#### Министерство образования и науки Российской Федерации Федеральное агентство по образованию

## ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

#### В.В. КОВАЛЕНКО

# ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ И ЭВОЛЮЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ЧАСТИЧНО ИНФИНИТНОЙ ГИДРОЛОГИИ

Монография



Коваленко В.В. Теория катастроф и эволюция дифференцируемых многообразий в частично инфинитной гидрологии. — СПб.: изд. РГГМУ, 2008.-178 с.

#### ISBN 978-5-86813-202-5

Рецензент: доктор Эфраин Домингес (Колумбия)

В монографии рассматривается моделирование эволюционных гидрологических процессов. Основным объектом исследования является дифференцируемое многообразие и изменение его размерности. Определен водораздел между классической теорией катастроф и частично инфинитной гидрологией. Проводятся параллели между парадигмами языка С++ и алгоритмизацией гносеологических переходных процессов, базирующихся на дарвиновской триаде: изменчивость, наследственность, отбор.

Предназначена специалистам-гидрологам, студентам и лицам, интересующимся методологией науки.

Kovalenko V.V. Catastrophe theory and evolution of differentiable manifolds in partially infinite hydrology. – St. Petersburg, RSHU Publishers, 2008. – 178 pp.

In the monograph modeling of evolutionary hydrological processes is considered. The basic object of research is differential variety and change of its dimension. The divide between the classical theory of accidents and partially infinite hydrology is determined. The parallels between paradigms of language  $C \leftrightarrow$  and algorithm presentation of epistemological transients based on Darvin's triad is carried out: variability, heredity, selection.

The book is intended to hydrology experts, students and all those interested in methodology of science.

#### ISBN 978-5-86813-202-5

- © Коваленко В. В., 2008
- © Хаустов В. А., обложка, 2008
- © Российский государственный гидрометеорологический

Российский государственный гидрометеорологический университет ВИБЛИОТЕКА 195196, СПб. Малоохтанский пр., 98

92.M. 1345

#### Введение

Данная монография продолжает серию книг [31–37], посвященных частично инфинитному подходу к гидрологии. С одной стороны, она содержит сжатое изложение сути данного направления, «свертывая» предшествующую информацию, а с другой – дополняет его новыми аспектами.

Историческая подоплека появления некоторых из них носит внутриуниверситетский (имеется в виду РГГМУ) характер. Несколько лет назад декан гидрологического факультета проф. А. М. Догановский в рамках Международного гидрологического года побывал в Париже. В то время Западная Европа находилась под сильным впечатлением от наводнений, затопивших многие города. Был велик интерес к катастрофическим явлениям. Деканат предложил организовать подготовку (в рамках магистратуры) специалистов по «Прогнозу катастроф». «А что, – рассуждали гидрологи. – Существует математическая теория катастроф. Почему бы ее не применить к гидрологии».

Я (как заведующий кафедрой гидрофизики и гидропрогнозов) сопротивлялся как мог, приводя следующие доводы:

- 1. Гидрологическая катастрофа (например, наводнение) может вообще не иметь никакого отношения к теории катастроф (каспоидным и омбилическим). В гидропрогнозах в настоящее время вообще не культивируются прогностические модели, имеющие хоть какое-то отношение к сборкам и складкам Уитни, на которые «рассыпаются» структурно неустойчивые особенности. В основе подавляющего большинства прогностических методик (см. [5, 8, 16, 59, 64, 72—74]) лежат либо уравнения множественной регрессии, либо воднобалансовые соотношения. Последнее отражает тот факт, что наводнение результат дисбаланса между ускоренным поступлением воды в речные бассейны (ливни, интенсивное снеготаяние) и замедленной их разгрузкой (заторы, зажоры, насыщение влагой почво-грунтов). Этот дисбаланс может привести к повышению уровня воды и затоплению населенных пунктов, но данный природный катаклизм не имеет никакого отношения к теории катастроф как таковой.
- 2. Когда гидролог-прогнозист дает прогноз, он использует обычные методики. Ему даже не придет в голову мысль: «Дай-ка я спрогнозирую катастрофу». Он просто прогнозирует численное значение гид-

рологической величины (уровня воды, например), а будет при этом катастрофа или нет — это вопрос не методики, но чисто «бытовой»: затопит или нет при таком наполнении русла (поймы) населенные пункты. Причем тут теория катастроф?

Эта теория имеет дело с анализом математического объекта, именуемым «многообразием». На одних многообразиях могут быть катастрофы (т. е. резкие изменения «выхода» при плавном изменении «входа»), на других — нет. Модели, порождающие многообразие катастроф, могут соответствовать какой-либо реальности (такие примеры будут приведены в первом разделе), а могут и не соответствовать. Но в любом случае классические катастрофы происходят на многообразиях, которые уже заданы. Варьируется положение изображающей точки, меняющей в определенной ситуации скачком свою траекторию. Именно для отражения этого факта («неустойчивости» траектории на многообразии) первый раздел монографии назван «Классическая теория катастроф на многообразиях». Частично инфинитное моделирование и прогнозирование «имеет в виду» совсем другое: изменение размерности многообразия.

Во втором разделе «Динамика гидрологических многообразий» показывает, как возникают «тупики», выбраться из которых можно, только увеличив размерность многообразия (расширив фазовое пространство для моделирования и прогнозирования процесса).

В третьем разделе описывается методология выхода из подобных

В третьем разделе описывается методология выхода из подобных «тупиков». Методология не может быть полностью рационализирована, так как в ней есть место таким трудно формализируемым понятиям, как интуиция, практический опыт, физическая картина мира и т. п.

Примеры эволюционных изменений многообразий в гидравлике и многолетнем речном стоке даются в четвертом разделе. Там же проводятся параллели между механизмами эволюции в природе и в мышлении.

Математически «тупики» часто проявляются как стремление фазовых переменных к бесконечности или как «деление на нуль». Поэтому в пятом разделе рассмотрены особенности численной реализации моделей в условиях расширяющегося фазового пространства.

Определенных комментариев требует пятый раздел, связанный с программным обеспечением частично инфинитного моделирования. Само слово «программа» в ее классическом понимании подразумевает наличие некоего алгоритма действия. Но ведь в частично инфинитном моделировании есть шаги, не подлежащие алгоритмизации (на то оно и

«частично инфинитное»). И тем не менее многое в нем алгоритмизуется. Оно претендует на изучение механизмов развития (в широком смысле этого слова), а значит, в нем присутствуют элементы теории эволюции Дарвина (неодарвинизм) с его ключевыми понятиями: изменчивость, наследственность, отбор. Язык С++ предоставляет широкие возможности для их «использования». Не алгоритмизируемые моменты могут перехватывать исключения try {throw...} catch (...) {...}, дающие пользователю возможность проявить свой опыт и интуицию для возобновления работы программы в нужном направлении. А что такое интуиция и опыт, как не умение мозга (находясь в критической ситуации выбора) формировать новые пути развития. Поэтому, на мой взгляд, любая методологическая работа, претендующая на новизну, просто обязана включать субъект—объектные взаимодействия в процессе познания. Этому посвящен п. 4.4.

Данная книга — не учебник и не учебное пособие. Поэтому ее дидактическая сторона осталась не «зачищенной». Предполагается, что читатель знаком с работами автора или прослушал курс «Моделирование гидрологических процессов» в объеме, предусмотренном программой для высших учебных заведений по направлению 510900 — гидрометеорология (специальность 073200 — гидрология).

#### 1. Классическая теория катастроф на многообразиях

#### 1.1. Многообразия, неустойчивости и бифуркации

Прежде чем перейти к более или менее систематическому изложению механизмов катастроф, имеет смысл бегло остановиться на истории вопроса. Рассматриваемая теория — раздел механики, современный этап развития которой заложил И. Ньютон (1643—1727). В ее основе лежало предположение, что на плавное внешнее воздействие система должна реагировать также плавно (экспериментально исследованное Ньютоном поведение маятника было асимптотически устойчивым).

Однако окружающий нас мир «кишит» скачками и резкими изменениями. Их математическим «репрезентом» является неустойчивость (одно из ключевых понятий теории катастроф). Эту неустойчивость впервые начали исследовать Л. Эйлер (1707–1783) — для траекторий, а Ж. Лагранж (1736–1813) — для состояний.

У. Гамильтон (1805–1865) стал описывать векторное поле фазовых

У. Гамильтон (1805—1865) стал описывать векторное поле фазовых траекторий системой дифференциальных уравнений первого порядка. А. Пуанкаре (1854—1912) заложил основы современных взглядов на бифуркации (это понятие также является ключевым в теории катастроф).

Внесли свою лепту и наши отечественные ученые. А. М. Ляпунов (1857–1918) придал определению устойчивости математическую стро-

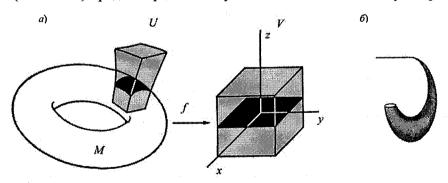


Рис. 1.1. Примеры двумерного многообразия в  $R^3$  (a) и множества с неправильным локальным устройством ( $\delta$ ).

гость (введенные им обобщенные энергетические функции носят его имя). А. А. Андронов (1901–1952), действуя в русле работ Пуанкаре, предложил программу, мало чем отличающуюся от реализуемой в настоящее время современной теорией катастроф. В частности, он (совместно с Л. С. Понтрягиным) ввел понятие «грубости», положенное в основу классификаций структурно устойчивых особенностей (еще одно ключевое понятие теории катастроф) современными ведущими специалистами в этой области (Р. Том, Е. Зиман, С. Смейл, В. И. Арнольд).

Теория катастроф является сложной математически и может излагаться на разных уровнях строгости. В данном случае она представлена в инженерном аспекте, соответствующем работам [6, 60, 86, 93].

При любом способе изложения этой теории ключевым ее звеном является **многообразие**. Его суть состоит в том, что оно обобщает понятие линии и поверхности на любое число измерений [52, 79]. Более «строго»: подмножество M в n-мерном евклидовом пространстве  $R^n$  называется k-мерным многообразием, если пересечение его с открытым множеством U (в  $R^n$ ) с точностью до диффеоморфизма (взаимно однозначного и непрерывно дифференцируемого отображения f:  $U \rightarrow V$ , где V — открытое множество в  $R^n$ ) есть часть пространства  $R^k \times \{0\}$ . Для двумерного многообразия ситуацию поясняет рис. 1.1, a.

В этом определении заложена идея, что «локально многообразие устроено как  $R^n$ », а значит, возможно представление пространства состояния изучаемой системы (его строение может быть топологическим и вообще любой природы) областью числового пространства, т. е. набором чисел (так называемая параметризация).

Множество может и не быть многообразием, если оно локально устроено «неправильно» (рис. 1.1,  $\delta$ ). У нас многообразия будут возникать как совокупности решений невырожденных систем уравнений и часто будут служить фазовыми пространствами.

Рассмотрим так называемые статические и динамические неустойчивости на примере линейного осциллятора с затуханием:

$$m\ddot{x} + r\dot{x} + Sx = 0, \tag{1.1}$$

где x — перемещение; m — масса осциллятора; r — коэффициент, учитывающий амортизирующие свойства демпфера; S — жесткость пружины (рис. 1.2, a).

В фазовом пространстве переменных x и  $\dot{x}=dx/dt$  можно наблюдать различные типы движения в зависимости от корней характеристического уравнения  $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  (здесь b = r/m — затухание, c = S/m — жесткость). В зависимости от знака дискриминанта  $D = b^2 - 4c$  корни будут действительными или комплексными, что и определяет возможные типы поведения осциллятора (cm. рис. 1.2,  $\delta$ , на котором частично представлены возможные фазовые портреты).

Статическая потеря устойчивости (рис. 1.2, e) возникает при переходе жесткости через нулевое значение. При больших ее значениях имеем замкнутый цикл, который «сплющивается» по мере приближения значения e к нулю.

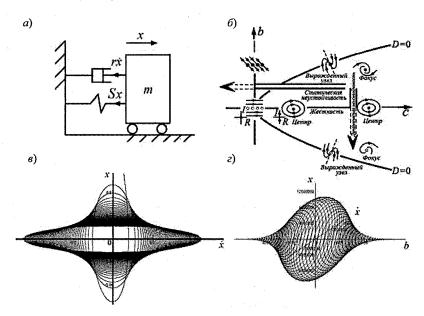


Рис. 1.2 Линейный осциллятор (a) и его фазовый портрет при положительных значениях жесткости c (при c < 0 траектории имеют седловой характер) (б); на рис. 1.2, e показан фазовый портрет, возникающий при медленной (по сравнению с частотой колебаний осциллятора) «протяжке» параметра c из положительной области в отрицательную (при b = const = 0), а на рис. 1.2, e — при аналогичной «протяжке» параметра b из отрицательной области в положительную (при c = const > 0).

Динамическая неустойчивость возникает при отрицательном затухании (рис. 1.2,  $\epsilon$ ). Этот рисунок соответствует ситуации, при которой протяжка по параметру  $\epsilon$  проведена снизу вверх: амплитуда колебаний стала увеличиваться, однако скорость протяжки была больше, чем это увеличение, а при переходе через центр (b=0) процесс стал затухать.

В реальности за счет нелинейных эффектов (например, жесткость начинает зависеть от x) бесконечных перемещений не будет. Поэтому линейную теорию устойчивости надо рассматривать как возможный «предупредительный звонок»: что-то должно произойти с системой (в том числе и ее возможное разрушение).

Нелинейные эффекты приводят к так называемым бифуркациям. В широком смысле слова этот термин употребляется для обозначения качественных изменений объектов при варьировании коэффициентов, характеризующих их свойства и входящих в математические модели как задаваемые параметры. В буквальном же смысле этот термин означает раздвоение.

Так же как и неустойчивости, бифуркации бывают статические и динамические. Для того чтобы понять, что собой представляют статические бифуркации, вернемся к модели осциллятора (1.1). Это уравнение — прямое следствие одного из законов Ньютона:  $mdo/dt = F_{\Sigma}$ , где  $\upsilon$  — скорость;  $F_{\Sigma}$  — действующие силы. Величину  $F_{\Sigma}$  можно представить в виде суммы силы трения  $F_{\tau p} = -r\upsilon$  и «движущей силы» F(x), которую (в случае линейного осциллятора) представляют, в соответствии с законом Гука, пропорциональной смещению x от положения равновесия F(x) = -Sx (знак минус указывает на то, что пружина возвращает тело массой m в положение равновесия). С учетом обозначения  $\dot{x} = \upsilon$  мы и получаем уравнение (1.1), из которого следует, что при неустойчивости смещение стремится к бесконечности, чего в реальности не бывает.

Изменим модель осциллятора, считая, что m очень мала, а коэффициент демпфирования настолько велик, что позволяет пренебречь первым слагаемым в (1.1). Приходим к уравнению  $\dot{x}=-kx$ , где k=S/r. Интеграл по смещению x от правой части представляет собой «работу», отрицательное значение которой называется потенциалом  $V=0.5kx^2$  (F(x)=-dV/dx). Потенциальную кривую (рис. 1.3) можно

интерпретировать (метафорически) как склон холма, по которому скатывается частичка, пытаясь занять положение с наименьшей энергией. При k>0 это положение устойчиво, при k<0 — нет.

Вид потенциальной кривой деформируется при изменении приложенной нагрузки, т. е. силы F(x). Например, в случае ангармоничного осциллятора ( $F(x)=-kx-k_1x^3$ ) при k<0,  $k_1>0$  имеем потенциальную кривую, представленную на рис. 1.3,  $\varepsilon$  (при k>0,  $k_1>0$  потенциальная кривая похожа на таковую, представленную на рис. 1.3,  $\varepsilon$ , но с более крутыми склонами). В этом случае имеем три решения: x=0 (неустойчивое);  $x_{1,2}=\pm\sqrt{|k|/k_1}$  (устойчивые).

Существуют три типичные статические бифуркации, представленные на рис. 1.4. Рисунок 1.4, a соответствует так называемой асимметричной точке бифуркации: минимум и максимум при изменении нагрузки b (снизу вверх) сначала сливаются, а затем меняются местами. Рисунок 1.4,  $\delta$  (устойчиво симметричная точка бифуркации) соответствует ситуации, когда исходный минимум переходит в широкую яму с бугром посредине.

Рисунок 1.4, в иллюстрирует случай, обратный предыдущему (неустойчиво симметричная точка бифуркации). Во всех этих типах бифуркаций наступает смена устойчивых и неустойчивых состояний.

Существуют и так называемые динамические бифуркации, которые рассмотрим на примере модернизированного уравнения (1.1):

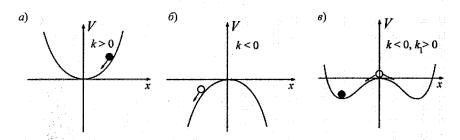


Рис. 1.3: Форма потенциальных кривых при различных вариантах нагрузки: a и  $\delta$  — для линейного «осциллятора» при пренебрежении одним из слагаемых; s — для ангармоничного осциллятора.

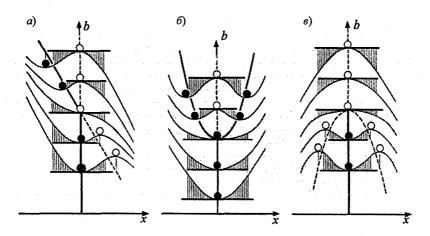


Рис. 1.4. Три типичные статические бифуркации: a – асимметричная;  $\delta$  – устойчиво симметричная;  $\delta$  – неустойчиво симметричная [86].

$$a\ddot{x} + b\dot{x} + cx + D(x^2 + \dot{x}^2)\dot{x} = 0,$$

где D – коэффициент нелинейности (все величины безразмерные).

В данном случае имеем семейство растущих предельных циклов, рассматриваемых в фазовом пространстве  $(x, \dot{x})$  при изменении значений параметра нагрузки b от +b до -b при фиксированных значениях a и b, равных единице.

При D > 0 (рис. 1.5, a) имеем динамический аналог устойчиво симметричной точки бифуркации: при b > 0 состояние x = 0 является аттрактором (устойчивый фокус), а при b < 0 появляется неустойчивый фокус и траектории стремятся к устойчивому предельному циклу, амплитуда которого увеличивается по мере уменьшения b (увеличения |b|).

При D < 0 (рис. 1.5,  $\delta$ ) имеем динамический аналог неустойчиво симметричной точки бифуркации. Равновесное решение теряет устойчивость при b < 0. Область притяжения ограничена неустойчивым предельным циклом (подобные бифуркации называются бифуркациями Хопфа).

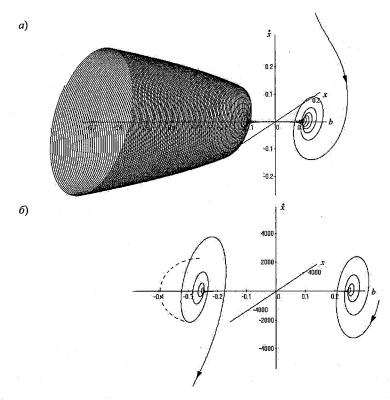


Рис. 1.5. Варианты динамических бифуркаций нелинейного осциллятора при коэффициенте нелинейности D>0 (a) и D<0 (б).

### 1.2. Статические бифуркации и катастрофы. Складки и сборки. Машина Зимана

Статические бифуркации имеют прямое отношение к теории катастроф, так как формы потенциальных функций определяют поведение нелинейных систем. Существует классификация наблюдаемых форм неустойчивости в зависимости от характера потенциала и числа управляющих параметров.

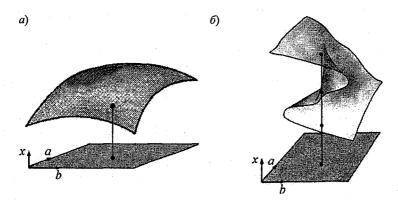


Рис. 1.6. Появление особенности при отображении поверхности на плоскость.

Для того чтобы осознать суть ситуации, предположим, что поведение изучаемого объекта описывается переменной состояния x (например, расходом воды) и задаваемыми параметрами a и b, характеризующими свойства объекта и воздействия на него. Поверхность (x, a, b) представляет собой многообразие, а плоскость (a, b) — ее проекцию. Отображение (x, a, b) на (a, b) может быть однозначным (рис. 1.6, a), а может иметь особенность, когда точке  $(a_1, b_1)$  соответствует несколь-

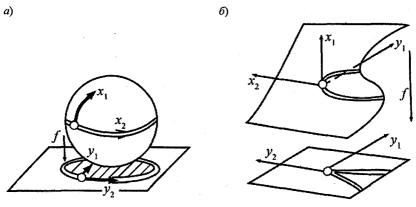


Рис. 1.7. К образованию складки (a) и сборки (b), возникающих при проектировании многообразий на плоскость [6].

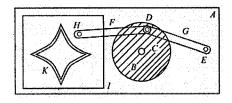


Рис. 1.8. Машина катастроф Зимана [6].

ко значений состояний  $x_i$  (рис. 1.6,  $\delta$ ), т. е. плавному изменению свойств объекта (a и b) отвечают скачки его состояния x.

В зависимости от числа управляющих параметров и переменных состояния производят классификацию катастроф (см. п. 1.3). Основной факт теории

заключается в том, что существует только две устойчивые особенности гладкого (дифференцируемого) отображения поверхности на плоскость (складка и сборка), а всякая другая — «рассыпается» на эти составляющие при малом «шевелении» параметров.

Рисунок 1.7 проясняет механизм образования двух указанных особенностей с помощью отображений  $y_1 = x_1^2$ ,  $y_2 = x_2$  (для складки) и  $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2$ ,  $y_2 = x_2$  (для сборки).

Механизм образования сборки обычно иллюстрируют с помощью так называемой машины катастроф Зимана (рис. 1.8).

На доске A прикреплен диск B иголкой C. Иголка D втыкается в диск, а иголка E — в доску A. Буквами G и F обозначены резиновые ленты, к концу одной из которых крепится карандаш H. При движении карандаша диск поворачивается, причем на контуре K (кривая «катастроф») малое (плавное) изменение положения карандаша может вызвать «катастрофу» (дергание диска, скачки). Механизм возникновения «катастрофы» поясняется следующим образом (подробнее cm. [60]).

Для энергии (потенциальной функции) системы (машины катастроф Зимана) можно получить следующее уравнение:

$$E_{ab}(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}ax^2 + bx$$



Рис. 1.9. Изменение потенциальной функции  $E_{ab}(x)$  в зависимости от параметров a и b [60].

(здесь переменная x связана с углом поворота диска, а параметры a и b – с координатами карандаша). В зависимости от значений a и b вид потенциальной функции будет меняться (рис. 1.9).

Поверхность равновесия в пространстве хав удовлетворяет  $dE_{ab}(x)/dx = x^3 +$ **уравнению** +ax+b=0 и называется многообразием катастроф, а полукубическая парабола, получающаяся при проектировании этой поверхности на плоскость управляющих параметров a и b (рис. 1.10), бифуркационным множеством. Причем вид кривой на рис. 1.9 зависит от того, где находится точка (ab) на проекции (рис. 1.10, б). В зависимости от этого имеются одно, два или три положения равновесия, которые могут быть устойчивыми или неустойчивыми (рис. 1.9).

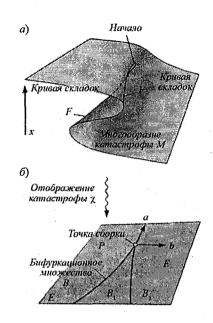


Рис. 1.10. Отображение многообразия катастрофы в пространстве xab на плоскость параметров ab [60].

Существуют и другие наглядные механизмы, поясняющие образование особенностей (так называемые «качалки», *см.* [60]).

## 1.3. Ряды Тейлора и классификация катастроф. «Экологическая ниша» теории катастроф

Рассмотренная ситуация со сборкой, которую имитирует машина Зимана, лишь частный случай в общей классификации катастроф. Последняя основана на анализе разложения в ряд Тейлора потенциальной функции [93] (ряд Тейлора вообще играет исключительную роль в математике, им занимался даже К. Маркс [3]):

Российский государственный гидрометеорологический унивепситет БИБЛИОТЕКА

195196, СПб, Малоохтинский пр., 98

$$V(x_1, ..., x_n) = c^{(0)} + \sum_{j} c_j^{(1)} x_j + \sum_{jj} c_{jj'}^{(2)} x_j x_{j'} + \sum_{jj',j'} c_{jj'j''}^{(3)} x_j x_{j'} x_{j''} + ...,$$

где 
$$c_j^{(1)} = \frac{\partial V}{\partial x_j} \bigg|_0$$
,  $c_{jj'}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_{j'}} \bigg|_0$ .

Отрицательная производная потенциальной функции — просто правая часть динамической модели, для которой изучаются катастрофы  $dx/dt = -\partial V/\partial x$ , а ее равновесная поверхность определяется уравнением  $\partial V/\partial x = 0$ .

Коэффициенты разложения c возмущаются либо внешними воздействиями, либо внутренними свойствами системы (в теории катастроф эти возмущения называют «дефектами» или «деформациями»; в модели машины Зимана они были представлены параметрами a и b). Сравнительно подробная классификация типичных катастроф дана в табл. 1.1.

В этой таблице представлены все структурно устойчивые особенности, которые наблюдаются при манипулировании четырьмя параметрами и при взаимодействии максимум двух переменных. (Все остальное – за пределами современной науки.)

Таблица 1.1

Классификация катастроф			
Тип катастрофы	Вид потенциала		
Складка	$x^3 + a_1 x$		
Сборка	$x^4 + a_2x^2 + a_1x$		
Ласточкин хвост	$x^5 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x$		
Бабочка	$x^6 + a_4 x^4 + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x$		
Гиперболическая омбилика	$x_2^3 + x_1^3 + a_1 x_2 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_1$		
Эллиптическая омбилика	$x_2^3 - 3x_2x_1^2 + a_1(x_2^2 + x_1^2) - a_2x_2 - a_3x_1$		
Параболическая омбилика	$x_2^2 x_1 + x_1^4 + a_1 x_2^2 + a_2 x_1^2 - a_3 x_2 - a_4 x_1$		

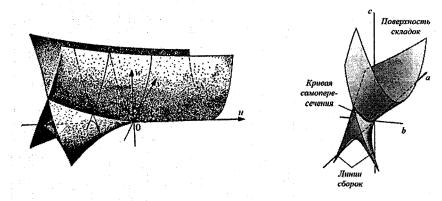


Рис. 1.11, Проекции бифуркационного множества «ласточкин хвост».

Возникают самые причудливые ситуации. На рис. 1.11 показаны (в разных вариантах из книг [60, 93]) проекции бифуркационного множества под названием «ласточкин хвост». Вникать во всю эту экзотику (далекую пока от гидрологии) смысла нет.

Указанные в табл. 1.1 устойчивые особенности гладких отображений можно применять к совершенно различным явлениям окружающего мира. В каком-то смысле теория катастроф отвечает на мучивший К. Маркса вопрос о возможности математического описания кризисов в экономике (известно [3], что именно этот вопрос явился побудительным мотивом его интереса к изучению математики, что нашло отражение в его переписке с Ф. Энгельсом, опубликованной позже под названием «Математические рукописи», М., 1968).

Однако, наряду с бесспорным применением теории катастроф в тех случаях, когда отображение доподлинно известно (теория упругости, геометрическая оптика и др.), существует соблазн ее спекулятивного использования. Слово «спекуляция» не имеет того негативного оттенка, который ему придается в быту. Спекулятивный — значит умозрительный. Гегель свою философию называл спекулятивной. Попытка применения теории катастроф в тех случаях, когда отображение, приводящее к той или иной особенности, известно не достоверно (или вообще неизвестно) и есть спекуляция. Подобный пример приводит В. И. Арнольд [6] со ссылкой на английского математика К. Зимана.

В этом примере речь идет о деятельности творческой личности, характеризуемой такими свойствами, как «техника» (T), «увлечен-

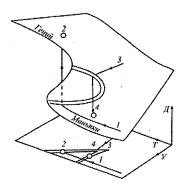


Рис. 1.12. К модели творческой личности [6].

ность» (V) и «достижения» ( $\mathcal{I}$ ), порождающих многообразие в трехмерном пространстве (рис. 1.12). Достижения  $\mathcal{I}$  играют роль переменной состояния, поведением которой управляют параметры T и V. Рост увлеченности, не подкрепленный ростом техники (имеется в виду владение технологией научного познания) может привести к катастрофе (на кривой 3 в точке 4). При этом достижения скачком падают и ситуация загоняется в область «маньяки».

Почему подобные рассуждения спекулятивны? Потому что это не более чем правдоподобные рассуждения. Творческий процесс не рационализируем (иначе любого «дурака» можно было бы сделать творцом). «Творческое многообразие» неизвестно, в отличие, например, от многообразия катастроф упругих конструкций типа арок. Поэтому у теории катастроф есть своя «экологическая ниша»: если известно гладкое отображение с типичной (устойчивой) особенностью, т. е. зафиксировано многообразие катастроф, то есть и предмет разговора.

«Продвинутый» читатель поинтересуется: «А где "трансверсальность", "коразмерность", лемма Морса, "каустика" и т. п.?». Где, где... Там, где нужно. Теория катастроф — это и инженерные приложения, и глубокая математика (в «несколько слоев»).

#### 2. Динамика гидрологических многообразий

#### 2.1. Динамические модели гидрологического цикла

Рассмотрим основные звенья гидрологического цикла (рис. 2.1). В приземном слое атмосферы формируются осадки, которые вместе с другими метеорологическими факторами (температурой воздуха, скоростью ветра и т. д.) оказывают внешнее воздействие на речной водосбор. Выпавшие осадки формируют склоновый сток, который, поступая в русловую сеть, трансформируется в русловой. Часть выпавших осадков испаряется, часть инфильтруется в почву, подпитывая ненасыщенную зону. Взаимодействие насыщенной и ненасыщенной зон, положение напорного горизонта и русловой сток определяют уровень грунтовых вод.

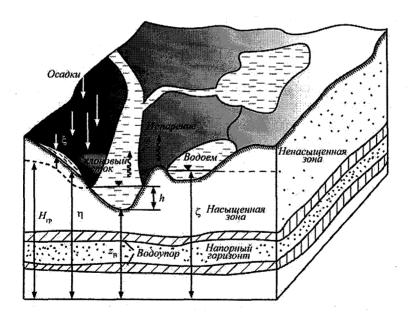


Рис. 2.1. Основные звенья гидрологического цикла.

Запишем основные модели с распределенными параметрами, которыми в настоящее время описывают гидрологические процессы, соответствующие рис. 2.1.

Русловой сток в одномерной гидравлической идеализации подчиняется уравнению неразрывности:

$$\partial F/\partial t + \partial Q/\partial x = \dot{\bar{\varepsilon}}(x,t),$$
 (2.1)

где F — площадь живого сечения; Q — расход воды;  $\tilde{\epsilon}$  — внешнее воздействие [например, известный боковой приток q(x,t)]; x — продольная координата; t — время.

Уравнение (2.1) дополняется эмпирической зависимостью:

$$Q = f(F, x) - k \partial F / \partial x,$$

что приводит к диффузионной модели

$$\partial F/\partial t + \partial f(F,x)/\partial x = k \partial^2 F/\partial x^2 + q(x,t)$$
 (2.2)

(здесь k — эмпирический коэффициент). Если не учитывать влияние на расход градиента  $\partial F/\partial x$ , то уравнение (2.2) превращается в модель кинематической волны, описывающей только снос волны вниз по течению.

Аналогичные по своей сути рассуждения приводят к двумерной параболической модели для слоя склонового стока ξ:

$$\partial \xi / \partial t + \partial q_x / \partial x + \partial q_y / \partial y = R_{oc}(x, y) - I(x, y); \tag{2.3}$$

$$q_x = f_1(\xi) - k_1 \, \partial \xi / \partial x; \qquad (2.4)$$

$$q_{y} = f_{2}(\xi) - k_{2} \partial \xi / \partial y, \qquad (2.5)$$

где  $q_x$  и  $q_y$  — проекции единичного расхода воды на оси координат x, y;  $R_{\rm oc}$  и I — соответственно интенсивность осадков и фильтрации;  $k_1$  и  $k_2$  — эмпирические коэффициенты.

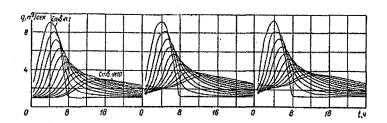
Разумеется, диффузионная модель может быть записана и для уровней или расходов воды. Она находит широкое применение в гидрологии. На рис. 2.2, a в качестве примера приведена временная динамика многообразия единичных расходов при неустановившемся движении воды в канале [7 $\theta$ ].

Ненасыщенная зона (зона аэрации) описывается следующим уравнением (ограничимся одномерным случаем):

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ D(\theta) \right] \frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z} + \varepsilon(\theta, z, t), \tag{2.6}$$

где  $\theta$  – объемная влажность;  $k(\theta)$  – коэффициент влагопроводности;

a)





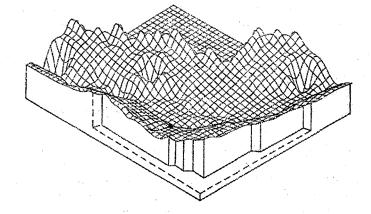


Рис. 2.2. Примеры одномерных (а) и двумерных (б) гидрологических многообразий.

 $D(\theta)$  — коэффициент почвенной влаги (аналог коэффициента диффузии);  $\epsilon(\theta,z,t)$  — функция источников (стоков), например поглощение влаги корнями растений; z — вертикальная ось.

Таким же типом уравнения описывается насыщенная зона и напорные горизонты:

$$\mu \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k_x \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( k_y \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \varepsilon(x, y, t), \tag{2.7}$$

где  $\mu$  — удельная водоотдача; H — уровень грунтовых вод для безнапорного движения и пьезометрический напор для напорного движения. Динамика многообразия H(x, y) может приводить к самым причудливым формам ( $c_M$ . рис. 2.2,  $\delta$  из работы [3]).

Основная модель механики жидкости в виде системы Навье— Стокса

$$\rho(\partial \vec{v}/\partial t + (\vec{v}\nabla)\vec{v}) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \vec{v}, \qquad (2.8)$$

$$\nabla \vec{\mathbf{v}} = 0 \tag{2.9}$$

(здесь  $\rho$  — плотность; p — давление;  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости;  $\nabla$  — градиент ( $\nabla \vec{\upsilon} \equiv \operatorname{div} \vec{\upsilon}$ )) также может рассматриваться как уравнение конвективного и диффузионного переноса отдельной компоненты скорости  $\vec{\upsilon}$  (для определения давления p привлекается уравнение (2.9)). Если из (2.8) исключить давление, то получаемое уравнение для завихренности  $w = \operatorname{rot} \vec{\upsilon}$ 

$$\rho(\partial \vec{w}/\partial t + (\vec{v}\nabla)\vec{w} - (\vec{w}\nabla)\vec{v}) = \eta\nabla^2\vec{w}$$
 (2.10)

также определяет «специфические» [75] конвективный перенос и диффузию.

Разумеется, динамические модели гидрологических процессов не ограничиваются уравнениями параболического типа. Широко используется гиперболическая система Сен-Венана для изучения динамики многообразий в руслах рек при существенном влиянии сил инерции:

$$i_0 - \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{Q^2}{C^2 R F^2} + \frac{1}{gF} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{2\alpha Q}{gF} \frac{\partial Q}{\partial x}; \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = q(x, t), \tag{2.12}$$

где  $i_0$  — уклон дна; C — коэффициент Шези; R — гидравлический радиус; g — ускорение свободного падения;  $\alpha$  — коэффициент неравномерности распределения скоростей по живому сечению.

Возможны также различные варианты нелинейных систем уравнений, связанных с пространственной динамикой волн в водоемах, хотя они, скорее, являются предметом интереса океанологов.

Кроме классического применения моделей для решения различных краевых задач, когда их постоянные или переменные параметры известны заранее, существует область использования моделей в так называемом реальном времени, когда информация о параметрах модели и внешних воздействиях поступает с измерительных приборов непосредственно при решении уравнения. Возможность измерять те или иные характеристики изучаемых гидрологических процессов часто позволяет существенно упростить математическую модель. Обратимся к гидрометрии.

Для учета речного стока широко используются модели расхода, основанные на связи Q = f(H), например в виде полинома  $Q = a_0 + a_1 H + a_2 H^2 + ...$  Однако эта связь может быть и неоднозначной. Последнее можно установить, опираясь на систему уравнений Сен-Венана. Она довольно полно описывает в одномерной гидравлической идеализации движение неустановившегося потока в русле. В результате ее решения находят функции Q = f(x,t) и H = f(x,t) при известных начальных и граничных условиях. Однако в гидрометрии имеют дело с конкретными закрепленными створами (т. е. координата x фиксированная,  $x = x_0$ ) и предполагают, что морфометрические характеристики створа (B, F, R) и др.) и ход уровня во времени H = f(t) легко измерить. Если предположить, что для фиксированного створа с координатой  $x_0$  из классических формул речной гидравлики и измерений известны зависимости C = f(H) и I = f(t), то, подставив (учитывая (2.12) при q = 0) производную  $\partial Q/\partial x = -\partial F/\partial t$  в соотношение (2.11),

его можно записать в виде обыкновенного дифференциального уравнения (уравнения Риккати):

$$dQ/dt = f_1(x_0, t)Q^2 + f_2(x_0, t)Q + f_3(x_0, t), (2.13)$$

где 
$$f_1(x_0,t) = -g/(C^2RF)$$
,  $f_2(x_0,t) = (2\alpha/F)\partial F/\partial t$ ,  $f_3(x_0,t) = gIF$ .

Решить его - значит найти для фиксированного створа зависимость Q = f(t) (гидрограф) при известных: начальном расходе воды, коэффициентах  $f_1(x_0,t)$  и  $f_2(x_0,t)$  и свободном члене  $f_3(x_0,t)$ . Так как F = f(H), C = f(H) и R = f(H), то при измеренных значениях H и Iимеем  $Q = f(H, \partial H/\partial x, \partial H/\partial t)$ , так как  $\partial H/\partial x = -I$ , а  $\partial H/\partial t$  определяется функцией H(t) при непрерывном или дискретном, но достаточно частом измерении Н. Таким образом, если при равномерном режиме зависимость Q = f(H) однозначна и определяется формулой Шези, то при плавно изменяющемся движении она определяется нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка с переменными коэффициентами, которое, по существу, является моделью петлеобразной зависимости Q = f(H). Можно показать, что в более общем случае место неплавно изменяющегося лвижения имеет  $Q = f(H, \partial H/\partial x, \partial H/\partial t, \partial^2 H/\partial x^2, \partial^2 H/\partial x \partial t,...)$ , т. е. расход воды зависит не только от уровня и уклона, но и от кривизны свободной поверхности, что, однако, является для гидрометрии редким случаем (следует обратить внимание на то, что хотя традиционно в гидрометрии считают, что расход определяется уровнем, но на самом деле ситуация обратная).

Вообще вопрос о зависимости Q = f(H) (или U = f(h), или U = f(H): уравнение типа (2.13) может быть записано и для средней по сечению скорости U) достоин глубокого обсуждения. Чисто умозрительно можно нарисовать «картинку» (рис. 2.3, a), в которой заложена возможность многих типов движения, включая быстротоки и сели. Однако самое удивительное, что практически все подтверждается либо натурными данными, либо численными расчетами по гидравлической модели с несколько расширенным составом фазовых переменных (рис. 2.3,  $\delta$ ,  $\delta$ ,  $\epsilon$ ).

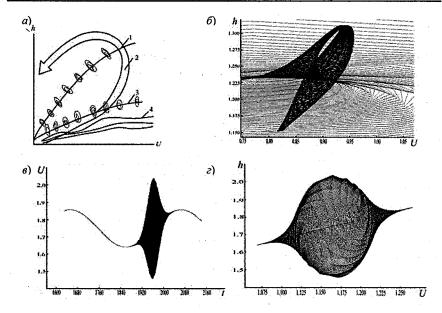


Рис. 2.3. Умозрительная (a) и расчетные (б,  $\epsilon$ ) зависимости U = f(h), полученные при различных вариантах гидравлических расчетов [35] (на рис.  $\epsilon$  показана временная развертка, в какой-то степени имитирующая селевой поток; ей соответствует рис.  $\epsilon$ ):

1 — квазиравномерный режим, 2 — неустановившееся движение, 3 — быстроток, 4 — селеподобное движение.

Очень широкое применение в гидрологии находят линейные и нелинейные модели в виде обыкновенных дифференциальных уравнений. Например, если нас интересует формирование расхода воды только в замыкающем створе бассейна, то вполне достаточно его описывать уравнением первого

$$\tau_1 \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{k}Q = \dot{X} \tag{2.14}$$

или второго («вывод» см. ниже)

$$\tau_2 \frac{d^2 Q}{dt^2} + \left(\frac{\tau_2}{k\tau_1} + 1\right) \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{k\tau_1} Q = \frac{1}{\tau_1} \dot{X}$$
 (2.15)

порядков (здесь  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  — параметры релаксаций; k — коэффициент стока). Причем под бассейном можно понимать огромные территории типа водосборной площади, формирующей сток в Северный Ледовитый океан.

Если озера, болота, водохранилища интересуют нас как аккумулирующие емкости, то изменение уровня в них также описывается моделями с сосредоточенными параметрами.

Более того, в результате применения различных методов (см. [36]) бесконечномерные системы (описываемые уравнениями в частных производных) можно свести к конечномерным  $dx_i/dt = f(x_i,t)$ ,  $i=1,2,\ldots(x_i-$  компонент вектора состояния). Существует определенный класс подобных моделей, которые отражают некоторые реальные черты развивающихся систем. Они хорошо изучены и допускают экспериментальную проверку. Это так называемые популяционные модели, описывающие эволюцию всевозможных популяций (последнее имеет широкое толкование).

Рассмотрим их более подробно [91, 99]. Обозначим через  $x_j(t)$  плотность популяции какого-либо j-го вида. Скорость роста (без учета миграции из ареала обитания)  $dx_j / dt = (b_j - d_j)x_j$ . Удельные скорости размножения  $b_j$  и гибели  $d_j$  зависят как от абиотических факторов (тепло, свет и т. п.), так и от взаимодействия с другими популяциями x:  $b_j = b_j (\upsilon_1, ..., \upsilon_k; x, ..., x_j, ..., x_n)$ ;  $d_j = d_j (\upsilon_1, ..., \upsilon_k; x_1, ..., x_j, ..., x_n)$ . Обозначив  $b_j - d_j = r_j$ , получим:  $dx_j / dt = r_j x_j$ . Если  $r_j = r_0 = \text{const}(r_j \text{ не зависит от } x_j - \text{редкая популяция})$ , то имеем модель Мальтуса, решение которой дается экспонентой  $x(t) = x_0 \exp r_0(t - t_0)$  (рис. 2.4). Однако более реалистическая модель получается, если считать, что с повы-

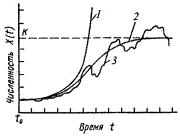


Рис. 2.4. Нелимитированный (1), лимитированный (2) и фактически наблюденный (3) рост популяций [91].

шением плотности популяции она сама себя начинает «тормозить» ( $\beta$  – коэффициент):  $r_j = r_0 - \beta x_j$ . Модель примет вид  $dx/dt = r_0x(1-x/K)$ , где  $K = r_0/\beta$  (индекс j опущен, так как сейчас рассматривается одна популяция). Это так называемое уравнение Ферхюльста, и его решение дается формулой  $x(t) = K/(1+ + ((K-x_0)/x_0))$  ехр $(-r_0(t-t_0))$ ) (см. рис. 2.4).

Величина  $r_0$  — биотический потенциал популяции (показывает потенциальные возможности роста при отсутствии помех со стороны других популяций и самой себя); K — экологическая емкость среды, т. е. тот потолок, до которого может расти популяция в заданной экологической нише.

В случае взаимодействующих популяций  $(r_i = r_i^0 - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j, i=1,...,n)$  модель примет вид:

$$dx_i / dt = (r_i^0 - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x_j) x_i, \qquad i = 1, ..., n.$$
 (2.16)

Если  $r_i^0$  определяет продуктивность i-го вида (по-другому: селективную ценность или биотический потенциал i-го вида), то  $\sum\limits_{j=1}^n \beta_{ij} x_j = \overline{E}(t)$  — среднюю продуктивность всей цепи взаимодействующих популяций. Размерность  $r_i^0$  обратно пропорциональна времени релаксации ( $[r_i^0] = [1/\tau_i]$ ). Следовательно, если  $\tau_i \to 0$ , то  $r_i^0 \to \infty$ , т. е. тот, кто быстрее плодится, находится в выигрыше.

Рано или поздно наступает селективное равновесие:  $\overline{E}(t) \to \max_i r_i^0$  и  $dx_i/dt=0$ . Система уравнений (2.16) работает как фильтр, выделяющий информацию (фазовые переменные) с наибольшей ценностью. Чтобы сдвинуться с точки равновесия, должен появиться мутант с  $\widetilde{r_i}^0 > \max r_i^0$ , т. е. необходимо рождение новой информации.

Коэффициенты  $\beta_{ij}$  учитывают влияние одних популяций (или фазовых переменных) на другие. Причем могут быть разные ситуации:  $\beta_{ij} < 0$ ,  $\beta_{ij} = 0$ ,  $\beta_{ij} > 0$ . В зависимости от знака  $\beta_{ij}$  в системе могут происходить разные типы взаимодействий, общая классификация которых сводится к следующему.

Запишем систему уравнений в общем виде  $dx_i / dt = f_i(x_1, ..., x_n)$ , i = 1, ..., n. Переменные  $x_i$  (популяции) взаимодействуют друг с другом (борются за свет, тепло, пищу и т. д.). Влияние одного вида на скорость изменения других определяется частной производной

 $(\partial f_i/\partial x_j)|_{x_1,\dots,x_n}=c_{ij}(t)\ \gtrless\ 0.$  При этом тип взаимодействия может меняться со временем.

Если есть n видов, то исчерпывающую характеристику парных взаимодействий дает матрица  $(c_{ij}(t))_1^n$ . Всего известно шесть типов парных взаимодействий (табл. 2.1).

Если пользоваться введенной нами терминологией, то нейтрализм характеризует две инфинитные друг другу «предметные области»; аменсализм и комменсализм — частично инфинитные; конкуренция, жертва—эксплуататор и мутуализм — финитные.

Типы парных взаимодействий

Таблица 2.1

No	№ Наименование взаимодействия	Тип влияния	
n/n		1-го вида на 2-й	2-го вида на 1-й
1	Нейтрализм	0	0
2	Аменсализм	-	0
3	Комменсализм	+	0
4	Конкуренция	<del>-</del>	_
5	Жертва-эксплуататор	+	
6	Мутуализм	+	• +

Примечание (характер влияния): 0 нейтральное, - отрицательное, + положительное.

Рассмотренная популяционная модель Лотки—Вольтера известна с 20-х годов XX в. М. Эйген подобной моделью описывал зарождение жизни на Земле ( $x_i$  — конкурирующие и объединяющиеся макромолекулы). Ею же описываются и другие процессы, связанные с теорией эволюции Дарвина, например, борьба идей в науке или «борьба» испарения и стока за выпадающие осадки (cм. п.4.2).

Рассмотрим конкретный численный пример системы из трех уравнений:

$$\dot{x}_1 = x_1 \left( a/b_1 - \left( x_1 + x_2 + x_3 \right) / c_1 \right), \tag{2.17}$$

$$\dot{x}_2 = x_2 (a/b_2 - (x_1 + x_2 + x_3)/c_2);$$
 (2.18)

$$\dot{x}_3 = x_3 (a/b_3 - (x_1 + x_2 + x_3)/c_3),$$
 (2.19)

где  $a, b_i, c_i,$  – константы (i = 1, 3).

В данном примере:  $c_1=c_2=c_3$ ;  $b_2=b_3$ ;  $b_1< b_2$ , т. е. селективная ценность переменной  $x_1$  больше, чем переменных  $x_2$  и  $x_3$ . Результаты интегрирования системы (2.17), (2.18) и (2.19) представлены на рис. 2.5, a, b и b. Как и следовало ожидать, система (2.17)—(2.19) отфильтровывает переменные с низкой селективной ценностью. А переменная  $x_1$  захватывает всю экологическую нишу. Рисунки 2.5 b, b и b повторяют предыдущую ситуацию, но при этом параметры b0, b1, b2 и b3 испытывают периодические (причем с разной частотой) незначительные колебания. (Это «баловство» делает картину более красочной, но сути дела не меняет. Ниже, (в разд. 3) показано, что это «дрожание» будет иметь ключевое значение для пробуждения «спящих» фазовых переменных.)

В заключение дадим «вывод» уравнения (2.15). Ограничимся в системе (2.17)–(2.19) первым уравнением ( $x_1$  и  $x_2$  «проигнорируем»). Пусть  $x_1 = Q$ ,  $a = \dot{X}$ ,  $b_1 = W_Q$ ,  $c_1 = W_0/c$ . Тогда уравнение (2.17) примет вид:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{cQ^2}{W_Q} + \frac{Q\dot{X}}{W_Q},\tag{2.20}$$

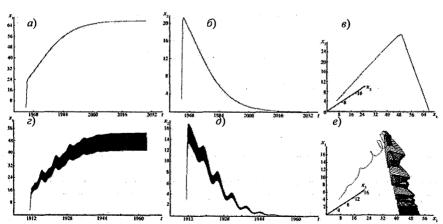


Рис. 2.5. Выделение селективно ценных переменных при постоянных  $(a, \delta, e)$  и изменяющихся (с разной частотой) переменных  $c_l(c, \delta, e)$ .

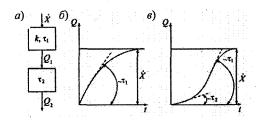


Рис. 2.6. Схема двухъемкостной структуры формирования стока (a), реакция одноемкостной (b) и двухъемкостной (b) модели на «ступенчатое» воздействие осадков (тангенсы углов наклона пропорциональны временам релаксации  $\tau_1$  и  $\tau_2$ ).

где c = 1/k,  $W_Q = \tau_1 Q$ , т. е. уравнение (2.20) - просто обобщение модели линейного фильтра (2.14), если в нем положить  $\tau_1 = W_O/Q$ . Физически это означает (примерно), что мы вводим в рассмотрение так называемую двухъемкостную модель (различные варианты двух и многоемкостных приводятся, в частности, в работах **I**5. 19. 461)

(рис. 2.6, a). В формировании стока участвуют два резервуара: поверхностный (параметры k и  $\tau_1$ ) и подземный, который, в конечном итоге, разгружается в реку с временем релаксации  $\tau_2$ . Балансовое уравнение для верхнего резервуара  $dW_1/dt = (\dot{X} - Q/k)$ , учитывая, что  $W_1 \approx \tau_1 Q_1$ , запишем так:

$$dQ_1/dt = (X - Q/k)/\tau_1. (2.21)$$

Аналогично для второго резервуара (  $dW_2 / dt = Q_1 - Q_2$  ):

$$dQ_2 / dt = (Q_1 - Q_2) / \tau_2. (2.22)$$

Объединяя (2.21) и (2.22), получаем:

$$\tau_2 \frac{d^2 Q}{dt^2} + \left(\frac{\tau_2}{k\tau_1} + 1\right) \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{k\tau_1} Q = \frac{1}{\tau_1} \dot{X}$$
 (2.23)

(при  $\tau_2 = 0$ , естественно, приходим к одномерной модели линейного фильтра).

Из математики (см. [51]) известно, что уравнение Риккати (2.20) может быть преобразовано в линейное однородное уравнение второго порядка. Именно таковым и является двухъемкостная модель

(2.23), если считать  $\dot{X}=$  const и сделать подстановку  $Q_*=Q-k\dot{X}$ . Поэтому нелинейное обобщение модели линейного фильтра — это просто учет возможности влияния второй емкости. Решение обобщенного уравнения усложняется (рис. 2.6, в). При стохастическом обобщении обе модели приводят к похожим асимметричным распределениям, хотя в случае нелинейной модели возникают нюансы и определенные проблемы [34].

Заметим, кстати, что уравнения, аналогичные (2.14) и (2.15) (разумеется, с другими коэффициентами и внешними воздействиями), применяются для изучения колебаний уровня воды в водоемах [56].

#### 2.2. Моделирование динамики вероятностных распределений

Решить уравнение, соответствующее динамической модели, значит найти зависимость искомой величины, например площади живого сечения в модели кинематической волны, от независимых аргументов (продольной координаты и времени). Но раз выясняется, что режим рек подчиняется вероятностным закономерностям, то естественна попытка дать полное статистическое описание речного потока. Оказывается, это можно сделать с помощью так называемых характеристических функционалов [55].

Если речь идет, например, о площади живого сечения в вероятностном смысле, то необходимо, чтобы ее значение F(x, t) в любой точке (x, t) было случайной величиной, т. е. каждой паре (x, t) должна быть сопоставлена плотность вероятности  $p_{x, t}(F)$ . Более того, наличие N-мерной плотности вероятности

$$p_{x_1,t;x_2,t_2;...;x_N,t_N}(F_1,F_2,...,F_N),$$
 (2.24)

определяемой соотношением

$$\begin{split} &P\big\{F_1 < F_1(x_1,t_1) < F_1 + dF_1; F_2 < F_2(x_2,t) < \\ &< F_2 + dF_2, ..., F_N < F_N(x_N,t_N) < F_N + dF_N\big\} = \\ &= p_{x_1,t;x_2,t_2;...;x_N,t_N}(F_1,F_2,...,F_N) dF_1 dF_2... dF_N\,, \end{split}$$

позволяет говорить о ее полном вероятностном описании. Вместо плотности вероятности (2.24) можно рассматривать преобразование Фурье (характеристическую функцию):

$$\varphi_{x_1, t_1; ...; x_N, t_N}(\Theta_1, ..., \Theta_N) = \exp\left(i\sum_{k=1}^N \Theta_k F_k\right),$$
(2.25)

где  $i = \sqrt{-1}$ , а черта означает статистическое осреднение.

Преимущество подхода, основанного на характеристических функциях, а не на плотностях вероятности, состоит в том, что случайный процесс можно задать с помощью одной величины — характеристического функционала, определяемого по (2.25) при  $N \to \infty$ :

$$\Phi[\Theta(x,t)] = \exp\left\{i \int_{-\infty}^{\infty} \Theta(x,t)F(x,t)dxdt\right\},\qquad(2.26)$$

где пределы интегрирования определяются областью изменения x и t и могут быть конечными.

Для случайной функции F(x, t) характеристический функционал можно определить, зная все конечномерные плотности вероятности (2.24). Для этого необходимо в качестве аргумента  $\Theta(x, t)$  характеристического функционала  $\Phi[\Theta(x, t)]$  взять функцию

$$\Theta(x,t) = \Theta_1 \delta(x - x_1, t - t_1) + ... + \Theta_N \delta(x - x_N, t - t_N),$$
 (2.27)

где  $\Theta_1,...,\Theta_N$  — значения аргумента  $\Theta(x,t)$  ;  $\delta(x,t)$  — функция Дирака. Подставив (2.27) в (2.26), получим:

$$\Phi\left[\Theta(x,t)\right] = \exp\left\{i\sum_{k=1}^{N}\Theta_{k}(x,t)F_{k}(x,t)\right\} = \varphi_{x_{1},t_{1};...;x_{N},t_{N}}\left(\Theta_{1},...,\Theta_{N}\right).$$

Рассмотрев случайную площадь живого сечения в фиксированный момент времени t, можно использовать характеристический функционал:

$$\Phi\left[\Theta(x), t\right] = \exp\left\{i \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{N} \Theta_k(x) F_k(x, t) dx\right\}, \qquad (2.28)$$

а рассмотрев, например, площадь живого сечения и боковую приточность, можно использовать совместный функционал:

$$\Phi[Q_F(x),\Theta_q(x),t] = \exp\left\{i\int_{-\infty}^{\infty} \left[\Theta_F(x)F(x,t) + \Theta_q(x)q(x,t)\right]dx\right\}.$$

В параболической модели примем  $Q = \sum_{i=1}^{n} a_i F^i - k \partial F / \partial x$ . Как показали данные многочисленных расчетов, часто можно ограничиться формулой:

$$Q = aF^2 - k\partial F/\partial x + b, \qquad (2.29)$$

причем при подстановке (2.29) в уравнение неразрывности можно считать в первом приближении  $\partial a/\partial x \approx 0$ ,  $\partial k/\partial x \approx 0$  и  $\partial b/\partial x \approx 0$ , хотя a=a(x), k=k(x) и b=b(x). Тогда, пренебрегая пока a(x,t), получаем:

$$\partial F/\partial t + a\partial F^2/\partial x - k\partial^2 F/\partial x^2 = 0$$
. (2.30)

Для характеристического функционала (2.28), учитывая, что

$$\partial \Phi / \partial t = \langle i(\Theta \partial F / \partial t) \exp\{i(\Theta \cdot F)\} \rangle,$$

получаем:

$$\partial \Phi / \partial t = \left(\Theta \cdot \left\{ i \partial D^2 \Phi / \partial x + k \partial^2 D \Phi / \partial x^2 \right\} \right), \tag{2.31}$$

где D — вариационные производные.

Характеристический функционал  $\Phi[\Theta(x), t]$  находится из (2.31) по значению  $\Phi[\Theta(x), t_0] = \Phi_0[\Theta(x)]$ .

На рис. 2.7, a показана динамика многообразия, соответствующего модели (2.30), а на рис. 2.7, b — модели (2.31). В последнем случае имеем некое «эволюционирующее корыто», которое на каждый момент времени дает исчерпывающую информацию о вероятностных свойствах площадей в каждом створе с координатой x. Разумеется, реальная форма подобных многообразий может быть асимметричной (как по F, так и по x).

Однако на сегодняшний день потенциальная возможность математического описания подобной динамики многообразий социально не востребована: во-первых, экспериментальная проверка достоверности изменения формы (p, F, x) «не по зубам» как чисто технически, так и с точки зрения существующих методов оценки статистической достоверности; во-вторых, самой практической потребностью не сформулированы задачи, в которых требовалась бы такая «тонкая» и подробная информация о процессах в реках.

Более востребована практикой возможность описания динамики одномерных плотностей вероятности, что допускает применение широко известных статистических методов для сравнения теоретических результатов и эмпирических данных. Исходная динамическая модель с сосредоточенными параметрами может быть линейным или нелинейным дифференциальным уравнением Q = f(Q,t), которое «зашумлено» как аддитивно (через неоднородный член, учитывающий внешние воздействия на моделируемую систему), так и мультипликативно (через коэффициенты). В теории случайных процессов уже давно известна процедура стохастического обобщения подобных моделей, приводящая в конечном итоге к уравнению, описывающему эволюцию плотности

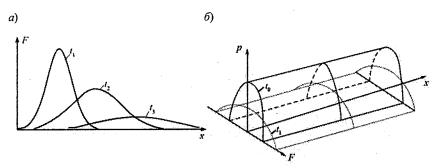


Рис. 2.7. Динамика многообразий, соответствующих моделям (2.30) (а) и (2.31) (б).

вероятности p(Q,t) – уравнению Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial p(Q,t)}{\partial t} = -\frac{\partial (A(Q,t)p(Q,t))}{\partial Q} + 0.5 \frac{\partial^2 (B(Q,t)p(Q,t))}{\partial Q^2}, \quad (2.32)$$

где A(Q, t) и B(Q,t) — коэффициенты сноса и диффузии, определяемые физико-статистическими свойствами изучаемого объекта и внешних воздействий на него, представленных задаваемыми параметрами, входящими в выражения для A и B.

Наиболее широкое практическое применение находит подобная модель, основанная на линейном фильтре и приводящая к хорошо изученному в математической статистике семейству кривых Пирсона, которое в основном и применяется в гидрологии. Примером может служить уравнение  $\dot{Q} = -(\bar{c} + \tilde{c})Q + (\bar{N} + \tilde{N})$ , которое приводит к модели ФПК с коэффициентами сноса и диффузии, имеющих следующий вид:

$$A(Q,t) = -(\overline{c} - 0.5G_{\widetilde{c}})Q - 0.5G_{\widetilde{c}\widetilde{N}} + \overline{N};$$
  
$$B(Q,t) = G_{\widetilde{c}}Q^2 - 2G_{\widetilde{c}\widetilde{N}}Q + G_{\widetilde{N}},$$

где  $c=1/k\tau$ ,  $N=\dot{X}/\tau$  (здесь k — коэффициент стока,  $\tau$  — время релаксации);  $\overline{c}$  и  $\overline{N}$  — математические ожидания;  $\widetilde{c}$  и  $\widetilde{N}$  — белые шумы с интенсивностями шумов  $G_{\widetilde{c}}$  и  $G_{\widetilde{N}}$  соответственно;  $G_{\widetilde{c}\widetilde{N}}$  — взаимная интенсивность шумов.

Имеется определенный опыт применения подобного варианта модели (2.32) для прогнозирования вероятностных распределений месячного притока воды к водохранилищам ГЭС (Волховская — Россия, Бетания — Колумбия). Оба исследования выполнены на кафедре гидрофизики и гидропрогнозов РГГМУ в рамках кандидатских диссертаций Е. В. Шевниной и Эфраина Домингеса под руководством автора.

Рассмотрим некоторые результаты, связанные с водохранилищем Бетания. Набор годовых реализаций суммарного притока (в основном за счет притока р. Магдалены) представлен на рис. 2.8, а. Несмотря на то что автокорреляционная функция имеет периодическую составляю-

щую (см. рис. 2.8, б), процесс формирования месячного притока может рассматриваться как простой марковский (так как источник периодичности не в механизме образования стока, а во внешнем воздействии — внутригодовом ходе осадков и температуры воздуха в Колумбии), т. е. описываться моделью линейного формирующего фильтра. Выполнив параметризацию с использованием эмпирических распределений (см. рис. 2.8, в) и зная распределение  $p(Q,t_0)$  и осадки на дату (месяц) выпуска прогноза  $t_0$  (или прогнозные осадки, если такая возможность будет реализована), можно численно (см. п. 5.1) решить уравнение (2.32) и получить прогнозное распределение  $p(Q,t_{\rm np})$ , допускающее сравнение с фактическим  $p(Q,t_{\rm p})$  (см. рис. 2.8, г).

Проблемы, возникающие при таком подходе, обсудим в п. 2.3,

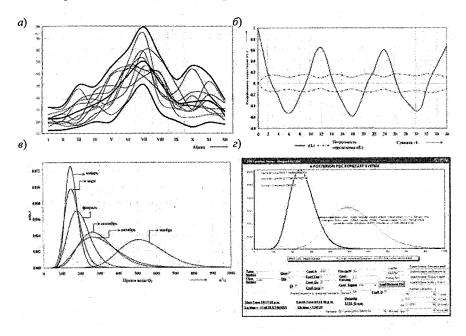


Рис. 2.8. Статистический «пучок», характеризующий приток к водохранилищу (a), автокорреляционная функция ( $\delta$ ), вероятностные распределения сечений «пучка» (a) и пример прогноза (a).

а сейчас перейдем к дальнейшему упрощению модели. На практике оперируют несколькими начальными моментами, так как старшие моменты бессмысленно привлекать при ограниченности наблюдений. Поэтому разумно аппроксимировать модель ФПК системой обыкновенных дифференциальных уравнений для начальных моментов [37]:

$$\begin{split} dm_{1}/dt &= -\left(\overline{c} - 0.5G_{\widetilde{c}}\right)m_{1} + \overline{N} - 0.5G_{\widetilde{c}\widetilde{N}};\\ dm_{2}/dt &= -2\left(\overline{c} - G_{\widetilde{c}}\right)m_{2} + 2\overline{N}m_{1} - 3G_{\widetilde{c}\widetilde{N}}m_{1} + G_{\widetilde{N}};\\ dm_{3}/dt &= -3\left(\overline{c} - 1.5G_{\widetilde{c}}\right)m_{3} + 3\overline{N}m_{2} - 7.5G_{\widetilde{c}\widetilde{N}}m_{2} + 3G_{\widetilde{N}}m_{1};\\ dm_{4}/dt &= -4\left(\overline{c} - 2G_{\widetilde{c}}\right)m_{4} + 4\overline{N}m_{3} - 4 \cdot 3.5G_{\widetilde{c}\widetilde{N}}m_{3} + 6G_{\widetilde{N}}m_{2}. \end{split}$$
 (2.33)

В таком виде система (2.33) справедлива, по крайней мере, для граничных условий  $p(Q \to \pm \infty) = 0$ . Если интегрирование уравнения (2.32) приводит к бесконечному процессу расползания плотности вероятности, то решение системы (2.33) довольно быстро стремится к аттрактору из любой области его притяжения (рис. 2.9, a).

 $\overline{C}$  помощью подобной системы уравнений можно наглядно изучать переходные гидрологические режимы при резком (скачкообразном) изменении внешнего воздействия  $\overline{N}$  на водосборы (рис. 2.9,  $\delta$ ). Из этого рисунка видно, что начальные моменты апериодически приближаются к установившимся значениям (в случае нелинейной системы это не так, *см.* [34]).

Однако и такая динамическая модель часто оказывается излишне сложной для многих задач гидрометеорологии. Возьмем (например) задачу, связанную с оценкой долгосрочных последствий антропогенного изменения климата. Обычно задается стационарный климатический сценарий, т. е. новые нормы осадков и температура воздуха, и требуется под эти потенциальные внешние воздействия на водосборы получить такой же стационарный (в статистическом смысле) прогнозный гидрологический режим на заданной территории (т. е. построить сценарные карты расчетных гидрологических характеристик многолетнего речного стока). При этом, естественно, эксцесс (а значит, и четвертый начальный момент) отпадает сам по себе как ненадежная статистическая характеристика. Система из четырех дифференциальных уравнений (2.33) превращается при этом в систему из трех алгебраических урав-

нений относительно начальных моментов. Ее хватает с избытком, так

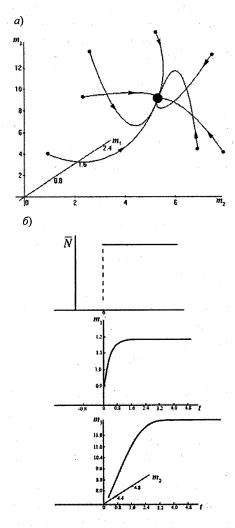


Рис. 2.9. Стремление к точечному аттрактору трехмерной проекции решения системы (2.33) (a) и реакция моментов на скачкообразное изменение осадков (6).

как она позволяет учитывать практически все характеристики прогнозируемого климатического режима (норму осадков и их дисперсию - через  $G_{\widetilde{N}}$ , температуру воздуxa – через  $\bar{c}$  ), а также практически все факторы подстилающей поверхности (залезаболоченность, сенность, распаханность, степень урбанизации) и демографию через коэффициент стока, который уже давно «освоен» гидрологами. Более того, даже в таком упрощенном варианте остается много нерешенных пока проблем. (В частности, приходится «замораживать» интенсивность шумов  $G_{\widetilde{c}}$  и  $G_{\widetilde{c}\widetilde{M}}$ на уровне, соответствующем текущему климату.)

Можно было бы поставить такую задачу: оценить выбросы случайного процесса в новом климате не только на основе классической теории выбросов, но и за счет возможности переходных явлений, если модель стока будет нелинейной. В последнем случае апериодической подгидрологического стройки режима под новый климат не будет, и возможны самые экзотические ситуации.

Не исключено, что в перспективе от стационарных моделей вообще придется отказаться: если климатическая система выведена из равновесия, то еще неизвестно, сколько нужно времени, чтобы ее стабилизировать. Это повлечет за собой пересмотр традиционного подхода к оценке надежности гидротехнических сооружений и вообще — освоение нестационарных случайных процессов. (Мы не останавливались на подробном описании практического применения стационарного варианта модели (2.33), так как он стал практически классикой и вошел в учебные программы для вузов [38]).

Затронем еще вопрос о вероятностных распределениях уровней воды в озерах. До настоящего времени превалирует точка зрения, что в озерах существует так называемый уровень тяготения. Это означает, что распределения плотности вероятности уровней воды одномодальны (что подтверждается данными по многим озерам), и до недавнего времени подобное допущение особых дискуссий не вызывало.

#### 2.3. Гносеологические «тупики»

Выявим проблемы, которые возникают, если ограничиваться только динамикой многообразий, задаваемых моделями из п. 2.1 и п. 2.2. Термин «гносеологические тупики» («высокопарный» синоним слова «проблема») поясним по ходу изложения.

Начнем с классических уравнений речной гидравлики – системы Сен-Венана (2.11), (2.12). Известны многочисленные примеры ее результативного использования (часто в упрощенных вариантах). И тем не менее в гидравлике уже давно обсуждались две, на первый взгляд, разные проблемы, связанные с их «некорректностью».

Первая проблема. На протяжении многих десятилетий в разных странах появлялись сообщения, что в реках существуют низкочастотные колебания скорости с периодом порядка 10 – 20 мин (этот диапазон варьируется в зависимости от размеров реки и конкретной гидравлической ситуации). Эти результаты подтверждаются и более фундаментальными синхронными измерениями на разных вертикалях (см. табл. 2.2).

Особого внимания заслуживают наблюдения на р. Тверце, на которой проводились специальные исследования неустановившегося движения [38]. В одном из створов была оборудована рама с 25-ю вер-

тушками с записью сигналов на самописцы. Обработка данных наблюдений однозначно указывает на синхронность (относительную, разумеется) низкочастотных колебаний в разных точках живого сечения (см. рис. 2.10, а). Однако все попытки, использовав систему Сен-Венана, построить замкнутые циклы на фазовой плоскости [27], окончились неудачей: циклов нет (см. рис. 2.10, б).

Таблица 2.2 Экспериментальные данные по низкочастотным колебаниям скорости

№ п/п	Река	Период колебания, мин	Амплитуда колебаний, % ср. значения
1	Угам	25	16
2	Сыр-Дарья	15 – 30	40
3	Варзоб	10-30	<del>_</del>
4	Уджи	10 – 15	. <del>-</del>
5	Полометь	20	8
6	Темза	90	16
7	Оккервиль	18	11
8	Тверца	26	6

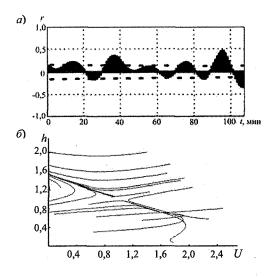


Рис. 2.10. Пример взаимной корреляционной функции скоростей в различных точках живого сечения на р. Тверце (a) и фазовый портрет при отсутствии замкнутых циклов ( $\delta$ ).

Вторая проблема. Если рассматривать классический гиперболический случай, то существует своеобразная «термодинамическая ветвь» (по аналогии с «брюсселятором») в виде однозначной зависимости U = f(h) (или, более привычной для гидрометрии, кривой Q = f(h) для «равномерного» режима). Линеаризуя уравнения Сен-Венана относительно какого-либо решения, соответствующего этой зависимости, и исследуя устойчипериодическим вость возмущениям с помощью, например, теоремы Гурвица, задачу можно свести [26, 29] к исследованию перемен знака в ряду чисел: 1,  $\nabla_2$ ,  $\nabla_4$ ,...,  $\nabla_i$ , где  $\nabla_i$  — определители, составленные из некоторого алгебраического многочлена. Если принять обычный для гидравлики закон гидравлических сопротивлений, то получим:

$$\nabla_2 = 2i/\sqrt{Fr} ;$$

$$\nabla_4 = 4i^2 \omega^2 (1/Fr - \mu^2 + 2\alpha\mu - \alpha) ,$$

где i — уклон при «равномерном» режиме;  $\omega$  — частота; Fr — число Фруда;  $\mu = (h/K)(\partial K/\partial h)$ ; K — пропускная способность;  $\alpha$  — коэффициент неравномерности распределения скоростей по сечению (Кориолиса). Всегда  $\nabla_2 > 0$ , поэтому для устойчивости необходимо, чтобы  $\nabla_4 > 0$ , что приводит к следующему критерию:

$$1/\operatorname{Fr} > \left[ (h/K)\partial K/\partial h \right]^2 - 2\alpha (h/K)\partial K/\partial h + \alpha . \tag{2.34}$$

При невыполнении этого неравенства устойчивость теряется, но периодических решений получить не удается (построить замкнутые фазовые траектории безуспешно пытался Н. А. Картвелишвили [27]), хотя «цепочки волн» повсеместно наблюдаются на быстротоках. Одна-ко если принять, что  $\lambda = f(dU/dt)$ , то получим:

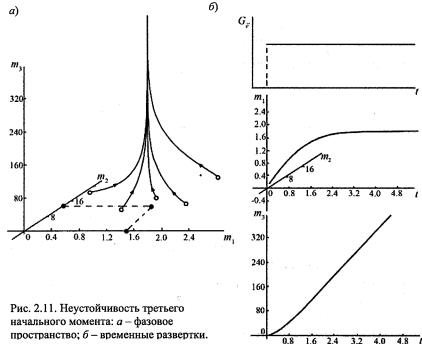
$$\nabla_2 = (2i/\sqrt{Fr})(1 - ia/Fr);$$

$$\nabla_4 = 4i^2\omega^2(1 - ia/Fr)(1/Fr - \mu^2 + 2\alpha\mu - \alpha + ia/Fr - ia\mu/Fr - ia\mu^2/Fr).$$

Если a=0, то приходим к критерию (2.34). Если, например, a=60 (это подтверждается данными по р. Тверце и соответствует 10 %-му отличию  $\lambda_{\rm HCT}$  от  $\lambda_{\rm ycT}$ ), то при i=1 ‰ и  ${\rm Fr}=0.05$  получим  $ia/{\rm Fr}>1$ , т. е.  $\nabla_2<0$  и  $\nabla_4<0$ . Но в ряду 1,  $\nabla_2$ ,  $\nabla_4$  есть одна перемена знака при переходе от 1 к  $-\nabla_2$ , поэтому поток всегда конвективно неустойчив по отношению к возмущению начальных условий. По-

лучается, что равномерный режим всегда конвективно неустойчив и любое возмущение в любой ситуации возрастает вниз по течению, что противоречит опыту. Значит, либо  $\partial \lambda/\partial U=0$  (что, в свою очередь, противоречит имеющимся данным, c M. п. 4.1, и должно быть отвергнуто), либо в природе вообще нет никакого «равномерного» режима. Таким образом, «термодинамическая ветвь» не просто неустойчива при некоторых значениях параметров, а ее не существует вообще; река «дрожит» изначально (около этой ветви). И только осреднение этого «дрожания» приводит к классическим уравнениям гидравлической идеализации.

Таким образом, в классических уравнениях гидравлики не заложены механизмы, способные объяснить появление периодических решений, не связанных с периодичностью граничных условий. Мы назвали это гносеологическим «тупиком», так как вряд ли сугубо гидрологическим проблемам имеет смысл придавать онтологический статус, т. е. неспособность существующих в настоящее время базовых научных ус-



тановок объяснить это дрожание реки. Но познающий субъект (гидролог, в нашем случае) этого сделать не смог. Следовательно, это его (абстрактного гидролога) гносеологический (относящийся к процессу познания) «тупик».

Теперь обратимся к вероятностной модели формирования стока (2.33). Из этой системы видно, что при  $\overline{c} < 0.5nG_{\widetilde{C}}$  производная от  $dm_n/dt>0$ , т. е.  $m_n\to\infty$  (см. рис. 2.11, который обобщает рис. 2.9 на неустойчивую ситуацию; на рис. 2.11,  $\delta$  величина  $G_{\widetilde{c}}$  меняется скачком, делая неустойчивым третий момент, но оставляя устойчивым второй и первый). Если обозначить  $\beta=G_{\widetilde{c}}/\overline{c}$ , то неустойчивость для момента n-го порядка  $m_n$  возникает при  $\beta>2/n$  ( $m_3-\beta>2/3;$   $m_2-\beta>1;$   $m_1-\beta>2$ ). Спектр этого критерия дискретен и сгущается в сторону старших моментов.

Рисунок 2.12, a интерпретирует (несколько метафорично) природу этой неустойчивости: по мере стремления величины  $(\overline{c}-0.5nG_{\widetilde{c}})$  к нулю потенциал  $V_{m_i}$  [если можно говорить о таковом для уравнений системы (2.33)] все более «раскрывается», пока устойчивая точка минимума не заменится точкой максимума.

Таким образом, чем старше момент, тем меньшая относительная интенсивность шума  $G_{\widetilde{c}}/\widetilde{c}$  требуется для его неустойчивости. По

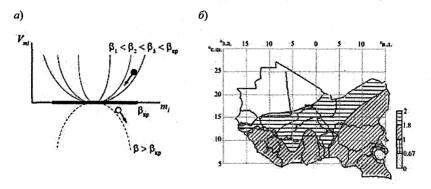


Рис. 2.12. Механизм неустойчивости моментов (a) и зоны неустойчивости начальных моментов в Западной Африке (карта получена совместно с Е. В. Гайдуковой и аспирантом из Кот-Д'Ивуара Куасси Би Гессан Арман) (б).

старшим моментам речной сток практически всегда неустойчив. Гидрологи вынуждены строить распределения с использованием второго и третьего моментов (т. е. часто заведомо неустойчивые распределения). В этом и заключается парадоксальность ситуации. Это — нефеноменологический, т. е. сущностный, парадокс (гносеологический «тупик»).

Не надо думать, что неустойчивость — это некая экзотика на фоне устойчивой картины формирования стока [36]. Для годового стока почти половина территории СНГ (в основном южные районы) неустойчивы по третьему моменту, 40 % — по третьему и второму, 12 % — по норме стока (по другим видам многолетнего стока ситуация аналогичная). И это не только на территории Европы и Азии. В Западной Африке ситуация ничуть не лучше: стандартной методикой гидрорасчетов (а значит, и Атласом мирового водного баланса) можно пользоваться с большими оговорками (см. рис. 2.12, б).

Важными гидрологическими объектами являются озера. Наивное предположение об обязательном наличии некоего уровня тяготения, т. е. возможности одномодального приближения при вероятностных расчетах, опровергли не какие-то теоретики от гидрологии или математики, а сама жизнь, когда уровень Каспийского моря стал подниматься вопреки всем гидрологическим прогнозам. И это на фоне огромных затрат на проектно-изыскательские работы и на уже начавшиеся реальные мероприятия по подготовке к переброске стока северных рек. «Тупик» был, конечно, гносеологический, но резонанс — общеполитический.

Возникает вопрос о природе всех этих «тупиков». На наш взгляд, она одна и та же (хотя внешне это выглядит не так): если происходит что-то новое (с точки зрения существующей модели – низкочастотные колебания, неуправляемый рост решения, выброс из потенциальной ямы), значит существуют обстоятельства, действующие за пределами предметной области, фиксируемой моделью. И объяснить это новое из самой модели (например, объяснить турбулентность из системы Навье-Стокса) нельзя.

## 3. Частично инфинитная методология выхода из гносеологических «тупиков»

#### 3.1. Постнеодарвинизм в эволюционной эпистемологии

Итак, мы имеем «тупики»: неспособность классических моделей, используемых в гидравлике, речном стоке и лимнологии описывать некоторые реальные ситуации, встречающиеся на практике. Но задача состоит не просто в том, чтобы их преодолеть (часть из них уже преодолена), а в попытке обрисовать некую общую методологию выхода из тупика. Кроме этого, необходимо отделить «экологические ниши» этой методологии и теории катастроф на многообразиях. Сейчас будет немного философии, и имеет смысл пояснить — зачем. Есть ли уж такая острая необходимость «философствовать», ведь (например) выход из «тупика», связанного с отсутствием периодических решений уравнений Сен-Венана, был найден более 20 лет назад, причем без всякой философии? На самом деле, это так только кажется. Те термины, которые сейчас появятся, тогда действительно не употреблялись, но само мироощущение было именно таким, каким мы его представим. Связано это с тем, что обоснование любого фрагмента знания (а тем более нового) требует выхода за пределы этого фрагмента, рефлексии, взгляда со стороны. Это означает, что подобное объяснение становится проблемой философской.

Разумеется, конечной целью является не философствование само по себе, а выход на какие-то модели или, по крайней мере, элементы рационального мышления (а не просто ссылки на «творческое озарение», котя без таких ссылок полностью не обойтись). В нашем подходе базисом является марксистско-ленинская философия (диалектический материализм, если более конкретно), которую сейчас стыдливо пытаются замалчивать. Но что есть у современной философии, хоть отдаленно напоминающее набор мощных категорий и законов диалектики, присущих марксизму-ленинизму. Однако его онтологический базис слишком широк и не всегда определен конкретно (это его и сила, и слабость), поэтому на вооружение будет взято одно из направлений современной философии — постнеодарвинизм, который, как представляется, наиболее последовательно приводит к поставленной цели.

Действительно, ключевая ленинская фраза в теории познания («От живого созерцания к абстрактному мышлению и от него к практике — таков диалектический путь познания истины, познания объективной реальности» — цитирую по памяти, могут быть неточности) верна сама по себе и хорошо иллюстрируется (см. рис. 3.1, а). Однако, что конкретно понимается под «абстрактным мышлением», не раскрывается.

В этом отношении постнеодарвинизм в определенном смысле насыщает некоторой информацией блок «абстрактное мышление». Рассмотренная в п. 2.1 система Эйгена и есть упрощенная его модель. По существу, Эйген дарвинские идеи эволюции и отбора распространил на «популяции» макромолекул. Их самоорганизация и селекция возможны при наличии метаболизма (открытость системы; приток вещества, обладающего избытком свободной энергии), самовоспроизведения (автокатализ) и мутагенеза, необходимого для создания новой информации. Для того чтобы система была дарвиновской, необходимо еще «постоянство общей организации»: суммарное число всех видов молекул в системе должно поддерживаться на постоянном уровне.

Конкуренция за «пищу» (высокоэнергетические мононуклеотиды) и отбор происходили среди первых информационных биомолекул РНК, способных к самовоспроизведению. Выигрывает молекулярная структура, готовая генетически управлять своим синтезом. Оказалось, что существует верхний предел для количества информации (длина гена), содержащейся в устойчивой самопродуцирующейся системе. Его увеличение возможно при кооперации молекул РНК в так называемый гиперцикл на основе взаимной каталитической активности. Гиперциклы (так же как и их альтернатива — сайзеры [66]) обеспечивают устойчивое и контролируемое сосуществование участников, гарантируя их когерентный рост. Они могут развиваться за счет включения новых участников (если это дает селективное преимущество), конкурировать и объединяться.

Мутации совершенствуют генетическую информацию, которая передается следующему поколению делением компартмента на две единицы. Отбираются компартменты более приспособленные к условиям окружающей среды. Происходит ветвление на генотип и фенотип; эволюцию можно рассматривать как автоволновой процесс в «пространстве фенотипов». Движение «волн» обеспечивает репродукция: точная – усиливает, ошибочная – распространяет.

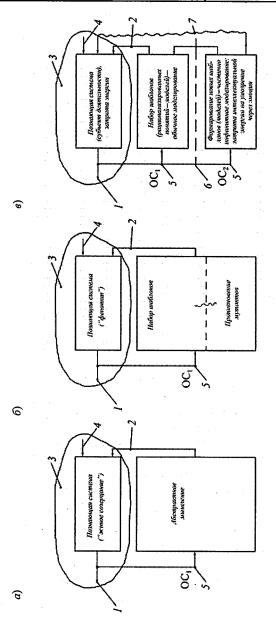


Рис. 3.1. Процесс познания в марксизме-ленинизме (a), постнеодарвинизме (b)и в частично инфинитном моделировании (в):

I – цель действий (например, выжить); Z – финитное управление (корректировка действий);

(то, что вообще способен воспринять субъект из инфинитного окружения); 5 – обратная связь (OC1, OC2); 3 - инфинитная реальность, в которую погружен субъект; 4 - внешнее воздействие

6 – семантический фильтр, основанный на ФКМ; 7 – паранормальная наука (или управление) в обход семантического фильтра и ФКМ (например, через биополе, на уровне эмоций) Посмотрим, каким образом подобные рассуждения можно перенести на науку (развитие знания) как продолжение биологической эволюции с книгами вместо генов. Концепции эволюционной эпистемологии базируются на постнеодарвинизме и сводятся примерно к следующему [77].

Возникающий на основе определенного генотипа организм (фенотип) не полностью обусловливается действием генов. Устойчивые траектории развития организма определяются и воздействием среды. Естественный отбор, связанный с требованиями окружающей среды, через фенотип действует на генофонд. Приобретенные свойства имеют отношение к эволюционному изменению, идущему в пользу генотипа, снабжающего наследников способностью адаптивно реагировать на окружение (обладающих большей приспосабливаемостью). Тем самым возникает обратная связь окружающей среды с генотипом в формировании фенотипа.

Генотип сопоставляется с теоретическим знанием, фенотип с научной практикой. Система научных знаний обладает особой устойчивостью наподобие гиперциклов, но, как и они, способна эволюционировать. Новые понятия (мутации) должны вписаться в «научный гиперцикл» (модернизировать его), а новый гиперцикл (геном) проверен на практике (эффективность научного фенотипа в новой предметной области). Существующий гиперцикл для своей устойчивости в новых предметных областях должен постоянно совершенствоваться, выбирая из популяций идей наиболее эффективную для доступа к новым сферам реальности (предметным областям). Наука (как сознание социума) развивается в конечном счете только через действие. В научном языке (генофонде) генерирование мутаций (концептуальные нововведения) происходят через образование метафор, т. е. через нелинейность [28].

Реально постнеодарвинизм (в рамках приведенных выше рассуждений) раскрывает блок «абстрактное мышление», заменив их набором конкурирующих шаблонов  $x_i$  (см. рис. 3.1,  $\delta$ ), в который неизвестно каким образом могут проникать мутанты  $x_{i+1}$  с большей селективной ценностью. Конечно, можно искусственно промоделировать их появление. Например, так. Дополним систему (2.17) – (2.19) четвертой переменной (шаблоном)  $x_4$ :  $x_4 = f(x_1, x_2, x_3, x_4, a, b_4, c_4)$ , причем пусть  $b_4 = d - x_3$  (здесь d постоянная). Тогда при  $x_3 \to 0$  просыпается шаблон  $x_4$  и «за-

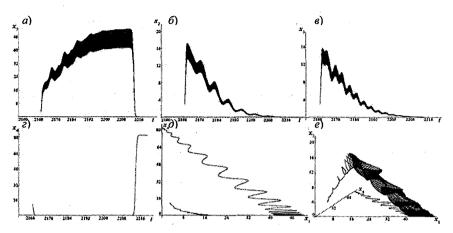


Рис. 3.2. Мутант  $x_4$  «захватывает» систему: временные развертки  $(a, 6, \epsilon, \epsilon)$  и проекции фазовых портретов  $(\partial, e)$ .

владевает» системой (рис. 3.2). Но существуют ли общие закономерности формирования новых шаблонов?

### 3.2. Динамические, статистические и частично инфинитные закономерности

Дифференциальные уравнения, представляющие шаблоны на рис. 3.1,  $\delta$ , являются примером так называемой динамической закономерности. Между причиной (ресурсами) и следствием ( $x_i$ ) существует жесткая однозначная связь, определяемая условиями, т. е. таким начальным состоянием и численными значениями коэффициентов, при которых могут реализовываться причинно-следственные связи, диктуемые системой (2.17) – (2.19).

Сравнительно легко можно выполнить стохастическое обобщение этой динамической системы и привести ее к многомерному уравнению ФПК для совместной n-мерной плотности вероятности  $p(\vec{x},t)$ :

$$\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_{i}} \left[ A(\vec{x},t) p(\vec{x},t) \right] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^{2}}{\partial x_{i} \partial x_{j}} \left[ B_{ij}(\vec{x},t) p(\vec{x},t) \right], \quad (3.1)$$

где 
$$i, j = \overline{1, n}$$
.

Уравнение (3.1) представляет собой действие уже статистической закономерности, которую прокомментируем для одномерного случая. Эта закономерность действует при выполнении обычных предельных теорем теории вероятностей  $S_n = \sum_{i=1}^n x_i \to S$  (при условии, что случай-

ные величины  $x_i$  одинаково распределены; не путать  $x_i$  с компонентами вектора  $\vec{x}$  в (3.1)), т. е.  $\forall_i$   $x_i$  не вносит определяющего вклада.

Действие статистической закономерности прекращается, если  $\lim_{n\to\infty} M[S_n/m_n] = \mathrm{const}$ , где  $m_n = \max\{x_1,x_2,...,x_n\}$ . В этом случае последовательности  $S_n$  и  $m_n$  эквивалентны, т. е. сумма эффектов определяется лишь одним максимальным числом  $m_n$  (не действует предельная теорема Чебышева). А что это означает? Метафорически — следующее. Некий «термостат», обеспечивающий «закрытость» предметной области  $\left(S-S_n\to 0\right)$ , «прокололся». Система открылась влиянию инфинитной реальности и стала в статистическом смысле неустойчивой.

Возникает вопрос: если статистические закономерности не действуют, тогда, что «действует»? Каким закономерностям подчиняется потерявшая устойчивость система? Для нее есть два пути:

- 1. «Заклеить» дырку в термостате и вернуться в прежнее статистически устойчивое состояние.
- 2. Соорудить новый (уже расширенный) термостат и описывать ситуацию двумерным (но устойчивым) распределением.

Эти возможности призывают вернуться к известным в науке (статистическим) закономерностям. Но как? Существуют ли закономерности, по которым система переходит из одного статистически неустойчивого состояния в другое, статистически устойчивое. Наша гипотеза заключается в том, что существуют. Именно: переход в новое устойчивое состояние связан с превращением одного из условий (коэффициентов модели) «старого» термостата в новую фазовую переменную рас-

ширенного устойчивого термостата. Подобные закономерности мы и называем частично инфинитными. Они действуют в переходных гносеологических (познавательных) режимах, когда старое уже разрушено, а новое еще не создано.

Этот класс закономерностей назван частично инфинитным, так как он, с одной стороны, определяется свойствами разрушенной системы — финитностью (нельзя из сломанной машины собрать корабль), а с другой — зависит от разрушающего фактора: если машины «ломаются» от того, что на глубоком броде в систему зажигания попала вода, то ее расширенным (и устойчивым к воде) вариантом будет амфибия. Но это уже постфактум, а в начале, когда двигатель глохнет, вариант амфибии и в голову еще не приходит (может быть, достаточно герметизировать катушку зажигания) — отсюда инфинитность («неопределенность»). Переведем эти метафорические рассуждения на язык научной терминологии.

Корректная постановка задач в классическом моделировании исключает неустойчивость решения. Но ведь неустойчивость — атрибут развития, поэтому в «обычном» моделировании изучаются системы, в которых не происходит никаких качественных изменений: все, что можно сказать о системе (на качественном уровне), уже сказано в стартовой позиции. Происходят только количественные изменения вектора состояния системы (появление новых компонентов у этого вектора исключается). Недаром математики часто доказывают существование решений без его конкретного нахождения.

Развитие интерпретируется нами как усложнение фазового пространства системы, появление у вектора, описывающего ее состояние, новых компонентов. Произойти подобное расширение может только через неустойчивость, т. е. прекращение действия условий, обеспечивающих корректность решения.

Любая модель связывает вектор состояния  $\vec{Y}$  с векторами известных внешних воздействий  $\vec{\xi}$  и задаваемых параметров  $\vec{\Lambda}$ :  $L(\vec{Y}, \vec{\xi}, \vec{\Lambda}) = 0$ , где L — оператор, включающий также граничные и начальные условия, задание и согласование которых как раз и обеспечивает корректность. Вектор параметров  $\vec{\Lambda}$  обеспечивает интерфейс системы с окружением, и именно «оживление» его составляющих (превращение в фазовые переменные, живущие в одном темпомире с уже

существующими фазовыми переменными) является задачей частично инфинитного моделирования. Его этапы: 1) выявление условий, при которых происходит потеря устойчивости решения; 2) определение необходимого числа фазовых переменных для устойчивого описания развивающейся системы (осуществляется методами фрактальной диагностики, см. [35]); 3) определение качества этих переменных (что они из себя представляют конкретно) — этот этап наиболее творческий, так как он не поддается «полной» формализации; 4) «обычное» моделирование устойчивого функционирования расширенной системы; 5) выявление условий потери ее устойчивости и т. д. («по кругу»).

Рассмотрим подробнее основные понятия, используемые в нашем подходе: предметная область; сущность и явление; иррациональный шаблон — «дерево»; финитность, инфинитность, частичная инфинитность. В качестве примера возьмем самую простую модель речного бассейна:

$$dQ/dt = -Q/k\tau + \dot{X}/\tau, \qquad (3.2)$$

где Q — расход воды в замыкающем створе; k — коэффициент стока;  $\tau$  — время релаксации;  $\dot{X}$  — интенсивность осадков.

Основываясь на уравнении (3.2), мы выделяем (фиксируем) с помощью k и  $\tau$  (это и есть составляющие вектора  $\vec{\Lambda}$ ) такие свойства речного бассейна, как проницаемость почво-грунтов, потери на испарение, инерционность. Но ведь бассейн как материальный объект гораздо сложнее, чем мы его представили (там и люди, и города, и биомасса и т. п.). Однако нам (как гидрологам) важны только те стороны этого объекта, которые: 1) отражают процесс формирования речного стока; 2) уже нами «освоены», т. е. рационализированы с помощью искусственно созданных понятий (расход воды, время релаксации и т. д.). Можно сказать, что выделена изучаемая предметная область. В нашем конкретном случае — гидрологическая предметная область; причем только в ней то, что нам интересно или «под силу» изучать (вне поля зрения остались ледовые явления, деформация русел и многое другое). В этом смысле мы интересуемся не объектами вообще, а конкретными предметными областями.

Таким образом, можно дать следующее «размытое» определение: предметная область — это субъективно рационализированный «кусок»

объективной реальности, используемый в «корыстных» целях. Поэтому и любая модель предназначена для описания только конкретных предметных областей. Причем для описания только сущности. (Явления, в широком смысле этого слова, никакой моделью описать невозможно: осадки могут сопровождаться молнией, громом и т. п. — уловить какието аспекты явления может только искусство, очень субъективно и очень неточно с точки зрения «точных» наук.) Парадоксальность ситуации заключается в том, что в зафиксированной предметной области ее сущность ненаблюдаема (не может «взаимодействовать» с органами чувств и приборами).

Воднобалансовую сущность, определяемую моделью (3.2), «потрогать» нельзя — это умозрительное понятие. Потеря решением устойчивости означает, что не «бьет» баланс. Модель надо модифицировать, искать новую сущность. Как? Путем новой фиксации предметной области (бассейна), затрачивая при этом энергию, и путем нового умозрения, расходуя интеллектуальную (эмоциональную) энергию.

Какой-то «логики умозрения» нет — это процесс творческий (не формализуемый), иррациональный, интуитивный. Интуиция просыпается, когда из-под ног уходит сущность. Математическим индикатором этого является неустойчивость решения модели. Она показывает, что прежнее умозрительное понятие (модель), описывающее сущность, надо заменять новым (по-новому фиксировать предметную область, чтобы новое решение было устойчивым).

Попробуем наглядно представить действие интуиции (логики чувств по П. Пикассо). Любое чувственное восприятие явления — это неповторимое событие (философская категория — единичное), т. е. «точка»:  $a_1$  — этот конкретный стул,  $a_2$  — этот конкретный стол (рис. 3.3). Для того чтобы сформировалось понятие о чем-либо (философская категория — общее), надо иметь что-то общее как минимум в двух чувственных восприятиях:  $\psi_1$  — понятие мебель (рис. 3.3).

А теперь забудем про «стулья». Пусть двумерные существа (жители плоскости), наблюдая, как ветер раскачивает ветки, установили для единичных восприятий (точек  $a_i$ ) общность их перемещения, т. е. сформулировали понятия  $\psi_i$ . Пусть подрастающая ветка протыкает плоскость. В рамках логики, основанной на двумерных понятиях  $\psi_i$ , это событие не объяснить. Но если некоторые двумерные существа («творческие») обладают (бессознательно) интуицией и «видят»

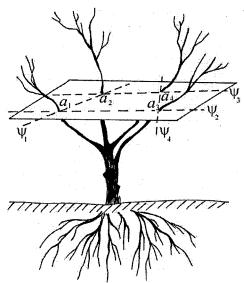


Рис. 3.3. К метафоре «иррационального шаблона».

дерево целиком (как мы с вами на рис. 3.3), то они могут сформировать умозрительное (для жителей плоскости) понятие третьего измерения и все прекрасно объяснить. Это дерево можно считать неким иррациональным шаблоном, в котором слились рациональность и иррациональность.

Если попытаться под изложенное подвести некие общие философские течения, то ситуацию можно позиционировать примерно так. Линия Платона—Гегеля (сюда же можно отнести и осовремененную ее версию

В. В. Налимова [58]) — это постулирование (кем-то на небесах) понятий-смыслов  $\psi_i$ , которые мы раскрываем («раскупориваем вакуум», по Налимову), соприкасаясь с налично данным  $a_i$ . Линия материалистов (включая марксистов) — это создание нами самими понятий  $\psi_i$  о чем-то  $a_i$ , т. е. того, что «уже пред—существует и требует своего осмысления».

Возникает ощущение, что обе эти линии мало чем отличаются. Обе они «располагаются на плоскости», на которой уже что-то задано («материальные» объекты  $a_i$  или «идеальные» понятия  $\psi_i$ ). Понятие (общее) изображается линией, точками (их «бесконечно» много) которой являются единичные объекты. Но так как любой единичный объект для своего описания требует бесконечного числа понятий, то «мощности» единичного и общего одинаковы. Недаром между идеалистами и материалистами идет нескончаемый диалог — они просто не могут друг без друга (победителей в этом споре не может быть в принципе).

Представителем «не плоского» течения является, например, Ж. Делёз [18], принцип философии которого — «созидание понятий о том, что еще только должно стать объектом, только еще нарождает-

ся». Это философия становления, которая соединила прошлое и будущее в ускользающее настоящее.

Теперь можно ввести ряд важных понятий [45]. Будем называть любые объекты (и связи между ними) на «плоскости» - финитными, т. е. выразимыми в рациональных структурах (понятиях у), а объекты (связи) на всем «дереве» - инфинитными, т. е. невыразимыми в рациональных понятиях у. Инфинитная реальность - это все «дерево» или «лес» (короче – шаблон). Опираясь на эти понятия, можно сказать, что зафиксированная предметная область всегда является финитной реальностью (самим фактом фиксации). Эта фиксация может осуществляться либо практической деятельностью (на уровне явлений), либо умозрительными понятиями (на уровне сущности). Таким образом, вся познанная окружающая нас реальность – это взаимосвязанная система предметных областей. Но выделение предметной области означает, что все другие предметные области частично или полностью инфинитны (т. е. невыразимы в ее рациональных структурах). Следовательно, финитная реальность («плоскость») задается при помощи реальности инфинитной («дерева»). Граница между финитным и инфинитным всегда частично инфинитна (только частично выразима в рациональных структурах). Например, для «плоскости», пересекающей крону дерева, частично инфинитным понятием будет «расширение дырки» («перемещение существующей» - финитным, «появление новой» - инфинитным).

Дадим наглядный образ частично инфинитного моделирования как перехода из возможности в действительность. Можно предложить такое достаточно общее определение: частично инфинитное моделирование — это гносеологический переходный процесс из возможности в действительность с затратой энергии. Ниже расшифруем это определение.

Пусть мы спроектировали инфинитную реальность на «плоскость» (точка зрения № 1) и построили «обычную» модель (рис. 3.4). Если ее решение оказалось неустойчивым, то надо менять точку зрения, т. е. по-новому фиксировать проекцию (материальный объект — «дерево» — при этом не меняется, хотя в общем случае может и меняться). Если в расширенной области (с новыми фазовыми переменными) решение устойчиво, то можно временно «остановиться» до появления новой «неустойчивости». (На языке диалектического материализма

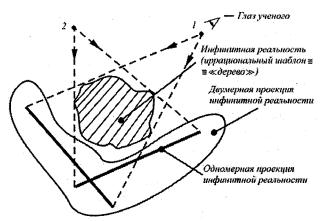


Рис. 3.4. Наглядный образ частично инфинитного моделирования: I — точка зрения № 1; 2 — точка зрения № 2.

[2, 71] это можно сформулировать следующем образом. В построенной модели или, более широко, научной теории невозможно обнаружить диалектические противоречия методами логики, заложенной в эту теорию. Хотя они есть всегда — формально-логических может и не быть, но появляются только при развитии «ситуации», а это может произойти, если мы пытаемся применить известную теорию или модель в новых условиях и она не срабатывает.)

Как может возникнуть эта новая неустойчивость? Только в процессе деятельности по освоению материального объекта («дерева»—шаблона). В результате этой деятельности мы выходим за рамки расширенной предметной области (например, оказываемся в новом диапазоне прежних параметров). Расширенная (например, двухфазная) модель может «не сработать» и снова надо менять точку зрения. Следовательно, частично инфинитное моделирование предполагает, что материальный объект («инфинитный») может оставаться и прежним, а меняется только точка зрения ученого, пытающегося по-новому объяснить сущность (т. е. построить модель) вновь расширенной предметной области. Это расширение происходит не умозрительно, а в результате практической деятельности (умозрением уже потом пытаются объяснить сущность). Таким образом, частично инфинитное моделирование — это гносеологический (относящийся к теории познания) переход-

ный процесс от одной точки зрения к другой (расширенной), например, от одномерной проекции (N 1) к двумерной (N 2).

Вопрос: переход откуда и куда?

Ответ: из возможности в действительность (есть такие философские категории в диалектическом материализме).

Новая действительность — это расширенная предметная область (новая «плоскость» на «дереве»). Но она не может возникнуть из ничего. Должны быть предпосылки этой новой действительности, т. е. ее возможность. Эти предпосылки заложены, с одной стороны, в самой инфинитной реальности («дереве», иначе откуда вообще возьмется чтото новое), а с другой — в существующей (фактической) действительности, т. е. в освоенных проекциях. Только опираясь на них познающий субъект может действовать, т. е. фиксировать инфинитную реальность. Можно выразиться и так: возможность новой действительности заложена в действительности существующей.

Таким образом, чтобы оказаться в новой действительности (т. е. получить новые знания) надо:

- 1) действием (т. е. затратой обычной энергии) зафиксировать «по-другому» предметную область (действовать могут и другие «субъекты—объекты», поместив тебя в новые условия),
- 2) умозрением (т. е. затратой интеллектуальной энергии) объяснить сущность этой расширенной предметной области.

Так как и действие, и умозрение — это иррациональные творческие процессы, т. е. из сферы инфинитности, то все новое (рационализированное финитное) достигается путем «выжигания» инфинитности. Отсюда, в частности, следует глупость вопроса о том, познаваем ли мир (чтобы его познать, надо этот мир зафиксировать в качестве предметной области, а для этого не хватит никакой энергии). Мы познаем только отдельные предметные области.

Попытаемся графически (*см.* рис. 3.1, *в*) представить рассматриваемый процесс познания и место, которое в нем занимает частично инфинитное моделирование.

Если субъект отклоняется от цели, то с помощью контура обратной связи  $OC_1$  выбирается подходящий шаблон (модель), который корректирует его траекторию. Но если субъект в результате своих (или чужих) действий оказался в новой предметной области, то подходящего шаблона (модели) нет (неустойчивость). Тогда есть два пути: либо по-

гибнуть, либо сформировать новый шаблон (добавить фазовую переменную в частично инфинитном блоке с помощью контура  $OC_2$ .

Семантический фильтр (основанный на физической картине мира познающего субъекта, ФКМ) предохраняет от «бредовых идей» как в сторону частично инфинитных моделей, так и от них (ФКМ играет селективную роль). Но возможно и прямое (в обход «здравого смысла») влияние интеллектуальных эмоций на обычную энергию ( $c_M$ . волнистую линию на рис. 3.1, s).

Для прояснения ситуации вернемся к гидрологии (рис. 3.5). Пусть некий субъект прогнозирует приток воды в водохранилище, имея определенный набор прогностических моделей (шаблонов). Если ни одна из моделей не дает  $S/\sigma \le 0,8$  (здесь S — средняя квадратическая погрешность поверочных прогнозов;  $\sigma$  — среднее квадратическое отклонение предсказываемой переменной от нормы), то прогнозист начинает выдумывать дополнительные шаблоны («оживлять» коэффициенты уже известных моделей), чтобы добиться успеха.

Семантический фильтр — это знание прогнозистом того, что, например,  $Q \ge 0$ ,  $X \ge 0$  и что новый придуманный им шаблон (модель) не

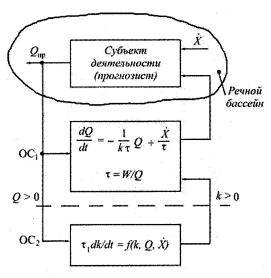


Рис. 3.5. Гидрологический пример процесса познания.

должен давать отрицательных коэффициентов стока (это запрещает его ФКМ, гидрологическая в данном случае).

Гносеология (Texнология получения новых знаний, методология познания - между этими понятиями есть, конечно, различия, но нам - гидрологам - они не важны) приводит к некоторым базовым установкам об окружающем мире, т. е. к онтологии, которая сама влияет на гносеологию. Модель (3.2) является характерной для «динамической онтологии»  $O_{\text{дин}}$ , которая предполагает жесткую однозначную связь между причиной (в нашем случае — это осадки X и начальное условие  $Q|_{t=0}=Q_0$ ) и следствием Q(t).

Для того чтобы произошла замена динамической онтологии, необходимо появление парадоксов (в рамках логики, порожденной  $O_{\text{дин}}$ ). Парадоксы могут появиться только из инфинитной реальности через частично инфинитные параметры:  $\tau$  и k. Мы их считаем частично инфинитными, так как, с одной стороны, они осмыслены в рамках онтологии  $O_{\text{дин}}$  (финитность, причем  $O_{\text{дин}}$  может быть нелинейной, многомерной и т. д.), но с другой — породить их может «что угодно» (о процессах, стоящих, например, за коэффициентом k, можно только догадываться — это инфинитность). Ну а в результате — это и есть частичная инфинитность.

Такая неопределенность порождает шумы, размывающие траекторию Q(t), и поэтому логично заменить  $O_{\text{дин}}$  на «стохастическую онтологию»  $O_{\text{стох}}$ . В этой онтологии, представленной уравнением Фоккера-Планка-Колмогорова (3.1), шумы уже рационализованы с помощью интенсивностей  $G_{\widetilde{c}}$ ,  $G_{\widetilde{N}}$  и взаимной интенсивности  $G_{\widetilde{c}\widetilde{N}}$  (здесь  $c=1/k\tau=\overline{c}+\widetilde{c}$ ,  $N=X/\tau=\overline{N}+\widetilde{N}$ , где  $\overline{c}$  и  $\overline{N}$  — нормы, а  $\widetilde{c}$  и  $\widetilde{N}$  — белые шумы; в данном случае имеется в виду, что динамическим ядром уравнения ФПК служит модель (3.2)). Но и она сталкивается с парадоксами (неустойчивостью): при  $\overline{c}<0,5nG_{\widetilde{c}}$  возникает неустойчивость моментов n-го порядка и в итоге — всего распределения в целом. Поэтому эту онтологию (оставляя ее стохастической) надо «уточнять», например делать распределение плотности вероятности многомерным (расширять фазовое пространство). Замена онтологий  $O_{\text{дин}} \to O_{\text{стох}} \to ?$  и есть гносеологический переходный процесс.

Эти две онтологии соответствуют динамической и статистической закономерностям, которые используются сейчас в науке. А можно ли построить «онтологию переходной гносеологии»? Ведь и динамический, и статистический взгляд на мир — это не более чем обобщенный стиль мышления. А можно ли частично инфинитный стиль мышления сопоставить с частично инфинитной онтологией, т. е. получить закономерности, соответствующие не только уже готовым знаниям — ступенькам, но и переходу с одной ступеньки на другую?

В теории познания все категории связаны друг с другом (каждая зависит от других, т. е. носит эмерджентный характер, или, в научно-естественной терминологии, требует полевого мышления). Поэтому в принципе нельзя вырывать какую-либо пару категорий и обсуждать их, как будто других не существует. Кроме того, есть определенная иерархия категорий. Поэтому сделаем несколько предварительных шагов, прежде чем перейдем к уже упоминавшимся категориям «возможность» и «действительность».

Развитие — это расширение фазового пространства, новая фиксация предметной области. Подойдем к этому понятию, опираясь на гегелевские категории.

Предметная область — это, во-первых, бытие, а во-вторых, бытие не только «вообще», но бытие конкретное. У всего конкретного есть мера как единство количества и качества. Следовательно, развитие есть смена мер.

Конкретизируя часть бытия, мы мысленно (и с затратой энергии) выделяем предметную область из контекста окружающей реальности; навязываем этому для-себя-бытию (как сказал бы Гегель) определенное качество, отличающее его от окружающего мира. Например, речной бассейн (речную сеть определенного порядка n) с расходом воды как его отличительной особенностью. Но расходы воды Q могут быть разные (большие и маленькие), появляется категория «количество». Но они  $(n \ u \ Q)$  не могут быть произвольными: пока часть реальности существует как обособленная предметная область, сохраняется мера его бытия — единство количества (Q) и качества (n), выражаемая, например, законом Хортона: n = 2,21 Q + 6,35.

Эта мера соответствует динамической онтологии  $O_{\text{дин}}$ , так как количество («причина») однозначно определяет качество («следствие»). Но меры обнаружения «бытия речного бассейна» могут быть разные. Аппроксимируем уравнение ФПК системой уравнений для начальных моментов (2.33). Мера такого «статистического бытия» бассейна — увязка дискретно теряющих устойчивость моментов (качество) с непрерывно меняющимся параметром  $\beta = G_{\widetilde{c}} \ / \ \overline{c}$  (количество) через условие нормировки  $\int p(Q)dQ = 1$  и его нарушение (узловая линия мер). Причем «количеством» (а значит, и «качеством») управляет смежная предметная область (испарительная).

Возникает странная ситуация: мера (точнее управление ею) бассейна лежит не в нем! Как же тогда устроена эта предметная область? Для ответа на этот вопрос надо обратиться к категориям «сущность» и «явление». Сток формирует не сам по себе бассейн. Он лишь элемент глобальной гидрометеорологической системы. Только в контексте этой «всеобщности» осмысленно явление речного стока (примерно это соответствует крылатой фразе: свита делает короля). Мы уже упоминали, что сущность надо искать в «другой» предметной области. В данном случае ею является испарительная область, которая сама осмыслена только в контексте более общей гидрометеорологической системы.

Хороший пример для прояснения ситуации приводится в работе [87]. «То, что я живу, допустим, работая учителем, имеет своим основанием то, что общество производит знания о мире и передает их своим подрастающим поколениям. Следовательно, основанием моего существования (явления -B. K.) в качестве учителя является сущность общества как тотальности, которой я принадлежу». Их единство (сущности и явления) дает категорию действительности, т. е. того, что действует. Но чтобы действовать, нужна возможность для этого.

Категории «возможность» и «действительность» можно пояснить наглядно (рис. 3.6). В стартовой позиции (1) имеем стационарное состояние бассейна  $p(Q,t_0)$ , моделируемое уравнением ФПК. Эта модель описывает сущность, в которой заложена возможность разрушения меры (за счет члена  $[-(\bar{c}-0.5G_{\tilde{c}})]$ ). Чтобы возникла новая («двухфазная») действительность, одной модели мало: нужно действие (действительность — то, что действует). Любой прогноз — это гносеологическая имитация действия. Если мы на интервале от (1) до (2) меняем окружение («свиту короля»), т. е. сущность (соотношение  $\bar{c}$  и  $G_{\tilde{c}}$ , т. е.  $\beta$ ), то в момент нарушения меры (1') селективные ценности явной (Q) и скрытой (E) фазовых переменных сравниваются (скрытую переменную нельзя считать константой:  $dQ/dt \approx dE/dt$ ).

В позиции (2) имеем двумерное уравнение ФПК с решением p(Q, E; t) и новой мерой  $\iint p(Q, E) dQ dE = 1$  (скрытая сущность  $E \sim -(\bar{c} - 0.5G_{\tilde{c}})$  стала псевдоявлением).

Рис. 3.6. Новые возможности могут появиться только через действительность (*E* – интенсивность испарения).

Если в состоянии (Q, E) система закрыта для мультипликативных шумов, то возможностей для перехода в состояние (3) у нее нет. Никакими действиями без нарушения меры  $\int \int p(Q, E) dQ dE = 1$  устойчивую систему не вывести в новое качество (король оказывается голым).

Развалить новую меру может только новая сущность, а чтобы она себя проявила, надо действовать, по-новому фиксировать (и менять эту фиксацию) предметную область (мультипликативно открываться). Для модели это означает — в нее надо вводить шумящие параметры, а коэффициент сноса делать переменным  $[-(\bar{c}-0.5G_{\tilde{c}})=f(t)]$ . Сущность — то, что разрушает меру и становится новым явлением (если под явлением понимать Q и E).

Мы сейчас описали (пользуясь своим «стилем») процесс развития. Но пользуется ли этим же «стилем» и природа? Ведь никаких «шумов», «мультипликативного открывания» и т. п. нет (руками их не потрогать). Но руками нельзя «потрогать» и все, что связано с динами-

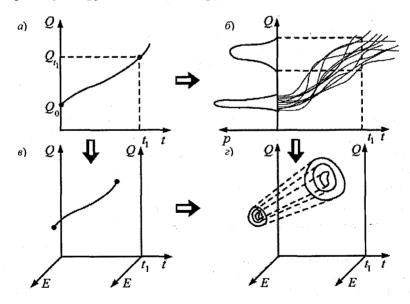


Рис. 3.7. Действие частично инфинитной закономерности при переходе от динамических закономерностей (a, s) к статистическим  $(\delta, z)$  и при расширении фазовых пространств динамических (a, s) и статистических  $(\delta, z)$  систем.

ческой или статистической закономерностями. Просто статистический (например) взгляд на мир, вероятностный стиль рассуждений позволяет более адекватно отражать какие-то стороны реальности. Поэтому и имеют эти закономерности онтологический статус. Что отражает частично инфинитная гносеология? Условия появления неустойчивости и переход в устойчивое, но более многоразмерное фазовое пространство. Можно возразить: переход в малоразмерное пространство также может обеспечить «устойчивость». Например, в системе уравнений для начальных моментов (2.33) можно отбросить третий и четвертый моменты и все, что с ними связано. Получим нормальное распределение, так как о неустойчивости третьего момента нет смысла говорить (раз его «нет»), а второй момент более устойчив, чем третий ( $\beta_2 = 1$ ,  $\beta_3 = 0,67$ ). Но нам важно не просто устойчивость, а развитие системы, переход ее в более «развитое» состояние.

На рис. 3.7 показано место частично инфинитной онтологии О<sub>чин</sub> при переходе от динамического описания к статистическому и при расширении фазовых пространств в динамической и статистической онтологиях.

#### 3.3. Некоторые математические аспекты методологии

Теперь посмотрим, откуда появляются потаенные тропы в открытый (инфинитный) мир из финитной реальности. Новая переменная появляется не с Луны, иначе ни о какой, даже частичной, рационализации прогнозирования нового и речи бы не было. Она скрыта в самой модели и «кто-то» ее «пробуждает».

Вернемся к системе популяционных моделей:

$$dx_1/dt = (r_1 - \beta_{11}x_1 - \beta_{12}x_2)x_1; (3.3)$$

$$dx_2/dt = (r_2 - \beta_{21}x_1 - \beta_{22}x_2)x_2. \tag{3.4}$$

В обычных условиях эта система описывает взаимодействие двух популяций  $x_1$  и  $x_2$ . «Огидрологичим» ситуацию и будем считать:

 $x_1=Q; x_2=E; r=\dot{X}/W_i$ , где  $W_i$  — емкость для i-й переменной. Теперь вспомним, что  $r_i=1/\tau_i$ , и пусть  $\tau_2>>\tau_1$ , т.е. селективная ценность у E очень мала  $(E={\rm const}, dE/dt\approx 0)$ . Тогда  $\beta_{12}E\approx\beta_{12}\cdot{\rm const}={\rm const}_1;$  обозначим  $r_1^0=r_1-{\rm const}_1$ . Следовательно, систему (3.3), (3.4) мы воспринимаем как одно уравнение  $dQ/dt=\left(r_1^0-\beta_{11}Q\right)Q$ . (Если рассуждать «мультипликативно», то придем к уравнению  $dQ/dt=\left(r_1-\beta_{11}'Q\right)Q$ .) Наблюдая за расходом, мы идентифицируем численные значения  $r_1^0$  и  $\beta_{11}$  (или  $\beta_{11}'$ ). Нам даже невдомек, что за величиной  $r_1^0=\left(\dot{X}/W_1\right)^0$  еще что-то стоит, кроме селективной ценности расхода (точнее, то, что стоит за  $r_1^0$  и определяет его селективную ценность: в зависимости от знака  $\beta_{12}$  увеличивает или уменьшает ее). Испарение E есть, но оно не воспринимается нами как искомая функция. Это просто потери, учитываемые коэффициентом стока. (Если в уравнении  $dQ/dt=-Q/k\tau+\dot{X}/\tau$  считать, что  $\tau=W_1/Q$ , то получим  $dQ/dt=\left(\dot{X}/W_1-cQ/W_1\right)Q$ , где параметр c=1/k и учитывает наличие испарения.)

Таким образом, медленная фазовая переменная просто включена в состав частично инфинитных параметров:  $\dot{X}/W_1$  (тогда величину  $\dot{X}$  следует считать «эффективной», т. е. осадки минус потери) или чаще  $c/W_1$  (рис. 3.8).

Реально испарение имеет смысл рассматривать как «ожившую» фазовую переменную, если ее внутригодовые вариации (интенсивность белого шума  $G_{\widetilde{C}}$ ) сравнимы с нормой:  $G_{\widetilde{C}} \approx \overline{c}$ . В этом случае величина  $x_2$  в (3.3) отнюдь не константа и надо рассматривать систему (3.3), (3.4) совместно для расхода и испарения. Испарение «оживает» и подавляет рост расходов (при  $G_{\widetilde{C}} \approx \overline{c}$  система становится статистически неустойчивой по расходу). Говорят, что они стали жить в одном темпомире.

А сколько всего таких «затаившихся» фазовых переменных? Ответ на этот вопрос дает фрактальная диагностика. Ее смысл заключается в том, что, наблюдая за одной фазовой переменной (доступной измерению), можно сделать вывод о количестве других (оказывается, что

временная реализация одной фазовой переменной в известном смысле эквивалентна «пространственному» срезу многообразия фазовых переменных: ведь эволюция одномерной проекции (см. рис. 3.7) инфинитной реальности происходит не сама по себе, а с учетом влияния ближайших соседей). Методика фрактальной диагностики гидрологических процессов подробно описана в работах [33, 37].

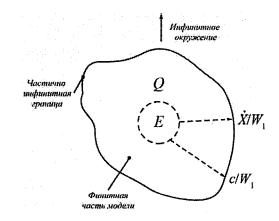


Рис. 3.8. Включение медленной фазовой переменной E в состав частично инфинитных параметров.

Из изложенного следует, что основные модели гидрологических процессов (включая уравнение ФПК) — это уравнения параболического типа конвекции—диффузии. Их математические свойства (существование решений, их единственность и устойчивость) хорошо изучены [47, 75, 83]. С помощью соответствующих преобразований их можно приводить к различному виду. Например, уравнение (3.1) можно записать так (для одномерного случая):

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} (A'p) + \frac{\partial}{\partial x} (B \frac{\partial p}{\partial x}),$$

где  $A' = -A + \partial B / \partial x$ . Это так называемая дивергентная форма уравнения конвекции—диффузии, подробно рассмотренная в работе [75].

В уравнениях может преобладать либо конвекция (Ре >> 1), либо диффузия (Ре << 1), критерием чего выступает число Пекле:

$$Pe = A_0' x_0 / B_0$$
,

где  $A'_0, x_0, B_0$  — характерные значения соответствующих величин (в случае, например, уравнения Навье–Стокса в роли Ре выступает чис-

ло Рейнольдса  $\text{Re} = \upsilon_0 h_0 / \nu$ , где  $\upsilon_0$  и  $h_0$  – характерные скорость и глубина,  $\nu$  – вязкость).

При сильном доминировании конвекции (это важный для нас случай, который и создает предпосылки для открытия «тайных троп» в инфинитную реальность) приходим к так называемым сингулярно возмущенным задачам с малым параметром  $Pe^{-1}$  при старших производных, что приводит к наличию областей сильного изменения моментов (в частности – к толстым «хвостам», *см.* разд. 4). Если частично инфинитная среда несжимаема (например, для (3.1)  $\operatorname{div} \vec{A} = \sum_{i=1}^{n} \partial A_i / \partial x_i = 0$ ; это будет, в частности, для одномерного случая, при  $2\vec{c} = G_{\vec{c}}$ ), то стационарное распределение (конечная инвариантная мера, как сказали бы математики) вообще отсутствует. В гидрологии обычно пытаются иметь дело с семейством кривых Пирсона, к которому придем, если

$$A(x) = a_0 + a_1 x$$
;  $B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$ ,

причем для стационарности необходимо, чтобы  $a_1 < 0$ ,  $b_2 > 0$ . Неустойчивость — это нарушение законов сохранения, т. е. появление из инфинитной реальности своеобразной «тележки» (*см.* п. 4.4), «трясущей» распределение плотности вероятности.

Основной тезис частично инфинитной гидрологии заключается в том, что при расширении фазового пространства частично инфинитную реальность (ее размерность равна разности размерности пространства вложения и числа реально учитываемых фазовых переменных) сжать проще. Это означает, что, например, толстый «хвост», возникающий при неустойчивости по дисперсии, можно «размазать» по вновь вводимой фазовой переменной, сделав тем самым двумерное распределение устойчивым. Эта процедура предполагает умение прогнозировать появление неустойчивости и зарождение новой фазовой переменной, которая эту неустойчивость и создала.

в (3.1) принять:

# 4. Примеры эволюционных изменений многообразий как следствие замены «неинерциальных систем отсчета»

## 4.1. Коэффициент сопротивлений в роли новой фазовой переменной (гидравлические и гидрометрические следствия)

Из гносеологических «тупиков» гидравлики, упомянутых в п. 2.3, можно попытаться выбраться путем увеличения размерности фазового пространства за счет коэффициента сопротивлений  $\lambda$ :  $\lambda = f(\dot{U})$ , где  $\dot{U} = dU/dt$ . При выводе уравнений гидравлической идеализации из уравнений гидромеханики делается несколько неизбежных допущений, главное из которых — принятие гипотезы квазистационарности. Считается, что в условиях неравномерного и неустановившегося движения силы трения можно описывать теми же зависимостями, которые установлены в условиях равномерного установившегося течения. (Подобное допущение делается и для напорных течений в трубах, имеющих большое прикладное значение.) Были осуществлены многочисленные попытки установить пределы справедливости этой гипотезы, особенно для течений в трубах. Можно перечислить несколько сотен работ зарубежных и отечественных ученых, приходящих, подчас, к диаметрально противоположным выводам.

Для открытых течений в реках ситуация усугубляется тем, что производство непрерывного измерения расхода воды (или осредненной по живому сечению скорости) в условиях резко выраженного неустановившегося движения (например, изменение расхода в несколько раз за час) — дело дорогостоящее и «неподъемное» до настоящего времени. Единственной в этом отношении попыткой были специально организованные исследования неустановившегося движения на р. Тверце [24], выполненные по заказу МО СССР.

Результаты этих уникальных экспериментов нами были использованы для обоснования зависимости  $\lambda = f(U)$ , полученной теоретически. Конечно, слово «теоретически» надо в данном случае употреблять с несколько ироничным оттенком. Действительно, если бы была модель турбулентного течения (полученная из неких предпосылок «фундаментального» характера типа уравнения Больцмана), то можно было бы из нее что-то получить теоретически для одномерной гидрав-

лики. Однако парадокс в том, что, скорее всего, за турбулентность отвечает не пресловутый «фундаментальный уровень», а течение в целом (в нашем случае — сама гидравлика, *см.* [35]). И тем не менее теоретический вывод был сделан путем стыковки двух предметных областей: гидравлической и гидромеханической.

Гидравлика оперирует осредненными по сечению характеристиками, в том числе и напряжением трения T. В уравнениях гидромеханики напряжение трения имеет распределение по глубине. Например, для турбулентного неустановившегося безнапорного плоскопараллельного движения уравнения имеют вид [12]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u_0 \frac{\partial u}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \alpha_0 \frac{\partial h}{\partial x} - g \cos \alpha_0 \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}; \qquad (4.1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad (4.2)$$

где  $u_0$  и  $v_0$  — задаются;  $\alpha_0$  — острый угол между вертикальной осью y и направлением силы тяжести;  $\tau$  — напряжение трения (остальные обозначения — стандартные).

Выражение для напряжения трения можно записать в виде:

$$\tau/\rho = \varepsilon \partial u / \partial y. \tag{4.3}$$

Коэффициент турбулентной вязкости є в выражении (4.3) представим, учитывая формулу Альтшуля—Хинце [1, 12], следующим образом:  $\varepsilon = \alpha u_* f(y)$ , где  $\alpha$  — универсальная константа;  $u_*$  — динамическая скорость. Имеющемуся гидрометрическому материалу соответствует выражение f(y) = y(1-y/h), дающее логарифмический профиль скорости в случае равномерного движения [12].

Удивительно, но приведенной информации оказалось достаточно, чтобы установить характер зависимости  $\lambda = f(U)$ . Применяя к уравнению одномерной гидравлической идеализации (типа (2.11) с заменой в нем квадратичного члена напряжением трения) и уравнению (4.1) двухкратное преобразование Лапласа по переменным t и x, получаем

систему из двух уравнений для изображений по Лапласу гидравлических  $(U(s_t,s_x),h(s_t,s_x),T(s_t,s_x))$  и гидромеханических  $(u(s_t,s_x,y))$  переменных (здесь  $s_t$ ,  $s_x$  — комплексные переменные, используемые в преобразовании по переменным t и x). Гидромеханическое уравнение (тесно связанное с уравнением Бесселя) при его осреднении по глубине позволяет (с применением гидравлического уравнения) получить передаточную функцию  $W_{TU}$  для напряжения трения, которая после ряда упрощений приводит к выражению:

$$\frac{\lambda_{\text{HCT}}}{\lambda_{\text{VCT}}} \approx \frac{1}{1 + \overline{\omega}^2 / 4} - \frac{2.5 + \overline{\omega}^2 / 4}{1 + \overline{\omega}^2 / 4} \overline{N}, \qquad (4.4)$$

где  $\lambda_{\text{нет}}$ ,  $\lambda_{\text{уст}}$  — неустановившееся и установившееся значения коэффициента трения;  $\overline{\omega}$ ,  $\overline{N}$  — безразмерные частота и полное ускорение соответственно. (Мы опускаем промежуточные выкладки, занимающие несколько страниц. С ними можно познакомиться, например, по книге [35].)

Для  $\lambda_{ycr}$  можно использовать обычные формулы, но эмпирические распределения f(y) «требуют», чтобы для согласования гидравлического и гидромеханического уровней описания неустановившегося движения в реках сопротивления зависели от характера нестационарности (неравномерности).

Зависимость (4.4) допускает эмпирическую проверку, в частности, по той же р. Тверце [29]. Из нескольких десятков волн попусков (см. рис. 4.1, а) в 70 % случаев подтверждается вывод о том, что  $\partial \lambda_{\text{нет}} / \partial \overline{N} < 0$ . В 20 % случаев результаты нейтральны, в 10 % — ухуд-шаются. Последнее может быть объяснено тем, что реально величина  $\lambda_{\text{нет}}$  зависит не только от первых производных скорости по t и x, но и от производных более высокого порядка, которые эмпирически трудно оценить достаточно надежно, что и послужило поводом ограничиться формулой (4.4).

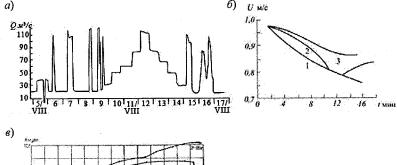
Следует также отметить, что проверка справедливости (4.4) проводилась при определенных ограничениях.

1. Так как непосредственное использование соотношения (4.4) в системе Сен-Венана кардинально меняет ее свойства (см. ниже), то

при численных расчетах информация о влиянии  $\overline{N}$  на  $\lambda_{\rm нст}$  вводилась с предыдущего временного слоя. Следовательно, величина  $\lambda_{\rm нст}$  рассматривалась не как независимая фазовая переменная, а как задаваемый параметр, численные значения которого определяются ходом процесса с небольшой временной задержкой.

2. Использование системы Сен-Венана для участка реки требует знания морфометрии [F(H,x), R(H,x),  $i_0(x)$ ], которую при подобных расчетах всегда аппроксимируют гладкими зависимостями (cm. [38]). Поэтому использовалось уравнение Риккати для фиксированного створа (т. е. информация о морфометрии была очень точной), а уровень воды не рассчитывался, а брался из измерений. Проверка результатов расчетов проводилась путем сравнения с фактическими данными.

На рис. 4.1,  $\delta$  представлен пример фактической зависимости средней по сечению скорости от времени и расчетных зависимостей (решений уравнения Риккати), полученных при разных вариантах задания гидравлических сопротивлений. С точки зрения гидрометрических приложений имеет смысл провести сквозные расчеты на протяжении



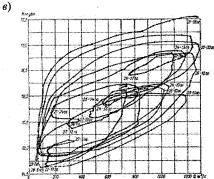


Рис. 4.1. График попусков на р. Тверце (a), пример расчетов по уравнению Риккати (1 – по данным измерений; 2 – с учетом зависимости  $\lambda_{\text{нст}} = f(\dot{U})$ ; 3 – без учета зависимости  $\lambda_{\text{нст}} = f(\dot{U})$  ( $\delta$ ), синхронные связи Q = f(H) по р. Свири (22-8.00 и др. – дата и час) [17, 23] ( $\epsilon$ ).

всего периода попусков по уравнению Риккати с учетом зависимости  $\lambda_{\text{нст}} = f(\dot{U})$  и при задании сопротивлений классическими формулами гидравлики. Цель подобных расчетов — получение гидрометрической модели стока, решение которой наиболее близко соответствует реальным петлям. На рис. 4.1,  $\varepsilon$  приведены подобные петли для р. Свири, на которой также проводились исследования неустановившегося движения [23].

Таким образом, даже такое «робкое» (с предыдущего временного слоя) использование (4.4) в стандартных расчетах по системе Сен-Венана может улучшить результаты и повысить точность гидрометрического учета стока. Но более радикальные последствия происходят, если рассматривать величину  $\lambda$  как полновесную фазовую переменную, увеличивающую размерность гидравлического многообразия. С учетом соотношения (4.4) одномерная гидравлическая модель состоит из трех квазилинейных уравнений первого порядка:

$$(\gamma(\overline{\omega})\lambda - 1)\frac{\partial U}{\partial t} + U(\gamma(\overline{\omega})\lambda - 1)\frac{\partial U}{\partial x} - g\frac{\partial h}{\partial x} = \lambda \frac{U^2}{h} - gi; \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial h}{\partial x} = 0; (4.6)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} + U \frac{\partial \lambda}{\partial x} = (-\lambda + g / C^2) / T, \qquad (4.7)$$

где  $\gamma(\overline{\omega}) \approx ((2,5+\overline{\omega}^2/2)/(1+\overline{\omega}^2/4))\overline{N}$ ; T- параметр релаксации. В векторном виде  $(\vec{u}=(U,h,\lambda))$  система (4.5)-(4.7) будет

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \vec{u}}{\partial x} = \vec{b} , \qquad (4.8)$$

$$A = \begin{vmatrix} U & -g/a & 0 \\ U & h & 0 \\ U & 0 & 0 \end{vmatrix}; \ \vec{b} = \begin{vmatrix} \lambda U^2 / ha - gi/a \\ (-\lambda + g/C^2) / T \end{vmatrix}$$

(здесь 
$$a = \gamma(\overline{\omega})\lambda - 1$$
).

Тип подобных систем определяется собственными значениями матрицы A [69, 89, 98], которые находятся из уравнения

$$(U - \xi)[(U - \xi)^2 + gh/a] = 0$$

и имеют следующий вид:  $\xi_1 = U - (gh/a)^{0.5}$ ;  $\xi_2 = U + (gh/a)^{0.5}$ ;  $\xi_3 = U$ . Для классической гидравлики ( $\vec{u} = (U, h)$ , a = 1) собственные значения  $\xi_1$  и  $\xi_2$  вещественны и различны. Формально это означает, что (4.8) имеет гиперболический тип, физически — возможность локальных пошаговых вычислений, когда решение зависит не от ситуации «в целом», а определяется ближайшими точками. При a > 0 классический случай превращается в эллиптический (характеристики мнимы), а с учетом того, что  $A = f(U, h, \lambda)$ , тип уравнения в разных точках фазового пространства может меняться (в представленном здесь варианте выражения для a, при  $\gamma(\overline{\omega})\lambda \to 1$  возникает особенность). Это, разумеется, приводит к потере возможности корректно ставить задачу Коши для системы (4.8), хотя следует иметь в виду, что в классе  $C_1$  эта задача в целом (т. е. при любом t) и так некорректна.

Аппроксимируем систему (4.5) – (4.7) методом прямых и проанализируем различные варианты численного решения (разумеется, одно звено численного конечномерного «огрызка» при этом не более чем «модель от модели»). Если «заморозить»  $\lambda$  и считать  $\gamma(\overline{\omega})=0$ , то придем к «конкурентному» типу взаимодействия переменных  $h_i$  и  $U_i$ , соответствующих i-му аппроксимирующему звену (рис. 4.2, a). Если просто «заморозить» д. то оставшиеся два уравнения (4.5) и (4.6) будут генерировать синусоидальные колебания (рис. 4.2, б; тип взаимодействия «хищник – жертва»). Если единичный расход с предыдущего звена  $h_{i-1}U_{i-1}$  подать на вход *i*-го звена, то в зависимости от значения  $\gamma(\overline{\omega})$ будем иметь фазовые портреты, представленные на рис. 4.2,  $\epsilon$  ( $\gamma = 0$ ) или на рис. 4.2,  $\epsilon$  ( $\gamma \neq 0$ ). В данном случае произведение  $\gamma(\overline{\omega})\lambda$  выступает как своеобразный бифуркационный параметр, меняющий тип взаимодействия и характер многообразия, хотя размерность последнего не меняется. Медленное внешнее воздействие с i-1-го звена (это могут быть левые граничные условия) на і-е звено переносит в фазовой

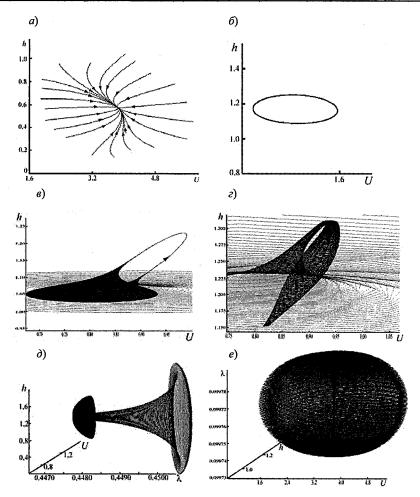
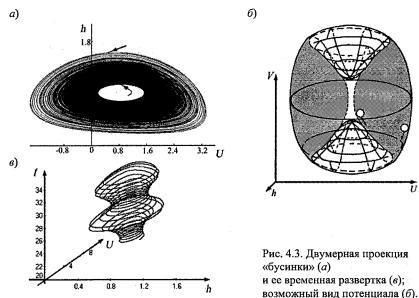


Рис. 4.2. Фазовые портреты динамики  $(a, \delta, e, \varepsilon)$  и эволюции  $(\partial, e)$  многообразий.

плоскости точку конкурентного равновесия (рис. 4.2, e) или эллипс, возникающий при взаимодействии «хищник — жертва» (рис. 4.2, e). Если «разморозить»  $\lambda$  («включить» уравнение (4.7)), то переноситься уже будет трехмерное многообразие (бусинка с дыркой, cm. рис. 4.2, e; на рис. 4.2,  $\partial$  показано рождение подобного многообразия).

Можно попытаться выполнить стохастическое обобщение рассматриваемой ситуации, аппроксимировав (4.8) системой обыкновендифференциальных уравнений, используя метод  $d\vec{u}_i/dt = f(A, b, \vec{u}_i, \vec{u}_{i-1}), i = 1, ..., n$ . В этом случае возможно использование многомерного уравнения ФПК (3.1), в котором  $\bar{x} = \vec{u}_i$  (напомним, что  $\vec{u}_i = (U, h, \lambda)_i$ ). Даже при постоянных составляющих вектора  $\vec{u}_{i-1}$ (на левой границе нет никакой динамики) в і-м узле начнет формироваться «бусинка» (рис. 4.2, д). Нарисовать четырехмерное изображение  $p_i(U,h,\lambda)$  нельзя, но примерно представить его трехмерную проекцию попытаться можно. Двумерная проекция «бусинки» имеет вид, представленный на рис. 4.3, а, т. е. любая траектория из внешней или внутренней области попадает в зачерненную часть фазового пространства. Поэтому наиболее правдоподобный вид потенциала (плотность вероятности примерно соответствует перевернутому потенциалу) изображен на рис. 4.3, б (как по внешней, так и по внутренней «стенке» шарик будет стремиться попасть в затемненную область притяжения). Если показанную на рис. 4.3, б полусферу закрыть сверху такой же полусферой, то получим изображение, похожее на «бусинку» из рис. 4.2, е: тра-



ектории «разрешается гулять по внутренней оболочке сферы-«бусинки». Коэффициент сопротивления  $\lambda$  (по крайней мере, внешне) играет роль замкнутого потенциала, не давая «течению рассыпаться». При переносе ситуации на следующее звено (узел) i+1 возникают проблемы (не будем сейчас на них останавливаться — они, видимо, разрешимы), но главное состоит в том, что и следующие звенья обладают автоколебательной активностью, которой, кстати, нет (в рассматриваемом смысле) у моделей гидродинамики (см. по этому поводу [50]). Модернизация последних по типу уравнений гидравлики (за счет члена трения) вряд ли возможна. Ведь и  $\gamma(\overline{\omega})$ , и  $\lambda$  — это не «фундаментальный уровень» с его молекулярным взаимодействием. Это свойство инфинитной (для уравнений Навье—Стокса) реальности.

Теперь, когда мы знаем, что «расширенная гидравлика» рассматривает коэффициент  $\lambda$  как фазовую переменную, обратимся к гидрометрическим следствиям такого расширенного взгляда. Для этого надо спроектировать модель, задающую гидравлическое многообразие, на одномерное («гидрометрическое») фазовое «пространство» расходов или осредненных по сечению скоростей в предположении, что информация об уровне и его производных по t и x известна из непосредственных измерений.

Заметим, что любая математическая модель является рационализированной проекцией «куска» иррациональной (для нас) реальности. В случае системы Сен-Венана мы оперируем двумя переменными (U и h или Q и F) при  $\lambda$  (или C), интерпретируемом как задаваемый параметр или переменная, но жестко связанная с h:  $C = h^{1/6} / n$  (например). Ясно, что реальность сложнее, но для многих случаев двух переменных оказывается достаточно. Но и эту («2-фазную») реальность можно упростить, спроектировав ее на одномерную. Мы это и сделали, предположив, что h (или F) и ее производные известны из измерений. Конечно, многие черты гидравлического процесса при таком огрублении теряются, но многие — сохраняются. Одномерная проекция более простая в изучении, поэтому имеет смысл обращаться к ней. В частности, в работе [13] она использовалась при выявлении роли нелинейности в устойчивости разностной схемы для решения системы Сен-Венана.

В нашем случае важны последствия введения в гидравлику модифицированного закона трения, учитывающего влияние на сопротивления величины и знака ускорения. Примем  $\lambda_{\text{нст}} = \lambda_{\text{уст}} - \gamma dU/dt$ , причем

размерный параметр  $\gamma$  в общем случае может зависеть от частоты  $\omega$ , скорости U и глубины h. Подставив это выражение в уравнение Риккати, записанное для скорости, получим его модельный аналог:

$$\frac{dU}{dt} = -\frac{\lambda_{\text{yer}}^{\prime}U^{2}}{(1 - \gamma^{\prime}U^{2})} + \frac{aU}{(1 - \gamma^{\prime}U^{2})} + \frac{P}{(1 - \gamma^{\prime}U^{2})},$$
(4.9)

где  $\lambda'_{ycr} = \lambda'_{ycr} / h$ ,  $\gamma' = \gamma / h$ .

Для численного решения (4.9) воспользуемся методом Рунге-Кутта. Если значение  $\gamma$  таково, что  $\gamma'U^2 < 1$ , то имеем устойчивое решение (рис. 4.4, a). Однако при  $\gamma'U^2 \approx 1$  ситуация меняется координально: процесс из начального состояния стремится к скорости, при которой  $\gamma'U^2 \approx 1$ , но само значение этой скорости ( $U = \sqrt{1/\gamma'}$ ) неустойчиво (рис. 4.4,  $\delta$ ).

Все это требует осмысления. При  $\gamma'U^2\approx 1$  мы имеем малый «параметр» при производной. В случае представления модели уравнением (4.9) в знаменателях правой части может оказаться нулевое значение (а «на нуль делить нельзя»). Однако в данном случае это не фиксированный параметр («0»), так как он сам зависит от скорости. При численной реализации модели (4.9) мы имеем дело не с «нулями», а с «машинными нулями», причем продолжительность действия такого нуля коррелируется с выбранным шагом численного решения (интегрирования)  $\Delta t$ . Возникает своеобразная численная вязкость. Если в ка-

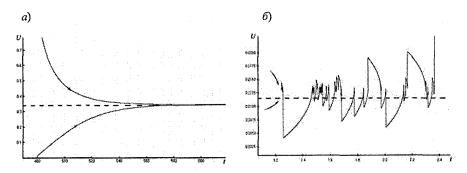


Рис. 4.4. Устойчивое (а) и локально неустойчивое (б) решения уравнения (4.9).

кой-либо момент времени величина  $(1-\gamma'U^2)$  близка к нулю, то происходит скачок решения (рис. 4.4,  $\delta$ ) вверх или вниз, но на следующем шаге имеет место  $1-\gamma'U^2\neq 0$ , и процесс устойчиво возвращается в неустойчивое положение  $1\approx \gamma'U^2$ .

Для неустойчивости требуется «несжимаемость» (см. п. 3.3), т. е.  $d\dot{U}/dU=0$  (здесь  $\dot{U}\equiv dU/dt$ ). Устойчивость будет при отрицательности этой величины. Для уравнения (4.9) имеем:

$$\frac{d\dot{U}}{dU} = \frac{(-\lambda'_{ycr}U^2 + aU + P)2\gamma'U}{(1 - \gamma'U^2)^2} + \frac{-2\lambda'_{ycr}U + a}{1 - \gamma'U^2}.$$
 (4.10)

Если  $\gamma' \to 0$ , то ситуацию полностью определяет числитель второй дроби в соотношении (4.10), т. е. при достаточном («обычном») коэффициенте трения  $\lambda'_{\rm yct}$  (таком, что  $2\lambda'_{\rm yct}U < a$ ) процесс устойчив (см. рис. 4.4, a). В случае достаточно большого значения  $\gamma'$  при  $\gamma'U^2\approx 1$  ситуацию определяет числитель первой дроби соотношения (4.10). Для неустойчивости необходимо, чтобы величина P (пропорциональная  $(i-\partial h/\partial x)$ ) была больше  $\lambda'_{\rm yct}U^2$ , т. е. требуется неравновесность (накачка энергии).

Если по реализации, представленной на рис. 4.4,  $\delta$ , построить псевдофазовое пространство U(t),  $U(t+\tau)$ ,  $U(t+2\tau)$ , ..., то фрактальная размерность будет 1,52. Расходящийся на низких частотах спектр (рис. 4.5, a) указывает на то, что мы имеем дело с фликкер-шумом. Его порождают выбросы, причем  $m_2 \rightarrow$  const при  $t \rightarrow \infty$  (неустойчивость по дисперсии, толстый «хвост», рис. 4.5, a,  $\delta$ ).

В полосе неустойчивости (при  $(1 - \gamma' U^2) \approx 0$ ) система становится практически безынерционной: время релаксации стремится к нулю. Эту неустойчивость можно интерпретировать как «открытость» (повышенную чувствительность) процесса «инфинитной реальности» или как уменьшение степени изолированности изучаемой системы. При  $\gamma' = 0$  уравнение Риккати является гидрометрически грубым: между причиной (измеренными гидравлическими величинами, входящими в уравнение, а также начальным условием) и следствием (расходом или ско-

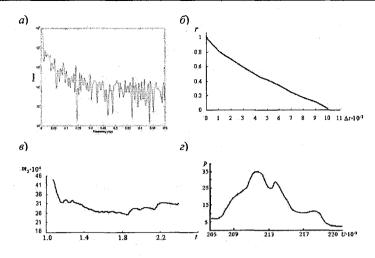


Рис. 4.5. Спектр (a), автокорреляционная функция (б), зависимость  $m_2 = f(t)$  (в) и толстохвостое распределение плотности вероятности p(U) (г), вычисленные по реализации, представленной на рис. 4.4, б.

ростью) существует хорошая согласованность (полезная с точки зрения гидрометрии), которая теряется в полосе  $1-\gamma'\,U^2\approx 0$  при  $\gamma'\neq 0$ . В последнем случае сама неустойчивость может интерпретироваться как причина, а так как она явно не видна, то иногда [95] говорят, что событие (следствие) произошло случайно. Однако можно ли эту случайность интерпретировать в терминах статистических закономерностей, базирующихся на предельной теореме Чебышева и законе больших чисел? Судя по рис. 4.5,  $\varepsilon$ , имеет место расходимость по  $m_2$ , а значит, и по старшим моментам.

При фиксированных значениях  $\gamma'$ ,  $\lambda'_{\rm yer}$ , P и a из (4.10) следует, что неустойчивость будет локальным свойством, т. е. происходит в окрестности фиксированного значения скорости. При синусоидальном изменении P скорость будет меняться также по синусоиде, но неустойчивостью будут охвачены только фиксированные участки зависимости U = f(h) (рис. 4.6, a и b). Если же  $\gamma'$ ,  $\lambda'_{\rm yer}$ , P и a «разморозить», т. е. связать с реальными текущими характеристиками потока  $\gamma'(\omega, h, U)$ ,  $\lambda'_{\rm yer}$ , a(F, dF/dt,...), то ситуация измениться (рис. 4.6, b и b). Причем в силу

большей открытости модели «миру» (параметры «чувствуют» гидравлическую ситуацию) к этим колебаниям более применимо понятие «статистическая закономерность» — случайный нестационарный процесс на рис. 4.6, г при медленном (по сравнению с колебаниями) внешнем воздействии.

Рисунок 4.6, в подтверждается натурными данными по р. Тверце: на всех стабилизированных ступеньках (см. рис. 4.1, a) процессы похожи на случайные с выделяемым статистически значимым периодом колебаний [35], что не отвергает присутствие и фликкер-шума (просто происходит его наложение).

Теперь рассмотрим стохастическую модель «петли». Движение воды в руслах рек (как установившееся, так и неустановившееся) часто происходит в условиях, которые системой Сен-Венана не учитываются (деформации, зарастание, ледовые явления). Кроме того, само использование уравнения Риккати в гидрометрических целях предполагает введение в него измерительной информации, что не может быть сделано точно; причем погрешности могут коррелироваться с упомянутыми выше пренебрегаемыми факторами. Последние, например, усложняют промеры, вызывая дополнительную неопределенность в коэффициентах

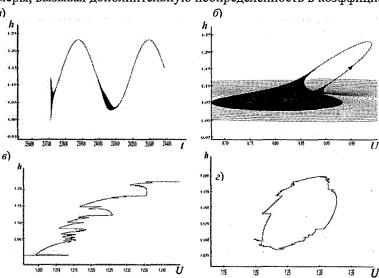


Рис. 4.6. Зоны неустойчивости при фиксированных (a и  $\delta$ ) и «размороженных» (s и s) параметрах модели (рис. 4.6,  $\delta$  – повторение рис. 4.2, s).

уравнения Риккати. Таким образом, к размытости ситуации за счет «дребезжания» процесса из-за неустойчивости при  $\gamma \neq 0$  добавляется неопределенность, связанная со случайными погрешностями измерений и с игнорированием упомянутых выше физических факторов.

Последовательный учет последних требует расширения системы Сен-Венана путем введения дополнительных фазовых переменных, отражающих изменение толщины льда, степени зарастания и деформации русла. Поэтому в самом общем случае стохастическое обобщение приводит к многомерному уравнению ФПК для совместной плотности вероятности как расхода воды (скорости), так и остальных фазовых переменных. Это, в свою очередь, требует знания динамических моделей для них, причем с точки зрения гидрометрии эти модели (так же как и уравнение Риккати) должны быть с сосредоточенными параметрами. Если же задачу рассматривать более узко и ставить целью определение только одного расхода воды (или плотности его вероятности), то многомерное распределение проектируется на одномерное, а фазовые переменные становятся «теневыми» или косвенно учитываются через доступные измерению (оценке) параметры. Тем самым открывается возможность частично проследить их качественное влияние на динамику расходов (скоростей).

Например, в практической гидрометрии при учете стока широко используют метод переходных коэффициентов  $K_{\rm 3им}$  и  $K_{\rm 3аp}$ . По фактически измеренным расходам при свободном русле  $Q_{\rm cв}$  и (например) ледовом покрове  $Q_{\rm 3им}$  определяют коэффициент  $K_{\rm 3им} = Q_{\rm 3им}/Q_{\rm cв}$  (соответственно  $K_{\rm 3ap} = Q_{\rm 3ap}/Q_{\rm cs}$ ) и строят хронологические графики для переходных коэффициентов  $K_{\rm 3um}$  (или  $K_{\rm 3ap}$ ) (рис. 4.7).

Ежедневные расходы  $Q_{\text{зим}}$  (или  $Q_{\text{зар}}$ ) находят, умножая значения  $Q_{\text{св}}$ , снятые с кривой Q=f(H) для свободного русла при том же уровне, на  $K_{\text{зим}}$  ( $K_{\text{зар}}$ ). В обоих случаях переходные коэффициенты меньше единицы, что равносильно уменьшению пропускной способности русла, учитываемой в уравнении Риккати коэффициентом  $\lambda_{\text{уст}}$ . Это означает, что некая «инфинитная реальность» (определяющая процессы ледообразования и зарастания) частично учтена в модели Сен-Венана (стала «частично инфинитной») параметром  $\lambda_{\text{уст}}$  и «сжимает» фазовый объем (одномерный) больше, чем без учета  $K_{\text{зим}}$  ( $K_{\text{зар}}$ ): так как  $\lambda_{\text{уст}}$  (св)  $< \lambda_{\text{уст}}$  (зим)

(аналогично  $\lambda_{\text{уст (св)}} < \lambda_{\text{уст (зар)}}$ ), то  $|\operatorname{div} A_{_{3им(3ар)}}| > |\operatorname{div} A_{_{\text{св}}}|$  (заметим, что  $\operatorname{div} d\dot{U} / dU \sim \operatorname{div} A$ ). Это означает, что процесс изменения расхода (скорости) становится более устойчивым (более «задемпфированным»).

Запишем уравнение (4.9) в виде  $dU/dt = \varphi(U)$ . В каждом из слагаемых правой части  $\varphi(U)$  имеется величина  $(1-\gamma'U^2)$ , которая получена в предположении  $\lambda_{\text{нет}} = \lambda_{\text{уст}} - \gamma dU/dt$ , что является упрощенным вариантом зависимости (4.4). Учтем это обстоятельство коэффициентом  $c = \bar{c} + \bar{c}$  (здесь  $\bar{c} = 1$ ,  $\bar{c}$  — белый шум), а влияние неучтенных при выводе системы Сен-Венана факторов — белым шумом с нулевым математическим ожиданием  $\bar{N}$ .

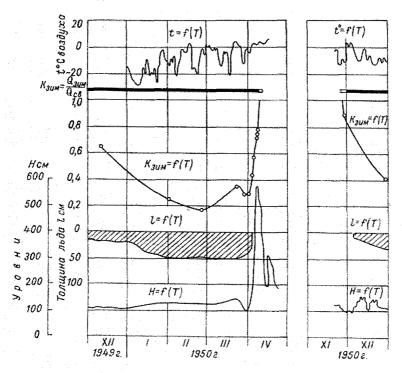


Рис. 4.7. Пример хронологических графиков, используемых в методе переходных зимних коэффициентов [11].

Таким образом, уравнение (4.9) принимает вид:

$$dU/dt = (\bar{c} + \tilde{c})\varphi(U) + \tilde{N}$$
(4.11)

(такая запись не совсем корректна, *см.* [38]), причем допускается корреляция мультипликативных ( $\widetilde{c}$ ) и аддитивных ( $\widetilde{N}$ ) шумов).

Уравнение ФПК, соответствующее (4.11), будет:

$$\frac{\partial p(U,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial U} [A(U,t)p(U,t)] + 0.5 \frac{\partial^2}{\partial U} [B(U,t)p(U,t)], \quad (4.12)$$

где

$$A = \bar{c}\varphi(U) + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi(U)}{\partial U} [G_{\tilde{c}}\varphi(U) + G_{\tilde{c}\tilde{N}}],$$

$$B = G_{\widetilde{c}} \varphi^{2}(U) + 2G_{\widetilde{c}\widetilde{N}} \varphi(U) + G_{\widetilde{N}}$$

(здесь  $G_{\tilde{c}}$ ,  $G_{\tilde{N}}$ ,  $G_{\tilde{c}\tilde{N}}$  — интенсивности и взаимные интенсивности шумов). Можно говорить о способности или неспособности инфинитной реальности (при  $\gamma \neq 0$ ) сжимать фазовый объем (одномерный в случае (4.12)) или о сингулярности (так как, вероятно,  $\text{Ре} = AU_*/B \to \infty$ , особенно при  $\gamma \neq 0$  из-за искусственного характера введения аддитивного шума; здесь  $U_*$  — характерное значение скорости), но главное заключается в том, что на (жаргоне классической математики) уравнение (4.12) при  $1-\gamma'U^2=0$  решений не имеет.

Действительно, уравнение ФПК определяет непрерывный (диффузионный) марковский процесс, условием которого является соотношение Линдеберга:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|\Delta y| > \varepsilon} p(y + \Delta y; t + \Delta t / y; t) d\Delta y = 0,$$

из которого следует конечность коэффициентов сноса и диффузии. При  $\gamma' U^2 = 1$  коэффициент сноса имеет сингулярность по переменной U и

становится неограниченным, что недопустимо. Однако в реальности при численной реализации модели ФПК мы имеем дело не с дифференциальным уравнением, а с конечно-разностной аппроксимацией. Конечность шагов интегрирования не дает этой сингулярности стать определяющей, так как при очередном шаге интегрирования мы вновь оказываемся в условиях, когда выполняется основное свойство краевых задач для уравнений параболического типа — детерминированность (теорема единственности). Интегрирование уравнения (4.12) должно дать распределение, представленное на рис. 4.8.

Из этого рисунка видно, что при  $\gamma'U^2=1$  кривая плотности вероятности имеет «провал», который отсутствует при  $\gamma=0$  или очень мал (в этом случае имеем одномодальное асимметричное распределение). Его происхождение наглядно можно объяснить, опираясь на понятие потенциала.

Уравнение (4.9) можно записать так:

$$dU/dt = \varphi(U) = -\partial V/\partial U$$
,

где V – потенциал. Он определяется интегралом:

$$-\int_{U} \varphi(U)dU = \int_{U} \frac{\lambda_{\text{yer}} U^{2}}{(1-\gamma U^{2})} dU - \int_{U} \frac{aU}{(1-\gamma U^{2})} dU - \int_{U} \frac{P}{(1-\gamma U^{2})} dU.$$

Примем  $\gamma' = 1$  (это несущественно) и выполним интегрирование в предыдущем выражении:

$$V = -\lambda'_{\text{yer}} \left( U + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+U}{1-U} \right| \right) - \frac{a}{2} \ln \left| 1 - U^2 \right| - \frac{P}{2} \ln \left| \frac{1+U}{1-U} \right|. \tag{4.13}$$

Пусть a=0. Графики функций  $y=1/(1-U^2)$  (знаменатель в подынтегральных выражениях) и y=0,5  $\ln|(1+U)/(1-U)|$  показаны на рис. 4.8,  $\delta$ . Можно представить, как, примерно, выглядит потенциал, порожденный моделью (4.9) при  $\gamma'\neq 0$ . При переходе  $\gamma'U^2$  через единицу слагаемые в  $\phi(U)$  меняют знак, т. е. U в (4.13) входит со знаком «—

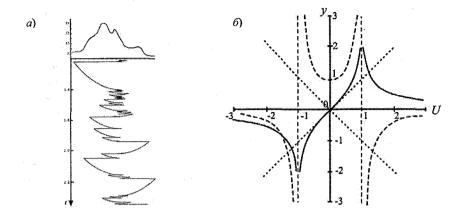


Рис. 4.8. Возможный вариант решения уравнения (4.12) при нулевой интенсивности внешних и взаимных шумов (соответствует временной развертке и плотности вероятности из рис. 4.4) (a) и графики функций  $y = 1(1 - U^2)$  (пунктир),  $y = 0.5 \ln|(1+U)/(1-U)|$  (сплошная линия) и  $y = \pm U$  (точки) ( $\delta$ ).

» при  $\gamma'U^2 > 1$  и со знаком «+» при  $\gamma'U^2 < 1$  (*см.* точечные линии на рис. 4.8,  $\delta$ ). Исходя из потенциала, представленного на рис. 4.8,  $\delta$ , распределение плотности вероятности примет вид, качественно совпадающий

с таковым на рис. 4.8, a. Ненулевая вероятность «проскакивания» через точку U=1 создается, по-видимому, численной вязкостью.

Теперь вернемся к гидрометрически грубой ситуации, когда  $\gamma = 0$  (или  $\gamma \neq 0$ , но информация о членах, содержащих  $\gamma$ , берется с предыдущего временного слоя, т. е. считается известной с «точки зрения дифференциального уравнения»). Возьмем модель расхода воды в виде уравнения (2.13).

Как видно из расшифровки формул для коэффициентов  $f_1$ ,  $f_2$  и свободного члена  $f_3$ , расход в рамках принятой идеализации полностью определяется уровнем и его производными по времени и координате (при известной морфометрии створа с координатой  $x = x_0$ ).

Стохастическое обобщение уравнения (2.13) приводит к модели ФПК, аналогичной (4.12), с более простыми выражениями для коэффи-

циентов сноса и диффузии (так как  $\gamma'=0$ ). Провал на кривой плотности вероятности исчезает, и мы имеем одномодальную асимметричную кривую, хотя и не обязательно принадлежащую семейству кривых Пирсона. Из-за нелинейности уравнения (2.13) аппроксимация модели ФПК системой уравнений для моментов приведет к бесконечному их числу, причем младшие моменты окажутся зависимыми от старших. С точки зрения гидрометрии нам надо знать расход и его погрешность, для чего достаточно информации о 3–4-х моментах, интерпретируемых чисто метрологически, т. е. связывая их происхождение с погрешностями определения  $f_1$ ,  $f_2$  и  $f_3$ . Поэтому линеаризуем (2.13):  $Q^2 = Q_0(H) + 2Q_0(H)q + q^2$  (здесь  $Q_0(H)$  – значение расхода, соответствующее однозначной кривой Q = f(H)), причем в отношении отклонения q расхода от  $Q_0$  считаем, что квадратом  $q^2$  можно пренебречь, а  $dq/dt >> dQ_0/dt$ . Тогда уравнение (2.13) примет вид:

$$dq / dt = -cq + N, \qquad (4.14)$$

где 
$$-c = f_1 2Q_0 + f_2$$
;  $N = f_1 Q_0^2 + f_2 Q_0 + f_3$ .

Таким образом, мы оказываемся в рамках линейного формирующего фильтра ( $c=\overline{c}+\widetilde{c}$ ,  $N=\overline{N}+\widetilde{N}$ ), для которого соответствующее уравнение ФПК достаточно строго аппроксимируется системой из 4-х уравнений для моментов, обеспечивающих метрологическую устойчивость при использовании данного стохастического варианта модели «петли» (подробнее cm. [37]).

## 4.2. Многомерные распределения плотности вероятности процесса формирования многолетнего речного стока

Хорошо известно, что все виды многолетнего речного стока (годового, минимального и максимального) описываются асимметричными одномодальными кривыми плотности вероятности, укладывающимися в семейство кривых Пирсона, являющееся решением уравнения

$$\frac{dp}{dQ} = \frac{Q - a}{b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2} p, \qquad (4.15)$$

где p — плотность вероятности расхода воды Q (модуля или слоя стока);  $a, b_0, b_1, b_2$  — коэффициенты.

На практике считается достаточным аппроксимировать кривую p(Q) тремя начальными моментами  $m_n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q^n \, p(Q) dQ$  ( $n=1,\,2,\,3$ ). Каждый из этих моментов имеет определенный геометрический смысл, и в совокупности они, с достаточной для практики полнотой, характеризуют одномодальную кривую.

Тем не менее реально эмпирические кривые часто не соответствуют подобной идеализации. Гистограммы обычно многомодальны, а «хвосты» распределений меняются не по экспоненте  $(p \sim \exp(-Q^2) \underset{Q \to \infty}{\longrightarrow} 0)$ , а по степенному закону  $(p \sim \operatorname{const}/Q^{(1+\alpha)} \not\to 0$  при  $\alpha \leq 0 \leq 1)$ . Однако оба эти обстоятельства на практике игнорируют, ссылаясь на «короткие ряды наблюдений».

Для того чтобы разобраться, стоит ли какая-либо генетическая причина за второй модой, нужна модель формирования стока. Уравнение Пирсона (4.15), к сожалению, таковой не является: это просто одномодальная геометрическая аппроксимация эмпирических распределений, полученных обработкой натурных рядов. Коэффициенты  $a, b_0, b_1, b_2$  зависят от моментов распределения, но никакой связи с динамикой формирования стока, с физико-статистическими свойствами бассейнов и внешними воздействиями на них не дают.

Однако можно получить и генетическую модель формирования стока, дающую решение в виде кривых плотности вероятности, эволюционирующих во времени — уравнение (2.32), преобразующее случайный процесс осадков в марковскую последовательность расходов в замыкающем створе бассейна.

В стационарном случае модель ФПК превращается в уравнение Пирсона (4.15), но его коэффициенты уже явным образом связываются с генетическими факторами формирования стока:  $a = (G_{\widetilde{c}\widetilde{N}} + 2\overline{N})/(2\overline{c} + G_{\widetilde{c}})\,; \quad b_0 = -G_{\widetilde{N}}/(2\overline{c} + G_{\widetilde{c}})\,; \quad b_1 = G_{\widetilde{c}\widetilde{N}}/(2\overline{c} + G_{\widetilde{c}})\,;$   $b_2 = -G_{\widetilde{c}}/(2\overline{c} + G_{\widetilde{c}})\,.$  Уравнение ФПК вполне можно считать онтологи-

ей (базисной моделью) современной гидрологии (примерно, как закон Ома в электротехнике или формула Шези в речной гидравлике). Эта модель при указанной взаимосвязи между ее коэффициентами и свойствами бассейна (как и внешних воздействий) позволяет решить две ключевые гидрологические проблемы: 1) оценить гидрологические последствия изменения климата; 2) оценить влияние антропогенных нагрузок на водный режим бассейнов. И хотя двухмодальных распределений она не описывает (для этого формирующий фильтр должен быть нелинейным), но зато может объяснить появление толстых «хвостов» и неустойчивость моментов (см. п. 2.3, а также [37]).

Неустойчивость процесса формирования стока, описываемого одномерным распределением p(Q), ставит задачу по привлечению дополнительных фазовых переменных, расширению фазового пространства. В речном бассейне могут действовать различные типы взаимодействия между фазовыми переменными. При годовом осреднении уравнение водного баланса имеет вид  $\overline{\dot{X}} = \overline{Q} + \overline{E} + \Delta \overline{U}$ , т. е. остастся три взаимодействующих переменных, причем расход Q и испарение E конкурируют за ресурс X, а изменение загов влаги в почве  $\Delta U$  (оно может входить в уравнение баланса и с плассом, и с минусом) ведет себя более «экзотически».

Гидрологи интересуются в основном расходом воды. Стохастически обобщая динамическую модель

$$dQ/dt = -(1/k_Q \tau_Q)Q + \dot{X}/\tau_Q,$$
 (4.16)

приходим к уравнению  $\Phi\Pi$ К и семейству кривых Пирсона (его стационарному решению). Но аналогичное уравнение можно записать и для испарения:

$$dE/dt = -(1/k_E \tau_E)Q + \dot{X}/\tau_E,$$
 (4.17)

где  $k_E = E / \dot{X}$  — коэффициент испарения;  $\tau_E$  — время релаксации испарительной емкости бассейна.

Стохастически обобщая это уравнение, приходим к уравнению  $\Phi$ ПК для p(E) с коэффициентами сноса и диффузии:

$$\begin{split} A_E = -(\overline{c}_E - 0.5G_{\widetilde{c}_E})E - 0.5G_{\widetilde{c}_E\widetilde{N}_E} + \overline{N}_E; \\ B_E = G_{\widetilde{c}_E}E^2 - 2G_{\widetilde{c}_E\widetilde{N}_E}E + G_{\widetilde{N}_E}, \end{split}$$

где  $G_{\widetilde{c}_{E}\widetilde{N}_{E}}$  больше (видимо) нуля, что приводит к отрицательному (пока это умозрительное предположение) коэффициенту асимметрии для распределения p(E).

Пока  $G_{\tilde{c}_E} << \overline{c}_E$  и  $\overline{c}_Q >> G_{\tilde{c}_Q}$ , обе предметные области (стоковая и испарительная) могут рассматриваться независимо друг от друга, но в случае отсутствия стационарных распределений их надо рассматривать совместно. Учитывая, что  $k_Q = Q/(Q+E+\Delta U)$ ,  $k_Q = E/(Q+E+\Delta U)$ , уравнения (4.16) и (4.17) можно записать так:

$$dQ/dt = -(Q + E + \Delta U)/\tau_Q + \dot{X}/\tau_Q;$$
 (4.18)

$$dE/dt = -(Q + E + \Delta U)/\tau_E + \dot{X}/\tau_E$$
. (4.19)

Введем в (4.18) и (4.19) шумы:

$$dQ/dt = -(\overline{c}_Q + \widetilde{c}_Q)(Q + E + \Delta U) + \overline{N}_Q + \widetilde{N}_Q; \qquad (4.20)$$

$$dE/dt = -(\overline{c}_E + \widetilde{c}_E)(Q + E + \Delta U) + \overline{N}_E + \widetilde{N}_E.$$
 (4.21)

Коэффициентами  $c_Q=\overline{c}_Q+\widetilde{c}_Q$  и  $c_E=\overline{c}_E+\widetilde{c}_E$  учитываются вариации  $\tau_Q$  и  $\tau_E$ , а также неучтенное (явно) влияние других факторов формирования стока, хотя в первом приближении можно допустить, что  $\tau_Q\approx\tau_E\approx 1,\ \overline{c}_Q\approx\overline{c}_E\approx 1.$  Величинами  $\widetilde{N}_Q$  и  $\widetilde{N}_E$  учитываются вариации внешних воздействий (в первом приближении, видимо, можно допустить:  $\widetilde{N}_Q\approx\widetilde{N}_E$ ,  $G_{\widetilde{N}_Q}\approx G_{\widetilde{N}_E}$ ), которые коррелируются с процессами  $\widetilde{c}_Q$  и  $\widetilde{c}_E$  (не только из-за того, что в них входят параметры  $\tau_Q$  и  $\tau_E$ ).

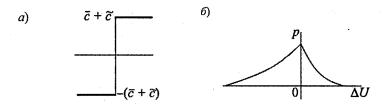


Рис. 4.9. Характер нелинейности (a) и распределение плотности вероятности (б) для модели (4.22).

Более сложная ситуация с третьей фазовой переменной — изменением запасов воды в почве  $\Delta U$ . Эта величина знакопеременная, причем знак определяется суммой  $\dot{X}-Q-E$ . Если поступающие в бассейн ресурсы  $(\dot{X})$  большие  $(\dot{X}>Q+E)$ , то  $\Delta U>0$ ; в противном случае  $\Delta U<0$ . Поэтому почво-грунты бассейна играют роль своеобразной релейной следящей системы, работу которой можно описать уравнением:

$$d(\Delta U)/dt = -(\bar{c} + \tilde{c})\operatorname{sgn}(\Delta U) + \bar{N} + \tilde{N}, \qquad (4.22)$$

где  $\mathrm{sgn}(\Delta U)$  — знаковая функция (+1 при  $\Delta U > 0$ , —1 при  $\Delta U < 0$ ), а  $\overline{N} \sim \dot{X} - Q - E$  .

Подобные (по структуре) стохастические модели используются в теории автоматического регулирования. Они достаточно подробно изучались В. С. Пугачевым, его сотрудниками и учениками. Параметр c гидрологически можно интерпретировать как скорость насыщения (или водоотдачи) почво-грунтов речного бассейна. Визуально характер нелинейности иллюстрирует рис. 4.9, a, а распределение плотности вероятности (при N=0) — рис. 4.9,  $\delta$  (асимметрия порождается корреляцией аддитивного  $\widetilde{N}$  и параметрического  $\widetilde{c}$  шумов).

В случае  $G_{rN}=0$  получаются достаточно простые формулы для математического ожидания  $m_{\Delta U}$  и дисперсии  $D_{\Delta U}$  в установившемся режиме:

$$m_{\Delta U} = (G_{\widetilde{c}} + G_{\widetilde{N}}) \overline{N} / (\overline{c}^2 - \overline{N}^2), \qquad (4.23)$$

$$D_{\Delta U} = (G_{\tilde{c}} + G_{\tilde{N}})^2 (\bar{c}^2 + \bar{N}^2) / 2(\bar{c}^2 - \bar{N}^2)^2.$$
 (4.24)

Из формул (4.23) и (4.24) видно, что: 1) знак изменения влагозапасов определяется знаком  $\overline{N}(t)$  (норма статистическая); 2) если скорость насыщения мала  $(\overline{N}(t) > \overline{c})$ , то как по дисперсии, так и по математическому ожиданию в изменении влагозапасов установившийся режим отсутствует; 3) из формулы (4.23) следует, что между изменением водности и влагозапасов связь не однозначная. Коэффициент  $(G_{\overline{c}} + G_{\widetilde{N}})/(\overline{c}^2 - \overline{N}^2)$  равен единице только в том случае, если  $G_{\overline{c}} + G_{\widetilde{N}} = \overline{c}^2 - \overline{N}^2$ . Ниоткуда не следует, что это равенство должно выполняться на длительных интервалах времени. Возможно, этим объясняется странное повышение влагозапасов на ЕТР (отмеченное сотрудниками ГГИ) при отсутствии трендов осадков (в работе [57] вероятность подобных явлений связывается с нелинейностью зависимости теплофизических свойств суши от ее влажности).

Системе уравнений (4.20), (4.21) и (4.22) статистически эквивалентно уравнение ФПК для совместной плотности вероятности  $p(Q, E, \Delta U; t)$ :

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (A_i p)}{\partial Q_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 (B_{ij} p)}{\partial Q_i \partial Q_j}, \qquad (4.25)$$

где  $Q_1=Q$  ;  $Q_2=E$  ;  $Q_3=\Delta U$  . Коэффициенты сноса  $A_i$  и диффузии  $B_{ij}$  определяются формулами:

$$\begin{split} A_{Q} &= -(\overline{c}_{Q} - 0.5G_{\widetilde{c}_{Q}})(Q + E + \Delta U) - 0.5G_{\widetilde{c}_{Q}\widetilde{N}_{Q}} + \overline{N}; \\ A_{E} &= -(\overline{c}_{E} - 0.5G_{\widetilde{c}_{E}})(Q + E + \Delta U) - 0.5G_{\widetilde{c}_{E}\widetilde{N}_{E}} + \overline{N}; \\ A_{\Delta U} &= -\overline{c}_{\Delta U} \operatorname{sgn}(\Delta U) + \delta(\Delta U)[G_{\widetilde{c}_{\Delta U}} \operatorname{sgn}(\Delta U) - G_{\widetilde{c}\widetilde{N}}] + \overline{N}; \\ B_{Q} &= G_{\widetilde{c}_{Q}}Q^{2} - 2G_{\widetilde{c}_{Q}\widetilde{N}_{Q}}Q + G_{\widetilde{N}_{Q}}; \\ B_{E} &= G_{\widetilde{c}_{E}}E^{2} - 2G_{\widetilde{c}_{E}\widetilde{N}_{E}}Q + G_{\widetilde{N}_{E}}; \\ B_{\Delta U} &= G_{\widetilde{c}} - 2G_{\widetilde{c}\widetilde{N}} \operatorname{sgn}(\Delta U) + G_{\widetilde{N}}; \\ B_{OE} &= B_{O\Delta U} = B_{E\Delta U} = 0. \end{split}$$

Для чего мы вводили новые фазовые переменные: E и  $\Delta U$ ? Чтобы ликвидировать толстый «хвост» (т. е. неустойчивость по дисперсии)

у распределения p(Q). Следовательно, мы должны убедиться, что распределение  $p(Q,E,\Delta U;t)$  имеет тонкий (но трехмерный) «хвост» (или хотя бы, что p(Q,E;t) — тонкий двумерный). Для этого надо показать, что в расширенной системе процесс изменения расхода устойчив по «дисперсии».

Сначала проведем умозрительные рассуждения на чисто качественном уровне. На рис. 4.10 представлен пример двумерной проекции функции  $p(Q, E, \Delta U; t)$  (о генерации рядов испарения cm. [37]). При игнорировании (в явном виде) испарения мы фактически проектируем двумерное поле (Q, E) на ось расходов. При этом происходит смещение точек; «хвост» распределения p(Q) «поднимается». Переход к плоскости (Q, E) «размазывает» точки по ней, и имеем двумерное распределение p(Q, E) с «опущенным» (но уже двумерным) «хвостом» (т. е. устойчивость по дисперсии фазовых переменных). Это означает сжимаемость частично инфинитной среды для многомерного распределения:  $\operatorname{div} \vec{A} = \sum \partial A_i / \partial Q_i < 0$  (в случае одной переменной  $Q_1 = Q$  можем иметь  $\partial A / \partial Q \ge 0$ , что и приводит к неустойчивости).

Исходя из представленных выше выражений для коэффициентов имеем:

$$\sum \partial A_i \, / \, \partial Q_i = - (\overline{c}_Q - 0.5 G_{\widetilde{c}_Q}) - (\overline{c}_E - 0.5 G_{\widetilde{c}_E}) - \overline{c}_{\Delta U} \delta(\Delta U)$$

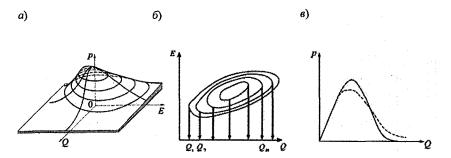


Рис. 4.10. Двумерное распределение плотности вероятности p(Q, E) (a), его двумерная (б) и одномерная (в) проекции (стрелками на рис. б показано проецирование эмпирических точек с координатами (Q, E) на ось расходов; рис. s — это результат статистической обработки ряда  $Q_1, Q_2, ..., Q_n$ ).

(в коэффициенте  $A_{M}$  мы проигнорировали параметрический шум). Для упрощения анализа ограничимся двумя фазовыми переменными (Q u E) u будемсчитать, что:  $\overline{c}_O = \overline{c}_E$ ;  $G_{\overline{c}_O} = G_{\overline{c}_E}$ .  $\sum \partial A_i / \partial Q_i = -2(\overline{c} - 0.5G_{r})$ . С точки зрения вида критерия потери устойчивости ничего не изменилось:  $\beta = G_{\overline{c}} / \overline{c} = 2$ . Но и  $\overline{c}$  , и  $G_{\overline{c}}$  уже другие по сравнению с таковыми в модели одномерного линейного фильтра. Достигнуть значений  $\beta = 2$  уже значительно труднее. Действительно, практически численные значения критерия мы находили по нормироавтокорреляционной функции  $r = \exp(-\overline{c} + 0.5G_{\pi})\Delta t$ ; ванной  $\beta = 2k \ln r + 2$  (так как  $r \le 1$ , то первое слагаемое правой части всегда отрицательное и  $\beta \le 2$ ). Расширив фазовое пространство, мы уменьшили  $\bar{c}$ , т. е. увеличили k и уменьшили  $\beta$  (но это уже другое  $\beta$  по сравнению с одномерным случаем). При этом сам характер экспоненты остается тем же (автокорреляционная функция находится по реальному ряду наблюдений и не содержит ни  $\bar{c}$ , ни  $G_r$ ; она имеет вид  $r = \exp(-\alpha \Delta t)$ , это мы сами (конечно, не мы, в прямом смысле этого слова, а используемая модель) связываем теоретическую функцию  $r=\exp(-\overline{c}+0.5G_{c})\Delta t$  с экспериментальной, считая, что  $\alpha=\overline{c}-0.5G_{c}$ ), так как скорость ее спада зависит не от  $\beta$ , а от разности –  $(\overline{c}-0.5G_{\pi})$ , а  $\beta$  мы находим обратным пересчетом. Предположим  $\bar{c} = 4$  (k = 0.25), а  $G_{z}=6$ . Тогда  $\bar{c}-0.5G_{\tilde{c}}=1$ . Чтобы ту же единицу получить при  $\overline{c}=1$ , надо чтобы  $G_{\overline{c}}\to 0$ , т. е.  $\beta\to 0$ .

При аппроксимации уравнения ФПК для p(Q,E;t) системой уравнений для моментов можно получить уравнение для дисперсии расхода воды  $dD_Q/dt = -2(\overline{c}-0.5G_{\overline{c}})D_Q + f(m_Q,m_E,D_E,k_{QE})$  (здесь  $m_Q$ ,  $m_E$  — математические ожидания;  $k_{QE}$  — корреляционный момент), причем так же как и в одномерном случае (p(Q)), неустойчивость будет при  $G_{\overline{c}} \to \overline{c}$ , но достичь этого уже сложнее: и  $\overline{c}$  — «не то», и уравнение для  $D_Q$  «завязано» в систему их пяти уравнений ( $k_{QE} = k_{EQ}$ ). Наглядно подобную ситуацию в общем случае можно представить, как показано на рис. 4.11.

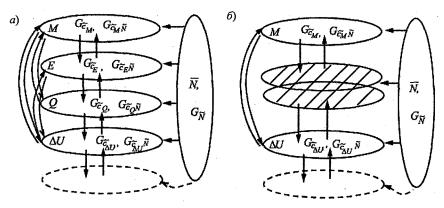


Рис. 4.11. Мультипликативно разомкнутые (a) и замкнутые по расходу и испарению ( $\delta$ ) предметные области (M – скорость роста биомассы, пунктиром показаны неизвестные, но потенциально возможные предметные области с теневыми фазовыми переменными).

Смысл объединения в том, что интегрированная (стоковая и испарительная) предметная область испытывает меньше влияния «инфинитной реальности», чем каждая из них в отдельности (они обе стали финитным ядром многомерной модели). Если бы кроме них ничего не было, то система стала бы полностью мультипликативно замкнутой, и мы перешли бы к нормальному двумерному распределению p(Q, E) (симметричному «колокольчику»), заведомо ликвидировав толстый «хвост».

Вообще надо заметить, что критерий устойчивости, как для одномерного, так и для многомерного случая, получают на основе метода (функции) Ляпунова, разработанного для детерминированных систем без случайных воздействий. Система уравнений для начальных моментов формально именно таковой и является (так же как и уравнение ФПК: хотя оно описывает вероятностные распределения, ничего случайного в нем нет — это детерминистическое уравнение конвекции—диффузии). Поэтому устойчивость определяется не абстрактными случайными шумами, а в целом коэффициентами  $(c-0.5G_c)$  (их знаками). Поэтому и возникает некая неопределенность: из-за того, что (например)  $\overline{c}$  изменяется в два раза вовсе не следует, что и  $G_c$  будет изменяться в два раза.

Какую пользу может дать переход к двумерным распределениям на практике (например, в строительном проектировании при назна-

чении максимального расхода заданной обеспеченности  $Q_{1\%}$ )? Если в рамках линейного формирующего фильтра расход  $Q_{1\%}$  «брался» при фиксированных значениях c,  $G_{z}$  и  $G_{z\%}$  (которые дает ряд наблюдений, если он стационарный), то теперь выбор расхода нужной обеспеченности становится «проблемой» (cM. рис. 4.10,  $\delta$ ). События 1 %-й обеспеченности происходят на некой изолинии, а  $\max_{E} Q_{1\%}$  соответст-

вует проекции на ось Q крайней правой точки изолинии  $(Q, E)_{1\%}$ . При устойчивости двумерного распределения эта величина является однозначной, а значит, нормируемой характеристикой. (При толстом «хвосте» для распределения p(Q) происходило нарушение предельной теоремы:  $S_n / \max\{x_1, x_2, ..., x_n\} = \text{const}$ ; ситуация повисала в воздухе и нормировать проектный расход было нельзя.)

Остановимся еще на методике долгосрочного прогноза (сценарной оценки) многомерных вероятностных распределений (поверхностей) при изменении климата. В гидрологии наряду с эмпирическими кривыми плотности вероятности (или гистограммами) и обеспеченности стараются использовать их аналитические аппроксимации. С прак-

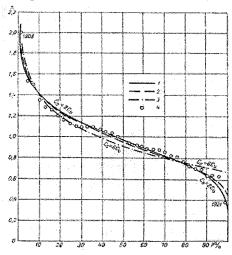


Рис. 4.12. Влияние на кривые обеспеченности соотношения  $C_s/C_v$  (р. Москва, д. Павалино): 1)  $C_s = 2C_v$ , 2)  $C_s = 3C_v$ , 3)  $C_s = 6C_v$ , 4) наблюденные величины [78].

тической точки зрения это важно при экстраполяции в зону больших или малых обеспеченностей для назначения (например) проектных значений расхода. Причем даже в рамках фиксированного типа ана-(теоретичелитической ской) кривой существует «болтанка» их «хвостов» в зависимости от задаваемых параметров, например соотношения между  $C_{\nu}$  и  $C_s$  (рис. 4.12).

Аналитические зависимости представлены в основном некоторыми типами семейства кривых

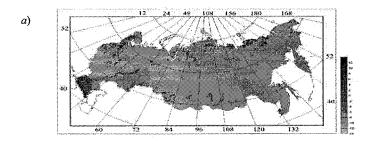
К. Пирсона, являющегося решением уравнения  $dp(Q)/dQ = f(a,b_0,b_1,b_2,Q)p(Q)$ , где f — задаваемая функция параметров a,  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ , идентифицируемых по фактической кривой плотности вероятности p(Q) или по ее моментам. Позже удалось этим параметрам придать гидрологический (физико-статистический) смысл, связав их с шумами, внешними воздействиями и свойствами подстилающей поверхности. Это обстоятельство, в свою очередь, открыло возможность прогнозировать вариации кривой p(Q) при изменении климата и антропогенных воздействий на водосборы. Вкратце эта методика сводится к следующему.

Благодаря тому что уравнение Пирсона является следствием рассмотрения процесса формирования стока как стационарного и линейного (сам Пирсон был далек от гидрологии), возможна его аппроксимация конечным числом (3-мя или 4-мя) алгебраических уравнений для начальных моментов, причем «развязанных»: младшие не зависят от старших [см., например, (2.33)]. По закартированным моментам (они получаются из карт СНиПа для  $\overline{q}$ ,  $C_v$  и  $C_s/C_v$ ) решается обратная задача (находятся  $a,b_0,b_1,b_2$ ), а затем по климатическому сценарию задается новая норма осадков (температуры и, возможно, других характеристик), входящая в параметры модели, и решается уже прямая задача: находят прогнозные значения моментов, а по ним и прогнозные  $\overline{q}$ ,  $C_v$  и  $C_s/C_v$ .

Наложение фактических и прогнозных карт расчетных гидрологических характеристик позволяет выявить возможные аномалии, включая параметры выбросов (рис. 4.13).

Использование модели линейного фильтра с коэффициентом стока дает возможность учесть влияние на последний как метеорологических факторов ( $\dot{X}$ , T °C) (см. работы Н. А. Багрова, М. И. Будыко, К. Я. Винникова [9, 10, 15], результаты которых можно сравнительно «безболезненно» адаптировать к нашей модели [30, 38]), так и свойств подстилающей поверхности (распашка, залесенность, заболоченность, демография, урбанизация и др.), так как существуют многочисленные работы по их влиянию на коэффициент стока (в частности, уникальные исследования Б. С. Устюжанина [90]).

Однако подобное упрощенное описание стока (оно, конечно, оправдано всей историей гидрологических расчетов) породило и проблемы, а именно — возможность неустойчивости, о которой много раз упоминалось в монографии. Побороть ее можно только, расширив фазовое



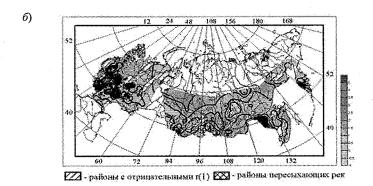


Рис. 4.13. Пример карт аномалий (отличий прогнозных от существующих) коэффициентов вариации (a) и частоты выбросов (b) за уровень 80 %-й обеспеченности летне-осеннего стока на территории России для одного из сценариев изменения климата на 2100 г. (построены аспиранткой М. Громовой).

пространство и перейдя к многомерным распределениям. В статистике известны попытки использования многомерных распределений (как правило, в нормальном приближении [53, 80]). Нам же, конечно, важно сохранить асимметрию. Это возможно сделать с помощью так называемых «распределений типа А» [53]. От нормальных поверхностей (рис. 4.14, а) они отличаются тем, что учитывают третий и четвертый моменты. Используя многочлены Чебышева—Эрмита, удается учитывать асимметрию и эксцесс, но нам важно связать эти статистические характеристики с генезисом формирования расширенного пространства и показать преемственность с уравнением Пирсона (с учетом раскрытия физического смысла его коэффициентов). Зачем нам это нужно?

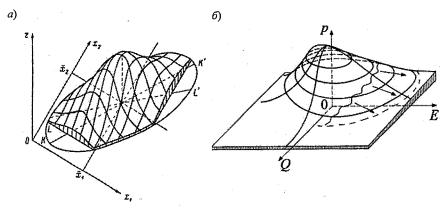


Рис. 4.14. Нормальная поверхность (a) и экстраполяция многомерного «хвоста» в зону малых обеспеченностей  $(\delta)$ .

Для той же цели, для которой используются аналитические распределения в одномерном случае, а именно для экстраполяции многомерного «хвоста» в область малых обеспеченностей (рис. 4.14,  $\delta$ ).

Получить подобное обобщение уравнения Пирсона на многомерный случай можно следующим образом. В самом общем случае уравнение ФПК можно записать так [25]:

$$\partial p(\vec{x},t)/\partial t = -\vec{\nabla}'[\vec{A}(\vec{x},t)p(\vec{x},t)] + 0.5 \operatorname{Sp}[\vec{\nabla}\vec{\nabla}'\vec{B}(\vec{x},t)p(\vec{x},t)], \quad (4.26)$$

где  $\vec{x}$  — вектор, характеризующий фазовые переменные исходной системы динамических моделей;  $\vec{\nabla} = \left\| \partial / \partial \vec{x} \right\|$ ; штрих и Sp означают операции транспонирования и взятия следа.

Соотношение (4.26) является уравнением неразрывности  $(\partial p(\vec{x},t)/\partial t = -\mathbf{div}\vec{\Pi}(\vec{x},t))$  потока вероятности  $\vec{\Pi}(\vec{x},t) = \vec{A}(\vec{x},t)p(\vec{x},t) - -0.5\mathbf{div}\vec{B}(\vec{x},t)p(\vec{x},t)$ , который для стационарного распределения  $(\partial p(\vec{x},t)/\partial t = 0)$  является величиной постоянной, а учитывая, что на границах  $p(\pm\infty,t)=0$  — нулевой (на границах). Исходя из этого, получаем искомое уравнение:

$$\vec{\nabla}[\vec{B}(\vec{x},t)p(\vec{x},t)] - 2\vec{A}(\vec{x},t)p(\vec{x},t) = 0.$$
 (4.27)

(В отличие от одномерного распределения, для которого справедливо уравнение Пирсона, в многомерном случае возможны вихревые движения в потоке вероятности. Поэтому соотношение (4.27) справедливо при существовании скалярного поля для потенциала  $V(\vec{x})$ .)

Подобными уравнениями в частных производных первого порядка описываются всевозможные поверхности, они применяются в классической механике и оптике (см., например, [92]). Их специфика в контексте описания вероятностных распределений в том, что они являются линейными:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(\vec{x}) \partial p(\vec{x}) / \partial x_i + b(\vec{x}) p(\vec{x}) = 0.$$
 (4.28)

Конкретизируем это уравнение для случая двух переменных p(Q,E). Будем рассматривать двумерный вариант динамической системы. Он будет максимально упрощен, но приближен к одномерной модели формирующего фильтра:

$$dQ/dt = -(\overline{c}_Q + \mathcal{C}_Q)(Q + E) + \overline{N} + \widetilde{N}_Q;$$
  
$$dE/dt = -(\overline{c}_E + \mathcal{C}_E)(Q + E) + \overline{N} + \widetilde{N}_E.$$

(Причем  $\mathcal{C}_Q$ ,  $\mathcal{C}_E$  и  $\tilde{N}_Q$ ,  $\tilde{N}_E$  считаем взаимно независимыми белыми шумами, а  $\mathcal{C}_O$ ,  $\tilde{N}_O$  и  $\mathcal{C}_E$ ,  $\tilde{N}_E$  – коррелированными.)

Для этой системы имеем следующие коэффициенты сноса и диффузии:

$$\begin{split} A_Q &= -(\overline{c}_Q - 0.5G_{\widetilde{c}_Q})(Q + E) - 0.5G_{\widetilde{c}_Q\widetilde{N}_Q} + \overline{N}; \\ A_E &= -(\overline{c}_E - 0.5G_{\widetilde{c}_E})(Q + E) - 0.5G_{\widetilde{c}_E\widetilde{N}_E} + \overline{N}; \\ B_{QQ} &= G_{\widetilde{c}_Q}Q^2 + G_{\widetilde{c}_Q}E^2 + 2G_{\widetilde{c}_Q}QE - 2G_{\widetilde{c}_Q\widetilde{N}_Q}Q - 2G_{\widetilde{c}_Q\widetilde{N}_Q}E + G_{\widetilde{N}_Q}; \\ B_{EE} &= G_{\widetilde{c}_E}E^2 + G_{\widetilde{c}_E}Q^2 + 2G_{\widetilde{c}_E}QE - 2G_{\widetilde{c}_E\widetilde{N}_E}Q - 2G_{\widetilde{c}_E\widetilde{N}_E}E + G_{\widetilde{N}_E}; \\ B_{QE} &= B_{EQ} = 0. \end{split}$$

Поэтому уравнение (4.27) принимает вид

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial (B_i p)}{\partial x_i} - 2A_Q p - 2A_E p = 0$$

или

$$p\partial B_Q/\partial Q+B_Q\partial p/\partial Q+p\partial B_E/\partial E+B_E\partial p/\partial E-2A_Qp-2A_Ep=0.$$
 Последнее соотношение можно представить в форме (4.28), где

$$\begin{split} \sum_{i=1}^{m} a_i(x) \partial p / \partial x_i &= B_{QQ} \partial p / \partial Q + B_{E_E} \partial p / \partial E \; ; \\ \vec{b}(x) &= \partial B_{QQ} / \partial Q + \partial B_{E_E} / \partial E - 2A_Q - 2A_E \; . \end{split}$$

В уравнении (4.28) должны быть известны (заданы) восемь параметров ( $\bar{c}_Q$ ,  $G_{\tilde{c}_Q}$ ,  $G_{\tilde{N}_Q}$ ,  $G_{\tilde{c}_Q\tilde{N}_Q}$ ;  $\bar{c}_E$ ,  $G_{\tilde{c}_E}$ ,  $G_{\tilde{N}_E}$ ,  $G_{\tilde{c}_E\tilde{N}_E}$ ), причем  $\bar{c}_Q$  и  $\bar{c}_E$  близки к единице (если нет трендов, например за счет накопления или разгрузки вод в почво-грунтах). Предполагается, что  $G_{\tilde{c}_Q} < \bar{c}_Q$  и  $G_{\tilde{c}_E} < \bar{c}_E$  (иначе и двумерный «хвост» начинает толстеть).

Так же как и в одномерном случае, процедура прогноза разбивается на два этапа: 1. Параметризация модели (4.28) (обратная задача): по известной поверхности p(Q,E) (двумерной гистограмме), соответствующей стабилизированному климату (примерно до 1980 г.), и известной норме осадков N находим численные значения восьми перечисленных выше параметров на сетке с размерами, диктуемыми разрешающей способностью географической карты, по которой идентифицируются поля стока и испарения. 2. Задание прогнозной нормы осадков (из климатического сценария), а также, возможно, новых значений других параметров (если появятся работы, связывающие их с климатическими или антропогенными факторами, как это имеет место в отношении коэффициента стока в одномерном случае) и решение прямой задачи, т. е. нахождение прогнозной поверхности p(Q,E) по уравнению (4.28).

Обычным путем параметризации в одномерном случае было использование системы уравнений для моментов, аппроксимирующих уравнение Пирсона. Такой путь не исключается и в данном случае, од-

нако представляется, что более эффективный способ может заключаться в нахождении параметров оптимизацией или прямым решением системы уравнений, получающихся применением к модели (4.28) метода наименьших квадратов. Так как значения p(Q,E) и  $\partial p/\partial \bar{x}$  [  $\bar{x}=(Q,E)$  ] определяются неточно (и ряды короткие, и испарение не измеряется непосредственно, а вычисляется косвенным путем), то равенство (4.28) в реальности строго выполняться не будет:

$$\Phi_1 = \sum_{i=1}^n a_i(\vec{x}) \partial p(\vec{x}) / \partial x_i + b(\vec{x}) p(\vec{x}) \neq 0.$$

Выберем минимизируемый критерий исходя из привлечения к нахождению минимизируемой погрешности  $\Phi_1$  всего ряда наблюдений на интервале T:

$$L(c_Q, G_{c_Q}, \ldots) = \int_0^T \Phi_1^2 dt.$$

На искомые параметры  $\overline{c}_Q$ ,  $G_{\overline{c}\,Q}$ , ... можно наложить ограничения (типа тех, которые должны выполняться для линейного формирующего фильтра —  $G_{\overline{c}}G_{\widetilde{N}} > G_{\widetilde{c}\widetilde{N}}^2$ , так как квадрат взаимной интенсивности не может быть больше произведения интенсивностей):  $F_m(\overline{c}_Q, G_{\overline{c}_Q}, ...) = 0$ , где m — число дополнительных ограничений, наложенных на искомые параметры. Следовательно, решение задачи сводится к исследованию на экстремум функции Лагранжа:

$$\Phi(\bar{c}_{\mathcal{Q}}, G_{\tilde{c}_{\mathcal{Q}}}, \dots, \lambda_{j}) = L(\bar{c}_{\mathcal{Q}}, G_{\tilde{c}_{\mathcal{Q}}}, \dots) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_{j} F_{j}(\bar{c}_{\mathcal{Q}}, G_{\tilde{c}_{\mathcal{Q}}}, \dots),$$

где  $\lambda_i$  – постоянные множители.

Из необходимого условия минимума

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} = \int_0^T \Phi_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial z_i} dt + \lambda_T \frac{\partial F}{\partial z_i} = 0$$

(здесь искомые параметры переобозначены через  $z_i$ ) получаем систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $z_i$  и  $\lambda_T$ , решая которую (например, методом Крамера, хотя этот метод — проблемный) выполняем первый этап (параметризацию) прогнозной процедуры (интеграл, естественно, заменяем суммой по числу лет наблюдений). Подобный (трафаретный) метод описан подробно применительно к задаче идентификации пропускной способности русла [29, 30], причем в учебнике [30, 38] раскрыта его математическая подоплека с использованием функционального анализа.

Проблемы (хотя и преодолимые) могут возникнуть при решении получающейся системы алгебраических уравнений (например, ее плохая обусловленность). Поэтому не исключено, что прямой численный метод оптимизации также может привести к успеху, хотя и тут возникают проблемы, связанные с большим числом оптимизируемых параметров.

Еще одним путем прогноза двумерной поверхности p(Q, E)в случае неустойчивости одномерного распределения p(Q), возможно, может служить следующий. Какая мотивация экстраполировать в область малых обеспеченностей (или прогнозировать) двумерные распределения? Чтобы найти значения расхода заданной обеспеченности (испарение с точки зрения производственных функций пока вроде не нужно). Следовательно, можно попытаться свести ситуацию к одномерному (но не безусловному) распределению. Выделим на рис. 4.10, а (см. с. 91) линию, соответствующую наименьшему градиенту  $\partial p/\partial Q$ (ее проекция хорошо прослеживается на рис. 4.10, 6). Это и не условная p(Q/E), и не безусловная p(Q) кривая распределения. Вероятнее всего она соответствует «прямой ортогональной средней квадратической регрессии» [43]. В отличие от безусловного распределения (которым пользуются гидрологи в рамках СП) у подобного распределения «хвост» более прижат к оси расходов. Это распределение можно аналитически представить какой-либо из обычно используемых устойчивых аппроксимаций эмпирических распределений (например, кривой Пирсона 3-го типа), и прогнозы (как и экстраполяцию) выполнять именно по ней.

## 4.3. Многомодальные распределения плотности вероятности речного стока и уровней озер (динамика машины Зимана)

Напомним, что вид потенциальной функции для сборки, имитируемой машиной Зимана, определяется параметрами, входящими в многообразие катастроф (см. п. 1.2). Как видно из рис. 1.9 (см. с. 14), потенциальная функция может приводить к одномодальным, многомодальным и промежуточным («экзотическим») распределениям плотности вероятности при численном изменении параметров.

В гидрологии часто встречаются двухмодальные распределения. В 1961 г. Л. М. Конаржевский [40] в ходе исследований по выявлению и качественной оценке типовых особенностей вариаций рядов весеннего стока в лесостепной и степной зонах выявил многочисленные случаи (68%) двухмодальных распределений (рис. 4.15).

Конаржевский объяснил появление двухмодальности особенностями формирования весеннего стока в степной зоне, а именно — зимними потерями запасов воды на водосборе, которые увеличивают в многолетнем разрезе число лет с очень низким стоком за счет уменьшения средних по водности лет.

А. В. Рождественский и А. И. Чеботарев [68] объясняют это явление тем, что в формировании стока весеннего половодья в многовод-

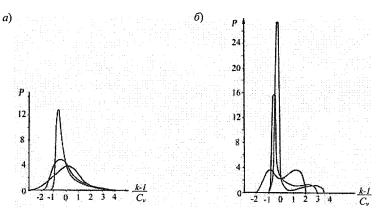


Рис. 4.15. Варианты одномодальных (a) и двухмодальных (b) распределений.

ные годы принимает участие вся площадь водосбора, а в маловодные — только ее часть (без бессточных понижений). Это изменение величины действующей площади приводит к появлению второй моды в зоне повышенного стока из-за разнородности величин стока в статистической совокупности.

Оба эти объяснения делают упор на особенности формирования только весеннего половодья и только в степной зоне. Однако сам Конаржевский приводит примеры распределения вероятности по «типу степной кривой» для других групп гидрологических явлений. Так, степная типовая кривая хорошо описывает эмпирическое распределение наинизших уровней р. Волги у г. Астрахани, наивысших уровней воды рек Калитвы, Березовой и Кондагорчьей, среднегодовых расходов рек Хогрсовка и Бели Лом (Болгария).

Нами были обработаны несколько десятков рядов среднегодовых расходов воды (в том числе и по створам Конаржевского), а также осадков и температуры воздуха на предмет выявления двухмодальных распределений, не связанных с хозяйственной деятельностью или двухмодальностью метеорологических рядов, ведущих к неоднородности рядов стока. На рис. 4.16 представлен характерный случай подобной ситуации.

Подавляющее число гистограмм, построенных по реальным рядам наблюдений, имеют выступающие «зубья», которые при сглаживании одномодальным распределением «срезаются» и принимаются «статистически незначимыми». Часто проводят уж совсем «криминальную» процедуру, удлиняя ряды методом Монте-Карло с одномодальной кривой в качестве фильтра. «Зубья» на гистограмме при этом естественно исчезают, а получающееся «красивое» распределение вообще никак не отражает реальные процессы на водосборе (точнее, отражает их одномодальную идеализацию). При переходе же от годового стока к месячному, декадному и суточному многомодальные распределения — скорее правило, чем исключение.

Разумеется, упомянутые одномодальные распределения не в состоянии описать реальные зависимости, потому что сущность механизма их формирования уравнением Пирсона не описывается. Коэффициенты a,  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$  имеют формальный геометрический смысл (как говорят гидрологи, определяют лекало, которым аппроксимируются эмпирические точки). Таким образом, налицо нефеноменологический (сущностный) парадокс, вызванный тем, что онтология Пирсона

(в данном случае) не фиксирует генезис формирования стока, за которым скрывается многомодальность. Но даже если мы заменим ее более совершенной онтологией (соответствующей модели Фоккера—Планка—Колмогорова), которая раскрывает физический смысл коэффициентов a,  $b_0$ ,  $b_1$  и  $b_2$  (за счет расширения предметной области путем введения в рассмотрение и фиксации в модели физикостатистических свойств внешнего воздействия и характеристик подстилающей поверхности), то все равно, оставаясь линейной, эта усовершенствованная онтология многомодальности не даст (нужна нелинейность исходного динамического уравнения; модель ФПК при этом все равно остается линейной).

Наблюдаются также полимодальные распределения плотности вероятности уровней озер. Особого внимания с точки зрения практиче-

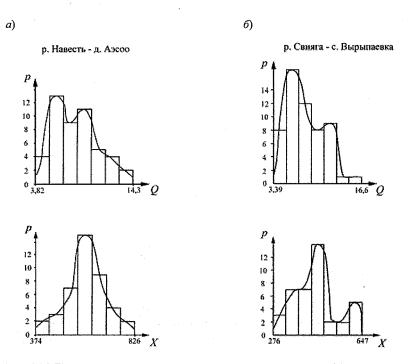


Рис. 4.16. Примеры двухмодальных распределений, не связанных (a) и связанных (b) с двухмодальностью метеорологических факторов.

ской значимости заслуживает Каспий. Эмпирические данные (см. рис. 4.17) явно указывают на наличие, по крайней мере, двух устойчивых и одного неустойчиво состояния равновесия.

Подобные двухмодальные распределения свидетельствуют о том, что наиболее вероятный механизм их порождения связан с катастрофой типа сборки

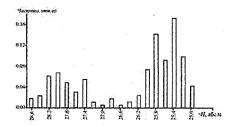


Рис. 4.17. Гистограмма изменения уровня Каспийского моря [57].

(см. п. 1.2). Переход из одной моды в другую может быть индуцирован шумом [29, 57], причем в зависимости от высоты потенциального барьера между модами этот переход может совершаться в разных вариантах (рис. 4.18).

Однако можно предложить и другой (не «шумовой») вариант порождения полимодальности за счет медленных дрейфов бифуркационного параметра в модели сборки. Для того чтобы модель формирования стока сделать нелинейной, примем, что в уравнении линейного формирующего фильтра  $dQ/dt = -Q/k\tau + \dot{X}/\tau$  осадки  $\dot{X}$  и сток Q (обе эти характеристики лучше выражать в модулях) можно представить в виде  $\dot{X} = \dot{X}_0 + \dot{x}$ ,  $Q = Q_0 + q$  (здесь индексом «0» обозначены нормы,

в данном случае константы, а малыми латинскими буквами – отклонения от них).

Будем считать, что  $\tau \approx W/q$ ,  $Q_0 = k_0 \dot{X}_0$ , а в отношении «коэффициента стока» примем  $k = k_0 Q_0/q$ . Подобное предположение указывает на то, что  $\partial k/\partial q < 0$ . Это, видимо, справедливо при небольших влагозапасах в районах недостаточного увлажнения: увеличение осадков (увлажненности) и расхо-

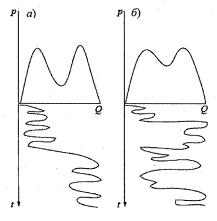


Рис. 4.18. Индуцированный шумом переход при высоком (a) и низком (b) потенциалах.

дов ведет к увеличению потерь на испарение [57]. В зонах достаточного, а тем более избыточного, увлажнения имеем  $\partial \tau / \partial q \approx 0$ ;  $\partial k / \partial q \approx 0$ , т. е. справедлива модель формирующего фильтра, приводящая к одномодальному семейству кривых Пирсона. (Мы сейчас стремимся, пусть во многом умозрительно, придти к модели сборки с двумя модами. Можно «удивляться»: ведь при  $q \to 0$  параметры k и  $\tau$  стремятся к бесконечности. Но, как увидим ниже, модель для q и для Q не одно и тоже. При  $x \to 0$  происходит деформация потенциала и при  $q \to 0$  действует принцип замедления Тома: «частица» по склону потенциала скатывается все медленнее; это к объяснению того, что  $\tau \to \infty$  при  $q \to 0$ . Что же касается параметра k, то это только «коэффициент стока», а не коэффициент стока  $k_0$ . Умозрительная, гипотетическая модель становится теоретической, если она дает двухмодальное распределение, наблюдаемое на практике.)

C учетом изложенного модель для q принимает вид:

$$dq/dt = -aq^3 + bq, (4.29)$$

где  $a = 1/k_0 Q_0 W$ ;  $b = \dot{x}/W$ .

Так как  $\dot{X} \lessgtr 0$ , то параметр b является бифуркационным (управляющим), который меняет вид потенциала с одномодального на двухмодальный (см. рис. 1.3, с. 10). «Протягивая» параметр b от отрицательных значений до положительных (линейно и синусоидально, а также комбинируя оба способа), мы как бы оживляем машину Зимана, наблюдая ее работу в динамике. На гидрологическом языке это означает, что мы наблюдаем реакцию бассейна на повышение и понижение водности относительно нормы  $Q_0$ .

На рис. 4.19 представлены результаты подобного управления бассейном, если  $db/dt = -b + (\lambda_1 + \lambda_2 \sin(\omega t))$ , а на рис. 4.20 — при управляющем воздействии, подчиняющемся уравнению  $db/dt = -b + (\lambda_1 t + \lambda_2 \sin(\omega t))$  (в этих уравнениях  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\omega$  — константы).

Если придерживаться более классических представлений о параметрах k и  $\tau$  (  $k=k_0+W/q\tau_0$  ,  $\tau=\tau_0+W/q$  ), то уравнение (4.29) примет вид:

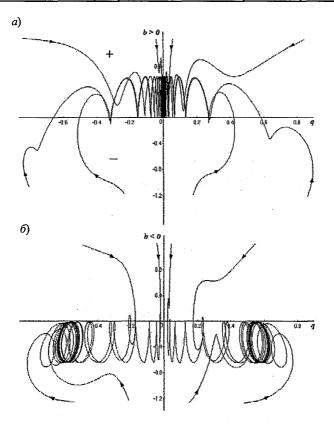


Рис. 4.19. Положение периодических аттракторов при одномодальном (*a*) и двухмодальном потенциале (*б*). Любая траектория из области притяжения стремится к предельному многообразию.

$$\frac{dq}{dt} = -\left(\frac{1}{W\dot{X}_0 k_0}\right) q^3 - \left(\frac{\dot{X}_0 + Q_0}{W\dot{X}_0 k_0}\right) q^2 - \left(\frac{Q_0}{Wk_0} - \frac{x}{W}\right) q + \frac{\dot{x}Q_0}{W}. \quad (4.30)$$

В этом случае устойчивая сборка отсутствует, и имеем различное положение потенциала при изменении управляющего параметра  $(Q_0/Wk_0-\dot{x}/W)$  от положительных значений к отрицательным (рис. 4.21,  $a-\varepsilon$ ).

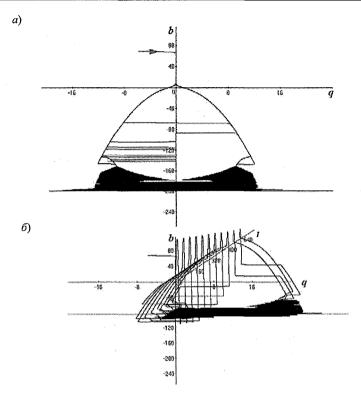


Рис. 4.20. Бифуркационная диаграмма (a) и ее временная развертка ( $\delta$ ). При больших отрицательных отклонениях осадков от нормы в распределениях стока появляется полимодальность, которая сменяется неустойчивостью: диаграмма «размазывается» по «всей» оси q.

В любом из рассмотренных случаев (если управляющий параметр квазипериодически меняет знак) не будет устойчивого ни одномодального, ни двухмодального распределений. В случае модели (4.29) режим будет квазипериодически менять устойчивые состояния (если управляющий параметр не выходит за определенные пределы), а в случае модели (4.30) распределение просто «плывет».

Спрашивается, что мы в такой ситуации (а надо еще добавить аддитивные и мультипликативные шумы) будем наблюдать реально?

Обрабатывая статистически ряд наблюдений за расходом, получаем нестационарнеоднородность. ность и Именно это и наблюдается по створу г. Волгограда [22, 76, 96], см. рис. 4.22 (мы в данном случае связываем многомораспределений дальность уровня Каспия с притоком, хотя не исключено, что имеет место и «тепловой механизм бистабильности уровня Каспийского моря» [57]). Если мы попытаемся исследовать устойчивость распределения p(Q) в створах («претендую-

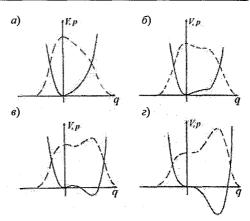


Рис. 4.21. Потенциал (сплошная линия) и плотность вероятности (штриховая линия) при изменении управляющего параметра [93].

щих» на справедливость нелинейных уравнений (4.29) и (4.30)) на основе модели линейного фильтра, то получим неустойчивость статистических моментов, что также подтверждается по всему югу России и северу Казахстана (рис. 4.23).

По идее, если срабатывает модель (4.29) и во временном ряду осадков имеют место положительные и отрицательные отклонения от нормы ( $x \le 0$ ) (а это бывает всегда), то законы распределения расходов меняются с одномодального на двухмодальный в соответствии с изменением вида потенциала (рис. 4.24). Поэтому итоговое эмпирическое распределение должно иметь три моды. Конечно, наличие шума, а также возможность влияния квадратичного члена [как в (4.30)] делает картину размытой, а моду в районе нормы — не очень выраженной.

В любом случае, если переходить к описанию формы распределений с помощью уравнения ФПК, то основной вклад в ее эволюцию вносит коэффициент сноса, который даже без мультипликативных шумов определяет форму распределения за счет механизма катастрофы сборки. Для озер последняя получа-

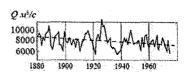


Рис. 4.22. Многолетний ход годового стока р. Волга – г. Волгоград [96].

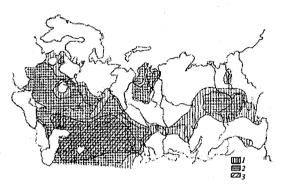


Рис. 4.23. Неустойчивость годового стока на территории СНГ:  $I-\beta>2/3;\ 2-\beta>1;\ 3-\beta\geq1,8.$ 

ется (по крайней мере, может получаться гипотетически), если сделать аналогичное (имеются в виду бассейны) предположение относительно потерь на испарение при повышении уровня (малое наполнение потери повышаются, большое - понижаются; об этой идее см. [57]).

## 4.4. Эволюция систем отсчета в природе и в мышлении познающего субъекта \*

Во всех трех рассмотренных выше случаях эволюция многообразий происходила за счет параметров ( $\lambda$ ,  $\overline{c}-n0,5G_{\overline{c}}$ , b), характеризующих влияние внешней среды (внешней – для зафиксированной предметной области). Именно «дыхание» внешней среды ( $\overline{c} \approx G_{\overline{c}}$ , напри-

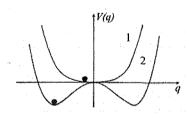


Рис. 4.24. Вид потенциала при изменении отклонения управляющего параметра с положительного (1) на отрицательный (2).

мер) турбулизирует распределение, как движущаяся по ухабам тележка растрясает свое содержимое. Если игнорировать факт перемещения самой «тележки» (считать «систему отсчета» неподвижной — «инерциальной»; эти два термина мы ниже будем толковать в расширенном смысле), то возникают мысли о «самоорганизации» содержимого тележки. Но таких тележек бесконечное число, а хочется иметь одну, универсальную, годную на все случаи

жизни. А если такое невозможно, то хотя бы найти такие преобразования систем отсчета, чтобы математическое описание динамики их со-

 $<sup>^*</sup>$  В п. 4.4 изменены обозначения для испарения: E- масса,  $\dot{E}-$  интенсивность.

держимого не менялось при замене «тележек». (Мы опускаем подробности вековой эпопеи, связанной с такими «изысканиями», *см.*, например, [36, 37].)

Каков глубинный (мировоззренческий) смысл этих поисков? Законы в природе не меняются от того, кто и как на нее смотрит. Все точки зрения равноправны, надо только привести их к «одному знаменателю» путем соответствующих преобразований. Это означает, например, эквивалентность точек зрения № 1 и № 2 (см. рис. 3.4, с. 56). Но ведь «точка зрения» – не произвольный выбор наблюдателя. Это определенная фиксация предметной области (а значит, затрата энергии, делающая процесс фиксации необратимым). А чтобы ее по-новому фиксировать, нужны «проблемы», возникающие при предыдущей фиксации. Эти проблемы преодолевались Ньютоном (взявшем на вооружение принцип Галилея), Лоренцом (когда стали «разбираться» с электродинамикой) и Эйнштейном, который расширил принцип относительности (безразличия к выбору системы отсчета - «тележки») на ускоренные системы отсчета ... так ... «на всякий случай» ... мало ли с чем столкнется человечество. Это ничего, что при больших ускорениях голова изменится в размерах на несколько номеров (это только «кажущееся изменение») - зато за хвост пойман Абсолют. Именно его и пытались поймать, а слова о релятивизме и относительности – исторический курьез, корни которого идут к Николаю Кузанскому с его парадоксальным совпадением минимума и максимума (но, заметим, в Абсолюте, а не просто так... в обыденном мышлении Лоренца или Эйнштейна).

Сколько иронического издевательства можно найти в литературе по поводу этого релятивизма [63]. Достается и Протогору («главному релятивисту всех времени и народов»), и Гегелю с марксистами, и Пуанкаре, и Кантору. Но в чем их вина? Ведь их основные усилия были направлены на то, чтобы «объективные» модели реальности не зависели от «субъективной» системы отсчета. Но и объективность, и субъективность – это чисто гносеологические категории. Они имеют смысл только в переходном гносеологическом режиме от одной онтологии к другой. Если в очередной онтологии логика не «загибается» (до определенного момента), то существуют общезначимые логические правила получения псевдоинформации. Поэтому весь пафос «фундаментальной» науки сводится к овладению «абсолютной» онтологией. В ней система отсчета во-

обще играет вспомогательную роль: не имеет значения, на какой «тележке» поедешь, но ситуацию в целом определяет «дорога» (ее «кривизна»).

Зрительно Вселенную (это может быть «Вселенная» в фазовом пространстве) можно представить как некое яблоко (искривленное пространство) или (наукообразно) как многообразие, «помещенное» в никуда, т. е. «пространство вложения» отсутствует. Изучать этот объект можно только локально — «ученому» нечем руководствоваться, кроме локальной геометрии той части «поверхности», в которой он находится. Полностью изучить это «яблоко» не дают сингулярности (типа «большого взрыва»), делая процесс познания открытым (частично инфинитным).

А теперь вспомним наши гидрологические модели из разд. 2, приводящие к уравнению типа модели ФПК:

$$\frac{\partial p(\vec{x},t)}{\partial t} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} [A(\vec{x},t)p(\vec{x},t)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(\vec{x},t)p(\vec{x},t)].$$

Независимая переменная в нем  $(\vec{x})$  играет роль «пространственной» координаты. Формально-математически она — независимая (от p) переменная. Можно даже нарисовать что-то похожее на «яблоко» на рис. 4.25: n-мерное многообразие (n-мерную плотность вероятности  $p(x_i)$ ). Однако в данном случае об инвариантности (например,

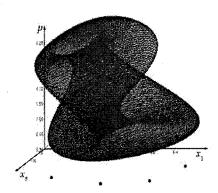


Рис. 4.25. Пятимерная (разумеется, метафорически) плотность вероятности.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} p(x_1,...,x_5) dx_1,...,dx_5 = \text{const}$$

можно говорить, пока происходит перераспределение вероятности только по «пространству»  $(x_1, \ldots, x_5)$ .

Развитие — появление новых свойств  $(x_6)$  — требует перенормировки. В нашем случае многообразие уже куда-то «вкладывается», у «пространства вложения» есть топологическая размерность, превосходящая фрактальную, характеризующую

многообразие «само по себе». Однако это «само по себе» не более чем иллюзия: многообразие только проекция «чего-то» на то пространство, координаты которого (фазовые переменные) нами как-то освоены.

Проведя псевдоаналогию «дальше» и посчитав величину p «аналогией» кривизны, можно вслед за Уилером сказать, что плотность вероятности указывает численным значениям фазовых переменных, как концентрироваться, а фазовые переменные указывают плотности вероятности, как искривляться — распределяться. Роль «кривизны» может играть любая искомая функция в рассмотренных в разд. 2 моделях. Наивно думать, что скорость  $\vec{v}$  (или объемная влажность  $\theta$ ) более материальна, чем плотность вероятности. И то, и другое — «выдумка». Скорость также нельзя пощупать, как и плотность вероятности, но обе эти характеристики можно измерить.

Что делает подобную модель познания открытой? Своеобразная сингулярность. Роль поля, порождающего ее в данном случае, «играет» ситуация, при которой не существует стационарного распределения указанных выше характеристик (всего в целом или по моментам типа толстых «хвостов» при неустойчивости по дисперсии). Будем называть такую неустойчивость турбулизацией  $p(x_1, ..., x_i, ...)$ . Как она реализуется?

Для ответа на этот вопрос надо знать свойства двух объектов: модели для  $p(x_1, ..., x_i, ...)$  и той неучтенной явно (а также неявно, в коэффициентах) инфинитной реальности, которая «стучится» в пространство фазовых переменных. С математической точки зрения уравнение ФПК принадлежит к параболическому типу, который изучен (см. п. 3.3). Проблемы могут возникнуть только при отсутствии стационарных распределений (при  $G_{\overline{c}} \approx \overline{c}$ ). Именно это состояние мы и называем «турбулизацией p(x)» (фактически – ее «расползанием»).

Если для уравнений теплопроводности (в том числе и для таковых с нелинейным источником [67]) найдены автомодельные решения, то для уравнения ФПК при переходе к новым фазовым координатам инвариантность не сохраняется (см. [39]): другая фиксация предметной области ведет к изменению значений коэффициентов сноса и диффузии как функций новых переменных (универсальной гносеологической «тележки» не существует в отличие от целеустремлений «фундаментальной» науки). Каждая «тележка» трясется по-своему.

Формализуем, насколько это возможно, факт отсутствия для уравнения ФПК «инерциальной системы отсчета». В механике инвари-

антность законов относительно преобразований Галилея (x=x'+vt,y=y',z=z',t=t') показывается так («издевательства» по этому поводу cм. в работе [63]). Пусть имеется уравнение  $md^2\vec{r}/dt^2=\vec{F}$  и t=t',  $\vec{r}=\vec{r}'+\vec{v}t$  (m — масса,  $\vec{r}=(x,y,z)$ ,  $\vec{F}$  — внешняя сила). В теории Ньютона предполагается, что сила  $\vec{F}$  и масса m являются абсолютными величинами, т. е. одни и те же в инерциальных системах отсчета (m=m',  $\vec{F}=\vec{F}'$ ). Поэтому (считая, что  $\partial v/\partial t=0$ ) получаем:  $m'd^2(\vec{r}+vt)/dt^2=\vec{F}'=m'd^2\vec{r}/dt^2=md^2\vec{r}/dt^2=\vec{F}$ , т. е. второй закон Ньютона инвариантен относительно преобразований Галилея (если не трогать «силу»).

Будем действовать также и для фазового пространства. Для «единицы» массы воды на водосборе имеем «аналог» второго закона Ньютона для изменения запаса воды  $W: d^2W/dt^2 = F$ , где F — определяет приходную и расходную части водного баланса, которые считаем «абсолютными», т. е. не зависящими от того, как мы будем менять систему отсчета (т. е. точку зрения на динамику изменения запасов).

Пусть наряду с расходом воды запасы меняются также за счет испарения  $E\colon W=W'-\nu_E t$  (здесь  $\nu_E$  — задаваемая скорость изменения запасов за счет испарения  $\nu_E=dE/dt=\dot{E}$ ). Если  $\dot{E}={\rm const}$ , то  $d(W'-\dot{E}t)/dt=Q-\dot{E}$ ,  $d^2(W'-\dot{E}t)/dt^2=dQ/dt$ . Таким образом, если (например) в динамической балансовой модели учитывать потери постоянным коэффициентом стока k, то приходим к одномерному линейному формирующему фильтру, т. е. к «абсолютной» модели формирования стока, справедливой на территории, для которой можно считать, что  $(\partial k/\partial \dot{E})(\partial \dot{E}/\partial t)=0$  (за счет второго сомножителя). Ясно, что это не более чем идеализация, которая в какой-то степени близка к реальности в регионах со стабильным температурным режимом в районе экватора и то при рассмотрении расходов, осредненных за период внутрисуточного изменения температуры воздуха.

При вероятностном описании процесса формирования стока подобную идеализацию приближают к реальности путем введения мультипликативных и, коррелирующихся с ними, аддитивных шумов. Подобное расширение «абсолютной» модели приводит к одномодальному асимметричному решению уравнения ФПК и к семейству кривых Пирсона в стационарном режиме. Так что повсеместное и, чаще всего, достаточно обоснованное использование распределений Пирсона — это следствие «квазиинвариантности» моделей к испарению. Учет того обстоятельства, что  $\partial \dot{E}/\partial t \neq \text{const}$  приводит к многомерному уравнению ФПК (т. е. к изменению «системы отсчета» или точки зрения, с которой мы изучаем бассейн). Причем эта «система отсчета» — «тележка» — может быть размещена на другой тележке и т. д.

Давайте вспомним, зачем Галилей ввел свои преобразования. Он заметил, что в «замкнутой системе» (например, в каюте корабля, стоящего у причала) все процессы протекают так же, как и в «открытой системе», но движущейся равномерно и прямолинейно (т. е. ситуации при v=0 и при  $\partial v/\partial t=0$ ,  $v\neq 0$  — неразличимы «изнутри каюты»). А теперь давайте зададимся вопросом: как мы, гидрологи, находясь в каюте с «занавешенными окнами», т. е. в рамках распределений Пирсона, можем все-таки идентифицировать (и даже способствовать) развитие гидрологии как науки? По-другому - распознать «тележку», на которой мы движемся? Можем, если только она (или мы, «толкающие гидрологию») начинает двигаться ускоренно ( $\partial \dot{E}/\partial t \neq 0$ ). Но как это узнать, находясь в закрытой «каюте»? Можно. Например, по толстому «хвосту» у распределения p(Q). Более того, можно только по информации, доступной в «закрытой каюте» (т. е. по уравнению ФПК), осознать и ситуацию, когда такое происходит (а происходит это при  $G_{\widetilde{c}} \to \overline{c}$  , что следует из самой модели). Но если нас спросят, а «кто» движет  $G_{\epsilon}$  или  $\overline{c}$  (испарение, изменение влагозапасов или что-то другое), мы должны «раздвинуть шторы» (пробить окно в открытой мир, затратив энергию и введя в познавательную ситуацию необратимость). Никакими рациональными методами сделать этого нельзя (иначе, лежа в «каюте» на диване, мы бы знали, что происходит в мире). Однако не рациональными методами - можно. Прежде всего - это умозрение, т. е. некое творческое воображение («фантазии»). Правда, чтобы убедиться в его достоверности, все равно придется выйти из «каюты» в открытый мир (действовать, а не только «умозреть»). Можно даже порассуждать о необходимом стиле этих умозрений.

Сделаем это на примере, далеком от гидрологии (но не от методологии успешного действия в окружающем нас мире). Рассмотрим (умозрительно реконструируем) действия И. В. Сталина перед и во время Великой Отечественной войны. Даже явные ненавистники Сталина не будут отрицать успешность его действий, по крайней мере, в войне. Но какова методология его успеха? Представим ситуацию в виде некой бифуркационной «диаграммы» (рис. 4.26).

в войне. Но какова методология его успеха? Представим ситуацию в виде некой бифуркационной «диаграммы» (рис. 4.26).

Неизбежность войны с Германией стала очевидной в 1933 г., когда к власти демократическим путем пришел Гитлер. Думаю, что Сталину было ясно: именно демократический приход к власти нацистов означает, что воевать придется не с Гитлером, и даже не с Германией, а с мировым капиталом (можно только догадываться, каких средств стоило воротилам бизнеса «пропиарить» приход ефрейтора на высший государственный пост). Очевидна была и цель навязываемой войны: решить до конца задачу «демократической» революции 1917 года — ликвидировать геополитического игрока на мировой сцене руками Германии.

не руками Германии.

Представим себя на месте Сталина до точки бифуркации 1941 г., понимаемой, конечно, в более широком смысле, чем об этом излагалось в разд. 1. Война (т. е. переход к неинерциальной системе отсчета) неизбежна, но каков возможный характер траекторий (ход событий) после ее начала, т. е. какова «тележка», которая может привести СССР к победе? Конечно, можно фантазировать и напридумывать совершенно немыслимые ситуации. Ну, например, если плохой Гитлер нападает на хорошего Сталина, то некие борцы за высшую справедливость («марсиане») придут на помощь СССР. Но Сталин (в отличие, например, от 

«Сосплючие»

Н. С. Хрущева) в чудеса не верип а делал их сам. Реаль-

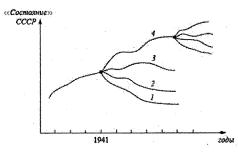


Рис. 4.26. К бифуркационной методологии мышления (цифрами обозначены возможные сценарии развития).

Н. С. Хрущева) в чудеса не верил, а делал их сам. Реальных, более или менее правдоподобных сценариев было не так уж и много.

1. СССР начинает превентивную войну. Но какова вероятность ее успеха? Японцы (согласно договору с Германией) обязаны были тут же выступить против агрессора. Никакой особой симпатией (а

- уж тем более в качестве агрессора) СССР в Европе не пользовался. Дальнейший ход событий показал, что на стороне Германии воевала вся Европа, причем не только принудительно: целые дивизии добровольцев из Испании и Франции участвовали в боях против СССР, в частности на Волховском фронте. Да и настоящие подстрекатели войны вряд ли остались бы в стороне. Они постарались бы втянуть СССР и Германию в затяжную войну. Так что этот сценарий вряд ли пользовался симпатией Сталина, хотя, конечно, его возможность как-то учитывалась.

  2. Гитлер вдруг стал серьезным человеком и начал настоящую подготовку к неизбежно длительной войне с СССР (по крайней мере, снабдил армию необходимыми сортами горюче-смазочных материалов и теплыми кальсонами для ее боеспособности в зимнее время). Думаю, что Сталин это «вдруг» учел в полном объеме, готовясь именно к затяжной войне. Тут и создание «схронов» для будущих партизанских отрядов в Белоруссии, и появление (более чем за год до войны) дублеров промышленных предприятий на востоке страны, и формирование стратегических резервов (как явных, так и скрытых, о которых знали кроме Сталина немногие лица, включая А. И. Микояна), и многое другое.

  3. Гитлер серьезным человеком не стал и авантюристически нападает на СССР в уверенности на успешность блицкрига. Сталин оказывается «мудрым» (по меркам демократической общественности) и организовывает эшелонированную оборону в приграничных областях. Гитлер, сообразив, что «влип», отходит, втягивая Красную Армию на территорию Европы. Что дальше? А то, что и в первом варианте: затяжная война без особого сочувствия «мирового цивилизованного собщества» с неизвестным концом. Или еще хуже: заключается мир с Германией, которую мировая закулиса все равно будет готовить к войне с СССР, но уже на полном серьезе («с кальсонами»).

  4. Повторяется третий вариант, но немцев втягивают в глубь страны; потом снова начинаются бифуркации, но уже во многом контролируемые, а главное предсказуемые.

  Отказавшись от первого сценария, Сталин готовился к остальным, провоцируя че

Тролируемые, а главное – предсказуемые.

Отказавшись от первого сценария, Сталин готовился к остальным, провоцируя четвертый. Ресурсы выделяются под все три «неинерциальные системы отсчета», которые могут возникнуть при проведении военных действий, но все нацелено на реализацию провокационного варианта. Под «провокацией» имеется в виду следующее.

1. Полное показное «неверие» в то, что Гитлер нарушит Пакт
о ненападении. Все видят концентрацию немецких войск на границе

с СССР, один «глупый» Сталин «не видит», да еще напоказ наказывает разведчиков за «дезинформацию» (о подробностях Сталинского блефа можно узнать из книги [14]);

2. Для того чтобы отсрочить дату начала войны (приблизить ее к зиме; по плану «Барбаросса» вторжение намечалось на 15 мая) организуется восстание против пронемецкого правительства в Югославии (см. откровения П. Судоплатова, приведенные в книге [20]).

Сценарий сработал. Концептуально Сталин уже 22 июня выиграл войну. А ведь это только один эпизод (хотя и очень важный) за тридцатилетний период управления им государством. И всегда победы. Среди них — коллективизация: это благодаря ей были мобилизованы трудовые ресурсы для индустриализации, без которой никакой бы победы в войне не было. Ведь полубесправные колхозники должны были кормить и себя, и миллионы бывших крестьян, разбросанных по стройкам первых пятилеток. Жестоко? Попробуйте в той ситуации иначе обеспечить выживаемость страны.

Так в чем секрет, каков стиль мышления Сталина? Его мышление — бифуркационно. Он всегда готов к любому развитию событий (к любой траектории на рис. 4.26), но по мере сил провоцирует ту, которая выгодна стране для выживания. Но бифуркация — это псевдоним мутации, и Сталин действительно непрерывно мутировал. Вместе с ним мутировала и страна, которая жила будущим; застывшего настоящего практически не было (режим непрерывной бифуркации). Эта устремленность в будущее популярно описана А. Зиновьевым [21].

На «картинке» для потенциала V(q) это критическое, бифуркационное состояние выглядит так, как представлено на рис. 4.27, a. Должно

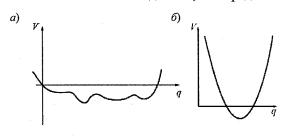


Рис. 4.27. Изображения потенциалов, соответствующих критической (творческой, бифуркационной) (a) и устойчивой ( $\delta$ ) ситуациям.

быть что-то очень «плоское», не связывающее маневр глубокой ямой. Почему? Потому что в состоянии бифуркации системы (природный развивающийся объект или познающий субъект) не характерного имеют масштаба. Это означает, что автокорреляционная функция (в этом критическом состоянии) спадает «медленно» (по степенному закону, а не по экспоненте). А кроме того, в критическом состоянии должно происходить замедление процессов. Зачем это нужно природе (и познающему субъекту)? Оказывает-

Зачем это нужно природе (и познающему субъекту)? Оказывается, что подобное состояние на грани порядка и хаоса обеспечивает системам (объектам или субъектам) благоприятные условия для адаптации к окружению. Система в этом состоянии очень чувствительна к внешним воздействиям («шумам»), что позволяет ей лучше адаптироваться и выживать. В мозгу человека это критическое состояние создается синестизией – активацией различных отделов мозга, отвечающих за качественно отличающиеся рецепторные восприятия явлений различной природы.

отличающиеся рецепторные восприятия явлений различной природы.

Любое сужение потенциального поля возможностей (рис. 4.27, 6),
т. е. остановка внимания на одной идее («Гитлер не может напасть») —
это смерть. Надо быть готовым, если не ко всему, то ко многому (рис. 4.27, a).

А если человек еще и «коварный», то – проводировать повышение вероятности попасть противнику в наиболее неблагоприятную «яму» на потенциальной кривой.

Посадим Сталина в «довоенную каюту». Если бы он адиабатически (см. [35]) исключил из своего мышления все возможности, кроме

Посадим Сталина в «довоенную каюту». Если бы он адиабатически (cм. [35]) исключил из своего мышления все возможности, кроме мира с Германией (т. е. принял бы, что  $\partial \dot{E}/\partial t=0$ ,  $\partial (\Delta U)/\partial t=0$  и т. п., в гидрологической терминологии), то для страны это означало бы лишь одно — конец (и для гидролога — неоцениваемые вероятности больших расходов, катастрофы, разрушение мостов и т. д.). Но «конца» не было. Следовательно, мыслил он раскованно, учитывал все возможности (и более того: провоцировал «свою» — иначе, как объяснить, например, переброску рельсов «царского БАМа» на левый берег Волги еще до начала Сталинградской битвы?).

Но это Сталин. А что же мы? Давайте проанализируем, с изложенных выше позиций, введение второй фазовой переменной  $\dot{E}$  для ликвидации толстого «хвоста». Сидим мы (два гидролога) в «гидрологической каюте» (еще лучше — в машине с занавешенными окнами, с отличными амортизаторами, которая равномерно движется по гладкой дороге — «инерциальная система отсчета»). Перебрасывая друг другу воздушный шарик, построили модель процесса (уравнение Пирсона — все-таки внутри есть «шумы» — руки дрожат после пива), cм. рис. 4.28, a. На виражах (мы их не видим) траектория шарика «меняется», что иден-

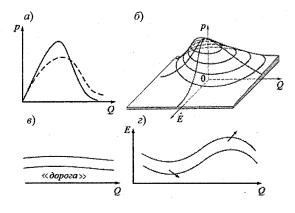


Рис. 4.28. К эволюции инерциальнных систем отсчета.

тифицируется нами при статистической ботке как толстый Составленная «XBOCT». нами модель потеряла устойчивость по персии. Как ее устранить (точнее - «обойти», так как устранить ее, в рамках принятой за инерциальную сисотсчета, темы можно)? Изменить систему отсчета, сделать ее инерциальной»

перейти к двумерному распределению (рис. 4.28, 6;  $\dot{E}$  учитывает «отклонения шарика в бок» на виражах). А как это экспериментально подтвердить? **Выглянуть** из машины [выйти за пределы рациональности, накладываемой одномерным распределением p(Q)] и связать виражи с испарением. А если «шофер» вдруг начнет резко замедлять или ускорять движение? Тогда уже двумерное распределение потеряет устойчивость и надо вводить третью фазовую переменную ( $\Delta U$ ), учитывающую, что прежняя система отсчета перестала двигаться «равномерно» (все это не более чем метафора, так как двигаться «равномерно» при наличии виражей вряд ли возможно).

Спрашивается, можно ли, не выглядывая из машины, а просто измеряя отклонения шарика (т. е. Q), узнать, сколько раз надо менять систему отсчета, чтобы на данной дороге иметь устойчивую модель движения шарика? Удивительно (на первый взгляд), но можно — методами фрактальной диагностики [37].

Ну а что будет происходить в других рассмотренных нами примерах расширения фазового пространства, например в случае с гидравлическими сопротивлениями? Все то же самое — действуй «по Сталину»: меняй систему отсчета [вместо  $(U, h) - (U, h, \lambda)$ ]. Можно ли всю эту технологию запрограммировать, хотя бы «частично инфинитно»? Попробуем.

### 5. О возможности частично инфинитного программирования гносеологических переходных процессов

# 5.1. Некоторые аспекты численной реализации моделей эволюции многообразий

Уравнение ФПК не является каким-то особо выделенным в рамках частично инфинитного подхода к моделированию развивающихся систем. Однако на его примере можно наглядно показать (cm. рис. 5.1), что же такое частично инфинитное моделирование (а значит — прогнозирование). На интервале ( $t_0$ ,  $t_0$ ) действует динамическая закономерность, т. е. любому моменту времени t из этого интервала можно однозначно сопоставить значение функции Y(t). Из-за (неизбежно) присутствующих в системе шумов траектория начинает «болтаться» [интервал ( $t_0$ ,  $t_1$ )]. Возникает необходимость использования статистических закономерностей [на интервале ( $t_1$ ,  $t_1$ )]. Тем самым постулиру-

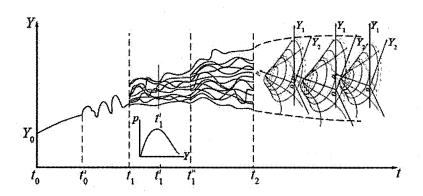


Рис. 5.1. Переход динамической закономерности в статистическую [на интервале  $(t_0, t_1)$ ] и частично инфинитное расширение предметной области статистического описания процесса в точке  $t_2$  из-за потери устойчивости второго начального момента в точке  $t_2''$ .

ется существование «пучка» реализаций, сечение которого в любой момент времени  $t_1^i$  обеспечивает существование устойчивого распределения плотности вероятности  $p(Y, t_1^i)$ .

«Интересное» (с «точки зрения» частично инфинитного подхода) начинается дальше. Если  $G_{\overline{c}} \to \overline{c}$ , то возникает неустойчивость моментов распределения, которую проще всего проиллюстрировать на примере дисперсии (пучок расширяется). Статистическая совокупность траекторий «рассыпается». Как поступать в такой ситуации: ведь испробованы все (динамическая и статистическая) виды закономерностей, применяемых в науке. И ни одна из них не действует в «точке»  $t_2$ .

Закон больших чисел выполняется, когда на систему действует много «одинаковых» по суммарному эффекту факторов. Потеря устойчивости означает, что появился некий «выдающийся» фактор (факторы), который надо учитывать наряду с переменной Y, но уже в двумерном распределении [например,  $p(Y_1, Y_2)$ ]. Частично инфинитное моделирование (прогноз) и состоит в том, чтобы перейти от неустойчивого распределения p(Y) к устойчивому  $p(Y_1, ..., Y_n)$ . Этот переход формализуется только частично: можно точно указать то число фазовых переменных, которое надо учитывать в многомерном устойчивом распределении (это достигается методами фрактальной диагностики). Но не существует (может быть «пока») рациональных путей, позволяющих ответить на вопрос: каких именно. Например, из того факта, что в Западной Африке выявлены регионы с неустойчивыми моментами, и в этих регионах фрактальная размерность – два, вовсе не следует, что в расширенном распределении надо использовать обязательно («напрашивающееся») испарение (это может быть и изменение запасов воды в почво-грунтах  $\pm \Delta U$ ). Для правильного выбора новой фазовой переменной надо «подключить» опыт, здравый смысл, интуицию и т. д. Все это - не рационализируемые (по крайней мере, полностью) понятия (частично инфинитные).

Вновь построенное многомерное распределение также может потерять устойчивость по моментам (и т. д.). Спрашивается, а сколько всего фазовых переменных можно реально учесть при численной реализации многомерного уравнения ФПК с точки зрения технических характеристик современной вычислительной техники (объема оперативной памяти и быстродействия)?

#### 5.1. Некоторые аспекты численной реализации моделей эволюции многообразий

Такую оценку можно выполнить, используя методику, предложенную Л. Г. Евлановым в 1976 г. Известен метод гиперплоскостей [44], когда уравнение в частных производных путем дискретизации пространственных координат (в нашем случае их роль выполняют n фазовых переменных  $y_i$ ) сводят к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Уравнение ФПК аппроксимируется следующим образом:

$$\begin{split} \dot{p}_{\vec{k}} &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\Delta y_{i}} \left( A_{i, \vec{k}_{i}} \, p_{\vec{k}_{i}} \, - A_{i, \vec{k}_{i-1}} \, p_{\vec{k}_{i-1}} \right) + \frac{1}{2} \sum_{i, j=1}^{n} \frac{1}{\Delta y_{i} \Delta y_{j}} \times \\ & \times \left( B_{ij, \vec{k}_{ij}} \, p_{\vec{k}_{ij}} \, - B_{ij, \vec{k}_{i-1, j}} \, p_{\vec{k}_{i-1, j}} \, - B_{ij, \vec{k}_{i, j-1}} \, p_{\vec{k}_{i, j-1}} \, + B_{ij, \vec{k}_{i-1, j-1}} \, p_{\vec{k}_{i-1, j-1}} \, \right), \ (5.1) \end{split}$$
 
$$\text{THE } \vec{k} = k_{1} ... k_{n}, \quad \vec{k}_{i} = k_{1} ... k_{i} ... k_{n}, \quad \vec{k}_{i-1} = k_{1} ... k_{i-1} ... k_{n}, \quad \vec{k}_{ij} = k_{1} ... k_{i} ... k_{j} ... k_{n}, \\ \vec{k}_{i-1, j} = k_{1} ... k_{i-1} ... k_{j} ... k_{n}, \quad \vec{k}_{i, j-1} = k_{1} ... k_{i} ... k_{j-1} ... k_{n}, \end{split}$$

Будем считать, что областью значений фазовых переменных является параллелепипед  $|y_i| \le C_i \Big(i = \overline{1,\ n}\Big)$ , где  $C_i = \mathrm{const}$ . Для каждой фазовой переменной введем целочисленные значения:

 $\vec{k}_{i-1,j-1} = k_1 ... k_{i-1} ... k_{i-1} ... k_n; \ \Delta y_i$  — интервал дискретизации;  $\dot{p} \equiv dp/dt$ .

$$y_i \approx l_i \Delta y_i$$
  $l_i = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm c$ ,

где шаг дискретизации определяется формулой  $\Delta y_i = C/c$ .

Число узлов, в которых вычисляются значения плотности вероятности (а значит, и число дифференциальных уравнений в системе (5.1)), будет  $N = (2c+1)^n$ . Таким образом, в зависимости от n и от того, каким (одно- или двухмодальным) является решение уравнения ФПК, получаем оценки для N, представленные в табл. 5.1.

Таблица 5.1 Оценки числа дифференциальных уравнений в системе (5.1)

Число фазовых перемен- ных	Число			
	мод	уравнений	мод	уравнений
пыл	1	N	2	N
1	p	10 <sup>1</sup>	p	20 <sup>1</sup>
2	, , , , , , , , , , , , , , , , , , ,	10 <sup>2</sup>	p(5,y,z)	20 <sup>2</sup>
3	_	10 <sup>3</sup>	-	20 <sup>3</sup>
4	_	10 <sup>4</sup>		20 <sup>4</sup>

Из табл. 5.1 видно, что уже при двухмодальной плотности вероятности для четырех фазовых переменных число уравнений достигает  $160\ 000$ , что, видимо, является практическим пределом для существующих ПЭВМ (в 70-х годах XX в. предел для ЭВМ составлял  $10^3$ ).

При решении реально существующих практических гидрологических задач в рамках одномодального распределения p(Q) можно ограничиться 11-ю уравнениями. Даже использование идей теории катастроф, т. е. привлечение двухмодальных двумерных распределений, требует порядка 400 уравнений, что с позиций ресурсов вычислительной техники вполне приемлемо. Другое дело — «истерика» лиц, занимающихся статистическими расчетами. При существующей длине гидрологических рядов (несколько десятилетий) исследовать окружающую нас гидрологическую реальность можно только двумя-тремя моментами одномерного распределения. Можно пофантазировать о необходимой

длине ряда наблюдений за речным стоком, чтобы статистически оценивать двухмодальное двумерное распределение с асимметрией.

Поэтому надо либо отказаться от более глубокого (чем в рамках, например, кривой Пирсона 3-го типа) изучения гидрологии (а значит, отказаться от изучения катастроф, эволюции гидрологических объектов, да и вообще от того, чтобы смотреть на гидрологию нелинейно и многомерно), либо придумывать не статистические метрики, оценивающие достоверность «картинок», помещенных в табл. 5.1. В конце концов, к двухмодальности мы пришли из модели, описывающей физику процесса формирования стока, а не эмпирическим путем, «играя с рядами».

Систему (5.1) надо каким-то образом решать численно. Конечно, есть много одношаговых и многошаговых методов (различной степени точности) для этого. Однако наиболее распространенным является метод Рунге-Кутта, который повсеместно использовался и в данной книге тоже при решении дифференциальных уравнений и их систем. Он основан на разложении решений системы (5.1) в ряд Тейлора

$$p_{\vec{k}}(t_{n+1}) = p_{\vec{k}}(t_n) + \Delta t \ p'_{\vec{k}}(t_n) + ((\Delta t)^2/2) p_{\vec{k}}''(t_n) + \dots$$

и отбрасывании членов соответствующего порядка. Например, чтобы получить метод Рунге-Кутта первого порядка (он же метод Эйлера), надо отбросить в разложении члены второго порядка.

Наиболее востребован метод четвертого порядка  $\left[\delta=0\left(\Delta t^4\right)\right]$ , который для одного уравнения p'=f(t,p) выглядит так:

$$\begin{split} p_{j+1} &= p_j + \frac{\Delta t}{6} \left( l_1 + 2 l_2 + 2 l_3 + l_4 \right), \quad j = 0, 1 \dots \\ l_1 &= f \left( t_j, p_j \right), l_2 = f \left( t_j + \Delta t / 2, p_j + l_1 / 2 \right), \\ l_3 &= f \left( t_j + \Delta t / 2, p_j + l_2 / 2 \right), l_4 = f \left( t_j + \Delta t, p_j + l_3 \right) \end{split}$$

Мы не будем обсуждать сильные и слабые стороны именно этого варианта метода (по этому вопросу существует общирная литература, см., например, [42, 44, 88]), а обратим внимание на то, что дискретизация непрерывных моделей приводит к появлению нового типа поведения. Поучительный пример приведен в работе [61]. Для системы уравнений

$$\dot{x} = \alpha x - \beta xy = f(x, y);$$
  
$$\dot{y} = -\gamma y + \delta xy = g(x, y)$$

(система хищник у – жертва х) выберем следующий численный метод:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{\Phi}_{\Delta t, \tau} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \qquad k = 0, 1, \dots,$$
 (5.2)

где

$$\Phi_{\Delta t,\tau}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{pmatrix} f(x,y) + f(x+\tau f(x,y), y + \tau g(x,y)) \\ g(x,y) + g(x+\tau f(x,y), y + \tau g(x,y)) \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем управляющие параметры непрерывной модели (  $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ ) и будем считать таковыми для дискретной модели  $\Delta t$  и  $\tau$ . На плоскости этих параметров (рис. 5.2 из работы [90]) возможны четыре типа решений. В области I неподвижная точка (x,y)=(1,1) является притягивающей. При изменении  $\tau$  и  $\Delta t$  мы попадаем в область II, где неподвижная точка становится неустойчивой и появляется притягивающая инвариантная окружность. В области III появляются странные аттракторы, а область IV оказывается неустойчивой (траекто-

рии стремятся к бесконечности).

В то же самое время для непрерывной модели весь квадрант  $\{(x,y):x>0,y>0\}$  заполняется замкнутыми траекториями вокруг точки покоя  $(x_c,y_c)=(\gamma/\delta,\,\alpha/\beta)$ , так как по теореме Пуанкаре—Бендиксона [29, 97] на плоскости (в двумерном фазовом пространстве) только такие аттракторы и возможны (непрерывность не дает экспоненциально разбегаться траекториям).

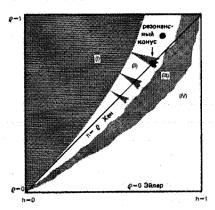


Рис. 5.2. Плоскость параметров ( $\Delta t$ ,  $\tau$ ).

Как это ни странно, но дискретизация расширяет предметную область непрерывной модели («странно», потому что непрерывная модель бесконечномерна, в отличие от дискретной – конечномерной). Дело тут, видимо, в следующем. В непрерывной модели решение действительно может потенциально находиться в любой точке первого квадранта (это зависит только от начального условия), но дифференциальный оператор заставляет его быть только аттрактором (точечным или периодическим). Заменяя непрерывную область дискретной, мы вроде бы ограничиваем число точек, в которых может находиться решение, но, с другой стороны, появляются новые управляющие параметры ( $\Delta t$ и  $\tau$ ). Если  $\Delta t$  — шаг интегрирования по времени, то какой физический смысл параметра  $\tau$ ? Величина f(x, y) — это  $dx/dt (\equiv x)$ , а  $\tau \dot{x} = \Delta x$ , т. е. приращение решения, которое используется при подсчете правой части отображения (5.2). При  $\tau \to 0$  («безынерционные» расчеты) приходим к методу Эйлера с очень широкой областью неустойчивости (IV). При  $\tau \to 1$  («инерционные» расчеты) область неустойчивости сужается до нуля, любые неустойчивости подавляются (осредняются). Таким образом, выполняя дискретизацию, мы финитную предметную область параметров  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  делаем частично инфинитной  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \Delta t, \tau)$ , а значит - частично непредсказуемой (область III) и полностью непредсказуемой (область IV), т. е. инфинитной.

К подобному классу эффектов относится и ситуация, связанная с численным решением уравнения (4.9). При  $\gamma' U^2 \rightarrow 1$  возникает неустойчивость, которая при  $\Delta t \rightarrow 0$  не успевает реализоваться, причем чем меньше  $\Delta t$ , тем меньше величина «выбросов» (рис. 5.3).

Если систему отсчета для (4.9) поместить в другую систему отсчета  $(x=x'+(U_{00}+U_0\sin\omega t)t)$ , то ситуация может быть либо такой, как изображено на рис. 5.3 (если  $\omega\to 0$ , то  $U_0\sin(\omega t)t\cong U_0\omega t^2\to 0$  и  $dx/dt\approx dx'/dt+U_{00}$ , т. е.  $d^2x/dt^2\approx dx'^2/dt^2$  при  $U_{00}={\rm const}$ ), либо (если  $\omega\to 0$ ) такой, как показано на рис. 5.4.

Метафорическая интерпретация последней «картинки» может быть такой. «Каюта» (например, часть металлического, «занавешенного» с двух сторон шторами, желоба, по которому перемещается шарик; желоб связан с «пароходом») притягивает к себе шарик, но область в центре «каюты» отталкивает его. Иногда открываются шторы (то

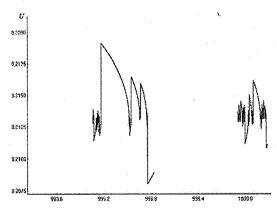


Рис. 5.3. Влияние шага численного интегрирования  $\Delta t$  на величину и продолжительность «выбросов» ( $\Delta t$  на правом графике на порядок меньше, чем на левом).

больше, то меньше - это зависит от выбранного шага интегрирования), и выскакивает шарик «каюты». Если пароход стоит  $(U_{00} = 0)$  или двигается равномерно ( $U_{00}$  = const) И без  $(\omega \rightarrow 0)$ , то шарик медленно возвращается «каюту», как показано на рис. 5.3. Если пароход испытывает качку  $(\omega \rightarrow 0)$ , to ee же испытывает и шарик (как в «каюте», так и за ее пределами), возвращаясь по-

сле вылета из «каюты» обратно по синусоиде (рис. 5.4).

Остановимся на некоторых особенностях использования прямых конечно-разностных методов. Уравнение ФПК относится к моделям,

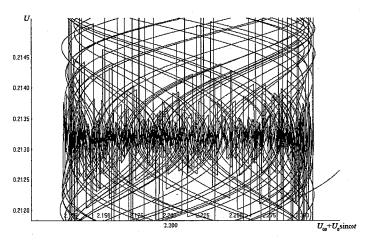


Рис. 5.4. Фазовый портрет решения уравнения (4.9) в «неинерциальной системе отсчета».

составляющим основу задач конвекции—диффузии, для которых разработаны разнообразные конечно-разностные схемы [75]. Как правило, предъявляемые к ним требования носят противоречивый характер, который смягчают путем оптимизации конкурирующих вариантов. Однако есть требования, выполнение которых носит безусловный характер. При любых обстоятельствах плотность вероятности не может быть отрицательной или иметь разрывы, что приводит к использованию положительных и монотонных разностных схем. Так как уравнение ФПК — это математическая запись закона сохранения вероятности, то выдвигается требование консервативности разностных схем (удовлетворению требованиям способствует дивергентный характер записи уравнения ФПК).

Еще одно требование связано с обеспечением устойчивого двунаправленного сноса, так как коэффициент сноса A(Q,t) может быть и положительным, и отрицательным. Самый простой вариант обеспечения двунаправленного сноса путем использования центральных разностей

$$\frac{\partial \left[A(Q,t)p(Q,t)\right]}{\partial Q} \approx \frac{A_{j+1}^{i}p_{j+1}^{i} - A_{j-1}^{i}p_{j-1}^{i}}{2\Delta Q}$$

также приводит к неустойчивости [100], как и применение левых и правых «уголков» в однонаправленных схемах. Все эти проблемы не несут специфики, связанной с частично инфинитным подходом. Они хорошо

известны в вычислительной математике и успешно преодолеваются [75].

Другое дело, реакция известных конечно-разностных схем на увеличение числа независимых переменных-координат (в нашем случае — фазовых переменных). А подобное увеличение, как и ситуация, возникающая в таком «переходном» (так и хочется добавить высокопарное

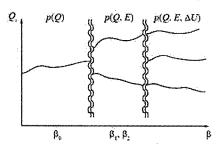


Рис. 5.5. К происхождению многомерного распределения плотности вероятности (  $\beta_0 = G_{\widetilde{c}} \ / \ \overline{c}, \ \beta_1 = G_{\widetilde{c}_Q} \ / \ \overline{c}_Q, \ \beta_2 = G_{\widetilde{c}_E} \ / \ \overline{c}_E$  ).

слово «гносеологическом») режиме, и есть специфика частично инфинитного подхода. Генезис появления многомерного уравнения  $\Phi\Pi K$  (4.25) можно представить следующим образом (*см.* рис. 5.5).

Параметры  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  являются бифуркационными: при достижении ими значений, равных двум, происходит потеря устойчивости моментов распределения, подавить которую могут новые фазовые переменные.

(Имеет смысл еще раз обратить внимание, что  $G_{\widetilde{c}} \neq G_{\widetilde{c}_{\mathcal{Q}}} \neq G_{\widetilde{c}_{\mathcal{E}}}$ ,

 $\overline{c} \neq \overline{c}_Q \neq \overline{c}_E$ . Расширение фазового пространства означает, что часть шумовой инфинитной среды рационализируется, хотя полностью этот процесс никогда не завершится. Всегда будут «остаточные шумы», но эта «остаточность» довольно условна, так как критерий устойчивости в ней относителен: это не просто интенсивность шума  $G_{\overline{c}}$ , а отношение  $G_{\overline{c}}/\overline{c}$ . Заметим также, что в переходном слое, c. разрыв на рис. 5.5, когда природа дестабилизирующего фактора еще не ясна, можно сам бифуркационный параметр  $\beta$  рассматривать как квазифазовую переменную:  $p(Q, \beta)$  или  $p(Q, G_{\overline{c}} - 0.5\overline{c})$ , c. [34].)

Потеря устойчивости моментов может произойти не по всем, а по некоторым «направлениям» (фазовым переменным). Тогда на поверхности многомерной плотности вероятности появится «флюс» в неустойчивом направлении. Весь процесс можно представить как расползающиеся метастазы, «осваивающие» инфинитную реальность, в которой формируется все большее и большее число взаимодействующих фазовых переменных (рис. 5.6).

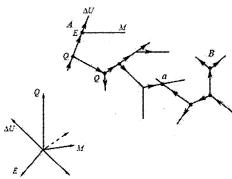


Рис. 5.6. К метафоре освоения инфинитной реальности.

Можно представить «движущейся» навстречу

гидрометеорологическому «объекту» А метастазирующий социально-экономический «объект» В. Встреча их в точке а приведет к появлению «экологии», включающей все новые и новые фазовые переменные для устойчивого осмысления всей этой паутины.

Спрашивается, где тот конечно-разностный метод, позволяющий численно моделировать разрастание этой многомерной опухоли? Такой метод существует (справедливый, по крайней мере, на этапе аддитивного роста, до пересечения двух разнородных метастаз). В численных методах существуют так называемые аддитивные схемы многокомпонентного расщепления, заменяющие многомерную задачу цепочкой одномерных. А раз есть цепочка, то ее можно сравнительно легко дополнять новыми звеньями (фазовыми переменными). Рассмотрим подобную схему, сначала может быть несколько абстрактно.

Заменим правую часть уравнения типа (4.25) для двух фазовых переменных Q и E операторным представлением  $\widetilde{A}$  p(Q,E), где  $\widetilde{A}$  – сумма операторов конвективного переноса и диффузии. Представим процесс численного решения в виде двух этапов:

$$(p(Q,E_0)-p(Q_0,E_0))/\Delta t = \widetilde{A}_Q p(Q,E_0); \tag{5.3}$$

$$(p(Q,E)-p(Q,E_0))/\Delta t = \widetilde{A}_E p(Q,E), \qquad (5.4)$$

где  $p(Q,E_0)$  — промежуточная функция, получающаяся решением одномерного уравнения (5.3) при дискретизации правой части сеточным оператором  $\widetilde{A}_Q$  по переменной  $Q;\;p(Q,E)$  — искомое значение плотности вероятности в конце интервала  $\Delta t$ , получаемое решением также одномерного уравнения (5.4) при дискретизации правой части сеточным оператором  $\widetilde{A}_E$  по переменной E. Эти два этапа изображены на рис. 5.7.

В случае использования уравнения для одномерного распределения p(Q) все что находится на оси E есть для одномерней модели «инфинитная реальность». Интерфейс с ней осуществляется в модели с помощью параметров  $\overline{c}$  и  $G_{\overline{c}}$  (не  $\overline{c}_Q$  и  $G_{\overline{c}_Q}$  – их в одномерной модели нет вообще).

Подобная схема хороша тем, что при введении очередной фазовой переменной (например,  $\Delta U$ ) логика вычислений не меняется:

$$(p(Q, E, \Delta U) - p(Q, E, \Delta U_0))/\Delta t = \widetilde{A}_{\Delta U} p(Q, \Delta U),$$

причем схемы могут быть явными, неявными, смешанными. Их логику можно сформулировать так: на первом этапе вычисляем промежуточ-

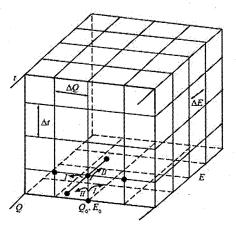


Рис. 5.7. К локально-одномерной схеме вычислений.

ное значение плотности вероятности, которое получилось бы, если ресурс (выпавшие осадки) «потреблялся» на интервале  $\Delta t$  только расходом; на втором этапе это значение  $p(Q, E_0)$  используется в качестве нового начального условия и вычисляется значение плотности вероятности, которое сформируется за счет действия уже двух «конкурентов» за ресурс: расхода и испарения (и т. д.).

Изложим схему еще раз на модельном, но наглядном

примере [44], который будет немного «огидрологичен». Примем, что в двумерном варианте модели (4.25) не действует оператор сноса, а коэффициент диффузии равен единице. Рассмотрим задачу Коши для оставшегося «огрызка»:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial Q^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial E^2}, \quad 0 < t \le T$$
 (5.5)

$$p(Q, E; 0) = \varphi(Q, E), \quad \infty < Q, E < \infty$$

 $[\phi(Q,E)$  – задана].

Обозначим  $\widetilde{A} p \equiv \frac{\partial^2 p}{\partial Q^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial E^2}$ . Пусть шаги интегрирования по Q и E одинаковы и равны h, а по  $t-\tau = \Delta t$ . Пусть также известно решение задачи (5.5) в момент  $t_l$ :  $p(Q, E; t_l)$ . Определим значение  $p^{l+1}$  через  $p^l$  и значение оператора  $\widetilde{A}$ .

Имеем:

#### <u> 5.1. Некоторые аспекты численной реализации моделей эволюции многообразий</u>

$$p\left(Q,E;t_{l+1}\right) = p\left(Q,E;t_{l}\right) + \frac{\tau}{1!} \frac{\partial p(Q,E;t_{l})}{\partial t} + 0\left(\tau^{2}\right) = \left(E_{0} + \tau \widetilde{A}\right)p(Q,E;t_{l}) + 0\left(\tau^{2}\right)$$

(здесь  $E_0$  — единичный оператор). Пусть  $\widetilde{A}_1 \equiv \partial^2/\partial Q^2$ ,  $\widetilde{A}_2 \equiv \partial^2/\partial E^2$ , тогда  $\widetilde{A} = \widetilde{A}_1 + \widetilde{A}_2$ .

Рассмотрим две вспомогательные задачи:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial Q^2}, \quad t_l < t \le t_{l+1}, \tag{5.6}$$

$$v(Q, E; t_1) = p(Q, E; t_1), -\infty < Q, E < \infty$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial^2 w}{\partial E^2}, \quad t_l < t \le t_{l+1}, \tag{5.7}$$

$$w(Q, E; t_l) = v(Q, E; t_{l+1}), -\infty < Q, E < \infty.$$

Найдем связь между  $p(Q, E; t_{l+1})$  и  $w(Q, E; t_{l+1})$ :

$$\begin{split} &\nu(Q,E;t_{l+1}) = \left(E_0 + \tau \, \widetilde{A}_1\right) \! p \, (Q,E;t_l) + 0 \! \left(\tau^2\right), \\ & w(Q,E;t_{l+1}) = \left(E_0 + \tau \, \widetilde{A}_2\right) \! w \, (Q,E;t_l) + 0 \! \left(\tau^2\right) = \\ & = \left(E_0 + \tau \, \widetilde{A}_2\right) \! \nu \, (Q,E;t_{l+1}) + 0 \! \left(\tau^2\right) = \left(E_0 + \tau \, \widetilde{A}_2\right) \! \left[\left(E_0 + \tau \, \widetilde{A}_1\right) \! p \, (Q,E;t_l) + 0 \! \left(\tau^2\right)\right] = \\ & = \left(E_0 + \tau \, \widetilde{A}\right) \! p \, (Q,E;t_l) + 0 \! \left(\tau^2\right) = p \, (Q,E;t_{l+1}) + 0 \! \left(\tau^2\right) \end{split}$$

Таким образом, последовательно решая одномерные задачи (5.6) и (5.7), получаем значение  $w(Q, E; t_{l+1})$ , отличающееся от  $p(Q, E; t_{l+1})$  на величину  $O(\tau^2)$ .

Существуют еще так называемые аддитивно-усредненные схемы покомпонентного расщепления, которые допускают параллельную организацию вычисления сеточных функций.

### 5.2. Элементы дарвиновской триады в современном программировании

Дарвиновская триада — наследственность, изменчивость (мутации), отбор — основа постнеодарвинизма. Об этих элементах триады упоминалось в п. 2.1 и п. 3.1 (подробнее *см.* [35, 54, 77]). Они лежат в основе описания процессов эволюции, а значит, и в основе частично инфинитного подхода к ее изучению.

Ниже будут проведены параллели между ключевыми понятиями частично инфинитного моделирования и парадигмами языка С++, который (на мой взгляд) лучше других языков программирования отражает дух эволюционных процессов. Изложение не будет носить систематического характера (это задача будущего), оно, скорее, выборочно-калейдоскопическое, причем ведущим элементом в этом параллелизме будет язык С++. Мы возьмем за основу несколько известных пособий по систематическому изучению этого языка [48, 49] и, «натыкаясь» на элементы, которые репрезентируются в частично инфинитном моделировании, будем комментировать «напрашивающиеся» параллели. Поэтому изложение будет не совсем уж калейдоскопическим, но и не совсем системным. Предполагается, что читатель знаком с синтаксисом языка С++.

Первое, на что мы наталкиваемся, — ветвление программы. Этот термин отражает одну из граней (см. [35]) обобщенного понятия нелинейности в частично инфинитном моделировании (в дальнейшем ЧИМ). Программы с ветвлением действуют не последовательно (строка за строкой, т. е. линейно), а нелинейным образом: «перескакивая» через несколько строчек в зависимости от условия A (см. рис. 5.8).

Этот перескок определяется значением логической переменной типа bool. У нее два значения: true и false. В строчке A что-то сравнивается с чем-то, и в зависимости от результата сравнения происходит переход на ту или иную траекторию, т. е. строчка A — это своеобразная точка квазибифуркации. Префикс «квази» указывает на то, что в этой точке происходит только выбор (обеспечение причинно-следственной связи с помощью логических операторов &&,  $\|$ , !) имеющейся информации, но не рождение новой. (Это можно сравнить с действиями «витязя» на перепутье: в первом случае имеется указатель пути, а во втором — предписаний нет, надо действовать интуитивно. Если интуиция не подвела — не встретил «соло-

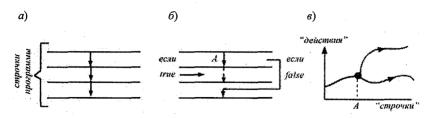


Рис. 5.8. Линейное (a) и нелинейное (б) выполнение программы. В точке A (б, в) выполняется операция сравнения, в зависимости от исхода которой определяется дальнейший ход событий.

вья-разбойника» и остался жив, — значит, появилась, неизвестно откуда, новая информация: рецепт выживания на данном участке дороги.)

Частным случаем ветвления (нелинейности) является цикл, когда точка квазибифуркации превращается в окружность. Изображающая точка «гуляет» по этой окружности и покидает ее, если выполняется то или иное условие (рис. 5.9).

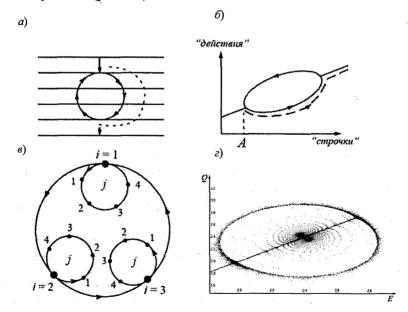


Рис. 5.9. Циклы (a, 6), вложенный цикл (a), цикл – двумерное автоколебание (a).

Необходимость повторения одних и тех же действий возникает, например, при рекурсиях и итерациях. Для вложенных циклов (рис. 5.9, 6) при каждой итерации внешнего цикла (по переменной i) внутренний цикл (по j) выполняется полностью. В ЧИМ ветвления могут носить самый экзотический характер. Например, если взаимодействуют две фазовые переменные и роль условия (A) для бифуркаций каждой из них играет численное значение другой переменной, то можно ожидать самые причудливые конфигурации в зависимости от типа взаимодействий между ними и от их селективных ценностей (см. [36]). На рис. 5.9, e в качестве примера приводится фазовый портрет, возникающий для системы двух нелинейных отображений, описывающих взаимодействие испарения и расхода воды по типу мутуализма при близких значениях их селективных ценностей (при их равенстве «картинка» разрушается; напомним, что каждая фазовая переменная играет роль управляющего параметра, условия A — для другой).

Язык С++ родился как «С с классами». Структурами (struct) обычно заканчивается описания языка С. Они предназначены для создания пользовательских типов данных путем объединения встроенных типов, например:

```
struct addr {
char name [50];
unsigned long int zip;
};
```

С переменными пользовательского типа struct addr можно что-то делать, но особенно не «разбежишься». Дело в том, что свои функции в структуре создавать нельзя. Надо пользоваться, например, библиотечными, а они работают не со структурой в целом, а с ее членами, т. е. со встроенными типами. Для того чтобы почувствовать смысл возникающего тупика, воспользуемся словом гермафродит (существо, наделенное признаками мужского и женского пола одновременно). В нем также объединены «разнотипные данные», но взаимодействия между ними невозможны. Структура и есть этот гермафродит, не способный сам себя оплодотворить (в природе, кстати, есть животные, меняющие свой пол, и есть самооплодотворяющие гермафродиты — почти готовые «классы»; среди растений последнее распространено наиболее широко).

Этот недостаток (отсутствие методов, или функций, в структурах) и устранил Бьерн Страуструп — создатель языка С++, расширив структуру до класса, что позволило более гибко манипулировать данными. Понятие класса имеет глубокую философскую нагрузку. Любая вещь обладает свойствами (данными) и методами манипулирования ими (функциями). Объявим, например, класс «Речной бассейн»:

Очевидно, что подобной записью декларируется некая концепция речного бассейна в качестве одного из пользовательских типов (причем с довольно специфической точки зрения, исключающей из рассмотрения все, что не учтено данными-членами k,  $\tau$  и  $\dot{X}$ ), но не конкретный бассейн какой-либо реки. «Переменную бассейн» (материального представителя концепции «класс») надо еще объявить:

## River\_b Neva;

Neva (т. е. конкретный бассейн р. Невы) называется объектом класса. Это аналог привычного нам понятия «переменная», но не совсем, так как в самом объекте могут быть свои (например, стандартные или объекты другого класса) «переменные». Как и в случае объявления обычных переменных, объект Neva надо не только объявить, но и инициализировать, т. е. «наградить» конкретными свойствами: численными значениями коэффициента стока, времени релаксации и осадков.

Очевидным репрезентом класса является понятие предметной области, определяемой в ЧИМ более или менее однозначно как финитная часть моделируемой реальности. Предметная область фиксируется вы-

деленным набором свойств (k,  $\tau$  и  $\dot{X}$  – в случае River\_b) и методами их взаимодействия (функцией model — математической моделью, включающей операции сложения, присвоения и т. д.).

Классы (как и предметные области) наделяются интерфейсом (способностью взаимодействовать с «внешней средой» - основным кодом программы), возможностью наследовать (аналог процесса расширения предметной области), мутировать и размножаться. Объекты ведут себя как люди: сами «рождаются» и «хоронят» себя после использования (внешней среде основной манипулирующей объектом, не надо «думать» как его создать и уничтожить, чтобы он не «разлагался», занимая оперативную память после своего применения; об этом позаботятся конструкторы и деструкторы класса). В этом «изюминка» объектно-ориентированного программмирования (ООП): вызывающая функция main () получает уже готовый объект (реализацию предметной области) и не обязана принимать участие в его создании. Это способствует формированию блочной структуры программ (образно – снижению степени своеобразной эмерджентности (зависимости) элементов программы друг от друга).

Под наследственностью в C++ понимается расширение базового (родительского) класса, наделение его дополнительными свойствами и методами. Между родителем  $(a_i)$  и наследником  $(a_{i+1})$  существует иерархическая соподчиненность (метафорически  $a_1 \subset a_2 \subset ... \subset a_i \subset a_{i+1} \subset ...$ , рис. 5.10). Если эту ситуацию перевести на язык ЧИМ, то она соответствует вложению онтологий O:  $O_1 \subset O_2 \subset O_3 \subset ... \subset O_n \subset ...$  [35]. В C++ «отталкиваются» не от абстрактного «первоначала», а от конкретного базового класса (на рис. 5.10, a им будет класс  $a_1$ ). Это «роднит» C++ с ЧИМ, в котором изначально имеют дело не с миром «вообще», а с конкретной предметной областью. Ситуацию проясняет рис. 5.10, a

Методы базового класса в производных классах могут быть переопределены (это так же, как и перегрузка функций, работает на полиморфизм, обеспечивающий механизм мутаций при наследовании), т. е. в них закладывается возможность действовать не строго по «генетической» программе базового класса, а в соответствии с изменением окружающей обстановки, в которой оказывается наследник (при этом сигнатура переопределяемого метода сохраняется).

Ситуация ocложняется, если в базовом классе имеются (переквазимутанты груженные методы), но наследник переопределил только некоторые из них (остальные в этом случае оказываются скрытыми). Это – ощутимый удар полиморфизму, а без него наследование во многом теряет свой смысл. А ведь наследование и полиморфизм (наряду инкапсуляцией,

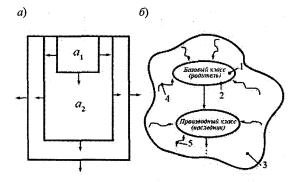


Рис. 5.10. Взаимодействие классов по типу наследования (a) и частично инфинитная «вульгаризация» этого процесса (б): 1 — финитная реальность — базовый класс, фиксирующий предметную область с определенными свойствами; 2 — частично инфинитная реальность («граница»); 3 — «мироздание» (инфинитная реальность); 4 — выделяемые первоначально свойства; 5 — новые свойства.

которую обеспечивают пользовательские типы — классы) и обеспечивают популярность C++.

Что же мы теряем? Полиморфизм — это когда функция с одним и тем же именем ведет себя по-разному в зависимости от конкретной ситуации, сложившейся при реализации кода программы: в одной ситуации делит, в другой — умножает (своеобразный хамелеон). Приведем «вульгарный» пример: «дядя Миша» дома примерный семьянин и любящий отец, а на улице — пьяница и дебошир. И это «закономерно», так как в соответствии с частично инфинитной философией сущность предметной области не в ней, а в окружении (в семье Миша «хороший», а на улице — «плохой»). Короче: свита делает короля. Таким образом, полиморфизм — это не выдумка Страуструпа, а «нормальная» жизненная ситуация, которая в С++ надежно обеспечена так называемыми виртуальными методами (virtual).

Ситуацию, хотя бы внешне, проясняет рис. 5.11. На нем представлены два класса: базовый Mammal (млекопитающие) и наследник Dog (собака). Причем в случае рис. 5.11, а методы базового класса объявлены обычным способом, а в случае рис. 5.11, б перед методом Speak () поставлено слово virtual. В вызывающей функции main () при вызове (по указателю, что важно) объекта класса Dog будет реализовы-

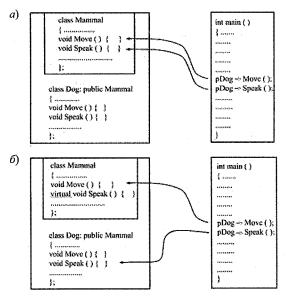


Рис. 5.11. К пояснению действия виртуальности.

ваться версия Speak (), присущая наследнику. Так как метод Move () не виртуальный, то вызывается вариант базового класса.

Что же стоит за волшебным словом «virtual»? Если этого слова нет, то компилятору «приказано» ориентироваться только на тип указателя pDog. А тип, что для базового класса, что для наследников, считается одним и тем же; компилятор эти тонкости не различает и всегда выполняет ту реализа-

цию функции, которая имеется в базовом классе.

Если же стоит слово virtual, то компилятору приказывается ориентироваться не только на тип, но и на содержание указателя, т. е. на конкретный адрес. А он разный для базового класса и производных классов (у каждого свой). Поэтому будет выполняться та реализация функции, которая соответствует смыслу программы («окружению»). Технически это реализуется с помощью так называемых таблиц виртуальных функций VPTR. Слово virtual заставляет компилятор «думать» не просто о типе указателя pDog, но и о том, в каком классе находится его адрес и выполнять функцию из этого класса. Адрес указателя может меняться в процессе выполнения самой программы, например в зависимости от того, какую кнопку нажмет пользователь (какой он выберет вариант действий, если встретится оператор ветвления).

Спрашивается, как компилятор может откомпилировать программу, ведь он не знает выбор пользователя заранее? Дело в том, что компилятор во время компиляции принимает решение о связывании указателя с нужной функцией уже в ходе выполнения программы. Отсюда терминология: раннее, или статическое, связывание (указателя

с выполняемой функцией) и позднее, или динамическое, их связывание. Примерно это соответствует следующей «картинке» в духе ЧИМ, см. рис. 5.12.

Конкретная цель определяется уже на траектории полета «ракеты» (когда прогноз уже «сделан»). Virtual — это при-

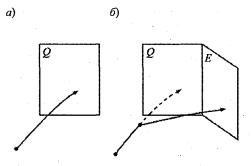


Рис. 5.12. Раннее (а) и позднее (б) связывание.

зыв быть бдительным и не лезть в базовый класс «class Q», если погоду делает испарение, а без его (испарения) учета ситуация неустойчива  $(\beta = G_{\widetilde{c}}/\overline{c} \to 2)$ . Само слово виртуальный означает видимый, но не существующий в реальности, т. е. не связанный на этапе компиляции (напоминает ситуацию с теневыми фазовыми переменными в ЧИМ). Конечно, за виртуальность надо платить. Эта «плата» связана с использованием дополнительных ресурсов памяти на поддержку таблицы VPTR, виртуальных деструкторов и т. д. Программа должна обладать элементами «саморефлексии» и сама себя контролировать: в каком окружении находится объект и как ему себя вести. На это уходят ресурсы из инфинитной (для кода) реальности, т. е. из оперативной памяти.

Еще одна параллель между С++ и ЧИМ связана с понятием «фрактальность». Массивы аттау[i] часто используются как контейнеры для создания базы данных. Фиксированность их размеров создает проблемы, которые пытаются преодолеть путем вставки дополнительных элементов в массив по ходу программы. Однако это требует выполнения большого числа операций, связанных с выделением и освобождением памяти, что плохо. Поэтому придумали еще один выход из ситуации, когда вместо одного жесткого контейнера (массива) формируют много маленьких контейнеров, способных через указатели поддерживать связь друг с другом (своеобразные бусы, гибко располагаемые в оперативной памяти, рис. 5.13 б, в). Кроме односвязного списка, показанного на рис. 5.13, б, существуют и более «изощренные», например, двусвязные или «деревья», причем под «данными» можно понимать «все что угодно», включая объекты пользовательских классов.

Обратимся к рис. 5.13, a. Чтобы ряды расходов «колебались», необходимы ресурсы из гидрометеорологической среды (инфинитной для речного бассейна), которые поступают на водосбор (зафиксированный как предметная область моделью ФПК) через частично инфинитные параметры  $G_{\widetilde{c}}$ ,  $\overline{c}$ ,  $G_{\widetilde{N}}$ ,  $G_{\widetilde{c}\widetilde{N}}$ ,  $\overline{N}$  («создаваемые» колебаниями температуры воздуха, испарения, осадков и т. д.). Причем наличие дробной размерности (второй и третий графики сверху на рис. 5.13, a) указывает на то, что система находится в динамике, в состоянии развития (а для этого ей нужны ресурсы окружающей среды; подробнее cm. [36]).

Верхний график на рис. 5.13, а соответствует (разумеется, метафорически) массиву («большому» контейнеру). Его фрактальная размерность равна топологической (=1). Это говорит о том, что он статичный объект, а попытка его расшевелить требует ресурсов памяти, которых может и не хватить по ходу дела.

Второй и третий графики «соответствуют» как раз связному списку, т. е. цепи (хотя это не совсем верно), звенья которой разбросаны по оперативной памяти (они не обязаны располагаться подряд).

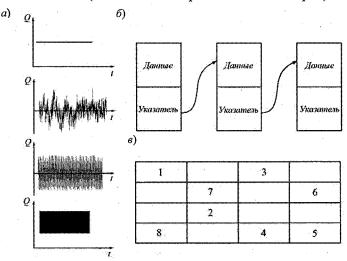


Рис. 5.13. Изменение фрактальной размерности ряда речного стока от 1 до 2 (a); односвязный список ( $\theta$ ) и неупорядочное размещение звеньев списка по оперативной памяти ( $\theta$ ); последний рисунок надо воспринимать метафорически, так как память компьютера «одномерна».

Таким образом, в формировании списка активно задействованы ресурсы самой «инфинитной среды», т. е. оперативной памяти, которая «выжигается» по ходу дела самой программой. Этим обеспечивается динамика списков. Ключевую роль в формировании списка играют указатели, т. е. «тайные тропы» к ячейкам оперативной памяти.

Однако это положительное свойство (эффективность использования памяти путем разбрасывания списка по всему свободному оперативному пространству, возможно, вплоть до формирования «понастоящему» фрактальных, самоподобных упаковочных образований) имеет оборотную сторону — недостаток: получить доступ к элементу списка можно, только перебрав все предыдущие элементы. Практически даже пыль Фату задается алгоритмом своего появления, а не готовой формулой, как в случае массива, к элементам которого можно иметь доступ, не перебирая остальные.

Еще один прием сближает C++ и ЧИМ. Предположим у нас есть два класса: класс Лошадь {...ржать, скакать...} и класс Птица {...летать...}. А нам нужен объект Пегас со свойствами лошади и птицы. Но скрещивать последних друг с другом в рамках одиночного наследования мы не умеем. Язык C++ «выкручивается» из подобной ситуации, создавая мутанта, у которого только один родитель (базовый класс). Снабжают класс Лошадь виртуальным свойством «летать» и передают это свойство по наследству Пегасу. Это называется переносом метода (свойства) вверх, причем «реализация» этого метода в базовом классе заключается в запрещении лошадям летать (а наследникам можно – они ведь мутанты).

Все это напоминает аналогичные действия в ЧИМе. Самая простая модель формирования стока (2.14) описывает одно свойство («метод») бассейна: выдавать на выходе расход воды. Если выполнить ее стохастическое обобщение, то придем к уравнению ФПК и кривым Пирсона. Если  $G_{\overline{c}} \approx \overline{c}$ , то теряется устойчивость по моментам и надо использовать дополнительные свойства речного бассейна, например его способность к испарению воды (E) и к накоплению (отдаче) воды в (из) почво-грунта  $\pm \Delta U$ .

Для того чтобы безболезненно проскочить неустойчивость («точку бифуркации»), а точнее — чтобы никакой неустойчивости не было вообще, в базовую модель («класс») надо заложить в потенции теневую фазовую переменную (-ые), которая будет использована в критический

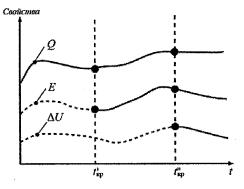


Рис. 5.14. Выход из «тени» потенциальных фазовых переменных в критические моменты  $t'_{\text{кр}}$  и  $t''_{\text{кр}}$ .

момент. Это означает, что модель (2.14) надо дополнить виртуальным уравнением типа  $\tau d\bar{c}/dt = f(Q,\bar{c})$  или (если теневое свойство известно)  $\tau dE/dt = f(Q,E)$ . Если статистическое описание водного режима бассейна с помощью моментов для одного из свойств (Q) изучаемой предметной области устойчиво, то  $\tau \to \infty$  и  $\bar{c}=$  const, что в основном и реализуется на практике.

Таким образом, бассейн изначально наделяется виртуальным свойством (до потери устойчивости моментами  $m_i$ ); потом это уже вполне реальное свойство, которое становится востребованным, если нужно устойчиво описывать ситуацию, т. е. обращаться к двумерному распределению p(Q, E) («Пегасу»), рис. 5.14.

И язык С++, и ЧИМ – инструменты процесса познания. Поэтому неминуемо должна быть общность механизмов, обеспечивающих этот процесс. В ЧИМ последний схематично (подробно см. [35]) можно представить следующим образом. Существуют онтологические основания единичного (уникального), особенного (специфического) и общего (связи между единичными объектами с помощью понятий). Субъект познания сталкивается с единичным объектом в предметной области. Любой единичный объект для своего описания требует бесконечного числа понятий (см. разд. 3), которыми естественно не обладает субъект. Однако, оперируя некоторыми «главными» понятиями (необходимыми для спецификации объекта), он либо идентифицирует его (сущность понятна) с эмпирической точки зрения, необходимой для «выживания», либо нет (непонятна его сущность). В последнем случае для выхода из «тупика» (рис. 5.15) подключается творческое воображение, генерирующее умозрительные понятия, которые дважды фильтруются, прежде чем некоторые из них сумеют (вместе с уже существующими понятиями) по-новому специфицировать объект.

Первый фильтр носит общий философский характер, отсекая заведомо неприемлемые (с точки зрения господствующего в данной социальной среде мировоззрения) идеи, например «нечистая сила». Новые идеи сравниваются (свертываются) с мировоззренческими шаблонами («аттракторами» господствующей культуры). Если эта свертка оказалась устойчивой в каком-то смысле, то ее можно назвать гипотезой, которая, пройдя эмпирическую проверку (второй фильтр), становится теорией (небольшим набором специфических понятий, которых достаточно для «выживания» в расширенной предметной области).

Таким образом, только совмещение двух ветвей на рис. 5.15 (эмпирической и умозрительной) в замкнутую цепь с обратной связью (следовательно, появление нелинейности) обеспечивает синтез единичного, особенного и общего, адекватно отражающих объективные свойства материального мира. Этой замкнутой цепью задается общая концепция естественно-научного творчества, которая неизбежно должна присутствовать (хотя бы какой-то своей проекцией) и в С++, также претендующего на правильное отражение реальности.

И проекция действительно существует. Атрибут единичности в программе — это уникальность каждого объекта (даже одного и того же класса). Но если бы программная реальность была просто совокупностью неповторимых объектов, то это бы противоречило онтологическому принципу всеобщей связи, т. е. компанованности программы,

которая оказалась просто бы недееспособной. Поэтому свойство объектов классов вступать в является «связи» атрибутом категории общее. Классы и шаблоны моделипредметные руют области – категория особенное. Есть даже «семантические» фильтры, обеспечивающие отбор нужного мутанта за счет



Рис. 5.15. К пониманию места, которое занимают явление и сущность в процессе познания:

1 — онтологические предметные области (фиксированная и расширенная); 2 — «предметная область» в гносеологическом и методологическом смыслах (т. е. это совокупность явлений, отражающих объекты и сгруппированных при помощи эмпирических понятий, отражающих наблюдаемые связи между объектами); 3 — селективный фильтр.

полиморфизма. Нет самого главного (и быть не может при замкнутой логике, присущей С++): алгоритмического формирования умозрительных понятий. В рациональной программе (а какой еще ей быть?..) нет иррационального сплавленного шаблона [35]. Есть шаблоны рациональные (см. первый контур обратной связи ОС<sub>1</sub> на рис. 3.1? с. 47). Программа пишется «на плоскости, пересекающей крону дерева», но в роли «дерева» выступает сам программист, который формирует квазимутантов и организует их квазиотбор. Это обстоятельство делает параллели между языком С++ и частично инфинитным моделированием лишь «частично обоснованными». Но и это не мало – финитная часть частично инфинитной модели, теряющей устойчивость, все равно до этой потери должна программироваться алгоритмически. (Тем более, если обратиться к первоисточнику языка С++ [81], см. также [41], то вопросы изменчивости носят совершенно фундаментальный характер.)

И последнее. Мы определили (см. п. 3.1) частично инфинитное моделирование как гносеологический переход из возможности в действительность. В определенном смысле такая возможность заложена в так называемых абстрактных классах языка С++. Это некая нереализуемая (в качестве объекта подобного класса) действительность, так же как, например, нельзя «в лоб» реализовать понятие «форма». Возможность формы реализуется в наследниках абстрактного класса (окружность, прямоугольник и т. п.). Чисто виртуальные функции абстрактных классов не могут взаимодействовать с окружением, так как их реализации имеют только наследники, объекты которых обладают методами взаимодействия с окружением. Но снова же: возможности в абстрактный класс закладывает программист, т. е. субъект, пользуясь освоенной им действительностью.

### 5.3. Пример выхода из гносеологического «тупика»

В качестве примера, на котором можно проиллюстрировать возникновение и ликвидацию гносеологических «тупиков», рассмотрим процесс формирования многолетнего стока и его описание в динамике моделью ФПК, а в статике уравнением Пирсона:

$$\frac{dp(Q)}{dQ} = \frac{Q - a}{b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2} p(Q). \tag{5.8}$$

Коэффициенты уравнения (5.8) можно определить не только формально с помощью моментов [80], но и (как указывалось в п. 4.2) исходя из генезиса формирования стока, т. е. опираясь на физикостатистические свойства бассейна и внешних воздействий:

$$a = \left(G_{\widetilde{c}N} + 2\overline{N}\right) / \left(2\overline{c} + G_{\widetilde{c}}\right) \sim \mu_3 \left(\mu_4 + 3\mu_2^2\right) / A; \tag{5.9}$$

$$b_0 = -G_{\widetilde{N}} / (2\overline{c} + G_{\widetilde{c}}) \sim \mu_2 \left( 4\mu_2 \mu_4 - 3\mu_3^2 \right) / A; \tag{5.10}$$

$$b_1 = -G_{\widetilde{c}\widetilde{N}} / (2\overline{c} + G_{\widetilde{c}}) \sim \mu_3 \left(\mu_4 + 3\mu_2^2\right) / A; \tag{5.11}$$

$$b_2 = -G_{\tilde{c}}/(2\bar{c} + G_{\tilde{c}}) \sim -(\mu_2 (2\mu_2 \mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3)/A), \tag{5.12}$$

где  $A = 10\mu_4\mu_2 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2$  (значок соответствия поставлен, так как выражения для параметров уравнения Пирсона через центральные моменты  $\mu_2$ ,  $\mu_3$ ,  $\mu_4$  справедливы для центрированного распределения  $(m_1 = 0)$ ).

В зависимости от численных значений параметров  $\beta_1=\mu_3^2\mu_2^{-3}$  ,  $\beta_2=\mu_4\mu_2^{-2}$  (они определяются коэффициентами асимметрии

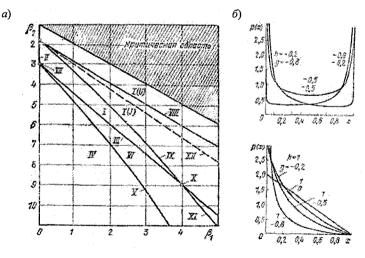


Рис. 5.16. Диаграмма различных распределений семейства кривых Пирсона (a) и примеры бета-распределений, входящих в это семейство (б) (детали обозначений см. [84]).

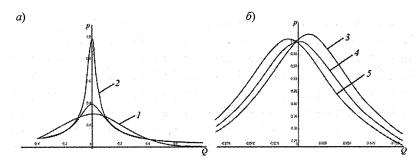


Рис. 5.17. Влияние генетических параметров на форму распределения p(Q) при  $\overline{N}=0$ :  $G_{\widetilde{c}_2} < G_{\widetilde{c}_1}$ ,  $G_{\widetilde{c}_{\widetilde{N}_1}} = 0$ ;  $G_{\widetilde{c}_{\widetilde{N}_3}} > 0$ ,  $G_{\widetilde{c}_{\widetilde{N}_4}} = 0$ ,  $G_{\widetilde{c}_{\widetilde{N}_5}} < 0$  (цифры в обозначениях интенсивности шумов соответствуют цифрам на рис. a и  $\delta$ ).

и эксцесса) различают 12 типов распределений (*см.* диаграмму на рис. 5.16, *a*). Как правило, это одномодальные асимметричные распределения, но встречаются и довольно экзотические для гидрологии (рис. 5.16,  $\delta$ ).

Лица, занимающиеся «гидрологическими расчетами», привыкли связывать форму распределения с моментами (начальными или центральными), но, воспользовавшись формулами (5.9) - (5.12), можно наглядно показать влияние физико-статистических (генетических, по существу) параметров на эти зависимости (рис. 5.17).

В частности, из рис. 5.17 и следует утолщение «хвоста» распределения по мере роста интенсивности шума  $G_{\widetilde{c}}$ , приводящего к неустойчивости. Развитие последней в динамике можно довольно красочно показать, если в систему (2.33) ввести периодические составляющие во внешнее воздействие и дополнить ее дифференциальными уравнениями для  $\overline{c}$  и  $G_{\widetilde{c}}$  (сделать их квазифазовыми переменными):

$$dm_{1}/dt = -(\bar{c} - 0.5G_{\tilde{c}})m_{1} - 0.5G_{\tilde{c}\tilde{N}} + (a + b\sin(wt));$$

$$dm_{2}/dt = -2(\bar{c} - G_{\tilde{c}})m_{2} + 2(a + b\sin(wt))m_{1} - 3G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_{1} + G_{\tilde{N}};$$

$$dm_{3}/dt = -3(\bar{c} - 1.5G_{\tilde{c}})m_{3} + 3(a + b\sin(wt))m_{2} - 7.5G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_{2} + 3G_{\tilde{N}}m_{1};$$

$$dm_{4}/dt = -4(\bar{c} - 2G_{\tilde{c}})m_{4} + 4(a + b\sin(wt))m_{3} - 14G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_{3} + 6G_{\tilde{N}}m_{2};$$

$$d\bar{c}/dt = -\bar{c} + (a_{1} + b_{1}\sin(w_{1}t));$$

$$dG_{\tilde{c}}/dt = -G_{\tilde{c}} + (a_{2} + b_{2}\sin(w_{2}t)).$$
(5.13)

На рис. 5.18 представлена развертка двумерной проекции решения системы (5.13), иллюстрирующая возникновение неустойчивости по четвертому моменту.

В данном случае, котя мы пытаемся моделировать эволюцию вероятностных моментов, система уравнений (5.13) является динамической (строго детерминистической), и процесс можно «прокручивать» в обе стороны: как на распад (упрощение) кривой плотности вероятности, так и на ее «конструирование» (усложнение). Какой из этих механизмов будет реализовываться, зависит от знака дивергенции div  $m_i = \sum\limits_{i=1}^4 dm_i/dm_i$ , т. е. от того, «кто кого сжимает»: инфинитная реальность (испарительная) финитную предметную область (зафиксированную системой из 4-х дифференциальных уравнений для моментов) или стоковое финитное ядро начинает давить на эту инфинитную реальность.

Зависимость степени сжимаемости распределения плотности вероятности от числа аппроксимирующих ее моментов представлена на рис. 5.19. На этом же рисунке представлена зависимость

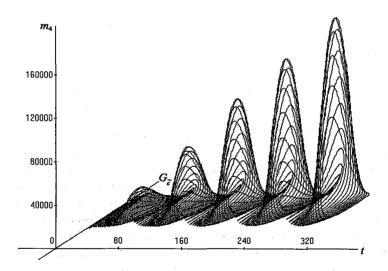


Рис. 5.18. Рост четвертого момента при критических значениях параметра  $\beta = G_{\widetilde{c}} \ / \ \overline{c}$  .

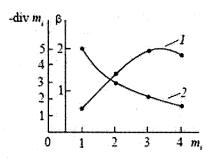


Рис. 5.19. Влияние числа аппроксимирующих моментов на степень сжимаемости (1) и устойчивости (2).

Кривая I построена для  $\overline{c}=2,\ G_{\widetilde{c}}=1$  .

 $\beta = G_{\widetilde{C}}/\overline{c} = f(m_i)$ . В данной ситуации критерий  $\beta$  имеет, повидимому, немного другой смысл, чем в ранее рассмотренных случаях. Он вытекает из условия смены знака у  $\operatorname{div} m_i$ . У «системы», состоящей из одного уравнения для первого момента  $\left[\operatorname{div} m_1 = -0.5(2\overline{c} - G_{\widetilde{c}})\right]$ , устойчивость теряется, как и обычно, при  $\beta_{m_1} = 2$ . Для нормального распределения  $\left(\operatorname{div} m_2 = -2.5\left(1.2\overline{c} - G_{\widetilde{c}}\right)\right)$  – при  $\beta_{m_2} = 1.2$ . Для системы из 3-

х моментов (div  $m_3=-7\left((6/7)\overline{c}-G_{\widetilde{c}}\right)$ ) — при  $\beta_{m_3}=0.85$ , а для 4-х учитываемых моментов (div  $m_4=\left(-15\left(10/15\right)\overline{c}-G_{\widetilde{c}}\right)$ ) — при  $\beta_{m_4}=0.66$ . (Обозначения div  $m_i$  и  $\beta_{m_i}$  надо понимать в том смысле, что значения дивергенции и критерия устойчивости вычисляются для системы, состоящей из  $1,\ldots,i$  моментов.)

Полученные цифры вызывают вопросы. Например, если рассматривать одно уравнение для второго момента, то устойчивость теряется при β=1. Если же рассматривать систему из уравнений для первого и второго моментов и определять критерий  $\beta_{m_2}$  по смене знака у дивергенции div  $m_2$ , то получается, что  $\beta_{m_2} = 1,2$ , т. е. систему развалить трудней, чем каждый момент в отдельности. Исходя из идеологии частично инфинитного моделирвоания, вроде бы так и должно быть, но ведь и система (5.13) является линейной и «развязанной» по моментам (правда, развязана только для младших по отношению к старшим), и моменты все-таки не являются в прямом смысле фазовыми перемен-Также требует осмысления экстремум зависимости  $\operatorname{div} m_i = f(m_i)$ . Получается, что 3-моментное распределение обладает какими-то особенностями по сравнению с 2- и 4-моментными (по крайней мере, в отношении сжимаемости). Что стоит за этим: глубокая физика или издержки модели?

Система (в нашем случае – распределение плотности вероятности расходов воды) будет развиваться (увеличивать число устойчивых моментов) за счет уменьшения  $\beta_{m_i} = G_{\widetilde{c}}/\overline{c}$ , т. е. за счет подавления активности инфинитного окружения. В роли последнего выступает прямой конкурент расхода – испарение, а также более сложно ведущая себя переменная  $\Delta U$  (изменение запаса воды в почво-грунтах). Но если этот «конкурент» еще не ожил (представлен в финитной части модели просто константами), то для расхода это действительно просто внешняя среда (наряду с  $\dot{X}$  и  $\Delta U$ ). Получается, что чем меньше интенсивность вариаций испарения (для данного конкретного бассейна), тем более «изощренным» (сложным) может быть распределение p(Q). При  $\operatorname{div} m_i < 0$  объект (распределение) «питается» средой (осадками), но не «жиреет», так как его скрытый конкурент (испарение) через соотношение  $G_{\widetilde{c}}/\bar{c}$  тормозит рост моментов. Если  $G_{\widetilde{c}} \approx \bar{c}$  , то div  $m_i > 0$  и объект начинает сжимать гидрометеорологическую среду (точнее - она становится «податливой»).

Ниже представлены результаты работы программы, численно реализующей подобную модель «развития и гибели» распределения p(Q) на уровне 4-х моментов. При  $m_i \to \infty$  («гибель» момента  $m_i$ ) происходит переполнение оперативной памяти, и избежать «останова» можно с помощью исключения try  $\{\text{throw...}\}$  catch (...)  $\{...\}$ , отбросив i-й момент из системы (5.13), как ящерица отбрасывает пораненный хвост (упростив при этом распределение p(Q)). В случае снижения численных значений параметра  $\beta$  ситуация обратная: отброшенные «хвосты» должны подключаться и усложнять кривую плотности вероятности.

На рис. 5.20, a представлена динамика подобного процесса. Как следует из рис. 5.20, b, значения параметра  $\beta = G_{\widetilde{c}}/\overline{c}$ , характеризующего влияние на распределение p(Q) внешней среды, изменялось примерно от 0,318 до 0,775. Этого диапазона вполне достаточно для неустойчивости, по крайней мере, 4-го момента. Если взять частоту изменения величины  $\overline{c}$  достаточно большой, а шаги численного интегрирования системы (5.13) малыми, то неустойчивость не успевает привести к «останову» вычислительного процесса. Моменты не «гибнут» и не «рождаются», но периодически меняют свой «вес» и тип распределения в соответствии с диаграммой на рис. 5.16, a.

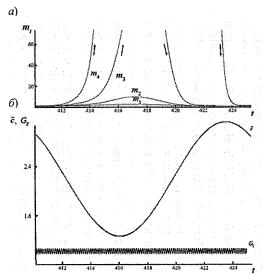


Рис. 5.20. Динамика «гибели» и «рождения» моментов распределения (*a*) под влиянием внешней среды (*б*).

Данный процесс можно сделать «саморегулирующимся», если связать величину  $\bar{c}$  (или  $G_{\tilde{c}}$ ) с одним (или несколькими) мо $d\overline{c}/dt = f(\overline{c}, m_i)$ ментами таким образом, чтобы при  $m_i \to \infty$  параметр  $\beta$  стремился к нулю или просто к достаточно малой величине и процесс возвращался в исходное устойчивое состояние. Подобная процедура вводит В систему (5.13) нелинейность, так как произведение  $\overline{c}m_i$ уже взаимодействие фазопеременных, зависявых щих друг от друга. Возь-

мем, например, вместо пятого уравнения системы (5.13) его модификацию  $d\bar{c}/dt = -\bar{c} + a_3 m_4 + a_2 + b_2 \sin(w_2 t)$ , которая приводит при увеличении  $m_{4}$  к увеличению  $\bar{c}$  , а значит – к уменьшению  $\beta$  . Две предметные области, представленные в модели (5.13) (четыре первые уравнения) параметром  $\bar{c}$  и моментами  $m_i$ , изначально не являются полностью инфинитными друг другу. Но их взаимодействия очень не равноправны: стоковая - представлена четырьмя начальными моментами, которым «разрешается» меняться, а испарительная – константами  $\bar{c}$  и  $G_{\widetilde{c}}$ . Добавив два дифференциальных уравнения для  $\overline{c}$  и  $G_{\widetilde{c}}$ , мы «разрешили» испарительной области «грубо» управлять стоковой, не спрашивая ее, нравится ей это или нет. Использовав же зависимость  $d\bar{c}/dt = f(\bar{c}, m_i)$ , мы ввели обратную связь, сделали эти области хоть чуточку равноправными. Это приводит к тому, что появилась достаточно устойчивая «семья», в которой могут быть «ссоры» (т. е. возникать тенденции к неустойчивости, см. рис. 5.21, а), но за счет соответствующей реакции со стороны фазовой переменной  $\bar{c}$  (см. рис. 5.21, б) возникает аттрактор с доста- а) точно большой областью притяжения (см. рис. 5.21, в). На языке «инерциальных систем отсчета» это означает, что за счет обратной связи мы получим возможность «гасить» резкие неоднородности, возникающие при «движении», за счет «амортизатора».

Конечно, придумать наглядную ситуацию влияния  $m_4$  (а значит, эксцесса) на  $\bar{c}$ (т. е. на «потери» через испарение) довольно затруднительно. Однако это можно сделать для первого момента, например, следующим обрафиксированной 30M. При норме осадков стремление  $m_1$ к «бесконечности» означает, что  $E \approx \dot{X} - Q \rightarrow 0$ . Очевидно, что для малых значений испарения и величина будет уменьшаться (вариации коэффициента стока, «потерь», создаются в основном внутригодовыми вариа-

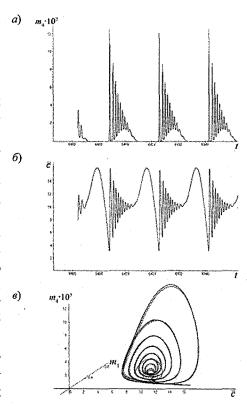


Рис. 5.21. Зависимости  $m_4 = f(t)$  (a),  $\ddot{c} = f(t)$  (б) и трехмерная проекция шестимерного аттрактора, соответствующего системе (5.13), если в нее ввести обратную связь.

циями испарения). Поэтому в целом будет уменьшаться и значение  $\beta$ , т. е. повышаться устойчивость моментов распределения плотности вероятности расходов воды. В определенной степени эти умозрительные рассуждения подтверждаются устойчивостью моментов в зоне достаточного увлажнения (см. [34]).

#### Заключение

В научно-технической литературе можно прочитать, что любая научная задача сводится (в конечном итоге) к проблеме искусственного интеллекта. Если эту мысль сформулировать в терминах данной монографии, то получается, что проблема выхода из любого научного тупика, решаемая обычно «умозрением» субъекта познания (в широком смысле слова под субъектом познания понимается социальная среда), может быть решена неким искусственным мозгом. Но социальная среда — это не просто интеллект (программный уровень), а иерархия подложек со своими эмоциями, не алгоритмизируемыми действиями и часто с непонятной для интеллекта мотивацией поступков. Поэтому если такой «искусственный» мозг и возможен, то прорастать он должен на человечестве, как на подложке.

Чисто алгоритмически сплавить единичное, особенное и общее в некий иррациональный шаблон для формирования нового понятия, способного преодолеть два фильтра на нижней умозрительной ветви (см. рис. 5.15), никому еще не удалось, но проимитировать процесс появления нового понятия, способного вместе со старыми понятиями замкнуть познавательную ветвь слева на рис. 5.15 (объяснить новое единичное), можно.

Обратимся к п. 5.3, где мы, «развлекаясь», проскакивали через различные типы кривых плотности вероятности, определяемых системой уравнений для моментов (5.13). Чем более сложный тип [ p(Q) — единичное], тем больше понятий (общее) надо привлекать для его описания. Например, асимметричное распределение порождается, если  $G_{\widetilde{c}\widetilde{N}} \neq 0$  (нормальному распределению этот параметр не требуется, т. е. с ним можно работать без знания коэффициента асимметрии, а значит, и без понятия взаимной интенсивности шумов  $G_{\widetilde{c}\widetilde{N}}$ ). Система уравнений (5.13) получена дедуктивным путем из уравнения ФПК. Давайте сымитируем индуктивный путь зарождения новых понятий, а значит, и этой системы уравнений. Рассмотрим первые два:

$$dm_1/dt = (\overline{c} - 0.5G_{\widetilde{c}})m_1 - 0.5G_{\widetilde{c}\widetilde{N}} + \overline{N}; \qquad (13)$$

$$dm_2 / dt = -2(\bar{c} - G_{\tilde{c}})m_2 - 2\bar{N}m_1 - 3G_{\tilde{c}\tilde{N}}m_1 + G_{\tilde{N}}.$$
 (23)

Считаем, что субъект познания (гидролог) имеет довольно богатый начальный тезаурус. Он знает, что такое вход и выход для речного бассейна, что такое плотность вероятности, интенсивность внешнего шума  $G_{\widetilde{N}}$  и ее связь с дисперсией осадков (и еще много чего). Не знает он системы записанных выше уравнений для моментов, не имеет понятия о «внутренних» шумах  $\widetilde{c}$ , об их интенсивности  $G_{\widetilde{c}\widetilde{N}}$  и о многом другом (для него — это «инфракрасные сущности», которых он не замечает).

В стартовой позиции бассейн для него — почти черный ящик. Пусть «исследователь» имеет два варианта обучающих выборок Q(t) и N(t), т. е. ряды расходов и осадков (рис. 13). Сопоставив  $\overline{N}$  с  $m_1$  и зная (из имеющегося у него тезауруса), что  $\mu_2 = D = m_2 - m_1^2$ , он напишет (для первой обучающей выборки):

$$dm_1 / dt = -am_1 + \overline{N}; (33)$$

$$dm_2 / dt = -b(m_2 - m_1^2) + G_{\widetilde{N}}.$$
 (43)

Это, конечно, не уравнения (13), (23), но вполне работоспособная, а главное индентифицируемая («обучаемая») по параметрам a и b система (причем для стационарной обучающей выборки 1 из рис. 1з имеет место  $dm_1/dt=0$ , i=1,2). У гидролога не возникло «тупика», требующего введения нового понятия  $G_{\tilde{c}}$ . Эта интенсивность «внутреннего» шума находится «в тени» коэффициентов a и b.

Ситуация радикально меняется для обучающей выборки 2. Дисперсия (и начальный момент  $m_2$ ) может не иметь устойчивого значения на продолжительном интервале времени  $(dm_2/dt>0)$ , если b<0 (или, по крайней мере,  $b\approx 0$ ; другого пути нет, так как  $m_2>m_1^2$ , а  $G_{\widetilde{N}}>0$ ). Значение b может быть знакопеременным, но при любых обстоятельствах должно быть стабильное отрицательное ядро  $-b_0$ 

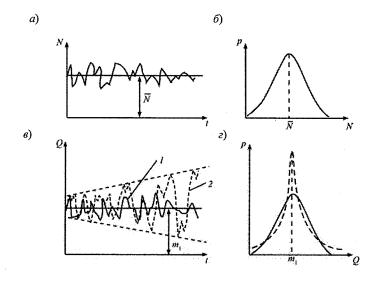


Рис. 13. Обучающие выборки осадков  $(a, \delta)$  и расходов  $(s, \epsilon)$  для устойчивого (1) и неустойчивого по дисперсии (2) случайных процессов.

(в (2з) это  $\overline{c}$ ), иначе предыдущий вариант обучения не сработает. Однако для некоторых случаев это ядро «забивается» положительной составляющей (в (2з) это  $G_{\widetilde{c}}$ ).

Как дальше должен рассуждать «источник умозрения» (гидролог)? Он, видимо, обратит внимание на то, что a и b имеют одинаковую размерность (значит, одинаковый физический смысл), а также на то обстоятельство, что  $a \approx 1/k$ , где k — коэффициент стока, входящий в тезаурус гидролога. Последний (k) связан с «потерями» воды (например, за счет испарения), а они имеют внутригодовые колебания с определенной интенсивностью.

Так (видимо) формируется новое понятие  $G_{\widetilde{c}}$ . Его введение позволяет объяснить неустойчивость моментов и принять меры для «опускания хвоста» у распределения p(Q) на рис. 13, точнее у распределения p(Q,E) расширенного фазового пространства за счет явного учета испарения E.

Конечно, если в обучающих выборках есть только непродолжительные тренды по четырем моментам ( $\beta = G_{\tilde{c}}/\bar{c} < 0.5$ ), то весь процесс обучения напоминает классические нейронные сети с изменяющимися коэффициентами. Тогда не будет необходимости «умозреть» новые понятия и все сведется к уточнениям коэффициентов. Чему-то новому бассейн может «научить» только гидрометеорологическая среда с вариациями «давления» на режим стока от  $\beta \to 0$  до  $\beta \to 2$ . Рождение очередного уравнения в системе (5.13) (как и его гибель) дает новое знание для того, кто его понимает (обладает определенным тезаурусом; что вся эта книга для того, кто за 30 лет преподавания «гидрорасчетов» так и не узнал размерность плотности вероятности расхода воды... «как-то не задумывался»?). Именно внешняя (гидрометеорологическая) среда «решает», сколько моментов (так и хочется сказать нейронов) будут представлять данный бассейн (вероятностный режим его стока) во внешнем мире (например, в «записке» по гидрологическому обеспечению проекта мостового перехода). Глупо навязывать внешнему миру момент  $m_1$ , если  $\beta = 0.9$  (что такое третий начальный момент при таком значении в бассейн «не понимает», как не понимает червяк, не имеющий глаз, что такое синий цвет).

«Разность потенциалов» —  $n(\overline{c}-nG_{\overline{c}}/2)$  и создает, и уничтожает архитектуру распределения плотности вероятностей (моментов). Это та «тележка» (неинерциальная система отсчета), которая трясет распределение в зависимости от степени увлажненности региона. Чем меньше эта разность, тем «проще» надо смотреть на вероятностный режим стока, вплоть до оперирования только математическим ожиданием, если  $\beta>1$ . Это, конечно, не может устроить проектировщиков, которым нужны «обеспеченные значения расходов». Частично инфинитная гидрология и создана, чтобы им помочь путем (как выражается С. П. Расторгуев [65]) «корректировки окружающей среды с целью запретить внешней среде задавать опасные для порядка вопросы». Каким образом? Включив ее части (E, например) в состав системы (5.13).

Если мы сами (своим интеллектом) собираемся обеспечивать это включение, то «искусственный интеллект» нам не нужен. Если же мы хотим этот процесс «автоматизировать», то тогда весь блок мутагенеза на рис. 3.1, a надо представлять уравнениями многослойной нейросети и заниматься ее обучением, привлекая сеть Интернет. Фантазий (и не

только) на этот счет достаточно [7, 62, 82, 85]. Интерпретируя нейрограммы как многомерные эволюционирующие многообразия, действительно можно найти много параллелей с творческими озарениями, формирующими новые понятия (рациональные шаблоны второго блока на рис. 3.1, а). Но окружающая нас реальность все равно богаче любой нейросети (ее обучение, кстати, это не только рационализация, но и формирование ограничений) и для «искусственного интеллекта» мир остается в основном такой же инфракрасной сущностью, как и для нашего («не искусственного»).

#### Приложения

#### 1. Как практически можно «опустить хвост» у неустойчивого распределения

Попробуем на модельном примере нормального распределения для створа, находящегося в зоне неустойчивости (например, в Западной Африке, см. рис. 2.12,  $\delta$ ), научиться однозначно задавать нормируемые расходы воды требуемой обеспеченности. Предположим, что есть «измерительный» ряд среднегодовых расходов воды и сгенерированный по методике [37], основанной на зависимости испарения от температуры воздуха и влажности или просто по разности  $\dot{X} - Q$ , ряд среднегодовых испарений. Вычислить однозначно второй начальный момент (а значит, и дисперсию) для расхода мы не можем, как и использовать его для получения кривой обеспеченности для определения (например)  $Q_{1\%}$ , так как створ (бассейн) находится в зоне неустойчивости по дисперсии. Если бы мы этого не знали, то по ряду расходов вычислили бы  $m_1$  и среднее квадратическое отклонение  $\sigma_Q$ . Затем, использовав формулу  $p(Q) = (\exp{(-(Q-m_{\rm l})^2)}/2\sigma_{O}^2)/\sqrt{\sigma_{O}^2 2\pi}$  , построили бы кривую плотности вероятности, а затем - кривую обеспеченности. По ней нашли бы  $Q_{1\%}$ , оставаясь в детском неведении, что за найденным числом не стоит никакая устойчивая реальность.

Привлекая ряд испарения, мы получаем эллипс рассеяния (рис. 1), использовав который можно, найти двумерное нормальное распределение:

$$p(Q,E) = \frac{1}{2\pi\sigma_Q\sigma_E\sqrt{1-r^2}}e^{\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(Q-\overline{Q})^2 \ 2r(Q-\overline{Q})(E-\overline{E})}{\sigma_Q^2 \ \sigma_Q\sigma_E \ \sigma_E^2},\frac{(E-\overline{E})^2}{\sigma_E^2}\right]}, \quad (1)$$

где r — коэффициент корреляции между Q и E. (Забудем временно о ненадежности  $\sigma_Q$ .)

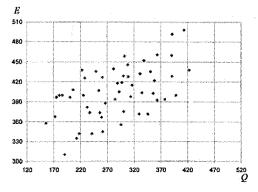


Рис. 1. Эллипс рассеяния.

Использование pacпределения (1) открывает определенные перспективы, но и создает проблемы. Например, что такое двумерная обеспеченность? Кому вообще в проектной практике нужно испарение какой-то обеспеченности (да еще совместно с расходом)? Поэтому естественно возникает желание использовать подобное расширение

для построения «обычной» кривой p(Q), но с устойчивой дисперсией (прижатым «хвостом»).

Хорошо известно [43, 68], что наличие корреляции между двумя переменными уменьшает среднеквадратическое отклонение исходного ряда:  $\sigma_{O(E)} = \sigma_O \sqrt{1-r^2}$ , что естественно приводит к опусканию «хвоста» (рис. 2). Однако у такого условного распределения естественно меняется и центр распределения (в зависимости от «условия», т. е. значения E):

$$p(Q/E) = \frac{1}{\sigma_Q \sqrt{2\pi(1-r^2)}} e^{-\frac{1}{2\sigma_Q^2(1-r^2)}(Q-\overline{Q}-\frac{r\sigma_Q}{\sigma_E}(E-\overline{E}))^2}$$

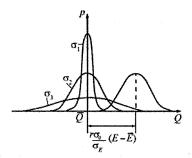


Рис. 2. Влияние среднеквадратического отклонения на «хвосты» распределения  $(\sigma_3 > \sigma_2 > \sigma_1).$ 

(см. рис. 2).

Если строить условное распределение для расхода относительно  $\overline{E}$ , то получим просто прижатый «хвост», но как установить обеспеченное значение  $Q_{P\%}$ ? Ведь оно будет явно занижено по сравнению с расходом  $Q_{P}$ %, полученным по безусловному распределению.

Видимо, рассуждать надо так. Неустойчивость (например, по дисперсии) означает, что изучаемая предметная область (в нашем случае речной бассейн в части отражаемой его моделью) слабо зафиксирован и в «нем» есть «дырки», через которые «уходит вероятность». Это следствие того, что мы сложную гидрометеорологическую систему, режим которой определяется и осадками, и температурой, и испарением, и почво-грунтами, и уклоном водосбора, решили изучать с помощью только одного ряда расходов. Это привело к тому, что в последнем появилась тенденция к распаду статистической совокупности расходов. «Термостат» [модель бассейна в виде одномерного распределения p(Q)] оказался недостаточным. Укрепим его еще одной «обшивкой» и введем в рассмотрение наряду с расходом еще и испарение. Вопрос об «условии» (толщине обшивки)  $E_{P\%}$  — это вопрос соглашения: насколько рас-

пределение надо смещать вправо (
$$Q_E = \overline{Q} + \frac{r\sigma_Q}{\sigma_E} (E_{P\%} - \overline{E})$$
), чтобы

обеспечить надежность проектируемых сооружений и, вместе с тем, не очень тратиться и не сильно менять без нужды существующие оценки  $Q_{P\%}$ . У нового распределения «хвост» спадает быстрее, чем у исходного, безусловного (разумеется, если  $r_{OE} \neq 0$  и ранг матрицы моментов

онная, но не жесткая однозначная зависимость; здесь центральные моменты определяются выражением  $\mu_{ik} = M[(Q - \overline{Q})^i (E - \overline{E})^k]$ ).

Таким образом, учет второй фазовой переменной (E) позволяет прижать и одномерный «хвост», но условного распределения  $p(Q/E_{P\%})$ . Учитывая, что процент обеспеченности P% для распределений модулей величин Q, E и  $\dot{X}$  более или менее совпадает (что вполне вероятно, так как и Q и E находятся под «колпаком» у  $\dot{X}$ ; иначе откуда бы взялась корреляция между ними), нормировку лучше проводить так: нормативно задавать внешнее воздействие на бассейн  $\dot{X}_{P\%}$  (например, P=10%), а дальше подключать условное распределение  $p(Q/E_{10\%})$  и нормативно задавать P уже для Q. Тем самым мы часть внутренних проблем бассейна перекладываем на более общую климатическую систему, формирующую гидрометеорологический режим на Земле.

Какими при этом могут получаться значения  $Q_{P\%}$  по сравнению с расчетами по существующим нормативным документам мы сейчас не обсуждаем, так как цель – уйти от неопределенности, если мы оказываемся в зоне неустойчивости по второму начальному моменту. И вот тут самое время «вспомнить» о том, что используемая величина  $\sigma_{O}$  «ненадежна», см. пояснения к формуле (1). Возникает очень нетривиальный вопрос: как мы что-то сумели сделать «более надежным», используя «ненадежную» информацию? Причем ситуацию не спасает даже, например, такая «уловка»: давайте в (1) вообще не будем использовать безусловные среднеквадратические отклонения, а только условные, типа  $\sigma_{O(E)} = \sigma_O \sqrt{1 - r^2}$ , которые можно вычислить по формуле  $\sigma_{\mathcal{Q}(E)} = (\sum_{i=1}^n (Q_{i,\mathtt{H}} - Q_\mathtt{p})^2 \, / \, n)^{0.5}$ , где  $Q_{i,\mathtt{H}}$  – наблюденный расход;  $Q_\mathtt{p}$  – расход, рассчитанный по уравнению регрессии. Однако для уравнения регрессии все равно надо вычислять безусловные среднеквадратические отклонения.

Давайте вспомним, почему мы  $\sigma_Q$  считаем ненадежным? Потому что оно получено путем обработки ряда в области неустойчивости по дисперсии (или по второму начальному моменту, если точнее). Однако если в эмпирическом распределении еще не сформировался степенной «хвост», то никто не запрещает подставлять  $\sigma_Q$  в формулу (1) и оставлять в силе все последующие рассуждения. Однако все равно «маячит» вопрос: как из менее совершенного получается что-то более совершенное? Вопрос слишком философский; таков и ответ: так же, как из обезьяны произошел человек. «Ненадежная» обезьяна только и могла произвести что-то новое, потому что она использовалась «средой» как мутировавшая подложка. Среда (у нас испарение) заставляет «ненадежный» объект (у нас расход) стать более «надежным» в расширенном фазовом пространстве. «Расширятся» имеет смысл до размерности пространства вложения, по крайней мере, существуют обобщения двумерных распределений на многомерные.

Рассуждения данного приложения видимо можно перенести и на минимальный сток, и на максимальный сток весеннего половодья, хотя и с оговорками, а может быть и с заменой природы второй фазовой переменной. Особняком стоит максимальный дождевой сток (см. Приложение 2).

# 2. О неприменимости теории марковских случайных процессов к дождевым максимумам, интерпретируемых по СНиПу (СП)

Модель линейного формирующего фильтра оказалась применимой почти для всех видов многолетнего стока (годовой, максимальный - весеннего половодья, летне-осенний и зимний минимальный) за исключением дождевых максимумов. Для всех видов стока, кроме последнего, прослеживаются более или менее выраженные корреляционные связи, по крайней мере, между стоком смежных лет. Это позволяет подобные процессы рассматривать как простые марковские. Генезис формирования их плотности вероятности хорошо описывается уравнением ФПК, и в стационарном режиме приводит к кривой Пирсона III типа. Поэтому можно действовать «по трафарету»: параметризировать модель на основе существующего (статистического) режима (моментов плотности вероятности  $m_i$  или расчетных гидрологических характеристик  $\overline{Q}$ ,  $C_{\nu}$ ,  $C_{s}$ ,  $C_{s}$ / $C_{\nu}$ ), а в качестве внешнего воздействия принять годовую норму осадков (избегая кропотливого выявления стокообразующих осадков). При прогнозе (сценарных оценках) в модель вводятся новые климатические нормы осадков и температуры как аддитивно (через  $\dot{X}$  ), так и мультипликативно (через  $\bar{c}$  ) (см. методику, изложенную в учебнике [38] и использующую, в частности, зависимости М. И. Будыко). Также мультипликативно в модель можно ввести факторы подстилающей поверхности (урбанизация, распашка, залесенность, демография и др.).

Конечно, при такой параметризации в модель вносятся систематические отклонения («погрешности») в параметры  $\bar{c}$ ,  $G_{\bar{c}}$ ,  $G_{\bar{N}}$ ,  $G_{\bar{c}\bar{N}}$  (меньше всего таких отклонений в модели годового стока). Это связано с тем, что в уравнениях появляются условные («фиктивные») коэффициенты стока, например  $k_{\text{мин}} = \dot{X} / \overline{Q}_{\text{мин}}$ . Однако так как работоспособность моделей интегрально оценивается по метрикам, характеризующим близость фактических и прогнозных кривых плотности вероятности (это много раз проделывалось на ретроспективном материале по различным критериям согласия), то систематическое отклонение в том или ином коэффициенте терпимо (с точки зрения рассматриваемой задачи; в другой ситуации это может быть и не так).

Проблемы начинаются, когда решаются эволюционные задачи, например оценивается устойчивость формирования стока по критерию  $\beta = 2k \ln r + 2$ . Заниженные значения коэффициента  $k_{\text{мин}}$  для летнеосенней и зимней межени (наряду с трудно оцениваемыми значениями коэффициентов автокорреляции) приводят к завышенно-негативным оценкам по устойчивости (это не относится к годовому стоку, неустойчивость которого вполне обоснованна в рамках данной формулы). Увеличение  $k_{\text{мин}}$  или  $k_{\text{макс}}$  (порой в несколько раз) при их подсчете на основе не годовой нормы осадков, а «стокообразующей нормы» последних, приведет к более оптимистической картине устойчивости. Насколько, пока не ясно.

В отношении же дождевых максимумов проблемы начинаются «сразу». Используемая (СНиПами и СП) методика формирования рядов дождевых максимумов (в каждый год берется одно максимальное значение) сразу закрывает вопрос о марковости. Такие ряды представляют собой внутренне статистически не связанный белый шум. Ясно также, что формируются подобные максимумы не годовыми осадками (а тем более их нормами), а конкретным дождем (как правило, ливневого или ливне-дождевого характера). Поэтому для оценки долгосрочных изменений статистических характеристик (моментов) кривой плотности вероятности дождевых максимумов (тип этой кривой, несмотря на белый шум, такой же, как и для других видов многолетнего стока) в климатическом сценарии надо иметь внутригодовой ход осадков или, по крайней мере, некие «типовые» экстремальные характеристики дождя. Но и этого «мало»: катастрофы определяют не только дожди, но и состояние почво-грунтов (тенденции изменения запасов  $\Delta U$ ), а также конкретная гидравлическая ситуация в изучаемом створе (см. [37]). В любом случае нужен «дождевой» климатический сценарий.

#### Послесловие

Во введении автор дает свою интерпретацию появления некоторых разделов данной монографии. В общих чертах ситуация была именно такой. Однако В. В. Коваленко не указал самого главного (это нужно было сделать в Заключении):

- 1. По крайней мере, один пример классической теории катастроф он все-таки обсуждает именно применительно к гидрологии. Это «сборка», которой посвящен п. 4.3 «Многомодальные распределения плотности вероятности речного стока и уровней озер (динамика машины Зимана)». Полимодальные распределения (особенно суточных и декадных гидрологических характеристик) наблюдаются повсеместно. Так что автор сам в какой-то мере частично опровергает свое же утверждение, что наводнения «не имеют никакого отношения к теории катастроф как таковой» (см. Введение). Именно «частично», так как для полного снятия этого тезиса надо, чтобы кто-то показал, что указанная полимодальность связана с многообразием катастроф, а не с другими причинами, например с неоднородностью гидрологических рядов.
- 2. Эволюция многообразий, которой в основном посвящена монография, приводит к увеличению размерности системы дифференциальных уравнений, описывающих гидрологические процессы. Не исключено, что в некоторых случаях расширенная система эквивалентна нелинейным моделям теории катастроф. В любом случае сам факт подобного увеличения размерности многообразий неустойчивых гидрологических систем может рассматриваться как катастрофа, причем в более широком смысле, чем трактует последнее понятие «классическая теория катастроф».

Как бы там ни было, считаю, что инициатива деканата (о которой упоминается во Введении) активизировала внимание ученых факультета к проблеме расчетов и прогнозов экстремальных явлений. Приятно, что новое научное направление, созданное на гидрологическом факультете РГГМУ («Частично инфинитная гидрология»), оказалась такой восприимчивой к злободневным запросам практической гидрологии.

С. В. Шаночкин (канд. геогр. наук, доцент, зам. декана гидрологического факультета РГГМУ)

#### Литература

- 1. *Альтиуль А. Д.* Гидравлические потери на трение в трубопроводах. М.: Госэнергоиздат, 1963. 256 с.
- 2. Андреев И. Д. Диалектическая логика: Учеб. пособие. М.: Высшая школа, 1985. 367 с.
- 3. *Антонова И. К.* Марксизм вне политики. Источники, генезис и структура работ Маркса и Энгельса по естествознанию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 192 с.
- 4. *Антонцев С. Н., Епихов Г. П., Кашеваров А. А.* Системное математческое моделирование процессов водообмена. Новосибирск: Наука, 1986. 216 с.
- 5. *Аполлов Б. А., Калинин Г. П., Комаров В. Д.* Курс гидрологических прогнозов. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 420 с.
- 6. Арнольд В. И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.
- 7. *Басин М. А., Шилович И. Н.* Синергетика и Internet (путь к Synergonet). СПб.: Нау-ка, 1999. 71 с.
- 8. *Бефани Н. Ф., Калинин Г. П.* Упражнения и методические разработки по гидрологическим прогнозам. Л.: Гидрометеоиздат, 1965.
- 9. Будыко М. И. Испарение в природе. Л.: Гидрометеоиздат, 1948. 136 с.
- 10. Будыко М. И. Климат в прошлом и будущем. Л.: Гидрометеоиздат, 1980. 351 с.
- 11. Быков В. Д., Васильев А. В. Гидрометрия. Л.: Гидрометеоиздат, 1977. 448 с.
- 12. *Васильев О. Ф., Квон В. И.* О влиянии нестационарности при движении открытого потока жидкости // Журнал прикладной механики и технической физики, 1966, № 1, с. 126 128.
- 13. Васильев О. Ф., Темноева Т. А., Шугрин С. М. Численный метод расчета неустановившихся течений в открытых руслах. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 2, с. 17–25.
- 14. Верховский Я. Г., Тырмос В. И. Сталин. Тайный «сценарий» начала войны. М.: ОЛМА-ПРЕСС, 2005. 608 с.
- 15. Винников К. Я. Чувствительность климата. Л.: Гидрометеоиздат, 1986. 224 с.
- 16. Георгиевский Ю. М., Шаночкин С. В. Гидрологические прогнозы. Учебник СПб.: изд. РГГМУ, 2008.
- 17. *Грушевский М. С.* Неустановившееся движение воды в реках и каналах. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 288 с.
- 18. Делёз Ж. Логика смысла. М.: Издательский центр «Академия», 1995. –298 с.
- 19. *Денисов Ю. М.* Математическое моделирование процесса стока горных рек. // Тр.: САНИГМИ, 1968, вып. 39 (54), с. 30 –36.
- 20. *Емельянов Ю. В.* Сталин: на вершине власти. М.: Вече, 2002. 544 с. (Досье без ретуши.)
- Зиновьев А. А. На пути к сверхобществу. М.: ЗАО Изд-во Центрполиграф, 2000. 638 с.
- 22. Исмайлов Г. Х., Федоров В. М. Оценка степени нестационарности временных рядов годового стока рек // Труды конференции «Современные проблемы стохастической гидрологии». М.: ИВП РАН, 2000, с. 53 57.
- 23. Исследование неустановившегося движения воды на р. Свири в зимних и летних уровнях / Под ред Н. Е. Кондратьева и В. А. Урываева. Л.: Гидрометеоиздат, 1963.

- 24. Исследование неустановившегося движения воды на реках Тверце и Оредеж / Под ред. Н. Е.Кондратьева и В. А.Урываева. Л.: Гидрометеоиздат, 1961. 288 с.
- 25. *Казаков И. Е., Мальчиков С. В.* Анализ стохастических систем в пространстве состояний. М.: Наука, 1983. 384 с.
- 26. *Картвелишвили Н. А.* Неустановившиеся открытые потоки. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 128 с.
- 27. *Картвелишвили Н. А.*, *Галактионов Ю. И*. Идеализация сложных динамических систем. М.: Наука, 1976. 272 с.
- 28. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Основания синергетики. Режимы с обострением, самоорганизация, темпомиры. СПб.: Алетейя, 2002. 414 с.
- 29. *Коваленко В. В.* Измерение и расчет характеристик неустановившихся речных потоков. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 160 с.
- 30. *Коваленко В. В.* Моделирование гидрологических процессов. Учебник. СПб.: Гидрометеоиздат, 1993. 256 с.
- 31. *Коваленко В. В.* Частично инфинитное моделирование и прогнозирование процессов развития. СПб.: изд. РГГМУ, 1998. 113 с.
- 32. *Коваленко В. В.* Онтология и гносеология частично инфинитного моделирования. СПб.: изд. РГГМУ, 2001. 47 с.
- 33. Коваленко В. В. Нелинейные аспекты частично инфинитного моделирования в эволюционной гидрометеоэкологии. СПб.: изд. РГГМУ, 2002. 158 с.
- 34. *Коваленко В. В.* Частично инфинитное моделирование и прогнозирование процесса формирования речного стока. СПб.: изд. РГТМУ, 2004. 198 с.
- 35. *Коваленко В. В.* Частично инфинитное моделирование: основание, примеры, парадоксы. СПб.: Политехника, 2005. 480 с.
- 36. Коваленко В. В. Частично инфинитный механизм турбулизации природных и социальных процессов. СПб.: изд. РГГМУ, 2006. 166 с.
- 37. Коваленко В. В. Частично инфинитная гидрология. СПб.: изд. РГТМУ, 2007. 224 с.
- 38. Коваленко В. В., Викторова Н. В., Гайдукова Е. В. Моделирование гидрологических процессов. Изд. 2-е, испр. и доп. Учебник. СПб.: изд. РГГМУ, 2006. 559 с.
- 39. Колмогоров А. Н. Об аналитических методах в теории вероятностей // Успехи мат. наук, 1938, вып. 5.
- 40. Конаржевский Л. М. Типовые формы кривой обеспеченности характеристик весеннего стока с водосборов степной и лесостепной зон. // Изв. Каз. филиала АН СССР, сер. энергетики и водного хозяйства, 1961, вып.3, с.130 146.
- 41. Коплиен Дж. Мультипарадигменное проектирование для С++. Библиотека программиста. СПб.: Питер, 2005. 235 с.
- 42. *Косарев В. И.* 12 лекций по вычислительной математике (вводный курс). Учеб. пособие: Для вузов. Изд. 2-е, испр. и доп. М.: Изд-во МФТИ, 2000. 224 с.
- 43. Крамер  $\Gamma$ . Математические методы статистики. М.: Мир, 1975. 648 с.
- 44. *Крылов В.Н., Бобков, Монастырский В.В.*. Вычислительные методы. Т. 2. М.: Наука, 1977. 400 с.
- 45. Кудряшов А. Ф. Онтология. Методология. Негеоцентризм. СПб.: Петрополис, 1993. 160 с.
- 46. *Кучмент Л. С.* Математическое моделирование речного стока. Л.: Гидрометеоиздат, 1977. 191 с.

- 47. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н. Линейные и нелинейные уравнения параболичесого типа. М.: Наука, 1967. 736 с.
- 48.  $\Bar{\it Лафоре}$  Р. Объектно-ориентированное программирование в C++. Классика Computer Science. Изд. 4-е. СПб.: Питер, 2005. 924 с.
- 49. Либерти Джесс, Брэдли Джонс. Освой самостоятельно С++ за 21 день, Изд. 5-е. Пер. с англ. М.: Издательский дом «Вильямс», 2006. 784 с.
- 50. *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.* Современные проблемы нелинейной динамики. М.: Эдиториал УРСС, 2000. 336 с.
- 51. *Матвеев Н. М.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. Минск: Вышейшая школа, 1974. 768 с.
- 52. Математическая энциклопедия: Гл. ред. И. М. Виноградов, т. 3. М.: Советская энциклопедия, 1982.-1184 стб.
- 53. Митропольский А. К. Техника статистических вычислений. М.: Наука, 1971. 576 с.
- 54. *Моисеев Н. Н.* Алгоритмы развития. М.: Наука, 1987. 304 с.
- 55. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. Т. 1-2.- СПб.: Гидрометеоиздат, 1992, 1996.
- 56. *Музалев С. В., Привальский В. Е., Раткович Д. Я.* Стохастические модели в инженерной гидрологии. М.: Наука, 1982. 184 с.
- 57. Найденов В. И. Нелинейная динамика поверхностных вод суши. М.: Наука, 2004. 318 с.
- 58. *Налимов В. В.* Разбрасываю мысли. В пути и на перепутье. М.: ПрогрессТрадиция, 2000. 344 с.
- 59. Нежиховский Р. А. Прогнозы месячного стока рек Северо-Запада Европейской территории СССР. // «Труды ЦИП», 1951, вып. 27.
- 60. Острейковский В. А. Анализ устойчивости и управляемости динамических систем методами теории катастроф. М.: Высшая школа, 2005. 326 с.
- 61. Пайтен X. О., Рихтер П. X. Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. М.: Мир, 1993. 176 с.
- 62. *Перуш М*. Математические модели ассоциативных нейронных сетей. СПб.: Изд-во «КАРО», 2000. 64 с.
- 63. Попов В. Г. Логика абсолютного движения. СПб.: Изд-во «АНАТОЛИЯ», 2006. 364 с.
- 64. Попов Е. Г. Гидрологические прогнозы. Л.: Гидрометеоиздат, 1979. 256 с.
- 65. Расторгуев С.  $\hat{\Pi}$ . Информационная война. М.: Радио и связь, 1998. 416 с.
- 66. Peдько В.  $\Gamma$ . Эволюционная кибернетика. М.: Наука, 2001. 156 с.
- 67. *Режимы с обострением*. Эволюция идеи: законы коэволюции сложных структур. М.: Наука, 1998. 255 с.
- 68. *Рождественский А. В., Чеботарев А. И.* Статистические методы в гидрологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 424 с.
- 69. Pождественский Б. Л., Яненко Н. М. Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 688 с.
- 70. *Розовский И. Л., Еременко Е. В., Базилевич В. А.* Неустановившееся движение водного потока ниже гидроэлектростанций и его влияние на русло. Киев: Наукова думка, 1967. 276 с.

- 71. *Рузавин Г. И.* Диалектические и формально-логические противоречия в развитии научного познания // В кн.: Диалектика и научное мышление (материалистическая диалектика методология науки). М.: Наука, 1988, с. 132–146.
- 72. Руководство по гидрологическим прогнозам. Вып. 1. Долгосрочные прогнозы элементов водного режима рек и водохранилищ. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 358 с.
- 73. Руководство по гидрологическим прогнозам. Вып. 2. Краткосрочный прогноз расхода и уровня воды на реках. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 347 с.
- 74. Руководство по гидрологическим прогнозам. Вып. 3. Прогноз ледовых явлений на реках и водохранилищах. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 168 с.
- 75. Самарский А. А, Вабищев П. Н. Численные методы решения задач конвекции— диффузии. Изд. 3-е. М.: Едиториал УРСС, 2004. 248 с.
- 76. *Саруханян Э. И., Смирнов Н. П.* Многолетние колебания стока Волги: опыт геофизического анализа. Л.: Гидрометеоиздат, 1971. 166 с.
- 77. Современная философия науки: знание, рациональность ценности в трудах мыслителей Запада. М.: Логос, 1996. 400 с.
- 78. *Соколовский Д. Л.* Речной сток (основы теории и методики расчетов). Изд. 3-е испр. и доп. Учебник. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 540 с.
- 79. Спивак М. Математический анализ на многообразиях.: Учеб. пособие. Изд. 2-е. СПб.: Изд-во «Лань», 2005. 160 с.
- Справочник по теории вероятностей и математической статистике/В. С. Королюк, Н. Н. Портенко, А. В.Скороход, А. Ф.Турбин. – М.: Наука, 1985. – 640 с.
- Страуструп Б. Дизайн и эволюция С++: Пер. с англ. М.: ДМК Пресс; СПб.: Питер, 2006. 448 с.
- Терехов В. А. и др. Нейросетевые системы управления. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1999.
   265 с.
- 83. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
- 84. Тихонов В. И. Статистическая радиотехника. М.: Радио и связь, 1982, 624 с.
- 85. *Толкачев С. Ф.* Нейронное программирование диалоговых систем. СПб.: КОРОНА-Век, 2006. 192 с.
- 86. Томпсон Дж. М. Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
- 87. Труфанов С. Н. «Наука логики» Гегеля в доступном изложении: Учеб. пособие. Самара: Парус, 1999. 187 с.
- 88. Турчак Л. И. Основы численных методов: Учеб. пособие. М.: Наука, 1987. 320 с.
- 89. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 623 с.
- 90. *Устиожанин Б. С.* Реакция речного стока на урбанизацию водосбора // Расчеты и прогнозы гидрологических характеристик. Л.: Изд. ЛПИ, 1989, с. 77 81 / (Труды ЛГМИ, вып. 103).
- 91. Федоров В. Д., Ильманов Т. Г. Экология. М.: Изд-во МГУ, 1980. 464 с.
- 92. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1985. 448 с.
- 93. Хакен Г. Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
- 94. Хинце И. О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.
- 95. *Чернавский Д. С.* Синергетика и информация: Динамическая теория информации. М.: Наука, 2001. 244 с.

#### Литература

- 96. Шикломанов И. А. Влияние хозяйственной деятельности на речной сток. Л.: Гидрометеоиздат, 1989. 334 с.
- 97.  $\mathit{IIIустер}\ \Gamma$ . Детерминированный хаос: Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
- 98. *Эббот М. Б.* Гидравлика открытого потока. Вычислительная гидравлика. М.: Энергоатомиздат, 1983. 272 с.
- 99. Эйген М. Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул. М.: Мир, 1973. 216 с.
- Pankratov A. L. [Электронный ресурс] / Stochastic processes and application. Denmark. Режим доступа: <a href="http://www.imm.dtu.dk">http://www.imm.dtu.dk</a>.

#### Предметный указатель

Аттрактор 11, 37, 38, 107, 126, 127, 145, 153 Бифуркации 6, 9, 118, 136 – линамические 9, 10, 12 9, 10, 11, 12 статические – Хопфа 11 Бифуркационная диаграмма 108 - методология мышления 116 Бифуркационное множество 15, 17 Ветвление 134, 135, 136 Взаимодействия парные 28, 38 - классов 139 - классификация 27 Возможность 55, 57, 61, 134, 136 Генотип 46, 48 Гиперцикл 48 Гносеологический тупик 39, 42, 44, 45, 67, 146 переходный процесс Действительность 55, 57, 61 Инфинитная реальность 55, 93, 130 Искусственный интеллект Катастрофа гидрологическая 3 -, классификация 15, 16 -, механизм 5 -, прогноз –, теория 3, 4, 17, 18, 124 137, 138, 145 Класс абстрактный 146 Коразмерность 18 Кривые Пирсона 35, 66, 85, 87, 114, 143, 147 Критерий Пекле 65 Машина Зимана 12, 14, 16, 102, 106 Mepa 60, 61, 62 Многомерный «хвост» Многообразие 4, 6, 7, 34, 73, 113 - гидрологическое 4, 21 катастроф 4, 15, 18 -, размерность 4.71 Модели динамические 16, 19, 22, 34, 37, 98

диффузионные 20, 21

```
– катастроф
   – линейного фильтра 30, 31, 35, 36, 109
   – Лотки–Вольтера28
   – Мальтуса
                    22, 65, 75

Навье-Стокса

одномерная гидравлическая

                                  71
   осциллятора
   – Сен-Венана
                    22, 39, 40, 69, 70, 71, 75, 79, 80

– параболические 20

   популяционные 26, 28, 63
   – Эйгена
                 28, 46
Мутант
          27, 48, 49, 143, 145
Мутации 46, 48
Мышление познающего субъекта
   – полевое 60
Неинерциальная система отсчета 67
Неустойчивость
                    6, 66, 95, 108, 143

динамическая

                    7,9
   начального момента 42, 44, 87
   - решения
                 51, 76
   статическая
                    7,8
Обучающие выборки 156, 157
Освоение инфинитной реальности
Полиморфизм
                 138, 139
Постнеодарвинизм
                    45, 48, 134
             7, 74, 105, 106, 107, 109, 110, 118
Потенциал
Потенциальные кривые 10
Предметная область
                       28, 48, 50, 52, 53, 55, 60, 93, 111, 137, 145
Преобразования

Лапласа 69

   – Фурье 32
Развитие 51, 56, 60, 112
Разностные схемы аддитивные 131
   – консервативные

– локально-одномерные 132

   -- монотонные
                        129
                           129
   – положительные
Распределение
                 31
   - многомерное
                    129

– многомодальное 103

    плотности вероятности 66, 85, 31

полимодальное 104

   –, прогнозирование 35
   толстохвостое 78
Сборки
          12, 14, 16, 105, 107
```

Связывание 141

```
48,64
Селективная ценность
Складки 12, 14, 16
                       150
Степень сжимаемости
Стохастическое обобщение 84
Темпомир 64
Трансферсальность
                    18
Указатель 139
Умозрение
             56, 57, 115
Уравнение Бесселя 69
   - конвекции-диффузии 65, 93
   Пирсона 85, 86, 95, 96, 98, 103, 148
   - Риккати 24, 30, 70, 71, 76, 77, 79

Ферхюльста 26

      – Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК) 35, 37, 49, 59, 74, 87, 97, 109
Уровень тяготения
Фазовая плоскость
                    40
                       48, 59, 63, 114
Фазовое пространство
                    4, 87, 130

расширение

Фазовые переменные 29, 64, 65, 67, 87, 113, 130, 136
Фазовый портрет 73, 128, 136
Фенотип 48
Фильтр семантический
Фликкер-шум
                77, 79
Фрактальная диагностика 52, 64, 65, 122
Характеристический функционал
                                 31, 32, 33
Характеристическая функция
Частично инфинитная методология
                                     45
                    66
   — гидрология
                    63
   – гносеология
   – закономерность
                      49, 51, 62
   – предметная область
                          28
Частично инфинитное моделирование 4, 47, 56
   -- прогнозирование
                          4, 121, 122
   – программирование
                          121
Частично инфинитный стиль мышления 59
```

Шаблон

иррациональный

Эволюция систем отсчета

многообразий

Эволюционная эпистемология

47, 48, 55, 58, 145, 146

52, 54

45, 48

110, 120

175

# Содержание

	Введение	5
1.	Классическая теория катастроф на многообразиях	8
1.1.	Многообразия, неустойчивости и бифуркации	8
1.2.	Статические бифуркации и катастрофы. Складки и сборки. Машина Зимана	14
1.3.	Ряды Тейлора и классификация катастроф. «Экологическая ниша» теории	
	катастроф	17
2.	Динамика гидрологических многообразий	21
2.1.	Динамические модели гидрологического цикла	21
2.2.	Моделирование динамики вероятностных распределений	33
2.3.	Гносеологические «тупики»	41
3.	Частично инфинитная методология выхода из гносеологических «тупи-	
	ков»	47
3.1.	Постнеодарвинизм в эволюционной эпистемологии	47
3.2.	Динамические, статистические и частично инфинитные закономерности	51
3.3.	Некоторые математические аспекты методологии	65
4.	Примеры эволюционных изменений многообразий как следствие заме-	
	ны «неинерциальных систем отсчета»	69
4.1.	Коэффициент сопротивлений в роли новой фазовой переменной (гидравли-	
	ческие и гидрометрические следствия)	69
4.2.	Многомерные распределения плотности вероятности процесса формирова-	
	ния многолетнего речного стока	87
4.3.	Многомодальные распределения плотности вероятности речного стока и	
	уровней озер (динамика машины Зимана)	104
4.4.	Эволюция систем отсчета в природе и в мышлении познающего субъекта	112
5.	О возможности частично инфинитного программирования гносеологи-	
	ческих переходных процессов	123
5.1.	Некоторые аспекты численной реализации моделей эволюции многообразий	123
5.2.	Элементы дарвиновской триады в современном программировании	136
5.3.	Пример выхода из гносеологического «тупика»	148
	Заключение	156
	Приложения	161
	1. Как практически можно «опустить хвост» у неустойчивого распределения.	161
	2. О неприменимости теории марковских случайных процессов к дождевым	
	максимумам, интерпретируемых по СНиПу (СП)	165
	Послесловие	167
	Список литературы	168
	Предметный указатель	173

# **Table of contens**

	Introduction	5
1.	The classical theory of accidents on varieties	8
1.1.	Varieties, instability and bifurcations	8
1.2.	Statistical bifurcations and accident. Foldes and assembly.	
	The Ziman's machine	14
1.3.	Talor's lines and classification of accidents. «An Ecological niche» the theories	
	of accidents	17
2.	Dynamics of hydrological varieties	21
2.1.	Dynamic models of a hydrological cycle	21
2.2.	Modeling of dynamics of probabilistic distributions	33
2.3.	Epistemological «impasses»	41
3.	Partially infinity methodology of an output from epistemological «im-	
	passes»	47
3.1.	Postneodarvinizm in evolutionary epistemological	47
3.2.	Dynamic, statistical and partially infinity of law	51
3.3.	Some mathematical aspects of methodology	65
4.	Examples of evolutionary changes of varieties as a consequence of replace-	
	ment «of uninertial systems of readout»	69
4.1.	Factor of resistance in a role new phase variable (hydraulic and hydrometric	
	consequences)	69
4.2.	Multivariate distribution of density of probability of process of formation of a	
	long-term river drain	87
4.3.	Multimodal distributions of density of probability of a river drain and levels of	
	lakes (dynamics(changes) of the Ziman's machine)	104
4.4.	Evolution of systems of readout in a nature and in thinking of the learning subject.	112
5.	About an opportunity partially инфинитного of programming of Episte-	
	mological transients	123
5.1.	Some aspects of numerical realization of models of evolution of varieties	123
5.2.	Elements of a darvin triad in modern programming	136
5.3.	Example of an output from epistemological «impasse»	148
	The conclusion	156
	The appendices	161
	1. As practically it is possible « to lower a tail » at unstable distribution	161
	2. About неприменимости of the theory of markov casual processes to rain	
	maxima, interpretive on SN	165
	Epilogue	167
	The list of the literature	168
	The index	173

211=20

#### Научное издание

#### Коваленко Виктор Васильевич

# ТЕОРИЯ КАТАСТРОФ И ЭВОЛЮЦИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ МНОГООБРАЗИЙ В ЧАСТИЧНО ИНФИНИТНОЙ ГИДРОЛОГИИ

#### Монография

Редакторы: Л.В. Ковель, И.Г. Максимова Компьютерный набор: Н.В. Викторова, М.Н. Громова, О.В. Романова Верстка: Е.В. Гайдукова

ЛР № 020309 от 30.12.96

Подписано в печать 20.03.08. Формат 60×90 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Гарнитура Times New Roman. Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл.печ.л. 15,2. Уч.-изд.л. 15,2. Тираж 250 экз. Заказ № 55/07 РГГМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98. ЗАО «НПП «Система», 195112, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр.,80/2.