

В.В. Коваленко

ОБЕСПЕЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ
МОДЕЛИРОВАНИЯ И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ
РЕЧНОГО СТОКА
МЕТОДАМИ ЧАСТИЧНО ИНФИНИТНОЙ
ГИДРОЛОГИИ

*Андрею Николаевичу
Коваленку от автора
24.10.2011
В.В.*



Санкт-Петербург
2011

УДК 556.16.06/072

ББК 26.22

К56

Коваленко В.В. Обеспечение устойчивости моделирования и прогнозирования речного стока методами частично инфинитной гидрологии. – СПб.: РГТУМУ, 2011. – 107 с.

ISBN 978-5-86813-297-1

Рецензент: д-р Куасси Би Гессан Арман [Университет Абобо-Аджамье (республика Кот-Д'Ивуар), Региональный отдел университетского исследования в г. Далоа (URES-DALOA)]

В монографии рассматриваются модели с непрерывным и дискретным временем для моделирования и прогнозирования долгосрочных изменений характеристик многолетнего речного стока. Приведены примеры использования двумерных логистических отображений и отображений с дробной нелинейностью. Выявлены диагностические свойства коэффициента автокорреляции при исследовании устойчивости формирования стока. Установлена неизвестная ранее закономерность изменения фрактальной размерности рядов многолетнего годового стока от приземной температуры воздуха. На примере выявления закономерности возникновения низкочастотных колебаний расхода воды в реках показана мотивация зарождения частично инфинитной гидрологии, методы которой использованы в книге.

Предназначена лицам, которые интересуются фундаментальной и прикладной гидрологией и методологией науки, а также студентам и аспирантам.

Kovalenko V.V. Maintenance of stability of modeling and forecasting of a river flow by methods of a partially infinity hydrology. – St. Petersburg, RSHU Publishers, 2011. – 107 pp.

In the monography the models with continuous and discrete time for modeling and forecasting of long-term changes of the characteristics of a long-term river flow are considered. The examples of use of two-dimensional logistic displays and displays with fractional nonlinearity are given. The diagnostic properties of factor of auto correlation are revealed at research of stability of formation of a flow. The law of change of fractal dimension of numbers of a long-term annual flow from air temperature is established unknown earlier. On an example of revealing of law of occurrence of low-frequency fluctuations of the charge of water in the rivers, the motivation of origin of a partially infinity hydrology is shown, which methods are used in the book.

Is intended to the persons, which are interested in a fundamental and applied hydrology and methodology of a science, and also students and post-graduate students.

ISBN 978-5-86813-297-1

© Коваленко В.В., 2011

© Манвелова Т.А., обложка, 2011

© Российский государственный гидрометеорологический университет, 2011

Введение

(мотивация, цели, задачи, методы и содержание исследований)

Ниже представлено достаточно подробное изложение содержания монографии, включая используемую методологию частично инфинитной гидрологии. **Ключевые слова**, характеризующие тематику книги: многолетний речной сток, устойчивость, прогнозирование, диагностирование бифуркационных очагов, логистическое отображение, модель, аттрактор.

Формулировка решаемой проблемы. Действующий в инженерной гидрологии нормативный документ, используемый практически во всех водозависимых отраслях экономики СП 33-101-2003 [35], основан на статистической обработке фактических рядов наблюдений за многолетними видами речного стока (годовой, максимальный, минимальный). Этот свод правил (СП) является итогом длительной (начиная с работ Д.И. Кочерина в 20-х годах XX века) эволюции нормативной документации в области гидрологического обеспечения надежности всевозможных водохозяйственных проектов (строительных – в первую очередь) и в целом до настоящего времени отвечал практическим потребностям. Однако заложенная в нем идея самодостаточности фактических рядов только расходов воды (да еще в предположении их статистической стационарности) давно вызывала опасения. Например, известный гидролог Е.В. Оппоков еще на II Всесоюзном гидрологическом съезде (1928 г.) указал [26], что «сводная работа Д. И. Кочерина по изучению стока для целей гидросиловых установок носит статистический характер без связи с атмосферными осадками и другими факторами стока».

В настоящее время эти опасения актуализированы следующим обстоятельством. В связи с изменением факторов формирования стока (климат; подстилающая поверхность водосборов – вырубка лесов, распашка земель и т. п.) экстраполяция статистически обеспеченных (предшествующими наблюдениями) расходов воды на

период эксплуатации проектируемых сооружений (десятки и сотни лет) становится неправомерной. Нужны не только фактические ряды стока, по которым строятся эмпирические кривые обеспеченности и аппроксимирующие их аналитические распределения, но и математические (генетические по существу) модели формирования статистического режима многолетнего стока, в которые можно было бы вводить характеристики климатических сценариев и подстилающей поверхности водосборов.

Подобная модель была предложена автором [8]. Она базируется на линейном формирующем фильтре, статистически эквивалентным уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), являющимся основной моделью марковских случайных процессов. Выбор именно этой модели продиктован тем обстоятельством, что она имеет устойчивый класс решений в виде распределений семейства кривых К. Пирсона, которые лежат в основе СНиПов и СП (кривые Крицкого–Менкеля – частный случай кривой Пирсона III типа при нулевом левом граничном условии). Этот класс распределений математически описывается решениями уравнения Пирсона, коэффициенты которого (их численные значения определяются начальными моментами наблюдаемых многолетних рядов стока) изначально не имели какого-либо физического (в том числе и гидрологического) смысла и носили «подгоночный» характер. (Варьируя этими коэффициентами, аналитические распределения «подгоняли» под эмпирические.) Вывод уравнения Пирсона как частного случая уравнения ФПК (изначально уравнение Пирсона было получено без всякой связи с уравнением ФПК, которое появилось гораздо позже), приводящего к устойчивому классу решений для моментов, позволил впервые (по крайней мере, в гидрологии, так как в теории автоматического управления этот вывод был сделан несколько десятилетий назад академиком В. С. Пугачевым и его учениками) придать этим коэффициентам ясный гидрометеорологический смысл. Они однозначно связываются с внешними климатическими воздействиями на водосборы и свойствами их подстилающей поверхности. Как следствие этого раскрытия смысла коэффициентов, оказалось возможным моделировать, а главное – прогнозировать формирование статистического режима многолет-

них видов речного стока, опираясь на характеристики климатических сценариев и различные варианты антропогенной деятельности на водосборах. Освоение подобных (генетических) моделей открыло перед стохастической гидрологией возможность решать не только описательные задачи (констатировать по фактическим рядам наблюдений те или иные виды вероятностных распределений), но и задачи прогностические (какие распределения следует ожидать при возможных сценариях изменения климата и интенсивности хозяйственной деятельности).

Освоение новых возможностей породило и новые проблемы. Наличие эволюционных моделей формирования статистического режима многолетнего стока (например, в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов, аппроксимирующих уравнение в частных производных ФПК) позволяет исследовать устойчивость распределений как для различных географических зон при существующем климате, так и в перспективе его возможных изменений. Выяснилось, что почти на половине речных бассейнов, как в России (особенно в южных регионах в зоне недостаточного увлажнения), так и за рубежом, сток формируется неустойчиво – в рамках семейства кривых Пирсона по третьему, а часто и по второму начальным моментам. Визуально это проявляется либо в наличие «толстых хвостов» распределений, либо в полимодальности последних.

Проблемная ситуация, сложившаяся в гидрологии, как раз и заключается в противоречии между онтологическим базисом инженерной гидрологии, основанной на одномодальных асимметричных распределениях (получающихся как аппроксимация эмпирических распределений, так и как решение эволюционной генетической модели, базирующейся на линейном формирующем фильтре), и реальными «толстохвостовыми» и полимодальными распределениями, имеющими место либо в регионах неустойчивости решений подобной модели, либо при некоторых климатических сценариях в любых регионах. В более практическом смысле проблемная ситуация заключается в противоречии между действующими нормативными документами, «смотрящими» на гидрологический мир как статистически застывший (с вытекающими отсюда риска-

ми при принятии управленческих водохозяйственных решений), и реалиями окружающей нас (речные бассейны) климатической и антропогенной действительности (изменчивой и развивающейся).

Целью представленного в монографии научного исследования является разработка методологии устойчивого прогноза стока и диагностирования бифуркационных очагов его формирования. Развернуто цель научного исследования можно описать следующим образом.

Проблемная ситуация, сформулированная выше, включает два аспекта противоречий между нормативной гидрологией и реальным положением дел в гидрометеорологии:

1. Отсутствие в нормативных документах каких-либо намеков на то, что статистический режим рек может эволюционировать. Поэтому в основе свода правил СП 33-101-2003 основной упор делается на фактические ряды наблюдений. Тем самым ситуация, характеризующая многолетний режим стока (конкретнее: вычисленные по этим рядам обеспеченные значения проектных расходов), транслируется на несколько десятилетий в будущее без учета возможности изменения за этот период факторов формирования стока.

2. Отсутствие понятия «статистическая устойчивость» формирования стока. Если и встречаются слова «неустойчивость моментов», то имеется в виду неустойчивость статистических оценок эмпирических моментов из-за коротких рядов наблюдений.

Представленное в монографии научное исследование направлено на решение второго аспекта противоречий. Первое же противоречие давно устранено, так как разработана соответствующая методология, позволяющая получать прогнозные кривые вероятностных распределений под любой из существующих сценариев изменения климата и подстилающей поверхности водосборов. Эта методология уже двадцать лет назад получила одобрение и вошла в учебные программы для вузов, освещена в двух изданиях учебника [8], а также в многочисленных монографиях. За рубежом подобной методологией владеют некоторые бывшие аспиранты кафедры гидрофизики и гидропрогнозов РГТМУ из Никарагуа, Колумбии, Боливии, Камеруна, Кот-Д'Ивуара, темы диссертаций которых были связаны с подобной проблематикой.

Что же касается второго аспекта проблемной ситуации, связанной с диагностированием неустойчивостей и обеспечением условий, при которых прогнозные распределения (как, впрочем, и фактические) моделируются устойчиво, то в отношении многолетнего стока этим занимается кафедра гидрофизики и гидропрогнозов РГГМУ. Это не означает, что похожими моделями больше никто не интересуется. Уравнение ФПК появилось впервые за рубежом, носило эвристический характер и называлось изначально уравнением Фоккера–Планка (фамилия Колмогоров появилась только после того, как он вывел это уравнение в 1938 г. строго математически). Оно использовалось сотрудниками ИВП РАН для моделирования уровня режима озер (С. В. Музылев, В. Е. Привальный, Д. А. Раткович, В. Н. Найденов и др.), но для прогноза долгосрочных изменений характеристик многолетнего стока с использованием климатических сценариев и гидрологических карт для параметризации системы уравнений для моментов, аппроксимирующей уравнение ФПК, оно впервые стало применяться в РГГМУ. Там же впервые был поставлен вопрос об устойчивости моментов, о бифуркационных диаграммах, диагностирующих условия появления полимодальных распределений с помощью логистических отображений, и, главное, разработана методология частично инфинитного моделирования [11] для борьбы с неустойчивостью начальных моментов вероятностных распределений путем увеличения размерности фазовых пространств, в которые «погружается неустойчивая задача». Зарубежные исследования в данном направлении автору не известны. Однако имеющийся научный задел по данной тематике вовсе не исключает формулировку заявляемой цели – создание относительно целостной методологии, позволяющей, с одной стороны, диагностировать неустойчивости формирования вероятностных распределений и бифуркации (появление многомодальности), а с другой – переходить к более сложным моделям в виде уравнений для многомерных распределений плотности вероятности или двумерных нелинейных отображений, полностью ликвидирующих неустойчивость или сужающих области бифуркационных очагов. Эти цели достигаются путем решения

ряда конкретных задач, снимающих основные противоречия, создающих проблемную ситуацию.

Задачи исследования, представленного в монографии. Кратко эти задачи можно определить как разработка моделей с непрерывным и дискретным временем, обеспечивающих: 1) аттрактивность прогноза; 2) выявление пространственно-временных бифуркационных очагов формирования многолетнего стока. Развернуто эти задачи научного исследования можно описать следующим образом.

Первое препятствие на пути устойчивого прогнозирования состоит в наличии существенных мультипликативных шумов в стохастической модели формирования стока. Его можно сравнительно легко устранить, разгрузив модель от параметрических шумов и переведя их в аддитивные внешние воздействия. Более сложный (но более физически обоснованный) путь заключается в переходе от использования безусловных распределений к условным, т. е. в фиксировании одной из фазовых переменных модели с использованием либо существующих гидрологических карт ее статистических норм (например, многолетней нормы испарения), либо путем построения двумерных эмпирических распределений и фиксации одной из переменных.

Второе препятствие на пути устойчивого моделирования и прогнозирования заключается в том, что основная фазовая переменная (расход воды), интересующая проектировщиков в аспекте гидрологического обеспечения надежности сооружений, может взаимодействовать с другими фазовыми гидрометеорологическими переменными (например, испарением или изменением запасов воды в почво-грунтах), игнорирование которых при сценарной оценке обеспеченных значений расходов делает эти самые оценки неустойчивыми (а подчас и бессмысленными). Это препятствие преодолевается путем повышения размерности фазового пространства, в которое «вкладывается» модель с непрерывным временем, описывающая формирование многолетнего стока, а также путем использования двумерных логистических отображений, т. е. нелинейных моделей с дискретным временем, учитывающих конку-

рентный характер взаимодействия («борьба за ресурс» – осадки, выпавшие на водосбор) между речным стоком и испарением.

Реализация упомянутых задач направлена на увеличение аттрактивных свойств решений прогностических моделей. Однако в условиях развивающегося гидрометеорологического объекта любые аттракторы (точечные для начальных моментов статистических распределений, периодических и «странных» для отображений) будут сами эволюционировать. Поэтому предлагаются пути учета этих эволюционных изменений (степени нелинейности и размерности моделей), гарантирующих обеспечение устойчивости долгосрочных прогнозов.

Для выявления (диагностирования) бифуркационных очагов (географического расположения зон одно- и полимодальных распределений) и времени их появления на протяжении нескольких десятилетий при различных климатических сценариях будет выполнено обобщение двумерной логистической модели, используемой при решении предыдущих задач, на случай дробной нелинейности, порождаемой редукционными кривыми многолетнего стока, и применение ее для диагностирования (появления и исчезновения) бифуркационных очагов при сценариях климата, отличающихся степенью изменения коэффициентов стока.

Кроме того, выявлена глобальная закономерность изменения фрактальной размерности рядов годового многолетнего речного стока в зависимости от климатической нормы приземной температуры воздуха (входящей в любой из существующих климатических сценариев). С помощью аналитической зависимости, отражающей эту закономерность, можно будет прогнозировать смещение географических зон, в которых для устойчивого описания и прогнозирования формирования стока требуется привлечение, наряду с расходом, дополнительных фазовых переменных.

Методы решения задач. В основе достижения результатов исследования лежит методология частично инфинитной гидрологии и соответствующие ей методы и методики. В ней развитие интерпретируется как увеличение размерности фазового пространства системы, в котором изучаемая предметная область представлена моделью с фиксированным набором компонентов вектора состоя-

ния. Появление у последнего новых компонентов (расширение фазового пространства) может произойти только через неустойчивость (атрибут развития) решения, т. е. в результате прекращения действия условий, обеспечивающих его корректность. Любая же модель связывает вектор состояния с вектором известных внешних воздействий и вектором задаваемых параметров (коэффициентов модели). Последний обеспечивает интерфейс системы с окружением, и именно «оживление» его составляющих (превращение задаваемых коэффициентов модели в искомые фазовые переменные, «живущие» в одном темпомире с уже существующими фазовыми переменными) является задачей моделирования в частично инфинитной гидрологии. Ее основные элементы: 1) выявление условий, при которых происходит потеря устойчивости решения модели, описывающей очередную эволюционную стадию рассматриваемой развивающейся гидрологической системы; 2) определение необходимого числа фазовых переменных для устойчивого моделирования развивающейся (теряющей устойчивость) системы (осуществляется методами фрактальной диагностики, которая позволяет, анализируя только одну, доступную непосредственным измерениям, фазовую переменную – в нашем случае расход воды – определить число других, участвующих в процессе формирования стока, «скрытых» фазовых переменных); 3) определение качества этих переменных (что они из себя представляют конкретно) – это наиболее творческий этап во всем процессе частично инфинитного моделирования, так как он не поддается полной формализации (отсюда и название «частично инфинитное», т. е. – несколько вульгазируя – «частично неопределенное»); 4) «обычное» моделирование (и прогнозирование) устойчивого функционирования расширенной (за счет новой фазовой переменной) системы; 5) выявление условий потери устойчивости уже ее (расширенной) системы и т. д. («по кругу»).

Эта авторская методология в контексте основного содержания монографии реализуется с помощью следующих общенаучных методов: 1) численное решение систем обыкновенных дифференциальных уравнений, аппроксимирующих уравнение ФПК (будет использоваться метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности);

2) метод фазовых плоскостей (пространств) для визуализации двух- и трехмерных проекций решений систем дифференциальных уравнений и отображений (трехмерная графика); 3) ГИС-технологии (коммерческие программы ArcView, Idrisi, MapInfo, Surfer) для картирования эволюции областей неустойчивости процессов формирования многолетних годового, минимального и максимального стоков; 4) объектно-ориентированное программирование; 5) методы теории устойчивости, а также коммерческие программы, связанные с выполнением статистических расчетов, визуализацией многомерных распределений плотности вероятности (гистограмм), созданием локальных баз данных и т. п.

Основное содержание монографии. Если кратко, то предлагаются и обосновываются модели в виде стохастических дифференциальных уравнений и отображений, позволяющие диагностировать неустойчивость нормативных вероятностных характеристик многолетнего речного стока и устойчиво прогнозировать их обеспеченные значения. В более развернутом виде ее содержание можно описать следующим образом.

Исследование представлено двумя частями. В первой – будут рассматриваться условия, необходимые для устойчивого моделирования и прогнозирования статистических характеристик многолетнего речного стока в рамках моделей с дискретным (отображения) и непрерывным (эволюционные уравнения для плотности вероятности стоковых характеристик) временем. Она состоит из следующих разделов (термин «части» и «разделы» отражают смысловое содержание монографии, а частично и ее фактическое оглавление):

1. *Традиционное и эволюционное описание многолетнего речного стока. Мотивация исследований.* Проведена «демаркационная линия» между традиционным статистическим описанием многолетнего речного стока на основе фактических рядов инструментальных наблюдений и аналогичным описанием на основе решений уравнений ФПК (точнее, на основе аппроксимирующей его системы обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов, приводящей к распределениям К. Пирсона) с использованием не фактических рядов стока, а физико-статистических свойств рече-

ных бассейнов и внешних климатических воздействий на него. Сформулированы условия, при которых уравнения для моментов теряют устойчивость, а также проиллюстрирован с помощью географических карт масштаб возникающей проблемы для различных видов многолетнего стока на территории России.

2. *Условные вероятностные распределения.* Рассматриваются наиболее простые способы подавления неустойчивостей путем разгрузки мультипликативных шумов модели с помощью перевода их в аддитивные, т. е. считая информацию о конкурирующих с расходом фазовых переменных (в первую очередь – это испарение) частично известной и задаваемой как внешнее воздействие (наряду с осадками). Один из вариантов такого подхода – генерирование многолетних рядов испарения, построение двумерных совместных вероятностных распределений расхода и испарения и переход к условным распределениям путем фиксации испарения (например, на уровне климатической нормы).

3. *Общий случай взаимодействия фазовых переменных.* Рассматривается случай взаимодействия трех фазовых переменных, участвующих в формировании гидрометеорологического режима речных бассейнов (расход, испарение, изменение влагозапасов в почво-грунтах). Численными методами исследуются фазовые портреты (аттракторы) решений соответствующих систем дифференциальных уравнений. Подробно рассмотрена стохастическая модель эволюции влагозапасов в почво-грунтах, включая формирование эмпирических рядов и их статистическую обработку.

4. *Двумерные логистические отображения.* В реальности практическая гидрология имеет дело не со скользящими осредненными годовыми расходами, а с дискретными многолетними рядами среднегодовых (минимальных, максимальных) расходов. Поэтому в данном разделе рассматривается модель с дискретным временем – нелинейное двумерное логистическое отображение (для взаимодействующих расхода и испарения). Выявляются бифуркационные параметры отображений и их влияние на вид бифуркационных диаграмм в координатах расход–испарение для северных и южных регионов России. Устанавливаются условия, при которых происходит стабилизация одномодальных распределений

для различных географических широт ЕТР и возникает дестабилизирующее действие гидрометеорологических параметров (осадков, температуры приземного воздуха и т. д.).

5. *Частичная инфинитность аттракторов речного стока.* В каком бы из вариантов (одномерном, многомерном или с помощью отображений) мы не пытались получить (спрогнозировать) устойчивые вероятностные распределения, аттрактивность решений зависит от свойств окружающей среды. Эти свойства в моделях представлены задаваемыми параметрами, обеспечивающими интерфейс между зафиксированной моделью предметной областью (речным бассейном) и внешним воздействием окружающей среды (климатической системы), т. е. фактическими или сценарными температурой воздуха и осадками. Окружающая среда (инфинитная реальность – в терминах частично инфинитной гидрологии) вызывает «мутации» в механизме формирования стока. Если в модели это обстоятельство не учитывается, то ее решение перестает быть корректным, например теряет устойчивость (аттрактивные свойства решений). Поэтому модель обладает эволюционными возможностями («выдавать» в качестве решений устойчивые распределения) только в случае, если в ней самой заложена способность к мутированию в сторону адекватного отображения изменившегося механизма формирования стока. А это возможно, если аттракторы (неважно какого типа: точечные или занимающие область фазового пространства) частично инфинитны, т. е. порождающие их модели обладают интерфейсными возможностями для своего мутирования (чтобы изменить вид вероятностного распределения в изменяющихся внешних условиях). Поэтому в данном разделе проиллюстрированы подобные мутации (конечно, этот термин в данном контексте надо воспринимать метафорически) путем последовательного усложнения моделей: линейный формирующий фильтр, порождающий распределения Пирсона; логистическое уравнение (не отображение), т. е. привлечение квадратичной нелинейности, порождающей одномодальные распределения, выходящие, однако, за рамки семейства кривых К. Пирсона (с более гибко управляемым «хвостом» распределения); кубическая нелинейность,

порождающая двумодальные одномерные распределения; многомерные распределения и т. д.

Во второй части рассматриваются возможности диагностирования неустойчивостей процесса формирования многолетнего речного стока, т. е. выявления условий, при которых его формирование происходит катастрофически (непредсказуемо как при использовании динамических, так и статистических закономерностей). Вторая часть будет состоять из следующих разделов:

1. *Разработка модели для выявления бифуркационных очагов при формировании стока.* К логистической модели, использованной в первой части, приходим, если в линейном формирующем фильтре параметр, характеризующий инерционные свойства бассейна, связываем обратной зависимостью с искомой фазовой переменной (расходом воды). В данном же разделе будет показано (на фактическом материале натурных наблюдений), что к классическому виду логистического отображения мы приходим только на горизонтальных участках редуционных кривых (зависимостях модулей стока от площади водосбора). В общем же случае будут получаться логистические отображения с дробной нелинейностью. С использованием этой обобщенной модели проведены вычисления с целью установления характера бифуркационных диаграмм многолетнего годового стока на ЕТР (вдоль 42° в.д.). На основе этих диаграмм диагностировано появление и исчезновение бифуркационных очагов в зависимости от широты местности и выявлены широтные зоны, в которых сток формируется полимодально.

2. *Прогностическое диагностирование бифуркационных очагов при изменении климата.* В этом разделе предложена методика использования обобщенной логистической модели для диагностирования бифуркационных очагов не только по фактическому климату, характеристики которого закартированы в действующих климатических атласах, но и по различным сценариям его изменения.

3. *Выявление глобальной закономерности изменения фрактальной размерности рядов годового стока в зависимости от нормы приземной температуры воздуха.* По всем (доступным) речным водосборам Северного и Южного полушарий проведена фрактальная диагностика рядов многолетнего годового стока и ус-

тановлены аналитические зависимости между фрактальной размерностью и климатической нормой приземной температуры. При их монотонности открывается возможность диагностировать размерности пространств вложения для моделей формирования речного стока, с помощью которых можно статистически устойчиво прогнозировать экстремальные значения характеристик стока. По-другому: опираясь на прогнозируемую температуру воздуха (входящую в любой климатический сценарий), – картировать динамику географических зон, в которых устойчивое моделирование стока требует привлечения наибольшего числа фазовых переменных (следовательно, в которых рекомендации нормативной гидрологии менее всего пригодны, так как не дают возможность предсказывать гидрологические катастрофы даже в статистическом смысле). Это же можно сформулировать и так: установленная закономерность влияния температуры на фрактальную размерность (разумеется, если она статистически значима, а такие предпосылки по Северному полушарию просматриваются) позволяет диагностировать фактические и прогнозные распределения бифуркационных очагов только на основе фактического и прогнозного (сценарного) распределения приземной температуры воздуха.

Исследования частично выполнялись при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проекты № П740, № П2588, № 2.1.1/9596).

Часть 1.

АТТРАКТОРЫ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ МНОГОЛЕТНЕГО РЕЧНОГО СТОКА

Рассмотрены условия, необходимые для устойчивого описания формирования многолетнего речного стока в рамках моделей с дискретным и непрерывным временем, включая эволюционные уравнения для плотности вероятности стоковых характеристик.

1.1. Традиционное и эволюционное вероятностное описание многолетнего речного стока. Мотивация исследования

Традиционное вероятностное описание многолетних рядов всех видов речного стока (годового, минимального, максимального) базируется на эмпирических распределениях, аппроксимированных аналитическими зависимостями семейства кривых К. Пирсона, являющихся решениями одноименного уравнения:

$$\frac{dp}{dQ} = \frac{Q - a}{b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2} p, \quad (1.1)$$

где p – плотность вероятности расхода Q (модуля q слоя h) воды; a_1, b_0, b_1, b_2 – коэффициенты, вычисляемые на основе моментов по фактическим рядам наблюдений (см., например, [30, 35]).

Уравнение (1.1) появилось впервые не в гидрологии, оно предназначалось для формального сглаживания эмпирических распределений в различных предметных областях науки. Придать физический смысл его коэффициентам удалось при разработке моделей, описывающих эволюцию плотности вероятности. Это знаменитая модель Фоккера–Планка. Позже строгий математический вывод этой модели сделал А. Н. Колмогоров (см., например, [21]), поэтому ее обычно именуют моделью Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial p(Q, t)}{\partial t} = - \frac{\partial [A(Q, t) p(Q, t)]}{\partial Q} + 0,5 \frac{\partial [B(Q, t) p(Q, t)]}{\partial Q^2}, \quad (1.2)$$

где A и B – коэффициенты сноса и диффузии, определяющие скорость изменения математических ожиданий приращений случайного процесса и их квадратов соответственно.

Их конкретный вид зависит от характера исходной «зашумляемой» динамической модели (линейная, нелинейная) и типа вводимых в нее шумов. В случае описания процесса формирования стока линейным формирующим фильтром имеем:

$$dQ = [-(\bar{c} + \tilde{c})Q + \bar{N} + \tilde{N}]dt, \quad (1.3)$$

где $\bar{c}$ и $\bar{N}$ – математические ожидания; $\tilde{c}$ и $\tilde{N}$ – белые шумы ($c = \bar{c} + \tilde{c}$, $N = \bar{N} + \tilde{N}$, причем $c = 1/k\tau$, $N = \dot{X}/\tau$; здесь k – коэффициент стока, τ – время релаксации) с интенсивностями $G_{\tilde{c}}$ и $G_{\tilde{N}}$ и взаимной интенсивностью $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$.

Коэффициенты сноса и диффузии в этом случае будут иметь вид:

$$A(Q, t) = -(\bar{c} - 0,5G_{\tilde{c}})Q - 0,5G_{\tilde{c}\tilde{N}} + \bar{N}, \quad (1.4)$$

$$B(Q, t) = G_{\tilde{c}}Q^2 - 2G_{\tilde{c}\tilde{N}}Q + G_{\tilde{N}}. \quad (1.5)$$

В теории случайных процессов разработаны методы аппроксимации уравнения (1.2) системой дифференциальных уравнений для начальных моментов m_i ($i = 1, 2, \dots$). Ограничиваясь первыми четырьмя моментами (в гидрологии этого вполне достаточно из-за ограниченности рядов наблюдений, не позволяющей надежное вычисление старших моментов), можно получить (см., например, [12, 29]) систему уравнений:

$$dm_1/dt = -(\bar{c} - 0,5G_{\tilde{c}})m_1 + \bar{N} - 0,5G_{\tilde{c}\tilde{N}}; \quad (1.6)$$

$$dm_2/dt = -2(\bar{c} - G_{\tilde{c}})m_2 + 2\bar{N}m_1 - 3G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_1 + G_{\tilde{N}}; \quad (1.7)$$

$$dm_3/dt = -3(\bar{c} - 1,5G_{\tilde{c}})m_3 + 3\bar{N}m_2 - 7,5G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_2 + 3G_{\tilde{N}}m_1; \quad (1.8)$$

$$dm_4/dt = -4(\bar{c} - 2G_{\tilde{c}})m_4 + 4\bar{N}m_3 - 14G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_3 + 6G_{\tilde{N}}m_2. \quad (1.9)$$

Система (1.6) – (1.9) устойчиво описывает процесс формирования стока при условии $\text{div} \dot{m}_i = \sum \dot{m}_i / m_i < 0$ ($\bar{c} > 2G_{\tilde{c}}$). Это условие сжимаемости фазового пространства четырех начальных моментов обеспечивает в стационарном режиме существование

семейства кривых плотностей вероятности Пирсона. В определенном смысле это семейство можно рассматривать как аттрактор решений (в расширенном и скорее метафорическом толковании этого термина), тип каждого из которых (решений) определяется соотношением между параметрами уравнения (1.1). Последние приобретают гидрологический смысл и определяются формулами [15]:

$$\begin{aligned} a &= (G_{\tilde{c}\tilde{N}} + 2\bar{N})/(\bar{c} + G_{\tilde{c}}); \quad b_0 = -G_{\tilde{N}}/(2\bar{c} + G_{\tilde{c}}); \\ b_1 &= 2G_{\tilde{c}\tilde{N}}/(\bar{c} + G_{\tilde{c}}); \quad b_2 = -G_{\tilde{c}}/(2\bar{c} + G_{\tilde{c}}). \end{aligned} \quad (1.10)$$

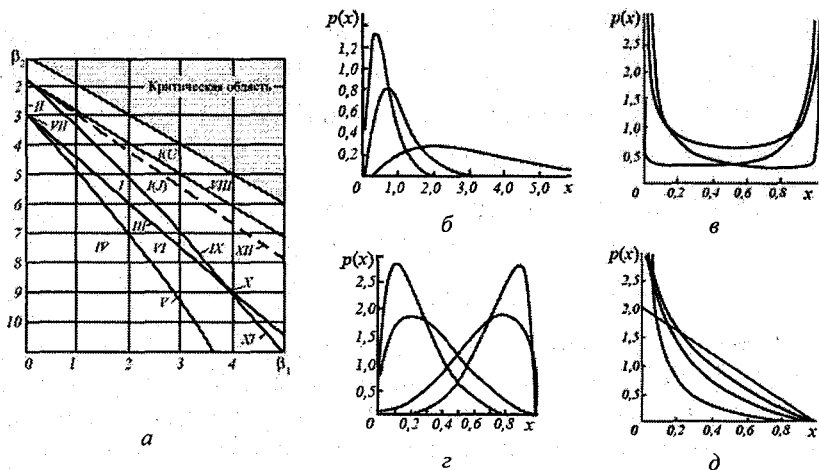


Рис. 1.1. Диаграмма различных распределений семейства кривых Пирсона (а) и примеры распределений некоторых типов: одномодальных (б, з), U-образных (е) и J-образных (д) [36]

Типы кривых зависят от соотношения между моментами распределений, а значит, между физико-статистическими гидрометеорологическими характеристиками бассейна $\bar{c}$, $G_{\bar{c}}$, $G_{\bar{c}\tilde{N}}$, $G_{\tilde{N}}$. В зависимости от численных значений параметров $\beta_1 = \mu_3 \mu_2^{-3}$, $\beta_2 = \mu_4 \mu_2^{-2}$ (здесь μ – центральные моменты) различают 12 типов распределений (см. диаграмму на рис. 1.1, а). Как правило, это одномодальные асимметричные распределения (рис. 1.1, б, в), но встречаются и довольно экзотические для гидрологии (рис. 1.1, в, д).

В критическую область попадаем, если $G_{\bar{c}} \rightarrow \bar{c}$. По мере увеличения численного значения критерия $\beta = G_{\bar{c}} / \bar{c}$ (относительной интенсивности мультипликативного шума), устойчивость теряют последовательно четвертый ($\beta > 0,5$), третий ($\beta > 0,67$), второй ($\beta > 1$) и первый ($\beta > 2$ – формула (1.13), см. ниже, таких значений не дает) моменты. Наглядно это иллюстрирует, например, уравнение (1.6). Если мы захотим по известным внешним воздействиям на бассейн ($\tilde{N}$) и его характеристикам ($\bar{c}$, $G_{\bar{c}}$, $G_{\bar{c}\tilde{N}}$) вычислить норму для «стационарного» случайного процесса формирования стока ($dm_1/dt = 0$), то при $G_{\bar{c}} = 2\bar{c}$ придется производить деление на нуль (а «на нуль делить нельзя»). В такой ситуации надо либо упрощать статистическое описание формирования стока (например, ограничиться нормальным распределением, пока $G_{\bar{c}} / \bar{c} < 1$), либо искать возможность «разгружать» мультипликативную составляющую шумов, делая их аддитивными, либо вводить в рассмотрение те фазовые переменные, которые их порождают. Масштабы проблемы иллюстрирует рис. 1.2 [15, 17]: чуть ли не половина территории России неустойчива в отношении формирования многолетнего стока по третьему и второму моментам.

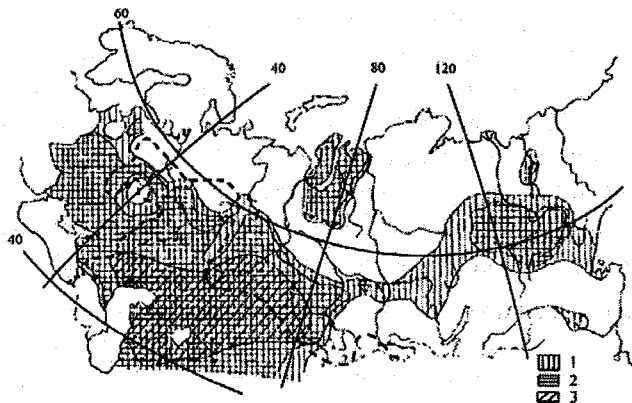


Рис. 1.2. Неустойчивость многолетнего годового стока на территории СНГ по критерию β и бессточные области СССР (ограничены пунктирной линией):
1) $\beta < 2/3$, 2) $\beta > 1$, 3) $\beta \geq 1,8$ (но меньше двух)

1.2. Условные вероятностные распределения

Рассмотрим возможность разгрузки мультипликативных шумов путем преобразования их в аддитивные. Для этого имеет смысл обратиться к исходной динамической (не зашумленной) модели, которая приводит к уравнению (1.3), содержащему параметрический шум в члене $(\bar{c} + \tilde{c})Q$. Эта модель имеет вид

$$dQ/dt = -(1/k\tau)Q + \dot{X}/\tau. \quad (1.11)$$

Она представляет собой неравновесный аналог балансового соотношения годового стока:

$$\Delta Q = \dot{X} - Q - E \pm \Delta U, \quad (1.12)$$

где ΔQ – динамическая составляющая баланса; E – интенсивность испарения; $\pm \Delta U$ – изменение запасов воды в почво-грунтах.

Два последних слагаемых в (1.12) можно интегрально учесть коэффициентом стока $k = \bar{Q} / \bar{X}$. Тогда в дифференциальной форме соотношение (1.12) примет вид уравнения (1.11), а с учетом того, что параметры модели и внешние воздействия «шумят» – вид уравнения (1.3). Таким образом, источник мультипликативности (а значит, в конечном итоге, и неустойчивости моментов) лежит в том, что мы не учитываем явным образом (как искомые функции, наряду с расходом) составляющие водного баланса водосбора (E и $\pm \Delta U$). Они учитываются только косвенно через коэффициенты, т. е. задаются как свойства частично инфинитной среды (см. [13]), определяющей устойчивость (или неустойчивость) процесса формирования стока. Однако свойства этой среды можно задать и аддитивно, рассматривая более расширенно внешние воздействия: $N = (\dot{X} - E)/\tau$. Тогда интенсивность шума $G_{\tilde{N}}$ учитывает интегрально не только вариации осадков, но и испарения.

В этом случае все записанные выше модели формально сохраняются, но численные значения параметров $\bar{c}$, $G_{\tilde{c}}$, $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$ и $G_{\tilde{N}}$ будут другими. При вычислении критерия $\beta = G_{\tilde{c}} / \bar{c}$ нами была использована полученная ранее [14] формула

$$\beta = 2k \ln r + 2, \quad (1.13)$$

где r – коэффициент автокорреляции рядов многолетнего стока.

Так как эмпирические значения r не зависят от того, какой моделью мы пытаемся описывать сток, а коэффициент стока в данном случае $k = \overline{Q} / (\overline{X} - E)$ стремится к единице, то даже при достаточно высоких коэффициентах $r = 0,5$ три первых начальных момента оказываются устойчивыми ($\beta = 0,613$). Однако, какой ценой достигнута эта устойчивость?

1. Нарушена причинно-следственная связь: испарение в принципе не может быть «внешним воздействием», так как вместе с расходом и запасами воды в почво-грунтах является следствием выпавших осадков, которые являются общим ресурсом для Q , E и $\pm \Delta U$. Для равновесного стационарного случайного процесса это обстоятельство, по-видимому, не существенно, но для эволюционных расчетов – может сыграть важную роль.

2. Исчезло традиционное для практической гидрологии понятие коэффициента стока ($\overline{Q} / \overline{X}$). Тем самым стало невозможным использовать в моделях широкий круг исследований по влиянию на этот коэффициент (а значит, и на вид распределений $p(Q)$) различных гидрометеорологических факторов – осадков и температуры воздуха (формулы М. И. Будыко [2]), а также факторов подстилающей поверхности (залесенность, заболоченность, урбанизация и т. п.).

Кстати, в работах сотрудников ИВП РАН [4, 25], связанных со стохастическими моделями, коэффициент стока игнорируется, но уже, видимо, по каким-то другим причинам. (Традиционный коэффициент стока k можно ввести в модель и аддитивно:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{Q}{k_1 \tau} + \frac{k \dot{X}}{\tau}, \quad (1.14)$$

где k_1 – коэффициент, учитывающий влияние на процесс формирования стока почво-грунтов ($(\overline{c_1} = 1/k_1 \tau) \rightarrow 1$; $G_{\bar{c}_1} \neq 0$). В этом случае получим также устойчивую (по крайней мере, более устойчивую) картину для моментов и одновременно – возможность варьи-

ровать значением k . Однако причинно-следственная связь также оказывается нарушенной.)

3. Не очень понятен стал смысл аддитивного (и взаимного) шума. Если раньше величина $G_{\tilde{N}}$ связывалась только с осадками (косвенно с их дисперсией), то сейчас – это комплексный параметр, отвечающий одновременно и за осадки, и за испарение.

Тем не менее подобным приемом разгрузки мультипликативного шума удалось повысить степень сжимаемости фазового пространства начальных моментов [система (1.6)–(1.9)] – метафорически: усилить аттрактивные свойства модели. (В случае игнорирования изменения запасов воды в почво-грунтах мы вообще сжимаем все семейство кривых Пирсона до нормального распределения.) Конечно, главный недостаток подобной процедуры заключается в том, что мы меняем статус испарения – вместо полноценной фазовой переменной, подлежащей вместе с расходом определению (т. е. нахождение совместного распределения $p(Q, E)$), мы считаем его известной величиной (по крайней мере – главную статистику ряда испарения – норму). Тем самым, мы фактически сводим ситуацию к условному распределению $p(Q/E = \bar{E})$. Справедливости ради надо заметить, что этот статус фазовой переменной отсутствует и в базовом варианте [модель (1.3) так же как и в (1.14)]: норма коэффициента стока, который учитывает потери на испарение, также задается.

Этот статус можно восстановить следующим образом. Аналогично уравнению (1.12) можно записать балансовое соотношение, в котором динамической составляющей будет испарение. Поэтому для двух переменных ($Y_1 = Q$, $Y_2 = E$) можно записать систему уравнений

$$dY_i / dt = -Y_i / (k_i \tau_i) + \dot{X} / \tau_i, \quad (1.15)$$

где $k_i = Y_i / \sum_1^2 Y_i$.

Систему (1.15) можно переписать следующим образом:

$$dY_i = \left(-c_i \sum_{i=1}^2 Y_i + N_i \right) dt, \quad (1.16)$$

где $c_i = \bar{c}_i + \tilde{c}_i$, $N_i = \bar{N}_i + \tilde{N}_i$ (здесь $N_i = \dot{X} / \tau_i$, а коэффициент c_i обязан своим происхождением неучетом, в явном виде, в общем балансе изменения запасов воды в почво-грунтах).

Наличие мультипликативного шума $\tilde{c}_i$ обеспечит, в конечном итоге, асимметричность двумерного распределения $p(Q, E)$ (за счет взаимной интенсивности $G_{\tilde{c}_i \tilde{N}_i}$). Величины $\bar{c}_i$ близки к единице, хотя $\bar{c}_1 \neq \bar{c}_2$ (также $G_{\bar{c}_1} \neq G_{\bar{c}_2}$), так как эффекты взаимодействия воды в почво-грунтах с речным стоком и испарением различны. Настораживает тот факт, что в системе (1.16) отсутствует прямое участие температуры воздуха T в формировании стока и испарения. Видимо $\bar{c}_i(T)$ и $G_{\bar{c}_i}(T)$, по крайней мере, для испарения ($i = 2$), эта зависимость от температуры обязательна.

Системе (1.16) статистически эквивалентно следующее уравнение ФПК для двумерной плотности вероятности $p(Y_1 Y_2)$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{i=1}^2 \frac{\partial(A_i p)}{\partial Y_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2(B_{ij} p)}{\partial Y_i \partial Y_j}, \quad (1.17)$$

где

$$A_i = -(\bar{c}_i - 0,5 G_{\tilde{c}_i}) \sum_{i=1}^2 Y_i - 0,5 G_{\tilde{c}_i \tilde{N}_i} + \bar{N}_i;$$

$$B_{ij} = G_{\tilde{c}_i} Y_i^2 - 2 G_{\tilde{c}_i \tilde{N}_i} Y_i + G_{\tilde{N}_i}; \quad B_{ij} \geq 0.$$

Уравнение (1.17) описывает эволюцию асимметричного распределения типа, представленного на рис. 1.3, а.

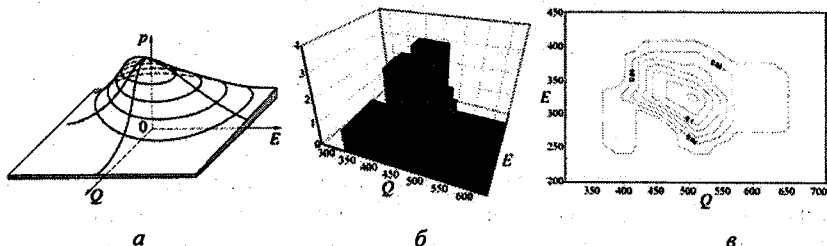


Рис. 1.3. Теоретическое (а) и эмпирическое (б) распределения плотности вероятности, а также пример проекции двумерного распределения на плоскость (Q, E) (в)

Судя по числу задаваемых в уравнении (1.17) параметров ($\bar{c}_i$, $G_{\bar{c}_i}$, $G_{\bar{c}_i} \bar{N}_i$, $\bar{N}_i$), даже при условии, что $B_{ij} = 0$ надо привлекать, по крайней мере, восемь моментов для параметризации подобной модели. При этом надо еще научиться получать, наряду с рядами стока, ряды испарения (прямых его измерений на гидрометеорологической сети не ведется). Для этого можно использовать метод А. Р. Константинова [23], основанный на зависимостях (представленных в виде номограмм) между испарением, температурой воздуха и влажностью (последние две характеристики входят в перечень стандартных измерений на гидрометеорологической сети). По этому методу были сгенерированы многолетние ряды испарений по ЕТР [20]. Их статистическая обработка позволила построить карты распределения нормы и коэффициента вариации (рис. 1.4).

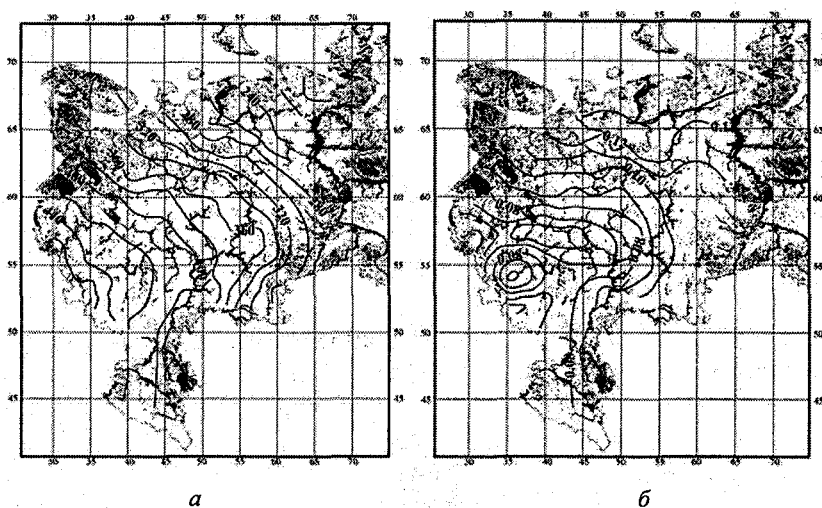


Рис. 1.4. Распределение по ЕТР нормы (а) и коэффициента вариации (б) испарения

Конечно, их точность ниже точности аналогичных карт по многолетнему годовому стоку, но распределения изолиний соответствуют физико-географическим условиям, влияющим на испарение: на севере норма испарения меньше, коэффициенты вариации больше, чем на юге. Надежных данных по распределению ко-

эффект асимметрии получить не удалось: его выборочные оценки по соседним бассейнам рек меняются не только по величине (иногда на порядок), но и по знаку. (Заметим, что в отношении коэффициентов асимметрии речного стока ситуация не намного лучше – недаром рекомендуется использовать территориально осредненные их значения, причем в жесткой привязке к коэффициенту вариации через нормируемое их соотношение.)

Для аналитической аппроксимации эмпирических двумерных распределений типа, представленного на рис. 1.3, б, служит двумерное обобщение уравнения Пирсона [16]:

$$\bar{V}[\bar{B}(\bar{Y})p(\bar{Y})] - 2\bar{A}(\bar{Y})p(\bar{Y}) = 0, \quad (1.18)$$

где $\bar{V} = |\partial/\partial \bar{Y}|$; $\bar{Y} = (Q, E)$.

Уравнениями в частных производных первого порядка, подобными (1.18), описываются всевозможные поверхности. При известных численных значениях параметров, входящих в выражения для $\bar{A}$ и $\bar{B}$ [см. пояснения к уравнению (1.17)], оно может использоваться для устойчивых долгосрочных оценок изменения вероятностных распределений $p(Q, E)$ при антропогенном изменении климата для регионов, в которых одномерные распределения $p(Q)$ неустойчивы ($\beta > 1$).

На первых порах разумно ограничиться нормальным приближением двумерной плотности вероятности $p(Q, E)$. Основанием для этого является выполнение неравенства $\bar{c}_i \gg G_{\bar{c}_i}$ (в целом это подтверждается: при $\bar{c}_i \approx 1$ и $r < 0,4$ значения $\beta = G_{\bar{c}_i}/\bar{c}_i \rightarrow 0$) и стремление к нулю величины $G_{\bar{c}_i \bar{N}_i}$ (исследования на этот счет отсутствуют, а если и будут, то вряд ли подтвердят это предположение). Таким образом имеем:

$$p(\bar{Y}) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q\sigma_E\sqrt{1-r_{QE}^2}} \exp(-\lambda^2), \quad (1.19)$$

где σ_Q, σ_E – среднеквадратические отклонения; r_{QE} – коэффициент корреляции.

Вероятность попадания вектора $\vec{Y}$ внутрь эллипса равных вероятностей равна $1 - e^{-\lambda^2}$, где

$$\frac{1}{2(1 - r_{QE}^2)} \left[\frac{(Q - \bar{Q})^2}{\sigma_Q^2} - \frac{2r_{QE}(Q - \bar{Q})(E - \bar{E})}{\sigma_Q \sigma_E} + \frac{(E - \bar{E})^2}{\sigma_E^2} \right] = \lambda^2.$$

Так как на границе эллипса максимальное значение Q , соответствующее требуемой обеспеченности, отвечает фиксированному E_{const} , то фактически мы снова приходим к условному распределению, но уже не обязательно, чтобы $E_{\text{const}} = \bar{E}$.

В табл. 1.1 приведены результаты вычисления модулей 10 % -ной обеспеченности $[\delta = (Q_{10\%}^{\text{ycl}} - Q_{10\%}) / Q_{10\%}]$. При меньших обеспеченностях (1 %, 0,1 %, 0,01 % – это «стандартные» значения, для которых составляются таблицы вероятностных распределений) δ_{cp} составляют 1–2 % (при максимальных отклонениях 5 %; результаты варьируют в зависимости от соотношения между σ_Q , σ_E и r_{QE}).

Возникает вопрос: если для малых обеспеченностей результаты вычислений по безусловным и условным распределениям практически совпадают, то: 1) почему это происходит и 2) зачем тогда вводить в обиход условные распределения.

Напомним, что неустойчивость моментов говорит только об одном: кривые плотности вероятности могут не принадлежать семейству кривых Пирсона (используемых в гидрологии). Например, на гистограмме появляется вторая мода. Это довольно частое явление списывается на недостаточно продолжительный ряд наблюдений, вторая мода принимается статистически незначимой (напомним, что рассматриваются ряды среднегодовых расходов) и эмпирические точки сглаживаются аналитическими кривыми Пирсона III типа или Крицкого–Менкеля. В нашем контексте эту ситуацию можно интерпретировать и так: «сигнал» о возможной неустойчивости получен, но статистически обоснованно проигнорирован. Этот «сигнал подает» параметр $G_{\bar{c}}$ (точнее $G_{\bar{c}} / \bar{c}$), который решающее влияние оказывает на параметр b_2 в уравнении Пирсона [см. (1.10)], т. е. в основном на четвертый момент, характеризующий определенные черты функции распределения $F(Q) = b_0 + b_1 Q$

1.2. Условные вероятностные распределения

+ $b_2 Q^2$, а именно на то, как сильно прижат хвост распределения к оси расходов (рис. 1.5).

Таблица 1.1

Оценки модулей годового стока 10 %-ной обеспеченности, полученные по различным вариантам распределений для рядов с неустойчивой дисперсией

Река – пункт	$F_{\text{бас}}^2$ км ²	Пирсона III типа ($C_s = 2C_v$)			Нормальное		
		Безусл.	Усл.	$\delta, \%$	Безусл.	Усл.	$\delta, \%$
Т. Сосна – г. Алексеевка	10 500	0,94	0,99	5,26	0,93	0,98	5,37
Синюха – с. Син. Брод	16 700	2,69	2,42	-10,1	2,64	2,37	-10,3
Свияга – с. Ивашевка	8 300	3,82	3,73	-2,51	3,76	3,67	-2,53
Самара – с. Елшанка	22 800	3,26	2,63	-19,3	3,21	2,58	-19,6
Цна – г. Княжево	13 600	4,99	4,58	-8,33	4,93	4,51	-8,64
Случь – д. Сарны	13 300	5,95	6,18	3,95	5,84	6,07	4,05
Десна – с. Разлеты	36 300	6,05	5,79	-4,25	6,00	5,74	-4,38
Пселл – с. Запселье	21 800	3,31	3,49	5,56	3,26	3,45	5,84
Днепр – г. Смоленск	14 100	9,42	14,6	54,6	9,32	14,5	55,5
Сейм – с. Лебяжье	4 870	5,29	8,99	69,9	5,23	8,95	71,2
		$\delta_{\text{ср}} = 18,4$			$\delta_{\text{ср}} = 18,7$		

Однако если мы используем только два начальных момента, как в случае (1.19), то эта проблема и не возникает. Введя вторую фазовую переменную (E), мы, разгрузив мультипликативный шум в стохастической модели для расхода, получили

на это право. Не возникает этой проблемы и в случае, когда мы, не имея никакой модели формирования стока (ни динамической, ни стохастической), просто по ряду наблюдений вычисляем два первых начальных момента и строим по ним нормальное распределение. Оно всегда устойчиво, но эта «устойчивость» имеет тот же смысл, что и болезнь «рак»: от него умирали всегда, но людям и в голову не приходила мысль о нем, пока его не научились диагностировать. В рамках формального использования только двух эмпирических моментов мы практически всегда будем иметь дело

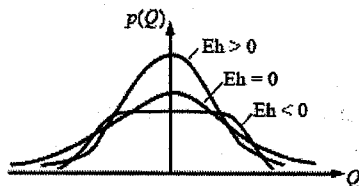


Рис. 1.5. Влияние эксцесса (E_h) на форму кривой распределения

с «устойчивыми» распределениями из семейства кривых Пирсона: ведь для определения критериев выхода распределения за рамки этого семейства (β_1 и β_2) нужны третий и четвертый моменты. Формальное принятие, например $C_s = 2C_v$, ничего не меняет – распределение остается формально устойчивым.

Но с точки зрения генезиса формирования стока, различие существенно: в случае условного распределения мы можем гарантировать устойчивость оценки (например, $Q_{1\%}$), а в случае безусловного – эта «устойчивость» такая же, как устойчивость червяка к миганию красной лампочки – червяк ведет себя устойчиво, потому что он этого мигания не видит из-за отсутствия глаз. Отсюда следует и ответ на второй вопрос: зачем вводить в обиход условные распределения? Чтобы не оказаться в роли червяка, благодушного ползущего на дороге под красный цвет светофора.

И тем не менее, несмотря на повышение аттрактивности системы (1.16) по сравнению с ситуацией, когда используется только одно уравнение для расхода воды (в двумерном случае реализуется как механизм торможения переменных $d\dot{Y}_{i+1}/dY_i = -c_i$, так и механизм их самолимитирования $d\dot{Y}_{i+1}/dY_{i+1} = -c_{i+1}$), настоящего мультипликативного взаимодействия между фазовыми переменными нет. Сжимаемость постоянна для каждой переменной, не зависит от значений другой и определяется только селективными ценностями переменных c_i .

1.3. Общий случай взаимодействия трех фазовых переменных

Сделаем два шага по направлению усложнения модели (1.15): введем третью переменную ΔU , играющую очевидную роль в годовых водных балансах речных бассейнов (см. (1.12)), а также «заставим» расход и испарение нелинейно (мультипликативно) взаимодействовать.

Изменения запасов воды в почво-грунтах ΔU знакопеременно, причем знак определяется суммой $\dot{X} - Q - E$. Если поступающие в бассейн ресурсы ($\dot{X}$) большие ($\dot{X} > Q - E$), то $\Delta U > 0$; в противном случае $\Delta U < 0$. Поэтому почво-грунты бассейна играют роль

своеобразной релейной следящей системы, которую можно описать уравнением:

$$d(\Delta U)/dt = [(N) - c \cdot \operatorname{sgn}(\Delta U)] / \tau_{\Delta U}, \quad (1.20)$$

где $\operatorname{sgn}(\Delta U)$ – знаковая функция (+1 при $\Delta U = \dot{X} - Q - E > 0$, -1 при $\Delta U < 0$), а $N = \dot{X} - Q - E$.

Параметр c можно интерпретировать как скорость насыщения (или водоотдачи) почво-грунтов речного бассейна. Параметры релаксации стока и испарения свяжем с объемом стоковой (W_Q) и испарительной (W_E) емкости бассейна соотношением $\tau_i = W_i / Y_i$. В этом случае система уравнений (1.15) примет вид:

$$dY_i / dt = (\dot{X} / W_i - (\Delta U + \sum_{i=1}^2 Y_i) / W_i) Y_i, \quad i = 1, 2. \quad (1.21)$$

Так же как и в случае системы (1.15), срабатывает механизм само- и взаимоограничения (уже с переменными скоростями) роста расхода и испарения. Переменная ΔU «ведет себя» не так однозначно. Рассмотрим различные варианты фазовых портретов и временных разверток, появляющихся при решении систем из трех уравнений (1.20), (1.21) (интегрирование проводилось по четырехточечной схеме Рунге–Кутты). На рис. 1.6 представлен трехмерный аттрактор системы (20), (21) и временные развертки его двумерной и одномерной проекции.

Изменением численных значений параметров системы (1.20), (1.21) картинки можно сделать очень регулярными, а можно и вообще вывести траекторию из области притяжения. В представленном варианте траектория благодаря уравнению (1.20) «болтается» в области притяжения, создаваемой аттрактивными свойствами системы (1.21).

Неприятным моментом является то, что в динамической модели для испарения нет температуры воздуха, которая в основном и определяет интенсивность испарения. Конечно, она влияет на испарительную емкость W , но явных формул для учета этого влияния нет. Кроме этого, величина W_i входит в уравнение таким образом, что влияет только на динамику процесса, в установившемся режиме мы возвращаемся просто к балансовому соотношению (1.12). Учесть влияние температуры воздуха и осадков на интенсивность

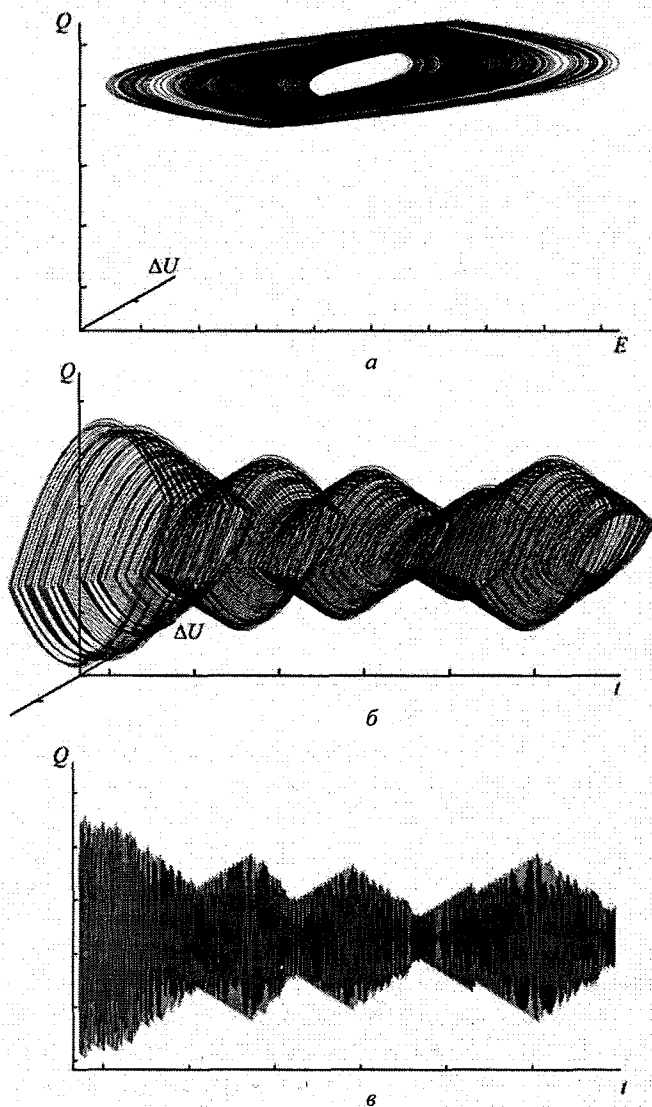


Рис. 1.6. Фазовый портрет системы (1.20), (1.21) (а) и варианты разверток в пространстве $(Q, \Delta U, t)$ (б) и на плоскости (Q, t) (в)

испарения можно, если записать уравнение (1.21) для $Y_i = E$ следующим образом:

$$\frac{dE}{dt} = \left(-\frac{E}{k_E W_E} + \frac{\dot{X}}{W_E} \right) E, \quad (1.22)$$

где (упрощая и огрубляя ситуацию, но приближая физику процесса к реальности) k_E – коэффициент испарения, равный $1 - k_Q$. Для коэффициента стока можно принять (используя формулу Тюрка [8])

$$k_{ст} = 1 - \text{th} \left(\frac{300 + 25T + 0,05T^3}{\dot{X}} \right), \quad (1.23)$$

где T – температура воздуха.

Таким образом, второе слагаемое, взятое со знаком «плюс», играет, по существу, роль коэффициента испарения. Причем он: 1) отвечает физике процесса испарения – при увеличении температуры последнее увеличивается, однако избыточность увлажнения за счет больших осадков его тормозит, 2) включает метеорологические характеристики, повсеместно используемые практически во всех сценариях изменения климата. Конечно, формула Тюрка носит эмпирический характер и при ее использовании надо проявлять известную осторожность, чтобы не выйти за пределы диапазона величины T и $\dot{X}$, в котором она справедлива. Тем не менее, это один из возможных путей введения в модель испарения физически осмысленной ситуации. Система (1.20), (1.21) – для Q , (1.22) отличается от только что рассмотренного варианта (рис. 1.6), так как уравнение (1.22) влияет на переменные Q и ΔU , но само по реакции на них проявляет нейтральность («безразличие»). На рис. 1.7 представлены переходные режимы, возникающие при решении системы уравнений (1.20), (1.21), (1.22) при постоянном (левая колонка) и переменном (правая колонка) коэффициенте испарения. Если в первом случае режим выходит на «стационарный» аттрактор, то во втором случае аттрактор «гуляет» в фазовом пространстве в зависимости от значений коэффициента испарения.

Конечно, надо трезво оценивать размеры области фазового пространства, в которой наблюдаются подобные квазистохастические вариации переменных Q , E и ΔU . Модели для Q и E (в любом

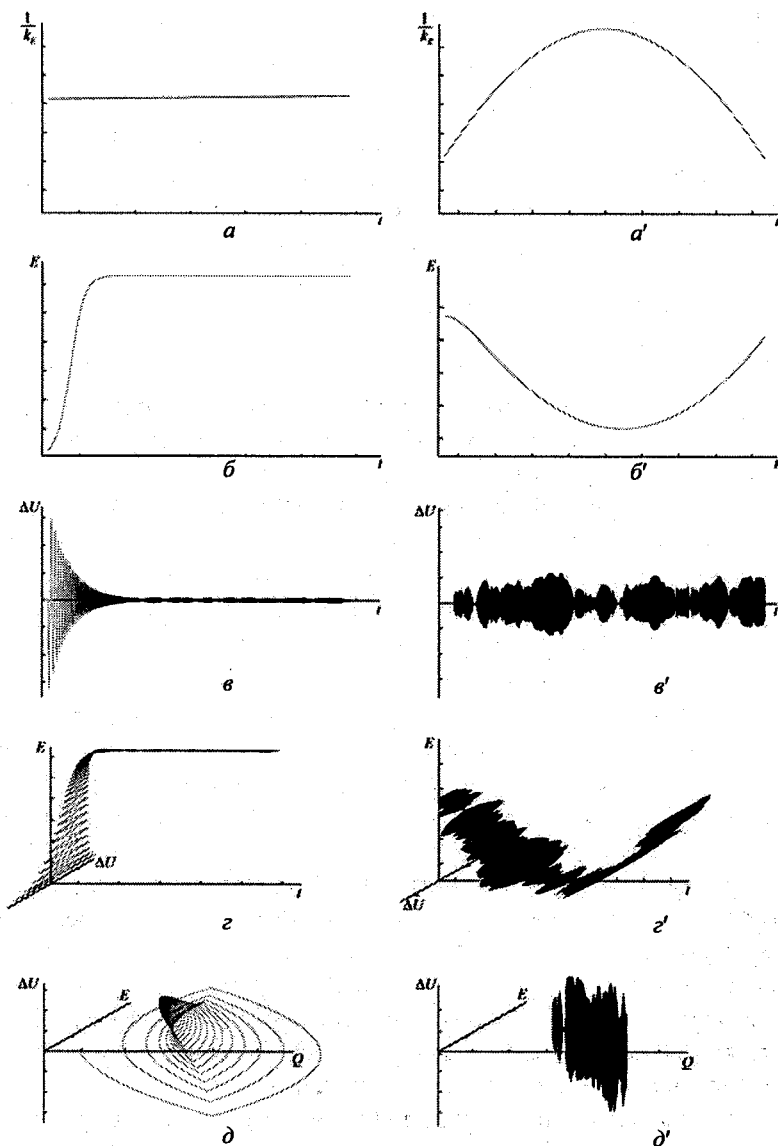


Рис. 1.7. Переходные режимы – решения системы (1.20) – (1.22) при постоянном (*a*, *б*, *в*, *г*, *д*) и переменном (*a'*, *б'*, *в'*, *г'*, *д'*) коэффициентах испарения

из рассмотренных вариантов) стараются ее сжать, на ее распатывание работает только нелинейное переключение в модели для ΔU . К настоящему вероятностному описанию процесса формирования гидрометеорологического режима речного бассейна с помощью трехмерного распределения $p(Q, E, \Delta U)$ можно прийти, если в систему динамических моделей (1.20), (1.21) ввести обычным образом аддитивные и мультипликативные шумы. Такая попытка была предпринята для случая линейного взаимодействия переменных Q и E [система (1.16)] и динамики почво-грунтовой составляющей, описываемой моделью (1.20) [10]. Ряды ΔU формировались на основе балансового соотношения (1.12), в котором величина E определялась по изложенной выше методике Константинова. И хотя точность таких расчетов не велика, но качественную картину уловить можно.

Модель (1.20) при введении в нее шумов дает одномодальное распределение (при известном внешнем воздействии $N = \dot{X} - Q - E$). Визуально характер нелинейности иллюстрирует рис. 1.8, а, а распределение плотности вероятности (при $\bar{N} = 0$) – рис. 1.8, б [асимметрия порождается корреляцией аддитивного ($\tilde{N}$) и параметрического ($\tilde{c}$) шумов. Уравнение (1.17) в этом случае обобщается на трехмерное распределение $p(Q, E, \Delta U)$ и дополняется выражениями для коэффициентов сноса $A_{\Delta U}$ и диффузии $B_{\Delta U}$:

$$A_{\Delta U} = -\tilde{c}_{\Delta U} \operatorname{sgn}(\Delta U) + \delta(\Delta U)[G_{\tilde{c}\Delta U} \operatorname{sgn}(\Delta U) - G_{\tilde{c}\tilde{N}}] + \bar{N}; \quad (1.24)$$

$$B_{\Delta U} = G_{\tilde{c}} - G_{\tilde{c}\tilde{N}} \operatorname{sgn}(\Delta U) + G_{\tilde{N}}. \quad (1.25)$$

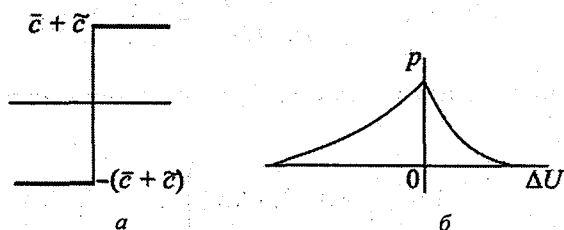


Рис. 1.8. Характер нелинейности (а) и распределение плотности вероятности (б) для модели с аддитивными $\tilde{N}$ и мультипликативными $\tilde{c}$ шумами

Автономная модель для ΔU может давать и двухмодальное распределение. Для этого заменим нелинейность в уравнении (1.20) на гистерезисную:

$$d(\Delta U) = [(-\bar{c} + \tilde{c})f(\Delta U) + \bar{N} + \tilde{N}]dt, \quad (1.26)$$

где $f(\Delta U) = \begin{cases} \text{sgn}(\Delta U - a), & \Delta \dot{U} > 0, \\ \text{sgn}(\Delta U - a), & \Delta \dot{U} < 0, \end{cases}$ (рис. 1.9, а).

Уравнение ФПК, статистически эквивалентное уравнению (1.26), в стационарном случае, с учетом того, что плотность и поток вероятности обращается на бесконечности в нуль, будет:

$$\frac{dp(\Delta U)}{p d(\Delta U)} = \frac{1}{B(\Delta U)} \left(\frac{dB(\Delta U)}{d(\Delta U)} - 2A(\Delta U) \right). \quad (1.27)$$

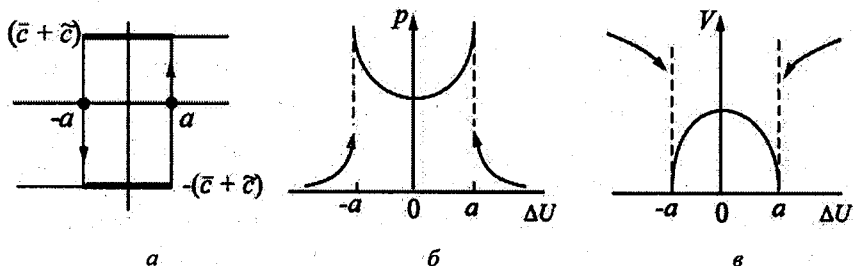


Рис. 1.9. Гистерезисная нелинейность (а), плотность вероятности (б) и потенциал (в)

Общий интеграл уравнения (1.27) имеет вид:

$$p(\Delta U) = k \exp \left\{ - \int \frac{dB(\Delta U)}{d(\Delta U)} - 2A(\Delta U) \right\}, \quad (1.28)$$

где нормирующий множитель k находят из условия нормировки

$$k = \left[\int_{-\infty}^{\infty} p(\Delta U) d(\Delta U) \right]^{-1}. \quad (1.29)$$

Решение (1.28) можно представить в виде (см. работу [1], в которой рассмотрена похожая задача для автоматической системы, возбуждаемой широкополосным шумом):

$$p(\Delta U) \sim \begin{cases} \exp(-2\bar{c}\Delta U / G_{\tilde{N}}) & \text{при } \Delta U > a, \\ 0,5\text{ch}(-2\bar{c}\Delta U / G_{\tilde{N}}) & \text{при } |\Delta U| \leq a, \\ \exp(2\bar{c}\Delta U / G_{\tilde{N}}) & \text{при } \Delta U < -a, \end{cases} \quad (1.30)$$

(рис. 1.9, б).

Высота потенциального барьера (рис. 1.9, в) определяется скоростью насыщения почво-грунтов $\bar{c}$, интенсивностью аддитивного шума $G_{\tilde{N}}$ и параметром a , характеризующим ширину гистерезисной петли. Если в представленные формулы явно ввести постоянную времени τ , характеризующую быстроедействие почво-грунтовой предметной области, то ее уменьшение сужает распределение плотности вероятности [при $G_{\tilde{c}\tilde{N}} \neq 0$ возникает асимметрия распределения, а при $a = 0$ приходим к одномодальному распределению $p \sim \exp(-2\bar{c}|\Delta U|/G_{\tilde{N}})$ (см. рис. 1.8, б)].

Посмотрим, насколько подобная модель подтверждается эмпирическими данными. Для 63 водосборов ЕТР по рядам наблюдений за осадками, стоком и сгенерированным (см. п. 1.2) рядом испарения были «восстановлены» ряды влагозапасов $\pm\Delta U = \dot{X} - E - Q$, по которым вычислены начальные моменты m_i и коэффициенты автокорреляции r при сдвиге Δt один год (пример см. табл. 1.2).

На рис. 1.10 представлены характерные гистограммы распределений и автокорреляционные функции. В подавляющем числе случаев (50 %) встречаются одномодальные асимметричные ($C_s \geq 0$) распределения. В 35 % случаев – двухмодальные, а еще в 15 % – распределения, близкие к равномерному (в том числе – «без зубов»). В более 70 % случаев $\Delta\bar{U} = m_1 < 0$. Коэффициенты автокорреляции при годовой сдвиге меняются от $-0,81$ (р. Куныя – г. Холм) до $+0,65$ (р. Великая–г. Опочка), но в подавляющем числе случаев – незначительные.

Таблица 1.2

Начальные моменты и коэффициенты автокорреляции для случайного процесса изменения влагозапасов в почво-грунтах речных бассейнов ЕТР

№ п/п	$F_{\text{баз}}, \text{ км}^2$	Река – пункт	Начальные моменты			Козф. автокоррел.
			m_1	m_2	m_3	
1	6 450	Свидь – д. Горки	-28	13 190	-1 497 347	0,28
2	7 040	Волошка – д. Тороповская	-52	14 051	-2 030 966	0,42
3	34 800	Сухона – г. Тотма	-70	9 677	-1 414 120	0,14
4	7 890	Вишера – д. Лунь	-67	17 478	-1 528 048	-0,14
5	19 000	Вашка – д. Рещельская	-97	16 643	-3 346 396	0,55
6	3 810	Немда – с. Селище	46	10 339	1 358 705	0,12
7	5 700	Нея – д. Буслаево	7	6 308	287 207	-0,14
8	13 600	Цна – г. Княжево	-6	5 657	10 928	-0,05
9	14 300	Клязьма – г. Владимир	8	9 065	1 358 868	-0,14
10	6 440	Ай – с. Лаклы	-1	6 534	83 893	0,22
11	12 500	Дема – д. Бочкарева	-46	7 114	-807 369	-0,02
12	9 750	Кама – с. Волосницкое	66	17 643	4 592 313	-0,14
13	3 130	Сытва – шт Шамары	32	12 070	1 538 341	0,16
14	14 200	Уфа – г. Красноуфимск	-18	5 742	-445 577	0,21
15	5 930	Чепца – с. Полом	-171	39 138	-10 924 225	0,16
16	3 500	Великая – г. Опочка	-102	13 757	-2 463 654	0,65
17	5 140	Кунья – г. Холм	-30	3 747	-68 319	-0,81
18	12 800	Луга – г. Кингисепп	-12	5 344	-107 976	0,19
19	5 710	Паша – с. Часовенское	-56	8 550	-1 085 865	0,03
20	20 900	Цильма – с. Трусово	-98	16 795	-2 800 727	0,25

Для распределений, близких к одномодальным симметричным, параметры уравнения ФПК для расчета эволюции $p(\Delta U)$ могут быть вычислены на основе уравнений для математического ожидания $m_{\Delta U}$ и дисперсии $D_{\Delta U}$ в установившемся режиме [14]:

$$\begin{aligned} m_{\Delta U} &= (G_{\bar{c}} + G_{\bar{N}}) \bar{N} / (\bar{c}^2 - \bar{N}^2); \\ D_{\Delta U} &= (G_{\bar{c}} + G_{\bar{N}})^2 (\bar{c}^2 + \bar{N}^2) / 2 (\bar{c}^2 - \bar{N}^2)^2. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Для замыкания системы (1.31) относительно параметров $G_{\bar{c}}$, $G_{\bar{N}}$ и $\bar{c}$ можно воспользоваться тем фактом, что процесс, описываемый стохастическим уравнением (3.7) – марковский, а значит,

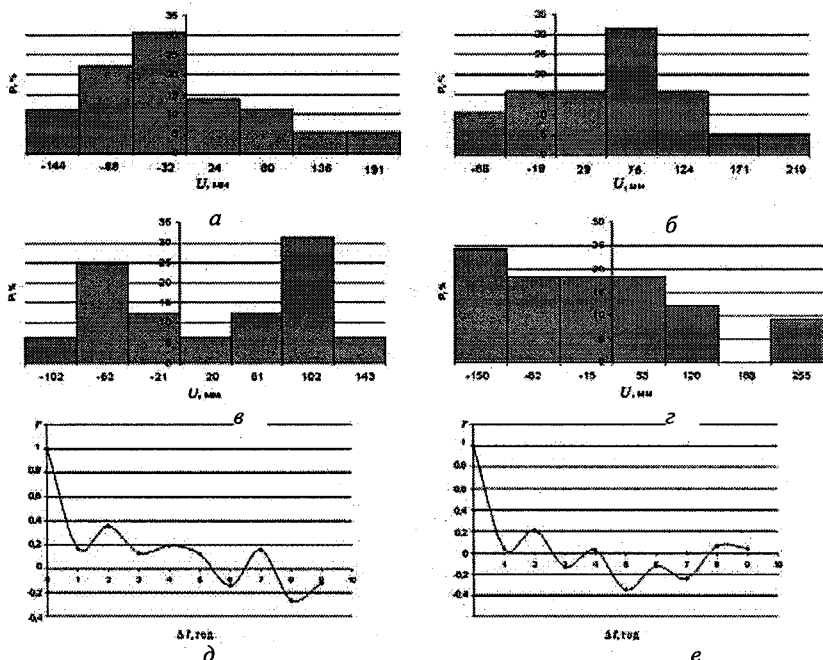


Рис. 1.10. Примеры распределений $p(\Delta U)$ и автокорреляционных функций $r(\Delta t)$:
а – р. Сюнь – с. Миньярово; б – р. Немда – с. Селище; в – р. Луга – ст. Толмачево;
г – р. Колпь – д. Верхний Двор; д – р. Шугор – д. Мичабичевник;
е – р. Уса – с. Петрунь

автокорреляционная функция $r_{\Delta U}(\Delta t)$ – экспонента, скорость спада которой определяется значениями $\bar{c}$ и $G_{\bar{c}}$. При сдвиге в один год имеем уравнение $\ln r_1 = f(\bar{c}, G_{\bar{c}})$, которого, совместно с выражениями (1.31), достаточно для нахождения $G_{\bar{c}}$, $G_{\bar{N}}$ и $\bar{c}$ (разумеется, при условии, что $r_1 > 0$).

Попыток построения совместных эмпирических распределений $p(Q, E, \Delta U)$ по аналогии с двумерными распределениями $p(Q, E)$, рассмотренными выше, пока не делалось. Так как обычная линеаризация из-за знакового характера нелинейности в уравнении (1.20) затруднительна, то свести трехмерный случай к замкнутой

системе уравнений для моментов не удастся и надо «в лоб» решать уравнение ФПК для $p(Q, E, \Delta U; t)$.

В реальности практическая гидрология имеет дело не со скользящими осредненными годовыми расходами, а с дискретным многолетним рядом среднегодовых расходов. Поэтому представляется целесообразным рассмотреть модели с дискретным временем.

1.4. Двумерные логистические отображения

Рассмотрим систему (1.21) без члена ΔU :

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{(Q+E)Q}{W_Q} + \frac{Q\dot{X}}{W_Q}; \quad (1.32)$$

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{(Q+E)E}{W_E} + \frac{E\dot{X}}{W_E}. \quad (1.33)$$

Система (1.32), (1.33) содержит главные элементы многолетних водных балансов речных бассейнов; в случае необходимости учета изменения запасов воды в почво-грунтах надо записать еще одно уравнение для ΔU или ввести коэффициент перед отрицательными членами в правых частях. Фазовые переменные этой системы тормозят рост друг друга ($\partial \dot{Q} / \partial E = -Q / W_Q < 0$, $\partial \dot{E} / \partial Q = -E / W_E < 0$), т. е. имеет место конкурентный тип взаимодействия (за ресурс – осадки).

Перейдя к дискретному аналогу системы (1.32), (1.33) (при $dt \approx \Delta t = T = 1$ году), мы получим двумерное обобщение логистического отображения:

$$\begin{aligned} Q_{i+1} &= -(Q_i + E_i)Q_i / Q_0 + \dot{X}Q_i / Q_0 + Q_i; \\ E_{i+1} &= -(Q_i + E_i)E_i / E_0 + \dot{X}E_i / E_0 + E_i, \end{aligned}$$

где $Q_0 = W_Q / T$; $E_0 = W_E / T$.

Бифуркационные параметры $(\dot{X} - E_i) / Q_0$ и $(\dot{X} - Q_i) / E_0$ в данном случае сами зависят от текущих значений фазовых переменных. Бифуркационная диаграмма представлена на рис. 1.11, а.

Она согласуется с приводимым ниже рис. 1.17 (потеря устойчивости для испарения на севере и для расхода на юге). В средней части диаграммы срабатывает линейная модель, не имеющая бифуркаций (между стоком и испарением происходит «взаимодействие» по типу нейтрализма). Если бы эта зона отсутствовала, то бифуркационная диаграмма имела бы вид, показанный на рис. 1.11, б. Она соответствует многомодальному двумерному распределению.

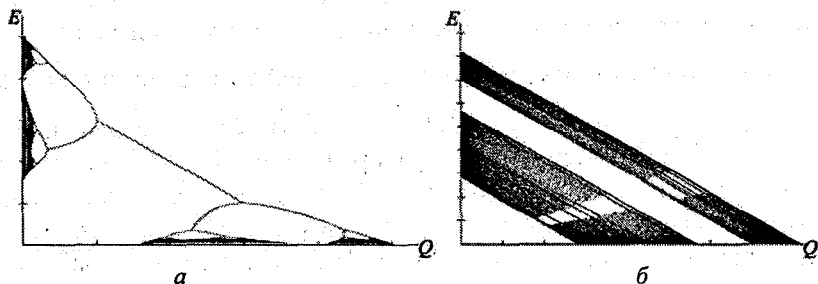


Рис. 1.11. Бифуркационные диаграммы для различных вариантов задания емкостей стоковой и испарительной предметных областей: а) $Q_0 \gtrless E_0$; б) $E_0 \approx Q_0$.

В реальности конкурентный тип взаимодействия приводит к тому, что каждая из фазовых переменных «отодвигает» наступление бифуркаций для другой переменной, так как в бифуркационные параметры они входят со знаком минус. Причем этот эффект остается в силе, если даже в системе (1.32), (1.33) одно из уравнений будет линейным. (В соответствии с рис. 1.17 в зоне неустойчивости по стоку испарение практически всегда устойчиво и может быть описано линейной моделью; и наоборот.)

Таким образом, учет новых фазовых переменных может не только кардинально усложнить ситуацию, требуя двухмодального описания, но и в определенных географических зонах стабилизировать ситуацию, зафиксировав ее на одномодальных распределениях (правда выходящих за пределы семейства кривых Пирсона, которыми оперируют в основном гидрологи). Однако эта стабилизация носит географически локальный характер, так как уменьшение нормы стока по мере перемещения на юг (или испарения — на север) рано или поздно приводит к бифуркациям. Регионы одно-

модального формирования одновременно как стока, так и испарения возможны только в центральных широтах ЕТР при умеренных (не малых) значениях коэффициентов стока и испарения, неявно входящих в выражения для бифуркационных параметров (например, в случае стока: $[(\dot{X} - E_i)/Q_0 = \dot{X}/Q_0 - E_i/Q_0 = 1/k_0 - E_i/Q_0]$). При малых значениях этих коэффициентов (юг для стока, север для испарения) значения бифуркационных параметров увеличиваются, что ведет к каскаду бифуркаций, приводящих к многомодальности.

1.5. Частичная инфинитность аттракторов речного стока

Рассмотренные выше действия логистического отображения могут породить двухмодальное распределение. Но это некое «динамическое порождение». Хотелось бы иметь модель в виде дифференциального уравнения, стохастическое обобщение которого приводило бы к уравнению ФПК, чтобы его стационарным решением было двухмодальное распределение.

Решение логистического уравнения имеет только одну точку притяжения (рис. 1.12, а), а поэтому распределение плотности вероятности будет одномодальным и напоминать некоторые типы из семейства кривых Пирсона (рис. 1.12, б). Его можно получить, введя в нелинейную модель аддитивные ($N = \bar{N} + \tilde{N}$, где $\bar{N} = 0$) и мультипликативные ($c = \bar{c} + \tilde{c}$ где $\bar{c} = 1$) белые шумы:

$$dQ = [(\bar{c} + \tilde{c})(-z_1 Q^2 + z_2 Q) + \tilde{N}]dt, \quad (1.34)$$

где $z_1 = 1/kW$; $z_2 = \dot{X}/W$.

В этом случае коэффициенты сноса и диффузии будут:

$$A = -\bar{c}\varphi(Q) + 0,5\varphi(Q)\partial\varphi/\partial Q + 0,5G_{\tilde{c}\tilde{N}}\partial\varphi/\partial Q; \quad (1.35)$$

$$B = G_{\tilde{c}}\varphi^2(Q) - 2G_{\tilde{c}\tilde{N}}\varphi(Q) + G_{\tilde{N}}, \quad (1.36)$$

где $\varphi(Q) = -z_1 Q^2 + z_2 Q$.

Дифференциальное уравнение (аналог уравнения Пирсона), определяющее стационарную плотность вероятности, будет:

$$\frac{dp}{dQ} = \left(-\frac{1}{B} \frac{dB}{dQ} + \frac{1}{B} 2A \right) p. \quad (1.37)$$

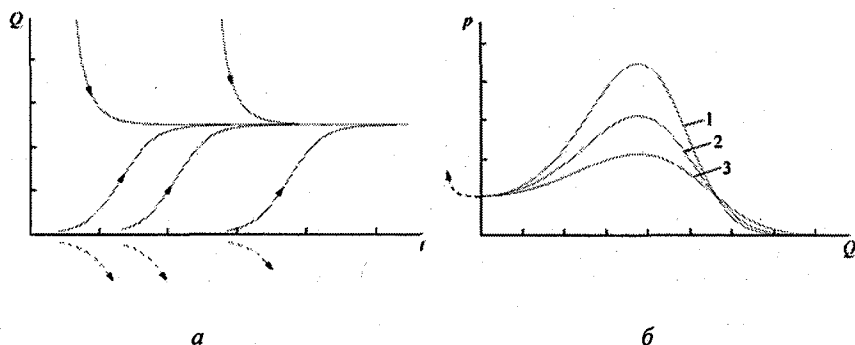


Рис. 1.12. Возможные решения логистического уравнения (а) и вид распределения плотности вероятности (б) по мере увеличения интенсивности аддитивного шума G_N [$G_N(1) < G_N(2) < G_N(3)$]

На рис. 1.12, б представлены в качестве примера решения при наличии только одного аддитивного шума, т. е. уравнения:

$$\frac{dp}{dQ} = \frac{-\frac{2Q^2}{kW} + \frac{2\dot{Q}Q}{W}}{G_N} p. \quad (1.38)$$

По сравнению с распределениями Пирсона (при аналогичном допущении относительно шумов) характерным является более прижатый хвост распределения [в этом играет большую роль квадрат расхода в отрицательном слагаемом числителя дроби в уравнении (1.38)]. (Если подобное распределение применять для отрицательных аргументов, то хвост в отрицательной области будет «катастрофически» подниматься вверх.) В данном случае из-за нелинейности модели (1.34) переход к моментам вряд ли целесообразен: уравнения для младших моментов будут зависеть от старших и для их развязки надо будет переходить к камулянтам. Таким образом, небольшое усложнение модели линейного формирующего фильтра порождает своеобразную эмерджентность моментов – субординация между ними нарушается (все зависят друг от друга).

Это говорит о том, что логистической моделью мы более жестко фиксируем предметную область понятий, в которой изучается формирование речного стока (снимая «ограничения» на τ , делая $\tau = \text{const}$, мы возвращаемся к предыдущей фиксации предметной области). С точки зрения частично инфинитной гидрологии, переход к логистической модели расширяет наши знания о процессе формирования стока, но это расширение и порождает проблемы: появляется нелинейность, новые частично инфинитные параметры (W), граничащие с инфинитной реальностью, влияние которой на сток не очень ясно, и т. п. Знание порождает осознаваемое незнание, в том числе и осознание того, что двухмодальности мы пока не получили.

Усложним модель (1.34), введя в линейный фильтр зависимость $\tau = W' / Q^2$ (по поводу показателя степени см. Часть 2). Размерность W' уже другая, по сравнению с W , несколько другой и физический смысл этого нового частично инфинитного параметра (и «проникает» он в более глубокие сферы инфинитной реальности). В этом случае вместо уравнения (1.34) получим:

$$dQ = [(\bar{c} + \tilde{c})(-z'_1 Q^3 + z'_2 Q^2) + \tilde{N}] dt, \quad (1.39)$$

где $z'_1 = 1/kW'$; $z'_2 = \dot{X}/W'$.

Соответственно изменится дифференциальное уравнение (1.38). Теперь вместо «картинок», представленных на рис. 1.12, будут несколько видоизмененные (рис. 1.13). Появляется еще не очень выраженный (особенно при больших значениях $G_{\tilde{N}}$) второй центр притяжения (чтобы не смущали отрицательные расходы, можно считать процесс центрированным).

Здравый смысл подсказывает, что для появления второй моды нужен линейный (по Q) член в уравнении (1.39). Откуда его взять? Введем в модель наряду с осадками приточность за счет грунтового питания $q_{\text{гр}} / (1 + Q/\bar{Q})$, где $q_{\text{гр}} = \text{const}$; $\bar{Q}$ – норма стока. При $Q \ll \bar{Q}$ имеет место постоянный приток воды (например, норма

минимального стока), который при $Q \gg \bar{Q}$ пренебрежительно мал (можно придумать и другие умозрительные варианты, более отвечающие реальности). В этом случае в уравнении (1.39) наряду с членом $z'_2 Q^2$ появится еще одно слагаемое $Qq_{\text{гр}} / \bar{Q} / W'$. Соответствующие решения представлены на рис. 1.14 (Если убрать квадратичный член, то распределение будет полностью симметричным.)

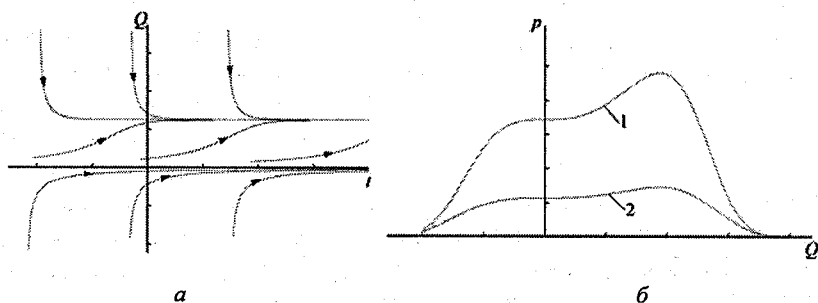


Рис. 1.13. Варианты решения уравнения (1.39) (а) и вид распределения плотности вероятности (б) по мере увеличения интенсивности аддитивного шума

$$G_N [G_N(1) < G_N(2)]$$

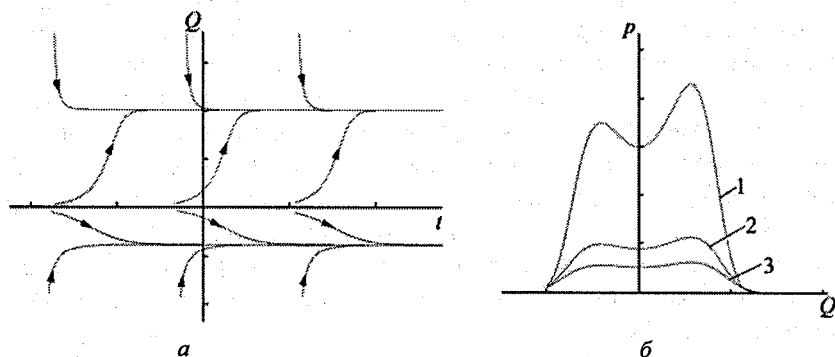


Рис. 1.14. Варианты решения уравнения (1.39) с добавленным грунтовым питанием (а) и вид распределения плотности вероятности (б) по мере увеличения интенсивности аддитивного шума $G_N [G_N(1) < G_N(2) < G_N(3)]$

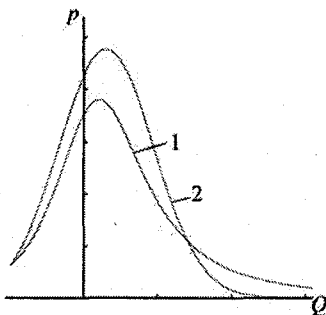


Рис. 1.15. Поднятие хвоста распределения при наличии параметрического шума:

$$G_{\tilde{c}}(1) > G_{\tilde{c}}(2)$$

Что же мы видим? В каком бы варианте (одномерном, многомерном или с помощью отображений) мы не пытались получить устойчивые вероятностные распределения (или предпосылки к таковым — в случае отображений), всегда аттрактивность зависит от свойств окружающей среды. Эти свойства в моделях представлены «задаваемыми» параметрами, обеспечивающими интерфейс «генетического кода модели» (ее операторов) с мутирующими воздействиями

среды, в которую погружена предметная область, зафиксированная моделью. В качестве этой «среды» может выступать и сам познающий субъект, меняющий фиксацию предметной области для совпадения решений модели с эмпирическими данными (именно это мы и делали, вводя нелинейность в модель линейного фильтра, чтобы добиться двухмодальных распределений плотности вероятности). Но такое мутирующее влияние возможно только в случае, если аттракторы (неважно какого типа: точечные или занимающие область фазового пространства) частично инфинитны, т. е. обладают интерфейсными возможностями для своего мутирования. Последнее необходимо, чтобы изменять вид распределения в изменяющихся внешних условиях инфинитной реальности. Такой средой для предметной области «формирование многолетнего речного стока» является климатическая система (например, температура воздуха, которую в модель стока можно включить только через частично инфинитные параметры, например коэффициенты стока), геологические особенности бассейна или различные виды хозяйственной деятельности.

Изменение свойств модели в сторону повышения устойчивости моментов при увеличении ее размерности (т. е. фактически мутирование) можно проиллюстрировать на примере одномерного распределения Пирсона. Рассмотрим возможный характер распре-

делений, получаемых из (1.1) с учетом выражений для коэффициентов (1.10) в зависимости от соотношения между $G_{\bar{c}}$ и $\bar{c}$, определяющих критерий $\beta = G_{\bar{c}} / \bar{c}$. Сначала проследим влияние $G_{\bar{c}}$ в случае учета испарения с помощью мультипликативного коэффициента $c = 1/kt$. Из рис. 1.15 видно, что увеличение интенсивности параметрического шума ведет к «поднятию хвоста» распределения и к одновременному сужению последнего в области модального значения, т. е. увеличение $G_{\bar{c}}$ ведет к очевидному изменению эксцесса (сравни с рис. 1.5).

Метафорически рис. 1.15 можно прокомментировать следующим образом. При сильном влиянии изменчивости внешней среды (инфинитной реальности – в данном случае внутригодовой вариации испарения) статистическое поведение расхода становится таким, что основная масса его среднегодовых значений группируется около моды, но одновременно увеличивается доля вероятности больших расходов (выбросы). Пока $\beta \ll 2$ соблюдается условие

нормировки $\int_{-\infty}^{\infty} p(Q) dQ = 1$, и по мере увеличения β все большая

доля расходов «стремится к бесконечности». Инфинитная реальность все слабее и слабее сжимает распределение $p(Q)$ и его моменты пытаются выйти за область своего первоначального устойчивого положения. Речной бассейн (его статистический режим стока) пытается уйти в «иной» мир в поисках «лучшей доли» или, по-простому, хаотизироваться (альтернатива такая: либо хаотизироваться, либо умереть). (Все эти рассуждения, конечно, скорее относятся к «смерти» модели, которой мы пытаемся описывать эволюцию вероятностных распределений стока бассейна.)

Параметрический шум $G_{\bar{c}}$ работает на распластывание кривой плотности вероятности и на увеличение вероятности появления больших расходов. Поэтому именно его надо уменьшать, а в идеале (видимо недостижимом) ликвидировать вообще. Для этого видятся три пути:

1) Перейти к условным распределениям, выделив, например, норму испарения в задаваемое аддитивное внешнее воздействие, т.

е. в качестве $\bar{N}$ в уравнении (1.3) брать величину $(\dot{X} - \bar{E})/\tau$. В этом случае $\bar{c} \rightarrow 1$. Величину $G_{\bar{c}}$ можно определить следующим образом. Известно (см., например, [8]), что для простых марковских случайных процессов автокорреляционная функция $r(\Delta t)$ имеет вид:

$$r = \exp[-(\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}})\Delta t], \quad (1.40)$$

где Δt – временная сдвигка. (Именно из этой функции был получен критерий β .)

Вне зависимости от того, какой моделью мы описываем вероятностный процесс формирования стока, показатель степени эмпирической функции (1.40) $r = \exp \alpha \Delta t$, т. е. $\alpha = -(\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}})$, остается неизменным. Таким образом, зная $\bar{c}$, можно определить значение $G_{\bar{c}}$. При времени релаксации бассейна $\tau = 1$ год величина c обратно пропорциональна коэффициенту стока. Поэтому, если считать $\dot{X} \approx Q + E$, в уравнении (1.3) $\bar{c} \approx 1$, а $G_{\bar{c}}$ обязана своим происхождением влиянию на сток внутригодовых вариаций запасов воды в почво-грунтах ΔU . Если, например, при $\dot{X} = \bar{N} = 8$ (усл. ед.) значение величины $\bar{c}$ равняется двум, а $\alpha = \bar{c} - 0,5G_{\bar{c}} = 0,5$, то $G_{\bar{c}}$ будет равняться трем ($\beta = G_{\bar{c}}/\bar{c} = 3/2$, неустойчивость по дисперсии). Если теперь норму испарения перевести во внешнее

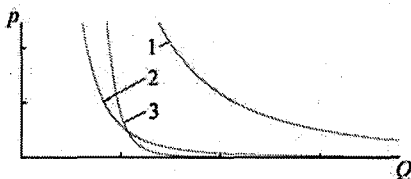


Рис. 1.16. Изменение толщины хвоста распределения (1) при переносе информации о внешнем воздействии с мультипликативной составляющей на аддитивную (2). Положение кривой (3) соответствует кривой (2) при непропорционально сильном уменьшении интенсивности шума $G_{\bar{c}}$ по сравнению с $\bar{c}$

воздействие, то $\bar{N} = 8 - 4 = 4$, а на долю $G_{\bar{c}}$ останется 1, т. е. $\beta = 1$ (граница устойчивости по дисперсии). На рис. 1.16 представлена визуализация подобной ситуации. Хотя форма распределения осталась практически без изменений, хвост при $\bar{c} = 1$ приближается к оси расходов значительно быстрее.

Как изменится значение $G_{\tilde{N}}$, входящее в выражение для коэффициента диффузии (1.5)? Ведь теперь внешнее воздействие – это разность осадков и испарения. Вопрос сложный: ведь величина $N = \dot{X} - E$ – искусственная конструкция, нарушающая причинно-следственные связи. Если для осадков интенсивность шума $G_{\tilde{N}}$ вполне физически ощутимая величина, появление которой рано или поздно можно было ожидать в климатических сценариях, то значение умозрительной интенсивности шума «эффективного» внешнего воздействия $(\dot{X} - \dot{E})$ можно находить только обратным пересчетом по известным из непосредственных наблюдений начальным моментам рядов стока из системы уравнений (1.6)–(1.9). Во всяком случае в нормальном приближении справедлива формула (см. [8]) для дисперсии D : $D = G_{\tilde{N}} / 2\bar{c}$. Дисперсия, получаемая по фактическому ряду наблюдений, не зависит от того, какой моделью мы пытаемся описывать процесс формирования стока. В нашем примере $\bar{c}$ уменьшилась в 2 раза, значит, во столько же должна уменьшиться и величина $G_{\tilde{N}}$ (хотя для конкретного случая – нашего иллюстративного примера – ситуация оказывается не очень чувствительной к изменению $G_{\tilde{N}}$).

2) Переход от безусловных распределений к условным может быть выполнен [при наличии распределений $p(E, Q)$] для значений E любой обеспеченности, а не только для нормы $\bar{E}$, как это было сделано выше. Фиксируя E , мы как бы замораживаем потенциальную фазовую переменную, конкурирующую с расходом за общий ресурс, представленный осадками. Поэтому следующая возможность уйти от мультипликативной неустойчивости – сделать E полноправной фазовой переменной, т. е. перейти к системе (1.16) и соответственно к уравнению (1.17) или более общему, включающему еще и ΔU с коэффициентами сноса и диффузии, определяемыми формулами (1.24) и (1.25). Устойчивость гарантируется если $\text{div} \vec{A} = \sum \partial A_i / \partial Q_i < 0$ ($Q_1 = Q$; $Q_2 = E$; $Q_3 = \Delta U$). Исходя из представленных выше выражений для коэффициентов сноса, имеем:

$$\Sigma \partial A_i / \partial Q_i = -(\bar{c} - 0,5G_{\tilde{c}}) - (\bar{c}_E - 0,5G_{\tilde{c}_E}) - \bar{c}_{\Delta U} \delta(\Delta U) \quad (1.41)$$

(в коэффициенте $A_{\Delta U}$ мы проигнорировали параметрический шум). Из этого выражения видно, что учет дополнительных фазовых переменных увеличивает шансы на сжимаемость, если, конечно, нет тенденции к неустойчивости ($G_{\tilde{c}_E} \rightarrow \bar{c}_E$). Однако сравнительный анализ рядов расходов и испарения для ЕТР показал, что подобная тенденция отсутствует (рис. 1.17).

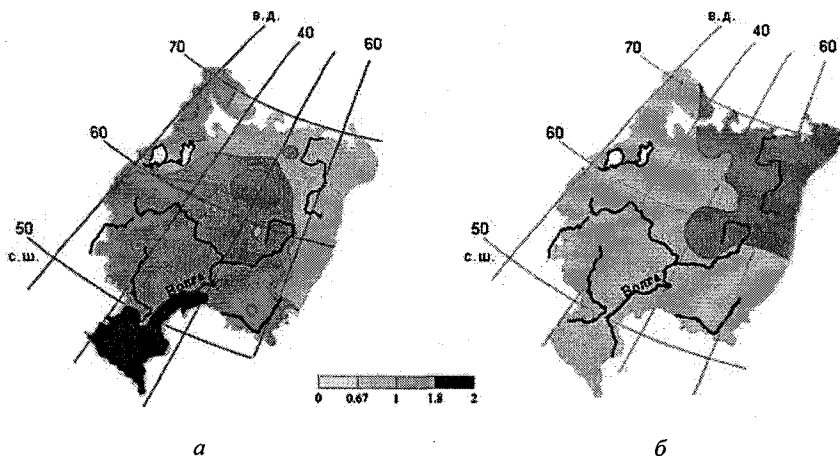


Рис. 1.17. Распределение зон неустойчивости по стоку (а) и по испарению (б)

Наоборот, из-за сравнительной «зеркальности» зон неустойчивости происходит увеличение степени сжимаемости двумерного распределения $p(Q, E)$ по сравнению с одномерным $p(Q)$. Действительно,

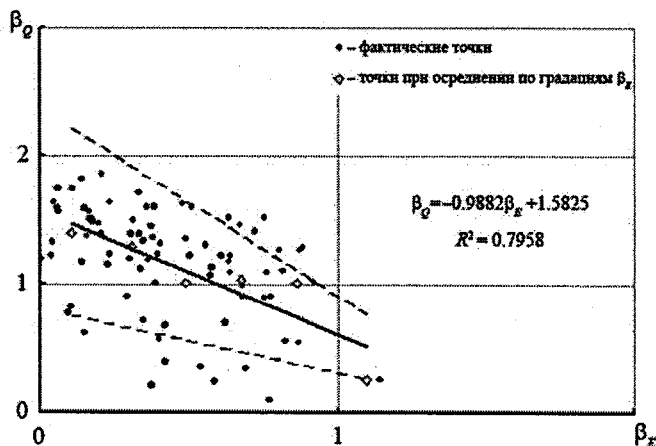
$$\begin{aligned} \text{div} \vec{A} &= (\bar{c}_Q - 0,5G_{\tilde{c}_Q}) - (\bar{c}_E - 0,5G_{\tilde{c}_E}) = \\ &= -\bar{c}_Q(1 - 0,5\beta_Q) - \bar{c}_E(1 - 0,5\beta_E), \end{aligned} \quad (1.42)$$

т. е. в любом случае каждая из переменных стабилизирует другую, причем в тем большей степени, чем неустойчивее последняя (табл. 1.3 и рис. 1.18).

Таблица 1.3

Влияние широты местности на численные значения критериев устойчивости

№ п/п	Градус северной широты	Река – створ	β_Q	β_E
1	44,22	Кума – ст. Александрийская	1,93	0,00
2	48,00	Кундурчя – ст-ца Владимирская	1,78	0,01
3	50,63	Оскол – г. Старый Оскол	1,49	0,06
4	51,45	Большой Караман – пгт Советский	1,85	0,02
5	52,67	Чагра – с. Новотулка	1,78	0,01
6	53,68	Кондурча – п. Украинка	1,59	0,33
7	54,22	Кондурча – с. Кошки	1,44	0,36
8	55,78	Летка – с. Казань	1,24	0,31
9	56,65	Уфа – г. Красноуфимск	1,20	0,04
10	57,48	Полисть – д. Подтополье	1,16	0,35
11	58,02	Нея – д. Буслаево	0,90	0,29
12	59,50	Воложба – д. Воложба	1,35	0,35
13	60,57	Юг – д. Гаврино	0,90	0,30
14	61,72	Вычегда – г. Сыктывкар	1,29	0,61
15	62,23	Яренга – с. Тохта	1,46	0,64
16	64,72	Пинега – с. Кулогоры	0,34	0,61
17	65,82	Пеца – д. Игумново	0,25	0,87

Рис. 1.18. Взаимосвязь между критериями устойчивости по стоку β_Q и испарению β_E (штрихом выделен 50 %-ной доверительный интервал)

Смысл объединения в том, что интегрированная (стоковая и испарительная) предметная область испытывает меньшее влияние

«инфинитной реальности», чем каждая из них в отдельности (они обе стали финитным ядром многомерной модели). Если бы кроме них ничего не было, то система стала бы полностью мультипликативно замкнутой, и мы могли перейти к нормальному двумерному распределению $p(Q, E)$ (симметричному, точнее «эллипсоидному колокольчику»), заведомо ликвидировав толстый хвост. Обобщая этот вывод, следует заметить, что разгрузка мультипликативной составляющей шумов одномерной линейной модели путем ввода новых фазовых переменных нормализует распределение. При $\beta_i \rightarrow 0$ (а значит, при $\bar{c}_i \rightarrow 1$) $\text{div} \vec{A}$ стремится к n , т. е. к топологической размерности системы, взятой со знаком « $\rightarrow$ ». Это означает, что ресурсы частично инфинитной среды для развития системы (модели, фиксирующей предметную область линейно и без мультипликативных шумов) исчерпаны. Не из-за того, что их нет у инфинитной реальности (они там есть всегда и им больше нигде находиться), а из-за того, что исчерпаны интерфейсные механизмы взаимодействия модели и окружения. На систему давит аддитивный шум, но модель не может найти в окружении «друга» (очередную фазовую переменную) для своей эволюции. Факторов среды, действующих на систему, много; все они (с точки зрения системы) равноценны — действует закон больших чисел. Наступает некая квазиравновесная ситуация, когда точки равновесия «дрожат» (например, за счет ΔU как на рис. 1.6), но в целом ситуация застыла в положении равновесия, которое определяют внешние ресурсы (осадки) и селективная ценность конкурирующих переменных (она определяется их временами релаксации). Это для одномерной системы с мультипликативными шумами можно было ожидать не экспоненциального убывания вероятности больших расходов, теперь же все события разворачиваются на фазовой плоскости, размеры которой ограничены подаваемыми ресурсами, которые (в силу нормальности системы) ограничены прижатым двумерным хвостом. Возможностей для качественных изменений нет, имеет место своеобразный гомеостаз и «самодостаточность».

На рис. 1.19 представлена такая ситуация в виде временных разверток (рис. 1.19, а, б) и фазового портрета (рис. 1.19, в).

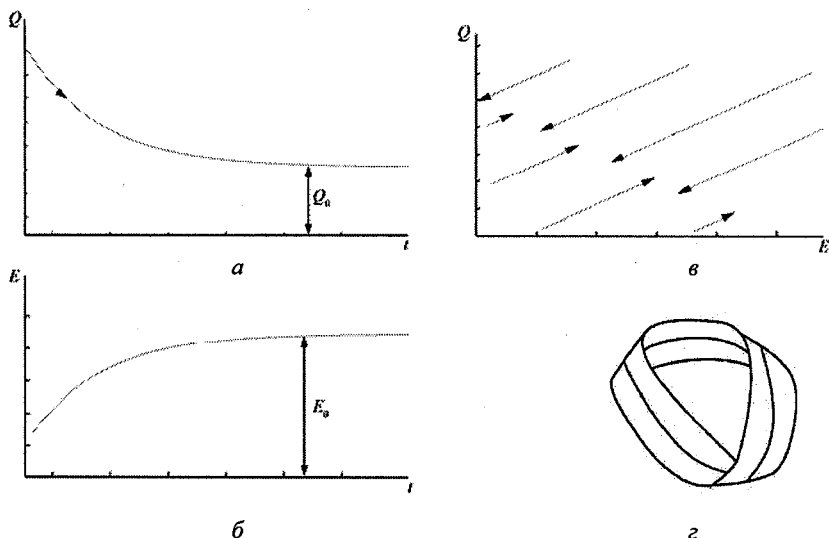


Рис. 1.19. Переходные режимы (а, б) и фазовый портрет (в) при конкурентном взаимодействии переменных за общий ресурс (г – лист Мебиуса)

Наблюдается довольно унылая картина: обе переменные через определенный переходной период занимают свою «кормушку», суммарный «корм» в которых равен подаваемым в бассейн осадкам. Если осадки сделать «случайными», то вместо притягивающихся точек будут «притягивающие области», размер которых определяется законом распределения подаваемых ресурсов.

Можно привести несколько метафорический, но очень наглядный пример этой унылой безысходности (для проектировщиков ничего унылого нет, наоборот – все устойчиво и предсказуемо). Пусть на одной стороне полоски бумаги «живут» существа под названием «расходы», а на другой стороне – под названием «испарения». Они ничего не знают друг о друге, но так как у них общий ресурс («осадки»), то потери его они учитывают соответствующими коэффициентами стока и испарения (модель линейного формирующего фильтра). Но вот «расходы» обнаружили, что некоторые из них, дойдя до края полоски («Земли»), исчезают (уходят в бесконечность). Это их удивляет: «расходы» в принципе не

могут быть бесконечными при конечном ресурсе. (Аналогичная ситуация и для «испарений».) И вот один «ученый расход» (его фамилия Мебиус) предложил полуповернуть полоску, а края соединить (рис. 1.19, з). Таким образом и «расходы» и «испарения» оказались на односторонней искривленной поверхности (лист Мебиуса), причем (уж совсем удивительно) только с одним краем (вся граница состоит из одной замкнутой кривой). Получилось нечто конечное (без неуправляемых, «степенных» бесконечностей), но уже двумерное: «конца» нет, но замкнутость есть.

Такой самодостаточности в гидрологии нет. Практически все ряды стока имеют фрактальную размерность (в пределах 1–3, иногда больше), что говорит о том, что они находятся в процессе эволюции и открыты частично инфинитному влиянию, а их фазовые переменные нелинейно взаимодействуют друг с другом и «сами с собой». Отсюда третий путь ликвидации неустойчивости.

3) Введение в модель нелинейных взаимодействий. Именно это мы и проделали, когда добивались двухмодального распределения.

Есть определенный опыт [16] применения метода характеристик к изучению многомерных распределений. В основе их эволюционных моделей для плотности вероятности лежат нелинейные динамические уравнения. Следует обратить внимание, что сама модель ФПК (как и ее стационарный «огрызок») всегда линейны относительно плотности вероятности. Переход к подобным нелинейным динамическим моделям – шаг довольно радикальный. С моментами приходится обращаться очень осторожно – их значимость по мере роста порядка не убывает; в систему дифференциальных уравнений для моментов они могут входить нелинейно и вопрос об устойчивости повисает в воздухе (надо определяться с ее смыслом, который может быть различным). Какими аналитическими зависимостями аппроксимировать эмпирическое двухмодальное распределение не совсем ясно (опыта у гидрологии нет). Какими критериями согласия пользоваться непонятно (и можно ли вообще использовать существующие методики?). Если механизм образования двухмодальности динамический, то может быть метрика для сравнения должна носить не совсем уж статистический характер? Последнее особенно важно, так как продол-

жительность рядов не позволяет говорить о надежности даже третьего момента. Если встать на такую точку зрения, то на сегодняшний день мы вообще не обладаем методами статистики, чтобы замечать вторую моду.

Да и толстый хвост замечается скорее по его эмпирическим последствиям. Линейная теория устойчивости говорит только о том, что при $\beta \rightarrow 2$ система (1.6)–(1.9) ставится под сомнение, распределения выходят из семейства кривых Пирсона, используемых в гидрологии. Куда «выходят» – это вопрос. При этом толстый хвост, с точки зрения гидрологического обеспечения надежности строительных проектов, видимо опаснее, чем двухмодальность, так как создаются предпосылки существенных выбросов расходов. Смысл прижатия хвостов как раз и заключается в том, что эти выбросы становятся статистически предсказуемы. Ситуацию поясняет рис. 1.20: «шарику» легче выскочить из потенциала («перевернутая плотность вероятности») на рис. б (толстый хвост), чем на рис. а (хвост спадает по экспоненте). В двумерном случае (рис. в) большие плотности вероятности одномерного хвоста «вынуждены размазаться» по двумерной поверхности, затруднив двумерному «шарику» выход наружу.

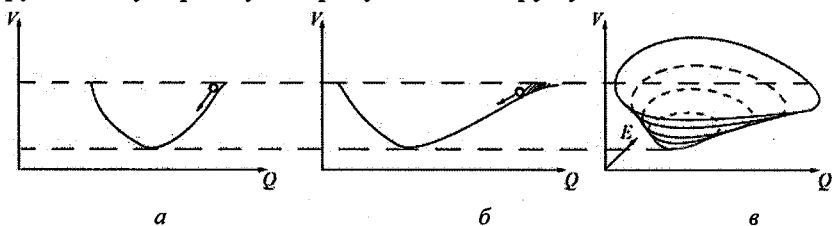


Рис. 1.20. К предсказуемости выбросов из двумерного потенциала

Глядя на рис. б и в, можно «удивиться»: проекция двумерного потенциала $V(Q, E)$ на одномерный потенциал $V(Q)$ явно отличается. Но в данном случае надо иметь в виду не просто геометрическую проекцию. При проецировании на какое-либо сечение $E = \text{const}$ (например, $E = \bar{E}$), т. е. при переходе к условному распределению, действительно имеет место геометрическая проекция. При проецировании же просто «на стенку», т. е. при переходе

к безусловному распределению, мы должны на этой «стенке» сконцентрировать все расходы, размещенные по оси испарений. Это, естественно, не только делает распределение одномерным (таково и условное распределение), но и значительно увеличивает значение плотностей вероятности, а единица (100 %), нормирующая распределение, становится «одномерной» ($\int_{-\infty}^{\infty} p(Q) dQ = 1$), а не

«двумерной» ($\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(Q, E) dQ dE = 1$).

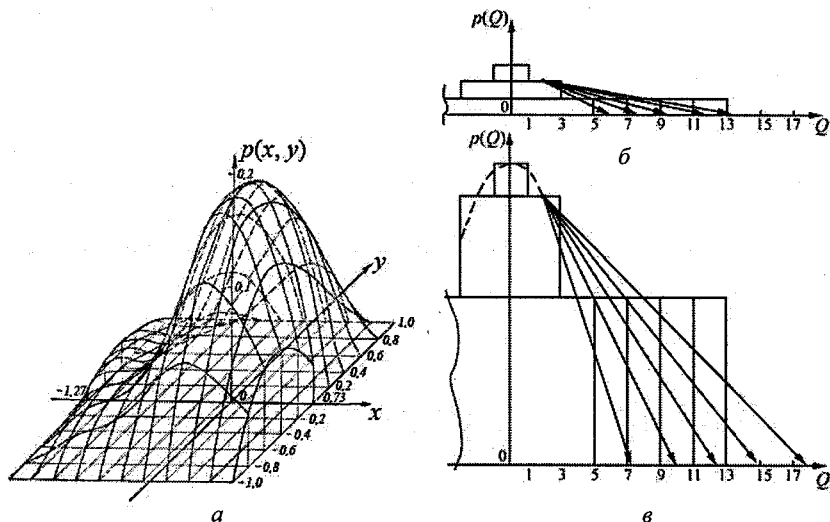


Рис. 1.21. Распределение двумерной асимметричной плотности вероятности (а), условное (б) и безусловное (в) распределения расходов воды

Рис. 1.21 иллюстрирует эффект уменьшения значений проэкстраполированных расходов по условному распределению по сравнению с безусловным. Так как в данном примере экстраполяция выполняется по двум точкам, осредненно характеризующим хвосты распределений, то она носит линейный характер, что упрощает ситуацию, но удаляет ее от реального нелинейного изменения хво-

ста. Однако так как оба конкурирующих варианта поставлены в одинаковые (линейные) условия, то сравнение результатов оправдано. Они показывают, что по мере удлинения (утяжеления) хвоста различие между проэкстраполированными значениями расходов увеличивается в «пользу» безусловного распределения.

Это различие составляет для данного примера 20–35 %. Конечно, эти цифры индивидуальны для каждого распределения, среди которых могут быть очень далекие от нормального (на рис. 1.21, *a* приведен пример распределения из работы [36], связанного с исследованием срыва синхронизации в аналоговой системе фазовой автоподстройки). Следует обратить внимание, что в большинстве реальных случаев хвосты, может быть и медленно, но все-таки прижимаются к оси расходов (в противном случае при экстраполяции по последним нескольким столбцам одинаковой высоты зависимость $p(Q)$ будет идти параллельно оси Q как для безусловного, так и для условного распределений).

Часть 2.

ДИАГНОСТИРОВАНИЕ БИФУРКАЦИОННЫХ ОЧАГОВ ПРИ ФОРМИРОВАНИИ МНОГОЛЕТНЕГО ГОДОВОГО СТОКА

2.1. Генезис преодолеваемого гносеологического тупика

Во второй части предлагается модель формирования многолетнего годового стока в виде логистического отображения с дробной нелинейностью, позволяющая диагностировать появление бифуркационных очагов в зависимости от климатических условий, в которых находятся речные бассейны. Материал этой части представлен таким образом, чтобы его можно было читать относительно независимо от первой части (отсюда повторная расшифровка и визуализация некоторых базовых понятий, моделей, формул и т. п.). Здесь фактически представлены три статьи, объединенные общей темой (первая включает два раздела: 2.1 и 2.2).

В последние годы уделяется повышенное внимание [10, 25] тому обстоятельству, что в некоторых регионах кривые распределения плотности вероятности (в частности, многолетнего речного стока) выходят за рамки семейства кривых К. Пирсона, которыми обычно пользуются в практической гидрологии (подобные рекомендации зафиксированы в действующем нормативном документе [35]). Эмпирические распределения часто имеют так называемый «толстый хвост» или полимодальны. До недавнего времени это обстоятельство объяснялось ограниченностью статистических выборок (короткими рядами наблюдений). Для подтверждения справедливости подобной точки зрения часто ссылаются на возможность удлинения рядов методом Монте-Карло. Первоначальные «беззубые» гистограммы по мере увеличения числа испытаний становятся ярко выраженными одномодальными распределениями плотности вероятности. При этом забывают, что для задания фильтра используются три начальных момента (или расчетных гидрологических характеристики: норма, коэффициенты вариации и асимметрии), которые ничего другого, кроме одномодального распределения, и дать не могут.

В 1961 г. Л. М. Конаржевский [22] в ходе исследований и качественной оценки типовых особенностей вариаций рядов весеннего половодья в лесостепной и степной зонах выявил многочисленные случаи (68 %) двухмодальных распределений. Он объяснил появление двухмодальности особенностями формирования весеннего стока в степной зоне, а именно зимними потерями запасов воды на водосборе, которые увеличивают в многолетнем разрезе число лет с очень низким стоком за счет уменьшения средних по водности лет.

А.В. Рождественский и А.И. Чеботарев [30] объясняют это явление тем, что в формировании стока весеннего половодья в многоводные годы принимает участие вся площадь водосбора, а в маловодные – только ее часть (без бессточных понижений). Это изменение величины действующей площади приводит к появлению второй моды в зоне повышенного стока из-за разнородности величин стока в статистической совокупности.

В последнем нормативном документе в области инженерных гидрорасчетов [35] рассмотрен метод «усеченных распределений», который допускает существование неоднородных распределений расходов воды и разделение их на две однородные совокупности. В данном случае двухмодальность связывается с разным генетическим происхождением стока (снеговые и дождевые максимумы), хотя применяемые при этом статистические методы (общее ранжирование ряда наблюдений, использование медианного значения и т. п.) являются атрибутами единой статистической совокупности.

Ниже предлагается физическое («генетическое») объяснение правомерности появления многомодальности (для регионов, где теряется устойчивость кривых из семейства Пирсона) с помощью механизма отображений с дробной нелинейностью. Двухмодальность в этом случае объясняется не неоднородностью выборки (разная природа максимумов стока), а механизмом формирования стока (выборка при этом рассматривается как статистически однородная).

Базовой (онтологической) моделью формирования всех видов многолетнего стока является уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial p(Q, t)}{\partial t} = \frac{\partial [A(Q, t)p(Q, t)]}{\partial Q} + \frac{\partial^2 [B(Q, t)p(Q, t)]}{\partial^2 Q}, \quad (2.1)$$

где $p(Q, t)$ – плотность вероятности расхода воды Q ; $A(Q, t)$ и $B(Q, t)$ – коэффициенты сноса и диффузии, определяемые физико-статистическими свойствами речного бассейна и внешних воздействий на него, представленных задаваемыми параметрами, входящими в выражения для A и B .

Наиболее широкое практическое применение находит подобная модель, основанная на линейном формирующем фильтре и приводящая к хорошо изученному в математической статистике семейству кривых Пирсона (в установившемся статистическом режиме), которое в основном и применяется в гидрологии [30, 34]. Примером может служить уравнение

$$dQ = [-(\bar{c} + \tilde{c})Q + (\bar{N} + \tilde{N})] dt, \quad (2.2)$$

которое приводит к модели ФПК с коэффициентами сноса и диффузии, имеющих следующий вид:

$$A(Q, t) = -(\bar{c} - 0,5G_{\tilde{c}})Q - 0,5G_{\tilde{c}\tilde{N}} + \bar{N}; \quad (2.3)$$

$$B(Q, t) = G_{\tilde{c}}Q^2 - 2G_{\tilde{c}\tilde{N}}Q + G_{\tilde{N}}, \quad (2.4)$$

где $c = 1/k\tau$, $N = \dot{X}/\tau$ (здесь k – коэффициент стока, τ – время релаксации, $\dot{X}$ – интенсивность осадков); $\bar{c}$ и $\bar{N}$ – математические ожидания; $\tilde{c}$ и $\tilde{N}$ – белые шумы с интенсивностями $G_{\tilde{c}}$ и $G_{\tilde{N}}$; $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$ – взаимная интенсивность шумов.

На практике оперируют несколькими начальными моментами $(m_i, i = \overline{1, 4})$, так как старшие моменты бессмысленно привлекать при ограниченной продолжительности наблюдений. Поэтому разумно аппроксимировать модель ФПК системой обыкновенных дифференциальных уравнений для моментов [15]:

$$dm_1/dt = -(\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}})m_1 + \bar{N} - 0,5G_{\bar{c}\bar{N}}; \quad (2.5)$$

$$dm_2/dt = -2(\bar{c} - G_{\bar{c}})m_2 + 2\bar{N}m_1 - 3G_{\bar{c}\bar{N}}m_1 + G_{\bar{N}}; \quad (2.6)$$

$$dm_3/dt = -3(\bar{c} - 1,5G_{\bar{c}})m_3 + 3\bar{N}m_2 - 7,5G_{\bar{c}\bar{N}}m_2 + 3G_{\bar{N}}m_1; \quad (2.7)$$

$$dm_4/dt = -4(\bar{c} - 2G_{\bar{c}})m_4 + 4\bar{N}m_3 - 4 \cdot 3,5G_{\bar{c}\bar{N}}m_3 + 6G_{\bar{N}}m_2. \quad (2.8)$$

Из этой системы уравнений видно, что при $\beta = G_{\bar{c}} / \bar{c} > 2/i$ (здесь i – порядок момента) происходит потеря устойчивости решения для соответствующего момента (чем старше момент, тем при меньшей относительной интенсивности шума β он теряет устойчивость). Ранее (см. [10]) было получено выражение, позволяющее вычислять значения β по информации, измеряемой на стандартной гидрометеорологической сети наблюдений:

$$\beta = 2k \ln r + 2, \quad (2.9)$$

где r – коэффициент автокорреляции ряда расходов.

Оказалось, что значительная часть юга ЕТР неустойчива по моментам, а значит, и по расчетным гидрологическим характеристикам – коэффициентам вариации и асимметрии (рис. 2.1).

Сама по себе неустойчивость не указывает, какой моделью надо описывать сток в неустойчивых зонах на рис. 2.1. Она говорит только о том, что в них не срабатывает одномодальная асимметричная идеализация, к которой приводит кривая Пирсона III типа (или ее модификация, выполненная Крич-

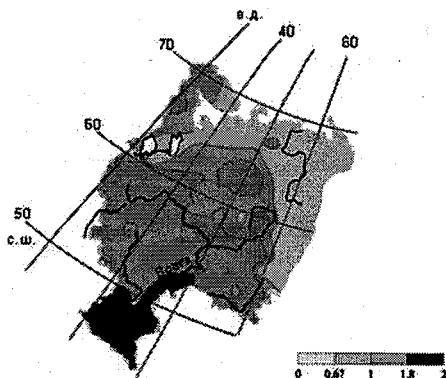


Рис. 2.1. Распределение зон неустойчивости годового стока ЕТР по критерию β

ким–Менкелем, так же как и вообще семейство кривых из распределений Пирсона).

Эмпирические распределения (гистограммы) в зонах неустойчивости чаще всего либо с «толстым хвостом», либо двухмодальны. Это своеобразный эпистемологический тупик инженерной гидрологии, ориентированной на одномодальные «тонкохвостые» распределения.

2.2. Модель для выявления бифуркационных очагов

В основе стохастической модели формирования стока, приводящей к распределениям из семейства кривых Пирсона, лежит динамическое ядро (обыкновенное дифференциальное уравнение) в виде линейного формирующего фильтра:

$$dQ/dt = -Q/k\tau + \dot{X}/\tau. \quad (2.10)$$

Предполагается, что $\tau = \text{const}$. Однако, если посмотреть на редуccionные зависимости модуля стока q от площади бассейна F (размеры площади, наряду с географическим расположением бассейна, определяют значение τ), то видно (рис. 2.2), что для южных регионов (сухостепные и полупустынные районы) имеет место зависимость $\tau = \text{const}/q^n$ (можно использовать разные аналитические приближения, например, по типу редуccionных зависимостей максимального стока [3], с. 270).

Объяснение подобного характера зависимостей наиболее вероятно связано с большими потерями воды на испарение (см. [34], с. 152). Показатель редуccionции n может меняться, главное чтобы модуль стока уменьшался с увеличением площади водосбора. В подобных случаях вместо линейного фильтра имеет смысл рассматривать нелинейную модель:

$$dQ/dt = -Q^{(n+1)}/kW + Q^n \dot{X}/W, \quad (2.11)$$

где константа в редуccionной зависимости обозначена как W ; она имеет (при $n = 1$) размерность объема и определяет насыщающую емкость речного бассейна.

Возможные варианты распределений $p(Q)$ при использовании в модели ФПК динамического ядра в виде (2.11) при $n = 1$ рас-

смотрены в работе [10]. Распределения могут быть одномодальными, с «поднятыми хвостами», а могут быть ситуации, когда вообще отсутствуют стационарные распределения (это зависит от характера взаимодействия аддитивных и мультипликативных вводимых в модель шумов).

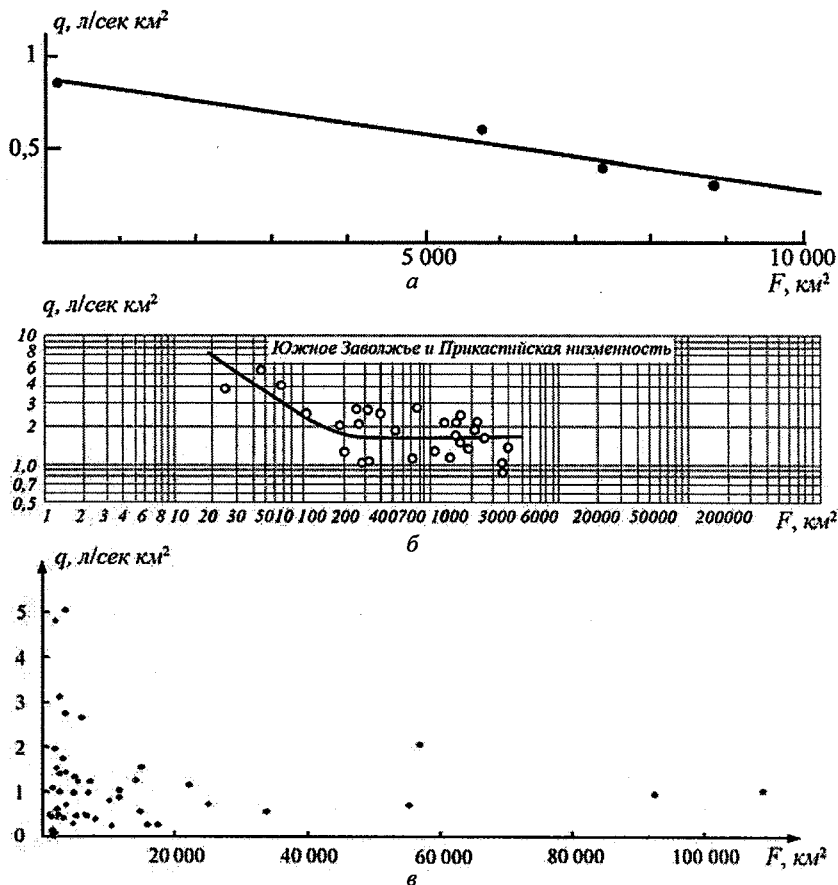


Рис. 2.2. Зависимости $q = f(F)$ для Северного Казахстана (а: по данным табл. 5.12 из работы [34]), Южного Заволжья и Прикаспийской низменности (б: из работы [34]) и верховьев Обского бассейна (в)

Учитывая, что практически мы имеем дело с дискретными рядами годового стока, имеет смысл перейти от дифференциального уравнения к отображению:

$$Q_{i+1} = Q_i - Q_i^{(n+1)} / kQ_0 + Q_i^n \dot{X} / Q_0, \quad (2.12)$$

где $Q_0 \approx W/T$ ($T = 1$ год).

В зависимости от значения параметра n результаты применения (2.12) будут отличаться, но в широком диапазоне его изменения качественная картина бифуркаций будет сохраняться. Рассмотрим сначала классический случай логистического отображения [$n = 1$, при таком значении n нет необходимости в дополнительных коэффициентах для сохранения размерности в (2.12)]. Уравнение (2.12) можно привести к виду:

$$Q_{i+1} = Q_i + cQ_i(1 - Q_i / k\dot{X}), \quad (2.13)$$

где $c = \dot{X} / Q_0$ – бифуркационный параметр, представляющий фактически величину, обратную коэффициенту стока. Известно (см., например, [10, 27]), что в интервале $c \in (2, 2,57)$ происходят бифуркации удвоения периода (с определенными нюансами, связанными с появлением на бифуркационной диаграмме «окон прозрачности»), которые затем сменяются хаотическим режимом.

Чтобы «привязать» модель (2.13) к конкретной географической ситуации, вычислим значения c вдоль одного из меридианов, проходящих примерно по центру ЕТР (42° в.д.). Для этого используем карты распределения коэффициента стока. Полученная зависимость представлена на рис. 2.3, а.

Из рис. 2.3, а видно, что уже начиная с 62° с.ш. распределение плотности вероятности должно быть полимодальным, так как примерно с широты, на которой расположен г. Петрозаводск, запускается механизм бифуркаций. Однако, судя по рис. 2.1, это должно происходить южнее, по крайней мере, с тех широт, где теряет устойчивость дисперсия и близок к критическим значениям критерий устойчивости по математическому ожиданию. Именно на этих широтах ставится под сомнение «дееспособность» линейного формирующего фильтра, приводящего к одномодальным распределени-

ям. Если же исходить из левой бифуркационной диаграммы на рис. 2.3, б, то примерно с широты г. Ярославля мы выходим не только за рамки одно-модальных распределений, но и полимодальных. Статистическое изучение речного стока в рамках рассматриваемых моделей становится невозможным, начинается «инфракрасная зона».

Область действия моделей можно суще-

ственно увеличить, если уменьшить показатель редукции модуля стока в модели (2.12). Например, при $n = 0,5$ бифуркационный очаг сместится к югу. Это более соответствует действительности, так как мы смещаемся ближе к областям лесостепей и степей, в которых больше оправдываются зависимости, представленные на рис. 2.2. В зонах избыточного и достаточного увлажнения репрезентативные площади малы ($500\text{--}1500\text{ км}^2$) и кривая редукции быстро выходит на горизонтальный участок.

Судя по рис. 2.3, б, при $n = 0,5$ на значительной части ЕТР должен реализовываться двухмодальный режим формирования стока, порожденный периодом, равным двум. И действительно, этот факт подтверждается исследованиями Э. И. Саруханяна и Н. П. Смирнова [31]. Ими установлено, что в бассейне Волги (он попадает в неустойчивую область на рис. 2.1) «двухлетнее циклическое колебание является одним из основных компонентов изменений стока рек Волжского бассейна. Однородность этого колебания в пространстве и относительная устойчивость в течение длительного времени свидетельствуют о его реальности» (рис. 2.4).

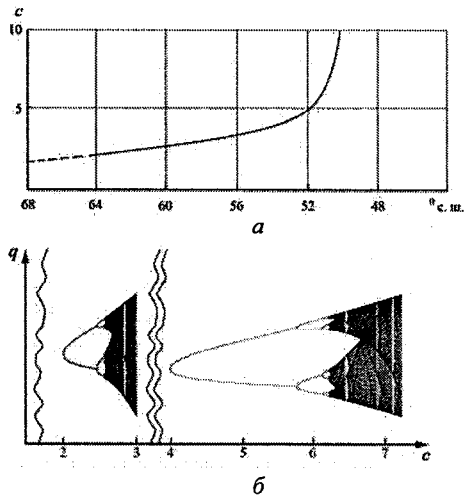


Рис. 2.3. Зависимость бифуркационного параметра от географической широты и вид бифуркационных очагов при $n = 1$ (слева) и $n = 0,5$

Сами по себе двухлетние циклы колебаний в геофизике известны с конца XIX века (температура воздуха, стратосферные ветры в экваториальной зоне, перераспределение воздушных масс). Авторы

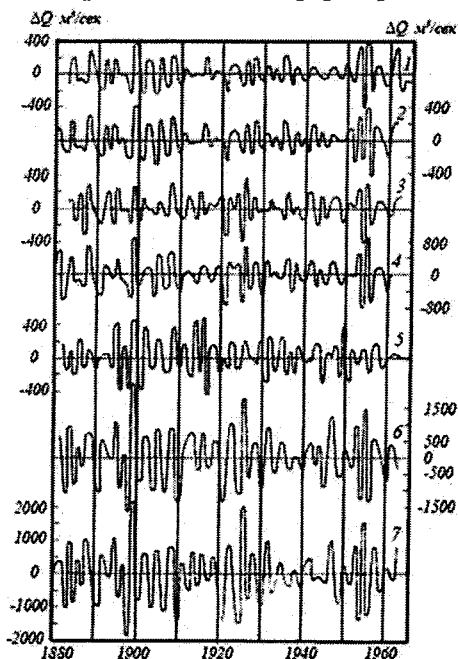


Рис. 2.4. Значения расходов в створах бассейна Волги (фильтр «1 минус 3», см. [31]:

- 1 – приток в Рыбинское водохранилище;
- 2 – сток Волги у Ярославля; 3 – сток Оки у Горькова;
- 4 – сток Волги у Горького; 5 – сток Камы у Перми;
- 6 – сток Волги у Куйбышева;
- 7 – сток Волги у Волгограда

коэффициент стока. Именно это обстоятельство отражает карта распределения коэффициента стока на ЕТР и, как следствие, характер изменения параметра c с севера на юг, рис. 2.3, а.)

Таким образом, уравнение (2.12) вполне может выполнять роль модели, диагностирующей появление бифуркационных очагов. Причем не только в режиме мониторинга, но и в режиме долгосрочного прогнозирования. Известна, например, формула Тюрка,

работы [31] именно в геофизических процессах («внешних воздействиях на речные бассейны») видят причины двухлетних циклов на створах бассейна Волги. В нашей же интерпретации — их механизм заключается в нелинейности формирования стока. Не исключено, что и геофизические циклы порождены бифуркационным механизмом. Это просто указывает на сравнительную универсальность механизма удвоения периода. (Следует заметить, что и сам бифуркационный параметр $c = 1/k$ порожден во многом внешними для речного бассейна факторами: чем выше температура воздуха, тем ниже

связывающая испаряемость E_0 с температурой воздуха T : $E_0 = 300 + 25T + 0,05T^3$. С ее использованием коэффициенту стока можно придать следующий вид [8]:

$$k = 1 - \text{th}[(300 + 25T + 0,05T^3) / \dot{X}] \quad (2.14)$$

(эта формула справедлива при выполнении уравнения водного баланса для замкнутых водосборов $\dot{X} = Q + E - k = Q / \dot{X} = (\dot{X} - E) / \dot{X} = 1 - E / \dot{X}$ – и при использовании уравнения связи между испарением и осадками в форме Н. А. Багрова; практически одинаковые результаты получаются и при использовании уравнения Э. М. Ольдекопа).

В эту формулу входят величины, в обязательном порядке присутствующие в любом долгосрочном климатическом сценарии (нормы осадков и температуры воздуха). Используя модель (2.12) и формулу (2.14), можно для любой точки поверхности суши (гидроствора) проследить возможную эволюцию распределения плотности вероятности расхода или модуля стока с одномодальной на многомодальную (и наоборот), а также прогнозировать временные интервалы, на которых возможны такие трансформации, т. е. появление и исчезновение бифуркационных очагов.

На рис. 2.5 проиллюстрирована такая возможность для гипотетического сценария изменения коэффициента стока по части положительной волны синусоиды, охватывающей многолетний период [при анализе реальных сценариев надо использовать ход процесса $k(t)$, спрогнозированный по зависимости (2.14)]. В случае (а) режим стока на всем протяжении процесса может быть описан одномодальным распределением $p(q)$. Затем (б и в) происходит увеличение числа мод (вплоть до потери устойчивости самого механизма бифуркации (г), белая полоса в центре рисунка) и возвращение в устойчивое одномодальное состояние.

Естественно, «зашумление» модели (2.12) за счет годовой (пошаговой i) изменчивости параметров k и $\dot{X}$ [при численном моделировании это делается с помощью функции Random ()] приводит к размытости бифуркационных процессов $q(t)$ (при сохранении их основных качественных черт) и к возможности построения реаль-

ных распределений плотности вероятности на основе генерирования стокового ряда с помощью отображения (2.12). Подобные примеры (для другого круга задач) приведены в работах [9, 15].

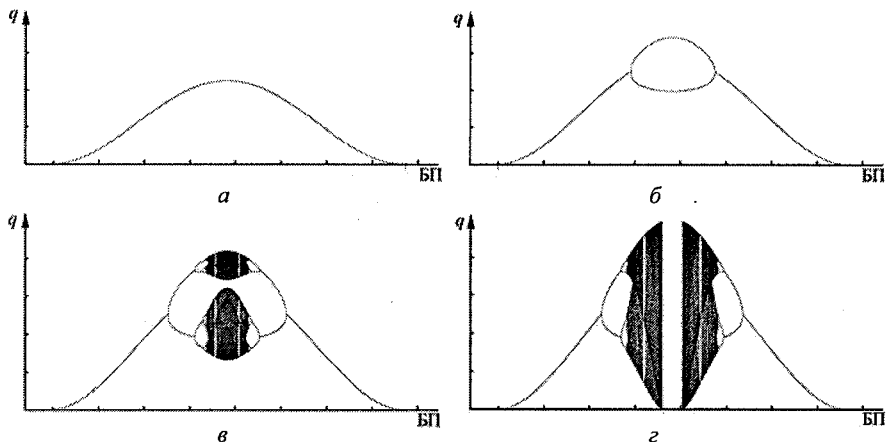


Рис. 2.5. Появление и исчезновение бифуркационных очагов при сценариях климата, отличающихся степенью уменьшения коэффициентов стока (последовательно от a к $г$), входящего в бифуркационный параметр (БП), изменяющийся по оси абсцисс

На рис. 2.6 представлена уже не бифуркационная диаграмма, а часть временного ряда, структура которого усложняется слева направо по мере увеличения значения бифуркационного параметра.

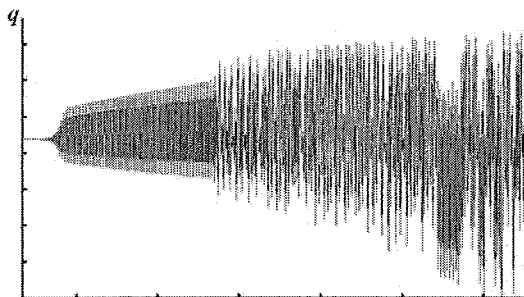


Рис. 2.6. Временная развертка процесса изменения модуля стока по мере увеличения значения бифуркационного параметра

По результатам разделов 2.1 и 2.2 можно сделать следующие выводы.

Впервые в гидрологии применено логистическое отображение с дробной нелинейностью, позволившее подтвердить полученные ранее результаты по неустойчивости стохастической модели

формирования многолетнего речного стока, основанной на линейном формирующем фильтре.

Выявлен возможный механизм возникновения полимодальности в вероятностных распределениях многолетнего годового стока, связанный с бифуркациями удвоения периода.

Предложен способ прогностического диагностирования бифуркационных очагов при долгосрочном изменении климата, основанный только на доступной информации, содержащейся в климатических сценариях.

2.3. Диагностические свойства коэффициента автокорреляции при исследовании устойчивости формирования стока

В этом разделе показывается роль статистической внутрирядной связности в способах оценки устойчивости формирования вероятностных распределений многолетних видов речного стока. Как и в случае разделов 2.1 и 2.2, данный раздел можно читать автономно от остального текста, так как необходимые формулы продублированы.

Коэффициенты автокорреляции используются в гидрологии давно, но особенно их практическая значимость возросла после появления очередного нормативного документа по определению расчетных гидрологических характеристик СНиПа 2.01.14-83 [33]. Расчетные коэффициенты вариации и асимметрии рекомендуется определять, используя обязательные приложения 2 и 3 с учетом коэффициентов автокорреляции между смежными членами ряда. (В действующем своде правил СП 33-101-2003 [35] эти рекомендации сохранены.)

В данном случае коэффициент автокорреляции влияет на численные эмпирические оценки расчетных гидрологических характеристик. Однако выяснилось [17], что он существенным образом влияет и на устойчивость самого процесса формирования многолетнего речного стока. Почти на половине территории России он оказывается неустойчивым по третьему и второму начальным моментам. Аналогичная (и даже хуже) картина наблюдается по минимальному и максимальному стоку. Фраза «неустойчивость фор-

мирования стока» вне контекста, фиксирующего предметную область исследования, звучит довольно неопределенно. Само по себе формирование стока (как и все на свете) не может быть ни устойчивым, ни неустойчивым. Необходим контекст: в таком-то смысле, вкладываемом в слово «неустойчивость»; с точки зрения такого-то конкретного взгляда (модели) на процесс формирования стока (раз появляется слово модель, то автоматически появляются слова «решение модели», и речь уже идет о неустойчивости решения такой-то конкретной модели) и т. д.

Конкретизация слов «неустойчивость формирования многолетнего стока» заключается в том, что имеется в виду неустойчивость решения стохастической модели, описывающей эволюцию четырех начальных моментов, необходимых для задания семейства кривых К. Пирсона. Так как инженерная гидрология пользуется именно этими (одномодальными, асимметричными) распределениями (кривые Крицкого–Менкеля – частный случай кривой Пирсона III типа при нулевом левом граничном условии), то упомянутый выше контекст не очень и требует озвучивания: специалистам понятно, о чем идет речь.

Раз выясняется, что многолетний сток формируется неустойчиво (в поясненном только что смысле), то возникает проблемная ситуация, для преодоления которой требуется решение следующих задач:

1. Предложить такие модели («точку зрения на формирование многолетнего стока»), чтобы их решения были устойчивыми.

2. Объяснить физические причины появления и ликвидации неустойчивости исходя из наиболее общего на сегодняшний день онтологического базиса гидрологии.

Решение этих задач и является целью раздела.

Устойчивость решений моделей формирования многолетнего стока с мультипликативными шумами. Если опираться на обычные одномодальные асимметричные кривые распределения, используемые в инженерной гидрологии, то генетической моделью стока служит линейный формирующий фильтр:

$$dQ = [-(\bar{c} + \tilde{c})Q + \bar{N} + \tilde{N}]dt, \quad (2.15)$$

который получается введением белых шумов в обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка:

$$dQ/dt = -Q/k\tau + \dot{X}/\tau, \quad (2.16)$$

где Q – расход воды; $c = \bar{c} + \tilde{c} = 1/k\tau$; $N = \bar{N} + \tilde{N} = \dot{X}/\tau$ (здесь k – коэффициент стока, τ – время релаксации бассейна, $\dot{X}$ – осадки; $\bar{N}$, $\bar{c}$ – статистические нормы; $\tilde{N}$, $\tilde{c}$ – коррелированные белые шумы с интенсивностями $G_{\tilde{N}}$, $G_{\tilde{c}}$ и взаимной интенсивностью $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$).

Уравнение (2.15) статистически эквивалентно уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК), которое является прогностической моделью для эволюции плотности вероятности $p(Q)$:

$$\frac{\partial p(Q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial [A(Q,t)p(Q,t)]}{\partial Q} + 0,5 \frac{\partial^2 B(Q,t)p(Q,t)}{\partial Q^2}, \quad (2.17)$$

где A , B – коэффициенты сноса и диффузии, определяемые физико-географическими параметрами, входящими в (2.15). Они имеют следующий вид: $A(Q,t) = -(\bar{c} - 0,5G_{\tilde{c}})Q - 0,5G_{\tilde{c}\tilde{N}} + \bar{N}$; $B(Q,t) = G_{\tilde{c}}Q^2 - 2G_{\tilde{c}\tilde{N}}Q + G_{\tilde{N}}$.

На практике ограничиваются несколькими начальными моментами m_i . Поэтому аппроксимируем уравнение ФПК для $p(Q)$ системой уравнений для моментов. В теории случайных процессов подобная процедура известна [29], и в нашем случае она приводит к следующей системе дифференциальных уравнений для моментов:

$$\begin{aligned} dm_1/dt &= -(\bar{c} - 0,5G_{\tilde{c}})m_1 - 0,5G_{\tilde{c}\tilde{N}} + \bar{N}; \\ dm_2/dt &= -2(\bar{c} - G_{\tilde{c}})m_2 + 2\bar{N}m_1 - 3G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_1 + G_{\tilde{N}}; \\ dm_3/dt &= -3(\bar{c} - 1,5G_{\tilde{c}})m_3 + 3\bar{N}m_2 - 7,5G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_2 + 3G_{\tilde{N}}m_1; \\ dm_4/dt &= -4(\bar{c} - 2G_{\tilde{c}})m_4 + 4\bar{N}m_3 - 14G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_2 + 6G_{\tilde{N}}m_1. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Стационарным устойчивым решением (2.18) является семейство распределений К. Пирсона. Матрица M , соответствующая оператору системы (2.18), будет:

$$M = \begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{m}_1}{\partial m_1} & 0 & 0 & 0 \\ 2\bar{N} - 3G_{\bar{c}\bar{N}} & \frac{\partial \dot{m}_2}{\partial m_2} & 0 & 0 \\ 3G_{\bar{N}} & 3\bar{N} - 7,5G_{\bar{c}\bar{N}} & \frac{\partial \dot{m}_3}{\partial m_3} & 0 \\ 0 & 6G_{\bar{N}} & 4\bar{N} - 14G_{\bar{c}\bar{N}} & \frac{\partial \dot{m}_4}{\partial m_4} \end{bmatrix}$$

Собственные значения λ матрицы M определяются уравнением:

$$\det(M - \lambda E) = \det \begin{bmatrix} (-\bar{c} + 0,5G_{\bar{c}}) - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 2\bar{N} - 3G_{\bar{c}\bar{N}} & (-2\bar{c} + 2G_{\bar{c}}) - \lambda & 0 & 0 \\ 3G_{\bar{N}} & 3\bar{N} - 7,5G_{\bar{c}\bar{N}} & (-3\bar{c} + 4,5G_{\bar{c}}) - \lambda & 0 \\ 0 & 6G_{\bar{N}} & 4\bar{N} - 14G_{\bar{c}\bar{N}} & (-4\bar{c} + 8G_{\bar{c}}) - \lambda \end{bmatrix} = 0$$

или

$$\begin{aligned} & [(-\bar{c} + 0,5G_{\bar{c}}) - \lambda][(-2\bar{c} + 2G_{\bar{c}}) - \lambda] \times \\ & \times [(-3\bar{c} + 4,5G_{\bar{c}}) - \lambda][(-4\bar{c} + 8G_{\bar{c}}) - \lambda] = 0, \end{aligned}$$

т.е. $\lambda_1 = -\bar{c} + 0,5G_{\bar{c}}$; $\lambda_2 = -2\bar{c} + 2G_{\bar{c}}$; $\lambda_3 = -3\bar{c} + 4,5G_{\bar{c}}$; $\lambda_4 = -4\bar{c} + 8G_{\bar{c}}$.

Таким образом, устойчивость всей системы уравнений (2.18) будет при соблюдении наиболее жесткого условия $\bar{c} > 2G_{\bar{c}}$. Однако, если это условие не выполнено, но имеет место более мягкое неравенство $\bar{c} > 1,5G_{\bar{c}}$, то процесс формирования стока все равно можно моделировать тремя первыми уравнениями системы (2.18), в которые не входит значение неустойчивого момента m_4 . Возможность оперировать эксцессом пропадает, но асимметричные одно-модальные распределения типа кривой Пирсона III типа или кривой Крицкого–Менкеля, требующие знания 3-х моментов, можно

использовать. Если не выполняется неравенство $\bar{c} > 1,5G_{\bar{c}}$, то справедливо еще более мягкое — $\bar{c} > G_{\bar{c}}$, то можно ограничиться двумя уравнениями, т. е. нормальным приближением. Изложенное можно представить и так: $\text{div} m_i = \sum_{i=1}^4 dm_i / dm_i < 0$; $\bar{c} > 2G_{\bar{c}}$. Это условие диссипативности системы; оно же (в силу того, что система (2.18) развязана по моментам — младшие не зависят от старших) есть и условие линейной устойчивости.

Модель, представленная системой (2.18), является прогностической, так как позволяет оценивать эволюцию моментов при изменении внешних воздействий на речной бассейн и характера антропогенной деятельности [8]. Однако она является одновременно и диагностической, так как позволяет выявлять условия, при которых происходит потеря устойчивости входящих в нее начальных моментов. Из уравнения видно, что при $\bar{c} < 0,5iG_{\bar{c}}$ (здесь i — порядок момента) $dm_i / dt > 0$, т. е. $m_i \rightarrow \infty$. Это и есть формальный признак неустойчивости. Если обозначить $\beta = G_{\bar{c}} / \bar{c}$ (параметры $\bar{c}$ и $G_{\bar{c}}$, как показано выше, однозначно определяют спектр собственных значений λ_i матрицы оператора системы (2.18)), то неустойчивость для моментов i -го порядка возникает при $\beta > 2/i$ (чем старше момент, тем меньшая относительная интенсивность шума $G_{\bar{c}} / \bar{c}$ требуется для неустойчивости; по старшим моментам речной сток практически всегда неустойчив). Ранее была получена сравнительно простая диагностическая формула для вычисления β :

$$\beta = 2k \ln r + 2, \quad (2.19)$$

где k — коэффициент стока; r — коэффициент автокорреляции стока смежных лет. Формула (2.19) является следствием экспоненциального решения уравнения ФПК, определяющего изменение автокорреляционных функций для простых марковских процессов (время релаксации бассейнов для многолетнего стока $\tau = 1$ год), к которым приводит использование линейного формирующего фильтра [17]: $r = \exp[-(\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}})\Delta t]$. При годовой сдвиге $\Delta t = 1$ из данного выражения следует формула (2.19).

По этой формуле были диагностированы зоны неустойчивости по начальным моментам для территории России (СНГ) (рис. 2.7).

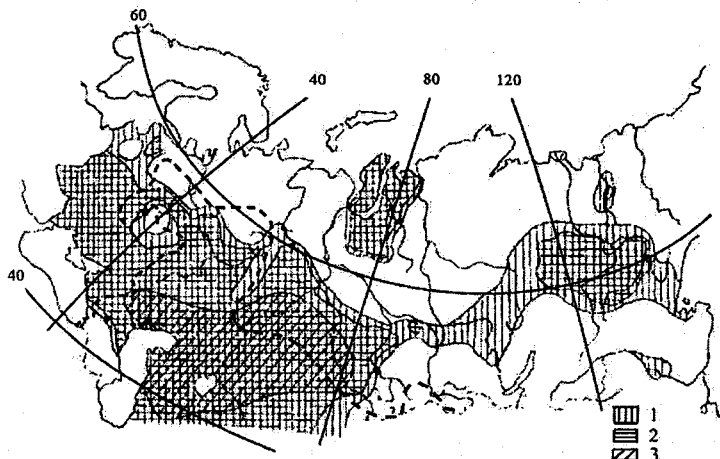


Рис. 2.7. Неустойчивость формирования годового стока на территории СНГ:
1 – $\beta > 2/3$; 2 – $\beta > 1$; 3 – $\beta \geq 1,8$ (но меньше двух)

Зоны неустойчивости тяготеют к регионам недостаточного увлажнения. Особняком выделяется север Западной Сибири (см. ниже).

Подавление неустойчивости методами частично инфинитной гидрологии. Основная задача частично инфинитной гидрологии (в контексте данного раздела) – подавить неустойчивость формирования стока. С учетом изложенного ранее это означает изменение «точки зрения» на его формирование. А точка зрения – это модель. Значит, нужна такая модель, которая будет иметь устойчивое решение, например тонкий хвост распределения. Подробно методология частично инфинитной гидрологии изложена в серии монографий [8, 10, 13], затрагивающих как глубинные эпистемологические аспекты моделирования и прогнозирования развивающихся, статистически неустойчивых систем, так и

практические приложения к различным предметным областям (механика жидкости, история, география). Сжато ее суть (в контексте рассматриваемой проблемы) сводится к разгрузке мультипликативных шумов, вызывающих неустойчивость решения. В нашем

случае – это $-(\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}})$. Разгрузку можно сделать несколькими способами.

Коэффициенты моделей создают интерфейс между ее решением и внешними воздействиями («инфинитной реальностью» – на языке частично инфинитной гидрологии), которые могут учитываться как аддитивно (например, $\bar{N} + \tilde{N}$), так и мультипликативно (например, $-(\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}})m_1$). Неустойчивость вызывает только мультипликативная составляющая шумов, поэтому ее и надо «разгружать». В случае многолетнего стока шумящий параметр c определяется нормой испарения с поверхности бассейна, а интенсивность мультипликативного шума $G_{\bar{c}}$ – его внутригодовыми (ведь это белый шум) вариациями. Но если его (этого внешнего воздействия) роль столь велика, что может возникнуть неустойчивость, то разумно рассматривать испарение не как досадную помеху, а как новую фазовую переменную, которая наряду с расходом воды формирует гидрометеорологический режим речного бассейна (это называется расширением фазового пространства модели). Тогда, учитывая, что коэффициенты стока k_Q и испарения k_E определяются выражениями $k_Q = Q/(Q + E)$, $k_E = E/(Q + E)$, линейные формирующие фильтры для Q и E можно представить в виде:

$$dQ = [(-\bar{c}_Q + \tilde{c}_Q)(Q + E) + \bar{N}_Q + \tilde{N}_Q]dt; \quad (2.20)$$

$$dE = [(-\bar{c}_E + \tilde{c}_E)(Q + E) + \bar{N}_E + \tilde{N}_E]dt. \quad (2.21)$$

Системе уравнений (2.20) и (2.21) статистически эквивалентно уравнение ФПК для совместной плотности вероятности $p(Q, E; t)$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{i=1}^2 \frac{\partial (A_i p)}{\partial Q_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^2 \frac{\partial^2 (B_{ij} p)}{\partial Q_i \partial Q_j}, \quad (2.22)$$

где $Q_1 = Q$; $Q_2 = E$. Коэффициенты сноса и диффузии определяются формулами:

$$A_Q = -(\bar{c}_Q - 0,5G_{\bar{c}_Q})(Q + E) - 0,5G_{\bar{c}_Q\tilde{N}_Q} + \bar{N};$$

$$A_E = -(\bar{c}_E - 0,5G_{\bar{c}_E})(Q + E) - 0,5G_{\bar{c}_E\tilde{N}_E} + \bar{N};$$

$$B_Q = G_{\bar{c}_Q}Q^2 - 2G_{\bar{c}_Q\tilde{N}_Q}Q + G_{\tilde{N}_Q};$$

$$B_E = G_{\bar{c}_E}E^2 - 2G_{\bar{c}_E\tilde{N}_E}E + G_{\tilde{N}_E};$$

$$B_{QE} = B_{EQ} = 0.$$

Неустойчивость решений системы уравнений для моментов (2.18) в одномерном случае означает, что для уравнения ФПК (2.17) производная $\partial A / \partial Q$ близка к нулю. В случае же уравнения (2.22) устойчивость двумерного распределения будет при $\text{div} \vec{A} = \sum_{i=1}^2 \partial A_i / \partial Q_i < 0$. И действительно, это неравенство подтверждено для ЕТР [20]. Но расширение фазового пространства дело трудоемкое, так как необходимо методами фрактальной диагностики установить, сколько новых переменных надо вводить в рассмотрение, а главное, — каким-то образом научиться генерировать их многолетние ряды («напрямую», например, испарение на гидрометеорологических постах не измеряют). Привлечение дополнительных начальных моментов (тем более смешанных) точности также не добавляют.

Однако есть и другой путь разгрузки мультипликативных шумов. Ведь динамическую модель для расхода можно записать и следующим образом:

$$dQ/dt = -Q/\tau + k\dot{X}/\tau \quad (2.23)$$

(обозначения прежние). При вводе шумов в (2.23) мы также приходим к линейному формирующему фильтру (2.15), в котором (примем $\tau = 1$ году) $\bar{c}' = 1$, а $\tilde{c}'$ учитывает влияние проигнорированных переменных, например, вариации запасов воды в почвогрунтах, а N' равно $k\dot{X}/\tau$ (ясно, что $\bar{N}'$ и $\tilde{N}'$ будут отличаться от таковых в исходном варианте модели). Формально все процедуры, приводящие к формуле для критерия β , сохраняются, но сам вид формулы меняется:

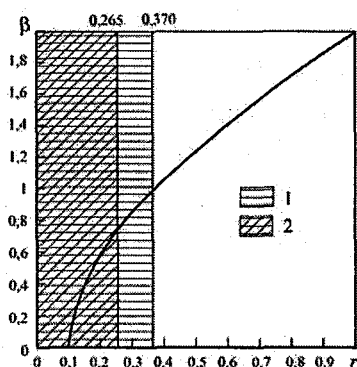


Рис. 2.8. Зависимость $\beta = f(r)$:
1, 2 – области устойчивости 2- и 3-
моментных распределений
соответственно

$$\beta = 2 \ln r + 2, \quad (2.24)$$

т. е. коэффициент стока k вообще выпадает из критерия $\beta = \bar{c}' / G_{\bar{c}'}$, а устойчивость полностью определяется коэффициентом автокорреляции.

На рис. 2.8 показан график зависимости (2.24).

Из этого рисунка видно, что до значений $r = 0,265$ возможно устойчиво ($\beta < 0,67$) описывать сток в трехмоментном приближении (т. е. одномодальным асимметричным распределением), до значений $r = 0,37$ – в нормальном ($\beta < 1$) при-

ближении. Если сравнить эти результаты с распределением коэффициентов автокорреляции по территории СССР [28] (табл. 2.1), то за исключением регионов Среднего Урала, Приуралья (бассейн р. Тобола), Западной Сибири и Северного Казахстана (рис. 2.9) модель с разгруженными мультипликативными шумами ведет себя довольно устойчиво (в отношении других видов стока, например минимального, ситуация хуже, но лучше, чем в случае исходной модели).

Таблица 2.1

Коэффициенты автокорреляции для различных районов Советского Союза [28]

Район	$r(1)$
Кольский п-ов, Карелия	0,24
Северо-Запад ЕТС и Северный край	0,21
Прибалтика	0,20
Белоруссия, Верхнее Поднепровье, Верхне-Волжский р-н, Средний Урал (б. р. Камы) и Приуралье, Нижнее Поволжье и Западный Казахстан	0,23
Украина, Молдавия, Донской р-н, Северный Кавказ	0,22
Закавказье и Дагестан	0,17
Средний Урал и Приуралье (б. р. Тобола), Западная Сибирь и Северный Казахстан	0,31
Урало-Эмбинский р-н, Актыбинская, Кустанайская обл., Центральный и Южный Казахстан, Средняя Азия	0,24
Ангаро-Енисейский, Лено-Индигирский р-ны, Северо-Восток СССР, Дальний Восток, п-ов Камчатка	0,14

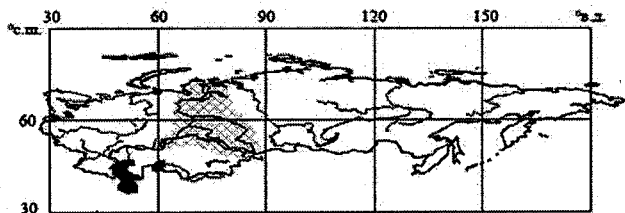


Рис. 2.9. Регион с неустойчивым (по третьему начальному моменту) формированием стока

Эти результаты поднимают два вопроса:

1. За счет потери каких свойств в математическом описании процесса формирования стока получена устойчивость в аддитивном случае?

2. Как физически объяснить такую существенную роль коэффициента автокорреляции в задачах устойчивости?

Ответ на первый вопрос «лежит на поверхности»: за счет нарушения причинно-следственных связей. В аддитивной модели мы считаем, что на бассейн «подаются» так называемые эффективные осадки, т. е. осадки минус испарение. Этот «минус» учитывается коэффициентом стока и его внутригодовые вариации, наряду с вариациями осадков, входят в модель аддитивно. (В варианте расширения фазового пространства испарение было такой же искомой функцией как и расход, что полностью соответствует физике процесса.) Спрашивается, если аддитивная модель не соответствует этой физике, зачем она вообще нужна? Она оказывается полезной, если речь идет о стационарных случайных процессах; например, климатические сценарии часто можно считать равновесными. В этом случае $dm_i / dt = 0$, а в оставшейся алгебраической части модели формирования стока вопрос о временной изменчивости моментов (т. е. направленности времени, причинно-следственной зависимости) вообще не стоит, так как стационарная часть модели является балансовым (безынерционным) соотношением. Ответ на второй вопрос требует более глубокого рассмотрения.

Детерминистическая интерпретация влияния коэффициента автокорреляции на устойчивость формирования речного стока. Рис. 2.7, как и огромный регион Западной Сибири на рис.

2.9, вызывают вопросы. Гидрологи привыкли считать благом большие значения коэффициентов корреляции и автокорреляции: связь «большая», надежная, статистически устойчивая. И вдруг она порождает неустойчивость формирования стока! Да. Для каких-то (большинства) целей иметь большие значения коэффициентов корреляции необходимо. Но не с точки зрения устойчивости решений системы уравнений для моментов (2.18). В марковских процессах речного стока (в том, что они марковские, подавляющее большинство гидрологов не сомневается) автокорреляционная функция спадает по экспоненте. Причем при годовой сдвигке значения коэффициентов автокорреляции $r(1)$ часто уже выпадают из доверительного интервала. Но если $r(1)$ большие, то это означает, что спад идет, например, степенным образом со всеми вытекающими последствиями для линейного формирующего фильтра, в том числе и неустойчивостью.

Визуально устойчивость (неустойчивость) иллюстрирует рис. 2.10, а и 2.10, а'.

Заметим, что в самой системе уравнений для моментов коэффициента автокорреляции нет, свойства устойчивости полностью определяются соотношением среднего и интенсивности шума величины, обратной коэффициенту стока. Из экспоненты

$$r = e^{-(\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}})\Delta t} \quad (2.25)$$

следует, что при $G_{\bar{c}} \rightarrow 2\bar{c}$ коэффициент автокорреляции $r(\Delta t = 1)$ стремиться к единице, т. е. по мере выравнивания постоянной и переменной частей температурных воздействий на водосборы (коэффициент стока учитывает потери, а для многолетнего стока эти потери связаны с испарением, зависящем в основном от температуры воздуха) появляется тенденция к неустойчивости. Практически (см. систему уравнений (2.18) для моментов m_i , $i = 1, 4$) это сводится к следующему. Моменты, начиная с m_4 , последовательно теряют «самостоятельность». Если в устойчивой системе справедливо выражение

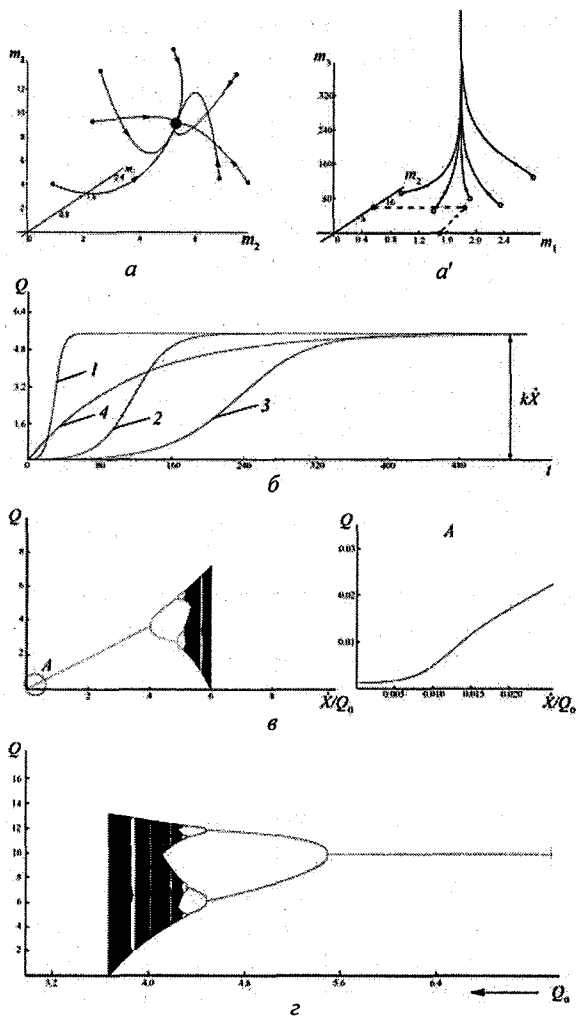


Рис. 2.10. Устойчивое (а) и неустойчивое (по третьему начальному моменту) (а') решение системы (2.18); влияние емкости бассейна W в уравнении (2.26) на динамичность решения: $W_1 < W_2$ [кривая 3 соответствует случаю, когда коэффициент стока находится в числителе второго слагаемого правой части уравнения (2.26), а кривая 4 – линейной модели (2.16)] (б); бифуркационная диаграмма для логистического отображения (2.27) (в); влияние уменьшения параметра, характеризующего емкость бассейна Q_0 на режим бифуркации (з)

$$\dot{m}_i = f(m_i, m_{i-1}, m_{i-2}, m_{i-3}, \vec{a}),$$

то в неустойчивой –

$$\dot{m}_i = f(m_{i-1}, m_{i-2}, m_{i-3}, \vec{a}),$$

где $\vec{a}$ – вектор задаваемых параметров и внешних воздействий: $\vec{a} = (\bar{c}, G_{\bar{c}}, G_{\bar{N}}, G_{\bar{c}\bar{N}}, \bar{N})$; моменты с нулевым и отрицательным индексами не существуют.

По мере сближения численных значений $\bar{c}$ и $G_{\bar{c}}$ скорость изменения старших моментов $\dot{m}_i$ начинает зависеть только от младших, остающихся еще устойчивыми. Если же $\bar{c} = 0,5G_{\bar{c}}$, то $\dot{m}_1 = f(\vec{a})$, где $\vec{a} = (G_{\bar{c}\bar{N}}, \bar{N})$, а так как $\bar{N} > |G_{\bar{c}\bar{N}}|$, то $dm_1 / dt > 0$, $m_1 \rightarrow \infty$. Бассейн полностью теряет свое «статистическое лицо», если этим «лицом» являются моменты распределений из класса К. Пирсона. Режим стока начинает полностью определяться внешним воздействием (формирующемся в инфинитной, для речного бассейна, реальности, т. е. механизмами, не зафиксированными моделью (2.18)), наступает катастрофа, т. е. невозможность предсказуемости хода процесса даже в статистическом смысле (напомним: (2.25) не дает значений $\beta > 2$).

Формулой (2.25) дается связь между чисто статистическим параметром r и физическими свойствами бассейна и климатических воздействий, учитываемых в детерминистической модели (2.18) составляющими вектора $\vec{a}$. Наглядно влияние внутренней связности показано на рис. 2.11. (В монографии – Петерс Э. Э. Хаос и порядок на рынках капитала. Новый аналитический взгляд на циклы, цены и изменчивость рынка / Пер. с англ. – М.: Мир, 2000. – 333 с. – подобные графики приводятся для иллюстрации влияния на временные ряды так называемого показателя Херста [37], связанного со степенью автокоррелированности.) Так как автокоррелированность ряда определяется условиями формирования речного стока (инфинитным окружением предметной области, фиксирующей объект «речной бассейн»), то наличие сильной автокоррелированности (рис. 2.11, б), при которой модель (2.18) теряет устой-

чивость, говорит о том, что эта модель недостаточно жестко фиксирует изучаемую предметную область. Есть еще какие-то свойства речного бассейна (параметры), которые вектором $\vec{a}$ линейного формирующего фильтра не учитываются. Действительно, при больших значениях r происходит группировка членов ряда, приводящая к квазипериодичности. Но для описания последней линейная модель явно не подходит (поэтому ее решение в этих условиях и неустойчиво).

Самым простым нелинейным обобщением линейной модели, приводящим к возможности появления периодических решений (в дискретном варианте), является логистическая модель (2.26), которая получается, если принять параметр τ в (2.16) переменным ($\tau = W/Q$, где W – емкость речного бассейна):

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q^2}{kW} + \frac{Q\dot{X}}{W}. \quad (2.26)$$

Различие решений линейной и нелинейной моделей заключается в увеличении динамичности по мере уменьшения емкости W (насыщенности почво-грунтов водой), рис. 2.10, б. В случае стохастического обобщения модели (2.26) ее решением (как и в случае линейного формирующего фильтра) будет одномодальное асимметричное распределение (см. работу [32], в которой рассмотрена похожая модель, не имеющая отношение к гидрологии), хотя из-за нелинейности использование моментной схемы практически исключено (по крайней мере, затруднено).

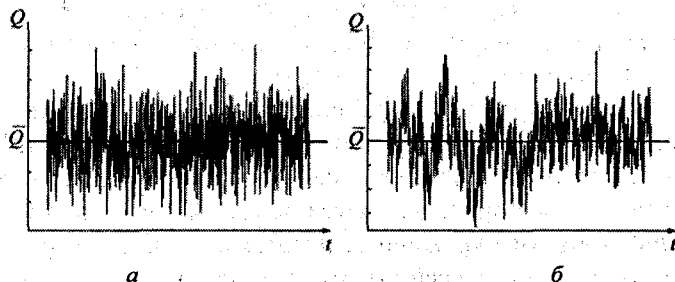


Рис. 2.11. Влияние коэффициента автокорреляции на временную последовательность расходов: а – $r(1)$ мал; б – $r(1)$ большой

Если перейти к дискретному аналогу (2.26)

$$Q_{i+1} = Q_i \left[1 + \left(\frac{\dot{X}}{Q_0} - \frac{Q_i}{kQ_0} \right) \right] \quad (2.27)$$

(здесь $Q_0 = W/T$, где T период дискретизации; у нас $T = 1$ год), то возможен различный характер решений, включая периодические, в зависимости от численного значения бифуркационного параметра $\dot{X}/Q_0$ (рис. 2.10, в). При больших его значениях (больше 3) решение также теряет устойчивость. В периодическом режиме автокорреляционная функция также периодична. (В работе [11] приведен пример применения нелинейного отображения типа (2.27) при разных вариантах его параметризации для генерирования рядов, аналогичных представленным на рис. 2.11, а и 2.11, б.) Это лишь еще раз подчеркивает значительную информационную ценность знания характера внутрирядной связности как динамической (а не только статистической) характеристики речного стока.

Интересная ситуация возникает при попытке прогнозировать дождевые паводки с суточной дискретностью. Коэффициенты автокорреляции в этом случае довольно большие и режим формирования расходов в большинстве случаев по рассмотренному критерию статистически неустойчив (в рамках линейного формирующего фильтра). Казалось бы для суточных осадков и расходов величина Q_0 в уравнении (2.27) огромна (это ведь косвенная характеристика емкости бассейна). Однако паводки (особенно выдающиеся) как раз и возникают, когда почво-грунты насыщены водой (т. е. величина Q_0 стремительно уменьшается, а коэффициент стока k стремится к единице). На рис. 2.10, г подтверждается такая возможность при уменьшении Q_0 (при $\dot{X} = \text{const}$). Таким образом, и в этом случае коэффициенты автокорреляции обладают диагностическими свойствами, объяснимыми в рамках детерминистических моделей.

Таким образом, в данном разделе показано, что, как в случае многолетнего речного стока, так и в случае его суточных изменений, коэффициенты автокорреляции обладают свойством диагностировать появление критических ситуаций, связанных с неустой-

чивостью решений как линейной, так и нелинейной моделей. Учитывая, что обе рассмотренные модели приводят к одномодальным асимметричным распределениям, повсеместно используемым в инженерной гидрологии, то можно предположить, что за формальной потерей устойчивости решений могут стоять реальные катастрофы формирования как многолетнего, так и суточного стока, связанные с невозможностью даже статистического прогнозирования экстремальных гидрологических явлений (в тех регионах и в той климатической ситуации, в которых происходит потеря устойчивости, диагностируемая коэффициентами автокорреляции и стока). Предложен способ уменьшения мультипликативных составляющих шумов модели, позволяющий устойчиво моделировать и прогнозировать вероятностные распределения квазистационарных статистических режимов формирования многолетнего стока и диагностировать устойчивость начальных моментов, опираясь только на численные значения коэффициентов автокорреляции.

2.4. Влияние климатической нормы приземной температуры воздуха на фрактальную размерность рядов многолетнего речного стока*

В формировании рядов многолетнего годового стока (Q) принимают участие как климатические факторы (осадки $\dot{X}$ и испарение E), так и гидрогеологические особенности водосборной площади, от которых зависит годовое изменение запасов воды в почво-грунтах ($\pm \Delta U$): $\dot{X} = Q + E \pm \Delta U$. Поэтому статистическим описанием реакции бассейна на внешнее воздействие (ресурс $\dot{X}$) является трехмерная плотность вероятности $p(Q, E, \Delta U)$. Однако на практике используют одномерную ее проекцию $p(Q)$, что связано как с проблемами получения рядов E и ΔU (сеть постов для наблюдения за этими характеристиками отсутствует), так и с востребованностью отраслями экономики именно статистически обеспеченных расходов воды. Эмпирические распределения годовых расходов обычно аппроксимируют одномодальными асимметричными

* Раздел подготовлен совместно с к.т.н. Е. В. Гайдукowej.

распределениями из семейства кривых К. Пирсона [например, кривой III типа или ее модификацией с фиксированной левой границей $p(Q=0)=0$]. Экстраполируя их в область малых обеспеченностей, находят проектные расходы требуемой повторяемости $Q_{p\%}$.

Подобная методика зафиксирована в нормативных документах [33, 35]; однако при ее использовании возникают проблемы, связанные с неустойчивостью моментов вероятностных распределений и приводящие, в частности, к так называемым «толстым хвостам» и полимодальности [12, 25].

Было установлено [14], что природа этой неустойчивости связана с существенной ролью мультипликативных шумов в стохастической модели формирования многолетнего стока (уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова – ФПК), которыми моделируется влияние не учитываемых (явным образом) фазовых переменных (E и ΔU). Неустойчивость означает выход решений (распределений) за рамки семейства кривых Пирсона (стационарных решений уравнения ФПК). Была разработана методология [11, 13], позволяющая бороться с подобной неустойчивостью путем разгрузки мультипликативной составляющей за счет расширения фазового пространства, в котором рассматривается процесс формирования стока. Одним из основных этапов этой методологии является оценка фрактальной (дробной) размерности стокового ряда изучаемого водосбора. Ближайшее превосходящее ее целое число (размерность пространства вложения) показывает, сколько дифференциальных уравнений первого порядка надо использовать для устойчивого моделирования процесса формирования стока (насколько жестко надо фиксировать климатической и гидрогеологической информацией моделируемую предметную область речных бассейнов).

С использованием конкретного типа фрактальной размерности (корреляционной) была продиагностирована территория России и Западной Африки [18] и установлено, что размерность пространства вложения меняется от 1 до 5 с преобладающими значениями 2 и 3. Наличие речных бассейнов с размерностью более 3-х указывает на то, что фазовые переменные ($Q, E, \Delta U$) могут взаимодействовать и нелинейно. Географически районировать фрактальную раз-

мерность не удалось (картина очень пестрая), но выяснилось, что на территории России она растет с севера на юг, а для Африки — уменьшается к экватору, причем для Африки ее значения ниже, чем для России. Подобные тенденции указывают на два обстоятельства: 1) при экстремально высоких и низких температурах воздуха формирование стока упрощается (требует меньшего числа фазовых переменных для его устойчивого моделирования и прогнозирования); 2) на определенных широтах у зависимости фрактальной размерности (ξ) от климатической нормы приземной температуры воздуха T °C должен быть максимум, т. е. существуют области со сложным механизмом формирования многолетнего стока, в которых использование одномерных проекций типа $p(Q)$ менее всего обосновано, а следовательно, рискованно.

Для обоснования второго предположения было обработано 756 рядов среднегодовых расходов воды на речных бассейнах, расположенных в Северном и Южном полушариях. На рис. 2.12

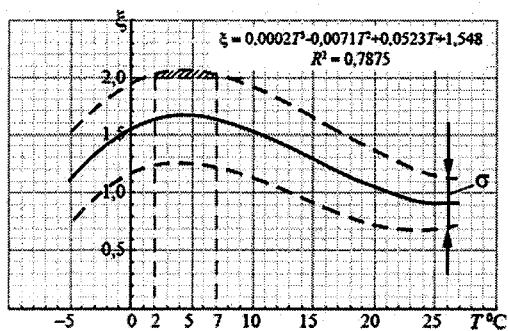


Рис. 2.12. Зависимость фрактальной размерности рядов среднегодового многолетнего стока от климатической нормы приземной температуры воздуха

представлена полученная зависимость $\xi = f(T)$. (Информация по рядам стока и температуре воздуха бралась из источников, имеющих в открытом доступе.) Зависимость построена по осредненным в интервале $\Delta T = 2$ °C значениям фрактальной размерности. Из графика видно, что в пределах среднеквадратического

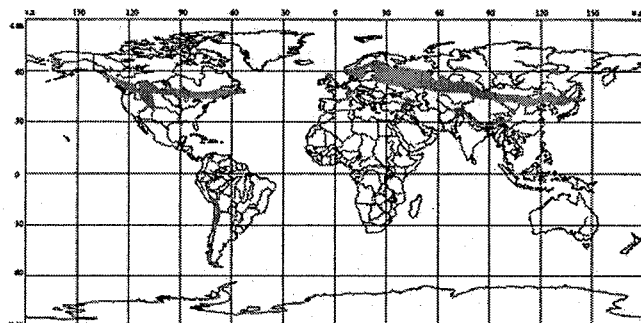
отклонения σ существует интервал температур (примерно 2–7 °C), в котором с вероятностью 33 % размерность пространства вложения больше двух. (В полосе 2σ этот диапазон существенно расширяется, но подобная вероятность в два раза меньше.) Именно по-

добные полосы температур представляют наибольшую опасность с точки зрения использования одномерных проекций $p(Q)$ многомерных распределений $p(Q, E, \Delta U)$. Одномерные распределения в этой полосе характеризуются неустойчивостью, ведущей к толстым хвостам и полимодальности.

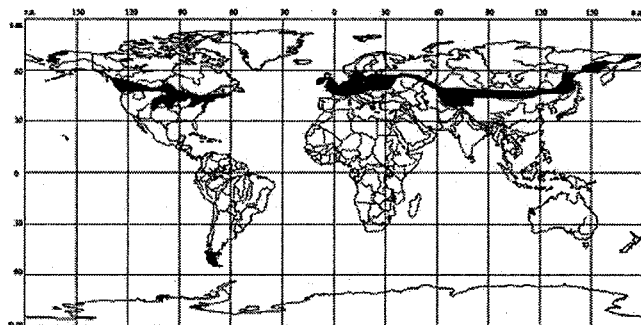
Этот вывод подтверждается исследованиями устойчивости формирования стока на Русской равнине. Из модели ФПК следует [14] критерий устойчивости начальных моментов одномерного распределения $p(Q): \beta = k \ln r + 2$, где k – коэффициент многолетнего стока; r – коэффициент автокорреляции ряда среднегодовых расходов. При $\beta \geq 2/3$ теряет устойчивость третий момент, при $\beta \geq 1$ – второй, а при $\beta \rightarrow 2$ неустойчивым становится все распределение. На рис. 2.1 представлена карта распределения β на ЕТР. Как видно из этого рисунка, на широте 50° с. ш. – 60° с. ш., где температура находится примерно в рассматриваемом диапазоне, имеет место неустойчивость моментов одномерной проекции $p(Q)$.

На рис. 2.13, а эта полоса представлена в глобальном масштабе. Для Северного полушария полоса охватывает в основном умеренные географические пояса суши Земли, а в Южном полушарии – умеренный пояс Чили. Практическая польза от подобной карты заключается не только в диагностировании зон, в которых задействовано наибольшее число фазовых переменных, участвующих в формировании гидрологических процессов [это означает, что формирование речного стока в них протекает наиболее сложно и наименее предсказуемо, если пользоваться одномерными проекциями $p(Q)$]. Имея различные климатические сценарии изменения температуры (потепление или похолодание), можно прогнозировать смещение этих зон (рис. 2.13, б, в) и идентифицировать наиболее опасные регионы риска.

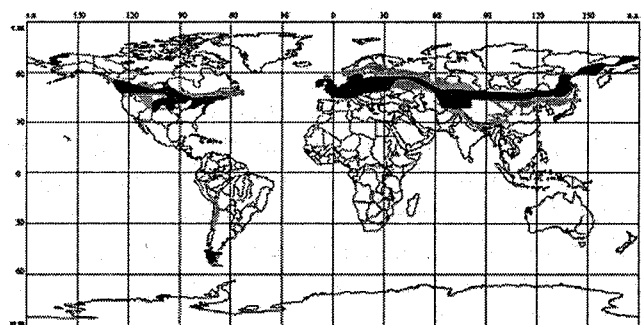
Характер взаимодействия фазовых переменных, формирующих речной сток, окончательно пока не выявлен. Возможно это «конкуренция» за ресурс – осадки стока и испарения, приводящая к двумерному, но одномодальному распределению плотности веро-



a



б



в

Рис. 2.13. Наиболее вероятные регионы с неустойчивыми моментами одномерных распределений расходов воды: серый цвет – по фактическим данным; черный цвет – по климатическому сценарию Commit модель HadCM3 на 2060 г.

ятности $p(Q, E)$. Проецируя последнюю на плоскость (p, Q) , т. е. проводя расчеты только по ряду расходов, как это рекомендуется нормативными документами, мы «поднимаем хвост» распределения $p(Q)$, выводя его за рамки кривых Пирсона из-за неустойчивости моментов. Но возможно сильное влияние на время релаксации речных бассейнов начинают играть запасы воды в почво-грунтах. В этом случае приходим к логистической модели формирования речного стока и, в случае дискретного времени, к бифуркациям удвоения периода, т. е. к двухмодальным (как минимум) распределениям (см. раздел 2.2).

Таким образом, установлена неизвестная ранее закономерность изменения фрактальной размерности рядов годового многолетнего речного стока, заключающаяся в том, что последняя параболически (кубическая парабола) зависит от нормы приземной температуры воздуха, превышая с вероятностью 33 % топологическую размерность, равную двум в диапазоне температур 2–7 °С, что обусловлено взаимодействием между речным стоком, испарением, а также динамикой запасов воды в почво-грунтах речных бассейнов при ограниченных водных ресурсах, участвующих в глобальном круговороте воды.

Заключение

(новизна исследования, его результаты и направления использования)

Новизна исследования. Полученный результат (методология устойчивого прогноза стока и диагностирования бифуркаций его формирования) позволяет решать принципиально новые гидрологические задачи (в том числе задачи инженерной гидрологии), связанные с возможностью получения долгосрочных оценок вероятностных характеристик многолетнего речного стока в условиях эволюционного изменения стокоформирующих факторов (климата и антропогенной деятельности на водосборах). В настоящее время указанные оценки могут делаться либо в предположении статистической стационарности гидрометеорологических процессов с использованием фактических рядов наблюдений за предшествующие десятилетия, т. е. фактически – экстраполяцией «замороженных» текущих вероятностных оценок в будущее (нормативный свод правил СП 33-101-2003), либо моделированием (расчетным путем) на основе равновесных климатических сценариев в предположении статистической устойчивости рядов стока, по которым проводится параметризация прогнозных моделей формирования стока (известная и апробированная методология автора). Полученный результат открывает новое направление исследований в гидрологии, связанное с появившейся возможностью фактического и прогностического диагностирования пространственно-временных (географическо-исторических) очагов качественных изменений (неустойчивостей и бифуркаций) в механизмах стокообразования.

Результаты исследования. Более ранними исследованиями [12, 13, 14] были получены научные результаты, расширяющие теоретические знания о закономерностях формирования речного стока в условиях эволюционных изменений окружающей среды, обуславливающей стокоформирование на речных бассейнах. Изменчивость стокообразующих факторов (климата и подстилающей поверхности водосборов) поставили перед гидрологией задачу

создания методологии моделирования и прогнозирования переходных (неустановившихся) гидрологических процессов. Так как традиционно гидрология опиралась на вероятностное описание режима стока с использованием фактических рядов наблюдений, то для моделирования и прогнозирования переходных вероятностных процессов необходимо было иметь эволюционные (генетические) модели, которые позволяют находить неустановившуюся динамику вероятностных распределений, опираясь не на ряды, а на физические свойства моделируемых гидрологических объектов. Математический аппарат для подобного класса задач в науке существовал довольно давно. Это различные варианты уравнений, описывающих пространственно-временную эволюцию характеристических функционалов для широкого класса случайных процессов, уравнение ФПК для марковских случайных процессов и т.п. В гидрологии подобные уравнения взяли впервые (по-видимому) на вооружение С. Н. Крицкий и М. Ф. Менкель для моделирования вероятностных распределений уровней озер. Затем подобный подход широко использовался в ИВП РАН (Д. Я. Раткович, В. И. Найденов и др.). Однако гидрология одними озерами не исчерпывается. Начиная с 80-х годов прошлого века стохастические модели широко применяются в РГГМУ в задачах гидрометрии, моделирования руслового стока, но главное – для долгосрочных оценок вероятностных характеристик многолетнего стока при изменении климата. Большой опыт их использования привел к осознанию пределов их применимости, пониманию условий, при которых теряется устойчивость решений, а главное – к пониманию того факта, что неустойчивость – это не трагедия, а индикатор эволюционного развития гидрологического объекта (качественного изменения). Адаптационный механизм развития (при котором распределения плотности вероятности меняют численные значения моментов, оставаясь в фиксированном классе распределений Пирсона) может смениться бифуркационным механизмом (выход распределений за пределы этого класса, появление второй моды и т. п.). Возник вопрос, как моделировать и прогнозировать подобные статистически неустойчивые процессы? Оказалось, что это возможно,

но «частично инфинитно» (основные этапы этой методологии были приведены выше).

Вышеперечисленное помогает пониманию того, чем отличаются результаты данного научного исследования от предшествующих разработок. Тем, что уже известные методы и закономерности частично инфинитной гидрологии применяются для установления (открытия) новых путей, позволяющих, опираясь только на доступную гидрометеорологическую информацию (получаемую на государственной сети стандартных наблюдений), известные климатические сценарии и планы социально-экономического развития территории, достигать следующих результатов:

1. Диагностировать бассейны рек (и временные интервалы в будущем), в которых (и когда) возможна смена адаптивного механизма плавной эволюции процесса формирования стока на бифуркационный механизм (появление бифуркационных очагов), т. е. возникновение ситуаций, когда применимость нормативных документов в области инженерной гидрологии ставится под сомнение (выявлять тупиковые ситуации).

2. Устойчиво прогнозировать вероятностные характеристики многолетнего речного стока с использованием различных вариантов моделей его формирования (одномодальные, полимодальные, одномерные, многомерные и т. п.), т. е. преодолевать выявленные тупики.

Полученные диагностические и прогностические модели предполагается использовать в качестве теоретического обоснования рекомендаций инженерного характера, позволяющих проектировщикам доступными методами оценивать проектные стоковые характеристики (статистически обеспеченные расходы воды) с учетом не только сложившегося на момент проектирования водохозяйственного объекта гидрологического режима, но и с возможностью его изменений за счет климата и антропогенной деятельности.

Основные направления дальнейшего использования полученных результатов. Полученные результаты предполагается включить в учебные программы вузов, ведущих подготовку гидрометеорологов, а также — обучение в аспирантуре. Это обеспечит

влияние результатов на развитие научного базиса гидрометеозологии, так как дополняет этот базис широкими возможностями по учету влияния на водозависимые отрасли экономики эволюционных процессов в окружающей среде и социуме. Однако главным направлением использования результатов является разработка рекомендаций нормативного характера, позволяющих дополнить действующий нормативный документ СП 33-101-2003 (который на сегодняшний день своим содержанием представляет собой только объяснительную сторону гидрологической науки – констатирует возможность получения фактических значений обеспеченных расходов воды и экстраполяции их в будущее на период эксплуатации проектируемого водохозяйственного объекта) еще и прогностическими возможностями гидрологической науки и учитывать, что режим (механизм) формирования многолетнего стока (как и все на свете) может меняться. Эти дополнения будут носить аддитивный характер, т. е. не менять существующий текст свода правил, а дополнять его разделом, который становится осмысленным, если снять основное допущение о стационарности рядов стока (или, по крайней мере, об их стационарности в будущем), заложенное в СП. Аддитивность обеспечит выполнение принципа соответствия: новые знания не отвергают существующие, а дополняют их в связи с расширением предметной области, фиксирующей изучаемый объект. В нашем случае расширение идет за счет учета эволюционного характера гидрометеорологических и социальных процессов.

Приложение

Как зарождалась частично инфинитная гидрология (ЧИГ)

Логические основания ЧИГ по своей природе общезначимы и не привязаны к какому-либо стилю мышления. Но все новое возникает не вообще, а индивидуально. Нужны определенные исторические условия, а также личности, которые начинают смотреть на мир под определенным углом зрения, придавая научному поиску свой стиль осмысления окружающей нас реальности. В данном кратком приложении будет сделана попытка показать, как появилось это направление в гидрологии, какие проблемы его породили. В известном смысле это биография, только не автора, а научного направления («научная биография»).

Автор до поступления на гидрологический факультет ЛГМИ (Ленинградский гидрометеорологический институт) закончил техникум авиационного приборостроения и автоматики. Поэтому пытался соединить интерес к технике с гидрологией, которая явно тяготеет к географии. На третьем курсе в учебном плане был предмет «Электрические измерения гидрологических величин», который читал «огидрологиченный» технарь Игорь Анатольевич Арбузов. Я попросил его сформулировать какую-нибудь гидрологическую проблему, которой можно было бы заняться и которая вылилась бы впоследствии в дипломный проект. Он был доцентом кафедры гидрометрии и почти что с ходу предложил попытаться найти математическую модель, которая могла бы описывать петлеобразные зависимости расхода воды Q от уровня H : $Q = f(H)$. По его словам выходило, что неоднозначность порождают факторы, не учитываемые уровнем воды. По крайней мере, сказал он, кроме уровня на расход влияет и уклон водной поверхности I . При этом он сослался на учебник по гидрометрии В. Д. Быкова и А. В. Васильева, в котором было представлено семейство кривых расходов для различных уклонов $Q = f(H, I)$.

Я размышлял примерно так.

С одной стороны, уклон – это отношение перепада уровней на двух створах ΔH к расстоянию между ними Δx : $\Delta H/\Delta x$. В пределе $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta H/\Delta x)$ – это просто производная $\partial H/\partial x$. Появление пе-

тель обычно связывают с неустановившимся движением. Значит, в общем случае расход является функцией от уровня и его производных по времени и продольной координате: $Q = f(H, \partial H/\partial t, \partial H/\partial x)$.

С другой стороны, существует математическая модель, представляющая в одномерной гидравлической идеализации неустановившееся движение воды в реках:

$$I = \frac{Q^2}{C^2 R F^2} + \frac{1}{g F} \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{2\alpha}{g F^2} \frac{\partial Q}{\partial t}; \quad (\text{П.1})$$

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial t} \right| = 0, \quad (\text{П.2})$$

где C – коэффициент Шези; R – гидравлический радиус; F – площадь живого сечения; g – ускорение свободного падения; α – коэффициент Кориолиса.

В системе (П.1), (П.2) имеются две искомые функции Q и F независимых переменных x и t . В гидрометрии имеют дело с конкретным гидроствором. Поэтому зафиксируем координату $x = x_0$. Учитывая, что из выражения (П.2) следует $\partial Q/\partial x = -\partial F/\partial t$, перепишем (П.1) следующим образом:

$$\frac{dQ}{dt} = \left[\frac{-g}{C^2 R F} \right]_{x_0} Q^2 + \left[\frac{2\alpha}{f} \frac{\partial F}{\partial t} \right]_{x_0} Q + \left[g I F \right]_{x_0}. \quad (\text{П.3})$$

В квадратных скобках уравнения (П.3) сосредоточена информация, которая может быть получена, если нам известен уровень и его производные по времени и координате. Действительно:

$C = \frac{1}{n} h^{1/6} = f_c(H)$ (при постоянном коэффициенте шероховатости n , а также учитывая, что средняя в сечении глубина h является функцией уровня); $R = f_R(H)$, $F = f_F(H)$; $\partial F/\partial t = B \partial h/\partial t + h \partial B/\partial t = f_B(H) \dot{h} + f_h(H) f_B(\dot{H})$; $I = -\partial H/\partial x$; α , g – постоянные (здесь

$\cdot \equiv d/dt$). Таким образом, из (П.3) следует, что $Q = f(H, \partial H / \partial t, \partial H / \partial x)$, а модель петли является обыкновенным дифференциальным нелинейным уравнением первого порядка (в математике подобные уравнения называются обобщенными уравнениями Риккати).

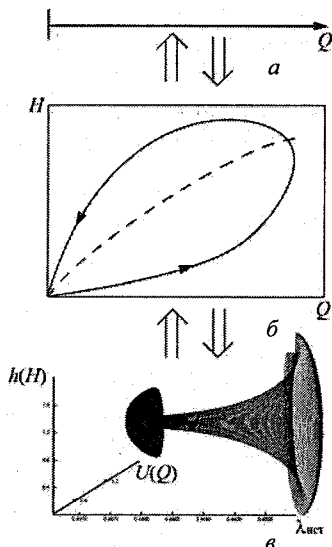


Рис. П.1. Сужение (от β к a) и расширение (от a к β) фазового пространства модели «петли»

Что же произошло с точки зрения ЧИГ? Мы фактически спроецировали фазовую плоскость (Q, H) на фазовую прямую Q (рис. П.1), предположив, что информация об одной из фазовых переменных (H) и ее производных по x и t нам известна. Вместо двух дифференциальных уравнений в частных производных мы получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение. Конечно, за такое проецирование приходится «платить».

Во-первых, мы теряем многие практические возможности, которыми обладала система уравнений Сен-Венана (П.1) и (П.2), так как при ис-

пользовании (П.3) на каждом временном шаге вычислений надо обновлять информацию, определяющую члены в квадратных скобках.

Во-вторых, частично потеряна причинно-следственная связь: ведь фактически не расход зависит от уровня, а наоборот – уровень от расхода. (Этот недостаток с точки зрения гидрометрии не является существенным, так как уровень H не вычисляется, а измеряется.)

Кроме чисто гидрометрических целей, уравнение (П.3) оказалось полезным для решения следующей проблемы. На протяжении нескольких десятилетий в реках выявлялись низкочастотные колебания расходов (средних по сечению скоростей) небольшой амплитуды с периодом примерно 5–30 мин (в зависимости от гидрав-

лических условий в створе измерений и размеров самой реки) при стационарных граничных условиях (обзор этих данных см. [7]). Все попытки объяснить их происхождение, исходя из системы Сен-Венана (см., например, [6]), были безуспешными. Парадоксально, но помогла их проекция (П.3). Путем ряда известных в математике преобразований [24], соотношение (П.3) приводится к линейному уравнению второго порядка, относительно свойств решения которого можно сделать некоторые выводы общего характера, опираясь на теорию Штурма.

Сделаем подстановку $Q = -[u + 0,5 (f_2(t) + f_1'(t)/f_1(t))/f_1(t)]$, с учетом которой получим

$$du/dt = -u^2 + R_1(t), \quad (\text{П.4})$$

где

$$R_1(t) = [0,25 (f_2(t) + f_1'(t)/f_1(t))^2 - 0,5(f_2'(t) + f_1''(t)/f_1(t) - f_1'^2(t)/f_1^2(t))] - f_3(t)f_1(t)$$

$$(\text{здесь } f_1 = \left[\frac{-g}{C^2 RF} \right]_{x_0}, \quad f_2 = \left[\frac{2\alpha}{F} \frac{\partial F}{\partial t} \right]_{x_0}, \quad f_3 = \left[gIF \right]_{x_0}).$$

Введя новую переменную по формуле $u = y'/y$, получим $y'' - R_1(t)y = 0$. Колебательный характер решения этого уравнения определяется знаком $R_1(t)$. Чтобы оно было неколеблущимся, необходимо выполнение на рассматриваемом интервале времени условия $R_1(t) \geq 0$.

Так как

$$R_1(t) = \left\{ 0,25 \left[\frac{2\alpha}{F} \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\left(\frac{-g}{FC^2 R} \right)'}{\frac{-g}{FC^2 R}} \right]^2 - 0,5 \left[\left(\frac{2\alpha}{F} \frac{\partial F}{\partial t} \right)' + \frac{\left(\frac{-g}{FC^2 R} \right)''}{\frac{-g}{FC^2 R}} - \frac{\left(\frac{-g}{FC^2 R} \right)'^2}{\left(\frac{-g}{FC^2 R} \right)^2} \right] \right\} + IgF \left(\frac{g}{FC^2 R} \right),$$

то указанное неравенство для $R_1(t)$ практически всегда выполняется (основным слагаемым в формуле для $R_1(t)$ является последнее), т. е. решение не имеет общих точек с осью $0t$. Было бы странным,

если бы получился другой результат: расход воды при неизменных граничных условиях то положительный, то отрицательный.

Однако, если рассматривать характер поведения отклонений расхода q от некоторого квазиустановившегося значения Q_0 , то может иметь место колебание. Считая, что $i_0 \approx Q^2/K^2$ (здесь K — пропускная способность русла), $\partial Q_0 / \partial t \ll \partial q / \partial t$, и делая аналогичные подстановки, переходим к идентичному однородному уравнению второго порядка, основное слагаемое коэффициента $R_1^*(t)$ которого $(I - i_0) g^2/(C^2 R)$, однако, допускает колеблющиеся решения. Конкретные (численные) значения оценок расстояний между последовательными нулями решений $(\pi/\sqrt{R_1^*})$ можно указать, если известны наибольшее и наименьшее значения R_1^* в интервале $[0, T]$. Ограничиваясь в коэффициенте только главным членом и задавая, например, $F = 100 \text{ м}^2$, $I - i_0 = 0,0001$, $C = 33 \text{ м}^{0,5}/\text{с}$, $R = 1 \text{ м}$, получаем $\pi/(10^2 \cdot 0,0001/1000 \cdot 1)^{0,5} \approx 19 \text{ мин}$, а весь период колебаний составит 38 мин.

Но это период колебаний для переменной y . На самом деле, переходя от переменной y к u , а затем к Q (точнее к q), мы должны период несколько изменить. Если $y \sim \sin(\omega t)$, то $u \sim \omega \cos(\omega t)/\sin(\omega t) = \omega \operatorname{ctg}(\omega t)$, т. е. период уменьшается в два раза. (При $I \rightarrow i_0$ режим движения становится «равномерным», т. е. период колебаний формально стремится к бесконечности.)

И действительно, для переменной u имеем котангенсоиду, представленную на рис. П.2, а (на рис. П.2, б представлен реальный ход процесса, а на рис. П.2, в — трехмерное фазовое пространство переменных y, y' и u).

Естественно возникло желание проверить формулу для периода колебаний в эксперименте. Измерения на русловой площадке лаборатории водных исследований ЛГМИ (сейчас РГГМУ) показали, что при $(I - i_0) < 0$ (это условие появления колебательных решений, так как именно в этом случае $R_1^* < 0$) колебания с ожидаемым периодом не выделяются. Однако при $I - i_0 > 0$ они появляются. (Измерения проводились совместно с А. В. Илларионовым.) Близкие значения периода наблюдались и по всем случаям,

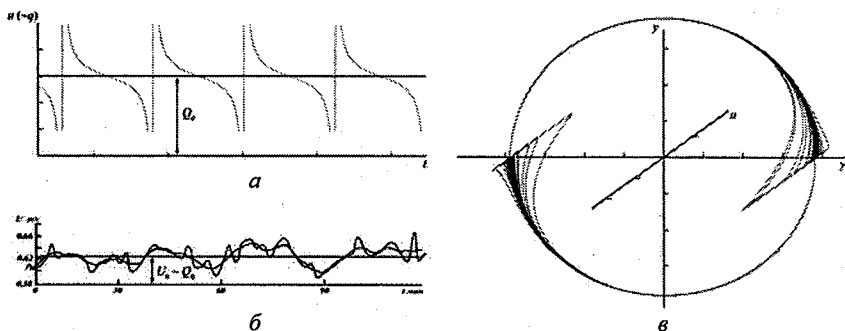


Рис. П.2. Котангенсоида, полученная по модели (а), скорости, измеренные на вертикали № 3 в гидростворе № 1 р. Тверцы 8/VII 1959 г. с 12 ч 34 мин до 14 ч 34 мин до и после осреднения (б) и фазовое пространство переменных u , y и u (в)

упомянутым в научной литературе (их обзор см. [7, 11, 13]). Михаил Соломонович Грушевский (научный руководитель по моей кандидатской диссертации) предложил провести проверку формулы по р. Тверце. В 1959 г. на ней были проведены комплексные исследования неустановившегося движения [5], вызывавшегося специально организованными попусками с Новотверецкой ГЭС. Один из створов был оборудован батареей вертушек, непрерывно измерявших скорости (с записью на хронографы) на протяжении двух недель, пока проводились исследования. Нами было статистически обработано 30 двухчасовых реализаций местных скоростей (в качестве примера см. рис. П.2, б), соответствующих квазиустановившемуся режиму, на двух скоростных вертикалях. Периодичность выявлялась с помощью метода Шустера. Из данных табл. П.1 видно, что колебания на разных вертикалях имеют в пределах 10–15 %-ной погрешности одинаковые периоды, т. е. имеет место периодичность изменения средней по сечению скорости. В некоторых случаях, когда $i_0 \approx 1$, периодичность либо не выявляется, либо теоретический и фактически выделенный периоды не совпадают.

Если отбросить строчки, в которых разность $I - i_0$ менее 20 % от значения i_0 (т. е. лежит в интервале погрешностей), то в оставшихся 24 случаях фактически выделенный период превосходит теоретический в среднем на 21 % (максимальное отклонение 43 %, минимальное 0 % при двух отрицательных значениях: -20 %, -11 %).

Таблица П.1

Результаты выделения низкочастотной периодичности по измерениям на р. Тверце в 1959 г.

Дата	Время измерения, ч мин	Номер скоростной вер- тикали	Период колебаний, мин		Статистическая надеж- ность выделенного пе- риода, %	$I - i_0, \%$	Амплитуда колебаний скоро- сти, % среднего значения скорости	
			по теоретиче- ской формуле	по методу Шустера			соответст- вующая выделенному периоду	в исходной реализации
5/VIII	22 06 - 0 06	3	16,4	26	92,2	0,15	3,6	9,8
	22 06 - 0 06	5	16,4	28	92,2	0,15	5,4	11,4
7/VIII	3 04 - 5 04	3	25,8	32	86,1	0,11	5,4	10,8
	3 04 - 5 04	5	25,8	28	82,6	0,11	3,6	8,9
8/VIII	12 34 - 14 34	3	22,4	28	92,2	0,06	3,6	7,3
	12 34 - 14 24	5	22,4	28	92,7	0,06	6,7	13,0
9/VIII	2 42 - 4 42	3	29,8	28	87,0	0,04	5,2	14,4
	3 02 - 5 02	5	29,6	26	92,4	0,04	4,7	10,6
	21 36 - 23 36	3	29,2	24	85,0	0,09	5,0	15,2
	21 36 - 23 36	5	29,2	26	82,6	0,09	3,9	10,4
10/VIII	7 10 - 9 10	3	16,6	24	92,5	0,17	4,4	11,1
	7 10 - 9 10	5	16,6	24	92,5	0,17	3,7	10,1
	20 02 - 22 02	3	19,8	32	88,6	0,21	3,4	7,2
	20 02 - 22 02	5	19,8	28	88,6	0,21	5,6	14,8
11/VIII	13 00 - 15 00	3	18,7	30	90,2	0,25	4,6	9,4
	13 00 - 15 00	5	18,7	24	92,3	0,25	3,6	10,3
	21 15 - 23 15	3	19,6	26	85,8	0,23	3,6	11,8
	21 15 - 23 15	5	19,6	30	83,4	0,23	3,7	9,4
12/VIII	12 34 - 14 34	3	17,8	30	88,6	0,29	4,0	7,2
	12 34 - 14 34	5	17,8	26	76,4	0,29	3,9	9,8
13/VIII	14 20 - 16 20	3	17,8	24	92,2	0,18	3,7	8,4
	14 20 - 16 20	5	17,8	22	92,2	0,18	3,1	10,1
14/VIII	1 52 - 3 52	3	27,5	32	71,0	0,11	3,7	11,0
	1 52 - 3 52	5	27,5	28	85,4	0,11	3,8	13,9
	9 34 - 11 34	3	26,4	32	74,2	0,12	3,4	9,4
	9 34 - 11 34	5	26,4	28	71,0	0,12	5,0	13,6
15/VIII	18 34 - 20 34	3	45,0	28	92,2	0,02	5,0	14,6
	18 34 - 20 34	5	45,0	26	92,2	0,02	3,9	13,5
17/VIII	2 04 - 4 04	3	32,0		Не выд.	0,04		12,9
	3 16 - 5 16	5	32,0			0,04		14,0

Таким образом, и натурные и лабораторные эксперименты показали наличие двух тупиков: 1) хотя теоретический и экспериментальные периоды более или менее совпадают, но имеет место систематическое 20 %-ное занижение значения периода, получаемого по теоретической формуле; 2) теоретическая модель, полученная на основе уравнений классической гидравлики, не дает знак «-» для R_1^* , т. е. не дает автоколебаний.

Конечно, второй тупик носил фундаментальный характер и, судя по формуле для вычисления периода

$$T = \pi C R^{0,5} / [g (I - i_0)^{0,5}], \quad (\text{П.5})$$

напрямую связан с гидравлическими сопротивлениями. Все гидравлические характеристики, входящие в выражение (П.5), кроме C , измеряются непосредственно и изменению не подлежат.

При преобразованиях, приведших к модели (П.4), мы использовали классическую формулу для диссипативного члена $j = Q^2 / C^2 R F^2$, которая справедлива в квазиустановившемся режиме (по крайней мере, она установлена в опытах, соответствующих режиму, близкому к равномерному). Все (или подавляющее большинство) формул для коэффициента Шези C предполагают его автомодельность по числам Рейнольдса и Фруда. Поэтому единственная возможность выйти из тупиков — перейти к более общим зависимостям для j и C , учитывающих в той или иной форме число гомохронности. При этом приходится учитывать тот факт, что структура формулы для j не должна меняться (ведь ее использование в R_1^* дает вполне приемлемые результаты). Поэтому примем, что

$$j = \frac{Q^2}{C^2 R F^2} - \frac{q^2}{C^2 R F^2}, \quad (\text{П.6})$$

где q (как и в предыдущем случае) — отклонение расхода от квазиустановившегося значения Q_0 , входящего в первый член правой части зависимости (П.6). Знак «-» у второго слагаемого поставлен «явочным» порядком, чтобы уравнение $y'' - R_1(t)y = 0$, получаемое из модели (П.4), давало колебательные решения.

В отношении влияния неравномерности и нестационарности на коэффициент Шези (а значит, и на коэффициент гидравлическо-

го сопротивления λ , равного $2g/C^2$), было проделано скрупулезное теоретическое исследование, подтвержденное данными по той же р. Тверце (см. [7]). (При этом, как сейчас выясняется, были использованы методы частично инфинитной гидрологии: сопряжение через частично инфинитную границу двух инфинитных предметных областей – гидравлической и гидромеханической.) В результате было установлено, что в условиях режима, отличающегося от равномерного, имеет место соотношение:

$$\lambda_{\text{нст}}/\lambda_{\text{уст}} = f(\bar{N}, \bar{\omega}), \quad (\text{П.7})$$

где $\lambda_{\text{нст}}$ – коэффициент гидравлического сопротивления при неустановившемся режиме; $\lambda_{\text{уст}}$ – коэффициент гидравлического сопротивления в установившемся режиме; $\bar{N}$ и $\bar{\omega}$ – безразмерные ускорение и частота соответственно.

Зависимость (П.7) представлена на рис. П.3. Чтобы период автоколебаний увеличить на 20 %, надо на столько же увеличить численное значение коэффициента C . Если, например, его значение $30 \text{ м}^{0.5}/\text{с}$, то значение $\lambda_{\text{нст}}$ надо уменьшить (по сравнению с $\lambda_{\text{уст}}$) на 26 %, т. е. наличие колебаний величины q должно приводить к тому, что значения $\lambda_{\text{нст}}$ могут сами испытывать колебания, но все время оставаться в зачерненном прямоугольнике на рис. П.3. Это примерно соответствует (для данного примера) значению безразмерной частоты $\bar{\omega} = 1$.

Изложенные в этом приложении результаты были получены примерно в период с 1973 по 1983 г. при тесном общении с Н. А. Картвелишвили и И. Ф. Карасевым (это не просто гидрологи – они гидрологи философствующие). При этом никакие термины из ЧИГ (фиксация предметной области, расширение фазового пространства, онтологические тупики, гносеологические переходные процессы, фрактальная диагностика, финитность, инфинитность, частичная инфинитность и т. п.) не применялись (о существовании большинства из них автор и не подозревал, а некоторых из них не было еще вообще). Но реально большинство из них применялось фактически (а не на словах). Что такое, как ни новая фиксация предметной области при переходе от системы Сен-Венана

к уравнению Риккати или введение коэффициента гидравлического сопротивления как новой искомой функции (а не задаваемого параметра), расширяющей фазовое пространство классических моделей гидравлики. И на каждом новом шаге тратится энергия (интеллектуальная и «обычная»). Причем не обязательно твоя в буквальном смысле этого слова. Познает, по большому счету, не биологическое существо, а личность, т. е. «существо», связанное сетью социальных отношений. Например, данные по р. Тверце использованы для подтверждения справедливости результатов, полученных затратной (мной) интеллектуальной энергии. Но сколько энергии (и «обычной» и интеллектуальной) было затрачено другими, чтобы провести эти измерения, причем совсем не ради выявления кем-то природы низкочастотных колебаний. И на каждом шаге риск: быть не понятым, отвергнутым, обманутым. Риск, пусть не «шкурой», но хотя бы репутацией.

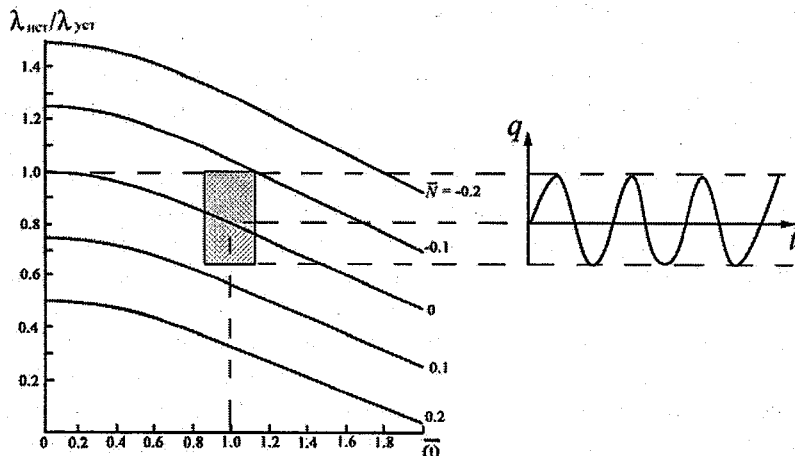


Рис. П.3. Зависимость $\lambda_{\text{нст}}/\lambda_{\text{уст}}$ от $\bar{N}$ и $\bar{\omega}$ и иллюстрация объяснения возникновения автоколебаний «отрицательным» сопротивлением

Говоря о зарождении частично инфинитной гидрологии, я специально остановился только на динамических моделях. Коллеги, которые интересуются подобным подходом, зачастую ассоциируют его с применением стохастических моделей, которым по-

священо большинство моих публикаций и диссертаций учеников. Но это ошибочное мнение. Эти модели делают творческую ситуацию более гибкой, статистически проверяемой. Однако само по себе частично инфинитное моделирование шире и глубже любых моделей и включает в себя философско-методологический и даже религиозно-философский подтекст.

Любой объект в мире (в том числе и познающий субъект) частично инфинитен: неустойчив; меняется; подвержен влиянию факторов, не присутствующих явно в понятиях, фиксирующих объект познания. Быть частично инфинитным – значит, быть, с одной стороны, реальным (т. е. воспринимаемым в рамках понятий, фиксирующих эту реальность), а с другой – иллюзорным, так как эта «реальность» есть результат недостатка информации для более полной фиксации.

В известном смысле ЧИГ – вещь виртуальная. В том смысле, что хотя общие приемы творческого познания и можно обсуждать, но самому творчеству научить невозможно. Надо самому лично оказаться в познавательном тупике и самому (лично) из него выбраться. Говоря языком C++, срабатывает «позднее связывание» (на этапе выполнения программы срабатывает тот или иной вариант виртуальной функции; какая именно потребуется по ходу выполнения программы – «жизни» заранее не известно). Но есть и фундаментальное различие. В полиморфизме языка C++ все варианты возможной реализации предусматриваются заранее программистом путем переопределения виртуальной функции в классах-наследниках. В реальной жизни такого «программиста» нет (разве что Бог) и надо выдумывать (всегда затрачивая при этом энергию) вариант действий по ходу самой жизни, подчас рискуя последней. Хорошим примером может служить ситуация с витязем на распутье дорог. Если на развилке есть «указатель», то он просто получит информацию (уже существующую) без всякого риска. Если же нет, то для того, чтобы «узнать», что находится на «левой» дороге, ему нужно поехать туда (тратя энергию и рискуя собственной шкурой: вдруг там «соловей-разбойник»).

Литература

1. Астапов Ю. М., Медведев В. С. Стохастическая теория систем автоматического регулирования и управления. – М.: Наука, 1982. – 304 с.
2. Будыко М. И. Климат в прошлом и будущем. – Л.: Гидрометеиздат, 1980. – 351 с.
3. Владимиров А. М. Гидрологические расчеты. Учебник. – Л.: Гидрометеиздат, 1990. – 366 с.
4. Долгоносов Б. И. Нелинейная динамика экологических и гидрологических процессов. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 440 с.
5. Исследование неустановившегося движения воды на реках Тверце и Ордеж / Под ред. Н. Е. Кондратьева и В. А. Урываева. – Л.: Гидрометеиздат, 1961. – 288 с.
6. Картвелишвили Н. А., Галактионов Ю. И. Идеализация сложных динамических систем. – М.: Наука, 1976. – 272 с.
7. Коваленко В. В. Измерение и расчет характеристик неустановившихся открытых потоков. – Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 160 с.
8. Коваленко В. В. Моделирование гидрологических процессов. Учебник для вузов. – СПб.: Гидрометеиздат, 1993. – 256 с. (Второе издание: Коваленко В. В., Викторова Н. В., Гайдукова Е. В. Моделирование гидрологических процессов. – СПб.: изд. РГГМУ, 2006. – 559 с.)
9. Коваленко В. В. Нелинейные аспекты частично инфинитного моделирования в эволюционной гидрометеозологии. – СПб.: изд. РГГМУ, 2002. – 158 с.
10. Коваленко В. В. Частично инфинитное моделирование и прогнозирование процесса формирования речного стока. – СПб.: изд. РГГМУ, 2004. – 198 с.
11. Коваленко В. В. Частично инфинитное моделирование: Основание, примеры, парадоксы. – СПб.: Политехника, 2005. – 408 с.
12. Коваленко В. В. Частично инфинитный механизм турбулизации природных и социальных процессов. – СПб.: изд. РГГМУ, 2006. – 166 с.
13. Коваленко В. В. Частично инфинитная гидрология. – СПб.: изд. РГГМУ, 2007. – 230 с.
14. Коваленко В. В. Теория катастроф и эволюция дифференцируемых многообразий в частично инфинитной гидрологии. – СПб.: изд. РГГМУ, 2008. – 178 с.
15. Коваленко В. В. Гидрологическое обеспечение надежности строительных проектов при изменении климата. – СПб.: изд. РГГМУ, 2009. – 100 с.
16. Коваленко В. В. Нелокальная гидрология. – СПб.: изд. РГГМУ, 2010. – 97 с.
17. Коваленко В. В., Хаустов В. А. Критерии устойчивого развития гидрологических процессов и картирование зон ожидаемых аномалий параметров годового стока рек СНГ при антропогенном изменении климата // Метеорология и гидрология, 1998, № 12, с. 96–102.
18. Коваленко В. В., Гайдукова Е. В., Куасси А. Г. Фрактальная диагностика речного стока для устойчивого описания многолетних колебаний гидрологических характеристик // Метеорология и гидрология, 2008, № 4, с. 73–80.
19. Коваленко В. В., Гайдукова Е. В., Соловьев Ф. Л., Чистяков Д. В. Частично

- инфинитное расширение фазового пространства модели формирования много-
летнего речного стока для статистически устойчивого прогнозирования катастроф // Естественные и технические науки, 2009, № 2, с. 193–199.
20. Коваленко В. В., Гайдукова Е. В., Соловьев Ф. Л. Оценка статистических характеристик многолетнего речного стока в регионах его неустойчивого (катастрофического) формирования // Естественные и технические науки, 2009, № 3, с. 231–237.
 21. Колмогоров А. Н. Теория вероятностей и математическая статистика. – М.: Наука, 1986. – 535 с.
 22. Конаржевский Л. М. Типовые формы кривой обеспеченности характеристик весеннего стока с водосборов степной и лесостепной зон. – Изд. Каз. филиала АН СССР, сер. Энергетика и водное хозяйство, 1961, вып. 3, с. 130–146.
 23. Константинов А. Р. Испарение в природе. – Л.: Гидрометеиздат, 1968. – 532 с.
 24. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. – Минск: Вышэйшая школа, 1974. – 768 с.
 25. Найденов В. И. Нелинейная динамика поверхностных вод суши. – М.: Наука, 2004. – 318 с.
 26. Оттоков Е. В. Постановка и организация изучения годового стока в различных физико-географических условиях / Труды II Всесоюз. гидрол. съезда. – Л., 1928.
 27. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. – М.: Прогресс, 1986. – 432 с.
 28. Пространственно-временные колебания стока рек СССР / Под ред. А. В. Рождественского. – Л.: Гидрометеиздат, 1998. – 376 с.
 29. Пугачев В. С. и др. Основы статистической теории автоматических систем. – М.: Машиностроение, 1974. – 400 с.
 30. Рождественский А. В., Чеботарев А. И. Статистические методы в гидрологии. – Л.: Гидрометеиздат, 1974. – 424 с.
 31. Саруханян Э. И., Смирнов Н. П. Многолетние колебания стока Волги. – Л.: Гидрометеиздат, 1971. – 168 с.
 32. Свирижев Ю. М. Нелинейные волны, диссипативные структуры и катастрофы в экологии. – М.: Наука, 1987. – 368 с.
 33. СНиП 2.01.14-83. Определение расчетных гидрологических характеристик / Госстрой СССР. – М.: Стройиздат, 1985. – 36 с.
 34. Соколовский Д. Л. Речной сток (основы теории и методики расчетов). Изд. 3-е, испр. и доп. Учебник. – Л.: Гидрометеиздат, 1968. – 540 с.
 35. СП 33-101-2003. Определение основных расчетных гидрологических характеристик / Госстрой России. – М.: ФГУП ЦПП, 2004. – 73 с.
 36. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. – 2-е изд., перераб. и доп. – М.: Радио и связь, 1982. – 624 с.
 37. Hurst H. E. Long-term Storage of Reservoirs // Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1951, vol. 116, p. 776–808.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	3
Часть 1. Аттракторы процессов формирования многолетнего речного стока	16
1.1. Традиционное и эволюционное вероятностное описание много- летнего речного стока. Мотивация исследования	16
1.2. Условные вероятностные распределения	20
1.3. Общий случай взаимодействия трех фазовых переменных	28
1.4. Двумерные логистические отображения	38
1.5. Частичная инфинитность аттракторов речного стока	40
Часть 2. Диагностирование бифуркационных очагов при формировании многолетнего годового стока	56
2.1. Генезис преодолеваемого гносеологического тупика	56
2.2. Модель для выявления бифуркационных очагов	60
2.3. Диагностические свойства коэффициента автокорреляции при исследовании устойчивости формирования стока	67
2.4. Влияние климатической нормы приземной температуры возду- ха на фрактальную размерность рядов многолетнего речного стока	82
Заключение	88
Приложение	92
Литература	103

CONTENTS

Introduction	3
Part 1. Attractors of the long-term streamflow formation	16
1.1. Traditional and evolutionary probabilistic description of multi-year river runoff. Motivation of the study	16
1.2. Conditional probability distributions	20
1.3. A general case of the three-phase variables interaction	28
1.4. A two-dimensional logistic map	38
1.5. The partial infinity of runoff attractors	40
Part 2. Diagnosis of bifurcation sources in the formation of long-term annual runoff	56
2.1. Genesis of overcoming gnosiological deadlock	56
2.2. A model for identification of bifurcation sources	60
2.3. Diagnostic properties of the autocorrelation coefficient in studying runoff formation stability	67
2.4. The influence of climatic norm of surface air temperature on the fractal dimension of multi-year series of river flow	82
Conclusions	88
Appendix	92
References	103

Научное издание

Коваленко Виктор Васильевич

ОБЕСПЕЧЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ
И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РЕЧНОГО СТОКА
МЕТОДАМИ ЧАСТИЧНО ИНФИНИТНОЙ ГИДРОЛОГИИ

Монография

Редакторы Л.В. Ковель, И.Г. Максимова
Компьютерный набор: О.В. Романова
Верстка: Е. В.Гайдукова, Н.И. Афанасьева

ЛР № 020309 от 30.12.96

Подписано в печать 13.04.11. Формат 60×90 ¹/₁₆. Гарнитура Times New Roman.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.-печ. л. 6,7. Тираж 200 экз. Заказ № 08/11.
РГТМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98.
ЗАО «НПП «Система», 197045, Санкт-Петербург, Ушаковская наб., 17/1.
