Министерство образования Российской Федерации
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

А.А. Макоско, Б.Д. Панин

ДИНАМИКА АТМОСФЕРЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

РГГМУ

Санкт-Петербург
2002

УДК 551 511.3

А.А. Макоско, Б.Д. Панин. Динамика атмосферы в неоднородном поле силы тяжести. – СПб.: РГГМУ, 2002. – 245 с.

Впервые в отечественной и мировой научной литературе обобщены результаты исследований по проблеме влияния неоднородностей поля силы тяжести Земли на гидрометеорологические процессы.

Приведены основные положения теории фигуры Земли и гравитации. Уделено внимание конкретным вопросам моделирования динамики атмосферы, обеспечивающим корректность учета фигуры Земли, аномалий силы тяжести и орографии в задачах прогноза погоды и климата.

Предназначена для специалистов в области математического моделирования динамики атмосферы, численных методов прогноза погоды, теории климата, гравитации и общей теории относительности.

In the book, for the first time, the authors have generalized and presented the results of their original research on the problem of the gravity force field heterogeneity impacts on the hydrological and meteorological processes. These impacts so far were groundlessly ignored.

The bases of the Earth shape theory are given for better understanding the matter of the problem.

The main attention is paid to the topics associated with the construction of the hydrodynamic models of the atmosphere aiming to provide the concrete accounting for the Earth shape, gravity anomalies, and orography for weather climate forecasting.

The book is designated for specialists in the area of mathematical modeling of the Atmospheric Dynamics, Numerical Weather Forecasting, Theory of Climate, Gravity and General Relative Theory.

ISBN 5-86813-034-0

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая читателю монография посвящена особенностям математического моделирования динамики атмосферы с учетом неоднородности поля силы тяжести.

Книга написана двумя специалистами, представляющими Российскую академию наук и Министерство образования Российской Федерации. Это обстоятельство отражает тенденцию к интеграции академической и вузовской науки. В 1999 г. Российская академия наук и российское высшее образование отметили 275-летний юбилей: 8 февраля 1724 г. по указанию Петра I была основана Академия наук, в составе которой были Университет и Гимназия, призванные готовить национальные кадры для Академии.

На начальном этапе деятельности Академии были приглашены крупные иностранные ученые, среди которых были Даниил Бернулли и Леонард Эйлер. В Академии быстро развернулись среди прочих исследования по математике и механике, в особенности по механике жидкости. Здесь уместно вспомнить, что Л. Эйлеру принадлежит первенство в построении уравнений движения идеальной жидкости, а первой монографией, написанной в основном в Петербургской академии, стала «Гидродинамика» Д. Бернулли.

Академия сыграла большую роль в создании научных учреждений и высших учебных заведений, в которых также велось изучение атмосферы, океана, климата. И в наше время курс на тесное взаимодействие институтов Российской академии наук с высшими учебными заведениями страны остается важным элементом содружества академической науки и высшего образования и залогом дальнейшего развития метеорологической науки.

Анри Пуанкаре принадлежит мысль о том, что в науке нет нерешенных задач – есть только более или менее решенные. Эта мысль великого математика полностью применима и к рассматриваемой в книге проблеме. До недавнего времени считалось, что учет вариаций силы тяжести вследствие их малости не приводит к каким-либо заметным эффектам в динамике атмосферы. Однако более внимательный анализ этого процесса показал, что проблема еще далека от решения. К вопросам корректного учета силы тяжести в уравнениях гидродинамики в свое время обращались Н.Е. Кочин, В.П. Садоков, Ф.М. Морс и Г. Фешбах, А. Гилл.

В 1980 г. Ф.И. Рудяевым была выявлена повышенная повторяемость циклонических систем южного полушария в областях отрицательных аномалий и антициклонических систем в областях положительных аномалий силы тяжести. Этим исследованиям оказал поддержку К.Я. Кондратьев.

В середине 80-х годов Е.П. Борисенков и Б.Д. Панин обратили внимание на существенно большую роль неоднородности поля силы тяжести, чем ей отводилось традиционно. К началу 90-х годов были выполнены работы, в которых на основе качественного анализа полей метеовеличин и силы тяжести осуществлены первые оценки влияния неоднородности силы тяжести на распределение параметров статики и динамики атмосферы. Эти работы велись в Российском гидрометеорологическом университете (Б.Д. Панин, О.Г. Анискина, С.И. Кузьмина, С.П. Смышляев), Главной географической обсерватории им. А.И. Воейкова (Е.П. Борисенков), 4 Центральный научно-исследовательский институт Министерства обороны, РАН (А.А. Макоско, Н.Н. Солопов, В.Г. Лугин).

В итоге назрела необходимость развития, углубления и систематизации полученных результатов, их обобщения и на этой основе осуществления корректных оценок влияния неоднородности силы тяжести на атмосферные процессы и построения методик ее учета в уравнениях гидродинамики, определения и углубленного исследования статических, динамических, термодинамических и гравитационных эффектов в задачах прогноза, в теории общей относительности и локальных циркуляций, а также климата. Решение этих задач находится на стыке гидродинамики, физики атмосферы, теории тяготения (общей теории относительности – ОТО), геодезии, теории потенциала и фигуры Земли и частично изложены в предлагаемой монографии.

Книга может представлять интерес для специалистов в области гравитации и для специалистов в области математического моделирования динамики атмосферы, численных методов прогноза погоды, теории климата.

ВВЕДЕНИЕ

Современный этап моделирования атмосферы находится на стадии интенсивного развития и характеризуется стремлением к наиболее полному и детальному учету в гидродинамических моделях всех влияющих факторов совместно с широким использованием самых эффективных методов математической физики, реализуемых на суперкомпьютерах.

Этими обстоятельствами обусловлено и исследование влияния неоднородного поля силы тяжести на атмосферу и происходящие в ней динамические процессы. Традиционно роль вариаций силы тяжести считается пренебрежимо малой. Однако на самом деле вопрос об их влиянии на явления и процессы в атмосфере изучен очень слабо.

Действительно, в основных уравнениях метеорологии из четырех сил, действующих на выделенный объем воздуха, учитывается влияние лишь трех: барического градиента, силы Кориолиса и вязкости. Сила тяжести обычно полагается постоянной. Исключение составляют случаи приведения давления к уровню моря и расчет термодинамических параметров в верхних слоях атмосферы. При этом учитывается в среднем зависимость силы тяжести от высоты и широты места. Однако даже в этом случае отличие истинного уровня моря от отсчетного, принимаемого за таковой, достигает до нескольких десятков метров. Несложно оценить, что это обстоятельство может приводить к погрешностям в расчете поля давления на уровне моря до нескольких ГПа.

Другое обстоятельство связано со следующим. Известно, что вектор силы тяжести направлен по нормали к уровенным (эквипотенциальным) поверхностям, каковыми изобарические, изотермические, изостерические поверхности в движущейся атмосфере не являются. Ввиду этого обстоятельства при представлении основных уравнений в традиционно используемых системах координат будут возникать фиктивные тангенциальные составляющие вектора силы тяжести. Их значения невелики. Например, у поверхности Земли они в среднем составляют 20–30 мГал. Однако воздействие тангенциальных составляющих носит практически стационарный характер и, вследствие этого, оно будет приводить к систематическим ошибкам при моделировании атмосферных процессов, особенно заметным в областях гравитационных аномалий.

В конце 70-х годов Ф.И. Рудяев обнаружил, что тропические циклоны имеют повышенную повторяемость в областях отрицательных аномалий силы тяжести. Позднее он выявил повышенную повторяемость циклонических систем в областях отрицательных аномалий и антициклонических систем в областях положительных аномалий силы тяжести южного полушария.

Вопрос о существенно большей роли неоднородности поля силы тяжести, чем ей отводилось традиционно, был поднят в середине 80-х годов Е.П. Борисенковым и Б.Д. Паниным, что стимулировало исследования влияния силы тяжести на динамику атмосферных процессов. В результате к началу 90-х годов, в основном силами авторов монографии, были выполнены работы, в которых сделаны попытки качественного анализа полей метеовеличин и силы тяжести, а также осуществлены первые количественные оценки влияния неоднородности силы тяжести на состояние атмосферы. Несмотря на упрощенность постановок задач в этих работах, полученные результаты позволили прийти к некоторым важным выводам:

- связь полей метеовеличин и силы тяжести имеет место;
- при приведении измерений давления необходимо четкое определение отсчетной поверхности (уровня моря);
- влияние на динамику атмосферы оказывают в основном тангенциальные составляющие силы тяжести;
- влияние на динамику атмосферы вариаций вертикальной составляющей силы тяжести менее существенно.

В итоге сформировалось понимание необходимости введения специальных систем координат для корректного учета влияния неоднородного поля силы тяжести, хотя на соблюдение осторожности в выборе подходящей системы координат, поскольку сила тяжести в уравнениях движения является доминирующей, указывалось еще Ф.М. Морсом и Г. Фешбахом в конце 50-х годов. Очевидно, возможны два подхода к учету влияния неоднородного поля силы тяжести в уравнениях гидродинамики:

- на основе использования традиционно применяемых систем координат, но с добавлением фиктивных (тангенциальных) составляющих силы тяжести, обусловленных отличием вертикальной координаты от местной нормали к уровенной поверхности. Значение тангенциальных составляющих будет зависеть от степени неоднородности поля силы тяжести;

- на основе использования специальной (геопотенциальной) системы координат, в которой одна из координат непосредственно зависит от геопотенциала. Ее ось всюду будет совпадать с местной нормалью к уровенной поверхности, но горизонтальные координаты относительно обычно применяемых координатных систем будут характеризоваться кривизной, зависящей от степени неоднородности поля силы тяжести.

Оба подхода равноценны, и выбор в пользу одного из них должен диктоваться условиями решаемой задачи и степенью изученности поля силы тяжести.

Таким образом, в настоящий момент стало весьма актуальным издание книги, в которой были бы обобщены результаты ранее выполненных работ, проведены анализ и обоснование подходов к учету неоднородности поля силы тяжести в уравнениях гидродинамики, исследована на этой основе ее роль в процессах и явлениях, происходящих в атмосфере, предложены методы ее корректного учета при моделировании атмосферы.

Книга состоит из пяти глав.

В первой главе монографии приводятся известные данные о поле силы тяжести, в т.ч. о ее нормальной и аномальной составляющих, уклонениях отвесной линии. Также изложены необходимые сведения из теории фигуры Земли, теории геопотенциала и курса высшей геодезии. Рассмотрены основные методы представления гравитационного поля Земли. На основе разложения гравитационного потенциала в ряд сферических функций выполнен анализ глобального поля силы тяжести: рассмотрена его пространственная и зонально-осредненная структуры, приведены некоторые статистические характеристики.

Во второй главе изложены основные этапы изучения влияния силы тяжести на атмосферу. Приведены результаты первых численных экспериментов, краткие описания влияния аномального гравитационного поля Земли на циркуляционные системы атмосферы, на барическую топографию, оценки корреляции метеовеличин и силы тяжести. Описаны системы координат (сфероидическая, «геопотенциальная», эллипсоидальная) для моделирования крупномасштабных движений с учетом влияния неоднородного поля силы тяжести. Приведены некоторые количественные оценки влияния силы тяжести на атмосферные процессы.

В третьей главе рассмотрены уравнения гидродинамики, учитывающие влияние неоднородности поля силы тяжести, определены возможные отсчетные поверхности (квазигеоид, общий земной эллипсоид, сфера), которые использованы для покомпонентного представления исходных уравнений гидродинамики в векторной форме. На основе анализа преимуществ и недостатков установлено, что наиболее подходящей отсчетной поверхностью является общий земной эллипсоид. Получены уравнения гидродинамики, корректно учитывающие неоднородность поля силы тяжести, в декартовых и в криволинейных ортогональных координатах, а также в системах координат, связанных с давлением.

Четвертая глава посвящена исследованию крупномасштабных атмосферных движений, обусловленных неоднородностью поля силы тяжести. С целью выделения в явном виде отклонений метеовеличин, обусловленных влиянием неоднородности поля силы тяжести, уравнения гидродинамики представляются в отклонениях от равновесного состояния.

Определен ветер, обусловленный влиянием неоднородности поля силы тяжести и по этой причине названный гравитационным. Исследованы его пространственно-временные вариации, а также его завихренность, дивергенция, кинетическая энергия. Рассмотрен вопрос о связи гравитационного ветра с агеострофическим.

С помощью анализа уравнения вихря скорости ветра показано, что бароклинный член имеет две составляющие. Одна обусловлена влиянием градиента виртуальной температуры, вторая – влиянием неоднородного поля силы тяжести. Именно вторая составляющая формирует циркуляцию атмосферы, обусловленную влиянием неоднородности поля силы тяжести и названную гравитационной. Рассмотрен вклад гравитационной циркуляции атмосферы в формирование синоптических вихрей, муссонов, тропических циклонов. Выяснено, что влияние неоднородного поля силы тяжести при гидродинамическом описании крупномасштабных элементов атмосферной циркуляции характеризуется относительной стабильностью. Это обстоятельство может служить основой для существенного уменьшения имеющихся систематических ошибок численных прогнозов погоды, так как в случае пренебрежения неоднородностью поля силы тяжести будет иметь место:

завышение прогностических значений давления над северной и южной акваториями Атлантики, акваторией Тихого океана у Южной Америки, Австралией, Восточной Сибирью;

занижение прогностических значений давления над Европой, Ближним Востоком, Западной Сибирью, Африкой (исключение может составить тропическая зона летом), центральной частью Тихого океана, Арктикой и основной частью Антарктики.

Показано, как в июле под действием неоднородности поля силы тяжести может формироваться гравитационный вихрь, приводящий к циркуляции воздуха, характерной для летнего индийского муссона. Установлено, что неоднородное поле силы тяжести способствует зарождению и развитию тропических циклонов. Оценена кинетическая энергия гравитационной циркуляции атмосферы. Полученные результаты свидетельствуют о необходимости уточнения и дополнения принятой в настоящее время схемы преобразования энергии в крупномасштабных атмосферных движениях.

Пятая глава посвящена методическим основам учета неоднородности силы тяжести при разработке математических моделей атмосферы. На основе результатов выполненных исследований обоснован выбор модели фигуры Земли в виде общего земного эллипсоида и систем координат для покомпонентного представления уравнений гидродинамики. Рассмотрены математические модели атмосферы для ограниченной территории (в локальной декартовой системе координат и системах изобарических и сигма- координат) и для процессов глобального масштаба. Рассмотрена модель неоднородного поля силы тяжести, предназначенная для использования в математических моделях атмосферы. Предложено уточненное представление нормальной и аномальной составляющих силы тяжести, а также подход к учету влияния атмосферы на гравитационный потенциал.

В написании п. 1.5.1, 1.5.2, 5.4.2 принял участие Н.Н. Солопов, п. 4.2 – А.И. Сучков, п. 5.4.4 – А.В. Глазунов.

Подпрограмма расчета экстремальных значений метеовеличин с заданной обеспеченностью разработана А.И. Сучковым, подпрограмма графического представления результатов расчетов в виде карт – С.А. Родионцевым.

На разных этапах работы существенное содействие замечаниями и советами оказали Г.С. Голицын, Е.П. Борисенков, М.В. Курганский, Ю.С. Соловьев, Л.Т. Матвеев, за что им всем авторы выражают свою искреннюю благодарность.

Глава 1
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ФИГУРЕ ЗЕМЛИ И СИЛЕ ТЯЖЕСТИ

1.1. МОДЕЛИ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Вопросы изучения формы и размеров Земли рассматриваются в специальной дисциплине – теории фигуры Земли.

Под фигурой Земли понимают форму ее внешней поверхности. Однако такое определение требует ряд уточнений. Прежде всего из этого понятия исключается атмосфера Земли и рассматривается только ее твердая и водная оболочки. Но и в этом случае делаются оговорки относительно нечетких границ между водной и твердой оболочками. Для практического использования в качестве фигуры Земли принимают форму поверхности, которая образуется в областях суши физической поверхностью твердой оболочки Земли, а на акватории океанов и морей – их невозмущенной поверхностью.

Но и в таком виде фигура Земли является достаточно сложной поверхностью, которую невозможно описать простыми математическими формулами. Поэтому при решении различных теоретических и практических задач используют ее модели: геоид, квазигеоид, общий земной эллипсоид (ОЗЭ), эллипсоид Красовского и т.д. [1, 3 – 6, 9].

Наиболее близкой к реальной фигуре Земли является геоид, понятие которого в применении к фигуре Земли было введено в 1876 г. немецким геодезистом И. Листингом. Геоид – тело, ограниченное уровенной поверхностью, совпадающей в океане с невозмущенной поверхностью воды, мысленно продолженной под материками таким образом, чтобы направления отвесных линий пересекали эту поверхность во всех ее точках под прямым углом. Поверхность геоида является непрерывной, замкнутой и зависит от распределения масс внутри Земли. Поскольку это распределение неизвестно, поверхность геоида, строго говоря, нельзя определить.

В связи с этим вводится вспомогательная поверхность квазигеоида, совпадающая с геоидом на океанах и морях и незначительно отступающая от поверхности геоида на суше. Расхождение между геоидом и квазигеоидом, как правило, не превосходит 5 см, для горных районов 2 м. Поверхность квазигеоида играет роль уровня моря, она однозначно определяется и от нее ведется отсчет топографических нормальных высот. Так же, как и геоид, квазигеоид не может быть описан конечными математическими соотношениями, поэтому его практически невозможно использовать для обработки геодезических измерений и решения других задач. Для этого необходимо пользоваться более простой математически описываемой поверхностью, но достаточно близкой к квазигеоиду (геоиду). Наиболее простой такой поверхностью является сфера, а более сложной поверхностью – эллипсоид вращения.

На практике принято использовать сферу и два вида эллипсоидов вращения: общий земной эллипсоид и референц-эллипсоид. Наиболее широко используется ОЗЭ – эллипсоид, наилучшим образом представляющий всю Землю в целом. Он определяется следующими условиями:

- совпадением центра эллипсоида с центром масс Земли и плоскости его экватора с плоскостью земного экватора;
- минимумом суммы квадратов отклонений по высоте квазигеоида во всех его точках от поверхности эллипсоида.

Указанные два условия определяют требования к размерам и форме ОЗЭ, а также к его расположению в теле Земли. Для определения параметров ОЗЭ необходимо выполнить геодезические и гравиметрические измерения на всей поверхности Земли. Задача определения параметров ОЗЭ существенно упрощается, если использовать результаты наблюдений искусственных спутников Земли.

Наряду с ОЗЭ в отдельных странах (группе стран) применяют референц-эллипсоиды, размеры и ориентация которых определяются по результатам измерений на какой-либо ограниченной территории. Такие эллипсоиды наилучшим образом соответствуют территориям отдельных стран (континентов), измерения на которых были использованы при их определении. Отличие референц-эллипсоидов от общего земного эллипсоида заключается в несовпадении центров, размеров и ориентации в пространстве. В результате этих несовпадений координаты одних и тех же точек на поверхности Земли, определенные в системах ОЗЭ (геоцентрические) и референц-эллипсоидов (квазигеоцентрические) могут различаться на десятки и даже сотни метров, что при решении многих технических задач нельзя считать несущественным. В России в качестве референц-эллипсоида принят эллипсоид Красовского (ЭК), который является обязательным для использования при всех геодезических работах.

Опишем соотношения между параметрами эллипсоида вращения, используемого в качестве ОЗЭ.

Форма эллипсоида вращения определяется заданием двух параметров: экваториальной, или большой (a), и полярной, или малой (b), полуосями. В практических задачах вместо малой полуоси эллипсоида используют полярное сжатие эллипсоида α или квадрат первого эксцентриситета меридианного эллипса e, которые определяются по формулам

$$\alpha = \frac{a-b}{a}, \; e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}.$$

Эти параметры связаны следующим соотношением

$$e^2 = 2\alpha - \alpha^2.$$

Использовавшиеся в различные годы параметры эллипсоидов, описывающих форму Земли, приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1.

Параметры эллипсоидов, описывающих форму Земли (по [1, 4, 5])

Параметр	Большая полуось a, м		Знаменатель сжатия α	
	значение	СКО	значение	СКО
ОЗЭ–1968	6378137	14	298,256	0,015
ОЗЭ–1977	6378140	4	298,256	0,004
ОЗЭ–1985	6378136	1	298,257	0,0005
ОЗЭ–1990	6378136	1	298,25784	0,00034
ЭК–1940	6378245	60	298,3	1,0

Примечание. СКО – средняя квадратическая ошибка.

В высшей геодезии применяются несколько систем координат.

Начало декартовой геоцентрической системы координат (X, Y, Z) располагается в центре ОЗЭ, ось абсцисс OX лежит на пересечении плоскостей экватора ОЗЭ и нулевого меридиана, ось OZ совпадает с полярной осью Земли, ось OY дополняет систему до правой.

Положение точки в ортогональной криволинейной (геодезической) системе координат (B, λ, h) определяется геодезической широтой B, долготой λ и высотой h. Начало координат располагается в центре ОЗЭ.

Широта B определяется как угол, образуемый нормалью к эллипсоиду в рассматриваемой точке и плоскостью экватора, и отсчитывается от плоскости экватора от 0 до 90° к северу и от 0 до –90° к югу.

Долгота λ есть угол между плоскостями нулевого меридиана и меридиана, проходящего через данную точку. Отсчитывается от нулевого, как правило, гринвичского меридиана от 0 до 360°.

Высота h отсчитывается от ОЗЭ по нормали.

В ортогональной криволинейной (сферической) системе координат (φ, λ, r) начало располагается в центре ОЗЭ, широта определяется углом φ между радиусом-вектором $\vec{r}$ и плоскостью экватора. Долгота совпадает с долготой в геодезической системе координат.

В локальной декартовой системе кооординат (x, y, z) начало располагается на поверхности ОЗЭ, за ось Oz принято направление внутренней нормали к поверхности ОЗЭ в точке наблюдения, за ось Ox – касательную к меридиану, за ось Oy – касательную к первому вертикалу.

На топографических картах и в каталогах координат геодезических пунктов даются так называемые нормальные высоты точек земной поверхности в Балтийской системе. Связь высоты h^{γ} в Балтийской системе с геодезической описывается соотношением [5].

$$h = h^{\gamma} + \zeta,$$

где ζ – высота квазигеоида над ОЗЭ; h – геодезическая высота над ОЗЭ; h^{γ} – высота в Балтийской системе.

Из выражений, описывающих преобразования координат [1, 9], отметим только соотношение, связывающее широты B и φ:

$$\sin(B - \varphi) = e^2 \sin B \cos\varphi \approx \frac{1}{2} e^2 \sin 2B.$$

Разность $B - \varphi$ достигает максимума при $B = 45°$ и равна 11', 8.

1.2. ПОТЕНЦИАЛ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Потенциал силы тяжести (геопотенциал) складывается из потенциала притяжения (гравитационного потенциала) U и потенциала центробежной силы (следствие вращения Земли) Q

$$W = U + Q. \tag{1.1}$$

Точность знаний о фигуре, неоднородности Земли и т.д. является определяющим фактором при расчете потенциала притяжения. В частности, «плоской» Земле соответствует однородное гравитационное поле, шару – центральное, эллипсоиду вращения – нормальное и т.д. В связи с этим потенциал притяжения Земли в произвольной точке на ее поверхности и вне ее представляется приближенно (разложением в ряд сферических функций, системой точечных масс и др. [1, 4 – 6 ,9]).

Потенциал центробежной силы определяется тривиально

$$Q = 0{,}5\,\omega^2 R^2,$$

где ω – угловая скорость вращения Земли; R – расстояние от оси вращения Земли.

Приращение потенциала силы тяжести $\mathrm{d}W$ при перемещении на бесконечно малое расстояние $\mathrm{d}S$ есть работа, которую совершает сила тяжести F_W при перемещении единицы массы на расстояние $\mathrm{d}S$. При движении материальной точки в направлении, перпендикулярном силе тяжести, имеет место

$$W = C,$$

где C – некоторая постоянная.

Приведенное уравнение является общим уравнением уровенных поверхностей силы тяжести. В каждой точке такой поверхности сила тяжести направлена по нормали к этой поверхности. Поверхность жидкости в спокойном состоянии представляет собой такую уровенную поверхность. Примерами уровенных поверхностей могут служить поверхности ОЗЭ и геоида.

В связи со сложностью расчета потенциала силы тяжести в теории фигуры Земли принято из потенциала W реальной Земли выделять некоторую его «правильную» часть W_0, которая была бы достаточно близка к W и могла бы быть вычислена достаточно просто. Эта часть называется нормальным потенциалом. Он имеет вспомогательное значение и используется для того, чтобы вместо вычисления полного значения потенциала силы тяжести Земли можно было бы ограничиться определением его малых отклонений от нормального.

Возмущающим потенциалом T Земли называется разность между действительным W и нормальным W_0 потенциалами силы тяжести Земли

$$T = W - W_0.$$

Рассмотрим модель фигуры Земли – ОЗЭ. Из его определения следует, что его центробежный потенциал и центробежный потенциал Земли Q в точности совпадают. Тогда, учитывая, что

$$W = U + Q,\ W_0 = U_0 + Q,$$

где U, U_0 – потенциалы силы притяжения Земли и ОЗЭ соответственно, получаем

$$T = U - U_0.$$

Отметим, что ОЗЭ и его гравитационное поле имеют прежде всего значение как удобная аппроксимация реальной фигуры Земли и ее гравитационного поля. Когда же аппроксимация реальной фигуры Земли и ее поля общим земным эллипсоидом и его полем становится недостаточной, последние сохраняют свое значение как удобная система отсчета при решении краевых задач геодезии и геофизики. Поэтому из элементов реальной фигуры Земли и ее гравитационного поля выделяют нормальную часть, для которой создана совершенно строгая теория решения указанных задач. После этого находят поправки к решениям, соответствующим ОЗЭ. При этом возмущающий потенциал по сравнению с нормальным оказывается малой величиной порядка квадрата сжатия, что позволяет членами порядка T^2 обоснованно пренебрегать. Следует заметить, что если в качестве W_0 принять потенциал простейшей фигуры – шара, – то отношение T/W_0 оказалось бы величиной только порядка сжатия, что обусловило бы существенное усложнение вычисления возмущающего потенциала [1, 4, 9].

1.3. СИЛА ТЯЖЕСТИ

1.3.1. Общая характеристика силы тяжести

Под силой тяжести понимается сила, которая действует на тело, участвующее вместе с Землей в ее вращении вокруг своей оси, и равна векторной сумме силы притяжения $\vec{F}_U$ и центробежной силы $\vec{F}_Q$:

$$\vec{F}_W = \vec{F}_U + \vec{F}_Q,$$

где $\vec{F}_U = -f\dfrac{mM}{r^3}\vec{r}$, $\vec{F}_Q = \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$, M – масса притягивающей материальной точки; m – масса притягиваемой материальной точки; f – гравитационная постоянная; $\vec{r}$ – радиус-вектор, направленный из начала координат, помещенного в центр притягивающей массы, в притягиваемую точку; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения Земли.

Проекции силы тяжести $\vec{F}_U$ могут быть определены как частные производные от потенциала W,

$$F_{U_X} = -\frac{\partial W}{\partial X}, \quad F_{U_Y} = -\frac{\partial W}{\partial Y}, \quad F_{U_Z} = -\frac{\partial W}{\partial Z}.$$

На практике обычно используется не сила тяжести, а ускорение свободного падения $\vec{g}$, т.е. сила тяжести, действующая на единицу массы. Наиболее распространенными единицами измерения ускорения свободного падения являются Гал и миллигал (мГал):

$$1 \text{ Гал} = 1 \text{ см/с}^2; \; 1 \text{ мГал} = 10^{-3} \text{ Гал} = 10^{-5} \text{ м/с}^2.$$

На поверхности Земли сила тяжести может изменяться в зависимости от различных причин: от изменения скорости вращения Земли, от перемещений масс в атмосфере, от изменения уровня океана, от вертикальных движений земной коры (т.е. изменения высот) и, наконец, от перемещения масс внутри Земли. Последнее может быть как естественным, так и антропогенным (например, выработки породы в шахтах). Изменение силы тяжести будет также происходить, если гравитационная постоянная меняется со временем.

Ускорение свободного падения на поверхности Земли изменяется от 978 до 983 Гал. Центробежное ускорение изменяется от нуля у полюсов до 3,4 Гал у экватора. В целом из двух составляющих g – притяжения и центробежного – последнее составляет менее $0{,}005g$. Тем не менее, именно изменение центробежного ускорения в основном определяет изменение свободного падения на земной поверхности. К этому эффекту добавляется еще влияние сжатия Земли, также увеличивающее значение g у полюсов, влияние аномалий силы тяжести, земной атмосферы (табл. 1.2).

Условно указанные составляющие можно отнести к стационарной части неоднородного поля силы тяжести. К нестационарной следует отнести притяжение Луны, Солнца и планет Солнечной системы, а также вариации угловой скорости вращения Земли, перемещения центра масс Земли и др. (см. табл. 1.2). Кроме того, на движущееся по поверхности Земли тело (в т.ч. на атмосферу и гидросферу) действует дополнительное центробежное ускорение, которое пропорционально V_n – составляющей скорости движения вдоль параллели:

$$\Delta F_Q = 2V_n \, \omega \cos B,$$

где B – геодезическая широта.

Этот эффект (эффект Этвеша [1, 2]) приводит к уменьшению силы тяжести при движении на восток и ее увеличению при движении на запад.

Таблица 1.2

Значения вариаций g (по [1, 9])

Характеристика поля силы тяжести	Значение, мГал
Среднее значение g на поверхности Земли	979700
Полное изменение g от полюса к экватору	5200
Изменение g за счет центробежной силы	3400
за счет сплюснутости	1800
Максимальные аномалии силы тяжести	600
Изменение g при перемещении по высоте на 1 км	300
Изменение g за счет эффекта Этвеша (средние широты)	
для атмосферных движений	50
для океанических течений	5
Влияние атмосферы Земли	0,900
Амплитуда лунных возмущений	0,165
Амплитуда солнечных возмущений	0,076
Вариации угловой скорости вращения Земли	0,060
Годовое перемещение центра масс Земли	0,010
Упругие деформации Земли	0,002
Глобальные перемещения атмосферных масс	0,0013
Сезонные изменение уровня мирового океана	0,0006
Перестройка земной коры	0,00005

Произведенные теоретические оценки [1] показывают, что изменение силы тяжести в результате вариаций скорости вращения Земли может достигать 30–60 мкГал. Перемещение центра масс Земли на 3 см в год вызывает изменение g порядка 10 мкГал. Перестройка земной коры приводит к ничтожно малым изменениям g (примерно 0,05 мкГал). Сезонные изменения уровня Мирового океана могут вызвать изменения силы тяжести до 0,6 мкГал. Глобальные перемещения атмосферных масс дают изменение силы тяжести в 1,3 мкГал. Упругие деформации Земли, возникающие вследствие вертикальных перемещений коры на несколько миллиметров в год, могут вызывать вариации силы тяжести в 1–2 мкГал. Перемещение масс, вызванное суммой геодинамических явлений, может привести к смещению центра масс на величину порядка 10 мм в год, что в свою очередь вызовет изменение силы тяжести на 2–3 мкГал. По порядку величин ожидаемые эффекты находятся на грани чувствительности современной аппаратуры. Тем не менее, интерпретация этих данных позволяет решать ряд задач геодинамики, связанных с движением полюсов, изменением широт и долгот, неравномерностью вращения Земли, перемещением центра масс, а также судить о процессах, происходящих внутри Земли.

Анализ табл. 1.2 свидетельствует о высокой точности измерений силы тяжести, достигнутой в настоящее время.

1.3.2. Нормальная сила тяжести

Возможность определения нормальной силы тяжести, т.е. силы тяжести для эллипсоида вращения, следует из теоремы Стокса [1, 9]: если тело известной массы M равномерно вращается вокруг неизменной оси со скоростью ω и если задана уровневая поверхность S силы тяжести, целиком охватывающая массу тела, то потенциал силы тяжести и его первые производные будут однозначно определены на поверхности S и во всем внешнем пространстве.

Теорема Стокса показывает принципиальную возможность определения потенциала силы тяжести и его производных, если известна форма внешней (охватывающей всю массу тела) уровенной поверхности и общая масса тела, без привлечения каких-либо гипотез о его внутреннем строении. Определение потенциала по этим условиям составляет задачу Стокса.

Задача Стокса неразрешима в конечном виде для произвольной поверхности S, однако для простейших поверхностей, таких, например, как эллипсоид вращения, она решена строго и в замкнутой форме.

Пусть поверхность S – эллипсоид вращения с экваториальной осью a_e и полярной осью b. Предположим, что W_0 – потенциал силы тяжести, определенный в результате решения задачи Стокса. Тогда можно найти выражение для нормальной силы тяжести γ на поверхности эллипсоида. Для этого надо сначала найти производную от W_0 по нормали к поверхности эллипсоида

$$\gamma = -\frac{\partial W_0}{\partial n},$$

и затем учесть, что координаты, от которых зависит γ, удовлетворяют уравнению поверхности эллипсоида вращения.

Не приводя громоздкого вывода, напишем в окончательном виде точное выражение нормальной силы тяжести на поверхности эллипсоида вращения (формула Сомильяна)

$$\gamma = (a\gamma_e \cos^2 B + b\gamma_p \sin^2 B)(a^2 \cos^2 B + b^2 \sin^2 B)^{0,5},$$

где γ_e, γ_p – значения нормальной силы тяжести на экваторе и на полюсе соответственно.

После разложения полученного выражения в ряд и простых преобразований с удержанием членов второго порядка относительно сжатия эллипсоида получаем:

$$\gamma = \gamma_e (1 + \beta \sin^2 B - \beta_l \sin^2 2B).$$

Эта формула с коэффициентами γ_e, β, β_1 получила название формулы нормальной силы тяжести. Она дает значения ускорения свободного падения в зависимости от широты точки на уровенной поверхности Земли, представляемой в виде эллипсоида вращения.

Числовые коэффициенты формулы нормальной силы тяжести выводились многими авторами. В «Параметрах Земли 1990 г.» [5] рекомендуется к использованию следующая формула нормальной силы тяжести:

$$\gamma = (\gamma_e + \delta_{\gamma a})\,(1 + 0{,}0053024 \sin^2 B - 0{,}0000058 \sin^2 2B), \quad (1.3.1)$$

где γ_e, $\delta_{\gamma a}$ приведены в табл. 1.4.

1.3.3. Аномалии силы тяжести

При изучении гравитационного поля его удобно разделить на «правильную» часть, так называемую нормальную (см. п. 1.3.2), и аномальную. Отклонение измеренного значения ускорения свободного падения в данной точке от вычисленного по формуле нормального значения силы тяжести называется аномалией силы тяжести. Аномалия определяется как разность

$$\Delta g = g - \gamma.$$

Из таблицы 1.2 видно, что аномалии g изменяются на земной поверхности всего на несколько сотен миллигал. Если значения g и γ в этой формуле заданы для одной и той же точки, аномалия называется чистой. Однако обычно нормальное значение ускорения свободного падения γ задается на поверхности эллипсоида относимости, соответствующего нормальному распределению силы тяжести, т.е. на ОЗЭ, тогда как g определяется в точках физической поверхности Земли. Значит, для того чтобы вычислить аномалию ускорения свободного падения, нужно или наблюденное значение g отнести к эллипсоиду, или нормальное значение перенести в точку наблюдения. Такая операция называется редуцированием, поправки, вносимые при этом – редукциями, а аномалия – смешанной.

Для редуцирования необходимо знать высоту точки наблюдения над эллипсоидом относимости и вертикальный градиент ускорения свободного падения. Принципиально редуцировать можно наблюденное значение g на эллипсоид, а нормальное – на физическую поверхность Земли. Второй способ редуцирования и образования аномалий является преимущественным.

Для того чтобы от смешанных аномалий перейти к чистым, нужно сначала ввести поправку на аномалию высоты (превышение квазигеоида над ОЗЭ) ζ.

Смешанные аномалии, получаемые в результате гравиметрических работ, играют важную роль в теории фигуры Земли, позволяя получить аномалии высот, по которым при известных эллипсоиде и нормальных высотах, т.е. высотах, отсчитываемых от поверхности квазигеоида, с любой подробностью можно построить фигуру физической поверхности Земли. Важную роль играют они и в геофизических проблемах, в том числе в гравитационной разведке. Они отображают распределение плотностей в верхних слоях Земли. Кроме того, аномалии высоты ζ изменяются плавно и даже на больших площадях незначительно, поэтому поправка, приводящая смешанную аномалию к чистой, в большинстве случаев может считаться постоянной и не приниматься во внимание при геологическом истолковании аномалий.

Аномалия высоты связана с возмущающим потенциалом формулой Брунса

$$\zeta = T / \gamma. \tag{1.3.2}$$

В случаях, когда при образовании аномалий не вводится никаких поправок, кроме чистого переноса значения нормального ускорения γ в точку, отстоящую от физической поверхности Земли на аномалию высоты, получаются так называемые аномалии в свободном воздухе. Это название историческое. Оно означало, что редукция происходит без учета влияния каких-либо промежуточных масс Земли, а так как влияние воздуха в эпоху, когда была предложена редукция, не учитывалось, то и считалось, что приведение происходит в чистом воздухе, свободном от масс Земли.

Образованные описанным способом аномалии могут усложняться введением различных поправок, в зависимости от которых аномалии получают свое название. Сглаживание рельефа в точке наблюдения и добавление к редукции в свободном воздухе поправок на влияние рельефа приводит к аномалиям Фая. Вычитание из аномалии в свободном воздухе влияния масс промежуточного слоя между физической поверхностью Земли и квазигеоидом приводит к аномалиям Буге. Вычитание влияния двойного слоя – к аномалиям Прея, снятие влияния рельефа по всей Земле – к полной топографической редукции.

Зависимость гравитационного поля от строения земной коры весьма сложная. В целом поле аномалий силы тяжести отображает неоднородность внутреннего строения Земли, в особенности ее верхних слоев. Так, малые, расположенные близко к поверхности, неоднородные массы могут вызвать небольшие локальные аномалии. Наоборот, большие региональные аномалии всегда вызываются крупными неоднородностями глубоко расположенных масс.

В случае представления аномального ГПЗ в виде разложения по сферическим функциям низкие гармоники будут характеризовать крупные глобальные аномалии, а высокие – более локальные. Считают [1], что неровности границы внутреннего ядра могут проявляться в первых четырех гармониках. Гармоники от 4-го до 12-го порядков, скорее всего, связаны со строением Земли в глубинных частях мантии. Неоднородности в верхней мантии отображаются в гармониках выше 12-го порядка. Например, по вычислениям А. Кука и Р. Аллана гармоники от 2-го до 6-го порядка вызваны источниками, расположенными на глубине 1600–1700 км, а гармоники от 7-го до 22-го порядка – источниками на глубинах 250–350 км.

Для интерпретации крупных региональных аномалий удобно использовать потенциал силы тяжести W, который изменяется обратно пропорционально расстоянию. Градиент потенциала W_z изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния. Эта характеристика более чувствительна к близким массам, но быстро убывает с расстоянием. Вторая производная потенциала W_{zz}, убывая обратно пропорционально кубу расстояния, очень чувствительна к близким малым массам. Поэтому при изучении глубинных неоднородностей используется поле возмущающего потенциала T, или высот квазигеоида ζ, или уклонений отвесной линии ξ, η. В табл. 1.3 представлены глубины неоднородностей.

Таблица 1.3.

Расчетная глубина залегания масс, вызывающих крупные региональные аномалии

Аномалия	Δg, мГал	Высота ζ, м	Глубина масс, вызвавших аномалию, км
Индийская	–50	–110	930
Австралийская	–30	–70	910
Северо-Атлантическая	30	68	1000
Калифорнийская	–30	–50	840
Карибская	–40	–60	700

В малоподвижных зонах земной коры, называемых платформами, аномальное поле обычно бывает относительно гладким. Границе платформы, как правило, соответствует зона больших градиентов аномалий силы тяжести. В геосинклинальных областях аномальное поле несравненно более сложное и интенсивное. К геосинклиналям относятся области больших амплитуд и скоростей колебательных движений земной коры и одновременно больших контрастов и больших градиентов тех же амплитуд и скоростей.

В геосинклиналях наблюдаются протяженные зоны больших градиентов аномалий силы тяжести, резкие переходы от минимумов к максимумам. Преобладают здесь отрицательные аномалии, особенно в молодых геосинклиналях, где еще не наступило равновесие. Вообще знак аномалий указывает не только на состояние определенных регионов, но и на происходящие в них процессы. Отрицательное поле аномалий означает недостаток масс в данной области, т.е. преуменьшенное давление, из-за чего тяжелые слои вещества должны подниматься наверх. Наоборот, в случае положительных аномалий имеет место избыток давления и вещество должно опускаться. В соответствии с происходящими процессами аномалии силы тяжести должны изменяться. Они не могут быть застывшими, как не является застывшей сама Земля. Не только характер и знак аномалий указывают на происходящие в недрах Земли процессы – существуют и непосредственно наблюдаемые изменения силы тяжести во времени.

1.3.4. Уклонение отвесной линии

Уровенная поверхность определяется тем условием, что силовые линии всегда перпендикулярны ей. Так как геоид есть уровенная поверхность, то отвесные линии всегда перпендикулярны геоиду. Нормальное гравитационное поле соответствует эллипсоидальной «нормальной» Земле. Нормальный эллипсоид не совпадает с геоидом и не подобен ему, но различие в наклонах их поверхностей незначительно. Угол ϑ между нормалями к геоиду $\overline{N}$ и общему земному эллипсоиду $\overline{n}$ называется абсолютным уклонением отвесной линии. Сказанное верно для поверхности океанов, достаточно точно совпадающей с геоидом. На континентах уклонение отвеса есть угол между направлением отвеса и силовой линии нормального гравитационного поля в точках физической поверхности Земли.

Поскольку направление отвесных линий определяется силой тяжести, а уклонения от них – аномалиями силы тяжести, то, зная эти аномалии, можно найти и сами уклонения. В самом деле: уклонение отвесной линии есть угол между нормалями к уровенным поверхностям реального и нормального гравитационного поля. Сила тяжести g направлена по силовой линии в точке наблюдения. Разложим ее на составляющую γ, перпендикулярную поверхности нормального эллипсоида, и $g_s = \dfrac{\partial W}{\partial s}$ – касательную к эллипсоиду, равную градиенту в направлении s. Отношение g_s/γ определяет уклонение отвесной линии:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{g_s}{\gamma},$$

где ϑ – полное уклонение отвесной линии.

Уклонение отвесной линии – всегда малый угол. Поэтому с точностью до квадрата малого угла ϑ

$$\vartheta = \frac{g_s}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial W}{\partial s}.$$

Учитывая, что

$$W = U + T,$$

уклонение отвесной линии можно записать следующим образом:

$$\vartheta = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial T}{\partial s}\right).$$

Однако производная нормального потенциала по направлению касательной равна нулю, а возмущающий потенциал по теореме Брунса есть $T = \gamma\,\zeta$, следовательно,

$$\vartheta = \frac{\partial \zeta}{\partial s}.$$

Это уравнение показывает, что уклонение отвесной линии есть производная от превышения квазигеоида над эллипсоидом по направлению наибольшего изменения потенциала на эллипсоиде, или, что то же самое, наибольшего изменения аномалии высот. Обычно уклонения отвесных линий раскладывают на составляющие в плоскостях меридиана и первого вертикала

$$\xi = -\frac{1}{R}\frac{\partial \zeta}{\partial \varphi}, \qquad \eta = -\frac{1}{R\cos\varphi}\frac{\partial \zeta}{\partial \lambda}, \tag{1.3.3}$$

где R, φ, λ – сферические координаты точки, в которой определяется уклонение отвесной линии.

Знак минус здесь взят условно, считая, что положительные уклонения отвеса увеличивают координаты. Поэтому поправки должны быть отрицательными.

1.3.5. Главные радиусы кривизны

Первые производные потенциала силы тяжести по осям координат являются проекциями силы тяжести на координатные оси. Производная по направлению нормали к уровенной поверхности есть полная составляющая силы тяжести. Рассмотрим теперь смысл вторых производных потенциала силы тяжести в локальных декартовых координатах. Тогда

$$\frac{\partial W}{\partial z} = g_z, \quad \frac{\partial W}{\partial x} = g_x, \quad \frac{\partial W}{\partial y} = g_y.$$

Дифференцируя эти выражения по направлениям осей координат, получим формулы вторых производных потенциала силы тяжести:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x} = \frac{\partial g_z}{\partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial z} = W_{zx}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial x} = W_{xx},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial y} = \frac{\partial g_z}{\partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial z} = W_{zy}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial y} = \frac{\partial g_y}{\partial y} = W_{yy},$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial z} = \frac{\partial g_z}{\partial z} = W_{zz}, \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial x} = \frac{\partial g_y}{\partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial y} = W_{xy}.$$

Две первые формулы левого столбца дают изменение силы тяжести при перемещении точки в горизонтальных направлениях, т.е. горизонтальные градиенты силы тяжести. Третья формула дает вертикальный градиент силы тяжести.

Формулы правого столбца характеризуют кривизну уровенной поверхности квазигеоида. В самом деле, если поверхность задана уравнением $W(x, y, z) = C$, то ее кривизна определяется формулой [1, 3, 9]

$$\frac{1}{r_\alpha}\frac{\partial W}{\partial z} = -\left(W_{xx}\cos^2\alpha + W_{xy}\sin 2\alpha + W_{yy}\sin^2\alpha\right),$$

где α – азимут сечения; r_α – радиус кривизны сечения по азимуту α.

Рассмотрим сечения в плоскости меридиана и первого вертикала. В первом случае ($\alpha = 0$)

$$\frac{1}{r_M} = -\frac{1}{g_z}W_{xx}, \tag{1.3.4}$$

во втором ($\alpha = \pi/2$)

$$\frac{1}{r_B} = -\frac{1}{g_z}W_{yy}, \tag{1.3.5}$$

где $r_М$ и $r_В$ – радиусы кривизны в плоскости меридиана и первого вертикала соответственно.

Сечения в плоскости меридиана и первого вертикала называются главными сечениями поверхности. Соответственно радиусы $r_М$ и $r_В$ – главными радиусами кривизны.

Разность W_Δ вторых производных по x и y характеризует изменение кривизны в точке в зависимости от азимута:

$$W_{yy} - W_{xx} = W_\Delta = -g_z\left(\frac{1}{r_M} - \frac{1}{r_B}\right).$$

Разность W_Δ определяет также разность кривизны главных сечений, т.е. отклонение от сферичности.

1.4. «НОРМАЛЬНАЯ» ЗЕМЛЯ

В результате обобщения формул нормального значения силы тяжести появилось понятие «нормальной» Земли. В качестве таковой принимается обычно ОЗЭ – уровенный эллипсоид вращения, внешняя поверхность которого является эквипотенциальной поверхностью нормального поля силы тяжести [1, 4, 9]. Выбор параметров «нормальной» Земли производится при условии наилучшего соответствия фигуре геоида: центр эллипсоида вращения должен совпадать с центром масс Земли, полярная ось инерции – с осью вращения реальной Земли. Кроме того, задаются большая полуось и сжатие эллипсоида и некоторое стандартное напряжение силы тяжести, характеризующееся коэффициентами первых зональных гармоник разложения потенциала по сферическим функциям [5].

Таким образом, «нормальная» Земля представляет систему фундаментальных постоянных, наиболее точно характеризующих гравитационное поле и фигуру Земли. В табл. 1.4 приведены эти постоянные, основу которых составили значения рекомендованные Международным союзом геодезии и геофизики. Значения большой полуоси и сжатия ОЗЭ получены из обработки измерений отечественных космических аппаратов. Номинальное значение скорости вращения Земли рекомендовано Международным астрономическим союзом и принято для согласования фундаментальных постоянных. Неравномерность вращения Земли учитывается с использованием данных, публикуемых в бюллетенях "Всемирное время".

При представлении гравитационного поля и фигуры Земли по данным наземных наблюдений в качестве основных параметров принимаются a_e, γ_e, α. При использовании спутниковых данных обычно принимаются параметры a_e, fM, J_2.

Таблица 1.4

Фундаментальные постоянные (по [5])

Название постоянной	Обозначение постоянной	Единица измерения	Значение	Средняя квадратическая ошибка
Фундаментальные геодезические постоянные				
Угловая скорость вращения Земли	ω	рад/с	$7{,}292115 \cdot 10^{-5}$	
Геоцентрическая гравитационная постоянная, включая атмосферу	fM	$м^3\ с^{-2}$	$398\ 600{,}44 \cdot 10^9$	$0{,}003 \cdot 10^9$
Геоцентрическая гравитационная постоянная атмосферы	fM_a	$м^3\ с^{-2}$	$0{,}35 \cdot 10^9$	$0{,}003 \cdot 10^9$
Параметры ОЗЭ				
Большая полуось	a_e	м	6 378 136	1
Знаменатель сжатия	$1/\alpha$	–	298,25784	0,00034
Ускорение свободного падения на экваторе	γ_e	мГал	978 032,8	0,2
Поправка в γ_0 на притяжение атмосферы на уровне моря	$\delta_{\gamma a}$	мГал	–0,9	0,1
Другие постоянные				
Гармонический коэффициент второй степени	J_2	–	$1\ 082\ 625{,}7 \cdot 10^{-9}$	$2{,}2 \cdot 10^{-9}$
Гармонический коэффициент четвертой степени	J_4	–	$-2370{,}9 \cdot 10^{-9}$	$2 \cdot 10^{-9}$
Нормальный потенциал на поверхности ОЗЭ	W_0	$м^2\ с^{-2}$	62636861	10

1.5. ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ

При расчете потенциала силы тяжести и его производных основную трудность представляет определение гравитационного потенциала. Ниже рассматриваются основные методы представления потенциала гравитационного поля Земли, наиболее широко используемые в настоящее время.

1.5.1. Разложение в ряд по сферическим функциям

Потенциал гравитационного поля Земли вне поверхности, охватывающей гравитирующие массы, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0. \tag{1.5.1}$$

Решение уравнения (1.5.1) ищется методом разделения переменных в виде

$$U(r,\theta,\lambda) = R(r)S(\theta,\lambda).$$

Не приводя громоздких преобразований (см., например [2, 3]), выпишем в окончательном виде – уравнение Эйлера для определения $R(r)$

$$r^2 R'' + 2rR' + cR = 0, \tag{1.5.2}$$

а также уравнение для $S(\theta,\lambda)$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial S}{\partial\theta}\right] + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 S}{\partial\lambda^2} - cS = 0. \tag{1.5.3}$$

Из теории решения дифференциальных уравнений в частных производных известно, что решениями уравнения (1.5.3), удовлетворяющими условию однозначности и ограниченности в каждой точке некоторой сферы, являются сферические функции. Причем эти решения могут быть получены только при $c = n\ (n + 1)$, где n – целое положительное число, соответствующее порядку системы фундаментальных сферических функций. Число различных сферических функций n-го порядка равно $2n + 1$. Иначе говоря, каждому $n = 0,\ldots, \infty$ соответствует $m = 2n + 1$ сферических функций, удовлетворяющих уравнению (1.5.3).

Решениями уравнения (1.5.2) [при $c = n(n + 1)$] являются функции r^n и $r^{-(n+1)}$. Тогда частными решениями решения уравнения Лапласа (1.5.1) являются функции

$$r^n \cdot S_{nk}(\theta,\lambda), \tag{1.5.4}$$

$$r^{-(n+1)} \cdot S_{nk}(\theta,\lambda), \tag{1.5.5}$$

где $n = 0,\ldots, \infty$, $k = -n,\ldots, n$.

Следовательно, любая функция, удовлетворяющая уравнению Лапласа (1.5.1), может быть представлена разложением в виде линейной комбинации функций (1.5.4) и (1.5.5). При построении такого разложения для потенциала гравитационного поля Земли формулируются дополнительные условия, которым должна удовлетворять функция U:

$$U \to 0 \text{ при } r \to \infty,$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{r}\Big|_{r\to R} = -\Delta g,$$

где R – радиус-вектор поверхности ОЗЭ; Δg – смешанная аномалия силы тяжести на физической поверхности Земли.

В итоге разложение потенциала притяжения Земли имеет вид

$$U = \frac{fM}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{N}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)\right] P_{nm}(\sin\varphi),$$

где fM – геоцентрическая гравитационная постоянная; C_{nm} ,S_{nm} – гармонические коэффициенты, характеризующие отличие реального гравитационного поля от центрального; a_e – большая полуось общеземного эллипсоида; P_{nm} (sinφ) – присоединенный полином Лежандра n-й степени и m-го порядка; λ,φ – геоцентрические долгота и широта; r – расстояние от центра Земли. N – порядок разложения.

Потенциал притяжения нормальной Земли, согласно [4], определяется по формуле

$$U_0 = \frac{fM}{r}(1 + C_{20}(\frac{a_e}{r})^2 P_{20}(\sin\varphi) + C_{40}(\frac{a_e}{r})^4 P_{40}(\sin\varphi),$$

где $C_{20} = -484165{,}0\cdot10^{-9}$; $C_{40} = 790{,}3\cdot10^{-9}$.

Нормальный потенциал силы тяжести представляется в виде

$$W_0 = \frac{fM}{r}[1 + C_{20}(\frac{a_e}{r})^2 P_{20}(\sin\varphi) + C_{40}(\frac{a_e}{r})^4 P_{40}(\sin\varphi)] + \frac{\omega^2 r^2}{2}\cos^2\varphi.$$

Возмущающий потенциал T и проекции силы притяжения, обусловленной им, вычисляются по формулам [4]:

$$T = \frac{fM}{r}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{a_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n}(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\sin\varphi), \tag{1.5.6}$$

$$g_r = -\frac{fM}{a_e r}\sum_{n=2}^{N}(n+1)\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n}(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)P_{nm}(\sin\varphi),$$

$$g_\varphi = -\frac{fM}{a_e r}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1} \sum_{m=0}^{n}(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)P'_{nm}(\sin\varphi),$$

$$g_\lambda = \frac{fM}{a_e r\cos\varphi}\sum_{n=2}^{N}\left(\frac{a_e}{r}\right)^{n+1}\sum_{m=0}^{n}\left(-C_{nm}\sin m\lambda + S_{nm}\cos m\lambda\right)mP_{nm}(\sin\varphi),$$

где $P'_{nm}(\sin\varphi) = -\{m\mathrm{tg}\varphi P_{nm}(\sin\varphi) - [\delta_m(n-m)(n+m+1)]^{0,5}P_{n,m+1}(\sin\varphi)\}$,

$$P_{nm}(\sin\varphi) = \begin{cases} 0 \ \text{при} \quad n<m, \qquad 1 \ \text{при} \quad n=m=0. \\ \mathrm{P}_{n-1,m-1}(\sin\varphi)\cos\varphi\left[\dfrac{2n+1}{2n}\dfrac{1}{\delta_{m-1}}\right]^{0,5} \ \text{при} \quad n=m\neq 0, \\ P_{n-1,m}(\sin\varphi)\sin\varphi\left[\dfrac{4n^2-1}{n^2-m^2}\right]^{0,5} - \\ - P_{n-2,m}(\sin\varphi)\left[\dfrac{((n-1)^2-m^2)(2n+1)}{(n^2-m^2)(2n-3)}\right]^{0,5} \ \text{при} \ n>m \end{cases}$$

$$\delta_m = \begin{cases} 0{,}5 \quad \text{при} \quad m=0, \\ 1 \quad \text{при} \quad m\neq 0. \end{cases}$$

Коэффициенты разложения по сферическим функциям C_{mn}, S_{mn} до 22-го и до 36-го порядка приведены в [1, 5] соответственно.

Число гармоник n-го порядка равно $2n + 1$. Тогда общее число гармоник K в разложении порядка N определяется формулой

$$K = \sum_{n=0}^{N}(2n+1) = (N+1)^2.$$

Например, при использовании разложения 36-го порядка, согласно этой формуле, в памяти ЭВМ необходимо хранить 1369 коэффициентов. Другой существенный недостаток использования представления гравитационного поля Земли в виде рядов сферических функций связан с необходимостью вычисления сферических функций высоких порядков через функции более низких порядков по рекуррентным формулам [1, 9]. Применение рекуррентных формул высоких порядков в численных расчетах требует больших затрат машинного времени. Эти недостатки не позволяют использовать представление гравитационного поля Земли по сферическим функциям в тех случаях, когда существуют ограничения по памяти ЭВМ и требуется высокая оперативность расчетов.

Необходимо отметить, что порядок разложения связан с уровнем осреднения значений ускорения силы тяжести. Так, разложение 36-го порядка соответствует знанию осредненных значений ускорения силы тяжести в трапециях со сторонами, равными 5° по широте (на экваторе) и долготе.

Простейшим критерием соответствия уровня осреднения значений ускорения силы тяжести порядку разложения по сферическим функциям может быть следующий [1, 4]:

$$N = \frac{180^o}{S},$$

где S – сторона трапеции, по которой производится осреднение.

Указанными обстоятельствами определяется пригодность представления гравитационного поля Земли в виде разложения по сферическим функциям (1.5.6) для решения конкретных прикладных задач.

Стремление к повышению точности представления потенциала ГПЗ по сферическим функциям ведет к построению разложений все возрастающих порядков. В последнее время появились даже разложения до 180-го порядка и выше. Однако пока такой результат достигается лишь формально и является неустойчивым к погрешностям задания коэффициентов разложения. Дело в том, что ошибки определения коэффициентов высоких порядков превосходят само значение коэффициента. Поэтому при суммировании разложений высоких порядков результат будет существенно искажаться за счет этих ошибок.

1.5.2. Системы точечных масс

Метод представления гравитационного поля Земли рядом сферических функций, который изложен в п. 1.5.1, дает надежный результат лишь для низких гармоник. Его трудно использовать для детальной аппроксимации гравитационного поля Земли, так как ряды сферических функций сходятся очень медленно, и требуется большой объем равномерно распределенных по поверхности Земли измерений.

В качестве более гибкого и имеющего простую формульную схему расчета гравитационного ускорения был предложен метод моделирования гравитационного поля Земли системой точечных масс. Такой метод особенно удобен при представлении гравитационного поля в отдельных частях пространства, но может использоваться и во всем пространстве.

Отправным пунктом метода представления гравитационного поля Земли системой точечных масс является закон всемирного тяготения [1, 4]. Особенностью использования этого закона при моделировании гравитационного поля Земли является рассмотрение системы, состоящей из конечного числа N материальных точек M_1, M_2, ..., M_N, которые будем считать притягивающими центрами. Пусть m_i, X_i, Y_i, Z_i – массы и координаты в системе координат $OXYZ$ точек $M(i = 1, 2, ..., N)$. Пусть $P(X, Y, Z)$ есть материальная точка единичной массы, не совпадающая ни с одной из M_i. Обозначим расстояния от точек M_i до точки P через

$$\rho_1 = \sqrt{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2}\ .$$

Рассмотрим равнодействующую сил притяжения, действующих на точку P со стороны системы материальных точек M_i. Ее проекции определятся формулами

$$\begin{aligned} F_X &= \sum_{i=1}^{N} F_{X_i} = f\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i(X_i - X)}{\rho_i^3};\\ F_Y &= \sum_{i=1}^{N} F_{Y_i} = f\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i(Y_i - Y)}{\rho_i^3};\\ F_Z &= \sum_{i=1}^{N} F_{Z_i} = f\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i(Z_i - Z)}{\rho_i^3}. \end{aligned} \tag{1.5.7}$$

Величины, определяемые этими соотношениями и рассматриваемые как функции координат точки P, являются частными производными от некоторой силовой функции U:

$$U = \sum_{i=1}^{N} U_i = f\sum_{i=1}^{N}\frac{m_i}{\rho_i}.$$

Вводя обозначение

$$M_i = f\,m_i$$

и деля левую и правую части в формулах (1.5.7) на единицу массы, получим компоненты ускорения силы притяжения в точке P:

$$
\left.
\begin{aligned}
g_X &= -\sum_{i=1}^{N} \frac{M_i (X - X_i)}{\rho_i^3};\\
g_Y &= -\sum_{i=1}^{N} \frac{M_i (Y - Y_i)}{\rho_i^3};\\
g_Z &= -\sum_{i=1}^{N} \frac{M_i (Z - Z_i)}{\rho_i^3}.
\end{aligned}
\right\} \qquad (1.5.8)
$$

Таким образом, с помощью формул (1.5.8) можно определить составляющие ускорения силы притяжения, создаваемой системой N материальных точек. Для того чтобы притяжение рассматриваемой системы N материальных точек соответствовало притяжению Земли, необходимо обеспечить выполнение условия

$$
\sum_{i=1}^{N} M_i = M_З,
$$

где $M_З$ – масса Земли.

При получении характеристик притягивающих масс дополнительно учитывают совпадение главных и центральных моментов инерции Земли и системы точечных масс.

Потенциал притяжения «нормальной» Земли с использованием семи точечных масс, согласно [5], вычисляется по формуле

$$
U_0 = fM \sum_{i=1}^{7} \frac{\varepsilon_i}{\rho_i},
$$

где ε_i – отношение i-й точечной массы к массе Земли.

В сферической системе координат долготы λ, а в прямоугольной системе координаты X, Y точечных масс равны нулю.

Возмущающий потенциал в произвольной точке поверхности Земли и вне ее вычисляется по формуле [5]:

$$
T = fM \sum_{i=1}^{N} \frac{\varepsilon_i}{\rho_i}; \qquad (1.5.9)
$$

где N – число точечных масс. Их параметры для двух глобальных моделей ($N = 320$ и 60) приведены в [5].

Проекции силы гравитационного притяжения Земли на оси сферической системы координат могут быть рассчитаны путем дифференцирования выражения (1.5.9).

Для ряда научно-практических задач требуется более точное представление гравитационного поля Земли в некоторых областях внешнего пространства по сравнению с другими областями, где оно может быть представлено существенно менее точно.

Такое представление возмущающего потенциала Земли может быть получено, если модель системы точечных масс будет включать глобальную $T_{\text{гл}}$, региональную $T_{\text{рег}}$ и локальную $T_{\text{лок}}$ части.

Глобальная часть модели представляет возмущающий потенциал в среднем по всей Земле. С помощью этой части модели представляются наиболее крупные и протяженные аномалии Земли. Точечные массы при этом залегают на глубине 1000–2000 км от поверхности Земли.

Региональная часть модели представляет возмущающий потенциал в отдельном регионе, например по территории нашей страны. Эта часть модели представляется менее протяженными аномалиями, поэтому точечные массы залегают на глубине 400–500 км.

Локальная часть модели представляет местные аномалии Земли. Локальные части модели точечных масс строятся для областей, охватываемых в плане окружностью с радиусом примерно 1000–2000 км. Точечные массы, представляющие локальные части модели, располагаются на глубине 200 км и менее от поверхности Земли.

Таким образом, модель возмущающего потенциала Земли, представленная в виде системы точечных масс, может включать одну глобальную часть, одну или несколько региональных частей и несколько локальных частей. Конкретный состав модели и привязка ее частей на местности выбирается в зависимости от условий задачи.

Помимо описанных выше методов существует ряд других. Например, в так называемом комбинированном методе возмущающий потенциал представляется в виде суммы двух слагаемых. Первое слагаемое рассчитывается по интегральной формуле Стокса [1, 4, 9] в так называемой ближней области интегрирования. Второе слагаемое выражается через коэффициенты C_{nm} и S_{nm} разложения возмущающего потенциала в ряд по сферическим функциям. Однако ввиду сложности реализации метод в последнее время использовался только для оценок точности представления возмущающего потенциала другими методами.

1.5.3. Об учете лунно-солнечных возмущений

Сила тяжести в каждой точке земной поверхности претерпевает с течением времени незначительные изменения в результате притяжения Луны и Солнца, изменения скорости и наклона оси вращения Земли, перемещения воздушных масс, изменения уровня океана и др. Из этих факторов, определяющих нестационарные аномалии силы тяжести, главными являются лунно-солнечные возмущения (см. табл. 1.2).

Действие притяжения Луны и Солнца проявляется в деформации поверхности, определяющей фигуру Земли. Величина и направление деформации в конкретной точке физической поверхности определяется взаимным положением Земли, Луны и Солнца. Максимальная амплитуда колебаний земной поверхности из-за влияния Луны и Солнца составляет 51 см в области экватора и уменьшается до 40 см в поясе широт 50–60°. В океанах лунно-солнечные возмущения вызывают океанские приливы, высота которых в некоторых областях Земли достигает нескольких метров: 13,6 м – в заливе Фанди (Канада), 12,6 м – в бухте Сен-Мишель (Франция) и др. [1].

Явление океанских приливов очень сложно. Величина приливов зависит от протяженности свободной поверхности воды, от местоположения точки, где рассматривается прилив, от характера берегов, от течений, направления и скорости ветра и др. Но основной причиной, порождающей их, являются лунно-солнечные возмущения.

В статической теории приливов [1] для приливообразующего (приливного) потенциала Луны и Солнца выводится формула

$$T_n \approx -\frac{fm}{2}\frac{a^2}{r^3}(3\cos^2 z - 1), \qquad (1.5.10)$$

где m – масса возмущающего тела (Луны или Солнца);

a – средний радиус Земли;

r – геоцентрическое расстояние до центра возмущающего тела;

z – геоцентрическое зенитное расстояние.

Представление зенитного расстояния в виде

$$\cos z = \sin\varphi \, \sin\delta + \cos\varphi \, \cos t,$$

где t – часовой угол;

δ – склонение Луны (Солнца);

φ – широта точки земной поверхности, позволяет выражение в скобках представить через φ

$$\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2t+\sin 2\varphi\sin 2\sin 2\delta+3(\sin^2\varphi-\frac{1}{3})(\sin^2-\frac{1}{3}).$$

Это свидетельствует, что потенциал T_n состоит из трех членов, представляющих собой три типа поверхностных сферических функций второго порядка: секториальную, тессеральную и зональную гармоники соответственно. Первое слагаемое описывает полусуточную гармонику, второе – близкую к суточной, третье – долгопериодную (для Луны – 14 суток, для Солнца – 6 месяцев), вызывающую медленные поднятие и опускание земной поверхности у полюсов с амплитудой 28 см и соответствующие опускание и поднятие у экватора с амплитудой 14 см. Подробный гармонический анализ приливного потенциала приведен в [1].

При выводе формулы (1.5.10) были учтены только малые величины первого порядка. В настоящее время при учете влияния Луны принято рассматривать и малые величины второго порядка [1]. Кроме этого вводится поправка на смещение уровенной поверхности (поправка Гонкасало), которая учитывает изменение силы тяжести, возникающее в результате действия зональных приливных волн. В окончательном виде полная поправка к силе тяжести, вводимая в настоящее время на приливный эффект, определяется выражениями:

для вертикальной компоненты

$$\begin{aligned}\delta g_n^N &= 1{,}2fm_л\frac{a}{r_л^3}(\cos^2 z_л-1)+1{,}8fm_л\frac{a^2}{r_л^4}(5\cos^3 z_л-3\cos z_л)+\\ &+1{,}2fm_c\frac{a}{r_c^3}(3\cos^2 z_c-1)+0{,}457fa(\frac{m_л}{\rho_л^3}+\frac{m_c}{\rho_c^3}),\end{aligned} \qquad (1.5.11)$$

для горизонтальной компоненты

$$\delta g_n^Г = 1{,}8fa(\frac{m_л}{\rho_л^3}\sin 2z_л+\frac{m_c}{\rho_c^3}\sin 2z_c)\,, \qquad (1.5.12)$$

где индексы «л» и «с» указывают на Луну и Солнце.

Отметим, что в приведенных выражениях по сравнению с формулой (1.5.10) присутствует коэффициент 1,2. Этим коэффициентом учитывается отличие упругой (реальной) Земли от твердой [1].

С помощью выражений для δg_n^N, $\delta g_n^Г$ составляются таблицы и строятся графики поправок на влияние приливного потенциала.

1.6. АНАЛИЗ ГЛОБАЛЬНОГО ПОЛЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

1.6.1. Основные расчетные соотношения

Для изучения влияния неоднородного поля силы тяжести и исследования методов его учета при решении задач динамики атмосферы необходимо располагать проекциями ускорения свободного падения на оси выбранной системы координат. С этой целью необходимо построение модели параметров неоднородного поля силы тяжести.

Имея в виду представление потенциала силы тяжести в виде $W = U + Q$ с учетом сведений, изложенных в п. 1.2, получаем

$$W = W_0 + T.$$

Это соотношение показывает, что потенциал силы тяжести равен сумме нормального потенциала силы тяжести и возмущающего потенциала притяжения. Отсюда следует, что наиболее удобно представить силу тяжести в виде суммы нормальной силы тяжести и аномальной силы притяжения, обусловленной возмущающим потенциалом T:

$$\vec{g} = \vec{\gamma} + \vec{g}_a. \qquad (1.6.1)$$

Однако, как следует из п. 1.3 и 1.5, нормальная сила тяжести рассчитывается в геодезических координатах, а проекции аномальной силы притяжения – в сферической. В этой связи последние необходимо преобразовать в геодезическую систему координат.

С помощью анализа рис.1.1 с учетом $\vec{g} = \nabla W$ нетрудно получить искомые соотношения:

$$\begin{aligned} g_n &= -\gamma + g_h, \\ g_h &= g_r \cos\alpha + g_\varphi \sin\alpha, \\ g_B &= g_\varphi \cos\alpha - g_r \sin\alpha, \qquad (1.6.2) \\ g_\lambda(B, \lambda, h) &= g_\lambda(\varphi, \lambda, r). \end{aligned}$$

где $\alpha = B - \varphi$; B – геодезическая широта; φ – геоцентрическая широта;

$$\gamma = -\frac{\partial W_0}{\partial n}; \quad g_r = \frac{\partial T}{\partial r}; \quad g_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi}; \quad g_\lambda = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial T}{\partial \lambda};$$

n – внешняя нормаль к поверхности ОЗЭ.

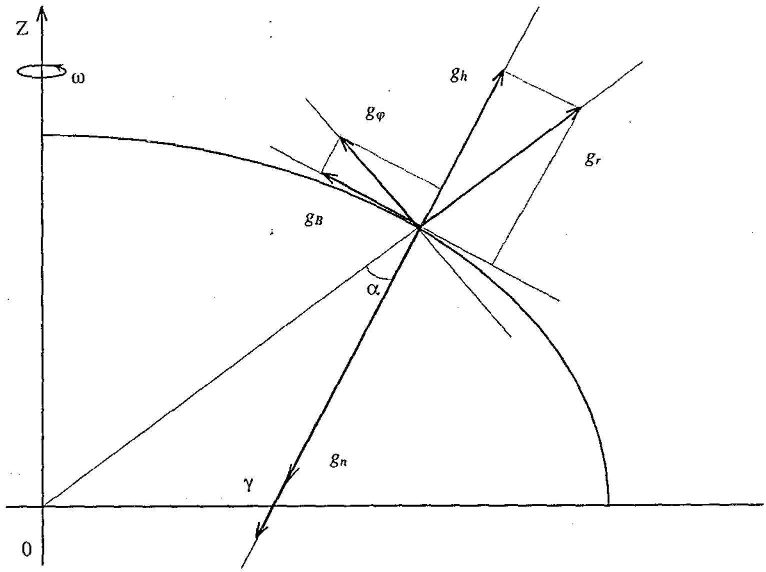


Рис. 1.1. Расположение проекций силы тяжести в плоскости меридианного сечения ОЗЭ

Если по условиям задачи можно пренебречь разностью $B - \varphi$ (максимальное значение составляет 11',8 на широте 45^0), то выражения (1.6.2) могут быть предельно упрощены:

$$\begin{aligned} &g_n = -\gamma + g_h, \\ &g_h = g_r, \\ &g_B = g_\varphi, \\ &g_\lambda (B, \lambda, h) = g_\lambda (\varphi, \lambda, r). \end{aligned} \tag{1.6.3}$$

Приближенными формулами (1.6.3) можно пользоваться в случае гладких низкоаномальных полей g_r, g_φ, g_λ. Это условие не будет выполнено в высокоаномальных районах, а также при учете высоких гармоник в представлении гравитационного поля сферическими функциями или при учете локальных частей в его представлении системами точечных масс.

Во всех расчетах, выполняемых ниже, используется определение параметров неоднородного поля силы тяжести на основе соотношений (1.6.2), если не оговорено иного. При этом расчет проекций g_r, g_φ, g_λ осуществляется с помощью разложения в ряд сферических функций (1.5.6) до 36-го порядка включительно. Коэффициенты разложения взяты из [5].

В расчетах, выполняемых в гл. 2, нормальная сила тяжести на поверхности ОЗЭ рассчитывается по формуле (1.3.1). Зависимость γ от геодезической высоты h учитывается путем умножения правой части (1.3.1) на сомножитель

$$1 + b_g h, \tag{1.6.4}$$

где $b_g = -3{,}14 \cdot 10^{-7}$м$^{-1}$.

В расчетах, выполняемых в остальных главах, нормальная сила тяжести рассчитывается по уточненной формуле, выведенной в работе [7] и описанной в п. 5.4.

Для расчета аномалии высоты и составляющих уклонения отвесной линии в меридиане и первом вертикале используются соотношения

$$\zeta = \frac{T}{\gamma}; \qquad \xi = -\frac{g_\varphi}{\gamma}; \qquad \eta = -\frac{g_\lambda}{\gamma}. \tag{1.6.5}$$

1.6.2. Пространственная структура

Для исследования пространственной структуры поля силы тяжести использовались ее составляющие в геодезической системе координат, рассчитанные на основе соотношений (1.6.2). При этом исследовались только поля g_h, g_B, g_λ, т.е. рассматривалось влияние только аномального гравитационного поля Земли. Результаты расчетов в виде карт изоаномал на высотах 0 и 100 км представлены на рис. 1.2–1.4.

Их анализ показывает, что в рассматриваемом диапазоне высот изменчивость полей g_h, g_B, g_λ характеризуется в горизонтальных направлениях минимальными значениями порядка – 40...– 60 мГал и максимальными 40...80 мГал. С увеличением высоты в пределах от 0 до 100 км рассматриваемые поля меняются слабо, при этом значения практически всех локальных экстремумов несколько уменьшаются (по абсолютной величине), а поля становятся более гладкими.

В поле g_B можно отметить преобладание зональной направленности изоаномал, а в поле g_λ – меридиональной.

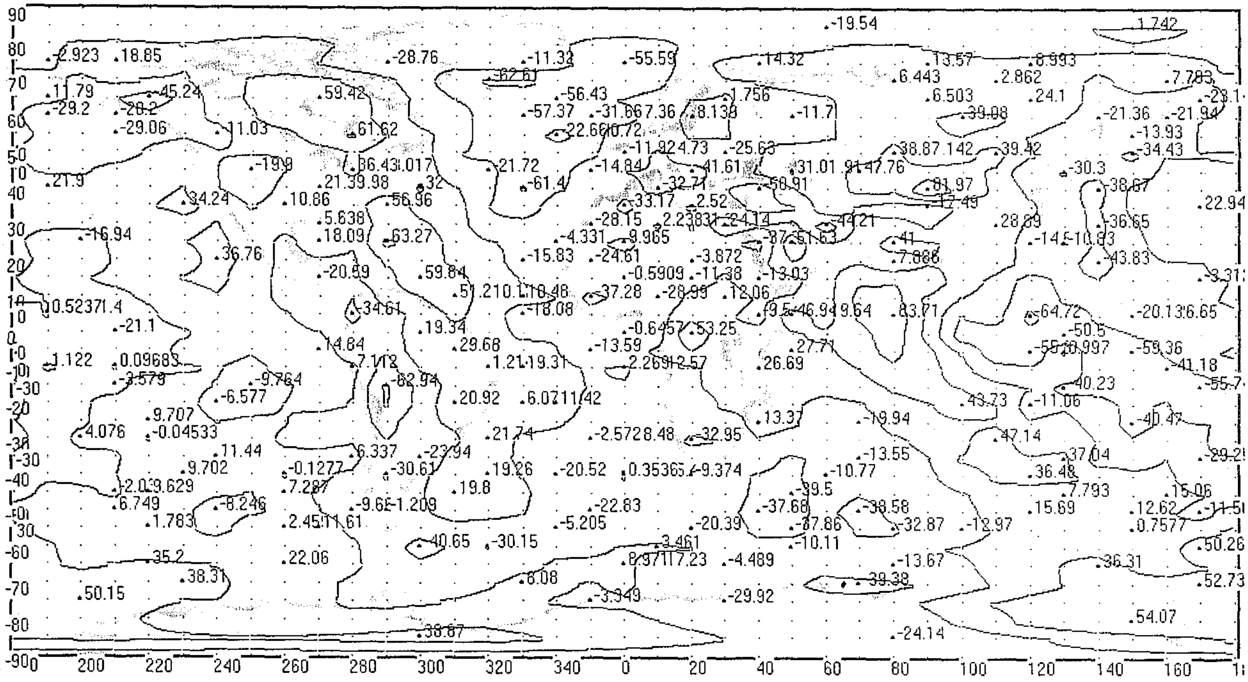


Рис. 1.2.а. Проекция g_h на высотах 0 км
(изолинии проведены через 30 мГал)

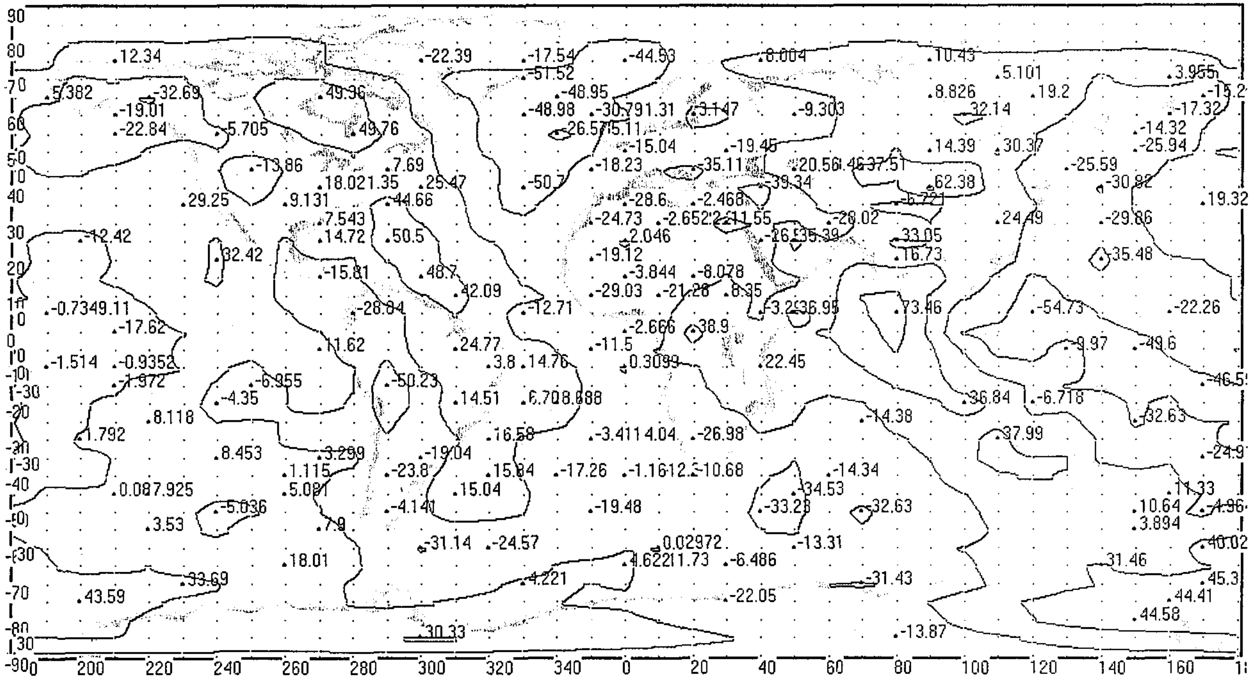


Рис. 1.2.6. Проекция g_h на высотах 100 км
(изолинии проведены через 30 мГал)

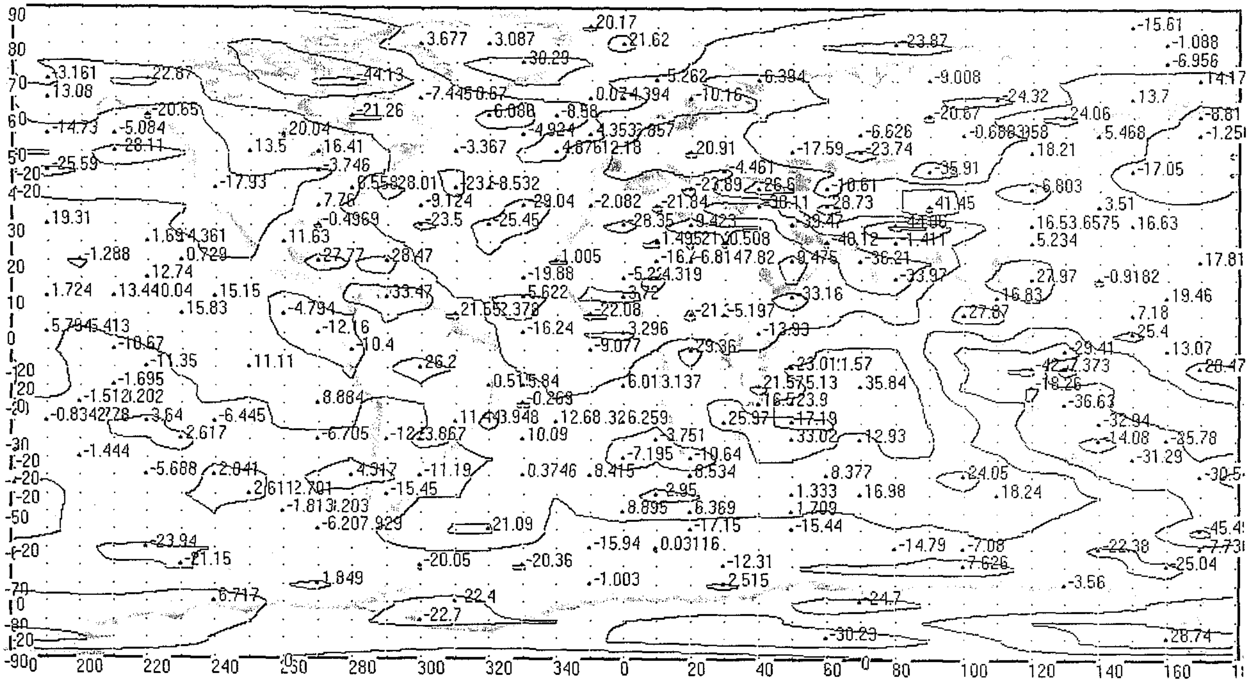


Рис. 1.3.а. Проекция g_B на высотах 0 км
(изолинии проведены через 20 мГал)

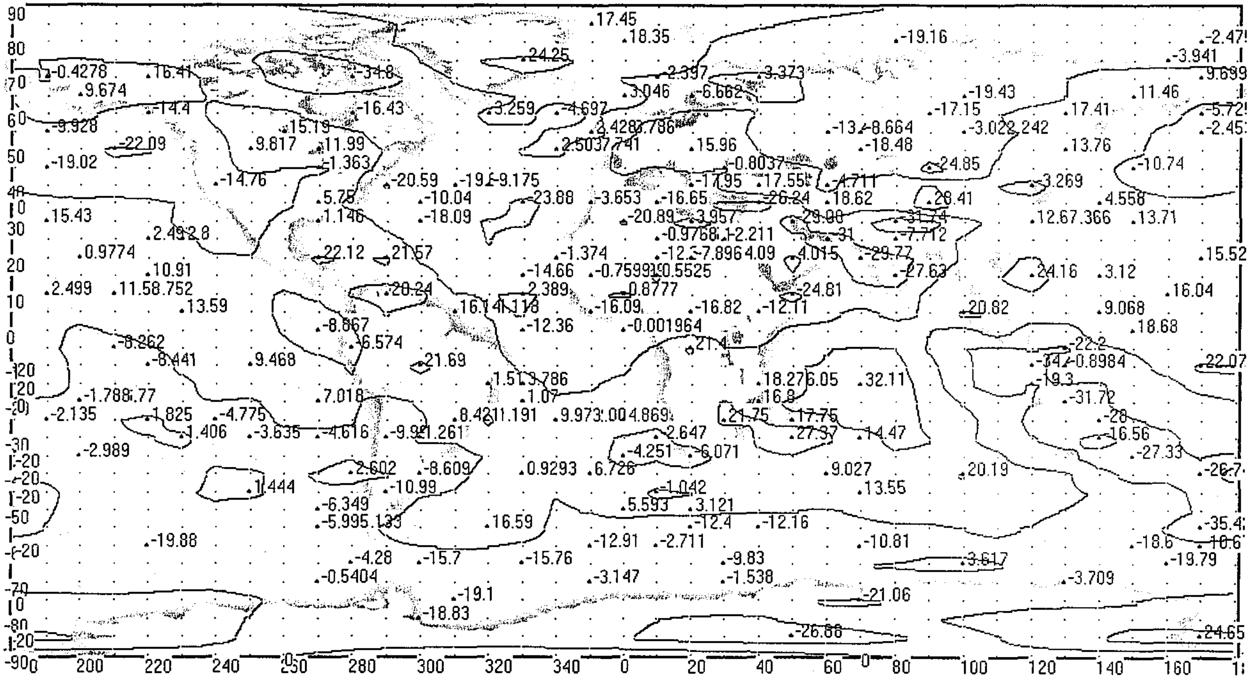


Рис. 1.3.6. Проекция g_B на высотах 100 км
(изолинии проведены через 20 мГал)

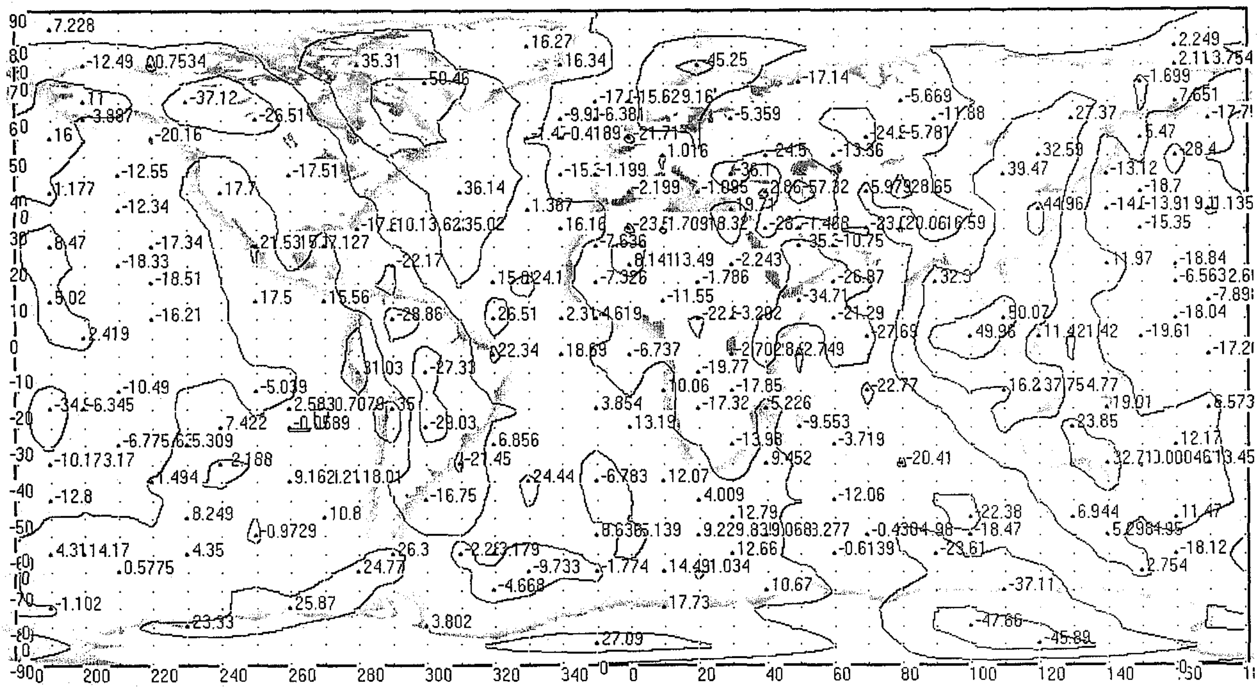


Рис. 1.4.а. Проекция g_λ на высотах 0 км
(изолинии проведены через 20 мГал)

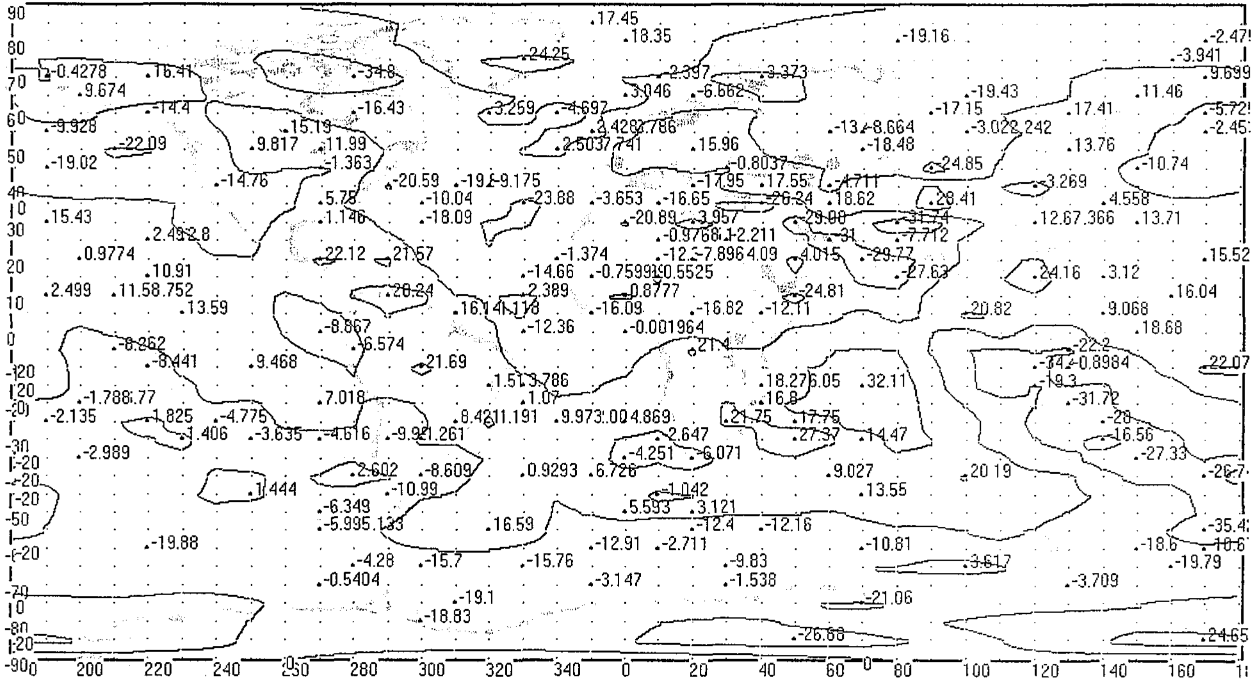


Рис. 1.4.6. Проекция g_λ на высотах 100 км
(изолинии проведены чере

Локализация наиболее значительных экстремумов всех полей g_h, g_B, g_λ приблизительно совпадает (особенно для двух первых). Это область юго-восточнее Гренландии, район Тибета, Малайзия, область Индийского океана южнее Индии и др. Особенности такой локализации обусловлены неоднородностью поля возмущающего потенциала Земли и непосредственно связаны с формой квазигеоида.

Следует отметить, что из приближенных соотношений (1.6.3) следует близость полей g_h, g_B, g_λ и полей g_r, g_φ, g_λ соответственно. Действительно, сравнение карт полей g_r, g_φ, g_λ, рассчитанных в работе [8], и представленных на рис. 1.2–1.4, показывают их хорошее совпадение.

Интересно отметить определенное подобие полей g_h, g_B, g_λ и приземных климатических полей давления, зональной и меридиональной компонент скорости ветра соответственно. Наиболее тесная связь существует между экстремумами поля g_h и центрами действия атмосферы. В областях с минимумами g_h располагаются климатические циклоны, в областях с максимумами g_h – климатические антициклоны.

1.6.3. Зонально-осредненная структура

Зонально-осредненные характеристики многих геофизических полей обладают высокой наглядностью за счет устранения азональных особенностей, зачастую не являющихся значимыми.

Зонально-осредненные поля проекций g_h, g_B, g_λ в слое от 0 до 100 км представлены на рис. 1.5, где затемненные области соответствуют отрицательным значениям составляющих силы тяжести, а светлые – положительным.

Все составляющие с высотой в рассматриваемом слое изменяются незначительно.

В распределениях зонально-осредненных проекций g_h, g_B преобладают отрицательные значения. Если оценивать площадь, занятую отрицательными значениями в распределении g_λ, то видно, что преобладает область с положительными значениями. Но эти положительные значения g_λ очень малы (порядка 10^{-3}… 10^{-4} мГал). Поэтому можно сделать вывод, в распределении зонально-осредненной проекции g_λ также доминируют отрицательные значения.

А)

Б)

В)

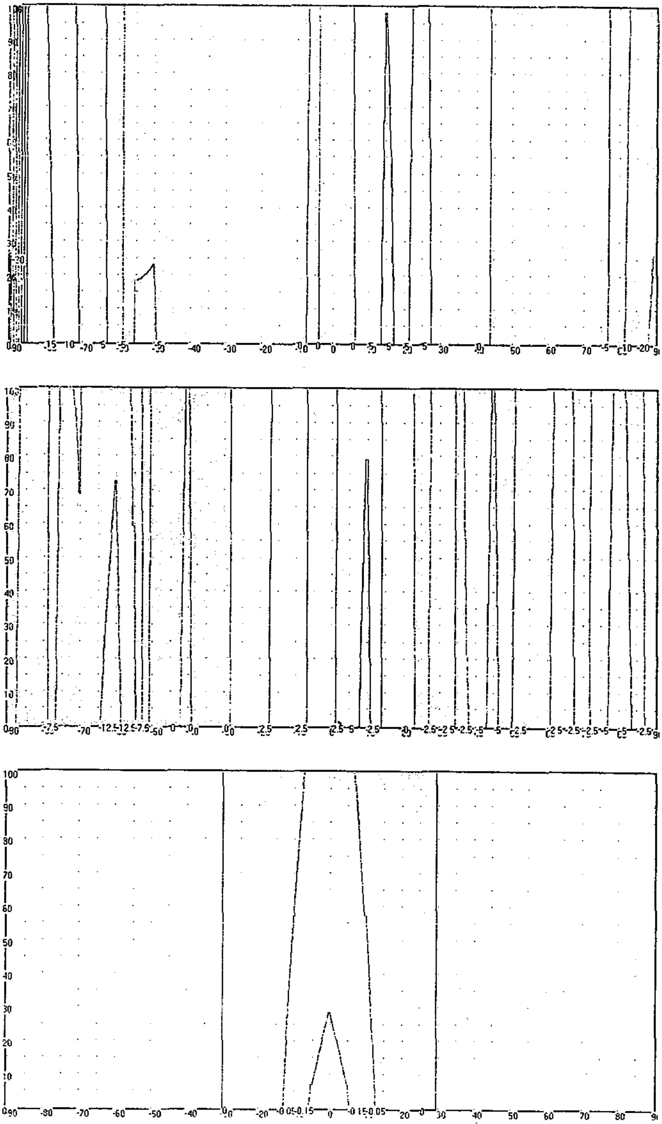


Рис. 1.5. Зонально-осредненные проекции g_h (*А*), g_B (*Б*), g_L(*В*) в слое от 0 до 100 км

Если принять во внимание замечания из предыдущего пункта о наличии связей между проекциями силы тяжести и климатическими полями давления и ветра, то можно сделать следующие выводы из анализа рис. 1.5.

Области отрицательных значений составляющей g_h должны способствовать повышенной повторяемости циклонов в них. Как известно, циклоническая повторяемость выше в северных и умеренных широтах Северного полушария и в умеренных широтах Южного полушария. Поэтому нетрудно убедиться, что действительно имеет место соответствие областей отрицательных значений g_h и зон более высокой циклонической повторяемости.

Распределение зонально-осредненной проекции g_B указывает на то, что оно должно способствовать конвергенции меридиональных потоков в районах 22^0 с.ш., 40^0 ю.ш. и их дивергенции в районах 30^0, 45^0 ю.ш.

В зонально-осредненном поле g_λ область отрицательных значений полностью размещена в тропиках практически симметрично относительно экватора и достигает максимальных значений (по модулю). Такое распределение способствует поддержанию пассатных потоков во внутритропической зоне конвергенции.

1.6.4. Статистические характеристики

В табл. 1.5 представлены статистические характеристики составляющих g_h, g_B, g_λ на различных высотах относительно ОЗЭ. Расчеты были проведены на широтно-долготной сетке размером 36×35 точек с шагами по параллели 10^0 и по меридиану 5^0.

Анализ табл. 1.5 показывает следующее. С увеличением высоты в диапазоне от 0 до 100 км глобальное аномальное гравитационное поле Земли несколько сглаживается. Изоаномалы становятся более плавными. Их характер отражает уменьшение вклада высокочастотной части аномального гравитационного поля Земли (слагаемых в формулах (1.5.6) с большими значениями n). Тем не менее, в диапазоне высот, используемом обычно для гидродинамического моделирования атмосферы, изменение с высотой всех составляющих силы тяжести можно не учитывать.

В работе [8] приведены статистические характеристики составляющих g_r, g_φ, g_λ на высотах 0, 100, 500 и 1000 км. Сравнение этих данных с данными табл. 1.5 показывает их разумную согласованность на высотах 0 и 100 км для характеристик σ_0, Max, Min. Средние значения для g_φ примерно на 25% меньше (по модулю) средних значений g_B. Средние значения для g_r примерно в 2,5 раза больше средних значений g_h. Наконец, средние значения для g_λ в [8] примерно на порядок больше средних значений g_λ и имеют противоположный знак, хотя из рис. 1.5 (В) видно, что отрицательные значения явно доминируют. Возможно, эти различия объясняются различными методиками расчета указанных характеристик.

Таблица 1.5

Статистические характеристики составляющих вектора аномального ускорения притяжения на различных высотах, мГал

Высота, м		0.0	10.0	50.0	100.0
g_n	*O*	978032,75	974952,06	962777,50	947878,25
	m_0	–978032,75	–974952,06	–962777,50	–947878,25
	σ_0	23,22	22,86	21,66	20,12
	Max	–977948,25	–974869,44	–962695,81	–947802,63
	Min	–978096,88	–975015,63	–962833,50	–947930,81
g_h	*O*	18,04	17,77	16,78	15,70
	m_0	0,39	0,39	0,38	0,38
	σ_0	23,24	22,88	21,54	20,10
	Max	83,71	82,59	78,32	73,45
	Min	–64,71	–63,58	–59,37	–54,73
g_B	*O*	11,33	11,14	10,44	9,70
	m_0	–2,14	–2,12	–2,04	–1,94
	σ_0	13,97	13,72	12,80	11,83
	Max	41,51	39,95	34,32	32,13
	Min	–45,42	–44,21	–39,86	–35,35
g_λ	*O*	12,72	12,53	11,85	11,11
	m_0	–0,02	–0,02	–0,01	–0,01
	σ_0	16,30	16,05	15,14	14,15
	Max	50,46	49,65	46,60	43,23
	Min	–57,32	–55,68	–49,77	–43,65

Примечания: *O* – порядок величины; m_0 – среднее значение; σ_0 – среднее квадратическое отклонение; *Max* – максимальное значение; *Min* – минимальное значение.

Характеристики табл. 1.5 могут быть использованы при масштабном анализе уравнений гидродинамики.

Глава 2
ИСТОРИЯ ИЗУЧЕНИЯ ВЛИЯНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА АТМОСФЕРУ

Развитие метеорологии, как науки, исторически происходит от максимального упрощения процесса моделируемого явления к последовательному отказу от первоначально принятых допущений и усложнению его физико-математического описания. В последние полтора десятилетия наблюдается аналогичная картина по поводу изучения влияния и подходов к учету неоднородного поля силы тяжести в задачах динамики атмосферы.

На выделенный элемент атмосферы действуют массовые (внешние) и поверхностные (внутренние) силы. К первым относится силы тяжести и Кориолиса. Ко вторым – силы давления и трения.

Кратко остановимся на представлении силы тяжести в метеорологии. Всемирной метеорологической организацией для расчета ускорения свободного падения принята формула [17, 26]

$$g\,(z, \varphi) = 9{,}806160\,(1 + 0{,}0052885\,\sin^2\varphi - \\ - 0{,}0000059\,\sin^4\varphi)\cdot(1 - 3{,}14\cdot10^{-7}z).$$

В работе [17], отмечается, что данная формула используется «при решении тех немногих задач метеорологии, в которых нужно учитывать зависимость ускорения силы тяжести g от высоты z и широты φ». К таким задачам отнесены: измерение давления воздуха с помощью ртутных барометров (высота столба ртути в барометре зависит от g и температуры воздуха), рассмотрение вопросов, относящихся к строению и физическим процессам, происходящим на больших высотах (выше 100 км). К последним относятся вопросы о плотности и составе воздуха на больших высотах, об оттоке газов из земной атмосферы, о высоте и форме верхней границы атмосферы. При изучении других атмосферных процессов «ускорение силы тяжести можно считать постоянным» [17].

Так ли это?

В конце 70-х годов Ф.И. Рудяев обнаружил, что тропические циклоны имеют повышенную повторяемость в областях отрицательных аномалий силы тяжести в свободном воздухе. В 1980 г. им была рассмотрена повторяемость циркуляционных систем атмосферы в аномальном гравитационном поле южного полушария Земли.

Была выявлена повышенная повторяемость циклонических систем в областях отрицательных аномалий и антициклонических систем в областях положительных аномалий силы тяжести.

Вопрос о существенно большей роли неоднородности поля силы тяжести, чем ей отводилось традиционно, был поднят в середине 80-х годов Е.П. Борисенковым [34] и Б.Д. Паниным. Это стимулировало определенную активность в исследованиях влияния силы тяжести на динамику атмосферных процессов.

К началу 90-х годов были выполнены работы, в которых сделаны попытки качественного анализа полей метеовеличин и силы тяжести, а также осуществлены первые оценки влияния неоднородности силы тяжести на распределение параметров атмосферы.

К первому направлению относятся работы [10, 11], в которых исследованы корреляционные связи между проекциями g_λ, g_φ, g_r и вертикальными профилями метеовеличин. Наиболее значимой работой в этом направлении следует считать работу [24], в которой исследовано влияние аномального гравитационного поля Земли на циркуляционные системы атмосферы южного полушария. Значимость работы состояла в выявлении роли тангенциальных составляющих силы тяжести путем анализа физических процессов в атмосфере, возникающих в результате влияния гравитационных аномалий.

Ко второму направлению относятся работы [7–9], в которых осуществлены простейшие постановки задач динамики атмосферы при непосредственном включении (что называется «в лоб») в уравнения гидротермодинамики составляющих силы тяжести. Были сделаны попытки оценить влияние неоднородности силы тяжести на формирование поля температуры и высоты среднего уровня, его краткосрочный прогноз на основе баротропной модели. При этом внимание уделялось только учету вариаций вертикальной составляющей силы тяжести, в основном обусловленных отличием ее нормального поля от однородного (g_0 = 9,8 м/с^2). Спустя несколько лет на основе этих же постановок задач уже с точки зрения современного понимания процесса влияния на динамику атмосферы неоднородности силы тяжести были осуществлены оценки влияния всех ее составляющих [28–30].

Несмотря на упрощенность постановок задач в этих работах, полученные результаты позволили прийти к некоторым важным выводам:

1) связь полей метеовеличин и силы тяжести имеет место;
2) влияние на динамику атмосферы оказывают тангенциальные составляющие силы тяжести;
3) влияние на динамику атмосферы вариаций вертикальной составляющей силы тяжести менее существенно.

Одновременно в статике атмосферы обозначилось понимание необходимости четкого определения отсчетной поверхности (уровня моря) в теории и на практике. Этому способствовали работы [13, 33], в которых было показано, что измеряемое давление приводится не на уровень моря (квазигеоид), а на ОЗЭ. Поправка давления при этом может составлять до нескольких гПа. В итоге сформировалось понимание необходимости введения специальных систем координат для корректного учета влияния неоднородности поля силы тяжести.

Еще в работе [22] указывалось на соблюдение осторожности в выборе подходящей системы координат, так как сила тяжести в уравнениях движения является доминирующей [3]. Действительно, в сферических координатах проекция g_φ имеет порядок, близкий к градиенту давления и кориолисову ускорению, что противоречит установленному факту близости атмосферного движения к геострофическому. В связи с этим в работе [3] для корректного учета влияния силы тяжести было предложено использовать сфероидические координаты. Однако полученная в этих координатах форма уравнений гидродинамики не учитывала влияние аномалий силы тяжести. Развитием этого результата является рассмотрение уравнений гидродинамики, учитывающих влияние неоднородности силы тяжести, в эллипсоидальной системе координат, непосредственно связанной с ОЗЭ. В этих координатах роль отсчетной поверхности выполняла уровенная поверхность «нормальной» Земли. На основе этой формы представления уравнений выполнен ряд работ [28–30], а сам подход изложен в работе [32].

Одновременно в работе [2] построена специальная «геопотенциальная» система координат, идея введения которой состояла в том, чтобы в качестве отсчетных поверхностей использовать реальные уровенные поверхности. К сожалению, авторы ограничились рассмотрением упрощенного нормального поля силы тяжести, что не позволило получить форму уравнений гидродинамики, учитывающую влияние его аномальной части.

В итоге выполненных работ была полностью подготовлена основа для корректной оценки влияния неоднородности силы тяжести на атмосферные процессы и обобщенного и целостностного описания методики ее учета в уравнениях гидродинамики. Ниже кратко излагаются содержание и результаты вышеуказанных работ, послуживших базой современного понимания роли неоднородной силы тяжести в динамике атмосферы.

2.1. ПЕРВЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

2.1.1. Формирование климатического поля температуры

В работе [7] на основе метода сопряженных функций, позволяющего строить в высшей степени экономичные модели атмосферы, основанные на интегрировании уравнений сопряженной задачи, осуществлена оценка вариации температуры при уточнении однородного гравитационного поля Земли путем его замены нормальным.

Невозмущенное состояние ($g = g_0 = 9{,}8$ м/с^2) атмосферы в области D описывается основной задачей [15]

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial t} + \mathrm{A}u - l\bar{\rho}v + \bar{P}\frac{\partial \phi}{\partial x} = 0,\\
\frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial t} + \mathrm{A}v + l\bar{\rho}u + \bar{P}\frac{\partial \phi}{\partial y} = 0,\\
-\ g_0\bar{\rho}\upsilon + \bar{P}\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0,\\
\frac{\partial \bar{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \bar{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \bar{\rho} w}{\partial z} = 0,\\
\frac{\partial \bar{\rho} \upsilon}{\partial t} + \mathrm{A}\upsilon + \bar{\rho} w\frac{\gamma_a - \gamma}{\bar{T}} = 0,
\end{gathered} \tag{2.1.1}$$

с начальными условиями $u = u_0$, $v = v_0$, $\upsilon = \upsilon_0$ при $t = 0$ и граничными условиями

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial z} = \alpha_\upsilon(\upsilon - \bar{\upsilon}), \quad \bar{\rho}w = 0 \qquad \text{при } z = 0, \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial z} = 0, \quad \bar{\rho}w = 0 \qquad \text{при } z = H,$$

где $\overline{\rho}$, $\overline{T}$, $\overline{P}$ – стандартные значения плотности, температуры и давления;

ϕ, υ – относительные давление и температура;

H – верхняя граница атмосферы;

γ, γ_a – стандартный и адиабатический градиенты температуры;

υ – температура поверхности океана;

α_υ – коэффициент теплопередачи;

$$A = \frac{\partial \overline{\rho} u}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho} v}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho} w}{\partial z}.$$

Остальные обозначения общепринятые.

Задаче (2.1.1), (2.1.2) на интервале времени $0 \le t \le \Delta T$ ставится в соответствие сопряженная задача [15]:

$$\begin{gathered}
-\frac{\partial \overline{\rho} u^*}{\partial t} - Au^* + l\overline{\rho} v^* - \overline{P}\frac{\partial \phi^*}{\partial x} = 0, \\
-\frac{\partial \overline{\rho} v^*}{\partial t} - Av^* - l\overline{\rho} u^* - \overline{P}\frac{\partial \phi^*}{\partial y} = 0, \\
g_0 \overline{\rho} \upsilon^* - \overline{P}\frac{\partial \phi^*}{\partial z} = 0, \\
-\frac{\partial \overline{\rho} u^*}{\partial x} - \frac{\partial \overline{\rho} v^*}{\partial y} - \frac{\partial \overline{\rho} w^*}{\partial z} = 0, \\
-\frac{\partial \overline{\rho} \upsilon^*}{\partial t} - A\upsilon^* - \overline{\rho} w^* \frac{\gamma_a - \gamma}{\overline{T}} = 0,
\end{gathered} \tag{2.1.3}$$

с начальными условиями $u^* = 0$, $v^* = 0$,

$\upsilon^* = \dfrac{\gamma_a - \gamma}{\overline{T} G g_0} \delta(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ при $t = \Delta T$ и граничными условиями

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \upsilon^*}{\partial z} = \upsilon^*, \quad \overline{\rho} w^* = 0 \qquad \text{при } z = 0, \\
&\frac{\partial \upsilon^*}{\partial z} = 0, \quad \overline{\rho} w^* = 0 \qquad \text{при } z = H,
\end{aligned} \tag{2.1.4}$$

где $G = G\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$,

знаком * помечены сопряженные величины.

Следуя [15] уравнения (2.1.1) и (2.1.3) умножаются соответственно на χ^* и χ, где $\chi = (u, v, w, \phi, \upsilon)'$, а затем интегрируются по времени от 0 до ΔT с учетом (2.1.2) и (2.1.4), результаты вычитаются один из другого. В итоге получается выражение для прогностического среднего отклонения температуры в области G за время ΔT:

$$\overline{\rho\upsilon} = \int\limits_D \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \upsilon_0 \upsilon_0^* \frac{g_0 \overline{T}}{\gamma_a - \gamma} \right) \overline{\rho}\, \mathrm{d}D + q \int\limits_0^{\Delta T} \mathrm{d}t \int\limits_S \alpha_\upsilon \overline{\upsilon} \upsilon^* \mathrm{d}S, \quad (2.1.5)$$

где q – коэффициент;

S – поверхность Мирового океана.

Состояние атмосферы, возмущенное отличием поля силы тяжести от g_0, описывается задачей

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{\rho} u'}{\partial t} + \mathrm{A}u' - l\overline{\rho}\mathrm{v}' + \overline{P}\frac{\partial \varphi'}{\partial x} - \overline{\rho}\, g_x = 0, \\ &\frac{\partial \overline{\rho}\mathrm{v}'}{\partial t} + \mathrm{A}v' + l\overline{\rho}u' + \overline{P}\frac{\partial \varphi'}{\partial y} - \overline{\rho}\, g_y = 0, \\ &-(1+\eta)\, g_0 \overline{\rho}\upsilon' + \overline{P}\frac{\partial \varphi'}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial \overline{\rho} u'}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\rho} v'}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\rho} w'}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial \overline{\rho} \upsilon'}{\partial t} + \mathrm{A}\upsilon' + \overline{\rho} w' \frac{\gamma_a - \gamma}{\overline{T}} = 0, \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

с начальными условиями $u' = u_0$, $v' = v_0$, $\upsilon' = \upsilon_0$ при $t = 0$ и граничными условиями (2.1.2), где $\eta = (g' - g_0)/g_0$.

Штрих означает, что соответствующие функции возмущены влиянием g'.

К этой задаче присоединяется сопряженная задача (2.1.3), (2.1.4) и так же, как и раньше, получается выражение, аналогичное (2.1.5):

$$\begin{aligned} (1+\eta)\overline{\rho\upsilon} = &\int\limits_D \left(u_0 u_0^* + v_0 v_0^* + \upsilon_0 \upsilon_0^* \frac{(1+\eta) g_0 \overline{T}}{\gamma_a - \gamma} \right) \overline{\rho}\, \mathrm{d}D + \\ &+ q \int\limits_0^{\Delta T} \mathrm{d}t \int\limits_S \alpha_\upsilon \overline{\upsilon} \upsilon^* \mathrm{d}S - \int\limits_0^{\Delta T} \mathrm{d}t \int\limits_D (g_x u^* + g_y v^*) \overline{\rho}\, \mathrm{d}D, \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Из сравнения выражений (2.1.5) и (2.1.7) с учетом, что $\eta << 1$, получается формула для вариации относительной температуры, обусловленной отличием силы тяжести от g_0

$$\overline{\rho}\delta\overline{\upsilon} = \int_D \left[\upsilon_0 \upsilon_0^* \frac{\eta g_0 \overline{T}}{\gamma_a - \gamma} - \int_0^{\Delta T} \mathrm{d}t \,(g_x u^* + g_y v^*) \right] \overline{\rho}\, \mathrm{d}D. \quad (2.1.8)$$

Далее в [7] было сделано предположение, отвечавшее существовавшим в то время представлениям: вертикальная компонента силы тяжести существенно превосходит две других, которыми в итоге пренебрегалось. В результате получался упрощенный вариант (2.1.8)

$$\delta\overline{\upsilon} = \frac{g_0 \overline{T}}{\gamma_a - \gamma} \int_D \eta \upsilon_0 \upsilon_0^* \,\mathrm{d}D. \quad (2.1.9)$$

В качестве возмущенного значения g' использовались значения нормальной силы тяжести, что соответствовало «геометрическому» переходу от «плоской» Земли к ОЗЭ.

Значение вариации температуры по формуле (2.1.9) оценивалось при следующих условиях: область D охватывает северное полушарие; область G ограничена широтами 40...60° с.ш. и долготами 20...60° в.д.; $\delta T = 60$ суток. Подстановка соответствующих численных значений (для задания υ_0^* использовались данные работ [25, 27]) позволила получить значение $\delta\overline{\upsilon} = 0{,}3°$. С учетом того, что сезонные аномалии температуры характеризуются величинами порядка 2°К, был сделан вывод о заметном влиянии на формирование поля температуры нормальной силы тяжести.

2.1.2. Формирование климатического поля высоты 500 гПа

Целью работы [8] являлось исследование точности представления потенциала гравитационного поля Земли (ГПЗ) на формирование климатического поля высоты изобарической поверхности 500 гПа.

Так как при рассмотрении процессов большого масштаба и длительности уравнения динамики атмосферы могут быть существенно упрощены, то уравнения горизонтального движения и неразрывности рассматриваются для среднего уровня в сферических координатах в виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+vl=-\ \frac{\partial \Phi}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}-ul=-\ \frac{\partial \Phi}{\partial y},\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v\sin\theta}{\partial y}=0,
\end{aligned}
\tag{2.1.10}
$$

где $dx = a\sin\theta\, d\lambda$; $dy = a d\theta$; a – средний радиус Земли; u, v – компоненты скорости ветра; θ – дополнение до геоцентрической широты; $l = 2\omega \cos\theta + u\, a^{-1}\mathrm{ctg}\theta$; Φ – геопотенциал.

Предполагается, что система уравнений (2.1.10) описывает реальное климатическое состояние атмосферы. Наряду с (2.1.10) рассмотрим систему уравнений, описывающую возмущенное неточным значением геопотенциала Φ состояние атмосферы и имеющую вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u'}{\partial t}+u'\frac{\partial u'}{\partial x}+v'\frac{\partial u'}{\partial y}+v'l'=-\ \frac{\partial \Phi'}{\partial x},\\
&\frac{\partial v'}{\partial t}+u'\frac{\partial v'}{\partial x}+v'\frac{\partial v'}{\partial y}-u'l'=-\ \frac{\partial \Phi'}{\partial y},\\
&\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v'\sin\theta}{\partial y}=0,
\end{aligned}
\tag{2.1.11}
$$

где φ' – возмущенное значение φ, $\varphi = \{u, v, \Phi\}$; $l' = 2\omega \cos\theta + u'\, a^{-1}\mathrm{ctg}\theta$.

Уравнения для вариаций $\delta\varphi = \varphi' - \varphi$ ($\delta\varphi / \varphi \ll 1$) получаются путем почленного вычитания (2.1.11) из (2.1.10) и пренебрежения малыми членами

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \delta u}{\partial t}=f^{u}-\frac{\partial \delta\Phi}{\partial x},\\
&\frac{\partial \delta v}{\partial t}=f^{v}-\frac{\partial \delta\Phi}{\partial y},\\
&\frac{\partial \delta u}{\partial x}+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \delta v\sin\theta}{\partial y}=0,
\end{aligned}
$$

где $f^u = u\dfrac{\partial\delta u}{\partial x} + v\dfrac{\partial\delta u}{\partial y} + \delta vl$; $\quad f^v = u\dfrac{\partial\delta v}{\partial x} + v\dfrac{\partial\delta v}{\partial y} - \delta ul$.

В результате дифференцирования первого уравнения по x, второго, предварительно умноженного на $\sin\theta$, – по y, и подстановки полученного выражения в третье уравнение, предварительно продифференцированное по t, получается дифференциальное уравнение второго порядка эллиптического типа относительно функции $\delta\Phi$:

$$L\delta\Phi = F,$$

где $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\mathrm{ctg}\,\theta}{a}\dfrac{\partial}{\partial y}$; $\quad F = \dfrac{\partial f^u}{\partial x} + \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial f^v \sin\theta}{\partial y}$.

В предположении, что геопотенциал зависит только от высоты $H = r - a$:

$$\Phi = gH + \mathrm{const},$$

где $g = g_r\,(\theta, \lambda, r)$,

имеет место соотношение

$$\delta\Phi = g'H' - gH + \mathrm{const} \approx g\,\delta H + \delta g\,H + \mathrm{const}.$$

Тогда система уравнений для нахождения вариаций $\delta\varphi$, обусловленных влиянием δg, принимает вид

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\delta u}{\partial t} = f^u - \frac{\partial\delta g\,H}{\partial x} - \frac{\partial g\delta H}{\partial x},\\
\frac{\partial\delta v}{\partial t} = f^v - \frac{\partial\delta g\,H}{\partial y} - \frac{\partial g\delta H}{\partial y},\\
L\,(g\delta H) = F - L\,(\delta g H).
\end{gathered} \tag{2.1.12}$$

Функция g определена здесь в виде $g = g_r = g_n - \omega^2\rho\,\sin^2\theta$, где g_n – проекция ускорения силы притяжения на радиус-вектор сферической системы координат. Для расчета этих проекций использованы соответствующие соотношения (1.6.2). Коэффициенты разложения соответствовали системе коэффициентов GEM-10 с $n_k = 22$ [1].

Численная модель атмосферных процессов, основанная на решении системы уравнений (2.1.12) методом динамической инициализации с помощью схемы Мацуно [1] с шагом по времени 10 мин, реализована на С-сетке Аракава [18] в области, имеющей 29×37 узлов с шагом 5° по широте, и по долготе 10° и охватывающей поверхность Земли от 80° с.ш. до 60° ю.ш. В качестве невозмущенного (т.е. реального) состояния использованы климатические поля геострофического ветра и высоты поверхности 500 гПа. Предполагалось, что этому состоянию соответствует поле $g^{(22)}$, полученное при $n_k = 22$. Поля $\delta g^{(k)} = g^{(k)} - g^{(22)}$, $k = 0,...,21$ соответствуют отклонениям возмущенных полей геострофического ветра и высоты от невозмущенных. Начальные значения отклонений высоты определялись по формуле

$$\delta H = -H\,\delta g^{(k)} / \delta g^{(22)},\; k = 0,..., 21.$$

Анализ результатов показал, что максимальный вклад в формирование поля δH вносит переход к учету нормального поля. При этом $\delta H_{\max}$ составляет примерно 15 м.

Особенности пространственного распределения изолиний свидетельствует о том, что неучет δg приводит: 1) к углублению ложбин и ослаблению гребней при $\theta < 55°$ и $\theta > 125°$; 2) к заполнению ложбин и усилению гребней при $55° < \theta < 125°$. Учет аномального ГПЗ несуществен. Таким образом, был сделан вывод, что при математическом моделировании климатического поля высоты 500 гПа целесообразно учитывать нормальное ГПЗ.

2.1.3. Прогноз высоты поверхности 500 гПа

Постановка задачи в работе [9] также ограничивалась случаем баротропной атмосферы. Уравнения гидродинамики представлялись в локальной системе координат, вращающейся вместе с Землей:

$$\frac{\mathrm{d}_s\vec{V}}{\mathrm{d}t} + l\vec{k}\vec{V} = -\nabla\Phi,$$

$$\frac{\mathrm{d}_s\Phi}{\mathrm{d}t} + \Phi\nabla\vec{V} = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}_s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\nabla,$$

где ∇ – оператор Гамильтона;

$\vec{V} = (u, v)'$ – проекция вектора скорости ветра на горизонтальную поверхность;

l – параметр Кориолиса;

k – единичный вектор, направленный вертикально вверх.

Предполагалось, что геопотенциал зависит только от вертикальной координаты $z = H$

$$\Phi = g_z H + \text{const},$$

где $g_z = g_z(x, y, H)$, и исходная система уравнений представлялась в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}_s\vec{V}}{\mathrm{d}t} + l\vec{k}\cdot\vec{V} = -g_z\nabla H, - H\nabla g_z, \\ &\frac{\mathrm{d}_s H}{\mathrm{d}t} + H\nabla\cdot\vec{V} + \frac{H}{g_z}(\vec{V}\cdot\nabla)\, g_z = 0. \end{aligned} \qquad (2.1.13)$$

При заданных начальных и граничных условиях система уравнений (2.1.13) замкнута, если известна функция g_z. Полагалось, что $g_z(x, y, H) = g_r(\theta, \lambda, r)$, т.е. пренебрегалось отличием H от r. Проекция g_r определялась так же, как в предыдущем параграфе.

Модель прогноза, основанная на численном интегрировании системы уравнений (2.1.13) методом Эйлера с шагом по времени 4 мин, реализована на С-сетке [18] в области, имеющей 21×21 узлов с шагом 190 км и охватывающей первый синоптический район. В качестве начальных данных использовались значения высоты поверхности 500 гПа за 10 последовательных сроков, начиная с 19.01.1979 г. (данные ПГЭП уровня III-б).

Анализ полученных результатов показал, что переход от сферы к эллипсоиду вращения дает уменьшение абсолютной и средней квадратической ошибок прогнозов соответственно на 0,7 и 1,2 м. Дальнейшее уточнение представления силы тяжести приводит к несущественному улучшению качества прогнозов. При этом минимальные ошибки прогнозов наблюдались при $n_k = 5$. Некоторое ухудшение оправдываемости прогнозов при дальнейшем увеличении n_k объясняется, по-видимому, несогласованностью по точности моделей атмосферы и ГПЗ. В целом был сделан вывод о нецелесообразности учета аномалий ГПЗ в рамках поставленной задачи. При этом было подчеркнуто, что в случае учета проекций ускорения свободного падения на горизонтальную поверхность следует ожидать усиление влияния ГПЗ на прогноз.

2.2. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

2.2.1. Влияние аномального гравитационного поля Земли на циркуляционные системы атмосферы

В работе [24] отмечается, что в топографии уровенных поверхностей атмосферы существует составляющая, определяемая аномальностью гравитационного поля. Последняя, накладываясь на топографию изобарических поверхностей, изменяет соотношение поля атмосферного давления и поля циркуляции.

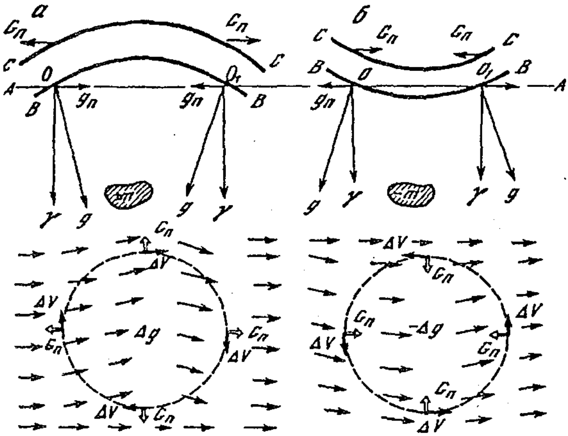


Рис. 2.1. Деформация изобарических поверхностей и возмущение горизонтального потока в области положительных (а) и отрицательных (б) аномалий силы тяжести

Рассмотрим, следуя [24], возможный механизм согласования и проявления пространственной неоднородности гравитационного поля в циклонах и антициклонах. Пусть избыточная масса + m (рис. 2.1, а) формирует положительную аномалию силы тяжести во всем пространстве, в том числе и в точках O и O_1, расположенных на поверхности ОЗЭ A, A. При этом истинное значение силы тяжести будет отклонено от нормального значения на некоторый угол θ (уклонение отвесной линии). Уровенная поверхность примет положение B, B, нормальное вектору истинного значения силы тяжести во всех точках, в том числе и в точках O и O_1. На поверхности ОЗЭ будут иметь место тангенциальные составляющие g_n. При отсутствии каких-либо других сил изобарические поверхности примут положение

C, C, образуя горизонтальную составляющую барического градиента **G**, направленную противоположно силе g_n, уравновешивая последнюю. Тангенциальные составляющие силы тяжести приводят к деформации изобарических поверхностей, т.е. к изменению их рельефа в аномальном гравитационном поле. Указанные силы представляют собой статические силы, которые, складываясь с силой барического градиента, влияют на кинематику и приводят к изменению существующего поля скоростей атмосферных движений. С учетом направления горизонтальных градиентов атмосферного давления, компенсирующих тангенциальные составляющие силы тяжести, может быть представлено (нижняя часть рис. 2.1) изменение кинематики изначально бездивергентного и безвихревого потока, проходящего в поле положительных и отрицательных АСТ.

Влияние тангенциальных составляющих силы тяжести в поле положительных АСТ проявляется в появлении в исходном потоке антициклонической завихренности, а в поле отрицательных АСТ – циклонической. Таким образом, поле тангенциальных составляющих сил в аномальном гравитационном поле создает определенный фон в существующем поле скоростей атмосферных движений. Этот возмущающий фон в поле атмосферных движений может оказывать двоякое воздействие на циркуляционные системы атмосферы. Во-первых, поле тангенциальных гравитационных сил, изменяя рельеф изобарических поверхностей, способствует углублению или заполнению циклонов, а также усилению или ослаблению антициклонов в зависимости от знака аномалий силы тяжести в области их локализации. Во-вторых, изменение кинематики ведущего потока в аномальном гравитационном поле приводит к изменению траекторий перемещения циклонов и антициклонов. Суммарный эффект возмущающего гравитационного фона проявляется в четком согласовании областей повышенной повторяемости циклонической циркуляции с районами отрицательных АСТ и антициклонической циркуляции – с районами положительных АСТ, что может быть одной из причин формирования климатологических центров действия атмосферы.

Если аномальное гравитационное поле определенным образом изменяет рельеф изобарических поверхностей в атмосфере, то соответствующий отклик следует оценивать и в фоновой завихренности циркуляции. Расчет фоновой завихренности для района Антарктики (рис. 2.2) указывает на удовлетворительное соответствие локализации областей максимальной повторяемости циклонов с областями отрицательных АСТ и с областями наибольшей фоновой циклонической завихренности. Все это определяет необходимость учета аномальности гравитационного поля при расчетах интенсивности и путей перемещения циркуляционных систем атмосферы.

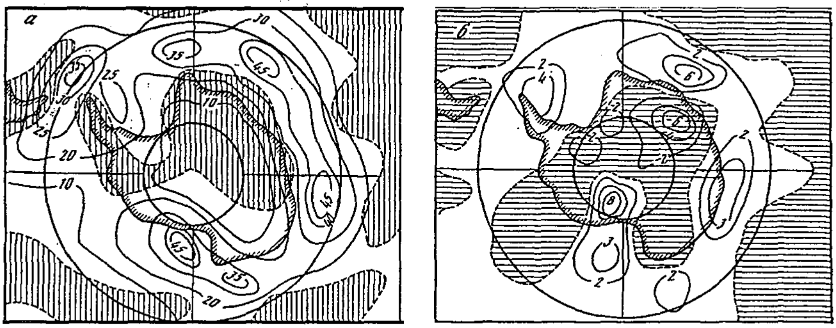


Рис. 2.2. Пространственное распределение аномального гравитационного поля, повторяемости циклонов и фоновой завихренности в области Антарктики:
а – аномалии силы тяжести (заштрихованы области положительных АСТ, не заштрихованы области отрицательных АСТ) и повторяемость циклонов (изолинии);
б – фоновая завихренность, обусловленная аномальностью гравитационного поля ($c^{-1} \times 10^6$, заштрихованы области антициклонической завихренности, не заштрихованы области циклонической завихренности).

В [24] произведена также оценка порядка величин тангенциальных составляющих сил в аномальном гравитационном поле на основе соотношения

$$g_n = \theta \gamma / K,$$

где θ – уклонение отвесной линии в угловых секундах; γ – нормальное значение силы тяжести; $K = 206\,265$ угловых секунд.

Учитывая, что порядок величины уклонения отвесной линии достигает 10^1 угловых секунд, порядок величины нормального значения силы тяжести составляет 10^3 см/с^2, тогда порядок тангенциальных составляющих сил определится от 10^{-3} до 10^{-2} см/с^2.

В работе [24] подчеркивается необходимость количественного учета выявленных эффектов в уравнениях движения при расчетах поля атмосферной циркуляции, так как порядок тангенциальных составляющих сил в аномальном гравитационном поле сопоставим с порядком силы горизонтального градиента атмосферного давления.

2.2.2. Корреляции метеовеличин и силы тяжести

Из анализа уравнений гидродинамики следует, что влияние неоднородности силы тяжести осуществляется через изменение производных составляющих скорости ветра по времени. В связи с этим правомерен вопрос о взаимосвязи между самими метеовеличинами и силой тяжести. Корреляции вертикальных распределений основных метеовеличин (давление, плотность, температура, горизонтальные составляющие скорости ветра) и проекциями силы тяжести исследованы в работах [10, 11].

В качестве системы отсчета в этих исследованиях использована ортогональная криволинейная система координат, связанная с нормалью к поверхности «нормальной» Земли, в качестве которой принят общеземной эллипсоид. Поэтому расчет проекций силы тяжести производится по соотношениям (1.6.1), (1.6.3). Порядок разложения в ряд сферических функций полагался равным от 2 до 20.

Целью работ [10, 11] являлось исследование корреляционных связей между зонально осредненными среднемесячными метеовеличинами (давлением P, температурой T, плотностью ρ и зональной составляющей вектора скорости ветра u) и проекциями силы тяжести в слое 0–100 км. В качестве исходных данных о полях метеовеличин были использованы среднемесячные (январь, апрель, июль, октябрь) зонально осредненные значения в узлах высотно-широтной сетки точек с шагами 1° по широте и 5 км по высоте [23]. Проекции силы тяжести, предварительно рассчитанные в высотно-широтно-долготной сетке точек с шагами 1° по широте, 5 км по высоте и 20° по долготе, зонально осреднялись.

Таким образом, на каждом уровне по высоте число пар значений составило 179 (полюса не рассматривались), в соответствии с чем значения коэффициентов корреляции считались значимыми, если они по абсолютной величине превышали 0,18.

Результаты расчетов, представленные на рис. 2.3 – 2.5, соответствуют $n_k = 10$, так как при изменении n_k от 2 до 20 вариации коэффициентов корреляции не превышали 5%.

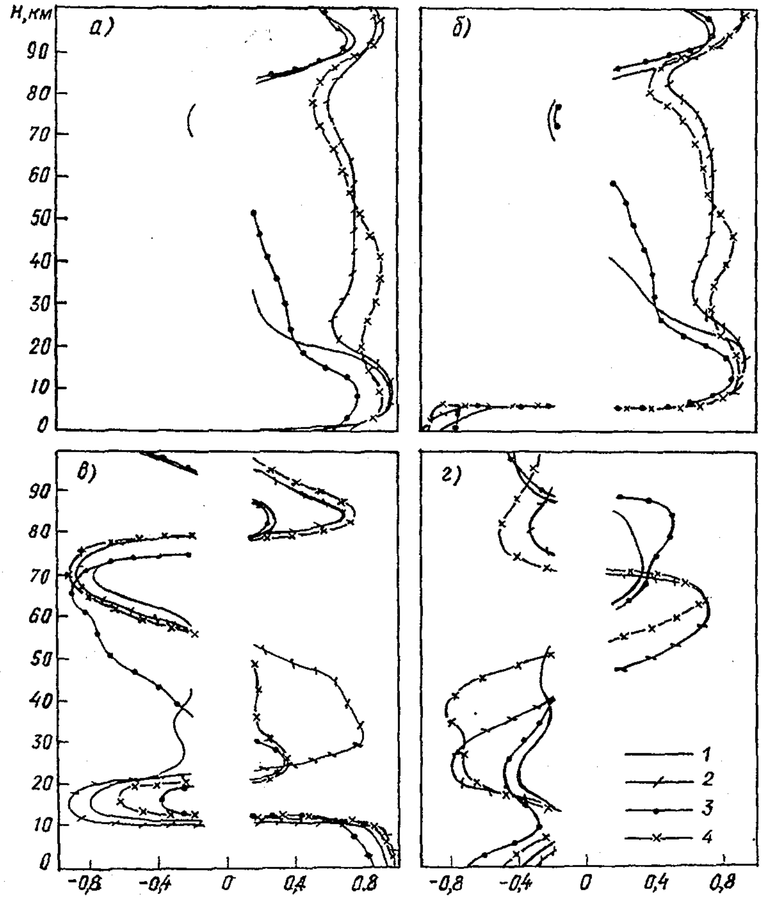


Рис. 2.3. Распределение по высоте коэффициентов корреляции между проекцией g_z и давлением (*а*), плотностью (*б*), температурой (*в*) и зональной составляющей ветра (*г*): *1* - январь; *2* - апрель; *3* - июль; *4* -октябрь

Анализ рис. 2.3 показывает, что корреляционная связь между g_z и давлением P является очень тесной в нижнем 20-километровом (коэффициент корреляции достигает 0,9) и верхнем 15-километровом слоях. Менее тесной связь является в слое от 20 до 85 км для переходных сезонов, а для лета и зимы коэффициенты корреляции практически незначимы.

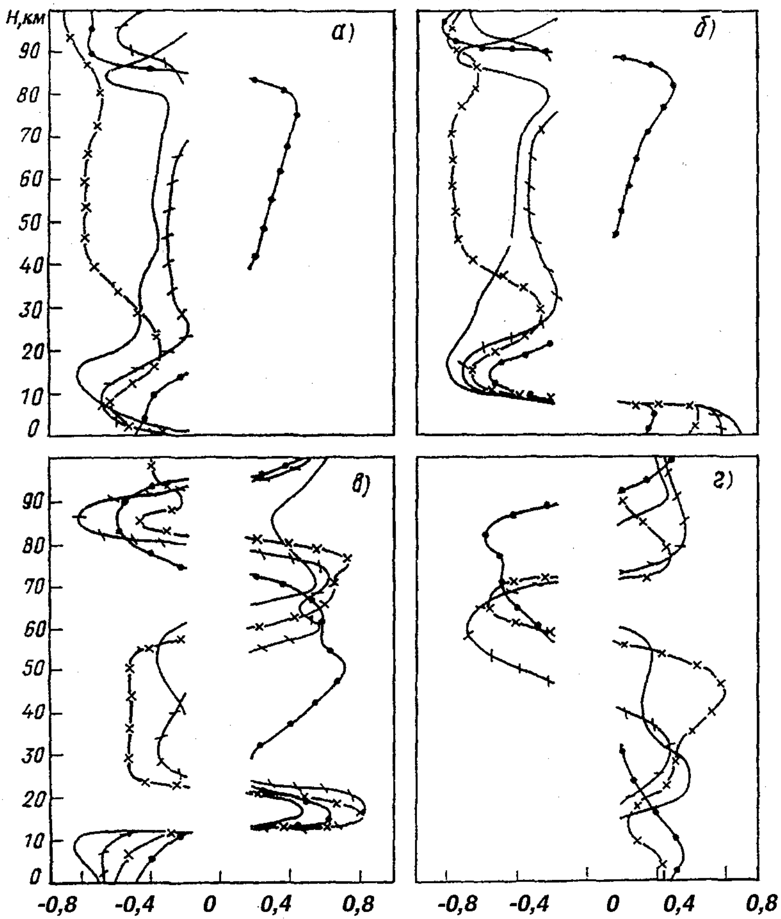


Рис. 2.4. Распределение по высоте коэффициентов корреляции между проекцией g_B давлением (*а*) и плотностью (*б*), температурой (*в*) и зональной составляющей ветра (*г*). Обозначения см. рис. 2.3

Между g_z и плотностью корреляционная связь очень тесная в слоях: 0–6, 8–22, 90–100 км. В областях изопикнических уровней (7, 25, 81 км) наблюдаются или локальные минимумы распределения коэффициентов корреляции по высоте, или смена их знаков. Между g_z и температурой корреляционная связь достаточно тесная на всех высотах, кроме областей тропопаузы, изопаузы, стратопаузы и мезопаузы,

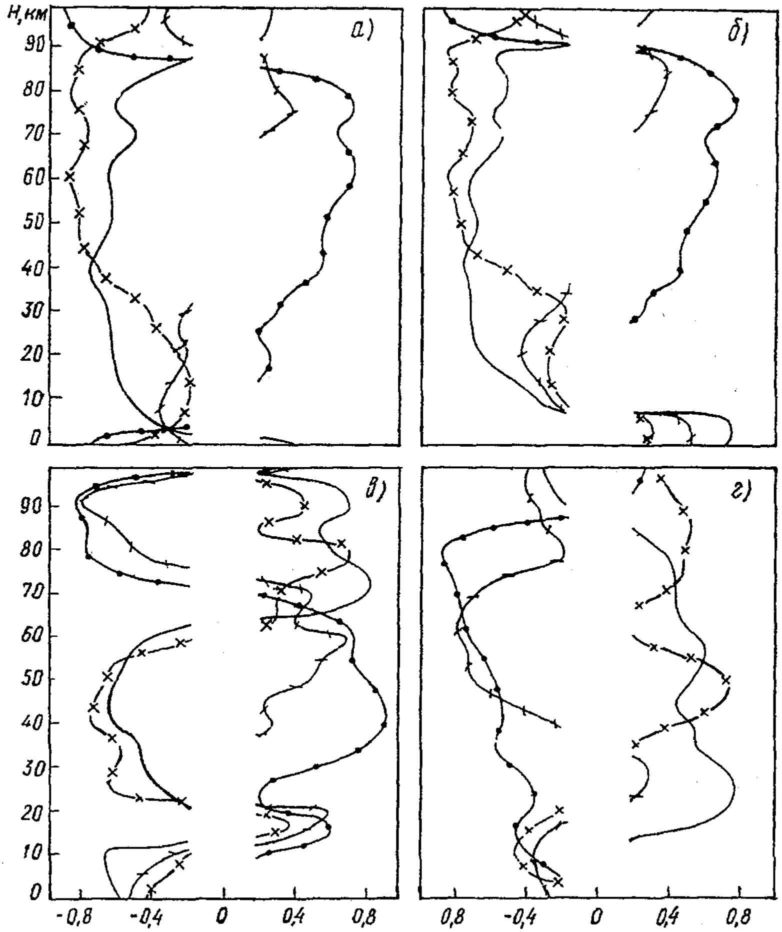


Рис. 2.5. Распределение по высоте коэффициентов корреляции между проекцией g_λ давлением (*а*) и плотностью (*б*), температурой (*в*) и зональной составляющей ветра (*г*). Обозначения см. рис. 2.3

в которых наблюдается смена знака коэффициентов корреляции. Между g_z и зональной составляющей ветра корреляционная связь в целом является менее тесной по сравнению с вышерассмотренными. Распределение коэффициентов корреляции по высоте имеет экстремумы на уровнях 25, около 70, 80 км. Смена знака коэффициентов корреляции или незначимые их значения наблюдаются вблизи тропопаузы, стратопаузы, а также летом и зимой выше мезопаузы, а в переходные периоды на более низких уровнях.

В качестве гипотезы в [11] было высказано предположение, что смена знака коэффициентов корреляции между g_z и плотностью, температурой и зональной составляющей ветра наблюдается на высотах, где вертикальный градиент метеовеличин близок к нулю.

Распределение коэффициентов корреляции между проекцией g_φ и метеовеличинами (рис. 2.4) приближенно антисимметрично по отношению к вышерассмотренному распределению (рис. 2.3). Распределение коэффициентов корреляции между проекцией g_λ и метеовеличинами (рис. 2.5) имеет как сходные черты с распределением, представленным на рис. 2.3, так и некоторые особенности, которые требуют дальнейшего осмысления и интерпретации.

Обнаруженные тесные корреляционные связи между зонально-осредненными проекциями силы тяжести и метеовеличинами в работе [10] были положены в основу методик восстановления зонально-осредненных климатических профилей метеовеличин.

2.2.3. Влияние возмущающего потенциала Земли (ВПЗ) на барическую топографию

Как известно, измеренные значения давления на поверхности Земли приводятся к уровню моря. Приведение давления к уровню моря осуществляется с помощью барометрической формулы по фактически наблюдаемому на станции атмосферному давлению и температуре воздуха. Вычисляется то атмосферное давление, которое было бы на станции, если бы она находилась на уровне моря, т.е. если бы к фактическому давлению было прибавлено еще давление столба воздуха, простирающегося от уровня станции до уровня моря. Так как этого дополнительного столба воздуха в действительности не существует, то для расчета условно принимают, что температура в нем растет на 0,5°С на каждые 100 м понижения. Давление на станциях, расположенных выше 800 м, к уровню моря не приводится [26].

В работах [13, 33] в результате детального анализа процесса приведения показано, что при этом в качестве ускорения свободного падения принимается приближенное значение нормальной силы тяжести, вычисляемое по формуле [26]:

$$g = 9{,}80665 \cdot (1 - 0{,}002644 \cos 2\varphi) \cdot (1 - 3{,}14\ 10^{-7} z).$$

Это указывает, что на самом деле давление редуцируется не на уровень моря (поверхность квазигеоида), а на поверхность ОЗЭ, так как вышеуказанная зависимость характеризует нормальную силу тяжести, которой отвечает фигура Земли в виде общего земного эллипсоида. Различия между поверхностями квазигеоида и ОЗЭ (превышения) по абсолютной величине достигают 100 м.

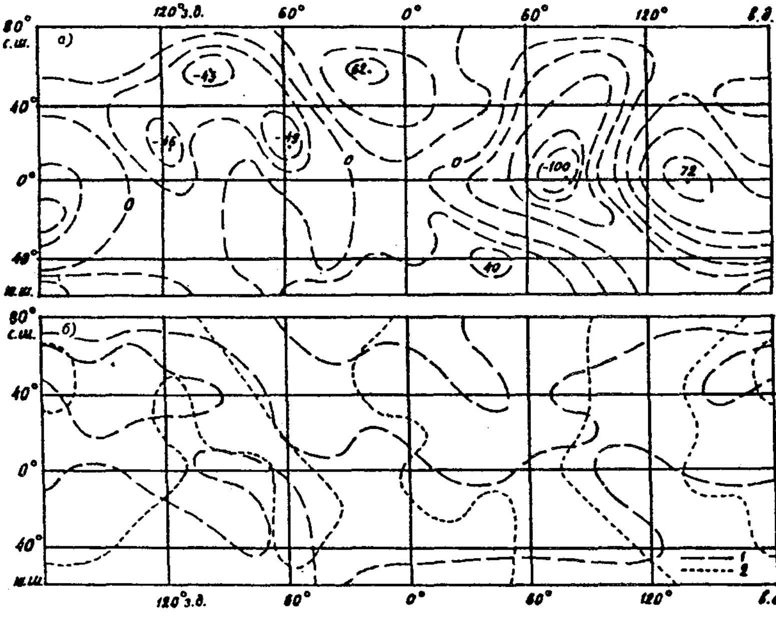


Рис. 2.6. Превышения (*а*) и нулевые изолинии (*б*) уклонений ξ (*1*) и η (*2*)

Напомним, что нормальная сила тяжести направлена по нормали к поверхности ОЗЭ. Уклонения отвесной линии (ξ, η) определяют направление реальной силы тяжести относительно нормальной. Одновременно они характеризуют тангенциальные составляющие силы тяжести на поверхности эллипсоида. Аномалии высоты образуют поверхность квазигеоида (уровень моря). Реальная сила тяжести перпендикулярна к ней. На рис. 2.6 представлены карты превышений ζ, а также нулевых изолиний уклонений ξ и η, рассчитанных по формулам (1.6.5).

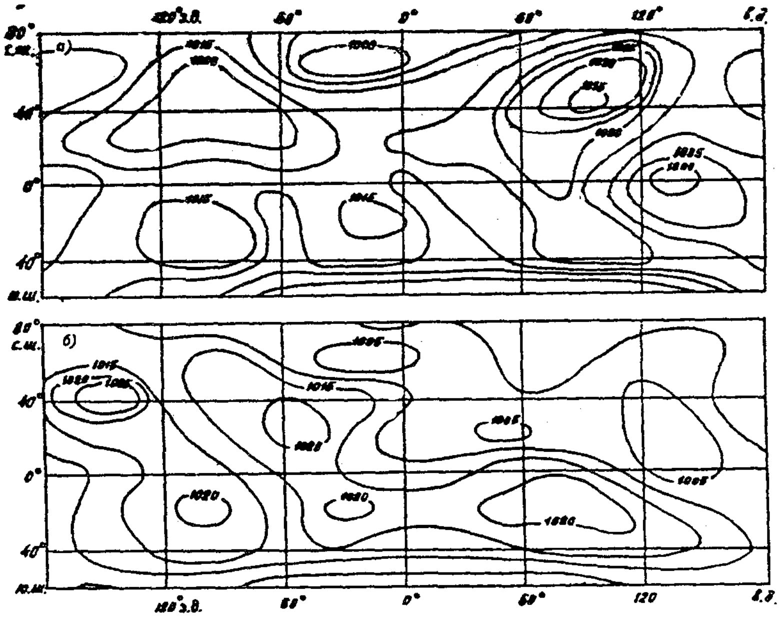


Рис. 2.7. Климатическое поле давления на поверхности квазигеоида (гПа) в январе (*а*) и июле (*б*)

В работе [13] по рассчитанному полю превышений ζ с помощью барометрической формулы осуществлена редукция среднегодового, среднеянварского и среднеиюльского климатических полей давления с ОЗЭ на квазигеоид (см. рис. 2.7 и 2.8). Поле поправок давления ΔP (см. рис. 2.8) за счет превышений представлено только для среднегодового давления, так как для января и июля отличия не превышают 6%. Полученное поле ΔP количественно характеризует влияние возмущающего потенциала Земли (ВПЗ) на топографию климатического поля давления. Так, после редукции на квазигеоид смещение центров действия атмосферы может составлять порядка 1000 км, а изменения давления в них – до 9 гПа. Существенно также наличие тесной связи между экстремумами аномалий высоты и центрами действия атмосферы. В регионах с максимумами ζ располагаются климатические циклоны, в регионах с минимумами ζ – антициклоны. Более точные и подробные данные о выявленной связи в [13, 33] получены на основе анализа точек пересечения изолиний $\xi = 0$ и $\eta = 0$ (т.е. экстремумов вторых производных от ВПЗ), представленных на рис. 2.7, и центрами действия атмосферы.

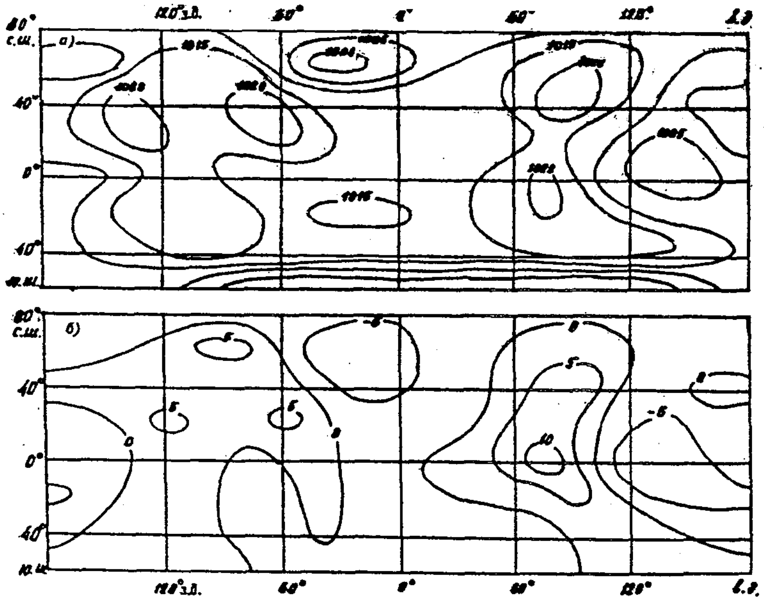


Рис. 2.8. Среднегодовые поля давления на поверхности квазигеоида (*а*) и поправок давления из-за превышений (*б*)

Физическая интерпретация этой связи, по мнению авторов [13, 33], заключается в следующем. В точках пересечения указанных нулевых изолиний наблюдается равновесие сил, обусловленных ВПЗ. Вид равновесия (устойчивое, неустойчивое или безразличное) определяется взаимным положением отрицательных и положительных аномалий ГПЗ, о чем можно судить по полю превышений ζ,. Если равновесие устойчиво, то в этом районе может располагаться центр действия атмосферы.

2.3. ПОСТРОЕНИЕ СПЕЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ КООРДИНАТ ДЛЯ КРУПНОМАСШТАБНЫХ ДВИЖЕНИЙ

2.3.1. Сфероидическая система координат

В работе [3] подчеркивается, что вследствие доминирования силы тяжести в уравнениях движения требуется большая осторожность в выборе подходящей системы координат. Если бы, например, были использованы сферические координаты, то получилось бы, что важным членом в уравнениях для крупномасштабного движения, касательных к сферической поверхности, была бы составляющая силы тяжести, направленная вдоль этих поверхностей.

Поэтому в [3] отмечается, что предпочтительнее использовать для координатной системы геопотенциальные поверхности по сравнению со сферическими. С этой целью предложено в первом приближении использовать сфероидические координаты. Такой выбор обусловлен тем, что геопотенциальная поверхность на уровне моря приближенно является поверхностью сплюснутого сфероида с эксцентриситетом e, где $1/e$ = 298,257, и большой полуосью в 6378,139 км. Отклонения от этого сфероида относительно малы. Так, наибольшее отклонение (понижение) на 110 м отмечается на юге Индии, т.е. отклонение составляет около 10^{-5} радиуса Земли.

Если бы геопотенциальные поверхности принадлежали сплющенному сфероиду, то естественной координатной системой были бы координаты сплющенного сфероида (λ, φ, r), которые связаны со сферическими координатами (λ, φ_s, r_s) соотношениями (r – радиальное расстояние, φ – широта, а λ – долгота)

$$(r_s)^2 = r^2 + 0{,}5\, d^2 - d^2 \sin^2\varphi,$$
$$(r_s \cos\varphi_s)^2 = (r^2 + 0{,}5d^2) \cos^2\varphi,$$

где d – постоянная, равная половине расстояния между фокусами эллипсоида (d= 521,854 км для Земли).

Если положить, что экваториальный радиус (большая полуось) и полярный (малая полуось) равны соответственно

$$[(r_0)^2 + 0{,}5d^2]^{0{,}5} = 6378{,}139 \text{ км}, \ [(r_0)^2 - 0{,}5d^2]^{0{,}5} = 6356{,}754 \text{ км},$$

то эллипсоиду, более всего подходящему к поверхности геопотенциала на уровне моря, отвечает

$$r_0 = 6367{,}456 \text{ км}.$$

Вводимая координатная система слегка отличается от координат сплюснутого сфероида тем, что в ней поверхности $r = \text{const}$ являются геопотенциальными поверхностями. Значение r, приписываемое каждой геопотенциальной поверхности, равно такому его значению для сфероида, что среднее расстояние между этими двумя поверхностями равно нулю. В [3] подчеркивается, что разность между выражениями для различных членов в уравнениях так мала, что ею можно пренебречь, за исключением того, что в используемой системе сила тяжести точно перпендикулярна к поверхности $r = \text{const}$. Заметим, что на самом деле этой поверхности перпендикулярна только нормальная сила тяжести, а реальная сила тяжести будет отклоняться от нормали на малый угол – уклонение отвесной линии.

Выражения через λ, φ, r для операторов, которые имеются в уравнениях, зависят от коэффициентов h_λ, h_φ, h_r метрической формы

$$(h_\lambda)^2\,\mathrm{d}\lambda^2 + (h_\varphi)^2\,\mathrm{d}\varphi^2 + (h_r)^2\,\mathrm{d}r^2,$$

т.е. от выражения для квадрата бесконечно малого расстояния. Для координат сплющенного сфероида по [3] эти коэффициенты имеют вид

$$(h_\lambda)^2 = (r^2 + 0{,}5d^2)\cos^2\varphi,$$

$$(h_\varphi)^2 = r^2 - 0{,}5d^2 + d^2\sin^2\varphi,$$

$$(h_r)^2 = r^2\,(r^2 - 0{,}5d^2 + d^2\sin^2\varphi)(r^4 - 0{,}25d^4)^{-1}.$$

Наибольшая ошибка при использовании приближения в случае малых d, а именно:

$$h_\lambda = r\cos\varphi,\ h_\varphi = r,\ h_r = 1,$$

имеет порядок $d^2/4r^2$, что меньше 0,17% вблизи поверхности Земли. В [3] отмечается, что если пользоваться этим приближением, то получающиеся уравнения будут точно такими же, как в сферических координатах. Однако смысл переменных будет иной, и совершенно точно можно говорить, что сила тяжести перпендикулярна поверхности $r = \text{const}$. Важно помнить, что вертикальные перемещения (например, по нормали к поверхности моря) выражаются по отношению к геопотенциальным (но не сферическим) поверхностям.

Здесь в отличие от утверждений в [3] необходимо еще раз подчеркнуть, что приведенные выводы справедливы только в отношении нормальной силы тяжести.

Компоненты скорости u, v, w, связанные с координатами λ, φ, r, определяются традиционно, т.е. u – в направлении возрастания λ. (которое будет называться направлением на «восток»), v – в направлении возрастания φ (которое будет называться направлением на «север») и w – в направлении возрастания r, т.е. «вверх» или в направлении, противоположном силе тяжести. Координата z определяется соотношением

$$z = r - r_0,$$

т.е. как расстояние, измеряемое вверх от геопотенциальной поверхности на уровне моря (точнее на уровне ОЗЭ). Уравнения в этих координатах (с использованием приближения $d \ll r_0$) имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - \left(2\omega + \frac{u}{r\cos\varphi}\right)(v\sin\varphi - w\cos\varphi) = -\frac{1}{\rho r\cos\varphi}\frac{\partial P}{\partial\lambda} + N_x,$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{wv}{r} + \left(2\omega + \frac{u}{r\cos\varphi}\right)u\sin\varphi = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial\varphi} + N_y,$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - \frac{v^2}{r} - \left(2\omega + \frac{u}{r\cos\varphi}\right)u\cos\varphi = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z} + N_z - g_z,$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial v\cos\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

где N_x, N_y, N_z – компоненты вязкости;

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi} + w\frac{\partial}{\partial z}.$$

Таким образом, в работе [3] введена связанная с фигурой Земли в виде сфероида система координат, в которой учтено влияние нормального поля тяжести. Неучет различий между силой тяжести и ее нормальной составляющей не позволил получить форму уравнений гидродинамики, учитывающую влияние ее аномальной части.

2.3.2. «Геопотенциальная» система координат

Авторами работы [2] была предложена «геопотенциальная» системы координат (ГСК). При ее выводе использованы следующие общепринятые ограничения:

- из всех массовых сил учитывается только сила земной гравитации;
- гелиоцентрическая система координат (жестко связанная с Солнцем) является инерциальной;
- суточное вращение Земли происходит с постоянной угловой скоростью ω.

Исходное векторное уравнение Навье–Стокса в неинерциальной системе отсчета, жестко связанной с Землей, берется в виде

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\rho}\nabla P - 2\left(\vec{\omega}\times\vec{V}\right) + \vec{g} + \vec{N},$$

где, помимо общепринятых обозначений $\vec{g}$ – напряжение силы тяжести (равнодействующей силы гравитации Земли и центробежной силы); $\vec{N}$ – результирующее напряжение вязкости.

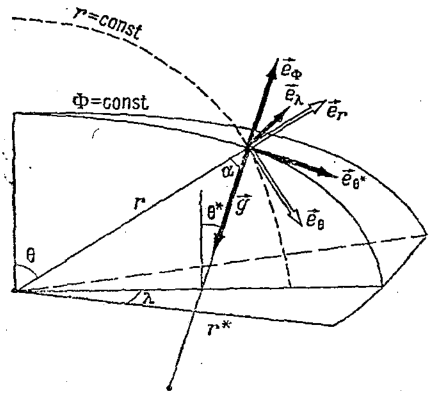


Рис. 2.9. «Геопотенциальная» система координат (ГСК)

ГСК определяется следующим образом. В качестве независимых переменных используются (рис. 2.9): Φ – геопотенциал, определяемый из соотношения $g = -\nabla\Phi$; θ^* – дополнение до географической широты (угол между нормалью к поверхности Φ = const в данной точке и полярной осью); λ – географическая долгота.

Координатные орты $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_{\theta^*}$, $\vec{e}_\lambda$, направлены по нормали к соответствующим координатным поверхностям, проходящим через данную точку, из чего следует, что выбранная ГСК является ортогональной. Целесообразность выбора такой системы координат объясняется прежде всего тем, что вектор ускорения свободного падения в этом случае будет иметь только одну составляющую $\vec{g} = -g\,\vec{e}_\phi$. Кроме того, в силу анизотропности атмосферных полей желательно выделение в уравнениях горизонтальных и вертикальных движений, что достигается в ГСК введением вертикально направленного орта $\vec{e}_\phi$. Нетрудно заметить, что базисные векторы $\vec{e}_\phi$, $\vec{e}_{\theta^*}$ в ГСК получаются путем поворота базисных орт $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ сферической системы координат (ССК) – вокруг орта $\vec{e}_\lambda$ на угол α отклонения вектора $\vec{g}$ от направления на центр Земли.

Алгоритм представления исходного векторного уравнения в проекциях на координатные оси тот же, что используется в случае сферической системы координат (ССК). Однако в отличие от последней ГСК является системой с локальным базисом, в которой направление координатных ортов изменяется в пространстве. Тогда

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V_{\theta^*}\vec{e}_{\theta^*} + V_\lambda \vec{e}_\lambda + V_\phi \vec{e}_\phi\right) =$$

$$= \left(\frac{dV_{\theta^*}}{dt}\vec{e}_{\theta^*} + \frac{dV_\lambda}{dt}\vec{e}_\lambda + \frac{dV_\phi}{dt}\vec{e}_\phi\right) + \left(V_{\theta^*}\frac{d\vec{e}_{\theta^*}}{dt} + V_\lambda\frac{d\vec{e}_\lambda}{dt} + V_\phi\frac{d\vec{e}_\phi}{dt}\right),$$

где полная производная определяется как

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\theta^*}{dt}\frac{\partial}{\partial\theta^*} + \frac{d\lambda}{dt}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \frac{d\Phi}{dt}\frac{\partial}{\partial\Phi}.$$

Частную производную $\partial/\partial\Phi$ в этом выражении удобно заменить на производную по линейному расстоянию. В [2] предлагается под высотой z понимать длину силовой линии поля Φ (кривой, в каждой своей точке направленной по касательной к $\nabla\Phi$) от данной точки до уровня моря. Тогда очевидно тождество

$$\frac{d\Phi}{dt}\frac{\partial}{\partial\Phi} = \frac{dz}{dt}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Поверхности $\Phi = \text{const}$ и $z = \text{const}$ не совпадают. Поэтому система независимых переменных остается неизменной и при взятии производных $\partial/\partial\theta^*$ и $\partial/\partial\lambda$ фиксируется Φ, а не z.

Связь между полными производными координат по времени и проекциями вектора скорости на направления соответствующих ортов определяется соотношениями

$$V_{\theta^*} = r^* \frac{d\theta^*}{dt}; \qquad V_\lambda = r\sin\theta \frac{d\lambda}{dt}; \qquad V_\Phi = \frac{dz}{dt},$$

где r, r^* – радиусы кривизны меридионального сечения эквипотенциальной поверхности Φ = const, проходящей через данную точку (см. рис. 2.6) и углы θ, θ^*, α показаны на рис. 2.9.

Частные производные ортов по координатам приведены в табл.2.1.

Таблица 2.1

Частные производные ортов

	$\vec{e}_{\theta^*}$	$\vec{e}_\lambda$	$\vec{e}_\Phi$
$\frac{\partial}{\partial z}$	0	0	0
$\frac{\partial}{\partial \theta^*}$	$-\vec{e}_\Phi$	0	$\vec{e}_{\theta^*}$
$\frac{\partial}{\partial \lambda}$	$\cos\theta^* \vec{e}_\lambda$	$-\cos\theta^* \vec{e}_{\theta^*} -$ $-\sin\theta^* \vec{e}_\Phi -$	$\sin\theta^* \vec{e}_\lambda$

Оператор Гамильтона вследствие ортогональности ГСК определяется как

$$\nabla = \vec{e}_{\theta^*} \frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial\theta^*} + \vec{e}_\lambda \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda} + \vec{e}_\Phi \frac{\partial}{\partial z}.$$

С учетом того, что проекции вектора $\vec{\omega}$ на направления соответствующих ортов равны $\omega_{\theta^*} = -\sin\theta^*$, $\omega_\lambda = 0$, $\omega_\Phi = \omega\cos\theta^*$ для силы Кориолиса получается следующее выражение:

$$-2\left(\vec{\omega}\times\vec{V}\right) = 2\omega\left[V_\lambda \cos\theta^* \vec{e}_{\theta^*} - \left(V_{\theta^*}\cos\theta^* + V_\Phi \sin\theta^*\right)\vec{e}_\lambda + V_\lambda \sin\theta^* \vec{e}_\Phi\right].$$

С учетом вышеизложенного осуществляется проектирование исходного векторного уравнения на базисные векторы

$$\frac{dV_{\theta^*}}{dt}+\frac{V_{\theta^*}V_\Phi}{r^*}-\frac{V_\lambda^2\cos\theta^*}{r\sin\theta}=-\frac{1}{\rho r^*}\frac{\partial P}{\partial\theta^*}+2\omega V_\lambda\cos\theta^*+N_{\theta^*};$$

$$\frac{dV_\lambda}{dt}+\frac{V_\lambda V_\Phi\sin\theta^*}{r\sin\theta}+\frac{V_\lambda V_{\theta^*}\cos\theta^*}{r\sin\theta}=$$

$$=-\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\lambda}-2\omega(V_{\theta^*}\cos\theta^*+V_\Phi\sin\theta^*)+N_\lambda;$$

$$\frac{dV_\Phi}{dt}-\frac{V_\lambda^2\sin\theta^*}{r\sin\theta}-\frac{V_{\theta^*}^2}{r^*}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}-g+2\omega V_\lambda\sin\theta^*+N_\Phi,$$

где ρ – плотность, углы θ, θ^*,α, λ направления r и r^* показаны на рис.2.9.

Для оценки радиуса кривизны геопотенциальной поверхности r^* использовано упрощенное представление нормального гравитационного поля Земли. В этом случае геопотенциал определяется выражением

$$\Phi=-\frac{\gamma M}{r}-\frac{1}{2}\omega^2r^2\sin^2\theta+\text{const},$$

где γ – гравитационная постоянная.

В результате дифференцирования этого выражения по θ для точек, лежащих на меридиональном сечении уровенной поверхности, получаются выражения

$$\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}=\text{tg}\,\alpha;$$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\theta^2}=3\,tg\theta\;\;\text{tg}^3\alpha+6\,\text{tg}^2\alpha\;+2\,\text{ctg}2\theta\,\text{tg}\alpha;$$

где $\text{tg}\,\alpha=\frac{1}{2}\sin2\theta\left(\frac{\gamma M}{\omega^2r^3}-\sin^2\theta\right)^{-1}$.

Подстановка этих выражений в соотношение, определяющее радиус кривизны плоской кривой r^* в полярных координатах $r=r(\theta)$

$$\frac{r^*}{r}=\left[1+\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}\left[1+2\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\theta}\right)^2-\frac{1}{r}\frac{d^2r}{d\theta^2}\right],$$

позволяет получить

$$\frac{r^*}{r} = \frac{\left(1 + \mathrm{tg}^2\alpha\right)^{3/2}}{1 - 3\,\mathrm{tg}\theta\,\mathrm{tg}^3\alpha - 4\,\mathrm{tg}^2\alpha - 2\,\mathrm{ctg}\,2\theta\,\mathrm{tg}\alpha}.$$

Расчеты, проведенные в [2] в предположении, что поверхность Земли является эквипотенциальной поверхностью с экваториальным радиусом 6378 км, $\omega = 7{,}29 \cdot 10^{-5}$ с$^{-1}$, $M = 5{,}976 \cdot 10^{24}$ кг, показали, что в диапазоне высот 0 – 100 км значение угла α не превышает 6,5', а отличие r^* от полярного радиуса r и $\sin\theta^*$ от $\sin\theta^*$ составляет не более 0,4% величины. С учетом этого сделан вывод, что выведенную в ГСК систему уравнений с точностью не менее 0,4% от порядка максимального члена можно записать в упрощенном виде, формально совпадающем с видом уравнений в сферической системе координат, т.е. с высокой степенью точности допустимо использование ССК в практике численного моделирования.

Однако, как подчеркивалось, к сожалению, авторы [2] ограничились рассмотрением упрощенного нормального поля силы тяжести. Это обстоятельство не позволило получить форму уравнений гидродинамики, учитывающую влияние его аномальной части.

2.4. НЕКОТОРЫЕ КОЛИЧЕСТВЕННЫЕ ОЦЕНКИ

На основе простых постановок задач, описанных в п. 2.1, были осуществлены эксперименты по оценке влияния всех трех проекций силы тяжести на атмосферные процессы.

В работе [28] выполнено выборочное исследование карт ошибок моделирования и долгосрочного прогноза поля давления (см. [14, 19, 20]), результаты которого позволили отметить два обстоятельства:

– систематическое завышение высот изобарических поверхностей в высоких широтах и занижение в низких;

– расположение экстремумов ошибок различных моделей практически в одних и тех же географических областях.

В [28] высказано предположение, что первое обстоятельство вызвано отсутствием учета изменений силы тяжести с широтой (т.е. в первую очередь нормальной силы тяжести). Компенсировать необходимость такого учета можно корректным выбором отсчетной поверхности, т.е., например, использовать ОЗЭ вместо сферы. Второе обстоятельство обусловлено отсутствием учета влияния аномалий гравитационного поля Земли.

Предположение подкреплено проведенными расчетами, которые показали, что коэффициент корреляции между ошибками моделирования поля давления в одной из наиболее полных моделей общей циркуляции атмосферы и океана [14] и нормальной силой тяжести составляет 0,8, а между экстремумами ошибок и аномалиями – более 0,9.

Для снижения ошибок моделирования и долгосрочного прогноза поля давления в [28] рекомендовано корректно выбирать поверхность отсчета для учета нормальной силы тяжести, а также учитывать влияние неоднородности силы тяжести в уравнениях движения.

В работе [29] роль вариаций силы тяжести в формировании климатического поля температуры оценена с учетом влияния на динамику атмосферы тангенциальных составляющих g_x, g_y (или g_λ, g_B). В качестве g_0 использовалась нормальная сила тяжести. В качестве возмущенной силы тяжести использовалось ее задание по соотношениям (1.6.1), (1.6.2). Вместо формулы (2.1.8) был получен ее уточненный вариант

$$\delta\overline{\upsilon} = \int\limits_0^{\Delta T} \mathrm{d}t \int\limits_D \left[g_\lambda u^* + g_B v^* - \overline{\upsilon}\,(g_h - g_0)\,w^*\right] \mathrm{d}D,$$

где $\overline{\upsilon}$ – средняя относительная температура в области D.

Расчет по этой формуле для условий п. 2.1.1 дал также величину $\delta\overline{\upsilon} = 0{,}3^0$. Однако при этом два первых слагаемых, содержащих g_λ, g_B, на два порядка превышают последнее, характеризующее влияние вариации вертикальной компоненты силы тяжести относительно ее нормальных значений. Таким образом, окончательный вывод работы [29] заключался в том, что основной вклад в вариацию температуры вносит влияние "горизонтальной" неоднородности поля силы тяжести.

В работе [30] исследовано влияние неоднородности силы тяжести на прогноз высоты среднего уровня H, в качестве которого принималась поверхность 500 гПа. Так же, как и в [9] использовалось баротропное приближение. Уравнения гидродинамики, представлялись в виде

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} - 2\omega v \sin\varphi - \frac{uv}{a}\,\mathrm{tg}\varphi = -\frac{g_h}{a\cos\varphi}\frac{\partial H}{\partial \lambda} + g_\lambda,$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\omega u \sin\varphi + \frac{u^2}{r}\,\mathrm{tg}\varphi = -\frac{g_h}{a\cos\varphi}\frac{\partial H}{\partial \varphi} + g_\varphi,$$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=0,$$

где $\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{a\cos\varphi}\left(\frac{\partial u\phi}{\partial\lambda}+\frac{\partial v\phi\cos\varphi}{\partial\varphi}\right)$.

Подчеркнем, что метеовеличины здесь относятся к уровенной поверхности, связанной с ОЗЭ.

Расчеты были выполнены для тех же условий, что и в [9]. Полученные результаты показали, что учет неоднородности поля силы тяжести оказывает заметное влияние на качество прогнозов. Однако влияние разных проекций силы тяжести проявляется различным образом.

Также, как и в [9], учет влияния нормального поля по сравнению с однородным полем (g_0 = 9,8 м/с) привел к незначительному улучшению прогнозов. Дальнейшее уточнение g_h (увеличение порядка разложения n_k) практически не влияет на качество прогнозов.

Влияние проекции g_λ носит в целом периодический характер. При этом в среднем с увеличением n_k качество прогнозов снижается. Минимальная ошибка прогнозов наблюдается при $n_k \in [2, 3]$.

Проекция g_φ оказывает наиболее сильное влияние. Наилучшее качество прогнозов наблюдается при $n_k \in [3, 6]$. При дальнейшем увеличении n_k ошибка прогнозов возрастает.

Суммарное влияние неоднородности поля силы тяжести сказывается на качество прогнозов примерно так же, как и влияние проекции g_φ.

Таким образом в [30] сделан вывод о том, что учет неоднородности поля силы тяжести приводит к заметному улучшению качества прогнозов (примерно на 12–15%) при $n_k \in [2, 6]$, т.е. при учете влияния глобальных аномальных масс, глубина залегания которых определяется по различным данным от 1600 – 1700 до 2700 – 2900 км [4]. Учет влияния неоднородностей в верхней мантии Земли, т.е. на глубине менее 900 км ($n_k \in [7, 22]$) приводит к ухудшению прогнозов. Кроме этого в [30] высказано предположение, что при $n_k > 7$ проявляется несогласованность полей метеовеличин и проекций силы тяжести. Косвенно это подтверждается тем, что ошибки коэффициентов уже при $n_k = 9$ в разложении по сферическим функциям (1.5.6) превосходят значения самих коэффициентов [4].

Если учесть, что глубина залегания аномальных масс и их протяженность имеют одинаковый порядок [4], то можно заметить, что характерные размеры глобальных аномальных масс и крупномасштабных атмосферных движений практически совпадают. Исходя из этого в [30] предложена следующая физическая интерпретация влияния силы тяжести на динамику атмосферы. Учет влияния аномальных масс, характерный размер которых близок к масштабу моделируемого движения атмосферы, приводит к улучшению прогнозов. Учет влияния аномальных масс, характерный размер которых существенно меньше масштаба моделируемого движения атмосферы, приводит к ухудшению прогнозов. С учетом этого в [30] высказана гипотеза о том, что с уменьшением масштаба моделируемых движений необходимо учитывать влияние все более мелких аномалий.

В работах [12, 31] сделана попытка исследовать влияние неоднородности силы тяжести на трансформацию кинетической энергии в общей циркуляции атмосферы.

В основе современного понимания общей циркуляции атмосферы (ОЦА) лежат представления о возможности действия макротурбулентности как отрицательной вязкости и возникновении крупномасштабных вихревых движений вследствие бароклинной неустойчивости осредненной зональной циркуляции [21]. Особенно важным в этой связи является изучение процессов генерации и трансформации энергии (прежде всего кинетической) в энергетическом цикле атмосферы.

В предположении неизменности плотности ρ по горизонтали из уравнений движения получается уравнение баланса кинетической энергии зонально-осредненного движения $\overline{K} = \frac{1}{2}\,\overline{\vec{V}}^{\,2}$ и незональных процессов $K' = \frac{1}{2}\left(\vec{V}'\right)^2$, где $\vec{V} = \overline{\vec{V}} + \vec{V}'$:

$$\rho\,\frac{\mathrm{d}\overline{K}}{\mathrm{d}t} = -\,\overline{\vec{V}}\cdot\nabla\overline{P} + \rho\overline{\vec{V}}\cdot\overline{\vec{g}} + \rho\overline{\vec{V}}\cdot\overline{\vec{F}},$$

$$\rho\,\frac{\mathrm{d}K'}{\mathrm{d}t} = -\,\overline{\vec{V}'\cdot\nabla P'} + \rho\overline{\vec{V}'\cdot\vec{g}'} + \rho\overline{\vec{V}'\cdot\vec{F}'}.$$

Анализ этих уравнений показывает, что скорость обмена $\overline{K}$ с доступной лабильной энергией зонального состояния равна $\rho\overline{\vec{V}}\cdot\overline{\vec{g}}$, а K' с доступной лабильной энергией турбулентных пульсаций равна

$\rho\overline{\vec{V}'\cdot\vec{g}'}$. Заметим, что по существующим представлениям [21] вклад силы тяжести в обмен энергией в последнем случае отсутствует.

Результаты оценки величины $A=-\int\limits_{r_0}^{\infty}\rho\overline{\vec{V}'\cdot\vec{g}'}\,\mathrm{d}r$, где r – радиус-вектор поверхности общего земного эллипсоида, по климатическому полю ветра, фиксированному на уровне среднегодовых значений, приведены на рис. 2.10. Положительным значениям A соответствует переход энергии от незонального вихревого движения к зонально-осредненному, отрицательным – от упорядоченного к макротурбулентному. Максимальные по модулю значения A составляют 4–6% от суммарного значения среднегодовой скорости обмена K' с доступной лабильной энергией незональных процессов [21]. Расположение экстремумов A объясняется особенностями распределения средне зонального потока количества движения нестационарных вихрей [5]. У поверхности Земли положения минимумов несколько смещены к экватору, а максимумов (за исключением максимума на 70° с.ш.) – к полюсу. Очевидно, это объясняется влиянием силы трения в пограничном слое. Таким образом, принятая в настоящее время схема преобразования энергии в крупномасштабных движениях требует уточнения и дополнения.

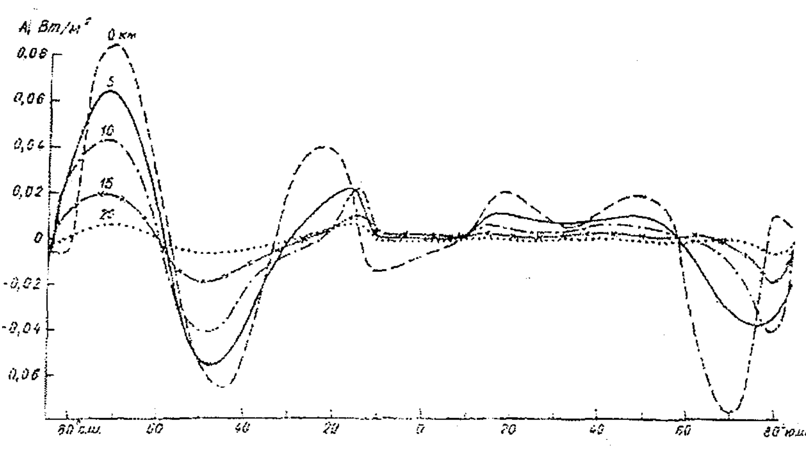


Рис. 2.10. Распределение величины А по широте на различных высотах

Глава 3
УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ, УЧИТЫВАЮЩИЕ ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ ПОЛЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

3.1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ВЕКТОРНОЙ ФОРМЕ

Будем рассматривать эволюционные уравнения гидродинамики – уравнения движения и уравнение неразрывности в векторном виде [6]:

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\omega}\times\vec{V} = \vec{F} + \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla P, \tag{3.1.1}$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\vec{V} = 0, \tag{3.1.2}$$

где $\vec{F}$ – силы вязкости; $\vec{g}$ – ускорение свободного падения; P – давление, $\vec{V}$ – вектор скорости ветра; $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения Земли; ∇– оператор Гамильтона.

В приведенном уравнении силы вязкости и градиента давления образуют результирующую поверхностных сил, а силы Кориолиса и тяжести – результирующую массовых сил.

Ускорение свободного падения с учетом того, что для единичной массы рассматриваемого объема воздуха оно численно равно силе тяжести, может быть определено из соотношения

$$\vec{g} = \nabla W, \tag{3.1.3}$$

где W – потенциал силы тяжести (геопотенциал). Заметим, что вертикальная компонента ускорения свободного падения отрицательна в силу того, что с увеличением высоты над ОЗЭ геопотенциал уменьшается.

3.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОТСЧЕТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

При изучении конкретных задач используются специальные системы координат [4, 5]. Их применение может приводить к метрическим упрощениям по сравнению с описанием, не использующим никакой системы координат. Их выбирают по возможности такими, чтобы они были приспособлены к решаемой задаче.

Для уравнений гидродинамики при небольших размерах области определения решения удобно использовать локальные декартовы координаты. При описании движений планетарного масштаба с корректным учетом гравитации необходимо использовать криволинейные ортогональные координаты, которые можно построить так, чтобы на координатной поверхности рассматриваемые функции (сила тяжести) были бы постоянными. Обычно применяют сферическую систему координат с модификацией вертикальной координаты.

Из анализа работ, описанных в гл. 2, легко видеть, что важнейшую роль при выборе подходящей системы играет определение отсчетной поверхности. Удачный ее выбор с учетом условий решаемой задачи может обеспечить вариации влияющих факторов сделать малыми величинами, что обеспечивает также упрощение и корректность решений.

Очевидно, что в качестве отсчетной поверхности для покомпонентного представления векторных уравнений гидродинамики можно использовать квазигеоид, ОЗЭ, сферу. Рассмотрим достоинства и недостатки их применения. Отсчетные поверхности, образуемые преобразованием вертикальной координаты, рассматриваются в п. 3.5.

Напомним, что нормальная сила тяжести направлена по нормали к поверхности ОЗЭ. Реальная сила тяжести перпендикулярна поверхности квазигеоида (уровню моря), который характеризует аномалии высоты (превышения). Составляющие уклонения отвесной линии определяют направление реальной силы тяжести относительно нормальной. Они характеризуются тангенциальными составляющими силы тяжести на поверхности эллипсоида.

В п. 2.2.3 было отмечено, что измеренное давление редуцируется не на уровень моря (квазигеоид), а на ОЗЭ. Различия между поверхностями квазигеоида и ОЗЭ (превышения) по абсолютной величине достигают 100 м. Редукция климатических полей давления с ОЗЭ на квазигеоид (см. п. 2.2.3) показывает, что поправки давления за счет превышений могут составить до 9 гПа.

Теперь осуществим редукцию поля давления с ОЗЭ на сферу, соответствующую фигуре Земли в виде шара со средним радиусом 6371,0 км. Напомним, что большая полуось ОЗЭ равна 6378,136 км, а малая – 6356,751 км. Следовательно, на экваторе ОЗЭ на 7,136 км превышает сферу, а на полюсах – наоборот – сфера на 14,249 км превышает ОЗЭ. Даже грубая оценка редуцированного на сферу давления показывает, что на экваторе его значение будет составлять 1900 гПа, а на полюсах – 140 гПа. Разумеется, карта такого поля не будет иметь никакой практической значимости, ибо ее анализ невозможен.

Из вышеизложенного можно сделать некоторые важные выводы:

- приведенное к «уровню моря» давление соответствует поверхности общего земного эллипсоида;
- для приведения давления к истинному уровню моря (поверхности квазигеоида) необходимо проводить его редукцию на величину, соответствующую аномалии высоты;
- редукция давления на сферу, принимаемую в качестве отсчетной поверхности, приводит к фиктивному, не имеющему физического смысла полю.

Теперь рассмотрим, как будут трансформироваться тангенциальные составляющие силы тяжести при использовании вышеуказанных отсчетных поверхностей. В случае использования квазигеоида тангенциальные составляющие тождественно равны нулю. При использовании ОЗЭ тангенциальные составляющие рассчитываются по соотношениям (1.6.2). При этом их порядок характеризуется величиной ~ $5\cdot10^{-5}$ м/с^2 (см. п. 1.6.4).

В случае использования сферы составляющие силы тяжести (g_{rc}, $g_{\varphi c}$, $g_{\lambda c}$) будут определяться соотношением (см. рис. 1.1)

$$g_{rc} = -\gamma \cos\alpha + g_r,$$

$$g_{\varphi c} = g_\varphi - \gamma \sin\alpha,$$

$$g_{\lambda c}(\varphi, \lambda, r) = g_\lambda(\varphi, \lambda, r),$$

где $\alpha = B - \varphi$.

Нетрудно видеть, что проблему вызывает тангенциальная составляющая $g_{\varphi c}$. Подстановка характерных значений для широты 45°, показывает, что второе слагаемое правой части выражения для $g_{\varphi c}$ будет иметь значение примерно $3\cdot10^{-2}$ м/с^2, превышающее наблюдаемый горизонтальный градиент давления. Следовательно, обязательно нужно редуцировать поля метеовеличин на сферу. Результат этого процесса относительно давления уже обсуждался.

Таким образом, выбор отсчетной поверхности в значительной мере определяет структуру получаемых полей и возможности их дальнейшего анализа и использования.

Учитывая сложившуюся практику объективного анализа, синоптического и численного прогноза полей метеовеличин, в качестве основной отсчетной поверхности следует рекомендовать поверхность ОЗЭ. При использовании квазигеоида или сферы необходимо проводить предварительную редукцию полей метеовеличин к этим поверхностям. Кроме этого, непосредственное применение сферы, очевидно, методически наименее правильно.

Применение ОЗЭ в качестве отсчетной поверхности позволяет основные соотношения, используемые для расчета силы тяжести и ее потенциала, записать в виде, принятом в метеорологических задачах.

Напомним, что потенциал силы тяжести равен сумме нормального и возмущающего потенциалов:

$$W = W_0 + T. \tag{3.2.1}$$

Во внешнем пространстве W изменяется обратно пропорционально расстоянию между Землей и рассматриваемой точкой. Пусть $W_{0ЗЭ}$ = const – нормальный потенциал силы тяжести на поверхности ОЗЭ (см. табл. 1.4.1). Формально можно записать

$$W = W_{0ЗЭ} - \Phi. \tag{3.2.2}$$

Именно с потенциалом Φ принято оперировать в метеорологических задачах. Выражение для него может быть получено из (3.2.1) и (3.2.2)

$$\Phi = W_{0ЗЭ} - W_0 - T.$$

Сила тяжести в этом случае вычисляется по формуле

$$\vec{g} = \nabla W = \nabla(W_{0ЗЭ} - \Phi) = -\nabla\Phi.$$

Это выражение показывает, что положительному приращению потенциала Φ соответствует отрицательное значение силы тяжести, т.е.

$$g_s| = -\ g_s|,\ s = (x, y, z)'. \tag{3.2.3}$$

3.3. ДЕКАРТОВА СИСТЕМА КООРДИНАТ

В целях гидродинамического прогноза полей метеовеличин локальная декартова система координат с осями x, y, z вводится следующим образом:

- векторные уравнения представляются в координатной форме в прямоугольной системе координат x, y, z;
- начало координат помещается в некоторую точку O на уровенной поверхности Земли так, чтобы направление оси z совпадало с направлением местной вертикали в этой точке; оси x, y распо-

лагаются взаимно ортогонально в плоскости, касательной к уровенной поверхности в выбранной точке O;

- производится ориентация осей x, y (обычно ось y направляется на север по меридиану, а ось x – на восток по параллели).

Векторные уравнения (3.1.1), (3.1.2) в координатной форме имеют вид

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_y w - \omega_z v) = F_x + g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_z u - \omega_x w) = F_y + g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad (3.3.1)$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_x v - \omega_y u) = F_z + g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0,$$

где $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$; ω_x, ω_y, ω_z – компоненты вектора $\vec{\omega}$ (угловой скорости вращения Земли); u, v, w – компоненты вектора $\vec{V}$.

С учетом выражения (3.1.3) легко видеть, что при выборе эквипотенциальной поверхности в качестве отсчетной в первых двух уравнениях производные от геопотенциала обращаются в нуль. При выборе поверхности z = const в качестве отсчетной вид уравнений не изменится. Поэтому представление уравнений гидродинамики с учетом вида от отсчетной поверхности преследует цель – выбор наиболее удобной их формы, принятой в практике численного анализа и прогноза погоды.

3.3.1. Отсчетная поверхность – квазигеоид

Выбирая точку O на поверхности квазигеоида и ориентируя ось z по внешней нормали к нему, а оси x, y на восток и на север, получаем покомпонентную форму уравнений (3.1.1), (3.1.2) в декартовых координатах

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_y w - \omega_z v) = F_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\omega_z u = F_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad (3.3.2)$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - 2\omega_y u = F_z + g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0,$$

где $\omega_y = \omega\cos\varphi$, $\omega_z = \omega\sin\varphi$, $(\omega_x = 0)$, $\omega = |\,\vec{\omega}\,|$.

Формально система (3.3.2) не отличается от традиционно используемых уравнений гидродинамики в декартовых координатах. Это действительно так, но только в окрестности начала координат. При увеличении размеров рассматриваемой области усиливается расхождение между уровенной поверхностью квазигеоида и плоскостью xOy. Это обстоятельство будет приводить к ошибкам в описании динамики атмосферы.

Как известно, не рекомендуется использовать уравнения в декартовых координатах при линейном размере области по меридиану, превышающем 2000 – 3000 км, без масштабных множителей, позволяющих учесть искажения, вносимые картографическими проекциями.

Рассмотрим вопрос о линейном размере области с точки зрения допустимости с заданным уровнем погрешностей учета неоднородности поля силы тяжести. Пусть $\vec{L}$ есть радиус-вектор, проведенный из начала координат (точки O) в некоторою точку O', принадлежащую рассматриваемой области. В окрестности точки O система уравнений (3.3.2) описывает динамику атмосферы точно. В окрестности точки O' уравнения (3.3.2) уже не описывают эффектов, обусловленных отличием местной вертикали от оси Oz. Эти эффекты сводятся к следующему. В уравнениях гидродинамики, описывающих атмосферные процессы в плоскости xOy, появляются тангенциальные составляющие вектора ускорения свободного падения, значение которых увеличивается с увеличением $\vec{L}$. Во всех уравнениях процессы по оси z будут описываться с ошибкой вследствие различия геометрической высоты и геопотенциальной. В итоге в описании динамических процессов в окрестности точки O' системой (3.3.2) будет присутствовать ошибка.

Первый эффект может быть учтен введением в правые части двух первых уравнений (3.3.2) членов $g_x \sin\beta_x$, $g_y \sin\beta_y$ соответственно, где β_x, β_y – углы, образованные местными вертикалями в точках O и O' в плоскости первого вертикала и в плоскости меридиана. С высокой точностью синусы этих углов можно выразить соотношениями

$$\sin\beta_x = L_x / R_3, \qquad \sin\beta_y = L_y / R_3,$$

где R_3 – средний радиус Земли, L_x и L_y – проекции $\vec{L}$ на оси координат x и y.

Второй эффект может быть учтен введением приращения геопотенциальной высоты (Z) вместо приращения геометрической (z). С этой целью используем соотношение, применяемое при расчете параметров стандартной атмосферы [2]:

$$Z = z\,R_3 / (R_3 + z).$$

Дифференцирование этого выражения по z позволяет получить соотношение, необходимое для анализа:

$$\frac{\mathrm{d}Z}{\mathrm{d}z} = 1 - \frac{2z}{R_3} + \frac{2z^2}{R_3^2} - \frac{z^3}{R_3^3} \approx 1 - \frac{2z}{R_3}.$$

С учетом изложенного уравнения (3.3.2) при учете неоднородности поля силы тяжести принимают вид

$$\begin{aligned}
&\frac{Du}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_y w - \omega_z v) = F_x + g_x \frac{L_x}{R_3} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},\\
&\frac{Dv}{\mathrm{d}t} + 2\omega_z u = F_y + g_y \frac{L_y}{R_3} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y},\\
&\frac{Dw}{\mathrm{d}t} - 2\omega_y u = F_z - g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial Z},\\
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial\rho u}{\partial x} + \frac{\partial\rho v}{\partial y} + \frac{\partial\rho w}{\partial Z} = 0,
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

где $\dfrac{D}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial}{\partial t} + u\dfrac{\partial}{\partial x} + v\dfrac{\partial}{\partial y} + w\dfrac{\partial}{\partial Z}$.

Здесь g_x, g_y, g_z – проекции вектора $\vec{g}$ на оси рассматриваемой системы координат.

Появившиеся в первых двух уравнениях произведения, содержащие тангенциальные составляющие вектора $\vec{g}$, обеспечивают учет горизонтальной неоднородности поля силы тяжести, а горизонтальная проекция вертикальной компоненты за счет этого фактора компенсируется соответствующей проекцией вертикальной компоненты давления.

Ошибки в описании динамики атмосферы уравнениями (3.3.2) вследствие неучета неоднородности поля силы тяжести выразятся почленной разностью уравнений (3.3.3) и (3.3.2). Третьи уравнения этих систем для предстоящего анализа не годятся, т.к. их разность представляет малую разность двух больших величин. Для трех остальных уравнений систем (3.3.2) и (3.3.3) в предположении однородности полей метеовеличин в первом приближении получим

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} \approx g_x \frac{L_x}{R_3},$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} \approx g_y \frac{L_y}{R_3}, \tag{3.3.4}$$

$$\frac{\Delta \rho}{\Delta t} \approx \frac{\partial \rho w}{\partial z}\left[1-\left(1-\frac{2z}{R_3}\right)^{-1}\right] \approx \frac{\partial \rho w}{\partial z}\left(-\frac{2z}{R_3}\right),$$

где Δt – промежуток времени, за который накапливаются ошибки Δu, Δv, Δw, $\Delta\rho'$.

Для оценки порядка величин L_x и L_y привлечем два первых из уравнений (3.3.4), переписав их в виде

$$L_x \approx \frac{\Delta u}{\Delta t} R_3 / g_x,$$

$$L_y \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} R_3 / g_y.$$

Легко видеть, что L_x и L_y прямо пропорциональны уровню допустимой ошибки составляющих скорости ветра и обратно пропорциональны степени аномальности g и промежутки времени Δt. Положим

$$\Delta u = \Delta v = 0{,}1u = 0{,}1v,$$

$$u = v = 10 \text{ м/с},$$

$$\Delta t = 10^5 \text{ с},$$

$$g_x = g_y = 50 \text{ мГал} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2,$$

$$R_З = 6371 \cdot 10^3 \text{ м}.$$

При этих значениях получаем $L_x = L_y = 127\,420$ м ≈ 130 км. Эти оценки справедливы для высокоаномального района. Для среднеаномального ($g_x = g_y \approx 20$ мГал) $L_x = L_y \approx 330$ км. Из полученных оценок следует вывод, что уравнениями (3.3.2) можно пользоваться при горизонтальных размерах области (от начала координат) порядка 130 км для высокоаномальных районов и 330 км – для среднеаномальных при указанном допустимом уровне ошибки составляющих скорости ветра. Если размеры области превышают указанные, то необходимо использовать уравнения (3.3.3), в которые нужно ввести масштабный множитель для учета искажений, вносимых картографической проекцией [1]. Заметим, что полученные оценки на порядок меньше рекомендованных в литературе линейных размеров области по широте (2000–3000 км). Дополнительное отличие состоит в появлении аналогичного ограничения на линейный размер области по долготе.

Для оценки вертикальной протяженности области рассмотрим третье уравнение в (3.3.4). Обозначим искомую высоту – проекцию $\vec{L}$ на ось координат z – через L_z. Тогда

$$L_z \approx -\frac{R_З}{2}\frac{\Delta\rho}{\Delta t}\left(\frac{\partial \rho w}{\partial z}\right)^{-1}. \tag{3.3.5}$$

Как видно величина L_z прямо пропорциональна задаваемому уровню погрешности расчета плотности и обратно пропорциональна времени Δt , вертикальному градиенту произведения вертикальной скорости на плотность.

Возьмем характерные для тропосферы значения

$$w = 10^{-2} \text{м/с},$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -3 \cdot 10^{-6} \text{с}^{-1},$$

$$\rho = 1 \text{кг/м}^3,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial z} = -10^{-4} \text{кг/м}^4,$$

$$\Delta t = 10^5 \text{ с}$$

$$\Delta\rho / \rho = 0{,}1.$$

Для рассматриваемой задачи эти значения, очевидно, завышены, но позволяют получить оценку минимального значения L_z, которую можно будет использовать. Расчет дает значение $L_z \approx 70$ км.

Отсюда следует вывод, что уравнениями (3.3.2) можно пользоваться при вертикальном размере области (от начала координат) примерно 100 км. Если размер области превышает указанный, то необходимо использовать уравнения (3.3.3).

С помощью полученных оценок L_x, L_y, L_z можно провести сравнение степени проявления влияния тангенциальных компонентов и вертикальной составляющей ускорения свободного падения. Для задач численного прогноза полей метеовеличин, как известно, горизонтальные размеры области во много раз превышают вертикальный, причем последний ограничивается несколькими десятками километров. В этой связи учет влияния тангенциальных составляющих представляется необходимым, а изменением вертикальной составляющей ускорения свободного падения можно пренебречь.

Еще раз подчеркнем, что при использовании уравнений (3.3.2) или (3.3.3) поля метеовеличин, относящиеся к плоскости xOy, должны быть предварительно рассчитаны на уровенной поверхности квазигеоида. Измеренные поля метеовеличин этому требованию не соответствуют. Поэтому непосредственное их использование в уравнениях (3.3.2) или (3.3.3) будет приводить к дополнительным ошибкам. В связи с этим необходимо осуществлять редукцию полей метеовеличин с ОЗЭ на квазигеоид.

3.3.2. Отсчетная поверхность – ОЗЭ

Выбор поверхности ОЗЭ в качестве отсчетной является наиболее предпочтительным, поскольку именно к ней приводятся измерения давления на поверхности Земли.

Выбирая точку O на ОЗЭ и ориентируя ось z по внешней нормали к нему, а оси x, y на восток и север, получаем векторные уравнения (3.1.1), (3.1.2) в проекциях на оси декартовых координат

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_y w - \omega_z v) = F_x + g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\omega_z u = F_y + g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - 2\omega_y u = F_z - g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = 0.$$

Уравнения (3.3.5) отличаются от (3.3.2) появлением в двух первых уравнениях дополнительных членов, содержащих тангенциальные составляющие ускорения свободного падения. Именно они обеспечивают учет горизонтальной неоднородности поля силы тяжести.

При увеличении размеров рассматриваемой области в плоскости xOy здесь уже не возникает проблем с учетом отличия местной вертикали в рассматриваемой точке и в начале координат. Явно присутствующие тангенциальные составляющие вектора $\vec{g}$ обеспечивают учет горизонтальной неоднородности поля силы тяжести, а горизонтальная проекция вертикальной компоненты за счет этого фактора, как и в п. 3.3.2, компенсируется соответствующей проекцией вертикальной компоненты давления. Поэтому при увеличении горизонтальных размеров области следует учесть только искажения, обусловленные использованием картографической проекции, путем введения масштабного множителя [1].

При увеличении вертикального размера области рассуждения в п. 3.3.1 остаются справедливыми и в этом случае, т.е. все производные по z необходимо заменить производными по Z.

3.3.3. Отсчетная поверхность – сфера

Выбирая точку O на сфере (поверхности земного шара) и ориентируя ось z по внешней нормали к ней, а оси x, y как обычно, получаем проекции векторных уравнений (3.1.1), (3.1.2) на оси декартовых координат

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_y w - \omega_z v) = F_x + g_\lambda - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\omega_z u = F_y + g_\varphi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}, \qquad (3.3.6)$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - 2\omega_y u = F_z - g_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+\frac{\partial\rho v}{\partial y}+\frac{\partial\rho w}{\partial z}=0.$$

Здесь g_λ, g_φ, g_r – проекции вектора $\vec{g}$ на оси сферической системы координат.

Вид уравнений (3.3.6), аналогичен (3.3.5), т.е. отличается от (3.3.2) появлением в двух первых уравнениях дополнительных членов, содержащих тангенциальные составляющие ускорения свободного падения, обеспечивающие учет горизонтальной неоднородности поля силы тяжести.

При увеличении размеров рассматриваемой области в плоскости xOy здесь так же, как в п. 3.3.2, не существеннен учет отличий местной вертикали в рассматриваемой точке и в начале координат. Явно присутствующие тангенциальные составляющие вектора $\vec{g}$ обеспечивают учет горизонтальной неоднородности поля силы тяжести, а горизонтальная проекция вертикальной компоненты за счет этого фактора компенсируется соответствующей проекцией вертикальной компоненты давления. Поэтому при увеличении горизонтальных размеров области следует учесть только искажения, обусловленные использованием картографической проекции, путем введения масштабного множителя.

При увеличении вертикального размера области рассуждения в п. 3.3.1 остаются справедливыми и в этом случае: все производные по z необходимо заменить производными по Z.

3.4. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

3.4.1. Обобщенная форма уравнений гидродинамики в криволинейных ортогональных координатах

Система криволинейных координат, заданная в области Ω_E трехмерного евклидова пространства, ставит в соответствие в каждой точке (x, y, z) упорядоченную тройку действительных чисел x^i $(i = 1, 2, 3)$. Здесь индекс i не является показателем степени.

Криволинейные ортогональные координаты x^i $(i = 1, 2, 3)$ точки $(x, y, z)\equiv (x^1, x^2, x^3)$ связаны с ее прямоугольными декартовыми координатами x, y, z формулами

$$x^i = x^i\,(x, y, z),\ (i = 1, 2, 3),$$

где функции x^i всюду в Ω_E однозначны и непрерывно дифференцируемы, причем функциональный определитель

$$\frac{\partial(x^1,x^2,x^3)}{\partial(x,y,z)} = \left(\det\left[\lambda_{ik}(x^1,x^2,x^3)\right]\right)^{-0,5} \neq 0, \qquad (i,k=1,2,3),$$

где функции λ_{ik} – компоненты метрического тензора.

С помощью λ_{ik} получается выражение для линейного элемента, которое лежит в основе всех метрических соотношений. Величины λ_{ik} являются функциями координат. Будучи скалярными величинами, они более удобны для практического использования, чем системы векторов.

Элемент длины дуги dS между точками $(x, y, z) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ и $(x+\mathrm{d}x, y+\mathrm{d}y, z+\mathrm{d}z) \equiv (x^1+\mathrm{d}x^1, x^2+\mathrm{d}x^2, x^3+\mathrm{d}x^3)$ в общем случае задается квадратичной дифференциальной формой

$$\mathrm{d}S^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = \sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\lambda_{ik}(x^1,x^2,x^3)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^k, \qquad (3.4.1)$$

где $$\lambda_{ik}(x^1,x^2,x^3) = \left[\frac{\partial x}{\partial x^i}\frac{\partial x}{\partial x^k} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\frac{\partial y}{\partial x^k} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\frac{\partial z}{\partial x^k}\right] \quad (i,k=1,2,3).$$

При описании векторной функции в криволинейных координатах применяется локальный базис из векторов, касательных к координатным линиям в каждой точке, или перпендикулярных к ним. В каждой системе криволинейных координат можно осуществить выбор локального базиса тремя способами: на основе физических, контравариантных и ковариантных векторов [12].

Остановимся на первом способе, на основе которого проводится дальнейшее изложение. В этом случае в качестве векторов локального базиса в каждой точке (x^1, x^2, x^3) выбираются единичные векторы $\vec{i}_1(x^1,x^2,x^3)$, $\vec{i}_2(x^1,x^2,x^3)$, $\vec{i}_3(x^1,x^2,x^3)$, касательные к координатным линиям x^1, x^2, x^3. Каждая векторная функция может быть однозначно представлена в виде $\vec{F}(x^1,x^2,x^3) = F_1\vec{i}_1 + F_2\vec{i}_2 + F_3\vec{i}_3$ в каждой точке (x^1, x^2, x^3). Физические координаты $F_1(x^1, x^2, x^3)$, $F_2(x^1, x^2, x^3)$, $F_3(x^1, x^2, x^3)$ и локальные базисы $\vec{i}_1(x^1,x^2,x^3)$, $\vec{i}_2(x^1,x^2,x^3)$, $\vec{i}_3(x^1,x^2,x^3)$ могут быть выражены непосредственно через координаты F_x, F_y, F_z того же вектора и орты $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ прямоугольной декартовой системы координат [4]:

$$\vec{i}_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{ii}}}\left(\frac{\partial x}{\partial x^i}\vec{i} + \frac{\partial y}{\partial x^i}\vec{j} + \frac{\partial z}{\partial x^i}\vec{k}\right),$$

$$F_i = \sqrt{\lambda_{ii}}\left(\frac{\partial x^i}{\partial x}F_x + \frac{\partial x^i}{\partial y}F_y + \frac{\partial x^i}{\partial z}F_z\right).$$

Заметим, что функции $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{ii}}}\frac{\partial x}{\partial x^i}$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{ii}}}\frac{\partial y}{\partial x^i}$, $\frac{1}{\sqrt{\lambda_{ii}}}\frac{\partial z}{\partial x^i}$ являются направляющими косинусами орта $\vec{i}_i$ по отношению к осям Ox, Oy, Oz. Это показывает, что векторы локального базиса сами являются векторными функциями точки и это обстоятельство необходимо учитывать при осуществлении операций дифференцирования.

Отметим важное достоинство физических координат. В случае применения ортогональных координат формулы (векторные соотношения) принимают сравнительно простые выражения именно в физических координатах (см. табл. 3.1).

Система координат x^i ($i = 1, 2, 3$) является ортогональной, если $\lambda_{ik} = 0$ при $i \neq k$. В этом случае выражение (3.4.1) примет вид

$$\lambda_{ii}(x^1, x^2, x^3) = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial x^i}\right)^2\right], \qquad (i=1,2,3).$$

Отметим, что функции $h_i = \sqrt{\lambda_{ii}}$ носят название коэффициентов Ламэ и имеют физический смысл скоростей изменения радиуса-вектора вдоль координат x^i ($i = 1, 2, 3$).

Как видно из табл. 3.1, для представления векторных соотношений в криволинейных ортогональных координатах достаточно знать коэффициенты Ламэ.

Обратимся к векторным уравнениям (3.1.1), (3.1.2), которые перепишем в виде

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V} + 2\vec{\omega}\times\vec{V} = \vec{F} + \vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla P, \qquad (3.4.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\left(\rho\vec{V}\right) = 0.$$

При представлении этих уравнений в криволинейных ортогональных координатах преобразованию будут подвергнуты, очевидно, следующие операторы в выражениях

$$\left(\vec V\cdot\nabla\right)\vec V,\quad \vec\omega\times\vec V,\ \nabla P,\ \left(\nabla\cdot\vec V\right).$$

Таблица 3.1

Векторные соотношения в ортогональных координатах [4] (знаки плюс и минус относятся к правой и левой системам координат)

$\vec F\cdot\vec G = F_1G_1 + F_2G_2 + F_3G_3;\qquad \left\lvert\vec F\right\rvert = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + F_3^2},$
$\vec F\times\vec G = \pm\begin{vmatrix} \vec i_1 & \vec i_2 & \vec i_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix},$
$\nabla P \equiv \pm\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_{11}}}\frac{\partial P}{\partial x^1}\vec i_1 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{22}}}\frac{\partial P}{\partial x^2}\vec i_2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_{33}}}\frac{\partial P}{\partial x^3}\vec i_3\right),$
$\nabla\cdot\vec F \equiv \frac{1}{\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33}}}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(F_1\sqrt{\lambda_{22}\lambda_{33}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(F_2\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{33}}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(F_3\sqrt{\lambda_{22}\lambda_{11}}\right)\right],$
$\nabla\times\vec F \equiv \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33}}}\begin{vmatrix} \sqrt{\lambda_{11}}\,\vec i_1 & \sqrt{\lambda_{22}}\,\vec i_2 & \sqrt{\lambda_{33}}\,\vec i_3 \\ \frac{\partial}{\partial x^1} & \frac{\partial}{\partial x^2} & \frac{\partial}{\partial x^3} \\ F_1\sqrt{\lambda_{11}} & F_2\sqrt{\lambda_{22}} & F_3\sqrt{\lambda_{33}} \end{vmatrix},$
$\left(\vec F\cdot\nabla\right)P \equiv \pm\left(\frac{F_1}{\sqrt{\lambda_{11}}}\frac{\partial P}{\partial x^1} + \frac{F_2}{\sqrt{\lambda_{22}}}\frac{\partial P}{\partial x^2} + \frac{F_3}{\sqrt{\lambda_{33}}}\frac{\partial P}{\partial x^3}\right),$
$\nabla^2 P \equiv \frac{1}{\sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22}\lambda_{33}}}\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\sqrt{\frac{\lambda_{22}\lambda_{33}}{\lambda_{11}}}\frac{\partial P}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\sqrt{\frac{\lambda_{11}\lambda_{33}}{\lambda_{22}}}\frac{\partial P}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\sqrt{\frac{\lambda_{22}\lambda_{11}}{\lambda_{33}}}\frac{\partial P}{\partial x^3}\right)\right]\right\},$

Кроме этого, для получения уравнения вихря скорости потребуется преобразовать оператор $\nabla\times\vec V$. Выражения для всех операторов, кроме первого, приведены в табл. 3.1. Выражение для преобразования первого оператора получим на основе правил действий с оператором ∇ [4]. Для двух векторов $\vec F$, $\vec G$ имеет место равенство

$$\left(\vec G\cdot\nabla\right)\vec F = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\nabla\times(\vec F\times\vec G) + \nabla(\vec F\cdot\vec G) - \vec F(\nabla\cdot\vec G) + \\ +\vec G(\nabla\cdot\vec F) - \vec F\times(\nabla\times\vec G) - \vec G\times(\nabla\times\vec F)\end{bmatrix}.$$

Полагая $\vec F = \vec G = \vec V$ и приводя подобные члены, получим

$$\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V} = \frac{1}{2}\nabla(\vec{V}\cdot\vec{V}) - \vec{V}\times(\nabla\times\vec{V}).$$

Члены правой части могут быть расписаны с помощью векторных соотношений из табл. 3.1.

$$\frac{1}{2}\nabla\left(\vec{V}\cdot\vec{V}\right)=\frac{1}{2}\nabla\left(V_1^2+V_2^2+V_3^2\right)=\pm\sum_{n=1}^{3}\frac{1}{h_n}\left(V_1\frac{\partial V_1}{\partial x^n}+V_2\frac{\partial V_2}{\partial x^n}+V_3\frac{\partial V_3}{\partial x^n}\right)\vec{i}_n;$$

$$(\nabla\times\vec{V}) = \pm\frac{1}{h_1h_2h_3}\cdot\left[\begin{array}{l} h_1\,\vec{i}\left(\frac{\partial V_3h_3}{\partial x^2}-\frac{\partial V_2h_2}{\partial x^3}\right)+h_2\,\vec{i}_2\left(\frac{\partial V_1h_1}{\partial x^3}-\frac{\partial V_3h_3}{\partial x^1}\right)+ \\ +h_3\,\vec{i}_3\left(\frac{\partial F_2h_2}{\partial x^1}-\frac{\partial V_1h_1}{\partial x^2}\right)\end{array}\right];$$

$$\vec{V}\times\left(\nabla\times\vec{V}\right) = \left[\frac{V_2}{h_1h_2}\left(\frac{\partial V_2h_2}{\partial x^1}-\frac{\partial V_1h_1}{\partial x^2}\right)-\frac{V_3}{h_1h_3}\left(\frac{\partial V_1h_1}{\partial x^3}-\frac{\partial V_3h_3}{\partial x^1}\right)\right]\vec{i}_1 +$$

$$+\left[\frac{V_3}{h_2h_3}\left(\frac{\partial V_3h_3}{\partial x^2}-\frac{\partial V_2h_2}{\partial x^3}\right)-\frac{V_1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial V_2h_2}{\partial x^1}-\frac{\partial V_1h_1}{\partial x^2}\right)\right]\vec{i}_2 +$$

$$+\left[\frac{V_1}{h_1h_3}\left(\frac{\partial V_1h_1}{\partial x^3}-\frac{\partial V_3h_3}{\partial x^1}\right)-\frac{V_2}{h_2h_3}\left(\frac{\partial V_3h_3}{\partial x^2}-\frac{\partial V_2h_2}{\partial x^3}\right)\right]\vec{i}_3.$$

Здесь $V_1=\frac{\mathrm{d}x^1}{\mathrm{d}t}$, $V_2=\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}t}$, $V_3=\frac{\mathrm{d}x^3}{\mathrm{d}t}$ – компоненты вектора скорости ветра $\vec{V}$.

С помощью полученных выражений запишем векторное соотношение для адвекции компонент вектора ветра:

$$\left(\vec{V}\cdot\nabla\right)\vec{V} = \frac{1}{h_1}\left[\pm V_1\frac{\partial V_1}{\partial x^1}+\frac{V_2}{h_2}\frac{\partial V_1h_1}{\partial x^2}+\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial V_1h_1}{\partial x^3}+\right.$$

$$\left.+V_2\left(-\frac{1}{h_2}\frac{\partial V_2h_2}{\partial x^1}\pm\frac{\partial V_2}{\partial x^1}\right)+V_3\left(-\frac{1}{h_3}\frac{\partial V_3h_3}{\partial x^1}\pm\frac{\partial V_3}{\partial x^1}\right)\right]\vec{i}_1 +$$

$$+\frac{1}{h_2}\left[\frac{V_1}{h_1}\frac{\partial V_2h_2}{\partial x^1}\pm V_2\frac{\partial V_2}{\partial x^2}+\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial V_2h_2}{\partial x^3}+\right.$$

$$
+V_3\left(-\frac{1}{h_3}\frac{\partial V_3 h_3}{\partial x^2}\pm\frac{\partial V_3}{\partial x^2}\right)+V_1\left(-\frac{1}{h_1}\frac{\partial V_1 h_1}{\partial x^2}\pm\frac{\partial V_1}{\partial x^2}\right)\Bigg]\vec{i}_2+
$$

$$
+\frac{1}{h_3}\left[\frac{V_1}{h_1}\frac{\partial V_3 h_3}{\partial x^1}+\frac{V_2}{h_2}\frac{\partial V_3 h_3}{\partial x^2}\pm V_3\frac{\partial V_3}{\partial x^3}+\right.
$$

$$
\left.+V_1\left(-\frac{1}{h_1}\frac{\partial V_1 h_1}{\partial x^3}\pm\frac{\partial V_1}{\partial x^3}\right)+V_2\left(-\frac{1}{h_2}\frac{\partial V_2 h_2}{\partial x^3}\pm\frac{\partial V_2}{\partial x^3}\right)\right]\vec{i}.
$$

Подставляя это соотношение и соотношения из табл. 3.1. в уравнения гидродинамики (3.4.2), получим в покомпонентном виде:

– уравнение движения в направлении оси x^1:

$$
\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{1}{h_1}\left[\pm V_1\frac{\partial V_1}{\partial x^1}+\frac{V_2}{h_2}\frac{\partial V_1 h_1}{\partial x^2}+\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial V_1 h_1}{\partial x^3}+\right.
$$

$$
\left.+V_2\left(-\frac{1}{h_2}\frac{\partial V_2 h_2}{\partial x^1}\pm\frac{\partial V_2}{\partial x^1}\right)+V_3\left(-\frac{1}{h_3}\frac{\partial V_3 h_3}{\partial x^1}\pm\frac{\partial V_3}{\partial x^1}\right)\right]+ \qquad (3.4.3)
$$

$$
+2\left(\omega_{x^2}V_3-\omega_{x^3}V_2\right)=F_{x^1}+g_{x^1}\mp\frac{1}{\rho}\frac{1}{h_1}\frac{\partial P}{\partial x^1};
$$

– уравнение движения в направлении оси x^2:

$$
\frac{\partial V_2}{dt}+\frac{1}{h_2}\left[\frac{V_1}{h_1}\frac{\partial V_2 h_2}{\partial x^1}\pm V_2\frac{\partial V_2}{\partial x^2}+\frac{V_3}{h_3}\frac{\partial V_2 h_2}{\partial x^3}+\right.
$$

$$
\left.V_3\left(-\frac{1}{h_3}\frac{\partial V_3 h_3}{\partial x^2}\pm\frac{\partial V_3}{\partial x^2}\right)+V_1\left(-\frac{1}{h_1}\frac{\partial V_1 h_1}{\partial x^2}\pm\frac{\partial V_1}{\partial x^2}\right)\right]+ \qquad (3.4.4)
$$

$$
+2\left(\omega_{x^3}V_1-\omega_{x^1}V_3\right)=F_{x^2}+g_{x^2}\mp\frac{1}{\rho}\frac{1}{h_2}\frac{\partial P}{\partial x^2};
$$

– уравнение движения в направлении оси x^3:

$$\frac{\partial V_3}{\partial t}+\frac{1}{h_3}\left[\frac{V_1}{h_1}\frac{\partial V_3 h_3}{\partial x^1}+\frac{V_2}{h_2}\frac{\partial V_3 h_3}{\partial x^2}\pm V_3\frac{\partial V_3}{\partial x^3}+\right.$$

$$\left.+V_1\left(-\frac{1}{h_1}\frac{\partial V_1 h_1}{\partial x^3}\pm\frac{\partial V_1}{\partial x^3}\right)+V_2\left(-\frac{1}{h_2}\frac{\partial V_2 h_2}{\partial x^3}\pm\frac{\partial V_2}{\partial x^3}\right)\right]+ \qquad (3.4.5)$$

$$+2\left(\omega_{x^1}V_2-\omega_{x^2}V_1\right)=F_{x^3}+g_{x^3}\mp\frac{1}{\rho}\frac{1}{h_3}\frac{\partial P}{\partial x^3};$$

– уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\rho V_1 h_2 h_3\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\rho V_2 h_1 h_3\right)+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\rho V_3 h_1 h_2\right)\right]=0. \quad (3.4.6)$$

Таким образом, получена обобщенная система уравнений движения и неразрывности (3.4.3) – (3.4.6), позволяющая представить уравнения гидродинамики в любой системе криволинейных ортогональных координат, предварительно определив коэффициенты Ламэ.

3.4.2. Сферические координаты

Поместим начало координат O в центр сферы и введем координаты: $x^1 = r$ – расстояние от начала координат до рассматриваемой точки (положительное направление – вверх); $x^2 = \theta$ – дополнение до широты (положительное направление – на юг); $x^3 = \lambda$ – долгота, отсчитываемая от нулевого меридиана к востоку. Тогда система координат $Or\theta\lambda$ будет правой системой сферических координат.

В соответствии с обозначением для $x^i\left(i=1,2,3\right)$

$$\mathrm{d}x^1=\mathrm{d}r;\ \mathrm{d}x^2=\mathrm{d}\theta;\ \mathrm{d}x^3=\mathrm{d}\lambda.$$

Приращения длины дуги $\mathrm{d}S$ (3.4.1), соответствующие приращениям координат $\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}\lambda$ равны

$$\mathrm{d}S_r=\mathrm{d}r,\ \mathrm{d}S_\theta=r\,\mathrm{d}\theta,\ \mathrm{d}S_\lambda=r\sin\theta\,\mathrm{d}\lambda.$$

Отсюда для коэффициентов Ламэ имеем

$$h_r=1,\ h_\theta=r,\ h_\lambda=r\sin\theta. \qquad (3.4.7)$$

Определим также проекции вектора угловой скорости вращения Земли на оси введенной системы координат:

$$\omega_r=\omega\cos\theta,\ \omega_\theta=-\,\omega\sin\theta,\ \omega_\lambda=0$$

и введем обозначения $\quad V_1=\mathrm{w},\ V_2=v,\ V_3=u.$

Тогда получаем систему уравнений (3.4.3) – (3.4.6) в сферических координатах

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{u}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \lambda}+v\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial vr}{\partial r}+\frac{\partial v}{\partial r}\right)+$$

$$+u\left(-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial ur\sin\theta}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial r}\right)-2\omega\sin\theta\, u = F_r+g_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r};$$

$$\frac{\partial v}{dt}+\frac{1}{r}\left[w\frac{\partial vr}{\partial r}+v\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{u}{r\sin\theta}\frac{\partial vr}{\partial \lambda}+\right.$$

$$\left.+u\left(-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial ur\sin\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)+w\left(-\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right]+$$

$$+2\omega\cos\theta\, u = F_\theta+g_\theta-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{r\sin\theta}\left[w\frac{\partial ur\sin\theta}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial ur\sin\theta}{\partial \theta}+u\frac{\partial u}{\partial \lambda}+\right.$$

$$\left.+w\left(-\frac{\partial w}{\partial \lambda}+\frac{\partial w}{\partial \lambda}\right)+v\left(-\frac{1}{r}\frac{\partial vr}{\partial \lambda}+\frac{\partial v}{\partial \lambda}\right)\right]+$$

$$+2(\omega\cos\theta v+\omega\sin\theta w) = F_\lambda+g_\lambda-\frac{1}{\rho}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \lambda};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho wr^2\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\rho vr\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\rho ur\right)\right]=\theta.$$

Индексы r, θ, λ указывают проекции на оси координат r, θ, λ соответственно. Здесь и далее g_r, g_Z, g_Φ отрицательны, т.к. направлены противоположно осям r, z, Φ.

Приводя подобные члены, получаем уравнения гидродинамики в сферических координатах

$$\begin{gathered}\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{u}{r\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \lambda}-\frac{v^2+u^2}{r}-\\ -2\omega\sin\theta\, u = F_r+g_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r};\end{gathered} \qquad (3.4.8)$$

$$\frac{\partial v}{dt} + w\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \lambda} - \frac{u^2}{r}\mathrm{ctg}\theta + \frac{vw}{r} -$$

$$-2\omega\cos\theta u = F_\theta + g_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial P}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + w\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{u}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{uw}{r} + \frac{uv}{r}\mathrm{ctg}\theta +$$

$$+2(\omega\cos\theta v + \omega\sin\theta w) = F_\lambda + g_\lambda - \frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \lambda};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho w r^2\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \lambda}(\rho u) = 0.$$

3.4.3. Геоидальные координаты

Поместим начало координат O в центр геоида и введем координаты: $x^1 = \Phi$ – относительный геопотенциал (см. п. 3.2) в рассматриваемой точке (положительное направление – вверх), определяемый разностью $\Phi = W - W_\Gamma$, где $W_\Gamma = \mathrm{const}$ – потенциал силы тяжести на поверхности геоида; $x^2 = \theta = \pi/2 - B$ – дополнение до геодезической широты B (положительное направление – на юг); $x^3 = \lambda$ – долгота, отсчитываемая от нулевого меридиана к востоку. Тогда система координат $O\Phi\theta\lambda$ есть правая система геоидальных координат.

В соответствии с определением положим

$$\mathrm{d}x^1 = \mathrm{d}\Phi;\ \mathrm{d}x^2 = \mathrm{d}\theta;\ \mathrm{d}x^3 = \mathrm{d}\lambda.$$

Здесь уровенная поверхность геоида используется в качестве отсчетной. Поэтому вектор $\vec{g}$ будет иметь только одну составляющую – вертикальную g_Φ.

Напомним, что коэффициенты Ламэ характеризуют скорость изменения радиуса-вектора вдоль осей координат. В случае сферических координат эта скорость постоянна в силу того, что кривизна сферы в любой точке одинакова (радиус сферы постоянен). В случае геоидальных координат кривизна уровенной поверхности зависит от координат. Количественно кривизна геоида выражается соотношениями (1.3.4), (1.3.5). Поэтому приращения длины дуги dS

[см. (3.4.1)], соответствующие приращениям координат $d\Phi$, $d\theta$, $d\lambda$, будут равны

$$dS_\Phi = d\Phi,\ dS_\theta = R_M\, d\theta,\ dS_\lambda = R_B \sin\theta\, d\lambda,$$

где $R_M = r_M + H$;

$$R_B = r_B/\sin\theta + H;$$

$$H = \Phi/g_\Phi.$$

Следовательно, радиусы кривизны R_M, $R_B \sin\theta$ будут характеризовать скорость изменения радиуса-вектора в направлении осей системы геоидальных координат. Отсюда для коэффициентов Ламэ получим

$$h_r = 1,\ h_\theta = R_M,\ h_\lambda = R_B \sin\theta.$$

Определим, как и в случае сферических координат, проекции вектора угловой скорости вращения Земли на оси введенной системы координат:

$$\omega_r = \omega\cos\theta,\ \omega_\theta = -\,\omega\sin\theta,\ \omega_\lambda = 0$$

и введем обозначения

$$V_1 = w,\ V_2 = v,\ V_3 = u.$$

В результате получаем систему уравнений (3.4.3)–(3.4.6) в геоидальных координатах

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w\frac{\partial w}{\partial \Phi} + \frac{v}{R_M}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{u}{R_B\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \lambda} + v\left(-\frac{1}{R_M}\frac{\partial vR_M}{\partial \Phi} + \frac{\partial v}{\partial \Phi}\right) +$$

$$+u\left(-\frac{1}{R_B\sin\theta}\frac{\partial uR_B\sin\theta}{\partial \Phi} + \frac{\partial u}{\partial \Phi}\right) +$$

$$-\,2\omega\sin\theta u \;=\; F_\Phi + g_\Phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \Phi};$$

$$\frac{\partial v}{dt} + \frac{1}{R_M}\left[w\frac{\partial vR_M}{\partial \Phi} + v\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{R_B\sin\theta}\frac{\partial vR_M}{\partial \lambda} + \right.$$

$$\left. +u\left(-\frac{1}{R_B\sin\theta}\frac{\partial uR_B\sin\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + w\left(-\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial w}{\partial \theta}\right)\right] +$$

$$-\,2\omega\cos\theta u \;=\; F_\theta - \frac{1}{\rho R_M}\frac{\partial P}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{R_B\sin\theta}\left[w\frac{\partial uR_B\sin\theta}{\partial\Phi}+\frac{v}{R_M}\frac{\partial uR_B\sin\theta}{\partial\theta}+u\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\right.$$

$$\left.+w\left(-\frac{\partial w}{\partial\lambda}+\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right)+v\left(-\frac{1}{R_M}\frac{\partial vR_M}{\partial\lambda}+\frac{\partial v}{\partial\lambda}\right)\right]+$$

$$+2(\omega\cos\theta v+\omega\sin\theta w)=F_\Phi-\frac{1}{\rho R_B\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial\lambda};$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{R_M R_B\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\Phi}(\rho wR_M R_B\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho vR_B\sin\theta)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\lambda}(\rho uR_M)\right]=\theta.$$

Индексы Φ, θ, λ указывают проекции на оси координат Φ, θ, λ, соответственно, g_Φ – отрицательно.

Приводя подобные члены, получаем окончательный вид уравнений гидродинамики в геоидальных координатах

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial\Phi}+\frac{v}{R_M}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{u}{R_B\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial\lambda}-2\omega\sin\theta u-$$

$$-\frac{v^2}{R_M}\frac{\partial R_M}{\partial\Phi}-\frac{u^2}{R_B}\frac{\partial R_B}{\partial\Phi}=F_\Phi+g_\Phi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial\Phi};$$

$$\frac{\partial v}{dt}+w\frac{\partial v}{\partial\Phi}+\frac{v}{R_M}\frac{\partial v}{\partial\theta}+\frac{u}{R_B\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\lambda}-\frac{u^2}{R_M}\operatorname{ctg}\theta+$$

$$+\frac{wv}{R_M}\frac{\partial R_M}{\partial\Phi}-2\omega\cos\theta u+\frac{uv}{R_M R_B\sin\theta}\frac{\partial R_M}{\partial\lambda}-\frac{u^2}{R_M R_B}\frac{\partial R_B}{\partial\theta}= \quad (3.4.9)$$

$$=F_B-\frac{1}{\rho R_M}\frac{\partial P}{\partial\theta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+w\frac{\partial u}{\partial \Phi}+\frac{v}{R_M}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{u}{R_B\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \lambda}+\frac{uw}{R_B}\frac{\partial R_B}{\partial \Phi}+\frac{uv}{R_M}\mathrm{ctg}\theta+$$

$$+2(\omega\cos\theta v+\omega\sin\theta w)+\frac{uv}{R_M R_B}\frac{\partial R_B}{\partial \theta}-\frac{v^2}{R_M R_B\sin\theta}\frac{\partial R_M}{\partial \lambda}=$$

$$=F_\lambda-\frac{1}{\rho R_B\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \lambda};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{R_M R_B}\frac{\partial}{\partial \Phi}(\rho w R_M R_B)+\frac{1}{R_M\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v\sin\theta)+$$

$$+\frac{1}{R_B\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \lambda}(\rho u)+\frac{\rho v}{R_M R_B}\frac{\partial R_B}{\partial \theta}+\frac{\rho u}{R_M R_B}\frac{\partial R_M}{\partial \lambda}=0.$$

Как видно из сравнения систем уравнений (3.4.8) и (3.4.9), их структура схожа. Однако по сравнению со сферическими в геоидальных координатах четко разделен вклад «зональной» и «широтной» метрики, обусловленный сложной геометрией геоида. Кроме этого, в уравнениях (3.4.9) имеются по два дополнительных слагаемых (последние два члена в левых частях), описывающие изменения кривизны уровенной поверхности, обусловленные изменением координат.

Необходимо отметить, что несмотря на присутствие в уравнениях только проекции силы тяжести на нормаль к геоиду, влияние тангенциальных ее составляющих учитывается неявно через соответствующие радиусы кривизны [см. выражения (1.3.4), (1.3.5)].

В предельном случае при $R_M = R_B \sin\theta = r$ (при трансформации геоида в сферу радиуса r) система (3.4.9) вырождается в (3.4.8).

3.4.4. Эллипсоидальные координаты

Поместим начало координат O в центр эллипсоида и введем координаты: $x^1 = \Phi$ – относительный нормальный геопотенциал (см. п. 3.2) в рассматриваемой точке (положительное направление – вверх), определяемый разностью $\Phi = W_о - W_{озэ}$, где $W_о$ – нормальный потенциал силы тяжести; $W_{озэ}$=const – есть $W_о$ на поверхности ОЗЭ; $x^2 = \theta = \pi/2 - B$ – дополнение до геодезической широты B (положительное направление – на юг); $x^3 = \lambda$ – долгота, отсчитываемая от нулевого меридиана к востоку. Тогда система координат $O\Phi\theta\lambda$ является правой системой эллипсоидальных координат.

В соответствии с определением положим

$$dx^1 = d\Phi;\ dx^2 = d\theta;\ dx^3 = d\lambda.$$

Здесь уровенная поверхность ОЗЭ используется в качестве отсчетной. На этой поверхности вектор $\vec{g}$ будет иметь вертикальную g_Φ и тангенциальные g_θ, g_λ составляющие.

Согласно [8], радиусы кривизны ОЗЭ в меридиане и первом вертикале выражаются соотношениями

$$r_{MЭ} = a\left(1 - e^2\right)\left(1 - e^2 \sin^2 B\right)^{-0,5}; \qquad r_{BЭ} = a\left(1 - e^2 \sin^2 B\right)^{-0,5}.$$

Поэтому приращения длины дуги dS [см. (3.4.1)], соответствующие приращениям координат $d\Phi$, $d\theta$, $d\lambda$, будут равны

$$.dS_\Phi = d\Phi,\ dS_\theta = R_M\, d\theta,\ dS_\lambda = R_B \sin\theta\, d\lambda,$$

где $R_M = r_{MЭ} + H; \qquad R_B = r_{BЭ} / \sin\theta + H; \qquad H = \Phi / \gamma,$

γ – нормальная сила тяжести.

Для коэффициентов Ламэ получаем

$$h_r = 1\ ,\ h_\theta = R_M\ ,\ h_\lambda = R_B \sin\theta. \tag{3.4.10}$$

Определим, как и в случае сферических координат, проекции вектора угловой скорости вращения Земли на оси введенной системы координат:

$$\omega_r = \omega \cos\theta,\ \omega_\theta = -\,\omega \sin0,\ \omega_\lambda = 0$$

и введем обозначения

$$V_1 = w,\ V_2 = v,\ V_3 = u.$$

Можно получить систему уравнений гидродинамики в эллипсоидальных координатах таким же способом, как это было сделано в двух предыдущих пунктах. Однако, можно предположить, что геоид трансформирован в ОЗЭ. Тогда из (3.4.9) с учетом

$$\frac{\partial R_M}{\partial \Phi} = \frac{\partial R_B}{\partial \Phi}\frac{1}{\gamma}; \qquad \frac{\partial R_M}{\partial \lambda} + \frac{\partial R_B}{\partial \lambda} = 0;$$

$$\frac{\partial R_M}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}\frac{r_M^3}{a^2\left(1 - e^2\right)^2} e^2 \sin\left(\pi - 2\theta\right) \approx r_{MЭ}^3 E;$$

$$\frac{\partial R_B}{\partial \theta} = r_{BЭ}^3 E;$$

где $E=-\frac{1}{2}\frac{e^2}{a^2}\sin(\pi-2\theta)$, получаем

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial \Phi}+\frac{v}{R_M}\frac{\partial w}{\partial \theta}+\frac{u}{R_B\sin\theta}\frac{\partial w}{\partial \lambda}-$$
$$-2\omega\sin\theta u-\frac{v^2}{R_M\gamma}-\frac{u^2}{R_B\gamma}=F_\Phi-g_\Phi-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \Phi}; \tag{3.4.11}$$

$$\frac{\partial v}{dt}+w\frac{\partial v}{\partial \Phi}+\frac{v}{R_M}\frac{\partial v}{\partial \theta}+\frac{u}{R_B\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial \lambda}-\frac{u^2}{R_M}ctg\theta+\frac{wv}{R_M\gamma}-$$
$$-2\omega\cos\theta u-\frac{u^2}{R_M R_B}r_{BЭ}^3E=F\ \ +g_\theta-\frac{1}{\rho R_M}\frac{\partial P}{\partial \theta};$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+w\frac{\partial u}{\partial \Phi}+\frac{v}{R_M}\frac{\partial u}{\partial \theta}+\frac{u}{R_B\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \lambda}+\frac{uw}{R_B\gamma}+\frac{uv}{R_M}\mathrm{ctg}\theta+$$
$$+2(\omega\cos\theta v+\omega\sin\theta w)+\frac{uv}{R_M R_B}r_{BЭ}^3E=F_\lambda+g_\lambda-\frac{1}{\rho R_B\sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \lambda};$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{1}{R_M R_B}\frac{\partial}{\partial \Phi}(\rho w R_M R_B)+\frac{1}{R_M\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho v\sin\theta)+$$
$$+\frac{1}{R_B\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \lambda}(\rho u)+\frac{\rho v}{R_M R_B}r_{BЭ}^3E=0.$$

По сравнению с уравнениями в геоидальных координатах здесь в явном виде учитывается влияние неоднородности поля силы тяжести. В предельном случае при $R_M = R_B \sin\theta = r$ (при трансформации ОЗЭ в сферу радиуса r) система (3.4.11) вырождается в (3.4.8). Это обстоятельство можно использовать для упрощения системы уравнений (3.4.11). Однако при этом следует помнить, что все рассматриваемые поля относятся к уровенной поверхности эллипсоида, а не сферы (см. п. 2.3.3). Как отмечалось выше, в связи со сложившейся практикой объективного анализа, синоптического и численного прогнозов полей метеовеличин, наиболее удобно в качестве основной отсчетной поверхности использовать ОЗЭ. В этой связи для описания движений глобального масштаба следует рекомендовать систему уравнений гидродинамики в виде (3.4.11).

Полученная форма уравнений движения и их форма в п. 2.3.3 несколько различаются, что обусловлено различием вертикальных координат и коэффициентов Ламэ [см. (2.3.1) и (3.4.10)].

3.5. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ, СВЯЗАННЫЕ С ДАВЛЕНИЕМ

3.5.1. Уравнения гидродинамики в системе с обобщенной вертикальной координатой

Всем полученным выше формам покомпонентного представления уравнений гидродинамики присущи общие недостатки:

- область интегрирования является неограниченной по направлению вертикальной оси z (или Z);
- реальная поверхность Земли не совпадает с уровнем z = const (или Z = const).

Если горизонтальные масштабы рассматриваемых процессов существенно превышают вертикальный, т.е. когда применимо гидростатическое приближение, то удобно заменить координату z (или Z) другой переменной, используя также x, y в качестве других независимых координат. Такой переменной может служить любая метеовеличина, монотонно зависящая от высоты. Например, А. Касахара [10] исследовал возможности использования потенциальной температуры и плотности. Однако наиболее широко используются изобарические координаты, которые впервые ввел А. Элиассен [9]. Главные преимущества этих координат заключаются в том, что:

- уравнение неразрывности линейно;
- правые части в уравнениях движения линейны;
- область интегрирования по направлению вертикальной оси практически ограничена.

Однако, так же, как в z-системах, при замене Z на P необходимо формулировать краевые условия на P-поверхности, на которых невозможно сформулировать естественные кинематические условия.

В этом отношении определенными преимуществами обладают сигма-координаты, которые ввел Н.Филлипс [11]. В этих координатах поверхность Земли является координатной поверхностью, что позволяет корректно поставить нижнее граничное условие. Однако здесь имеются трудности, связанные с вычислением сил в горных районах.

Рассмотрим, следуя работам [3,7], преобразование уравнений гидродинамики с высотой z в качестве вертикальной координаты в уравнения, в которых вертикальной координатой служит в принципе любая метеорологическая переменная, однозначно и монотонно зависящая от z.

Пусть s-система есть ортогональная система координат с независимыми переменными t_s, x_s, y_s, s. Здесь s – обобщенная вертикальная координата, зависящая от t, x, y, z, причем при фиксированных значениях t, x, y между s и z существует однозначная монотонная связь. Также отметим, что при выводе уравнений в системе с обобщенной вертикальной координатой всегда полагают $t_s = t$, $x_s = x$, $y_s = y$. Это обстоятельство учтено в обозначениях нижеприводимых соотношений.

В соответствии с правилом дифференцирования сложных функций от нескольких переменных запишем формулы преобразования операторов частных производных [3,7]

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial}{\partial s}, \tag{3.5.1}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varsigma}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial \varsigma}\right)_s - \frac{\partial s}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial \varsigma}\right)_s \frac{\partial}{\partial s}, \tag{3.5.2}$$

где ς – любая из переменных t, x, y.

Индексы s и z у скобок означают, какую из вертикальных координат следует считать неизменной при вычислении частной производной. Так,

при $\varsigma = t$ $$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_s - \frac{\partial s}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s \frac{\partial}{\partial s},$$

при $\varsigma = x, y$ $$\nabla_z = \nabla_s - \frac{\partial s}{\partial z}\nabla_s z \frac{\partial}{\partial s}.$$

По определению полная производная по времени задается выражением

в z-системе $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_z - \vec{V}\cdot\nabla_z + w\frac{\partial}{\partial z}, \tag{3.5.3}$$

в s-системе $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_s-\vec{V}\cdot\nabla_s+\dot{s}\frac{\partial}{\partial s}, \tag{3.5.4}$$

где $w=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$, $\quad \dot{s}=\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$.

Подставляя формулы (3.5.1), (3.5.2) в выражение (3.5.3), получаем

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_s+\vec{V}\cdot\nabla_s+\left(w-\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s-\vec{V}\cdot\nabla_s z\right)\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial}{\partial s}.$$

Применяя этот оператор к переменной s, найдем соотношение между w и $\dot{s}$:

$$w=\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)_s+\vec{V}\cdot\nabla_s z+\dot{s}\,\frac{\partial z}{\partial s}. \tag{3.5.5}$$

С учетом выводов п. 3.2 в качестве исходных в z-системе будем рассматривать уравнения (3.3.5):

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+2(\omega_y w-\omega_z v)= F_x+ g_x-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+2\omega_z u= F_y+ g_y-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y},$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}-2\omega_y u= F_z+ g_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0.$$

Обратим внимание на то, что тангенциальные составляющие g_X и g_Y в z- и s-системах равны, что следует из равенств $x_s= x$, $y_s = y$. Поэтому преобразования будут затрагивать только вертикальную составляющую силы тяжести. К этому добавим, что разность геопотенциалов (в пренебрежении нестационарными изменениями) в точках (t_1, x_1, y_1, s_1) и (t_2, x_2, y_2, s_2) будет испытывать вариации только из-за вариаций поверхностей s_1 и s_2.

С учетом соотношений (3.5.1) – (3.5.5) уравнения движения из

(3.3.5) в s-системе принимают вид

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+2(\omega_y w-\omega_z v)= F_x + g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial s},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+2\omega_z u= F_y + g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial P}{\partial s}, \qquad (3.5.6)$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}-2\omega_y u = F_z + g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial s}.$$

Используя соотношение (3.5.2), получим формулу преобразования для дивергенции

$$\nabla_z\cdot\vec{V}=\nabla_s\cdot\vec{V}-\frac{\partial s}{\partial z}\cdot\nabla_s z\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial s}.$$

Подставляя это выражение и соотношение (3.5.5), продифференцированное по z

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial s}{\partial z}=\frac{\partial s}{\partial z}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)+\frac{\partial\vec{V}}{\partial s}\nabla_s z\right]+\frac{\partial\dot{s}}{\partial s},$$

в уравнение неразрывности в (3.3.5), получим

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\nabla_z\cdot\vec{V}+\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\nabla_s\cdot\vec{V}-$$

$$-\frac{\partial s}{\partial z}\cdot\nabla_s z\cdot\frac{\partial\vec{V}}{\partial s}+\frac{\partial s}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial z}{\partial s}+\frac{\partial\vec{V}}{\partial s}\cdot\nabla_s z\right)+\frac{\partial\dot{s}}{\partial s}=$$

$$=\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\nabla_z\cdot\vec{V}+\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial z}{\partial s}+\frac{\partial\dot{s}}{\partial s}=0.$$

Отсюда получаем уравнение неразрывности в s-системе

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\ln\rho\frac{\partial z}{\partial s}\right)+\nabla_z\cdot\vec{V}+\frac{\partial\dot{s}}{\partial s}=0. \qquad (3.5.7)$$

Из третьего уравнения системы (3.5.6) выразим произведение

$$\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial s}=\rho\,(g_z-\mu)=\rho\,g_z\left(1-\frac{\mu}{g_z}\right),$$

где $\mu=\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t}-2\omega_y u-F_z$, и подставим в два первые уравнения. В результате элементарных преобразований получим уравнения горизонтального движения

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_y w - \omega_z v) = F_x + g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + g_z\left(1 - \frac{\mu}{g_z}\right)\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\omega_z u = F_y + g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + g_z\left(1 - \frac{\mu}{g_z}\right)\frac{\partial z}{\partial y}.$$

Градиент давления здесь выражается суммой двух последних членов правых частей. Первый из них является градиентом давления на s-поверхности, а второй представляет поправку, называемую при $\mu = 0$ гидростатической. Заметим, что при выводе полученной формы уравнений гидростатическое приближение не использовалось и здесь $\mu \neq 0$. Идея такого подхода к получению уравнений гидротермодинамики в системах с обобщенной координатой без использования гидростатического приближения была высказана Е.П. Борисенковым в конце 80-х годов.

Если в качестве вертикальной координаты использовать высоту z, то гидростатическая поправка отсутствует. Если вертикальной координатой служит давление, то отсутствует первый член и градиент давления выражается произведением градиента высоты и вертикальной компоненты ускорения свободного падения.

Теперь аналогичным образом запишем выражение

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \rho g_z\left(1 - \frac{\mu}{g_z}\right)\left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)^{-1},$$

которое подставим в уравнение неразрывности (3.5.7). В результате простых преобразований получим

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{\dfrac{\partial P}{\partial s}}{g_z\left(1 - \dfrac{\mu}{g_z}\right)} + \nabla_z \cdot \vec{V} + \frac{\partial \dot{s}}{\partial s} = 0.$$

Собирая полученные результаты, получим уравнения гидродинамики в системе с произвольной обобщенной вертикальной координатой s

$$\frac{du}{dt} + 2(\omega_y w - \omega_z v) = F_x + g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + g_z\left(1 - \frac{\mu}{g_z}\right)\frac{\partial z}{\partial x},$$

$$\frac{dv}{dt} + 2\omega_z u = F_y + g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} + g_z\left(1 - \frac{\mu}{g_z}\right)\frac{\partial z}{\partial y}, \qquad (3.5.8)$$

$$\frac{dw}{dt} - 2\omega_y u = F_z + g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial s}{\partial z}\frac{\partial P}{\partial s},$$

$$\frac{d}{dt}\ln\frac{\dfrac{\partial P}{\partial s}}{g_z\left(1 - \dfrac{\mu}{g_z}\right)} + \nabla_z \cdot \vec{V} + \frac{\partial \dot{s}}{\partial s} = 0,$$

где
$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \dot{s}\frac{\partial}{\partial s}.$$

Заметим, что уравнения (3.5.8) получены без использования гидростатического приближения.

Граничные условия по вертикали для уравнений (3.5.8) формируются следующим образом [3,7].

Для постановки верхнего граничного условия предполагается отсутствие переноса массы через координатную поверхность $s = s_в = \mathrm{const}$, соответствующую верхней границе атмосферы. Это условие имеет вид

$$\dot{s} = 0 \text{ при } s = s_в. \qquad (3.5.9)$$

За нижнюю границу атмосферы обычно принимается поверхность Земли $H_н$ с учетом превышения над уровнем моря $s = s_н$, которое может изменяться во времени и в пространстве $s_н = (t, x, y, H_н)$. Нижнее граничное условие, если не учитывается вязкость, имеет вид

$$\dot{s} = \frac{\partial s_н}{\partial t} + u_н\frac{\partial s_н}{\partial x} + v_н\frac{\partial s_н}{\partial y} \text{ при } s = s_н, \qquad (3.5.10)$$

где $u_н$, $v_н$ – компоненты скорости ветра при $s = s_н$.

Заметим, что существуют трудности с заданием положения нижней границы атмосферы с учетом орографии. Для устранения этих трудностей в качестве координаты s используется сигма-координата. Но при этом возникают трудности с вычислением сил в горных районах.

Полученная система уравнений гидродинамики с обобщенной вертикальной координатой (3.5.8) – (3.5.10) служит основой для их записи в системе с любой вертикальной координатой.

3.5.2. Система изобарических координат

Для записи уравнений гидродинамики в изобарических координатах необходимо положить $s \equiv P$. Используем также гидростатическое приближение

$$\frac{\partial P}{\partial z} = g_z \rho.$$

В этом случае, как отмечалось выше, $\mu = 0$. Напомним также, что вертикальная компонента ускорения свободного падения отрицательна в силу того, что с увеличением высоты над ОЗЭ геопотенциал уменьшается.

Тогда из системы (3.5.8) – (3.5.10) получаем

$$\begin{gathered}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_y \tau - \omega_z v) = F_x + g_x + g_z \frac{\partial h}{\partial x}, \\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\omega_z u = F_y + g_y + g_z \frac{\partial h}{\partial y}, \qquad (3.5.11) \\
0 = g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial h}, \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\frac{1}{g_z} + \nabla_z \cdot \vec{V} + \frac{\partial \tau}{\partial P} = 0, \\
\tau = 0 \text{ при } P = 0, \\
\tau = \frac{\partial P_н}{\partial t} + u_н \frac{\partial P_н}{\partial x} + v_н \frac{\partial P_н}{\partial y} \text{ при } P = P_н,
\end{gathered}$$

где $P_н$ – давление на нижней границе атмосферы (неприведенное к уровню моря);

U_h, V_h – горизонтальные компоненты вектора ветра на верхней границе слоя постоянных потоков;

h – высота изобарической поверхности;

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \tau\frac{\partial}{\partial P}; \qquad \tau = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}.$$

Уравнение неразрывности может быть переписано в виде

$$-\frac{1}{g_z}\left(\frac{\partial g_z}{\partial t}+u\frac{\partial g_z}{\partial x}+v\frac{\partial g_z}{\partial y}+\tau\frac{\partial g_z}{\partial P}\right)+\nabla_z\cdot\vec{V}+\frac{\partial\tau}{\partial P}=0.$$

Таким образом, в отличие от привычной формы уравнений гидродинамики в изобарических координатах учет неоднородности силы тяжести приводит к появлению в уравнениях горизонтального движения ее тангенциальных составляющих и в уравнении неразрывности – полной производной от ее вертикальной компоненты.

Положим $s\equiv P$ и откажемся от использования гидростатического приближения. Тогда $\mu\neq 0$ и система уравнений (3.5.8) – (3.5.10) приобретает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dt}+2(\omega_y\tau-\omega_z v)= F_x+g_x+g_z\left(1-\frac{\mu}{g_z}\right)\frac{\partial h}{\partial x},\\
&\frac{dv}{dt}+2\omega_z u= F_y+g_y+g_z\left(1-\frac{\mu}{g_z}\right)\frac{\partial h}{\partial y},\\
&\frac{d\tau}{dt}-2\omega_y u = F_z+g_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial h},\\
&\frac{d}{dt}\ln\frac{1}{g_z\left(1-\frac{\mu}{g_z}\right)}+\nabla_z\cdot\vec{V}+\frac{\partial\tau}{\partial P}=0,\\
&\tau=0 \text{ при } P=0,\\
&\tau=\frac{\partial P_н}{\partial t}+u_н\frac{\partial P_н}{\partial x}+v_н\frac{\partial P_н}{\partial y} \text{ при } P=P_н.
\end{aligned}\tag{3.5.12}$$

Преобразуем правую часть третьего уравнения движения:

$$\mu=g_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial h}=g_z\left[1-\left(g_z\rho\frac{\partial h}{\partial P}\right)^{-1}\right].$$

Перепишем это выражение в виде $\left(g_z\rho\frac{\partial h}{\partial P}\right)^{-1}=1-\frac{\mu}{g_z}$, откуда $g_z\rho\frac{\partial h}{\partial P}=1+\frac{\mu}{g_z}$ с точностью до $\left(\frac{\mu}{g_z}\right)^2$. Отсюда

$$\mu = g_z\left(1 - g_z\rho\frac{\partial h}{\partial P}\right). \qquad (3.5.13)$$

z, км

Учитывая, что $\mu = \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - 2\omega_y u - F_z$, получаем третье уравнение движения

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} - 2\omega_y u = F_z + g_z\left(1 - g_z\rho\frac{\partial h}{\partial P}\right).$$

Подчеркнем, что погрешность полученного уравнения составляет $\left(\dfrac{\mu}{g_z}\right)^2$, в то время, как гидростатическое приближение характеризуется погрешностью μ. Таким образом, полученное уравнение точнее уравнения гидростатики в $\mu\left(\dfrac{\mu}{g_z}\right)^{-2}$ (для крупномасштабных движений примерно в ~ 10^8 раз).

Подставляя выражение (3.5.13) в уравнения (3.5.12), получим другую их форму

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_y\tau - \omega_z v) = F_x + g_x + g_z^2\rho\frac{\partial h}{\partial P}\frac{\partial h}{\partial x},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\omega_z u = F_y + g_y + g_z^2\rho\frac{\partial h}{\partial P}\frac{\partial h}{\partial y}, \qquad (3.5.14)$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} - 2\omega_y u = F_z + g_z\left(1 - g_z\rho\frac{\partial h}{\partial P}\right).$$

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(g_z^2\rho\frac{\partial h}{\partial P}\right) + \nabla_z\cdot\vec{V} + \frac{\partial\tau}{\partial P} = 0,$$

$$\tau = 0 \text{ при } P = 0,$$

$$\tau = \frac{\partial P_н}{\partial t} + u_н\frac{\partial P_н}{\partial x} + v_н\frac{\partial P_н}{\partial y} \text{ при } P = P_н.$$

В отличие от системы уравнений (3.5.12), здесь во всех уравнениях фигурирует множитель $g_z\rho\dfrac{\partial h}{\partial P}$, который отличается от единицы на малую величину μ/g_z и который учитывает эффект негидростатичности.

3.5.3. Система сигма-координат

Приземное давление изменяется в пространстве и во времени. Это обстоятельство не позволяет точно определить положение нижней границы атмосферы. В связи с этим Н.Филлипсом [1,11] была предложена система сигма-координат. Наиболее просто вертикальная координата σ записывается в виде

$$\sigma = P/P_н,$$

где $P_н$ – давление при $z = H_н$, не приведенное к уровню моря.

Положим $s = \sigma$. Сразу отметим, что в этом случае верхней и нижней границам атмосферы отвечают $\sigma = 0$ и $\sigma = 1$ соответственно.

С учетом очевидных соотношений

$$\frac{\partial P}{\partial \varsigma} = \sigma \frac{\partial P_н}{\partial \varsigma}, \qquad \frac{\partial P}{\partial \sigma} = P_н, \qquad \varsigma = x, y$$

преобразуем выражение для градиента давления:

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \varsigma} = -\frac{g_z}{P_н}\frac{\partial h}{\partial \sigma}\,\sigma\frac{\partial P_н}{\partial \varsigma} = -g_z\frac{\sigma}{P_н}\frac{\partial h}{\partial \sigma}\frac{\partial P_н}{\partial \varsigma}.$$

С учетом гидростатического приближения система уравнений (3.5.8) и граничное условие (3.5.10) приобретают вид

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_y\dot{\sigma} - \omega_z v) = F_x + g_x - g_z\frac{\sigma}{P_н}\frac{\partial h}{\partial \sigma}\frac{\partial P_н}{\partial x} + g_z\frac{\partial h}{\partial x},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\omega_z u = F_y + g_y - g_z\frac{\sigma}{P_н}\frac{\partial h}{\partial \sigma}\frac{\partial P_н}{\partial y} + g_z\frac{\partial h}{\partial y}, \qquad (3.5.15)$$

$$g_z\frac{\partial h}{\partial \sigma} = \frac{P_н}{\rho},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(\frac{P_н}{g_z}\right) + \nabla_z\cdot\vec{V} + \frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial\sigma} = 0,$$

$$\dot{\sigma} = 0 \text{ при } \sigma = \sigma_в,$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial\sigma_н}{\partial t} + u_н\frac{\partial\sigma_н}{\partial x} + v_н\frac{\partial\sigma_н}{\partial y} \text{ при } \sigma = \sigma_н,$$

где $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + \dot{\sigma}\frac{\partial}{\partial s}, \qquad \dot{\sigma} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t}.$$

В отличие от привычной формы уравнений гидродинамики в сигма-координатах учет неоднородности силы тяжести приводит к появлению в уравнениях горизонтального движения ее тангенциальных составляющих и в уравнении неразрывности – полной производной от ее вертикальной компоненты.

Положим $s \equiv P$ и откажемся от использования гидростатического приближения. Тогда $\mu \neq 0$ и система уравнений (3.5.8) – (3.5.10) приобретает вид

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_y\dot{\sigma} - \omega_z v) = F_x + g_x + \\
&+ g_z\left(1 - \frac{\mu}{g_z}\right)\frac{\sigma}{P_н}\frac{\partial h}{\partial \sigma}\frac{\partial P_н}{\partial x} + g_z\left(1 - \frac{\mu}{g_z}\right)\frac{\partial h}{\partial x}, \\
&\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\omega_z u = F_y + g_y + \\
&+ g_z\left(1 - \frac{\mu}{g_z}\right)\frac{\sigma}{P_н}\frac{\partial h}{\partial \sigma}\frac{\partial P_н}{\partial y} + g_z\left(1 - \frac{\mu}{g_z}\right)\frac{\partial h}{\partial y}, \\
&\frac{\mathrm{d}\dot{\sigma}}{\mathrm{d}t} - 2\omega_y u = F_z + g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \sigma}{\partial h}, \\
&\frac{d}{dt}\ln\left\{P_н\left[g_z\left(1 - \frac{\mu}{g_z}\right)\right]^{-1}\right\} + \nabla_z \cdot \vec{V} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} = 0,
\end{aligned} \tag{3.5.16}$$

$$\dot{\sigma} = 0 \text{ при } \sigma = \sigma_в,$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \sigma_н}{\partial t} + u_н\frac{\partial \sigma_н}{\partial x} + v_н\frac{\partial \sigma_н}{\partial y} \text{ при } \sigma = \sigma_н.$$

Так же, как и случае изобарических координат, преобразуем правую часть третьего уравнения в (3.5.16). Тогда выражение (3.5.13) применительно к сигма-координатам примет вид

$$\mu = g_z\left(1 - g_z\rho\frac{\partial h}{\partial \sigma}\right).$$

В итоге системе уравнений (3.5.16) можно придать другой вид:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_y\dot{\sigma} - \omega_z v) = F_x + g_x + g_z^2\rho\frac{\sigma}{P_н}\left(\frac{\partial h}{\partial\sigma}\right)^2\frac{\partial P_н}{\partial x} + g_z^2\frac{\partial h}{\partial\sigma}\frac{\partial h}{\partial x},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\omega_z u = F_y + g_y + g_z^2\rho\frac{\sigma}{P_н}\left(\frac{\partial h}{\partial\sigma}\right)^2\frac{\partial P_н}{\partial y} + g_z^2\frac{\partial h}{\partial\sigma}\frac{\partial h}{\partial y}, \qquad (3.5.17)$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\sigma}}{\mathrm{d}t} - 2\omega_y u = F_z + g_z\left(1 - g_z\rho\frac{\partial h}{\partial\sigma}\right),$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left[P_н\left(g_z^2\rho\frac{\partial h}{\partial\sigma}\right)^{-1}\right] + \nabla_z\cdot\vec{V} + \frac{\partial\dot{\sigma}}{\partial\sigma} = 0,$$

$$\dot{\sigma} = 0 \text{ при } \sigma = \sigma_в,$$

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial\sigma_н}{\partial t} + u_н\frac{\partial\sigma_н}{\partial x} + v_н\frac{\partial\sigma_н}{\partial y} \text{ при } \sigma = \sigma_н.$$

Подчеркнем еще раз, что компонента g_z является отрицательной величиной (см. п. 3.2).

Глава 4
ИССЛЕДОВАНИЕ КРУПНОМАСШТАБНЫХ АТМОСФЕРНЫХ ДВИЖЕНИЙ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ НЕОДНОРОДНОСТЬЮ ПОЛЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

4.1. УРАВНЕНИЯ ГИДРОДИНАМИКИ В ОТКЛОНЕНИЯХ

Состояние равновесия (покоя) атмосферы описывается уравнениями (3.1.1), (3.1.2) при $\vec{V}=0$. В этом случае с учетом (3.1.3) имеем:

$$\nabla\overline{P} = \overline{\rho}\,\nabla W\,, \qquad (4.1.1)$$

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t}=0\,, \qquad (4.1.2)$$

где черта сверху означает, что соответствующий параметр характеризует состояния покоя атмосферы.

Уравнение (4.1.1) является векторным уравнением статики для геопотенциала и в простейшем виде описывает связь между полями геопотенциала, давления и плотности в случае равновесия атмосферы. Анализ этого уравнения принадлежит Н.Е.Кочину [9], суть которого состоит в следующем.

Пусть W = const. Тогда, следовательно, и $\overline{P}$ = const, т.е. давление является функцией одного геопотенциала, если $\overline{\rho}$ = const.

z, км

$$P=f(W).$$

Но тогда из уравнения (4.1.1) ясно, что и плотность тоже есть функция только одного геопотенциала, если $\overline{\rho}$ = const, т.е.

$$\overline{\rho}=-f'\,(W).$$

Поэтому в случае равновесия атмосферы изобарические, эквипотенциальные и изопикнические поверхности совпадают между собой. При этом поле плотности является стационарным, о чем свидетельствует уравнение (4.1.2).

Привлечем уравнение состояния

$$\overline{P}=\overline{\rho}R\overline{T}\,.$$

Выражая с его помощью плотность и подставляя полученное выражение в (4.1.1), получим

$$\nabla \ln \bar{P} = -\frac{1}{R\bar{T}} \nabla W .$$

Путем интегрирования этого уравнения получаем барометрическую формулу

$$\frac{\bar{P}_2}{\bar{P}_1} = \exp\left(-\frac{1}{R} \int_{W_1}^{W_2} \frac{\mathrm{d}W}{\bar{T}} \right) = \exp\left(-\frac{W_2 - W_1}{R\bar{T}_m} \right),$$

где $\bar{T}_m = (W_2 - W_1) \Big/ \int_{W_1}^{W_2} \frac{\mathrm{d}W}{\bar{T}(W)}$ – средняя барометрическая температура слоя, заключенного между эквипотенциальными поверхностями W_1, W_2.

Для крупномасштабных атмосферных движений, как известно, доминирующими являются вертикальные компоненты ускорения свободного падения и градиента давления, которые приблизительно уравновешены. Любой другой член в уравнении (3.1.1) мал по сравнению с ними. Так, ветер имеет порядок 10 м/с, следовательно ускорение Кориолиса равно примерно 10^{-3} м/с^2, что меньше ускорения свободного падения в 10^4 раз. Поэтому желательно выделить в уравнениях (3.1.1), (3.1.2) в явном виде отклонения от некоторого основного состояния, т.е. записать эти уравнения для возмущенного (при $\vec{V} \neq 0$) по отношению к равновесному ($\vec{V} = 0$) состоянию атмосферы.

Представим термодинамические параметры атмосферы в виде

$$f(W) = \bar{f}(W) + f'(W) \quad f'(W) / \bar{f}(W) << 1, \tag{4.1.3}$$

где штрих означает отклонение от равновесного состояния. Тогда, учитывая, что

$$\frac{1}{\bar{\rho} + \rho'} \approx \frac{1}{\bar{\rho}} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2}, \tag{4.1.4}$$

с точностью до величин второго порядка малости уравнение (3.1.1) можно представить в виде

$$\frac{\mathrm{d}\vec{V}}{\mathrm{d}t} + 2\vec{\omega} \times \vec{V} = \vec{F} + \frac{\rho'}{\bar{\rho}} \vec{g} - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla P'. \tag{4.1.5}$$

По сравнению с исходным уравнением здесь значительно уменьшена разница в порядках между членами уравнения, что существенно упрощает его анализ. Кроме того, в явном виде представлено архимедова сила (второй член правой части).

Уравнение (3.1.2) представляется в виде

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \operatorname{div}\,(\overline{\rho} + \rho')\,\vec{V} = 0, \tag{4.1.6}$$

или с точностью до величин первого порядка малости

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t} + \operatorname{div}\overline{\rho}\vec{V} = 0. \tag{4.1.7}$$

4.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГЛОБАЛЬНЫХ ПОЛЕЙ ПЛОТНОСТИ, ДАВЛЕНИЯ И ВЕТРА

В уравнениях для отклонений (4.1.5) – (4.1.7) фигурирует отношение вариаций плотности к плотности равновесного состояния атмосферы. Кроме того, в дальнейшем анализе потребуется знание распределений давления и ветра.

Эмпирические данные о пространственно-временном распределении плотности, давления и ветра в средней атмосфере немногочисленны. Приведем обобщенные данные (по Е.П. Школьному [17]), характеризующие эти параметры.

Среднее давление атмосферы в значительной мере зависит от времени года и широты. Наибольшие значения среднего давления наблюдаются в зоне 30–40° с. ш. в теплое полугодие, а наименьшие – в высоких широтах (50–60° с. ш.) в холодное полугодие. Эти различия обусловлены преобладанием в теплый период в тропосфере средних широт антициклонического режима, а в холодный период в высоких широтах – интенсивной циклонической деятельности. Указанный характер различий в значениях среднего давления по полугодиям и широтным зонам сохраняется до высоты примерно 40 км. Выше 45 км наибольшее среднее давление наблюдается в теплое полугодие в высоких широтах.

До высоты 40 км в средних широтах среднее давление несколько превышает стандартное. Исключение составляет узкий слой вблизи уровня 20 км. Выше 40 км среднее давление в холодное полугодие в средних широтах становится меньше стандартного. В теплое полугодие на этих широтах среднее давление остается больше стандартного, причем выше 50 км разность между ними возрастает. В высоких широтах в теплое полугодие среднее давление до высоты 45 км на 5–7% меньше стандартного. Выше 45 км разность между ними становится положительной и с высотой резко возрастает, превышая 40% на высоте 60 км.

В холодное полугодие в высоких широтах среднее давление во всем рассматриваемом слое атмосферы меньше стандартного. С увеличением высоты разность между ними непрерывно возрастает, достигая 22% на высоте 55 км.

О возможных пределах изменчивости давления воздуха на различных высотах можно судить по данным, представленным на рис. 4.1, где показаны относительные отклонения экстремальных значений давления, наблюдавшихся над Североамериканским континентом в период с 1961 по 1966 г., от среднего значения. Из рис. 4.1 следует, что в высоких широтах имеют место большие экстремальные отклонения, чем в средних широтах. Наибольшие их значения отмечаются в холодное полугодие. В стратосфере намечаются два максимума отклонений, один из которых располагается в слое 25–35 км, а другой приходится на область стратопаузы. Эти максимумы равны соответственно 50 и 60%.

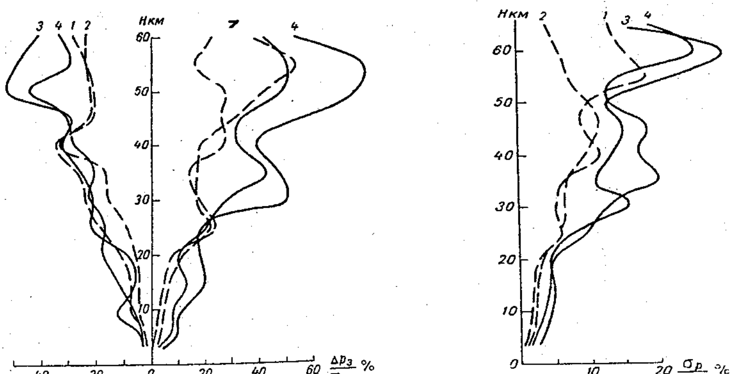


Рис. 4.1. Экстремальные отклонения давления от среднего значения (слева) и среднеквадратические отклонения давления воздуха (справа) (по [9,16]): 1 – теплое полугодие, умеренные широты; 2 – холодное полугодие, умеренные широты; 3 – теплое полугодие, высокие широты; 4 – холодное полугодие, высокие широты

Кривые, соответствующие отрицательным экстремальным отклонениям давления от среднего, не обладают столь ярко выраженными различиями. Однако можно проследить максимум в средних широтах на высоте около 40 км и в высоких широтах на высоте примерно 50 км. Данные рис. 4.1 свидетельствуют еще и о том, что в стратосфере и нижней мезосфере давление может изменяться в значительных пределах. Эти изменения могут достигать в стратосфере 80 – 100%, а в мезосфере 100 – 120%.

О больших изменениях давления воздуха в рассматриваемых слоях атмосферы свидетельствуют значения средних квадратических отклонений давления, приведенные на рис. 4.1 (справа) в отношениях к среднему значению давления на соответствующей высоте. Из приведенного рисунка следует, что средние квадратические отклонения давления в высоких широтах больше таковых в средних широтах. На кривых, изображенных на этом рисунке, отчетливо проявляются два максимума, которые располагаются в слоях 30 – 40 и 50 – 60 км, т.е. совпадают с максимумами на кривых экстремальных отклонений. Средние квадратические отклонения здесь равны соответственно 15 – 20 и 20 – 30%.

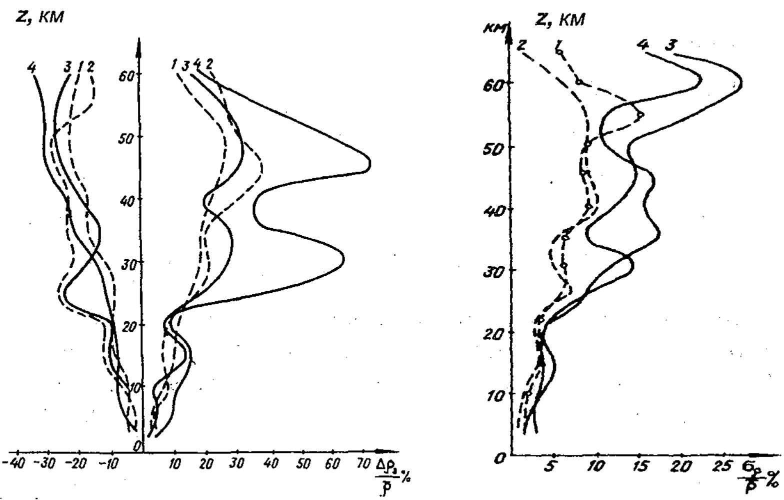


Рис. 4.2. Отнесенные к средним значениям экстремальные (слева) и среднеквадратические (справа) отклонения плотности (по [9,16]). Обозначения см. рис. 4.1

Общий характер изменения средней плотности воздуха с высотой в зависимости от полугодия и широты подобен характеру изменения давления. Это видно, если сравнить рис. 4.1 и 4.2.

Средние значения плотности воздуха в трех широтных зонах северного полушария приведены в табл. 4.1. Согласно этом данным, в холодное полугодие почти на всех рассмотренных уровнях плотность растет с уменьшением широты (исключение составляет уровень 30 км, где наибольшая плотность наблюдается в средних широтах). В теплое полугодие на высоте 30 км и в слое 50 – 65 км плотность воздуха падает с приближением к экватору. В слое 35 – 45 км наибольшие значения плотности наблюдаются в средних широтах.

Таблица 4.1

Средние значения плотности воздуха (г/л^3) в стратосфере и нижней мезосфере [17]

z, км	Теплое полугодие			Холодное полугодие		
	Высокие широты	Средние широты	Экваториальные широты	Высокие широты	Средние широты	Экваториальные широты
30	17,963	17,510	16,614	16,418	16,973	16,614
35	7,966	8.616	8,432	7,545	8,185	8,432
40	3,930	4,126	4,042	3,726	3,971	4,042
45	1,920	1,993	1,889	1,731	1,870	1,889
50	1,327	1,091	1,061	0,917	1,017	1,061
55	0,790	0,671	0,612	0,470	0,550	0,612
60	0,428	0,353	0,327	0,274	0,294	0,327
65	0,241	0,207	0,206	0,175	0,190	0,206

Плотность атмосферы может испытывать значительные колебания относительно среднего значения. Это отчетливо видно на рис.4.2 (слева), на котором представлены относительные отклонения экстремальных значений плотности воздуха, наблюдавшихся в период с 1961 по 1966 г., от средних значений. Они особенно велики в стратосфере высоких широт в холодное полугодие, хотя в средних широтах и в теплое полугодие в высоких широтах превышают на некоторых уровнях 20%. Кривые экстремальных отклонений имеют два хорошо выраженных максимума, один из которых располагается в слое 25 – 30 км, а второй – на высотах 45 – 50 км. Эти максимумы особенно велики в северных широтах в холодное полугодие. На высоте 30 км плотность может превышать среднюю на 60%, а на высоте 45 км – примерно на 70%. Следовательно, если учесть отклонение минимальных значений плотности воздуха от среднего, плотность в стратосфере может изменяться на 50 – 70%, а на некоторых высотах на 100% и более.

О большой изменчивости плотности воздуха в рассматриваемом слое атмосферы свидетельствуют значения ее средних квадратических отклонений [см. рис. 4.2 (справа)]. В тропосфере они сравнительно невелики и составляют 2 – 5%. С увеличением высоты средние квадратические отклонения плотности возрастают, достигая 10 – 35% в стратосфере и 20 –25% в мезосфере.

Плотность воздуха в стратосфере может изменяться достаточно быстро. На рис. 4.3 представлено распределение по высоте средних квадратических изменений плотности воздуха за 24-часовой интервал времени. Из рисунка следует, что за сутки в стратосфере средних широт изменчивость плотности воздуха составляет 7 – 12%, а в стратосфере высоких широт – 10 – 17%.

Для двух полугодий распределение по высоте средних значений зональной (u) и меридиональной (v) составляющих скорости ветра показано на рис. 4.4.

В средних широтах в холодное полугодие во всем рассматриваемом слое атмосферы зональная составляющая положительна, что объясняется преобладанием в нижнем 70-километровом слое атмосферы западного переноса, обусловленного, как указывалось выше, циркумполярным циклоническим вихрем. В тропосфере западная составляющая растет с высотой, достигая максимума на высоте 10 км. Выше 10 км западная составляющая уменьшается, и ее минимальное значение приходится на высоту 20 км. Выше 20 км западная составляющая вновь возрастает и на высоте 70 км достигает 68 м/с.

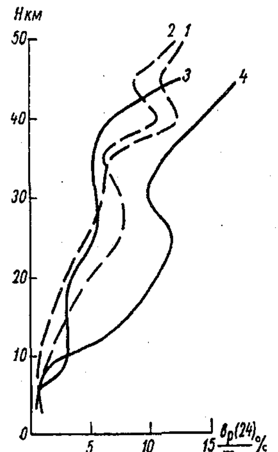


Рис. 4.3. Изменчивость плотности за 24-часовой интервал времени (по [16]). Обозначения – см. рис. 4.1

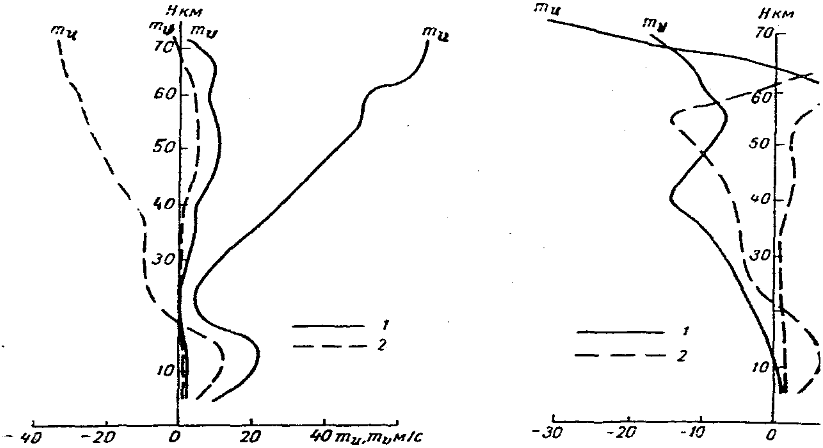


Рис.4.4. Средние значения составляющих скорости ветра в средних (слева) и высоких (справа) широтах в холодное (*1*) и теплое (*2*) полугодия (по [16])

Меридиональная составляющая во всем слое атмосферы до 70 км положительна и имеет сравнительно небольшое значение. Наибольшее значение меридиональной составляющей приходится на высоту 50 км и достигает 11 м/с. Таким образом, в средних широтах в холодное полугодие преобладает западный перенос с незначительной южной составляющей.

В теплое полугодие в средних широтах меридиональная составляющая также положительна, но имеет еще меньшее значение.

Зональная составляющая ветра в теплое полугодие в тропосфере возрастает с высотой. Максимум ее, равный 11 м/с, находится, как и в холодное полугодие, на высоте 10 км. Выше этого уровня западная составляющая уменьшается и становится равной нулю на высоте примерно 18 км. Дальнейшее увеличение высоты связано с обращением и ростом зональной составляющей. Максимального значения, равного 32 м/с, она достигает на высоте 70 км. Следовательно, в большей части стратосферы в теплое полугодие наблюдается достаточно интенсивный восточный перенос масс воздуха.

В высоких широтах в холодное полугодие зональная составляющая обладает следующими особенностями. Как и в средних широтах, до высоты 10 км она положительна и возрастает с высотой, а в слое 10 – 20 км почти не меняется. Выше 20 км происходит рост скорости западного ветра. На высоте 55 км он достигает максимума, равного 28 м/с. Дальнейшему увеличению высоты сопутствует уменьшение западной составляющей, причем на высоте 65 км она становится восточной и растет с высотой.

Меридиональная составляющая ветра почти во всем 70-километровом слое атмосферы отрицательна. Наибольшее ее значение, равное 18 м/с, наблюдается на высоте 70 км.

В теплое полугодие в высоких широтах зональная составляющая ветра в тропосфере также положительна до высоты 20 км. Выше этой высоты наблюдается ее обращение и увеличение. Наибольшее отрицательное значение зональной (восточной) составляющей (–15 м/с) имеет место на высоте 55 км. Выше она вновь становится положительной (западной) и возрастает.

Меридиональная составляющая во всем рассматриваемом слое атмосферы положительна и невелика. Лишь выше 50 км она существенно возрастает, достигая 15 м/с на высоте 70 км. Значения составляющих скорости ветра свидетельствуют о том, что в теплую половину года в высоких широтах также преобладают восточные ветры, которые в нижней мезосфере переходят к западному.

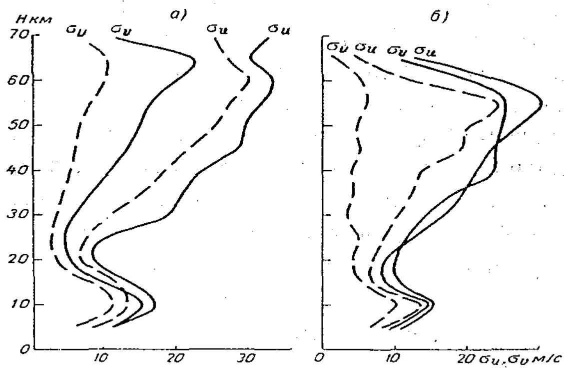


Рис.4.5. Средние квадратические отклонения составляющих скорости ветра в средних (слева) и высоких (справа) широтах (по [16]). Обозначения – см. рис. 4.4

На рис. 4.5 изображено изменение с высотой средних квадратических отклонений скорости ветра в средних и высоких широтах. Графики показывают, что распределение средних квадратических отклонений составляющих ветра в различных зонах отличаются. В средних широтах до высоты 20 – 25 км в холодное и теплое полугодия средние квадратические отклонения составляющих скорости ветра почти одинаковы. Выше этих уровней средние квадратические отклонения зональной составляющей становятся больше, чем меридиональной, в 2 – 3 раза. При этом в холодное полугодие средние квадратические отклонения составляющих скорости ветра превышают их значения в теплое полугодие. Наибольшее значение средних квадратических отклонений меридиональной составляющей (22 м/с) наблюдается в холодное полугодие на высоте 65 км, а зональной составляющей (33 м/с) – на высоте 60 км.

В высоких широтах распределение по высоте средних квадратических отклонений составляющих скорости ветра в холодное полугодие значительно отличается от их распределения в теплое полугодие. Если в теплое полугодие соотношения между средними квадратическими отклонениями зональной и меридиональной составляющих почти такие же, как и в средних широтах, то в холодное полугодие средние квадратические отклонения обеих составляющих почти одинаковы во всем рассматриваемом слое атмосферы.

Из приведенного анализа следует, что поля давления, плотности и составляющих скорости ветра могут испытывать значительные пространственно-временные отклонения от некоторого среднего состояния. В связи с этим для дальнейшего анализа целесообразно использовать экстремальные отклонения этих метеовеличин с тем, чтобы получить представление о максимальной степени влияния неоднородностей силы тяжести на атмосферные процессы.

Для проведения анализа влияния неоднородного поля силы тяжести на атмосферные процессы необходимы поля плотности $\bar{\rho}$ и давления $\bar{P}$ равновесного состояния атмосферы, отклонений плотности $\rho' = \rho - \bar{\rho}$ и давления $P' = P - \bar{P}$, зональной и меридиональной составляющих скорости ветра.

Равновесное состояние атмосферы характеризуется полями давления $\bar{P}$, плотности $\bar{\rho}$ и геопотенциала W. Будем считать поле геопотенциала заданным. Тогда равновесное состояние полностью будет описываться системой уравнений (4.1.1), (4.1.2) при заданных граничных и начальных условиях.

Уравнения (4.1.1), (4.1.2) являются уравнениями первого порядка, поэтому достаточно использовать только одно граничное условие.

В качестве нижней границы атмосферы представляется естественным взять квазигеоид или ОЗЭ. В этом случае нижняя граница атмосферы есть уровенная поверхность, на которой

$$W = \text{const}, \quad \overline{P} = \text{const}, \quad \overline{\rho} = \text{const}. \qquad (4.2.1)$$

В качестве начальных условий достаточно задать трехмерное поле плотности $\overline{\rho}$.

Выбор плотности и давления, характеризующих равновесное состояние атмосферы, на нижней границе ограничен только условиями (4.2.1). Очевидно, что имеется множество состояний равновесия. В [4] с целью обеспечения единственности выбора, рекомендуется минимизировать сумму внутренней и потенциальной энергий. Можно поступить проще. Очевидно, например, что климатические значения плотности и давления не отвечают этим условиям. Но наряду с этим нетрудно видеть, что их стандартные значения, определяемые ГОСТом [3], полностью удовлетворяют требованиям выбора.

Привлекая выражения (4.1.4), запишем соотношение

$$\frac{\rho'}{\overline{\rho}} = \frac{\rho - \overline{\rho}}{\overline{\rho}}.$$

С учетом вышесказанного $\overline{\rho}$ является стандартным значением плотности, хотя такой выбор и не является единственным.

Рассмотрим принципы моделирования экстремальных вариаций метеовеличин.

Обычно для расчета вариаций метеовеличин используются выражения [1, 17]

$$\zeta(h) = m_\zeta(h) + \sum_i X_i(h)\,\mu_i$$

или

$$\zeta(h) = m_\zeta(h) + \sigma_\zeta(h) \sum_i Y_i(h)\,\chi_i \ ,$$

где $m_\zeta(h)$, $\sigma_\zeta(h)$ – математическое ожидание (климатическое значение) и среднее квадратическое отклонение (средняя многолетняя изменчивость) метеовеличины ζ на высоте h;

$X(h)$ – неслучайная функция, называемая координатной [17];
$Y(h)$ – эмпирическая ортогональная функция (ЭОФ) [1];
ξ, χ – некоррелированные случайные величины, такие как

$$M[\xi] = M[\chi] = 0$$

$$M[\xi_i \xi_j] = M[\chi_i \chi_j] = 0 \text{ при } i \neq j \text{ или } D \text{ при } i = j$$

$$\xi, \chi \in N(0,1),$$

где D – дисперсия.

Наиболее предпочтительным является использование второго выражения для ζ, позволяющего минимизировать число эмпирических коэффициентов. Это обстоятельство является весьма важным, т.к. в глобальных моделях число аргументов обычно равно четырем (φ – широта, λ – долгота, h – высота, t – время). Поэтому экстремальные значения метеовеличин с заданной обеспеченностью, представляющие по сути их вертикальные профили-огибающие от уровня моря до высоты 100 км для любой точки Земли и любого календарного месяца, определяются на основе второго выражения для ζ:

$$\xi_{\max}(\varphi, \lambda, t, h) = m_\xi(\varphi, \lambda, t, h) + k\sigma_\xi(\varphi, \lambda, t, h),$$

$$\xi_{\min}(\varphi, \lambda, t, h) = m_\xi(\varphi, \lambda, t, h) - k\sigma_\xi(\varphi, \lambda, t, h),$$

где $\xi_{\max}$, $\xi_{\min}$ – экстремальные значения метеовеличины ξ;

k – коэффициент, определяющий доверительный интервал.

Как видно из вышеприведенных выражений, для создания глобальной модели экстремальных вариаций метеовеличин необходимы соответствующие климатические модели, позволяющие моделировать $m_\varsigma(\varphi, \lambda, h, t)$, и модели изменчивости метеовеличин $\sigma_\varsigma(\varphi, \lambda, h, t)$. Создание каждой из названных моделей представляет значительную трудность, обусловленную избыточностью исходных данных над одними районами (Северная Америка, Европа) и их дефицитом над океанами и на высотах больше 25–30 км, а также необходимостью согласования данных, полученных от различных измерительных систем.

Для разработки модели экстремальных вариаций метеовеличин использовались следующие исходные данные:

- архив среднемесячных значений параметров атмосферы в слое 0

– 30 км в узлах регулярной сетки с шагом по широте 5°, по долготе 5°, по высоте 1 км, по времени 1 месяц;

- архив среднемесячных значений параметров атмосферы в слое 20 – 100 км в узлах регулярной сетки с шагами: по широте 20°, по долготе 60°, по высоте 5 км, по времени 2 месяца;
- климатические справочники и атласы;
- фактические значения метеовеличин и статистические данные по отдельным метеорологическим станциям.

В процессе разработки модели все данные согласовывались между собой, а при необходимости пересчитывались в нужные точки и проверялись на независимом эмпирическом материале.

Выполненные расчеты, а также расчеты, выполненные другими авторами (например, [7, 10]), показали, что климатические значения меридиональной составляющей вектора ветра для различных высот редко превышают 2 м/с. Исходя из этого, климатический меридиональный ветер принимался равным нулю.

С целью упрощения было использовано предположение о симметрии климатических значений для следующих месяцев; январь – июль, февраль – декабрь, март – ноябрь, апрель – октябрь, май – сентябрь, июнь – август. Это позволило существенно уменьшить объем исходных данных без существенных потерь в точности.

Расчет статистических характеристик параметров атмосферы для месяцев, отличных от января и июля, проводился по формуле

$$M_i = [(M1 + M7)/2] + [(M1 - M7)/2]\cos[(\pi/6)(i - 1)],$$

где $M1$, $M7$ – значения метеовеличины в январе и июле соответственно, i – номер месяца.

С учетом отмеченных упрощений в качестве исходных данных для модели экстремальных значений метеовеличин использовались:

- среднемесячные (январь, июль) значения температуры воздуха (K) и зональной составляющей скорости ветра (м/с) и значения их среднеквадратической изменчивости в узлах регулярной сетки с шагом по широте 30° (90, 60,..., 0,..., –60, –90; знак минус означает принадлежность к южному полушарию), по долготе 120° (0, 120, 240, 360), по высоте – 1 км (–1, 0, 1,..., 100);
- среднемесячные (январь, июль) значения давления и его среднеквадратической изменчивости на уровне моря в той же широтно-долготной сетке;

- среднеквадратические отклонения меридионального ветра на той же широтно-долготно-высотной сетке.

Из-за того, что исходные данные для модели получались с помощью различных измерительных систем, в области их стыковки (высоты 20 – 30 км) между ними имеются довольно значительные расхождения. Для их устранения привлекался дополнительный материал (климатические справочники и атласы, фактические и статистические данные по отдельным метеорологическим станциям).

Расчет среднемесячного давления с опорного уровня на стандартные высоты проводился с помощью барометрических формул для политропной и изотермической атмосферы [3, 9]. Искомые вертикальные профили-огибающие плотности ρ рассчитываются с помощью уравнения состояния.

Совокупная ошибка описания климатических полей метеовеличин состоит из трех составляющих:

- ошибки исходных данных (σ_1);
- ошибки линейной интерполяции широтно-долготного хода метеовеличин (σ_2);
- ошибки описания годового хода тригонометрической функцией для месяцев, отличных от января и июля (σ_3).

Информация об этих ошибках для температуры и зональной составляющей ветра представлена в табл. 4.2.2 и 4.2.3.

Максимальная погрешность характеризуется величинами σ_{max}. Анализ табл. 4.2 и 4.3 показывает, что погрешность представления температуры и ветра моделью выше погрешности исходных данных (σ_1). Значение превышения характеризуют величины σ_4. Отметим, что в случае моделирования параметров атмосферы в узлах исходной сетки для января или июля модель имеет ошибку σ_1 (т.е. $\sigma_4 = 0$).

В целом в свободной атмосфере средние квадратические ошибки представления температуры и ветра разработанной моделью по сравнению с исходными данными не превышают 25%.

Таблица 4.2

Средние квадратические отклонения представления среднемесячных значений температуры (К)

H, км	Холодное полугодие					Теплое полугодие				
	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_{max}	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_{max}
0	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	1,1	0,8	0,9	1,2	1,6
5	0,5	0,3	0,4	0,5	0,7	1,3	0,7	0,7	1,0	1,6
10	0,7	0,5	0,4	0,6	0,9	1,5	0,9	0,8	1,2	1,8
20	0,7	0,6	0,5	0,8	1,1	1,6	1,1	0,9	1,4	2,0
30	0,7	0,7	0,6	0,9	1,3	1,7	1,2	1,1	1,6	2,1
50	1,6	1,1	0,8	1,4	2,1	2,5	1,7	1,3	2,1	3,3
70	2,2	1,2	1,0	1,6	2,7	3,9	1,5	1,4	2,1	4,4
100	3,1	1,2	1,1	1,6	3,5	5,2	1,4	1,5	2,1	5,6

Таблица 4.3

Средние квадратические отклонения представления среднемесячных значений зонального ветра (м/с)

H, км	Холодное полугодие					Теплое полугодие				
	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_{max}	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4	σ_{max}
0	0,9	1,1	0,7	1,3	1,6	2,2	1,7	0,9	1,9	2,9
5	1,2	1,2	0,9	1,1	1,6	2,6	2,4	0,7	2,5	3,6
10	1,7	1,7	1,1	2,0	2,6	3,5	2,9	0,8	3,0	4,4
20	1,2	1,6	1,4	2,1	2,4	3,2	2,5	0,9	2,7	4,1
30	1,5	1,5	1,3	2,0	2,5	5,1	2,3	1,1	2,5	5,7
50	3,4	1,9	1,7	2,6	4,2	6,4	2,9	1,3	3,2	7,1
70	5,8	2,4	2,0	3,1	6,6	9,2	3,3	1,4	3,6	9,9
100	6,7	2,9	2,5	3,8	7,7	11,1	4,2	1,5	4,5	11,9

Примечание: $\sigma_4 = [(\sigma_2)^2 + (\sigma_3)^2]^{0,5}$; $\sigma_{max} = (\sigma_1)^2 + (\sigma_4)^2$.

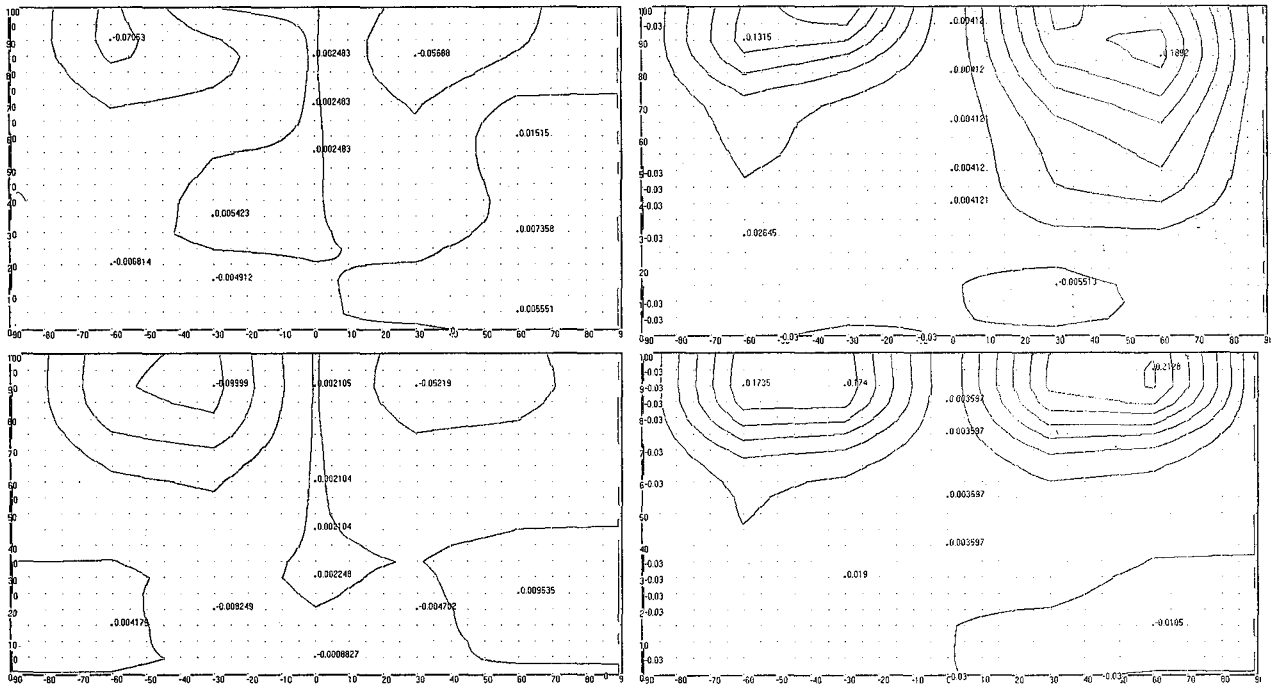


Рис.4.6. Зонально-осредненное поле относительного давления $(P - \hat{P}) / \hat{P}$ в январе (вверху) и июле (внизу) при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях

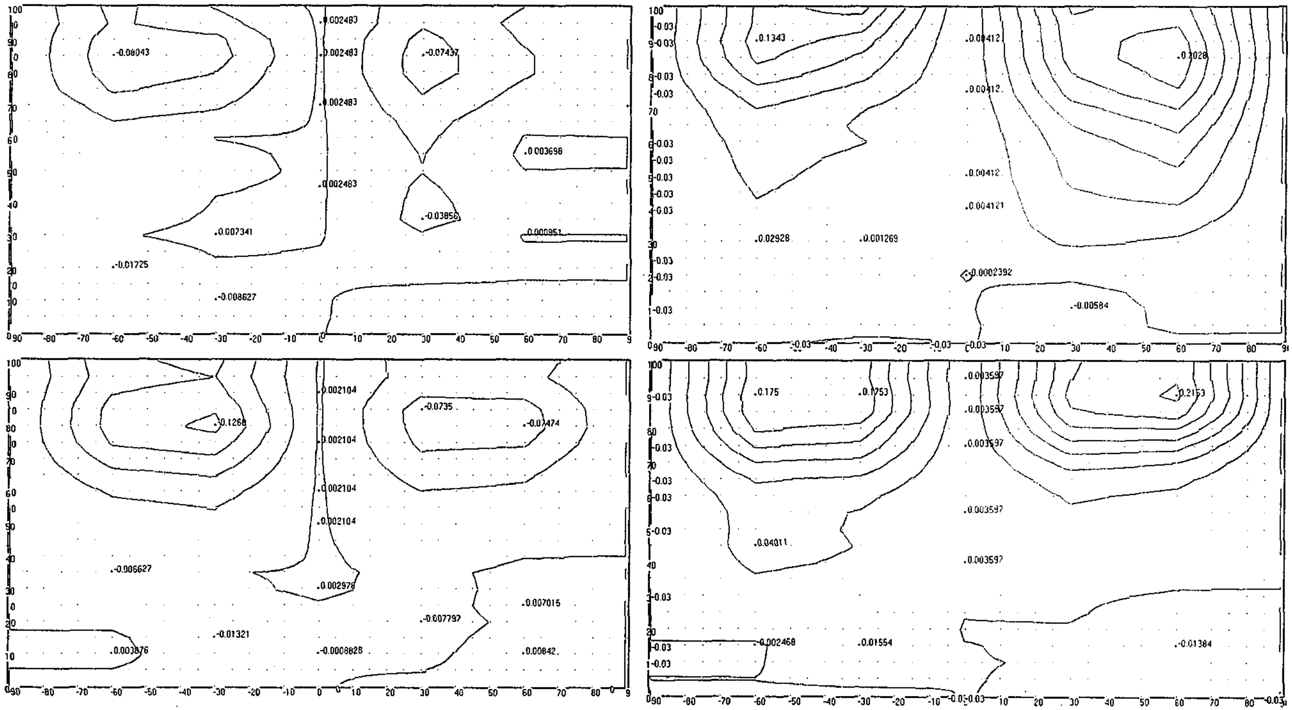


Рис.4.7. Зонально-осредненное поле относительной плотности $(\rho - \hat{\rho}) / \hat{\rho}$ в январе (вверху) и июле (внизу) при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях

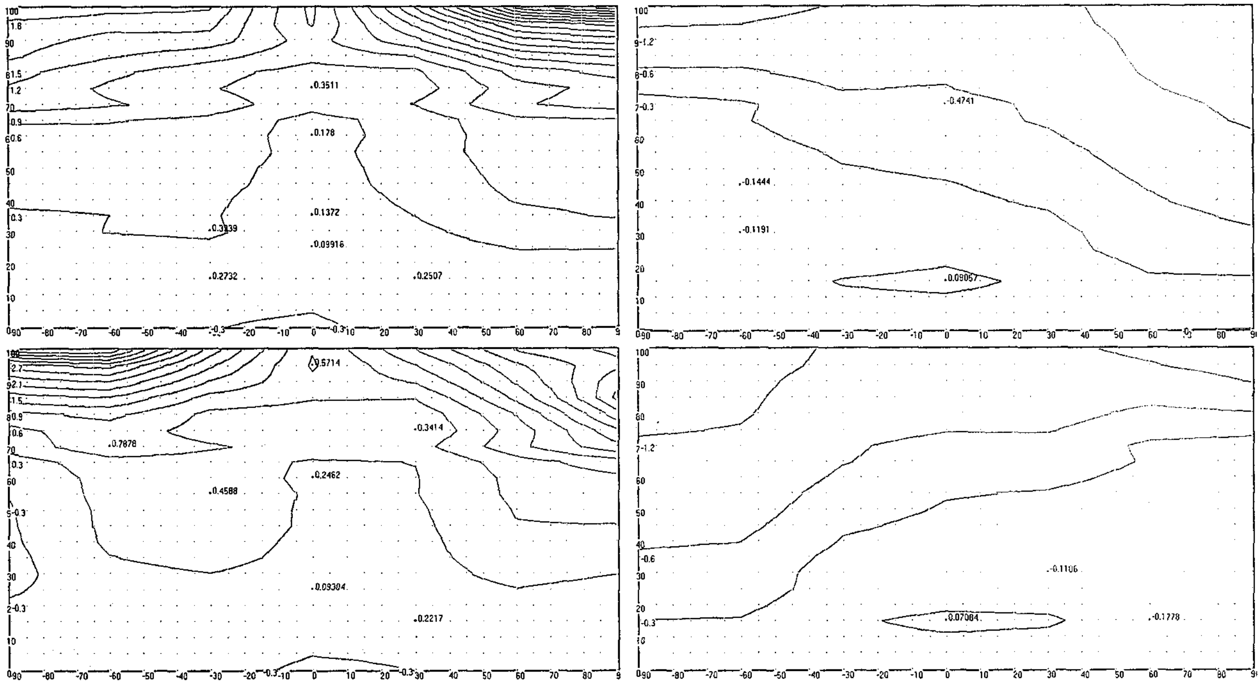


Рис.4.8. Зонально-осредненное поле относительной плотности $(\rho - \overline{\rho})/\overline{\rho}$ в январе (вверху) и июле (внизу)

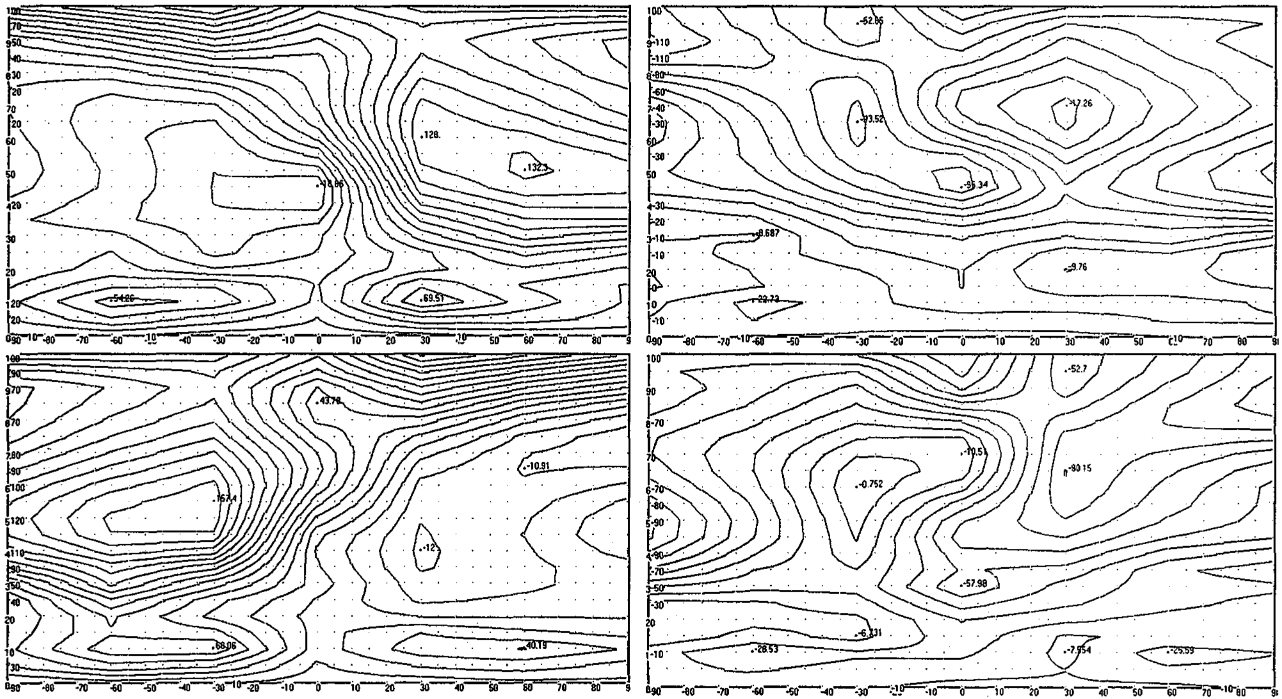


Рис.4.9. Зонально-осредненное поле зональной составляющей ветра (м/с) в январе (вверху) и июле (внизу) при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях

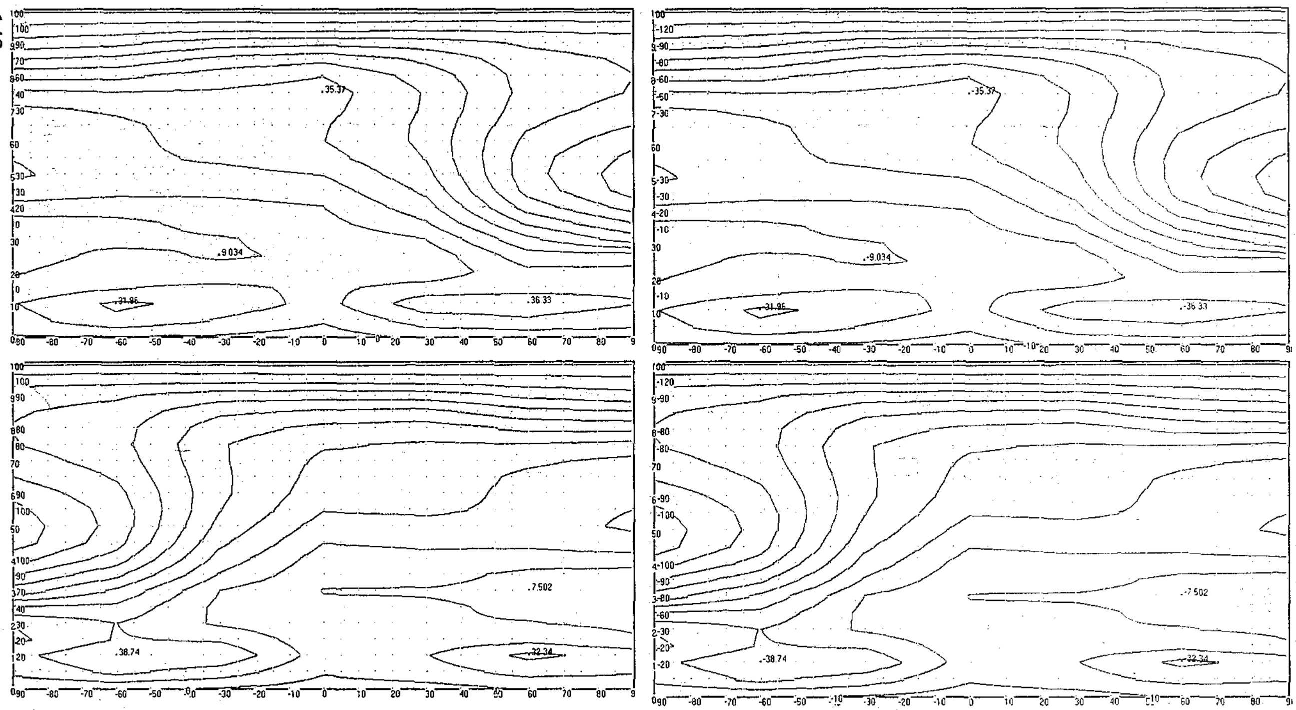


Рис.4.10. Зонально-осредненное поле меридиональной составляющей ветра (м/с) в январе (вверху) и июле (внизу) при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях

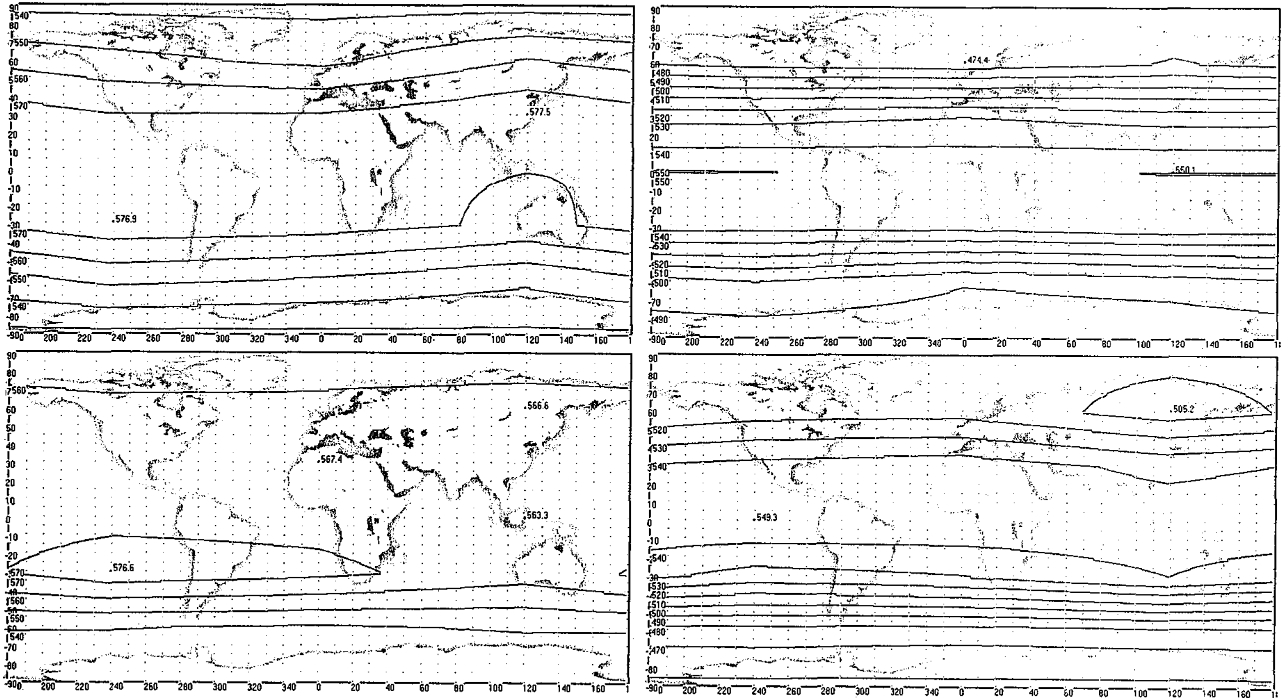


Рис.4.11. Экстремальные положительные (слева) и отрицательные (справа) вариации давления ($гПа$) в январе (вверху) и в июле (внизу) на высоте $z = 5$ км

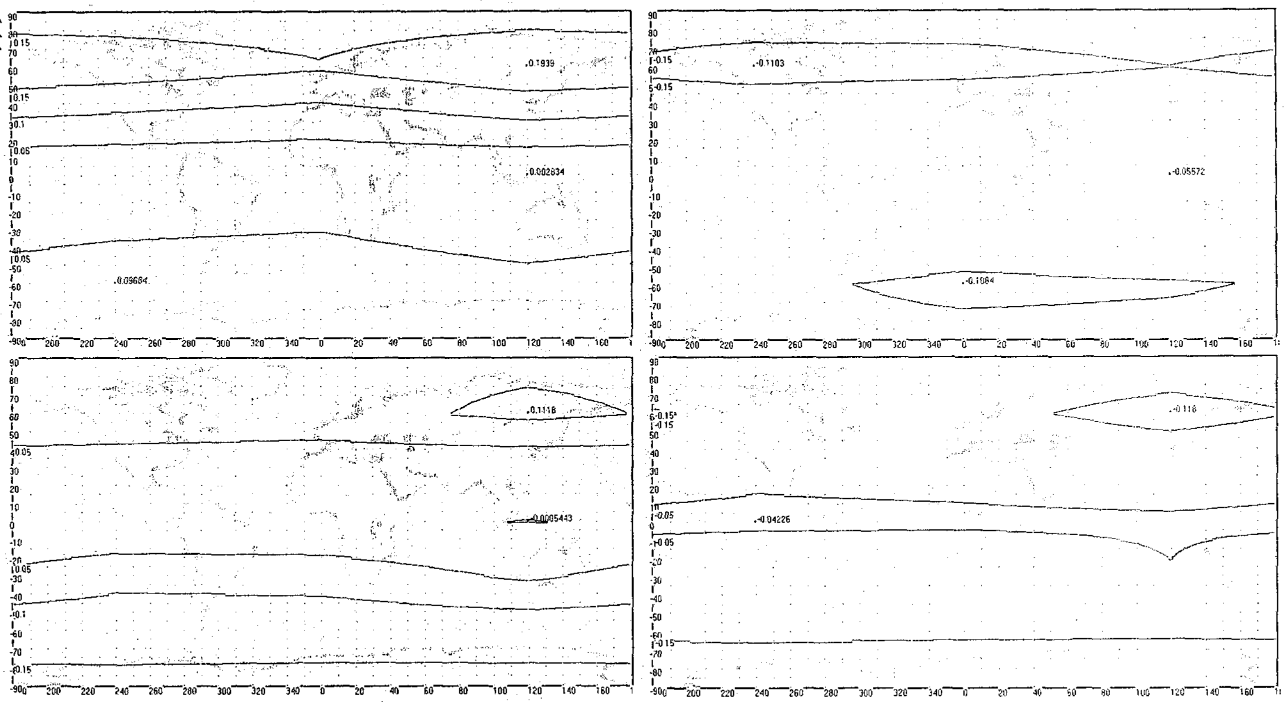


Рис.4.12. Экстремальные положительные (слева) и отрицательные (справа) вариации относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$ в январе (вверху) и в июле (внизу) на высоте $z = 5$ км

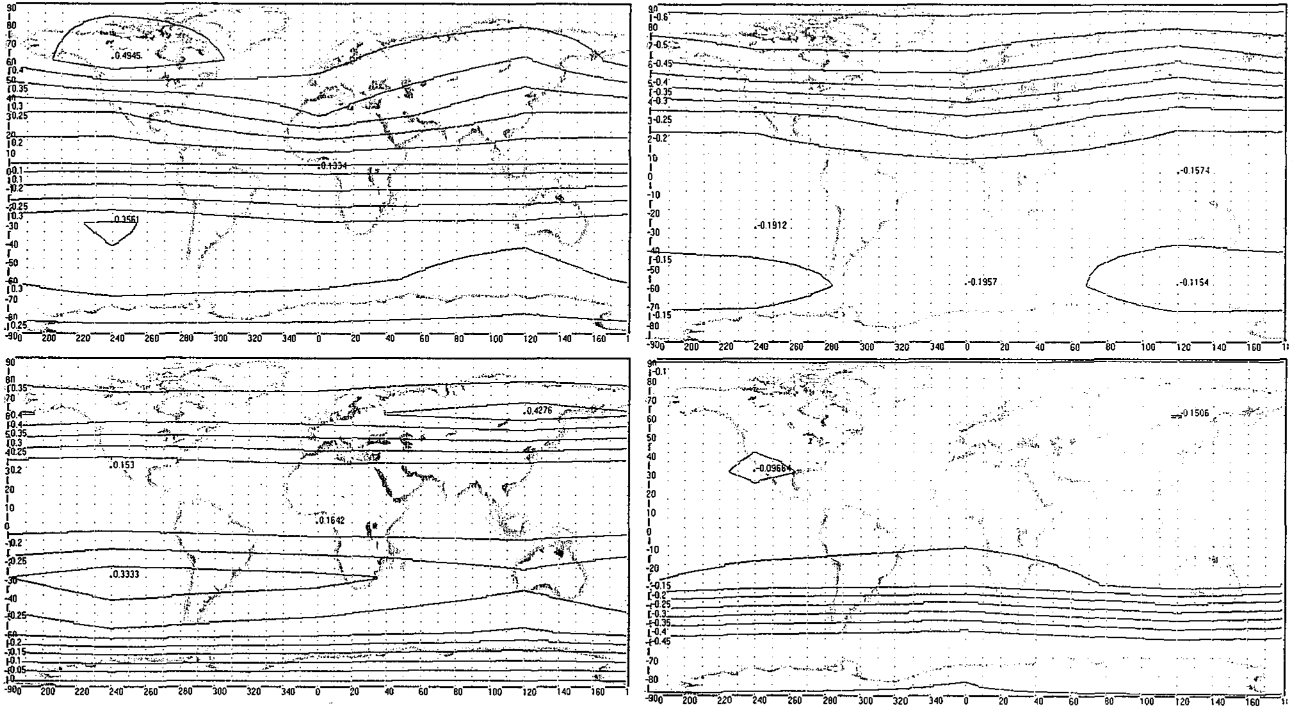


Рис.4.13. Экстремальные положительные (слева) и отрицательные (справа) вариации относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$ в январе (вверху) и в июле (внизу) на высоте $z = 30$ км

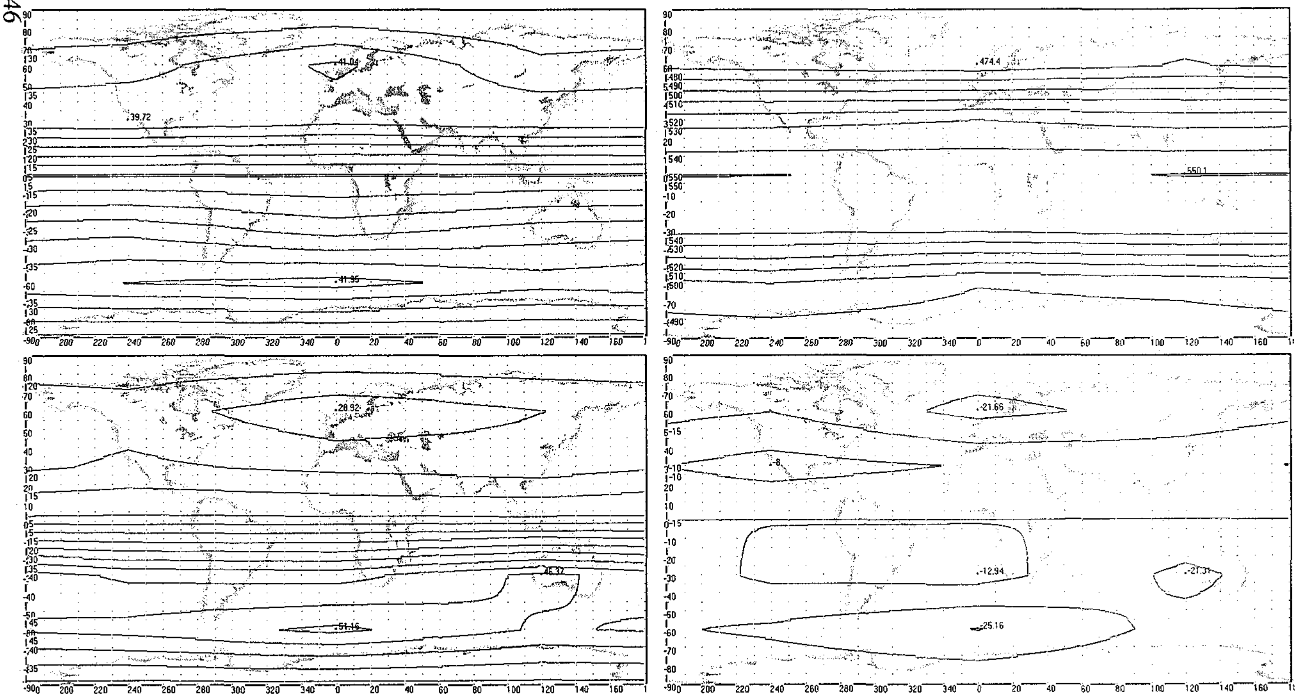


Рис.4.14. Экстремальные положительные (слева) и отрицательные (справа) вариации зональной составляющей ветра (м/с) в январе (вверху) и в июле (внизу) на высоте $z = 5$ км

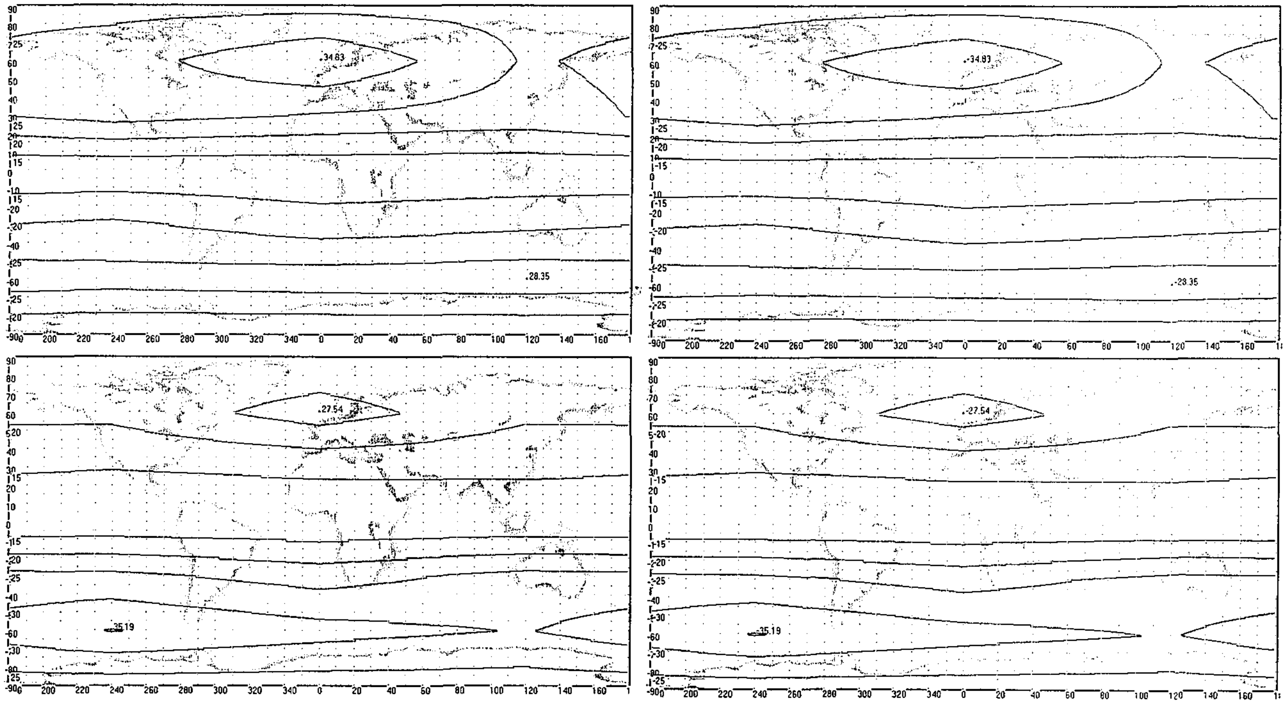


Рис.4.15. Экстремальные положительные (слева) и отрицательные (справа) вариации меридиональной составляющей ветра (м/с)
в январе (вверху) и в июле (внизу) на высоте $z = 5$ км

Результаты расчетов экстремальных вариаций давления, плотности, составляющих ветра для января и июля при $k = 2{,}7$ приведены на рис. 4.6 – 4.15. Здесь $\bar{f}$ есть стандартное, а $\hat{f}$ – зонально осредненное значение f. В целом рассчитанные поля метеовеличин хорошо отвечают указанным выше особенностям их пространственно-временного распределения.

Следует подчеркнуть, что анализ поля плотности в [13 проводился для экстремальных отклонений от ее средних значений. Экстремальные отклонения плотности, представленные на рис. 4.12 – 4.13, отнесены к ее стандартным значениям, которые превышают соответствующие отклонения от средних значений на разность между средними и стандартными значениями плотности.

В заключение рассмотрим вопрос об изменении отношения $\rho'/\bar{\rho}$ во времени и с высотой. Продифференцируем это отношение по времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \rho'}{\partial t} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t}.$$

Второй член правой части равен нулю в силу (4.1.2). Для преобразования первого члена привлечем уравнение (4.1.6). Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}}\, div\,(\bar{\rho} + \rho')\,\vec{V} \qquad (4.2.2)$$

или с точностью до величин первого порядка малости

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \ div\,\vec{V}\,. \qquad (4.2.3)$$

Теперь продифференцируем $\rho'/\bar{\rho}$ по высоте:

$$\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} = \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \rho'}{\partial z} - \frac{\rho'}{\bar{\rho}^2}\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} \approx \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \rho'}{\partial z} \qquad (4.2.4)$$

в силу малости дроби $\rho'/\bar{\rho}^2$.

Сделаем также следующее замечание.

При рассмотрении производных по горизонтальным координатам целесообразно учесть, что уровенные поверхности в пределах нескольких десятков километров от Земли незначительно отличаются от геометрических. Из этого обстоятельства вытекают некоторые соотношения:

$$\frac{\partial\bar{P}}{\partial s} = \frac{\partial\bar{\rho}}{\partial s} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial s} = \frac{\partial P'}{\partial s}, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial s} = \frac{\partial\rho'}{\partial s} \qquad s = (x, y).$$

4.3. ГРАВИТАЦИОННЫЙ ВЕТЕР И ЕГО СВОЙСТВА

Наличие возмущающего постоянного действия (силы) фактора, обусловленного неоднородностью поля силы тяжести, приводит к вариациям ускорения движения атмосферы. Очевидно, эти же возмущения должны проявиться и в вариациях скорости ветра. В связи с тем, что неоднородности поля силы тяжести в приложении к исследованию атмосферы обусловлены главным образом аномалиями гравитационного поля Земли, представляется естественным рассматриваемые ниже компоненты скорости ветра назвать гравитационными.

Для простоты все исследования в этой главе проведены применительно к горизонтальному движению воздуха, описываемому упрощенными уравнениями движения, записанными в векторной форме и в декартовой системе координат с отсчетной поверхностью ОЗЭ.

4.3.1. Определение гравитационного ветра

С учетом сделанных выше замечаний представим уравнение (4.1.5) в виде, описывающем только горизонтальное движение воздуха:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t} + l\,\vec{k}\times\vec{C} = \frac{\rho'}{\bar{\rho}}\vec{G} - \frac{1}{\bar{\rho}}\nabla P', \tag{4.3.1}$$

где $\vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j}$; $\vec{G} = g_x\vec{i} + g_y\vec{j}$; l – параметр Кориолиса.

Здесь $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – орты, направленные вдоль осей x, y, z.

Рассмотрим векторное произведение $l^{-1}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t}\times\vec{k}$. Тогда из (4.3.1) следует

$$\vec{C} = -l^{-1}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{C}}{\mathrm{d}t}\times\vec{k} - l^{-1}\cdot\frac{1}{\bar{\rho}}\nabla P'\times\vec{k} + l^{-1}\cdot\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\vec{G}\times\vec{k}. \tag{4.3.2}$$

Из полученного выражения следует, что горизонтальный ветер представлен эволюционной составляющей (первое слагаемое), геострофической (второе слагаемое) и гравитационной (третье слагаемое). Последняя составляющая и представляет гравитационный ветер

$$\vec{C}_g = l^{-1} \cdot \frac{\rho'}{\overline{\rho}} \vec{G} \times \vec{k} = \frac{\rho'}{\overline{\rho}} (c_{gx} \vec{i} + c_{gy} \vec{j}) = C_{gx} \vec{i} + C_{gy} \vec{j}, \quad (4.3.3)$$

где

$$c_{gx} = l^{-1} g_y; \quad c_{gy} = -l^{-1} g_x; \quad C_{gx} = l^{-1} \cdot \frac{\rho'}{\overline{\rho}} g_y, \; C_{gy} = -l^{-1} \cdot \frac{\rho'}{\overline{\rho}} g_x \quad -$$

компоненты гравитационного ветра.

Таким образом, гравитационный ветер возникает в неоднородном поле силы тяжести и меняется с высотой в зависимости от отклонений плотности ρ' от ее значений в равновесной атмосфере ($\overline{\rho}$).

Ниже рассмотрены основные свойства гравитационного ветра в соответствии с результатами работ [18–21], уточненными за счет учета переменности плотности.

Компоненты c_{gx} и c_{gy}, как подчеркнуто в гл. 1, обусловлены аномалиями расположения масс внутри Земли, приливными явлениями в гидро- и атмосфере, перераспределениями воздушных масс, движениями земных полюсов и др. При этом влияние первого фактора на три порядка превышает влияние остальных. Поэтому при математическом моделировании атмосферы с высокой точностью следует считать компоненты c_{gx} и c_{gy} стационарными, обусловленными гравитационными аномалиями Земли. Помимо этого, в соответствии с выводами п. 1.6 в слое атмосферы несколько десятков километров от Земли, можно пренебречь изменениями проекций силы тяжести с высотой. Поэтому компоненты c_{gx} и c_{gy} в первом приближении можно считать не зависящими от высоты.

Зональная и меридиональная составляющие гравитационного ветра C_{gx} и C_{gy} порождаются произведением компонент c_{gx} и c_{gy} на отношение $\rho'/\overline{\rho}$ и изменяются со временем и высотой в соответствии с изменениями относительной плотности.

На рис. 4.16 приведены карты составляющих c_{gx} и c_{gy}, рассчитанные для уровня моря. Тангенциальные составляющие определялись с использованием модели гравитационного поля Земли в виде

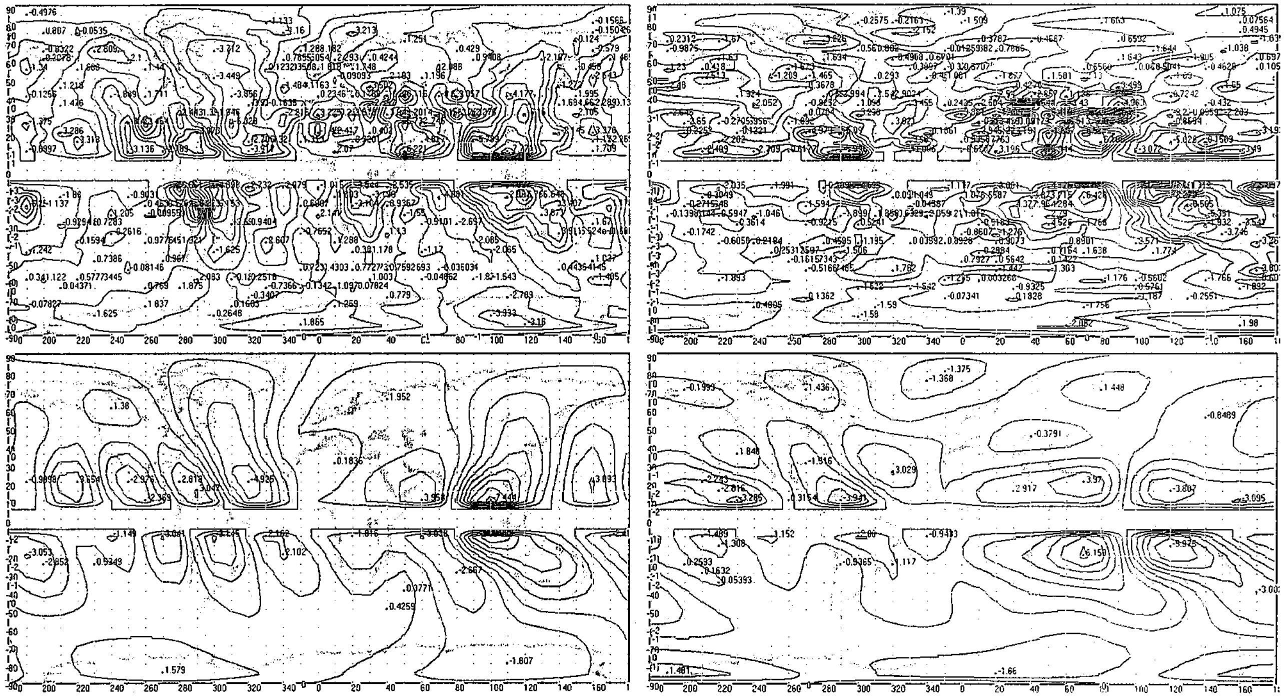


Рис. 4.16. Зональная c_{gx} (слева) и меридиональная (справа) c_{gy} компоненты гравитационного ветра (м/с) при порядке разложения аномального гравитационного поля Земли в ряд сферических фукций $n = 36$ (вверху) и $n=8$ (внизу)

разложения в ряд сферических функций. Порядок разложения принимался равным в первом варианте расчетов $n = 36$. Однако полученные поля оказались очень пестрыми и из-за этого сложными для аналогии восприятия. Поэтому во втором варианте полагалось $n = 8$, с тем чтобы крупномасштабные характеристики полей c_{gx} и c_{gy} не искажались мелкомасштабными возмущениями, обусловленными высокочастотными гармониками. Параметр Кориолиса в тропической зоне считался постоянным, отнесенным к широтам ±22,5°. Кроме того, при графическом представлении результатов ветер в десятиградусной широтной зоне вдоль экватора обнулялся. Такая необходимость обусловлена тем, что параметр Кориолиса при переходе через экватор меняет знак и в поле компонент c_{gx} и c_{gy} в этой области возникают большие фиктивные градиенты.

Анализ приведенных карт показывает, что экстремумы c_{gx} и c_{gy} сосредоточены в областях наибольших градиентов аномалий поля силы тяжести. Экстремумы этих компонент равны (м/с):

для c_{gx} 6,25 и –8,97;

для c_{gy} 7,66 и –6,43.

Во внетропических широтах эти экстремумы по модулю имеют порядок 3 м/с.

Карты зональной и меридиональной составляющих (C_{gx} и C_{gy}) гравитационного ветра у поверхности Земли и на высотах 10 и 30 км представлены на рис. 4.17 – 4.22. У поверхности Земли составляющая C_{gx} изменяется от –0,60 до 0,55 м/с, а C_{gy} – от –0,46 до 0,45 м/с. На высоте 10 км – от –0,36 до 0,44 и от –0,59 до 0,71 (м/с) соответственно. На высоте 30 км – от –1,42 до 1,50 и от –1,30 до 1,30 (м/с) соответственно.

Рассмотрим изменение гравитационного ветра во времени. Для этого возьмем локальную производную от выражения (4.3.3) по времени

$$\frac{\partial \vec{C}_g}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\rho'}{\overline{\rho}}(c_{gx}\vec{i} + c_{gy}\vec{j})\right] = (c_{gx}\vec{i} + c_{gy}\vec{j})\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho'}{\overline{\rho}}\right).$$

Учитывая уравнение (4.2.3), можно записать с точностью до величин первого порядка малости

$$\frac{\partial \vec{C}_g}{\partial t} = (c_{gx}\vec{i} + c_{gy}\vec{j})\cdot div\,\vec{V}.$$

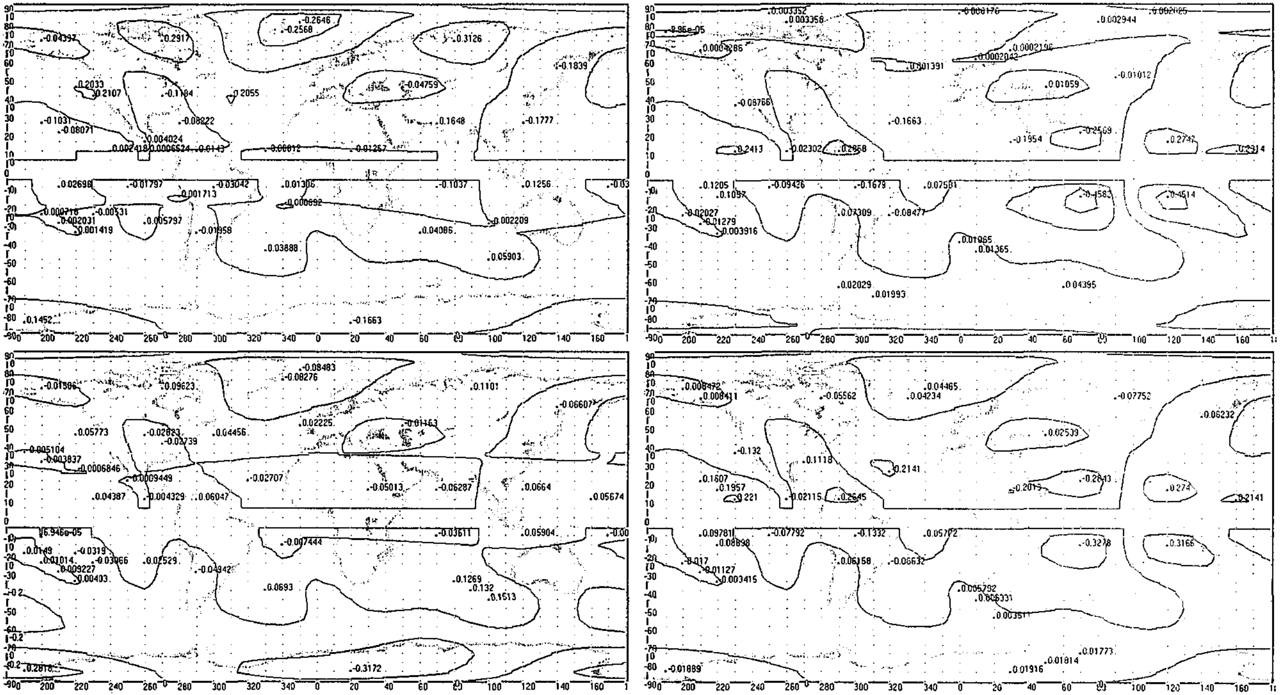


Рис. 4.17. Зональная составляющая гравитационного ветра (*м/с*) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=0 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$

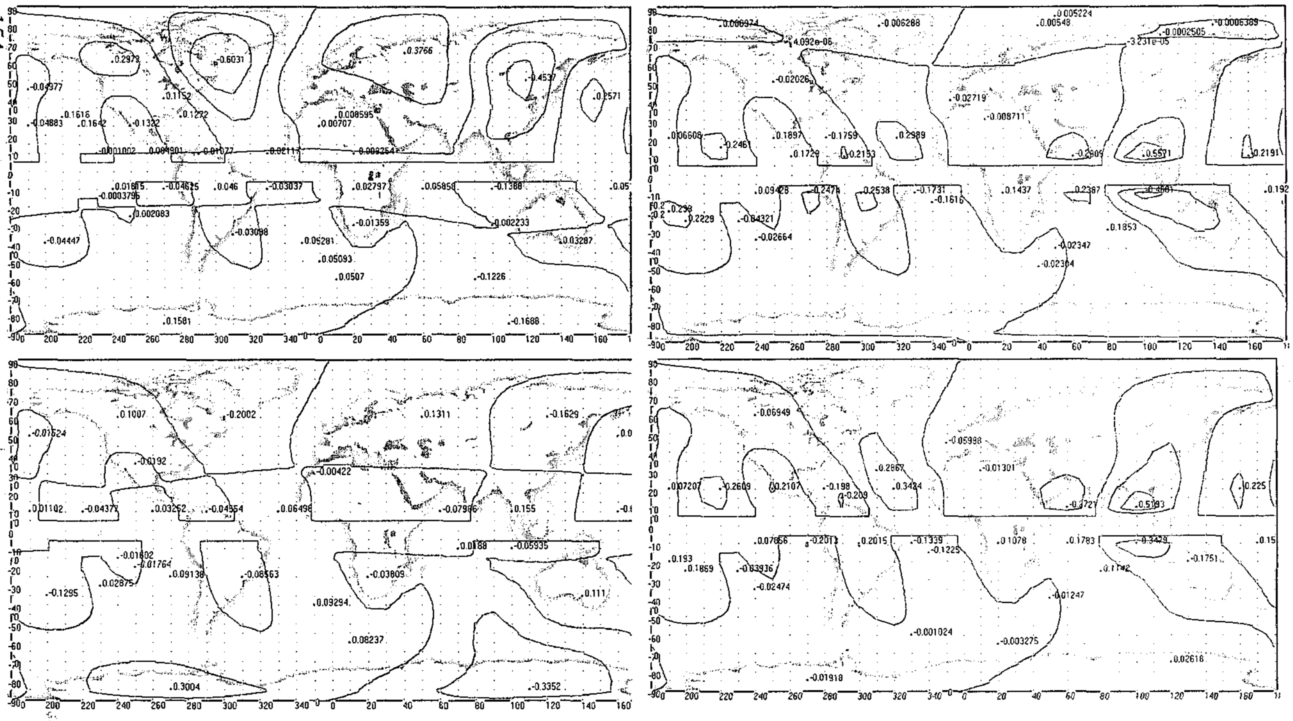


Рис. 4.18. Меридиональная составляющая гравитационного ветра (*м/с*) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=0 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$

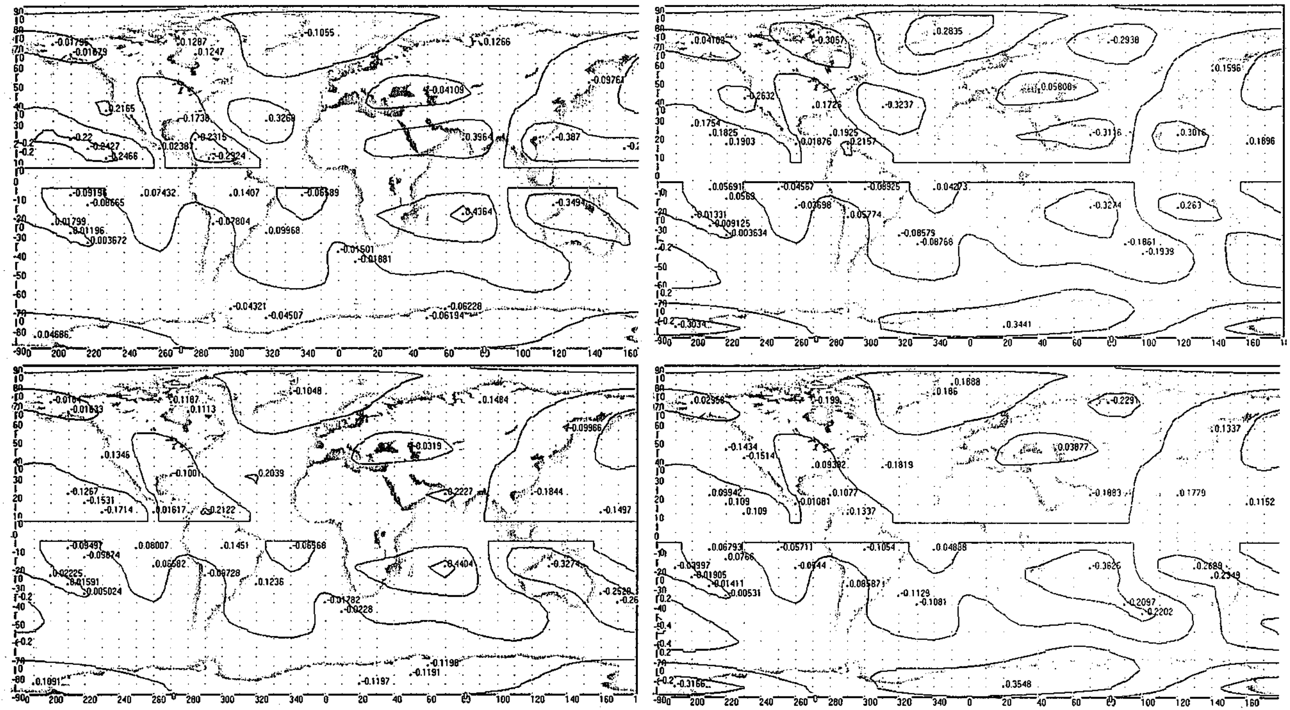


Рис. 4.19. Зональная составляющая гравитационного ветра (*м/с*) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=10 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$

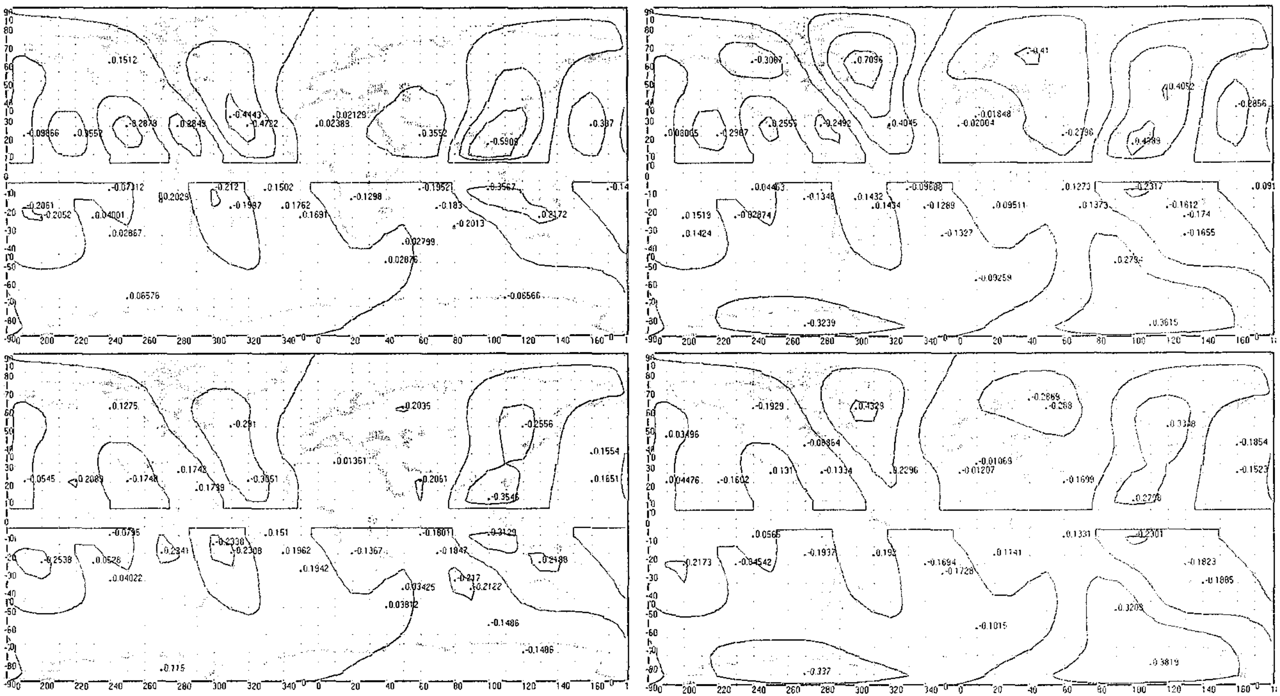


Рис. 4.20. Меридиональная составляющая гравитационного ветра (м/с) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=10 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$

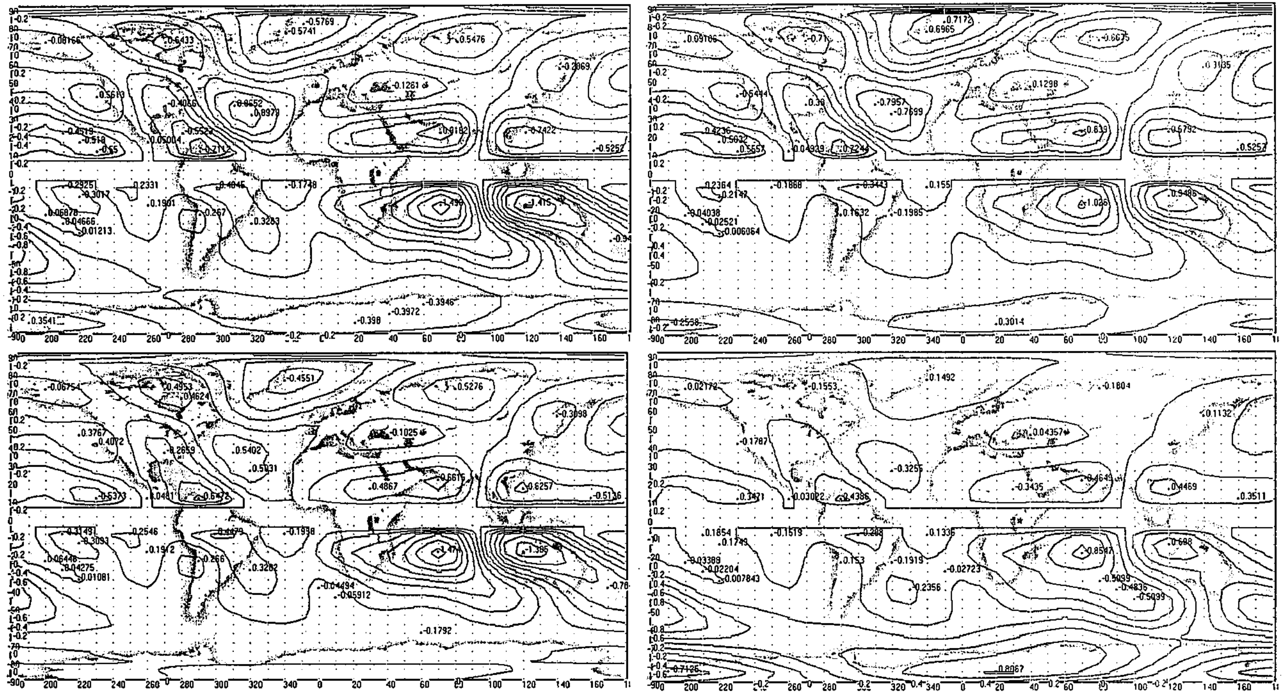


Рис. 4.21. Зональная составляющая гравитационного ветра (м/с) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=30 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$

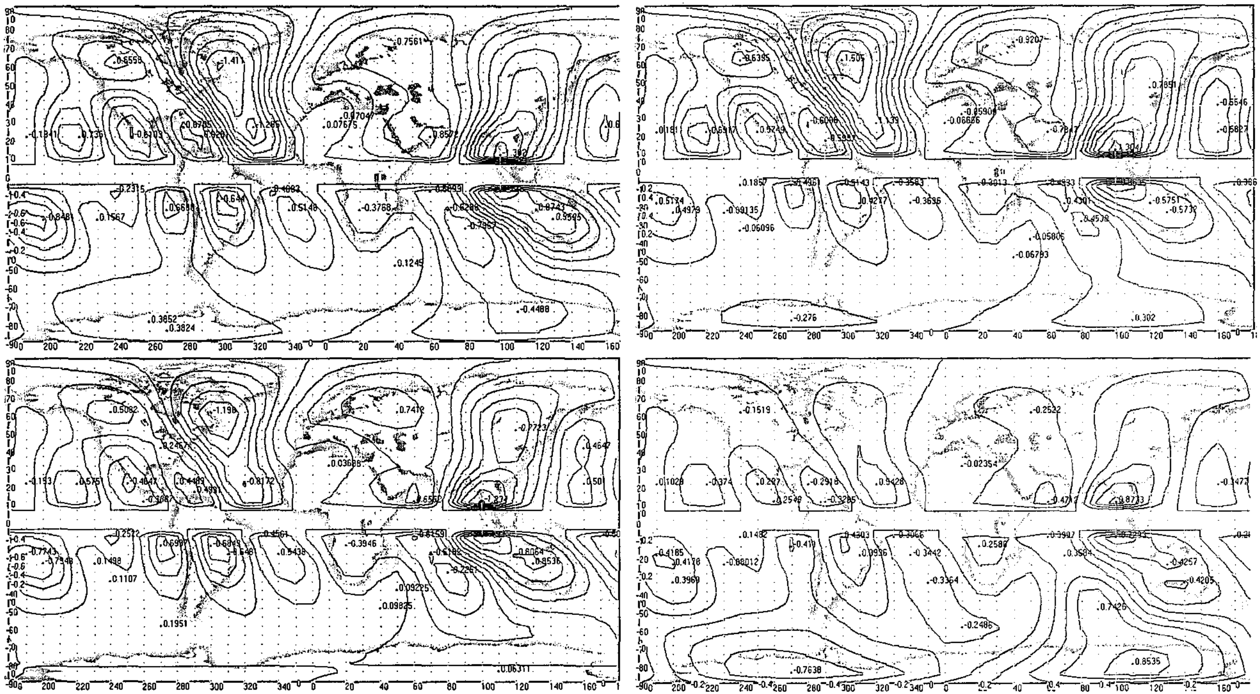


Рис. 4.22. Меридиональная составляющая гравитационного ветра (м/с) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=30 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$

Полученное выражение показывает, что локальные вариации во времени гравитационного ветра определяются дивергенцией ветра и аномальностью силы тяжести (АСТ).

Рассмотрим изменение гравитационного ветра с высотой. Продифференцируем выражение (4.3.3) по z:

$$\frac{\partial \vec{C}_g}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\rho'}{\overline{\rho}}\,(c_{gx}\vec{i} + c_{gy}\vec{j})\right] =$$

$$= (c_{gx}\vec{i} + c_{gy}\vec{j})\,\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho'}{\overline{\rho}}\right) + \frac{\rho'}{\overline{\rho}}\,\frac{\partial}{\partial z}\left(c_{gx}\vec{i} + c_{gy}\vec{j}\right).$$

Второй член правой части содержит произведение двух малых величин (см. п. 1.6 и 4.1) и им можно пренебречь. С учетом (4.2.4) полученное выражение можно упростить:

$$\frac{\partial \vec{C}_g}{\partial z} = (c_{gx}\vec{i} + c_{gy}\vec{j})\,\frac{1}{\overline{\rho}}\,\frac{\partial \rho'}{\partial z}.$$

Тогда можно сделать подтверждающий рассуждения в начале параграфа вывод, что изменение гравитационного ветра с высотой в основном определяется производной $\dfrac{\partial \rho'}{\partial z}$.

4.3.2. Завихренность гравитационного ветра

Практически все наблюдаемые в атмосфере движения носят вихревой характер, характеристикой которого является вихрь скорости. При рассмотрении крупномасштабных движений основную роль играет вертикальная составляющая вихря. Определим завихренность гравитационного ветра $\vec{\Omega}_g$. С этой целью применим операцию ротора к выражению для гравитационного ветра (4.3.3)

$$\vec{\Omega}_g = \nabla \times \vec{C}_g = \nabla \times \left(l^{-1} \cdot \frac{\rho'}{\overline{\rho}}\,\vec{G} \times \vec{k}\right).$$

Осуществляя преобразования, получаем

$$\vec{\Omega}_g = \nabla \times (C_{gx}\vec{i} + C_{gy}\vec{j}) = -\frac{\partial C_{gy}}{\partial z}\,\vec{i} + \frac{\partial C_{gx}}{\partial z}\,\vec{j} + \left(\frac{\partial C_{gy}}{\partial x} - \frac{\partial C_{gx}}{\partial y}\right)\vec{k}. \quad (4.3.4)$$

Компоненты вектора $\vec{\Omega}_g$ имеют вид

$$\Omega_{gx} = -\frac{\partial C_{gy}}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(-l^{-1}\cdot\frac{\rho'}{\bar\rho}g_x\right) = \frac{g_x}{l}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho'}{\bar\rho}\right) + \frac{1}{l}\frac{\rho'}{\bar\rho}\frac{\partial g_x}{\partial z},$$

$$\Omega_{gy} = \frac{\partial C_{gy}}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(l^{-1}\cdot\frac{\rho'}{\bar\rho}g_y\right) = \frac{g_y}{l}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho'}{\bar\rho}\right) + \frac{1}{l}\frac{\rho'}{\bar\rho}\frac{\partial g_y}{\partial z},$$

$$\Omega_{gz} = \frac{\partial C_{gy}}{\partial x} - \frac{\partial C_{gx}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-l^{-1}\cdot\frac{\rho'}{\bar\rho}g_x\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(l^{-1}\cdot\frac{\rho'}{\bar\rho}g_y\right) =$$

$$= -\frac{g_x}{l}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho'}{\bar\rho}\right) - \frac{g_y}{l}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho'}{\bar\rho}\right) - \frac{1}{l}\frac{\rho'}{\bar\rho}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} - \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) + C_{gx}\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial y},$$

где $\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial y}$ – параметр Россби.

Таким образом, при $\rho' \neq 0$ возникающий гравитационный ветер приводит к возникновению трехмерного вихря.

Выражения для составляющих Ω_{gx}, Ω_{gy} можно существенно упростить. Вторые члены правых частей содержат произведения двух малых величин (см. п. 1.6 и 4.1), которыми можно пренебречь. С учетом (4.2.4) тогда можно записать

$$\Omega_{gx} \approx \frac{g_x}{l}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho'}{\bar\rho}\right) \approx \frac{g_x}{l}\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial\rho'}{\partial z},$$

$$\Omega_{gy} \approx \frac{g_y}{l}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho'}{\bar\rho}\right) \approx \frac{g_y}{l}\frac{1}{\bar\rho}\frac{\partial\rho'}{\partial z}.$$

Отсюда следует, что составляющие Ω_{gx}, Ω_{gy} в основном определяются аномальностью полей g_X и g_Y, а также изменением с высотой отклонений плотности от ее значений в равновесной атмосфере.

Порядок величины Ω_{gz} составляет от 10^{-7} с$^{-1}$ в низких и умеренных широтах до 10^{-8} с$^{-1}$ в высоких. При этом во внеполярных широтах доминирующим в выражении для Ω_{gz} является последний член $C_{gx}\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial y}$, т.е. завихренность гравитационного ветра обусловлена преимущественно его зональной компонентой. Это свидетельствует о наличии «зонального» эффекта в структуре поля Ω_{gz}.

Рассмотрим изменение вихря гравитационного ветра во времени. В результате дифференцирования выражения (4.3.4) по времени получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{\Omega}_g = -\frac{\partial^2 C_{gy}}{\partial t \partial z}\vec{i} + \frac{\partial^2 C_{gx}}{\partial t \partial z}\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 C_{gy}}{\partial t \partial x} - \frac{\partial^2 C_{gx}}{\partial t \partial y}\right)\vec{k}.$$

В покомпонентном виде с учетом выполненных упрощений и с учетом (4.2.3) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega_{gx} \approx \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g_x}{l}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \rho'}{\partial z}\right) = \frac{g_x}{l}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial z}\right) \approx \frac{g_x}{l}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\vec{V},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega_{gy} \approx \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{g_y}{l}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \rho'}{\partial z}\right) = \frac{g_y}{l}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial z}\right) \approx \frac{g_y}{l}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{div}\vec{V},$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Omega_{gz} \approx -\frac{g_x}{l}\frac{\partial^2}{\partial t \partial x}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) - \frac{g_y}{l}\frac{\partial^2}{\partial t \partial y}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) - \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} - \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) \approx$$

$$\approx -\frac{g_x}{l}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial x}div\vec{V} - \frac{g_y}{l}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial}{\partial y}div\vec{V} - \frac{1}{l\bar{\rho}}div\vec{V}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} - \frac{\partial g_y}{\partial y}\right).$$

Таким образом изменение во времени составляющих Ω_{gx}, Ω_{gy} обусловлено аномальностью полей g_X и g_Y, а также изменением с высотой дивергенции ветра. Изменение во времени составляющей Ω_{gz} обусловлено аномальностью и изменением по горизонтальным координатам дивергенции скорости ветра (первое и второе слагаемые), а также сходимостью воздушных потоков и кривизной уровенной поверхности (см. п. 1.3.5).

Теперь рассмотрим изменения вихря гравитационного ветра с высотой. В результате дифференцирования выражения (4.3.4) по Z получаем:

$$\frac{\partial}{\partial z}\vec{\Omega}_g = -\frac{\partial^2 C_{gy}}{\partial z^2}\vec{i} + \frac{\partial^2 C_{gx}}{\partial z^2}\vec{j} + \left(\frac{\partial^2 C_{gy}}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 C_{gx}}{\partial z \partial y}\right)\vec{k}.$$

В покомпонентном виде с учетом (4.2.4) имеем

$$\frac{\partial}{\partial z}\Omega_{gx} \approx \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g_x}{l}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\rho'}{\partial z}\right) \approx \frac{g_x}{l}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2\rho'}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Omega_{gy} \approx \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{g_y}{l}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial\rho'}{\partial z}\right) \approx \frac{g_y}{l}\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial^2\rho'}{\partial z^2},$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\Omega_{gz} \approx -\frac{g_x}{l}\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) - \frac{g_y}{l}\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) - \frac{1}{l}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} - \frac{\partial g_y}{\partial y}\right) \approx$$
$$\approx -\frac{1}{l\bar{\rho}}\left[g_x\frac{\partial^2\rho'}{\partial x\partial z} + g_y\frac{\partial^2\rho'}{\partial y\partial z} + \frac{\partial\rho'}{\partial z}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} - \frac{\partial g_y}{\partial y}\right)\right].$$

Таким образом, изменение с высотой составляющих Ω_{gx}, Ω_{gy} обусловлено аномальностью поля гравитации и распределением по высоте отклонений плотности от ее значений в равновесной атмосфере. Изменение во времени составляющей Ω_{gz} обусловлено аномальностью поля гравитации и изменением по горизонтальным и вертикальной координатам отклонений плотности от ее значений в равновесной атмосфере (первое и второе слагаемые), а также изменением по высоте вариаций плотности и кривизной уровенной поверхности (см. п. 1.3.5).

4.3.3. Кинетическая энергия

При изучении атмосферных объектов любого масштаба важнейшим является вопрос о возникновении и преобразовании кинетической энергии. Получим выражение для кинетической энергии гравитационного ветра

$$E_g = \frac{1}{2}\left|\vec{C}_g\right|^2 = \frac{1}{2}\left|C_{gx}\vec{i} + C_{gy}\vec{j}\right|^2 = \frac{1}{2}\left[(C_{gx})^2 + (C_{gy})^2\right] =$$
$$= \frac{1}{2l^2}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)^2\left[(g_x)^2 + (g_y)^2\right].$$

На рис. 4.23 – 4.25 приведены карты распределения кинетической энергии у Земли и на высотах 10 и 30 км. Ее максимальные значения достигают соответственно 0,34; 0,38; 2,01 м^2/с^2. Наблюдается хорошее соответствие максимумов E_g и областей зарождения

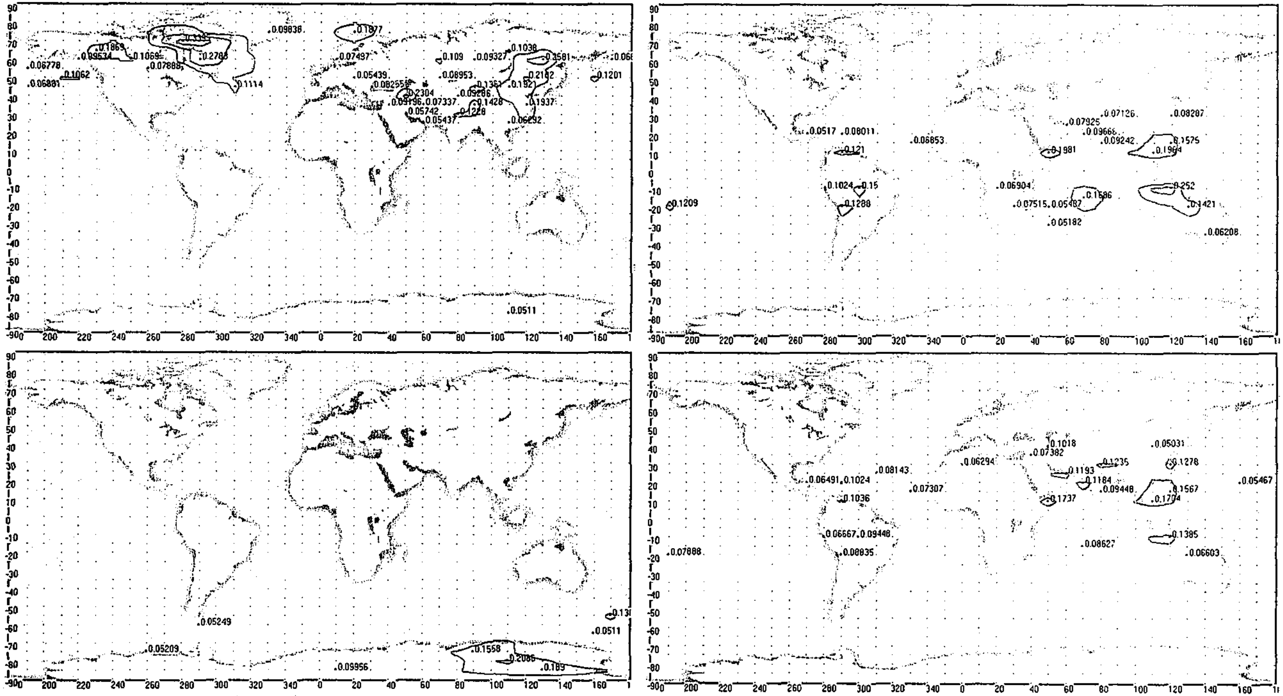


Рис. 4.23. Кинетическая энергия гравитационного ветра (м^2/с^2) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=0 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$

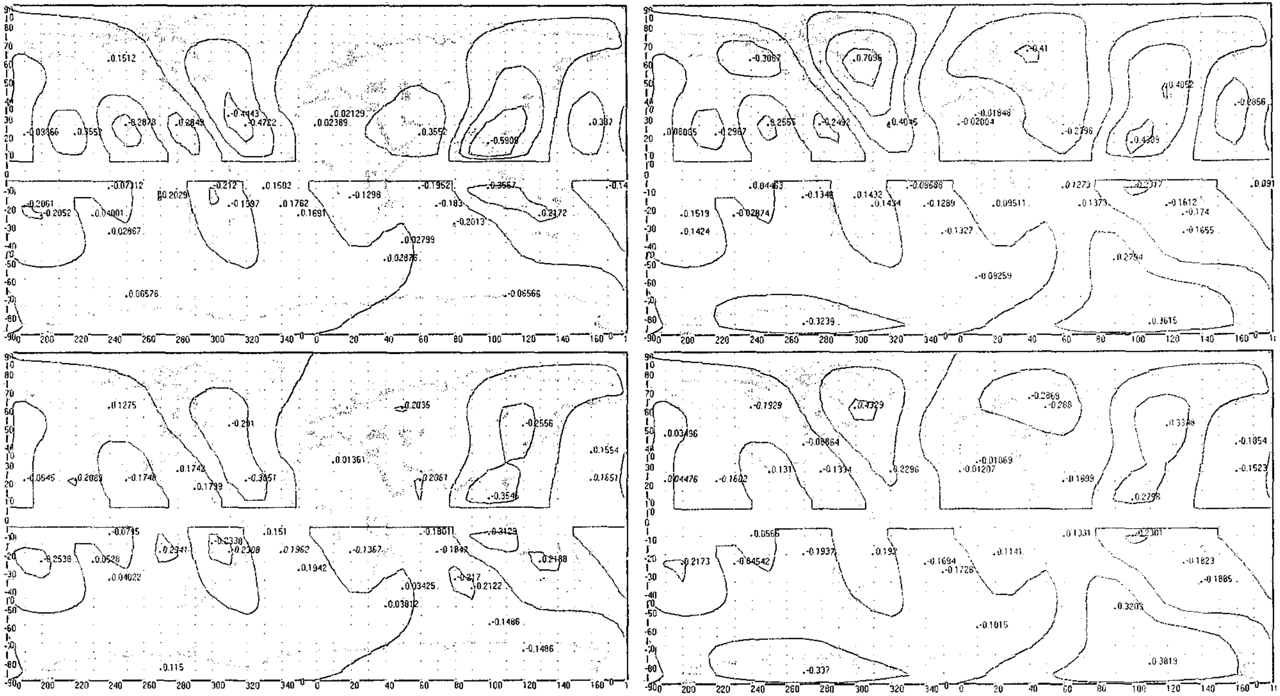


Рис. 4.20. Меридиональная составляющая гравитационного ветра (м/с) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=10 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$

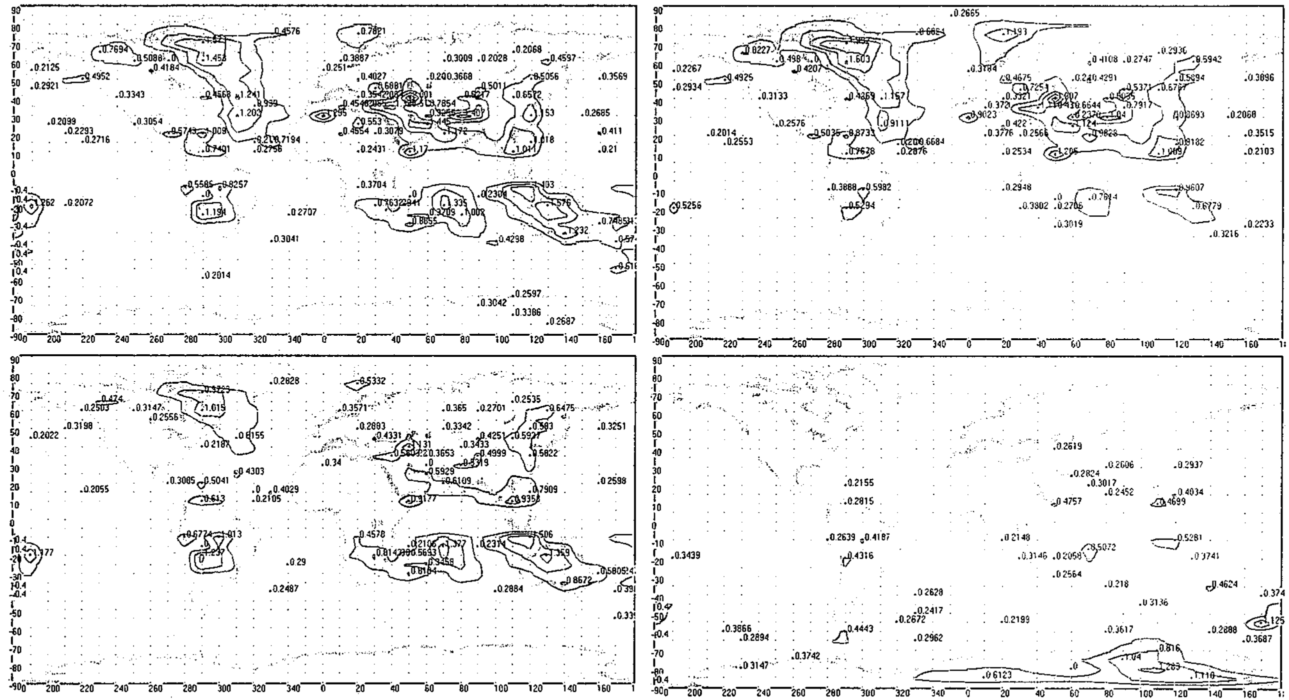


Рис. 4.25. Кинетическая энергия гравитационного ветра (м^2/с^2) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=30 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях относительной плотности $\rho'/\overline{\rho}$

тропических циклонов и муссоной деятельностью в низких широтах. В умеренных и высоких широтах наблюдается хорошее соответствие максимумов E_g и климатических центров действия атмосферы. Таким образом, в областях с максимумами E_g имеет место повышенная интенсивность атмосферных движений. Порядок разложения в ряд сферических функций аномального гравитационного поля Земли равнялся 36.

Изменение кинетической энергии во времени определяется относительной плотностью, дивергенцией ветра и АСТ. Действительно, с учетом (4.2.3) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}E_g \approx \frac{\rho'}{l^2\overline{\rho}}\left[(g_x)^2+(g_y)^2\right]\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho'}{\overline{\rho}} \approx \frac{\rho'}{l^2\overline{\rho}}\left[(g_x)^2+(g_y)^2\right]\operatorname{div}\vec{V} .$$

Изменение кинетической энергии с высотой определяется аномальностью полей g_X и g_Y и изменением по высоте отклонения плотности от ее значения в равновесной атмосфере. Действительно, с учетом (4.2.4) имеем

$$\frac{\partial}{\partial z}E_g \approx \frac{\rho'}{l^2\overline{\rho}}\left[(g_x)^2+(g_y)^2\right]\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho'}{\overline{\rho}} \approx \frac{\rho'}{l^2\overline{\rho}^2}\left[(g_x)^2+(g_y)^2\right]\frac{\partial\rho'}{\partial z}.$$

4.3.4. Дивергентные свойства гравитационного ветра

Дивергенция является важной характеристикой движения воздушных потоков. Об этом свидетельствуют и полученные выше выражения для изменения во времени гравитационного ветра, его завихренности и кинетической энергии. Дивергенция вектора гравитационного ветра есть составная часть дивергенции вектора $\vec{V}$ и характеризует вертикальные токи, обусловленные влиянием неоднородного поля силы тяжести.

Определим дивергенцию вектора гравитационного ветра

$$div\,\vec{C}_g = \nabla\cdot\vec{C}_g = \nabla\cdot\left(l^{-1}\cdot\frac{\rho'}{\overline{\rho}}\vec{G}\times\vec{k}\right).$$

Осуществим преобразования

$$\operatorname{div}\vec{C}_g = \nabla\cdot(C_{gx}\vec{i} + C_{gy}\vec{j}) = \frac{\partial C_{gx}}{\partial x} + \frac{\partial C_{gy}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(l^{-1}\cdot\frac{\rho'}{\bar{\rho}}g_y\right) -$$

$$-\frac{\partial}{\partial y}\left(-l^{-1}\cdot\frac{\rho'}{\bar{\rho}}g_x\right) =$$

$$= \frac{g_y}{l}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) - \frac{g_x}{l}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right) + \frac{1}{l}\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\left(\frac{\partial g_y}{\partial x} - \frac{\partial g_x}{\partial y}\right) - \frac{\rho'}{\bar{\rho}}g_x\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial y}.$$

С учетом того, что $\frac{\partial g_y}{\partial x} = \frac{\partial g_x}{\partial y}$ имеем

$$\operatorname{div}\vec{C}_g = \frac{1}{l}\left(\frac{\rho'}{\bar{\rho}}, W\right) + C_{gy}\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial y}. \qquad (4.3.5)$$

Здесь выражение в скобках есть якобиан.

Таким образом, дивергенция гравитационного ветра определяется его меридиональной компонентой, умноженной на параметр Россби, и якобианом от относительной плотности и геопотенциала. Оценка порядков членов правой части показывает, что доминирующим является второй член в выражении (4.3.5). Отсюда следует, что имеет место «широтный» эффект, т.е. дивергенция скорости гравитационного ветра может наблюдаться преимущественно при меридиональных движениях воздуха, обусловленных аномальностью гравитационного поля Земли. При южных потоках ($C_{gy} > 0$) будет иметь место дивергенция, при северных ($C_{gy} < 0$) – конвергенция скорости гравитационного ветра.

Однако роль этого фактора в общей циркуляции атмосферы, очевидно, незначительна, поскольку экстремальные значения дивергенции гравитационного ветра на порядок меньше характерных значений горизонтальной дивергенции скорости атмосферных движений. Наряду с этим в низких широтах, где значения $div\,\vec{C}_g$ максимальны, этот эффект может играть важную роль при исследовании тропических возмущений и муссонной циркуляции.

Рассмотрим изменение дивергенции гравитационного ветра во времени. Для этого возьмем локальную производную по времени от выражения (4.3.5) и с учетом уравнения (4.2.3) получим

$$\frac{\partial \operatorname{div}\vec{C}_g}{\partial t} \approx \frac{1}{l}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho'}{\overline{\rho}}, W\right) \approx \frac{1}{l}\left(\operatorname{div}\vec{V}, W\right).$$

Таким образом, изменение дивергенции гравитационного ветра во времени определяется якобианом от дивергенции вектора ветра $\vec{V}$ и потенциала силы тяжести.

Рассмотрим изменение дивергенции гравитационного ветра с высотой. Продифференцируем выражение (4.3.5) по z:

$$\frac{\partial \operatorname{div}\vec{C}_g}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{l}\left(\frac{\rho'}{\overline{\rho}}, W\right) + C_{gy}\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial y}\right] = \frac{1}{l}\left(\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho'}{\overline{\rho}}, W\right) +$$

$$+\frac{1}{l}\left(\frac{\rho'}{\overline{\rho}}, \frac{\partial}{\partial z}W\right) + \frac{\partial}{\partial z}C_{gy}\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial y} \approx$$

$$\approx \frac{1}{l\overline{\rho}}\left[\left(\frac{\partial \rho'}{\partial z}, W\right) + \left(\rho', g_z\right) - g_x\frac{\partial \rho'}{\partial z}\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial y}\right].$$

Два первых члена представляют сумму произведений двух малых величин. Поэтому дивергенция гравитационного ветра изменяется с высотой в основном в соответствии с изменением по высоте отклонения плотности от ее значения в равновесной атмосфере.

4.3.5. О связи гравитационного ветра с агеострофическим

Агеострофические движения генерируя кинетическую энергию [2, 6], играют важнейшую роль в процессах преобразования циркуляции атмосферы. Этим объясняется интерес к агеострофической составляющей ветра, определяемой разностью реального и геострофического ветра.

Обратимся к выражению (4.3.2). Обозначим через $\vec{C}_Г$ геострофическую составляющую вектора горизонтального ветра $\vec{C}$. Тогда для агеострофической составляющей $\vec{C}_A$ получим

$$\vec{C}_A = -\,l^{-1}\cdot\frac{d\vec{C}}{dt}\times\vec{k} \; + \, l^{-1}\cdot\frac{\rho'}{\overline{\rho}}\vec{G}\times\vec{k}.$$

Отсюда следует, что вектор агеострофического ветра равен алгебраической сумме векторов эволюционной и гравитационной составляющих вектора $\vec{C}$.

В среднем скорость агеострофического ветра по различным данным составляет 10–20% от скорости геострофического ветра [2]. Однако имеются данные и о том, что у тропопаузы его скорость может достигать 15–20 м/с и более [6]. К сожалению, в этих данных отсутствуют сведения о вариациях плотности. Такие большие скорости агеострофического ветра связаны со струйными течениями.

Если ориентироваться на традиционные оценки агеострофической составляющей ветра, то можно отметить следующее. Сравнение порядков показывает, что значение гравитационного ветра на порядок меньше первого члена в районах малый аномалий. В районах больших аномалий его порядок может достигать 1–2 м/с. Следовательно, в таких районах гравитационный ветер может давать важный вклад в формирование агеострофического ветра и оказывать заметное воздействие на перестройку атмосферных процессов.

4.4. ГРАВИТАЦИОННАЯ ЦИРКУЛЯЦИЯ АТМОСФЕРЫ

Под общей (глобальной) циркуляцией атмосферы (ОЦА) понимают совокупность воздушных течений (ветров) горизонтальной протяженностью (масштабом) от нескольких сотен до нескольких десятков тысяч километров. К ОЦА относятся такие системы воздушных потоков, как западный перенос в умеренных широтах обоих полушарий, пассатные ветры субтропиков, муссоны, струйные течения, системы движения в планетарных волнах, циклонах и антициклонах.

Изучение этих систем представляется исключительно важным для теории и практики метеорологии в связи с тем, что их статистический режим за длительный интервал времени определяет климатические характеристики атмосферы, а изменение их установившихся режимов приводит к резким колебаниям погодно-климатических условий.

Рассмотрим формирование и особенности циркуляции атмосферы, обусловленной неоднородностью поля силы тяжести. Так же, как и в случае с гравитационным ветром (см. п. 4.3.1) эту циркуляцию будем называть гравитационной.

4.4.1. Вихрь скорости

Для исследования гравитационной циркуляции атмосферы будем использовать уравнение вихря скорости ветра. Как известно, по сравнению с уравнениями движения уравнения для вихря скорости обладают рядом преимуществ, главным из которых является отсутствие малой разности больших величин – градиента давления и кориолисовой силы.

Для получения уравнения вихря скорости применим операцию ротора к уравнению (3.1.1). После обычных преобразований получим

$$\bar{\rho}\frac{d}{dt}\left\{\frac{\vec{\Omega}+\vec{\omega}}{\bar{\rho}}\left[\left(\vec{\Omega}+\vec{\omega}\right)\cdot\nabla\right]\right\}-\vec{V}=\nabla\times\vec{F}+\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla P,$$

где $\vec{\Omega}=\nabla\times\vec{V}$ – вихрь скорости ветра.

Последний член правой части

$$\vec{B}=\rho^{-2}\nabla\rho\times\nabla P, \tag{4.4.1}$$

как известно, описывает изменение вихря во времени за счет бароклинного фактора [12]. Представим вектор $\vec{B}$ в виде

$$\vec{B}=\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla\left(\bar{P}+P'\right)=\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\left(\bar{\rho}\nabla W\right)+\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla P'=$$

$$=\frac{\bar{\rho}}{\rho^2}\nabla\left[\left(1+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)\bar{\rho}\right]\times\nabla W+\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla P'=$$

$$=\frac{\bar{\rho}^2}{\rho^2}\nabla\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\times\nabla W+\frac{\bar{\rho}}{\rho^2}\left(1+\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\right)\nabla\bar{\rho}\times\nabla W+\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla P'=$$

$$=\frac{\bar{\rho}^2}{\rho^2}\nabla\frac{\rho'}{\bar{\rho}}\times\nabla W+\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla P'. \tag{4.4.2}$$

Здесь векторное произведение $\nabla\bar{\rho}\times\nabla W$ равно нулю в силу того, что $\bar{\rho}=-f'(W)$ (см. п. 4.1.). Отметим, что выражение (4.4.1) (с заменой ρ на $\bar{\rho}$) можно получить сразу в результате применения операции ротора к уравнению (4.1.5).

С учетом уравнения состояния $P=\rho RT_v$, где T_v – виртуальная температура, слагаемому $\rho^{-2}\nabla\rho\times\nabla P'$ можно придать другой вид

$$\frac{1}{\rho^2}\nabla\rho\times\nabla P' = \frac{1}{R\rho^2}\nabla\frac{P}{T_v}\times\nabla P' =$$

$$=\frac{1}{\rho P}\nabla P\times\nabla P' - \frac{1}{\rho T_v}\nabla T_v\times\nabla P' =$$

$$=\frac{1}{\rho P}\nabla\left(\overline{P} + P'\right)\times\nabla P' - \frac{1}{\rho T_v}\nabla T_v\times\nabla P' =$$

$$=\frac{1}{\rho P}\nabla\overline{P}\times\nabla P' + \frac{1}{\rho T_v}\nabla P'\times\nabla T_v =$$

$$= -\frac{\overline{\rho}}{\rho P}\nabla P'\times\nabla W + \frac{1}{\rho T_v}\nabla P'\times\nabla T_v .$$

Тогда выражение (4.4.2) примет вид

$$\vec{B} = \left(\frac{\overline{\rho}^2}{\rho^2}\nabla\frac{\rho'}{\overline{\rho}} - \frac{\overline{\rho}}{\rho P}\nabla P'\right)\times\vec{g} + \frac{1}{\rho T_v}\nabla P'\times\nabla T_v$$

или, учитывая (4.1.4) с точностью до величин второго порядка малости

$$\vec{B} = q\left[\left(q\nabla\frac{\rho'}{\overline{\rho}} - \frac{1}{P}\nabla P'\right)\times\vec{g} + \frac{1}{\overline{\rho}T_v}\nabla P'\times\nabla T_v\right],$$

где $q = 1 - \dfrac{\rho'}{\overline{\rho}}$.

Из полученного выражения для вектора $\vec{B}$ следует, что бароклинный член имеет две составляющие:

- обусловленную влиянием неоднородного поля силы тяжести;
- обусловленную влиянием градиента виртуальной температуры.

Далее будем рассматривать только первую составляющую

$$\vec{B}_g = q\left[\left(q\nabla\frac{\rho'}{\overline{\rho}} - \frac{1}{P}\nabla P'\right)\times\vec{g}\right]. \tag{4.4.3}$$

Компоненты вектора $\vec{B}_g$ в локальной декартовой системе координат при использовании ОЗЭ в качестве отсчетной поверхности (см. п. 3.3.2) имеют вид

$$B_{gx} = q\left[\left(q\frac{\partial}{\partial y}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial y}\right)g_z - \left(q\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial z}\right)g_y\right],$$

$$B_{gy} = q\left[\left(q\frac{\partial}{\partial z}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial z}\right)g_x - \left(q\frac{\partial}{\partial x}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial x}\right)g_z\right],$$

$$B_{gz} = q\left[\left(q\frac{\partial}{\partial x}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial x}\right)g_y - \left(q\frac{\partial}{\partial y}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial y}\right)g_x\right]. \quad (4.4.4)$$

При рассмотрении процессов глобального масштаба целесообразно использовать криволинейные ортогональные координаты, в которых вектор $\vec{B}_g$ представляется в общем виде (см. п. 3.4):

$$\vec{B} = \vec{i}\left\{\frac{q}{h_2}\left(q\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial x^2}\right)g_{x^3} - \frac{q}{h_3}\left(q\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial x^3}\right)g_{x^2}\right\} +$$
$$+ \vec{i}_2\left\{\frac{q}{h_3}\left(q\frac{\partial}{\partial x^3}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial x^3}\right)g_{x^1} - \frac{q}{h_1}\left(q\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial x^1}\right)g_{x^3}\right\} +$$
$$+ \vec{i}_3\left\{\frac{q}{h_1}\left(q\frac{\partial}{\partial x^1}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial x^1}\right)g_{x^2} - \frac{q}{h_2}\left(q\frac{\partial}{\partial x^2}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial x^2}\right)g_{x^1}\right\}.$$

Компоненты вектора $\vec{B}_g$ в системе эллипсоидальных координат (см. п. 3.4.4) имеют вид:

$$B_{g\lambda} = q\left(q\frac{\partial}{\partial \Phi}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial \Phi}\right)g_\theta - \frac{q}{R_M}\left(q\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial \theta}\right)g_\Phi,$$

$$(4.4.5)$$

$$B_{g\theta} = \frac{q}{R_B \sin\theta}\left(q\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial \lambda}\right)g_\Phi - q\left(q\frac{\partial}{\partial \Phi}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial \Phi}\right)g_\lambda,$$

$$B_{g\Phi} = \frac{q}{R_M}\left(q\frac{\partial}{\partial \theta}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial \theta}\right)g_\lambda - \frac{q}{R_B \sin\theta}\left(q\frac{\partial}{\partial \lambda}\frac{\rho'}{\bar{\rho}} - \frac{1}{P}\frac{\partial P'}{\partial \lambda}\right)g_\theta.$$

Таким образом, в явном виде выделен вклад неоднородности поля силы тяжести в формирование всех компонент бароклинного фактора и, следовательно, в формирование циркуляции атмосферы.

Осуществим количественную оценку компонент вектора $\vec{B}_g$. Из анализа результатов расчетов, представленных на рис. 4.26 – 4.35, следует:

1) для всех компонент вектора $\vec{B}_g$ имеет место относительная стабильность географического месторасположения областей с отрицательными и положительными значениями при слабой зависимости от вариаций метеовеличин и времени. Это обстоятельство указывает на относительно стабильный и постоянный характер влияния неоднородности поля силы тяжести на атмосферную циркуляцию;
2) с увеличением высоты основные черты полей компонент вектора $\vec{B}_g$ сохраняются, причем экстремальные значения компоненты $B_{g\Phi}$ увеличиваются (особенно в высоких широтах вблизи полюсов), а компонент $B_{g\theta}$, $B_{g\lambda}$ уменьшаются;
3) в поле компоненты $B_{g\Phi}$ хорошо прослеживаются основные особенности поля зональной компоненты c_{gx} гравитационного ветра (ср. рис. 4.26 и 4.16). Это подтверждает тезис п. 4.3.2 о наличии «зонального» эффекта в структуре вертикальной компоненты вихря гравитационного ветра, т.е. вихря, обусловленного неоднородностью силы тяжести;
4) поля компонент $B_{g\theta}$ и c_{gx} и, соответственно, $g_\theta = - g_B$ (рис. 4.30 и 4.16, 1.3) качественно практически идентичны с точностью до знака (вследствие отрицательности параметра Кориолиса в Южном полушарии). Аналогичный вывод имеет место в отношении полей $B_{g\lambda}$ и c_{gy} и, соответственно, g_λ. Это обстоятельство указывает на доминирующую роль соответствующих тангенциальных составляющих силы тяжести в формировании полей компонент $B_{g\theta}$, $B_{g\lambda}$ [см. соотношения (4.4.5)].

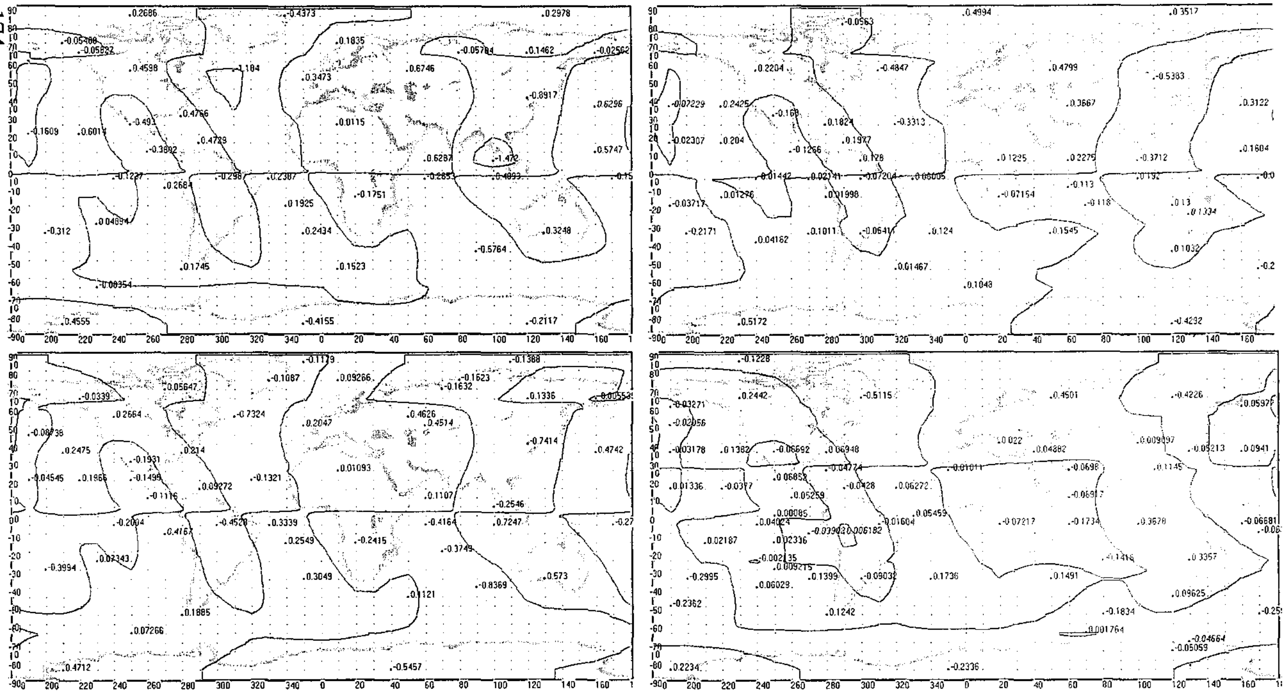


Рис.4.26. Поле компоненты $B_{g\Phi}$ (10^{-11} c^{-2}) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=0 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях давления P' и относительной плотности $\rho'/\overline{\rho}$

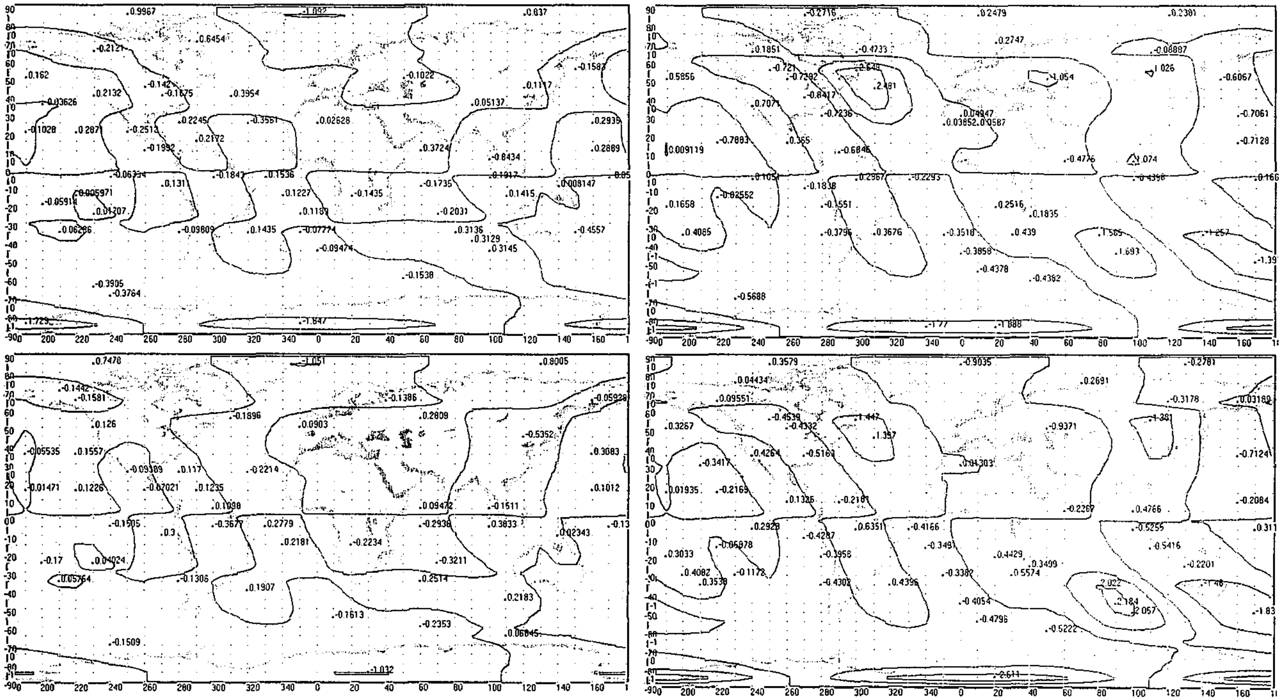


Рис.4.27. Поле компоненты $B_{g\Phi}$ (10^{-11} c^{-2}) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=10 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях давления P′ и относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$

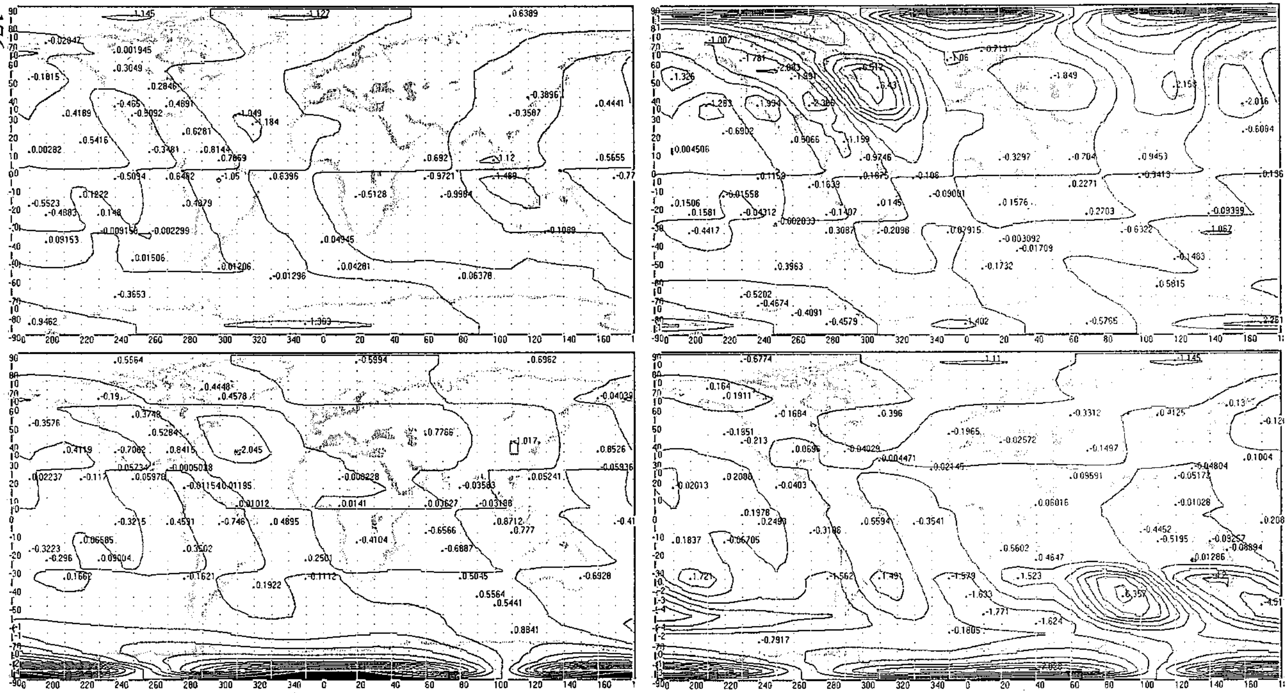


Рис.4.28. Поле компоненты $B_{g\Phi}$ (10^{-11} c^{-2}) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=30 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях давления P′ и относительной плотности $\rho'/\overline{\rho}$

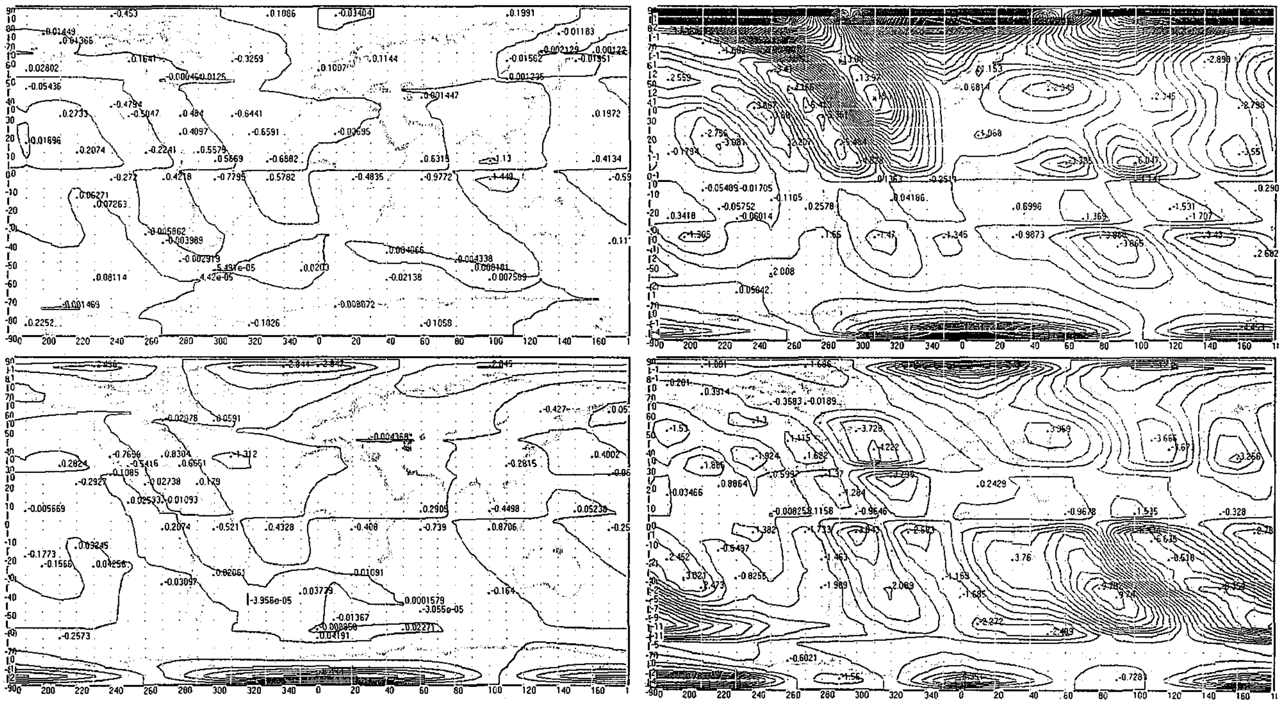


Рис.4.29. Поле компоненты $B_{g\Phi}$ (10^{-11} c^{-2}) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=70 *км* при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях давления P' и относительной плотности $\rho'/\bar{\rho}$

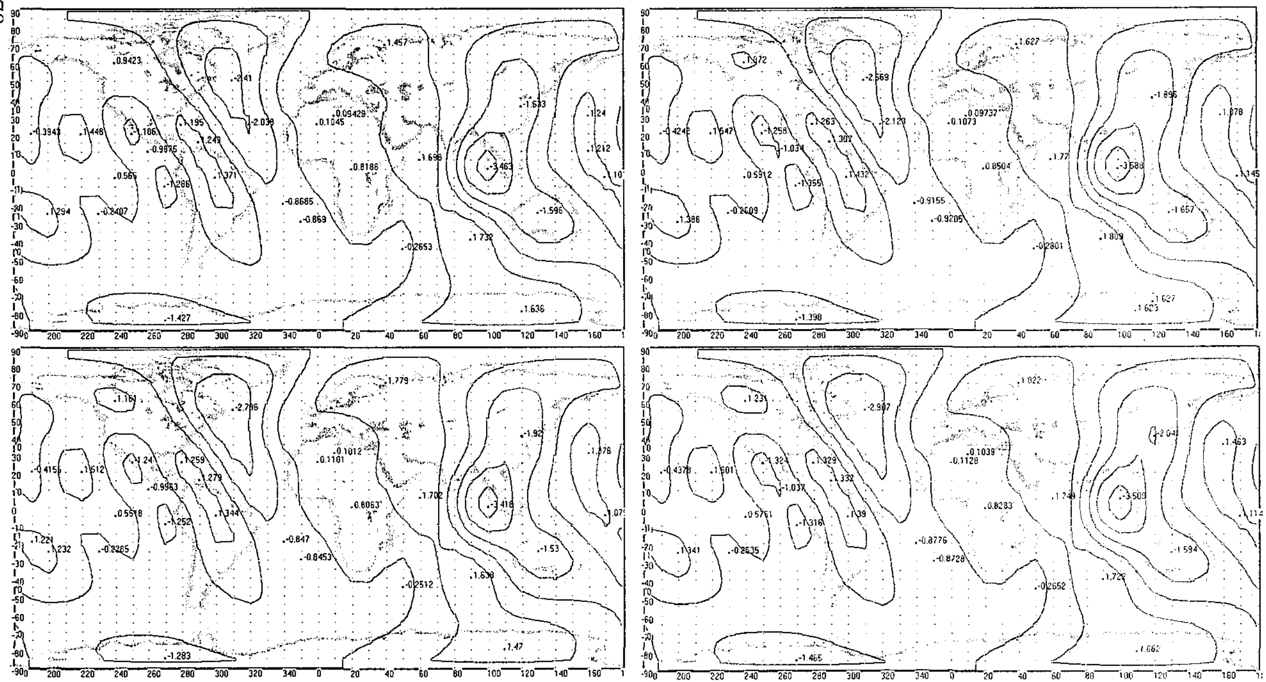


Рис.4.30. Поле компоненты $B_{g\theta}$ (10^{-9} $с^{-2}$) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=5 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях давления P′ и относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$

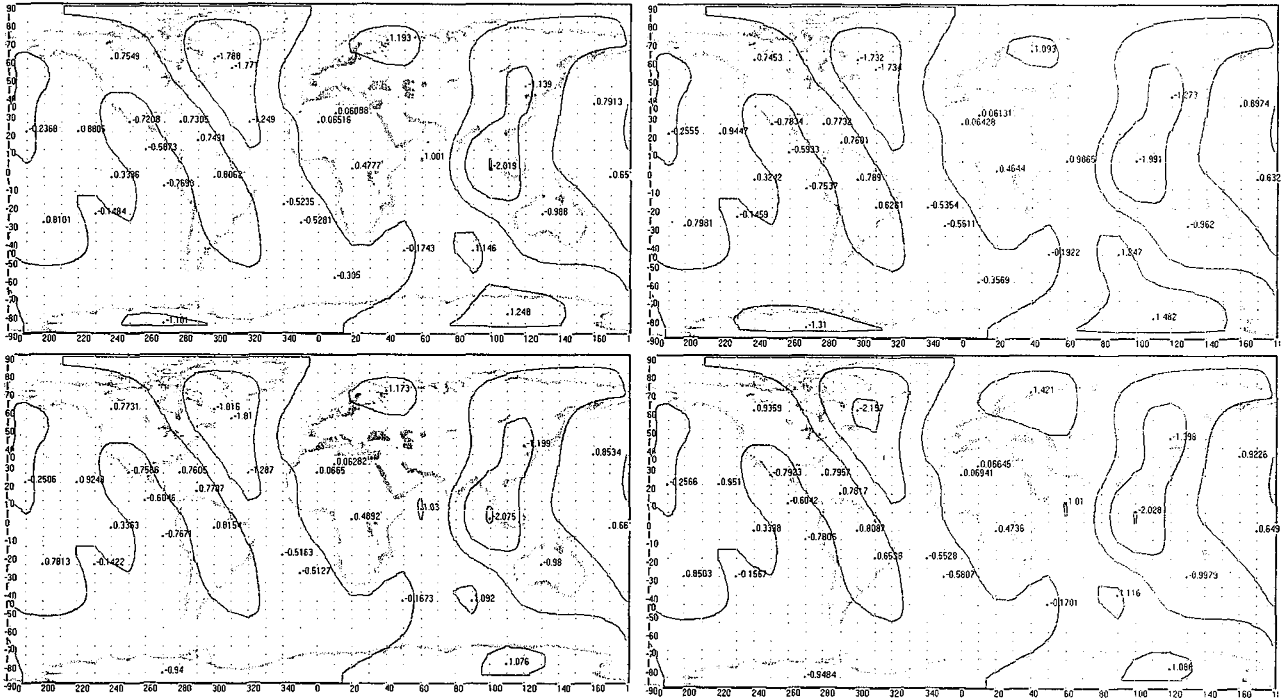


Рис.4.31. Поле компоненты $B_{g\theta}$ (10^{-9} c^{-2}) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=20 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях давления P' и относительной плотности $\rho'/\overline{\rho}$

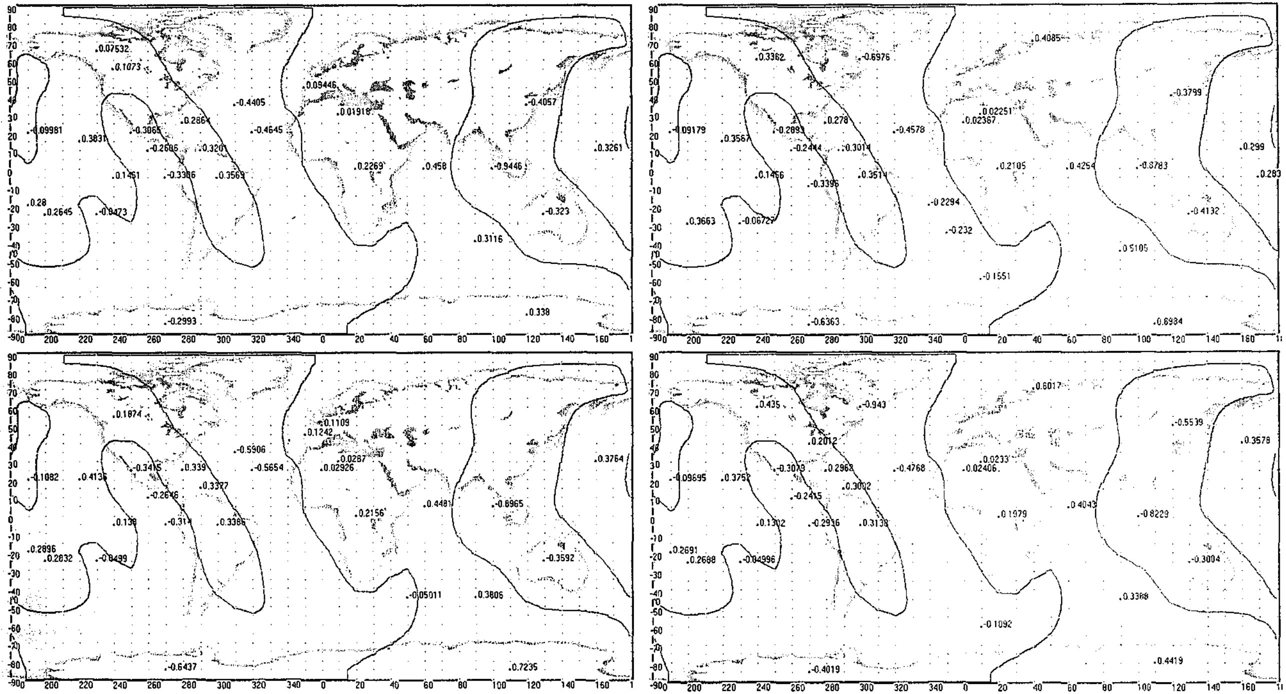


Рис.4.32. Поле компоненты $B_{g\theta}$ (10^{-9} c^{-2}) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=50 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях давления P′ и относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$

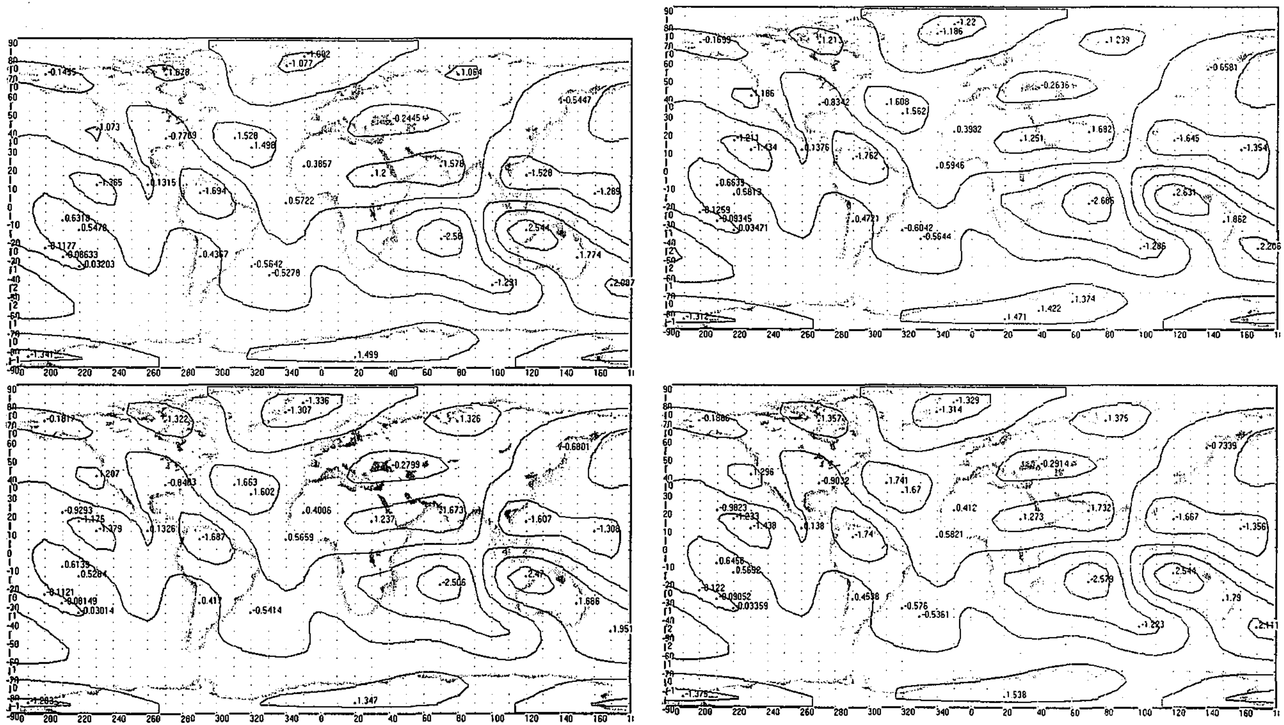


Рис.4.33. Поле компоненты $B_{g\lambda}$ (10^{-9} c^{-2}) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=5 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях давления P′ и относительной плотности $\rho'/\overline{\rho}$

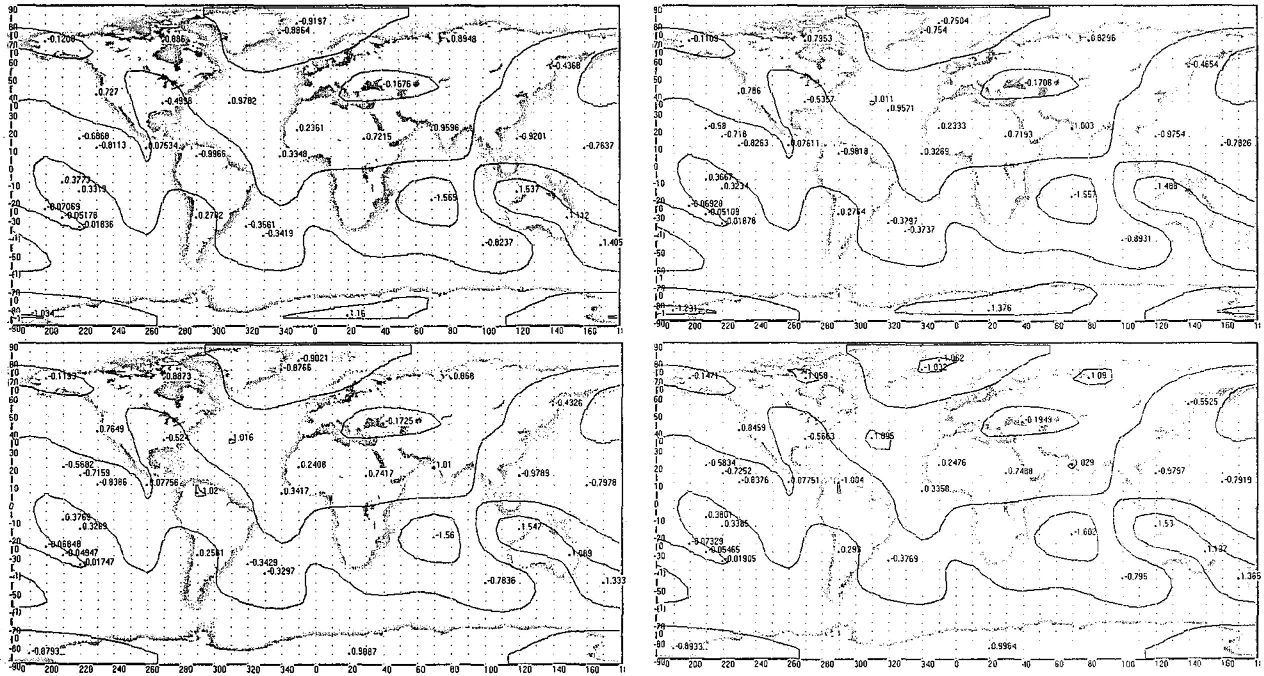


Рис.4.34. Поле компоненты $B_{g\lambda}$ (10^{-9} c^{-2}) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=20 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях давления P' и относительной плотности $\rho' / \bar{\rho}$

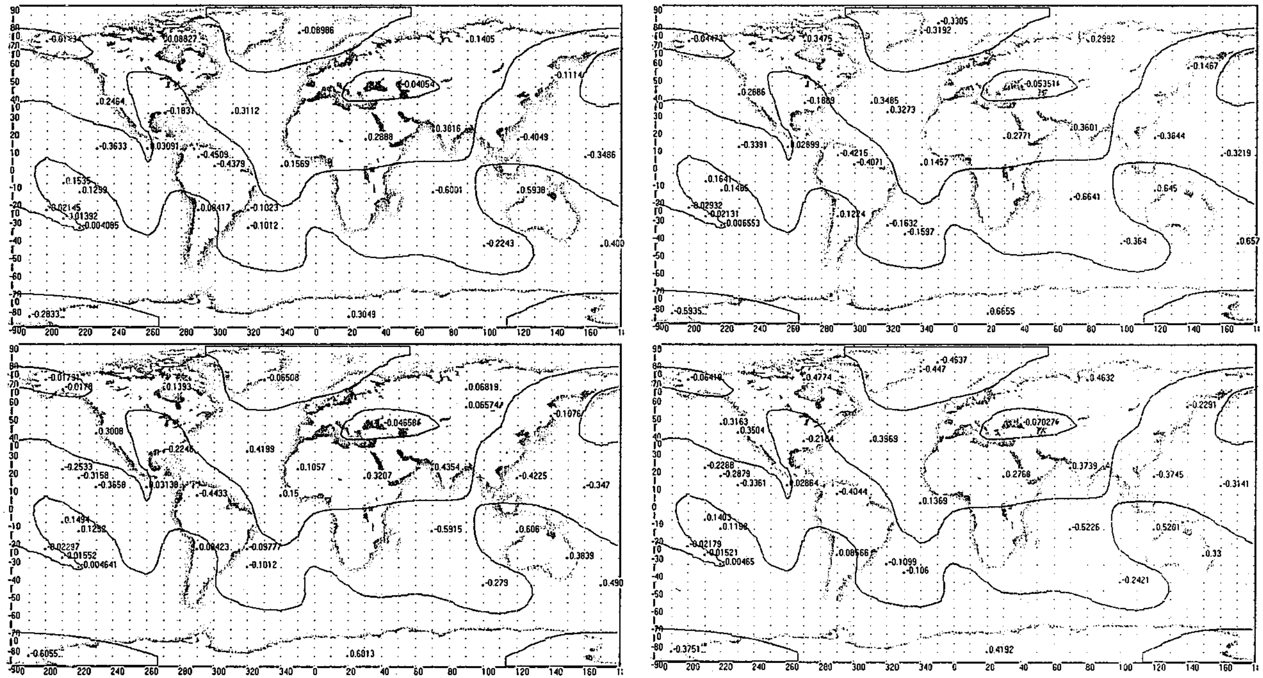


Рис.4.35. Поле компоненты $B_{g\lambda}$ (10^{-9} c^{-2}) в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте z=50 км при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях давления P' и относительной плотности $\rho'/\overline{\rho}$

4.4.2. Синоптические вихри

Рассмотрим влияние неоднородности поля силы тяжести на крупномасштабные движения, такие как синоптические вихри, и произведем оценку этого влияния.

Обратимся к полю компоненты $B_{g\Phi}$ (рис. 4.26).

С учетом ориентации используемой системы координат (Φ, θ, λ) получаем, что в Северном полушарии в циклоне завихренность отрицательна, в антициклоне – положительна. В Южном полушарии имеет место обратная картина. Сравнение распределений отрицательных и положительных значений компоненты $B_{g\Phi}$ и сезонных климатических полей приземного давления (см., например, [12]) не позволяет дать однозначную интерпретацию влияния неоднородности поля силы тяжести на атмосферную циркуляцию. Однако, если сравнить поле $B_{g\Phi}$ и среднегодовое поле давления на поверхности квазигеоида (рис. 2.8), то видно четкое соответствие областей циклонической завихренности $B_{g\Phi}$ и пониженного давления, а также областей антициклонической завихренности $B_{g\Phi}$ и повышенного давления. Это обстоятельство указывает на непосредственное влияние неоднородного поля силы тяжести на барическое поле и, следовательно, на ОЦА.

Учитывая, что $\vec{B}_g$ есть составная часть вектора $\vec{B}$, представляет интерес сравнение компонент $B_{g\Phi}$ и B_Φ. Компонента $B_{g\Phi}$ в тропосфере имеет порядок величины 10^{-11} $с^{-2}$. По оценкам [12], бароклинный фактор B_Φ превышает $5{\cdot}1\theta^{-10}$ $с^{-2}$. При таком значении B_Φ в перемещающейся воздушной массе в течение суток под влиянием адвекции холода формируется циклонический вихрь $\Omega_\Phi > 4{,}3{\cdot}10^{-5}$ $с^{-1}$. Именно такой порядок величины характерен для синоптических вихрей, которые наблюдаются в атмосфере.

Отсюда следует, что отношение $B_{g\Phi}/B_\Phi$ не превышает нескольких процентов. На первый взгляд это свидетельствует о пренебрежимо малом вкладе $B_{g\Phi}$ в B_Φ. Однако, здесь необходимо вспомнить первый вывод проведенного выше общего анализа. Действительно, относительная стабильность и постоянный характер влияния неоднородного поля силы тяжести на атмосферную циркуляцию, несмотря на малость этого влияния, свидетельствуют о чрезвычайной важности этого фактора в моменты перестройки, зарождения и разрушения барических образований, когда вихрь бароклинного фактора $B_Ф$ мал.

В дополнение к этим рассуждениям обратимся к геострофическому вихрю скорости [2], выражение для которого с учетом (4.3.2) запишем в виде

$$\nabla \times \vec{C}_Г = \frac{1}{l\bar{\rho}} \nabla^2 P'. \tag{4.4.6}$$

Это выражение позволяет приближенно оценить связь отклонений давления с распределением вихря скорости. Используем это выражение для оценки ошибки прогноза давления ΔP, возникающей в случае пренебрежения $B_{gФ}$. С учетом этого на основе (4.4.6) имеем

$$\frac{1}{l\bar{\rho}} \nabla^2(\Delta P) = \int\limits_0^{\Delta T} B_{gФ}\, \mathrm{d}t,$$

где ΔT – прогностический интервал времени.

Результаты оценки поля ΔP, формирующегося в течение суток под действием компоненты $B_{gФ}$, представлены на рис. 4.36. Как из него следует, в случае пренебрежения влиянием неоднородности силы тяжести будет иметь место:

завышение прогностических значений давления над северной и южной акваториями Атлантики, акваторией Тихого океана у Южной Америки, Австралией, Восточной Сибирью;

занижение прогностических значений давления над Европой, Ближним Востоком, Западной Сибирью, Африкой (исключение может составить тропическая зона летом), центральной частью Тихого океана, Арктикой и основной частью Антарктики.

Над другими районами могут наблюдаться как завышение, так и занижение давления.

Представляется интересным сравнить результаты рис. 4.36 с данными анализа ошибок численных прогнозов погоды и моделирования ОЦА. При этом следует иметь в виду, что данные рис. 4.36 характеризуют поле отклонений давления без учета адвективных изменений, за счет фазовых переходов и т.д. Поэтому сравнение можно выполнить только качественно.

Для примера на рис. 4.37А представлено поле средних квадратических ошибок прогноза (м) на 14 суток, полученных по 12 зимним случаям с помощью модели Лаборатории геофизической

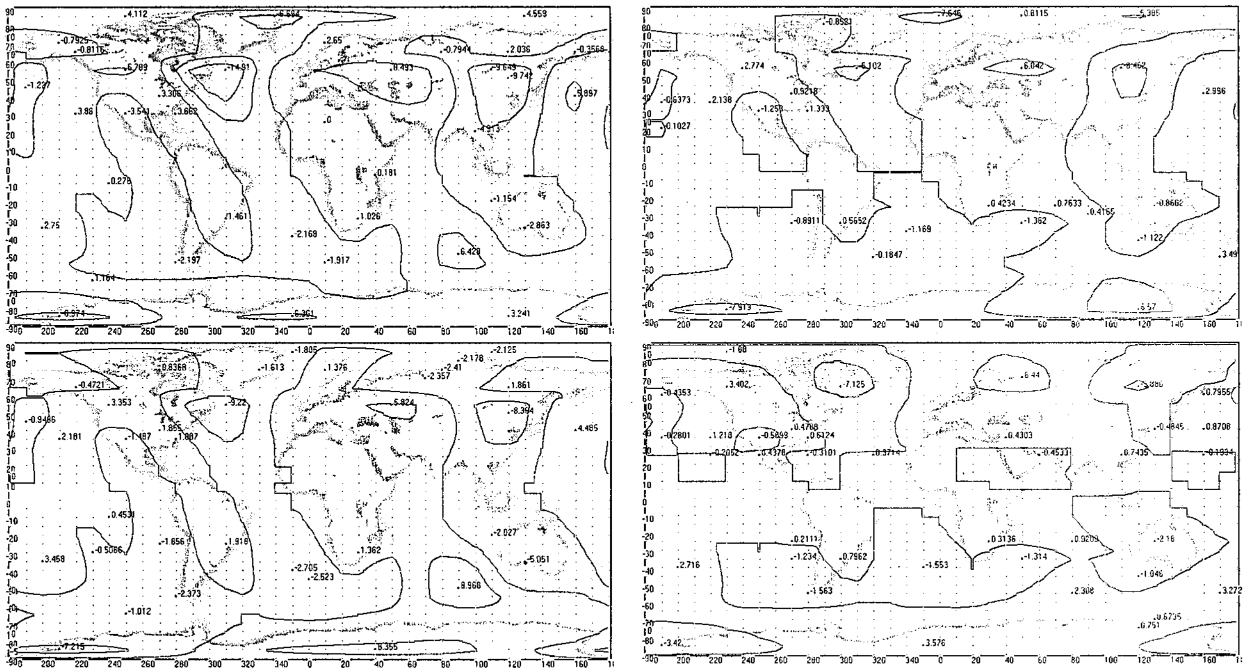


Рис.4.36. Поле отклонения давления (гПа), соответствующее полю компоненты $B_{g\Phi}$ (рис. 4.26), в январе (вверху) и июле (внизу) на высоте $z=0$ *км* при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях метеовеличин

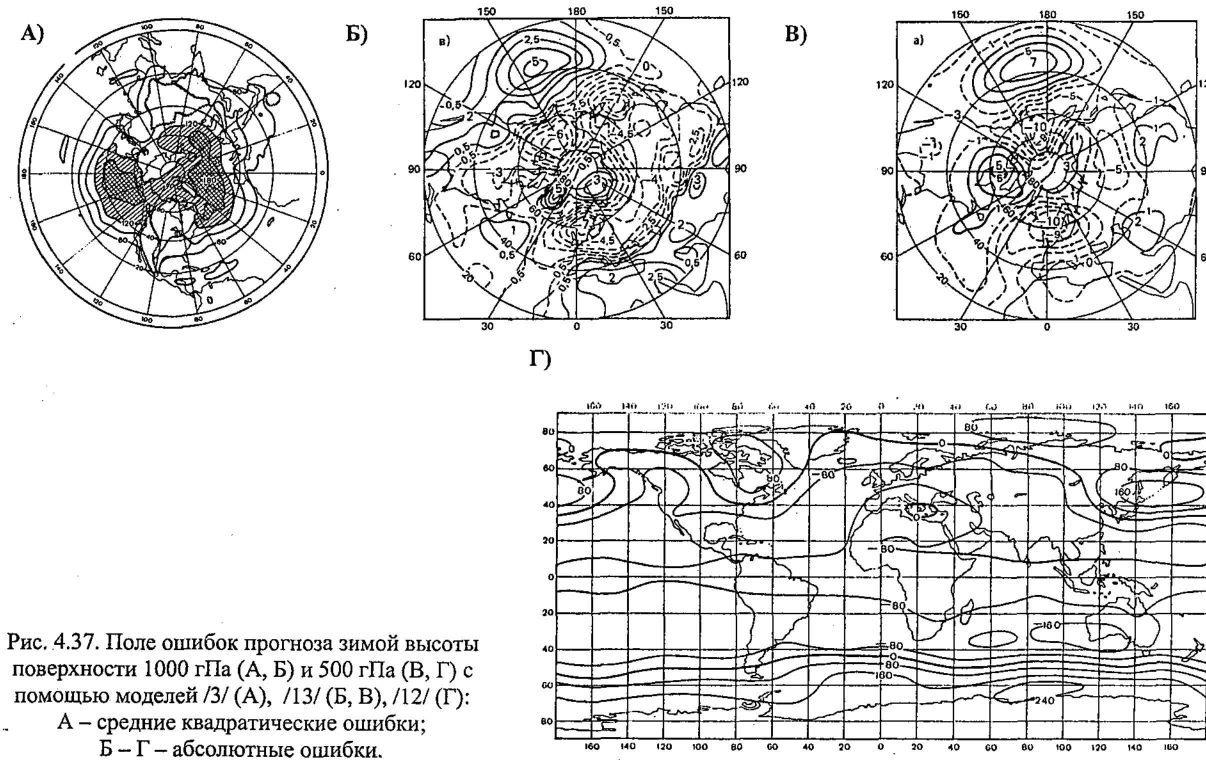


Рис. 4.37. Поле ошибок прогноза зимой высоты поверхности 1000 гПа (А, Б) и 500 гПа (В, Г) с помощью моделей /3/ (А), /13/ (Б, В), /12/ (Г):
А – средние квадратические ошибки;
Б – Г – абсолютные ошибки.

гидродинамики [14]. На рис. 4.37Б, В показаны разности между фактическими и 10-суточными прогностическими значениями высот (дам) изобарических поверхностей, рассчитанными в Европейском центре прогнозов погоды на средние сроки, для зимы 1981–82 и 1982–83 гг. [3]. На рис. 4.37Г показано поле разности геопотенциальных высот (м), рассчитанных с помощью модели общей циркуляции атмосферы и океана, разработанной под руководством Г.И.Марчука [13], и фактически наблюдаемых. В [13] отмечается, что приведенные ошибки являются систематическими. Анализ рис. 4.37 показывает, что, по сути, все указанные модели имеют очень близкую географическую локализацию экстремумов систематических ошибок. По нашему мнению, помимо прочих возможных причин этого обстоятельства важнейшей является отсутствие учета неоднородности поля силы тяжести. Действительно, сравнение рис. 4.36 и 4.37 показывает хорошее качественное их соответствие (для перевода значений ошибки давления в ошибку высоты использовалось уравнение статики).

Таким образом, учет влияния неоднородного поля силы тяжести при гидродинамическом описании синоптических вихрей и других крупномасштабных элементов атмосферной циркуляции может позволить в силу относительной стабильности и постоянного характера этого влияния существенно уменьшить имеющуюся систематику ошибок численных прогнозов погоды. Разумеется, этот вывод предварительный и для его проверки необходимы широкие численные эксперименты с помощью самых современных гидродинамических моделей.

4.4.3. Муссоны

Из-за различия теплоемкостей в теплый период года температура деятельного слоя на материках повышается до более высоких значений, чем на океанах. Посредством явного и скрытого теплообмена это приводит и к более высокой температуре тропосферы (и даже нижней части стратосферы) над материками. В результате формируется горизонтальный градиент температуры воздуха, направленный от материка к океану. В холодный период года этот градиент имеет противоположное направление.

В [12] на примере простой постановки задачи показано, что под влиянием горизонтальной разности виртуальных температур одновременно возникают и усиливаются со временем вихревые движения, как в вертикальной, так и горизонтальной плоскости, т.е. образуется и усиливается муссон. Подход к оценке роли неоднородного поля силы тяжести в этом процессе на основе методов теории чувствительности был рассмотрен в работах [22, 23]. Ниже анализируется роль неоднородного поля силы тяжести на примере Индийского муссона.

Распределение составляющих силы тяжести в регионе Индийского муссона достаточно уникально. В поле проекции g_h (см. рис. 1.2) наблюдается абсолютный максимум на севере Индийского океана вблизи Мальдивских островов и абсолютный минимум в районе острова Калимантан. Максимумы проекции $g_\theta = - g_B$ (см. рис. 1.3) сосредоточены над центром Индии и Аравийским морем, южной частью Малайзии. Минимумы – над Индостаном и Индийским океаном. Максимумы проекции g_λ (см. рис. 1.4) – над Индостаном, Малайзией и северо-востоком Индийского океана. Минимумы – над остальной частью Индийского океана и Аравийским морем.

Основные черты такого распределения отражены и в полях компонент вектора $\vec{B}_g$ в этом регионе. В январе под действием компоненты $B_{g\Phi}$ над Аравийским морем формируется антициклоническая завихренность, а восточнее 75° в.д. – циклоническая (см. рис. 4.26). В результате вдоль 75° в.д. имеет место северный и северо-восточный гравитационный ветер.

Под действием компоненты $B_{g\theta}$ (см. рис. 4.30) в вертикальной плоскости западнее 75° в.д. формируется вихрь с положительной составляющей (на юг), а восточнее 75° в.д. – с отрицательной. Это приводит к нисходящим движениям в области 75° в.д.

Под действием компоненты $B_{g\lambda}$ в вертикальной плоскости формируется вихрь с положительной составляющей (на восток) над Индией и Аравийским морем, способствующий у Земли движению воздуха с севера на юг.

Таким образом, действие компонент вектора $\vec{B}_g$ в январе приводит к циркуляции воздуха, характерной для зимнего муссона.

В июле действие компонент $B_{g\theta}$ и $B_{g\lambda}$ не изменяется. Компонента $B_{g\Phi}$ при экстремальных положительных отклонениях метеовеличин действует так же, как и в январе. При отрицательных

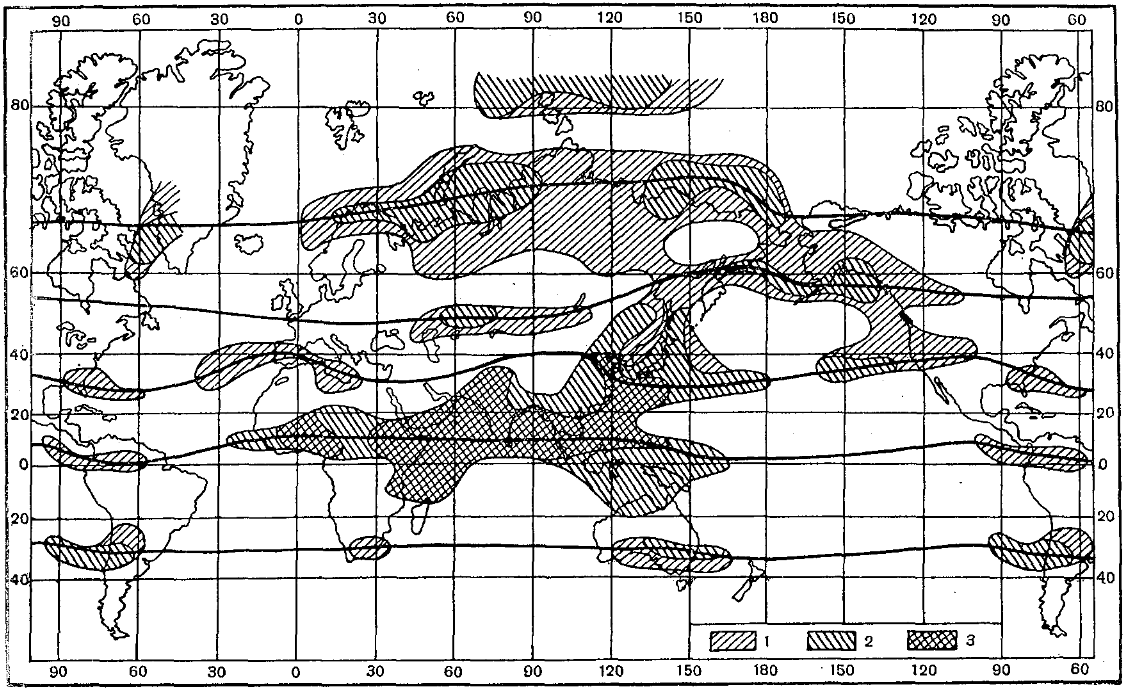


Рис. 4.38. Географическое распределение муссонов.
Средняя повторяемость генеральных направлений: 1 – меньше 40%; 2 – от 40 до 60%; 3 – свыше 60%

экстремальных отклонениях над западом Индии и Аравийским морем формируется циклонический вихрь, а восточнее 75° в.д. – антициклонический вихрь. В результате в районе 75° в.д. имеет место устойчивый гравитационный ветер юго-восточного направления над северной частью Индийского океана и южного – над Индией. Западнее 75° в.д. имеют место восходящие движения, обусловленные формирующимся циклоном. Отметим, что на высоте 10 км (см. рис. 4.27) такая ситуация не возникает.

Таким образом, в июле под действием неоднородности поля силы тяжести при отрицательных экстремальных отклонениях метеовеличин может наблюдаться формирование гравитационного вихря (компоненты $B_{g\Phi}$), приводящего к циркуляции воздуха, характерной для летнего муссона. При этом компоненты $B_{g\theta}$ и $B_{g\lambda}$ противодействуют этому процессу, формируя в вертикальных плоскостях слабую циркуляцию, характерную для зимнего муссона.

В заключение отметим, что распределение компонент вектора $\vec{B}_g$, особенно $B_{g\Phi}$, в других районах муссонной циркуляции: Марианские – Маршалловы острова, Галапагосские острова, Антильские – Бермудские острова, район Тихого океана юго-западнее Мексики (см. рис. 4.38) – близко к их распределению в регионе Индийского муссона.

4.4.4. Тропические циклоны (ТЦ). Роль гравитации в зарождении ТЦ

На Земле в год наблюдается около 80 тропических циклонов, из которых 60–80% достигают ураганной силы. Наибольшее количество тропических циклонов в северном полушарии приходится на август–октябрь, в южном – на февраль–апрель. Примерно 2/3 всех тропических циклонов зарождаются и формируются в северном и восточном полушариях. В северном полушарии тропические циклоны возникают в районе Карибского моря и Мексиканского залива с июня – июля по октябрь – ноябрь, в северо-восточной части Тихого океана с июня по октябрь, в западной части – с мая по ноябрь. В Бенгальском заливе и Аравийском море зарождение тропических циклонов отмечается с мая по ноябрь, но наиболее часты они в мае, июне, октябре и ноябре. На рис. 4.39 показаны районы зарождения и типичные направления перемещения

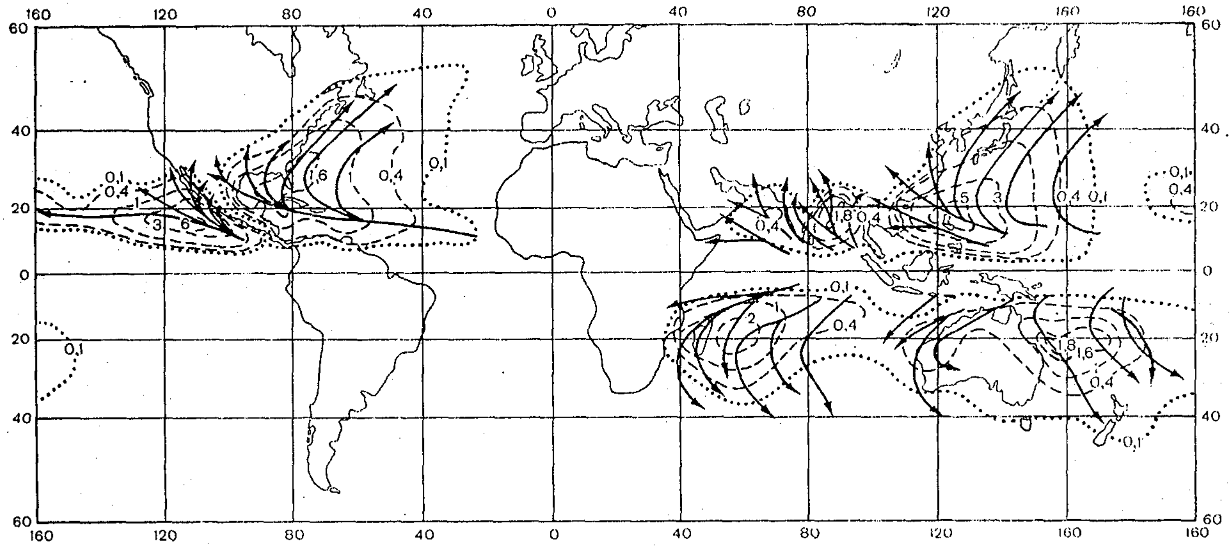


Рис.4.39. Среднее годовое число тропических циклонов по пятиградусным квадратам (штриховые линии) и основные пути их перемещения (стрелки)

тропических циклонов (по [16]). Отметим, что тропические циклоны не образуются в полосе ± 4–5° от экватора, а также севернее 35° с. ш. и южнее 22° ю. ш.

По данным [16], частота зарождения тропических циклонов связана со следующими, так называемыми климатологическими параметрами зарождения:

- относительной завихренностью движения воздуха у Земли;
- параметром широты;
- величиной, обратной вертикальному сдвигу горизонтального ветра между нижней и верхней тропосферой;
- величиной, равной интегралу по вертикали от разности наблюдаемой температуры воды и значением 26°С в слое до 60 м (для верхнего слоя океана);
- вертикальным градиентом эквивалентно-потенциальной температуры между подстилающей поверхностью и уровнем 500 гПа;
- относительной влажностью в средней тропосфере (500–700 гПа).

Произведение первых трех параметров с добавлением к их значениям специально подобранных величин определяет динамический потенциал зарождения тропических циклонов, произведение последних трех – термический потенциал. Произведение динамического и термического потенциалов определяет сезонный потенциал зарождения, характеризующий сезонную частоту зарождения тропических циклонов.

Подробно эти вопросы рассмотрены в работах [8, 16]. Здесь отметим, что модифицированные выражения, предложенные в этих работах, для сезонных потенциалов зарождения включают только комбинацию динамического потенциала и приведенной относительной влажности.

Таким образом, сезонная частота зарождения тропических циклонов во многом определяется интенсивностью циклоническаой завихренности над океаном. Если обратиться к рис. 4.26, то нетрудно отметить, хорошее согласие областей циклонической завихренности над океаном в полосе широт от 40° с.ш. до 40° ю.ш. с районами зарождения тропических циклонов. При этом в узкой полосе вблизи экватора значения завихренности близки к нулю, что соответствует вышеприведенному факту отсутствия тропических циклонов в этой полосе.

Для решения вопроса о возможности развития депрессии в шторм привлекают так называемый суточный потенциал зарождения (ПЗ):

$$ПЗ = \Omega_{900} - \Omega_{200},$$

где $\Omega_{900} - \Omega_{200}$ – разность относительных завихренностей на изобарических поверхностях 900 и 200 гПа, осредненных по области радиусом 600 км. ПЗ для развивающихся систем втрое превосходит ПЗ для неразвивающихся возмущений [16]. Различия в других параметрах существенно меньшие.

На рис. 4.40 приведено распределение разности полей $B_{g\Phi}$ на высотах 0 и 10 км, рассчитанной на основе результатов рис. 4.26 и 4.27. Эта разность является аналогом параметра ПЗ, характеризующим влияние неоднородности поля силы тяжести на возможность развития тропического циклона. Как видно из рис. 4.40, области циклонической гравитационной завихренности (в северном полушарии – отрицательные, в южном – положительные) над океаном практически совпадают с областями образования тропических циклонов (см. рис. 4.39). Исключение составляют восточная часть Атлантики, прилегающая к Африке и области Мирового океана, омывающие Южную Америку, которые согласно рис. 4.40, должны быть бы отнесены к областям зарождения тропических циклонов. Очевидно, в этих районах не выполнены другие условия их образования, например, превышение температуры поверхностного слоя океана значения 26°С.

Тем не менее, если учесть, что, чем сильнее начальный вихрь, тем при менее благоприятных условиях (например, при меньшей начальной влажности или температуре поверхностного слоя океана) может развиться циклон, то можно сделать однозначный вывод о способствовании неоднородности поля силы тяжести зарождению и развитию тропических циклонов.

Для проверки этого вывода были проведены численные эксперименты в районах повышенных аномалий поля силы тяжести и повторяемости тропических циклонов – восточная часть Тихого океана, юго-восток Китая, Филиппины в интервале широт от экватора до 30° с.ш. и долгот от 110 до 150° в.д., а также в Карибском море. Для этих районов были заданы начальные поля метеовеличин за август–сентябрь 1987 г. с привлечением данных измерений на прибрежных и островных метеостанциях. Учитывая недостаточную

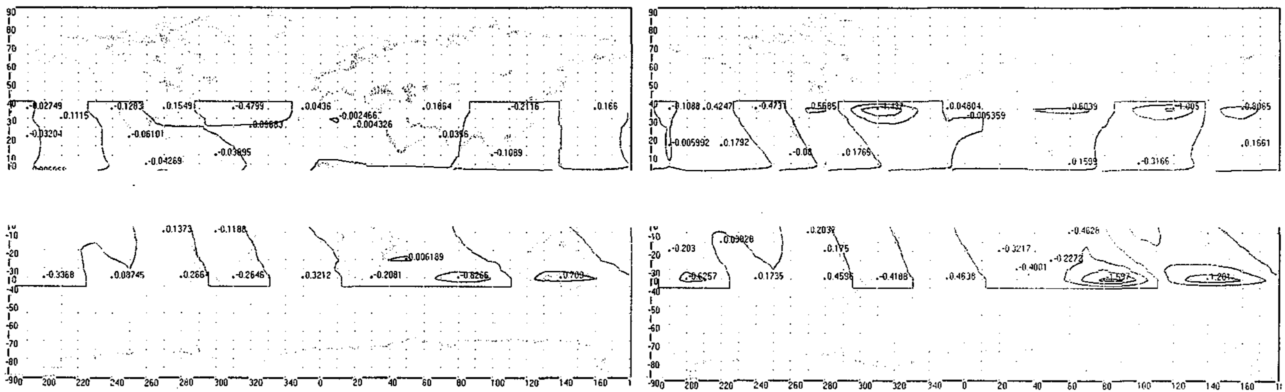


Рис.4.40. Поле разности компонент $B_{g\Phi}$ (10^{-11} с$^{-2}$) на высоте 0 и 10 км в июле (вверху) и январе (внизу) при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях метеовеличин

освещенность этого района измерениями метеовеличин, привлекались также прогностические и климатические поля. Все эти поля подвергались динамическому и оптимальному согласаванию, интерполяции и экстрополяции в узлы трехмерной регулярной сетки.

Начальные поля выбраны в связи с тем, что в этих районах в августе–сентябре более или менее надежно были зафиксированы и идентифицированы и зафиксированы фактически зародившиеся циклоны в том числе и тропические.

Вычислительный эксперимент предусматривал моделирование зарождения тропических циклонов без учета и с учетом завихренности гравитационного ветра в данных районах. Для моделирования использовалась гидродинамическая модель, разработанная под руководством автора аспирантами и магистрами, развивавшаяся и использующаяся на протяжении последних 15 лет в научных исследованиях Российского государственного гидрометеорологического университета [24–27].

Модель ТЦ

Система уравнений модели тропического циклона представляется в следующем виде:

$$\frac{Du}{\mathrm{d}t} = -\omega\frac{\partial u}{\partial P} + fv - mg\frac{\partial Z}{\partial X} + g_X + E_X + F_{Uh} + F_{UP},$$

$$\frac{Dv}{\mathrm{d}t} = -\omega\frac{\partial v}{\partial P} - fu - mg\frac{\partial Z}{\partial Y} + g_Y + E_Y + F_{Vh} + F_{VP},$$

$$\frac{D\theta}{\mathrm{d}t} = -\omega\frac{\partial \theta}{\partial P} + Q + F_{\theta h} + F_{\theta P},$$

$$\frac{Dq}{\mathrm{d}t} = -\omega\frac{\partial q}{\partial P} + M + F_{qh} + F_{qP}, \qquad (4.4.7)$$

$$\frac{DP_S}{\mathrm{d}t} = \omega_{900} - m\int_{900}^{P_S}\left(\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y}\right)dP,$$

$$\frac{\partial(g_Z Z)}{\partial P} = -\frac{R}{P}\theta_V\left(\frac{P}{P_0}\right)^{R/C_P},$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial P} = -\left(\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial v}{\partial Y}\right),$$

$$\theta_V = T(1 + 0{,}61 \cdot q)\left(\frac{P_0}{P}\right)^{R/C_P},$$

$$P = \rho \cdot R \cdot T,$$

где $E = \gamma \cdot \omega^* \dfrac{(V_C - V)}{(P_t - P_b)}$,

$$E = \begin{cases} E_X \\ E_Y \end{cases},$$

$$V_C = \frac{1}{P_t - P_b}\int_{P_b}^{P_t} V \mathrm{d}P,$$

$$\frac{D}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + mu\frac{\partial}{\partial X} + mv\frac{\partial}{\partial Y},$$

V – модуль двухмерного вектора ветра;

u, v – проекции вектора скорости ветра на оси X, Y, соответственно;

Z – высота изобарической поверхности;

P_S – давление на подстилающей поверхности;

T – температура;

θ – потенциальная температура;

θ_V – виртуальная потенциальная температура;

$\omega = \dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}$ – аналог вертикальной скорости в изобарической системе координат;

P_0 – стандартное давление (1000 гПа);

q – массовая доля водяного пара;

Q – скорость нагревания, обусловленная фазовыми переходами воды;

M – скорость изменения влажности за счет фазовых переходов;

E_X, E_Y – конвективный перенос количества движения;

$F_{Uh}, F_{Vh}, F_{\theta h}, F_{qh}$ – мезомасштабная горизонтальная турбулентная диффузия импулься, тепла и влаги, соответственно;

$F_{UP}, F_{VP}, F_{\theta P}, F_{qP}$ – мелкомасштабная вертикальная турбулентная диффузия импулься, тепла и влаги, соответственно;

R – газовая постоянная;

C_P – удельная теплоемкость при постоянном давлении;

f – параметр Кориолиса;

m – масштабный множитель для меркаторской проекции;

g – ускорение свободного падения (g_X и g_Y – проекции ускорения свободного падения на оси X и Y);

ω_{900} – аналог вертикальной скорости на уровне 900 гПа;

γ – эмпирический коэффициент;

ω^* – аналог вертикальной скорости на верхней границе пограничного слоя;

P_b, P_t – давление на нижней и верхней границах облаков, соответственно.

Члены, описывающие горизонтальную турбулентную диффузию импульса, тепла и влаги, представляются следующим образом:

$$F_{uh} = K_h m^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} \right),$$

$$F_{Vh} = K_h m^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} \right),$$

$$F_{\theta h} = K_h m^2 \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial Y^2} \right),$$

$$F_{qh} = K_h m^2 \left(\frac{\partial^2 q}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial Y^2} \right),$$

где K_h – коэффициент горизонтальной мезомасштабной вихревой турбулентности.

На поверхности (на нижней границе атмосферы) напряжения трения, потоки тепла и влаги определяются с помощью формул интегрального метода:

$$F_{uP} = -C_d\, g P |V_a| \frac{u_a}{\Delta P},$$

$$F_{VP} = -C_d\, g P |V_a| \frac{v_a}{\Delta P},$$

$$F_{\theta P} = -C_d\, g P |V_a| \frac{\theta_a - \theta_S}{\Delta P},$$

$$F_{qP} = -C_d\, g P |V_a| \frac{q_a - q_m(T_S)}{\Delta P},$$

где T_S – температура поверхности,

$q_m(T_S)$ – массовая доля насыщенного водяного пара при $T = T_S$,

C_d – коэффициент сопротивления,

индекс «a» означает, что величина задается на верхней границе приводного слоя.

В модели параметризуются также процессы конденсации и испарения, облакообразования, образования осадков (конвективных и крупномасштабных), процессы фазового нагрева (конвективного и крупномасштабного), конвективного переноса импульса [27].

На верхней границе модельной атмосферы полагается $\omega = 0$, а также равенство нулю вертикальных турбулентных потоков импульса, тепла и влаги.

По вертикали расчетная сетка содержит пять уровней: 1000, 900, 650, 400, 150 гПа. Сетка расшатана по вертикали, что упрощает интегрирование уравнения неразрывности.

По горизонтали сетка содержит 40×50 узлов с шагом 70 км. Эта сетка тоже расшатанв и представляет собой совокупность двух сеток с шагом $\Delta S = 70$км, смещенных относительно друг друга на половину шага $\Delta S/2 = 35$ км. Шаг по времени составляет 60 с.

Боковые граничные условия в модели ТЦ обеспечивают пропуск инерционно-гравитационных волн, обусловленных выделением стрытой теплоты. Это достигается за счет того, что в модели используются двумерные граничные условия излучения:

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_B + C_X \left.\frac{\partial \Phi}{\partial X}\right|_B + C_Y \left.\frac{\partial \Phi}{\partial Y}\right|_B = 0\ ,$$

где Φ – любая прогностическая переменная;

C_X, C_Y – фазовые скорости по направлению осей X и Y, соответственно.

По определению $C_X = \dfrac{\omega}{K_X}, C_Y = \dfrac{\omega}{K_Y}$,

где ω – частота,

K_X , K_Y – волновые числа.

Для интегрирования системы уравнений по времени применяется следующая схема:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = LF + HF + dif\ ,$$

где Φ – прогностическая переменная,

LF – адвективные члены,

HF – члены, связанные с высокочастотными модами,

dif – диффузионные члены.

Численное интегрирование по этой схеме выполняется с помощью двух циклов вычислений

$$\frac{\Phi^* - \Phi^\tau}{\Delta t} = LF^\tau + HF^\tau + dif^\tau\ ,$$

$$\frac{\Phi^{\tau+1} - \Phi^\tau}{\Delta t} = (1-\alpha)LF^\tau + \alpha LF^* + (1-\beta)HF^\tau + \beta HF^* + dif^\tau\ ,$$

где α, β – эмпирические коэффициенты.

Численные эксперименты

С помощью описанной модели выполнены численные эксперименты с учетом и без учета гравитационного ветра. Шесть из смоделированных циклонов однозначно удалось идентифицировать на карте как тропические, поскольку они достигли стадии ураганов со скоростью ветра более 30 м/с.

Без привлечения гравитационного ветра смоделировать и идентифицировать тропические циклоны соответствующим ситуациям на карте практически не удалось.

Интересно отметить, что попытка связать точки зарождения тропических циклонов с точками максимальной завихренности гравитационного ветра оказались безуспешными. Это, очевидно, свидетельствует о важности других факторов, благоприятствующих возникновению тропических циклонов [16].

Методы теории чувствительности

В целях детального исследования проблемы значимости силы тяжести на возникновение и развитие тропических циклонов использовались методы теории управления (теории чувствительности).

Разработанные принципы такого исследования существенно отличаются от обычно используемых методов прямого моделирования, и их применение позволяет избежать многократного интегрирования сложных нелинейных уравнений при различных значениях варьируемых параметров, определяющих интенсивность возмущений, и получить статистически значимые характеристики за счет привлечения климатической информации. При этом оценивается отклик моделируемой среды на единичные вариации параметров, т.е. определяются функции чувствительности, которые по существу представляют собой функции Грина.

При получении полей функций чувствительности интегрируются уравнения модели в вариациях, которые относительно вариаций являются линейными. Оценка чувствительности зависимых переменных к вариациям параметров определяется путем перемножения функций чувствительности на значения заданных (или вычисленных) вариаций параметров.

Зависимые переменные моделей, характеризующие состояние моделируемой среды, рассматриваются в качестве составляющих вектора состояния, которые для атмосферы включают все метеовеличины, например $\Psi(U, V, \omega, \theta, P, q)$.

Наряду с вектором состояния вводится вектор параметров модели Y. Составляющие вектора параметров определяются в каждом конкретном случае, исходя из постановки задачи, включая, например, ускорение свободного падения g, скорость крупномасштабной конденсации c*, скорость нагревания воздуха, обусловленную фазовыми переходами Q, температуру подстилающей поверхности T_S и др.

Применение принципов использованной теории для исследования чувствительности атмосферных моделей базируется на интегрировании конечно-разностных аналогов уравнений модели, записанных в вариациях. Для иллюстрации метода построения уравнений в вариациях воспользуемся операторной формой записи дискретных аналогов уравнений модели атмосферы

$$B\Delta_t\Psi^h + G^h\left(\Psi^h, Y^h\right) = 0, \qquad (4.4.8)$$

где Δ_t – конечно-разностный аналог производной по времени;

B – диагональная матрица коэффициентов при конечно-разностном аналоге производной по времени.

$G^h\left(\Psi^h, Y^h\right)$ – конечно-разностный аналог нелинейного матричного дифференциального оператора, построенного в пространстве сеточных функций составляющих вектора состояния Ψ^h, удовлетворяющих граничным условиям модели;

Y^h – вектор параметров, компоненты которого определены в области допустимых значений.

Индекс «h» означает дискретный аналог оператора G и сеточных значений зависимых переменных вектора состояния (Ψ) и компонент вектора параметров (Y).

Для получения уравнений в вариациях векторы параметров и состояния в окрестности невозмущенных значений (Y_0^h, Ψ_0^h) представляются в виде сумм

$$Y = Y_0 + \eta\delta Y, \quad \Psi = \Psi_0 + \eta\delta\Psi, \qquad (4.4.9)$$

где η – вещественный параметр,

$\delta Y^h, \delta\Psi^h$ – вариации сеточных компонент векторов параметров и состояния.

В результате подставки (4.4.13) в (4.4.8), дифференцирования результата по η в пределе при $\eta \to 0$ получается операторное уравнение в вариациях:

$$\lim_{\eta\to 0}\frac{\partial}{\partial\eta}\left[B\Delta_t\left(\Psi_0^h + \eta\delta\Psi^h\right) + G^h\left(\Psi_0^h + \eta\delta\Psi^h, Y_0^h + \eta\delta Y^h\right)\right] = 0. \quad (4.4.10)$$

При интегрировании компонент (проекций) операторного уравнения, полученного после реализации выражения (4.4.10) (системы уравнений модели в вариациях), вычисляются поля функций чувствительности (функций Грина), т.е. вариации компонент вектора состояния, которые соответствуют единичным вариациям компонент вектора параметров.

Если в качестве невозмущенного вектора состояния используются средние (климатические) значения, то получаемые оценки функций чувствительности вектора состояния к вариациям вектора параметров могут интерпретироваться в среднеклиматическом смысле, а следовательно, имеют статистическую значимость.

Система дифференциальных уравнений модели ТЦ в вариациях, соответствующая операторному уравнению (4.4.8) имеет следующий вид:

$$\Delta_t \delta u = -m(u_0 \Delta_X \delta u + \delta u \Delta_X u_0 + v_0 \Delta_Y \delta u + \delta v \Delta_Y u_0 +$$
$$+ \delta g \Delta_X Z_0 + g_0 \Delta_X \delta Z) + f \delta v - \omega_0 \Delta_P \delta u - \delta\omega \Delta_P u_0 +$$
$$+ \delta E_X + \delta F_{Uh} + \delta F_{UP} + \delta g_X,$$

$$\Delta_t \delta v = -m(u_0 \Delta_X \delta v + \delta u \Delta_X v_0 + v_0 \Delta_Y \delta v + \delta v \Delta_Y v_0 +$$
$$+ \delta g \Delta_Y Z_0 + g_0 \Delta_Y \delta Z) - f \delta u - \omega_0 \Delta_P \delta v - \delta\omega \Delta_P v_0 +$$
$$+ \delta E_Y + \delta F_{Vh} + \delta F_{VP} + \delta g_Y,$$

$$\Delta_t \delta\theta = -m(u_0 \Delta_X \delta\theta + \delta u \Delta_X \theta_0 + v_0 \Delta_Y \delta\theta + \delta v \Delta_Y \theta_0) -$$
$$- \omega_0 \Delta_P \delta\theta - \delta\omega \Delta_P \theta_0 + L \delta C^* + \frac{1}{C_P} \frac{\overline{\theta}}{\overline{T}} \delta Q + \delta F_{\theta h} + \delta F_{\theta P},$$

$$\Delta_t \delta q = -m(u_0 \Delta_X \delta q + \delta u \Delta_X q_0 + v_0 \Delta_Y \delta q + \delta v \Delta_Y q_0) -$$
$$- \omega_0 \Delta_P \delta q - \delta\omega \Delta_P q_0 + \delta C^* + \frac{\delta M \rho_0 - M_0 \delta\rho}{\rho_0^2} + \delta F_{qh} + \delta F_{qP},$$

$$\Delta_t P_S = -m(u_0 \Delta_X \delta P_S + \delta u \Delta_X P_{S0} + v_0 \Delta_Y \delta P + \delta v \Delta_Y P_{S0}) +$$
$$+ \delta\omega_{900} - -m \int_{900}^{P_s} (\Delta_X \delta u + \Delta_Y \delta v) dP,$$

$$\Delta_P (\delta g Z_0 + g_0 \delta Z) = -\frac{R}{P} \left(\frac{P}{P_0} \right)^{R/C_P} (\theta_{v0} + \delta\theta_v),$$
$$\Delta_P \delta\omega = -(\Delta_X \delta u + \Delta_Y \delta v),$$

где $$\delta\theta_v = T_0 (1 + 0{,}61 \cdot \delta q) \left(\frac{P_0}{P} \right)^{R/C_P} + \delta T 0{,}61 \delta q \left(\frac{P_0}{P} \right)^{R/C_P},$$

$$\delta P = \rho_0 R \delta T + T_0 R \delta\rho,$$

$$\delta E_X = C\delta\omega^* \frac{U_{C0} - U_0}{P_t - P_b} + C\omega_0^* \frac{\delta U_{C0} - \delta U_0}{P_t - P_b},$$

$$\delta E_Y = C\delta\omega^* \frac{V_{C0} - V_0}{P_t - P_b} + C\omega_0^* \frac{\delta V_{C0} - \delta V_0}{P_t - P_b},$$

$$\delta U_C = \frac{1}{P_t - P_b} \int_{P_b}^{P_t} \delta u \mathrm{d}P, \quad \delta V_C = \frac{1}{P_t - P_b} \int_{P_b}^{P_t} \delta v \mathrm{d}P,$$

$$\delta F_{Uh} = \delta K_h m^2 \left(\nabla^2 u_0\right)^D + K_{h0} m^2 \left(\nabla^2 \delta u\right)^D,$$

$$\delta F_{Vh} = \delta K_h m^2 \left(\nabla^2 v_0\right)^D + K_{h0} m^2 \left(\nabla^2 \delta v\right)^D,$$

$$\delta F_{\theta h} = \delta K_h m^2 \left(\nabla^2 \theta_0\right)^D + K_{h0} m^2 \left(\nabla^2 \delta\theta\right)^D,$$

$$\delta F_{qh} = \delta K_h m^2 \left(\nabla^2 q_0\right)^D + K_{h0} m^2 \left(\nabla^2 \delta q\right)^D,$$

символ «D» означает дискретный аналог оператора ∇^2,

$$\delta F_{UP} = -C_d \delta g P |V_{a0}| \frac{u_{a0}}{\Delta P} - C_d g_0 P |\delta V_a| \frac{u_{a0}}{\Delta P} - C_d g_0 P |V_{a0}| \frac{\delta u_a}{\Delta P},$$

$$\delta F_{VP} = -C_d \delta g P |V_{a0}| \frac{v_{a0}}{\Delta P} - C_d g_0 P |\delta V_a| \frac{v_{a0}}{\Delta P} - C_d g_0 P |V_{a0}| \frac{\delta v_a}{\Delta P},$$

$$\delta F_{TP} = -C_d \delta g P |V_{a0}| \frac{T_{\omega 0} - T_{a0}}{\Delta P} - C_d g_0 P |\delta V_a| \frac{T_{\omega 0} - T_{a0}}{\Delta P} -$$

$$- C_d g_0 P |V_{a0}| \frac{\delta T_{\omega 0} - \delta T_{a0}}{\Delta P},$$

$$\delta F_{qP} = -C_d \delta g P |V_{a0}| \frac{q_{\omega 0} - q_{a0}}{\Delta P} - C_d g_0 P |\delta V_a| \frac{q_{\omega 0} - q_{a0}}{\Delta P} -$$

$$- C_d g_0 P |V_{a0}| \frac{\delta q_{\omega 0} - \delta q_{a0}}{\Delta P},$$

$$\Delta_t f = \frac{f^{S+1} - f^{S-1}}{2\Delta t},$$

$$\Delta_n f = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2\Delta r},$$

$$n=\begin{Bmatrix}X\\Y\\P\end{Bmatrix},\ \Delta r=\begin{Bmatrix}\Delta X\\\Delta Y\\\Delta P\end{Bmatrix}.$$

Для интегрирования системы уравнений в вариациях применяется та же схема, что и при интегрировании обычных уравнений.

В прогностических уравнениях в вариациях опущены члены, содержащие производные по времени от невозмущенных компонент вектора состояния (Ψ_0), так как невозмущенные компоненты вектора состояния не зависят от времени.

Для определения функций чувствительности применялся алгоритм интегрирования по времени уравнений в вариациях, согласно которому компонента вектора параметров, к которой определяется чувствительность (ускорение свободного падения или проекций g_X , g_Y), полагалась равной единице, а вариации остальных параметров нулю.

Полученные таким образом решения представляют собой трехмерные поля функций чувствительности всех компонент вектора состояния модели к единичным вариациям ускорения свободного падения на заданном временном интервале $t+N\Delta t$. Временные и пространственные масштабы, на которых вычисляются функции чувствительности, определяются интервалом времени интегрирования уравнений в вариациях, размером области интегрирования, способом задания невозмущенных значений вектора состояния и разрешающей способностью модели по времени и пространству. В данной задаче в качестве невозмущенного поля гравитации использовалось нормальное поле силы тяжести ОЗЭ. Умножая функции чувствительности на отклонения реального поля гравитации от нормального поля тяжести ОЗЭ, получаем отклик атмосферы на аномалии поля силы тяжести и ее проекций на оси X и Y.

Результаты предварительных исследований чувствительности гидродинамической модели ТЦ показали значительную чувствительность к стационарным вариациям компонент АСТ. Результаты численных экспериментов проясняют причины большой повторяемости ТЦ в зонах стационарных АСТ. Показано также, что завихренность гравитационного ветра может являться причиной возникновения и развития ТЦ.

Уточнение параметров

При моделировании с учетом АСТ очень остро стоит проблема задания поля СТ. Сущность проблемы состоит в том, что детальное задание СТ (использование большого числа членов разложения) может восприниматься гидродинамической моделью как шум и приводить к возникновению ложных колебаний и вычислительной неустойчивости, а сглаженное поле гравитации может быть недостаточным для корректного описания значимости АСТ и ведет к невозможности полного описания гравитационных эффектов.

Задача корректного задания поля СТ в точках области моделирования может быть рассмотрена как обратная задача теории чувствительности, т.е. как задача согласования параметров модели со структурой моделируемых полей.

Если имеются данные измерений реальных состояний атмосферы, то сравнивая результаты моделирования с данными измерений можно уточнить параметры так, чтобы согласие между измеренными и модельными данными (оцениваемое с помощью критерия качества моделирования) было бы наилучшим. Обычно критерии качества представляются в виде функционалов, характеризующих отличия между измеренными и рассчитанными с помощью модели значениями составляющих вектора состояния. В этом случае задачи уточнения параметров сводятся к минимизации функционалов на множестве параметров модели и составляющих вектора состояния.

Рассмотрим пример уточнения поля СТ, в котором искомые уточняющие поправки (ΔY_i), обеспечивающие минимум функционала качества моделирования вектора состояния, определяются на множестве точек (M) области моделирования, на интервале времени $t_0 \div t_0 + \Delta T$.

В качестве функционала качества будем использовать суммарный (по компонентам вектора состояния l) квадрат относительной ошибки моделирования:

$$\Im(\Psi) = \sum_{l=1}^{L} \left[\frac{\Psi_{m,l}\left(t_0 + \Delta T, Y_{i0} + \Delta Y_1\right) - \Psi_{m,l}^{C}\left(t_0 + \Delta T\right)}{\Psi_{m,l}^{C}\left(t_0 + \Delta T\right)} \right]^2, \qquad (4.4.11)$$

где $\Psi_{m,l}\left(t_0 + \Delta T, Y_{i0} + \Delta Y_1\right), \Psi_{m,l}^{C}\left(t_0 + \Delta T\right)$ – модельные и измеренные значения составляющих вектора состояния Ψ в момент времени $t_0 + \Delta T$,

Y_{i0} – априори заданные значения составляющих вектора параметров, имеющего размерность I ($i = 1, \ldots, I$);

ΔY_1 – уточняющие поправки силы тяжести g, подлежащие определению,

t_0 – начальный момент времени,

L – число составляющих вектора состояния.

Полагая, что $\Delta Y_1 \ll Y_{10}$, а зависимые переменные (компоненты вектора состояния) $\Psi_l\left(\overline{X}, Y_{i0}\right)$ – функции пространственных координат и времени $\left(\overline{X}\right)$, соответствующие невозмущенным значениям параметров $\left(Y_{i0}\right)$, достаточно гладкие в окрестности Y_{i0}, представим первый член правой части (4.4.11) рядом Тейлора, ограничиваясь линейными членами:

$$\Psi_{m,l}\left(t_0 + \Delta T, Y_{i0} + \Delta Y_1\right) = \Psi_{m,l}\left(t_0 + \Delta T, Y_{i,0}\right) + \left(\left.\frac{\partial \Psi_l}{\partial Y_1}\right|_{Y_{i0}} \Delta Y_1\right)_m,$$

$$\left(m = \overline{1, M}, l = \overline{1, L}\right). \tag{4.4.12}$$

Подставив ряды (4.4.12) в (4.4.11), запишем выражение для критерия качества в виде квадрата относительной ошибки моделирования

$$\Im(\Psi) = \sum_{l=1}^{L} \left[\frac{\Delta \Psi_{m,l}\left(Y_{i,0}\right) + \left(\left.\frac{\partial \Psi_l}{\partial Y_1}\right|_{Y_{i,0}} \Delta Y_1\right)_m}{\Psi^{C}_{m,l}\left(t_0 + \Delta T\right)} \right]^2, \tag{4.4.13}$$

где $\Delta \Psi_{m,l}\left(Y_{i,0}\right) = \Psi_{m,l}\left(t_0 + \Delta T, Y_{i0}\right) - \Psi^{C}_{m,l}\left(t_0 + \Delta T\right)$,

$\Psi_{m,l}\left(t_0 + \Delta T, Y_0\right)$ – моделируемые значения компонент вектора состояния, полученные с использованием невозмущенных (априори заданных) компонент вектора параметров.

Минимизируя (4.4.13) относительно ΔY_1 (дифференцируя по ΔY_1), получаем систему линейных (нормальных) уравнений первого порядка относительно искомых поправок к параметрам ΔY_1:

$$\frac{\partial \Im}{\partial(\Delta Y_1)} \equiv \sum_{l=1}^{L}\left[\frac{\left|\Delta\Psi_{l,m} + \Delta Y_1\left(\frac{\partial \Psi_l}{\partial Y_1}\right)_m\right|}{\left(\Psi_{m,l}^{C}\right)^2}\right] = 0. \qquad (4.4.14)$$

Функции чувствительности $\frac{\partial \Psi_l}{\partial Y_1}$, фигурирующие в уравнении (4.4.14), определяются заранее для каждой компоненты вектора состояния по алгоритму, описанному выше. Аналогично уточняются компоненты проекций g_X, g_Y. При моделировании ТЦ использовались уточненные (согласованные) значения g_x, g_y, g_z.

4.4.5. Зональная циркуляция

Основным внешним источником энергии климатической системы является приток солнечной радиации. Вследствие его зональности зональные поля метеовеличин, характеризующие эту систему, тоже в значительной степени оказываются зональными, несмотря на утрату важных особенностей, создаваемых эффектами распределения континентов и океанов. Оценим роль неоднородного поля силы тяжести в формировании зональной циркуляции атмосферы.

Ограничимся рассмотрением членов системы уравнений (3.4.11), представляющих силу тяжести. Нетрудно видеть, что в результате зонального осреднения в рассмотрении останутся только две компоненты силы тяжести $\overline{g_\Phi}$, $\overline{g_\theta}$, черта над буквой указывает, что соответствующая функция представляет зональное среднее. Эти две компоненты могут формировать свою составляющую в зональной циркуляции атмосферы, что подтверждается рис. 1.5 (см. п. 1.6.3).

Более детальное оценку вклада неоднородностей поля силы тяжести в формирование зональной циркуляции атмосферы можно получить с помощью анализа составляющих вихря скорости. Результаты зонального осреднения компонент вектора $\vec{B}_g$ в (4.4.5) представлены на рис. 4.41 – 4.43.

Отрицательным значениям компоненты $\overline{B_{g\Phi}}$ в северном полушарии и положительным в южном соответствует циклоническая завихренность. В тропосфере в полосе 0 – 25° с.ш. зимой имеет место циклоническая завихренность, антициклоническая – в полосах 25 – 90° с.ш., 45 – 80° ю.ш. (см. рис. 4.41). Летом имеет место антициклоническая завихренность в полосе 45 – 90° ю.ш. В других широтах завихренность знакопеременна.

Из рис. 4.42, 4.43 следует, что распределение областей положительных и отрицательных значений компонент $\overline{B_{g\theta}}$, $\overline{B_{g\lambda}}$ слабо зависит от вариаций метеовеличин и от сезонов, т.е. достаточно стабильно.

В областях 40 – 60° с.ш., 75 – 90° с.ш. и 60 – 80° ю.ш. доминируют отрицательные компоненты $\overline{B_{g\theta}}$, вне этих областей – положительные. Напомним, что положительному направлению соответствует направление на юг. Полученное распределение $\overline{B_{g\theta}}$ указывает на то, что оно должно способствовать конвергенции меридиональных потоков в районах 60° с.ш., 60° ю.ш. и их дивергенции в районах 40°, 75° с.ш., 40°, 80° ю.ш.

В области 25° с.ш. – 30° ю.ш. доминируют отрицательные значения компоненты $\overline{B_{g\lambda}}$, вне этих областей – положительные. На высотах, превышающих 60–70 км, при положительных экстремальных вариациях метеовеличин также доминируют отрицательные значения $\overline{B_{g\lambda}}$. Учитывая, что положительному направлению соответствует направление на восток, можно сделать следующий вывод: распределение $\overline{B_{g\lambda}}$ в тропосфере и стратосфере способствует поддержанию пассатных потоков во внутритропической зоне конвергенции и западно-восточному переносу вне тропиков; в нижней мезосфере при отрицательных экстремальных вариациях метеовеличин – западному переносу, при положительных экстремальных вариациях – восточному переносу.

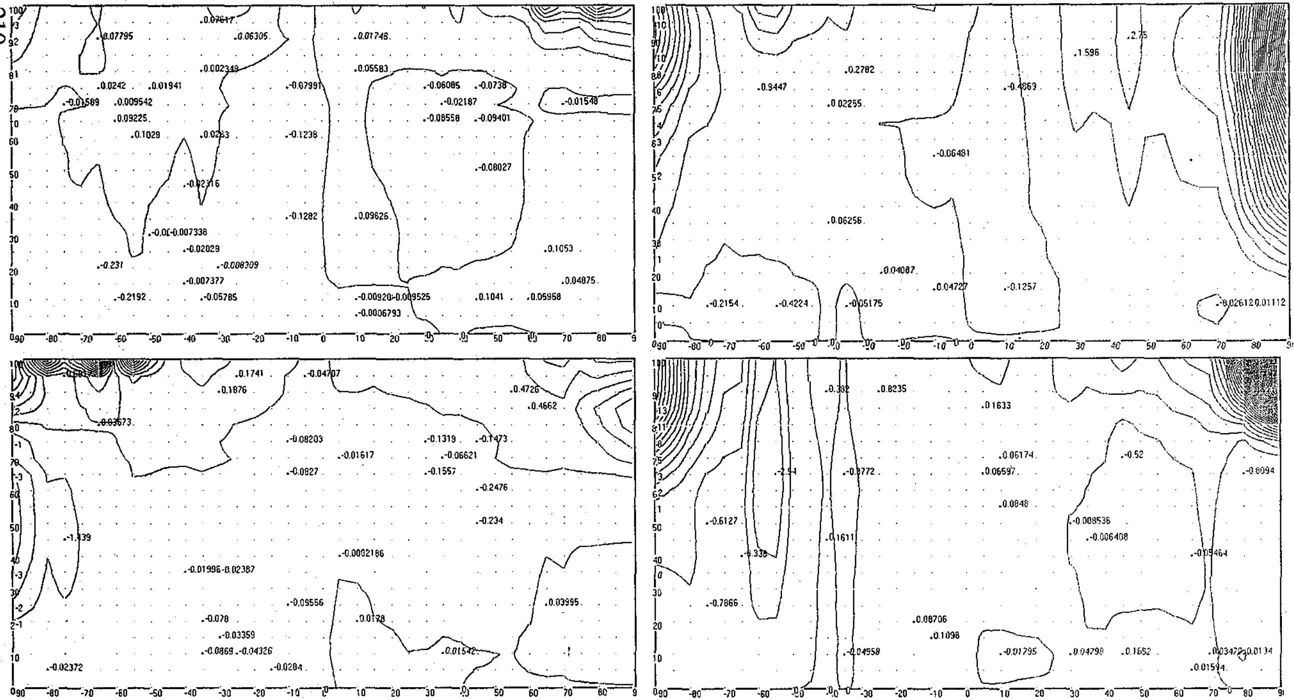


Рис.4.41. Зонально-осредненное поле компоненты $B_{g\Phi}$ (10^{-11} c^{-2}) в январе (вверху) и июле (внизу) при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях давления P' и относительной плотности $\rho'/\overline{\rho}$

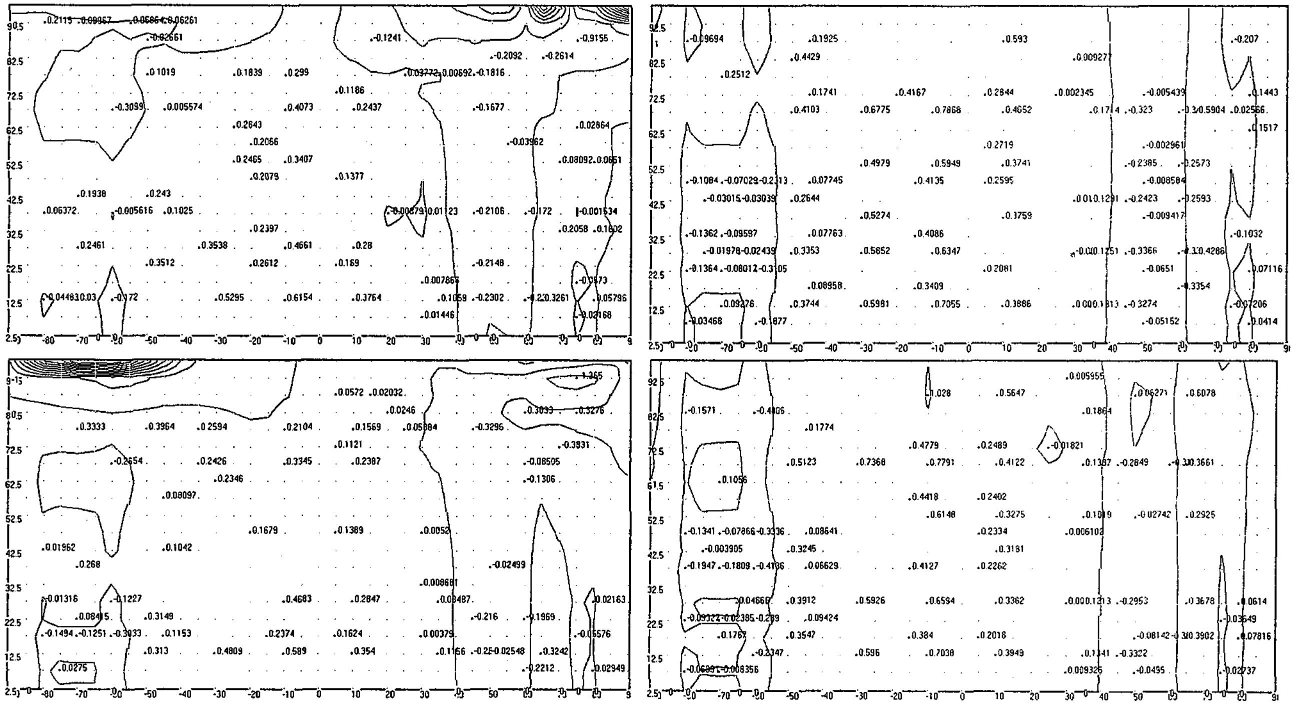


Рис.4.42. Зонально-осредненное поле компоненты $B_{g\theta}$ (10^{-10} c^{-2}) в январе (вверху) и июле (внизу) при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях давления P' и относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$

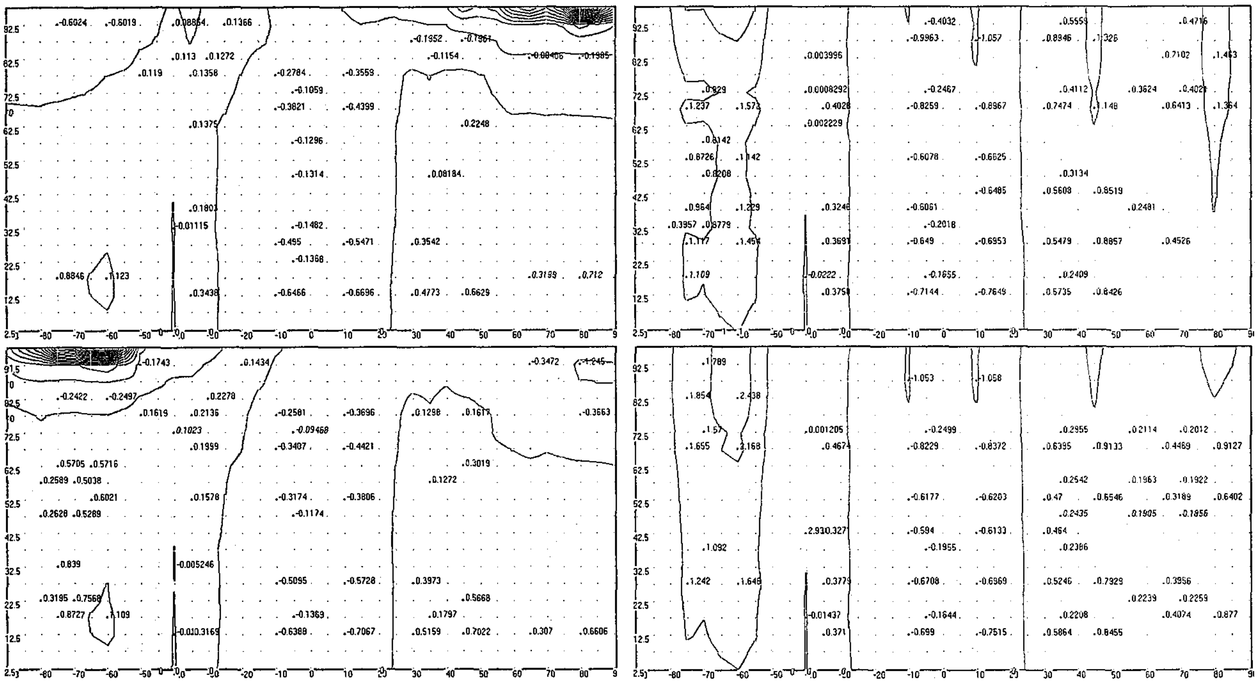


Рис. 4.43. Зонально-осредненное поле компоненты $B_{g\lambda}$ (10^{-9} с$^{-2}$) в январе (вверху) и июле (внизу) при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях давления P' и относительной плотности $\rho' / \overline{\rho}$

4.4.6. Кинетическая энергия гравитационной циркуляции атмосферы

Изучение процессов генерации и трансформации энергии является основой для уточнения представлений об общей циркуляции атмосферы. Особое внимание при этом уделяется процессам генерации и трансформации кинетической энергии.

В п. 2.4 была рассмотрена роль неоднородности поля силы тяжести в этих процессах при неизменности плотности. Рассмотрим общий случай, когда на распределение плотности не накладываются какие-либо ограничения.

Обозначим, как и в п. 2.4, через $\bar{f}$ среднее значение любой метеовеличины $f(x,y,z,t)$, а отклонение – через $f' = f - \bar{f}$. Осреднение может выполняться по всем пространственно-временным координатам, по их части, по одной координате, по совокупности частиц, обладающих одинаковыми свойствами, и т.д. Ввиду переменности плотности введем взвешенное среднее $\tilde{f} = \overline{\rho f} / \bar{\rho}$ или $\bar{\rho}\tilde{f} = \overline{\rho f}$. Отклонение f от $\tilde{f}$ обозначим через f^*, т.е. $f^* = f - \tilde{f}$. Приведем основные свойства взвешенного осреднения (вывод – см., напр., /12/):

$$\tilde{\tilde{f}} = \tilde{f}, \quad \bar{\tilde{f}} = \tilde{f}, \quad \overline{\rho f^*} = 0, \quad \tilde{f}^* = 0, \quad \tilde{f} = \bar{f} + \frac{1}{\bar{\rho}}\overline{\rho' f'}.$$

Последнее свойство позволяет свести операцию взвешенного осреднения к операции обычного осреднения.

Уравнение (3.1.1) умножим на ρ:

$$\rho\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} + \rho\vec{V}\nabla\cdot\vec{V} = \rho\vec{F} + \rho\vec{g} - \nabla P, \qquad (4.4.13)$$

и с помощью уравнения неразрывности (3.1.2) приведем к дивергентному виду:

$$\frac{\partial\rho\vec{V}}{\partial t} + div\left(\vec{V}\cdot\rho\vec{V}\right) = \rho\vec{F} + \rho\vec{g} - \nabla P.$$

Осредним это уравнение

$$\frac{\partial\bar{\rho}\tilde{\vec{V}}}{\partial t} + div\left(\widetilde{\vec{V}}\cdot\bar{\rho}\tilde{\vec{V}}\right) = \bar{\rho}\tilde{\vec{F}} + \bar{\rho}\tilde{\vec{g}} - \nabla\bar{P}.$$

и умножим его скалярно на $\vec{V}$. Тогда получим уравнение баланса кинетической энергии осредненного движения:

$$\frac{\partial \overline{K}}{\partial t} + div\left(\tilde{\vec{V}}\, \overline{K} \right) = \bar{\rho}\tilde{\vec{V}}\, \tilde{\vec{F}} + \bar{\rho}\tilde{\vec{V}}\, \tilde{\vec{g}} - \tilde{\vec{V}}\, \nabla \overline{P}\,, \tag{4.4.14}$$

где $\overline{K} = \dfrac{1}{2}\bar{\rho}\tilde{\vec{V}}^2$.

Вернемся к уравнению (4.4.13). Подставим в дифференциальные выражения этого уравнения равенство $\vec{V} = \tilde{\vec{V}} + \vec{V}^*$, и, учитывая, что

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{V}^*}{\partial t} + \vec{V}\cdot div\vec{V}^* \right) = \frac{\partial \rho \vec{V}^*}{\partial t} + div\left(\vec{V}^* \cdot \rho\vec{V}\right),$$

получим

$$\frac{\partial \rho \vec{V}^*}{\partial t} + div\left(\vec{V}^* \cdot \rho\vec{V}\right) + \rho\left(\frac{\partial \tilde{\vec{V}}}{\partial t} + \tilde{\vec{V}}\cdot div\tilde{\vec{V}} \right) = \rho\vec{F} + \rho\vec{g} - \nabla P\,.$$

Умножим это уравнение на $\vec{V}^*$ и осредним. Тогда получим уравнение баланса кинетической энергии движения, отличного от среднего:

$$\frac{\partial K^*}{\partial t} + div\left(\vec{V} K^*\right) = \overline{\rho\vec{V}^*\, \tilde{\vec{F}}} + \overline{\rho\vec{V}^*\, \tilde{\vec{g}}} - \overline{\vec{V}^*\, \nabla \overline{P}}\,,$$

где $K^* = \dfrac{1}{2}\rho\left(\vec{V}^*\right)^2$.

Учитывая, что

$\overline{\rho\vec{V}^*\, \tilde{\vec{g}}} = \bar{\rho}\tilde{\vec{V}}^* \tilde{\vec{g}} + \overline{\rho\vec{V}^*\, \vec{g}^*} = \overline{\rho\vec{V}\, \vec{g}^*} - \overline{\rho\tilde{\vec{V}}\, \vec{g}^*} = \overline{\rho\vec{V}\, \vec{g}^*}$ в силу $\tilde{\vec{V}}^* = 0$

и $\overline{\rho\tilde{\vec{V}}\, \vec{g}^*} = 0$, полученное уравнение перепишем в виде

$$\frac{\partial K^*}{\partial t} + div\left(\vec{V} K^*\right) = \overline{\rho\vec{V}^*\, \tilde{\vec{F}}} + \overline{\rho\vec{V}\, \vec{g}^*} - \overline{\vec{V}^*\, \nabla \overline{P}}\,. \tag{4.4.15}$$

В уравнениях (4.4.14) и (4.4.15) члены $\bar{\rho}\tilde{\vec{V}}\, \tilde{\vec{g}}$ и $\overline{\rho\vec{V}\, \vec{g}^*}$ описывают вклад неоднородности силы тяжести в баланс кинетической энергии осредненного движения и движения, отличного от осредненного. Результаты оценки этих членов для января и июля в случае зонального осреднения представлены на рис. 4.44 и 4.45.

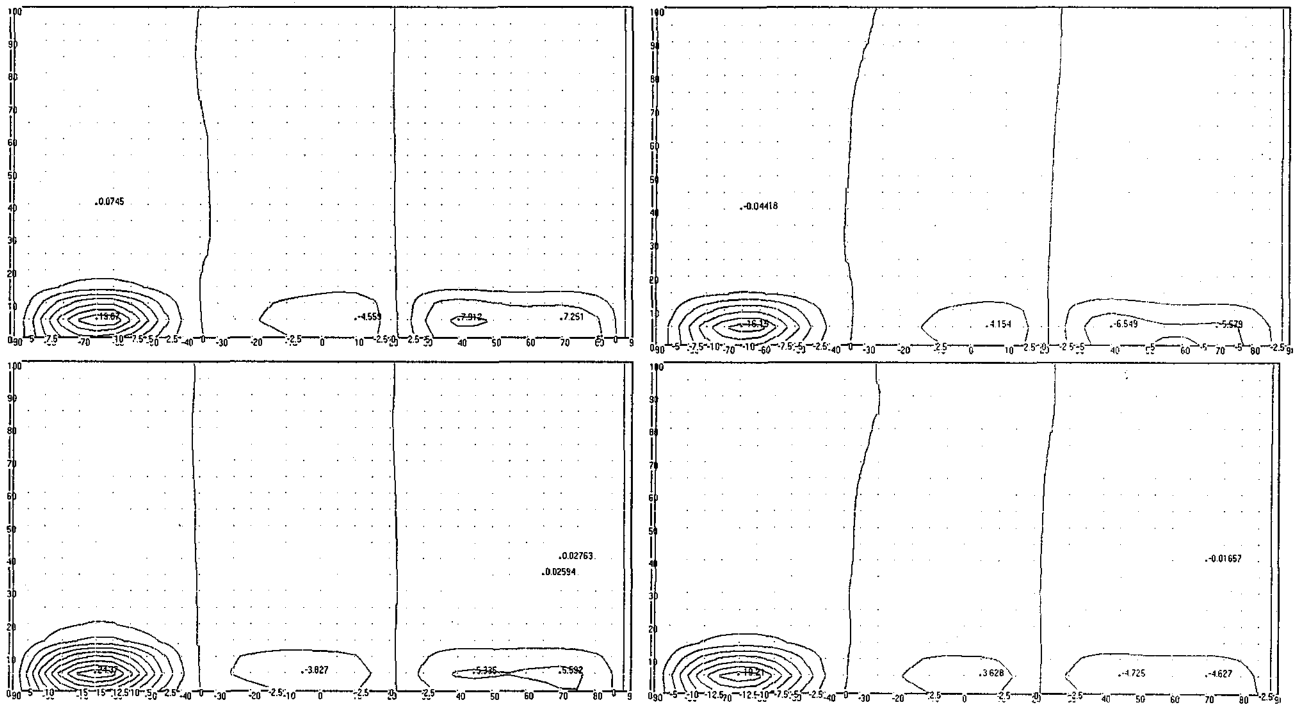


Рис. 4.44. Зонально-осредненное поле $\overline{\rho}\,\tilde{\vec{V}}\cdot\tilde{\vec{g}}$ (Вт/м^2) в январе (вверху) и июле (внизу) при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях метеовеличин

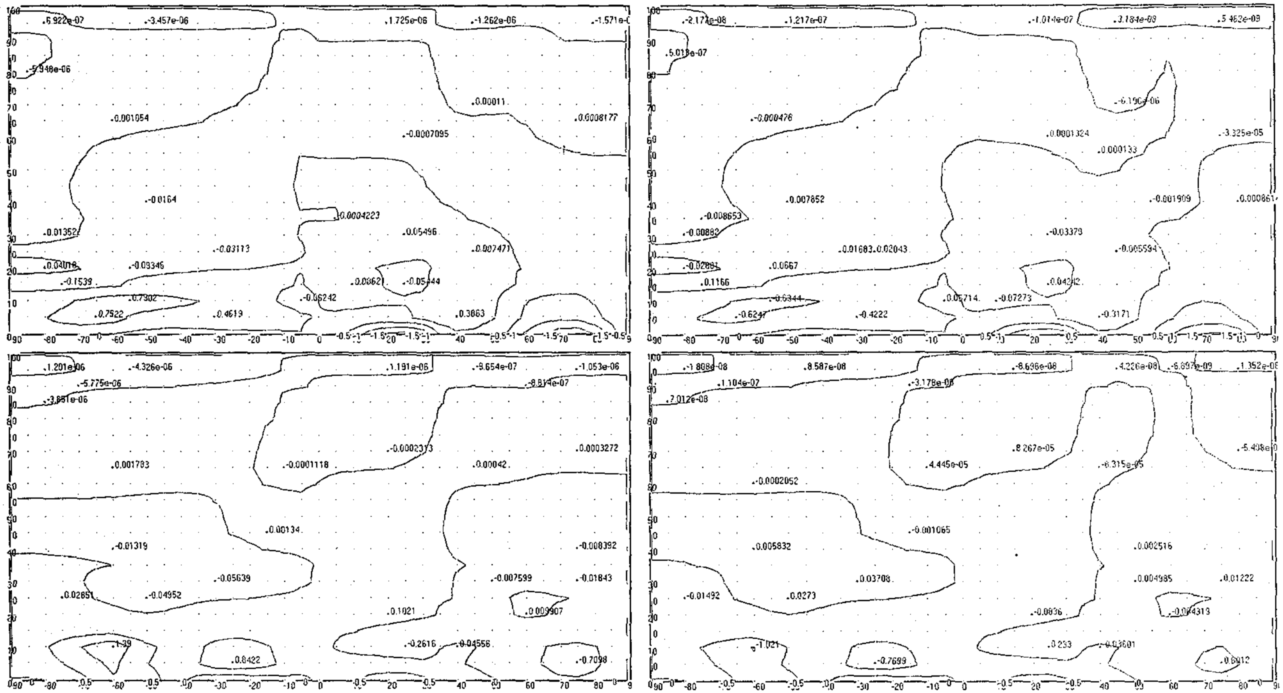


Рис. 4.45. Зонально-осредненное поле $\overline{\rho\ \vec{V} \cdot \vec{g}}^{\ *}$ $(Вт/м^2)$ в январе (вверху) и июле (внизу) при экстремальных положительных (слева) и отрицательных (справа) отклонениях метеовеличин

Скорость обмена $\overline{K}$ с доступной лабильной энергией зонального состояния равна $\overline{\rho}\tilde{\tilde{V}}\,\tilde{\tilde{g}}$, а K^* с доступной лабильной энергией турбулентных пульсаций равна $\overline{\rho\vec{V}\,\vec{g}^*}$. Как отмечалось в п.2.4, по существующим представлениям /22/ вклад силы тяжести в обмен энергией в последнем случае отсутствует.

Из анализа рис. 4.44 следует, что экстремумы скорости обмена $\overline{\rho}\tilde{\tilde{V}}\,\tilde{\tilde{g}}$ сосредоточены в пределах тропосферы. При положительных экстремальных вариациях метеовеличин в зоне 20^0 с.ш. – 35^0 ю.ш. имеет место отрицательная скорость, а вне ее – положительная. При отрицательных экстремальных вариациях метеовеличин ситуация противоположная. Очевидно, зоны раздела положительных и отрицательных значений $\overline{\rho}\tilde{\tilde{V}}\,\tilde{\tilde{g}}$ связаны географическим положением нулевой изолинии относительной плотности (см., напр., рис. 4.12).

Экстремумы скорости $\overline{\rho\vec{V}\,\vec{g}^*}$ также сосредоточены в пределах тропосферы (рис. 4.45). Рассмотрим особенности распределения скорости $\overline{\rho\vec{V}\,\vec{g}^*}$ в нижнем 10-километровом слое атмосферы при положительных экстремальных вариациях метеовеличин, имея в виду, что при отрицательных экстремальных вариациях ее распределение практически противоположно.

В январе имеет место отрицательная скорость $\overline{\rho\vec{V}\,\vec{g}^*}$ – в зоне 50° с.ш. – 5° ю.ш., вне ее – положительная, а в июле отрицательная – в зоне 50° с.ш. – 90° с.ш., вне ее – положительная. В июле отрицательная скорость имеет место в пограничном слое – в зоне 5° с.ш. – 50° с.ш. и 40° ю.ш. – 90° ю.ш., вне ее – положительная, в средней и верхней тропосфере отрицательная скорость обмена – в зоне 40° с.ш. – 90° ю.ш.

Отрицательным значениям $\overline{\rho\vec{V}\,\vec{g}^*}$ соответствует переход энергии от незонального вихревого движения к зонально осредненному, положительным – от упорядоченного к макротурбулентному. Осредненные по полушариям в слое от 0 до 100 км значения $\overline{\rho}\tilde{\tilde{V}}\,\tilde{\tilde{g}}$ и $\overline{\rho\vec{V}\,\vec{g}^*}$ приведены в табл. 4.4.1. Ее анализ показывает следующее.

В северном полушарии зимой модули скоростей выше, чем летом; в южном – наоборот. При положительных вариациях метеовеличин модули скоростей больше, чем при отрицательных.

Знак скорости $\bar{\rho}\,\tilde{\tilde{\vec V}}\,\tilde{\vec g}$ положителен при положительных экстремальных вариациях и отрицателен при отрицательных. Знак скорости $\overline{\rho\vec V\,\vec g^{\,*}}$ в южном полушарии также положителен при положительных экстремальных вариациях и отрицателен при отрицательных. Знак скорости $\overline{\rho\vec V\,\vec g^{\,*}}$ в северном полушарии отрицателен при положительных экстремальных вариациях и положителен при отрицательных.

Модуль отношения скоростей $\bar{\rho}\,\tilde{\tilde{\vec V}}\,\tilde{\vec g}\Big/\overline{\rho\vec V\,\vec g^{\,*}}$ составляет 15 – 20. Исключение составляет значение этого отношения в январе в северном полушарии (около 8).

Осредненные по полушариям в слое от 0 до 15 км скорости обмена $\bar{\rho}\,\tilde{\tilde{\vec V}}\,\tilde{\vec g}$ и $\overline{\rho\vec V\,\vec g^{\,*}}$ приведены в табл. 4.4.2. Легко видеть, что все отмеченные особенности при анализе табл. 4.4.1, здесь сохраняются. При этом все значения скоростей, осредненные в слое от 0 до 15 км, превышают соответствующие значения скоростей, осредненные в слое от 0 до 100 км, примерно в 5 раз.

Таблица 4.4.1

Скорости обмена $\bar{\rho}\,\tilde{\tilde{\vec V}}\,\tilde{\vec g}$ и $\overline{\rho\vec V\,\vec g^{\,*}}$, осредненные по полушариям в слое от 0 до 100 км

Скорость обмена	Полушарие	Северное		Южное	
	Экстремальные вариации метеовеличин	Положительные	Отрицательные	Положительные	Отрицательные
$\bar{\rho}\,\tilde{\tilde{\vec V}}\,\tilde{\vec g}$	Январь	0,540	–0,395	0,677	–0,552
	Июль	0,347	–0,285	0,935	–0,708
$\overline{\rho\vec V\,\vec g^{\,*}}$	Январь	–0,063	0,051	0,032	–0,027
	Июль	–0,015	0,011	0,069	–0,056

Таблица 4.4.2

Скорости обмена $\overline{\rho}\,\tilde{\tilde{V}}\,\tilde{\tilde{g}}$ и $\overline{\rho\vec{V}\,\vec{g}^{*}}$,
осредненные по полушариям в слое от 0 до 15 км

Скорость обмена	Полушарие	Северное		Южное	
	Экстремальные вариации метеовеличин	Положительные	Отрицательные	Положительные	Отрицательные
$\overline{\rho}\,\tilde{\tilde{V}}\,\tilde{\tilde{g}}$	Январь	2,559	–1,959	3,397	–2,801
	Июль	1,757	–1,454	4,413	–3,479
$\overline{\rho\vec{V}\,\vec{g}^{*}}$	Январь	–0,319	0,268	0,188	–0,156
	Июль	–0,082	0,064	0,362	–0,293

В южном полушарии по сравнению с северным скорости обмена кинетической энергией выше, за исключением скорости $\overline{\rho\vec{V}\,\vec{g}^{*}}$ в январе. При экстремальных вариациях метеовеличин порядок скорости $\overline{\rho}\,\tilde{\tilde{V}}\,\tilde{\tilde{g}}$ в южном полушарии больше, чем в северном на 70 – 80 %. Порядок скорости $\overline{\rho\vec{V}\,\vec{g}^{*}}$ в южном полушарии зимой такой же, как в северном, а летом примерно в 2 раза выше. Следовательно, интенсивность гравитационной циркуляции в южном полушарии выше, чем в северном.

Интенсивность обмена $\bar{B}_{g}$ с доступной лабильной энергией зонально осредненной циркуляции выше интенсивности обмена K^{*} с доступной лабильной энергией незональных процессов на порядок. При этом имеет место, как прямой переход энергии, так и обратный, что не отражено в существующих схемах трансформации энергии в атмосфере.

Согласно диаграмме превращений энергии в атмосфере северного полушария за 1958 – 1963 гг. (по А. Оорту, Дж. Пеиксото) /12, 15/ кинетическая энергия ΔY_1 обменивается с доступной лабильной энергией зонально осредненного состояния со скоростью 0,3 Вт/м^2 в июле и 0,1 Вт/м^2 в январе. Обмен кинетической энергией K^{*} с доступной лабильной энергией незональных процессов составляет 1,3 Вт/м^2 в июле и 3,4 Вт/м^2 в январе.

Максимальные по модулю средние значения $\overline{\rho\vec{V}\,\vec{g}^{*}}$ из табл. 4.4.1 (4.4.2) составляют примерно 10 % от значений скорости обмена K^{*} с доступной лабильной энергией незональных процессов.

Максимальные по модулю средние значения $\overline{\rho}\,\tilde{\tilde{\vec V}}\,\tilde{\tilde{\vec g}}$ в июле примерно равны, а в январе примерно в 5 раз больше значений скорости обмена $\overline{K}$ с доступной лабильной энергией зонально осредненной циркуляции. Экстремальные значения $\overline{\rho\vec V\,\vec g^{*}}$ в северном полушарии составляют –1,5 и 1,5 Вт/м^2, а в южном –1,0 и 1,4 Вт/м^2. Экстремальные значения $\overline{\rho}\,\tilde{\tilde{\vec V}}\,\tilde{\tilde{\vec g}}$ в умеренных и высоких широтах северного полушария составляют –6,5 и 7,9 Вт/м^2, в тропической зоне –4,6 и 4,2 Вт/м^2, а в умеренных и высоких широтах южного полушария –19,2 и 24,4 Вт/м^2. Приведенные значения превышают данные диаграммы /12,15/ на порядок.

Полученные результаты требуют уточнения и осмысления, однако, несомненно то, что общепринятая в настоящее время схема преобразования энергии в крупномасштабных атмосферных движениях требует уточнения и дополнения.

Глава 5
МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ УЧЕТА НЕОДНОРОДНОСТИ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ ПРИ РАЗРАБОТКЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ АТМОСФЕРЫ

5.1. ОБОСНОВАНИЕ ВЫБОРА МОДЕЛИ ФИГУРЫ ЗЕМЛИ И СИСТЕМ КООРДИНАТ

Учет влияния неоднородности поля силы тяжести в уравнениях гидродинамики не является тривиальной задачей. При ее решении определяющим обстоятельством является выбор отсчетной поверхности, принимаемой за уровенную. Как было показано в гл. 3, 4, ее удачный выбор с учетом условий решаемой задачи может позволить сделать вариации влияющих факторов малыми величинами, что обеспечивает упрощение и корректность этой задачи.

Из анализа результатов, описанных в гл. 3, следует, что в качестве отсчетной поверхности для покомпонентного представления векторных уравнений гидродинамики можно использовать квазигеоид, ОЗЭ, сферу. Напомним, что различия между поверхностями квазигеоида и ОЗЭ (превышения) по абсолютной величине достигают 100 м. Редукция климатических полей давления с ОЗЭ на квазигеоид приводит к поправкам давления за счет превышений до 9 гПа. Различия между ОЗЭ и сферой на два порядка больше: на экваторе ОЗЭ на 7,136 км выше сферы, а на полюсах – наоборот – сфера на 14,249 км выше ОЗЭ. Порядок редуцированного на сферу давления будет составлять на экваторе и на полюсах сотни гПа. Разумеется, карты таких полей не имеют никакой практической значимости, ибо их анализ невозможен.

Наконец, в сложившейся практике объективного анализа, синоптического и численного прогноза полей метеовеличин, как было отмечено в п. 2.2.3, используется поле приземного давления, отвечающее распределению давления на ОЗЭ, а не на уровне моря (квазигеоиде). Это обстоятельство представляется весьма значимым: при выборе поверхности ОЗЭ в качестве отсчетной поверхности не требуется каких-либо модификаций схем численного анализа исходной метеоинформации. К тому же применение ОЗЭ в качестве отсчетной поверхности позволяет основные соотношения, используемые для расчета силы тяжести и ее потенциала, записать в виде, принятом в метеорологических задачах.

Поэтому в качестве основной отсчетной поверхности следует рекомендовать поверхность ОЗЭ. При использовании квазигеоида или сферы необходимо проводить предварительную редукцию полей метеовеличин к этим поверхностям. Кроме этого, непосредственное применение сферы, очевидно, методически наименее оправдано

В соответствии с выбранной моделью фигуры Земли – ОЗЭ – необходимо ввести системы координат для представления уравнений гидродинамики. Как показано в гл.3, в этом случае целесообразно использовать локальную декартову или эллипсоидальную системы координат. При этом может применяться различное представление вертикальной координаты. Поэтому далее будут изложены постановки задач математического моделирования атмосферы при использовании разных систем координат. Рассмотрены возможности упрощения исходных систем уравнений, в том числе путем приближенного перехода к другим (традиционно используемым) системам координат, менее точным, но более простым и удобным, а также модель согласованного расчета требуемых характеристик неоднородного поля силы тяжести.

5.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ ДЛЯ ОГРАНИЧЕННОЙ ТЕРРИТОРИИ

5.2.1. Локальная декартова система координат

В локальных декартовых координатах уравнения гидродинамики имеют форму (3.3.1).

В ней по сравнению с обычной формой уравнений присутствуют тангенциальные составляющие силы тяжести.

Для замыкания эту систему уравнений необходимо дополнить уравнениями состояния и притока тепла. В итоге имеем:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 2(\omega_y w - \omega_z v) = F_x + g_x - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + 2\omega_z u = F_y + g_y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}, \tag{5.2.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} - 2\omega_y u = F_z + g_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial \rho u}{\partial x}+\frac{\partial \rho v}{\partial y}+\frac{\partial \rho w}{\partial z}=0.$$

$$P=\rho R T,$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{c_p \rho}\frac{\vartheta}{T}\varepsilon,$$

где ϑ – потенциальная температура;

c_p – удельная теплоемкость при постоянном давлении;

ε – приток тепла к единице объема;

F_X, F_Y, F_Z – компоненты силы вязкости.

При рассмотрении процессов во влажной атмосфере эти уравнения необходимо дополнить уравнениями переноса и диффузии водяного пара, жидкой влаги и кристаллов льда [4, 7].

Система уравнений гидротермодинамики (5.2.1) замкнута и имеет единственное решение, если заданы начальные и граничные условия, а также тангенциальные составляющие силы тяжести.

При моделировании крупномасштабных процессов система (5.2.1) может быть значительно упрощена за счет использования гидростатического приближения.

5.2.2. Системы изобарических и сигма-координат

В изобарических координатах уравнения гидродинамики (при условии гидростатичности) имеют форму (3.5.11). Отличие этих уравнений от обычной их формы состоит в наличии тангенциальных составляющих силы тяжести в уравнениях горизонтального движения и индивидуальной производной от натурального логарифма вертикальной проекции силы тяжести. Для замыкания системы уравнений (3.5.11) необходимо привлечь (в предположении сухой атмосферы) уравнения состояния и притока тепла. В итоге получим:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+2(\omega_y \tau-\omega_z v)= F_x + g_x + g_z\frac{\partial h}{\partial x},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+2\omega_z u = F_y + g_y + g_z\frac{\partial h}{\partial y}, \qquad (5.2.2)$$

$$0 = g_z-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial h},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial P}=\frac{1}{g_z}\left(\frac{\partial g_z}{\partial t}+u\frac{\partial g_z}{\partial x}+v\frac{\partial g_z}{\partial y}+\tau\frac{\partial g_z}{\partial P}\right),$$

$$P=\rho RT,$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{c_p\rho}\frac{\vartheta}{T}\varepsilon,$$

где h – высота изобарической поверхности;

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+\tau\frac{\partial}{\partial P}; \qquad \tau=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t}.$$

При моделировании крупномасштабных атмосферных процессов система (5.2.2) может быть упрощена за счет пренебрежения изменением g_z во времени.

Если начальные и граничные условия заданы и известны проекции силы тяжести, то алгоритм решения системы уравнений гидротермодинамики (5.2.2) ничем не будет отличаться от обычного.

Все вышеотмеченное справедливо и в отношении уравнений гидродинамики в сигма-координатах (3.5.15).

В случае отказа от использования гидростатического приближения уравнения гидродинамики в изобарических координатах имеют форму (3.5.14). Для замыкания этой системы уравнений также необходимо привлечь уравнения состояния и притока тепла. В итоге получим:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+2(\omega_y\tau-\omega_z v)=F_x+g_x+g_z^2\rho\frac{\partial h}{\partial P}\frac{\partial h}{\partial x},$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+2\omega_z u=F_y+g_y+g_z^2\rho\frac{\partial h}{\partial P}\frac{\partial h}{\partial y},$$

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}-2\omega_y u=F_z+g_z\left(1-g_z\rho\frac{\partial h}{\partial P}\right). \tag{5.2.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \tau}{\partial P}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\ln\left(g_z^2\rho\frac{\partial h}{\partial P}\right),$$

$$P=\rho RT,$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{c_p\rho}\frac{\vartheta}{T}\varepsilon.$$

Если пренебречь локальным изменением во времени члена $g_z^2 \rho \frac{\partial h}{\partial P}$, то решение системы (5.2.3) может строиться с помощью обычно применяемых алгоритмов. Иначе алгоритм решения данной системы уравнений может быть следующим.

Для расчета множителя $g_z \rho \frac{\partial h}{\partial P}$, учитывающего эффект негидростатичности и фигурирующего во всех уравнениях гидродинамики, следует вначале решать уравнение неразрывности, а затем остальные эволюционные уравнения. Оправдано также применение методов расщепления [3–5] к решению данной системы уравнений.

При описании крупномасштабных атмосферных процессов для упрощения рассматриваемой системы уравнений можно использовать гидростатическое приближение. Тогда (5.2.3) переходит в систему уравнений (5.2.2).

Эти же замечания справедливы и в отношении уравнений гидродинамики в сигма-координатах (3.5.17).

5.3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АТМОСФЕРЫ ДЛЯ ПРОЦЕССОВ ГЛОБАЛЬНОГО МАСШТАБА

Для моделирования атмосферных процессов глобального масштаба целесообразно использовать систему уравнений гидродинамики в эллипсоидальной системе координат в форме (3.4.11), которую необходимо дополнить уравнениями состояния и притока тепла:

$$\frac{dw}{dt} - 2\omega \sin\theta\, u - \frac{v^2}{R_M \gamma} - \frac{u^2}{R_B \gamma} = F_\Phi + g_\Phi - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial \Phi};$$

$$\begin{aligned} &\frac{dv}{dt} - \frac{u^2}{R_M}\operatorname{ctg}\theta + \frac{wv}{R_M \gamma} - 2\omega\cos\theta\, u - \frac{u^2}{R_M R_B} r_{BЭ}^3 E = \\ &= F_B + g_\theta - \frac{1}{\rho R_M}\frac{\partial P}{\partial \theta}; \end{aligned} \qquad (5.2.4)$$

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + \frac{uw}{R_B \gamma} + \frac{uv}{R_M}\operatorname{ctg}\theta + 2(\omega\cos\theta\, v + \omega\sin\theta\, w) + \frac{uv}{R_M R_B} r_{BЭ}^3 E = \\ &= F_\lambda + g_\lambda - \frac{1}{\rho R_B \sin\theta}\frac{\partial P}{\partial \lambda}; \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{R_M R_B}\frac{\partial}{\partial\Phi}\left(\rho w R_M R_B\right)+\frac{1}{R_M\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho v\sin\theta\right)+$$

$$+\frac{1}{R_B\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\rho u\right)+\frac{\rho v}{R_M R_B}r_{BЭ}^{3}E=0,$$

$$P=\rho RT,$$

$$\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{c_p\rho}\frac{\vartheta}{T}\varepsilon,$$

где $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+w\frac{\partial}{\partial\Phi}+\frac{v}{R_M}\frac{\partial}{\partial\theta}+\frac{u}{R_B\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}$.

R_M, R_B – радиусы кривизны по широте и долготе;

$E=\frac{e^2}{2a}\sin(\pi-\theta)$;

a – средний радиус Земли;

e – эксцентриситет эллипса.

Учет влияния неоднородного поля силы тяжести здесь осуществляется через ее составляющие в уравнениях движения и через радиусы кривизны R_M, R_B , определяемые геометрией ОЗЭ.

Для решения системы уравнений (5.2.4) могут быть использованы алгоритмы, применяемые при решении уравнений в сферических координатах.

Систему уравнений (5.2.4) можно упростить за счет физических и метрических упрощений. К первым относятся использование гидростатического приближения и предположения о несжимаемости атмосферы. Метрические упрощения связаны с трансформацией ОЗЭ в сферу радиуса r, при этом $R_M = R_B = r$ и система (5.2.4) вырождается в систему уравнений гидротермодинамики в сферических координатах (см. п. 3.4.4). Однако при этом следует помнить, что все рассматриваемые поля относятся к уровенной поверхности уровенного эллипсоида, а не сферы (см. п.2.3.3).

5.4. МОДЕЛЬ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

5.4.1. Структура модели

Для вышерассмотренных моделей атмосферы могут потребоваться такие характеристики неоднородного поля силы тяжести, как составляющие (проекции) силы тяжести на оси выбранной системы координат и главные радиусы кривизны. Однако последние легко определяются с помощью формул (1.3.4), (1.3.5). Если производные по горизонтальным координатам от тангенциальных составляющих рассчитывать методом разностей, то достаточным будет наличие полей проекций силы тяжести на оси выбранной системы координат.

Модель неоднородного поля силы тяжести, позволяющая рассчитывать проекции силы тяжести для использования при решении задач численного моделирования атмосферы, должна удовлетворять некоторым требованиям, вытекающим из особенностей гидродинамических моделей. При этом модель должна представлять неоднородное поле силы тяжести во внешнем пространстве относительно ОЗЭ (в зависимости от разрешения модели); модель должна позволять рассчитывать проекции силы тяжести с требуемой (различной) точностью; модель должна позволять учитывать дополнительные (нестационарные) факторы, влияющие на силу тяжести.

С учетом этих требований представляется целесообразным расчет проекций силы тяжести осуществлять по следующей схеме:

$$\vec{g} = \nabla W = \nabla W_o + \nabla T_A + \nabla T_{LC} + \nabla T_{ATM} + \nabla T_M ,$$

или

$$\vec{g} = \vec{\gamma} + \vec{g}_A + \vec{g}_{ATM} + \vec{g}_{LC} + \vec{g}_M ,$$

где индексы A, ATM, LC, M у возмущающих потенциалов T означают их обусловленность соответственно аномалиями гравитационного поля Земли, влиянием атмосферы, влиянием Луны и Солнца, влиянием прочих малых факторов (см. табл. 1.2). Учет эффекта Этвеша в уравнениях гидродинамики осуществляется сохранением члена 2ω *и* $\sin\theta$ в третьем уравнении движения. Нормальная сила тяжести $\vec{\gamma}$ обусловлена нормальным потенциалом ОЗЭ W_o.

Следовательно, модель неоднородного поля силы тяжести должна предусматривать расчеты нормальной силы тяжести, проекций аномалий силы притяжения Земли и при необходимости расчет нестационарных составляющих силы тяжести. С учетом обеспечения возможности варьирования точности расчетов целесообразно предусмотреть использование:

- формул для нормальной силы тяжести, обобщенных на случай ее уточненного представления;
- разложения проекций силы притяжения Земли, обусловленной аномальностью гравитационного поля Земли, в ряд по сферическим функциям;
- выражений для поправок на влияние атмосферы;
- выражения для поправок на влияние Луны и Солнца.

Учетом других малых факторов, как представляется из результатов оценки влияния неоднородного поля силы тяжести на атмосферу, можно пренебречь.

Разумеется, точность расчетов должна быть взаимно согласована для обеспечения корректности представления неоднородного поля силы тяжести.

Расчет проекций силы притяжения, обусловленной аномальностью гравитационного поля Земли, на основе разложения в ряд сферических функций до 36-го порядка включительно подробно рассмотрен в п. 1.5.1. Учет лунно-солнечных возмущений описан в п. 1.5.3. Уточненный расчет нормальной силы тяжести и учет влияния атмосферы, а также возможность повышения точности расчета возмущающего потенциала, обусловленного аномальностью гравитационного поля Земли, рассматриваются ниже.

В заключение отметим следующее.

Составляющие силы притяжения аномального гравитационного поля Земли представляются в виде проекций на оси сферической системы координат, а нормальная сила тяжести – в геодезической системе. Для математического моделирования атмосферы проекции силы тяжести необходимо представить в системе эллипсоидальных или локальных декартовых координат.

Для представления проекций силы тяжести в эллипсоидальной системе координат целесообразно использовать результаты п. 1.6.1. Учитывая, что $\theta = \pi /2 - B$, с помощью рис. 1.1 нетрудно получить искомые соотношения:

$$g_{\Phi} = -(\gamma - g_r \cos\alpha) + g_{\varphi}\sin\alpha,$$

$$g_{\theta} = -g_{\varphi}\cos\alpha + g_r\sin\alpha,$$

$$g_{\lambda}(\theta, \lambda, h) = g_{\lambda}(\varphi, \lambda, r).$$

где $\alpha = B - \varphi$;

B – геодезическая широта;

θ – дополнение до геодезической широты;

φ – геоцентрическая широта;

$$\gamma = -\frac{\partial W_0}{\partial n};\quad g_r = \frac{\partial T}{\partial r};\quad g_{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial \varphi};\quad g_{\lambda} = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial T}{\partial \lambda};$$

n – внешняя нормаль к поверхности ОЗЭ.

Для представления проекций силы тяжести в локальной декартовой системе координат достаточно положить

$$g_z = g_{\Phi},\ g_y = -g_{\theta},\ g_x = g_{\lambda}.$$

5.4.2. Уточненное представление нормальной силы тяжести

Рассмотрим возможности уточнения нормальной силы тяжести по сравнению с формулами в п. 1.4, а также ее представления во внешнем по отношению к ОЗЭ пространстве.

Нормальная сила тяжести на поверхности ОЗЭ γ_0 в зависимости от геодезической широты B может быть представлена с точностью порядка третьей степени сжатия ОЗЭ [2]:

$$\gamma_o \approx \gamma_e\,[1 + (\beta_2\sin^2 B + \beta_4\sin^4 B + \beta_6\sin^6 B],$$

где

$$\beta_2 = 2q - \frac{3}{2}J_2 + \frac{27}{28}q^2 - \frac{117}{14}J_2 q + \frac{739}{392}q^3 - \frac{1923}{196}J_2 q^2 + \frac{207}{49}J_2^2 q;$$

$$\beta_4 = \frac{9}{8}q^2 - \frac{9}{8}J_2^2 + 3J_2 q - \frac{9}{28}q^3 - \frac{36}{7}J_2 q^2 - \frac{351}{28}J_2^2 q;$$

$$\beta_6 = \frac{7}{8}q^3 - \frac{27}{16}J_2^3 + \frac{81}{16}J_2 q^2 + \frac{27}{4}J_2^2 q;$$

$$\gamma_e = \frac{fM}{\alpha_e^2}\left(1+\frac{3}{2}J_2 - q + \frac{27}{8}J_2^2 - \frac{9}{56}q^2 + \frac{9}{14}J_2 q + \frac{135}{16}J_2^3 - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{588}q^3 + \frac{123}{49}J_2^2 q - \frac{83}{784}J_2 q^2\right);$$

$$\alpha = \frac{3}{2}J^2 + \frac{1}{2}q + \frac{9}{8}J_2^2 - \frac{11}{56}q^3 - \frac{3}{14}J_2 q + \frac{9}{98}\left(J_2^2 + q^2\right)q +$$

$$+\frac{27}{16}J_2^3 + \frac{93}{784}J_2 q^3;$$

$$q = \frac{\alpha_e^3\omega^2}{fM};$$

γ_0 – нормальная составляющая силы тяжести на поверхности ОЗЭ;
J_2 – гармонический коэффициент второй степени;
γ_e – нормальная сила тяжести на экваторе ОЗЭ;
α_t – сжатие ОЗЭ;
fM – геоцентрическая гравитационная постоянная.

Учитывая, что высота z по сравнению с экваториальным радиусом α_e является малой величиной, можно разложить γ в ряд Тейлора и ограничиться первыми членами разложения:

$$\gamma = \gamma_0 + \frac{\partial\gamma}{\partial\bar{z}}\bar{z} + \frac{\partial^2\gamma}{\partial\bar{z}^2}\frac{\bar{z}^2}{2} + \ldots,$$

где $\bar{z} = \dfrac{z}{\alpha_e}$.

Введя обозначения

$$\frac{\partial\gamma}{\partial\bar{z}} = -K_1; \quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2\gamma}{\partial\bar{z}^2} = K_2,$$

получим

$$\gamma = \gamma_0 - K_1\bar{z} + K_2\bar{z}^2.$$

Величины K_1 и K_2 можно рассчитать по формулам [8]:

$K_1 = N_0 + N_2 \sin^2 B + N_4 \sin^4 B;$

$K_2 = M_0 + M_2 \sin^2 B;$

$N_0 = 2a_e\omega^2 + \gamma_e\left(2 + e^2 + e^4\right);$

$$N_2 = \frac{\gamma_e}{2}\left(4\beta_2 - 4e^2 - 3e^4 + 2e^2\beta\right);$$

$$N_4 = \frac{\gamma_e}{4}\left(8e^2\beta_2 - 8\beta_4 - e^4\right);$$

$$M_0 = 3\,\gamma_e\,;\; M_2 = 3\gamma_e\,(\beta_2 + e^2);\; e^2 = 2\,\alpha - \alpha^2\,.$$

Таким образом, точная формула, позволяющая вычислять нормальную силу тяжести в системе геодезических координат, приобретает следующий вид:

$$\gamma = \gamma_e\left(1 + \beta_2 \sin^2 B + \beta_4 \sin^4 B + \beta_6 \sin^6 B\right) -$$
$$- \left(N_0 + N_2 \sin^2 B + N_4 \sin^4 B\right)\frac{z}{a_e} + \left(M_0 + M_2 \sin^2 B\right)\frac{z^2}{a_e^2}.$$

Помимо высокой точности, полученная формула является универсальной в том смысле, что при изменении (уточнении) фундаментальных постоянных (см. табл. 1.4) ее вид не изменяется. А в формулах нормальной силы тяжести, описанных в п. 1.3.2, требуется пересчет входящих в них коэффициентов.

На основе полученной формулы можно получить ряд менее точных, но более простых формул, в частности, описанных в [10].

5.4.3. Учет влияния атмосферы на потенциал притяжения

Современная точность представления потенциала Земли и его производных позволяет учесть влияние притяжения атмосферы. С этой целью в гравиметрии [1] используется понятие нормальной атмосферы, по сути совпадающее с понятием стандартной атмосферы. Поправка на влияние нормальной атмосферы определяется гравитационной постоянной атмосферы fM_α и составляет на физической поверхности Земли – 0,9 мГал. При решении метеорологических задач может потребоваться знание зависимости этой поправки от высоты. В табличном виде такая зависимость приведена в [1]. Рассмотрим получение в аналитическом виде зависимости от высоты поправки на влияние нормальной атмосферы.

Сначала выведем формулу для расчета массы атмосферы.

В сферическом приближении атмосфера есть шаровой слой толщиной $z << R$, где R – средний радиус Земли. Тогда на внутреннюю точку притяжение внешнего по отношению к этой точке шарового слоя не действует [1].

Выделим в пределах z шаровой слой от h до H. Тогда массу атмосферы, заключенную в нем, можно определить по формуле:

$$M_{\alpha}(H,h)=\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{h}^{H}\rho(z)(R+z)\cos B\,\mathrm{d}\lambda(R+z)\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}z\ .$$

Выполним следующие преобразования:

$$M_{\alpha}(H,h)=\int\limits_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\lambda\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\mathrm{d}B\int\limits_{h}^{H}\rho(1+\frac{z}{R})^2\mathrm{d}z=-4\pi R^2\int\limits_{h}^{H}(1+\frac{z}{R})^2\ \frac{1}{\mathrm{g}}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}z}\mathrm{d}z.$$

Учитывая результаты п. 5.4.2, ограничимся представлением ускорения свободного падения в виде

$$g=g_h\left[1-\frac{2(1-q)}{\alpha_e}z\right]\approx g_0\left(1-\frac{2z}{R}\right),$$

где g_h – значение g на высоте h от поверхности Земли. Так как

$$\left(1+\frac{z}{R}\right)^2\left(1-\frac{2z}{R}\right)^{-1}\approx\left(1+\frac{2z}{R}\right)^2\approx 1+\frac{4z}{R},$$

то, учитывая уравнение статики, получаем

$$M_{\alpha}(H,h)=-\frac{4\pi R^2}{g_h}\int\limits_{P_h}^{P_H}\left(1+\frac{4z}{R}\right)\mathrm{d}P=-\frac{4\pi R^2}{g_h}\left[P_H-P_h+\frac{4}{R}\frac{H-h}{2}(P_H-P_h)\right].$$

Окончательно формула для расчета массы атмосферы, заключенной в слое от h до H, записывается в виде:

$$M_{\alpha}(H,h)=\frac{4\pi R^2}{g_h}(P_h-P_H)\left(1+2\frac{H-h}{R}\right).$$

Как известно, в слое от 0 до 30 км сосредоточено 99% массы атмосферы. Поэтому точность полученной формулы можно оценить применительно к этому слою. Подстановка численных значений:

P_h = 1013 гПа, $P_{н}$ = 11,84 гПа, H = 30 км, h = 0 позволяет получить

$$M_\alpha(30;\,0) = 5{,}256 \cdot 10^{18}\ \text{кг}.$$

Вся масса атмосферы оценивается в пределах от $5{,}245 \cdot 10^{18}$ кг до $5{,}27 \cdot 10^{18}$ кг [6, 11]. Поэтому точность полученной формулы следует признать удовлетворительной.

При практическом использовании этой формулы целесообразно связать P_h и h, P_H и H. Положим $H = 0$ (тогда $P_h = P_0$) и воспользуемся барометрической формулой для случаев изотермичности и политропности [6] соответственно

$$P = P_0 \exp\left(-\frac{gH}{R_r T_0}\right),$$

$$P = P_0 \left(\frac{T_0 - \gamma_T H}{T_0}\right)^{\frac{g}{R_r \gamma_T}},$$

где R_r – удельная газовая постоянная;

γ_T – вертикальный градиент температуры.

Для условий стандартной атмосферы P_z и z будут связаны соотношением

$$P_z = \begin{cases} 1013\,(1\text{-}0{,}02255z)^{5{,}257}, & \text{если}\ \ 0 < z \le 11\,\text{км}, \\ 227\exp\left[-0{,}1577(z-11)\right], & \text{если}\ 11 < z \le 30\,\text{км}. \end{cases}$$

С помощью этих соотношений легко осуществляется учет влияния атмосферы при проведении расчета нормального и возмущающего гравитационных потенциалов, а также проекций силы притяжения в точке на высоте H от поверхности ОЗЭ. Для этого достаточно вместо гравитационной постоянной атмосферы fM_α использовать выражение $fM_\alpha(H,\,0)$ или χfM_α, где $\chi = M_\alpha(H;0)/M_\alpha(30;0)$.

Результаты расчета поправки на влияние нормальной атмосферы при расчете нормальной силы тяжести с помощью последнего выражения приведены в табл. 5.1. Сравнение этих данных с табличными в [1] свидетельствует о высокой точности расчетов искомой поправки.

Выше 30 км поправка на влияние нормальной атмосферы менее 0,01 мГал и ею можно пренебречь.

Таблица 5.1

Поправки на влияние нормальной атмосферы

Высота H, км	Значение поправки, мГал	Высота H, км	Значение поправки, мГал	Высота H, км	Значение поправки, мГал
0	–0,861	10	–0,228	20	–0,049
2	–0,677	12	–0,168	22	–0,036
4	–0,526	14	–0,123	24	–0,026
6	–0,404	16	–0,091	26	–0,019
8	–0,306	18	–0,067	29	–0,013

5.4.4. Уточнение представления возмущающего потенциала, обусловленного аномальным гравитационным полем Земли, на основе экстраполяции Ричардсона

Представление гравитационного поля Земли рядом сферических функций дает надежный результат лишь при использовании низких гармоник. Как отмечалось в п.1.5, порядок разложения связан с уровнем осреднения измеренных значений ускорения свободного падения. Так, разложение 36-го порядка соответствует использованию осредненных значений ускорения свободного падения в трапециях со сторонами, равными 5° по широте (на экваторе) и долготе. Повышение порядка разложения ведет к ошибкам определения коэффициентов высоких порядков, превосходящим само значение коэффициентов. Помимо этого, повышение порядка разложения влечет существенное увеличение времени расчетов.

Для районов Земли, хорошо освещенных данными гравиметрических измерений, эффективно может использоваться метод представления гравитационного поля Земли системой точечных масс. По сравнению с разложением по сферическим функциям этот метод требует значительно меньшего времени на проведение расчетов. Эти обстоятельства необходимо учитывать при численном моделировании атмосферы для ограниченных территорий. При глобальном моделировании применение систем точечных масс будет ограничено также уровнем осреднения измеренных значений ускорения свободного падения.

Ниже рассматривается возможность уточнения представления возмущающего потенциала, обусловленного аномальным гравитационным полем Земли, на основе экстраполяции Ричардсона.

Известно [1, 2], что во всем внешнем пространстве возмущающий потенциал Земли удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta T \equiv \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

и на бесконечности является регулярной функцией.

Для нахождения возмущающего потенциала T это дифференциальное уравнение с заданными граничными условиями необходимо редуцировать к задаче линейной алгебры, размерность которой зависит от параметра редукции (от шага разностной сетки). Понятно, что для получения более точного численного решения необходимо уменьшать шаг разностной сетки. Это ведет к увеличению размерности решаемой задачи и к существенному увеличению объема вычислительных работ.

Фундаментальные исследования Ричардсона [3] позволили выдвинуть принципиально иной подход к повышению точности. Его идея заключалась в следующем.

Пусть решение некоторого дифференциального уравнения формально ищется с помощью численного метода, имеющего первый порядок точности относительно шага сетки h. Тогда, вообще говоря, можно утверждать, что решение данного дифференциального уравнения на сетке с шагом $h/2$ будет в два раза точнее первого, а на сетке с шагом $h/3$ – в три раза и т.д.

Допустим, что решение исходной дифференциальной задачи обладает достаточной степенью гладкости. Тогда, используя разложение в ряд Тейлора по параметру h, можно доказать, что линейная комбинация трех приближенных решений h, $h/2$, $h/3$ приводит к точности порядка 10^{-3}. Без использования данного комбинированного метода для достижения такой же точности потребовалось бы решать задачу с параметром сетки $\sim 10^{-3}$.

Именно в использовании набора приближенных решений на последовательности сеток и состоит основная идея метода экстраполяции Ричардсона для получения решения с повышенной точностью. Рассмотрим возможность использования метода экстраполяции Ричардсона для построения высокоточных моделей возмущающего потенциала Земли.

Исходя из свойств возмущающего потенциала Земли, рассмотрим следующую задачу.

Пусть $\partial\Omega$ – поверхность, ограничивающая область Ω (для простоты возьмем куб). Необходимо решить задачу Дирихле для уравнения

$$\begin{cases} \Delta T = 0 & \text{в } \Omega, \\ T = f(x, y, z) & \text{на } \partial\Omega. \end{cases}$$

Требуется найти функцию T, которая определена и непрерывна в замкнутой области $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Граничные условия зададим в виде

$$\partial\Omega(x, y, z) = (1+z)\left[x^2 + y^2) + (x^2 + y^2)^{-1}\right]\left\{\cos\left[4\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sin\left(4\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)\right]\right\}.$$

Эта функция является частным решением трехмерного уравнения Лапласа.

Аппроксимируем оператор Лапласа на регулярной сетке точек Ω_h с шагом h стандартным образом [3]. Для решения полученной разностной задачи Дирихле воспользуемся методом верхней релаксации. Решение будем искать на последовательности сеток $\{\Omega_{hk}\}$ с параметрами $h_k = h/k$, где $k = 1, \ldots, m + 1$.

Из полученных результатов составим линейную комбинацию:

$$T^{(m)} = \sum_{k=1}^{m+1} \zeta_k T_k,$$

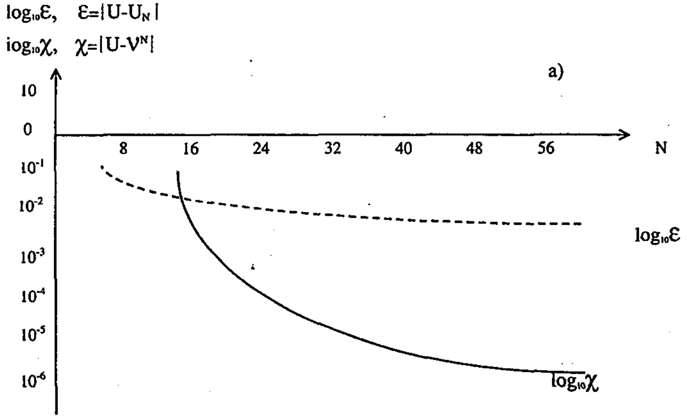
где T_k есть решение на сетке Ω_{hk}, а ζ_k определяется из системы:

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{m+1} \zeta_k = 1, \\ \sum\limits_{k=1}^{m+1} \zeta_k h_k^j = 0, \quad j=1, \ldots, m. \end{cases}$$

Результаты вычислений в графической форме представлены на рис. 5.1.

Совместный анализ графиков показывает, что данный подход позволяет увеличить точность решения без увеличения временных затрат или уменьшить временные затраты при заданной точности. Так, при экстраполировании на семи сетках достигается точность

$\sim 10^{-6}$, а на самой густой из этих сеток точность решения задачи всего $\sim 10^{-2}$ и при этом требуется времени на 30% больше.



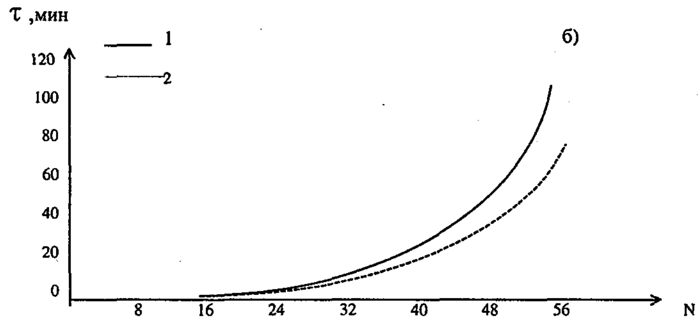


Рис. 5.1. Точность решения (а) и затраты времени (б) на получение экстраполированного решения (1) и решения на сетке с шагом N^{-1} (2)

Проведенное исследование позволяют сделать вывод о возможности построения высокоточных моделей возмущающего потенциала Земли с помощью экстраполяции Ричардсона. Однако для окончательного заключения об эффективности применения экстраполяции Ричардсона необходимо исследовать вопросы чувствительности решения к погрешностям задания граничных условий.

ЛИТЕРАТУРА

К главе 1

1. *Грушинский Н.П.* Основы гравиметрии.– М.: Наука, 1983.– 351с.
2. *Делинджер П.* Морская гравиметрия. – М.: Недра, 1982. – 312с.
3. *Закатов П.С.* Курс высшей геодезии.–М.: Недра, 1964.– 504с.
4. *Математические* модели гравитационного поля Земли // Геофизические условия полета/Учебное пособие. – М.: ВА им. Ф.Э.Дзержинского, 1993, 115с.
5. *Параметры* общего земного эллипсоида и гравитационного поля Земли (параметры Земли 1990 г.) – М.: ВТУ ГШ, РИО, 1991.– 68с.
6. *Пеллинен Л.П.* Высшая геодезия.– М.: Недра, 1978. – 264с.
7. *Солопов Н.Н.* Приближенные формулы различной точности для вычисления нормальной силы тяжести в системе геодезических координат/ Моделирование и определение геофизических полей. – СПб.: РГГМИ, 1996.– с.98–104.
8. *Солопов Н.Н.* О пространственной изменчивости глобального аномального гравитационного поля Земли в диапазоне высот от 0 до 1000 км. – СПб.: РГГМИ, 1996.– с.104–112.
9. *Шимбирев Б.П.* Теория фигуры Земли.– М.: Недра, 1975.– 432с.
10. *Торге В.* Гравиметрия. Пер. с англ.–М.:Мир.–1999.–428с.

К главе 2

1. *Белов П.Н., Борисенков Е.П., Панин Б.Д.* Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 376с.
2. *Волконский Ю.Н., Степанов В.Г.* Уравнения движения атмосферы в «геопотенциальной» и сферической системах координат // Межвузовский сборник.– Л.: ЛГМИ,1995, вып.118.–с.51–57.
3. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. Т.1. М.: Мир, 1986.–400с.
4. *Грушинский Н.П.* Основы гравиметрии.– М.: Наука, 1983.– 351с.
5. *Джеймс А.* Некоторые аспекты глобальной циркуляции атмосферы в январе и июле 1980 г. – В кн.: Крупномасштабные динамические процессы в атмосфере. – М.: Мир, 1988.
6. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. – М.: Физматгиз, 1964. – 504с.
7. *Макоско А.А., Лугин В.Г.* Оценка влияния точности представления гравитационного поля Земли на формирование планетарного поля температуры // Тр. ЦАГИ, 1990, вып.4755.– с.37 – 43.
8. *Макоско А.А., Солопов Н.Н.* О роли гравитационного поля Земли в формировании климатического поля высоты 500 гПа // Тр. ВНИИГМИ–МЦД, 1990, вып. 153. – с.139–144.
9. *Макоско А.А., Солопов Н.Н.* О влиянии точности представления гравитационного поля Земли на прогноз высоты поверхности 500 гПа // Межвузовский сборник.– Л.: ЛГМИ,1990,вып.108.–с.21–26.
10. *Макоско А.А.* О восстановлении климатических зонально осредненных метеовеличин на высотах 30–100 км.//Тр. ВНИИГМИ–МЦД, 1991, вып.157. –с.191–195.
11. *Макоско А.А.* О корреляционных связях между зонально осредненными климатическими значениями метеовеличин и силой тяжести в слое 0–100 км // Межвузовский сборник.– Л.: ЛГМИ, 1992, вып.114. –с.119–124.

12. *Макоско А.А.* О вкладе работы силы тяжести в баланс кинетической энергии турбулентности зональной циркуляции атмосферы // Межвузовский сборник.– Л.: ЛГМИ,1995, вып.118.–с.51–57.
13. *Макоско А.А., Солопов Н.Н., Роскошный В.П.* Влияние возмущающего потенциала Земли на топографию климатического поля давления/ Моделирование и определение геофизических полей. – СПб.: РГГМИ, 1996. – с.98–104.
14. *Математическое* моделирование общей циркуляции атмосферы и океана / Г.И. Марчук, В.П. Дымников, В.Б. Залесный, В.Н. Лыкосов, В.Я. Галин. – Л.: Гидрометеоиздат, 1984. – 302 с.
15. *Марчук Г.И.* Численное решение задач динамики атмосферы и океана.– Л.: Гидрометеоиздат,1974. – 303 с.
16. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 320с.
17. *Матвеев Л.Т.* Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1965. – 876с.
18. *Мезингер Ф., Аракава А.* Численные методы, используемые в атмосферных моделях /Пер. с англ. – Л.: Гидрометеоиздат, 1979. – 136с.
19. *Миякода К.* Численный прогноз и влияние процессов подсеточных масштабов //Теоретические основы прогноза погоды на средние сроки / Пер. с англ. – Л.: Гидрометеоиздат, 1979. – с. 65 – 95.
20. *Миякода К., Сирутис Дж.* Долгосрочные прогнозы //Динамика погоды / Пер. с англ. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988. – с. 65–95.
21. *Монин А.С.* Введение в теорию климата. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982.– 246 с.
22. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. В 2–х т.– М.: ИЛ, т.1, 1958.–930с., т.2, 1960.–885 с.
23. *Рейтенбах Р.Г.* и др. Аналитическое описание четырехмерного поля климата свободной атмосферы над северным полушарием/ ВНИИГМИ – МЦД, 1984, вып. 109. – с. 3–15.
24. *Рудяев Ф.И.* Влияние аномального гравитационного поля Земли на циркуляционные системы атмосферы //ДАН, 1990, т. 310 №6, с. 1345 – 1448.
25. *Садоков В.П., Штейнбок Д.Б.* О применении сопряженных функций в анализе и прогнозе аномалии температуры. – Метеорология и гидрология, 1977, № 10. – с. 15–20.
26. *Хромов С.П., Мамонтова Л.И.* Метеорологический словарь. – Л.: Гидрометеоиздат, 1974. – 568с.
27. *Штейнбок Д.Б.* Об изучении формирования поля температуры методом сопряженных функций.– Метеорология и гидрология, 1979, № 3. – с. 37–42.
28. *Macosco A.A., Panin B.D.* On Influence of Precision of Contribution of Gravity Force Inhomogeneity on Mathematical Modelling of Climatic Pressure Field . – Res. Activ. in Atmos. and Ocean. Model., WMO, Geneva, 1996, № 23, p. 2.25–2.26.
29. *Macosco A.A., Panin B.D.* Estimation of Gravity Force Inhomogeneity Role in Climatic Temperature Field Curculation. – Res. Activ. in Atmos. and Ocean. Model., WMO, Geneva, 1996, № 23, p. 2.19–2.20.
30. *Macosco A.A., Panin B.D.* Numerical Forecast of 500 hPa Surface Height in Inhomogeneous Gravity Force Field. – Res. Activ. in Atmos. and Ocean. Model., WMO, Geneva, 1996, № 23, p. 2.23–2.24.

31. *Macosco A.A., Panin B.D.* Mathematic Modelling of Gravity Force Inhomogeneities Influence on the General Atmospheric Curculation Energetic. – Res. Activ. in Atmos. and Ocean. Model., WMO, Geneva, 1996, № 23, p. 2.21–2.22.
32. *Macosco A.A., Panin B.D., Kousmina S.I.* On Hydrodynamics Equations, Considering Gravity Force Field Inhomogeneity. – Res. Activ. in Atmos. and Ocean. Model., WMO, Geneva, 1996, № 23, p. 2.27–2.28.
33. *Macosco A.A., Solopov N.N.* The Influence of the Earth's Anomalous Gravity Potential on the Topography of the Climatological Baric Field . – Res. Activ. in Atmos. and Ocean. Model., WMO, Geneva, 1998, № 27, p. 2.21–2.22.
34. *Borisenkov J.P.* Gravitation, weather and climate. In Proc. Quo vadimus? Where are we going? XIX General Assembly IUGG.Voncouver, Canada. Aug. 9–22 1987. Grass Austria, 1987.–112 p.

К главе 3

1. *Белов П.Н.* Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 391 с.
2. *ГОСТ 4401–81.* Атмосфера стандартная. Параметры.
3. *Касахара А.* Вычислительные аспекты численных моделей для прогноза погоды и воспроизведения климата // Модели общей циркуляции атмосферы / Пер. с англ. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. – с. 14 – 84.
4. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М. Наука, 1974. – 832 с.
5. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. – М.: Физматгиз, 1964. – 504с.
6. *Монин А.С.* Теоретические основы геофизической гидродинамики. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988. – 424 с.
7. *Сандквист Х.* Вертикальные координаты и способы дискретизации по этим координатам // Численные методы, используемые в атмосферных моделях / Пер. с англ. – Л.: Гидрометеоиздат, 1982. – с. 5–38.
8. *Шимбирев Б.П.* Теория фигуры Земли.– М.: Недра, 1975.– 432с.
9. *Eliassen A.* The qvazistatic equations of motion with pressure as independent variable. geofysiske publikasjoner, 1949, 17, №3, p. 44.
10. *Kasahara A.* Various vertical coordinate systems used for numerical weather prediction. Mon. Wea. Rev., 1967, p.389 – 402.
11. *Phillips N.A.* A coordinate system having some special advantages for numerical forecasting. J.Meteor., 1957, 14 p.184 – 185.
12. *Дирак П.А.М.* Общая теория относительности. Под ред. Д.И.Блохинцева.– М.:Атомиздат. – 1978.–64с.
13. *Панин Б.Д.* Гравитация в задачах гидродинамического моделирования//Тезисы доклада на международном научном конгрессе «Фундаментальные проблемы естествознания».–СПб., 1998. – с.153–154.

К главе 4

1. *Багров Н.А.* Аналитическое представление последовательности метеорологических полей посредством естественных ортогональных составляющих. – Труды ЦИП, 1959, вып.74.

2. *Белов П.Н.* Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 391с.
3. *Бенгтсон Л.* Прогнозы на средние сроки в Европейском центре прогнозов погоды на средние сроки (ЕЦППС) //Динамика погоды/ Пер. с англ. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988. –с.18–64.
4. *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. Т.1. М.: Мир, 1986.–400с.
5. *ГОСТ 4401–81.* Атмосфера стандартная. Параметры.
6. *Громова Г.Г., Федорова Н.Г.* Исследование полей агеострофического ветра в верхней тропосфере Северного полушария / Метеорология и гидрология, 1986, №4. – с.104 – 110.
7. *Гутерман И.Г.* Распределение ветра над северным полушарием. –Л., Гидрометеоиздат, 1965.
8. *Иванов В.Н., Хаин А.П.* О параметрах, определяющих частоту зарождения тропических циклонов. – Изв. АН СССР, ФАО, 1983, т. 19, № 8, с. 787 – 795.
9. *Кочин Н.Е.* Изменение температуры и давления с высотой в свободной атмосфере / Собр. соч., т.1. – М.–Л.: Изд. Академии наук СССР, 1949. – с. 530 – 591.
10. *Лушев Ю.Г., Матвеев Л.Т., Шварев И.М.* Физика верхней атмосферы Земли. – МО СССР, 1973. – 350с.
11. *Матвеев Л.Т.* Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1965. – 876с.
12. *Матвеев Л.Т.* Теория общей циркуляции атмосферы и климата Земли. – Л.: Гидрометеоиздат, 1991. – 296с.
13. *Математическое* моделирование общей циркуляции атмосферы и океана / Г.И. Марчук, В.П. Дымников, В.Б. Залесный, В.Н. Лыкосов, В.Я. Галин. – Л.: Гидрометеоиздат, 1984. – 302 с.
14. *Миякода К.* Численный прогноз и влияние процессов подсеточных масштабов // Теоретические основы прогноза погоды / Пер. с англ. – Л.: Гидрометеоиздат, 1979. – с. 5–79.
15. *Монин А.С.* Введение в теорию климата. — Л.: Гидрометеоиздат, 1982.– 246 с.
16. Хаин А.П. Математическое моделирование тропических циклонов. – Л.: Гидрометеоиздат, 1984. – 248 с.
17. *Школьный Е.П., Майборода Л.А.* Атмосфера и управление движением летательных аппаратов. – Л.: Гидрометеоиздат,1973. – 308с.
18. *Macosco A.A., Panin B.D.* On the Vortisity of Gravitational Wind . – Res. Activ. in Atmos. and Ocean. Model., WMO, Geneva, 1998, № 27, p. 2.14–2.15.
19. *Macosco A.A., Panin B.D., Kousmina S.I.* On the Divergence of Gravitational Wind. – Res. Activ. in Atmos. and Ocean. Model., WMO, Geneva, 1998, № 27, p. 2.16–2.17.
20. *Macosco A.A., Panin B.D., Kousmina S.I.* On the Gravitational Wind . – Res. Activ. in Atmos. and Ocean. Model., WMO, Geneva, 1998, № 27, p. 2.18–2.19.
21. *Macosco A.A., Panin B.D.* On the Kinetic Energy of Gravitational Wind . – Res. Activ. in Atmos. and Ocean. Model., WMO, Geneva, 1998, № 27, p. 2.20.
22. *Macosco A.A., Panin B.D., Kousmina S.I.* Mathematic Modelling of Monsoon Circulation in inhomogeneous Gravity Force Field. – Res. Activ. in Atmos. and Ocean. Model., WMO, Geneva, 1996, № 23, p. 2.29–2.30.
23. *Macosco A.A., Panin B.D., Aniskina O.G.* Study of sensitivity of Hydrodynamic Model of Large-scale Catastrophes Geophysical Consequences Using Equations in variations. – Res. Activ. in Atmos. and Ocean. Model., WMO, Geneva,1997, № 25, p. 2.24–2.26.

24. *Панин Б.Д., Нго Нгок Тхак.* Постановка задачи о трехмерном моделировании тропических циклонов.//Межвузовский сборник трудов ЛПИ(ЛГМИ).– вып.88.–Л.:Изд.ЛПИ(ЛГМИ),1985.–с.12–15.
25. *Панин Б.Д.,Чан Тан Тьен.* О параметризации кучевой конвекции в численной схеме прогноза для тропиков. Сборник научных трудов, посвященный 60–летию СССР. Гидрометеорологическое обеспечение народного хозяйства.– Л.:Изд. ЛПИ (ЛГМИ),1982.–с.16–24.
26. *Панин Б.Д., Нго Нгок Тхак.* Трехмерная модель тропических циклонов. Численная реализация.//Межвузовский сборник научных трудов.–вып.102.– Изд.ЛПИ (ЛГМИ), 1989.–с.12–23.
27. *Нонг Туан Занг.* Анализ факторов, влияющих на зарождение и развитие трипических циклонов./Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Спб, 1995.–15с.

К главе 5

1. *Грушинский Н.П.* Основы гравиметрии.– М.: Наука, 1983.– 351с.
2. *Закатов П.С.* Курс высшей геодезии.–М.: Недра, 1964.– 504с.
3. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1980. – 536 с.
4. *Марчук Г.И.* Численное решение задач динамики атмосферы и океана.– Л.: Гидрометеоиздат,1974. – 303 с.
5. *Марчук Г.И.* Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 320с.
6. *Матвеев Л.Т.* Основы общей метеорологии. Физика атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1965. – 876с.
7. *Матвеев Л.Т.* Динамика облаков. – Л.: Гидрометеоиздат, 1965.
8. *Машимов М.М.* Согласование геодезических и геофизических параметров Земли на эпоху для решения геодинамических задач//Изв. вузов. Геодезия и аэрофотосъемка, 1990, вып.4.– с.30–37.
9. *Параметры* общего земного эллипсоида и гравитационного поля Земли (параметры Земли 1990 г.) – М.: ВТУ ГШ, РИО, 1991.– 68с.
10. *Солонов Н.Н.* Приближенные формулы различной точности для вычисления нормальной силы тяжести в системе геодезических координат/ Моделирование и определение геофизических полей. – СПб.: РГГМИ, 1996.– с.98–104.
11. *Чечкин С.А.* Основы геофизики. – Л.: Гидрометеоиздат,1990. – 288с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

А.А. Макоско, Б.Д. Панин

ДИНАМИКА АТМОСФЕРЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПОЛЕ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Редакторы И.Г. Максимова
Н.И. Афанасьева

ЛР № 020309 от 30.12.96.

Подписано в печать 13.06.02. Формат 60x90 1/16. Гарнитура Times New Roman.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.печ.л. 10,5. Уч.-изд.л. 12,3. Тираж 300 экз. Заказ № 50
РГГМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98.
ЗАО «Лека», 195112, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 68.

84=00