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***сходящейся***, если она имеет (конечный) предел.

Последовательность, не имеющая предела, называется ***расходящейся***.

Пример 3.5. Последовательность $\{x_n\}$, все члены которой равны одному и тому же числу a (стационарная последовательность), имеет предел, равный этому числу a.

Пример 3.6. Последовательность $\left\{3 + \frac{1}{n}\right\}$ с общим членом $x_n = 3 + \frac{1}{n}$ сходится и имеет предел $a = 3$.

▲ Докажем, что это действительно так. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем натуральное число N такое, что при всех значениях $n > N$ будет верно неравенство

$$|x_n - 1| = \left|3 + \frac{1}{n} - 3\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon. \qquad (3.2)$$

Решим неравенство $\frac{1}{n} < \varepsilon$, считая n неизвестным:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Если взять в качестве N целое число, большее или равное числу $\frac{1}{\varepsilon}$, то для всех $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ будет выполняться соотношение

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon,$$

а, следовательно, и неравенство (4.2). Согласно определению, это означает, что $\lim_{n\to\infty} x_n = 3$. ▼

Номер N в определении понятия предела, вообще говоря, зависит от ε: $N = N(\varepsilon)$.

Так, в приведенном примере при $\varepsilon = 0.1$, в качестве N можно взять число 10 (или любое большее), а при $\varepsilon = 0.01$ в качестве N следует брать число, не меньшее, чем 100.

Замечание. Номер N, фигурирующий в определении понятия предела последовательности, определяется заданием числа ε неоднозначно в следующем смысле: если неравенство (4.1) выполнено при всех $n > N_1$, то оно выполнено и при $n > N_2$, где $N_2 > N_1$. Как правило, не возникает необходимости искать среди этих номеров наименьший.

2.2. Свойства предела последовательности

2.2.1. Общие свойства

Мы выделим в эту группу те свойства, которыми обладают, как будет видно из дальнейшего, не только числовые последовательности, хотя здесь мы эти свойства будем рассматривать только для числовых последовательностей.

Последовательность, принимающую только одно значение, будем называть постоянной.

Определение. Если существуют число a и номер N такие, что $x_n = a$ при любом значении $n > N$, то последовательность $\{x_n\}$ будем называть ***финально постоянной*** (или ***стационарной***, см. пример 3.5).

Теорема 2.1. а) Финально постоянная последовательность сходится.

б) Любая окрестность предела последовательности содержит все члены последовательности, за исключением конечного их числа.

в) Последовательность не может иметь двух различных пределов.

г) Сходящаяся последовательность ограничена.

▲ а) Если $x_n = a$ при $n > N$, то для любой окрестности точки a имеем $x_n \in (a-\varepsilon;\, a+\varepsilon)$ при $n > N$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

б) Утверждение непосредственно следует из определения предела последовательности.

в) Это важнейший пункт теоремы. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a_2$. Если $a_1 \neq a_2$, то фиксируем непересекающиеся окрестности точек a_1 и a_2.

В качестве таковых можно взять, например, ε-окрестности этих точек при $\varepsilon = \frac{1}{2}|a_1 - a_2|$.

По определению предела найдем числа N_1 и N_2 так, что $\forall n > N_1 \ (x_n \in (a_1-\varepsilon;\, a_1+\varepsilon))$ и $\forall n > N_2 \ (x_n \in (a_2-\varepsilon;\, a_2+\varepsilon))$. Тогда при $n > \max\{N_1;\, N_2\}$ получим $x_n \in (a_1-\varepsilon;\, a_1+\varepsilon) \cap (a_2-\varepsilon;\, a_2+\varepsilon)$. Но это невозможно, поскольку $(a_1-\varepsilon;\, a_1+\varepsilon) \cap (a_2-\varepsilon;\, a_2+\varepsilon) = \varnothing$.

г) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Полагая в определении предела $\varepsilon = 1$, найдем номер N такой, что

$$\forall n > N \quad (|x_n - a| < 1).$$

Значит, при $n > N$ имеем $|x_n| < |a| + 1$. Если теперь взять $M > \max\{|x|, \ldots, |x_n|, |a|+1\}$, то получим, что $\forall n \in N \ (|x_n| < \mathrm{M})$. ▼

2.2.2. Предельный переход и арифметические операции

Теорема 2.2. Пусть $\{x_n\}, \{y_n\}$ – числовые последовательности. Если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, то

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$; (2.1)

b) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = a - b$; (2.2)

c) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$; (2.3)

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$, *если* $y_n \neq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$ *и* $b \neq 0$. (2.4)

▲ a) Для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N_1 такой, что для всех $n > N_1$ будет верно неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.5}$$

Аналогично найдется номер N_2 такой, что для всех $n > N_2$ будем иметь

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.6}$$

Положим $N = max\{N_1; N_2\}$. Тогда для всякого $n > N$ будут одновременно выполняться неравенства (2.5) и (2.6), поэтому для всех $n > N$ будем иметь

$$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n -$$

$$- b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Согласно определению, это означает, что последовательность $\{x_n + y_n\}$ сходится и имеет место равенство (2.1). ▼

Теорема остается справедливой для суммы любого конечного числа сходящихся последовательностей.

Похожими рассуждениями доказываются пункты b) - d).

2.2.3. Предельный переход и неравенства

Теорема 2.3. a) Пусть $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ – две сходящиеся последовательности, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Если $a < b$, то найдется номер $N \in N$ такой, что при любом $n > N$ выполнено неравенство $x_n < y_n$.

b) Пусть последовательности $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ таковы, что при любом $n > N \in \mathrm{N}$ имеет место соотношение $x_n \leq y_n \leq z_n$. Если при этом последовательности $\{x_n\}$, $\{z_n\}$ сходятся к одному и тому же пределу, то последовательность $\{y_n\}$ также сходится и к этому же пределу.

▲ a) Возьмем число c такое, что $a < c < b$. По определению предела найдем числа N_1 и N_2 так, чтобы при любом $n > N_1$ иметь $|x_n - a| < c - a$ и при любом $n > N_2$ иметь $|y_n - b| < b - c$. Тогда при $n > N = max\{N_1; N_2\}$ получим

$$x_n < a + (c - a) = c = b - (b - c) < y_n$$

b) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. По числу $\varepsilon > 0$ найдем числа N_1 и N_2 так, чтобы при любом $n > N_1$ иметь $a - \varepsilon < x_n$ и при любом $n > N_2$ иметь $z_n < a + \varepsilon$. Тогда при $n > N = max\{N_1; N_2\}$ получим

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le a + \varepsilon \text{ или } |y_n - a| < \varepsilon,$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$. ▼

Следствие. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

Если существует номер N такой, что при любом значении $n > N$;

a) $x_n > y_n$, то $a \ge b$;

b) $x_n \ge y_n$, то $a \ge b$;

c) $x_n > b$, то $a \ge b$;

d) $x_n \ge b$, то $a \ge b$.

▲ Рассуждая от противного, из пункта a) теоремы немедленно получаем первые два утверждения. Третье и четвертое утверждения суть частные случаи первых двух, получающиеся при $y_n = b$. ▼

2.2.4. Вопросы существования предела последовательности

Критерий Коши

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***фундаментальной*** (или ***последовательностью Коши***), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой номер $N \in \mathbf{N}$, что из $n > N$ и $m > N$ следует $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Теорема 2.4 (критерий Коши сходимости последовательности). Числовая последовательность сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Пример 4.1. Последовательность $(-1)^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ не имеет предела, поскольку она не является фундаментальной. Хотя это и видно, но все же проведем формальную проверку. Отрицание утверждения, что последовательность $\{x_n\}$ фундаментальная, выглядит так:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall N \in \mathbf{N} \quad \exists m > N \quad (|x_m - x_n| \geq \varepsilon),$$

т. е. найдется $\varepsilon > 0$ такое, что при любом $N \in N$ найдутся числа n, m, большие N, для которых $|x_m - x_n| \geq \varepsilon$.

В нашем случае достаточно положить $\varepsilon = 1$. Тогда при любом $N \in N$ будем иметь

$$|x_{N+1} - x_{N+2}| = |1 - (-1)| = 2 > 1 = \varepsilon.$$

Критерий существования предела монотонной последовательности

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей***, если

$$\forall n \in \mathbf{N} \ (x_n < x_{n+1});$$

неубывающей, если $\forall n \in \mathbf{N} \ (x_n \leq x_{n+1})$;

невозрастающей, если $\forall n \in \mathbf{N} \ (x_n \geq x_{n+1})$;

убывающей, если $\forall n \in \mathbf{N} \ (x_n > x_{n+1})$.

Последовательности этих четырех типов называют ***монотонными последовательностями***.

Теорема 2.5 (Вейерштрасса). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

▲ Так как последовательность $\{x_n\}$ ограничена, то множество ее элементов имеет точную верхнюю и нижнюю грани. Пусть A – точная верхняя грань множества элементов последовательности $\{x_n\}$. Покажем, что если $\{x_n\}$ – неубывающая последовательность, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

Согласно определению точной верхней грани, для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать элемент x_N такой, что $x_N > A-\varepsilon$ и $x_N < A$. Из этих двух неравенств вытекает двойное неравенство $0 \le A - x_N < \varepsilon$. Так как $\{x_n\}$ – неубывающая последовательность, то при $\forall n \ge N$ верны неравенства

$$0 \le A - x_n \le A - x_N.$$

Отсюда следует, что

$$0 \le A - x_n < \varepsilon,$$

или

$$|x_n - A| < \varepsilon \quad \forall n > N.$$

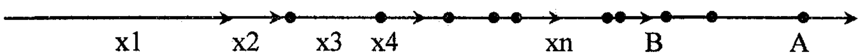
Это означает, что число A есть предел последовательности $\{x_n\}$.

Аналогично доказывается, что если $\{x_n\}$ – не возрастающая ограниченная последовательность и A – точная нижняя грань множества элементов последовательности, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. ▼

Замечание. Монотонность не является необходимым условием сходимости последовательности. Например, немонотонная последовательность $\left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}$ сходится: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Геометрический смысл теоремы

Пусть $\{x_n\}$ – монотонная возрастающая последовательность. Это значит, что переход от каждой точки последовательности к следующей производится посредством некоторого передвижения вправо по числовой оси. Если последовательность возрастает нестрого, то, возможно, что $x_k = x_{k+1}$, и таким образом, переход от x_k к x_{k+1} производится без продвижения по числовой оси.



Если последовательность $\{x_n\}$ при этом ограничена, то существует такая точка A, правее которой не может находиться ни одна точка последовательности. Точка A является преградой, через которую точка последовательности перешагнуть не может.

Теорема утверждает, что существует точка B, к которой последовательность сходится. Эта точка B может совпадать с точкой A, а может находиться левее A.

Подпоследовательность. Бесконечно большие и бесконечно малые последовательности

Определение. Если $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ – некоторая последовательность, а

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots -$$

возрастающая последовательность натуральных чисел, то последовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$$

называется подпоследовательностью последовательности $\{x_n\}$.

В частности, например, последовательность $1, 3, 5, \dots$ натуральных нечетных чисел, взятых в их естественном порядке. Является подпоследовательностью последовательности $1, 2, 3, \dots$. Но последовательность $3, 1, 5, 7, 9, \dots$ уже не является подпоследовательностью последовательности $1, 2, 3, \dots$.

Лемма (Больцано—Вейерштрасс). Каждая ограниченная последовательность вещественных чисел содержит сходящуюся подпоследовательность.

Определение. Последовательность $\{x_n\}$ называется ***бесконечно большой*** (***стремится к*** **плюс** ***бесконечности***), если для каждого числа $M > 0$ найдется номер $N \in \mathbf{N}$ такой, что $x_n > M$ при $n > N$.

Символическая запись определения бесконечно большой последовательности:

$$\forall M>0 \quad \exists N\in\mathbf{N} \mid \forall n>N \quad x_n>M$$

Мы пишем в этом случае, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty \quad$ (или $x_n \to +\infty$).

Запишем два аналогичных определения в логических обозначениях:

$$(\lim_{n\to\infty} x_n=-\infty \quad (\text{иил } x_n\to-\infty)) \Leftrightarrow$$
$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists N\in N)\ (\forall n>N)\ (x_n<\varepsilon),$$

$$(\lim_{n\to\infty} x_n=\infty \quad (\text{иил } x_n\to\infty)) \Leftrightarrow$$
$$(\forall A>0)\ (\exists N\in N)\ (\forall n>N)\ (|\,x_n\,|>A).$$

В последних двух случаях говорят соответственно: последовательность $\{x_n\}$ стремится к *минус* бесконечности (бесконечно малая последовательность) и последовательность $\{x_n\}$ стремится к бесконечности.

Последовательности, стремящиеся к бесконечности, мы не причисляем к сходящимся последовательностям.

Заметим, что последовательность может быть неограниченной, но не стремится ни к плюс бесконечности, ни к минус бесконечности, ни просто к бесконечности.

Например, $x_n=n^{(-1)^n}$.

Теорема 2.6. Если $\{x_n\}$ – бесконечно большая последовательность и все ее члены отличны от нуля, то последовательность $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ бесконечно малая, и, обратно, если $\{\alpha_n\}$ – бесконечно малая последовательность и $\alpha_n\neq 0$, то последовательность $\left\{\frac{1}{\alpha_n}\right\}$ – бесконечно большая.

Основные свойства бесконечно малых последовательностей

Теорема 2.7. Сумма и разность двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малые последовательности.

Следствие. Алгебраическая сумма любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 2.8. Произведение двух бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Следствие. Произведение любого конечного числа бесконечно малых последовательностей есть бесконечно малая последовательность.

Теорема 2.9. Произведение ограниченной последовательности на бесконечно малую последовательность есть бесконечно малая последовательность.

Следствие. Произведение бесконечно малой последовательности на число есть бесконечно малая последовательность.

Заключительные замечания

Мы выполнили все три пункта намеченной перед началом раздела программы: дали точное определение предела последовательности, доказали единственность предела, выяснили связь операции предельного перехода со структурой множества вещественных чисел, получили критерий сходимости последовательности.

Основные элементарные функции.

Обозначение функции	Область определения **X**	Множество Значений **Y**	Четность Нечет.	Монотонность	Период.
1. Степенная функция					
$y = x^{2n}$ $n \in \mathbf{N}$	$(-\infty; \infty)$	$[0; \infty)$	четная	убывает на $(-\infty; 0]$ возрастает на $(0; \infty)$	непериод.
$y = x^{2n-1}$ $n \in \mathbf{N}$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$	нечет.	возрастает на $(-\infty; \infty)$	непериод.
$y = x^{-2n}$ $n \in \mathbf{N}$	$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$	$[0; \infty)$	четная	возрастает на $(-\infty; 0)$, убывает на $(0; \infty)$	непериод.
$y = x^{-(2n-1)}$ $n \in \mathbf{N}$	$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$	$(-\infty; 0) \cup (0; \infty)$	нечет.	убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; \infty)$	непериод.
$y = \sqrt[2n]{x}$ $n \in \mathbf{N}, n > 1$	$[0; \infty)$	$[0; \infty)$	общего вида	возрастает	непериод.
$y = \sqrt[2n-1]{x}$ $n \in \mathbf{N}, n > 1$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$	нечет.	возрастает	непериод.

2. Показательная функция					
$y=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$	$(-\infty;\ \infty)$	$(0;\ \infty)$	общего вида	возрастает, если $a>1$; убывает, если $0<a<1$	непериод.
3. Логарифмическая функция					
$y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$	$(0;\ \infty)$	$(-\infty;\ \infty)$	общего вида	возрастает, если $a>1$; убывает, если $0<a<1$	непериод.
4. Тригонометрические функции					
$y=\sin x$	$(-\infty;\ \infty)$	$[-1;\ 1]$	нечет.	возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ убывает на $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ \frac{3\pi}{2}+2\pi k\right]$ $k\in\mathbf{N}$	период $T=2\pi$
$y=\cos x$	$(-\infty;\ \infty)$	$[-1;\ 1]$	четная	возрастает на $\left[-\pi+2\pi k,\ 2\pi k\right]$, убывает на $\left[2\pi k,\ \pi+2\pi k\right]$	период $T=2\pi$

$y = \operatorname{tg} x$	$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ $k \in \mathbf{Z}$	$(-\infty; \infty)$	нечет.	возрастает	период $T = \pi$
$y = \operatorname{ctg} x$	$(\pi k, \pi + \pi k)$ $k \in \mathbf{Z}$	$(-\infty; \infty)$	нечет.	убывает	период $T = \pi$
5. Обратные тригонометрические функции					
$y = \arcsin x$	$[-1; 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	нечет.	возрастает	непериод.
$y = \arccos x$	$[-1; 1]$	$[0; \pi]$	общего вида	убывает	непериод.
$y = \operatorname{arctg} x$	$(-\infty; \infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	нечет.	возрастает	непериод.
$y = \operatorname{arcctg} x$	$(-\infty; \infty)$	$(0; \pi)$	общего вида	убывает	непериод.

3. ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Понятие функции (отображения)

Перейдем теперь к описанию фундаментального не только для математики понятия функциональной зависимости. Понятие функции является основным и первоначальным, как и понятие множества.

Отметим, что понятие функции претерпело длительную и довольно сложную эволюцию.

Термин «функция» впервые появился в 1692 г. у Г. Лейбница (правда, в *некотором* более узком смысле). В смысле, близком к современному, этот термин употребил в письме к Г. Лейбницу от 1698 г. Иоганн (первый) Бернулли.

В формировании современного понимания функциональной зависимости приняли участие многие крупные математики. Описание функции, почти совпадающее с приведенным ниже понятием, встречается уже в учебниках математики С. Лакруа[12] (1806 г.), переведенных на русский язык. Активным сторонником такого понимания функции был Н. И. Лобачевский[13]. Более того Н. И, Лобачевский указал (1834 г.), что «Обширный взгляд теории допускает существование зависимости только в том смысле, чтобы числа одни с другими в связи понимать как бы *данными вместе*». Это и есть идея точного определения понятия функции, которое мы теперь собираемся изложить.

Рассмотрим множество $\mathbf{X}$ вещественных чисел x и множество $\mathbf{Y}$ элементов y. Если каждому элементу $x \in \mathbf{X}$ по некоторому закону поставлено в соответствие определенное вещественное число $y \in \mathbf{Y}$, то говорят, что ***на множестве* X *задана функция*** и пишут $y = f(x)$ или $y = y(x)$ $x \in \mathbf{X}$.

Введенную таким образом функцию называют ***числовой***. В этом случае множество $\mathbf{X}$ называется ***областью определения*** функции; символ x его общего элемента – ***аргументом функции*** или ***независимой***

[12] С. Ф. Лакруа (1765-1843) – французский математик и педагог (профессор Нормальной и Политехнической школ, член Парижской академии наук).

[13] Н. И. Лобачевский (1792-1856) – великий русский ученый, которому наряду с великим немецким естествоиспытателем К. Ф. Гауссом (1777-1855) и выдающимся венгерским математиком Я. Больяйи (1802-1860) принадлежит честь открытия неевклидовой геометрии, носящей его имя.

переменной; соответствующий конкретному значению $x_0 \in \mathbf{X}$ аргумента x элемент $y_0 \in \mathbf{Y}$ называют значением функции при значении аргумента $x = x_0$ и обозначают через $f(x_0)$. При изменении аргумента значения $y = f(x) \in \mathbf{Y}$, вообще говоря, меняются в зависимости от значений x. По этой причине величину $y = f(x)$ часто называют ***зависимой переменной.***

Множество $f(\mathbf{X}) \Leftrightarrow \{y \in \mathbf{Y} \mid \exists x((x \in \mathbf{X}) \wedge (y = f(x)))\}$ всех значений функции, которые она принимает на элементах множества **X**, будем называть ***множеством значений*** или ***областью значений функции.***

В зависимости от природы множеств **X**, **Y** термин «функция» в различных отделах математики имеет ряд полезных синонимов: ***отображение, преобразование, морфизм, оператор, функционал.*** Отображение – наиболее распространенный из них, и мы его тоже часто будем употреблять.

Для функции (отображения) приняты следующие обозначения:

$$f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y};\ \mathbf{X} \overset{f}{\mapsto} \mathbf{Y}.$$

Тогда, когда из контекста ясно, каковы область определения и множество значений функции, используют обозначение $y = f(x)$, а иногда обозначают функцию вообще одним лишь символом f.

Область определения функции f также обозначают $D(f)$, а множество значений – $E(f)$.

Две функции f_1, f_2 считаются совпадающими или равными, если они имеют одну и ту же область определения **X** и на любом элементе $x \in \mathbf{X}$ значения $f_1(x)$, $f_2(x)$ этих функций совпадают. В этом случае пишут $f_1 = f_2$.

Итак, задание функции (отображения) предполагает указание тройки $(\mathbf{X}, f, \mathbf{Y})$, где

X – отображаемое множество или область определения функции;

Y – множество, в которое идет отображение, или область прибытия функции;

f – Закон, по которому каждому элементу $x \in \mathbf{X}$ сопоставляется определенный элемент $y \in \mathbf{Y}$.

Примеры функций

1. Формулы $\ell = 2\pi r$ и $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ устанавливают функциональную зависимость длины окружности ℓ объема шара V от радиуса *r*. По смыслу каждая из этих формул задает свою функцию $f: \mathrm{R}_+ \to \mathrm{R}_+$, определенную на множестве R_+ положительных действительных чисел со значениями в том же множестве R_+.

2. Последовательность $\{x_n\}$ есть функция целочисленного аргумента, определенная на множестве натуральных чисел, такая, что $f(n) = x_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

3. Функция $y = n!$ (читается «эн-факториал»). Функция задана на множестве натуральных чисел: каждому натуральному числу n ставится в соответствие произведение всех натуральных чисел от 1 до *n* включительно: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$, причем условно полагают $0! = 1$.

4. $$y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, \text{ если } x > 0, \\ 0, \text{ если } x = 0, \\ -1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Обозначение sign происходит от латинского слова *signum* – знак. Эта функция определена на всей числовой прямой $-\infty < x < +\infty$; множество ее значений состоит из трех чисел -1, 0, 1 (рис. 1.1).

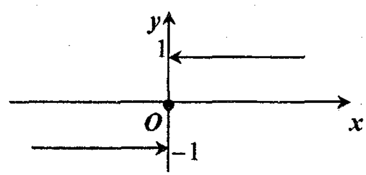


Рис. 1.1

5. $y = [x]$, где $[x]$ обозначает целую часть вещественного числа *x*, т. е. $[x]$ – наибольшее целое число, не превосходящее *x*:

$$[x] = n \text{ для } n \le x < n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Читается: «игрек равно антье икс» (фр. *entier*). Эта функция задана на всей числовой оси, а множество всех ее значений состоит из целых чисел (рис. 1.2).

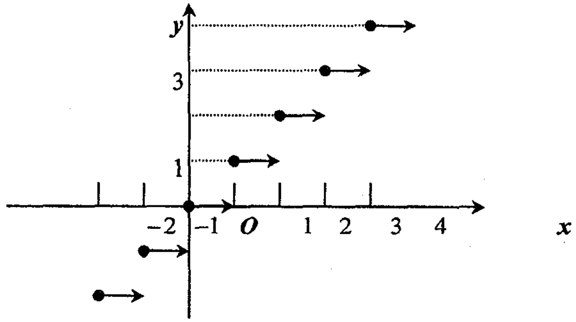


Рис. 1.2

6. Положение частицы в пространстве определяется упорядоченной тройкой чисел $(x; y; z)$, называемой ее координатами в пространстве. Множество всех таких упорядоченных троек можно себе мыслить как прямое произведение $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R} = \mathbf{R}^3$ трех числовых осей. При движении в каждый момент времени t частица находится в некоторой точке пространства $\mathbf{R}^3$ с координатами $(x(t); y(t); z(t))$. Таким образом, движение частицы можно интерпретировать как отображение $\gamma: \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$, где R – ось времени, а $\mathbf{R}^3$ – трехмерное пространство.

7. Пусть $M(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ – множество отображений множества **X** во множество **Y**, а x_0 – фиксированный элемент из **X**.

Любой функции $f \in M(\mathbf{X}; \mathbf{Y})$ поставим в соответствие ее значение $f(x_0) \in \mathbf{Y}$ на элементе x_0. Этим определяется функция $\mathfrak{I}: M(\mathbf{X}; \mathbf{Y}) \to \mathbf{Y}$.

В частности, если $\mathbf{Y} = \mathbf{R}$, т. е. если **Y** есть множество вещественных чисел, то каждой функции $f: \mathbf{X} \to \mathbf{R}$ функция $\mathfrak{I}: M(\mathbf{X}; \mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ ставит в соответствие число $\mathfrak{I}(f) = f(x_0)$. Таким образом, $\Im$ есть функция, определенная на функциях. Для удобства такие функции называют функционалами.

8. Пусть $\mathbf{\Gamma}$ – множество кривых, лежащих на поверхности (например, земной) и соединяющих две ее фиксированные точки.

Каждой кривой $\gamma \in \mathbf{\Gamma}$ можно сопоставить ее длину. Тогда мы получим функцию $\Im : \mathbf{\Gamma} \in \mathbf{R}$, которую часто приходится рассматривать с целью отыскания кратчайшей линии или геодезической линии между данными точками на поверхности.

Способы задания функции

В определении функции ничего не сказано о том, как устанавливается соответствие между числами $x \in \mathbf{X}$ и $y \in \mathbf{Y}$. В зависимости от того, как задано это соответствие, применяют различные способы задания функций. Разберем некоторые из них, их достоинства и недостатки. Наиболее распространенным является аналитический способ задания функции.

3.1.1. Аналитическое задание функции

Функция $y = f(x)$ называется заданной аналитически, если она определяется с помощью формулы, указывающей, какие действия надо произвести над каждым значением x, чтобы получить соответствующее значение y.

Например, функция $y = \dfrac{x+2}{\sqrt{x+5}+2}$, $x \in [-5; +\infty)$, задана аналитически.

При этом под областью определения функции (если она заранее не указана) понимается множество всех вещественных значений аргумента x, при которых аналитическое выражение, определяющее функцию, принимает лишь вещественные и конечные значения. В этом смысле область определения функции называют также ее областью существования.

Для функции $y = -\sqrt{9-x^2}$ областью определения является отрезок $-3 \le x \le 3$, а множество значений – отрезок $-3 \le y \le 0$.

Заметим, что не всякая формула определяет функцию.

Например, формула $y = \sqrt{1-x^2} + \sqrt{x^2-4}$ никакую функцию не определяет, так как нет ни одного вещественного значения x, при котором имели бы вещественные значения оба написанных выше корня.

Аналитическое задание функции может выглядеть достаточно сложно. В частности, функция может быть задана различными формулами на различных частях своей области определения.

Например, функция может быть определена так:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & 0\le x\le 1;\\ 2-x, & 1<x\le 2;\\ 0, & x>2\end{cases}.$$

При аналитическом способе задания функции область определения ясна (по крайней мере, теоретически), ее точные значения при соответствующих значениях аргумента можно вычислить, и работа с такой функцией несложна. Это – достоинство аналитического способа задания функции. Но вот на вопрос, как ведет себя функция, заданная той или иной формулой, ответить, если формула сложна, нелегко. Недостаток аналитического способа задания функции – его малая наглядность.

3.1.2. Графический способ задания функции

Функция $y=f(x)$ называется заданной графически, если задан ее график G_f; т. е. множество точек $(x;f(x))$ на плоскости Oxy, абсциссы которых принадлежат области определения функции, а ординаты равны соответствующим значениям функции, т. е.

$$G_f=\{M(x;y)\,|\,x\in X\wedge y=f(x)\}.$$

Равенство $y=f(x)$ часто называется уравнением этого графика (рис. 1.3).

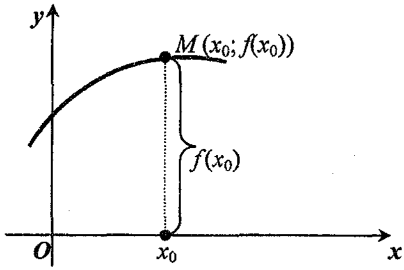


Рис. 1.3

Графический способ задания функции обычно используют в практике гидрометеорологических измерений, когда соответствие между переменными x и y задается посредством графика. Во многих случаях такие графики чертятся с помощью самопишущих приборов. Так, например, для измерения давления атмосферы на различных высотах используют специальный самопишущий прибор – барограф, который записывает на движущейся ленте в виде кривой линии изменение давления в зависимости от высоты.

Не для каждой функции ее график можно изобразить на рисунке. Например, функция Дирихле

$$f(x)=\left[\begin{array}{l}1, \text{ если } x-\text{ рациональное число,}\\ 0, \text{ если } x-\text{ иррациональное число,}\end{array}\right.$$

не допускает такого изображения. Функция Дирихле определена на всей числовой прямой $(-\infty;+\infty)$, а множество ее значений состоит из двух чисел: 0 и 1.

Ввиду наглядности графического изображения функций такой способ весьма удобен при исследованиях различного рода, но он неточен. Из чертежа можно получить любое значение функции, измерив ординату соответствующей точки графика. Но это измерение можно сделать только с некоторой ошибкой, зависящей от чертежа и измерительных приборов. В этом недостаток данного способа.

3.1.3. Табличный способ задания функции

Функция называется заданной таблично, если приведена таблица, в которой указаны численные значения функции для некоторых значений аргумента.

x	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Поставим в соответствие каждому x, записанному в первой строке таблицы, число y, стоящее во второй строке под этим числом x. При табличном задании функции область ее определения состоит только из значений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, перечисленных в таблице.

С помощью таблицы можно задать функцию только при конечном числе значений аргумента. Так, хорошо известны, например, таблицы тригонометрических функций, таблицы логарифмов и многие другие.

Из таблицы почти ничего не известно об области определения функции. Для ответа на этот вопрос нужны дополнительные сведения о поведении функции при значениях аргумента, не попавших в таблицу. В этом недостаток таблиц.

3.1.4. Словесное описание закона соответствия

Функция может быть задана словесным описанием закона соответствия между значениями аргумента и соответствующими значениями функции. Естественно, что для таких функций можно ввести и специальные обозначения. Например, см. пример функций 5.

В последние годы получил широкое распространение четвертый способ задания функции – с помощью указания программы для вычисления ее значений на цифровой вычислительной машине.

Классификация функций

Определение. Функцию $f(x)$, $x \in \mathbf{X}$, принимающую только одно значение, будем называть ***постоянной***.
Постоянную функцию часто **обозначают** буквой C.

Постоянная функция $f(x) = C, C = \text{const}$, степенная функция x^{α} (α – любое число), показательная функция a^x $(0 < a \neq 1)$, логарифмическая функция $\log_a x\,(0 < a \neq 1)$, тригонометрические функции:

$\sin x, \cos x$, $\operatorname{tg} x, \operatorname{ctg} x$ и обратные тригонометрические функции: $\arcsin x, \arccos x$, $\operatorname{arctg} x, \operatorname{arcctg} x$ называются простейшими элементарными функциями.

Все функции, получаемые с помощью конечного числа арифметических действий над простейшими элементарными функциями, а также суперпозицией (или наложением) этих функций, составляют класс ***элементарных функций.***

Примерами элементарных функций являются:

$$f(x) = |x| \left(|x| = \sqrt{x^2} \right); f(x) = \lg^3 \operatorname{arctg} 2^{\sqrt{x}} + \sin 3x;$$

$$f(x) = \ln|\sin 3x| - e^{\operatorname{arctg}\sqrt{x}} \text{ и т. д.}$$

Имеет место следующая классификация элементарных функций.

1. Функция вида

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m,$$

где $m \geq 0$ – целое число; a_0, a_1, …, a_m – любые числа – коэффициенты $(a_0 \neq 0)$, называется ***целой рациональной функцией*** или ***алгебраическим многочленом степени*** m. Многочлен первой степени называется также ***линейной функцией.***

2. Функция, представляющая собой отношение двух целых рациональных функций

$$R(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_{n-1} x + b_n},$$

называется ***дробно-рациональной функцией.*** Совокупность целых рациональных и дробно-рациональных функций образует класс ***рациональных функций.***

3. Функция, полученная с помощью конечного числа суперпозиций и четырех арифметических действий над степенными

функциями, как с целыми, так и с дробными показателями и не являющаяся рациональной, называется ***иррациональной функцией***.

Например,

$$f(x)=\sqrt{x}, \quad f(x)=x+\sqrt{x}, \quad f(x)=\sqrt{\frac{5x^2+4x-7}{3x^2-8x+4}}+\left(\sqrt[5]{x}+x\right)^3$$

и т. д. – иррациональные функции.

4. Всякая функция, не являющаяся рациональной или иррациональной, называется ***трансцендентной функцией***.

Это, например, функции $f(x)=\sin x$, $f(x)=\sin x+x$ и т. д.

Монотонные функции

Учитывая, что большинство функций описывает определенные процессы, по характеру поведения этих функций можно судить о течении соответствующих процессов. Поэтому очень важно уметь исследовать особенности поведения функций. Это в основном сводится к выяснению того, как изменяются значения функции с изменением аргумента.

Определение. Функция $f(x)$, $x\in \mathbf{X}$, называется ***строго возрастающей*** на множестве **X**, если для любых x_1, $x_2\in \mathbf{X}$, таких, что $x_2>x_1$, $f(x_2)>f(x_1)$.

Если же для любых $x_1, x_2\in \mathbf{X}$, таких, что $x_2>x_1$, $f(x_2)<f(x_1)$, то функция f называется ***строго убывающей*** на множестве **X**.

Определение. Функция $f(x)$, $x\in \mathbf{X}$, называется ***возрастающей*** на множестве **X**, если для любых x_1, $x_2\in \mathbf{X}$, из неравенства $x_2>x_1$ следует неравенство $f(x_2)\geq f(x_1)$.

Если для любых x_1, $x_2\in \mathbf{X}$, из неравенства $x_2>x_1$ следует неравенство $f(x_2)\leq f(x_1)$, то функция f называется ***убывающей*** на множестве **X**.

Если функция строго возрастает (или строго убывает) на множестве **X**, то говорят, что она ***строго монотонна,*** а если она возрастает (или убывает) на **X**, то говорят, что она ***монотонна*** на **X**.

Про строго возрастающую (строго убывающую) функцию $f(x)$ на множестве **X** описательно можно сказать так: чем больше значение аргумента x из **X**, тем больше (меньше) значение функции $f(x)$, или, иначе, с ростом аргумента x растет (уменьшается) $f(x)$.

Пример 4.1. Доказать, что функция $f(x) = -3x+1$ строго убывает на всей числовой прямой.

▲ Пусть $x_2 > x_1$ $(x_1, x_2 \in \mathrm{R})$. Тогда

$$f(x_2)-f(x_1)=(-3x_2+1)-(-3x_1+1)=-3(x_2-x_1)<0,$$

т. е. $f(x_2)-f(x_1)<0$, или $f(x_2)<f(x_1)$.

Итак, для $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{R}$ справедливо $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$, т. е. функция f строго убывает на всей числовой прямой. График функции приведен на рис. 1.4. ▼

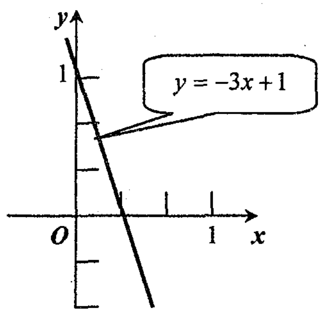


Рис. 1.4

Ограниченные и неограниченные функции

Определение. Функция $f(x)$, определенная на некотором множестве **X**, называется ***ограниченной сверху*** (***снизу***) на этом множестве, если найдется число $M \in \mathbf{R}$ $(m \in \mathbf{R})$ такое, что для любого $x \in \mathbf{X}$ выполняется неравенство $f(x) \le M$ $\left(f(x) \ge m\right)$.

Функция, ограниченная сверху и снизу на множестве **X**, называется ***ограниченной*** на этом множестве. Условие ограниченности функции $f(x)$ можно записать в виде: существует число $M > 0$ такое, что для любого $x \in \mathbf{X}$ выполняется неравенство

$$|f(x)| \le M.$$

Примеры.

1) Функция $y = \sin x$ ограничена на всей числовой прямой, так как при всяком $x \in (-\infty; +\infty)$ $|\sin x| \le 1$, т. е. в качестве M можно взять любое число не меньшее единицы.

График функции $y = \sin x$ расположен в полосе между прямыми линиями $y = -1$ и $y = 1$ (рис. 1.5).

$y(x) := \sin(x)$ $\quad r := \pi$ $\quad k := 100$ $\quad x := -r, -r + \frac{r}{k} .. r$

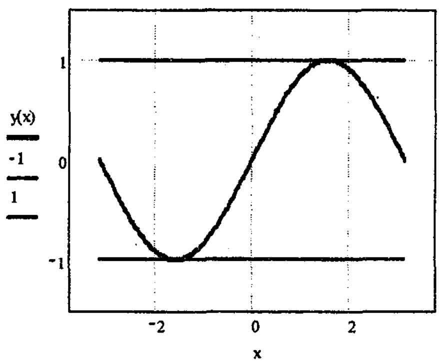


Рис. 1.5

2) Функция $f(x)=\frac{1}{x}, x\neq 0$, не является ограниченной сверху на интервале $(0;1)$, так как не существует числа M такого, что для любого $x\in(0;1)$ выполняется неравенство $\frac{1}{x}\leq M$.

Четные и нечетные функции

Будем рассматривать функции, определенные на симметричном множестве **X**, т. е. на таком множестве, которое вместе с числом x содержит и противоположное ему число $-x$.

Примером таких множеств является:

- вся числовая прямая $(-\infty;+\infty)$;
- любой интервал $(-a;a)$, $a>0$;
- множество $[-5;-2]\cup[2;5]$ и т. д.

Определение. Функция $f(x)$, $x\in\mathbf{X}$, называется четной, если для любого $x\in\mathbf{X}$ выполнено равенство $f(-x)=f(x)$.

Если же для любого $x\in\mathbf{X}$ выполнено равенство $f(-x)=-f(x)$, то функция $f(x)$ называется нечетной.

Так, функция $f(x)=x^2-3x^4$, $x\in(-\infty;+\infty)$ является четной,

ибо $f(-x)=(-x)^2-3(-x)^4=f(x)$,

а функция $\varphi(x)=x-x^3$, $x\in(-\infty;+\infty)$ – нечетной функцией,

ибо $\varphi(-x)=(-x)-(-x)^3=-x+x^3=-(x-x^3)=-\varphi(x)$.

Замечание. Естественно, не имеет смысла говорить о четности или нечетности функции, заданной на несимметричном множестве.

Исследование функции на четность или нечетность облегчает построение графика этой функции.

Справедливо следующее утверждение.

Если функция $y=f(x)$ четная, то ее график симметричен относительно оси ординат. Если же функция $y=f(x)$ нечетная, то ее график симметричен относительно начала координат.

▲ Действительно, если $y = f(x)$ – четная функция, то любые две точки на ее графике с противоположными абсциссами x и $-x$ будут иметь равные ординаты, т. е. (рис. 1.6) $f(x) = f(-x)$.

Следовательно, вместе с каждой точкой $(x; f(x))$ графику функции принадлежит и симметричная относительно оси ординат точка $(-x; f(x))$. ▼

Точно также доказывается утверждение относительно графика нечетной функции – вместе с точкой $(x; f(x))$ он всегда содержит точку $(-x; -f(x))$, симметричную первой относительно начала координат (рис. 1.7).

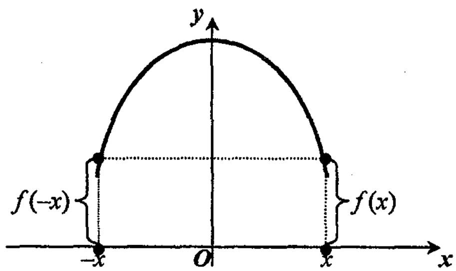


Рис. 1.6

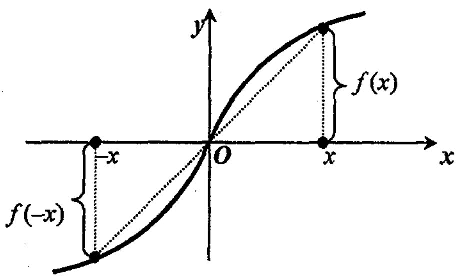


Рис. 1.7

Таким образом, для четных и нечетных функций достаточно уметь построить их график только для неотрицательных значений аргумента.

Периодические функции

Определение. Функция $y = f(x)$ называется периодической с периодом T (или T – периодической), где $T \neq 0$, если для любого значения аргумента x числа $x - T$ и $x + T$ принадлежат области определения функции $f(x)$ и выполняется равенство

$$f(x) = f(x+T).$$

Примерами периодических функций могут служить тригонометрические функции. Так, функции $y = \sin x$ и $y = \cos x$ имеют период $T = 2\pi$, а функции $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ – период $T = \pi$.

Из определения периодической функции следует, что функция периода T имеет также период $-T$, так как $f(x-T) = f((x-T)+T) = f(x)$.

Часто периодом функции называют наименьший из всех положительных периодов.

Функция $y = \cos x$ называется 2π-периодической, хотя ее периодами будут также числа вида $2k\pi$, где $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Заметим, что не всегда среди положительных периодов функции имеется наименьший. Так, например, постоянная функция (константа) $f(x) = C$ $(C = \text{const})$ будет периодической, а ее периодом можно считать любое вещественное число $a \neq 0$, так как $f(x+a) = C = f(x)$, но среди положительных вещественных чисел нет наименьшего.

Для T-периодической функции из определения следует, что ее график будет «повторять» себя через каждый промежуток длины T, поэтому достаточно знать график функции на промежутке вида $[a; a+T]$.

3.2. Простейшая классификация отображений

Когда функцию $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ называют отображением, значение $f(x) \in \mathbf{Y}$, которое она принимает на элементе $x \in \mathbf{X}$, обычно называют ***образом*** элемента x.

Образом множества $\mathbf{A} \subset \mathbf{X}$ при отображении $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ называют множество $f(\mathbf{A}) := \{ y \in \mathbf{Y} \mid \exists x((x \in \mathbf{X}) \wedge (y = f(x))) \}$ тех элементов **Y**, которые являются образами элементов множества **A**.

Множество $f^{-1}(\mathbf{B}) := \{ x \in \mathbf{X} \mid f(x) \in \mathbf{B} \}$ тех элементов **X**, образы которых содержатся в **B**, называют ***прообразом*** (или ***полным прообразом***) множества $\mathbf{B} \subset \mathbf{Y}$ (рис. 2.1).

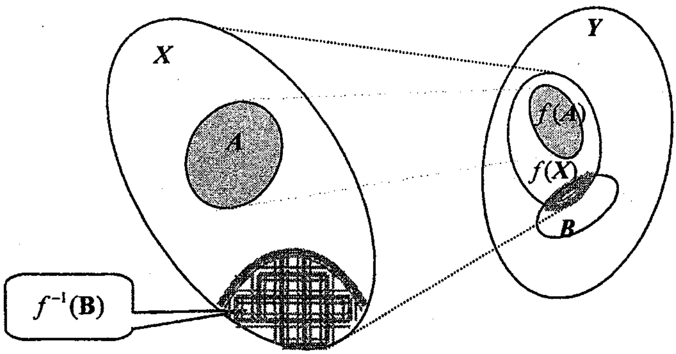


Рис. 2.1

Про отображение $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ говорят, что оно

- ***сюръективно*** (или есть отображение **X** на **Y**), если $f(\mathbf{X}) = \mathbf{Y}$;
- ***инъективно*** (или есть ***вложение***, ***инъекция***), если для любых элементов x_1, x_2 множества **X**

$$(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2),$$

  т. е. различные элементы имеют различные образы;
- ***биективно*** (***или взаимно однозначно***), если оно сюръективно и инъективно одновременно.

3.3. Композиция функций

Богатым источником новых функций, с одной стороны, и способом расчленения сложных функций на более простые – с другой, является операция композиции отображений.

Если отображения $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ и $g:\mathbf{Y}\to\mathbf{Z}$ таковы, что одно из них (в нашем случае g) определено на множестве значений другого (f), то можно построить новое отображение $g\circ f:\mathbf{X}\to\mathbf{Z}$, значения которого на элементах множества **X** определяются формулой

$$(g\circ f)(x):=g(f(x)).$$

Построенное составное отображение $g\circ f$ называют ***композицией*** отображения f и отображения g (в таком порядке!).

Рисунок 3.1 иллюстрирует конструкцию композиции f и g.

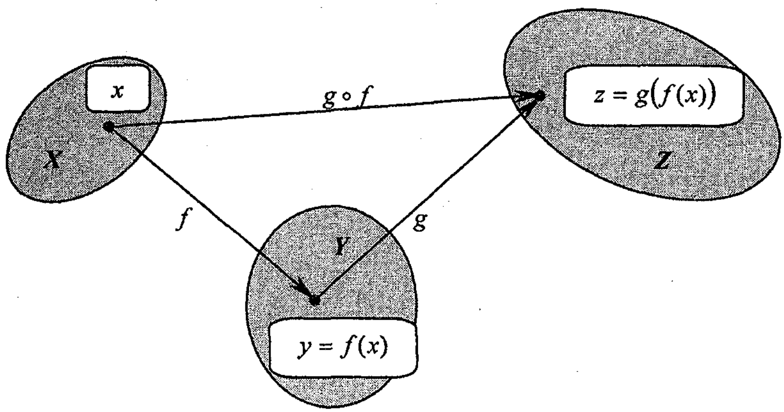


Рис. 3.1

С композицией отображений мы уже встречались в алгебре при исследовании «сложных» функций, полученных композицией простейших элементарных функций.

Операцию композиции иногда приходится проводить несколько раз подряд и в этой связи полезно отметить, что она ассоциативна, т. е. $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$.

Это обстоятельство, как и в случае сложения или умножения нескольких чисел, позволяет опускать скобки, предписывающие порядок спаривания.

Если в композиции $f_n \circ \ldots \circ f_1$ все члены одинаковы и равны f, то ее обозначают коротко f^n.

Отметим также, что даже в том случае, когда обе композиции $g \circ f$ и $f \circ g$ определены, вообще говоря, $g \circ f \neq f \circ g$.

Отображение $f : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$, сопоставляющее каждому элементу множества **X** его самого, будем называть тождественным отображением множества **X**.

3.4. Функция как отношение. График функции

Приведенное в начале описание понятия функции представляется весьма динамичным и отражающим суть дела. Однако с точки зрения современных канонов оно не может быть названо определением, ибо использует эквивалентное функции понятие соответствия. Для сведения читателя мы укажем здесь, каким образом дается определение функции на языке теории множеств.

3.4.1. Отношение

Отношением $\mathfrak{R}$ называют любое множество упорядоченных ***пар*** $(x; y)$.

Множество **X** первых элементов упорядоченных пар, составляющих $\mathfrak{R}$, называют ***областью определения отношения*** $\mathfrak{R}$, а множество **Y** вторых элементов этих пар – ***областью значений отношения*** $\mathfrak{R}$.

Любое множество, содержащее область определения отношения, называют ***областью отправления*** этого отношения. Множество, содержащее область значений отношения, называют ***областью прибытия*** отношения.

Вместо того чтобы писать $(x; y) \in \mathfrak{R}$, часто пишут $x \mathfrak{R} y$ и говорят, что переменная x связана с переменной y отношением $\mathfrak{R}$.

Если $\mathfrak{R} \subset \mathbf{X}^2$, то говорят, что отношение $\mathfrak{R}$ задано на **X**.

3.4.2. Функция и график функции

Отношение $\Re$ называется ***функциональным***, если

$$(x\Re y_1)\wedge(x\Re y_2)\Rightarrow(y_1=y_2).$$

Функциональное отношение называют ***функцией***.

В частности, если $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ – два не обязательно различных множества, то определенное на $\mathbf{X}$ отношение $\Re\subset\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$ между элементами x из $\mathbf{X}$ и элементами y из $\mathbf{Y}$ ***функционально***, если для любого $x\in\mathbf{X}$ существует и притом единственный элемент $y\in\mathbf{Y}$, находящийся с x в рассматриваемом отношении, т. е. для которого $x\Re y$.

Такое функциональное отношение $\Re\subset(\mathbf{X}\times\mathbf{Y})$ и есть ***отображение из* X *в* Y** или ***функция из* X *в* Y**.

Функции чаще всего обозначают символом f. Если f – функция, то вместо xfy мы по-прежнему будем писать $y=f(x)$ или $x\overset{f}{\mapsto}y$, называя $y=f(x)$ ***значением*** функции f на элементе x или ***образом*** элемента x при отображении f.

Сопоставление по закону f элементу $x\in\mathbf{X}$ «соответствующего» элемента $y\in\mathbf{Y}$, о чем говорилось в исходном описании понятия функции, как видим, состоит в том, что для каждого $x\in\mathbf{X}$ указывается тот единственный элемент $y\in\mathbf{Y}$, что xfy, т. е.

$$(x;y)\in f\subset\mathbf{X}\times\mathbf{Y}.$$

Графиком функции $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$, понимаемой в смысле исходного описания, называют подмножество $\mathbf{\Gamma}$ прямого произведения $\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$, элементы которого имеют вид $(x;f(x))$. Итак,

$$\mathbf{\Gamma}:=\{(x;y)\in\mathbf{X}\times\mathbf{Y}\mid y=f(x)\}.$$

В новом описании понятия функции, когда мы ее задаем как подмножество $f\subset\mathbf{X}\times\mathbf{Y}$, конечно, уже нет разницы между функцией и ее графиком.

Мы указали на принципиальную возможность формального теоретико-множественного определения функции, сводящуюся по существу к отождествлению функции, а также ее графика. Однако мы не собираемся в дальнейшем ограничиваться только такой формой задания функции. Ясно, что функциональное отношение иногда удобно задать в аналитической форме, иногда таблицей значений, иногда словесным описанием процесса (алгоритма), позволяющего по данному элементу $x \in \mathbf{X}$ находить соответствующий элемент $y \in \mathbf{Y}$. При каждом таком задании функции имеет смысл вопрос о ее задании с помощью графика, что формулируют так: постройте график функции. Задание числовых функций хорошим графическим изображением часто бывает полезно тем, что делает наглядным качественные основные особенности функциональной зависимости. Для точных расчетов используют табличное задание функции, а чаще алгоритмическое, реализуемое в вычислительных машинах.

3.5. Предел функции

Понятие предела функции является центральным в математическом анализе.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определенную на множестве **X**, содержащем точку $x = a$, со значениями из числового множества **Y**.

Как же изменяются значения функции, когда значения аргумента x неограниченно приближаются к значению a, оставаясь не равными a ($x \neq a$) (это принято обозначать: $x \to a$ – «икс стремится к a»)? Может случиться, что значения функции при этом неограниченно приближаются к числу A, и притом независимо от того, по какому именно закону значения аргумента x приближаются к a.

Предположим, что функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ за исключением разве лишь самой этой точки.

Определение (Коши). Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ при x стремящемся к a (или ***в точке*** a), если для любого числа $\varepsilon > 0$ (которое может быть как угодно малым) существует число $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in \mathbf{X}$, $x \neq a$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Обозначение: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$.

Отметим, что неравенства $x \neq a$, $|x - a| < \delta$ можно записать в виде $0 < |x - a| < \delta$.

Используя логические символы, определение можно записать в виде:

$$(\lim_{x \to a} f(x) = A) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in \mathbf{X},\ 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow \\ |f(x) - A| < \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Пример 5.1. Доказать, пользуясь определением предела функции, что $\lim\limits_{z \to -2} (2x + 5) = 1$. Каким должно быть число $\delta > 0$, чтобы для $x \in (-2 - \delta; -2 + \delta)$ значения функции $f(x) = 2x + 5$ отличались от $A = 1$ меньше, чем на 0.1; 0.01; 0.001?

▲ Функция $f(x)=2x+5$ определена всюду, включая точку $a=-2$: $f(-2)=1$. Возьмем любое $\varepsilon>0$. Для того, чтобы неравенство $|(2x+5)-1|<\varepsilon$ имело место, необходимо выполнение следующих неравенств

$$|2x+4|<\varepsilon \Rightarrow 2|x+2|<\varepsilon \Rightarrow |x-(-2)|<\tfrac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, если взять $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ (или любое положительное число меньше его), то при $|x-(-2)|<\delta=\frac{\varepsilon}{2}$ будем иметь $|f(x)-1|<\varepsilon$. Это означает, что число $A=1$ есть предел функции $f(x)=2x+5$ в точке $a=1$.

Полагая в формуле $\delta(\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}$: $\varepsilon=0.1$; $\varepsilon=0.01$; $\varepsilon=0.001$, найдем $\delta(0.1)=0.05$; $\delta(0.01)=0.005$; $\delta(0.001)=0.0005$. ▼

Пример 5.2. Пользуясь определением предела функции, показать, что $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}=2$.

▲ Функция $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$ не определена в точке $a=2$. Рассмотрим $f(x)$ в некоторой окрестности точки $a=2$, например, на интервале $(1;5)$, не содержащем точку $x=0$, в которой функция $f(x)$ также не определена. Возьмем произвольное число $\varepsilon>0$ и преобразуем выражение $|f(x)-2|$ при значении $x\neq 2$ следующим образом

$$\left|\frac{x^2-4}{x^2-2x}-2\right|=\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}-2\right|=$$

$$=\left|\frac{x+2}{x}-2\right|=\left|\frac{-x+2}{x}\right|=\frac{|x-2|}{|x|}=\frac{|x-2|}{x}.$$

Для аргумента $x\in(1;5)$ получаем неравенство

$$\left|\frac{x^2-4}{x^2-2x}-2\right|<\frac{|x-2|}{1}.$$

Отсюда видно, что если взять $\delta=\varepsilon$, то для всех $x\in(1;5)$, подчиненных условию $0<|x-2|<\delta$, будет верно неравенство

$$\left|\frac{x^2-4}{x^2-2x}-2\right|<\delta=\varepsilon.$$

Это означает, что число $A=2$ является пределом данной функции в точке $a=2$.▼

Пример 5.3. Исходя из определения предела функции в точке, доказать, что $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{11-x}=3$.

▲ Считая заданным сколь угодно малое произвольное число $\varepsilon>0$, в соответствие с определением рассмотрим неравенство $\left|\sqrt{11-x}-3\right|<\varepsilon$:

$$\left|\sqrt{11-x}.-3\right|<\varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon<\sqrt{11-x}-3<\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{11-x}-3>-\varepsilon,\\ \sqrt{11-x}-3>\varepsilon\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-11<-(3-\varepsilon)^2,\\ x-11>-(3+\varepsilon)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2<6\varepsilon-\varepsilon^2,\\ x-2>-(6\varepsilon+\varepsilon^2).\end{cases}$$

Т. к. $6\varepsilon-\varepsilon^2<|-(6\varepsilon+\varepsilon^2)|=6\varepsilon+\varepsilon^2$, то в качестве $\delta(\varepsilon)$ выберем число $\delta\le 6\varepsilon-\varepsilon^2$. При таком δ видно, что как только x удовлетворяет неравенству $0<|x-2|<\delta$, то выполняются оба неравенства, а, следовательно, и неравенство $\left|\sqrt{11-x}-3\right|<\varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{11-x}=3$. ▼

Напомним, что окрестностью точки $a\in\mathbf{R}$ мы назвали любой интервал, содержащий эту точку.

Определение. ***Проколотой окрестностью*** точки называется окрестность точки, из которой исключена сама эта точка.

Если $\Omega(a)$ – обозначение окрестности точки a, то проколотую окрестность этой точки будем обозначать символом $\dot{\Omega}(a)$.

Определение. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует окрестность $\Omega(a)$ точки a такая, что для любого $x \in \mathbf{X}$ из проколотой окрестности выполнено неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \Omega(a) \Big| \ \forall x \in \dot{\Omega}(a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

Выясним геометрический смысл понятия предела функции в точке, обратившись к ее графику (рис. 5.1).

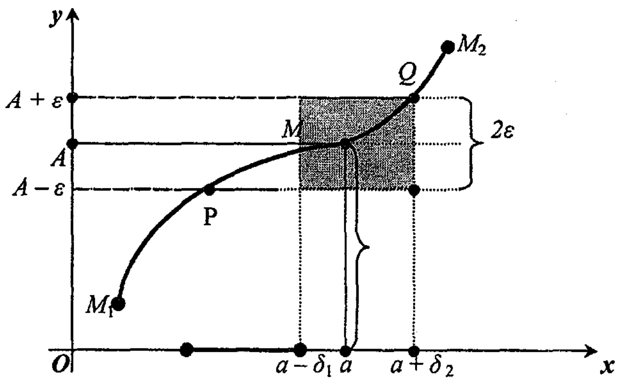


Рис. 5.1

При значении аргумента $x < a$ значения функции $f(x)$ определяются ординатами точек кривой M_1M, при $x > a$ – ординатами точек кривой MM_2. Значение $f(a)$ определяется ординатой точки M.

Покажем, что в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет предел, равный числу A (ординате точки M). Возьмем любое (как угодно малое) число $\varepsilon > 0$. Отметим на оси Oy точки с ординатами $A, A-\varepsilon$, $A+\varepsilon$. Обозначим через P и Q точки пересечения графика функции $y=f(x)$ с прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$. Пусть абсциссы этих точек есть $a-\delta_1$, $a+\delta_2$ соответственно $(\delta_1>0,\ \delta_2>0)$. Из рисунка видно, что для любого $x\neq a$ из интервала $(a-\delta_1;\ a+\delta_2)$ значения функции $f(x)$ заключено между $A-\varepsilon$ и $A+\varepsilon$, т. е. для всех $x\neq a$, удовлетворяющих условию $a-\delta_1<x<a+\delta_2$, верно неравенство

$$A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon.$$

Положим $\delta=\min\{\delta_1;\delta_2\}$. Тогда интервал $(a-\delta;a+\delta)$ будет содержаться в интервале $(a-\delta_1;a+\delta_2)$ и, следовательно, неравенство $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ или, что то же, $|f(x)-A|<\varepsilon$, будет выполнено для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$.

Это доказывает, что $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$.

Геометрически существование предела $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A$ означает, что, каково бы ни было $\varepsilon>0$, найдется такое число $\delta>0$, что для всех x, заключенных между $a-\delta$ и $a+\delta$ (может быть, кроме самой точки a) график функции $y=f(x)$ лежит в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$.

Итак, понятие предела функции дает возможность ответить на вопрос, к чему стремятся значения функции, когда значения аргумента приближаются к a.

Замечание 1. Зависит ли δ от ε? Конечно, зависит, но эта зависимость не носит функциональный характер. Действительно, если $\varepsilon>0$ соответствует некоторое $\delta>0$, то этому же ε соответствует и всякое положительное число меньшее δ, например, $\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{10}$ и т. д. Таким образом, одному ε соответствует бесчисленное множество чисел δ, а не одно, как это требует функциональная зависимость.

Величина δ зависит от ε: $\delta=\delta(\varepsilon)$.

Замечание 2. В определении предела функции в точке a сама точка a из рассмотрения исключается. Таким образом, значение функции в точке a не влияет на предел функции в этой точке. Более того, функция может быть даже не определена в точке a. Поэтому две функции, равные в окрестности точки a, быть может, кроме самой точки a (в ней они могут иметь разные значения, одна из них или обе вместе могут быть не определены), имеют при $x \to a$ один и тот же предел или обе не имеют предела. Отсюда, в частности, следует, что для отыскания в точке a предела дроби законно сокращать эту дробь на равные выражения, обращающиеся в нуль при $x = a$.

Пример 5.4. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x}$.

▲ Функция $f(x) = \frac{x}{x}$ для всех $x \neq 0$ равна единице, а в точке $x = 0$ не определена.

Заменив функцию $f(x)$ равной ей $g(x) = 1$ (при $x \neq 0$), получаем $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$. ▼

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности Ω точки a, за исключением, быть может, самой точки a.

Определение (Гейне). Число A называется ***пределом функции $f(x)$ в точке a***, если для любой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента $x\,(x_n \in \Omega, x_n \neq a)$, сходящейся к точке a, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A.

Приведенным определением удобно пользоваться, когда надо установить, что функция $f(x)$ не имеет предела в точке a. Для этого достаточно найти какую-нибудь последовательность $\{f(x_n)\}$, не имеющую предела, или же указать две последовательности $\{f(x_n)\}$ и $\{f(x'_n)\}$, имеющие различные пределы.

Покажем, например, что функция $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ (рис. 5.2), определенная всюду, кроме точки $x = 0$, не имеет предела в точке $x = 0$.

$z(x) := \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ $\qquad$ $r := 0.5 \quad k := 100$ $\qquad$ $x := -r, -r + \frac{r}{k} .. r$

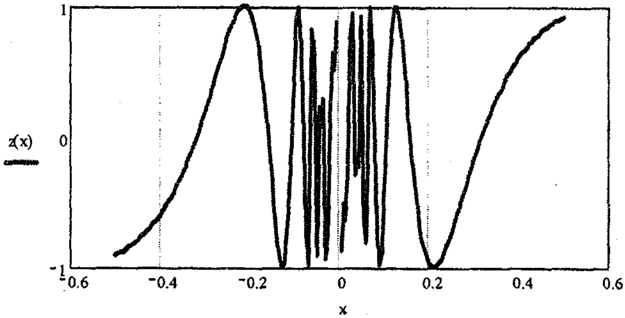


Рис. 5.2

▲ Рассмотрим две последовательности $\left\{\frac{1}{n\pi}\right\}$ и $\left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\right\}$, сходящиеся к точке $x=0$. Соответствующие последовательности значений функции $f(x)$ сходятся к разным пределам: последовательность $\{\sin n\pi\}$ сходится к нулю, а последовательность $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right\}$ – к единице.

Это означает, что функция $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ в точке $x=0$ предела не имеет. ▼

Замечание. Оба определения предела функции в точке (определение Коши и определение Гейне) равносильны.

3.5.1. Предел функции при стремлении аргумента к бесконечности

Если функция $f(x)$ задана в бесконечном промежутке $(-\infty; +\infty)$, то может случиться, что при безграничном увеличении $|x|$ мы говорим о $|x|$, ибо x может удаляться по оси абсцисс как влево, так и вправо) значения функции стремятся к некоторому числу a. В этом случае говорят о пределе функции на бесконечности.

Пусть функция $f(x)$ определена либо на всей числовой оси, либо, по крайней мере, для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > M$ при некотором $M > 0$.

Определение. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ при переменной x, ***стремящейся к бесконечности***, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$, верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

$$(\forall\varepsilon > 0)\ (\exists N > 0)\ (\forall x\ |x| > N) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для **обозначения** предела функции $f(x)$ при $x \to \infty$ используется символ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

Введем понятие предела функции при стремлении x к бесконечности определенного знака, т. е. для случаев, когда x неограниченно возрастает по модулю, принимая отрицательные $(x \to -\infty)$ или положительные $(x \to +\infty)$ значения.

Заменив в определении условие $|x| > N$ на $x > N$ или на $x < -N$ соответственно, получим определения

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = A \text{ или } \lim_{x\to+\infty} f(x) = A.}$$

Из этих определений следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ тогда и только тогда, когда одновременно $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

Тот факт, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, геометрически означает следующее:

какой бы узкой ни была ε - полоска между прямыми линиями $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$, найдется такая прямая $x = N > 0$, что правее нее график функции $y = f(x)$ целиком содержится в указанной ε - полоске (рис. 5.3). В этом случае говорят, что при $x \to +\infty$ график функции $y = f(x)$ ***асимптотически приближается*** к прямой линии $y = A$.

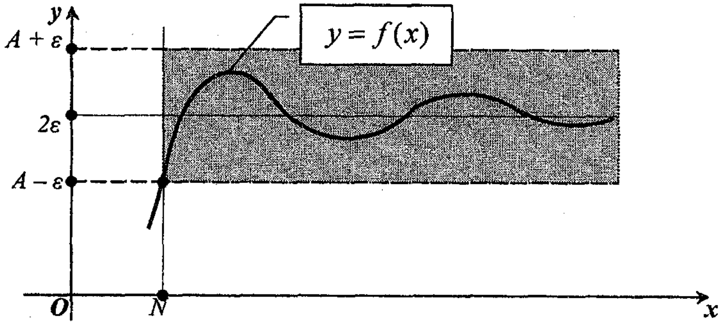


Рис. 5.3

Пример 5.5. Функция $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ определена на всей числовой оси и представляет собой дробь, у которой числитель постоянен, а знаменатель неограниченно возрастает при $|x| \to +\infty$. Естественно ожидать, что $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$

Покажем это.

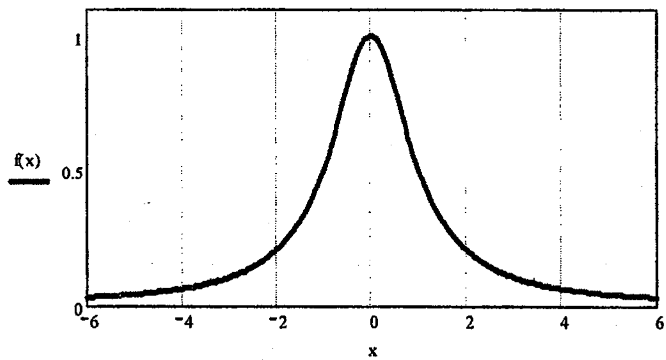
▲ Возьмем любое $\varepsilon > 0$, подчиненное условию $0 < \varepsilon \le 1$. Чтобы имело место соотношение $\left|\dfrac{1}{x^2+1} - 0\right| < \varepsilon$, должно выполняться неравенство $\dfrac{1}{x^2+1} < \varepsilon$ или, что тоже $x^2 + 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, откуда $|x| > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$.

Таким образом, если взять $N = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$, то при $|x| > N$ будем иметь $\left|\dfrac{1}{x^2+1} - 0\right| < \varepsilon$. Это означает, что число $A = 0$ есть предел данной функции при $x \to \infty$.

Заметим, что подкоренное выражение $\frac{1}{\varepsilon}-1\geq 0$ лишь для $\varepsilon\leq 1$. В случае, когда $\varepsilon>1$, неравенство $\dfrac{1}{x^2+1}<\varepsilon$ выполняется автоматически для всех $x\in\mathrm{R}$.

График четной функции $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ асимптотически приближается к прямой линии $y=0$ при $x\to\pm\infty$. ▼

$f(x):=\dfrac{1}{x^2+1}$ $\quad r:=6 \quad k:=100 \quad x:=-r,-r+\dfrac{r}{k}..r$



3.6. Свойства предела функции

Теперь установим ряд постоянно используемых свойств предела функции, многие из которых аналогичны уже рассмотренным свойствам предела последовательности, и потому, в сущности, нам уже знакомы.

3.6.1. Общие свойства предела функции

Теорема 6.1. *Если функция $f(x), x\in\mathrm{X}$ постоянная, т. е. $f(x)=C$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)=C$.*

▲ Возьмем любое $\varepsilon>0$. Тогда для любого числа $\delta>0$ выполняется требуемое неравенство $|f(x)-C|=|C-C|=0<\varepsilon$; следовательно, $\lim\limits_{x\to a} C=C$. ▼

Определение. Функция $f(x)$ называется ограниченной в окрестности точки a, если существуют числа $\delta > 0$ и $M > 0$ такие, что $\forall x \in (a-\delta; a+\delta)$ $|f(x)| \le M$.

Теорема 6.2 (ограниченность функции, имеющей предел). ***Если функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки a и имеет в точке a конечный предел, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки.***

▲ Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, например для $\varepsilon = 1$, найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x \ne a$, удовлетворяющих условию $|x-a| < \delta$, будет верно неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon = 1, \qquad (6.1)$$

Так как всегда $|f(x)| - |A| \le |f(x) - A|$, то из неравенства (6.1) получаем $|f(x)| \le |A| + 1$.

Если функция $f(x)$ определена в точке a, то положим $M = \{|A|+1; f(a)\}$. Тогда в каждой точке x интервала $(a-\delta; a+\delta)$, в которой функция f определена, будем иметь неравенство $|f(x)| \le M$.

Это означает, согласно определению, что функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки a. ▼

Теорема 6.3 (единственности предела). ***Если функция $f(x)$ имеет предел в точке a, то этот предел единственный.***

▲ Доказательство проведем способом от противного, т. е. предположим, что функция f при $x \to a$ имеет два различных предела – числа A_1 и A_2, $A_1 \ne A_2$.

Для определенности, положим $A_1 > A_2$. Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2}(A_1 - A_2)$. Но тогда найдутся числа $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что

$$|f(x) - A_1| < \varepsilon \text{ для всех } x \ne a \text{ таких, что } |x-a| < \delta_1;$$
$$|f(x) - A_2| < \varepsilon \text{ для всех } x \ne a \text{ таких, что } |x-a| < \delta_2.$$

Пусть $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$. Тогда для любого $x \neq a$ такого, что $|x-a| < \delta$, будет одновременно $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ и $|f(x) - A_2| < \varepsilon$.

Из неравенства $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ следует, что

$$f(x) - A_1 > -\varepsilon = -\tfrac{1}{2}(A_1 - A_2),$$

или

$$f(x) > \tfrac{1}{2}(A_1 + A_2), \tag{6.2}$$

а из неравенства $|f(x) - A_2| < \varepsilon$ следует, что

$$f(x) - A_2 < \varepsilon = \tfrac{1}{2}(A_1 - A_2),$$

или

$$f(x) < \tfrac{1}{2}(A_1 + A_2). \tag{6.3}$$

Но неравенство (6.2) противоречит неравенству (6.3). Следовательно, предположение о наличии двух различных пределов у функции f неверно. Что и доказывает теорему. ▼

3.6.2. Бесконечно малые функции и их свойства

Пусть функция $\alpha(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, быть может, кроме самой точки a.

Определение. Функция $\alpha = \alpha(x)$ называется ***бесконечно малой функцией*** (сокращенно бмф) при переменной x, стремящейся к a, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Например, функция $\alpha(x) = (x-3)^2$ есть бесконечно малая при $x \to 3$, так как $\lim\limits_{x \to 3} \alpha(x) = \lim\limits_{x \to 3}(x-3)^2 = 0$.

Вообще, функция $\alpha(x) = x - a$, является простейшим примером бмф при $x \to a$.

Принимая во внимание определение предела функции в точке, определение б.м.ф. можно сформулировать так.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, верно неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$;

или с помощью логических символов:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in \Omega,\ 0 < |x-a| < \delta) \Rightarrow |\alpha(x) < \varepsilon|.$$

Наряду с понятием бесконечно малой функции при $x \to a$ вводится понятие бесконечно малой функции при $x \to \infty$, $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$.

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty} \alpha(x) = 0$.

Если $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется ***бесконечно малой*** соответственно

при $x \to -\infty$ или при $x \to +\infty$.

Например, функция $\alpha(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, является бесконечно малой при $x \to \infty$, поскольку $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Функция $\alpha(x) = e^{-x}$ есть бесконечно малая функция при $x \to +\infty$, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$.

Свойства бесконечно малых функций

Теорема 6.4 (связь функции, имеющей предел, с ее пределом и бмф). ***Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки а, может быть, кроме самой точки а. Для того чтобы функция $f(x)$ в точке а имела пределом число А, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ можно было представить в виде суммы $f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ – бмф*** при $x \to a$.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A \Leftrightarrow (f(x) = A + \alpha(x)) \wedge \left(\lim_{x\to a}\alpha(x) = 0\right).$$

▲ **Необходимость.** Пусть функция $f(x)$ имеет в точке a предел, равный числу A, $\lim_{x\to a} f(x) = A$.

Обозначим

$$\alpha(x) = f(x) - A \tag{6.4}$$

и докажем, что $\alpha(x)$ – бмф при $x \to a$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как по условию, то для выбранного числа $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

В силу (6.4) последнее неравенство можно записать в виде $|\alpha(x)| < \varepsilon$. Это означает, что $\alpha(x)$ – бмф при $x \to a$.

Достаточность. Пусть функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = A + \alpha(x), \tag{6.5}$$

где A – постоянная, а $\alpha(x)$ – бмф при $x \to a$. Докажем, что функция $f(x)$ в точке x имеет предел, равный числу A.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как по условию $\alpha(x)$ – бмф при $x \to a$, то найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$.

Но в силу (6.5) $\alpha(x) = f(x) - A$. Поэтому $|f(x) - A| < \varepsilon$ для тех же значений x.

Согласно определению это означает, что $\lim_{x\to a} f(x) = A$. ▼

Теорема 6.5. ***Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бмф при $x \to a$, то их сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ есть также бмф при $x \to a$.***

▲ Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как $\alpha(x)$ – бмф при $x \to a$, то найдется $\delta_1 > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - a| < \delta_1,$$

верно неравенство

$$|\alpha(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}. \qquad (6.6)$$

По условию $\beta(x)$ также бмф при $x \to a$, поэтому найдется $\delta_2 > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta_2$, верно неравенство

$$|\beta(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2}. \qquad (6.7)$$

Положим $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$. Тогда для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, будут одновременно верны неравенства (6.6) и (6.7). Поэтому

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \tfrac{\varepsilon}{2} + \tfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall x,\ 0 < |x-a| < \delta.$$

Это означает, что сумма $\alpha(x) + \beta(x)$ есть бмф при $x \to a$. ▼

Замечание. Теорема остается справедливой для суммы любого конечного числа функций, бм при $x \to a$.

Теорема 6.6 (произведение бмф на ограниченную функцию). ***Если функция $\alpha(x)$ является бмф при $x \to a$, а функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки a, то произведение $\alpha(x) f(x)$ есть – бмф при $x \to a$.***

▲ По условию функция $f(x)$ ограничена в окрестности точки a. Это означает, что существуют такие числа $\delta_1 > 0$ и $M > 0$, что

$$|f(x)| \le M \ \text{ для всех } x \in (a-\delta_1; a+\delta_1).$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как по условию бмф при $x \to a$ $x \to a$, то найдется такое $\delta_2 > 0$, что для всех $\alpha(x)$ – бмф, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta_2$, будет верно неравенство $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$.

Положим $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$. Тогда для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x-a| < \delta$, будут одновременно верны неравенства

$$|f(x)| \le M \quad \text{и} \quad |\alpha(x)| < \tfrac{\varepsilon}{M}.$$

Поэтому $|\alpha(x)f(x)| = |\alpha(x)|\cdot|f(x)| < \frac{\varepsilon}{M}\cdot M = \varepsilon \ \forall x, 0<|x-a|<\delta$. Это означает, что произведение $\alpha(x)f(x)$ есть бмф при $x \to a$. ▼

Следствие 6.1. **(произведение бмф).** ***Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бмф при $x \to a$, то их произведение $\alpha(x)\cdot\beta(x)$ есть также бмф при $x \to a$.***

Следствие 6.2. **(произведение бмф на постоянную функцию).** ***Произведение бмф на постоянную функцию есть бмф.***

Эти следствия получаются непосредственно из теоремы 6.6 с учетом тех фактов, что бмф и постоянная функция – ограниченные функции.

3.6.3. Предельный переход и арифметические операции

Часто приходится рассматривать в одном и том же процессе $(x \to a)$ несколько функций, каждая из которых имеет предел. Для этих функций справедлива следующая теорема.

Теорема 6.7. ***Пусть функции*** $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ***определены в некоторой окрестности точки а, быть может, кроме самой точки а.***

Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_1$, $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2$, ***то***

1) $\lim\limits_{x\to a}\big(f_1(x) \pm f_2(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

2) $\lim\limits_{x\to a}\big(f_1(x)\cdot f_2(x)\big) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}$, $\left(\lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0, \quad f_2(x)\neq 0\right)$.

▲ 1) Если $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) = A_1$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x) = A_2$, тогда, согласно теореме 6.4,

$$f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x) \text{ и } f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x),$$

где $\alpha_1(x)$ и $\alpha_2(x)$ – б.м.ф. при $x \to a$. Отсюда

$$f_1(x) \pm f_2(x) = \big((A_1 + \alpha_1(x)) \pm (A_2 + \alpha_2(x)\big) = (A_1 \pm A_2) + \gamma(x),$$

где $\gamma(x)=\alpha_1(x)\pm\alpha_2(x)$ как алгебраическая сумма б.м.ф. есть б.м.ф. при $x\to a$.

Таким образом, функция $f_1(x)\pm f_2(x)$ представлена как сумма постоянной $A_1\pm A_2$ и б.м.ф. при $x\to a$. Отсюда на основании теоремы 6.4 заключаем, что функция $f_1(x)\pm f_2(x)$ имеет предел в точке x, равный $A_1\pm A_2$:

$$\lim_{x\to a}(f_1(x)\pm f_2(x))=A_1\pm A_2=\lim_{x\to a}f_1(x)\pm\lim_{x\to a}f_2(x).$$

2) Вновь представив $f_1(x)$ и $f_2(x)$ в виде

$$f_1(x)=A_1+\alpha_1(x) \text{ и } f_2(x)=A_2+\alpha_2(x),$$

имеем

$$\begin{aligned}f_1(x)\cdot f_2(x)&=(A_1+\alpha_1(x))\cdot(A_2+\alpha_2(x))=\\&=A_1\cdot A_2+A_2\alpha_1(x)+A_1\alpha_2(x)+\alpha_1(x)\alpha_2(x).\end{aligned}$$

Так как $A_2\alpha_1(x)$, $A_1\alpha_2(x)$, $\alpha_1(x)\alpha_2(x)$ – б.м.ф. при $x\to a$ (как произведение б.м.ф. на ограниченную функцию), то и их сумма есть б.м.ф. при $x\to a$.

Таким образом, функция $f_1(x)f_2(x)$ представлена как сумма постоянной A_1A_2 и б.м.ф. при $x\to a$. Отсюда на основании теоремы 6.4 заключаем, что функция $f_1(x)\cdot f_2(x)$ имеет предел в точке a, равный числу A_1A_2: $\lim\limits_{x\to a}(f_1(x)\cdot f_2(x))=A_1\cdot A_2=\lim\limits_{x\to a}f_1(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}f_2(x)$.

3) Вновь запишем, что $f_1(x)=A_1+\alpha_1(x)$ и $f_2(x)=A_2+\alpha_2(x)$, где $\lim\limits_{x\to a}\alpha_1(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\alpha_2(x)=0$.

Поскольку , то для любого $\varepsilon>0$, в частности для $\varepsilon=\frac{|A_2|}{2}$, найдется $\delta>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, будет верно неравенство $|A_2-f_2(x)|<\frac{|A_2|}{2}$.

Т. к. $|A_2-f_2(x)|\ge|A_2|-|f_2(x)|$, то $|A_2|-|f_2(x)|<\frac{|A_2|}{2}$, откуда

$$\left|f_2(x)\right| > \frac{|A_2|}{2} \quad \forall x,\ 0<|x-a|<\delta .$$

Значит, для указанных значений x определена функция $\frac{1}{f_2(x)}$, причем $\left|\frac{1}{f_2(x)}\right| = \frac{1}{|f_2(x)|} < \frac{2}{|A_2|}$, так что функция $\frac{1}{f_2(x)}$ ограничена в проколотой окрестности точки a.

Составим разность

$$\frac{f_1(x)}{f_2(x)} - \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_1+\alpha_1(x)}{A_2+\alpha_2(x)} - \frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2\alpha_1(x) - A_1\alpha_2(x)}{A_2(A_2+\alpha_2(x)} =$$

$$= \frac{1}{f_2(x)} \cdot \frac{1}{A_2}\left(A_2\alpha_1(x) - A_1\alpha_2(x)\right) = \beta(x).$$

По свойствам б. м. ф. (с учетом доказанной ограниченности $\frac{1}{f_2(x)}$) функция $\beta(x)$ б. м. ф. при $x \to a$. Таким образом, доказано, что

$$\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{A_1}{A_2} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}, \quad \left(\lim_{x\to a} f_2(x) \neq 0, \quad f_2(x) \neq 0\right). \ \blacktriangledown$$

Замечание. Теорема о пределе суммы (произведения) обобщается на случай любого фиксированного числа слагаемых (сомножителей), имеющих предел.

Следствие 1. ***Постоянный множитель можно выносить за знак предела:*** $\lim\limits_{x\to a}\left(C\, f(x)\right) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Следствие 2. ***Если*** $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ***и*** m ***– натуральное число, то***

$$\lim_{x\to a}\left(f^m(x)\right) = \left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^m,$$

в частности,

$$\lim_{x\to a}(x^m) = \left(\lim_{x\to a} x\right)^m = a^m .$$

Пример 6.1. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2-6x-4}$.

▲ Будем рассматривать данную функцию как частное двух функций $f_1(x)=4x^2-3x+1$ и $f_2(x)=2x^2-6x-4$.

Каждая из этих функций в точке $x=-1$ имеет предел:

$$\lim_{x\to -1} f_1(x)=\lim_{x\to -1}(4x^2-3x+1)=\lim_{x\to -1}(4x^2)-\lim_{x\to -1}(3x)+\lim_{x\to -1}1=$$
$$=4\cdot(-1)^2-3\cdot(-1)+1=8;$$

$$\lim_{x\to -1} f_2(x)=\lim_{x\to -1}(2x^2-6x-4)=\lim_{x\to -1}(2x^2)-\lim_{x\to -1}(6x)-\lim_{x\to -1}4=$$
$$=2\cdot(-1)^2-6\cdot(-1)-4=4\neq 0.$$

Т. к. предел знаменателя $f_2(x)$ заданного отношения не равен нулю, то можно воспользоваться теоремой о пределе частного,

что дает $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2-3x+1}{2x^2-6x-4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to -1}(4x^2-3x+1)}{\lim\limits_{x\to -1}(2x^2-6x-4)}=\dfrac{8}{4}=2$. ▼

Пример 6.2. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$.

▲ Полагая $f_1(x)=x^2-3x+2$, $f_2(x)=x^2-5x+6$, имеем $\lim\limits_{x\to 2} f_1(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 2} f_2(x)=0$, т. е., как говорят, имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Пользоваться теоремой о пределе частного нельзя. Для раскрытия неопределенности поступаем так. В определении предела функции в точке $x=2$ сама точка $x=2$ из рассмотрения исключается. Заметив это, представим данную функцию в виде

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=\frac{(x-1)(x-2)}{(x-3)(x-2)},$$

откуда, сокращая на множитель $x-2\neq 0$, получим

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=\frac{x-1}{x-3},\ x\neq 2.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-1}{x-3}=\dfrac{1}{-1}=-1$. ▼

3.6.4. Предельный переход и неравенства

Теорема 6.8 (переход к пределу в неравенстве). ***Если*** $f_1(x)\leq f_2(x)$ ***для всех*** x ***из некоторой окрестности точки*** a, ***может быть, кроме самой точки*** a, ***и каждая из функций*** $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ***в точке*** a ***имеют предел, то*** (рис. 6.1) $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)\leq\lim\limits_{x\to a}f_2(x)$.

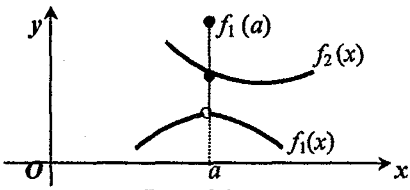


Рис. 6.1

Заметим, что из строгого неравенства $f_1(x)<f_2(x)$ для функций не обязательно следует строгое неравенство для их пределов. Если эти пределы существуют, то мы можем утверждать лишь, что

$$\lim_{x\to a}f_1(x)\leq\lim_{x\to a}f_2(x).$$

Теорема 6.9 (о сжатой переменной). ***Если*** $f_1(x)\leq f_2(x)\leq f_3(x)$ ***для всех*** x ***в некоторой окрестности точки*** a, ***быть может, кроме самой точки*** a ***(рис. 6.2), и если*** $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=A=\lim\limits_{x\to a}f_3(x)$, ***существует также предел*** $f_2(x)$ при $x\to a$, ***причем*** $\lim\limits_{x\to a}f_2(x)=A$.

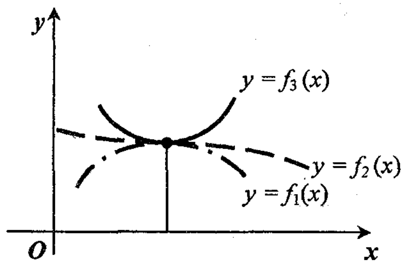


Рис. 6.2

▲ Вычитая из каждого члена неравенства $f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x)$ одно и то же число A, получаем

$$f_1(x) - A \le f_2(x) - A \le f_3(x) - A. \qquad (6.8)$$

Согласно теореме 6.4

$$f_1(x) - A = \alpha_1(x) - \text{б.м.ф. при } x \to a,$$
$$f_3(x) - A = \alpha_3(x) - \text{б.м.ф. при } x \to a.$$

Подставив последние равенства в (6.8), получим

$$\alpha_1(x) \le f_2(x) - A \le \alpha_3(x).$$

Функция $f_2(x) - A$ заключена между двумя б.м.ф. при $x \to a$ и поэтому также является б.м.ф. при $x \to a$, т. е.

$$f_2(x) - A = \alpha_2(x) - \text{б.м.ф. при } x \to a.$$

Тогда по теореме 6.4 $\lim\limits_{x \to a} f_2(x) = A$. ▼

3.6.4. Бесконечно большие функции. Их связь с бесконечно малыми функциями

Наряду с понятием бесконечно малых функций вводится понятие бесконечно больших функций (ббф).

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, быть может, кроме самой точки a.

> **Определение.** Если для любого, как угодно большого, числа $M>0$ существует такое число $\delta>0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$, то функцию $f(x)$ называют ***бесконечно большой функцией при*** $x \to a$ и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.
>
> При этом говорят также, что $f(x)$ при $x \to a$ имеет ***бесконечный предел.***

С помощью логических символов определение функции $f(x)$, ббф при $x \to a$, запишется так

$$\boxed{\begin{array}{l}(f(x)-\text{ббф при } x\to a)\Leftrightarrow\\ \forall M>0\ \exists\delta>0\ \forall x,\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)|>M.\end{array}}$$

Заменяя в приведенном определении неравенство

$$|f(x)|>M \text{ на } f(x)>M \text{ или на } f(x)<-M$$

соответственно, получим определение ***положительной*** бесконечно большой функции $f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, или ***отрицательной*** бесконечно большой функции $f(x)$, $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$.

Пример 6.4. Функция $f(x)=\frac{1}{x}$, определенная для всех $x\neq 0$ (рис. 6.3), есть ббф при $x \to a$.

▲ Возьмем любое $M>0$, как угодно большое. Неравенство $|f(x)|=\left|\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{|x|}>M$ равносильно неравенству $|x|=|x-0|<\frac{1}{M}$. Поэтому, если взять $\delta=\frac{1}{M}$, то для $\forall x$, таких, что

$$0<|x-0|=|x|<\frac{1}{M},$$

будет верно неравенство $|f(x)|=\frac{1}{|x|}>M$. Согласно определению это означает, что $f(x)=\frac{1}{x}$ – ббф при $x\to a$. ▼

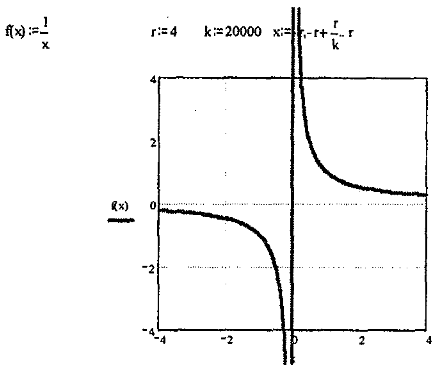


Рис. 6.3

Функция $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$, определенная для всех $x\neq 2$ (рис. 6.4), при $x\to 2$ есть положительная бесконечно большая функция.

Геометрическое пояснение ббф: функция $f(x)$ является ббф, если для любой горизонтальной полосы между прямыми линиями $y=-M$ и $y=M$, сколь бы широкой она ни была, можно указать такие две вертикальные прямые $x=a-\delta$ и $x=a+\delta$, что между этими прямыми часть графика функции $y=f(x), x\neq a$, целиком расположена вне этой горизонтальной полосы (рис. 6.5).

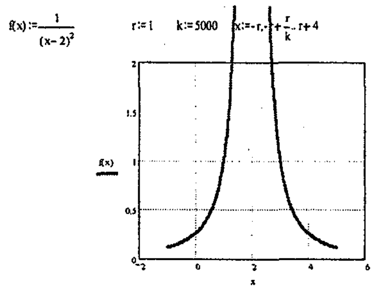


Рис. 6.4

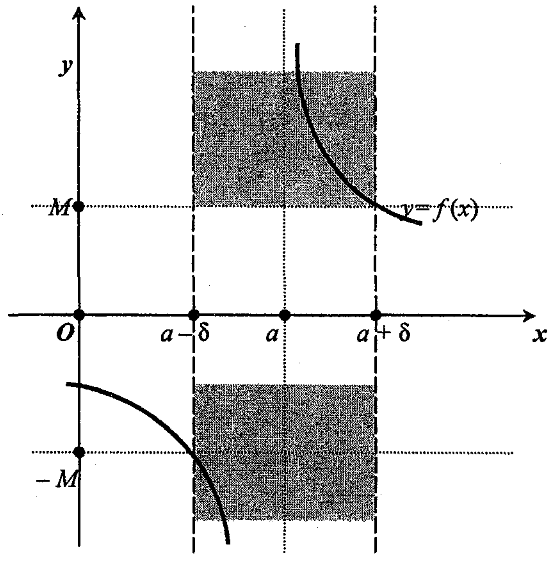


Рис. 6.5

Определение. Будем говорить, что $f(x)$ есть ***бесконечно большая функция*** при $x \to \infty$, если для любого числа $M > 0$, хотя бы как угодно большого, найдется число $N > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x| > N$,
верно неравенство $|f(x)| > M$.

Обозначение. $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$.

Пример 6.5. $f(x)=x$ – ббф при $x\to\infty$.

▲ В самом деле, $\forall M>0\ \exists N>0$, например, $N=M$, такое, что $\forall x,\ |x|>N$, верно неравенство $|f(x)|=|x|>M$. ▼

Подобным же образом можно сформулировать определение бесконечно больших функций при $x\to+\infty$ и $x\to-\infty$.

Между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями существует зависимость, которая выражается следующими теоремами.

Теорема 6.10. ***Если функция*** $f(x)$ ***– ббф при*** $x\to a$***, то функция*** $\alpha(x)=\frac{1}{f(x)}$ ***– бм при*** $x\to a$.

▲ Возьмем любое, как угодно малое число $\varepsilon>0$. Т. к. по условию функция $f(x)$ – бб при $x\to a$, то для любого $M>0$, в частности для $M=\frac{1}{\varepsilon}$, найдется такое $\delta>0$, что при всех значениях x, из условия $0<|x-a|<\delta$ будет следовать неравенство $|f(x)|>M=\frac{1}{\varepsilon}$. Для таких значений x определена функция $\alpha(x)=\frac{1}{f(x)}$, и для нее

$$|\alpha(x)|=\frac{1}{|f(x)|}<\frac{1}{M}=\varepsilon.$$

Итак, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,\ 0<|x-a|<\delta\Rightarrow|\alpha(x)|<\varepsilon$. Это означает, что $\alpha(x)=\frac{1}{f(x)}$ – ббф при $x\to a$. ▼

Аналогично доказывается обратное утверждение.

Теорема 6.11. ***Если*** $\alpha(x)$ ***– бмф при*** $x\to a$ ***и в некоторой окрестности*** $(a-\delta;a+\delta)$ ***точки а, быть может, кроме самой точки а,*** $\alpha(x)$ ***отлична от нуля, то функция*** $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ ***– ббф при*** $x\to a$.

Пример 6.6. Рассмотрим дробно-рациональную функцию

$$f(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n},\quad (a_0\neq 0,\ b_0\neq 0),$$

представляющую собой отношение двух многочленов относительно x степеней m и n соответственно, и исследуем поведение этой функции при $x \to \infty$.

▲ При достаточно больших значениях $|x|$ знаменатель этой дроби отличен от нуля, и рассматриваемое отношение имеет смысл. Разделив числитель и знаменатель дроби на x^n, получим

$$f(x) = \frac{a_0 x^{m-n} + a_1 x^{m-n-1} + \ldots + a_m x^{-n}}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^{-n}}.$$

Ясно, что при $x \to \infty$ знаменатель дроби имеет пределом число $b_0 \neq 0$. Числитель дроби при $m > n$ неограниченно возрастает по абсолютной величине; при $m = n$ предел числителя равен коэффициенту a_0; при $m < n$ предел числителя равен нулю. Таким образом,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n} = \begin{cases} \infty, & m > n; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & m = n; \\ 0, & m < n. \end{cases} \ ▼$$

3.6.5. Односторонние пределы функции в точке

Из определения предела функции $f(x)$ в точке a следует, что закон, по которому изменяется аргумент x при стремлении его к a, безразличен. Если же потребовать, чтобы x стремился к a не любым способом, а только слева (оставаясь, все время меньше a), то получим определение предела слева в точке a.

Аналогично, если существует предел функции $f(x)$ в точке a при условии, что x стремится к a только справа (оставаясь, все время больше a), то такой предел называется пределом справа в точке a. Пределы слева и справа иначе называются односторонними (левосторонний и правосторонний) пределами.

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некотором интервале $(c; a)$.

Определение 1. Число A называется ***левым пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $a - \delta < x < a$, верно неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x,\ a - \delta < x < a) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $A = f(a-0)$ (x стремится к a, оставаясь меньше $a : x < a$).

Пусть функция $f(x)$ определена на интервале $(a; d)$.

Определение 2. Число A называется ***правым пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** a, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $a < x < a + \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Символическая запись:

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x,\ a < x < a + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon .$$

Обозначение: $A = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $A = f(x + a)$ (x стремится к a, оставаясь больше $a : x > a$).

Пусть теперь функция $f(x)$ определена в двусторонней окрестности точки a, быть может, кроме самой точки a (рис. 6.6).

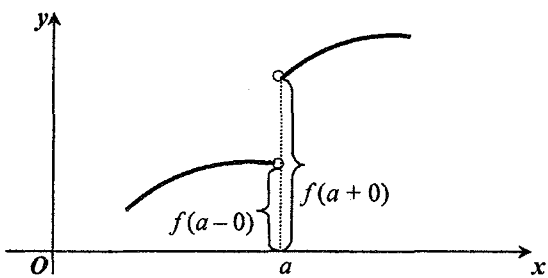


Рис. 6.6

Теорема 6. 12. ***Для того чтобы функция $f(x)$ имела предел в точке а, необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы функции $f(x)$ в точке а слева и справа и они были равны между собой. Тогда $f(a-0)=f(a+0)=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.***

▲ **Необходимость.** Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. Тогда для всякого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что для всех x из интервала $(a-\delta; a+\delta)$, $x\neq a$, верно неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Так как полученное неравенство имеет место, как на интервале $(a-\delta; a)$, так и на интервале $(a; a+\delta)$, то согласно определению $A=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $A=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Достаточность. Обратно, пусть $A=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ и $A=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Тогда для любого $\varepsilon>0$ существуют такие числа $\delta_1>0$ и $\delta_2>0$, что если $a-\delta_1<x<a$ и соответственно $a<x<a+\delta_2$, то $|f(x)-A|<\varepsilon$. Обозначая через δ наименьшее из чисел δ_1, δ_2, получим, что $|f(x)-A|<\varepsilon$ для всех x таких, что $0<|x-a|<\delta$. Это означает, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$. ▼

Пример 6.7. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$, $x\neq 0$ (рис.6.7).

▲ Здесь $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=0 \Rightarrow \nexists\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. ▼

$f(x) := \dfrac{1}{1+\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)}$ $\qquad r := 2 \qquad k := 100 \qquad x := -r, -r+\dfrac{r}{k} .. r$

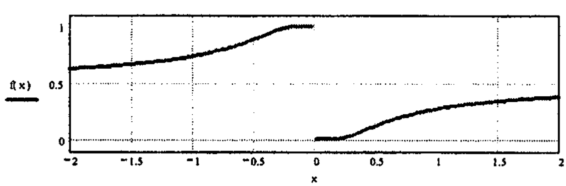


Рис. 6.7

Пример 6.8. Пусть $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$, $x\neq 0$ (рис. 6.8).

▲ Здесь $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=+\infty \Rightarrow \exists\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. ▼

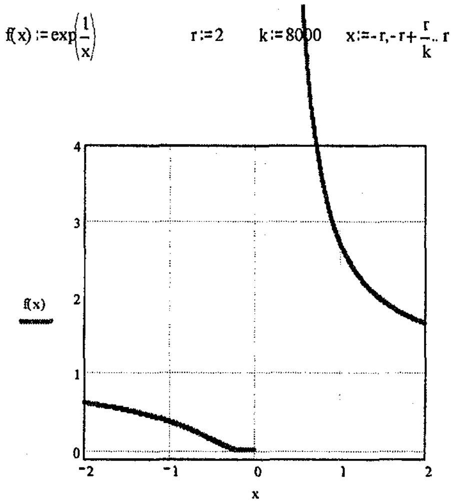


Рис. 6.8

Если функция $f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$ или на интервале $(a;b)$, то в точке a она может иметь только предел справа, а в точке b – только слева.

3.7. Замечательные пределы

3.7.1. Первый замечательный предел

(предел отношения синуса бмф к бм аргументу)

Предварительно докажем неравенство

$$\boxed{|\sin x| \le |x|\ \forall x.} \qquad (7.0)$$

▲ Рассмотрим окружность радиуса 1 (рис. 7.0).

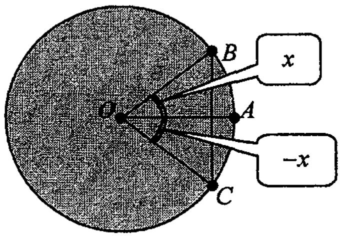


Рис. 7.0

Пусть угол AOB имеет радианную величину x, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, и пусть $\angle AOB = \angle AOC$. Очевидно, длина отрезка BC равна $2\sin x$; длина дуги $\cup BC$ равна $2x$. Так как длина дуги больше длины хорды, стягивающей эту дугу, то $2\sin x < 2x$ и, значит, $\sin x < x$.

Для рассматриваемых значений $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ это неравенств можно записать в виде $|\sin x| < |x|$. Учитывая, что $|\sin(-x)| = |-\sin x| = |\sin x|$ и $|-x| = |x|$, замечаем, что неравенство $|\sin x| < |x|$ верно и для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Так как справедливо $\sin 0 = 0$, то неравенство (7.0) справедливо для всех $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Если же $x \notin \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, то $|x| \ge \frac{\pi}{2} > 1$, тогда как $|\sin x| \le 1\ \forall x$. Следовательно, неравенство $|\sin x| < |x|$ верно для любых x. ▼

Если угол выражен в радианах, то

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.} \qquad (7.1)$$

▲ Рассмотрим окружность радиуса R, радианную меру центрального угла AOB обозначим x; будем считать, что $0 < x < \frac{\pi}{2}$ и проведем некоторые построения (рис. 7.1).

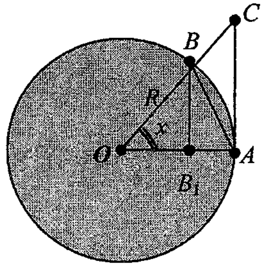


Рис. 7.1

Согласно определению синуса и косинуса имеем

$$\sin x = \frac{BB_1}{R}, \ \cos x = \frac{OB_1}{R},$$

откуда получаем

$$BB_1 = R\sin x, \quad CA = R\,\mathrm{tg}\,x, \quad A\breve{B} = x.$$

Из рисунка видно, что (AC – касательная к окружности в точке A).

(площадь $\Delta\, AOB$) < (площадь сектора AOB) < (площадь $\Delta\, AOC$)

Так как указанные площади равны соответственно

$$\tfrac{1}{2}R^2\sin x,\ \tfrac{1}{2}R^2 x,\ \tfrac{1}{2}R^2\mathrm{tg}\,x\text{, то } \sin x < x < \mathrm{tg}\,x,\ x \in \left(0; \tfrac{\pi}{2}\right).$$

Разделив все члены этого неравенства на $\sin x > 0$, получим

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{\mathrm{tg}\,x}{\sin x} \Leftrightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Т. к. $1 < \dfrac{x}{\sin x} \Rightarrow \dfrac{\sin x}{x} < 1,\ \dfrac{x}{\sin x} < \dfrac{1}{\cos x} \Rightarrow \cos x < \dfrac{\sin x}{x}$, то

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Последнее неравенство доказано для $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, но оно верно и для $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, так как $\cos(-x) = \cos x$, $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$. Далее имеем

$$1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \Rightarrow -1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x \Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x;$$

$$1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x}{2} = x \left(\sin\frac{x}{2} < 1,\ \sin\frac{x}{2} < \frac{x}{2}\right);$$

$$0 < \left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < x.$$

Поскольку x – бмф, то по теореме о связи функции, имеющей предел, с ее пределом и бмф $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ▼

3.7.2. Второй замечательный предел

Лемма 1. Если $q > 1$, то

$$q^n \geq 1 + n(q-1) \tag{7.2}$$

при всех натуральных n.

▲ Рассмотрим геометрическую прогрессию с $b_1 = 1$, $q > 1$.

По формуле для суммы геометрической прогрессии и условию $q > 1$ имеем $\frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} \geq 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n$. Из полученного неравенства $\frac{q^n - 1}{q - 1} \geq n$ следует доказываемое неравенство (7.2). ▼

Лемма 2. Существует $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

▲ Обозначим $f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Покажем, что $f(n)$ – убывающая функция:

$$\frac{f(n-1)}{f(n)} = \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n-1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n+1} \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} =$$

$$= \left(\frac{nn}{(n+1)(n-1)}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} = \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}.$$

Пусть $q = \frac{n^2}{n^2-1}$, тогда по формуле (7.2)

$$\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^{n+1} \geq 1+(n+1)\left(\frac{n^2}{n^2-1}-1\right) = 1+(n+1)\frac{1}{n^2-1} = 1+\frac{1}{n-1}.$$

В результате имеем $\frac{f(n-1)}{f(n)} \geq \left(1+\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}} = 1$. Итак, $\frac{f(n-1)}{f(n)} \geq 1$.

Следовательно, $f(n-1) \geq f(n)$. Функция $f(n)$ убывающая. Очевидно, что $f(n) \geq 1$, т. е. функция $f(n)$ ограничена снизу. По теореме Вейерштрасса о монотонной последовательности следует, что $f(n) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ существует. ▼

Следствие из леммы 2.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e. \tag{7.3}$$

▲ Рассмотрим

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n}}.$$

По теореме о пределе частного следует существование предела

$$\lim_{n\leftarrow\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^{n}.$$

Этот предел называется ***неперовым числом*** **и обозначается** *e*.

Пусть $q=1+\frac{1}{n}$. Тогда по формуле (7.2) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\geq 1+n\left(1+\frac{1}{n}-1\right)=2$.

В результате $2\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\leq\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1}=4$.

Вычислено $e=2.7182818284590\ldots$ ▼

Предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$

Теорема 7.1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^{x}=e \qquad (7.4)$$

▲ Пусть $x>1$. Положим $[x]=n$.

Тогда $x=n+\alpha$, где n – натуральное число, а α – удовлетворяет условию $0\leq\alpha<1$. Т. к. $n\leq x<n+1\Rightarrow\dfrac{1}{n+1}<\dfrac{1}{x}\leq\dfrac{1}{n}$, то

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leq 1+\frac{1}{n}\Rightarrow\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{n+\alpha}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\Rightarrow$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \qquad (7.5)$$

При $x\to+\infty$ $(n\to+\infty)$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1. \qquad (7.6)$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e. \qquad (7.7)$$

Из равенств (7.5) – (7.7) согласно теореме о сжатой переменной получаем

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (7.8)$$

Докажем, что

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (7.9)$$

Пусть теперь $x<-1$. Положим $x=-y$, $\lim\limits_{x\to-\infty} y=+\infty$. Имеем

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y} = \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(\frac{y}{y-1}\right)^{y} = \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y} =$$

$$= \lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right) = e\cdot 1 = e.$$

Из равенств (7.8) и (7.9) следует (7.4). ▼

Можно показать, что $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ когда x стремится к нулю произвольным образом, пробегая любую последовательность значений, отличных от нуля.

3.7.3. Некоторые важные пределы

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e} \qquad (7.10)$$

▲ Поскольку

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\log_a(1+x) = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \log_a e. \ ▼$$

Замечание. О том, почему можно переставлять знаки предела и логарифма и для каких функций можно переставлять знаки предела и функции, будет подробно сказано при изучении понятия непрерывной функции.

В частном случае, при $a = e$, получаем

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.} \tag{7.11}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a} \tag{7.12}$$

▲ Обозначим $a^x - 1 = y$, тогда

$$a^x = y + 1 \Rightarrow x\ln a = \ln(1+y) \Rightarrow x = \frac{\ln(1+y)}{\ln a}.$$

Подставляя вместо $a^x - 1$ и x их выражения через y, получаем (в силу непрерывности функции $f(x) = a^x$, $y \to 0$ при $x \to 0$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \lim_{y\to 0}\frac{y}{\dfrac{\ln(1+y)}{\ln a}} = \ln a.\ ▼$$

Если $a = e$, то

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.} \tag{7.13}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha}. \tag{7.14}$$

▲ Обозначим $1 + x = e^y$, тогда $(1+x)^\alpha - 1 = e^{\alpha y} - 1 \Rightarrow x = e^y - 1$.

Подставляя вместо $(1+x)^\alpha - 1$ и x их выражения через переменную y ($y \to 0$ при $x \to 0$), получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\alpha y}-1}{e^{y}-1}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^{y}-1}\cdot\frac{e^{\alpha y}-1}{\alpha y}\cdot\alpha=\alpha\,. \blacktriangledown$$

3.8. Сравнение бесконечно малых функций

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при переменной $x\to a$. Было показано, что сумма, разность и произведение бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция. Что касается частного двух бесконечно малых функций, то здесь могут встретиться самые разнообразные случаи.

Определение 1. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ называется бм ***более высокого порядка, чем*** $\beta(x)$.

Обозначение. В данном случае применяется обозначение

$$\alpha(x)=o\big(\beta(x)\big) \text{ при } x\to a$$

(читается: $\alpha(x)$ есть o малое от $\beta(x)$ при $x\to a$).

Символ $o\big(\beta(x)\big), x\to a$, означает любую б.м.ф., имеющую в точке a более высокий порядок малости, чем б.м.ф. $\beta(x)$ в этой точке.

Пример 8.1. $\alpha(x)=x^2$, $\beta(x)=\sin x$ являются бесконечно малыми функциями при $x\to 0$. Для них

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sin x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=0\cdot 1=0,$$

так что $x^2=o(\sin x)$, $x\to 0$.

Определение 2. Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C\neq 0$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называют ***бесконечно малыми функциями одного порядка.***

Обозначение. В этом случае пишут

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \text{ при } x \to a$$

(читается: $\alpha(x)$ есть O большое от $\beta(x)$ при $x \to a$).

Пример 8.2. $\alpha(x) = \sin x$, $\beta(x) = 5x$ при $x \to 0$ являются бесконечно малыми функциями. Для них $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{5x} = \dfrac{1}{5}$.

Следовательно, $\sin x = O(5x)$ при $x \to 0$.

3.9. Эквивалентные бесконечно малые функции

Определение. Две бесконечно малые функции при $x \to a$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются ***эквивалентными***, если предел их отношения в точке a равен единице:

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

Обозначение. Эквивалентные бмф $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ **обозначаются** так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to a$.

Эквивалентные бм функции представляют частный случай бм одного порядка.

Замечание. Пусть $\alpha(x)$, $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ – бмф при $x \to a$. Нетрудно видеть, что $\alpha(x) \sim \alpha(x)$, $x \to a$;

если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, то $\beta(x) \sim \alpha(x)$, $x \to a$;

если $\alpha(x) \sim \beta(x)$, а $\beta(x) \sim \gamma(x)$, то $\alpha(x) \sim \gamma(x)$, $x \to a$,

так что отношение эквивалентности обладает свойством

- рефлексивности,
- симметричности и
- транзитивности.

Приведем примеры эквивалентных бесконечно малых функций. В свое время мы установили, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \sin x \sim x,\ x \to 0;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \Rightarrow \ln(1+x)\sim x,\ x\to 0\,;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a \quad (a>0,\ a\neq 1)\Rightarrow a^x-1\sim x\ln a,\ x\to 0\,;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\Rightarrow e^x-1\sim x,\ x\to 0\,;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha \quad (\alpha\in \mathrm{R})\Rightarrow (1+x)^\alpha-1\sim \alpha x,\ x\to 0\,.$$

Нетрудно показать, что

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1\Rightarrow \operatorname{tg} x\sim x,\ x\to 0\,;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1\Rightarrow \arcsin x\sim x,\ x\to 0\,;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1\Rightarrow \operatorname{arctg} x\sim x,\ x\to 0\,.$$

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

$$\left.\begin{aligned}
&\sin x\sim x\\
&\operatorname{tg} x\sim x\\
&\arcsin x\sim x\\
&\operatorname{arctg} x\sim x\\
&\ln(1+x)\sim x\\
&a^x-1\sim x\ln a\\
&e^x-1\sim x\\
&(1+x)^\alpha-1\sim \alpha x
\end{aligned}\right\}\ x\to 0\,. \qquad (9.1)$$

Теорема 9.1 (замена бмф эквивалентными бм функциями). ***Пусть*** $\alpha(x), \beta(x), \alpha_1(x), \beta_1(x)$ – ***бесконечно малые функции при*** $x \to a$, ***причем*** $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$, $\beta(x) \sim \beta_1(x)$. ***Если в точке а отношение*** $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ ***имеет конечный или бесконечный предел, то он не изменится при замене*** $\alpha(x)$ ***на*** $\alpha_1(x)$ ***и*** $\beta(x)$ ***на*** $\beta_1(x)$.

▲ Представим отношение $\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ в виде

$$\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \cdot \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)}. \qquad (9.2)$$

По условию

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} = 1, \quad \lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = 1.$$

Если отношение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ в точке a имеет предел A, то, воспользовавшись теоремой о пределе произведения, будем иметь

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\alpha_1(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \to a} \frac{\beta(x)}{\beta_1(x)} = A.$$

Если же $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ – ббф при $x \to a$, то вся правая часть равенства (9.2) и, значит, $\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$ также будет ббф при $x \to a$. ▼

Пример 9.1. Найти предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+x)}$.

▲ Пользуясь теоремой о замене бмф им эквивалентными бм функциями и таблицей (9.1), получаем

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \to 0} \frac{5x}{x} = 5. \text{ ▼}$$

Пример 9.2. Вычислить $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}$.

▲ Пользуясь теоремой о замене б.м.ф. им эквивалентными и таблицей (9.1), получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\frac{x^2}{4}}{x^2}=\frac{1}{2}. \ ▼$$

Теорема 9.2 (условие эквивалентности). ***Для того чтобы две бмф при $x\to a$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ были эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы их разность при $x\to a$ была бы бмф более высокого порядка, чем они сами.***

▲ **Необходимость.** Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бм функции при $x\to a$. Докажем, что их разность $\gamma(x)=\alpha(x)-\beta(x)$ (бмф при $x\to a$) является бесконечно малой функцией более высокого порядка, чем $\beta(x)$, а, следовательно, и $\alpha(x)$.

Действительно, по условию $\alpha(x)\sim\beta(x), x\to a$, и значит $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$. Отсюда

$$\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\right)=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1=1-1=0.$$

Это означает, что при $x\to a$ бмф $\gamma(x)$ есть бм более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

Достаточность. Пусть разность $\gamma(x)=\alpha(x)-\beta(x)$ функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, бм при $x\to a$, есть бмф более высокого порядка, чем $\beta(x)$ (или $\alpha(x)$). Докажем, что $\alpha(x)\sim\beta(x),\ x\to a$.

По условию $\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}=0$. Отсюда

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\beta(x)+\gamma(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\left(1+\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}\right)=1+\lim_{x\to a}\frac{\gamma(x)}{\beta(x)}=1+0=1,$$

что означает эквивалентность бмф $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to a$. ▼

Пример 9.3. Функции $\alpha(x)=x+x^2$ и $\beta(x)=x$ есть бмф при $x\to 0$.

Их разность $\gamma(x)=x^2$ при $x\to 0$ является бм более высокого порядка, чем $\alpha(x)$ и $\beta(x)$. Следовательно,

$$\alpha(x)\sim\beta(x),\ x\to 0.$$

Замечание. Если отношение $\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ двух бесконечно малых функций при $x\to a$ не имеет предела и не стремится к бесконечности, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ несравнимы между собой.

Например, несравнимы при $x\to 0$ бесконечно малые функции $\alpha(x)=x\sin\dfrac{1}{x}$, $\beta(x)=x$, так как $\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x}=\sin\dfrac{1}{x}$ и $\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела при $x\to 0$.

4. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Понятие непрерывности функции является одним из основных понятий математического анализа. Непрерывные функции обладают рядом важнейших свойств, создающих большие удобства при использовании этих функций в исследованиях, имеющих большое теоретическое и практическое значение.

Наблюдая происходящие вокруг нас изменения, прежде всего можно отметить, что они совершаются (в основном) постепенно, как говорят, непрерывно.

Например, при нагревании воды температура ее с течением времени повышается, но происходит это постепенно, непрерывно, без скачков. Другими словами, можно сказать, что за малый промежуток времени температура воды тоже изменяется мало. С точки зрения математики в рассмотренном примере температура воды есть функция времени и эта функция такова, что малому изменению аргумента (времени) соответствует и малое изменение функции (температуры). Но что значит мало? Это зависит, очевидно, от обстоятельств, ибо, например, ошибка в 1 *мм* при изготовлении двери в квартире – мало, а при проделывании отверстия диаметром 1 *см* – много. Эти соображения должны быть учтены при определении непрерывности функции.

4.1. Приращение функции

4.1.1. Приращение аргумента и функции

Возьмем в области определения **X** функции $y = f(x)$ некоторое фиксированное (исходное) значение x_0 аргумента. Пусть $x \in \mathbf{X}$ – новое значение аргумента.

Разность $x - x_0$ называется ***приращением аргумента*** и обозначается Δx (читается: «дельта икс»).

Итак, $\Delta x = x - x_0$, откуда $x = x_0 + \Delta x$, т. е. значение x получается из x_0 в результате того, что, как принято говорить, значение x_0 аргумента получило приращение Δx.

Аналогично разность между значениями функции при новом значении аргумента x и при исходном значении x_0 аргумента называется ***приращением функции*** в точке x_0 и обозначается $\Delta f(x_0)$ (читается: «дельта эф в точке икс нулевое ») или Δy. Таким образом,

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0).$$

Пусть значение x_0 аргумента получило приращение Δx $(x = x_0 + \Delta x)$. Тогда $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – приращение функции в точке x_0, вызванное приращением аргумента Δx. Следовательно,

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta f(x_0).$$

Нужно иметь в виду, что приращение аргумента и функции могут быть как положительными (рис. 1.1), так и отрицательными (рис. 1.2), и равными нулю (рис. 1.3). Однако в дальнейшем мы будем всюду предполагать, что $\Delta x \neq 0$.

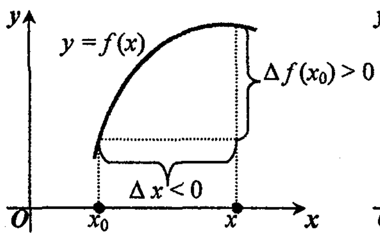


Рис. 1.1

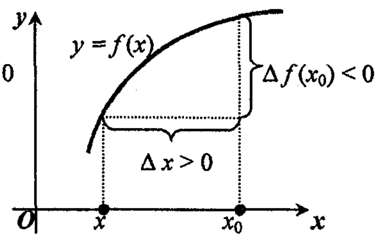


Рис. 1.2

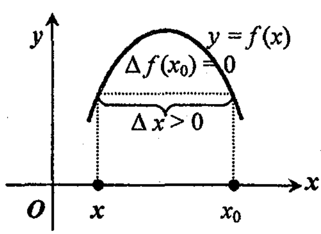


Рис. 1.3

Заметим, что приращение функции $\Delta f(x)$ зависит, во-первых, от точки x_0, в которой рассматривается приращение, во-вторых, от того приращения Δx аргумента, которое вызвало это приращение функции.

Пример 1.1. Если $y = x^2$, $x = 3$, $\Delta x = 0.1$, то $x + \Delta x = 3.1$ и $\Delta y = 3.1^2 - 3^2 = 0.61$. Если же $x = 4$ и $\Delta x = 0.1$, то $x + \Delta x = 4.1$ и $\Delta y = 4.1^2 - 4^2 = 0.81$.

На рис. 1.4 изображен график некоторой функции $y = f(x)$, $x \in X$. На кривой взята точка M с абсциссой x и ординатой $f(x)$. Если точка M сместится по кривой в новое положение M_1, то ее новые координаты будут $x + \Delta x$ и $f(x) + \Delta f(x)$. Таким образом, ***приращение аргумента Δx есть приращение абсциссы, а приращение функции $\Delta f(x)$ есть приращение ординаты точки M кривой $y = f(x)$.***

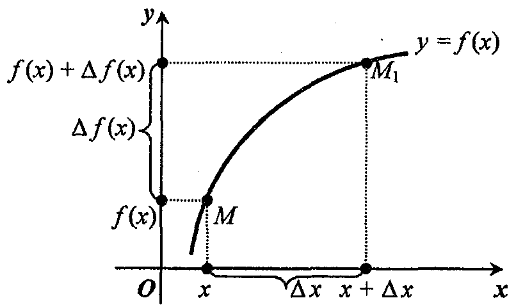


Рис. 1.4

4.1.2. Характеристические свойства некоторых функций

Пусть дана **постоянная функция**, т. е. функция $f(x) = C$, где C – некоторое число. Эта функция определена на всей числовой прямой.

Для любого значения аргумента, каково бы ни было приращение аргумента, приращение функции равно нулю.

▲ Действительно, если x_0 – произвольное значение аргумента, то $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0$ при любом $\Delta x \neq 0$. ▼

Верно и обратное, т. е. функция, приращение которой в произвольной точке при любом приращении аргумента равно нулю, есть постоянная.

▲ Действительно, беря какое-либо значение аргумента x_0 и придавая ему различные приращения Δx, будем получать различные точки числовой прямой, при этом всегда $f(x_0) = f(x_0 + \Delta x)$. А это и означает, что $f(x) = C$. ▼

Рассмотрим теперь **линейную функцию** $f(x) = kx + b$, где k и b – вещественные числа. Эта функция определена на всей числовой оси.

Покажем, что приращение этой функции пропорционально приращению аргумента.

▲ Действительно, если x_0 – произвольное значение аргумента, то

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \big(k(x_0 + \Delta x) + b\big) - (kx_0 + b) = k\Delta x,$$

т. е. приращение функции пропорционально приращению аргумента с коэффициентом пропорциональности k. ▼

Но и, обратно, если относительно какой-либо функции f известно, что ее приращение $\Delta f(x_0)$ в произвольной точке x_0 пропорционально приращению аргумента Δx, т. е. имеет место равенство $\Delta f(x_0) = k\Delta x$, где k – некоторое определенное число, то

$$f(x) = kx + b.$$

▲ Это следует из соотношения $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k\Delta x$ с учетом, что $\Delta x = x - x_0$, если положить $f(x_0) - kx_0 = b$. ▼

Итак, отношение $\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ для линейной функции не зависит от выбора значения аргумента x.

Рассмотренные свойства постоянно и линейно функций называют их ***характеристическими свойствами***.

4.2. Понятие непрерывности функции в точке

Понятие непрерывности функции является аналитическим уточнением интуитивного представления о непрерывности графика функции. А именно, что графиком непрерывной функции является плавная, нигде не прерывающаяся линия. Например, график степенной функции при $n > 0$ есть непрерывная линия.

Пусть функция $y = f(x)$, $x \in \mathbf{X}$ имеет в точке x_0 непрерывный график, тогда

$$\lim_{x \to x_0} M^{\bullet}M = M_0^{\bullet}M_0, M^{\bullet}M = f(x), M_0^{\bullet}M_0 = f(x_0),$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),\ M_0^{\bullet}M_0 = f(x_0).$$

Последнее равенство принимается за определение непрерывности.

Описательно говоря, функция f ***непрерывна*** в точке x_0, если ее значения $f(x)$ по мере приближения аргумента x к точке x_0 приближаются к значению $f(x_0)$ функции в самой точке x_0.

Уточним теперь это описание понятия непрерывности функции в точке. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности Ω точки x_0.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если

1. она имеет предел в точке x_0;
2. этот предел равен $f(x_0)$ – значению функции $f(x)$ в точке x_0,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{2.1}$$

Пусть $f(x) = x$. Т. к. $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, то соотношение (2.1) можно записать в следующем виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Следовательно, для непрерывной функции символ lim предельного перехода и символ f функции можно менять местами.

Непрерывные в точке функции и только они перестановочны с операцией предельного перехода.

Согласно определению предела функции условие (2.1) равносильно следующему определению на языке $\varepsilon - \delta$.

Определение 2. Функция $f(x)$ называется **непрерывной** в точке x_0, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое, что для всех $x \in \Omega$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \qquad (2.2)$$

С помощью логических символов определение 2 записывается в виде

$$\big(f(x) \text{ непрерывна в точке } x_0\big) \overset{\text{опр.}}{\Leftrightarrow}$$
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \Omega\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

При этом в общем случае величина δ зависит как от числа $\varepsilon > 0$, так и от точки x_0: $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$.

Подчеркнем, что теперь (в отличие от предыдущих разделов) мы не требуем, чтобы $x \neq x_0$.

Геометрически это можно истолковать следующим образом. Возьмем на графике функции $y = f(x), x \in \mathbf{X}$ (рис. 2.1) точку $M_0(x_0; f(x_0))$. Спроектируем эту точку на оси координат. Выберем ε - окрестность точки $f(x_0)$ (на оси Oy). Проведем прямые линии

$$y = f(x_0) - \varepsilon \text{ и } y = f(x_0) + \varepsilon.$$

Получим горизонтальную полосу шириной 2 ε (ε - полосу).

Если функция $y = f(x)$, $x \in \mathbf{X}$, непрерывна в точке $x_0 \in \mathbf{X}$, то, каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, всегда можно указать такую δ - окрестность точки x_0 (на оси Ox), что все точки кривой $y = f(x)$, абсциссы которых принадлежат δ - окрестности точки x_0, попадут в ε - полосу точки $f(x_0)$ оси Oy.

Отсюда, кстати, нетрудно усмотреть, как геометрически по заданному числу ε найти соответствующее ему число δ.

Приведем еще одну формулировку непрерывности функции в точке. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности Ω точки x_0 (рис.2.2).

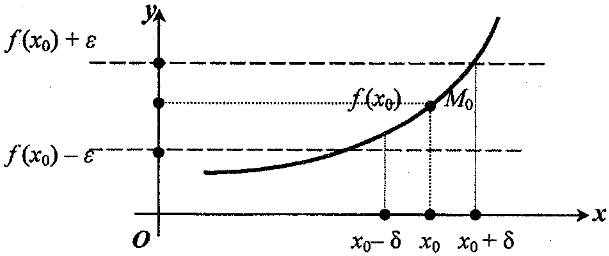


Рис. 2.1

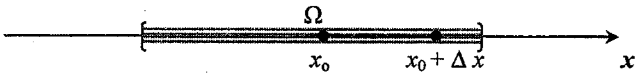


Рис. 2.2

Считая x_0 исходной точкой, возьмем другое значение аргумента $x_0+\Delta x \in \Omega$, где $\Delta x = x - x_0$ – приращение аргумента. Величина изменения функции $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ есть приращение функции f в точке x_0, отвечающее приращению Δx аргумента x.

Условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

можно записать так

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0).$$

Это равносильно тому, что ($f(x_0)$ перенесем в левую часть и внесем под символ предела)

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\big(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\big) = 0.} \qquad (2.3)$$

Замечая, что $f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, равенство (2.3) можно представить в виде $\boxed{\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.}$

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x_0 \in \Omega$, если ее приращение в этой точке является бмф при $\Delta x \to 0$.

Все три определения непрерывности функции равносильны. В каждом конкретном случае пользуются тем определением, которое оказывается более удобным.

Теорема. ***Все основные элементарные функции непрерывны там, где они определены.***

Непрерывность рациональных функций

Простейшим примером функции, непрерывной в любой точке x числовой прямой, может служить постоянная функция $f(x) = C$.

$$\blacktriangle\ f(x)=C,\ f(x+\Delta x)=C;\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=C-C=0;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.\ \blacktriangledown$$

2. Функция $f(x) = x$ непрерывна в любой точке x числовой прямой.

$$\blacktriangle\ f(x)=x,\ f(x+\Delta x)=x+\Delta x;\ \Delta y=(x+\Delta x)-x=\Delta x;$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0.\ \blacktriangledown$$

3. Из сказанного и свойств непрерывной функции в точке следует, что в любой точке функции $x^2 = x \cdot x,\ x^3 = x^2 \cdot x, \ldots,\ x^n = x^{n-1} \cdot x$ (n – натуральное число) непрерывны.

Как известно, функция $f(x) = x^n$ называется степенной, а функция вида

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n,$$

где $n \geq 0$ – целое число; $a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n$ – любые числа, – алгебраическим многочленом.

Каждое из слагаемых a_0x^n, a_1x^{n-1}, ..., a_n есть произведение двух непрерывных функций (постоянной и степенной) По свойствам непрерывных функций оно непрерывной в любой точке. Многочлен $P_n(x)$ является, таким образом, суммой функций, непрерывных в любой точке x, и, следовательно, непрерывен в любой точке x.

4. Дробно-рациональная функция, т. е. функция вида $R(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – алгебраические многочлены, непрерывна во всех точках x, в которых ее знаменатель не равен нулю, как частное непрерывных функций.

Непрерывность тригонометрических функций.

1. Функция $y=\sin x$ непрерывна в любой точке x числовой прямой.

$$\blacktriangle\ f(x)=\sin x,\ f(x+\Delta x)=\sin(x+\Delta x);$$

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=$$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{2}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0.$$

так как $\left|\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right|\le 1$, т. е. величина ограниченная, а произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть бесконечно малая. $\blacktriangledown$

Непрерывность функции $f(x)=\cos x$ в любой точке доказывается аналогично.

Из непрерывности функции $f(x)=\sin x$ и $f(x)=\cos x$ по свойствам непрерывных функций следует непрерывность функций $f(x)=\operatorname{tg} x$ во всех точках, где $\cos x\ne 0$, т. е. во всех точках, кроме

$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, и функции $f(x)=\operatorname{ctg}x$ во всех точках, кроме точек $x=n\pi$ $(n\in\mathbf{Z})$.

Непрерывность функции $f(x)=|x|$

Функция $f(x)=|x|$ определена и непрерывна во всех точках числовой прямой (рис. 2.4).

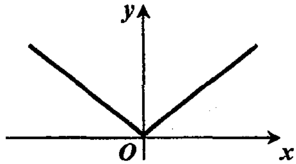


Рис. 2.4

▲ В точках полупрямой $(0;+\infty)$ она непрерывна, так как при значении $x>0$ $f(x)=x$. В точках полупрямой $(-\infty;0)$ функция $f(x)$ также непрерывна, так как при $x<0$ $f(x)=-x$, ее можно представить как произведение непрерывных функций (-1) и x и применить теорему о непрерывности произведения. Чтобы установит непрерывность функции $f(x)=|x|$ в точке $x=0$, вычислим односторонние пределы функции в этой точке:

$$\lim_{x\to 0-0}|x|=\lim_{x\to 0-0}(-x)=-\lim_{x\to 0-0}x=0;\ \lim_{x\to 0+0}|x|=\lim_{x\to 0+0}x=0.$$

Итак, пределы функции в точке $x=0$ слева и справа совпадают и равны значению функции в этой точке. Отсюда следует, что функция $f(x)=|x|$ непрерывна в точке $x=0$ и, следовательно, непрерывна во всех точках числовой прямой. ▼

Таким образом, рассмотренные функции непрерывны в каждой точке, в окрестности которой они определены. На основании теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного можно утверждать, что функции, получаемые из них с помощью конечного числа арифметических действий, являются также непрерывными функциями в каждой точке, в окрестности которой они определены.

4.3. Точки разрыва функции. Их классификация

Определение. Если функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некоторой окрестности $(x_0-\delta; x_0)$ слева от нее и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$, то говорят, что функция $y=f(x)$ ***непрерывна в точке x_0 слева.***

Аналогично если функция $f(x)$ определена в точке x_0 и в некотором интервале $(x_0; x_0+\delta)$ справа от нее и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$, то функция $y=f(x)$ ***непрерывна в точке x справа.***

Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной в точке x_0 необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три условия:

1) существовал предел слева $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0)$ *и предел справа* $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0)$;

2) пределы слева и справа были равны друг другу

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x);$$

3) выполнялось условие

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0). \tag{3.1}$$

Для того чтобы лучше освоиться с понятие непрерывности, выясним. Что происходит с функцией в окрестности той точки, где она не является непрерывной.

Определение. Если в точке x_0 функция $f(x)$ не является непрерывной, то говорят, что $f(x)$ ***разрывна*** в этой точке, и точку x_0 называют ***точкой разрыва*** функции $f(x)$.

Замечание. Если функция $f(x)$ не определена в точке x_0, то точку x_0 также называют точкой разрыва функции.

Точки разрыва функции классифицируются в зависимости от того, как именно нарушено условие ее непрерывности (3.1).

Разрыв 1-го рода

В зависимости от того, какое условие нарушено, различают три типа разрывов. Пусть нарушено второе условие.

Определение. Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет конечные пределы слева и справа, но они не равны друг другу,

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0} f(x),$$

то точка x_0 называется точкой разрыва функции $f(x)$ 1-го рода. (При этом безразлично, совпадает или нет $f(x_0)$ с одним из односторонних пределов.)

Такое название точки разрыва обусловлено тем, что при переходе x через точку x_0 значения функции $f(x)$ претерпевают конечный скачок, измеряемый разностью $f(x_0+0)-f(x_0-0)$ предельных значений $f(x)$ в точке x_0 справа и слева.

Геометрически разрыв 1-го рода выглядит так, как показано на рис 3.1.

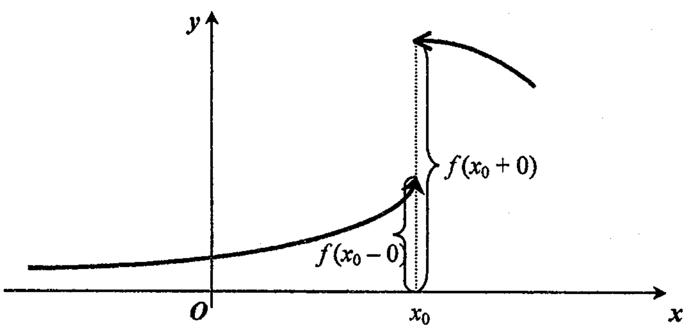


Рис. 3.1

Пример 3.1. Пусть $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}+2}{2^{\frac{1}{x}}+1}, \quad x\neq 0$.

▲ Для данной функции точка $x=0$ есть точка разрыва с конечным скачком функции, равным -1:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0}\frac{2^{\frac{1}{x}}+2}{2^{\frac{1}{x}}+1}=\left\{\frac{1}{x}\to -\infty \text{ при } x\to 0-0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}\to 0\right\}=2,$$

$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}\frac{2^{\frac{1}{x}}+2}{2^{\frac{1}{x}}+1}=$$

$$=\left\{\frac{1}{x}\to +\infty \text{ при } x\to 0+0 \Rightarrow 2^{\frac{1}{x}}\to \infty \Rightarrow 2^{-\frac{1}{x}}\to 0\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0+0}\frac{2^{\frac{1}{x}}(1+2\cdot 2^{-\frac{1}{x}})}{2^{\frac{1}{x}}(1+2^{-\frac{1}{x}})}=\lim_{x\to 0+0}\frac{1+2\cdot 2^{-\frac{1}{x}}}{1+2^{-\frac{1}{x}}}=1.$$

▼

Разрыв 2-го рода

Пусть нарушено первое условие.

> **Определение**. Если в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен, то точка x_0 называется ***точкой разрыва 2-го рода***.

Пример 3.2. Пусть $f(x)=\dfrac{1}{x-1}, \ x\neq 1$.

▲ Для данной функции точка $x=1$ есть точка разрыва второго рода, так как

$$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{x-1}=-\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{x-1}=+\infty. \ ▼$$

Возможно и стремление к бесконечности одного знака.

Примером этого может служить разрыв функции $f(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ в точке $x=1$.

Наиболее типичный случай разрыва 2-го рода – это бесконечный разрыв, т. е. когда функция в точке разрыва обращается в бесконечность. Но следует иметь в виду, что существуют разрывы 2-го рода в тех точках, в которых функция не обращается в бесконечность.

Пример 3.3. Пусть $f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

▲ Эта функция в точке $x = 0$ не имеет ни конечного, ни бесконечного предела как слева, так и справа. Поэтому для данной функции точка $x = 0$ является точкой разрыва 2-го рода. ▼

Устранимый разрыв

Пусть нарушено третье условие.

Определение. Если в точке x_0 функция $f(x)$ имеет предел слева и справа и они равны между собой, но не равны значению функции в точке x_0, $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$ то точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва*** функции $f(x)$.

Такое название оправдывается тем, что в этом случае достаточно изменить значение функции только в одной точке x_0, чтобы получить новую функцию, уже непрерывную в точке x_0. Именно, если $f(x)$ имеет в точке x_0 устранимый разрыв, то функция

$$F(x) = \left[\begin{array}{c} f(x),\ x \neq x_0; \\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x),\ x = x_0 \end{array} \right.$$

непрерывна в точке x_0. Мы «устранили» разрыв, изменив значение функции в одной точке x_0.

Так, функция $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ не определена в точке $x = 1$. Однако при $x \neq 1$ она равна $x + 1$ и при $x \to 1$ имеет предел равный 2. «Доопределив» функцию, считая число 2 ее значением при $x = 1$, получим непрерывную функцию. Она равна $x + 1$ при всех значениях x, включая 1.

4.4. Свойства непрерывных функций

4.4.1. Локальные свойства

Локальными называют такие свойства функций, которые определяются поведением функции в сколь угодно малой окрестности точки области определения.

Таким образом, сами локальные свойства характеризуют поведение функции в каком-то предельном отношении, когда аргумент функции стремится к исследуемой точке. Например, непрерывность функции в некоторой точке области определения, очевидно, есть локальное свойство функции.

Укажем локальные основные свойства непрерывных функций.

Теорема 4.1. ***Если функция*** $f(x)$ ***непрерывна в точке*** x_0, ***то она ограничена в некоторой окрестности*** Ω ***точки*** x_0.

Теорема 4.2 (устойчивость знака непрерывной функции). ***Если функция*** $f(x)$ ***непрерывна в точке*** x_0 ***и*** $f(x_0) \neq 0$, ***то в некоторой окрестности*** Ω ***точки*** x_0 ***все значения функции положительны или отрицательны вместе с*** $f(x_0)$.

Теорема 4.3 (операции над непрерывными функциями). ***Пусть функции*** $f(x)$ и $g(x)$ ***определены в некоторой окрестности*** Ω ***точки*** x_0. ***Если функции*** $f(x)$ и $g(x)$ ***непрерывны в точке*** x_0, ***то непрерывны в точке*** x_0

- ***их сумма*** $f(x)+g(x)$,
- ***разность*** $f(x)-g(x)$,
- ***произведение*** $f(x)\cdot g(x)$,
- ***а также частное*** $\frac{f(x)}{g(x)}$ $\left(g(x)\neq 0\right)$.

Доказательство непосредственно следует из определения непрерывности функции в точке и соответствующих свойств предела функции. Докажем непрерывность частного функций.

Дано: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)$.

Требуется доказать: Функция $F(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} F(x)=F(x_0).$$

▲ В силу теоремы об устойчивости знака непрерывной функции существует окрестность Ω точки x_0, в которой функция $g(x) \neq 0$. Поэтому функция $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ определена в некоторой окрестности точки x_0. По теореме о пределе частного имеем

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = F(x_0).$$

Итак, $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$, т. е. по определению 1 функция $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке x_0. ▼

Остальные утверждения теоремы доказываются аналогично.

Сложная функция. Непрерывность сложной функции

Пусть на некотором множестве **X** точек числовой оси задана функция $u = u(x)$. Обозначим через **U** множество значений *u*, соответствующих значениям *x* из множества **X**.

Пусть далее на множестве **U** определена функция $y = f(u)$.

Таким образом, каждому значению $x \in \mathbf{X}$ соответствует определенное значение $u \in \mathbf{U}$, а этому $u \in \mathbf{U}$, в свою очередь, соответствует определенное значение $y = f(u)$ (рис. 4.1).

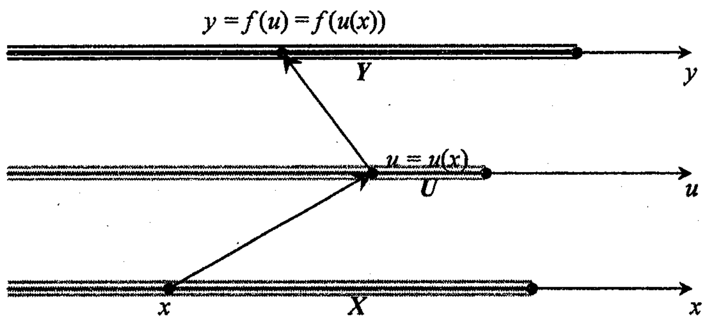


Рис. 4.1

Следовательно, величина y, в конечном счете, является функцией от x, определенной на множестве **X**. В этом случае переменную y мы будем называть ***сложной функцией*** от переменной x, и **обозначать** так:

$$y = f(u(x)).$$

Например, если $u = \sin x$, $y = \ln u$, то мы имеем сложну функцию $y = \ln\sin x$, определенную для $x > 0$.

Теорема 4.4 (переход к пределу под знаком непрерывной функции). ***Если функция $u = u(x)$ в точке x_0 имеет предел, равный числу A, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u = A$, то сложная функция $y = f(u(x))$ в точке x_0 имеет предел, равный $f(A)$.***

▲ Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(u)$ непрерывна в точке $u = A$, то для любого выбранного $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta_1 > 0$, что для всех u, удовлетворяющих условию

$$|u - A| < \delta_1, \tag{4.1}$$

верно неравенство

$$|f(u) - f(A)| < \varepsilon. \tag{4.2}$$

По условию $A = \lim\limits_{x \to x_0} u(x)$. Поэтому, каким бы ни было число $\delta_1 > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - x_0| < \delta, \tag{4.3}$$

будет верно неравенство

$$|u(x) - A| < \delta_1$$

или, что есть то же самое, неравенство (4.1). А из неравенства (4.1) следует неравенство (4.2), которое можно записать в виде

$$|f(u(x)) - f(A)| < \varepsilon. \tag{4.4}$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, верно неравенство

$$\left|f(u(x))-f(A)\right|<\varepsilon .$$

Согласно определению это означает, что число $f(A)$ есть предел сложной функции $f(u(x))$ в точке x_0. ▼

Таким образом, при выполнении условий теоремы

$$\lim_{x\to x_0} f(u(x))=f(A)$$

или

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(u(x))=f\left(\lim_{x\to x_0} u(x)\right).}$$

Это соотношение выражает ***правило перехода к пределу под знаком непрерывной функции.***

Теорема 4.5 (непрерывность сложной функции). ***Если функция $u=u(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y=f(u)$ непрерывна в точке $u_0=u(x_0)$, то сложная функция $y=f(u(x))$ непрерывна в точке x_0.***

▲ По условию функция $u=u(x)$ в точке x_0 имеет предел, равный $u(x_0)=u_0$. Кроме того, функция $y=f(u)$ непрерывна в точке u_0. На основании теоремы 4.4 о переходе к пределу под знаком непрерывной функции сложная функция $y=f(u(x))$ в точке x_0 имеет предел, равный $f(u_0)=f(u(x_0))$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(u(x))=f(u(x_0))$, что означает непрерывность сложной функции $f(u(x))$ в точке x_0. ▼

4.4.2. Глобальные свойства непрерывных функций

Глобальным свойством функции, описательно говоря, называется свойство, связанное со всей областью определения функции.

Функция $f(x)$ называется ***непрерывной на интервале*** $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Множество всех функций, непрерывных на интервале $(a;b)$ **обозначают** $\mathrm{C}(a;b)$.

Функция $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a;b]$, если она непрерывна на интервале $(a;b)$ и в точке a непрерывна справа, а в точке b – непрерывна слева. Множество всех таких функций обозначают $C[a;b]$.

Теорема 4.6 (Больцано – Коши о нуле функции). ***Если функция, непрерывная на отрезке, принимает на его концах значения разных знаков, то на отрезке есть точка, в которой функция обращается в нуль.***

В логической символике эта теорема имеет следующую запись:

$$\big(f\in C[a;b]\big)\wedge\big(f(a)\cdot f(b)<0\big)\Rightarrow\big(\exists c\in[a;b]\ f(c)=0\big).$$

▲ Делим отрезок $[a;b]$ пополам. Если в точке деления функция не равна нулю, то на концах одного из двух полученных в результате деления отрезков функция снова принимает значения разных знаков. С этим отрезком поступаем теперь так же, как и с исходным отрезком $[a;b]$, т. е. делим его пополам, и продолжаем процесс дальше.

Тогда мы на каком-то шаге либо попадем в точку $c\in[a;b]$, где $f(c)=0$, либо получим последовательность $\{I_n\}$ вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю. В последнем случае на основании леммы о вложенных отрезках найдется единственная точка $c\in[a;b]$, общая для всех этих отрезков. По построению существуют две последовательности $\{x_n^{\bullet}\}$ и $\{x_n^{\bullet\bullet}\}$ концов отрезков I_n такие, что $f(x_n^{\bullet})<0,\ f(x_n^{\bullet\bullet})>0,\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n^{\bullet}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n^{\bullet\bullet}=c$.

По свойствам предела и определению непрерывности получаем

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n^{\bullet})=f(c)\le 0,\ \lim_{n\to\infty}f(x_n^{\bullet\bullet})=f(c)\ge 0.$$

Таким образом $f(c)=0$. ▼

Замечание 1. Доказательство теоремы доставляет простейший алгоритм отыскания корня уравнения $f(x)=0$ на отрезке, в концах которого непрерывная функция имеет значения разных знаков.

Замечание 2 (геометрическое представление). Теорема 4.6, таким образом, утверждает, что при непрерывном изменении нельзя перейти от положительных значений к отрицательным значениям или наоборот, не приняв по дороге значения нуль (рис. 4.2).

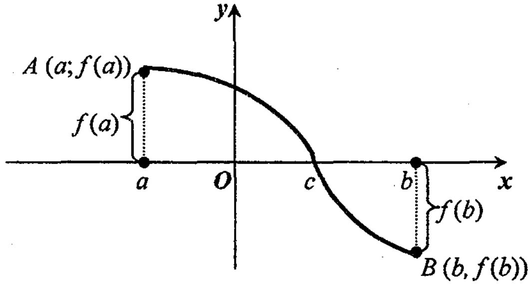


Рис. 4.2

Замечание 3. Требование непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ существенно: функция, имеющая разрыв хотя бы в одной точке, может перейти от отрицательного значения к положительному значению и, не обращаясь в нуль. Так будет, например, с функцией (рис. 4.3)

$$f(x)=\left[\begin{array}{ll} -1, & -1\le x<0; \\ 1, & 0\le x\le 1. \end{array}\right.$$

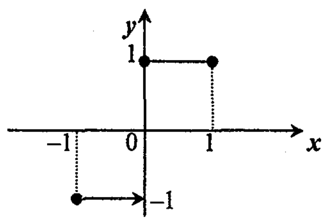


Рис. 4.3

Укажем одно из применений теоремы Больцано – Коши. Рассмотрим многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами

$$P_{2n+1}(x)=a_0x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\ldots+a_{2n+1}.$$

Пусть для определенности $a_0 > 0$. При достаточно больших по абсолютной величине отрицательных значениях x знак многочлена $P_{2n+1}(x)$ будет отрицательным, а при достаточно больших положительных значениях x – положительным. Так как многочлен есть всюду непрерывная функция, то найдется некоторая точка, в которой он необходимо обращается в нуль. Отсюда следует, что

всякий многочлен нечетной степени с вещественными коэффициентами имеет, по крайней мере, один вещественный корень.

Теоремой Больцано – Коши можно пользоваться и для приближенного вычисления корня.

Пример 4.1. Найти приближенно корень многочлена

$$x^3 + 3x^2 - 3 = 0.$$

▲ Это – многочлен нечетной степени и потому заведомо имеет, по крайней мере, один вещественный корень.

На концах отрезка $[-3; -2]$ многочлен $P_3(x)$ принимает значения разных знаков: $P_3(-3) = -3 < 0,\ P_3(-2) = 1 > 0$.

Следовательно, в интервале $(-3; -2)$ имеется корень этого многочлена.

Если взять точку $x_1 = \frac{-3+(-2)}{2} = -2.5$ – середину отрезка $[-3; -2]$, то получим $P_3(-3) < 0,\ P_3(-2.5) = 0.125 > 0$. Значит, корень находится в интервале $(-3; -2.5)$. Возьмем точку $x_2 = -2.75$ – середину отрезка $[-3; -2.5]$.

Будем иметь $P_3(-2.75) = -1.111 < 0,\ P_3(-2.5) = 0.125 > 0$, так что корень содержится в интервале $(-2.75; -2.5)$. Продолжая этот процесс, мы можем найти все более тесные границы для корня многочлена $P_3(x)$. ▼

Теорема 4.7 (о промежуточном значении непрерывной функции). ***Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, причем $f(a) = A$, $f(b) = B$, то для любого числа C, лежащего между числами A и B, найдется точка c, лежащая между точками a и b, в которой*** $f(c) = 0$.

Иными словами, непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция принимает все промежуточные значения между ее значениями на концах отрезка.

▲ Пусть для определенности, $A<B$.

Рассмотрим функцию $F(x)=f(x)-C$, где $A<C<B$. Очевидно, функция $F(x)$ определена, непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на концах этого отрезка значения противоположного знака,

$$F(a)=f(a)-C=A-C<0,\ F(b)=f(b)-C=B-C>0.$$

По теореме Больцано – Коши (3.6) в интервале $(a;b)$ найдется точка c, такая, что $F(c)=f(c)-C=0$, т. е. $f(c)=C$. ▼

Теорема 4.8 (первая теорема Вейерштрасса). ***Если функция*** $f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a;b]$, ***то она ограниченна на нем, т. е. существует такое число*** $A>0$, ***что для всех*** $x\in[a;b]$ ***верно неравенство*** $|f(x)|\le A$.

Замечание. Если функция непрерывна на интервале $(a;b)$ (или на полуинтервале $[a;b)$, или на полуинтервале $(a;b]$), то $f(x)$ не обязательно ограничена на нем.

Например, функция $f(x)=\frac{1}{x}$ непрерывна на полуинтервале $(0;1]$, но не ограничена на нем.

Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на некотором множестве **X**.

Наибольшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется такое ее значение $M=f(x_1)$, что $f(x)\le M$ для всех $x\in[a;b]$.

Наименьшим значением функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется такое ее значение $m=f(x_2)$, что $m\le f(x)$ для всех $x\in[a;b]$.

Теорема 4.9 (вторая теорема Вейерштрасса). ***Если функция*** $f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a;b]$, ***то она достигает на этом отрезке***

своего наименьшего значения m и наибольшего значения M, т. е. на отрезке $[a; b]$ найдутся такие точки x_1 и x_2, что

$$f(x_1)=m,\ f(x_2)=M\ .$$

Теорема имеет простой геометрический смысл (рис. 4.4).

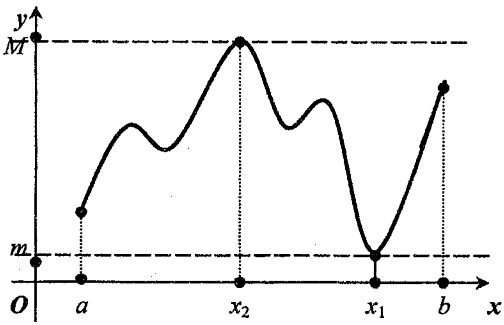


Рис. 4.4

Замечание. Функция, непрерывная на интервале, этим свойством не обладает.

Например, функция $y=3x^2$ на интервале $(0;1)$ не достигает значений $m=0$ и $M=3$, так как эти значения функция принимает в точках $x=0$ и $x=1$, а последние данному интервалу не принадлежат.

Условие непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ существенно.

Равномерная непрерывность

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;b)$. Тогда в любой точке $x_0 \in (a;b)$ для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех $x \in (a;b)$, удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, верно неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

При этом величина δ зависит как от числа ε, так и от точки x_0: $\delta = \delta(\varepsilon; x_0)$. Так что при одном и том же $\varepsilon > 0$ в разных точках $x \in (a;b)$ число δ может оказаться разным и ниоткуда не следует, что существует единое δ для всех $x \in (a;b)$. Требование, чтобы такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ существовало, является более сильным, чем требование просто непрерывности функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$.

Определение. Функция $f(x)$ называется равномерно непрерывной на интервале $(a;b)$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для любых точек $\overline{x}$ и $\widetilde{x}$ из интервала $(a;b)$, удовлетворяющих условию $|\overline{x} - \widetilde{x}| < \varepsilon$, верно неравенство $|f(\overline{x}) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon$.

Короче,

(Функция $f(x)$ равномерно непрерывна) $\Leftrightarrow$

$$\left(\forall \varepsilon > 0 \ \forall \overline{x} \in (a;b) \ \forall \widetilde{x} \in (a;b) \left(|\overline{x} - \widetilde{x}| < \delta \Rightarrow |f(\overline{x}) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon\right)\right).$$

Здесь существенно, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, обеспечивающее выполнение неравенства $|f(\overline{x}) - f(\widetilde{x})| < \varepsilon$ сразу для всех $\overline{x}, \widetilde{x}$ из интервала $(a;b)$ при единственном условии $|\overline{x} - \widetilde{x}| < \delta$.

Пример 4.2. Функция $f(x) = x$ равномерно непрерывна на всей числовой оси.

▲ Здесь достаточно взять $\delta = \varepsilon$. Ясно, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на интервале $(a;b)$, то она непрерывна в каждой точке $x \in (a;b)$.

Обратное утверждение неверно. ▼

Пример 4.3. Функция $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ непрерывна на интервале $(0;1)$, но не является равномерно непрерывной на этом интервале.

▲ Пусть $\overline{x}_n=\frac{1}{n}$, $\widetilde{x}_n=\frac{1}{2n+1}$.

Тогда величина $\left|\overline{x}_n-\widetilde{x}_n\right|=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{2n+1}\right|=\frac{1}{n(2n+1)}$ за счет выбора n может быть сделана меньше любого числа $\delta>0$, в то время как $\left|f(\overline{x}_n)-f(\widetilde{x}_n)\right|=1$.

Тем самым, существует $\varepsilon>0$ (например $\varepsilon=0.5$) такое, что при любом $\delta>0$ найдутся точки $\overline{x}_n$ и $\widetilde{x}_n$ из интервала $(0;1)$ такие, что $\left|\overline{x}_n-\widetilde{x}_n\right|<\delta$, но $\left|f(\overline{x}_n)-f(\widetilde{x}_n)\right|>\varepsilon$.

Следовательно, функция $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$ не является равномерно непрерывной на интервале $(0;1)$. ▼

Тем более интересно, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она на этом отрезке обладает свойством равномерной непрерывности.

Теорема 4.10 **(Кантор).** ***Если функция*** $f(x)$ ***непрерывна на отрезке*** $[a;b]$, ***то она равномерно непрерывна на этом отрезке.***

5. ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Производная – одно из важнейших понятий современной математики. Это понятие возникло как результат многовековых усилий, направленных на решение задачи о касательной к данной кривой, задачи о скорости неравномерного движения. С помощью производной можно характеризовать скорость изменения функции, скорость протекания некоторого процесса, явления. Подобные задачи интересовали математиков с давних времен. Но еще в *XVI* веке постановка этих задач и методы их решения носили частный характер. Накопившийся в этом направлении обширный материал получил теоретическое завершение в *XVII* веке в трудах Ньютона и Лейбница.

5.1. Производная

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, определенную на интервале $(a;b)$. Возьмем какое-нибудь значение $x\in(a;b)$. Затем возьмем другое новое значение аргумента $x+\Delta x$, придав первоначальному значению x приращение Δx, положительное или отрицательное, но такое, чтобы точка $x+\Delta x\in(a;b)$. Найдем приращение функции Δy, отвечающее приращению Δx аргумента: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Составим разностное отношение приращения функции Δy к соответствующему приращению $\Delta x\neq 0$ аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\quad (\Delta x\neq 0).$$

При фиксированном значении x это отношение является функцией от Δx: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=g(\Delta x)$.

Определение. ***Производной*** функции $y=f(x)$ ***в данной точке*** x называется предел (если он существует) отношения приращения функции Δy к вызвавшему его приращению аргумента Δx при стремлении последнего к нулю.

Обозначение: $f'(x)$ или $y'(x)$ или y'_x.

Таким образом, по определению

$$\boxed{f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.} \qquad (1.1)$$

Замечание. Формулу (1.1), определяющую производную функции $f(x)$, бывает удобно брать в следующей эквивалентной форме. Пусть функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой ее окрестности. Тогда

$$\boxed{f'(x)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},}$$

если этот предел существует.

Правило вычисления производной функции в точке x

Из определения производной функции в точке вытекает и способ ее вычисления. А именно, чтобы вычислить производную функции $y=f(x)$, $x\in\mathbf{X}$, в точке $x\in\mathbf{X}$, нужно:

1) значению аргумента x дать некоторое приращение $\Delta x\neq 0$ и получить новое значение аргумента $x+\Delta x\in\mathbf{X}$;
2) найти соответствующее приращение функции в точке x: $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$;
3) составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (приращение функции к вызвавшему его приращению аргумента);
4) вычислить предел этого отношения при $\Delta x\to 0$, если он существует, т. е. производную функции f в точке x.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Пример 1.1. Вычислить производную функции $f(x)=x^2$:
а) в точке $x=2$; б) в произвольной точке x.

▲ Данная функция определена на всей числовой прямой.

а) Вычисление производим следующим образом:

1) дадим значению аргумента $x=2$ приращение Δx. Новым значением аргумента будет $2+\Delta x$;

2) найдем соответствующее приращение функции:

$$\Delta y = f(2+\Delta x)-f(2)=(2+\Delta x)^2-2^2=$$
$$=(2+\Delta x-2)(2+\Delta x+2)=\Delta x(4+\Delta x)=4\Delta x+(\Delta x)^2;$$

3) Составим отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{4\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=4+\Delta x$;

4) вычислим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(4+\Delta x)=4.$$

Итак, $f'(2)=4$.

б) Поступаем аналогично:

1) давая значению аргумента x приращение Δx, получим новое значение аргумента $x+\Delta x$;

2) находим соответствующее приращение функции в точке x:

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=(x+\Delta x-x)(x+\Delta x+x)=$$
$$=\Delta x(2x+\Delta x)=2x\Delta x+(\Delta x)^2;$$

3) Составляем отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$;

4) переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, найдем производную данной функции в точке x: $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

Итак, $f'(x)=2x$. ▼

Из приведенного примера видно, что производная функции $y=f(x)$ зависит от значения аргумента x и определяется эти значением, другими словами, производная является также функцией, определенной равенством (1.1) для тех значений x, для которых существует предел (1.1).

Итак, если функция $f(x)$ имеет конечную производную в каждой точке $x \in \mathbf{X}$, то производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию от x, также определенную на $\mathbf{X}$.

Определение. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет ***производную на интервале*** $(a; b)$, если производная $f'(x)$ существует в каждой точке $x \in (a; b)$.

5.1.1. Физический смысл производной

Пусть на некотором промежутке $\mathbf{X} = (a; b)$ определена функция $y = f(x)$.

По графику функции видим, что при одних значениях x функция возрастает быстро, при других медленно.

Наша задача – охарактеризовать скорость изменения функции какой-то величиной. Ясно, что эта величина для каждого значения x будет иметь свое значение, т. е. будет являться функцией от x.

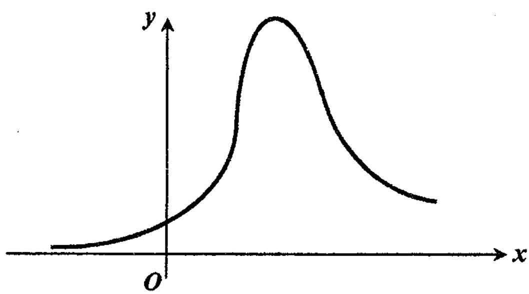


Рис. 1.1

Итак, при изучении тех или иных процессов и явлений возникает задача определения скорости этих процессов. Ее решение приводит к понятию производной.

Предположим, что функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки M по прямой линии, т. е. $y = f(x)$ – путь, пройденный точкой M от начала отсчета за время x.

Тогда за время $x+\Delta x$ пройден путь $y=f(x+\Delta x)$. За промежуток времени Δx точка M пройдет отрезок пути $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ (рис. 1.2).

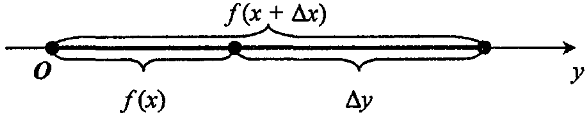


Рис. 1.2

Значит, на единицу приращения аргумента приходится приращение функции, равное $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Эту величину можно назвать ***средней скоростью*** изменения функции на участке $(x; x+\Delta x)$. Чем ближе Δx к нулю, тем точнее эта величина характеризует скорость изменения функции в самой точке x. Поэтому за ***мгновенную скорость*** изменения функции в точке x принимают предел, к которому стремится средняя скорость при $\Delta x \to 0$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Понятие скорости, заимствованное из физики, удобно при исследовании поведения произвольной функции. Какую бы зависимость ни отражала функция $y=f(x)$, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть средняя скорость изменения y относительно изменения x, а $f'(x)$ – мгновенная скорость изменения y в точке x.

Значение производной состоит в том, что при изучении любых процессов и явлений природы с ее помощью можно оценить скорость изменения связанных между собой величин.

В естествознании и других приложениях анализа производная играет такую выдающуюся роль именно потому. Что она дает ***локальную характеристику*** изучаемого явления в наиболее важном отношении – количественно оценивает изменяемость одной из двух связанных между собой величин при изменении другой. Все эти рассуждения ничего не меняют в основном факте, что производная есть локальная характеристика данной функции, особо вычисляемая для каждой отдельной точки и призванная описывать собой поведение этой функции не на целом отрезке $[a; b]$, а лишь в ближайшем соседстве его отдельных точек.

5.1.2. Геометрический смысл производной

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, непрерывной на интервале $(a; b)$. Через фиксированную произвольную точку $M(x; f(x))$ кривой $y = f(x)$ и любую другую точку $M_1(x+\Delta x; f(x+\Delta x))$ этой кривой проведем секущую MM_1 (рис. 1.3). Если точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке, то секущая MM_1 занимает различные положения и стремится к некоторому предельному положению MT. Прямая MT и есть ***касательная к кривой*** в точке M.

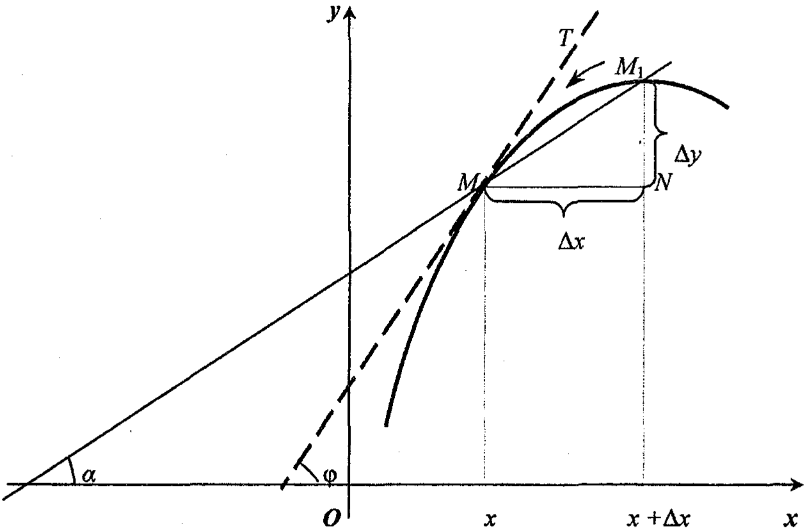


Рис. 1.3

Определение. Предельное положение MT секущей MM_1, когда точка M_1, передвигаясь по графику функции $y = f(x)$, стремится к точке M (или при $\Delta x \to 0$), называется ***касательной*** к графику функции в точке M.

Если секущая MM_1 при $M_1 \to M$ не имеет предельного положения, то говорят, что касательная к данной линии в точке M не существует.

Обозначим угол наклона секущей к оси Ox через $\alpha = (\widehat{Ox; MM_1})$. Очевидно, что этот угол зависит от Δx. Из треугольника MM_1N следует, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ точка M_1 перемещается вдоль кривой, приближаясь к точке M. Секущая MM_1 поворачивается вокруг точки M, и величина угла α изменяется. При приближении секущей MM_1 к касательной MT угол α приближается к углу $\varphi = (\widehat{Ox; MT})$ и

$$\operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Последний предел (если он существует) есть производная $f'(x)$, так что $\boxed{f'(x) = \operatorname{tg}\varphi = k_T.}$

Таким образом, производная $f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y(x) = f(x)$ в точке с абсциссой x.

Формула $f'(x) = \operatorname{tg}\varphi$ выражает геометрический смысл производной: производная от данной функции в данной точке равна тангенсу угла между осью Ox и касательной к графику функции в соответствующей точке.

5.1.3. Уравнение касательной и нормали к кривой

Рассмотрим кривую, заданную уравнением $y = f(x)$. Возьмем на этой кривой точку $M_0(x_0; f(x_0))$. Выведем уравнение касательной к кривой в точке M_0, предполагая, что существует производная $f'(x_0)$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом k, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0)$, выглядит так $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Угловой коэффициент касательной $k_T = f'(x_0)$, поэтому уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0 имеет вид

$$\boxed{\begin{gathered} y-y_0=f'(x_0)(x-x_0), \\ y_0=f(x_0). \end{gathered}}$$

Нормалью к кривой в данной ее точке называется прямая линия, проходящая через эту точку перпендикулярно касательной к кривой в этой точке.

Из определения нормали следует, что ее угловой коэффициент k_n связан с угловым коэффициентом k_T касательной соотношением

$$k_n=-\frac{1}{k_T}, \text{ т. е. } k_n=-\frac{1}{f'(x_0)} \quad \left(f'(x_0)\neq 0\right).$$

Уравнение нормали к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0; y_0)$:

$$\boxed{y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0),\ f'(x_0)\neq 0.}$$

В случае, когда $f'(x_0)=0$, уравнение нормали есть $\boxed{x=x_0.}$

Пример 1.1. Написать уравнения линий: касательной и нормали, проведенных к кривой $y=x^3$ в точке с абсциссой $x=2$.

▲ Имеем $f(x)=x^3$, $f'(x)=3x^2$, $f'(2)=12$, $y_0=f(2)=8$.

Поэтому уравнение касательной:

$$y-8=12(x-2)$$

или

$$12x-y-16=0;$$

уравнение нормали:

$$y-8=-\tfrac{1}{12}(x-2)$$

или

$$x+12y-98=0. \ ▼$$

5.1.4. Односторонние производные

Введем понятия правой и левой производной функции $f(x)$ в точке x.

Определение. ***Правой производной*** $f'(x+0)$ функции $y=f(x)$ в данной точке x называется величина

$$f'(x+0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

и ***левой производной*** $f'(x-0)$ – величина

$$f'(x-0)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

если указанные пределы существуют.

Такие пределы называются ***односторонними производными.*** Пользуясь понятием односторонних пределов функции, получаем:

Для того чтобы в точке x существовала производная $f'(x)$, необходимо и достаточно, чтобы в точке x функция $y=f(x)$ имела правую и левую производные, и эти производные были равны между собой: $f'(x-0)=f'(x+0)=f'(x)$.

Покажем, что существуют функции, которые имеют в точке x правую и левую производные, но не имеют производной в этой точке.

Рассмотрим функцию $f(x)=|x|$. Для этой функции отношение $\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{|x|}{\Delta x}$ равно 1, если $\Delta x>0$, и равно -1, если $\Delta x<0$. Поэтому функция $f(x)=|x|$ в точке $x=0$ имеет правую производную $f'(0+0)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\dfrac{|x|}{\Delta x}=1$ и левую производную $f'(0-0)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}}\frac{|x|}{\Delta x}=-1$, но они не равны, и значит, в точке $x=0$ функция $f(x)=|x|$ не имеет производной. Геометрически это означает, что в точке $O(0;0)$ график функции $y=|x|$ (рис. 1.4) не имеет касательной.

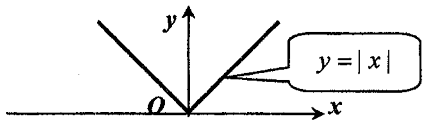


Рис. 1.4

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Будем говорить, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную, равную $+\infty$ или $-\infty$, если в этой точке

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty}$$

или соответственно

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty.}$$

Геометрически это означает, что касательная к кривой $y=f(x)$ в точке $(x_0;f(x_0))$ перпендикулярна к оси Ox.

Рассмотрим, например, функцию $f(x)=\sqrt[3]{x}$. Для этой функции при $x=0$ имеем $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}$,

откуда видно, что $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ стремится к $+\infty$ при стремлении Δx к нулю произвольным образом.

График функции $y=\sqrt[3]{x}$ в точке $O(0;0)$ имеет вертикальную касательную $x=0$ (ось Oy, рис. 1.5).

$y(x) := \sqrt[3]{x} \qquad r := \pi \qquad k := 100 \qquad x := -r, -r + \frac{r}{k} .. r$

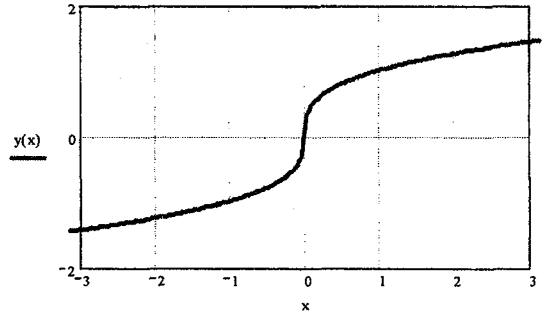


Рис. 1.5

Таким образом, если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$, то в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ график функции имеет касательную (рис. 1.6), определяемую уравнением

$$\boxed{y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).}$$

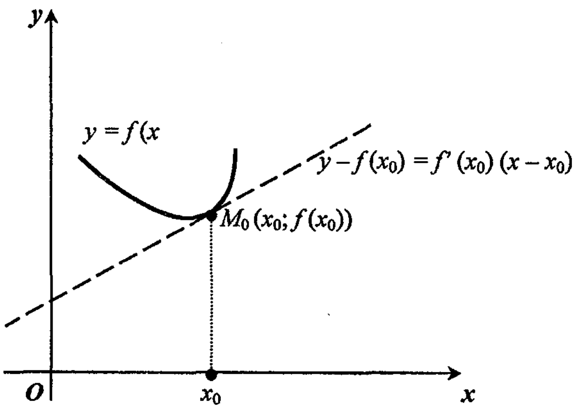


Рис.1.6

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***гладкой на интервале*** $(a; b)$, если она непрерывна вместе со своей производной на этом интервале. В этом случае кривую, задаваемую правилом $y = f(x)$, называют гладкой кривой на $(a; b)$.

Если в точке x_0 функция $y = f(x)$ непрерывна и имеет правую и левую производные $f'(x_0 - 0)$ и $f'(x_0 + 0)$, причем

$$f'(x_0 - 0) \neq f'(x_0 + 0),$$

то в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ график функции $y = f(x)$ касательной не имеет (кривая не гладкая). Но существуют две односторонние ***полукасательные*** (рис. 1.7). Точку $M_0(x_0; f(x_0))$ называют в этом случае ***угловой точкой*** кривой $y = f(x)$. Так, точка $O(0; 0)$ есть угловая точка графика функции $y = |x|$.

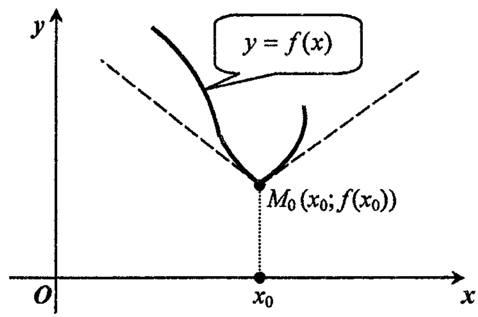


Рис. 1.7

Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а ее производная в точке x_0 бесконечна. То возможны случаи:

1. $f'(x_0) = +\infty$;
2. $f'(x_0) = -\infty$;
3. $f'(x_0 - 0) = -\infty, \quad f'(x_0 + 0) = +\infty$;
4. $f'(x_0 - 0) = +\infty, \quad f'(x_0 + 0) = -\infty$.

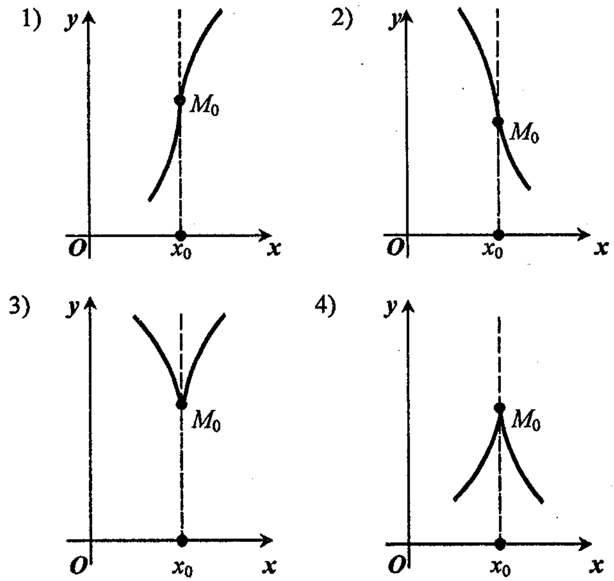


Рис. 1.8

На рис. 1.8 представлены расположения касательной $x = x_0$ к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, отвечающие случаям 1) – 4). (В случаях 3) и 4) иногда говорят, что график функции $y = f(x)$ имеет две слившиеся полукасательные.)

5.2. Понятие дифференцируемости функции

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале $(a; b)$. Возьмем некоторое значение $x \in (a; b)$. Дадим x приращение Δx, любое, но такое, чтобы $x + \Delta x \in (a; b)$. Тогда функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой в точке*** $x \in (a; b)$,

если приращение функции $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, отвечающее приращению Δx аргумента, можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (2.1)$$

где A – некоторое число, которое не зависит от приращения аргумента Δx (но, вообще говоря, зависит от x), а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Пример 2.1. Рассмотрим функцию $y = x^2$. Во всякой точке x и при любом Δx имеем

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = \underbrace{2x}_{A}\Delta x + \underbrace{\Delta x}_{\alpha} \cdot \Delta x .$$

Отсюда, в силу определения, функция $y = x^2$ дифференцируема в любой точке x, причем $A = 2x$, $\alpha(\Delta x) = \Delta x$.

Следующая теорема выражает необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции.

Теорема 2.1. ***Для того чтобы функция*** $y = f(x)$ ***была дифференцируемой в точке*** x, ***необходимо и достаточно, чтобы*** $f(x)$ ***в этой точке имела конечную производную*** $f'(x)$.

▲ **Необходимость.** Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Докажем, что в этой точке существует производная $f'(x)$. Действительно, из дифференцируемости функции $y = f(x)$ в точке x

следует, что приращение функции Δy, отвечающее приращению Δx аргумента, можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \text{ откуда } \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x),$$

где величина A для данной точки x постоянна (не зависит от Δx), а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. По теореме о связи функции, имеющей предел, с ее пределом и бесконечно малой функцией, следует, что

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Существование производной доказано. Одновременно мы установили, что $A = f'(x)$.

Достаточность. Пусть функция $f(x)$ в точке x имеет конечную производную $f'(x)$. Докажем, что $f(x)$ в этой точке дифференцируема. Действительно, существование производной $f'(x)$ означает, что при $\Delta x \to 0$ существует предел отношения $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и что

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

Отсюда, в силу теоремы о связи функции, имеющей предел, с ее пределом и бесконечно малой функцией, вытекает, что

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, и, значит,

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x. \qquad (2.2)$$

Так как в правой части формулы (2.2) величина $f'(x)$ не зависит от Δx, а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$, то равенство (2.2) доказывает, что функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. ▼

Теорема 2.1 устанавливает, что для функции $f(x)$ дифференцируемость в данной точке x и существование конечной производной в этой точке – понятия равносильные. Поэтому операцию нахождения производной функции называют также ***дифференцированием*** этой функции.

В дальнейшем, когда мы говорим, что функция имеет производную в данной точке, мы подразумеваем, наличие ***конечной*** производной, если не оговорено противное.

5.2.1. Связь между понятиями дифференцируемости и непрерывности

Теорема 2.2. ***Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в данной точке x, то она непрерывна в этой точке.***

▲ Действительно, если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то приращение Δy этой функции, отвечающее приращению Δx аргумента, может быть представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \qquad (2.3)$$

где A – постоянная для данной точки x, а $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Из равенства (2.3) следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$, что и означает, согласно определению, непрерывность функции $y = f(x)$ в данной точке x. ▼

Обратное заключение неверно: из непрерывности функции $f(x)$ в некоторой точке x не следует дифференцируемость функции в этой точке.

Например, функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но мы показали выше, не имеет производной в точке $x = 0$ и потому не является дифференцируемой в этой точке.

5.3. Понятие дифференциала функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, т. е. приращение Δy этой функции, отвечающее приращению Δx аргумента, представимо в виде

$$\boxed{\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x,} \tag{3.1}$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Из последнего равенства видно, что приращение функции состоит из суммы, каждое слагаемое которой есть бмф при $\Delta x \to 0$.

Определим порядок бмф $A\Delta x$ по отношению к бмф Δx (из сравнения бмф):

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{A\Delta x}{\Delta x} = A = \text{const}.$$

Следовательно, бмф $A\Delta x$ и Δx имеют одинаковый порядок малости, т. е. $A\Delta x = O(\Delta x)$.

Определим порядок бмф $\alpha(\Delta x)\Delta x$ по отношению к бмф Δx:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

Следовательно, бмф $\alpha(\Delta x)\Delta x$ имеет более высокий порядок малости по сравнению с бмф Δx, т. е. $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$.

Таким образом, бесконечно малое приращение Δy дифференцируемой функции может быть представлено в виде двух слагаемых: бмф $A\Delta x$ одинакового порядка малости с Δx и бмф $\alpha(\Delta x)\Delta x$ более высокого порядка малости по сравнению с бмф Δx.

Это означает, что в равенстве $\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ второе слагаемое стремится к нулю «быстрее», чем первое, т. е. $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(A\Delta x)$. Таким образом, первое слагаемое (при $A \neq 0$) является главной частью приращения функции $y = f(x)$.

Определение. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то главная линейная относительно Δx часть приращения функции $A\Delta x$ при $A \neq 0$ называется ***дифференциалом функции*** $y = f(x)$.

Обозначение:

$$dy = A\Delta x \text{ или } df(x) = A\Delta x. \tag{3.2}$$

Если $A = 0$, то $A\Delta x = 0$, и поэтому слагаемое $A\Delta x$ уже не является главной частью приращения Δy, т. е. слагаемое $\alpha(\Delta x)\Delta x$, вообще говоря, отлично от нуля. Однако и в этом случае по определению полагаем дифференциал функции в точке x равным нулю.

В силу теоремы (2.1) имеем $A = f'(x)$, так что формула (3.2) для dy принимает вид

$$\boxed{dy = f'(x)\Delta x.} \tag{3.3}$$

Наряду с понятием дифференциала функции вводят понятие дифференциала dx независимой переменной x, полагая по определению

$$\boxed{dx = \Delta x.}$$

Тогда формулу для дифференциала функции $y = f(x)$ можно записать в более симметричной форме $\boxed{dy = f'(x)dx.}$

Отсюда в свою очередь имеем: $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Это еще одно обозначение производной (обозначение Лейбница), которую можно рассматривать как дробь – отношение дифференциала функции dy к дифференциалу аргумента dx.

Введем еще одно понятие. Будем говорить, что функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, если она дифференцируема в каждой точке этого интервала.

5.3.1. Геометрический смысл дифференциала

Пусть имеем кривую, заданную уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ – дифференцируемая функция в точке $x \in (a; b)$. Проведем касательную MT к этой кривой в точке $M(x; y)$ и отметим на кривой еще точку M_1 с абсциссой $x + \Delta x$ (или $x + dx$). Пусть $\alpha = (Ox; MT)$ – угол между касательной MT и осью Ox, $MN \parallel Ox$, $M_1N \parallel Oy$, T – точка пересечения касательной MT прямой M_1N.

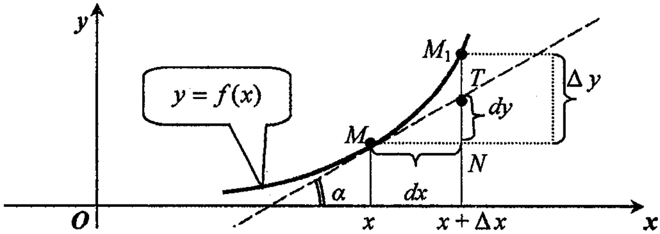


Рис. 3.1

Тогда приращение функции Δy равно величине отрезка M_1N.

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = M_1N$$

В то же время из прямоугольного треугольника MNT получаем:

$$NT = MN \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

Как известно, $f'(x)$ есть угловой коэффициент касательной, т. е. $f'(x) = \operatorname{tg} \alpha$. Поэтому $NT = f'(x)\Delta x = dy$, т. е. дифференциал функции dy равен величине отрезка NT.

Итак, $\Delta y = M_1N$, $dy = NT$, где Δy – приращение ординаты точки M_1, движущейся по графику функции; dy – приращение ординаты точки T, движущейся по касательной к графику функции. Из геометрического рассмотрения видно, что величины отрезков M_1N и NT различны.

Таким образом, дифференциал dy функции $y = f(x)$ в точке x равен приращению «ординаты касательной» MT к графику функции в точке $M(x; f(x))$, а приращение Δy функции есть приращение «ординаты самой функции» $y = f(x)$ в точке x, соответствующее приращению аргумента, равному Δx .

Прежде чем переходить к рассмотрению конкретных примеров, подведем некоторые итоги.

Мы столкнулись с задачей математического описания мгновенной скорости движущегося тела.

Эта задача привела к задаче аппроксимации заданной функции в окрестности исследуемой точки линейной функцией, что в геометрическом плане привело к понятию ***касательной***. Функции, описывающие движение реальной механической системы, предполагаются допускающими такую линейную аппроксимацию.

Тем самым среди всех функций естественно выделился класс ***дифференцируемых функций***.

Было введено понятие ***дифференциала*** функции в точке как линейного отображения, определенного на смещениях от рассматриваемой точки, которое с точностью до величины бесконечно малой по сравнению с величиной смещения описывает поведение приращения дифференцируемой функции в окрестности, рассматриваемой точки.

Дифференциал $df(x)\Delta x = f'(x)\Delta x$ вполне определяется числом $f'(x)$ – ***производной*** функции f в точке x, которое может быть найдено предельным переходом

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Физический смысл производной – ***скорость*** изменения величины $f(x)$ в момент x;

геометрический смысл производной – ***угловой коэффициент касательной*** к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x; f(x))$.

5.4. Основные правила дифференцирования

Построение дифференциала заданной функции или, что равносильно, отысканию ее производной называется операцией ***дифференцирования*** функции.

При математической равносильности задачи отыскания дифференциала и задачи отыскания производной все же производная и дифференциал не одно и то же, и поэтому, например, во французском математическом языке имеются два термина: derivation – «деривация», нахождение производной (скорости), и differentiation – «дифференцирование», нахождение дифференциала.

5.4.1. Дифференцирование и арифметические операции

Теорема 4.1. ***Если функции*** $u(x)$, $x \in \mathbf{X}$, $v(x)$, $x \in \mathbf{X}$ ***дифференцируемы в точке*** $x \in \mathbf{X}$, ***то***

1) ***их сумма дифференцируема в точке x, причем***

$$\left(u(x) \pm v(x)\right)' = u'(x) \pm v'(x);$$

2) ***их произведение дифференцируемо в точке x, причем***

$$\left(u(x) \cdot v(x)\right)' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x);$$

3) ***их отношение дифференцируемо в точке x, если*** $v(x) \neq 0$,

причем $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v_2^2(x)}$.

▲ 1) Пусть $f(x) = u(x) \pm v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, т. е. $u' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$; $v' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

Доказать, что $f(x)$ – дифференцируема, т. е. $f'(x) = u'(x) \pm v'(x)$.

Действительно, дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ и получим новое значение аргумента $x + \Delta x \in \mathbf{X}$.

Тогда каждая из функций $u(x)$, $v(x)$ получит соответствующее приращение функции в точке x:

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x),\ \Delta v = v(x+\Delta x) - v(x)$$

соответственно, и вследствие этого функция $f(x)$ получит некоторое приращение

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \big(u(x+\Delta x) \pm v(x+\Delta x)\big) - \big(u(x) \pm v(x)\big) =$$
$$= \big(u(x+\Delta x) - u(x)\big) \pm \big(v(x+\Delta x) - v(x)\big) = \Delta u \pm \Delta v .$$

Составим отношение (приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u \pm \Delta v}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x} .$$

Вычислим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т. е. производную

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = u'(x) \pm v'(x) .$$

2) Пусть $f(x) = u(x) \cdot v(x)$, где $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, т. е $u' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$; $v' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

Доказать, что $f(x)$ – дифференцируема, т. е.

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) \pm u(x) \cdot v'(x) .$$

Действительно, дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ и получим новое значение аргумента $x + \Delta x \in \mathbf{X}$.

Тогда каждая из функций $u(x)$, $v(x)$ получит соответствующее приращение функции в точке x:

$$\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x), \quad \Delta v = v(x+\Delta x) - v(x)$$

соответственно, и вследствие этого функция $f(x)$ получит некоторое приращение

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x) - u(x)\cdot v(x) = \\ &= (u(x)+\Delta u)\cdot(v(x)+\Delta v) - u(x)\cdot v(x) = \\ &= u(x)v(x) + v(x)\Delta u + u(x)\Delta v - u(x)v(x) = \\ &= v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\Delta v.\end{aligned}$$

Составим отношение (приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v(x)\Delta u + u(x)\Delta v + \Delta u\Delta v}{\Delta x} = v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} + u\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

Вычислим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т. е. производную

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x} + \Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) = \\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(v(x)\frac{\Delta u}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(u(x)\frac{\Delta v}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x\to 0}\left(\Delta x\frac{\Delta v}{\Delta x}\right).\end{aligned}$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$ от Δx не зависят. Функция $u(x)$ дифференцируема, следовательно, она непрерывна, и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}f'(x) &= v(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} + u(x)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} = \\ &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + 0\cdot v'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).\end{aligned}$$

3) Пусть $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$, $v(x)\neq 0$, где $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции, т. е $u'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$; $v'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}$.

Доказать, что $f(x)$ – дифференцируема, т. е.

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v^2(x)}.$$

Действительно, дадим аргументу x приращение $\Delta x\neq 0$ и получим новое значение аргумента $x+\Delta x\in\mathbf{X}$.

Тогда каждая из функций $u(x)$, $v(x)$ получит соответствующее приращение функции в точке x:

$$\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x),\quad \Delta v=v(x+\Delta x)-v(x)$$

соответственно, и вследствие этого функция $f(x)$ получит некоторое приращение

$$\Delta y=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{v(x)\Delta u-u(x)\Delta v}{v(x)\cdot\left(v(x)+\Delta v\right)}.$$

Составим отношение (приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v(x)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\cdot\left(v(x)+\Delta v\right)}.$$

Вычислим предел этого отношения при $\Delta x\to 0$, т. е. производную

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x)\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u(x)\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\cdot\left(v(x)+\Delta v\right)}.$$

Функции $u(x)$ и $v(x)$ от Δx не зависят. Функция $v(x)$ дифференцируема, следовательно, непрерывна, т. е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$. Тогда

$$f'(x) = \frac{v(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x} - u(x) \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x) \cdot \left(v(x) + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v \right)} = \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \blacktriangledown$$

Следствие 1. ***Постоянный множитель можно выносить за знак производной*** $(C\,f(x))' = C\,f'(x)$.

Следствие 2. ***Если функции*** $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ ***(n – конечное) имеют производную в точке x, то в этой точке имеют производную их сумма и произведение, причем***

$$(f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x))' = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots f_n'(x),$$

$$(f_1(x) \cdot f_2(x) \ldots f_n(x))' =$$
$$= f_1'(x) f_2(x) \ldots f_n(x) + \ldots + f_1(x) f_2(x) \ldots f_{n-1}(x) \cdot f_n'(x).$$

Следствие 3. ***Производная от линейной комбинации дифференцируемых функций равна линейной комбинации производных этих функций***

$$(C_1 f_1(x) + \ldots C_n f_n(x))' = C_1 f_1'(x) + \ldots C_n f_n'(x).$$

5.4.2. Производные некоторых основных элементарных функций

Производная показательной функции $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

Эта функция определена на всей числовой оси $(\mathbf{X} = (-\infty; \infty))$.

Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ и получим новое значение аргумента $x + \Delta x \in \mathbf{X}$. Тогда функция $f(x) = a^x$ получит некоторое приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$.

Составим отношение (приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$. Вычислим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т. е. производную

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a .$$

Итак,

$$\boxed{\left(a^x\right)' = a^x \ln a .}$$

В частности, если $a = e$, то

$$\boxed{\left(e^x\right)' = e^x .}$$

Производная логарифмической функции $y = \ln x$ $(x > 0)$

Эта функция определена при любых $x > 0$ $\left(\mathbf{X} = (0; \infty)\right)$. Дадим аргументу x приращение Δx и получим новое значение аргумента $x + \Delta x \in \mathbf{X}$. Тогда функция $f(x) = \ln x$ получит некоторое приращение $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \ln(x + \Delta x) - \ln x = \ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)$.

Составим отношение (приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$.

Вычислим предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, т. е. производную

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = \frac{1}{x} .$$

Итак,

$$\boxed{\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x} .}$$

Известно следующее равенство

$$\ln x = \frac{\log_a x}{\log_a e} \Rightarrow \log_a x = \log_a e \cdot \ln x,\ (a > 0,\ a \neq 1),$$

откуда $(\log_a x)' = \log_a e(\ln x)' = \dfrac{\log_a e}{x} = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Итак, $\boxed{(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}.}$

Производная степенной функции $y = x^\alpha$ $\alpha \in \mathbf{R}$

Эта функция определена, во всяком случае, для всех $x > 0$ $(\mathbf{X} = (0; \infty))$. Дадим аргументу x приращение Δx и получим новое значение аргумента $x + \Delta x \in \mathbf{X}$.

Тогда функция $f(x) = x^\alpha$ получит некоторое приращение

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left(\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \right).$$

Составим отношение (приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = x^\alpha \dfrac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\Delta x}$.

Учитывая, что $\left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1 \sim \alpha \dfrac{\Delta x}{x}$ при $\Delta x \to 0$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\Delta x} = x^\alpha \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\alpha \Delta x}{x}}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Итак,

$$\boxed{\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\, x^{\alpha-1}.}$$

Производные тригонометрических функций

Рассмотрим функцию $y=\sin x$ $\left(\mathbf{X}=(-\infty;\infty)\right)$. Дадим аргументу x приращение $\Delta x \neq 0$ и получим новое значение аргумента $x+\Delta x \in \mathbf{X}$.

Тогда функция $f(x)=\sin x$ получит некоторое приращение

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\left(\tfrac{1}{2}\Delta x\right)\cos\left(x+\tfrac{1}{2}\Delta x\right).$$

Составим отношение (приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Учитывая, что $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}=1$ и что $\lim\limits_{\Delta x\to}\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\right)=\cos x$ в силу непрерывности функции $y=\cos x$ во всякой точке x, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\right) = \cos x.$$

Итак,

$$\boxed{(\sin x)' = \cos x.} \qquad (4.1)$$

Аналогично получаем

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x.} \qquad (4.2)$$

Пользуясь формулами (4.1) и (4.2) и правилом дифференцирования частного, найдем производную от функции $y = \operatorname{tg} x$:

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Итак, $\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x},\ x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$

Аналогично находим $\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x},\ x \neq n\pi,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots}$.

5.4.3. Дифференцирование сложной функции

Функцию, заданную в виде суперпозиции функций, называют сложной функцией. Таким образом, прилагательное «сложная» характеризует не функцию, а способ ее задания.

Рассмотрим суперпозицию двух функций: $y = f(u(x))$, где $y = f(u)$, $u = u(x)$. В этом случае u – называют ***промежуточным аргументом***, x – ***независимой переменной.***

Теорема 4.2 (**о дифференцировании сложной функции**). ***Если функция*** $u = u(x)$ ***дифференцируема в точке*** $x \in \mathbf{X}$, ***а функция*** $y = f(u)$ ***дифференцируема в соответствующей точке*** $u = u(x) \in \mathbf{U}$, ***то сложная функция*** $y = f(u(x))$ ***дифференцируема в точке*** x, ***причем***

$$\big(f(u(x))\big)_x' = f_u' \cdot u'(x). \tag{4.3}$$

▲ Дадим аргументу x приращение Δx, такое, что $x + \Delta x \in \mathbf{X}$. Тогда функция $u = u(x)$ получит приращение Δu, а это в свою очередь при $\Delta u \neq 0$ вызовет приращение Δy функции $y = f(u)$. По условию функция $y = f(u)$ дифференцируема в точке u, поэтому приращение Δy этой функции может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u, \tag{4.4}$$

где $\alpha(\Delta u) \to 0$ при $\Delta u \to 0$.

Функция $\alpha(\Delta u)$ вообще не определена при $\Delta u = 0$. Доопределим ее, положив $\alpha(0) = 0$. Тогда $\alpha(\Delta u)$ будет непрерывной при $\Delta u = 0$.

Разделив обе части равенства (4.4) на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}. \qquad (4.5)$$

По условию функция $u = u(x)$ дифференцируема в точке x и, значит, непрерывна в этой точке. Поэтому при $\Delta x \to 0$ приращение $\Delta u \to 0$, что вызывает стремление к нулю $\alpha(\Delta u)$. Кроме того, из этого условия следует, что $\frac{\Delta u}{\Delta x} \to u'(x)$ при $\Delta x \to 0$.

Следовательно, правая часть (4.5) имеет предел при $\Delta x \to 0$, равный $f'(u)u'(x)$. Поэтому существует и предел левой части равенства (4.5) при $\Delta x \to 0$, т. е. существует $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, который есть производная по x сложной функции $y = f(u(x))$ в точке x. Переходя в равенстве (4.5) к пределу при $\Delta x \to 0$, получим

$$\left(f(u(x))\right)_x' = f'(u)u'(x). \qquad (4.6)$$

Здесь символ $f'(u)$ означает производную функции $f(u)$ по ее аргументу u (а не x), вычисленную при значении $u = u(x)$ этого аргумента. ▼

Равенство (4.6) можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}, \text{ или } y_x' = y_u' \cdot u_x'. \qquad (4.7)$$

Производная сложной функции равна произведению производной этой функции по промежуточному аргументу на производную промежуточного аргумента по независимой переменной.

Инвариантность формы дифференциала

Рассмотрим сложную функцию $y = f(u(x))$.

Чему равен дифференциал dy?

Если $y = f(u)$ – дифференцируемая функция независимой переменной u, то

$$dy = f'(u)\,du\,, \tag{4.8}$$

где дифференциал независимой переменной равен ее произвольному приращению: $du = \Delta u$.

Пусть теперь аргумент u дифференцируемой функции $y = f(u)$ сам является дифференцируемой функцией $u = u(x)$ независимой переменной x. В таком случае y можно рассматривать как сложную функцию $y = f(u(x))$ аргумента x. Поскольку аргумент x является независимой переменной, то для сложной функции $y = f(u(x))$ дифференциал dy представляется в виде

$$dy = \big(f(u(x))\big)'_x\,dx\,. \tag{4.9}$$

По правилу дифференцирования сложной функции

$$\big(f(u(x))\big)'_x = f'(u)\cdot u'(x)\,,$$

поэтому формула (4.9) примет вид $dy = f'(u)\cdot u'(x)\,dx$. Замечая, что $u'(x)\,dx = du$, получим для dy выражение $dy = f'(u)\,du$, совпадающее с (4.8).

Таким образом, дифференциал функции выражается формулой одного и того же вида как в случае функции от независимой переменной, так и в случае функции от функции. Это свойство дифференциала называют ***инвариантностью*** формы дифференциала.

Замечание. Инвариантность – неизменность какой-либо величины по отношению к некоторым преобразованиям.

Формулы совпадают по форме, но имеют различный смысл. Если u – независимая переменная, то в формуле дифференциала

$dy = f'(u)du$ величина du равна Δu – произвольному приращению независимой переменной; когда же $u = u(x)$, то $du = u'(x)dx$ есть ***линейная часть*** приращения функции $u = u(x)$, в общем случае не равная Δu.

5.4.4. Понятие обратной функции

Производная обратной функции

Пусть функция $y = f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$ и пусть множеством значений этой функции является отрезок $[\alpha; \beta]$ оси Oy. Пусть, далее, каждому значению y соответствует только одно значение $x \in [a; b]$, для которого $f(x) = y$ (рис.4.1).

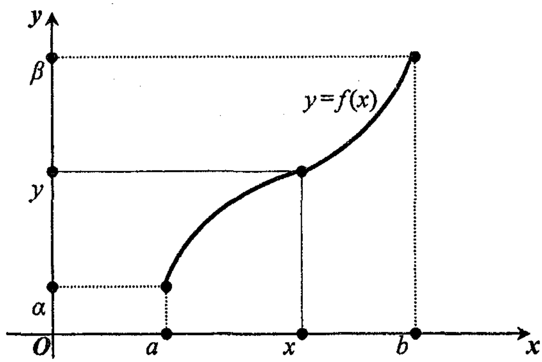


Рис. 4.1

Тогда на отрезке $[\alpha; \beta]$ можно определить функцию $x = g(y)$, ставя в соответствие каждому $y \in [\alpha; \beta]$ то значение $x \in [a; b]$, для которого $f(x) = y$. Функция $x = g(y)$ называется ***обратной*** для функции $y = f(x)$.

Если $x = g(y)$ – обратная функция для $y = f(x)$, то, очевидно, функция $y = f(x)$ является обратной для функции $x = g(y)$. Поэтому функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ называют ***взаимно обратными***.

Для взаимно обратных функций имеют место соотношения

$$\boxed{f(g(y)) = y, \quad g(f(x)) = x\,.} \tag{4.10}$$

Укажем еще один, более конструктивный, подход к понятию обратной функции. Если уравнение $y=f(x)$, определяющее y как функцию от x, можно разрешить относительно x так, что каждому значению y соответствует одно определенное значение x, то получим уравнение $x=g(y)$, определяющее x как функцию y. Эта функция $x=g(y)$ является обратной по отношению к функции $y=f(x)$.

Пример 4.1. Найти функцию, обратную функции $y=3x-5$ на отрезке $[0;1]$.

▲ Обратная функция $x=\frac{1}{3}y+5$ на $[-5;-2]$. ▼

Пример 4.2. Найти функцию, обратную функции $y=x^3$, $-\infty<x<+\infty$.

▲ Обратная функция $x=\sqrt[3]{y}$, $-\infty<y<+\infty$. ▼

Очевидно, уравнения $y=f(x)$ и $x=g(y)$ определяют одну и ту же кривую на плоскости Oxy.

Если в обоих случаях откладывать значения аргументов на оси абсцисс, а значения функции на оси ординат, т. е. вместо уравнений $y=f(x)$ и $x=g(y)$ рассматривать уравнения $y=f(x)$ и $x=g(y)$, то график функции $y=g(x)$ будет симметричен графику функции $y=f(x)$ относительно биссектрисы 1-го и 3-го координатных углов (рис. 4.2).

Чтобы получит из графика функции $y=f(x)$ график обратной функции $y=g(x)$, надо отразить график функции $y=f(x)$ относительно прямой $y=x$.

Множество **Y**, на котором задана обратная функция $x=g(y)$, состоит из всех чисел вида $y=f(x)$, $x\in\mathbf{X}$.

В зависимости от свойств функций и множества **X**, на котором она задана, вид множества **Y** может быть различным. Мы рассмотрим сейчас случай, когда:

1. функция $y=f(x)$ задана на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на нем;
2. функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$.

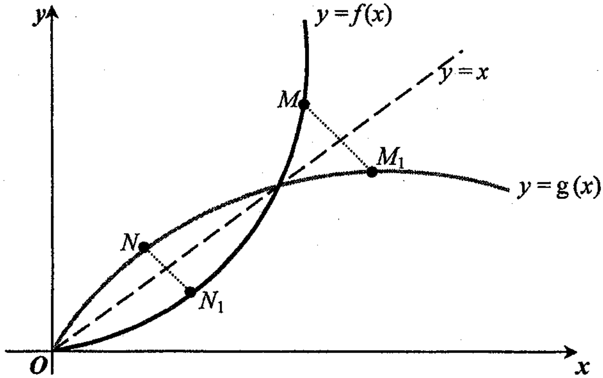


Рис. 4.2

Ясно, что для монотонных функций различным значениям x_1 и x_2 соответствуют различные значения $f(x_1)$ и $f(x_2)$.

Теорема 4.3 (об обратной функции). ***Если функция*** $y = f(x)$ ***непрерывна и возрастает на отрезке*** $[a; b]$, ***причем*** $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$, ***то она имеет обратную функцию*** $x = g(y)$, ***которая определена, непрерывна и возрастает на отрезке*** $[\alpha; \beta]$.

Ограничимся геометрическим пояснением теоремы (рис.4.3). Кривая AB является графиком функции $y = f(x)$, непрерывной и возрастающей на $[a; b]$. Из рисунка видно, что каждому значению $y \in [\alpha; \beta]$ отвечает одно значение $x \in [a; b]$, для которого $f(x) = y$. Поэтому на той же кривой AB величина x выражается как функция y на $[\alpha; \beta]$; $x = g(y)$.

Это и есть функция, обратная к $y = f(x)$. Она на отрезке $[\alpha; \beta]$ непрерывна (ее графиком является та же непрерывная кривая AB) и возрастает, т. к. большему значению аргумента y отвечает большее значение функции $x = g(y)$.

Аналогичное утверждение справедливо и для непрерывной убывающей на $[a; b]$ функции.

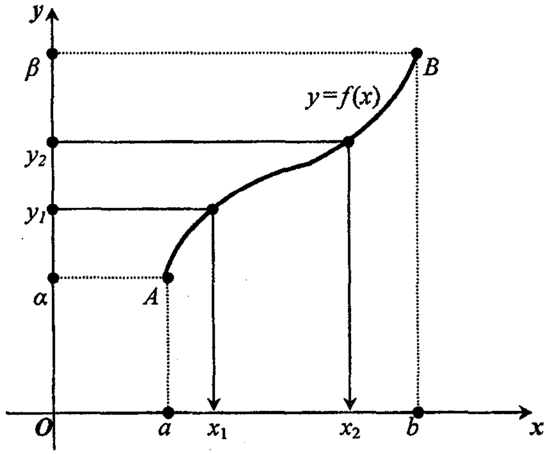


Рис. 4.3

Это и есть функция, обратная к $y = f(x)$. Она на отрезке $[\alpha; \beta]$ непрерывна (ее графиком является та же непрерывная кривая AB) и возрастает, т. к. большему значению аргумента y отвечает большее значение функции $x = g(y)$.

Аналогичное утверждение справедливо и для непрерывной убывающей на $[a; b]$ функции.

Производная обратной функции

Теорема 4.4 (о производной обратной функции). ***Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и возрастает (убывает) в некоторой окрестности точки x_0 и пусть в точке x_0 существует производная $f'(x_0) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = g(y)$ имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем***

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \tag{4.10}$$

▲ Рассмотрим функцию $x = g(y)$. Дадим значению $y = y_0$ приращение Δy. Тогда функция $x = g(y)$ получит некоторое приращение Δx

$$\Delta x = g(y_0 + \Delta y) - g(y_0).$$

При этом в силу возрастания (убывания) обратной функции при $\Delta y \neq 0$ обязательно $\Delta x \neq 0$. Поэтому отношение $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ можно представить в виде

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}. \tag{4.11}$$

перейдем в этом равенстве к пределу при $\Delta y \to 0$.

Так как функция $f(x)$ дифференцируема, а, следовательно, и непрерывна, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$. Так как обратная функция $x = g(y)$ непрерывна в точке y_0 (см. теорему 4.3 об обратной функции), то $\Delta x \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Но при $\Delta x \to 0$ предел правой части равенства $\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ существует и равен $\frac{1}{f'(x_0)}$.

Из равенства (4.11) вытекает поэтому, что при $\Delta y \to 0$ существует предел отношения $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, причем $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Но предел отношения $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ при $\Delta y \to 0$ есть производная $g'(y_0)$ функции $x = g(y)$ в точке $y = y_0$. Таким образом,

$$\boxed{g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \text{ или } x'_y = \frac{1}{y'_x}.} \ \blacktriangledown \tag{4.12}$$

Доказанная теорема имеет простой геометрический смысл. Рассмотрим в некоторой окрестности точки x_0 график функции $y = f(x)$.

Пусть точке x_0 на этом графике соответствует точка $M_0(x_0; f(x_0))$. Существование производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 эквивалентно существованию касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0;\, f(x_0))$. Поэтому, если существует касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0;\, y_0)$, не параллельная оси Ox, то она будет касательной и к графику функции $x = g(y)$ (та же кривая!) в точке M_0 (рис. 4.4).

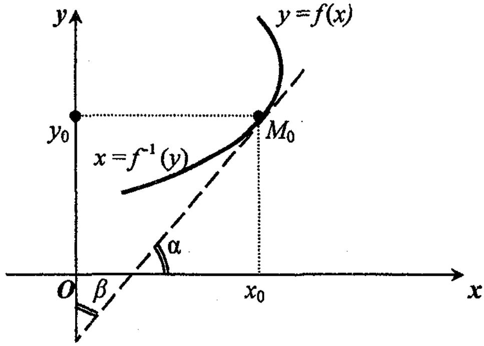


Рис.4.4

Как известно, производная $f'(x_0)$ равна тангенсу угла α наклона касательной, проходящей через точку M_0, к оси Ox. Производная обратной функции $g'(y_0)$ равна тангенсу угла β наклона той же касательной к оси Oy. Поскольку углы α и β в сумме составляют $\frac{\pi}{2}$, то формула $g'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ выражает очевидный факт:

$$g'(y_0) = \operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\operatorname{ctg}\beta} = \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Формулу (4.12) записывают также в виде

$$\boxed{f'(x_0) = \frac{1}{g'(y_0)} \text{ или } y'_x = \frac{1}{x'_y},\; x'_y \neq 0.} \qquad (4.13)$$

Формулы (4.12) и (4.13) можно получить совсем просто. Пусть $y = f(x)$ и $x = g(y)$ – взаимно обратные дифференцируемые функции. Тогда $g(\underbrace{f(x)}_{y}) = x$. Дифференцируя обе части по x и пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, получим

$$g'_y \cdot f'_x = 1 \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \quad g'_y = \dfrac{1}{f'_x}, \; f'_x \neq 0, \\ \Rightarrow \quad f'_x = \dfrac{1}{g'_y}, \; g'_y \neq 0. \end{array} \right.$$

Производные обратных тригонометрических функций

1. Функция $y = \arcsin x$ определена на отрезке $[-1; 1]$ (рис. 4.5) и является обратной для функции $x = \sin y$ на отрезке $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$. Рассмотрим интервал $-1 < x < 1$. Функция $x = \sin y$ имеет для соответствующих значений $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ положительную производную $x'_y = \cos y$. По теореме о производной обратной функции получаем

$y(x) := \mathrm{asin}(x) \quad r := 1 \quad k := 100 \quad x := -r, -r + \frac{r}{k} .. r$

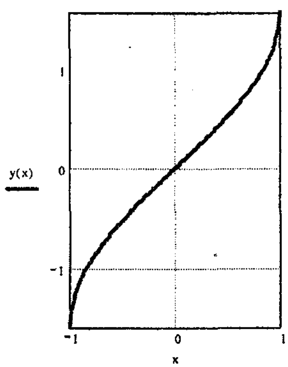


Рис. 4.5

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \; -1 < x < 1.$$

Корень $\sqrt{1-\sin^2 y}$ берем со знаком «+», т. к. $\cos y > 0$ для значений $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Итак,

$$\boxed{(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \ -1 < x < 1.} \qquad (4.14)$$

Мы исключаем значения $x = \pm 1$, поскольку для соответствующих значений $y = \pm\frac{\pi}{2}$ производная $x'_y = \cos y$ равна нулю и правая часть (4.14) теряет числовой смысл.

2. Функция $y = \operatorname{arctg} x$ определена на интервале $-\infty < x < +\infty$ (рис. 4.6) и является обратной для функции $x = \operatorname{tg} y$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Так как производная $x'_y = \dfrac{1}{\cos^2 y}$, то $y'_x = \dfrac{1}{x'_y} = \cos^2 y$. Но

$$\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2.$$

Следовательно,

$$\boxed{(\operatorname{arctg})' = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x.} \qquad (4.15)$$

$y(x) := \operatorname{atan}(x)$ $\quad r := 3$ $\quad k := 100$ $\quad x := -r, -r + \frac{r}{k} .. r$

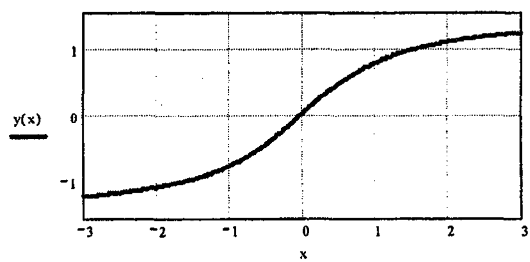


Рис. 4.6

Чтобы найти формулы для производных $\arccos x$ и $\operatorname{arcctg} x$, достаточно заметить, что

$$\arcsin x + \arccos x = \tfrac{\pi}{2},\ \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \tfrac{\pi}{2},$$

откуда

$$\boxed{(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 < x < 1.} \tag{4.16}$$

$$\boxed{(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}\ \forall x.} \tag{4.17}$$

5.4.5. Логарифмическое дифференцирование

При отыскании производной сложной функции иногда бывает удобным следующий прием, называемый ***логарифмическим дифференцированием***.

Вычислим производную функции $y = \ln|x|$, $(x \neq 0)$. Так как

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0 \text{ и } \left(\ln(-x)\right)' = \frac{(-x)'}{-x} = \frac{1}{x},\ (x < 0)$$

(последнее равенство получено на основании правила дифференцирования сложной функции), то производная данной функции выражается следующей формулой:

$$y' = (\ln|x|)' = \tfrac{1}{x},\ (x \neq 0). \tag{4.18}$$

Учитывая формулу (4.18), вычислим производную сложной функции $y = \ln|u|$, где $u = f(x)$ – дифференцируемая функция. Имеем $y' = \left(\ln|u|\right)' = \dfrac{1}{u}u' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ или

$$\boxed{\left(\ln|f(x)|\right)' = \frac{f'(x)}{f(x)}.} \tag{4.19}$$

Производная $\left(\ln|f(x)|\right)'$ называется ***логарифмической производной*** функции $f(x)$. Для упрощения записи при логарифмическом дифференцировании знак модуля у функции $f(x)$ обычно опускается.

Пусть требуется найти производную функции $y = f(x) > 0$ и пусть функция $g(x) = \ln f(x)$ дифференцируется значительно проще. Тогда поступаем так. Беря натуральный логарифм данной функции, будем иметь $\ln y = \ln f(x)$, или

$$\ln y = g(x). \tag{4.20}$$

Дифференцируя обе части (4.20) по x и учитывая, что y есть функция от x, найдем $\frac{y'}{y} = g'(x)$, откуда $y' = y \cdot g'(x)$, или

$$\boxed{y' = f(x)\left(\ln f(x)\right)'.} \tag{4.21}$$

Логарифмическое дифференцирование особенно удобно при дифференцировании сложной показательно-степенной функции, т. е. функции вида $y = (u(x))^{v(x)}$ ($u(x) > 0$, $u(x)$ и $v(x)$ – дифференцируемые функции). Имеем $\ln y = v(x) \cdot \ln u(x)$.

Дифференцируя обе части последнего равенства, получаем

$$\frac{y'}{y} = v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Отсюда, учитывая, что $y = (u(x))^{v(x)}$, получаем следующую формулу для производной показательно-степенной функции:

$$\boxed{y'(x) = (u(x))^{v(x)}\left(v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).} \tag{4.22}$$

Производную показательно-степенной функции $y=(u(x))^{v(x)}$ можно вычислить и другим способом. Представим функцию в виде $y=e^{v(x)\cdot\ln u(x)}$ и вычислим y':

$$y'=\left(e^{v(x)\cdot\ln u(x)}\right)'=e^{v(x)\cdot\ln u(x)}\left(v(x)\cdot\ln u(x)\right)'=$$
$$=y\left(v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)=(u(x))^{v(x)}\left(v'(x)\cdot\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right).$$

Приходим снова к формуле (4.22).

Логарифмическая производная очень удобна при нахождении производной степенной функции с любым вещественным показателем: $y=x^{\alpha}$ $(\alpha\in\mathrm{R})$.

Так как функция $y=x^{\alpha}$, то $\ln y=\alpha\ln x$. Далее находим

$$\frac{y'}{y}=(\alpha\ln x)'=\frac{\alpha}{x}.$$

Отсюда, учитывая, что $y=x^{\alpha}$, получаем формулу для производной степенной функции $\boxed{y'=(x^{\alpha})'=\alpha\,x^{\alpha-1}.}$

5.4.6. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, так что приращение функции Δy, отвечающее приращению Δx аргумента, представимо в виде $\Delta y=f'(x_0)+\alpha(\Delta x)\Delta x$, где $f'(x_0)\Delta x=dy(x_0)$, $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Если $dy(x_0)\neq 0$ и, значит, $f'(x_0)\neq 0$, то при определении дифференциала функции было показано, что при $\Delta x\to 0$ бесконечно малые Δy и dy эквивалентны и их разность $\Delta y-dy$ есть бесконечно малая более высокого порядка, чем они сами. Поэтому мы можем брать величину dy в качестве приближенного значения величины Δy: $\Delta y\approx dy$.

Таким образом, если $dy(x_0) \neq 0$, то для приближенного вычисления значения функции в точке $x_0 + \Delta x$ можно пользоваться формулой

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x\,.} \qquad (4.23)$$

Пример 4.3. Найти приращение и дифференциал функции $y = x^3 + 4$ при переходе аргумента от значения $x_1 = 2$ к значению $x_2 = 2.01$.

▲ Найдем сначала приращение заданной функции при произвольных значениях x и Δx:

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x) - f(x) = \left((x+\Delta x)^3 + 4\right) - (x^3 + 4) = \\ &= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 4 - x^3 - 4 = \\ &= 3x^2\Delta x + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3,\end{aligned}$$

т. е.

$$\Delta y = 3x^2\Delta x + \left(3x\Delta x + (\Delta x)^2\right)\Delta x\,.$$

Таким образом, приращение функции представлено в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x\,,$$

значит, в соответствии с формулой $dy = A\Delta x$ $dy = 3x^2\Delta x$.

Найдем теперь Δy и dy при заданных числовых значениях аргумента. Учитывая, что $\Delta x = x_2 - x_1 = 2.01 - 2 = 0.01$, будем иметь:

$$\begin{aligned}\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}} &= 3\cdot 2^2\cdot 0.01 + 3\cdot 2\cdot(0.01)^2 + (0.01)^3 = \\ &= 0.12 + 0.0006 + 0.000001 = 0.120601;\end{aligned}$$

$$dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0.01}} = 3\cdot 2^2\cdot 0.01 = 0.12\,.$$

Вычислим абсолютную погрешность, которую мы допустим, если заменим приращение функции ее дифференциалом:

$$|\Delta y - dy| = |0.120601 - 0.12| = 0.000601.$$

Относительная погрешность

$$\frac{|\Delta y - dy|}{|\Delta y|} = \frac{0.000601}{0.120601} \approx 0.00498 \approx 0.005 \quad (\text{или } 0.5\%). \blacktriangledown$$

Пример 4.4. Вычислить приближенно $\sqrt{4.41}$.

▲ Рассмотрим функцию $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathrm{R}$. Тогда

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^{\alpha} - x_0^{\alpha},\ dy(x_0) = \alpha x_0^{\alpha-1}\Delta x.$$

При малых значениях $|x|$ полагаем $(x_0 + \Delta x)^{\alpha} \approx x_0^{\alpha} + dy(x_0)$, или $\boxed{(x_0 + \Delta x)^{\alpha} \approx x_0^{\alpha} + \alpha x_0^{\alpha-1}\Delta x.}$

В частности, при $\alpha = \frac{1}{2}$ $\sqrt{x_0 + \Delta x} \approx \sqrt{x_0} + \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}\Delta x,\ x_0 > 0$.

Полагаем $x_0 = 4,\ \Delta x = 0.41$, по последней формуле получим

$$\sqrt{4.41} = \sqrt{4 + 0.41} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot 0.41 = 2.1025.$$

(Точное значение $\sqrt{4.41}$ равно 2.1.) ▼

Применение дифференциалов при оценке погрешности

Пусть величина x получается непосредственным измерением или в результате приближенного вычисления, а зависящая от нее величина y находится по формуле

$$y = f(x). \tag{4.24}$$

При измерении или вычислении величины x всегда получается некоторая погрешность Δx. Пусть $x+\Delta x$ – истинное значение величины, Δx – абсолютная погрешность, а $\frac{\Delta x}{x}$ – относительная погрешность. Если известно, что погрешность $|\Delta x| \le \delta x$, то δx называется предельной абсолютной погрешностью, а $\frac{\delta x}{|x|}$ – предельной относительной погрешностью.

Как, зная предельную погрешность δx, найти предельную погрешность δy величины y, полученной по формуле (4.24)?

Пусть $y = f(x)$ – вычисленное значение величины y, а $y+\Delta y = f(x+\Delta x)$ – истинное ее значение,

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x)\Delta x. \qquad (4.25)$$

Тогда

$$|\Delta y| = |f'(x)||\Delta x| \le |f'(x)|\delta x. \qquad (4.26)$$

Из (4.26) следует, что за предельную абсолютную погрешность величины y можно взять $\delta y = |f'(x)|\delta x$.

Предельная относительная погрешность вычисляется по формуле

$$\frac{\delta y}{|y|} = \frac{|f'(x)|\delta x}{|f(x)|} = \left|(\ln f(x))'\right|\delta x.$$

5.4.7. Производные высших порядков

Если функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке x интервала $(a;b)$, то $f'(x)$ есть функция от x, определенная на интервале $(a;b)$. В дальнейшем производную $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ будем называть ***производной первого порядка*** функции $f(x)$ или ***первой производной*** этой функции.

Может оказаться, что и $f'(x)$ в точке $x \in (a;b)$ в свою очередь имеет производную.

Второй производной (или ***производной второго порядка***) функции $y = f(x)$ называется производная от ее первой производной.

Обозначения: y'', $f''(x)$ или $f^{(2)}(x)$, $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Если хотят явно указать переменную дифференцирования, то, например, пишут $f''_{xx}(x)$.

Таким образом $\boxed{y'' = (y')'\,;\ f''(x) = (f'(x))'\,;\ \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{d\,f'(x)}{dx}}$.

Производная от второй производной называется ***производной третьего порядка*** (или ***третьей производной***).

Обозначение: y''', $f'''(x)$ или $f^{(3)}(x)$.

Производные более высоких порядков определяются аналогично.

производная n-го ***порядка*** функции $y = f(x)$ есть производная от производной $(n-1)$-го порядка этой функции

$$\boxed{y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' \text{ или } f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'}.$$

Условились считать, что $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Число n, указывающее порядок производной, заключают в скобки, чтобы не путать с показателем степени.

Чтобы найти $f^{(n)}(x)$, надо сначала найти $f'(x)$, затем $f''(x)$, взяв производную от $f'(x)$, и т. д., пока не получим производную нужного порядка. Таким образом, производные высших порядков вычисляются при помощи уже известных правил и формул дифференцирования.

Рассмотрим несколько примеров вычисления производных высших порядков.

Примеры.

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$	...	$f^{(n)}(x)$
a^x	$a^x \ln a$	$a^x \ln^2 a$	...	$a^x \ln^n a$
e^x	e^x	e^x	...	e^x
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$	...	$\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
$\cos x$	$-\sin x$	$-\cos x$	...	$\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$	...	$\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$

При строгом выводе формул n-х производных следует применить метод ***математической индукции***.

Множество всех функций $f(x)$, определенных на интервале $(a;b)$ и имеющих в каждой точке $x\in(a;b)$ непрерывную производную n-го порядка, обозначается $C^n(a;b)$. Функцию $f(x)$, имеющую производную любого порядка в каждой точке $x\in(a;b)$, называют бесконечно дифференцируемой на $(a;b)$ и пишут $f(x)\in C^\infty(a;b)$.

Так, функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ бесконечно дифференцируемы на промежутке $(-\infty;+\infty)$.

Производные высших порядков суммы и произведения функций

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют производные n-го порядка в точке x, то функции $u(x)\pm v(x)$ и $u(x)\cdot v(x)$ также имеют производные n-го порядка в этой точке, причем

$$\left(u(x)\pm v(x)\right)^{(n)} = u^{(n)}(x)\pm v^{(n)}(x), \tag{4.27}$$

$$\begin{aligned}\left(u(x)\cdot v(x)\right)^{(n)} &= u^{(n)}\cdot v+\frac{n}{1!}u^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\ldots+\\ &+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\ldots+uv^{(n)}.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Формулы (4.27) и (4.28) доказываются по индукции. Для формулы (4.27) это делается без труда. Остановимся несколько подробнее на выводе формулы (4.28). Если $y=u(x)\cdot v(x)$, то

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v',$$
$$y'' = u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + u \cdot v'',$$
$$y''' = u''' \cdot v + 3u'' \cdot v' + 3u' \cdot v'' + u \cdot v''' \text{ и т. д.}$$

Легко подметить закон, по которому построены все эти формулы: правые части их напоминают разложение степеней бинома $(u+v)^1$, $(u+v)^2$, $(u+v)^3$, лишь вместо степеней u и v стоят порядки производных. Сходство становится еще более полным, если в полученных формулах вместо переменных u, v писать $u^{(0)}$, $v^{(0)}$ (производные нулевого порядка). Формула (4.28) носит название ***формулы Лейбница***.

Физический смысл второй производной. Если функция $y = f(x)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, то первая производная $f'(x)$ есть мгновенная скорость точки в момент времени x, а вторая производная равна скорости изменения скорости, т. е. ускорение движущейся точки в этот момент (мгновенное ускорение переменного движения).

5.4.8. Дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x. Может оказаться, что в точке x дифференциал $dy = f'(x)dx$, рассматриваемый как функция x, есть также дифференцируемая функция.

Тогда существует дифференциал от дифференциала данной функции, который называется ***дифференциалом второго порядка функции*** $y = f(x)$.

Обозначение: d^2y. Таким образом, $\boxed{d^2y = d(dy)}$.

Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков:

дифференциалом n-го ***порядка*** d^ny ***функции*** $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)$-го порядка этой функции $\boxed{d^ny = d\left(d^{n-1}y\right)}$.

Дифференциал dy естественно называть ***дифференциалом первого порядка*** от функции $y = f(x)$.

Найдем формулы, выражающие дифференциалы высших порядков. Пусть $y = f(x)$ есть функция независимой переменной x, имеющая дифференциалы любого порядка. Тогда $dy = f'(x)dx$, где $dx = \Delta x$ есть некоторое приращение независимой переменной x, которое не зависит от x. По определению

$$d^2y = d(dy) = d\big(f'(x)dx\big).$$

Т. к. здесь $f'(x)dx$ рассматривается как функция от x, то множитель dx является постоянным и его можно вынести за знак дифференциала. Поэтому

$$d^2y = d\big(f'(x)\big)dx.$$

Для вычисления $d\big(f'(x)\big)$ применим формулу дифференцирования первого порядка к функции $f'(x)$. Получим

$$d\big(f'(x)\big) = \big(f'(x)\big)'dx = f''(x)dx.$$

Следовательно, дифференциал d^2y второго порядка функции $y = f(x)$ в точке x, соответствующий тому же дифференциалу dx независимой переменной x, определится формулой

$$\boxed{d^2y = f''(x)dx^2,}$$

где dx^2 обозначает $(dx)^2$.

Пользуясь методом математической индукции, получаем формулу дифференциала n-го порядка

$$\boxed{d^ny = f^{(n)}(x)dx^n,}$$

где $dx^n=(dx)^n$. Отсюда

$$\boxed{f^{(n)}(x)=\frac{d^n y}{dx^n}.}$$

Пусть теперь $y=f(u)$, где $u=u(x)$ – функция, дифференцируемая достаточное число раз. Тогда в силу инвариантности формы первого дифференциала $dy=f'(u)du$. Здесь $du=u'(x)dx$ в общем случае не является постоянной величиной, поэтому

$$\begin{aligned} d^2y &= d(dy)=d\big(f'(u)du\big)= \\ &= d\big(f'(u)\big)du+f'(u)d(du)=f''(u)du^2+f'(u)d^2u. \end{aligned} \tag{4.29}$$

В случае, когда u – независимая переменная, $d^2u=0$ и

$$d^2u=f''(u)du^2. \tag{4.30}$$

Сравнивая формулы (4.29) и (4.30), заключаем, что уже второй дифференциал инвариантностью формы не обладает.

Заметим, что если $u=u(x)$ есть линейная функция x, т. е. $u=ax+b$ (a, $b=\text{const}$), инвариантность формы сохраняется.

5.4.9. Дифференцирование функции, заданной параметрически

Параметрическое задание функции

Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат Oxy. Пусть функции $x=x(t)$ и $y=y(t)$ непрерывны на отрезке $\alpha\le t\le\beta$ изменения параметра. Если параметр t рассматривать как время, то указанные функции определяют закон движения точки M с координатами

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad \alpha\le t\le\beta, \tag{4.31}$$

на плоскости Oxy.

Определение. Множество $\{M\}$ всех точек плоскости, координаты $(x; y)$ которых определяются уравнениями (4.31), называют ***плоской кривой***. Говорят в этом случае, что кривая задана ***в параметрической форме***.

Пример 4.7. Окружность радиуса с центром в начале координат можно задать в параметрической форме уравнениями

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi,$$

где t – радианная величина угла между осью Ox и радиус-вектором $\mathbf{OM}$, проведенным в точку $M(x; y)$ (рис. 4.5).

Действительно,

t	x	y
0	R	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}R$	$\frac{1}{2}R$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}R$	$\frac{\sqrt{2}}{2}R$
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}R$	$\frac{\sqrt{3}}{2}R$
$\frac{\pi}{2}$	R	0

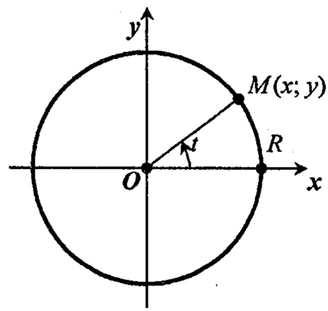


Рис. 4.5

Если из системы примера 4.7 исключить параметр t, то останется одно уравнение, содержащее переменные x и y, и тогда данная кривая будет определяться уравнением $F(x; y) = 0$.

Так, если в уравнениях примера 4.7 возведем в квадрат левые и правые части и затем полученные уравнения сложим, то параметр t будет исключен, и данная окружность будет выражаться уже знакомым нам уравнением $x^2 + y^2 = R^2$. Однако исключить параметр t не всегда возможно. Тем не менее, для решения некоторых задач, как, например, для отыскания касательной к кривой, надо уметь находить производную от x по y и в таких случаях, когда кривая задана в параметрической форме.

Будем говорить, что функциональная зависимость y от x задана параметрически, если обе переменные x и y заданы как функции параметра t: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in (\alpha; \beta)$.

Пример 4.8. Пусть кривая задана параметрически системой

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases}$$

Требуется найти непосредственную зависимость между координатами x и y.

▲ Исключим из системы параметр t: $\dfrac{x}{a} = \cos t$, $\dfrac{y}{b} = \sin t$. Получим $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Таким образом, исходная кривая является эллипсом: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$. ▼

Пусть функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ определены и непрерывны на некотором интервале $(\alpha; \beta)$ изменения t. Пусть для функции $x = x(t)$ существует обратная функция $t = t(x)$. Тогда y есть сложная функция от x:

$$y = y(t(x)). \tag{4.32}$$

Допустим, что функции $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы в точке $t \in (\alpha; \beta)$, причем $x'(t) \neq 0$, а функция $t = t(x)$ дифференцируема в соответствующей точке x. Тогда, согласно правилу дифференцирования сложной функции, будет дифференцируемой в точке x и функция $y = y(t(x))$, причем $y'_x = y'_t \cdot t'_x$. Но по правилу дифференцирования обратной функции $t'_x = \dfrac{1}{x'_t}$, так что $y'_x = y'_t \cdot \dfrac{1}{x'_t} = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, или

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t},\ x'_t \neq 0.}$$

Формально этот результат получается мгновенно: производную $\frac{dy}{dx}$ рассматриваем, как дробь и делим числитель и знаменатель на dt, что дает $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Пример 4.9. Найти производную для окружности

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases} \quad 0 \le t < 2\pi .$$

▲ $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{R\cos t}{-R\sin t} = -\mathrm{ctg}\, t$, или $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

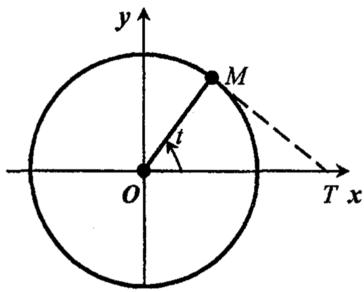


Рис. 4. 6

А т. к. $\mathrm{tg}\, t$ – угловой коэффициент радиуса OM, y' – угловой коэффициент касательной в точке M, то $y' = -\mathrm{ctg}\, t = -\frac{1}{\mathrm{tg}\, t}$. Следовательно, касательная MT перпендикулярна к радиусу OM (рис. 4.6). ▼

Касательная и нормаль к графику функции, заданной параметрически

Рассмотрим график функции, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$ и на нем точку $M_0(x_0; y_0)$, которой отвечает значение параметра $t = t_0$, т. е. $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$.

Уравнение касательной к линии в точке M_0 имеет вид

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Уравнение нормали

$$y - y_0 = \frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0).$$

Найдем $y'(x_0)$: $y'(x_0) = \dfrac{y_t'(x_0)}{x_t'(x_0)}$. Подставив последнее выражение в уравнение касательной, получим $y - y_0 = \dfrac{y_t'(x_0)}{x_t'(x_0)}(x - x_0)$.

Или $\dfrac{y - y_0}{y_t'(x_0)} = \dfrac{x - x_0}{x_t'(x_0)}$.

Аналогично получаем уравнение нормали

$$y - y_0 = -\frac{x_t'(x_0)}{y_t'(x_0)}(x - x_0)$$

или

$$x_t'(x_0)(x - x_0) + y_t'(x_0)(y - y_0) = 0.$$

Повторное дифференцирование функций, заданных параметрически

Если $x(t)$ и $y(t)$ имеют производные k-го порядка, причем $x'(t) \neq 0$, то и функция $y = y(t(x))$ имеет производную k-го порядка по x.

Производная второго порядка от y по x вычисляется так:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y'(t)}{x'(t)}\right)\frac{dt}{dx} =$$

$$= \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^2} \cdot \frac{1}{x'(t)} = \frac{y''(t)x'(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t))^3}.$$

Таким образом,

$$y''_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t};$$

вообще

$$\boxed{y_x^{(n)} = \frac{\left(y_x^{(n-1)}\right)'_t}{x'_t}.}$$

6. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Одной из основных задач математического анализа является изучение хода функций – отыскание участков возрастания и убывания, экстремумов функции и т. д. Общие методы исследования функций основаны на понятии производной. Эти методы и будут изложены в данном разделе.

6.1. Теоремы о среднем значении

В теоремах Ролля, Лагранжа и Коши речь идет о существовании некоторой «средней точки» $c \in (a; b)$, для которой выполняется то или иное равенство. Поэтому вся эта группа теорем объединяется названием: теоремы о среднем дифференциального исчисления.

Теорема Ферма[16]. ***Если функция*** $f(x)$

1. ***определена в некотором промежутке*** $(a; b)$,
2. ***достигает в некоторой внутренней точке*** x_0 ***этого промежутка наибольшего (или наименьшего) значения,***
3. ***существует конечная производная*** $f'(x_0)$, ***то эта производная необходимо равна нулю***: $f'(x_0) = 0$.

▲ Пусть для определенности функция $f(x)$ в точке x_0 имеет наибольшее значение, т. е. $f(x) \le f(x_0)$ $\forall x \in (a; b)$.

Это значит, что $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0$ $\forall x_0 + \Delta x \in (a; b)$.

Если $x > x_0$, то имеем $\Delta x = x - x_0 > 0$, и тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0$. По условию в точке x_0 существует конечная производная. Поэтому получим

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \le 0.$$

Если $x < x_0$, то имеем $\Delta x = x - x_0 < 0$ и $\frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0$. Следовательно,

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \ge 0.$$

---

[16] Пьер Ферма (1601–1665) – французский математик.

Т. е. правая производная в точке x_0 положительная, а левая отрицательная.

По условию, $f'(x_0)$ существует и, значит,

$$f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=f'(x_0).$$

Это возможно только в случае, когда $f'(x_0+0)=f'(x_0-0)=0$. Но тогда и $f'(x_0)=0$. Аналогично рассматривается случай, когда в точке x_0 функция $f(x)$ имеет наименьшее значение. ▼

Геометрический смысл теоремы Ферма состоит в том, что если в точке x_0 дифференцируемая функция $f(x)$ имеет наибольшее или наименьшее значение, то в точке $(x_0; f(x_0))$ касательная к графику функции $f(x)$ параллельна оси Ox (рис. 6.1).

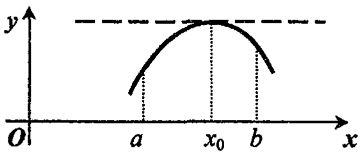


Рис. 6.1.

Замечание. При доказательстве теоремы существенно использовать все ее условия. В частности, теорема неверна, если функцию $f(x)$ рассматривать на отрезке $[a; b]$.

Так, например, функция $f(x)=x$ на ***отрезке*** $[0;1]$ в точке $x=0$ принимает наименьшее значение, а в точке $x=1$ – наибольшее значение. Однако, как в той, так и в другой точке производная в нуль не обращается, а равна 1 (рис 6.2).

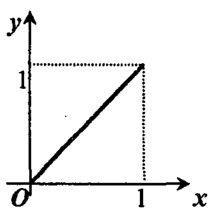


Рис. 6.2

Теорема Ролля[17]. ***Если функция*** $f(x)$

1. ***непрерывна на отрезке*** $[a;b]$;
2. ***дифференцируема на интервале*** $(a;b)$;
3. ***на концах отрезка*** $[a;b]$ ***принимает равные значения*** $(f(a)=f(b))$, ***то в интервале*** $(a;b)$ ***существует, по крайней мере, одна точка*** c, ***в которой производная данной функции равна нулю***: $f'(c)=0$, $c\in(a;b)$.

▲ Так как по условию функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то в силу второй теоремы Вейерштрасса она на этом отрезке принимает наименьшее (m) и наибольшее (M) значения. Т. е. существуют такие точки x_1, $x_2\in[a;\ b]$, что $f(x_1)=m$, $f(x_2)=M$ и выполняются неравенства $m\le f(x)\le M$.

Возможны два случая:

1) $M=m$. В этом случае $M\le f(x)\le M$, т. е. $f(x)$ есть постоянная на $[a;b]$. Поэтому $f'(x)=0$ во всем интервале $(a;b)$, так что в этом случае теорема доказана.

2) $M\ne m$. Так как на концах отрезка $f(a)=f(b)$, то функция $f(x)$ не может одновременно принимать значение M на одном конце, а m – на другом конце отрезка. Следовательно, хотя бы одно из двух значений, m или M, не принимается на концах отрезка $[a;\ b]$. Т. е. существует точка c, содержащаяся внутри интервала $(a;b)$, в которой функция $f(x)$ принимает наибольшее или наименьшее значение. В этом случае, т. к. $f(x)$ дифференцируема в точке $x=c$, из теоремы Ферма следует, что $f'(c)=0$. ▼

Геометрический смысл теоремы Ролля. Пусть имеем кривую $\cup AB$, заданную уравнением $y=f(x)$, где функция $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ удовлетворяет всем условиям теоремы Ролля.

Это означает, что

1) кривая $\cup AB$ непрерывна на $[a;b]$;

---

[17] Мишель Ролль (1652-1719) – французский математик.

2) в любой точке кривой, находящейся между точками $A(a; f(a))$ и $B(b; f(b))$, можно провести касательную к этой кривой;

3) концы дуги $\cup AB$ кривой находятся на одном уровне по отношению к оси Ox (рис. 6.3).

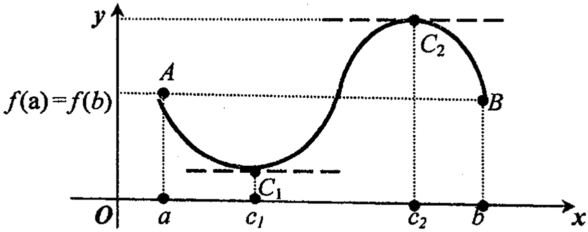


Рис. 6.3

Утверждение теоремы Ролля ***состоит*** в том, что на дуге $\cup AB$ кривой, обладающей указанными свойствами, найдется, по крайней мере, одна точка $C(c; f(c))$, в которой касательная к данной кривой параллельна оси Ox (или хорде AB).

Замечание. Следует отметить, что все три условия теоремы Ролля существенны. Чтобы убедиться в этом, достаточно привести примеры, для которых выполнялись бы два условия теоремы, а третье не выполнялось, и производные которых не обращались бы в нуль ни в одной точке.

1) Так, например функция $f(x) = x$, $x \in [0; 1]$ (рис. 6.4) удовлетворяет условиям 1 и 2, но не удовлетворяет условию 3 и для нее не существует точки c такой, что $f'(c) = 0$.

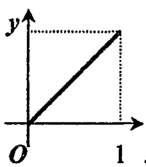


Рис. 6.4

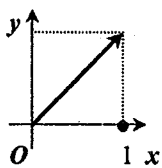


Рис. 6.5

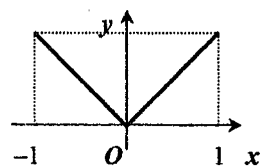


Рис. 6.6

2) Функция $f(x)=\begin{cases} x, & 0 \le x < 1, \\ 0, & x=1 \end{cases}$ (рис. 6.5) удовлетворяет условиям 2 и 3, но не удовлетворяет условию 1 и для нее не существует точки, в которой производная обращалась бы в нуль.

3) Функция $f(x)=|x|,\ x \in [-1;1]$ (рис. 6.6) удовлетворяет условиям 1 и 3, но не удовлетворяет условию 2. Для этой функции также не существует точки, в которой ее производная обращалась бы в нуль.

Следствие (алгебраическое значение теоремы). ***Между двумя корнями дифференцируемой функции $f(x)$ имеется, по крайней мере, один корень ее производной.***

Под ***корнем функции*** мы понимаем значение аргумента, при котором эта функция обращается в нуль.

▲ Если x_1 и x_2 – корни функции $f(x)$, то $f(x_1)=0=f(x_2)$ и по теореме Ролля существует точка $c \in (x_1; x_2)$ такая, что $f'(c)=0$, т. е. c – корень производной $f'(x)$. ▼

Теорема Лагранжа[18] **(о конечных приращениях).** ***Если функция $f(x)$***

1. ***непрерывна на отрезке $[a;b]$;***
2. ***дифференцируема на интервале $(a;b)$, то в интервале $(a;b)$ существует, по крайней мере, одна точка c такая, что справедлива формула***

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c),\ a<c<b.} \qquad (6.0)$$

▲ Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-kx, \qquad (6.1)$$

где k – число. Подберем число k так, чтобы функция $F(x)$ принимала на концах промежутка равные значения

[18] Жозеф-Луи Лагранж (1736-1813) – французский математик и механик.

$$F(a)=F(b). \tag{6.2}$$

Подставляя выражение (6.1) в равенство (6.2), получаем

$$f(a)-ka=f(b)-kb,$$

откуда

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \text{ т. е. } F(x)=f(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x.$$

Функция $F(x)$ удовлетворяет всем трем условиям теоремы Ролля:

1. функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ (как разность двух непрерывных функций: $f(x)$ и линейной функции $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}x$);
2. функция $F(x)$ дифференцируема на $(a;b)$, т. е. внутри $[a;b]$ имеет производную, равную

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a};$$

3. $F(a)=F(b)$ по построению.

Следовательно, по теореме Ролля существует точка $c\in[a;b]$ такая, что $F'(c)=0$, т. е. $f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$. Отсюда получаем

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \blacktriangledown$$

Теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа, когда $f(a)=f(b)$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа. Частное $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ есть угловой коэффициент хорды M_1M_2, а $f'(c)$ – угловой коэффициент касательной к кривой $y=f(x)$ в точке с абсциссой $x=c$ (рис. 6. 7).

Из равенства угловых коэффициентов вытекает равенство углов наклона хорды и касательной и параллельность этих линий.

Таким образом, утверждение теоремы Лагранжа сводится к следующему: на дуге $\cup M_1M_2$ непрерывной кривой, к которой можно провести касательную в любой точке, лежащей на кривой между точками M_1 и M_2, всегда найдется, по крайней мере, одна точка $C(c;\, f(c))$, в которой касательная параллельна хорде M_1M_2.

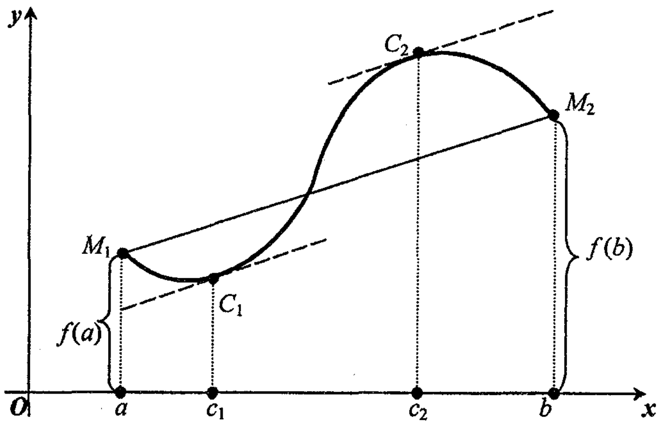


Рис. 6.7

Замечание 1. Доказанная формула $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, или

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)(b-a),\ a<c<b,} \qquad (6.3)$$

носит название ***формулы Лагранжа*** или ***формулы конечных приращений***. Она, очевидно, сохраняет силу для случая $a>b$.

Замечание 2. Число c (вообще говоря, неизвестное, промежуточное по отношению к числам a и b) иногда удобно бывает представить в виде $c=a+\theta\cdot(b-a)$, где θ – некоторое вещественное число, удовлетворяющее условию $0<\theta<1$. Тогда формула Лагранжа (6.3) примет вид

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a).} \qquad (6.4)$$

Замечание 3. Если положить $a = x,\ b = x + \Delta x$, то получим

$$\boxed{\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,\ 0<\theta<1.} \qquad (6.5)$$

Это равенство дает точное выражение для приращения функции $f(x)$ при любом конечном приращении Δx аргумента, в противоположность приближенному равенству

$$\Delta f(x) = f'(x)\Delta x .$$

Относительная погрешность этого равенства стремится к нулю лишь при $\Delta x \to 0$. Отсюда и название формулы (6.5) – формула конечных приращений. Отметим, что в (6.5) число θ, вообще говоря, неизвестно.

Следствие из теоремы Лагранжа (о постоянной функции). ***Непрерывная на отрезке*** $[a; b]$ ***функция постоянна на нем тогда и только тогда, когда ее производная равна нулю в любой точке отрезка*** $[a; b]$ (***или даже интервала*** $(a; b)$).

▲ Возьмем два произвольных значения аргумента $x_1,\ x_2 \in [a; b]$. По теореме Лагранжа существует точка $c \in (x_1; x_2)$ такая, что выполняется равенство $\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c)$.

По условию теоремы $f'(x) = 0\ \forall x \in [a; b]$. Так как справедливо $x_1 < c < x_2$, то $f'(c) = 0$. Следовательно, $f(x) = \text{const}$. ▼

Замечание. Отсюда, очевидно, можно сделать следующий (как мы увидим, очень важный для интегрального исчисления) вывод: если производные $F_1'(x),\ F_2'(x)$ двух функций $F_1(x)$, $F_2(x)$ совпадают на некотором промежутке, т. е.

$$F_1'(x) \equiv F_2'(x),$$

то на этом промежутке разность $F_1(x) - F_2(x)$ есть постоянная функция.

Теорема Коши[19]. ***Если функции*** $f(x)$ и $g(x)$

1) ***непрерывны на отрезке*** $[a;b]$;

2) ***имеют производные*** $f'(x)$ и $g'(x)$ ***хотя бы на интервале*** $(a;b)$;

3) ***производная*** $g'(x)\neq 0$ ***на интервале*** $(a;b)$, ***то в интервале*** $(a;b)$ ***существует, по крайней мере, одна точка с такая, что***

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\ a<c<b. \qquad (6.6)$$

Формула (6.6) называется формулой Коши.

▲ Покажем сначала, что $g(b)\neq g(a)$, т. е. что формула (6.6) имеет смысл.

Действительно, если допустить, что справедливо $g(b)=g(a)$, то по теореме Ролля для функции $g(x)$ найдется точка $c\in(a;b)$, в которой $g'(c)=0$. А это противоречит условию, что $g'(x)\neq 0$ на интервале $(a;b)$. Перейдем к доказательству формулы (6.6).

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$F(x)=f(x)-k\cdot g(x), \qquad (6.7)$$

где k – число. Подберем k так, чтобы функция $F(x)$ принимала на концах промежутка равные значения

$$F(a)=F(b). \qquad (6.8)$$

Подставив выражение функции (6.7) в равенство (6.8), получим уравнение для определения k: $f(a)-k\cdot g(a)=f(b)-k\cdot g(b)$, откуда

$$k=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-f(a)}. \qquad (6.9)$$

---

[19] Огюстен Луи Коши (1789-1857) – французский математик.

Функция $F(x)$ на $[a;b]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. В самом деле, функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$, дифференцируема на $(a;b)$, и, по построению $F(a)=F(b)$. По теореме Ролля для функции $F(x)$ существует точка c, $a<c<b$, такая, что

$$F'(c)=0. \tag{6.10}$$

Так как

$$F'(x)=f'(x)-k\cdot g'(x), \tag{6.11}$$

то, подставив выражение (6.11) в равенство (6.10), получаем

$$f'(c)-k\cdot g'(c)=0,$$

откуда

$$k=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{6.12}$$

Подставляя выражение (6.9) в равенство (6.12), получаем

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.\ \blacktriangledown$$

Теорема Лагранжа является частным случаем теоремы Коши: достаточно в теореме Коши взять $g(x)\equiv x$.

Геометрический смысл теоремы Коши. Геометрический смысл теоремы Коши тот же, что и теоремы Лагранжа, но для случая параметрического задания функции. Действительно, пусть функция задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t). \end{cases}$

Запишем формулу Коши для функций $y(t)$ и $x=x(t)$

$$\frac{y(t_2)-y(t_1)}{x(t_2)-x(t_1)}=\frac{y'_t(c)}{x'_t(c)}. \tag{6.13}$$

Значению $t = t_1$ на линии соответствует точка $M_1(t_1)$, значению $t = t_2$ – точка $M_2(t_2)$, значению $t = c$ – точка $M(c)$:

$\frac{y(t_2) - y(t_1)}{x(t_2) - x(t_1)}$ – угловой коэффициент хорды M_1M_2,

$\frac{y'_t(c)}{x'_t(c)} = y'_x$ – угловой коэффициент касательной MT.

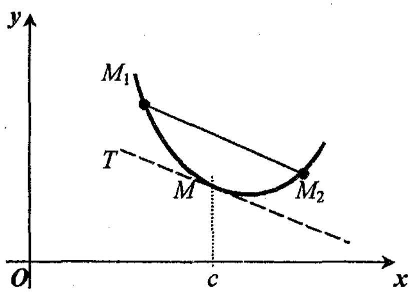


Рис. 6.8

6.2. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

6.2.1. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки $x = x_0$ и пусть $f(x_0) = 0$ и $g(x_0) = 0$. Тогда отношение $\frac{f(x)}{g(x)}$ теряет смысл при $x = x_0$. Однако предел этого отношения в точке $x = x_0$ может существовать. Задача отыскания предела $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ в этом случае называется раскрытием неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Следующая теорема устанавливает правило для раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Теорема Лопиталя[20]. ***Пусть функции*** $f(x)$ и $g(x)$, ***определенные*** на $(a;b)$, ***удовлетворяют следующим условиям***:

1) ***функции*** $f(x)$ и $g(x)$ ***непрерывны в точке*** x_0; $f(x_0)=0$ $g(x_0)=0$;
2) ***функции*** $f(x)$ и $g(x)$ ***дифференцируемы в некоторой окрестности*** $(x_0-\delta; x_0+\delta)$ ***точки*** x_0, ***быть может***, самой точки x_0, ***причем*** $g(x)\neq 0, g'(x)\neq 0$ ***в указанной окрестности***;
3) ***существует конечный или бесконечный предел*** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$, ***причем***

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (6.14)$$

▲ Так как функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, $f(x_0)=0$ и $g(x_0)=0$, то на отрезке $[x_0;x]$ (или $[x;x_0]$), где – какая угодно точка интервала $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют всем условиям теоремы Коши. Следовательно, между x_0 и x найдется, по крайней мере, одна точка $c=c(x)$ такая, что

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\ c\in(x;x_0).$$

Так как по условию $f(x_0)=0=g(x_0)$, то

[20] Г. Ф. де Лопиталь (1661-1704) – французский математик, способный ученик Иоганна Бернулли, маркиз, для которого последний в 1691-1692 гг. написал первый учебник анализа. Часть этого учебника, посвященного дифференциальному исчислению, в слегка измененном виде была опубликована Лопиталем под своим именем. Таким образом, «правилом Лопиталя» мы обязаны Иоганну Бернулли.

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \qquad (6.15)$$

Если при некотором значении x таких точек c будет больше одной, то фиксируем какую-нибудь одну из них.

Величина c зависит от x, причем $c \to x_0$, когда $x \to x_0$, так как c заключена между x и x_0. По условию при $x \to x_0$ отношение $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ имеет конечный или бесконечный предел. Этот предел не зависит от способа стремления x к точке x_0. Поэтому при $x \to x_0$, когда и $c \to x_0$, отношение $\frac{f'(c)}{g'(c)}$ имеет предел, совпадающий с пределом отношения $\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(c\to x_0)}}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \qquad (6.16)$$

Из соотношений (6.15) и (6.16) следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. ▼

Коротко, но не вполне точно, правило Лопиталя формулируется так:

предел отношения функций равен пределу отношения их производных, если последний существует.

Пример 2.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}$.

Замечание 1. Если условия теоремы выполнены только в интервале $(x_0-\delta; x_0)$ или $(x_0; x_0+\delta)$, то формулой (6.14) можно пользоваться для вычисления предела $\frac{f(x)}{g(x)}$ соответственно при $x \to x_0-0$ или $x \to x_0+0$.

Замечание 2. Если производные $f'(x)$ и $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и сами функции $f(x)$ и $g(x)$, то правило Лопиталя можно применить повторно. При этом получаем

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Пример 2.2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

Замечание 3. Теорема остается верной и в случае, когда $x\to\infty$, $x\to-\infty$, $x\to+\infty$, т. е. когда $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$.

▲ В самом деле, положив $x=\frac{1}{z}$, видим, что $z\to\infty$ при $x\to\infty$ и $\lim\limits_{z\to 0}f\left(\frac{1}{z}\right)=0$, $\lim\limits_{z\to 0}g\left(\frac{1}{z}\right)=0$. Далее,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\div\left(-\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.\ ▼$$

Правило Лопиталя применимо и при раскрытии неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$, поскольку ее можно привести к неопределенности вида $\frac{0}{0}$, представив рассматриваемую дробь так: $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{1}{g(x)}:\dfrac{1}{f(x)}$.

С помощью тождественных преобразований к основному виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ можно свести неопределенности других видов, таких как $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

Неопределенность вида $0\cdot\infty$, т. е. произведение $f(x)\cdot g(x)$, где $f(x)\to 0$, $g(x)\to 0$ при $x\to x_0$, приводится к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ по формулам $f(x)\cdot g(x)=f(x):\dfrac{1}{g(x)}$, $f(x)\cdot g(x)=g(x):\dfrac{1}{f(x)}$, а затем применяется правило Лопиталя.

Аналогично раскрывается неопределенность вида $\infty-\infty$, т. е. находится предел

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) - g(x))$$

при условии, что $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$. С помощью преобразования

$$f(x) - g(x) = \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)} \right) : \frac{1}{f(x)g(x)}$$

эта неопределенность сводится к неопределенности вида $\frac{0}{0}$.

Неопределенности 1^∞, 0^0, ∞^0, т. е. предел вида

$$\lim_{x \to x_0} (f(x))^{g(x)}, \quad f(x) \geq 0,$$

когда имеем один из трех случаев:

а) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 1$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = \infty \quad (1^\infty)$;

б) $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad (0^0)$;

в) $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0 \quad (\infty^0)$,

раскрываются с помощью способа, в котором используется тождество $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}$.

Кроме того, при раскрытии неопределенности вида 1^∞, 0^0, ∞^0 данное выражение предварительно логарифмируется, и находят предел его логарифма. Положим $t = (f(x))^{g(x)}$, логарифмируя, получим

$$\ln t = g(x) \cdot \ln f(x).$$

Вычислим

$$\lim_{x \to x_0} \ln t = \lim_{x \to x_0} (g(x) \ln f(x)).$$

Нетрудно заметить, что для этого в каждом из указанных трех случаев а), б), в) придется вычислять предел такого вида, который рассмотрен в случае 1.

Пусть мы нашли, что $\lim\limits_{x\to x_0} \ln t = A$. Тогда $\ln \lim\limits_{x\to x_0} t = A,\ \lim\limits_{x\to x_0} t = e^A$, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} (f(x))^{g(x)} = e^A.$$

Пример 2.3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.

▲ $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x} = \left\{0^0\right\}$. Положим $t = x^{\sin x}$; тогда $\ln t = x \sin x$.

Отсюда

$$\lim_{x\to 0} \ln t = \lim_{x\to 0}(\sin x \cdot \ln x) = \{0\cdot\infty\} = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{x\cos x} = \left\{\frac{0}{0},\ \sin x \sim x\right\} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^2}{x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{\cos x} = 0,$$

так что $\lim\limits_{x\to 0} \ln t = 0,\ \ln \lim\limits_{x\to 0} t = 0,\ \lim\limits_{x\to 0} t = e^0 = 1$. ▼

6.3. Формула Тейлора[21]

Рассмотрим одну из основных формул математического анализа, имеющую многочисленные применения, как в самом анализе, так и в смежных дисциплинах.

Формула Тейлора для многочлена степени n. Рассмотрим многочлен n-ой степени

---

[21] Брук Тейлор (1685-1731) – английский математик.

$$P_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n, \; b_n = \text{const} \neq 0. \qquad (3.1)$$

▲ Каково бы ни было число a, многочлен (3.1) можно представить в виде суммы степеней разности $x-a$, взятых с некоторыми коэффициентами. Действительно, положим $x = a+t$. Тогда

$$P_n(x) = P_n(a+t) = b_0 + b_1(a+t) + \ldots + b_n(a+t)^n.$$

Раскрывая в правой части скобки и сгруппировав подобные члены, получим

$$P_n(a+t) = B_0 + B_1t + B_2t^2 + B_3t^3 + \ldots + B_nt^n,$$

или, выразив обратно t через x,

$$P_n(x) = B_0(x-a) + B_1(x-a) + B_2(x-a)^2 + \ldots + B_n(x-a)^n, \qquad (3.2)$$

где B_0, B_1, …, B_n – некоторые постоянные.

Взяв многочлен $P_n(x)$ в форме (3.2) и продифференцировав его n раз по x, найдем

$$\begin{cases} P_n'(x) = B_1 + 2B_2(x-a) + 3B_3(x-a)^2 + \ldots + B_n(x-a)^{n-1} \\ P_n''(x) = 2\cdot 1B_2 + 3\cdot 2B_3(x-a) + \ldots + n(n-1)B_n(x-a)^{n-2} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ P_n^{(n)}(x) = n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot B_n. \end{cases} \qquad (3.3)$$

Полагая в равенствах (3.2) и (3.3) $x = a$, получим

$$P_n(a) = B_0, \; P_n'(a) = 1!B_1, \; P_n''(a) = 2!B_2, \; \ldots, \; P_n^{(n)}(a) = n!B_n.$$

Откуда $B_0 = P_n(a)$, $B_1 = \dfrac{P_n'(a)}{1!}$, $B_2 = \dfrac{P_n''(a)}{2!}$, …, $B_n = \dfrac{P_n^{(n)}(a)}{n!}$.

Следовательно, равенство (3.2) может быть записано в виде

$$\boxed{P_n(x) = P_n(a) + \frac{P_n'(a)}{1!}(x-a) + \frac{P_n''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n\,.} \quad (3.4)$$

Это и ***есть формула Тейлора*** по степеням $x-a$ для многочлена $P_n(x)$ степени n. Отсюда в частном случае при $a=0$ получим ***формулу Маклорена***[22]

$$\boxed{P_n(x) = P_n(0) + \frac{P_n'(0)}{1!}x + \frac{P_n''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{P_n^{(n)}(0)}{n!}x^n\,.} \ \blacktriangledown \qquad (3.5)$$

Пример 3.1. Многочлен $P_2(x) = x^2 - 3x + 2$ разложить а) по степеням x; б) по степеням $x-1$.

▲ а) Имеем

$$\begin{aligned} P_2(x) &= x^2 - 3x + 2 &&\Rightarrow & P_2(0) &= 2,\\ P_2'(x) &= 2x - 3 &&\Rightarrow & P_2'(0) &= -3,\\ P_2''(x) &= 2 &&\Rightarrow & P_2''(0) &= 2. \end{aligned}$$

По формуле (3.5)

$$P_2(x) = 2 - \frac{3}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 = 2 - 3x + x^2,$$

т. е. получили исходный многочлен.

б) Имеем

$$\begin{aligned} P_2(x) &= x^2 - 3x + 2 &&\Rightarrow & P_2(1) &= 0,\\ P_2'(x) &= 2x - 3 &&\Rightarrow & P_2'(1) &= -1,\\ P_2''(x) &= 2 &&\Rightarrow & P_2''(1) &= 2. \end{aligned}$$

По формуле (3.4)

[22] Колин Маклорен (1698-1746) – английский математик.

$$P_2(x) = 0 - 1(x-1) + \frac{2}{2!}(x-1)^2 = -(x-1) + (x-1)^2 . \blacktriangledown$$

Заметим, что по формуле (3.4) мы можем вычислить значения многочлена $P_n(x)$ в любой точке x, если известны значения многочлена и всех его производных в одной какой-нибудь точке a.

Формула Тейлора для произвольной функции $f(x)$

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в окрестности Ω точки a и имеющую n конечных производных в a. Многочлен

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (3.6)$$

имеет степень $\leq n$ и обладает тем свойством, что его $n+1$ начальные производные в точке a совпадают с соответствующими производными функции $f(x)$. Многочлен $T_n(x)$ называют n-м ***многочленом Тейлора*** функции $f(x)$ около $x = a$.

Если теперь вместо многочлена $T_n(x)$ взять произвольную функцию $f(x)$, то формула (3.6) уже не будет справедлива. Обозначим через $R_n(x)$ разность между функцией $f(x)$ и многочленом $T_n(x)$:

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x),$$

откуда

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

или

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x). \qquad (3.7)$$

Представление (3.7) называют ***формулой Тейлора для функции*** $f(x)$ в окрестности точки $x = a$, а $R_n(x)$ называется ***остаточным членом*** рассматриваемой формулы Тейлора.

Дальше будет показано, что во многих случаях $R_n(x)$ при $x \to a$ оказывается бесконечно малой более высокого порядка, чем $(x-a)^n$. Формула Тейлора, таким образом, позволяет выделить главную часть функции $f(x)$ около точки $x=a$ в виде многочлена $T_n(x)$, и играет, поэтому фундаментальную роль во всех разделах математического анализа.

Представление остаточного члена формулы Тейлора через произвольную вспомогательную функцию

Теорема (об остаточном члене формулы Тейлора). ***Пусть функция $f(x)$ дифференцируема $n+1$ раз в окрестности Ω точки a. Пусть функция $g(x)$ дифференцируема на Ω, причем $g'(x)$ не обращается в нуль. Тогда для любого $x \in \Omega$ между x и a существует точка c такая, что остаточный член $R_n(x)$ формулы Тейлора для функции $f(x)$ в окрестности точки $x=a$ представим в виде***

$$R_n(x)=\frac{g(x)-g(a)}{g'(c)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n. \tag{3.8}$$

▲ Фиксируем $x \in \Omega$. Введем в рассмотрение вспомогательную функцию переменной z $(a<z<x)$:

$$F(z)=f(x)-f(z)-\frac{f'(z)}{1!}(x-z)-\ldots-\frac{f^{(n)}(z)}{n!}(x-z)^n. \tag{3.9}$$

Применяя правила дифференцирования алгебраической суммы и произведения двух функций, находим производную этой функции:

$$F'(z)=-f'(z)+f'(z)-\frac{f''(z)}{2!}(x-z)+\frac{f''(z)}{2!}2(x-z)-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n,$$

$$F'(z)=-\frac{f^{(n+1)}(z)}{n!}(x-z)^n.$$

Из формулы (3.9) следует, что $F(x)=0,\ F(a)=R_n(x)$.
По формуле Коши

$$\frac{F(x)-F(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{F'(c)}{g'(c)},$$

$$-R_n(x)=\frac{g(x)-g(a)}{g'(c)}\cdot\left(-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n\right).\ \blacktriangledown$$

Представление остаточного члена формулы Тейлора в формах Лагранжа и Коши

Рассмотрим функцию $f(x)$, дифференцируемую $n+1$ раз в окрестности Ω точки a.

Положим $g(z)=(x-a)^{n+1}$. На основании формулы (3.8)

$$R_n(x)=\frac{-(x-a)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n}\cdot\frac{f^{(n+1}(c)}{n!}(x-c)^n,$$

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}. \qquad (3.10)$$

Поскольку c заключено между a и x, его можно представить в виде

$$\theta=\frac{c-a}{x-a},\ c=a+\theta(x-a),\ \text{где } 0<\theta<1,$$

тогда

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (3.11)$$

Подставляя найденное значение $R_n(x)$ в равенство (3.7), получим

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{f^{(n+1)}\big(a+\theta(x-a)\big)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \qquad (3.12)$$

Эта формула называется ***формулой Тейлора для функции*** $f(x)$. Формулы (3.10) и (3.11), где c – некоторая точка, находящаяся между a и x, называются ***остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа***.

Из формулы Тейлора (3.12) при $n=1$ и $x=b$ получаем как частный случай формулу Лагранжа

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(c)}{1!}(b-a) \text{ или } f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Если $a=0$, то ***получаем формулу Маклорена***

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

Представление остаточного члена формулы Тейлора в форме Пеано[23]

Ослабим предположения о функции $f(x)$, считая эту функцию дифференцируемой на Ω лишь n раз, причем функция $f^{(n)}(x)$ непрерывна при $x=a$. Тогда $f^{(n)}\big(a+\theta(x-a)\big)=f^{(n)}(x)+\alpha(x)$,

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$, и остаточный член

$$R_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}\big(a+\theta(x-a)\big)}{n!}(x-a)^n$$

можно записать так:

$$R_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(a)+\alpha(x)}{n!}(x-a)^n$$

или

---

[23] Джузеппе Пеано (1858-1932), итальянский математик.

$$R_{n-1}(x)=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\frac{\alpha(x)}{n!}(x-a)^n,$$

где $\alpha(x)\underset{x\to a}{\to}0$. Тогда $\frac{\alpha(x)}{n!}(x-a)^n$ есть $o\left((x-a)^n\right)$, $x\to a$.

Поэтому формула Тейлора примет вид

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}+o\left((x-a)^n\right),\ x\to a.$$

В результате получаем остаточный член $R_n(x)$ в ***форме Пеано***

$$R_n(x)=o\left((x-a)^n\right),$$

который широко используется при качественных исследованиях.

6.4. Разложение по формуле Маклорена

Представим формулой Маклорена

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x). \qquad (4.1)$$

некоторые элементарные функции.

6.4.1. Представление показательной функции по формуле Маклорена

Теорема о разложении экспоненты.

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x),\ \forall x,\ \left|R_n(x)\right|\le e^{\theta x}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!},\ \forall x.$$

▲ Имеем

$$f(x)=e^x,\qquad f(0)=1,$$
$$f'(x)=e^x,\qquad f'(0)=1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(x)=e^x,\qquad f^{(n)}(0)=1,$$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_n(x),\ \forall x.$$

Используем для остаточного члена $R_n(x)$ форму Лагранжа:

$$R_n(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1},\ 0<\theta<1,\ \blacktriangledown$$

Полагая $x=1$, получим $e=2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},\ 0<\theta<1$.

Поскольку $0<\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$, сумма $2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}$ дает приближенное значение числа e с недостатком и погрешностью, меньшей $\frac{3}{(n+1)!}$.

6.4.2. Представление синуса и косинуса по формуле Маклорена

Теорема о разложении синуса

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}+R_{2m+3}(x),\ \forall x,$$

$$|R_{2m+3}(x)|\le\frac{|x|^{2m+3}}{(2m+3)!},\ \forall x.$$

▲ Имеем

$$f(x)=\sin x=\sin\left(x+0\cdot\tfrac{\pi}{2}\right),\qquad f(0)=0,$$
$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+1\cdot\tfrac{\pi}{2}\right),\qquad f'(0)=1,$$
$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\tfrac{\pi}{2}\right),\qquad f''(0)=0,$$
$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\tfrac{\pi}{2}\right),\qquad f'''(0)=-1,$$

и вообще

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\tfrac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, \text{ если } n=2m,\\ (-1)^m, \text{ если } n=2m+1,\end{cases}$$

а

$$f^{(n+1)}(\theta x)=\sin\left(\theta x+(n+1)\cdot\tfrac{\pi}{2}\right),$$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+R_{2m+2}(x).$$

Остаточный член – в форме Лагранжа:

$$R_{2m+2}(x)=\sin\left(\theta x+(2m+3)\cdot\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{x^{2m+3}}{(2m+3)!},\ 0<\theta<1,$$

$$\left|R_{2m+2}(x)\right|\le 1\cdot\frac{|x|^{2m+3}}{(2m+3)!}.\ \blacktriangledown$$

Аналогично доказывается и **теорема о разложении косинуса**

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+R_{2m+1}(x),\ \forall x,$$

где

$$R_{2m+1}(x)=\frac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\cos\left(\theta x+(2m+2)\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ 0<\theta<1,$$

$$\left|R_{2m+1}(x)\right|\le\frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!},\ \forall x.$$

Формулами можно пользоваться для вычисления приближенных значений $\sin x$ и $\cos x$ с любой степенью точности.

6.4.3. Представление логарифма по формуле Маклорена

Функция $\ln x$ около $x=0$ не может быть разложена, поэтому около $x=0$ разлагают $\ln(1+x)$, что соответствует разложению $\ln x$ около $x=0$.

Теорема о разложении логарифма.

$$\ln(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x),\ \forall x\in(-1;+\infty),$$

$$|R_n(x)|\le\frac{1}{n+1},\ \forall x\in(0;1),\ |R_n(x)|\le\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|},\ \forall x\in(-1;1).$$

▲ Эта функция определена и дифференцируема любое число раз для $x>-1$. Имеем

$$f(x)=\ln(1+x),\qquad f(0)=\ln 1=0,$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+x},\qquad f'(0)=1,$$

$$f''(x)=-\frac{1}{(1+x)^2},\qquad f''(0)=-1,$$

$$f'''(x)=\frac{1\cdot 2}{(1+x)^3},\qquad f'''(0)=2!,$$

....

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},\qquad f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{k!}x^k+R_n(x).$$

Если остаточный член представить в форме Лагранжа, то

$$R_n(x)=(-1)^n\frac{1}{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}},\ 0<\theta<1,$$

$$\forall x\in[0;1]\Rightarrow|R_n(x)|\le\frac{1}{n+1}.\ ▼$$

6.4.4. Представление степенного бинома по формуле Маклорена

В общем случае степенная функция не может быть разложена в окрестности точки $x=0$, поэтому в окрестности указанной точки разлагаем $(a+x)^\mu$, где μ – вещественное число, $x>-1$.

Теорема о разложении степенного бинома.

$$(1+x)^\mu = 1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n+$$
$$+R_n(x),\ \forall x\in(-1;+\infty),$$

$$|R_n(x)|\le\frac{|(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n)|}{n!}|x|^n M(x),\ \forall x\in(-1;1),$$

где

$$M(x)=\max\left\{\mu x\,|(1-|x|)^{\mu-1};\ |\mu x(1+|x|)^{\mu-1}\right\}.$$

▲ Имеем

$$f(x)=(1+x)^\mu,\qquad f(0)=1,$$
$$f'(x)=\mu(1+x)^{\mu-1},\qquad f'(0)=\mu,$$
$$f''(x)=\mu(\mu-1)(1+x)^{\mu-2},\qquad f''(0)=\mu(\mu-1),$$

....

$$f^{(n)}(x)=\mu\cdots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n},\qquad f^n(0)=\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1),$$

$$(1+x)^\mu=\sum_{k=0}^{n}\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-k+1)}{k!}x^k+R_n(x),$$

$$R_n(x)=\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}(1+\theta x)^{\mu-n}x^n,\ 0<\theta<1.\ ▼$$

Если $\mu=m$ – натуральному числу, то все члены формулы, начиная с $(m+1)$-го члена, исчезают, и формула Маклорена превращается в известную формулу бинома Ньютона

$$(1+x)^m = 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+x^m,\ \forall x.$$

Разложение функции $f(x)=(a+x)^m$, где $a\in\mathrm{R}$, $n\in\mathrm{N}$ имеет вид

$$(a+x)^m = a^m+ma^{m-1}x+\frac{m(m-1)}{2!}a^{m-2}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdots 2}{(m-1)!}ax^{m-1}+x^m.$$

6.5. Приложения формулы Тейлора

6.5.1. Формула Тейлора в дифференциалах

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную и n раз дифференцируемую в окрестности Ω точки x, которую считаем фиксированной. Предположим сверх того, что функция $f^{(n)}(x)$ непрерывна в точке x. Выберем приращение независимого переменного $\Delta x = h$, считая, как всегда, $x+h\in\Omega$. Разложим $f(x)$ в окрестности точки x по формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x+h)=f(x)+\frac{f'(x)}{1!}h+\ldots+\frac{f^{(n)}(x)}{n!}h^n+o(h^n),$$

$$f(x+h)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k+o(h^n)=T_n(x+h)+o(h^n).$$

Как обычно,

$$\Delta f(x)=f(x+h)-f(x),\ dx=\Delta x=h,\ d^k f(x)=f^{(k)}(x)dx^k,$$

в частности, $d^0 f(x)=f(x)$. Тогда формула Тейлора принимает вид:

$$f(x+\Delta x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{d^k f(x)}{k!}+o(\Delta x^n), \qquad (5.1)$$

$$\Delta f(x) = df(x) + \frac{d^2 f(x)}{2!} + \ldots + \frac{d^n f(x)}{n!} + o(dx^n). \quad (5.2)$$

Как отмечалось, дифференциал (первого порядка) выделяет в окрестности точки x ту часть приращения функции $f(x)$, которая линейно зависит от приращения аргумента Δx.

Сумма $f(x) + f'(x)\Delta x = d^0 f(x) + d^1 f(x)$ выделяет в окрестности точки x ту часть функции $f(x)$, которая линейно зависит от Δx (геометрически: график $f(x)$ в окрестности точки x заменяется касательной к этому графику).

Формула (5.1) показывает, что многочлен Тейлора

$$T_n(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{d^k f(x)}{k!}$$

в окрестности точки x выделяет из $\Delta f(x)$ многочлен по Δx степени не выше n, совпадающий с $f(x)$ с точностью до бесконечно малых порядка выше Δx^n, причем $\frac{d^k y}{k!}$ отвечает той части приращения функции, которая пропорциональна Δx^k.

Таким образом, многочлен Тейлора представляет, так сказать, главную часть функции $f(x)$ в окрестности точки x. Это обстоятельство и лежит в основе приложений формулы Тейлора, простейшие из которых рассмотрены ниже.

6.5.2. Применение формулы Тейлора для приближенных вычислений значений функции

Допустим, что функция $f(x)$ представима на промежутке Ω по формуле Тейлора степени n: $f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + R_n(x+h)$.

Приближенное равенство $f(x+h) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k$.

Допустим, что найдена оценка для остаточного члена $R_n(x)$ на Ω:

$$|R_n(x+h)| \le \delta, \ \forall x+h \in \Omega.$$

Тогда в условной записи $f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \pm \delta$.

Отметим, что для оценки погрешности форма Пеано остаточного члена неприменима, так как она не содержит информации о численном значении $R_n(x)$. Следует использовать другие формы $R_n(x)$, прежде всего – в случаях, когда существует $f^{(n+1)}$, – форму Лагранжа.

6.5.2. Применение формулы Тейлора для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$

Формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано часто используют для раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$.

Пример 5.1. Найти предел $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$.

▲ По виду знаменателя можно заключить, что определяющую роль играют члены 4-го порядка относительно x $(x \to 0)$. Поэтому воспользуемся формулой Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} =$$

$$= \left\{ \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right) - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4} = \frac{1 + o(x)}{24} \right\} = . \ ▼$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 + o(x)}{24} = \frac{1}{24}$$

7. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

7.1. Условия монотонности функции

Как было определено в разделе 3.1 (Функции одной переменной), монотонными называются строго возрастающие

$$\forall x_1,\ x_2 \in \mathbf{X},\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$

возрастающие, строго убывающие, убывающие функции, причем строго возрастающие и строго убывающие функции строго монотонны.

Утверждение 1. ***Между характером монотонности дифференцируемой на интервале*** $(a;b)$ ***функции*** $f(x)$ ***и знаком (положительностью) ее производной*** $f'(x)$ ***на этом интервале имеется следующая взаимосвязь***:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)\ \textit{возрастает} \Rightarrow f'(x) \ge 0,$$
$$f'(x) \ge 0 \Rightarrow f(x)\ \textit{не убывает} \Rightarrow f'(x) \ge 0,$$
$$f'(x) \equiv 0 \Rightarrow f(x) \equiv \text{const} \Rightarrow f'(x) \equiv 0,$$
$$f'(x) \le 0 \Rightarrow f(x)\ \textit{не возрастает} \Rightarrow f'(x) \le 0,$$
$$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)\ \textit{убывает} \Rightarrow f'(x) \le 0.$$

▲ Рассмотрим первое из этих следствий.

Достаточность. Пусть $x_1,\ x_2 \in (a;b)$, в котором $f'(x) > 0$; будем считать, что $x_1 < x_2$. По теореме Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),\ \text{где}\ x_1 < c < x_2. \qquad (1.1)$$

Так как $f'(x) > 0$ в каждой точке x интервала $(a;b)$, то и $f'(c) > 0$. Разности $f(x_2) - f(x_1)$ и $x_2 - x_1$ одного знака, причем $x_2 - x_1 > 0$, поэтому $f(x_2) - f(x_1) > 0$. Следовательно, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$. Т. е. функция возрастает в интервале $(a;b)$, где $f'(x) > 0$.

Рассмотрим последнее из следствий:

Если $f'(x) < 0\ \forall x \in (a;b)$, то $f'(c) < 0$.

Из равенства (1.1) следует, что $f(x_1) - f(x_2) < 0$ при $x_2 - x_1 > 0$. Т. е.

$f(x_1) < f(x_2)$, когда $x_1 < x_2$. Это означает, что функция убывает в интервале $(a;b)$.

Необходимость. Правый столбец следствий получается непосредственно из определения производной. Покажем, например, что если дифференцируемая на интервале $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает, то $f'(x) \geq 0$ на $(a;b)$.

Действительно, возьмем точки x и $x+\Delta x$ в интервале $(a;b)$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Если $\Delta x > 0$, то $f(x+\Delta x) - f(x) > 0$, а если $\Delta x < 0$, то

$$f(x+\Delta x) - f(x) < 0;$$

поэтому дробь под знаком предела положительна.

Следовательно, ее предел $f'(x)$ неотрицателен, что и утверждалось (по следствию из раздела «предельный переход и неравенства» $\exists \lim\limits_{x \to a} f(x) = A,\ \lim\limits_{x \to a} g(x) = B,\ f(x) > g(x) \Rightarrow A \geq B$). ▼

Замечание 1. На примере функции $f(x) = x^3$ видно, что возрастание дифференцируемой функции влечет только неотрицательность производной, а не ее положительность. В нашем примере $f'(0) = 3x^2\big|_{x=0} = 0$.

Замечание 2. В символе $A \Rightarrow B$, как мы уже в свое время отмечали, A есть условие, достаточное для B, а B есть условие, необходимое для того, чтобы было A. Значит, из **утверждения 1**, в частности, можно сделать следующие выводы:

функция постоянна на интервале тогда и только тогда, когда ее производная тождественно равна нулю на этом интервале,

или, для того чтобы дифференцируемая на интервале функция убывала на нем достаточно, чтобы ее производная была отрицательна в любой точке этого интервала, или, для того чтобы дифференцируемая на интервале функция убывала на нем, необходимо, чтобы ее производная была неположительна на этом интервале.

Пример 1.1. Пусть $f(x)=x^3-3x+2,\ x\in\mathbf{R}$.

▲ Тогда $f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$ и, поскольку $f'(x)<0$ $|x|<1$ и $f'(x)>0$ при $|x|>1$, можем сказать, что на интервале $(-\infty;-1)$ функция возрастает, на интервале $(-1;1)$ убывает, а на интервале $(1;+\infty)$ вновь возрастает. ▼

Замечание 3. Теорема имеет простой ***геометрический смысл***. Если в некотором интервале касательная к графику функции $y=f(x)$ образует с осью Ox острый угол α $(\mathrm{tg}\,\alpha>0)$, то функция возрастает в этом интервале (рис. 1.1). Если касательная к графику образует с осью Ox тупой угол α $(\mathrm{tg}\,\alpha<0)$, функция убывает (рис. 1.2).

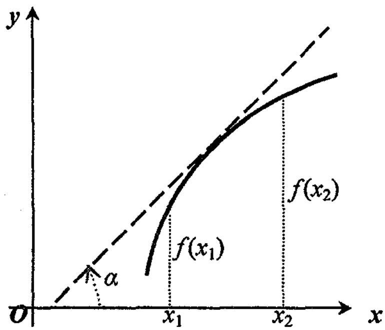


Рис. 1.1

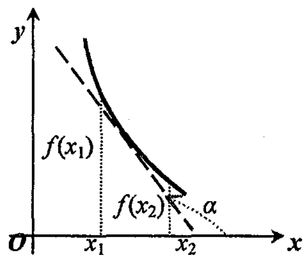


Рис. 1.2

7.2. Экстремум функции

Рассмотрим функцию $f(x)$, определенную в некоторой окрестности точки x_0, включая и саму точку x_0.

Определение. Точка x_0 называется ***точкой локального максимума***, а значение функции в ней – ***локальным максимумом*** функции $f(x)$, если существует такое $\delta > 0$ что для всех x_0 из интервала $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ верно неравенство (рис. 2.1)

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \le 0 \text{ или } f(x) \le f(x_0),$$

Если существует $\delta > 0$ такое, что для всех x из интервала $x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ верно неравенство $\Delta f = f(x) - f(x_0) \ge 0$ или $f(x) \ge f(x_0)$, то точка x называется ***точкой локального минимума***, а значение функции в ней – ***локальным минимумом*** функции $f(x)$ (рис. 2.2).

Определение. Точки локального максимума и минимума называются ***точками локального экстремума***, а значения функции в них – ***локальными экстремумами функции***.

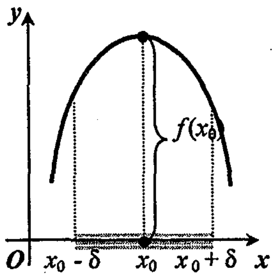


Рис. 2.1

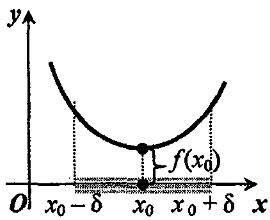


Рис. 2.2

Термин ***локальный*** (***относительный***) экстремум обусловлен тем, что введенное понятие экстремума связано с окрестностью данной точки в области определения функции, а не со всей областью. В дальнейшем слово «локальный» будем для краткости опускать. Очевидно, функция может иметь несколько локальных максимумов и несколько локальных минимумов, причем может так случиться, что иной локальный максимум окажется меньше какого-то локального минимума.

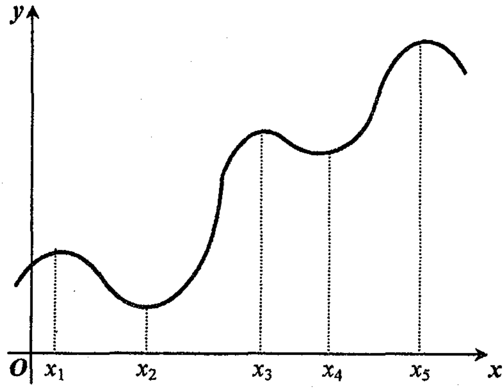


Рис. 2.3

В точках $x = x_1, x = x_3, x = x_5$ функция $f(x)$ имеет максимум, в точках $x = x_2, x = x_4$ – минимум. При этом максимум в точке $x = x_1$ меньше минимума функции в точке $x = x_4$ (рис. 2.3).

Мы будем рассматривать лишь точки строгого максимума и минимума.

Определение. Точка x_0 называется точкой ***строгого максимума*** (***минимума***) функции $f(x)$, если существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0 < |x - x_0| < \delta$, верно строгое неравенство $f(x) < f(x_0)$ (соответственно $f(x) > f(x_0)$).

7.2.1. Необходимое условие экстремума

Теорема 2.1 (необходимое условие локального экстремума). ***Для того чтобы точка*** x_0 ***была точкой экстремума функции*** $f(x)$, ***определенной в окрестности этой точки, необходимо выполнение одного из двух условий: либо*** $f'(x_0) = 0$; ***либо функция недифференцируема в точке*** x_0.

▲ Так как в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный экстремум, то существует такой интервал $(x_0-\delta; x_0+\delta)$, в котором значение $f(x_0)$ является наибольшим или наименьшим среди всех других значений этой функции. Тогда по теореме Ферма производная функции в точке x_0 равна нулю, т. е. $f'(x_0)=0$. ▼

Геометрический смысл теоремы. Теорема имеет простой геометрический смысл: касательная к графику дифференцируемой функции, проходящая через точку $(x_0; f(x_0))$, параллельна оси Ox.

Функция $y=f(x)$, график которой представлен на рисунке 2.4, имеет экстремумы в точках x_1, x_2, x_3, x_4; при этом в точках x_1 и x_4 производная $f'(x)$ не существует, а в точках x_2 и x_3 она равна нулю.

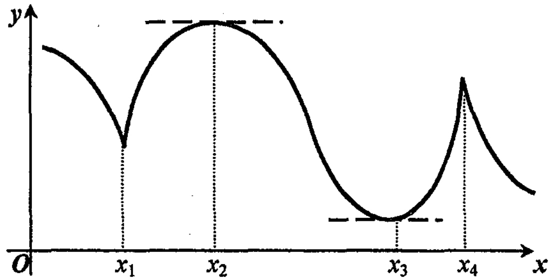


Рис. 2.4

Точки, в которых выполняется необходимое условие экстремума для функции $f(x)$, называются ***критическими точками*** этой функции. Они определяются как корни уравнения $f'(x)=0$ и как точки, где $f'(x)$ не существует (в частности, где $f'(x)$ – бесконечно большая функция). Корни уравнения $f'(x)=0$ называют стационарными точками функции $f(x)$: скорость изменения $f(x)$ в такой точке равна нулю.

Замечание 1. Теорема выражает лишь необходимое условие экстремума, и не в каждой своей критической точке функция $f(x)$ обязательно имеет максимум или минимум.

Так, например, для функции $f(x)=x^3$ имеем $f'(x)=3x^2$,

$f'(0)=0$. Поэтому точка $x_0=0$ является критической для данной функции. Но функция $f(x)=x^3$ в точке $x_0=0$ экстремума не имеет, так как $f(0)=0$, $f(x)<0$ при $x<0$ и $f(x)>0$ при $x>0$, так что в точке $x_0=0$ данная функция возрастает.

Замечание 2. Функция может достигать экстремума также в точке, в которой производная не существует.

1. Например, функция $f(x)=-|x+1|$ не имеет производной в точке $x=-1$, но достигает в ней максимума: $f(x)=0$ при $x=-1$, а для всякой другой точки $f(x)<0$ (рис. 2.5).

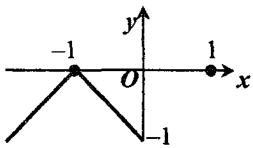


Рис. 2.5

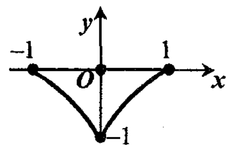


Рис. 2.6

2. Функция $f(x)=-\left(1-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$ не имеет конечной производной в точке $x=0$, поскольку $f'(x)=\sqrt{1-x^{\frac{2}{3}}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}$ при $x=0$ обращается в бесконечность, но в этой точке функция имеет минимум: $f(0)=-1$, $f(x)>-1$ при $x\neq 0$.

3. Пусть $f(x)=\left[\begin{array}{l} x \text{ при } x>0, \\ 2x \text{ при } x<0 \end{array}\right.$. Эта функция с изломом в нуле, очевидно, не имеет в нуле ни производной, ни экстремума.

7.2.2. Достаточное условие экстремума

Теорема 2.2 (достаточное условие локального экстремума). ***Пусть функция** $f(x)$, **определенная в окрестности точки** x_0, **непрерывная в самой этой точке и дифференцируемая в некоторой** δ **- окрестности точки** x_0. **Тогда справедливы следующие заключения**:*

*1) **если*** $\left(f'(x)>0\ \forall x\in(x_0-\delta;x_0)\right)\wedge\left(f'(x)<0\ \forall x\in(;x_0+\delta)\right)$

***(т. е. при переходе** x **через критическую точку** x_0 **производная меняет знак с плюса на минус), то** x_0 **– точка локального максимума функции** $f(x)$;*

2) ***если*** $\left(f'(x)<0\ \forall x\in(x_0-\delta;x_0)\right)\wedge\left(f'(x)>0\ \forall x\in(x_0;x_0+\delta)\right)$ ***(т. е. при переходе*** x ***через критическую точку*** x_0 ***производная меняет знак с минуса на плюс), то*** x_0 ***– точка локального минимума функции*** $f(x)$;

3) ***если*** $f'(x)$ ***во всей*** δ ***- окрестности точки*** x_0 ***имеет один и тот же знак, то в точке*** x_0 ***экстремума функции*** $f(x)$ ***нет.***

▲ 1) Так как по условию $f'(x)>0$ в интервале $(x_0-\delta;x_0)$, то на отрезке $[x_0-\delta;x_0]$ функция $f(x)$ возрастает, т. е.

$$f(x_0)>f(x); \tag{2.1}$$

так как $f'(x)<0$ в интервале $(x_0;x_0+\delta)$, то на отрезке $[x_0;x_0+\delta]$ функция $f(x)$ убывает, т. е.

$$f(x_0)>f(x). \tag{2.2}$$

Из неравенств (2.1) и (2.2) следует, что в рассматриваемой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$ при $x\neq x_0$, а это означает, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет локальный максимум.

Аналогично доказывается пункт 2).

Осталось рассмотреть случай, когда $f'(x)$ знака не меняет. Пусть $f'(x)>0$ в некоторой окрестности $(x_0-\delta;x_0+\delta)$; тогда по теореме о монотонности функции функция $f(x)$ возрастает на интервале $(x_0-\delta;x_0+\delta)$, т. е. для любых $x<x_0$ выполняется неравенство $f(x)<f(x_0)$, а для любых $x>x_0$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$. Это означает, что точка x_0 не является точкой локального экстремума. ▼

Геометрический смысл теоремы. Теорема имеет следующий геометрический смысл: если в точке $M_0(x_0;f(x_0))$ графика дифференцируемой функции касательная параллельна оси Ox, в точках слева от M_0 образует острый угол с осью Ox, в точках справа – тупой, то x_0 – точка максимума (рис. 2.8).

Замечание. Условие непрерывности функции $f(x)$ в самой точке x_0 является существенным.

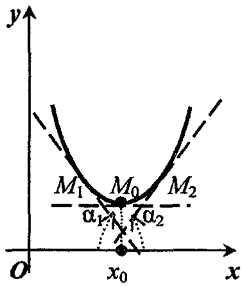


Рис. 2.7

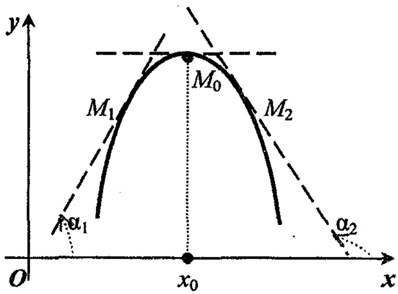


Рис. 2.8

Рассмотрим функцию $f(x)=\left[\begin{array}{ll} -x, & x<0, \\ x+1, & x\geq 0 \end{array}\right.$ (рис. 2.9).

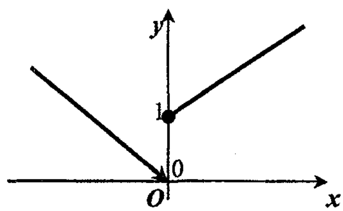


Рис. 2.9

В точке $x=0$ производная $f'(x)$ не существует. При переходе x через эту точку производная $f'(x)$ меняет знак, но в точке $x=0$ функция $f(x)$ экстремума не имеет: не существует окрестности точки $x=0$, в которой $f(0)=1$ было бы наибольшим или наименьшим значением функции $f(x)$. Здесь нарушено условие непрерывности функции $f(x)$ в точке $x=0$.

Правило 1 (отыскания экстремумов функции). Чтобы найти точки максимума и минимума функции $f(x)$, надо:

1) найти производную $f'(x)$, приравнять ее к нулю и решить полученное уравнение $f'(x)=0$;
2) найти точки, в которых производная $f'(x)$ не существует. Эти точки и корни уравнения $f'(x)=0$ будут критическими точками для функции $f(x)$.
3) Исследовать знак производной $f'(x)$ слева и справа от каждой критической точки. Если при переходе x через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет свой знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум; если знак $f'(x)$ меняется с минуса на плюс, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум. Если при переходе x через критическую точку x_0 знак $f'(x)$ не меняется, то в точке x_0 функция $f(x)$ не имеет ни максимума, ни минимума.

7.2.3. Исследование функций на экстремум при помощи второй производной

Достаточное условие экстремума можно выразить также с помощью второй производной.

Теорема 2.3. ***Пусть функция $f(x)$, определенная в окрестности точки x_0, имеет производные до 2-го порядка включительно. Если $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)\neq 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, а именно:***

1) ***минимум, если $f''(x_0)>0$,***
2) ***максимум, если $f''(x_0)<0$.***

▲ Прежде всего, заметим, что точка x_0 является критической точкой для данной функции $f(x)$, так как $f'(x_0)=0$.

Пусть $f''(x_0)>0$. В этом случае функция $f'(x)$ возрастает в точке x_0 ($f''(x)$ является первой производной функции $f'(x)$), из неравенств $x_0-\delta<x_0<x_0+\delta$ вытекают неравенства

$$f'(x_0-\delta)<f'(x_0)<f'(x_0+\delta)\ (\delta>0).$$

Но $f'(x_0) = 0$, следовательно, $f'(x_0 - \delta) < 0 < f'(x_0 + \delta)$.

Производная $f'(x)$ меняет знак в точке x_0 с минуса на плюс, следовательно, по первому достаточному признаку экстремума функция $f(x)$ имеет в точке x_0 минимум.

Подобными же рассуждениями доказывается, что если в критической точке x_0 вторая производная $f''(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум. ▼

Отсюда получаем второе правило отыскания точек экстремума функции.

Правило 2 (отыскания экстремумов функции). Чтобы найти точки максимума и минимума функции $f(x)$, надо найти критические точки $f(x)$. Для этого поступаем так, как указано в правиле 1. Затем ищем вторую производную $f''(x)$. Если она в критической точке x_0 существует и меньше нуля $\left(f''(x_0) < 0\right)$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет максимум, если же $f''(x_0) > 0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет минимум. Если в критической точке x_0 вторая производная равна нулю или не существует, то такую точку x_0 можно исследовать с помощью первой производной.

7.2.4. Исследование функции с помощью формулы Тейлора

Теорема 2.4 (достаточные условия экстремума в терминах высших производных). ***Пусть функция*** $f(x)$, ***определенная в окрестности*** $\Omega(x_0)$ ***точки*** x_0, ***имеет в точке*** x_0 ***производные до порядка n включительно*** $(n \geq 1)$. ***Если***

$f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ и $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, ***то при n нечетном в точке*** x_0 ***экстремума нет, а при n четном экстремум есть, причем это строгий локальный минимум, если*** $f^{(n(}(x_0) > 0$, ***и строгий локальный максимум, если*** $f^{(n)}(x_0) < 0$.

▲ Так как в соответствии с условием

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

то разложение данной функции в окрестности точки x_0 по формуле

Тейлора принимает вид

$$f(x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\alpha(x)(x-x_0)^n, \qquad (2.3)$$

где $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$. Перепишем (2.3) в виде

$$f(x)-f(x_0)=\left(f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)\right)(x-x_0)^n. \qquad (2.4)$$

Поскольку $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, а $\alpha(x)\to 0$ при $x\to x_0$, сумма $f^{(n)}(x_0)+\alpha(x)$ имеет знак $f^{(n)}(x_0)$, когда x_0 достаточно близок к x_0. Если n – нечетно, то при переходе через точку x_0 скобка $(x\text{-}x_0)^n$ меняет знак и тогда изменится знак всей правой, а, следовательно, и левой части равенства (2.4). Значит, при $n=2k+1$ экстремума нет.

Если n – четно, то $(x-x_0)^n>0$ при $x\neq x_0$ и, следовательно, в малой окрестности точки x_0 знак разности $f(x)-f(x_0)$, как видно из равенства (2.4), совпадает со знаком $f^{(n)}(x_0)$. ▼

7.2.5. Условия выпуклости функции

Пусть дана кривая уравнением $y=f(x)$ и пусть функция $f(x)$ в точке x_0 имеет конечную производную $f'(x_0)$, т. е. в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ существует касательная к данной кривой, не параллельная оси Oy.

Определение. Если существует такая окрестность $(x_0-\delta;$ $x_0+\delta)$ точки x_0, что все точки данной кривой, абсциссы которых содержатся в этой окрестности, расположены над касательной к кривой в точке M_0, то говорят, что данная кривая выпукла вниз в точке M_0 (рис.2.10).

Если все точки кривой с абсциссами из некоторой окрестности точки x_0 находятся под касательной к этой кривой в точке M_0, то говорят, что данная кривая выпукла вверх в данной точке M_0 (рис. 2.11).

Определение. График функции $y = f(x)$, дифференцируемой на интервале $(a; b)$, называется выпуклым вниз (вверх), если график этой функции в пределах интервала $(a; b)$ расположен выше (ниже) касательной в его произвольной точке.

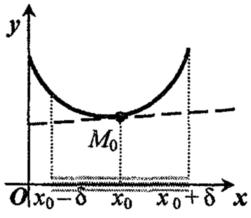


Рис. 2.10

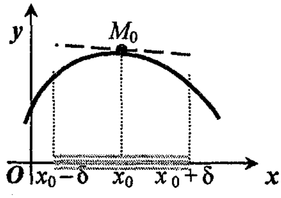


Рис. 2.11

Укажем аналитический способ для определения направления выпуклости кривой и отыскания точек перегиба.

Теорема 2.5. ***Для того чтобы функция*** $f(x)$, ***имеющая на интервале*** $(a; b)$ ***вторую производную, была выпуклой вниз на этом интервале необходимо и достаточно, чтобы на интервале*** $(a; b)$ ***было*** $f''(x) \geq 0$.

▲ Обозначим через y ординату точки кривой $y = f(x)$, а через y_k – ординату точки касательной, проведенной к этой кривой в точке $M_0(x_0; f(x_0))$, отвечающие одной и той же абсциссе x (рис.2.12).

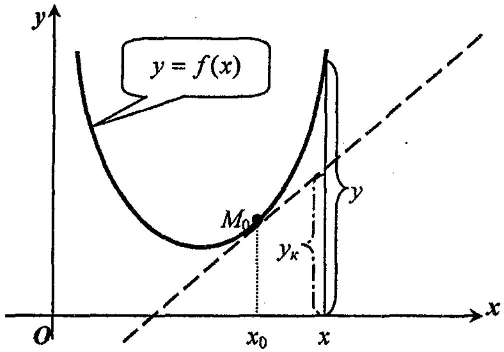


Рис. 2.12

Очевидно, что если $y - y_k > 0$ для всех $x \neq x_0$ в достаточно малой окрестности точки x_0 кривая выпукла вниз точке M_0 (если $y - y_k < 0$ для указанных значений x, то кривая выпукла в точке M_0 вверх). Таким образом, вопрос о направлении выпуклости кривой в точке M_0 сводится к вопросу о знаке разности $y - y_k$ в окрестности точки x_0.

Учитывая, что уравнение касательной к данной кривой в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ есть $y_k - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, имеем

$$y - y_k = f(x) - \big(f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\big). \qquad (2.5)$$

Разложим данную функцию $f(x)$ в окрестности точки x_0 по формуле Тейлора при $n = 2$.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,\ c \in (x_0; x). \qquad (2.6)$$

Из формул (2.5) и (2.6) получаем

$$y - y_k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2 -$$
$$- f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,$$

т. е.
$$y - y_k = \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2. \qquad (2.7)$$

Так как по условию $f''(x) \geq 0$ на $(a; b)$ и $(x - x_0)^2 > 0$, то правая часть равенства (2.7) неотрицательна, т. е. $y - y_k \geq 0$ $\forall x \in (a; b)$. Последнее неравенство означает, что график функции $y = f(x)$ лежит не ниже касательной, проведенной в его произвольной точке. Следовательно, в интервале $(a; b)$ график функции $y = f(x)$ является выпуклым вниз. ▼

Достаточным условием выпуклости функции вверх (вниз) на интервале $(a; b)$ является отрицательность (положительность) ее второй производной в каждой точке интервала, т. е.

если $f''(x) < 0$ при $x \in (a; b)$, то функция выпукла вверх на интервале $(a; b)$, а

если $f''(x) > 0$ при $x \in (a; b)$, то она на нем выпукла вниз (рис. 2.13).

$$f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow$$

$$f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow$$

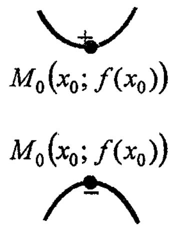


Рис. 2.13

При построении графиков функций бывает полезно выделять точки перегиба графика.

Определение. Точка графика функции $M_0(x_0; f(x_0))$ называется ***точкой перегиба*** кривой $y = f(x)$, если существует окрестность $\Omega(x_0) = ((x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 такая, что на множестве $\{x \in \Omega(x_0) \mid x < x_0\}$ выпуклость кривой направлена в одну сторону, а на множестве $\{x \in \Omega(x_0) \mid x > x_0\}$ – в противоположную сторону (рис. 2.14).

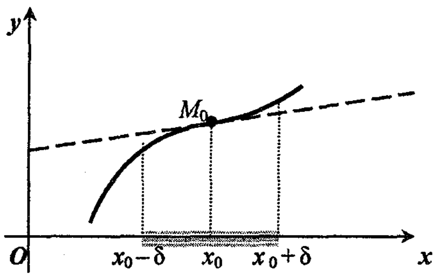


Рис. 2.14

Таким образом, при переходе через точку перегиба меняется направление выпуклости графика, а это, в частности, означает, что в точке $(x_0; f(x_0))$ график функции переходит с одной стороны касательной к нему в этой точке на другую ее сторону. Отсюда и произошло название «точка перегиба».

Теорема 2.6 (необходимое условие точек перегиба). ***Для того чтобы точка x_0 была точкой перегиба функции $y=f(x)$, определенной и дифференцируемой в окрестности этой точки, необходимо выполнение одного из двух условий:***

1) либо $f''(x_0)=0$, 2) либо $f''(x_0)$ не существует.

▲ Предположим обратное, т. е. допустим, что $f''(x_0)\neq 0$. Тогда в силу непрерывности второй производной по теореме о сохранении знака непрерывной функции существует окрестность точки x_0, в которой $f''(x)<0$ (или $f''(x)>0$), и, значит, согласно теореме о выпуклости график функции $y=f(x)$ имеет определенное направление выпуклости в этой окрестности. Но это противоречит наличию перегиба в точке $M_0(x_0; f(x_0))$. Полученное противоречие доказывает теорему. ▼

Следует заметить, что не всякая точка $M_0(x_0; f(x_0))$, для которой $f''(x_0)=0$, является точкой перегиба.

Например, график функции $f(x)=x^4$ не имеет перегиба в точке $O(0;0)$, хотя $f''(x)=12x^2=0$ при $x=0$.

Поэтому равенство нулю второй производной лишь необходимое условие перегиба.

Достаточный признак точки перегиба выражается следующей теоремой.

Теорема 2.7 (достаточное условие точек перегиба). ***Пусть функция $f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, непрерывную в точке x_0. Если $f''(x_0)=0$ и при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ есть точка перегиба кривой $y=f(x)$.***

▲ Из того, что $f''(x)$ слева и справа от точки x_0 имеет разные знаки, на основании теоремы о выпуклости заключаем, что направление выпуклости графика функции слева и справа от точки x_0 являются различными.

Это и означает наличие перегиба в точке $M_0(x_0; f(x_0))$.

Если же $f''(x_0)=0$, но в некоторой окрестности точки x_0 знак $f''(x)$ один и тот же как при $x<x_0$, так и при $x>x_0$, то точка M_0 не будет точкой перегиба. В этой точке выпуклость кривой направлена вниз, если $f''(x)>0$ как слева, так и справа от точки x_0, и выпуклость кривой направлена вверх, если $f''(x)<0$ как слева, так и справа от точки x_0. ▼

Замечание. Может оказаться, что в точке перегиба $M_0(x_0; f(x_0))$ кривой $y=f(x)$ касательная вертикальна, и поэтому $f''(x)$ в точке x_0 не существует.

Рассмотрим, например, функцию $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$. Имеем

$$f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ f''(x)=-\frac{2}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{x^5}}.$$

Очевидно, нет ни одной точки, в которой $f''(x)=0$. Но есть точка $x=0$, в которой $f''(x)$ не существует.

Исследуем знак $f''(x)$ в окрестности этой точки. Нетрудно видеть, что $f''(x)>0$ в интервале $(-\delta; 0)$ и $f''(x)<0$ в интервале $(0; \delta)$, где $\delta>0$. Таким образом, слева от точки $O(0; 0)$ выпуклость кривой направлена вниз, справа от точки $O(0; 0)$ – вверх. Следовательно, точка $O(0; 0)$ есть точка перегиба кривой $y=x^{\frac{1}{3}}$. Касательная в точке $O(0; 0)$ к этой кривой перпендикулярна оси Ox.

Окончательно достаточный признак точки перегиба может быть сформулирован так.

Пусть кривая $y=f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ касательную, хотя бы и параллельную оси Oy.

Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0, быть может, кроме самой точки x_0, имеет непрерывную вторую производную.

Если $f''(x)$ в точке x_0 равна нулю или не существует и при переходе x через точку x_0 производная $f''(x)$ меняет свой знак, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ есть точка перегиба кривой $y = f(x)$.

7.2.6. Асимптоты графиков функций

Понятие асимптоты кривой. Может оказаться, что размеры графика данной функции $y = f(x)$, $x \in \mathbf{X}$, не ограничены. Это бывает, когда функция не ограничена или когда она задана на неограниченном промежутке. В таких случаях часто представление о графике функции вне рамок чертежа дают асимптоты графика.

Определение. Прямая линия ℓ называется ***асимптотой*** кривой K, если расстояние d от точки M кривой K до прямой ℓ стремится к нулю при неограниченном удалении точки M по какой-либо части кривой K от начала координат (рис. 2.15).

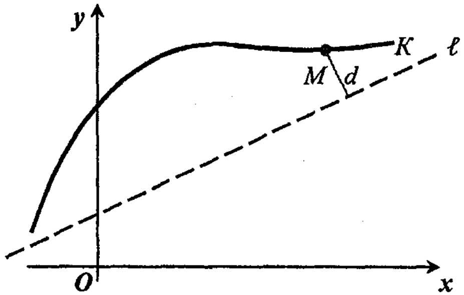


Рис. 2.15

Различают три вида асимптот: ***вертикальные*** (параллельные оси Oy), ***горизонтальные*** (параллельные оси Ox) и ***наклонные*** (не параллельные ни одной из координатных осей).

Вертикальные асимптоты. Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$, если выполнено хотя бы одно из условий

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \infty, \quad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \infty \text{ (или } \pm\infty\text{)}.$$

Тогда расстояние точки M на графике функции $y = f(x)$ от прямой линии $x = x_0$ будет равно, $|x - x_0|$ (расстояние измеряется по перпендикуляру, проведенному к прямой из точки M). Но $|x - x_0|$ стремится к нулю, когда точка M неограниченно удаляется от начала координат (рис. 2.16).

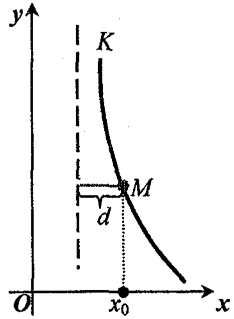


Рис. 2.16

Например, прямая $x = 2$ – вертикальная асимптота графика функции $y = \frac{1}{x-2}$ (рис. 2.17), так как

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{1}{x-2} = \left\{ \frac{1}{2-2-0} = -\frac{1}{0} \right\} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2+0} \frac{1}{x-2} = \left\{ \frac{1}{2+0-2} = \frac{1}{0} \right\} = +\infty .$$

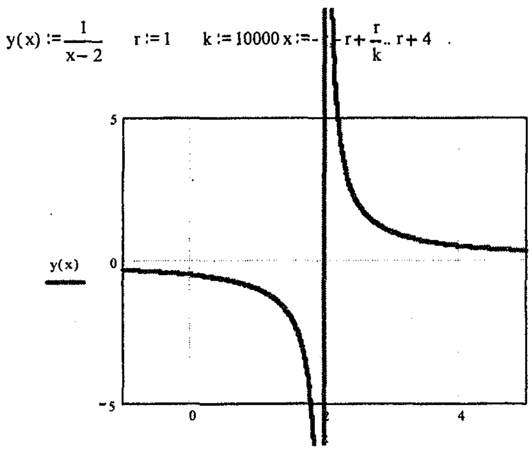


Рис. 2.17

Кривая $y=e^{\frac{1}{x}}$ имеет вертикальную асимптоту $x=0$, так как $\lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}} = \left\{e^{\frac{1}{0+0}} = e^{+\infty}\right\} = +\infty$.

На рис. 2.18 представлены возможные случаи взаимного расположения кривой и асимптоты.

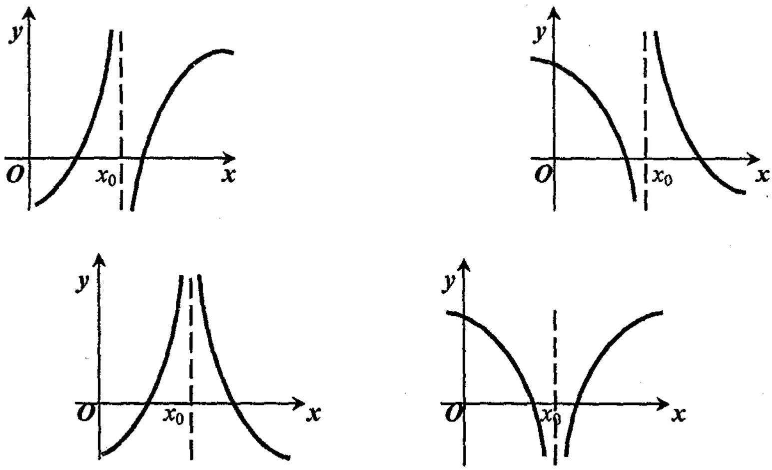


Рис. 2.18

Для разыскания вертикальных асимптот кривой $y=f(x)$ поступаем следующим образом:

1) находим на оси Ox точки разрыва функции $f(x)$;
2) выделяем те из них, в которых хотя бы один из пределов функции $f(x)$ (слева или справа) равен $-\infty$ или $+\infty$. Пусть это будут точки $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Тогда прямые $x=x_1$, $x=x_2$, ..., $x=x_k$ будут вертикальными асимптотами графика функции $y=f(x)$.

Например, для кривой $y=\frac{1}{x^2-1}$ вертикальными асимптотами будут прямые $x=-1$ и $x=1$ (рис. 2.19).

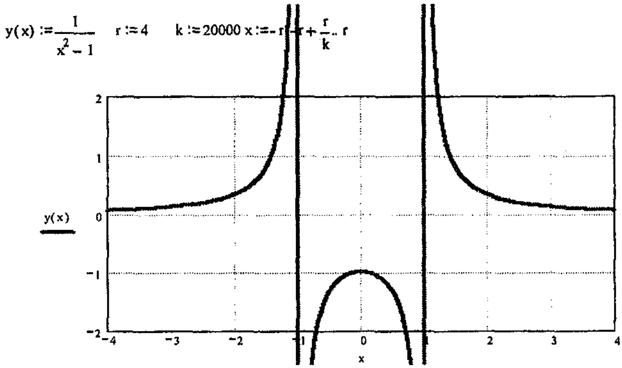


Рис. 2.19

Наклонные асимптоты

Пусть график некоторой функции $y = f(x)$, определенной для всех $x \geq x_0$ (или $x \leq x_0$), имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$ (рис. 2.20). Для определенности будем рассматривать сколь угодно большие значения аргумента x положительного знака.

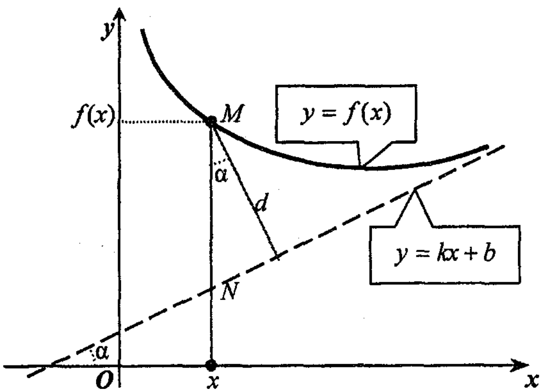


Рис. 2.20

Нормальное уравнение прямой $y = kx + b$ имеет вид $\dfrac{kx - y + b}{\pm\sqrt{k^2 + 1}} = 0$.

Расстояние от точки $M(x;\, f(x))$ до асимптоты вычисляется по формуле

$$d = \left| \frac{kx - y + b}{\sqrt{k^2 + 1}} \right|.$$

Тот факт, что прямая линия $y = kx + b$ является асимптотой кривой $y = f(x)$, означает, что расстояние d от точки $M(x;\, f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при $x \to +\infty$, т. е. должно выполняться равенство $\lim\limits_{x \to +\infty} d = 0$. Подставив значение d в эту формулу, получим $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{|kx - f(x) + b|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0$, что равносильно неравенству

$$\lim_{x \to +\infty} (kx - f(x) + b) = 0.$$

Приходим к выводу: прямая $y = kx + b$ будет наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x \to +\infty} (kx - f(x) + b) = 0$, т. е. когда функция $f(x)$ представима в виде

$$f(x) = kx + b + \alpha(x), \qquad (2.8)$$

где $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0$.

Существование асимптоты $y = kx + b$ у кривой $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ означает, что при $x \to +\infty$ функция $y = f(x)$ ведет себя «почти как линейная функция», т. е. отличается от линейной функции $y = kx + b$ на бесконечно малую функцию при $x \to +\infty$.

Теорема 2.8. ***Для того чтобы график функции*** $y = f(x)$ ***имел при*** $x \to +\infty$ ***наклонную асимптоту*** $y = kx + b$, ***необходимо и достаточно, чтобы существовали оба предела***

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = b. \qquad (2.9)$$

▲ **Необходимость.** Пусть график функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ имеет асимптоту $y = kx + b$, т. е. для функции $f(x)$ справедливо представление (2.8): $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \underset{x \to +\infty}{\to} 0$.

Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(k+\frac{b}{x}+\frac{\alpha(x)}{x}\right)=k$,

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to+\infty}(b+\alpha(x))=b,$$

т. е. существуют оба предела (2.9).

Достаточность. Пусть существуют оба предела (2.9). Существование второго из этих пределов дает право утверждать, что разность $f(x-kx-b)$ является бесконечно малой функцией при $x\to+\infty$. Обозначив эту разность через $\alpha(x)$, получим

$$f(x)=kx+b+\alpha(x),\text{ где }\alpha(x)\underset{x\to+\infty}{\to}0.$$

Это означает, что график функции $y=f(x)$ имеет наклонную асимптоту $y=kx+b$. ▼

Аналогично исследуется случай $x\to-\infty$.

Пример. Рассмотрим функцию $y=\frac{x^2}{x-1}$.

▲ График этой функции имеет вертикальную асимптоту $x=1$.

Запишем функцию $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ в виде

$$f(x)=\frac{x^2-1+1}{x-1}=x+1+\frac{1}{x-1}.$$

Величина $\frac{1}{x-1}$ стремится к нулю при $x\to\infty$. Таким образом, функция $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ допускает представление

$$f(x)=x+1+\alpha(x),\text{ где }\alpha(x)=\frac{1}{x-1}\underset{x\to\infty}{\to}0.$$

Отсюда следует, что график данной функции имеет наклонную асимптоту $y=x+1$ (рис. 2.21). ▼

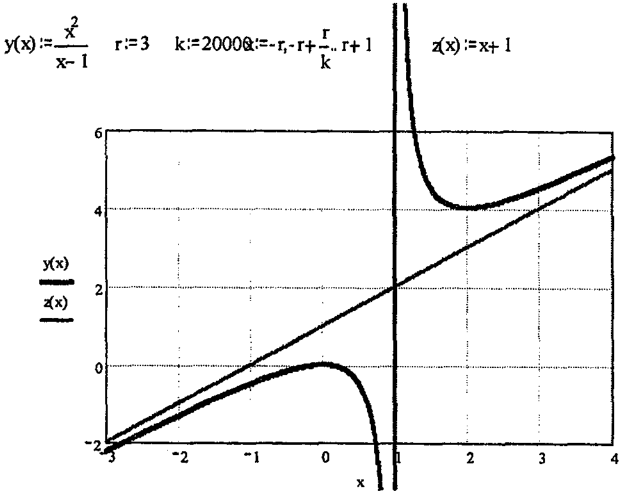


Рис. 2.21

Замечание. Полезно исследовать знак разности

$$\Delta = f(x) - kx - b.$$

Если $\Delta > 0$, то кривая расположена над асимптотой; если $\Delta < 0$, то под асимптотой.

Горизонтальная асимптота (частный случай наклонной асимптоты ($k = 0$))

Если при $x \to +\infty$ (или при $x \to -\infty$) функция $f(x)$ имеет конечный предел, равный числу b: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b\right)$, то прямая $y = b$ есть горизонтальная асимптота соответственно для правой или левой ветви графика функции $y = f(x)$.

Пример. Пусть $y = \operatorname{arctg} x$. Для функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$ имеем $\lim\limits_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}$. Таким образом, правая ветвь графика функции $y = \operatorname{arctg} x$ имеет горизонтальную асимптоту $y = \frac{\pi}{2}$, а левая часть – асимптоту $y = -\frac{\pi}{2}$ (рис. 2.22).

$y(x) := \operatorname{atan}(x) \quad r := 4 \quad k := 200 \quad x := -r, -r + \frac{r}{k} .. r \qquad z(x) := \frac{\pi}{2} \qquad v(x) := \frac{-\pi}{2}$

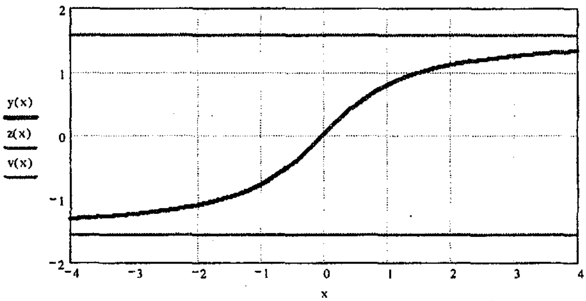


Рис. 2.22

7.3. Общая схема исследования функции и построения ее графика

Одна из возможных схем исследования функции и построения ее графика разлагается на следующие этапы решения задачи.

Элементарное исследование

1. Найти область определения функции.
2. Найти точки разрыва функции. Их характер. Вертикальные асимптоты.
3. Исследовать функцию на симметричность (определить четность и нечетность функции) и периодичность.
4. Определить, если это не вызовет особых затруднений, точки пересечения графика функции с осями координат. Найти интервалы постоянства знака.
5. Вычислить предельные значения функции в ее граничных точках.
6. Выяснить существование наклонных асимптот.

Исследование функции по первой производной

7. Найти решение уравнений $f'(x)=0$ и $f'(x)=\infty$.
8. Критические точки, исследовать с помощью достаточного условия экстремума, определить вид экстремума. Вычислить значения функции в точках экстремума.
9. Найти интервалы монотонности функции.

Исследование функции по второй производной

10. Найти решение уравнений $f''(x)=0$ и $f''(x)=\infty$.
11. Критические точки исследовать с помощью достаточного условия. Вычислить значения функции в точках перегиба.
12. Найти интервалы выпуклости вниз и вверх графика функции.
13. Построить график функции.

Если исследование проведено без ошибок, то результаты всех этапов должны согласовываться друг с другом.

График функции лучше всего строить в таком порядке:

1. Построить все асимптоты, если они есть.
2. Нанести на график характерные точки: точки пересечения с осями координат, точки, в которых есть экстремум, точки перегиба.

Построение проводить в интервалах непрерывности с учетом проведенных исследований.

Пример. Построить график функции $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

▲ 1. Функция определена на всей числовой прямой, кроме точки $x=1$, $\mathbf{X}=\{(-\infty;1)\vee(1;\infty)\}$.

2. В точке $x=1$ функция имеет разрыв, причем

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x^2}{x-1}=\left\{\frac{(1-0)^2}{1-0-1}=-\frac{1}{0}\right\}=-\infty,\quad \lim_{x\to 1+0}\frac{x^2}{x-1}=\left\{\frac{(1+0)^2}{1+0-1}=\frac{1}{0}\right\}=+\infty.$$

Прямая линия $x=1$ является вертикальной асимптотой.

3. Функция ни четная, ни нечетная

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{-x-1}=-\frac{x^2}{x+1}\neq\left[\begin{array}{l} f(x), \\ -f(x). \end{array}\right.$$

Функция непериодическая.

4. Единственная точка пересечения графика с осями координат – начало координат:

$$\begin{cases} x=0, \\ y=\dfrac{x^2}{x-1}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ y=0, \end{cases} \text{ и наоборот } \begin{cases} y=\dfrac{x^2}{x-1}, \\ y=0, \end{cases} \begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$$

5. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x-1} = \infty$. Следовательно, горизонтальных асимптот нет.

6. Так как $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{x(x-1)} = 1$,

$$b = \lim_{x\to\infty}\big(f(x) - kx\big) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-1} = 1,$$

то прямая линия $y = x+1$ является наклонной асимптотой.

7. Находим первую производную:

$$y' = \frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Приравниваем производную нулю: $\dfrac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$. Откуда

$$x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ или } x = 2.$$

Точка $x = 1$, где y' обращается в бесконечность, не входит в область определения функции.

Итак, критическими точками являются точки $x = 0$ и $x = 2$.

8. Если $-\infty < x < 0$ и $2 < x < +\infty$, то имеем $y' > 0$.

Если $0 < x < 1$ и $1 < x < 2$, то имеем $y' < 0$.

Следовательно, в точке $x=0$ функция имеет максимум, $y(0)=0$, в точке $x=2$ – минимум, $y(2)=3$.

9. На интервалах $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$, где $y'>0$, функция возрастает. На интервалах $(0;1)$ и $(1;2)$, где $y'<0$ функция убывает.

10. Находим вторую производную:

$$y''=\frac{(2x-2)(x-1)^2-2(x-1)(x^2-2x)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}.$$

Вторая производная в нуль не обращается. Точка $x=1$, где y'' обращается в бесконечность, не входит в область определения функции.

11. Точек перегиба функция не имеет.

12. Для значений $x\in(-\infty;1)$ имеем $y''<0$, т. е. кривая выпукла вверх, для значений $x\in(1;+\infty)$ имеем $y''>0$, т. е. выпуклость кривой направлена вниз.

Результаты сводим в таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;1)$	1	$(1;2)$	2	$(2;+\infty)$
$f'(x)$	+	0	–	Не $\exists$	–	0	+
$f''(x)$	–		–	Не $\exists$	+		+
$f(x)$	$\uparrow$	0 max	$\downarrow$	Не $\exists$	$\downarrow$	3 min	$\uparrow$

График изображен на рис. 2.21. ▼

7.4. Наибольшее и наименьшее значение функции, непрерывной на отрезке

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$, то, согласно второй теореме Вейерштрасса, она на этом отрезке принимает наибольшее и наименьшее значения.

Свое наибольшее значение M функция $f(x)$ принимает во внутренней точке x_0 отрезка $[a;b]$ (т. е. когда справедливо

$a < x_0 < b$). Тогда $M = f(x_0)$ будет локальным максимумом функции $f(x)$. В этом случае существует окрестность точки x_0 такая, что значения $f(x)$ для всех точек x из этой окрестности будут не больше $f(x_0)$ как в точках слева от точки x_0, так и в точках справа от точки x_0.

Однако свое наибольшее значение M функция $f(x)$ может принимать и на концах отрезка $[a; b]$.

Поэтому, чтобы найти наибольшее значение M непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$, надо найти все максимумы функции $f(x)$ в интервале $(a; b)$ и значения $f(x)$ на концах отрезка $[a; b]$, т. е. $f(a)$ и $f(b)$, и выбрать среди них наибольшее число.

Наименьшим значением m непрерывной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ будет наименьшее число среди всех минимумов функции $f(x)$ в интервале $(a; b)$ и значений $f(a)$ и $f(b)$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Краснов М.* Л. и др. Вся высшая математика: Учебник. Т.1. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 328 с.
2. *Зорич В.* А. Математический анализ, часть I. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 544 с.
3. *Козлов В. Н., Максимов Ю. Д., Хватов Ю. А.* Математика. Структурированная программа (базис). Типовые задачи для контроля, требования к знаниям и умениям студентов. – СПб.: Изд. СПБГТУ, 2001. – 55 с.
4. *Рябушко А. П.* и др. Сб. индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. Ч. 1. – Мн.: Выш. шк., 1990. – 270 с.
5. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. – М.: Мир, 1970. –416 с.

В. Н. Веретенников

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебно-методическое пособие

Редактор
И.Г. Максимова

ЛР № 020309 от 30.12.96.

Подписано в печать 04.10.08
. Формат $60 \times 90^1/_{16}$. Печать офсетная.
Печ. л. 16,00. Тираж 500. Зак. № 37.

195196, СПб, Малоохтинский пр. 98. РГГМУ