

Министерство образования Российской Федерации

**РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

В. В. КОВАЛЕНКО

**НЕЛИНЕЙНЫЕ АСПЕКТЫ ЧАСТИЧНО
ИНФИНИТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В
ЭВОЛЮЦИОННОЙ ГИДРОМЕТЕОЭКОЛОГИИ**



Санкт-Петербург
2002

УДК [504 + 551.46 + 551.5 + 556 + 574 + 532].072

Коваленко В. В. Нелинейные аспекты частично инфинитного моделирования в эволюционной гидрометеозологии. – СПб.: изд. РГГМУ, 2002. – 158 с.

Рецензент: д-р техн. наук, проф. И. Ф. Карасев (Государственный гидрологический институт)

В книге анализируется роль нелинейности при моделировании развивающихся систем. С точки зрения частично инфинитного подхода, коэффициенты моделей осуществляют «интерфейс» между финитной предметной областью, характеризуемой переменными состояниями, и инфинитным окружением, вызывающим «шумы». При их определенной интенсивности возникает неустойчивость, приводящая к тому, что задаваемые коэффициенты становятся искомыми финитными переменными состояниями расширенной предметной области.

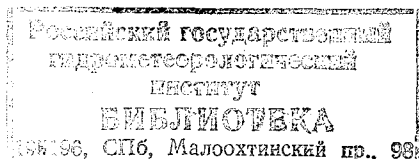
Адресована специалистам, аспирантам и студентам ВУЗов, занимающихся гидрометеозологией.

In this book the role of nonlinearity in development systems is touched upon. From the point of view of partial infinite approach model's coefficients becomes the interface between finite conceptual domain, represented by state variables, and infinite environmental that generates «noises». Under certain noise intensity unstable state appears and model's coefficients becomes finite state variables for a new extended conceptual domain.

Is addressed to specialists, students and post graduate students working on hydrometeorological and ecological assessment.

ISBN 5-86813-036-7 © В. В. Коваленко, 2002

© Российский государственный гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2002



ВВЕДЕНИЕ (ПОЧЕМУ ТАК ШИРОКО ПРИМЕНЯЮТСЯ ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ)

Почему в гидрометеорологии (и вообще в науке) такое широкое применение находят линейные модели? И почему в некоторых случаях от них отказываются?

Рассмотрим объект, изображенный на рис. В.1. Его математическую модель представим в символическом виде: $L(i_\Sigma) = \psi_\Sigma$, где оператор L связывает «вход» $\psi_\Sigma = \psi_1(t) + \psi_2(t) + \dots + \psi_n(t)$ и «выход» $i_\Sigma = i_1 + i_2 + \dots + i_n$. В системах, которые называют линейными, действует, так называемый, принцип суперпозиции (наложения, по другой терминологии):

$$L(i_1) + L(i_2) + \dots + L(i_n) = \psi_1(t) + \psi_2(t) + \dots + \psi_n(t).$$

Этот принцип означает отсутствие взаимного влияния процессов, происходящих в системе, что приводит, в конечном итоге, к возможности изучать линейные системы как конечномерные объекты.

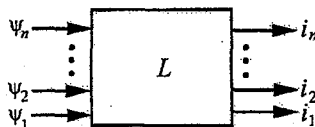


Рис. В.1. К принципу суперпозиции.

Рассмотрим, например, следующую задачу для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} &= a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \\ T(x, 0) &= T_0(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ \frac{\partial T(0, t)}{\partial x} &= \frac{\partial T(l, t)}{\partial x} = 0, \end{aligned}$$

где T – температура, l – длина нагреваемого стержня. Его решение можно представить рядом Фурье

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t) f_n(x)$$

по собственным функциям $f_n(x)$. Согласно принципу суперпозиции, решение линейного уравнения в частных производных эквивалентно решению бесконечной последовательности обыкновенных дифференциальных уравнений для гармоник (мод) $C_n(t)$:

$$dC_n(t)/dt = -a(\pi n/l)^2 C_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{В.1})$$

На рис. В. 2 показано изменение со временем первых гармоник. Чем больше номер гармоники, тем быстрее уменьшается ее амплитуда.

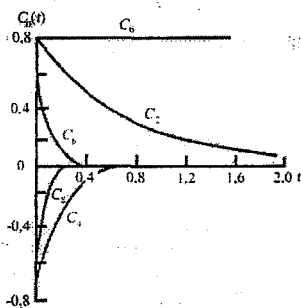


Рис. В. 2. Типичная картина изменения функции $C_n(t)$ [38, 50].

Поэтому, если мы хотим знать приближенное решение, можно отбросить гармоники с высокими номерами, а следовательно, ограничиться конечной системой (В.1). «Изюминка» в том, что все уравнения независимы, т. е. каждая гармоника, наподобие лейбницовской монады, живет своей жизнью и не способна к кооперации с другими модами (хотя в формировании отклика системы на внешнее воздействие каждая из них вносит свой вклад). Таким образом, линейная система лишена внутренней активности. Она пассивно

трансформирует (может быть усиливая и искажая) внешнее воздействие, и в этом смысле ее поведение вполне прогнозируемо.

Аналогичным образом часто ведут себя и нелинейные системы, если они не подвергаются сильному внешнему воздействию. На этом основана, так называемая, линеаризация, смысл которой поясняет рис. В.3. Примером может служить линеаризация в системе Сен-Венана члена, учитывающего гидравлические сопротивления: $j = gu^2/(C^2h)$, где g — ускорение свободного падения, u — скорость, h — глубина, C — коэффициент Шези. Выполняя подстановку $h = h_0 + h'$, $u = u_0 + u'$, используя ряд Маклорена и пренебрегая членами второго порядка малости, получим: $j = 2au' - (u_0/h_0)ah'$, где $a = gu_0/C^2h_0$. В речной гидравлике линеаризация не приводит к недопустимым погрешностям,

пока $u' \ll u_0$, $h' \ll h_0$. Отмечены случаи, когда получаются хорошие результаты и при нарушении этого условия. По мнению Н. А. Картвелишвили [25], возможно, «что в речных руслах большого протяжения и неправильной формы действия локальных нелинейностей направлены в противоположные стороны, в результате чего эффекты компенсируются и интегрально явление протекает так, как оно протекало бы в линейной модели».

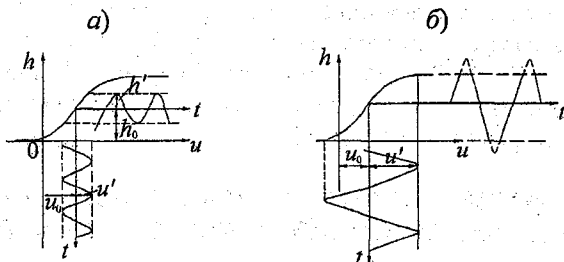


Рис. В. 3. Иллюстрация возможности линейзации в нелинейной ($h = f(u)$) системе.

а) линейзация возможна ($u' < u_0$, $h' < h_0$), б) при большой амплитуде внешнего воздействия ($u' > u_0$) на выходе появляются нелинейные искажения.

Известно также [57], что хорошо знакомые океанологам нелинейные уравнения Бюргерса и Кортевега – де Вриза путем некоторых подстановок сводятся к линейным. Поэтому формальная нелинейность моделей еще не говорит об их нелинейности по существу.

Широкому применению линейных моделей способствует также большое число методов их решения. Поэтому не удивительно, что они играют ключевую роль в современном естествознании и очень медленно сдают свои позиции. Последнее особенно относится в анализу устойчивости нелинейных задач, который сводится к исследованию линеаризованных уравнений.

И все-таки все чаще и чаще нелинейные аспекты становятся предметом дискуссий. В монографии сделана попытка посмотреть на нелинейность через призму частично инфинитного моделирования. По мнению автора, только такое моделирование открывает хоть какие-то возможности имитационного прогнозирования появления нового.

Учитывая педагогическую деятельность автора, книга писалась, чтобы служить одновременно и учебным пособием для студентов и

аспирантов. Поэтому с дидактических позиций имело смысл постепенно подводить читателя к собственно нелинейным аспектам тех или иных задач.

Излагаемые в монографии результаты научных исследований получены при финансовой поддержке Министерства образования Российской Федерации (гранты 95-0-12.1-8, 01.9.80 001552, 0120 00 5649, 01.200.1 12913) и Колумбийского гидрометцентра (IDEAM) в рамках совместного проекта с поддержкой Программы по развитию ООН (PNUD).

Автор выражает признательность сотрудникам кафедры гидрофизики и гидропрогнозов РГТМУ Н. В. Викторовой и И. И. Пивоваровой за помощь в подготовке монографии, а также В. А. Хаустову за программное обеспечение расчетов в разделе 3.2.

1. ЧАСТИЧНО ИНФИНИТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НА ОСНОВЕ ИДЕЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ ЭПИСТЕМОЛОГИИ

1.1. ФИЛОСОФИЯ

У каждой онтологии своя логика, т. е. выраженная рационально (понятиями или образами – некими «шаблонами») связь между истиной и ложью. Наталкиваясь на необъяснимые (в рамках принятых шаблонов) парадоксы, онтология эволюционирует. Но научная онтология – это набор рациональных понятий, фиксирующих конечную (финитную) предметную область в инфинитной (бесконечной) реальности. Сами по себе расширить предметную область они не могут, ибо появление необъяснимых парадоксов означает неустойчивость рационального познания в данной предметной области, т. е. размножение рациональных структур (шаблонов), не очень отличающихся по глубинному смыслу. Нужен некий иррациональный механизм расширения предыдущей предметной области. Этот механизм-шаблон должен фиксировать новые смежные предметные области неинформационным образом (так как в предыдущей области произошел псевдоинформационный взрыв: размножение бессмысленных рациональных шаблонов). Раз расширить предметную область одним сознанием нельзя, то остается только действовать, затрачивая энергию.

Какой вывод отсюда следует с точки зрения моделирования (прогнозирования) процессов развития? Появление нового связано с расши-

рением предметных областей, но этот процесс расширения невыразим в рациональных (информационных) структурах. Но этого «мало». Какова цель познания в фиксированной предметной области? Выявление сущности. Но сущность в ней не наблюдаема в принципе. Для ее получения необходимо выйти за предметную область, опираясь на существующую физическую картину мира с размытым содержанием, т. е. в конечном итоге – на философию. Процесс построения теории – это совмещение феноменологического описания и нефеноменологического объяснения. Этот выход за рамки только явления и за рамки только сущности осуществляется уже в нефиксированной предметной области, так как заранее неизвестна ни область объяснения, ни область предсказания теории.

Таким образом, если сознание представить в виде n -мерного пространства шаблонов, то любые события, связанные с $n+1$ измерением, сознанием не охватываются, оно их не замечает (неустойчивость). Но мы в целом (как материальные объекты) шире, чем наше сознание. Наши действия (а значит затрата энергии) не обязательно всегда подчинены сознанию. Они могут быть интуитивными (бессознательными, иррациональными), т. е. выходить за предметную область, фиксированную сознанием (освоенным набором шаблонов). Само действие конкретно описать нельзя (нет шаблонов), можно только повторить. Однако существует методология («философия») действия (работы интуиции). Действия совершаем мы, интуиция наша, и она управляет действиями. Следовательно управляет не осознаваемый нами шаблон (некое метафизическое верование). Каковы онтологические предпосылки этого шаблона?

Пусть наше «со»-знание – двумерно, а сами мы – трехмерный объект. Тогда мы оперируем некими понятиями, сформированными на плоскостях, пересекающих дерево: корни, ствол, крону – предметных областях. Дерево в целом – это единство сознательного (плоскость знаний) и бессознательного уровней. Оно растет вширь и «может» описать этот процесс (так как у него существует знание-шаблоны для этого). Однако дерево растет и вверх (действует и «интуитивно понимает» это), но «осо»-знать этого не может. Вернее «осознает» на уровне метафизического верования, т. е. выйдя за рамки освоенной предметной области (двумерных сечений), создав размытую картину своего мира, некую философию своего существования.

На любом сечении «наука» описывает только явления. Например, число дырок (веток), «протыкающих» плоскость, увеличивается, эти дырки расползаются и растут в размерах. Но сущность (почему так происходит) можно познать только расширив двумерную предметную область до трехмерной. Без действия (роста дерева) это невозможно сделать (в этом просто не будет необходимости).

Таким образом, новое знание приобретается только через действие (или вовлечение в действие). Дерево, формулируя понятие третьей координаты,

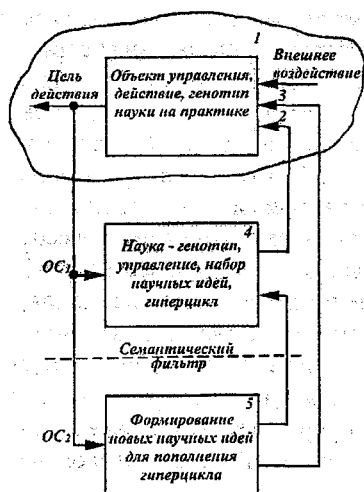


Рис. 1.1. Процесс познания системой с двумя контурами обратной связи (см. [1, 39]).

1 – предметная область (рационально-осмысленная часть инфинитной реальности), 2 – финитное («рациональное», «нормальное») управление, 3 – паранормальное управление в обход семантического фильтра и вхождения в гиперцикл, 4 – блок саморегуляции или финитная часть науки (последняя всегда частично инфинитна просто по определению), 5 – блок саморазвития.

размытую философскую картину дела делает более четкой (в отношении размерности физического пространства), и, увязав эту координату с плоскостью, строит научную теорию своего существования (т. е. описание трехмерного явления и постановку задачи о его сущности – новую философию).

На этом дело не заканчивается. «Дерево» продолжает «действовать» (если это нужно для его выживания), соприкасается с соседним деревом, получает новое знание и создает теорию «леса» и т. д. Происходит эволюция научной онтологии путем «замены» действия (энергии) информацией (понятийными шаблонами). Этот процесс познания можно изобразить следующим образом (рис. 1.1). В первом контуре обратной связи OS_1 происходит оценка данных и принятие решений, а во втором контуре OS_2 – «абстрактное мышление» (познание сущности явления, на уровне которого работает предыдущий контур). Если первый контур, обеспечивающий устойчивость, не срабатывает (из-за потери этой самой устойчивости), то это означает, что отсутствует подходящий шаблон для правильного принятия ре-

шений. Познающая система должна «саморазвиваться», сформировав во втором контуре новый шаблон (расширив свое фазовое пространство).

Таким образом, второй (рефлексирующий) контур моделирует окружающую среду, в которой действует познающая система. Ее действия не сводимы к представлениям, ради которых они осуществляются, — действия шире. Поэтому адаптационные механизмы системы с первым контуром могут измениться, если у нее появляется второй контур, т. е. рефлексивное поведение. Это связано с увеличением числа степеней свободы за счет мутаций (появление новых шаблонов, расширение фазового пространства). Следовательно рефлексирующая система действует частично финитно с помощью первого контура (опираясь на освоенные рациональные шаблоны-смыслы), а частично инфинитно, т. е. порождая новые шаблоны-смыслы за счет второго контура, вступающего в работу в случае неустойчивости первого контура. Для того чтобы включился в работу второй контур система должна действовать, т. е. расширять область соприкосновения с окружающей средой (менять предметную область). А так как деятельность в отличие от состояния описать стандартным образом невозможно [5, 39] (ее можно только воспроизвести), то нельзя «описать» (спрогнозировать) и процесс творчества. Недаром смыслы, заложенные в речи человека, не передаются другому, а воспроизводятся слушателем (подчас с существенными искажениями).

1.2. ТЕОРИЯ ЭЙГЕНА

Хотя сделать научно обоснованный прогноз появления нового, сидя за письменным столом, нельзя (угадать можно) — надо встать из-за стола и «действовать», но попытаться ретроспективно описать процесс появления нового можно. Из последних работ в этом направлении особого внимания заслуживает концепция М. Эйгена [92] (см. краткое изложение концепции в работах [4, 8]) предбиологической молекулярной эволюции, в которой дарвинские идеи эволюции и отбора распространяются на «популяции» макромолекул.

Их самоорганизация и селекция возможны при наличии метаболизма (открытость системы; приток вещества, обладающего избытком свободной энергии), самовоспроизведения (автокатализ) и мутагенеза, необходимого для создания новой информации. Для того чтобы система

была дарвинской, необходимо еще «постоянство общей организации»: суммарное число всех видов молекул в системе должно поддерживаться на постоянном уровне путем регуляции потоков.

Система нелинейных уравнений, описывающих конкуренцию n сортов полимеров с концентрациями x_i ($i = 1, \dots, n; \sum_{i=1}^n x_i = K = \text{const}$), имеет вид

$$\dot{x}_i = (w_i - \bar{E}(t))x_i + \sum_{j \neq i} \phi_{ji} x_j, \quad (1.1)$$

где w_i — селективная ценность, зависящая от скоростей метаболизма;

$\bar{E}(t) = \left(\sum_{j=1}^n E_j x_j \right) / \sum_{j=1}^n x_j$ — средняя продуктивность (E_j — продуктивность j -го сорта полимера, равная разности скорости безошибочного самокопирования и скорости распада); слагаемое $\sum_{j \neq i} \phi_{ji} x_j$ — описывает мутации, связанные с появлением i -го сорта за счет ошибок копирования сорта j (мутации «сидят» также в селективной ценности w_i , определяемой в том числе и ошибками автокопирования сорта i).

Увеличение числа макромолекул для которых $w_i > \bar{E}$, сдвигает $\bar{E}$ к оптимальному значению, равному максимальной селективной ценности w_m из всех имеющихся видов: $\bar{E} \rightarrow w_m$ (выделение имевшейся информации). Однако это «селекционное равновесие» неустойчиво и нарушается при появлении мутанта, для которого $w_{m+1} > w_m$ (создание новой информации); при безошибочном автокопировании эволюция прекратилась бы.

Конкуренция за «пищу» (высокоэнергетические мононуклеотиды) и отбор происходили среди первых информационных биомолекул РНК, способных к самовоспроизведению. Выигрывает молекулярная структура, способная генетически управлять своим синтезом. Оказалось, что существует верхний предел для количества информации (длины гена), содержащейся в устойчивой самопродуцирующейся системе.

Его увеличение возможно при кооперации молекул РНК в так называемый гиперцикл на основе взаимной каталитической активности. Гиперциклы обеспечивают устойчивое и контролируемое сосуществование участников, обеспечивая их когерентный рост. Они могут развиваться за счет включения новых участников (если это дает селективное преимущество), конкурировать и объединяться.

Мутации совершенствуют генетическую информацию, которая передается следующему поколению делением компартмента на две единицы. Отбираются компартменты более приспособленные к условиям окружающей среды. Происходит ветвление на генотип и фенотип; эволюцию можно рассматривать как автоволновой процесс в «пространстве фенотипов». Движение «волн» обеспечивает репродукция: точная – усиливает, ошибочная – распространяет.

1.3. ЭПИСТЕМОЛОГИЯ

Посмотрим каким образом подобные рассуждения можно перенести на науку (развитие знания) как продолжение биологической эволюции с книгами вместо генов. Концепции эволюционной эпистемологии базируются на «постнеодарвинизме» и сводятся примерно к следующему [76].

Возникающий на основе определенного генотипа организм (фенотип) не полностью определяется действием генов. Устойчивые траектории развития организма определяются и воздействием среды. Естественный отбор, связанный с требованиями окружающей среды, через фенотип действует на генофонд. Приобретенные свойства имеют отношение к эволюционному изменению, идущему в пользу генотипа, снабжающего наследников способностью адаптивно реагировать на окружение (обладающих большей приспособляемостью). Тем самым возникает обратная связь окружающей среды с генотипом в формировании фенотипа.

Генотип сопоставляется с теоретическим знанием, фенотип с научной практикой. Система научных знаний обладает особой устойчивостью наподобие гиперциклов, но как и они способна эволюционировать. Новые понятия (мутации) должны вписаться в «научный гиперцикл» (модернизировать его), а новый гиперцикл (геном) проверен на практике (эффективность научного фенотипа в новой предметной области). Существующий гиперцикл для своей устойчивости в новых

предметных областях должен постоянно совершенствоваться, выбирая из популяций идей наиболее эффективную для доступа к новым сферам реальности (предметным областям). Наука (как сознание социума) развивается в конечном итоге только через действие. В научном языке (геофонде) генерирование мутаций (концептуальные нововведения) происходят через образование метафор, т. е. через нелинейность [30, 39].

На рис. 1.1 показана подобная схема, причем научная эволюция повторяет в другом масштабе эволюцию биологическую, что находится в соответствии с фрактальными свойствами развивающихся систем.

Уравнение (1.1) остается в силе при соответствующей интерпретации входящих в него величин. Например x_i – «популяция идей» или число («плотность») людей (ученых), носителей идеи (теории) i . Уравнение (1.1) можно преобразовать к такой форме [8]:

$$\xi_i(t) = \left(\lambda_i - \sum_{l=1}^n \lambda_l \xi_l(t) / K \right) \xi_i(t), \quad (1.2)$$

где ξ_i – линейные комбинации x_i (в нашей интерпретации: квазиидея ξ_i отличается от x_i тем, что содержит как доминантную идею, так и все ее мутанты). Отбор происходит до тех пор, пока не остается одна квазиидея с максимальным собственным значением $\lambda_{\max}$.

Ситуацию наглядно можно изобразить на фазовой плоскости. Пусть $i = 1, 2$. Тогда система (1.2) примет следующий вид

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \lambda_1 \xi_1 (1 - \xi_1 / K - \lambda_2 \xi_2 / K \lambda_1); \\ \dot{\xi}_2 &= \lambda_2 \xi_2 (1 - \xi_1 / K - \lambda_1 \xi_1 / K \lambda_2). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Пришли к известной модели Лотки – Вольтерра, которая хорошо изучена (см. например, [84]). На рис. 1.2. представлены фазовая плоскость и возможный характер изменения решения во времени. Последнее зависит от соотношения между λ_1 и λ_2 . По аналогии с экологией величину λ_i можно назвать научным потенциалом, а K – научной емкостью среды (например число ученых, способных воспринимать идеи определенного уровня). Побеждает идея, у которой больше λ_i .

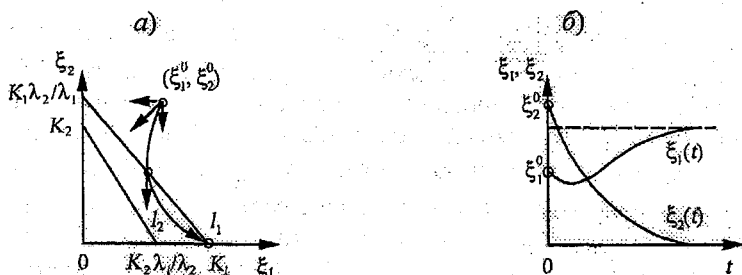


Рис. 1.2. Фазовая плоскость (а) и изменение решения во времени (б).

l_1, l_2 — прямые, для которых $d\xi_1/dt = 0$ и $d\xi_2/dt = 0$ соответственно;
 K_i — научная емкость среды для i -ой идеи ($i = 1, 2$).

1.4. СТОХАСТИЧЕСКОЕ ОБОБЩЕНИЕ

Перейдя от (1.1) к (1.2), мы дали возможность победить одному квазивиду полностью подавив все остальные. К более мягким результатам придем, если введем в правую часть (1.2) источник мутаций $F_i(t)$ (случайный процесс типа белого шума: $\langle F_i(t)F_j(t') \rangle = c_{ij}\delta(t-t')$). Получим вероятностный процесс, подчиняющийся многомерному уравнению Фоккера — Планка — Колмогорова (ФПК) для эволюции совместной плотности вероятности $p(t, \xi_1, \xi_2, \dots)$:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(\left(\lambda_i - \sum_{l=1}^n \lambda_l \xi_l / K \right) \xi_i \right) p + \frac{1}{2} \sum_{j,i=1}^n \frac{\partial (c_{ij} p)}{\partial \xi_j \partial \xi_i}. \quad (1.4)$$

За счет коэффициента диффузии даже при «победе» одной идеи останутся в небольшом числе и все другие для будущей борьбы (рис. 1.3).

Модель (1.4) как и (1.2) не описывает подробно все иерархические уровни научного познания. Но все они в обязательном порядке в свернутом виде имеются. В явном виде уравнение (1.4) описывает только корреляцию идей ξ_i . Не любых идей, а только способных к взаимодействию (принадлежащих одной статистической совокупности, иначе

не существовало бы $p(t, \xi_1, \xi_2, \dots)$; по-другому: принадлежащих взаимодействующим рациональным шаблонам ξ_i). Эти идеи не имеют прямого выхода в предметную область, с которой взаимодействует фенотип. Ведь фенотип — это генотип в действии. А генотип науки — это огромный самовоспроизводящийся комплекс идей, объединенных коопераций (гиперциклом). Чтобы пройти через отбор, конкуренты ξ_i должны быть включены в этот гиперцикл и в его составе пройти проверку на практике (успешно действовать в предметной области). Эта «успешность» определяется коэффициентами λ_i , K , которые интегрально и представляют генотип и фенотип науки. Можно, в принципе, говорить и о конкуренции гиперциклов, но это конкуренция не совершенно разных гиперциклов (наука, как известно, едина и интернациональна), а — модификаций одного и того же гиперцикла.

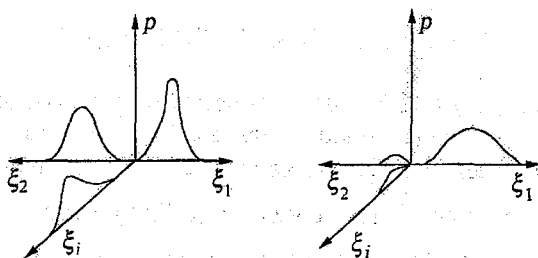


Рис. 1.3. «Вероятностная победа» ξ_1 -ой идеи при поглощающих граничных условиях

Конечно, возможно появление такой идеи-мутанта (технологии действия в предметной области), которая реализуется без вхождения в освоенную систему научных знаний (типа левитации или ясновидения). Однако это уже будет паранормальная наука, оперирующая не значением объективно сложившихся в ходе исторического развития общества системой связей идей, включенных в гиперцикл, а их индивидуальным смыслом, который, как известно [39, 40], всегда ситуативен. Но эту паранормальную науку мы будем «понимать», ориентируясь не на научную речь, насыщенную общепонятными значениями, а на то, ради чего эта «наука» делается, т. е. — на мотив.

На рис. 1.1 показано взаимодействие генотипа, фенотипа и предметной области. Неспособность фенотипа справиться с проблемами

(связанная с тем, что фенотип оказался в неосвоенной генотипом предметной области) приводит к некоторому интервалу неопределенности для существующего генотипа. В рамках модели (1.4) шансы на рационализацию этой области будут, если $c_{ij} \neq 0$, т. е. если есть источник мутаций, коррелирующих с источником неустойчивости из вновь выделенной предметной области. Но эта корреляция помогает на этапе оптимизации (выделения информации ξ_i из имеющегося шума). Если оптимум достигнут, то нужен механизм порождения новой информации ($w_m \rightarrow w_{m+1}$, см. (1.1)), т. е. нужно обратное влияние предметной области на процесс мутогенеза. Но эта связь не может быть чисто информационной (сознательной, «вербальной»), а — связана с действием, затраченной энергии. Круг, как говорится, замкнулся.

2. РОЛЬ НЕЛИНЕЙНОСТИ

2.1. МЕХАНИЗМ ВНУТРЕННЕЙ АКТИВНОСТИ

Для того, чтобы модели типа (1.1) описывали процессы развития необходимо выполнение ряда условий, в том числе открытости, нелинейности (которая отвечает, в частности, за мутагенез) и самовоспроизведения (порождаемого, в том числе, обратными связями).

В нелинейных моделях принцип суперпозиции уже не выполняется и вместо уравнений (В.1) имеем связанную бесконечную систему [38, 50]:

$$dC_n/dt = f_n(C_0, C_1, \dots) - \gamma_n C_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

где $1/\gamma_n$ — характерное время релаксации отдельных мод. В соответствии с (2.1), в системе происходят сложные взаимодействия между модами, приводящие к появлению чего-то нового (чего не было во входном воздействии). И в этом смысле нелинейные системы обладают внутренней активностью.

На практике, разумеется, оперируют конечными системами уравнений, опираясь, например, на следующие рассуждения. Во-первых, функции f_m допускают так называемое адиабатическое приближение:

если их характерные времена много больше, чем $1/\gamma_m$, то изменение амплитуд можно описать не дифференциальным, а алгебраическим уравнением (т. к. $dC_m/dt \approx 0$). Во-вторых, процессы, описываемые первыми уравнениями из (2.1), идут медленнее остальных ($\gamma_m \ll \gamma_{m+1} \ll \gamma_{m+2} \ll \dots$). В такой ситуации приходим к системе $m+1$ дифференциальных и последовательности алгебраических уравнений:

$$dC_n/dt = f_n(C_0, C_1, \dots) - \gamma_n C_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m,$$

$$C_n = f_n(C_0, C_1, \dots)/\gamma_n, \quad n = m+1, m+2, \dots$$

Если из системы алгебраических уравнений можно выразить $C_{m+1}, C_{m+2}, \dots$ через $C_0, \dots, C_m$ (или есть основания, чтобы пренебречь $C_{m+1}, C_{m+2}, \dots$), то, указав необходимую точность и характерные времена, можно ограничиться конечной системой (2.1), смысл которой заключается в том, что она имеет иерархию – медленные моды управляют быстрыми. Таким образом, по тем или иным соображениям систему с бесконечным числом степеней свободы, описываемую уравнением в частных производных, можно заменить на систему обыкновенных дифференциальных уравнений с конечным их числом.

Внутренняя активность нелинейных систем приводит к тому, что из пассивных преобразователей (усилителей) внешнего воздействия они становятся «генераторами идей». Если внешнее воздействие

$u = \sum_{i=0}^S u_{mi} \cos \omega_i t$ поступает на вход нелинейного элемента (с избирательной линейной частью) $i = f(u)$, то, рассматривая на выходе различные составляющие с частотами ω_i как независимые переменные, можно разложить выходной сигнал в кратный ряд Фурье как функцию многих переменных [59]:

$$i = \frac{1}{2^S} \sum_{k_1} \sum_{k_2} \dots \sum_{k_S=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\pi^S} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\sum_{i=0}^S u_{mi} \cos \omega_i t\right) \cos k_1 \omega_1 t \cos k_2 \omega_2 t \cdot \right. \\ \left. \dots \cos k_S \omega_S t d(\omega_1 t) d(\omega_2 t) \dots d(\omega_S t) \right] \cos(k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + \dots + k_S \omega_S) t.$$

Таким образом происходит обогащение спектра, появляются комбинированные частоты.

Чтобы эти «мутантные» идеи самовоспроизводились нужен автокатализ (положительная обратная связь), а чтобы появлялись новые — нужна открытость (взаимодействие с окружающей средой), причем в новых предметных областях (например на новых участках нелинейных характеристик).

Рассмотрим механизм превращения «усилителя» в «генератор» [59]. Из рис. 2.1 следует, что $k = \dot{u}_{\text{вых}} / \dot{u}_{\text{вх}}$; $\beta = \dot{u}_{\text{р}} / \dot{u}_{\text{вых}}$; $k_{\text{р}} = \dot{u}_{\text{вх}} / \dot{u}_{\text{сигн}}$ (здесь точка означает комплексные величины; $k_{\text{р}} = k / (1 - k\beta)$ — коэффициент передачи в линейной системе при синусоидальном сигнале). При $|k_{\text{р}}| > |k|$

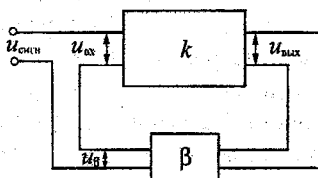


Рис. 2.1. Усилитель с обратной связью.

обратная связь называется положительной, при $|k_{\text{р}}| < |k|$ — отрицательной. При $k\beta = 1$ величина $|k_{\text{р}}| \rightarrow \infty$, усилитель самовозбуждается (становится неустойчивым) и превращается в генератор, т. е. на выходе появляются колебания, определяемые только собственными параметрами системы.

На самом деле данные рассуждения приводят не к новым колебаниям (модам или их комбинациям), а к бесконечному возрастанию выходного сигнала при $k\beta \rightarrow 1$ (чего не может быть по физическим соображениям). Само применение комплексных величин в данном контексте предполагает установившийся режим. Поэтому стремление $k\beta$ к 1 — это только индикатор потери устойчивости. Режим может застabilizироваться только если ввести в систему нелинейность.

Реальный механизм работы заключается, по-видимому, в следующем. В равновесном состоянии (когда сбалансированы потоки энергии и информации с окружающей средой) и при малых внешних воздействиях система ведет себя пассивно (находится в линейной области). В случае увеличения внешнего воздействия или «перемещения» в новую предметную область (например в область новых частот) система оказывается в неравновесной ситуации. Если для этих частот ω $k(\omega)$

и $\beta(\omega)$ не равны нулю (у системы имеются нераскрытые потенциальные, скажем генетические, возможности), то происходит самовозбуждение. Так как нарастание выходного сигнала не может идти до бесконечности, то это означает, что на этих частотах система поведет себя нелинейным образом (k и β уменьшат свои значения). В спектре выходного сигнала появляются новые гармоники (или их комбинации), которые и определяют дальнейшее поведение системы. Таким образом система с одной стороны находится все время в режиме самовозбуждения (активности), а с другой – в режиме нелинейного подавления неустойчивых мод. В результате этого «подавления» происходит кооперация мод с выделением ведущих (новых фазовых переменных, шаблонов, аттракторов). Произошло развитие системы, для которого необходимо было: во-первых, оказаться в новой предметной области, т. е. в неравновесной ситуации, а во-вторых, система должна обладать скрытыми (в нелинейности) потенциальными возможностями (так как $k(\omega) \neq 0$, $\beta(\omega) \neq 0$) для корреляции с новыми условиями (неравновесность «будит» нелинейность, которая «спит» в состоянии равновесия).

В материальном мире роль базисных функций могут играть элементарные частицы – волны, характерные времена жизни которых от 10^{-24} сек до более чем $2 \cdot 10^{30}$ лет, т. е. охватывается «весь» частотный диапазон. Из них и строятся (благодаря нелинейности материальных взаимодействий) все материальные «фазовые переменные», т. е. окружающие нас объекты. Сама эволюция этого мира обусловлена неравновесными ограничениями, т. е. постоянно действующими условиями для создания неисчезающих потоков (энергии, информации и т. д.) между объектами и внешней средой. Причем одной неравновесности для эволюции недостаточно (также как и одной нелинейности). Пусть, например, имеем модель [62]: $dX/dt = \lambda - kX$, где X – переменная, характеризующая состояние системы; λ – параметр, характеризующий степень внешнего неравновесного ограничения; k – коэффициент. В силу линейности этого уравнения, при любой удаленности от равновесия λ , существует стационарное состояние $X_{ст} = \lambda/k$. В случае же нелинейной связи $X_{ст} = f(\lambda)$, но недостаточной удаленности от равновесия, система все равно оказываемся в линейных условиях.

2.2. ТВОРЧЕСКАЯ ЭВОЛЮЦИЯ И СВЕРХСТАНДАРТНЫЙ АНАЛИЗ

Посмотрим на ситуацию несколько шире. Генератор обязательно «содержит в себе» усилитель, потому что без постоянного усиления (за счет положительной обратной связи) некоторых мод из внешнего воздействия (т. е. избирательного взаимодействия с окружающей средой) и их нелинейного искажения не будут порождаться новые мутанты. Но стабильно работающий генератор уже ничего «нового» не порождает. Это, говоря «бытовым» языком, — некий обыватель, живущий застывшими интересами, нудно воспроизводящий стереотип поведения. Чтобы он начал развиваться, ему надо действовать (менять предметную область), причем «действовать» могут и другие, помещая его в новые условия. В этих новых условиях у него есть две возможности: либо погибнуть, не найдя своей экологической ниши, либо попытаться проявить свои скрытые возможности. Последнее означает для «обывателя» стать новым усилителем, прийти в состояние самовозбуждения от уже новых мод из окружения и нелинейного их искажения, заставить себя, поменяв свой стереотип поведения и став новым генератором.

Таким образом происходит творческая эволюция, причем чтобы образовалось новое необходимо: 1) действовать (в широком смысле этого слова), чтобы оказаться в новой предметной области в неравновесных условиях; 2) иметь способность усиливать «до бесконечности» определенные воздействия новой предметной области; 3) проявлять способность нелинейно искажать эти усиленные воздействия, формируя, тем самым, новый стереотип поведения. (На самом деле необходимо еще, чтобы этот новый стереотип поведения оказался конкурентоспособным, т. е. полезным в новой предметной области: не все новое имеет право на жизнь.) Ситуацию поясняет рис. 2.2.

Между усилителем и генератором — разрыв («точка бифуркации»), а именно: самовозбуждение — это уход в иррациональное никуда,

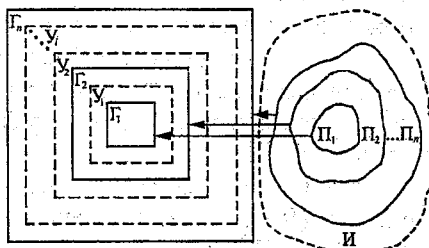


Рис. 2.2. К творческой эволюции.

Г — генератор, У — усилитель, П — предметная область, И — инфинитная реальность.

но именно на базе самовозбуждения и неустойчивости создается новый генератор. Что значит новый? Не в узком смысле (вместо мультивибратора – блокинг-генератор), а в более фундаментальном смысле. И как математически описать появление этого «нового»?

Для ответа на этот вопрос надо воспользоваться актуально существующими величинами (числами), а не процессами, стремящимися к бесконечности. Но какими? Если обратиться к истокам создания дифференциального исчисления, к работам Лейбница, то выйдем на монады как множества гипердействительных чисел (в современной терминологии), бесконечно близких к стандартному действительному числу [82].

В сверхстандартном анализе [65] нуль (как и бесконечность) арифметизируется, а поля действительных чисел полностью определяются производящими их натуральными рядами, каждый из которых характеризуется своим трансфинитным числом (своей мощностью χ). А так как, согласно теореме Цермело, всякое множество можно вполне упорядочить, т. е. привести к мощности χ , то из иррациональной точки бифуркации мощностью континуум C всегда существует выход на рациональную траекторию. Из следующей точки бифуркации есть выход на более мощную траекторию уже двухфазного пространства и т. д. Таким образом, усложнение фазового пространства (т. е. творчество) можно описать трансфинитными числами.

Если иррациональный шаблон имеет мощность C , то каждая предметная область порождает свой алеф χ , с помощью которого можно описать новую совокупность фазовых переменных, оставаясь в области чисел.

Для описания работы линейного усилителя надо использовать систему (В.1), т. е. «бесконечное» число мод, порожденных натуральным рядом $N = 0, 1, 2, \dots$ При самовозбуждении это описание не годится, но после нелинейного искажения и превращения усилителя в генератор моды начинают взаимодействовать друг с другом, порождая новые моды, которых не было в наборе мод, связанных с натуральным рядом N . Описание (2.1) – расширенное описание, в нем уже нет места неустойчивости (т. е. бесконечных, с точки зрения «усилителя», мод) и порождено оно натуральным рядом большей мощности χ_1 . Рисунок 2.3 показывает условно связь между появлением мутантов и вложением натуральных рядов $N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \dots$

Если с появлением новых комбинаций (мутантов, фазовых переменных) связывать расширение натурального ряда, ведущему к новому алефу χ , то в метамодели развития роль количества начинает играть последовательность вложенных натуральных рядов, а роль качественных скачков – переход $\chi_i \rightarrow \chi_{i+1}$. Мету (единство количества и качества) в этой модели определяет аксиома выбора Цермело, ибо последовательность натуральных рядов («количество») порождает трансфинитные числа-алефы («качество») в духе работы [65], пока множества можно вполне упорядочивать (т. е. проводить расчеты в бесконечных множествах).

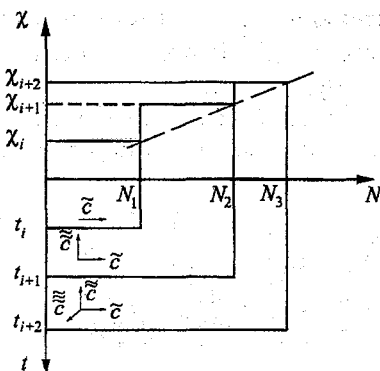


Рис. 2.3. Связь между расширением фазового пространства и вложением натуральных рядов.

В новой предметной области «просыпаются» спящие потенциальные возможности, заложенные в нелинейности. Они раскачивают систему, вызывая стремление некоторых мод к бесконечности, но они же актуализируют эту бесконечность, наполняя ее определенным физическим содержанием, создавая комбинации новых мод-мутантов, не дающих системе уходить в бесконечность, которой просто не существует с «точки зрения» расширенной системы. Реальная (актуальная) бесконечность связана с $(\tau, \tilde{\tau})$, $(\tau, \tilde{\tau}, \tilde{\tilde{\tau}})$ и т. д. (см. ниже).

Назовем τ -полем поле действительных чисел, порождаемых натуральным рядом N_1 (рис. 2.3). Поле, порождаемое рядом N_2 , – $(\tau, \tilde{\tau})$ -полем и т. д. При переходе к множеству натуральных рядов абсолютный нуль заменяется последовательностью нулей [65]:

$$\diamond_0 = 0; \diamond_{(1)}, \diamond_{(2)}, \dots, \diamond_{(i)}, \dots,$$

связанных с соответствующей бесконечностью $\diamond_{(i)} = 1/\diamond_{(i)}$, $i = 0, 1, 2, \dots$ Каждое предыдущее поле является аппроксимацией последующего, а каждое последующее – эволюцией предыдущего, при-

чем элементы последующего поля ($i + 1$) выступают как актуально бесконечно большие по отношению к предыдущему (i), если их аппроксимация равна бесконечности (они называются носителями мощности χ_{i+1}). Поэтому фазовая переменная ε – носитель мощности N_1 , $\varepsilon - N_2$ и т. д. а)

Таким образом, стремление фазовой переменной (или ее моментов в случае вероятностного описания) к бесконечности означает, что

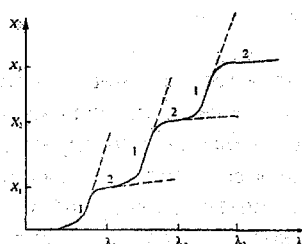
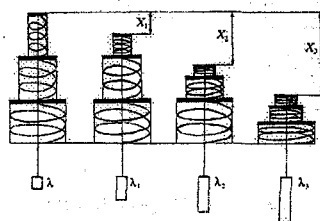


Рис. 2.4. «Вульгаризация» понятия мощности (новые «фазовые переменные» — пружины начинают актуализироваться по мере усиления степени неравновесности λ).

1 — область «самовозбуждения», 2 — область «генерации».

комая функция P — вероятность генерации познающим субъектом, имеющим некую физическую картину мира (базу знаний), адекватной идеализированной информации о предметной области :

на сцену выступает носитель большей мощности (следующая фазовая переменная). Неустойчивость — это условие ее появления. В метамодели развития фазовое пространство заменяется натуральным рядом, порождающим соответствующую мощность. Вот почему в этой модели присутствуют только числа (обычные и трансфинитные), «растягивающие» числовое поле по точности описания. Число слоев можно связать с оператором обобщенного времени [38]. Обычное время появляется в случае, если мы возвращаемся к фазовому описанию.

Ситуацию поясняет рис. 2.4.

Интересен вопрос о вероятностном механизме освоения выделенной предметной области. Если механизм порождения нового универсален, то должна быть справедлива модель Эйгена, в которой имеется только одна ис-

$$\frac{dP}{dX} = \frac{C}{X_0} P \left(1 - \frac{P}{KC} \right).$$

Здесь независимая переменная X (база данных) порождается последовательностью натуральных рядов. В качестве «внешнего воздействия» выступает «иррациональный шаблон» C , в котором с помощью соответствующего «коэффициента» K , определяемого базой знаний и отвечающего за энергию взаимодействия, выделяют предметную область KC , т. е. то, что в принципе можно освоить. Но так как речь идет о вероятности генерации идеализированной информации, то это не просто «предметная область», а некоторая вероятностная мера, построенная на ней и выступающая как некий вероятностный потенциал для освоения. Так как P отражает процесс движения информации по мере интеграции базы данных, то в модели присутствует параметр X_0 , связанный с введением в модель «инерционности» ($[X_0] = [X][P]$, см. также [39]).

По аналогии с экологией, величину KC (это аналог K в модели Эйгена) можно назвать смысловой емкостью выделенной предметной области (соответствующей алефу расширенного натурального ряда). Величина C/X_0 (аналог λ) в экологии называется биологическим потенциалом популяции. В нашем случае ее можно назвать информационным потенциалом реципиента. Можно расширить модель до системы реципиентов (научных школ – гиперциклов), конкурирующих за освоение предметной области.

При ряде предположений (см. [39, 88]) можно показать, что в средних условиях полноты информации вероятность познания истины $P_1 = 0,6224593$ (доли большого отрезка в пропорции «золотого сечения») значительно выше вероятности пребывания в неизвестности, а интегральная вероятность положительных идентификаций $P_2 = 0,7310585$ (P_2 близка к величине, обратной постоянной Больцмана) меньше единицы (следствием этого является возможность только частично инфинитного моделирования и прогнозирования).

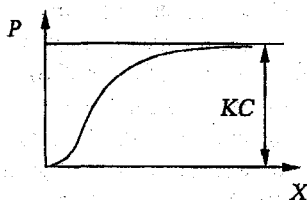


Рис. 2.5. Иллюстрация механизма насыщения.

В данной модели, как и вообще в системе Эйгена, *КС* является неравновесным ограничителем (задает степень неравновесности), а обратная зависимость «инерции» от *P* (см. [39]) порождает нелинейность. Все это вместе взятое приводит к появлению определенного механизма насыщения (рис. 2.5).

3. МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ РЕЧНОГО СТОКА

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ВЫТЕКАЮЩАЯ ИЗ ДИСКУССИИ 50-Х ГОДОВ О СТАТИСТИЧЕСКИХ И ГЕНЕТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ В ГИДРОЛОГИИ

Гидрологи старшего поколения наверняка помнят дискуссию в журнале «Известия АН СССР, ОТН» в 1951–1953 гг., посвященную противопоставлению статистических и генетических методов в гидрологии. Можно давать разную интерпретацию ее результатам, в том числе, считая ее бесплодной. Н. А. Картвелишвили [24] «бесплодность» видит в непонимании спорящими сторонами того, что эти методы на самом деле дополняют друг друга: «... статистический метод, который, казалось бы, оперирует только с данными непосредственных наблюдений над речным стоком, на самом деле использует генетические соображения, хотя и в очень общей форме». Сам Картвелишвили под генетическими методами понимал не чисто динамические модели формирования стока, а «вскрытие связей между функциями распределения вероятностей, управляющих процессами изменения стокообразующих факторов, и функциями распределения вероятностей, управляющих процессами стока» [24]. Необходимость создания генетического метода в таком его понимании обосновывалась тем, что: «Статистический метод в чистом виде по самой своей сути может только экстраполировать на будущее вероятностные характеристики стока, полученные из данных наблюдений, и не может учитывать влияния на сток хозяйственной деятельности человека» [24].

Современное состояние нелинейной науки позволяет вернуться к дискуссии пятидесятилетней давности и поставить вопрос более радикально: можно ли с помощью чисто динамических моделей описывать

процесс речного стока, который по общепринятым статистическим критериям не будет отличаться от реального ряда наблюдений.

Широкое использование в гидрологии статистических методов начинается с работ А. Хазена [97, 98], А. Фостера [94, 95, 96] и Д. Л. Соколовского [77, 78]. Их исследования привели к обоснованию применимости для описания распределений рядов стока уравнения Пирсона

$$\frac{dp}{dQ} = \frac{Q - a}{b_0 + b_1 Q + b_2 Q^2} P,$$

где p – плотность вероятности; Q – расход (слой, модуль) стока; a , b_0 , b_1 , b_2 – коэффициенты, численные значения которых можно найти решая обратную задачу для данного уравнения при известном распределении $p(Q)$ или его четырех моментах.

Решением этого уравнения является семейство кривых Пирсона. Наиболее широкое распространение в гидрологии получила кривая Пирсона III типа. В работе [73] довольно подробно описана история вопроса, связанная с использованием этой кривой и попытками ее «улучшения».

Основным недостатком этой модели является то, что в ней отсутствует генезис формирования стока. Это уравнение дает «геометрическое» описание кривой плотности вероятности $p(Q)$ (или обеспеченности). Его коэффициенты подбираются формальным образом, чтобы решение лучше всего соответствовало эмпирической кривой. Их значения связаны с моментами распределения, но генезис формирования стока не раскрывают.

Этот недостаток устраняется [31, 34, 37], если речной бассейн рассматривать как формирующий фильтр и описывать динамическим уравнением первого порядка:

$$dQ/dt = -cQ + N, \quad (3.1)$$

где $c = 1/k\tau$, k – коэффициент стока, τ – время релаксации; $N = X/\tau$, X – интенсивность осадков; t – время.

Вводя белые шумы ($c = \bar{c} + \varepsilon$, $N = \bar{N} + \tilde{N}$) с интенсивностями G_{ε} , G_N , $G_{\varepsilon N}$ и применяя к (3.1) известную в теории случайных процессов процедуру стохастического обобщения (при этом важное значение имеет тот факт, что исходное динамическое уравнение первого порядка, а введенные шумы имеют нулевой радиус корреляции), приходим к описанию марковского случайного процесса формирования речного стока с помощью уравнения Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial p(Q, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial Q} [A(Q, t)p(Q, t)] + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial Q^2} [B(Q, t)p(Q, t)], \quad (3.2)$$

где коэффициенты сноса ($A(Q, t)$) и диффузии ($B(Q, t)$) определяются выражениями

$$A = -(\bar{c} - 0,5G_{\varepsilon})Q - 0,5G_{\varepsilon N} + \bar{N},$$

$$B = G_{\varepsilon}Q^2 - 2G_{\varepsilon N}Q + G_N.$$

В известном смысле эта модель и должна лежать в основе того генетического метода формирования стока, о котором писал Картвелишвили. С ее помощью действительно эффективно решаются задачи, связанные с оценкой гидрологических последствий антропогенного изменения климата и интенсивности хозяйственной деятельности [36, 37, 41, 43, 44]. В случае стационарных случайных процессов уравнение (3.2) переходит в уравнение Пирсона, коэффициенты которого, однако, уже приобретают совершенно определенный физический смысл («ответчают» за генезис формирования стока):

$$a = \frac{G_{\varepsilon N} + 2\bar{N}}{2\bar{c} + G_{\varepsilon}}; \quad b_0 = \frac{-G_N}{2\bar{c} + G_{\varepsilon}};$$

$$b_1 = \frac{G_{\varepsilon N}}{2\bar{c} + G_{\varepsilon}}; \quad b_2 = \frac{-G_{\varepsilon}}{2\bar{c} + G_{\varepsilon}}.$$

Модель (3.2) пока еще совершенно не «освоена» в гидрологии. Сделаны только первые шаги, которые сразу же поставили новые вопросы: каковы реальные граничные условия (поглощения, отражения,

смешанные), насколько применима в реальных условиях гипотеза квазистационарности в отношении коэффициентов и т. д. Но в любом случае ответы на эти вопросы будут «псевдоинформацией» (т. е. информацией только для гидрологов), ибо принципиально все уже сказано самим фактом написания этого уравнения в гидрологической предметной области. Более заманчиво получить динамическую модель, которая сама бы порождала «вероятность распределения расходов воды», т. е. порождала бы шумы из «ничего».

3.2. МОДЕЛЬ ДИНАМИЧЕСКАЯ – РЕШЕНИЕ «СТАТИСТИЧЕСКОЕ»

Динамическая модель (3.1) описывает речной бассейн как пассивную систему, управляемую «внешней средой», характеризуемой параметрами X , k и τ . В уравнении, представленном на рис. 3.1 а, предполагается, что время релаксации (или «добегания») τ – постоянная величина: $\tau = \tau_0 = \text{const}$. Но это справедливо только в первом приближении. Известно, что на самом деле этот параметр является функцией расхода воды: при наполнении русловой сети водой гидравлические сопротивления, как правило, уменьшаются и скорость увеличивается. Поэтому можно принять $\tau = W/Q$, где W – константа, имеющая размерность объема (рис. 3.1 б). Тогда модель примет вид [37]

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q^2}{kW} + \frac{QX}{W}, \quad (3.3)$$

т. е. за счет введения обратной связи (рис. 3.1 в) уравнение стало нелинейным.

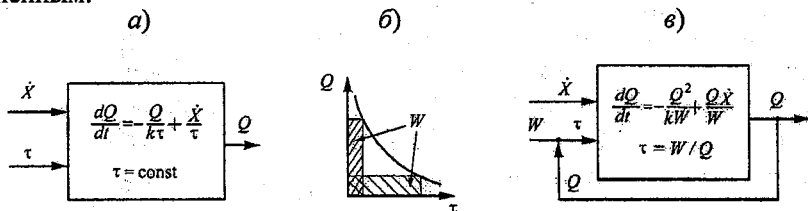


Рис. 3.1. Преобразование линейной модели формирования стока в нелинейную за счет введения обратной связи.

Перейдем к дискретному времени с интервалом T равным одному году. Тогда модель (3.3) примет следующий вид

$$Q_{i+1} = F(Q_i) = Q_i(1 + X(1 - Q_i/kX)/Q_0), \quad (3.4)$$

где $Q_0 = W/T$.

Это гидрологический аналог хорошо известного логистического уравнения или уравнения Ферхюльста [39, 64, 68, 69, 87]. Пользуясь экологической терминологией, назовем величину kX гидрологической емкостью бассейна, а величину X/Q_0 – гидрологическим потенциалом. При $0 \leq X/Q_0 \leq 2$ решение уравнения (3.4) монотонно приближается к состоянию равновесия kX (рис. 3.2 а). При дальнейшем увеличении X/Q_0 возникают циклы с удваивающимся периодом (рис. 3.2 б), пока при $X/Q_0 \geq 2,57$ решение не станет хаотическим (рис. 3.2 в). Бифуркационная диаграмма (подобные рисунки стали общим местом [64, 91]) этого процесса представлена на рис. 3.3.

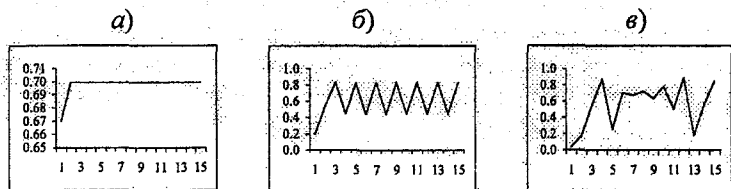


Рис. 3.2. Вид решения уравнения (3.4) в зависимости от значения гидрологического потенциала (по вертикальной оси отложены значения Q , а по горизонтальной – число итераций).

а) 1,9; б) 2,41; в) 2,59.

В зависимости от численного значения гидрологического потенциала процесс имеет свой аттрактор, на который выходит траектория после завершения переходного режима. При $X/Q_0 < 2$ аттрактор состоит из одной точки, при $2 < X/Q_0 < \sqrt{6}$ – из двух и т. д. (вплоть до области хаоса). Возникает вопрос, в какой степени этот хаос мож-

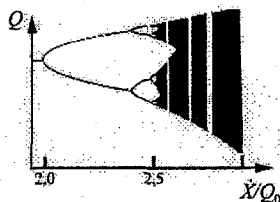


Рис. 3.3. Бифуркационная диаграмма процесса итераций отображения (3.4)

можно считать практически случайным процессом с точки зрения обычного статистического аппарата, используемого в гидрологии.

В табл. 3.1 представлены результаты сравнения по критерию согласия Колмогорова фактических кривых обеспеченности с таковыми, полученными по стационарному варианту модели ФПК (параметризация проводилась по картам СНИПа) и по модели (3.4). Последняя использовалась в двух вариантах: в первом – гидрологический потенциал и емкость были постоянными (для обеспечения устойчивости гидрологический потенциал во всех случаях существенно занижался), во втором – варьировались на каждой итерации с помощью датчика случайных чисел в пределах $\pm 5\%$ от средних значений.

На рис. 3.4 в качестве примера представлен фактический ряд, плотность вероятности, автокорреляционная функция и кривая обеспеченности для одного из пунктов наблюдений, а также набор этих характеристик, полученных по сгенерированному ряду стока (для модели ФПК ряд не генерировался, хотя это можно сделать различными способами [37]).

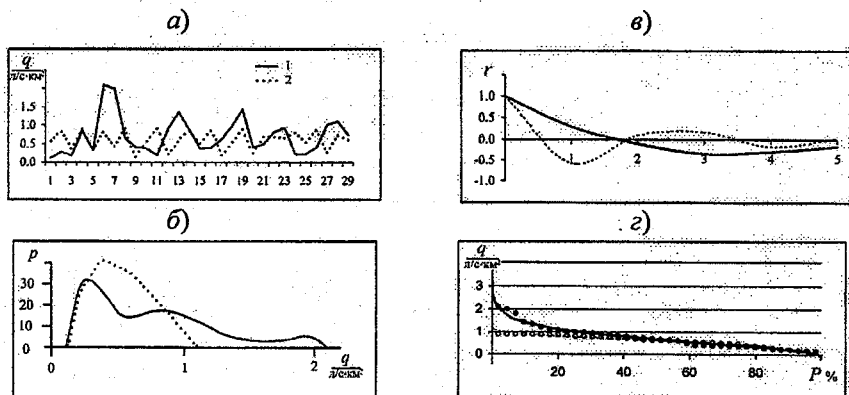


Рис. 3.4. Пример фактического (р. Жабай, п. Атбассар) и сгенерированного ряда (а), вычисленных по ним плотностей вероятности (б), нормированных автокорреляционных функций (в) и кривых обеспеченности (г). За счет снижения и варьирования гидрологического потенциала плотность вероятности сгенерированного ряда, которая часто двухмодальна, можно сделать одномодальной и более «размазанной» по оси q .

1 – фактический ряд, 2 – ряд, сгенерированный с помощью отображения (3.4).

Таблица 3.1

Результаты сравнения кривых обеспеченности

№	Река	Пункт	X , мм	F , км ²	I	Параметры распределения			Уровень значимости 10 %		
						q , л/с·км ²	C_v	C_s	II	III	IV
1	Сакмара	Сакмара	560	29000	1	4,40	0,52	0,81	—	*	—
					2	2,98	0,49	1,46	—	—	
2	Урал	Кушум	490	180000	1	1,74	0,61	0,95	+	*	+
					2	2,06	0,72	1,48	—	+	
3	Арчеда	Нижнянский	530	2000	1	1,08	0,47	0,87	+	—	—
					2	1,56	0,84	1,31	—	—	
4	Хопер	Новохоперск	580	40000	1	2,75	0,42	0,43	+	*	+
					2	2,60	0,44	1,14	+	—	
5	Жабай	Атбассар	420	8530	1	0,83	0,60	0,69	—	*	+
					2	0,71	0,78	0,55	—	—	
6	Чир	Обливская	550	8470	1	1,39	0,69	1,21	—	*	+
					2	1,45	0,78	1,13	+	+	
7	Чаглинка	Большой изюм	440	8500	1	0,15	1,78	9,18	—	*	—
					2	0,74	0,77	0,57	—	—	
8	Жиланды	1,9 км выше устья	260	2160	1	0,31	0,91	12,1	—	*	—
					2	0,50	0,80	0,40	—	—	
9	Ишим	Петропавловск	450	118000	1	0,67	0,86	2,06	—	*	—
					2	0,51	1,04	0,53	—	*	
10	Тобол	Кустанай	370	44800	1	0,30	1,21	2,72	—	*	—
					2	0,10	1,10	0,11	—	—	

Примечания: I – варианты расчетов (1 – по ряду, 2 – по картам);

II – при постоянных параметрах,

III – вариация параметров на $\pm 5\%$ -ов,

IV – ФПК (по данным с карт);

+(–) – кривые обеспеченности совпадают (не совпадают);

* – появление неустойчивости.

Все реки, представленные в табл. 3.1, взяты в регионе, характеризующимся очень маленькими значениями коэффициента стока (высоким гидрологическим потенциалом) и годовых модулей стока q . Этот регион входит в область неустойчивого формирования стока [39, 41].

Распределения в ней часто многомодальны. Не делалось никаких попыток оптимизировать параметры моделей, кроме занижения потенциала. И тем не менее, из этих результатов следует, что часто ни визуально, ни по существующим в гидрологии статистическим критериям, решения практически не отличаются от реальных наблюдений за несколько десятков лет. При этом оценки начальных моментов обладают устойчивостью (рис. 3.5) при увеличении длины сгенерированного ряда.

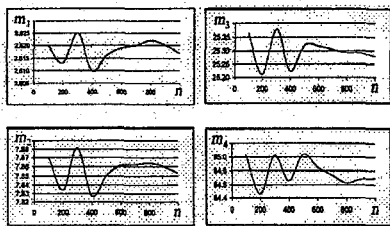


Рис. 3.5. Влияние длины n сгенерированного ряда на численные значения первых четырех начальных моментов m_i .

Вводя в динамическую модель (3.4) шумы, мы размываем границы описываемой ею предметной области — делаем ее частично инфинитной. Это независимые от основного механизма формирования стока факторы, связанные с климатом и подстилающей поверхностью. Но как видно из табл. 3.1, эти шумы «погоды не делают» (по крайней мере в рамках критерия Колмогорова). Зато они «делают погоду» в зоне избыточного увлажнения (при $k > 0,3$), в которой достаточно хорошо зарекомендовала себя модель ФПК. Вопрос о подходящей модели для районов с маленькими коэффициентами стока пока открыт. Возможно, ситуацию можно улучшить, расширяя фазовое пространство (см. ниже).

3.3. ОЦЕНКА «СТАТИСТИЧНОСТИ»

Из предыдущего изложения следует, что при значениях гидрологического потенциала $\bar{X}/Q_0 > 2,57$ модель водосбора, представленная в виде отображения $F(Q_i)$, генерирует «хаотический» режим. Для характеристики подобного «хаоса» в науке используется несколько критериев, в частности показатель Ляпунова λ . Этим показателем оценивается чувствительность модели к малым флуктуациям, связанным, например, с неточностью ΔQ

задания начального условия $Q|_{t=0} = Q_* + \Delta Q$. При каждой i -ой итерации происходит либо порождение новой информации (если $|dF/dQ| > 1$), либо ее потеря (если $|dF/dQ| < 1$), либо – консервация (если $|dF/dQ| = 1$). Рисунок 3.6 поясняет эту ситуацию.

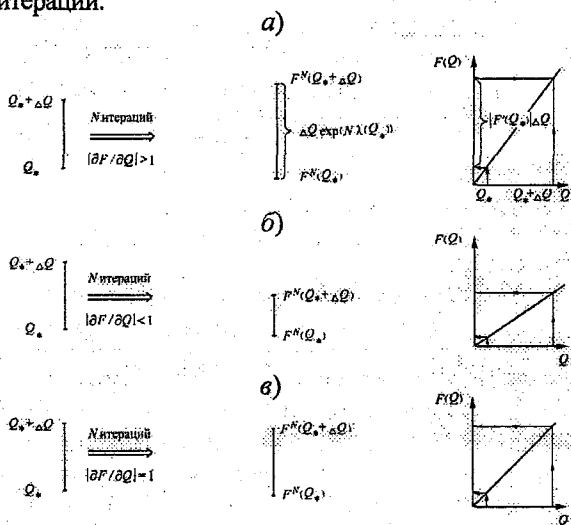
За одну итерацию происходит изменение информации на величину $I = \log_2 |dF/dQ|$ [бит]. По определению (см., например, [63]), показатель Ляпунова есть среднее изменение информации при заданном значении управляющего параметра (в нашем случае – гидрологического потенциала)

$$\langle I \rangle = \lambda(\dot{X}/Q_0) = \int p(Q) \log_2 |dF/dQ| dQ, \quad (3.5)$$

где $p(Q)$ – асимптотическое распределение плотности вероятности траектории. Для эргодического поведения траектории эта формула принимает вид:

$$\lambda(\dot{X}/Q_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \log_2 \left| \frac{dF(Q, \dot{X}/Q_0)}{dQ} \right|_{Q_i},$$

где N – число итераций.



Эта зависимость может быть получена и из следующих рассуждений [91]. Из рис. 3.6 следует, что

$$\Delta Q \exp(N \cdot \lambda(Q_*)) \approx |F^N(Q_* + \Delta Q) - F^N(Q_*)|.$$

В пределе имеем ($\Delta Q \rightarrow 0$, $N \rightarrow \infty$) имеем

$$\lambda(Q_*) = \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{\Delta Q \rightarrow 0} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{F^N(Q_* + \Delta Q) - F^N(Q_*)}{\Delta Q} \right| = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{dF^N(Q_*)}{dQ_*} \right|.$$

Используя формулу для производной сложной функции

$$dF^N(Q_*)/dQ_* = \prod_{i=0}^{N-1} F'(Q_i),$$

получим

$$\lambda(Q_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |F'(Q_i)|.$$

В соответствии с таким определением показателя Ляпунова при $\lambda(X/Q_0) < 0$ итерация осуществляет сток информации (траектория устойчивая и периодическая, рис. 3.6 в), при $\lambda(X/Q_0) = 0$ итерация консервирует информацию (траектория нейтрально устойчива, рис. 3.6 б), при $\lambda(X/Q_0) > 0$ итерация действует как источник информации (траектория локально неустойчивая и хаотическая, рис. 3.6 а).

Воспользуемся выражением (3.5) для выяснения влияния гидрологического потенциала (X/Q_0) на λ . Так как

$$\left[\frac{dF(Q, X/Q_0)}{dQ} \right]_{Q=Q_i} = 1 + \frac{X}{Q_0} - \frac{2}{kQ_0} Q_i,$$

а для траектории $\{Q_i\}$ с периодом M плотность вероятности $p(Q)$ есть набор из M дельта-функций $\delta(Q - Q_i)$ (т. е. $\lambda(X/Q_0) = \sum_{i=1}^M \ln |dF(X/Q_0)/dQ|_{Q_i}$),

то: $\lambda(a) = \ln|2 - a|$ для траектории с периодом 1 ($0 < \bar{X}/Q_0 < 2$) (циклы с периодом 1 – постоянные значения переменной Q , задаваемые неподвижными точками отображения $F(Q_i)$: $Q_1 = (a - 1)/a$); $\lambda(a) = \ln|a^2 - 2a - 4|$ (см. [63]) для траектории с периодом 2 ($2 < \bar{X}/Q_0 < 2,449$) и т. д. (здесь $a = 1 + \bar{X}/Q_0$, $k(Q_0 + \bar{X}) = 1$ – это ограничение приводит логистическое уравнение к стандартному виду $Q_{i+1} = aQ_i(1 - Q_i)$, но к такому же виду (3.4) можно привести и без этого ограничения, см [91]).

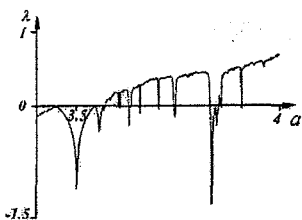


Рис. 3.7. Влияние гидрологического потенциала на функцию Ляпунова.

Подобные (логистические) отображения хорошо изучены [61, 63] и получены зависимости типа $\lambda(a)$ (рис. 3.7). На рис. 3.2 представлены траектории Q_i для трех различных значений λ . Кривая $\lambda(a)$ возрастает с ростом a и при $a = 4$ скорость производства информации достигнет один бит за итерацию (для $0 < Q < 1$).

Возникает противоречие. С одной стороны при $\lambda > 0$ бассейн порождает информацию со скоростью 1 бит за год. С другой стороны, мы только что (рис. 3.5) получили устойчивые оценки 4-х моментов распределения, которые практически не меняются при увеличении числа итераций («лет наблюдений»). Повидимому эта неустойчивость сказывается на старших моментах в соответствии с условием $G_e > \sigma/0,5n$ [37]. Заметим, что при $a \rightarrow 3,57$ ($\bar{X}/Q_0 \rightarrow 2,57$) хаусдорфова размерность (т. е. $\lambda(3,57)$ – скорость порождения информации) становится равной 0,538 [91], т. е., во-видимому, порядок неустойчивых моментов увеличивается (по сравнению с $a = 4$).

В рамках модели ФПК неустойчивость моментов порождается флуктуациями (шумами) параметров бассейна и ее степень определяется соотношением между интенсивностью этих шумов и матожиданием параметров ($G_e/\bar{\sigma}$, например).

3.4. РАСШИРЕНИЕ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

В общем случае управляющие параметры (потенциал $\bar{X}/Q_0$ и емкость $k\bar{X}$ или $\bar{X}/c$) сами могут рассматриваться как фазовые пе-

ременные (наряду с Q), но уже более расширенной системы. Годовой сток формируется, как правило, осадками, происхождение которых связано с глобальными атмосферными процессами. Поэтому их зависимость от расхода Q и параметра c для конкретного бассейна вряд ли имеет место. Поэтому примем в качестве фазовых переменных x_i величины Q , c , Q_0 (точнее r , см. ниже), оставляя X в качестве управляющего параметра (наряду с другими, которые появятся в связи с вводом в рассмотрение новых фазовых переменных).

Для n -мерной системы $\dot{x} = F(x)$, $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ элементарный объем V , ограниченный в фазовом пространстве $\{\bar{x}\}$ изменяется в соответствии с теоремой о дивергенции по уравнению

$$\frac{dV}{dt} = \int_V d^n x \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} \right).$$

В зависимости от знака суммы $\sum_{i=1}^n \partial F_i / \partial x_i$ объем может сжиматься

($\sum_{i=1}^n \partial F_i / \partial x_i < 0$), оставаться неизменным ($\sum_{i=1}^n \partial F_i / \partial x_i = 0$) или расши-

ряться ($\sum_{i=1}^n \partial F_i / \partial x_i > 0$). Траектории могут быть неустойчивыми по од-

ним направлениям и устойчивыми по другим. Скорость разбегания («сбегания») по каждому из направлений характеризуется средним по траектории ляпуновским показателем. В нашем случае ($n = 3$) стационарное состояние имеет три показателя Ляпунова, все они отрицательные: $(-, -, -)$. Для предельного цикла $(-, -, 0)$, для тора $(0, 0, -)$. Но может быть еще ситуация, когда $(+, 0, -)$. Последнее означает, что порождается множество точек, размерность которого меньше трех (ведь объем в этом случае в 3-х мерном пространстве равен нулю). Но его размерность не равна и двум, так как по теореме Пуанкаре – Бендиксона [91] в ограниченной области двумерного пространства аттракторами могут быть только предельные циклы и неподвижные точки. Это специфическое множество (странный аттрактор) имеет хаусдорфovu размерность между 2 и 3 (т. е. дробную, фрактальную). Чтобы иметь хоть какой-то его зрительный образ, можно представить себе тарелку (объ-

ект, который «недоосвоил» третью координату). На рис. 3.8 из монографии [91] показаны четыре типа множеств. Для того чтобы обладать аттрактором (любым!) система должна иметь отрицательную сумму показателей Ляпунова $\sum_{i=1}^3 \lambda_i < 0$, т. е. отрицательный показатель по абсолютной величине должен быть больше положительного.

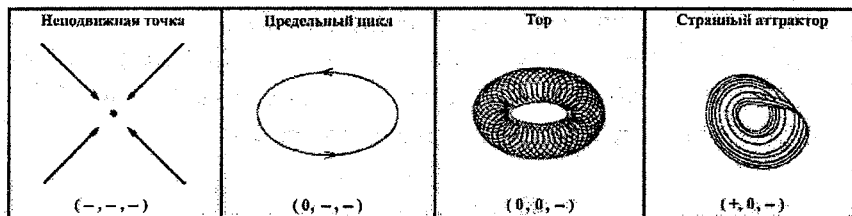


Рис. 3.8. Влияние показателей Ляпунова на тип предельного множества.

Запишем уравнение (3.3) в виде:

$$dQ/dt = -cQ^2/W + rQ, \quad (3.6)$$

где $r = \dot{X}/W$ — определяет при переходе к отображению гидрологический потенциал, а параметр c связан обратной зависимостью с коэффициентом стока, от которого зависит гидрологическая емкость речного бассейна.

Параметр r определяется, в основном, проявлением свойств климатической системы земля — океан — атмосфера над рассматриваемым водосбором, а проще — степенью увлажнения территории, зависящей от нормы осадков $\dot{X}$. Однако динамика проявления этих свойств (инерционность) будет зависеть от характеристики самого бассейна W . Таким образом, можно расширить предметную область модели (3.6), сделав задаваемый параметр r второй фазовой переменной наряду с расходом воды:

$$\tau_r dr/dt = -r + r_{\text{клим}}, \quad (3.7)$$

где $r_{\text{клим}} = \dot{X}/W_0$ — определяет при переходе к отображению климатическую норму зонального гидрологического потенциала $\dot{X}/Q_{00}$ (его

порядок соответствует значению $\bar{X}/Q_0$); τ , — время релаксации системы на изменение $r_{\text{клим}}$.

Если допустить, что это время релаксации определяется текущим значением r , т. е. $\tau_r \approx a/r$ ($a = \text{const}$), то приходим к логистической модели для r :

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r^2}{a} + \frac{r_{\text{клим}}}{a}r, \quad (3.8)$$

со всеми вытекающими свойствами ее решения (апериодический, периодический или хаотический режим, соответствующего ей отображения).

Параметр $c = \bar{X}/Q$ представляет собой величину, обратную коэффициенту стока. Если ориентироваться на его норму в условиях установившегося случайного процесса формирования стока, то $c \rightarrow \bar{X}/Q_0$. Однако в неравновесных условиях возникают переходные процессы, описываемые в самом первом приближении уравнением

$$\tau_c dc/dt = -\bar{X}/Q + \bar{X}/Q_0, \quad (3.9)$$

где τ_c — время релаксации, определяемое в долгосрочном интервале трендами свойств подстилающей поверхности водосборов, геологического строения бассейнов, изменением базиса эрозии, сменой типов растительности и интенсивности хозяйственной деятельности.

Если допустить, что более водоносные бассейны имеют меньшее время релаксации, т. е. $\tau_c = bW_0/Q$ ($b = \text{const}$), то модель (3.9) примет вид следующего уравнения:

$$\frac{dc}{dt} = -\frac{r_{\text{клим}}}{b} + \frac{\bar{X}}{Q_0} \frac{Q}{bW_0}. \quad (3.10)$$

Таким образом имеем систему из трех дифференциальных уравнений (3.6), (3.8) и (3.10), описывающую одновременное изменение расходов Q (или модуля стока), гидрологического потенциала r и параметра c .

Каких решений можно от нее ожидать? В данном случае

$$\sum_{i=1}^3 \partial F / \partial x_i = (-2cQ/W + r) + (-2r/a + r_{\text{клим}}/a) + 0. \quad (3.11)$$

Если вместо (3.10) взять уравнение (3.9), то с точки зрения свойств аттрактивности ничего не меняется (также ничего не изменится, если в правых частях задать постоянные источники или стоки фазовых переменных).

Судя по выражению для дивергенции фазового потока (3.11), тип движения (аттрактора) может меняться не только в зависимости от управляющих параметров ($W, a, r_{\text{клим}}$), но и от значений самих фазовых

переменных (c, r, Q). Если принять $p(\vec{x}) = \text{const}$, то $\sum_{i=1}^3 \partial F / \partial x_i \sim \sum_{i=1}^3 \lambda_i$ может быть меньше нуля ($|\lambda_-| > |\lambda_+|$) и можно ожидать появления аттрактора с дробной размерностью.

На рис. 3.9 представлены результаты интегрирования этой системы методом Рунге – Кутты 4-го порядка с шагом $\Delta t = 1$ (т. е. фактически речь идет об отображениях).

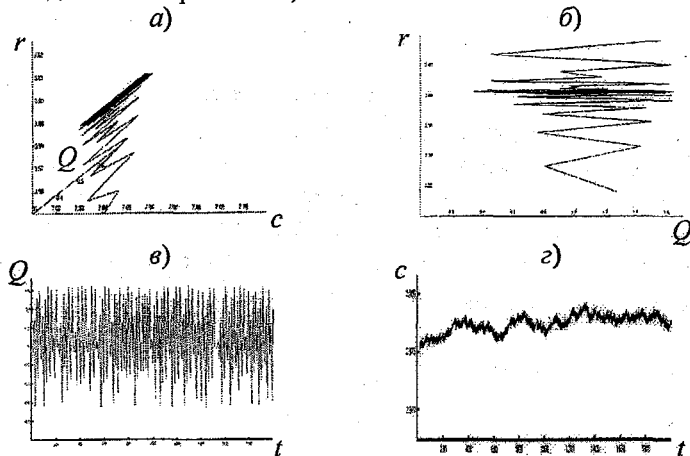


Рис. 3.9. Изображение решения системы (3.6), (3.8), (3.10) в фазовом пространстве (а), его проекция на плоскость (Q, r) (б) и временные развертки переменных Q (в) и c (г).

Несмотря на увеличение числа итераций, изображающая точка не выходит из области, показанной на рис. 3.9 *а* и являющейся для рассматриваемой системы аттрактором.

В случае системы (3.6), (3.8) и (3.9) можно получить решение, представленное на рис. 3.10. Система после длительного времени пребывания в зачерненной области (рис. 3.10 *а*) выходит из нее и попадает в точку устойчивого равновесия.

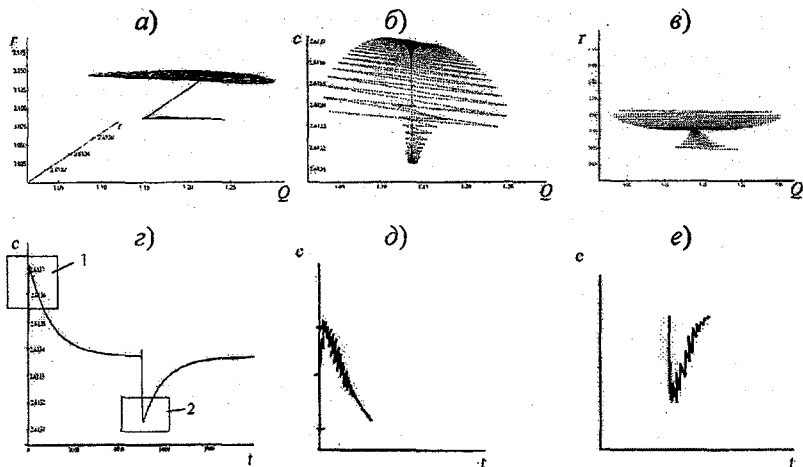


Рис. 3.10. Выход фазовой траектории в точку равновесия (*а*), двумерные проекции фазового портрета (*б*, *в*), затухание фазовой переменной (*г*), увеличенные фрагменты: 1 (*д*), 2 (*е*).

Поведение гидрологического потенциала не зависит от Q и c и определяется только климатическим потенциалом и временем релаксации τ_0 (принятое в расчетах значение соответствует аperiодическому решению (3.8)).

Если давать биологическую интерпретацию этим вариантам решений (о других вариантах см. в п. 3.7), то взаимодействие «видов» Q и c происходит по типу «жертва – хищник», а «вид» r играет роль ресурса для жертв и хищников. При больших (например, больше 3,7) значениях r , определяемых в том числе, и «абиотическими» факторами (W , a , $r_{\text{клим}}$) оба вида «обжираются» и трофическая цепь хищник – жертва обрывается, система становится неустойчивой и рассыпается.

3.5. МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ СТОКА В ВИДЕ КОМПЛЕКСНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ (ОТОБРАЖЕНИЕ ЖЮЛИА, МНОЖЕСТВО МАНДЕЛЬБРОТА, ФРАКТАЛЬНОСТЬ, «БАССЕЙНЫ ПРИТЯЖЕНИЯ»)

Вернемся к одномерному отображению (3.4). Как видно из рис. 3.11, траектория может плавно или аperiodически (рис. 3.11 а) стремиться (притягиваться) к решению $Q = c/X$ (при $r \leq 2$, здесь $r = X/Q_0$); быть периодической (рис. 3.11 б), оставаться «стохастической» в заданных пределах (рис. 3.11 в); «притягиваться» к бесконечности (рис. 3.11 г). Таким образом, параметры модели (характеризующие управление расходом внешней средой) определяют тип решения (аттракторы).

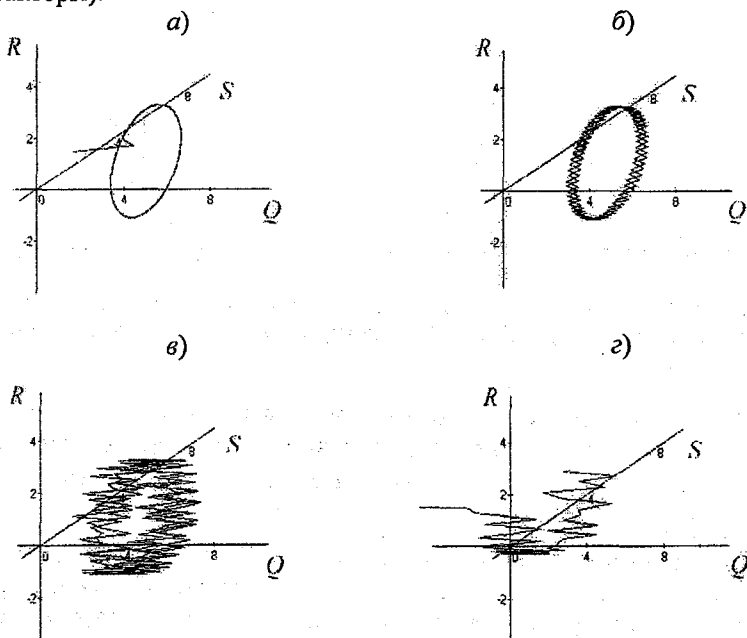


Рис. 3.11. Орбитальное изображение отображения (3.4) при различных значениях параметра r : а) $-2,0$; б) $-2,1$; в) $-2,4$; г) $-2,51$ ($S = a \sin(bt)$, $R = a \cos(bt)$).

Эта ситуация отражает частный случай комплексного отображения [64]:

$$z_{n+1} = z_n^2 + c, \quad (3.12)$$

где $z = x + iy$, $c = a + ib$. Это двумерное отображение на плоскости, возможные результаты которого представлены на рис. 3.12.

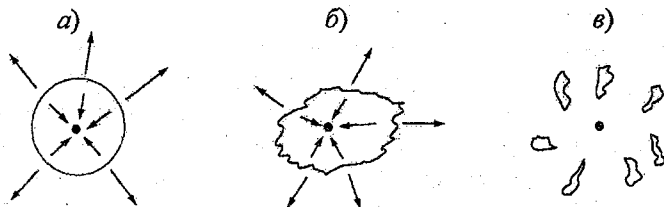


Рис. 3.12. Варианты множеств для отображения (3.12) в зависимости от численного значения комплексного параметра c : а) нуль и бесконечность являются аттракторами для процесса (3.12) при $c = 0$; б) граница бассейна притягивающей неподвижной точки имеет фрактальную структуру ($c \neq 0$); в) множество теряет связность и «рассыпается в пыль Фату» ($|c|$ — «большое»).

На рис. 3.12 а («соответствует» рис. 3.11 а и рис. 3.11 б) имеем в центре точку, являющуюся аттрактором для процесса, порожденного отображением (3.12) (бесконечность является также аттрактором). В случае рис. 3.12 б (соответствует рис. 3.11 в) последовательность точек, получающихся при итерациях, лежит на фрактальной границе двух областей притяжения. Граница последнего типа именуется в математике множеством Жюлиа J_c .

Тип границ определяется комплексным параметром c . На рис. 3.13 показано множество параметров c (множество Мандельброта M), при котором граница является связным множеством $M = \{c \in C : J_c \text{ связно}\}$.

Если c лежит вне M , то J_c рассыпается в облако точек (пыль Фату, рис. 3.12 в, который соответствует рис. 3.11 з). (Жюлиа и Фату — французские математики, которые в нача-

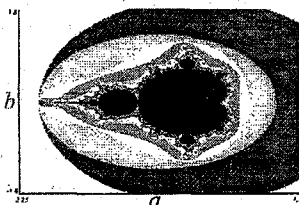


Рис. 3.13. Множество Мандельброта.

ле XX в. первыми изучали подобные структуры, а Мандельброт – американский (чешский) ученый, первым в 1980 г. установил форму множества M , названного его именем).

С точки зрения частично инфинитного моделирования, параметрами s , лежащими внутри M , полностью рационализируется структура границ J_c (это область финитного моделирования). Значения s вне M разрушают «рациональные иллюзии» и выводят в инфинитную реальность. Самое удивительное в этой ситуации, что рациональное (число s – параметр среды) управляет иррациональным, т. е. поведением z_{n+1} на бесконечности. Точнее, управляет только выходом в иррациональное, делая границу между финитным и инфинитным частично инфинитной (т. е. фрактальной). При этом вид множества Жюлиа настолько повторяет детали множества Мандельброта, что невольно приходит на ум аналогия с генетической организацией высших организмов, в которых каждая клетка содержит полной геном.

Важным свойством множества J_R для рациональной функции R является то, что множество всех отталкивающих периодических точек функции R плотно в J_R . С учетом того, что J_R непусто и содержит более чем счетное множество точек, динамика на J_R является хаотической. Именно подобная хаотичность делает ситуацию частично инфинитной, а значит – частично рационализируемой (моделируемой, предсказуемой), хотя бы на уровне моментов статистического распределения. Для рационализации бесконечности, надо чтобы она «состояла» из отталкивающих точек (см. п. 2.2), т. е. бесконечная притягивающая точка для стандартного ряда должна стать отталкивающей для нестандартного. Проще: надо, чтобы управляющий параметр сам стал фазовой переменной. Для этого надо, чтобы множество Мандельброта само стало управляемым, а для этого – перестало быть частично инфинитным (из-за своей границы) и стало полностью финитным, т. е. рационализированным. Рационализация – это построение другого – управляющего для множества Мандельброта – множества с лучшими когнитивными свойствами, т. е. с большей скоростью переработки информации [38]. Другими словами, надо из бесконечного множества M сделать множество с конечной мощностью, т. е. сделать его динамическим (управляемым), перевести из «дерева» в «плоскость» (чтобы оно перестало порождать канторовы множества (пыль Фату) из множества J).

Вернемся снова к одномерному отображению. Рассмотренное выше конформное отображение

$$z \rightarrow z^2 + c, \quad z = x + iy, \quad c = a + ib,$$

в действительной форме имеет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n^2 - y_n^2 + a, \\ y_{n+1} &= 2x_n y_n + b. \end{aligned}$$

При $b = 0$ для точек, расположенных на оси x , получим одномерное отображение $x_{n+1} = x_n^2 + a$. Наша дискретная модель стока

$$Q_{i+1} = Q_i(1 + X/Q_0) - Q_i^2/kQ_0$$

путем известного (см. [64]) преобразования $Q \rightarrow \bar{x} = a_2 x + a_1/2$ для полиномов второй степени сводится к отображению $x_{n+1} = x_n^2 + c$, где $c = a_1(1 - a_1/2)/2$ (здесь $a_1 = 1 + X/Q_0$, $a_2 = -1/kQ_0$).

Таким образом, модель водосбора просто частный случай двумерного отображения, причем значению $r=3$ соответствует $c=-2$ (т. е. крайняя левая точка множества Мандельброта при $y=0$).

Пусть $kX=1$. Тогда модель примет вид

$$Q_{n+1} = f(Q_n) = (1+r)Q_n - rQ_n^2. \quad (3.13)$$

Чтобы исследовать устойчивость состояния равновесия ($Q_0=1$) линеаризуем (3.13). Тогда для малых отклонений $q_n = Q_n - 1$ получим

$$q_{n+1} \approx (1-r)q_n. \quad (3.14)$$

При $0 < r < 2$ $|q_{n+1}| < |q_n|$. При $r > 2$ процесс становится неустойчивым и при $r = 2,3$ возникают осцилляции между двумя значениями Q . Далее

можно аналогично исследовать устойчивость неподвижных точек отображения $f^2: Q_{n+2} = f(f(Q_n)) = f^2(Q_n)$ и т. д. Придем к уже обсуждавшимся результатам.

Интересно обратить внимание, что условие устойчивости решения модели ФПК (для моментов распределения m_n) получается из уравнения

$$dm_n/dt = (-\bar{c} + 0,5nG_{\bar{c}})m_n + \dots$$

и имеет вид

$$\bar{c} \geq 0,5nG_{\bar{c}}. \quad (3.15)$$

Но смысл их различный. Соотношение (3.14) – динамическая модель (шумов в ней нет), и чем больше потенциал, тем более неустойчив процесс, тем больше в нем гармонических составляющих. Ситуация же с условием (3.15) совсем другая. Тут важно соотношение между нормой потенциала и интенсивностью его шума. При фиксированной норме $\bar{c}$, чем выше порядок момента, тем меньшая интенсивность шума может вызвать его неустойчивость. Чем меньше потенциал, тем более неустойчива система (при прочих равных условиях, т. е. интенсивности шума).

Пока режим динамический, то увеличение потенциала приводит систему к странному аттрактору («стохастическому» режиму). Но если система там уже находится, то шумом тем труднее развалить режим, чем больше этот самый потенциал.

3.6. ПРОЯВЛЕНИЕ ИНФИНИТНОСТИ

Еще одна интересная ситуация связана с тем, что дискретизация непрерывных моделей приводит к появлению нового типа поведения. Поучительный пример приведен в работе [64]. Для системы уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy = f(x, y); \\ \dot{y} &= -\gamma y + \delta xy = g(x, y) \end{aligned}$$

(система хищник y – жертва x) выберем следующий численный метод

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \end{pmatrix} = \Phi_{\Delta t, \tau} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (3.16)$$

где

$$\Phi_{\Delta t, \tau} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{pmatrix} f(x, y) + f(x + \tau f(x, y), y + \tau g(x, y)) \\ g(x, y) + g(x + \tau f(x, y), y + \tau g(x, y)) \end{pmatrix}.$$

Зафиксируем управляющие параметры непрерывной модели ($\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$) и будем считать таковыми для дискретной модели Δt и τ . На плоскости этих параметров (рис. 3.14 из работы [64]) возможны четыре типа решений. В области I неподвижная точка $(x, y) = (1, 1)$ является притягивающей. При изменении τ и Δt мы попадаем в область II, где неподвижная точка становится неустойчивой и появляется притягивающая инвариантная окружность. В области III появляются странные аттракторы, а область IV оказывается неустойчивой (траектории стремятся к бесконечности).

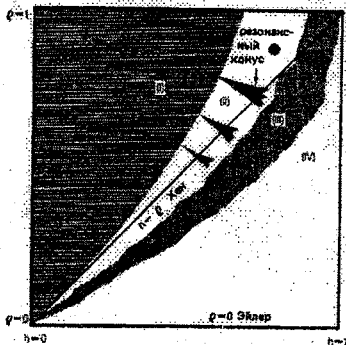


Рис. 3.14. Плоскость параметров $(\Delta t, \tau)$

В то же самое время для непрерывной модели весь квадрант $\{(x, y) : x > 0, y > 0\}$ заполняется замкнутыми траекториями вокруг точки покоя $(x_c, y_c) = (\gamma/\delta, \alpha/\beta)$, так как по теореме Пуанкаре – Бендиксона [31, 91] на плоскости (в двумерном фазовом пространстве) только такие аттракторы и возможны (непрерывность не дает экспоненциально разбегаться траекториям).

Как это ни выглядит странным, но дискретизация расширяет предметную область непрерывной модели («странным», потому что непрерывная модель бесконечномерна, в отличие от дискретной – конечномерной). Дело тут, видимо, в следующем. В непрерывной модели решение действительно может потенциально находиться в любой точке первого квадранта

(это зависит только от начального условия), но дифференциальный оператор заставляет его быть только аттрактором (точечным или периодическим). Заменяя непрерывную область дискретной, мы вроде бы ограничиваем число точек, в которых может находиться решение, но, с другой стороны, появляются новые управляющие параметры (Δt и τ). Если Δt — шаг интегрирования по времени, то какой физический смысл параметра τ ? Величина $f(x, y)$ это $dx/dt (\equiv \dot{x})$, а $\tau \dot{x} = \Delta x$, т. е. приращение решения, которое используется при подсчете правой части отображения (3.16). При $\tau \rightarrow 0$ («безинерционные» расчеты) приходим к методу Эйлера с очень широкой областью неустойчивости (IV). При $\tau \rightarrow 1$ («инерционные» расчеты) область неустойчивости сужается до нуля, любые неустойчивости подавляются (осредняются). Таким образом, выполняя дискретизацию, мы финитную предметную область параметров ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$) делаем частично инфинитной ($\alpha, \beta, \gamma, \delta, \Delta t, \tau$), а значит — частично непредсказуемой (область III) и полностью непредсказуемой (область IV), т. е. инфинитной.

3.7. ДВУМЕРНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ, МОДЕЛЬ ЭЙГЕНА И ТИПЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Вернемся к одномерному отображению (3.4), учтя (выделив), однако, грунтовую составляющую стока ($Q_{гр}$):

$$Q_{i+1} = (-c_i / Q_0) Q_i^2 + (1 + X / Q_0) Q_i + (c_i Q_{гр}^2 / Q_0).$$

Сделаем замену переменной (см. п. 3.5)

$$z = -(c_i / Q_0) Q + 0,5 + X / 2Q_0.$$

Тогда (при $Q_{гр} = Q_0$) получим

$$z_{i+1} = z_i^2 - c_i^2 + ((1 + X / Q_0)(1 - (1 + X / Q_0)/2))/2. \quad (3.17)$$

Предположим, что вторая переменная c_i подчиняется уравнению

$$\tau dc/dt = -pc + X/Q.$$

Считая, что $\tau = W/Qc$, получим отображение

$$c_{i+1} = (-pc_i Q/Q_0 + X/Q_0 + 1)c_i.$$

Пусть $p = 2$ и в правой части действует постоянный источник (или сток) b (например за счет однонаправленного изменения свойств подстилающей поверхности). Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$c_{i+1} = 2z_i c_i + b. \quad (3.18)$$

Система (3.17), (3.18) является двумерным отображением, о котором упоминалось выше (последнее слагаемое в (3.17) есть a).

На рис. 3.15 представлены различные варианты решения (3.17), (3.18) в зависимости от численных значений параметров a и b , т. е. множества Жюлиа $J(a, b)$. Как и следовало ожидать при $X/Q_0 = 3$ множество Жюлиа «рассыпается в пыль».

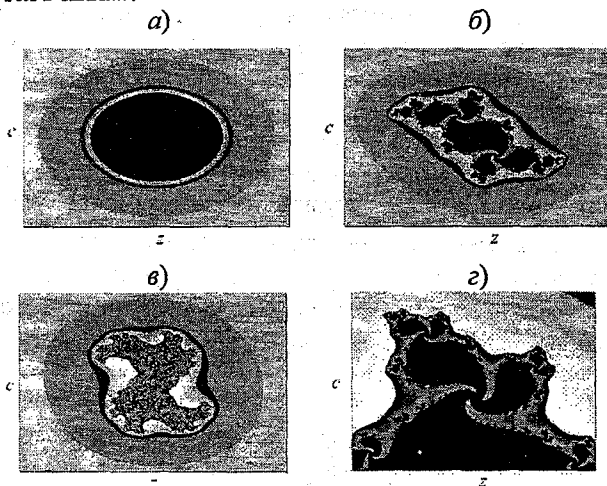


Рис. 3.15. Различные варианты решений отображения (3.17), (3.18): а) «правильное» ($a = 0$, $b = 0$); б) фрактальное ($a = -0,17$; $b = 0,69$); в) пыль ($a = 0,4$; $b = 0,2$); з) увеличенный фрагмент фрактального множества.

В разделах 1.2 и 1.3 показано, что для n взаимодействующих фазовых переменных x_i справедлива модель Эйгена:

$$dx_i/dt = f(x_1, \dots, x_n) = x_i(w_i - \sum e_{ij}x_j/K), \quad (i = 1, \dots, n).$$

В экологической интерпретации [84] в подобной системе исчерпывающую характеристику фазовых взаимодействий дает следующая матрица:

$$C(t) = \begin{pmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \dots & c_{1n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}(t) & c_{n2}(t) & \dots & c_{nn}(t) \end{pmatrix},$$

где $c_{ij}(t) = \partial[dx_i/dt]/\partial x_j$.

В зависимости от влияния одной фазовой переменной на динамику другой (т. е. в зависимости от знака c_{ij} или e_{ij}) различают: нейтрализм (нет взаимного влияния), аменсализм (первая переменная на вторую влияет отрицательно, а вторая на первую не влияет), комменсализм (первая — на вторую — положительно, а вторая на первую не влияет), конкуренция (влияние друг на друга отрицательно), жертва — эксплуататор (первая — на вторую — положительно, а вторая — на первую — отрицательно), мутуализм (положительное влияние друг на друга). Критическими (бифуркационными) являются ситуации, когда элементы матрицы $C(t)$ меняют знаки, т. е. меняется тип взаимодействия. Важное «коллективное» (эмерджентное) свойство проявляется, когда $c_{ii}(t) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, т. е. когда влияние фазовой переменной на саму себя оказывается зависящей и от других фазовых переменных.

Для модели водосбора

$$\frac{dQ}{dt} = Q \left(\frac{X}{W} - \frac{cQ}{W} \right),$$

$$\frac{dc}{dt} = c \left(\frac{X}{W} - \frac{cQ}{W} \right)$$

имеем $dQ/dc = -Q^2/W$, $dc/dQ = -c^2/W$, т. е. реализуется механизм конкуренции (за ресурс X) с равными селективными возможностями и проявлением эмерджентных свойств.

Перепишем уравнения так:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{X}{W} Q \left(1 - \frac{cQ}{X} \right),$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{X}{W} c \left(1 - \frac{cQ}{X} \right).$$

Подобная конкуренция приводит к устойчивому состоянию равновесия (рис. 3.16): $Q^* = X/c^*$; $c^* = X/Q^*$. Этот результат не противоречит наличию «стохастического» режима у отображения (3.4). Во-первых, в данном случае у нас не дискретное отображение, а непрерывная модель. Во-вторых, у нас фазовая плоскость, на которой по теореме Бендиксона [31] вообще запрещаются циклы для таких моделей (как периодические, так и квазипериодические).

В экологии этот факт известен как невозможность колебаний при чисто конкурентных отношениях в двухвидовой системе (это связано с тем, что на колебательной траектории в фазовой плоскости должен появиться участок, на котором увеличение численности одного вида происходит с увеличением скорости изменения другого, а это противоречит самому факту конкуренции). Чтобы такие колебания были возможны нужно либо вводить в рассмотрение третьего конкурента (в нашем гидрологическом случае это может быть, например, грунтовое питание), либо менять характер взаимодействия между фазовыми переменными, как это было сделано при переходе к модели (3.17) $z_{i+1} = f_1(z_i, c_i)$, (3.18) $c_{i+1} = f_2(z_i, c_i)$. Переменная z перестает быть конкурентом и становится

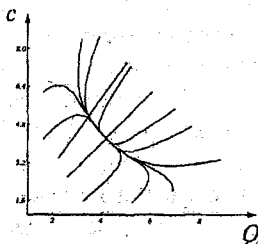


Рис. 3.16. Установление при наличии постоянных источников устойчивого состояния равновесия в условиях конкуренции.

«жертвой» «эксплуататора» с. При замене конкурентного взаимодействия на взаимодействие по типу жертва – эксплуататор меняются эмерджентные свойства: жертве уже не на что надеяться как на саму себя ($\partial f_1 / \partial z = 2z$), а у эксплуататора вся опора на жертву ($\partial f_2 / \partial c = 2z$).

Подобную (экологическую) аналогию можно развить и ввести в рассмотрение гидрологические трофические цепи. Это будет иерархия моделей (системная модель процессов водообмена), «верховным хищником» (замыкающим звеном) в которой будет человек. Это позволит выработать требования к его самоограничению для эффективного влияния на динамику низших звеньев (например ликвидировать, так называемое, конкурентное исключение).

4. ЭВОЛЮЦИЯ АТМО-, ГИДРО- И БИО- СФЕР

Первую попытку применить популяционные модели для изучения эволюции в гидрометеорологии предпринял В. А. Костицын [49]. Он связал органический мир с неживой материей через круговорот углерода, кислорода и азота, рассматривая океан как гигантский регулятор углекислоты (в нем ее в 30 – 40 раз больше, чем в атмосфере). В его представлении вектор состояния имеет следующие компоненты: x – масса свободного атмосферного кислорода; y – общая масса углекислоты в атмосфере и океане; z – общая масса этих компонентов в растениях; u – их общая масса в животных; s – их общая масса, рассеянная в земной коре.

На рис. 4.1 показан характер взаимодействия компонентов. Отношения между переменными состояния подобной системы выражаются дифференциальными уравнениями:

$$dx/dt = -\alpha_{xu}u - \alpha_{xv}v + \alpha_{vx}v,$$

$$dy/dt = \alpha_{yu}u - \alpha_{yv}v + \alpha_{vy}v,$$

$$dz/dt = -\alpha_{zv}v,$$

$$du/dt = \alpha_{xu}u - \alpha_{yu}u - \alpha_{us}u + \beta uv,$$

$$dv/dt = \alpha_{xv}v - \alpha_{vx}v + \alpha_{yv}v - \alpha_{vy}v + \alpha_{zv}v - \alpha_{vs}v - \beta uv,$$

$$ds/dt = \alpha_{zu}u + \alpha_{zv}v. \quad (4.1)$$

Смысл слагаемых правых частей хорошо прослеживается по рис. 4.1. Например атмосферный кислород x расходуется на дыхание животных ($-\alpha_{xu}u$) и растений ($-\alpha_{xv}v$), а освобождается в процессе питания растений ($\alpha_{vx}v$); атмосферный азот z расходуется (связывается) растениями ($-\alpha_{zv}v$), которые потребляются животными ($\beta_{uv}u$) и т. д. Эта модель Костицына является системой вольтерровского типа [10]:

$$\frac{dN_j}{dt} = \varepsilon_j N_j + \frac{1}{\beta_j} \sum_{s=1}^1 \alpha_{sj} N_s N_j, \quad 1 \leq j \leq n$$

где N_j — численность j -го вида; ε_j — ненулевые константы, характеризующие скорость изменения численности данного вида при отсутствии других видов; β_j^{-1} — вольтерровское число эквивалентности; (α_{sj}) — кососимметрическая невырожденная матрица.

Так как правые части системы зависят только от u и v , то можно сначала решить систему для u и v , а остальные неизвестные выразить в квадратурах. Система уравнений для u и v может быть записана так:

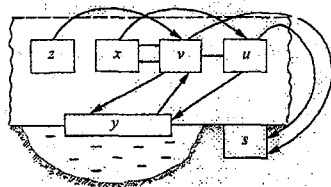


Рис. 4.1. Схема взаимодействия компонентов.

$$du/dt = -\lambda u + \beta_{uv}v;$$

$$dv/dt = \mu v - \beta_{uv}u,$$

где $\lambda = -\alpha_{xu} + \alpha_{uv} + \alpha_{us};$

$$\mu = \alpha_{xv} - \alpha_{vx} + \alpha_{uv} - \alpha_{yv} - \alpha_{zv} - \alpha_{vs}.$$

В случае $\lambda > 0$, $\mu > 0$ (а это именно так, ибо в отсутствие растений животные не могли бы существовать, а отсутствие животных повлекло бы ускоренное развитие растений) мы имеем тип взаимодействия хищник (u) — жертва (v), допускающий периодические решения с центром $u_c = \mu/\beta$, $v_c = \lambda/\beta$ и периодом $T \approx 2\pi/\sqrt{\lambda\mu}$.

Если постоянные коэффициенты сделать медленно меняющимися функциями времени или неизвестных (x, y, z, u, v, s) , то процесс превращается в квазипериодический. Точка (u, v) , описывающая на фазовой плоскости органический мир, будет эволюционировать в соответствии с вызовами окружающей среды (например выбросы углекислоты σ за счет вулканов или промышленной деятельности).

Если «неживые» компоненты модели Костицына представить вектором $w(x, y, z, s)$, то они примут вид [49]

$$\begin{aligned}dw/dt &= f(u, v); \\ du/dt &= -u(\lambda + \beta v); \\ dv/dt &= v(\mu - \beta u).\end{aligned}$$

Первое уравнение описывает медленную эволюцию параметров биосферы, т. е. фона, на котором разворачивается быстрая циклическая жизнь (два вторых уравнения). Разумно ввести механизм самоограничения для переменной v , играющей роль «жертвы». Дело в том, что особенность рассматриваемой системы уравнений заключается в сильной чувствительности к небольшим возмущениям (система необратимо меняет амплитуду и период колебаний, что противоречит известному в экологии факту относительной нечувствительности реальных экосистем [84]). Эту «внутривидовую конкуренцию жертв» можно ввести, приняв зависимость $\mu = \mu_0 - \mu'v$. Тогда фазовый портрет системы примет вид, показанный на рис. 4.2 (т. е. система эволюционирует к состоянию устойчивого равновесия, которое дрейфует за счет медленной переменной w).

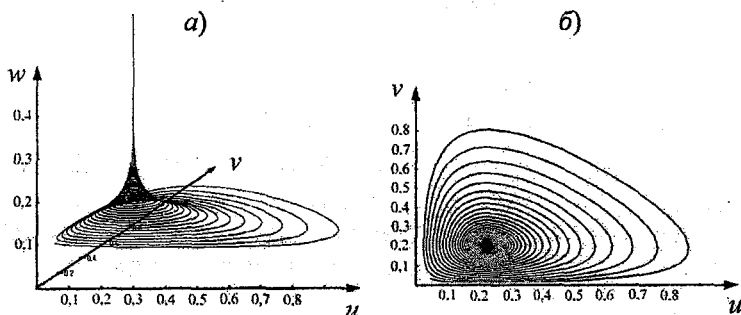


Рис. 4.2. Фазовый портрет (а) и его двумерная проекция (б).

Асимптотическая обработка модели Костицына, выполненная Н. Н. Моисеевым [49], показала, что механизм перевода газов атмосферы и океана в земную кору (литосферу) действует независимо от циклических колебаний биомассы, а определяется самим фактом наличия жизни (т. е. стационарными значениями μ_c и ν_c). Это обстоятельство позволяет при изучении экологической ситуации на больших интервалах времени осреднять быстрые экологические переменные и выполнять интегрирование с большим шагом, избегая накопления ошибок.

Тем не менее, «популяционный» подход Костицына вполне приемлем для анализа этих самых «быстрых» переменных. В послесловии к работе [49] Моисеевым рассмотрен пример подобной задачи, решенной Ю. М. Свиричевым и А. М. Тарко [79].

Изучается динамика роста биомассы живого вещества в замкнутой системе. Введем обозначения: $v(t)$ – масса азота в живом веществе биосферы; $s(t)$ – масса азота в отмершем веществе; $w(t)$ – масса азота (в виде окислов), который может усваиваться растениями и является продуктом жизнедеятельности микроорганизмов. Балансовая модель имеет вид

$$dv/dt = \alpha wv - \mu v;$$

$$ds/dt = \mu v - \delta s;$$

$$dw/dt = \delta s - \alpha wv.$$

В замкнутой системе общее количество азота сохраняется $v + s + w = A = \text{const}$. Тогда модель примет вид

$$dv/dt = \alpha wv - \mu v,$$

$$dw/dt = \alpha wv + \delta(A - v - w).$$

Возможны два состояния равновесия: $v^* = 0$, $w^* = A$ («мертвая» биосфера) и $v^* = \delta(\alpha A - \mu)/2(\delta + \mu)$, $w^* = \mu/2$ (при $A > \mu/2$ биосфера «оживает»). Для возникновения живого вещества и биогеохимического круговорота азота необходимо пороговое значение азота $A^* = \mu/2$ (например соединения, образовавшиеся в результате гроз). Пока азота ма-

ло, колебания демпфируются; при дальнейшем увеличении азота любые отклонения от равновесия порождают затухающие колебания, перекачивающие азот из живой биомассы в мертвую и обратно. При очень больших A равновесие превращается в узел. Таким образом, A является управляющим параметром, при определенных значениях которого биосфера оживает.

Еще одним дополнением к модели Костицына является иллюстрация Моисеевым механизма обмена углекислым газом между атмосферой и океаном. Для этого вместо y вводятся две переменные: y_1 — масса углекислого газа; y_2 — масса углекислого газа в океане (аналогично удваиваются все переменные в модели (4.1)). При этом в уравнениях для y_1 и y_2 появляется функция $f(y_1, y_2)$, описывающая обмен углекислым газом между атмосферой и океаном. Для лишенной жизни атмосферы модель Костицына в этом случае сводится к двум уравнениям:

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= f(y_1, y_2), \\ dy_2/dt &= -f(y_1, y_2). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Поскольку $y_2 \gg y_1$, то океан можно рассматривать как бесконечно большой резервуар и пренебречь влиянием y_2 на f . Тогда в линейном приближении можно применить следующую аппроксимацию $f = c(T)y_1$, где c — характеризует способность океана поглощать углекислоту в зависимости от температуры атмосферы T , причем $c = \chi(T - T^*)$. Эта формула предполагает, что существует критическое значение температуры T^* , которое меняет способность океана поглощать углекислоту. (В современных условиях $c < 0$, т. е. океан поглощает углекислоту). Так как температура T сама зависит от концентрации углекислоты в атмосфере ($T = ly_1$), то $f(y_1) = \chi ly_1 - \chi T^*$, а первое уравнение системы (4.2) примет вид

$$dy_1/dt = -\chi T^* y_1 + \chi ly_1^2. \quad (4.3)$$

Как видно из рис. 4.3 а состояние равновесия $y_1^* = T^*/l$ неустойчиво: при $y_1 > y_1^*$ взаимодействие атмосферы и океана подобно насосу, выкачивающему углекислоту из океана в атмосферу.

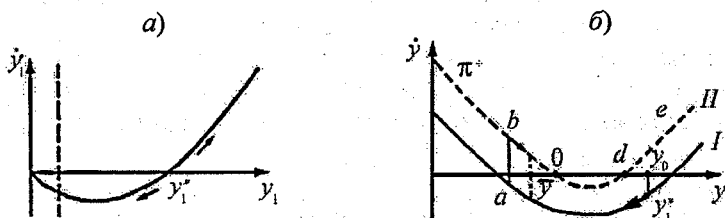


Рис. 4.3. К пояснению взаимодействия атмосферы и океана [49].

Добавив в правую часть (4.3) поток углекислого газа в атмосферу π , мы учтем антропогенное сжигание углеводородов или деятельность вулканов (кривая сместится вверх, рис. 4.3 б). Если же ввести в рассмотрение активность живой материи (причем усиливающуюся с увеличением y_1 : $\mu = \epsilon y_1$), то при некоторых предположениях придем к модели

$$dy_1 / dt = -(\chi T^* + \epsilon \psi) y_1 + \chi l y_1^2 + \pi,$$

где ψ является функцией коэффициентов взаимодействия модели Костицына. За счет ψ кривая сместится вниз (рис. 4.3 б), т. е. живая материя интенсифицируя изъятие углекислоты из атмосферы сместит точку ($y_1 = 0; y_1^*$) вправо, не ликвидируя все-таки механизм насоса.

На основе такой модели Моисеев следующим образом восстанавливает процесс эволюции атмосферы во второй половине кайнозойской эры. В миоцене, за счет вулканической деятельности, углекислоты в атмосфере было на порядок больше, чем сейчас, но меньше критического значения y_1^* (следовательно и температура планеты была выше). Так как вулканическая деятельность связана с радиоактивным распадом, убывающим по экспоненте, то поступление углекислоты в атмосферу уменьшалось: $\pi = \pi_0 e^{-\eta t}$. В начале четвертичного пе-

риода концентрация углекислоты начала непрерывно уменьшаться. Точка (y, y) смещалась влево по кривой I. Стала уменьшаться средняя температура атмосферы. Началась эра ледниковых периодов. Стала затухать интенсивность растительной жизни. Этот период умирания биосферы совпадает с периодом антропогенеза.

В настоящее время за счет антропогенного увеличения CO_2 атмосфера перешла из состояния (a) в состояние (b) и точка (y, y) движется вправо по кривой II, приближаясь к критическому моменту запуска насоса.

5. НАДЕЖНОСТЬ ПРИ НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ. САМООРГАНИЗОВАННАЯ КРИТИЧНОСТЬ

5.1. СУЩЕСТВУЮЩИЙ ПОДХОД К ОЦЕНКЕ НАДЕЖНОСТИ

В настоящее время надежность работы гидротехнических сооружений обеспечивается путем использования при их проектировании обеспеченных значений максимальных расходов воды. Построив для створа проектируемого сооружения известными в гидрологии способами кривую обеспеченности максимальных расходов, соответствующую многолетнему режиму формирования стока, задаются нормируемыми СНиПами расчетными вероятностями превышениями и с кривой снимаются значения максимального расхода. Его завышение снижает экономическую эффективность сооружения, занижение – приводит к разрушению, материальному ущербу и человеческим жертвам.

В зависимости от класса капитальности (определяется возможными последствиями аварии) установлены следующие ежегодные вероятности превышения максимальных расходов воды P %:

Класс сооружения	I	II	III	IV
P %	0,01	0,1	0,5	1

Для временных сооружений V класса принимается $P = 10$ %. Существуют нюансы при выборе значений P для водопропускных соору-

жения на автомобильных и железных дорогах (см., например, [28]), но общее требование заключается в необходимости к значениям расхода $Q_{0,01}$ % добавлять так называемую гарантийную добавку $\Delta Q_{P\%} = a E_{P\%} Q_{P\%} / \sqrt{N}$, где a — коэффициент, характеризующий гидрологическую изученность рек ($a = 1,0 \dots 1,5$); N — число лет наблюдений с учетом приведения к многолетнему периоду; $E_{P\%}$ — величина, характеризующая среднюю квадратическую погрешность расчетного расхода воды ежегодной вероятности превышения $P = 0,01$ %. По существующим рекомендациям [67], значение $E_{P\%}$ меняется от 0,25 до 4,15 в зависимости от типа распределения и значений коэффициентов вариации C_v и асимметрии C_s .

Расход воды не является единственной гидрологической характеристикой, лимитирующей надежность. В их число может входить, например, уровень воды (или глубина), определяемый гидравлическими расчетами при известных из гидрологических расчетов значениях $Q_{P\%}$. В качестве примера рассмотрим водопропускные сооружения (мостовые переходы). Задача об их надежности возникает не только на стадии проектирования. Огромное их число (особенно малых) на железных и автомобильных дорогах построено по явно устаревшим нормам, что приводит к многочисленным авариям. Это послужило основания для проведения в СССР их классификации по водопропускной способности. В результате гидрологических, гидравлических и русловых расчетов по ряду ограничивающих факторов (возвышение бровки полотна и низа пролетных строений над уровнем воды заданной обеспеченности, размывов на выходе и т. д.) сооружениям присваивается категория, на основании которой устанавливается очередность их реконструкции.

Гидрологические расчеты сводятся к определению (в основном с использованием карт изолиний) максимальных модулей стока заданной обеспеченности и к определению расхода воды, поступающего к сооружению при известной площади бассейна. Часть сформировавшегося на речном бассейне расхода Q_6 идет на заполнение аккумулирующей призмы ($Q_{\text{акк}}$), а часть проходит через подмостовое отверстие (расход сброса Q_c): $Q_6 = Q_c + Q_{\text{акк}}$ или (в объемах) $W_6 = W_c + W_{\text{акк}}$.

Для расчетов объемов аккумуляции используется эмпирическая формула $W_{\text{акк}} = kh^3 / (i_{\text{д}} i_c)$, где k — коэффициент, зависящий от морфометрии аккумулирующей емкости и определяемый по специаль-

ным таблицам; h — глубина; i_n и i_c — уклоны лога и склонов перед сооружением, ‰.

С учетом этой зависимости в нормативной методике [74] используется следующее уравнение для расхода воды в сооружении

$$Q_c = Q_6 - Q_{акк} = Q_6 (1 - kh^3 / (i_n i_c W_6)). \quad (5.1)$$

Гидравлический расчет сводится к нахождению кривой, определяющей пропускную способность трубы или мостового отверстия

$Q_c = f(h)$. Характер этой зависимости определяется типом оголовка в соответствии с типовым проектом. Затем строятся графики (рис. 5.1), на пересечении которых находится точка, соответствующая расчетной глубине. В дальнейшем эту глубину используют при расчетах размыва на выходе, фильтрации через насыпь и т. п.

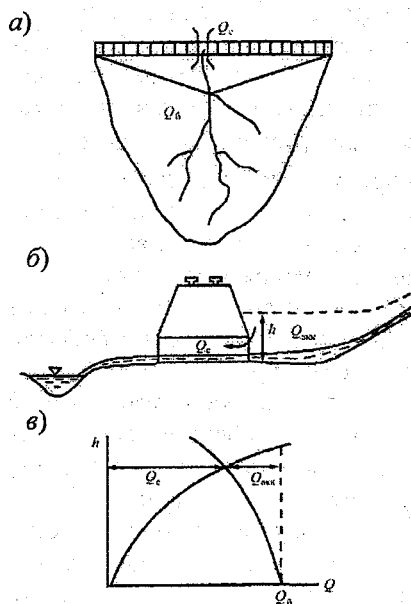


Рис. 5.1. Мостовой переход в плане (а), разрезе (б) и расчетные графики (в).

Изложенная в общих чертах стандартная методика обладает рядом недостатков. Из рис. 5.1 следует, что при максимальной глубине подтопления расход $Q_{акк}$ также максимальный. На самом деле при максимальной глубине максимальным будет объем аккумуляции, а расход

воды, как производная по времени от $W_{акк}$, будет нулевым в точке экстремума $W_{акк}$ (причем $Q_{акк}$ имеет разный знак на подъеме и спаде процесса затопления аккумулялирующей призмы).

Далее предполагается, что поступающая с водосбора вода может проходить либо через водопропускное отверстие сооружения, либо переливаться через насыпь, но не в соседние водосборы, т. е. два соседних мостовых перехода как бы ограничены «стенками». Кроме этого, так как k , i_n и i_c статистически задаваемые величины, то и рассматривать надо не максимальную глубину, а распределение ее плотности вероятности. По существующей методике надежность работы сооружения не выявляется. Из того, что в расчет вводится расход воды, например, 1%-ой обеспеченности, вовсе не следует, что обеспеченность глубины также 1 %. Указанные недостатки связаны в основном с тем, что работа сооружений рассматривается в условиях стационарного режима.

Учет динамики процесса аккумуляции воды перед сооружением можно выполнить следующим образом [33]. Для главного лога водосбора справедливо уравнение неразрывности $\partial Q / \partial x + \partial F / \partial t = 0$. Интегрируя его по продольной координате x , получим

$$Q_c = Q_6 - \partial \left(\int_x F dx \right) / \partial t, \text{ где интеграл в правой части интерпретируется}$$

как объем аккумуляции $\int_x F dx = kh^3 / i_n i_c$. Поэтому вместо алгебраического соотношения (5.1), игнорирующего динамику процесса, получим дифференциальное уравнение $Q_c = Q_6 - [3kh^2 / i_n i_c] dh / dt$, или в более общем виде

$$\frac{3k}{i_n i_c} h^2 \frac{dh}{dt} = - \sum_{i=1}^N a_i h^{(i)} + \varphi(t), \quad (5.2)$$

где $\sum_{i=1}^N a_i h^{(i)}$ — полином, аппроксимирующий кривую пропускной способности сооружения; $\varphi(t)$ — расход, формирующийся на водосборе (Q_6).

Это уравнение устраняет первый из указанных недостатков. Левая часть выражения (5.2) есть расход $Q_{акк}$, который в соответствии с физикой процесса при максимальной глубине равен нулю (так как $dh / dt = 0$ при $h_{макс}$). Расчеты по уравнению (5.2) показали [31], что учет динамики процесса аккумуляции приводит к уменьшению (по

сравнению с расчетами по стандартной методике) максимальных глубин иногда на несколько десятков процентов, а поэтому к снижению затрат на реконструкцию сооружений.

Достаточно просто можно учесть и факт взаимодействия соседних сооружений (рис. 5.2) между собой:

$$\left(\frac{3k}{i_{\pi} i_c} \right) h_i^2 \frac{dh_i}{dt} = - \sum_{j=1}^N a_{ij} h_i^{(j)} + f(h_i - h_{i-1}) \operatorname{sign}(h_i - h_{i-1}) + \\ + f(h_{i+1} - h_i) \operatorname{sign}(h_{i+1} - h_i) + \varphi_i(t), \quad (5.3)$$

где f — функция, характеризующая пропускную способность профиля водораздела между соседними сооружениями (определяется морфометрически); $\operatorname{sign}(h_i - h_{i-1})$ — знаковая функция (равна +1 при $h_i > h_{i-1}$, -1 — при $h_{i-1} > h_i$ и 0 при $h_i = h_{i-1}$); $i = \overline{1, k}$, k — общее число взаимодействующих сооружений.

Возможны различные варианты применения системы (5.3). Первый («оптимистический») заключается в том, что приток $\varphi_i(t)$ учитывается только для одного сооружения. Второй (реальный) заключается в том, что учитываются все притоки $\varphi_i(t)$ одновременно или с определенной временной сдвижкой. В этом случае возможны самые различные ситуации, когда, например, сооружение справляется с собственным притоком, но может пропускать воду через свою насыпь из-за притока из аккумулирующей призмы соседнего сооружения. Такое происходит, если задать определенную временную сдвижку между притоками воды с водосборных бассейнов. Переход к динамическому описанию взаимодействующих сооружений дает более обоснованную физическую картину работы сооружений, но тем не менее остается не решенным ряд важных вопросов.

В динамическом режиме кривая пропускной способности $Q_i = f(h)$ перестает быть однозначной. Корни подобной неоднозначности уходят в проблему гидравлических сопротивлений при неустановившемся режиме [31]. Имеющиеся результаты [31] указывают на зависимость сопротивления и от случайных факторов, например стохастичности воздействия $\varphi_i(t)$. Приближенная оценка различий глубин, подсчи-

танных с учетом и без учета влияния нестационарности на положение кривой $Q = f(h)$, показывает,

что они могут достигать иногда 50 % [31]. Следовательно, имеем не однозначную кривую $Q_c = f(h)$, а полосу

$Q_c = f(h \pm \Delta h)$, оценить ширину которой можно только в статистическом смысле, например, задавая интервалы неопределенности $\pm a_i$ для коэффициентов a_i в аппроксимирующем полиноме

$\sum_{i=1}^N a_i h^{(i)}$, т. е. вводя в (5.2) слу-

чайные параметры. Кроме того, расчет надо вести не для детерминированного входного воздействия $\varphi(t)$ с максимальным расходом воды заданной обеспеченности, а для случайного процесса, т. е. переходя к уравнению ФПК [31]. При стохастической оценке гидравлического режима можно указать доверительный интервал, в котором глубины будут опасными по существующим критериям [31].

Система уравнений для пропускной способности и аккумуляции должна быть дополнена моделью, учитывающей деформации (размыв):

$$\frac{\partial Q'}{\partial x} + \frac{\partial Q''}{\partial x} = -B \frac{\partial z}{\partial t} + q,$$

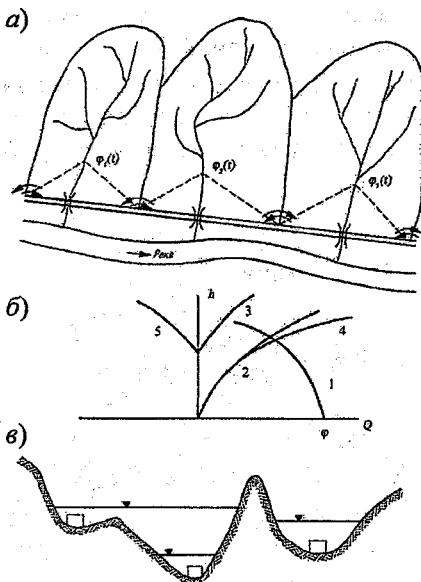


Рис. 5.2. Схема (а) системы из трех взаимодействующих сооружений; график, поясняющий изменение пропускной способности за счет перелива в соседнее сооружение (б) и поперечный разрез системы водосборов (в).

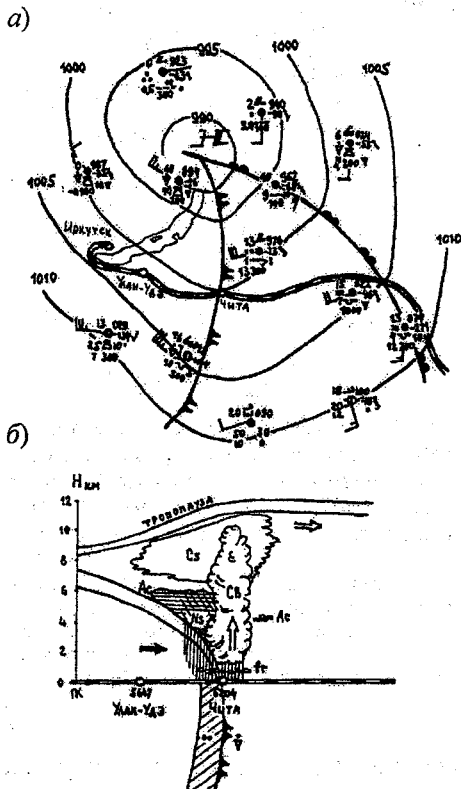
1 — кривая аккумуляции; 2 — зависимость пропускной способности сооружения от глубины; 3 — кривая перелива; 4 — суммарная кривая пропускной способности; 5 — зависимость расхода, поступающего из соседнего сооружения, от глубины h .

где Q' , Q'' – расходы взвешенных и донных наносов; z – отметка дна русла; B – ширина. Система замыкается путем использования эмпирических соотношений [31], связывающих Q' и Q'' с расходом воды. Таким образом имеем модель, описывающую неустановившийся процесс аккумуляции, прохождения воды через сооружение и размыв. Глубина последнего зависит не только от расходов воды через сооружение, но и

от продолжительности паводка и характера его гидрографа, а также от стока наносов, поступающих с бассейна. При значительном количестве последних вместе размыва может происходить их аккумуляция в трубе или под мостом.

Для общего случая в качестве входного воздействия должен выступать не детерминированный (схематизированный) гидрограф с максимальным значением расхода заданной обеспеченности, а случайный процесс или, точнее, – случайное поле, оказывающее влияние одновременно на несколько сооружений. Известно, что экстремальные расходы воды могут быть снегового или дождевого (ливневого) происхождения. В частности, для большей части Восточно-Сибирской и Забайкальской железных

дорог характерными являются максимумы ливневого происхождения. Ливневые осадки связаны с развитием достаточно мощной кучево-



дождевой облачности, которая является необходимым условием их образования.

Различают внутримассовые и фронтальные ливни. Первые характерны для влажных неустойчивых воздушных масс. Фронтальные ливневые осадки связаны с медленно перемещающимися холодными фронтами 1-го рода, приуроченными к циклонам, а также — с прохождением вторичных холодных фронтов и фронтов окклюзии.

На рис. 5.3 *а* представлена (в качестве примера) приземная карта для участка железной дороги от Улан-Удэ до Читы, а на рис. 5.3 *б* — вертикальный разрез и распределение погоды на разных расстояниях от фронта. Непосредственно перед фронтом наблюдаются облака типа Св, так что ливневые осадки с прохождением линии фронта переходят в обложные.

В работе [11] отмечается, что ливни, вызывающие экстремальные расходы, имеют площадь орошения 10 км^2 (ядро ливня). Эта цифра позволяет оценить число одновременно орошаемых ядром поля осадков водосборов. Обработка фактических данных по участкам трех железных дорог показала [33], что средняя площадь водосборов малых водопропускных сооружений составляет (с доверительной вероятностью 0,99): $(4,08 \pm 1,21) \text{ км}^2$ для Восточно-Сибирской; $(1,30 \pm 0,45) \text{ км}^2$ для Забайкальской; $(2,75 \pm 0,93) \text{ км}^2$ для Свердловской. Поэтому наиболее вероятно одновременное воздействие поля осадков на 2 — 3 водосборных бассейна.

Важное значение приобретает угол между перемещением ливневого фронта и направлением железнодорожной или автомобильной магистрали, так как при их совпадении в работу будут включаться последовательно соседние сооружения. Особенно опасная ситуация может возникнуть для сооружений, находящихся в местах резкого изменения уклона пути.

На рис. 5.4 представлена карта траекторий циклонов в Северном полушарии в июне (осредненная за 10 лет). Эта карта может быть принята за



Рис. 5.4. Карта траекторий циклонов в Северном полушарии.

основу поскольку максимум повторяемости ливневых осадков приходится именно на июль.

На рис. 5.5 представлена карта СССР, на которой показаны траектории циклонов по Х. П. Погосяну [66] и направления основных железнодорожных магистралей. Заштрихованы наиболее опасные участки железной дороги, т. е. те, на которых наиболее вероятно повреждение водопропускных сооружений при прохождении ливневых осадков из-за того, что их направление совпадает с направлением перемещения циклонов.

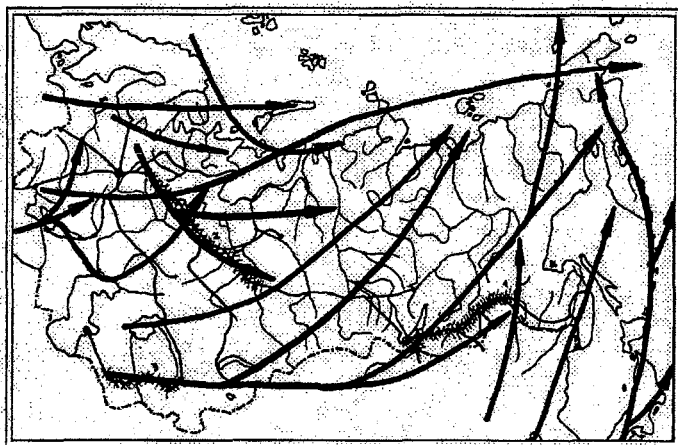


Рис. 5.5. Карта водности основных железнодорожных магистралей.

Стохастический подход можно распространить на русловые и фильтрационные расчеты. Критерии надежности водопропускных сооружений в этом случае должны содержать как конструктивные параметры (размеры отверстия и насыпи, характеристика укреплений дна и др.), так и региональные особенности рассматриваемого участка дороги (направление дороги, наиболее вероятное перемещение ливневых фронтов, связанное с характеристикой синоптической ситуации в данном регионе и др.). Эти критерии должны быть «завязаны» в стохастический функционал, имеющий временной тренд, например из-за повышения устойчивости насыпи к фильтрации с течением времени или

из-за односторонности антропогенного воздействия на рассматриваемый участок дороги.

5.2. ВОЗРАЖЕНИЯ Н. А. КАРТВЕЛИШВИЛИ

Учет особенностей гидравлической динамики и синоптической ситуации не затрагивает возражений, связанных с выбором $Q_{p\%}$ и высказанных, в частности Картвелишвили [26]. Так как в течение года реки смешанного питания имеют случайное число максимумов, то предлагается определенный принцип выделения значимых максимумов, их число в календарном году также будет случайным (r). При этом за параметр, характеризующий превышение фактического расхода Q над расчетным Q_* , могут браться следующие величины:

1. Средняя вероятность пребывания процесса выше Q_* : $\Phi_1 = M[\tau]/T$, где τ – суммарное время за интересующий период T , когда $Q > Q_*$;

2. Математическое ожидание числа выбросов случайного процесса над уровнем Q_* за время T : Φ_2 .

3. Математическое ожидание числа любых максимумов, превышающих Q_* : Φ_3 .

4. Математическое ожидание числа значимых максимумов, превышающих Q_* : Φ_4 .

5. Вероятность превышения максимума максимумов расчетного расхода воды Q_* : Φ_5 .

Любой из этих параметров может быть взят за нормативный в зависимости от смысла слова «надежность». По СНиПу нормируется параметр Φ_5 .

Задачу о распределении вероятности $\max \max Q$ Картвелишвили решает следующим образом:

- 1) все значения максимума принадлежат одной генеральной совокупности;
- 2) все они статистически независимы;
- 3) годовое число r этих максимумов одно и то же для всех лет.

Пусть F – функция распределения вероятностей максимумов, а вероятность того, что один из значимых максимумов будет меньше Q есть $F(Q)$. При сделанных предположениях вероятность непревышения ни одним максимумом значения расхода Q за N лет будет $\{F(Q)\}^{rN}$. Тогда вероятность его превышения за N лет хотя бы один раз есть: $P_N = 1 - \{F(Q)\}^{rN}$. Вероятность однократного превышения

$$1 - F(Q) = 1 - (1 - P_N)^{\frac{1}{rN}} \approx \frac{1}{rN} P_N \quad (5.4)$$

в r раз меньше вероятности P_1 его превышения один раз в году, т. е. нормативные документы преувеличивают величину $1 - F(Q) = \Phi_5$ для рек с несколькими максимумами в году (преуменьшают максимальные расчетные расходы). Так как r – случайное число, то в формулах подразумеваются математические ожидания значимых максимумов, а следовательно rN может иметь дробную часть.

Из формулы (5.4.) следует, что

$$F(Q) = (1 - P_N)^{\frac{1}{rN}}, \quad (5.5)$$

т. е. нормировать можно: либо N и P_N , вычисляя по ним $F(Q)$ и определяя Q ; либо $P_{N=1}$ и определяя $F(Q)$; либо непосредственно $F(Q)$ (или $\Phi_5 = 1 - F(Q)$). Для рек с одним годовым максимумом $P_1 = \Phi_5$; значение именно этой вероятности указывается в нормативных документах.

Рассмотренные Картвелишвили параметры $\Phi_1, \dots, \Phi_5$ есть просто решение задачи о выбросах случайного процесса.

5.3. ЗАДАЧА О «ВЫБРОСАХ»

Естественно постановку задачи Картвелишвили обобщить на нестационарные случайные процессы [37, 75], связанные, например, с антропогенным изменением климата и с наличием двух критических («расчетных») расходов. В этом случае задача о надежности

заключается в определении вероятности того, что случайная функция $\varphi(t)$, имеющая в момент времени t (зависящий от степени дискретизации процесса) значение $\bar{\varphi}$, приобретает в будущий момент времени τ значение $\bar{\varphi}$, ни разу не заходя в течение интервала времени (t, τ) в запретную область ниже φ_0 и выше φ_1 . Например, ниже φ_0 могут оголиться водозаборные устройства, а выше φ_1 будет затоплен мост (рис. 5.6). То есть надо найти вероятность того, что в интервале $(t, t + T)$ выполняется следующее неравенство: $\varphi_0 < \varphi(t) < \varphi_1$.

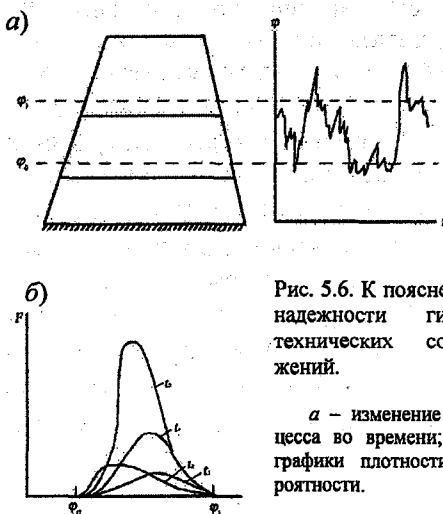


Рис. 5.6. К пояснению надежности гидротехнических сооружений.

a — изменение процесса во времени; b — графики плотности вероятности.

Искомая вероятность $P(\tau)$ недостижения границ к моменту времени $\tau = t + T$ равна

$$P(\tau) = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} p(\tau, \bar{\varphi}) d\bar{\varphi}, \quad (5.6)$$

где $p(\tau, \bar{\varphi})$ удовлетворяет уравнению ФПК для соответствующего процесса φ .

При пересечении случайным процессом $\varphi = \varphi(t)$ любой из границ плотность вероятности $p(\tau, \bar{\varphi})$ обратится в нуль, т. е. в качестве граничных условий выступают соотношения $p(\tau, \varphi_0) = p(\tau, \varphi_1) = 0$ при $\tau > t$.

Начальное условие при известной ординате случайного процесса $\bar{\varphi}$ имеет вид $p(\tau, \varphi)|_{\tau=t} = \delta(\varphi - \bar{\varphi})$, а при вероятностной начальной информации имеет вид $p(\tau, \bar{\varphi})|_{\tau=t} = p_0(\bar{\varphi})$.

Таким образом, для получения искомой вероятности, определяющей надежность, необходимо проинтегрировать уравнение ФПК при соответствующих начальных и граничных условиях, а затем подставить найденное решение в формулу (5.6) (рис. 5.6 б).

Задачу о надежности можно расширить на многомерные процессы. Пусть Φ – вектор, компонентами которого являются климатические и гидрологические переменные, влияющие на какой-либо хозяйственный объект или отрасль экономики. Можно искать вероятность того, что ни один компонент $\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n$ за время изменения климата $\tau = t + T$ не выйдет за допустимые пределы (не покинет область D), но можно интересоваться только одним компонентом. Пусть $p(\tau, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ – плотность вероятности того, что к моменту времени τ ординаты случайных процессов, будут находиться в интервалах $(\Phi_k, \Phi_k + d\Phi_k)$ ($k = 1, \dots, n$), ни разу не попадая за границу области D в пределах интервала (t, τ) , а искомая вероятность – $P(\tau)$. Тогда

$$P(\tau) = \int_{(D)} \dots \int p(\tau, \Phi_1, \dots, \Phi_n) d\Phi_1 \dots d\Phi_n, \quad \tau = t + T,$$

где $p(\tau, \Phi_1, \dots, \Phi_n)$ удовлетворяет многомерному уравнению ФПК при следующих начальных и граничных условиях:

- 1) $p = \delta(\Phi_1 - \Phi_1) \delta(\Phi_2 - \Phi_2) \dots \delta(\Phi_n - \Phi_n)$ при $\tau = t$,
- 2) $p = 0$ при $\tau > t$ (если компоненты Φ достигают границ области D).

Если интересен только один компонент, то область интегрирования D ограничивается только интервалом изменения интересующего компонента.

Заметим, что вероятностью $P(\tau)$ определяется плотность вероятности $p(\theta)$ времени пребывания случайного процесса в дозволенной области $p(\theta) = \partial P(\theta) / \partial \theta$, и математическое ожидание этого времени пребывания $\bar{\theta} = \int_0^{\infty} P(\tau) d\tau$.

В многомерном случае – это время, в течение которого все компоненты процесса ни разу не выйдут за границы области D .

5.4. ТЕОРИЯ «НОРМАЛЬНЫХ АВАРИЙ»

В основе изложенных выше взглядов лежит традиционная «теория высокой надежности», опирающаяся на центральную предельную теорему, приводящую, например, к нормальному распределению на интервале δx (рис. 5.7 а)

$$p(x)\delta(x) = (1/\sqrt{2\pi\sigma^2}) \exp(-(x - \bar{x})^2 / 2\sigma^2) \delta(x).$$

Большие отклонения соответствуют авариям и катастрофам.

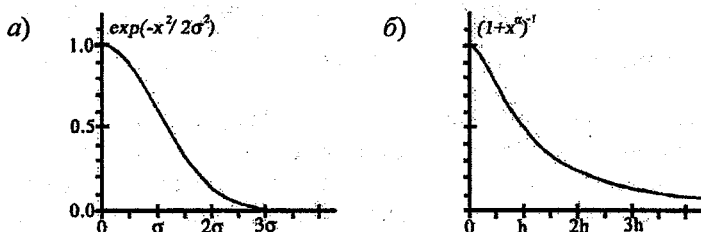


Рис. 5.7. Распределения плотности вероятности для разных теорий надежности [56]: а – высокой надежности, б – нормальных аварий.

Но существует и другой взгляд на теорию аварий и катастроф [56, 81, 99]: так называемая «теория нормальных аварий». Фактором, порождающим аварию является сложная динамика системы (если есть пути, ведущие к аварии или, по другому, если возникнут непредвиденные начальные условия). Это уже совсем другая (частично инфинитная) статистика – статистика «неблагоприятных начальных условий».

Этот подход обосновывается теорией самоорганизованной критичности. В качестве примера обычно приводят кучу песка. Добавление песчинки либо не изменяет ситуацию, либо приводит к появлению «лавин» из n песчинок. Чем больше куча, тем больше лавины, уменьшающие размеры кучи. В результате коллективного взаимодействия песчинок возникает динамическое равновесие, когда число падающих на кучу песчинок равно числу выбывающих. Это состояние и называют самоорганизованно критическим. Выяснилось, что в этом случае $p(n) = n^{-\alpha}$, где $\alpha = 1-2$ (рис. 5.7 б).

Оказывается, что в данном примере для аварии (лавины) достаточно наличие локальных связей (между ближайшими песчинками). Наличие этих связей в случае гидрологии означает, например, снятие второго предположения из п. 5.2 о стохастической независимости «значимых» максимумов. С учетом формулы (5.5) можно получить выражение для начального момента n -го порядка:

$$m_n = \int_0^{\infty} (\partial F / \partial Q) Q^n dQ = \frac{1}{rN} \int_0^{\infty} (1 - P_N)^{(1/(rN)-1)} \partial P_N / \partial Q \cdot Q^n dQ.$$

Теория высокой надежности требует сходимости интегралов для $n = 1, 2, \dots$. Известно, однако [56], что при $1 \leq \alpha \leq 2$ интеграл $\int_0^{\infty} p(n) n dn$ расходится, т. е. мы не можем оценить «средний размер лавин» (или норму стока для гидрологии). Но α это геометрический показатель формы распределения. Какая физика стоит за расходимостью? Если воспользоваться стационарным решением для уравнения ФПК, например для первого момента, то получим

$$m_1 = (N - 0,5G_{cN}) / (\bar{c} - 0,5G_{\bar{c}}),$$

т. е. расходимость будет при близких значениях $\bar{c}$ и $0,5G_{\bar{c}}$.

Системы, имеющие функции распределения с $\alpha \in [1, 2]$, всегда находятся в состоянии неустойчивости по всем моментам распределения, так как критерий устойчивости для момента n -го порядка (3.15) показывает, что система, неустойчивая по математическому ожиданию, неустойчива и по всем остальным моментам распределения. Строго говоря, реально существует только то, что устойчиво. Поэтому «теория нормальных аварий» занимается виртуальными объектами, находящимися в состоянии постоянной бифуркации, в котором свертываются философские категории «количество» и «качество» и пропадает возможность описывать ситуацию стандартными математическими методами. Это существование системы на границе устойчивости по-видимому просто шанс, который дает природа для эффективного приспособления к быстроменяющимся условиям.

Теория самоорганизованной критичности была выдвинута для объяснения так называемого фликкер-шума. Его спектр мощности на низких частотах f ведет себя как $1/f$, т. е. значительная часть его энергии связана с очень медленными процессами (образно говоря, нельзя предсказывать погоду, отвлекаясь от изменения климата). Это означает возможность катастрофической флуктуации, что характерно для системы, находящейся в окрестности точки бифуркации. Одна из наиболее вероятных гипотез возникновения фликкер-шума [93] заключается в том, что отсутствие характерного временного масштаба, связано со свойством пространственно распределенных систем, не имеющих одного характерного пространственного масштаба. Этим свойством обладают фрактальные структуры.

Базовой концептуальной моделью теории является клеточный автомат [55] (некоторая конечно-разностная аппроксимация нелинейного уравнения теплопроводности). Пусть имеем «одномерную» кучу песка с профилем $h(n)$, где n –

ячейки с номерами $n = 1, 2, 3, \dots$. Обозначим $Z(n) = h(n) - h(n+1)$ – разность высот (рис. 5.8). Когда крутизна меньше критической Z_c , то $Z(n) \rightarrow Z(n) + 1$; $Z(n-1) \rightarrow Z(n-1) - 1$. При $Z > Z_c$ $Z(n) \rightarrow Z(n) - 2$; $Z(n \pm 1) \rightarrow Z(n \pm 1) + 1$.

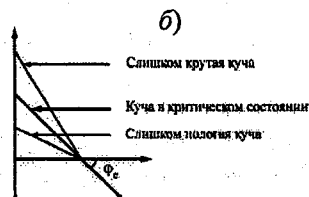
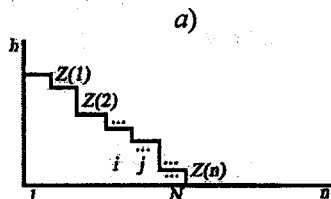
Граничные условия:

$$Z(0) = 0$$

$$Z(N) \rightarrow Z(N) - 1$$

для $Z(N) > Z_c$

$$Z(N-1) \rightarrow Z(N-1) + 1.$$



мат (а) и самоорганизованной критичности (б) [55].

(стрелка в формулах определяет правило перехода $Z^i(n) \rightarrow Z^{i+1}(n)$).

Минимально устойчивое состояние устойчиво относительно добавления песчинок (членов ряда).

В двумерном (и трехмерном) случае

$$\begin{aligned} Z(x-1, y) &\rightarrow Z(x-1, y) - 1 \\ Z(x, y-1) &\rightarrow Z(x, y-1) - 1 \quad \text{для} \quad Z(x, y) \leq Z_c \\ Z(x, y) &\rightarrow Z(x, y) + 2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} Z(x, y) &\rightarrow Z(x, y) - 4 \\ Z(x, y \pm 1) &\rightarrow Z(x, y \pm 1) + 1 \quad \text{для} \quad Z(x, y) > Z_c \\ Z(x \pm 1, y) &\rightarrow Z(x \pm 1, y) + 1 \end{aligned}$$

подобной устойчивости нет, возникают песчаные лавины, напоминающие цепную реакцию и порождающие связные конфигурации, обладающие масштабной инвариантностью (фрактальные кластеры). Так как критическое значение угла ϕ_c порождает сама система, то и говорят о самоорганизованной критичности. В численных экспериментах установлено [56], что показатель β , определяющий спектр при больших

временах (т. е. низких частотах), равен 1,08, т. е. характеризует фликкер-шум.

На рис. 5.9 показана спектральная функция ряда годового стока [89], и спектр, определяемый формулой $1/f^\beta$ при $\beta=1$. Очевиден «симбиоз» ритмов и $1/f^\beta$ флуктуаций.

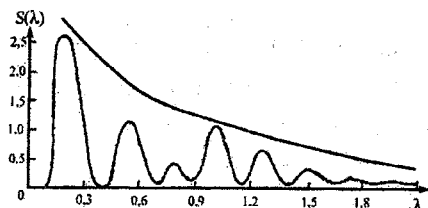


Рис. 5.9. Спектральные функции годового стока (р. Невы – с. Новосаратовка).

Оценка надежности должна производиться в рамках теории «нормальных аварий» именно в связи с фрактальными свойствами годового стока р. Невы. Эту фрактальность породил отнюдь не механизм формирования стока бассейна Невы. Бассейн лишь заключительный элемент в сложной пространственно-

распределенной геофизической системе (рис. 5.10), а сток – лишь одна из фазовых переменных. Возникает интересный вопрос о существовании подобия топологий геометрической и фазовой фрактальности.

Показанная на рис. 5.10 система исключительно сложная и возможность самоорганизованной критичности (приводящей к гидрологическим катастрофам) с точки зрения ее существования и эволюции является благом, так как свойственная фракталам робастность обеспечивает устойчивость к сбою надежности отдельных систем.

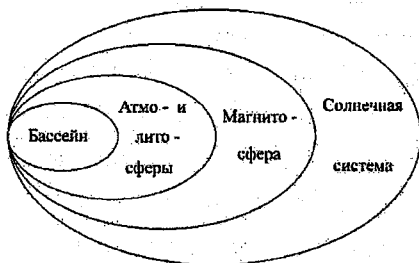


Рис. 5.10. К появлению робастности в сложных геофизических системах.

6. ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ. ЯВЛЕНИЕ ПЕРЕБРОСА

Рассмотренная выше модель ФПК является естественным стохастическим обобщением динамической модели формирования стока, учитывающей потери осадков $\bar{X}$ на испарение и фильтрацию в почву (с помощью коэффициента k), а также инерционность речных бассейнов (с помощью параметра τ) [39]:

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{\partial V}{\partial Q} = \left(-\frac{1}{k\tau} Q + \frac{\bar{X}}{\tau} \right),$$

где V – гидрологический потенциал (не путать с потенциалом r , введенным в п. 3; $V = Q^2 / 2k\tau - \bar{X}Q / \tau$). В общем случае его можно представить рядом Тейлора: $V(x) = \sum_k c^{(k)} x^k$, где $c^{(k)} = ((d^k V / dx^k) / k!)|_{x=0}$.

Потенциал возмущается либо внешними воздействиями (гидрометеоусловия $\bar{X}$, $k(\bar{X}, T)$, T – температура воздуха), либо внутренни-

ми (бассейновыми $k(f_\pi, f_p, \dots)$, f_π и f_p — степень залесенности и распаханности бассейна) факторами. Потенциал в точке равновесия ($Q_0 = kX$ или $x = Q_0 - Q = 0$) имеет локальный минимум при условии $(d^2V/dQ^2)/2 = c^{(2)} = 1/k\tau > 0$, (см. рис. 6.1). Если есть неустойчивость $c^{(2)} \leq 0$ (это может быть в уравнениях для моментов), то поведение потенциала определяется следующим членом разложения $c^{(3)}Q^3$. Если возмущения потенциала малы, то $c^{(3)}Q^3 \gg c^{(n)}Q^n$, но низшие члены разложения, вызванные возмущениями, могут нетривиальным образом изменить ситуацию, соответствующую условию $V(Q) = c^{(3)}Q^3 + \dots$, т. е. надо рассматривать потенциал

$$V(Q) = \alpha + \beta Q + \gamma Q^2 + c^{(3)}Q^3$$

или развертку (по терминологии Тома [86]), которая после известных преобразований приобретает следующий «канонический» вид: $V(Q) = Q^3 + UQ$ (различные варианты потенциалов представлены на рис. 6.1).

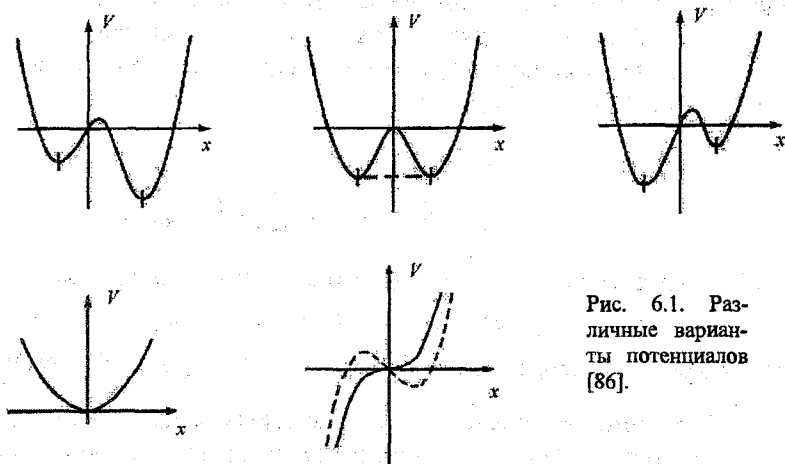


Рис. 6.1. Различные варианты потенциалов [86].

Если $c^{(3)} = 0$, то развертка потенциала принимает вид

$$V(Q) = Q^4/4 + UQ^2/2 + vQ$$

(рис. 6.1). Ситуацией (видом потенциала) управляют параметры U , v и т. д. (рис. 6.2).

В n -мерном случае в потенциале $V(Q_1, \dots, Q_n)$ можно выделить критическую часть $V(Q_1, \dots, Q_k)$, $k \ll n$, определяющую неустойчивость и бифуркации.

Если процесс полностью детерминирован, то система не может перескакивать из одного минимума в другой из-за потенциального барьера. При шумах ситуация другая. Рассмотрим, в качестве примера, климатический потенциал.

В одной из простейших моделей глобального осредненного климата [6] теплообмен Земли с космическим пространством описывается с помощью уравнения радиационного баланса $R = F \downarrow (1 - \alpha) - F \uparrow$, где R — радиационный баланс на внешней

границе атмосферы; α — альбедо; $F \downarrow$ — солнечная радиация, проходящая на внешнюю границу атмосферы; $F \uparrow$ — длинноволновое уходящее излучение системы земля — атмосфера. Хотя за длительный период времени радиационный баланс в целом для планеты близок к нулю, но наличие термической инерции климатической системы приводит к тому, что $R \sim C dT/dt$, где T — средняя годовая приземная температура воздуха; C — параметр, характеризующий теплоемкость системы земля — атмосфера, причем значение C зависит от рассматриваемого масштаба процесса. Если он мал, то океан не успевает оказать существенного влияния и значение C невелико. По мере увеличения масштабов времени в рассмотрение вовлекаются все более глубокие слои

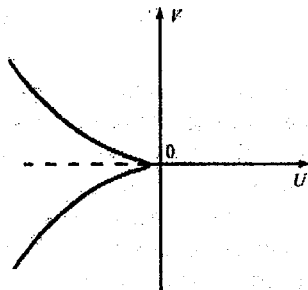


Рис. 6.2. Разбиение плоскости (U, V) на зоны по виду потенциала: сплошная и штриховая линии представляют собой катастрофические множества (первая состоит из точек бифуркации, а вторая — из конфликтных точек) [86].

океана и C стремится к полной теплоемкости океана. Известно, что $F \downarrow = Q_0/4$, где Q_0 – солнечная постоянная, равная 1380 Вт/м^2 . Также установлено, что альbedo зависит от прозрачности атмосферы P и средней годовой приземной температуры воздуха T : $\alpha = \alpha[P(t), T]$. Длинноволновое уходящее излучение зависит от температуры и концентрации углекислого газа в атмосфере: $F \uparrow [T, \text{CO}_2]$. Таким образом, имеем глобальную модель климата:

$$CdT/dt = (Q_0/4)\{1 - \alpha[P(t), T]\} - F \uparrow [T, \text{CO}_2]. \quad (6.1)$$

Конкретный вид зависимостей альbedo и уходящего излучения от определяющих факторов нам пока не важен. Решить это уравнение – значит найти изменение температуры от времени $T(t)$ при заданных замутненности и концентрации углекислого газа. Функция $P(t)$ оценивается по активности вулканов. Используются так называемые индексы вулканической запыленности атмосферы, основанные на том, что снижение прозрачности связано с твердыми частицами, попадающими в атмосферу при вулканических извержениях. Используются и другие показатели, например ряд атмосферных аномалий прямой солнечной радиации и ряды аэрозольной оптической плотности атмосферы.

Для оценки изменения содержания CO_2 в атмосфере используются (речь идет о ретроспективе) всевозможные аппроксимации типа

$$c(t') = 290 + 1,533 \exp[0,0287(t' - 1860)],$$

где t' – номер года, $c(t')$ – объемная концентрация CO_2 .

Все это позволило сравнить решение (6.1) с фактическим ходом температуры за последние 100 лет в Северном полушарии и спрогнозировать дальнейшее увеличение температуры с учетом прогноза содержания в атмосфере CO_2 .

До каких пределов климатическая система может адаптироваться к подобным изменениям параметров и внешних воздействий? Если последний член в (6.1) описать с помощью модифицированного закона Стефана – Больцмана, то $F \uparrow = \varepsilon \sigma T^4$, где σ – постоянная Стефана, ε – эмиссионная способность, учитывающая отличие Земли от черного те-

ла. В этом случае анализ уравнения показывает [62] наличие трех стационарных состояний (рис. 6.3): T_a , T_b – устойчивые состояния, соответствующие ледниковому периоду и современному состоянию; T_0 – неустойчивое состояние (любое отклонение температуры от T_0 имеет тенденцию к возрастанию). Величина

$$V(T) = -\frac{1}{C} \int dT \left[\frac{Q_0}{4} [1 - \alpha(P(t), T)] - F \uparrow [T, \text{CO}_2] \right]$$

и есть тот самый потенциал, о котором шла речь выше и который характеризуется бистабильностью (двумя потенциальными ямами, рис. 6.3).

Наличие изменчивости в системе (случайных флуктуаций) можно учесть, добавив в правую часть (6.1) некоторую «случайную силу». Выполнив переход к модели ФПК, мы приходим к стационарному двухмодальному (из-за нелинейности) решению (рис. 6.4).

Между состояниями в потенциальных ямах осуществляется связь с помощью флуктуаций, т. е. между детерминистическими устойчивыми состояниями могут осуществляться переходы, индуцируемые флуктуациями (явление переброса). Время перехода оценивается величиной

$$\tau_{a,b} \sim \exp[V(T_0) - V(T_{a,b})] / q^2,$$

где $V(T_0) - V(T_{a,b})$ – высота потенциального барьера; q^2 – дисперсия «случайной силы».

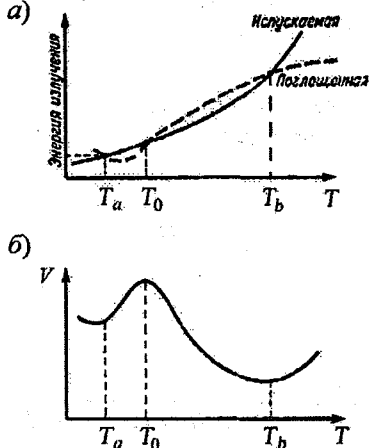


Рис. 6.3. Глобальный энергетический баланс (а) и климатический потенциал (б).

При малых флуктуациях $\tau_{a,b} \sim 10^4 \dots 10^5$ лет (характерное время ледников в четвертичном периоде). Наличие потенциальной ямы в районе T_b (где мы сейчас находимся) дает гарантию того, что если ликвидировать незначительные флуктуации параметров, входящих в климатический потенциал, система вернется в исходное состояние. Если же цивилизация раскачает систему и переведет ее через точку бифуркации $T_{кр}$

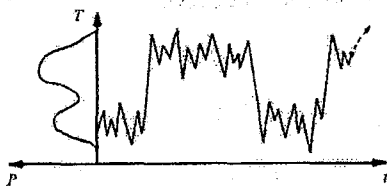


Рис. 6.4. Двухмодальное решение и его развертка (штриховой линией показана современная тенденция изменения глобальной температуры).

(рис. 6.5), то не исключена возможность возврата климата в кайнозойский период, когда средняя температура была 20°C ; уровень океана поднимется на 80 м со всеми вытекающими последствиями.

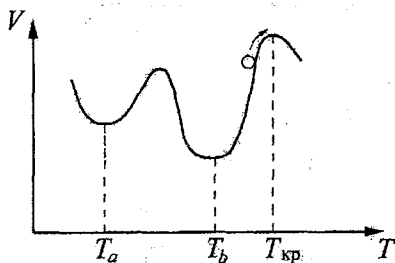


Рис. 6.5. Возможность перевода системы через точку бифуркации ($T_{кр}$).

По-видимому подобное явление переброса могут испытывать и гидрологические системы (речные бассейны), но на гораздо меньших временных интервалах. Для этого необходимо появление двухмодального распределения (своеобразного квантования задачи, вызванное нелинейностью, т. е. появление

пусть и не дискретных, но предпочтительных путей эволюции).

Подобное явление переброса (смена режима расходов воды без видимого изменения осадков и температуры, наблюдается, например, на реках Северного Казахстана).

В 1961 г. Л. М. Конаржевский [47] в ходе исследований по выявлению и качественной оценке типовых особенностей вариаций рядов весеннего стока в лесостепной и степной зонах выявил многочисленные случаи (68 %) двухмодальных распределений (рис. 6.6).

Конаржевский объяснил появление двухмодальности особенностями формирования весеннего стока в степной зоне, а именно

зимними потерями запасов воды на водосборе, которые увеличивают в многолетнем разрезе число лет с очень низким стоком за счет уменьшения средних по водности лет.

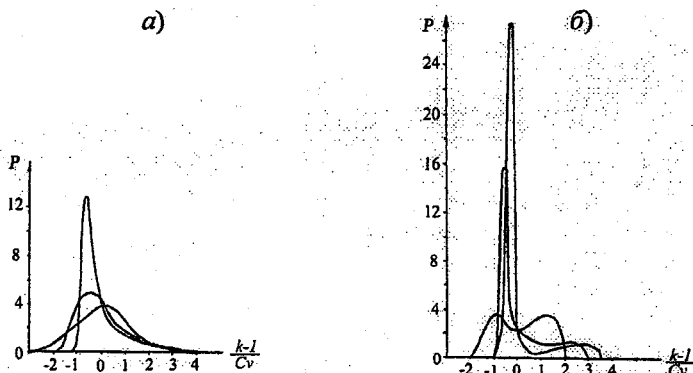


Рис. 6.6. Варианты одномодальных (а) и двухмодальных (б) распределений.

А. В. Рождественский и А. И. Чеботарев [73] объясняют это явление тем, что в формировании стока весеннего половодья в многоводные годы принимает участие вся площадь водосбора, а в маловодные — только ее часть (без бессточных понижений). Это изменение величины действующей площади приводит к появлению второй моды в зоне повышенного стока из-за разнородности величин стока в статистической совокупности.

Оба эти объяснения делают упор на особенности формирования только весеннего половодья и только в степной зоне. Однако сам Конаржевский приводит примеры распределения вероятности по «типу степной кривой» для других групп гидрологических явлений. Так степная типовая кривая хорошо описывает эмпирическое распределение наинизших уровней р. Волги у г. Астрахани, наивысших уровней воды рек Калитвы, Березовой и Кондагорчье, среднегодовых расходов рек Хогрсовка и Бели Лом (в Болгарии).

Нами были обработаны несколько десятков рядов среднегодовых расходов воды (в том числе и по створам Конаржевского), а также осадков и температуры воздуха на предмет выявления двухмодальных распределений, не связанных с хозяйственной деятельностью или двухмодальностью метеорологических рядов, ведущих

к неоднородности рядов стока. На рис. 6.7 представлен характерный случай подобной ситуации.

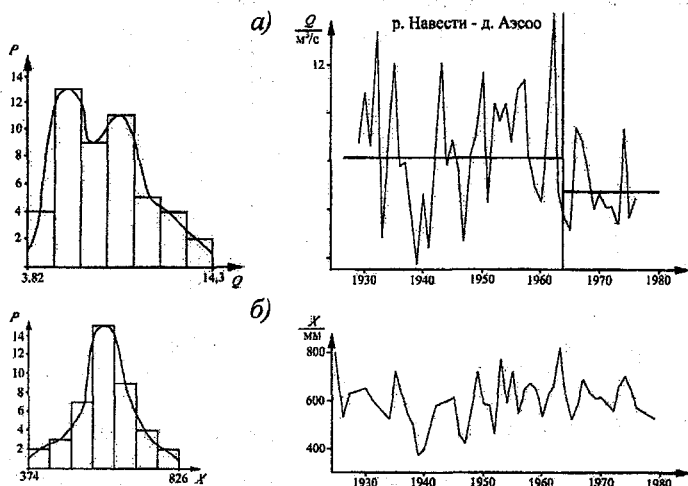


Рис. 6.7. Пример двухмодального распределения (а), не связанного с метеорологическими факторами (б) и хозяйственной деятельностью.

В настоящее время наиболее изученной в отношении явления переброса служит следующая математическая модель [29, 31, 32]:

$$\ddot{q} + \alpha \dot{q} + Rq + \beta q^3 = \bar{x}(t),$$

где $q = Q - Q_0$, $\bar{x}(t) = X_1(t) - X_0(t)$ – отклонение выходной и входной величин от соответствующих норм. Пусть $\langle x(t)x(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$ (здесь D – коэффициент). Стационарное распределение вероятности, установление которого описывается уравнением Эйнштейна – Смолуховского

$$\frac{\partial p_t(q)}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial}{\partial q} \left\{ \left[-\frac{Rq^2}{2} + \frac{\beta q^4}{4} \right] p_t \right\} + \frac{D}{\alpha^2} \frac{\partial^2 p_t}{\partial q^2},$$

имеет вид

$$p_{\infty}(q) = \text{const} \cdot \exp \left\{ -\frac{\alpha}{D} \left(\frac{Rq^2}{2} + \frac{\beta q^4}{4} \right) \right\}.$$

При $R > 0$ это одномодальное распределение с максимумом $q = 0$, что соответствует норме стока, а в случае $R < 0$ будут два максимума в точках $q = \pm(R/\beta)^{0,5}$ и минимум в точке $q = 0$ (рис. 6.8).

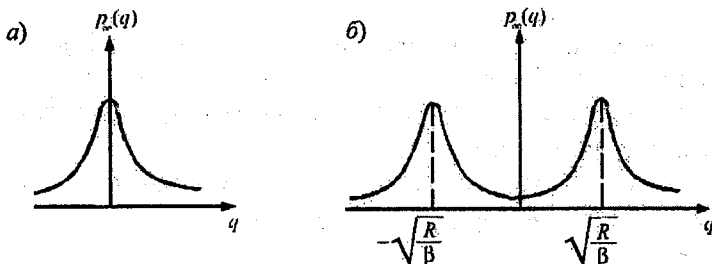


Рис. 6.8. Возможные варианты стационарного распределения плотности вероятности.

а) – одномодальное; б) – двухмодальное.

Время переброса зависит от интенсивности $x(t)$ и выражается формулой $T = \sqrt{2\pi} \exp(\mu/4)$, где $\mu = \beta D / \alpha R \ll 1$ (D – дисперсия водоподдачи на бассейн).

Гидрологический смысл параметра β пока остается неясным, поэтому при определении времени переброса значение β можно назначать исходя из того, что последний член соизмерим с предпоследним при значении X равным норме осадков.

При $\alpha \sim 1$, $\beta \sim 10^{-2}$, $D \sim 10$, $R^2 \sim 10$ получаем T по порядку величины, соответствующей натурным данным.

Разумеется несколько примеров, которые можно интерпретировать как переброс, не могут служить неопровержимым доказательством подобного явления, тем более, что продолжительность рядов не позволяет сделать надежных выводов о статистической значимости второй моды. Однако теоретическое исследование подобного явления может оказаться полезным с точки зрения создания наиболее правдоподобных моделей речного стока.

7. НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕЗОНАНСЫ В ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИИ

Основным объектом исследования в данном разделе является нелинейный осциллятор. Но начнем мы с его линейного автономного прототипа [72]:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (7.1)$$

где x — фазовая переменная, определяемая природой осциллятора (например смещение атмосферы Земли под воздействием лунного притяжения); γ — параметр, характеризующий потери (трение и др.), ω_0 — собственная частота осциллятора.

Если добротность системы $Q = \omega_0 / 2\gamma$ бесконечна ($\gamma \rightarrow 0$), то приходим к модели гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (7.2)$$

являющегося консервативным, так как его энергия сохраняется во времени. Это показывается и для более общего нелинейного осциллятора

$$\ddot{x} = f(x), \quad (7.3)$$

следующим образом [72]. Полная энергия осциллятора W равна сумме кинетической ($W_k = \dot{x}^2 / 2$) и потенциальной ($\int_{x_0}^x f(\xi) d\xi$) энергий:

$$W = W_k + W_n = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_{x_0}^x f(\xi) d\xi. \quad (7.4)$$

Дифференцируя (7.4) по времени, получим: $\dot{W} = \dot{x}\dot{x} - \dot{x}f(x) = \dot{x}[\dot{x} - f(x)] = 0$, т. е. $W = \text{const}$ (полная энергия сохраняется).

Уравнения (7.2) и (7.3) описывают системы с одной степенью свободы (число нормальных координат или собственных частот, определяющих состояние системы, вдвое меньше порядка дифференциаль-

ного уравнения). Системе с одной степенью свободы соответствует двумерное фазовое пространство – плоскость, с полутора – трехмерное, с двумя – четырехмерное и т. д.

К подобным моделям можно придти, линеаризуя, например, модель, описывающую взаимодействие хищника и жертвы

$$\dot{N}_1 = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_2 N_2); \quad \dot{N}_2 = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_1 N_1),$$

относительно состояния равновесия $N_1^0 = \varepsilon_2 / \gamma_2$, $N_2^0 = \varepsilon_1 / \gamma_1$ ($N_1 = N_1^0 + N_1'(t)$, $N_2 = N_2^0 + N_2'(t)$): $\dot{N}_1' + \omega_0^2 N_1' = 0$, где $\omega_0^2 = \varepsilon_1 \varepsilon_2$ (аналогично для N_2'). Введя обозначение $N_1' = x$, придем к уравнению (7.2), которое запишем в виде системы двух уравнений:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\omega_0^2 x. \quad (7.5)$$

Каждой точке фазовой плоскости $(x, \dot{x})$ соответствует определенное состояние системы. Уравнение интегральных кривых на фазовой плоскости имеет вид

$$dy/dx = -\omega_0^2 x / y. \quad (7.6)$$

Решение (7.6) $y = y(x, c)$ образует семейство интегральных кривых (рис. 7.1): $y^2 / c + x^2 / c / \omega_0^2 = 1$, где c – определяется начальными условиями.

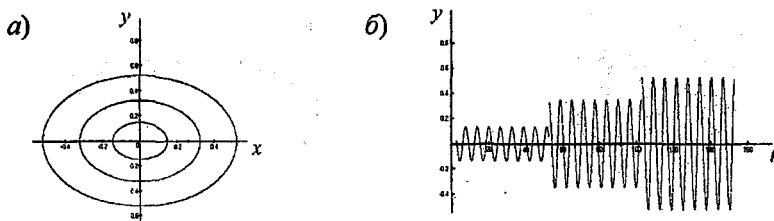


Рис. 7.1. Семейство интегральных кривых уравнений (7.6) (а) и временные разветки (б).

Состояние равновесия в данном случае изолировано (к нему не стремится ни одна траектория) и называется центром (период определяется формулой $T = 2\pi/\omega_0$).

В случае модели осциллятора

$$\ddot{x} - a^2 x = 0 \quad (7.8)$$

(система с отталкивающей силой) интегральными кривыми будут гипер-

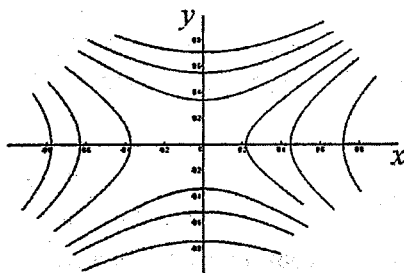


Рис. 7.2. Фазовый портрет системы с отталкивающей силой.

болы $y^2 - a^2 x^2 = c$ с асимптотами $y = ax$ и $y = -ax$ при $c = 0$. Фазовый портрет представлен на рис. 7.2. Состояние равновесия называется седлом. Асимптоты, проходящие через седло, называются сепаратрисами. Движение в окрестности седла неустойчиво (нефинитно).

Если в модель добавить член, связанный с $\gamma \neq 0$, то полу-

чим либо устойчивый фокус (при $\gamma > 0$, но $\gamma^2 < \omega_0^2$ — малая диссипация, рис. 7.3), либо устойчивый узел (при $\gamma^2 > \omega_0^2$, рис. 7.4).

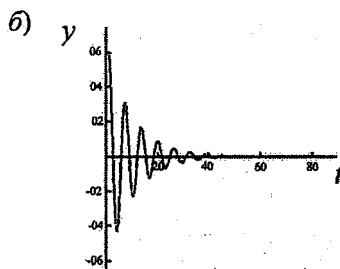
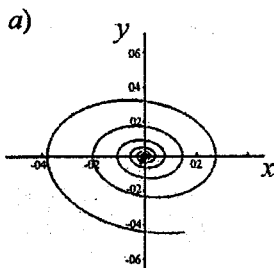


Рис. 7.3. Устойчивый фокус (а) и затухающие колебания (б).

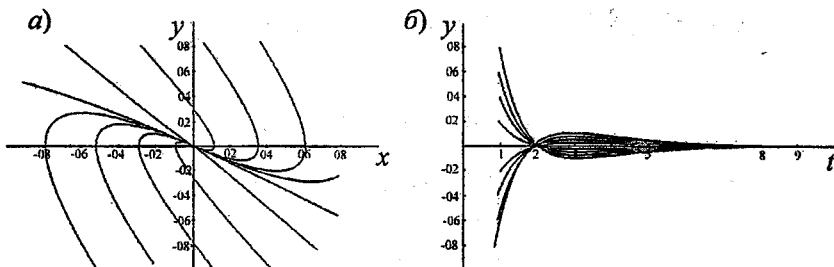


Рис. 7.4. Устойчивый узел (а) и временная развертка (б).

При $\gamma < 0$ (отрицательное трение) состояние равновесия становится неустойчивым (рис. 7.5 – фокус; рис. 7.6 – узел). Для системы (7.8) включение $\gamma \neq 0$ не меняет седлового характера фазового портрета.

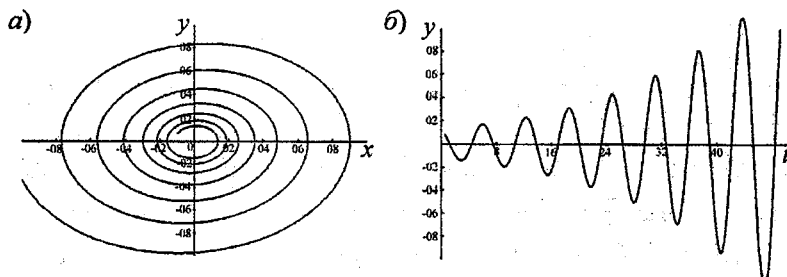


Рис. 7.5. Неустойчивый фокус (а) и временная развертка (б).

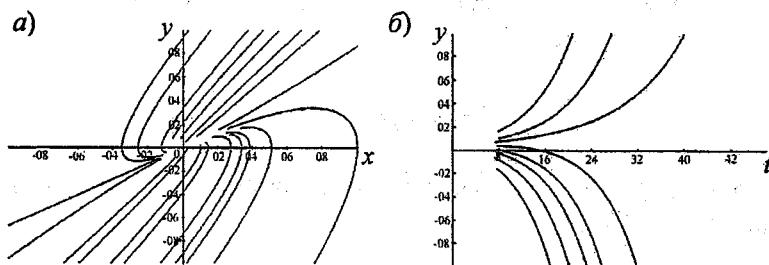


Рис. 7.6. Неустойчивый узел (а) и временная развертка (б).

Решение уравнения (7.1) при $\gamma^2 \neq \omega_0^2$ будет

$$x = A \exp(p_1 t) + B \exp(p_2 t),$$

где p_1 и p_2 корни характеристического уравнения

$$p^2 + 2\gamma p + \omega_0^2 = 0.$$

Тип состояния равновесия определяется расположением корней на комплексной плоскости $p = p' + ip''$ [72] (рис. 7.7). Изменение знака γ смещает корни в правую полуплоскость и состояние равновесия становится неустойчивым.

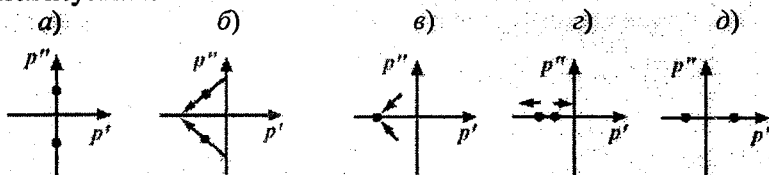


Рис. 7.7. Связь расположения корней на комплексной плоскости с типом состояния равновесия: а) центр ($\gamma = 0, p_{1,2} = \pm i\omega_0$); б) фокус ($\omega_0 > \gamma > 0, p_{1,2} = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$); в) качественное изменение фазового портрета ($\gamma = \omega_0, p_{1,2} = -\gamma$); г) узел ($\gamma > \omega_0, p_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$); д) седло ($\gamma = 0, p_{1,2} = \pm \omega_0$).

Добавим в правую часть (7.1) периодическую внешнюю силу с амплитудой F_0 и частотой ω :

$$x + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t. \quad (7.9)$$

При $\omega \rightarrow \omega_0$ резко возрастает явление резонанса. При $\gamma = 0$ решение уравнения (7.9) будет

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + p \cos \omega t,$$

где $\rho = F_0 / (\omega_0^2 - \omega^2)$.

Если $x(t=0) = \dot{x}(t=0) = 0$, то $A = -\rho$, $B = 0$ и

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

или

$$x(t) = \frac{F_0}{2\omega_0} \frac{\sin[(\omega_0 - \omega)t/2]}{(\omega_0 - \omega)t/2} t \sin \omega_0 t,$$

(рис. 7.8).

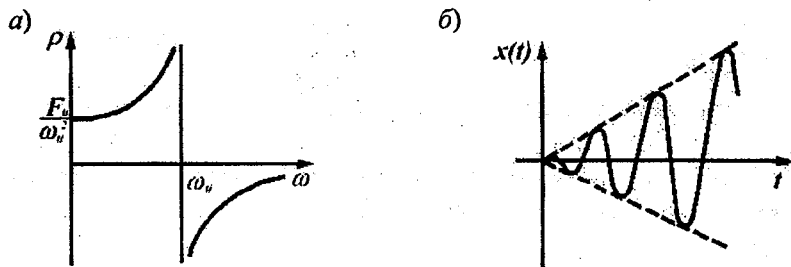


Рис. 7.8. Влияние резонанса на решение (7.9) (а) и временная развертка (б) [72].

Множитель t вызывает секулярный рост амплитуды, т. е. проявление неустойчивости по отношению к внешним воздействиям. Подавить резонанс можно, введя $\gamma \neq 0$ (рис. 7.9) или учтя нелинейные эффекты, например так:

$$\ddot{x} + 2\omega_0^2 \dot{x} + \mu\omega_0^2 x = F \cos \omega t,$$

где $\omega_0^2(x) = \alpha x + \beta x^2 + \dots$

С помощью явления резонанса удалось определить [72, 83] параметры осциллятора земля – атмосфера. Луна, являясь внешней силой, вращаясь вокруг Земли вызывает приливы атмосферы с периодом 12 часов 40

минут. Смещенная атмосфера из-за гравитации колеблется относительно Земли. Параметры γ и ω_0 такого осциллятора были найдены путем измерения величины атмосферных приливов и времени их задержки, что позволило построить резонансную кривую $\rho = \rho(\omega)$ (рис. 7.10).

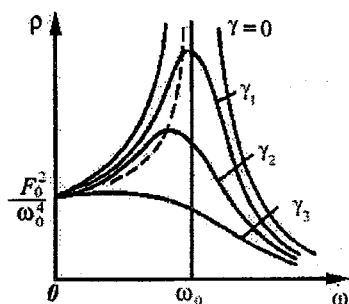


Рис. 7.9. Вид резонансных кривых в зависимости от γ ($\gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3$) (штриховой линией показана траектория смещения максимумов ρ^2) [72].

При непериодической внешней силе $F(t)$ гармонический осциллятор $\ddot{x} + \omega_0 x = F(t)$ порождает резонанс, если в ряду Фурье

$F(t) = \sum_{i=1}^{\infty} F_{0i} \cos \omega_i t + \dots$ есть частота ω_i , совпадающая с собственной частотой осциллятора.

Если рассматривать нелинейный консервативный осциллятор $\ddot{x} + f(x) = 0$, то его движение полностью определяется начальной энергией. Причем консервативность (сохранение энергии) это существование интеграла движения $F(x, \dot{x}) = c$. Например для системы хищник – жертва

$$\dot{N}_1 = N_1(\varepsilon_1 - \gamma_1 N_2), \quad \dot{N}_2 = -N_2(\varepsilon_2 - \gamma_2 N_1)$$

этот интеграл имеет вид

$$\gamma_2 N_1 + \gamma_1 N_2 - \varepsilon_2 \ln N_1 - \varepsilon_1 \ln N_2 = \text{const.}$$

Каждому значению c соответствует своя траектория движения (рис. 7.11).

Для распределенных систем уравнение одноволнового приближения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v(u) \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

приводит либо к уравнению Кортевега – де Вриза ($\nu = 0$), либо – Бюргерса ($\beta = 0$), т. е. к каноническим уравнениям теории нелинейных волн.

Переходя к бегущей координате $\xi = x - Vt$, при $v(u) = u$, получим модель нелинейного осциллятора с затуханием (см. [72]):

$$\beta d^2 u / d\xi^2 - v du / d\xi = Vu - u^2 / 2.$$

Фазовые портреты показаны на рис. 7.12.

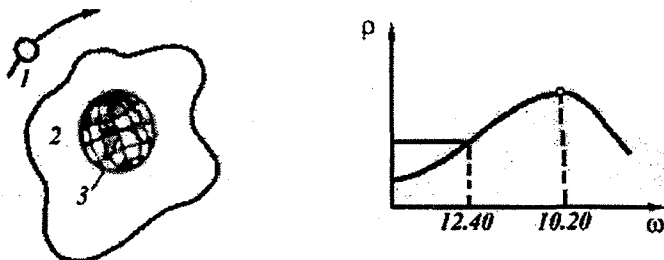


Рис. 7.10. К определению собственных параметров осциллятора земля – атмосфера $T = 2\pi/\omega$ [72, 83].

1 – Луна, 2 – атмосфера, 3 – Земля.

Для консервативного осциллятора ($v = 0$) с ростом энергии колебания все больше отличаются от периодических, пока изображающая точка вообще не попадает на сепаратрису и мы получаем уединенную волну (рис. 7.12 а) – солитон.

В нелинейном осцилляторе частота ω зависит от амплитуды $\omega(A)$. Если частота внешнего воздействия Ω близка к ω , то система черпает энергию из внешнего источника и амплитуда колебаний возрастает,

т. е. изображающая точка как бы перемещается на фазовые траектории с большей энергией. Но так как им соответствуют уже другие частоты,

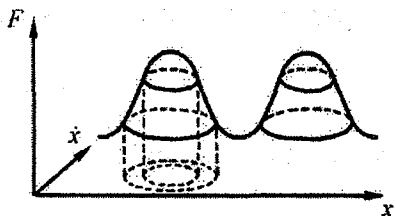


Рис. 7.11. К объяснению построения фазового портрета.

то происходит выход из резонанса (внешняя среда для осциллятора становится инфинитной, он ее просто перестает «замечать»).

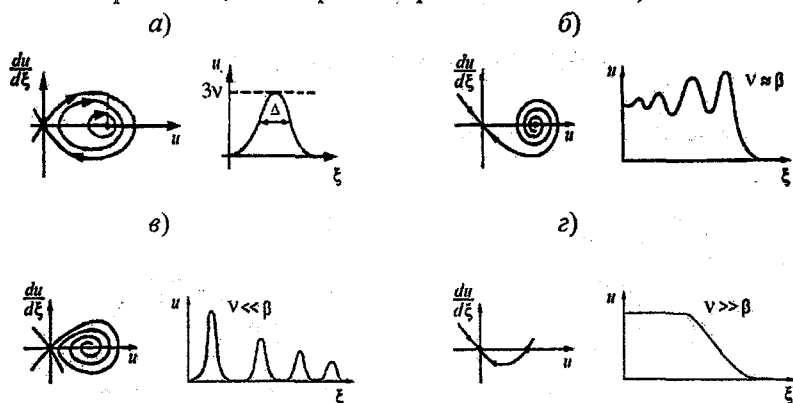


Рис. 7.12. Фазовые портреты и «развертки» решений при различных значениях ν .

Еще одно важное явление – параметрический резонанс, возникающий в так называемых параметрических системах с изменяющимися во времени и пространстве параметрами модели. Параметрические системы могут быть резонансными (если время изменения параметров соизмеримо с временем релаксации системы) или нерезонансными (если параметры меняются слишком быстро или слишком медленно).

Например параметрическая неустойчивость в модели Матье

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 - \mu b \cos \omega t)x = 0$$

подавляется, если частота зависит от амплитуды

$$\ddot{x} + \omega_0^2(1 - \mu b \cos \omega t)x + \mu b x^3 + 2\mu \lambda x = 0.$$

Нелинейные модели обладают исключительной способностью к расширению своих предметных областей. В нелинейном осцилляторе (в отличие от линейного) резонанс возможен при различных частотах внешнего воздействия. Это связано с зависимостью $\omega(A)$ – неизохронностью, и с присутствием в спектре колебаний высших гармоник – ан-

гармоничностью. При негармоническом возмущении

$$F_{\text{вн}}(t) = \sum_n A_n \cos \Omega t \text{ условие резонанса может быть выполнено для раз-}$$

ных A , т. е. каждая гармоника определяет свой резонанс в соответствующей области фазового пространства. Причем эти резонансы могут быть не только изолированными (не влияющими друг на друга), но и перекрываться (взаимодействовать). Степень этого взаимодействия определяется отношением ширины резонанса $\Delta\omega$ к расстоянию до ближайшего резонанса-соседа $\Delta = |\omega_{i+1} - \omega_i|$. Перекрытие резонансов будет, если $\Delta\omega / \Delta \geq 1$. То есть система может переходить из одной потенциальной ямы в другую, проявляя стохастическую неустойчивость.

8. ОПТИМИЗАЦИЯ РЕЖИМНОЙ ГИДРОЛОГИЧЕСКОЙ СЕТИ НА ОСНОВЕ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ФОРМИРОВАНИЯ РЕЧНОГО СТОКА

8.1. ЗАДАЧА О РАЦИОНАЛЬНОМ РАЗМЕЩЕНИИ ОСАДКОМЕРНОЙ И СТОКОВОЙ СЕТИ

В восьмом разделе монографии делается попытка представить проблему оптимизации осадкомерной и стокowej сети в рамках единого методологического подхода, основанного на концепции частично инфинитного моделирования. Сеть постов – это своеобразные «шпионы», плотность и места расположения которых диктуются не абстрактным желанием знать «все» об объекте, а, так называемой, предметной областью, которая выделяет в инфинитной гидрометеорологической среде набор осмысленных рационализированных представлений (модель), имеющих практическое применение.

В качестве такой модели использовано уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК), которое описывает формирование речного стока и содержит в качестве «входа» метеорологические и антропогенные управляющие воздействия на водосборы. Опираясь на эту модель, удалось получить более общие (чем существующие в настоящее время) критерии оптимальной режимной сети и наметить пути дальнейшей эволюции методологии оптимизации [45].

Суммарные затраты Σ на содержание осадкомерной и стоковой сети складываются из затрат на содержание постов наблюдений c и убытков народного хозяйства от незнания гидрометеорологической ситуации L [9].

Примем $c = c_{oc}N_{oc} + c_{ст}N_{ст}$, где N_{oc} , $N_{ст}$ – плотность осадкомерной и стоковой сети соответственно, (т. е. количество пунктов наблюдений на заданном водосборе площадью F); c_{oc} , $c_{ст}$ – стоимость содержания каждого пункта. Знание гидрометеорологической ситуации будем оценивать плотностью вероятности $p(Q(F))$. Тогда неточность информации о вероятностных характеристиках годового стока определяется: 1) расхождением фактических p_f (теоретических) и эмпирических p_e функций распределения, оцениваемым локальной или интегральной метрикой на интервале T лет наблюдений (типа критериев согласия Колмогорова или Пирсона) $\rho_T(p_f, p_e)$, и 2) убывающей функцией числа стоковых постов, наблюдениями на которых аппроксимируется фактическое поле речного стока $f_{N_{ст}}(\rho_T(p_f, p_e))$.

Аналогичные оценки примем и для годовых сумм осадков. Тогда экономические потери, связанные с недостаточной плотностью гидрометеорологических постов, можно задать следующей линейной функцией:

$$L = a_{ст}f_1(N_{ст}) + a_{oc}f_2(N_{oc}) + b.$$

Введем ограничения на затраты, связанные с содержанием постов $c_{ст}N_{ст} + c_{oc}N_{oc} = R^*$. Тогда выгода от содержания сети описывается следующей целевой функцией (Лагранжианом):

$$G(N_{ст}, N_{oc}, \lambda) = a_{ст}[f_1(0) - f_1(N_{ст})] + a_{oc}[f_2(0) - f_2(N_{oc})] - \\ - c_{ст}N_{ст} - c_{oc}N_{oc} - \lambda(c_{ст}N_{ст} + c_{oc}N_{oc} - R^*),$$

где члены в квадратных скобках описывают уменьшение потерь по мере уплотнения сети.

Приравнивая к нулю частные производные от $G(N_{ст}, N_{oc}, \lambda)$, получим систему алгебраических уравнений

$$-a_{\text{ст}} \partial f_1 / \partial N_{\text{ст}} - c_{\text{ст}} - \lambda_{\text{ст}} = 0;$$

$$-a_{\text{ос}} \partial f_2 / \partial N_{\text{ос}} - c_{\text{ос}} - \lambda_{\text{ос}} = 0;$$

$$c_{\text{ст}} N_{\text{ст}} + c_{\text{ос}} N_{\text{ос}} - R^* = 0,$$

решая которую, можно найти оптимальное число осадкомерных и стоковых постов. Рисунок 8.1 иллюстрирует излагаемую ситуацию. Множитель Лагранжа λ показывает скорость изменения оптимального значения целевой функции G (без последнего слагаемого) при изменении ограничения и называется теневой ценой.

Более разумным представляется использовать ограничения в виде неравенства $c_{\text{ст}} N_{\text{ст}} + c_{\text{ос}} N_{\text{ос}} \leq R^*$ (иначе мы «заставляем» тратить деньги). Тогда для придания процедуре решения стандартного вида, в указанное неравенство вводят, так называемые, избыточные переменные [54], превращающие его в равенство.

Для определения оптимальных значений $N_{\text{ст}}$ и $N_{\text{ос}}$ необходимо знать $c_{\text{ст}}$, $c_{\text{ос}}$, $a_{\text{ст}}$, $a_{\text{ос}}$ и R^* , f_1 , f_2 . Это требует детального знакомства с экономикой оптимизируемой территории и используемой методикой гидрометеорологических измерений и расчетов. Коэффициенты $a_{\text{ст}}$ и $a_{\text{ос}}$ зависят от характера использования данных по стоку и осадкам, а для этого необходимо знание математического вида производственных функций [38], в которые входит природный ресурс, например, в виде обеспеченного значения расхода воды. Поэтому практическая реализация экономического подхода требует знания чувствительности производственных функций отраслей экономики, имеющих отношение к оптимизируе-

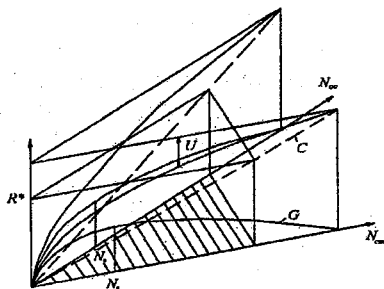


Рис. 8.1. Оптимизация гидрометеорологической сети.

N_0 — оптимальное число постов при несущественности или избыточности ограничения; $U = a_{\text{ст}} [f_1(0) - f_1(N_{\text{ст}})]$ — уменьшение потерь при увеличении числа постов.

мым водосборам, к погрешностям гидрометеорологической информации, включая прогнозную. Следовательно приходится пока ограничиться чисто гидрометеорологическим подходом, задавая требуемую точность, исходя из которой находить оптимальную сеть. Но даже в такой ситуации возникает ряд вопросов. Например, что такое «фактическое» распределение $p(Q(F))$, к которому надо стремиться, организуя оптимальную сеть постов?

Данную задачу можно детализировать, рассматривая в качестве «потребителей» выделяемых средств R^* не только сеть постов для наблюдения за жидким стоком, но расширяя состав наблюдений (измерение мутности, расхода донных и взвешенных наносов и т. п.) Тогда приоритеты в распределении ресурсов можно найти, используя динамическое программирование (с помощью многошаговой процедуры принятия решения).

В настоящее время существуют признанные как в России, так и за рубежом критерии, позволяющие оптимальным образом определять число режимных постов для наблюдения за речным стоком. В их основе лежит идеология оптимизации метеорологической сети, разработанная О. А. Дроздовым – А. А. Шепелевским [16, 17], усовершенствованная Л. С. Гандиным – Р. Л. Каганом [9] и адаптированная (с существенными дополнениями) к гидрологии И. Ф. Карасевым [22].

Ее суть заключается в следующем. Основное назначение режимных постов – наблюдение за многолетним стоком рек Y , характеризуемым годовой нормой m и первыми начальными моментами. Рассматривается следующая функция «поля» речного стока:

$$Y = Y(\xi, C_v, \text{grad } Y, r(l), \sigma),$$

где ξ – ось в направлении градиента стока (рис. 8.2 а); $\text{grad } Y$ – градиент стока; C_v – коэффициент вариации годового стока; $r(l)$ – нормированная корреляционная функция стока; l – расстояние между центрами бассейнов, σ – относительная случайная погрешность определения годового стока по гидрометрическим данным.

Годовой сток можно рассматривать как пространственную реализацию случайной функции с конечным математическим ожиданием, на которое наложены случайные отклонения: $Y(\xi) = m(\xi) + f(\xi)$, где $m(\xi)$ – неслучайная функция математического ожидания (нормы)

стока; $f(\xi)$ – случайная функция, характеризующая несинхронность изменений стока для различных рек за одни и те же годы (рис. 8.2 б).

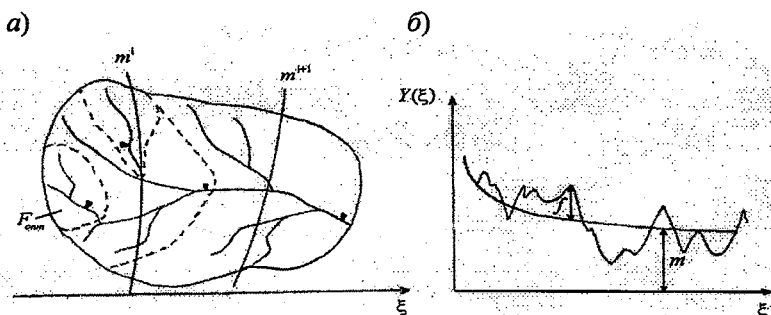


Рис. 8.2. Речной бассейн (а) и две составляющие (б) стока с этого бассейна.

Двум составляющим стока соответствуют два критерия размещения сети: градиентный и корреляционный.

Приращение нормы стока по координате ξ равно $\Delta Y(\xi) = (dm(\xi)/d\xi)\Delta\xi = \Delta\xi \text{ grad } Y$. Необходимо, чтобы изменение нормы стока, определенной для центров двух бассейнов, превышало в 2 раза среднеквадратическую погрешность расчета этого изменения, определяемую по данным измерения на двух смежных опорных постах: $\Delta Y(l) = l \text{ grad } Y \geq 2\sigma_{\Delta Y} = 2\sqrt{2} \sigma_0 Y_{ср}$, где $\sigma_0 = C_v / \sqrt{N}$ – погрешность определения нормы стока; N – число лет наблюдений; $Y_{ср}$ – средняя на участке радиусом l норма стока. Поэтому расстояние между центрами бассейнов, замыкаемых опорными режимными постами, должно быть следующим: $l_{град} \geq (2,82 \sigma_0 / \text{grad } Y) Y_{ср}$.

Таким образом, минимальное расстояние между стоковыми постами определяется физико-географическими условиями, задаваемыми параметрами $\text{grad } Y$ и $Y_{ср}$, и погрешностью σ_0 . Чтобы определить расчетную площадь, приходящуюся на один стоковый пост, используем эмпирические соотношения: $L = 2\sqrt{F}$, $l = 0,5 L$, где L – длина реки; F – площадь бассейна; l – расстояние между центрами смежных бассейнов. С учетом этих зависимостей получаем оконча-

тельную расчетную формулу для градиентного критерия (минимально допустимой площади, приходящейся на один стоковый пост)

$$F_{\text{град}} \geq \left[8 \sigma_0^2 / (\text{grad } Y)^2 \right] Y_{\text{ср}}^2.$$

Располагать режимные посты чаще, чем требует этот критерий, экономически нецелесообразно.

При расчетах стока широко используется метод гидрологической аналогии, когда режим водного объекта, для которого нет данных систематических наблюдений за стоком воды, изучается с помощью реки-аналога. Это возможно, если режимы обоих объектов взаимосвязаны, что бывает у не слишком удаленных друг от друга речных бассейнов.

По мере увеличения площади смежных бассейнов связь характеристик стока, определяемая случайной составляющей $f(\xi)$, становится все более неоднозначной. Для близко расположенных бассейнов рек имеет место положительная корреляция стока и нормированная корреляционная функция может быть аппроксимирована линейной зависимостью $r(l) = 1 - al$, где $a = 1/L_0$, $L_0 = 1600$ км — радиус корреляции, т. е. расстояние, при котором функция $r(l)$ переходит через ноль.

В работе [9] представлен вывод различных вариантов формул для средней квадратической погрешности интерполяции гидрометеорологического элемента f : $E^2 = f(\sigma_f^2, m_{\Delta\xi}, n_{\Delta\xi}, z_{\Delta\xi})$, где σ_f — среднеквадратическая погрешность интерполяции нормы f , вес которой невелик, а для изотропных полей $\sigma_f^2 = 0$; $m_{\Delta\xi}$ — ковариация элемента $f(m_{\Delta\xi} = m_0 = \sigma^2)$; $n_{\Delta\xi}$ — ковариация погрешностей наблюдений; $z_{\Delta\xi}$ — взаимная ковариация элемента f и погрешностей наблюдений. Считая, что: $z_{\Delta\xi} = 0 \forall \Delta\xi$, $n_{\Delta\xi} = 0$ (за исключением случая $\Delta\xi = 0$, когда $n_0 = \Delta^2$ — средняя квадратическая погрешность наблюдений элемента f) формулу для E^2 можно конкретизировать следующим образом: $E^2 = am_{\Delta\xi} + b\Delta_0^2 - 2cm_{\Delta\xi_0} + \sigma_0^2$, где 0 — индекс точки, в которой произ-

водится интерполяция. Часто эту формулу используют в безразмерном виде для меры ошибки интерполяции $\varepsilon^2 = a\mu_{\Delta\xi} + b\eta_0^2 - 2c\mu_{\Delta\xi_0} + 1$, где $\mu = m/\sigma^2$ – нормировочный коэффициент; $\eta_0 = \Delta^2/\sigma^2$ – мера ошибки наблюдений.

При линейной интерполяции (а это бывает практически всегда по отношению к наблюдаемым данным; так называемая оптимальная интерполяция также линейна: речь идет об оптимальном, в смысле МНК, выборе коэффициентов в формуле для ε^2) имеем

$$\varepsilon_n^2 = \frac{3}{2} - 2\mu\left(\frac{\Delta\xi}{2}\right) + \frac{1}{2}\mu(\Delta\xi) + \frac{1}{2}\eta_0^2. \quad (8.1)$$

Переходя к обычным для гидрологии обозначениям ($\mu = r$) и нормируя выражение для E^2 , разделив каждое слагаемое на норму годового стока, приходим к выражению Карасева [22] для относительной погрешности интерполяции:

$$\sigma_{0и}^2 = \frac{3}{2}C_v^2 - 2C_v r_f \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{C_v}{2} r_f(l) + \frac{1}{2}\sigma_f^2.$$

Погрешность интерполяции стока между пунктами измерений зависит от тесноты коррелятивных связей, максимальна при интерполяции на середину между пунктами наблюдений и с учетом выражения для $r(l)$ определяется формулой [22]: $\sigma_{0и}^2 = 0,5(C_v^2 al + \sigma_0^2)$.

Полагая, что точность интерполяции не больше точности измерения стока (т. е. $\sigma_{0и} \geq \sigma_0$), получаем критериальное соотношение $\sigma_{0и}^2 \geq 0,5(C_v^2 al + \sigma_0^2)$. В соответствии с ним допустимое по условиям корреляции расстояние между центрами бассейнов должно быть следующим: $l_{\text{корр}} \leq \sigma_0^2 / (aC_v^2)$.

С учетом приведенных выше эмпирических соотношений, верхняя граница расчетной площади бассейна, контролируемой режимным постом, должна быть следующей:

$$F_{\text{корр}} \leq \sigma_0^4 / (a^2 C_v^4).$$

Кроме двух рассмотренных критериев, обусловленных представлением функции $Y(\xi)$ в виде детерминированной и случайной составляющих, имеется еще один критерий, определяющий размещение сети постов.

Речной сток зависит от климатических факторов и подчинен зональным закономерностям. Так как пространственная изменчивость стока имеет вероятностный характер, то его зональные значения можно относить лишь к бассейнам определенной (репрезентативной) площади $F_{\text{репр}}$. По мере уменьшения площади бассейна все большее значение приобретают локальные (азональные) факторы (глубина эрозионного вреза русел и степень дренирования подземных вод, наличие карста и т. п.), которые создают вариации стока относительно зональных характеристик. Таким образом, появляется третий критерий оптимального размещения гидрологической сети – критерий репрезентативности. Площадь, приходящаяся на один стокующий пост, не должна быть очень малой, иначе информация, получаемая с него, будет отражать не общие зональные закономерности стока, а местные особенности, т. е. не будет репрезентативной.

По результатам наблюдений на стокующих станциях определены предельно малые площади бассейнов $F_{\text{репр}}$. Зональная норма стока не зависит от размеров бассейна, если его площадь больше $F_{\text{репр}}$ (рис. 8.3).

Так, по данным К. П. Воскресенского, для лесной зоны азиатской территории бывшего СССР $F_{\text{репр}} \approx 500 \text{ км}^2$, а для степной – 1500 км^2 .

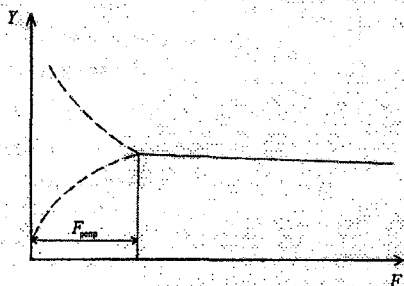


Рис. 8.3. К пояснению критерия репрезентативности.

8.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ЧИСЛА СТОКОВЫХ ПОСТОВ С ПОМОЩЬЮ КРИТЕРИЕВ. КРИТИКА СУЩЕСТВУЮЩЕЙ МЕТОДИКИ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Оптимальная площадь $F_{\text{опт}}$, приходящаяся на один режимный пост, должна находиться в диапазоне $F_{\text{репр}} < F_{\text{град}} \leq F_{\text{опт}} \leq F_{\text{кор}}$. Если данное соотношение между критериями нарушено, то Карасевым рекомендуется использовать следующие соотношения:

- 1) при $F_{\text{репр}} < F_{\text{кор}} < F_{\text{град}}$ принимается $F_{\text{кор}} < F_{\text{опт}} < F_{\text{град}}$;
- 2) при $F_{\text{кор}}, F_{\text{град}} < F_{\text{репр}}$ назначаем $F_{\text{репр}} < F_{\text{опт}}$.

Общее число режимных стокowych постов в речном бассейне площадью F можно определить по формуле $N_{\text{опт}} = F / F_{\text{опт}}$ (см. рис. 8.2 а).

Нарушение приведенной выше цепочки неравенств (что происходит довольно часто) приводит к тому, что сеть постов не будет оптимальной при заданном уровне погрешности σ . Просто при его нарушении (но при соблюдении в любом случае неравенства $F_{\text{репр}} \leq F_{\text{опт}}$) либо

вычисление нормы стока, либо интерполяция будут проводиться с большими погрешностями (их значения можно определить обратным пересчетом критериальных соотношений). Ситуацию проясняет рис. 8.4.

Величина $N_{\text{опт}}$ дает фоновую оценку числа постов, которые замыкают притоки с оптимальной площадью водосбора $F_{\text{опт}}$. Число постов на более крупных притоках можно определить, используя закон Хортона

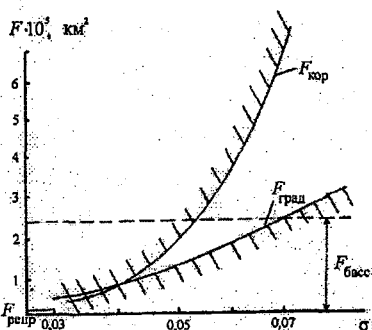


Рис. 8.4. Последствия нарушения $F_{\text{опт}}$
р. Подкаменная Тунгуска.

кают притоки с оптимальной площадью водосбора $F_{\text{опт}}$. Число постов на более крупных притоках можно определить, используя закон Хортона

на $N_{\text{доп}} = \sum_{i=n_{\text{опт}}+1}^s r^{s-i}$, где $n_{\text{опт}}$ — порядок притока, имеющих $F_{\text{опт}}$; s — поряд-

док речной системы; r — биффурационное отношение ($r \approx 3$). Таким об-

разом численность опорных режимных постов будет $N_p = k(N_{\text{опт}} + N_{\text{доп}})$, где k — коэффициент, учитывающий сеть постов на малых реках ($k \approx 1,15 + 1,30$). Что касается транзитных участков рек, то по данным работы [22], даже если допустить погрешность определения приращения стока вдвое большую, чем погрешность определения нормы, то необходимо более чем двукратное увеличение расхода на транзитном участке, что практически никогда не бывает. Поэтому посты на таких участках могут иметь специфическое предназначение (учет экстремальных расходов, учет твердого стока и т. д.) и их можно учесть, увеличив нижнее значение коэффициента k .

Тридцать лет рассмотренные критерии не подвергались сомнению и широко использовались в различных странах. Однако, можно сделать ряд замечаний в их адрес. Например, если пользоваться формулой для погрешности $\sigma = C_v / \sqrt{N}$, то получается, что $\sigma \rightarrow 0$ при $N \rightarrow \infty$, чего быть не может, хотя бы из-за неизбежных инструментальных и методических погрешностей. На самом деле следовало бы использовать формулу следующего вида $\sigma^2 = \sigma_N^2 + \sigma_\Delta^2$, где σ_N — погрешность из-за ограниченности ряда наблюдений; σ_Δ — случайная погрешность гидрометрического учета годового стока. Однако, учитывая, что N не превосходит нескольких десятков лет, можно считать $\sigma_N^2 \gg \sigma_\Delta^2$, причем в первом приближении $\sigma_N = C_v / \sqrt{N} \approx 0,25 / \sqrt{25} = 0,05$, как принято в работе Карасева [22], хотя это значение погрешности может быть и больше [23].

Далее, в корреляционном (как и в градиентном) критерии величина C_v явно характеризует временную изменчивость C_v' . Но у нас в качестве независимой переменной выступает координата на оси в направлении градиента стока ξ или, в самом общем случае, площадь водосбора F , контролируемого стоковым постом. Таким образом, речь должна идти об изменчивости по территории, характеризуемой коэффициентом C_v^ξ или C_v^F .

Как известно [21] эргодическая гипотеза для речного стока (кривая распределения годового стока, полученная по материалам многолетних наблюдений для произвольно взятой реки, должна совпадать с кривой распределения стока за любой произвольно взятый год для со-

вокупности всех рек, расположенных на данной территории) не выполняется. Однако в отношении коэффициента вариации C_v^t известно (см. [70], рис. 2.16 б, стр. 126), что $\partial C_v^t / \partial F \approx 0$ (здесь C_v^t - осредненный по группе пунктов наблюдений за стоком, замыкающих бассейны рек определенной градации площадей, коэффициент вариации годового стока) в интервале площадей от 500 до 25000 км², причем $C_v^t = 0,34 \div 0,36$ при $\sigma_{C_v^t} = 0,19 \div 0,26$. Таким образом, предпосылки «квазиэргодичности» по коэффициенту вариации вроде бы имеются (во всяком случае существует диапазон площадей, в котором, возможно, выполняется если не равенство, то пропорциональность величин C_v^t и C_v^F).

По настоящему оценить сущность рассматриваемых критериев, область применимости, преимущества и недостатки можно, если вывести их из более общих представлений о процессе формирования стока, т. е. расширить изучаемую предметную область [39]. В фиксированной данными критериями предметной области ($dm(\xi)/d\xi \neq 0$, $r(\xi_1, \xi_2) = r(\xi_1 - \xi_2) = r(I)$), их сущность ненаблюдаема в принципе. Таким образом, ниже описывается гносеологический переходной процесс (если пользоваться терминологией «частично инфинитного моделирования») замены предметных областей [42]. Процесс построения теории оптимальной сети будет заключаться в совмещении феноменологического описания и нефеноменологического объяснения, которое само (если оно верно) рано или поздно будет лишь явлением (феноменологией) с точки зрения более глубокой модели формирования речного стока.

8.3. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ФОРМИРОВАНИЯ РЕЧНОГО СТОКА И СООТВЕТСТВУЮЩИЕ ЕЙ КРИТЕРИИ

При любом подходе к получению критериев оптимальной сети используются представления о том, что важно, а что нет в рассматриваемом процессе формирования стока, т. е. его модель. В рассмотренном выше подходе Карасева, модель в прямом смысле этого слова, как некое дифференциальное уравнение (или система уравнений) описывающее физическую закономерность (сущность) стока не использова-

лось, но определенные его следствия (решения) в виде функций $m(\xi)$ и $r(\xi)$ (явление) были положены в основу критериев.

Получим критерии оптимальной сети, исходя из математической модели формирования стока. В качестве исходной (динамической) модели примем дифференциальное уравнение

$$dY/d\xi = -(1/kL) Y + X/L, \quad (8.2)$$

где Y – модуль стока; k – коэффициент стока; L – параметр «пространственной релаксации», т. е. того расстояния, на котором бассейн начинает адекватно реагировать на внешнее воздействие (не проявляются азональные факторы формирования стока или, в случае измерительной интерпретации модели, сглаживается влияние погрешностей измерений).

Введем обозначения: $1/kL = c = \bar{c} + \varepsilon$; $X/L = N + \tilde{N}$, где $\bar{c}$, N – матожидания, ε , $\tilde{N}$ – белые шумы с интенсивностями G_ε , G_N , $G_{\varepsilon N}$. В этом случае справедливо уравнение Фоккера – Планка – Колмогорова (ФПК):

$$\frac{\partial p(Y, \xi)}{\partial \xi} = -\frac{\partial}{\partial Q} (A(Y, \xi)p(Y, \xi)) + 0,5 \frac{\partial^2}{\partial Q^2} (B(Y, \xi)p(Y, \xi)),$$

где $p(Y, \xi)$ – плотность вероятности; $A(Y, \xi)$, $B(Y, \xi)$ – коэффициенты сноса и диффузии, определяемые формулами

$$\begin{aligned} A(Y, \xi) &= -(\bar{c} - 0,5 G_\varepsilon)Y - 0,5 G_{\varepsilon N} + N, \\ B(Y, \xi) &= G_\varepsilon Y^2 - 2G_{\varepsilon N}Y + G_N. \end{aligned}$$

На практике, как известно, для задания $p(Y, \xi)$ ограничиваются конечным числом моментов. Поэтому уравнение ФПК аппроксимируем системой дифференциальных уравнений для начальных моментов [37]

$$dm_n / d\xi = nM[AY^{n-1}] + 0,5n(n-1) M[BY^{n-2}], \quad (8.3)$$

где M – символ математического ожидания, $n = 1, 2, 3 \dots$. Ограничившись тремя моментами, приходим к обычным расчетным гидрологическим характеристикам (норме, коэффициентам вариации и асимметрии).

При $n = 1$ получим уравнения для математического ожидания модуля стока

$$dm_1 / d\xi = (-\bar{\sigma} + 0,5 G_{\sigma}) m_1 - 0,5 G_{\sigma N} + N. \quad (8.4)$$

Пренебрегая взаимной интенсивностью шумов ($G_{\sigma N} \approx 0$) и учитывая неслучайный характер величины L , получим

$$L_1 dm_1 / d\xi \approx (-\bar{\sigma} + 0,5 G_{\sigma}) m_1 + \bar{X}$$

(здесь $\bar{\sigma} = 1/k$). Для однородных условий $-\bar{\sigma}m_1 = \bar{X}$. Неоднородность возникает из-за шумов σ , связанных как с естественными изменениями коэффициента стока, так и с погрешностями измерения $\bar{X}$ и m_1 .

Сеть постов должна обеспечить идентификацию параметров модели (8.4) по измеренным значениям m_1 и $dm_1/d\xi$. Поэтому, например, необходимо выполнение неравенства $L_1 dm_1 / d\xi \geq 0,5 G_{\sigma} m_1$ или

$$L_1 \geq \frac{1}{2} \frac{G_{\sigma}}{\text{grad } m_1} m_1, \quad (8.5)$$

где $\text{grad } m_1 = dm_1 / d\xi$.

Сравнивая это неравенство с градиентным критерием Карасева, видим, что для их совпадения необходимо, чтобы $0,5 G_{\sigma} \approx 2,82 \sigma_0$, т. е. при $\sigma \approx 0,05$ имеем $G_{\sigma} \approx 0,3$. При $k = 0,3$ такая интенсивность шума порождает, примерно, 10 %-ый интервал неопределенности, для выхода из которого необходимо соблюдение неравенства (8.5). Обобщая это неравенство для момента любого порядка, получим

$$L_n \geq \frac{n G_{\xi}}{2 \operatorname{grad} m_n} m_n.$$

Соотношения между численными значениями L_n ($n=1, 2, 3, \dots$) могут, по-видимому, варьироваться в зависимости от характера случайного поля (рис. 8.5).

Выполним иллюстративные расчеты по реальным водосборам, считая, что $0,5 G_{\xi} \approx 2,82 \sigma_0$, т. е. при $\sigma_0 = 0,05$ величина $0,5 G_{\xi}$ будет, примерно,

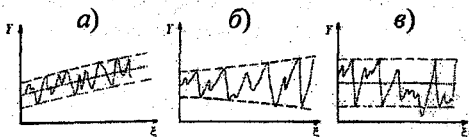


Рис. 8.5. Варианты соотношений между расчетными гидрологическими характеристиками.

а) $dm_1/d\xi \neq 0$, $dD/d\xi = 0$, $dC_v/d\xi \neq 0$;
 б) $dm_1/d\xi = 0$, $dD/d\xi \neq 0$, $dC_v/d\xi \neq 0$; в) $dm_1/d\xi = 0$, $dD/d\xi = 0$, $dC_v/d\xi \neq 0$.

равна 0,15. Используем известные в статистике формулы: $\mu_2 = m_2 - m_1^2$, $\mu_3 = m_3 - 3m_2m_1 + 2m_1^3$, $C_v = \sqrt{\mu_2}/m_1$, $C_s = \mu_3/\mu_2^{3/2}$ (здесь μ_n — центральный момент n -ого порядка). С их помощью достаточно просто вычисляются второй ($m_2 = m_1^2 a$, где $a = 1 + C_v^2$) и третий ($m_3 = m_1^3 b$, где $b = C_s C_v^3 + 3(1 + C_v^2) - 2$) моменты, необходимые для подсчета L_2 и L_3 . Как видно из табл. 8.1, в большинстве случаев градиентные критерии различаются, но не очень сильно. В табл. 8.1 градиентные критерии обозначены как $F_{\nabla i}$ (переход от линейных размеров к площадным выполнен по эмпирическим формулам из п. 8.1).

Возникает вопрос о корреляционном критерии, который вроде бы не следует из системы уравнений для моментов. Однако это не так. Сделаем вывод этого критерия из стохастической модели формирования стока.

По определению корреляционная функция это $K(\xi, \xi') = M[Y^0(\xi)Y^0(\xi')]$, где $Y^0 = Y - m_1$. Тогда дифференциальное уравнение для $K(\xi, \xi')$ будет

$$\partial K(\xi, \xi')/\partial \xi = M[Y^0(\xi) Y^0(\xi')],$$

Таблица 8.1

Приближенная оценка численных значений критериев оптимальной гидрологической сети

№	Река, гидрологическая зона	Исходные характеристики					Значения критериев, т. км ²				
		$F_{басс}$ т. км ²	m_1 , л/скм ²	C_v	m_2	m_3	$F_{репр}$	$F_{\nabla 1}$	$F_{\nabla 2}$	$F_{\nabla 3}$	$F_{кор}$
1	Подкаменная Тунгуска, лесная	241	6 8 10	0,25 0,20 0,15	38,2 66,6 102,2	255 573 1060	0,5	90	97,5	103	160
2	Дон, степная	378	5 2 0,5	0,3 0,7 0,6	27,3 7,6 0,34	159 19,8 0,26	1,5	7,82	13,9	6,23	1,58
3	Западная Двина, лесная	81	10 8 6	0,3 0,3 0,3	109 70 39	1270 650 274	0,5	44,3	41,1	41,9	5,72
4	Южный Буг, степная	46,2	4 2 0,2	0,3 0,6 1,0	17,4 5,4 0,08	81,2 16,6 0,032	1,5	1,6	2,27	2,13	1,0
5	Бурея, горно-лесная	67,4	16 10 5	0,25 0,3 0,4	271 109 29	4833 1270 175	—	4,65	4,64	3,76	4,1

Примечание. Значения нормы модуля стока сняты с карт в верхней, средней и нижней частях бассейнов. При подсчете C_v значение $\beta = C_v/C_v$ брались равными 2, за исключением средней и нижней части бассейна Западной Двины, в которых $\beta = 2,5$.

где величину $Y^0(\xi) = dY^0/d\xi$ можно определить, используя уравнения (8.2) и (8.4). Для однородных, в отношении корреляционной функции, условий формирования стока, получим

$$dK(\Delta\xi)/d(\Delta\xi) = -(\bar{c} - 0,5 G_{\bar{c}}) K(\Delta\xi); \quad K(\Delta\xi=0) = D,$$

где $\Delta\xi = \xi' - \xi$, D — дисперсия.

Решение этого линейного уравнения имеет следующий вид

$$K(\Delta\xi) = D \exp(-\bar{c} + 0,5 G_{\bar{c}}) \Delta\xi.$$

Используем линейную аппроксимацию экспоненты
 $\exp(-\bar{c} + 0,5 G_{\bar{c}}) \Delta\xi \approx 1 - (\bar{c} - 0,5 G_{\bar{c}}) \Delta\xi$. Тогда $K(\Delta\xi) =$
 $= D - D(\bar{c} - 0,5 G_{\bar{c}}) \Delta\xi$ или, с учетом соотношения $D = C_v^2 m_1^2$

$$K(\Delta\xi) = C_v^2 m_1^2 - C_v^2 m_1^2 (\bar{c} - 0,5 G_{\bar{c}}) \Delta\xi.$$

Разделив каждое из слагаемых на квадрат нормы модуля стока, получим $\sigma^2 - \sigma_{\text{макс}}^2 = -C_v^2 a l$, где $a = \bar{c} - 0,5 G_{\bar{c}}$, $l = \Delta\xi$.

Если считать, что допустимая потеря корреляции не превосходит погрешность измерения стока, т. е. $\sigma_{\text{макс}}^2 - \sigma^2 \approx \sigma_0^2$, то расстояние между пунктами наблюдений должно удовлетворять неравенству $l \leq \sigma_0^2 / (C_v^2 a)$, т. е. приходим к выражению, по форме идентичному корреляционному критерию (пример расчетов см. в табл. 8.1).

Остается невыясненным (с точки зрения математического моделирования) смысл критерия репрезентативности. Система уравнений первого порядка для начальных моментов (8.3) является линейной, причем решение каждого последующего зависит от предыдущего (но не наоборот). Параметр L , входящий в динамическую модель (8.2) и присутствующий в уравнениях для моментов, определяет зону неоднородности стока, связанную с влиянием азональных факторов, учитываемых краевым («начальным») условием $m_n(\xi=0) = m_n^0$ ($n = 1, 2, \dots$). Его

смысл такой же как у постоянной времени в обычных динамических системах, численное значение которой определяется (условно) временем достижения выходным сигналом (в нашем случае Y) значения, равного 67 % от установившегося (однородного, в нашем случае) значения.

Решение, например, уравнения для первого начального момента имеет вид

$$m_1(\xi) = m_1^0 e^{-\left(\bar{c} - 0,5 G_{\bar{c}}\right) \xi} + \frac{N - 0,5 G_{\bar{c}} N}{\bar{c} - 0,5 G_{\bar{c}}} \left(1 - e^{-\left(\bar{c} - 0,5 G_{\bar{c}}\right) \xi}\right), \quad (8.6)$$

где $\bar{c} = 1/kL$ определяет интенсивность изменения экспоненты. На расстоянии $\xi = L$ переходные процессы практически замирают и норма стока определяется не азональными факторами (которые формируют m_1^0), а зональными (в основном нормой осадков). Таким образом выявляется смысл критерия репрезентативности как параметра релаксации в модели речного стока.

Редукционные кривые по существу есть графическое изображение решений для моментов. На рис. 8.6 показаны подобные зависимости для первых трех начальных моментов и соответствующих им расчетных характеристик (C_v и C_s). Эти эмпирические зависимости построены по материалам работы [70] на основе наблюдений на 5595 гидрологических створах СССР. Они соответствуют излагаемой теории и могут служить для экспериментального определения репрезентативного расстояния (или площади). Если около зависимостей провести интервалы неопределенности (СКО для этого приведены в работе [70]), то «точки» перегиба для m_1 , m_2 , m_3 пре-

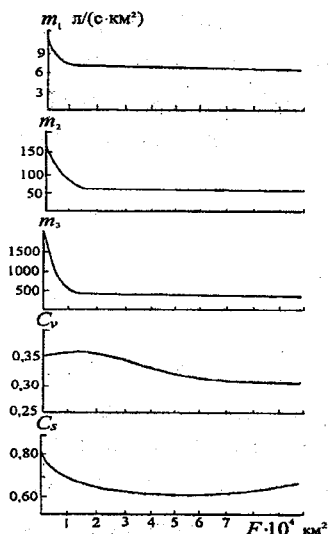


Рис. 8.6. Редукционные зависимости.

вращаются в размытый диапазон, где лежат значения $F_{\text{репр}}$ (500 – 5000 км²). Разумеется, это осредненная картина по всей территории, которая может варьироваться для отдельных гидрологических зон. Надо иметь в виду, что полной редукции по матожиданию нет (как и по старшим начальным моментам), хотя, например, на зависимости $C_v = f(F)$ имеется практически полная редукция в диапазоне площадей от 750 до 25000 км². Отсутствие полной редукции связано, по-видимому, с нелинейным характером формирования стока и будет обсуждаться ниже.

8.4. СВЯЗЬ ОПТИМИЗАЦИИ СТОКОВОЙ И ОСАДКОМЕРНОЙ СЕТИ

В соответствии с решением (8.6), на достаточно большом расстоянии ξ влиянием m_1^0 , формирующим пространственную азональную неоднородность стока, можно пренебречь. Будем (пока) пренебрегать также взаимной интенсивностью шумов $G_{\varepsilon N}$. Тогда решение (8.6) примет простой вид $m_1(\xi) = N(\xi) / (\varepsilon - 0,5 G_{\varepsilon})$. Считаем, что изменение нормы стока определяется полем осадков. Тогда можно записать $\Delta m_1 = k \Delta N / (1 - 0,5 G_{\varepsilon} / \varepsilon)$, где $\Delta N = \Delta X$; k – коэффициент стока. Это выражение можно записать так:

$$\nabla_{m_1} l_{m_1} = k \nabla_N l_N / (1 - 0,5 G_{\varepsilon} / \varepsilon) \quad (8.7)$$

или
$$l_{m_1} = k (\nabla_N / \nabla_{m_1}) l_N / (1 - 0,5 G_{\varepsilon} / \varepsilon), \quad (8.8)$$

где ∇_N , ∇_{m_1} – градиенты нормы осадков и стока; l_{m_1} , l_N – расстояние между стоковыми и осадкомерными постами.

По аналогии с гидрологической сетью можно ввести градиентные критерии для осадкомерной сети $l_N^{\nabla} \geq 2\sqrt{2}\sigma_0 N_{\text{оп}} / \nabla_N$, где $\sigma_0 = C_v / \sqrt{n}$ (здесь C_v – коэффициент вариации годовых сумм осадков; n – число членов в ряду осадков или, если принимать эргодическую гипотезу, число пунктов наблюдений).

Корреляционный критерий также как и для стоковой сети можно вычислить, опираясь на формулу Дроздова – Шепелевского (8.1), считая корреляционную функцию годовых сумм осадков линейной $I_N^{\text{кор}} \approx r_0 (2\varepsilon^2 - \eta^2)$, где r_0 – радиус корреляции годовых сумм осадков; ε – допустимая мера ошибки интерполяции; η – мера ошибки измерения. Если считать $\varepsilon = \eta$, то $I_N^{\text{кор}} \leq r_0 \eta^2$. Таким образом, $2,82 \sigma N / \nabla_N \leq I_N^{\text{опт}} \leq r_0 \eta^2$. Это неравенство может и не выполняться. Тогда надо поступить как и в случае стоковой сети.

Для осадкомерной сети можно найти и аналог критерия репрезентативности. Имеется в виду репрезентативность данных осадкомерных наблюдений по отношению к окружающей территории, оцениваемая точностью экстраполяции [20].

В соответствии с данной работой, погрешность с которой локальные данные на конкретной станции характеризуют среднюю на окружающей территории площадью F погрешность репрезентативности, определяется формулой $E(F) = \sigma \sqrt{\varepsilon^2(F) + \eta^2}$, где σ – среднеквадратическое отклонение суммы осадков; $\varepsilon^2(F)$ – мера ошибки представления средних по площади F осадков локальными данными; η^2 – мера ошибки измерения. Величина $\varepsilon^2(F)$ определяется зависимостью

$$\varepsilon^2(F) = \frac{1}{\sigma^2} \left[f(0, 0) - \frac{1}{F} \int \int f(x, y) dx dy \right]^2,$$

где x, y – пространственные координаты; f – поле осадков. Если корреляционную функцию осадков описывать экспонентой $r(l) = \exp(-e/l_0)$, где l_0 – радиус корреляции, то для относительной погрешности репрезентативности получим

$$e(F) = C_v \sqrt{\frac{0,23 \sqrt{F}}{l_0} + \eta^2},$$

где $e(F) = E(F)/N$; $C_v = \sigma/N$, N – средняя сумма осадков.

Пользуясь этой формулой, можно найти репрезентативную площадь, приходящуюся на один осадкомер, исходя из желаемой погрешности экстраполяции осадков на окружающую территорию:

$$F_{\text{репр}} = (e^2 - C_v^2 \eta^2)^2 l_0^2 / (C_v^4 (0,23)^2).$$

По данным работы [9] (см. табл. 2.14 на стр. 77), при периоде суммирования равному сезону, для центра ЕТР, имеем: $N = 362$ мм, $\sigma = 92$ мм, $l_0 = 290$ км, $\eta^2 = 0,02$. Пусть желаемая погрешность экстраполяции составляет 7 %. Тогда по приведенной формуле получим $F_{\text{репр}} = 5,5$ т. км².

8.5. ВЛИЯНИЕ НЕЛИНЕЙНОСТИ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ СТОКА НА КРИТЕРИИ ОПТИМАЛЬНОСТИ

Уравнение формирования стока можно записать, используя в качестве независимой переменной водосборную площадь F :

$$F_0 dY(F)/dF = -Y(F)/k + X(F), \quad (8.9)$$

где F_0 – параметр «инерционности», т. е. площадь на которой перестает сказываться действие азональных факторов. Если $\partial F_0 / \partial Y \approx 0$ и $\partial k / \partial Y \approx 0$, то стандартная процедура стохастического обобщения при обычных предположениях о характере шумов (они должны быть «белыми») приводит к уравнению ФПК для плотности вероятности $p(Y, F)$. Для стационарных (т. е. в нашем случае – репрезентативных) условий ($dY/dF \approx 0$) его решение приводит к семейству одномодальных кривых Пирсона, которые и описывают законы распределения вне зависимости от площади водосбора.

Однако в общем случае ситуация может быть сложнее. Гидрологический потенциал $V(Y)$ ($dY/dF = -\partial V / \partial Y$) можно представить ря-

дом Тейлора [39] $V(Y) = \sum_k c^{(k)} Y^k$. Потенциал возмущается либо внеш-

ними гидрометеорологическими воздействиями (например осадками), либо внутренними, бассейновыми факторами, учитываемыми релаксационным параметром F_0 и коэффициентом стока k . В зави-

симости от числа удерживаемых членов в ряду и соотношения между коэффициентами $c^{(k)}$ можно получить разнообразные кривые распределения вероятности. Если в качестве независимой переменной взять время t , то можно показать развертку процесса в случае двухмодального распределения (рис. 8.7). Подобное нелинейное явление переброса (смена режимов

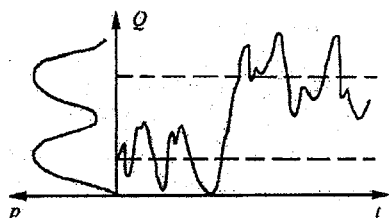


Рис. 8.7. Возможная временная развертка гидрологического процесса при двухмодальном распределении.

расходов без видимого изменения осадков и температуры) наблюдается, например, на реках Северного Казахстана. Как отразится на оптимальной гидрологической сети подобное «шизофреническое» поведение водосборов? Ведь норма стока, коэффициент вариации и корреляционная функция, входящие в критерии, представлены здесь в двух экземплярах (более подробно об этом явлении см. в разделе 6, а также в работе [32] стр. 57 – 59).

Судя по отсутствию полной редукции у всех начальных моментов (рис. 8.6), процесс формирования стока всегда нелинейный. Но если даже ограничиться обычным уравнением ФПК, полученным на основе линейной динамической модели, на вероятностном уровне эффекты нелинейности все равно имеют место.

В науке и технике хорошо известен эффект детектирования. Его суть поясняет рис. 8.8. Из-за наличия «выпрямителя» (нелинейного элемента $R(i)$) сигнал на выходе получает постоянную составляющую U_0 , хотя на входе постоянной составляющей не было. Имеет место нарушение симметрии: симметричное воздействие преобразуется в несимметричную реакцию системы. Подобный эффект появляется из-

за нелинейного параметра системы $R(i)$, изменяющего свои свойства с частотой гармонического воздействия.

В случае стохастической системы (речного бассейна) роль совпадения частот будет играть корреляция $G_{\varepsilon N}$ между параметрическими (ε) и аддитивными (N) шумами, при этом сама стохастическая система может быть и линейной. Наличие асимметрии в гидрологических рядах (причем большей, чем в рядах годовых сумм осадков: $C_s^{\text{ос}} \leq 0,25$ [90],

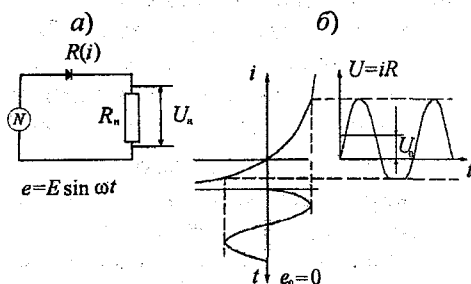


Рис. 8.8. Пояснение эффекта детектирования.

a – электрическая схема, содержащая нелинейный элемент; *б* – входной и выходной сигналы.

$C_s^{\text{ст}} \approx 0,6 - 0,7$, рис. 8.6) подтверждает подобный эффект. При этом теряет

всякий смысл принимать коэффициент стока как константу; он просто обязан испытывать случайные колебания, определенным образом связанные с колебаниями водоподачи. Именно эта связь, величину которой характеризует $G_{\varepsilon N}$, и порождает асимметричность распределения (т. е. смещение в рядах стока – несовпадение модального и среднего значений, рис. 8.9). Бытующее среди гидрологов и метеорологов мнение о том, что «положительная асимметрия гидрометеорологических характеристик объясняется влиянием нижнего предела на вид эмпирических кривых

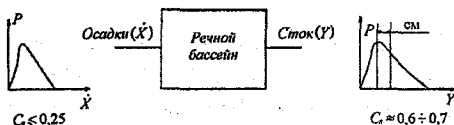


Рис. 8.9. К появлению смещения (см) в распределении $p(Y)$.

обеспеченностей» [70, 90], по-видимому, ошибочно. Если асимметрию порождают пределы, то что порождает отрицательную асимметрию у кривых Пирсона 3-го типа, а также асимметрию обоих знаков у кривой Пирсона 4-го типа, не имеющей пределов ни слева, ни справа?

Как велико это нелинейное смещение и каково его влияние на критерии оптимальности? Разность между модальным и средним значением зависит [37, 73] от отношения центральных моментов $\mu_3 / 2\mu_2$, а величина $G_{\tau N}$ в первом приближении может быть выражена соотношением $G_{\tau N} \approx \bar{\tau} \mu_3 / 2\mu_2$. В соответствии с решением для нормы стока (8.6) после завершения пространственной релаксации (ухода от азональности) получим

$$m_1(\xi) = N - 0,5 G_{\tau N} / (\tau - 0,5 G_{\tau}).$$

Величина $0,5 G_{\tau N}$ составляет, в среднем 10 – 15 %, от N и, так как нет редукции ни по C_v , ни по C_s , является функцией ξ (или F). Происхождение этого «смещения» имеет корни в физике самого процесса формирования стока. Знак его определяется знаком коэффициента асимметрии и при положительном его значении, он отрицательный. Все это приводит к появлению дополнительных слагаемых как в формуле (8.5), так и в формуле (8.7), а значит и к изменению градиентного критерия. Например формула (8.5) примет вид

$$L_1 \geq 0,5 G_{\tau} m_1 / \text{grad } m_1 + 0,5 G_{\tau N} / \text{grad } m_1 \quad (8.10)$$

(у второго слагаемого знак «+», так как при положительной асимметрии, что характерно для большинства рядов, корреляция $G_{\tau N}$ отрицательна).

8.6. ОНТОЛОГИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ РЕЖИМНОЙ СЕТИ, ЕЕ ПАРАДОКСЫ И ПЕРСПЕКТИВА ЭВОЛЮЦИИ

8.6.1. СУЩЕСТВУЮЩАЯ ОНТОЛОГИЯ И НЕВОЗМОЖНОСТЬ НАУЧНО ОБОСНОВАННОГО ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ПРИНЦИПИАЛЬНЫХ ЕЕ ИЗМЕНЕНИЙ

Более 30-ти лет критерии оптимальной режимной сети не подвергались критическому анализу и теоретическому обоснованию, что затрудняло осознавать пределы их применимости, преимущества и недостатки. Вместе с тем, они широко используются в нашей стране и

за рубежом, что говорит об их исключительной практической значимости. В этой работе впервые теоретически получены критерии оптимальной сети из общей стохастической модели формирования стока, из которых (как частный случай) следуют критерии Карасева. Это позволяет объективно оценить их содержание и конкретизировать те условия формирования стока, при которых они справедливы.

Научная онтология оптимальной режимной сети (т. е. универсальные представления о том, что и как надо оптимизировать) базируется на выделении в бесконечно сложных гидрологических процессах некой конечной предметной области, т. е. фиксации более или менее рационально обоснованных и имеющих практическое применение представлений о процессе формирования стока. Выделенная Карасевым предметная область характеризуется полем годового стока и фиксируется следующим допущением: $dm_1(\xi)/d\xi \neq 0$; $r(\xi_1, \xi_2) = r(\xi_1 - \xi_2)$. Подобная фиксация достаточно разумна и уходит корнями к работе Дроздова 1936 г. [15], посвященной оптимизации метеорологической сети.

Эволюция подобной (как и любой другой) онтологии возможна, если: 1) имеет место псевдоинформационный взрыв, т. е. в рамках фиксированной предметной области происходит размножение рациональных структур, не очень различающихся по глубинному смыслу; 2) предприняты действия (затраты энергии и материальных ресурсов) может быть, не связанные с данной проблематикой, но позволяющие расширить предыдущую предметную область. Обе эти предпосылки налицо.

После работы Дроздова было много публикаций по оптимизации метеорологической и гидрологической сети. Большинство из них вносили элементы новизны, особенно в этом отношении выделяется работа Карасева [22], потребовавшая внести в методику гидрологическую специфику, но в их основе лежала формула Дроздова – Шепелевского. Поэтому действительно можно сказать, что по глубинному смыслу, заложенному еще Дроздовым (самим фактом фиксирования определенной предметной области), работы не сильно отличаются друг от друга.

С довоенных времен были сделаны огромные затраты энергии (и в прямом, и в переносном смысле), связанные с расширением гидрометеорологической сети и обобщением результатов наблюдений на ней (карты изолиний расчетных гидрологических характеристик различных видов

речного стока и т. д.). Стала широко внедряться стохастическая модель формирования речного стока на основе уравнения ФПК [31].

Кроме этого, существующая до сих пор онтология оптимизации была не в состоянии объяснить сущность своих критериев, оставаясь в рамках используемых в ней смыслов (также как каждый из нас, даже при хорошо развитой саморефлексии, свою сущность не знает: нужен взгляд со стороны, с расширенной предметной области).

Все это вместе взятое (включая и имеющую место критику [100]) сделало существующую онтологию неустойчивой и вынудило ее эволюционировать. Однако возникает вопрос: а на сколько устойчива расширенная онтология оптимизации, представленная в данной работе? Можно ли уже сейчас предсказать дальнейшие пути ее эволюции?

Априори следует сказать, что сделать научно обоснованный прогноз появления «по-настоящему» новой онтологии оптимизации нельзя [40]. Расширение онтологии возможно только за счет прямого действия (затраты энергии), а не за счет существующего знания (т. е. рациональных структур, присущих существующей онтологии: ведь со временем они теряют устойчивость, порождая псевдоинформацию). А так как деятельность, в отличие от состояния, описать стандартным образом невозможно (ее можно только воспроизвести), то отсюда следует и невозможность научного прогноза появления чего-то нового (угадывать можно). Однако на начальном этапе возникновения новой онтологии определенные возможности по предсказанию ее плавной эволюции в рамках адаптационного механизма развития [38] еще имеются. Рассмотрим эту эволюцию (в том числе и в связи с расширением пространственных и временных масштабов гидрометеорологических явлений).

8.6.2. ВЛИЯНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ВЕРОЯТНОСТНОГО ПРОЦЕССА ФОРМИРОВАНИЯ СТОКА НА ПЛОТНОСТЬ СЕТИ

Вывод критериев на основе модели ФПК привел, в частности, к формуле для градиентного критерия L_n : $L_n = nG_c m_n / 2 \text{ grad } m_n$. Для нормы речного стока ($n = 1$), учитывая, что $kX \approx m_1$, получим: $L_1 = \beta X / 2 \text{ grad } m_1$, где $\beta = G_c / c$. Этой формулой устанавливается прямое влияние степени неустойчивости водных ресурсов (характеризуемой параметром β) на плотность сети. Проведенные исследования [41]

показали, что параметром $\beta = G_{\tau} / \bar{c}$ определяется устойчивость моментов распределения плотности вероятности расходов воды. Поэтому, чем менее устойчив вероятностный процесс формирования стока, тем больше должно быть расстояние между постами, чтобы уловить градиенты матожидания модуля. На рис. 8.10 *а* показаны зоны потери устойчивости [41, 39]. В них сеть постов (по градиентному критерию) должна быть реже. Интересно, что зона наибольшей неустойчивости совпадает с бессточной областью (рис. 8.10 *б*) территории СССР ([8], стр. 33, рис. 4). По-видимому, это связано с численными значениями коэффициентов стока и их вариациями в этой области. Надо только иметь в виду, что интенсивность шума G_{τ} в формуле (8.8) и в выражении для параметра β , использованном при построении карты на рис. 8.10 *а*, совпадают лишь в случае, если справедлива гипотеза эргодичности (или ее квазианалоги) в отношении G_{τ} .

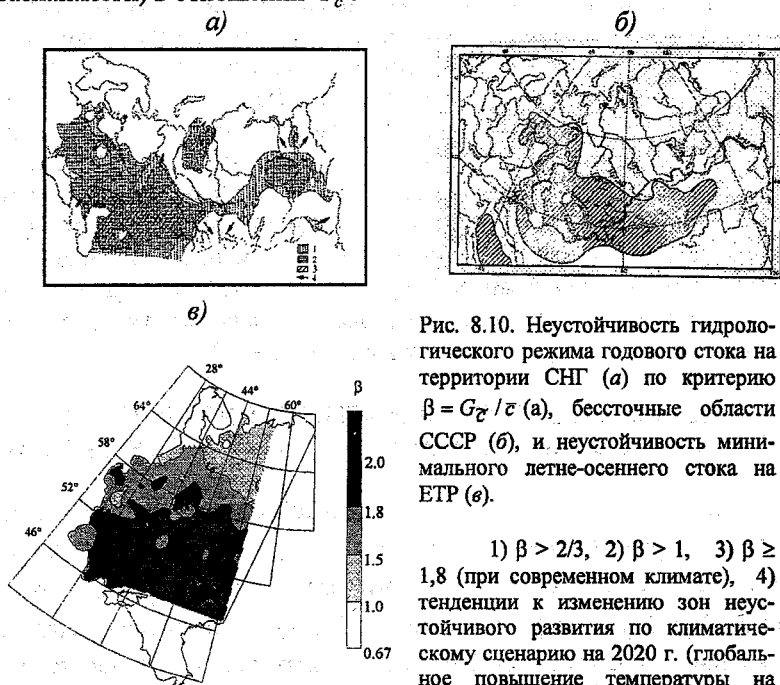


Рис. 8.10. Неустойчивость гидрологического режима годового стока на территории СНГ (*а*) по критерию $\beta = G_{\tau} / \bar{c}$ (*а*), бессточные области СССР (*б*), и неустойчивость минимального летне-осеннего стока на ЕТР (*в*).

1) $\beta > 2/3$, 2) $\beta > 1$, 3) $\beta \geq 1,8$ (при современном климате), 4) тенденции к изменению зон неустойчивого развития по климатическому сценарию на 2020 г. (глобальное повышение температуры на 2°C).

Ранее была получена и формула для корреляционного критерия $L_k = \sigma_0^2 / (C_v^2 a)$, где $a = \bar{c} - 0,5G_{\bar{c}}$. Умножив и разделив знаменатель на $\bar{c}$, получим: $L_k = \sigma_0^2 / (\bar{c} C_v^2 (1 - 0,5\beta))$, т. е. имеем формулу для учета прямого влияния β на верхнюю границу значения оптимального расстояния между постами.

При $\beta \rightarrow 2$ получается, что $L_k \rightarrow \infty$. Что это означает практически? При $\beta = 2$ происходит потеря устойчивости по всем начальным моментам распределения плотности вероятности. Предметная область под названием «речной бассейн» перестает фиксироваться моделью ФПК (или ее аппроксимацией (8.3)). А раз нет фиксированной предметной области (т. е. она расплывается на весь мир, $L_k \rightarrow \infty$), то никакое рациональное познание (в рамках одномодального описания речного стока) невозможно [46]. Но это крайняя ситуация, требующая пересмотра самой модели формирования стока, а значит и самих критериев оптимальности. Более вероятна ситуация, когда $\beta < 2$ (a мало, но не равно нулю), хотя и может меняться в результате изменения климата и хозяйственной деятельности. (Это изменение может приводить к потере устойчивости старших моментов, но не всего распределения).

8.6.3. УМЕНЬШЕНИЕ РОЛИ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ В ДЕЙСТВУЮЩЕЙ ОНТОЛОГИИ ПРИ УВЕЛИЧЕНИИ ВОДОСБОРНОЙ ПЛОЩАДИ

Посмотрим как изменится предметная область (и онтология оптимизации) при увеличении водосборной площади. Судя по рис. 6 (да и по огромному практическому опыту гидрологических расчетов) при увеличении водосборной площади расчетные параметры (m_1 , C_v , C_s) не выходят за пределы, при которых справедливо семейство Пирсона, а значит – уравнение ФПК, фиксирующее обсуждаемую предметную область. Все три параметра, правда, уменьшаются, но и это не противоречит здравому смыслу: по мере увеличения площади все более эффективно происходит усреднение случайных процессов. В пределе надо от речных бассейнов переходить к водосборным площадям морей или океанов. При этом необходимо либо рассматривать многомерное уравнение ФПК для «популяции бассейнов», формирующих сток в океан, либо в качестве выходной пере-

менной рассматривать суммарный сток с бассейнов. Эта «популяция» будет довольно рыхлая и каждый бассейн в ней — наподобие лейбницевской монады, хотя слабая корреляция шумов будет за счет глобальных климатических факторов. Суммируя же сток по всем бассейнам, подойдем к модели суммарного стока с поверхности суши в океан с нормой $m_1 = 3,1$ л/с км² (коэффициенты вариации и асимметрии, по-видимому, очень незначительные).

С точки зрения оптимизации эти два случая (модель «популяции» и модель суммарного стока) не имеют значения, так как каждый из бассейнов уже прооптимизирован, а значит прооптимизирована вся площадь суши, с которой осуществляется сток. Гидрологическая специфика процесса («сидящая» в параметрах G_{τ} и $G_{\tau N}$) при таких площадях практически уже теряется: $G_{\tau N} \rightarrow 0$ (а значит $C_s \rightarrow 0$), вариации (такоже незначительные) создаются климатическим шумом G_N , а m_1 — нормой осадков.

Потеря гидрологической специфики формирования стока осуществляется уже с площадей порядка $F_{\text{репр}}$. Парадоксальность ситуации заключается в том, что оперируя при построении оптимальной сети только тремя моментами и пренебрегая четвертым моментом (это обычная в гидрологии практика), мы считаем тем самым, что $G_{\tau} \ll \bar{\epsilon} + G_{\tau}$. В то же время $G_{\tau N} \neq 0$ (иначе бы $C_s = 0$). То есть эффект детектирования есть, но создается он не внутренней (гидрологической) активностью бассейна, а климатическим шумом. Водосборы с площадью $F \geq F_{\text{репр}}$ довольно пассивным образом трансформируют осадки в сток. Судя по формуле (8.8), плотность стоковой сети практически полностью определяется плотностью сети осадкомеров. Возникает довольно неприятный для гидрологов вопрос: а нужна ли вообще плотная режимная стоковая сеть при наличии сети осадкомеров?

8.6.4. ВЗАИМОСВЯЗЬ РАСЧЕТНЫХ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК С БЕЛЫМИ ШУМАМИ И МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ СИНОПТИЧЕСКОГО МАСШТАБА

На графике $C_v = f(F)$ (рис 8.6.) имеется область $F \leq 25000$ км², где $\partial C_v / \partial F \approx 0$. При больших площадях $\partial C_v / \partial F < 0$. Объяснение

подобной структуры функции $C_v(F)$ может быть следующим. Пока площадь водосбора, замыкаемого стоковым постом, лежит в указанных пределах, редукции C_v не наблюдается. Это может быть связано с однородностью (по C_v) внешних воздействий (поля осадков). Действительно, судя по имеющимся материалам [2, 9, 18, 90], наибольшим пространственным структурным образованием этого поля является макромасштабная (синоптическая) система с характерным размером порядка 10^5 км^2 (и выше). Причем ядро этого образования имеет радиус корреляции порядка 100 – 200 км [9], что в среднем и дает площади порядка 25000 км^2 . При такой степени покрытия территории, водосборы больших площадей осредняют шумы и редуцируют коэффициент вариации.

Может возникнуть следующий вопрос. Характерное время жизни структур синоптического масштаба (циклонов, например) несколько суток. А у нас речь идет о коэффициенте вариации годового стока. Но дело в том, что в соответствии с моделью ФПК коэффициент вариации порождается белыми шумами (например для нормального распределения $C_v = \sqrt{D}/m_1 = (\sqrt{G_N/c})/m_1$ [37]), т. е. случайным процессом с нулевым радиусом корреляции (а практически – много меньшим временем релаксации речного бассейна равным, примерно, одному году). Именно этому условию и удовлетворяет характерное время жизни синоптических образований. Таким образом, и плато ($\partial C_v / \partial F \approx 0$) на графике $C_v(F)$ порождено не гидрологическими, а метеорологическими особенностями.

8.6.5. УВЕЛИЧЕНИЕ РОЛИ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ АСПЕКТОВ В ЭВОЛЮЦИОНИРУЮЩЕЙ ОНТОЛОГИИ ПРИ УМЕНЬШЕНИИ ВОДОСБОРНОЙ ПЛОЩАДИ. РАЗРЫВ МЕЖДУ РЕАЛЬНЫМ СОСТОЯНИЕМ ГИДРОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ И ИСПОЛЪЗУЕМЫМИ ЗАКОНАМИ (МОДЕЛЯМИ), ОПИСЫВАЮЩИМИ ИХ ФУНКЦИОНИРОВАНИЕ

Теперь посмотрим, что происходит при F (или ξ) $\rightarrow 0$? В интервале площадей от $F = F_0$ до $F_{\text{репр}}$ действуют, так называемые, переходные процессы (точнее их надо назвать пространственно-релаксационными, если в качестве независимой переменной выступа-

ет не время, а площадь). Парадоксальность ситуации заключается в том, что мы «навязываем» водосбору закон (модель ФПК), по которому должны меняться моменты распределения плотности вероятности. Краевые условия (начальные моменты в «точке» F_0) задаются независимо от уравнения ФПК. К чему это приводит рассмотрим на примере решения уравнения для первого момента (матожидания).

Предположим, что на водосборе площадью F_0 происходят некие («азональные») процессы формирования стока, приводящие этот водосбор в состояние $m_1(F_0) = m_1^0$, $dm_1/dF|_{F_0} = \dot{m}_1^0 = 0$. Подставив в решение (8.6)

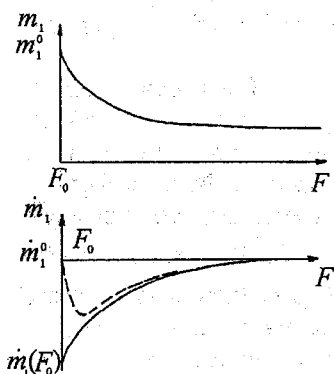


Рис. 8.11. К иллюстрации «нестыковки» между состояниями водосборов и законами формирования стока.

значение m_1^0 , получим «переходной процесс», изображенный на рис. 8.11, где $m_1^0(F_0) = (-\bar{c} + 0,5 G_{cN}) m_1^0 \neq m_1^0 = 0$ (для простоты при подсчете $m_1^0(F_0)$ считаем, что $N = 0$, $G_{cN} = 0$). Таким образом,

«начальное» состояние m_1^0 моделью просто игнорируется, и реальный «переходный процесс», показанный штриховой линией на рис. 8.11, заменяется экспонентой. Следовательно при постановке задачи о формировании функции $p(Y, F)$ мы должны задавать уравнение ФПК, начальные моменты при F_0 , а также молчаливо

постулировать условие скачка для производных от моментов.

Это неизбежная плата за то, что мы пытаемся в новую (для модели ФПК в том виде как она представлена) еще не рационализированную предметную область (область азональных процессов формирования стока) выйти со старым (уже освоенным) законом. Поэтому, оптимизируя сеть стоковых постов, поступают вполне благоразумно, выбирая $F_{\text{опт}} > F_{\text{репр}}$. Тем самым игнорируются нестыковки между состояниями водосборов (m_1^0, m_1^0) и законами, которым подчиняется формирование стока на больших территориях.

Чтобы расширить онтологию оптимизации на область $F < F_{\text{репр}}$, необходима деятельность, затрата энергии (проведение эксперименталь-

ных исследований, рытье шурфов, идентификация азональных моделей и т. д.), хотя и сейчас уже много сделано в этом направлении. Причем, чем меньше оптимизируемая площадь, тем более уникален процесс формирования стока на ней (философская категория «единичное» приобретает больший вес), и тем большее число научных понятий (философская категория «общее») надо вводить в рассмотрение, чтобы составить математическую модель и на ее основе разработать критерии оптимального размещения сети.

8.6.6. ОСОБЕННОСТИ ОПТИМИЗАЦИИ В ГОРНЫХ РАЙОНАХ

Попытки построить редуccionные зависимости модуля годового стока от площади горных водосборов оказываются, как правило, безуспешными. В связи с этим возникает вопрос о критерии репрезентативности. Специальные исследования на эту тему с точки зрения задач оптимизации автору неизвестны, но определенные соображения общего характера высказать можно.

Для горных районов прослеживаются хорошие связи модуля годового стока со средней высотой водосборов. Если обратиться к уравнению (8.9), то влияние высоты местности h можно учесть, считая, что $F_0 = f(h)$. Причем по физическому смыслу эта зависимость может быть такой: $F_0 \approx F_{\text{репр}} / (ah + 1)$, где a — коэффициент. Тогда для равнинных рек (при $h \rightarrow 0$) $F_0 = F_{\text{репр}}$, а с увеличением высоты водосбора $F_0 \rightarrow 0$, т. е. водосборы становятся «малоинерционными» и, как говорится «без лишних слов», сбрасывают выпавшие осадки к замыкающему створу. В этом случае решение типа (6) при любых площадях будет

$$m_1(F) = (N(F) - 0,5 G_{\tau N}) / (\bar{c} - 0,5 G_{\tau}),$$

т. е. норма модуля стока определяется, в основном, нормой осадков. А так как с высотой количество осадков, как правило, увеличивается, то растет и модуль стока. По данным работы [67] (табл. 6, стр. 149 — 172), из 116 горных районов и подрайонов, только в пяти случаях наблюдалось уменьшение нормы модуля с высотой, хотя и это связано с осадками.

Таким образом критерий репрезентативности в горных условиях теряет свой смысл (получается, что все горные бассейны «репрезентативны»).

8.7. СВЯЗЬ ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СЕТИ С ВОПРОСАМИ УПРАВЛЕНИЯ ГИДРОЛОГИЧЕСКИМИ ПРОЦЕССАМИ

До сих пор мы рассматривали критерии оптимальной сети, так сказать, в чистом виде без всякой связи с практическим использованием речного стока. Но гидрометеорологическая сеть создавалась не ради праздного любопытства: дескать «интересно» как выглядит поле речного стока и осадков. Учесть практический интерес при размещении сети можно, если ввести этот самый «интерес» в модель формирования стока в виде управляющего воздействия ϕ . Проще всего это можно проиллюстрировать на примере уравнения (8.4):

$$dm_1/d\xi = (-\tau(\phi) + 0,5 G_{\tau N}) m_1 - 0,5 G_{\tau N} + N \pm \phi.$$

В роли ϕ может выступать, например, изъятие стока на орошение, водопотребление и т. д. Причем ввести ϕ можно либо в виде аддитивной добавки, либо мультипликативно через параметр τ (например, изменение коэффициента стока под действием антропогенных факторов). Тогда, например, при изъятии стока по длине реки (как это происходит в бассейне Амударьи) формула (10) примет вид

$$L_1 \geq 0,5 G_{\tau} m_1 / \text{grad } m_1 + 0,5 G_{\tau N} / \text{grad } m_1 - \phi / \text{grad } m_1,$$

т. е. на редуccionной кривой либо появляется локальная воронка в области изъятия, либо увеличивается наклон кривой к оси F (или ξ) и по градиентному критерию сеть постов должна быть более густой. В этой формуле два первых слагаемых определяют естественный физико-географический процесс формирования стока, а последнее – антропогенный фактор.

Вообще онтология оптимизации определяется фиксацией предметной области, т.е. моделью – степенью осмысленности гидрометеорологической ситуации. Практическая потребность (управление) стоит на первом месте (рис. 8.12).

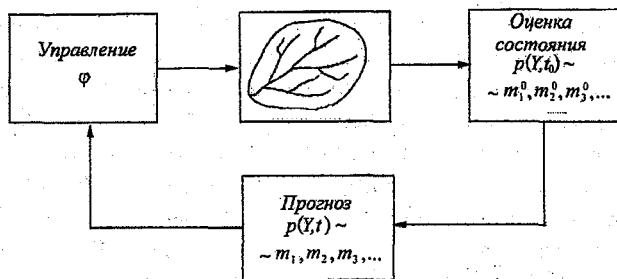


Рис. 8.12. Гидрологическая управляемая система.

Все три блока (и соответствующие им группы гидрометеорологических задач: оценка состояния, прогноз и управление) образуют достаточно замкнутую систему. Поэтому характер предполагаемого управления определяет выбор прогностической модели стока, которая диктует что и как будет оцениваться на поверхности водосбора (т. е. плотность сети, состав и методику гидрометрических работ). Конечно можно оборвать цепочку между блоками «Оценка состояния» и «Прогноз» и, так сказать, оценивать «вообще...». Но это «вообще» тоже опирается на какие-то модельные, не обязательно в математической форме, представления о стоке и его практическом использовании. Ибо «оценка» — это одна из ступеней процесса познания: от живого созерцания (оценка), к абстрактному мышлению (модель и прогноз на ее основе) и от него к практике (т. е. управлению).

Все рассуждения, выполненные в разделе 8 в отношении годового стока, оказываются справедливыми (с соответствующими коррективами) для минимального и максимального стока, формирование которых также описывается моделью ФПК.

9. О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ОДНОМЕРНОЙ ГИДРАВЛИЧЕСКОЙ ИДЕАЛИЗАЦИИ И ИССЛЕДОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ УРАВНЕНИЙ ГИДРОМЕХАНИКИ

Исторически имелись две предпосылки к изучению вопроса о существовании периодических решений уравнений одномерной гидравлической идеализации открытых потоков.

С одной стороны, в научно-технической литературе появились упоминания о колебаниях расхода воды с периодом в несколько десятков минут. Так, в работе С. И. Коплан-Дикс [48] приводятся результаты непрерывных измерений скорости в течение 48 минут одновременно на семи вертикалях в точках $0,6h$ (h – глубина) при устойчивом русле (р. Полометь). Выявлена низкочастотная по сравнению с турбулентными пульсациями периодичность с амплитудой колебаний примерно 10 % осредненного за период измерения расхода. Подобные явления описаны также В. В. Дементьевым [14] по результатам среднеазиатской экспедиции ГТИ в 1959 – 1961 гг. на реках Угам и Сырдарье, а также Иокоси [101], производившим измерения на р. Уджи (анализ этих результатов см. в монографиях [12, 13, 31]).

С другой стороны, в работах Н. А. Картвелишвили (см., например, [27]) вопрос о периодических решениях был поднят в связи с исследованием устойчивости быстотоков. Суть исследований заключалась в получении численного критерия начала образования волн на свободной поверхности потоков, текущих при больших уклонах. Обычная техника решения подобных задач сводится к так называемому подстановочному анализу линеаризованных уравнений Сан-Венана. С помощью известных в алгебре методов (обычно используется теорема Гурвица), находят условия, обеспечивающие рост колебания глубины h' по течению, что и говорит о неустойчивости при данных значениях параметров.

В современной интерпретации [71, 85] такие задачи сводятся к получению критериев абсолютной и конвективной неустойчивости и пространственного усиления. Конвективная неустойчивость имеет место, когда возмущения с течением времени уходят из рассматриваемой области, т. е. $\lim_{t \rightarrow \infty} h'(x_0, t) \rightarrow 0$, а абсолютная – когда они во всех точках x_i растут, т. е. $\lim_{t \rightarrow \infty} h'(x_0, t) \rightarrow \infty$. Ставить задачу о распространении в потоке возмущений имеет смысл, если система устойчива либо конвективно неустойчива, но длина ее такова, что возмущения не успевают сильно вырасти.

Один из общих подходов к решению задач о неустойчивости заключается в следующем [85]. Для исследования устойчивости какого-либо равномерного режима необходимо провести линеаризацию уравнений и подстановкой $\exp[i(\omega t - kx)]$ получить дисперсионное соотно-

шение $D(\omega, k) = 0$. Если в результате решения последнего установлено, что $\text{Im } \omega_S(k) > 0$ при вещественном k для всех S , то поток устойчив, если для какого-либо S $\text{Im } \omega_S(k) < 0$, то поток неустойчив. Вопрос о характере неустойчивости решается с помощью анализа многозначной функции $k_S(\omega)$, а именно: для абсолютной неустойчивости необходимо, чтобы две функции $k_S(\omega)$ с точкой ветвления в нижней полуплоскости комплексной переменной ω имели разные по знаку фазовые скорости $\lim_{\omega \rightarrow \infty} (k_S(\omega)/\omega)^{-1}$.

Если поток оказался конвективно неустойчивым, то возникает естественный вопрос о его дальнейшем развитии. Возрастание по длине водотока амплитуды волны указывает на ее усиление, но однозначно ответить на вопрос о характере возмущения можно только исходя из нелинейных уравнений. Подобный анализ проделал Картвелишвили [27], опираясь на качественную теорию дифференциальных уравнений. Анализ фазовой плоскости для системы Сен-Венана привел к выводу, что ни непрерывных, ни разрывных периодических решений быть не может.

Попытаемся найти возможные пути объяснения экспериментально наблюдаемых периодических образований. Их существование говорит о наличии предельных циклов на фазовом пространстве. Но так как при конвективной неустойчивости периодических движений не существует, то наиболее вероятным механизмом, приводящим к их образованию, является наличие автоколебаний (точнее автоволн).

Для возникновения автоколебаний неустойчивость должна быть абсолютной, критерий которой указан выше. За счет изменения параметров системы «поток-русло», т. е. перевода положения точек ветвления функции $k_S(\omega)$ из верхней полуплоскости в нижнюю, конвективная неустойчивость может превратиться в абсолютную. На языке физики эти изменения параметров должны обеспечить существование обратной связи, которая переводит поток из режима усиления в режим генерации. Внутренняя обратная связь между входом и выходом может образоваться, например, за счет неоднородности русла (в частности, сужение приводит к появлению отраженных волн, а следовательно, и к возможности удовлетворения критерия абсолютной неустойчивости) либо за счет такой зависимости гидравлических сопротивлений от режима те-

чения, что возможны участки, где $\partial K / \partial h < 0$ (здесь K – пропускная способность русла).

Покажем, что если в системе Сен-Венана изменить указанным образом параметры, то возможны предельные циклы. Пусть уравнения одномерной идеализации имеют вид:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -U \frac{\partial U}{\partial x} - g \frac{U^2}{C^2 h} + g i_0 - g \frac{\partial h}{\partial x}; \quad (9.1)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial h}{\partial x} = 0, \quad (9.2)$$

где i_0 – уклон дна; U – осредненная по сечению скорость; C – коэффициент Шези. При наличии замкнутых фазовых траекторий искомые функции U и h должны зависеть от аргумента $p = x - at$, где a – скорость волны. Таким образом, получаем:

$$\frac{dh}{dp} = - \frac{gh(i_0 - K^{-2}U^2)}{U^2 - 2aU + a^2 - gh} = M(h, U); \quad (9.3)$$

$$\frac{dU}{dp} = - \frac{g(a - U)(i_0 - K^{-2}U^2)}{U^2 - 2aU + a^2 - gh} = N(h, U), \quad (9.4)$$

где $K = C\sqrt{h}$.

Имеется аналитический критерий несуществования на фазовой плоскости замкнутых контуров, целиком составленных из траекторий, – критерий Бендиксона [3]: выражение $\partial M / \partial h + \partial N / \partial U$ не должно менять знака. Покажем, что для системы Сен-Венана критерий выполняется: сумма $\partial M / \partial h + \partial N / \partial U$ будет нулевой, если

$$-U^2 a C^{-2} / \partial h - 2au / (C^2 h) + 3U^2 / (C^2 h) = [i_0 - U^2 / (C^2 h)].$$

$$[1 + (6aU - 3U^2 - 3a^2) / (U^2 - 2aU + a^2 - gh)]. \quad (9.5)$$

Для приближенной оценки примем, что $a \sim U$, $i_0 \sim U^2 / (C^2 h)$; тогда $(2U^2 \partial C / \partial h) / C^3 \sim -i_0$. При $\partial C / \partial h > 0$ это условие не выполняется, что указывает на невозможность существования замкнутых контуров. Однако если $\partial C / \partial h < 0$ или $i_0 < 0$, то при определенных соотношениях между значениями U , C , $\partial C / \partial h$ и i_0 цикл этим критерием не запрещается. На вопрос, будет ли периодическая волна устойчива, в общем случае нельзя ответить исходя из системы (9.3), (9.4), так как она не описывает эволюцию во времени.

Существует еще один косвенный способ, подтверждающий возможность периодических образований. Систему Сан-Венана путем ряда подстановок [31] можно свести (в предположении, что информация об уровне и его производных по t и x известна из измерений — это осмысленно с точки зрения задач гидрометрии) к обыкновенному нелинейному уравнению Риккати:

$$dZ / dt = -Z^2 + R_1(t), \quad (9.6)$$

где Z — переменная, связанная рядом преобразования со скоростью (расходом), а $R_1(t)$ зависит от уровня воды и морфометрических характеристик русла.

Введя новую переменную y по формуле $Z = y' / y$, получим линейное уравнение второго порядка:

$$y'' - R_1(t)y = 0, \quad (9.7)$$

относительно свойств решений которого уже можно сделать некоторые выводы общего характера, опираясь на теорию Штурма [31].

Конкретнее, если рассматривать характер поведения отклонений расхода (скорости) от некоторого квазиустановившегося значения, то приходим к возможности колебательных решений с периодом

$$T \approx 2\pi CR^{0.5} / [g(I - i_0)^{0.5}], \quad (9.8)$$

где R — гидравлический радиус; I — уклон водной поверхности.

Эта формула была подтверждена данными натурных наблюдений. В 1959 г. на р. Тверце были проведены комплексные исследования неустановившегося движения [19], вызывавшегося специально организованными попусками с Новотверецкой ГЭС. Один из створов был оборудован батареей вертушек, непрерывно измерявших скорости

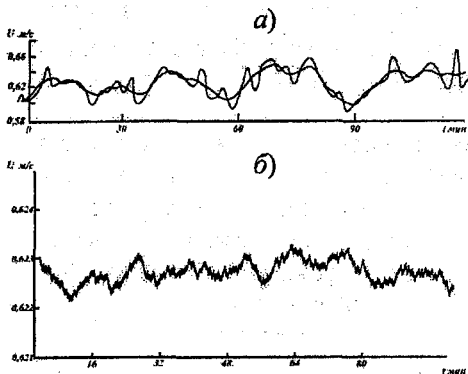


Рис. 9.1. Скорости, измеренные на вертикали № 3 в гидростворе № 1 р. Тверца 8/VII 1959 г. с 12 ч 34 мин до 14 ч 34 мин до и после осреднения (а) и результат отображения (9.9) (б).

одинаковые периоды, т. е. имеет место периодичность изменения средней по сечению скорости. В некоторых случаях, когда $i_0 \sim I$, периодичность либо не выявляется, либо теоретический и расчетный периоды не совпадают.

Реализацию, аналогичную изображенной на рис. 9.1 а, можно получить и так. Запишем уравнение (9.1) в виде

$$dU/dt = -U^2/L + UU_{ГЭС}/L + (I - i_{тр})/L \quad (9.9)$$

где $U_{ГЭС}$ — скорость в створе ГЭС; U — скорость, в створе, оборудованном вертушками; L — расстояние от ГЭС до створа; $i_{тр}$ — уклон трения.

На рис. 9.1 б показан результат отображения (9.9) ($dt \approx \Delta t = 1$).

(с записью на хронографы) на протяжении двух недель пока проводились исследования. Нами было статистически обработано 30 двухчасовых реализаций местных скоростей (в качестве примера см. рис. 9.1 а), соответствующих квазиустановившемуся режиму, на двух скоростных вертикалях. Периодичность выявлялась с помощью метода Шустера. Из данных табл. 9.1 видно, что колебания на разных вертикалях имеют в пределах 10 – 15 %-ной погрешности

Таблица 9.1

Результаты выделения низкочастотной
периодичности по измерениям на р. Тверце в 1959 г.

Дата	Время измерения, ч мин	Номер скоростной вертикали	Период колебаний, мин		Статистическая надежность выделения периода, %	$I - i, \%$	Амплитуда колебаний скорости, % среднего значения скорости	
			по теоретической формуле	по методу Цусера			соответствующая выделенному периоду	в исходной реализации
5/VIII	22 06 - 0 06	3	16,4	26	92,2	0,15	3,6	9,8
	22 06 - 0 06	5	16,4	28	92,2	0,15	5,4	11,4
7/VIII	3 04 - 5 04	3	25,8	32	86,1	0,11	5,4	10,8
	3 04 - 5 04	5	25,8	28	82,6	0,11	3,6	8,9
8/VIII	12 34 - 14 34	3	22,4	28	92,2	0,06	3,6	7,3
	12 34 - 14 24	5	22,4	28	92,7	0,06	6,7	13,0
9/VIII	2 42 - 4 42	3	29,8	28	87,0	0,04	5,2	14,4
	3 02 - 5 02	5	29,6	26	92,4	0,04	4,7	10,6
	21 36 - 23 36	3	29,2	24	85,0	0,09	5,0	15,2
	21 36 - 23 36	5	29,2	26	82,6	0,09	3,9	10,4
10/VIII	7 10 - 9 10	3	16,6	24	92,5	0,17	4,4	11,1
	7 10 - 9 10	5	16,6	24	92,5	0,17	3,7	10,1
	20 02 - 22 02	3	19,8	32	88,6	0,21	3,4	7,2
	20 02 - 22 02	5	19,8	28	88,6	0,21	5,6	14,8
11/VIII	13 00 - 15 00	3	18,7	30	90,2	0,25	4,6	9,4
	13 00 - 15 00	5	18,7	24	92,3	0,25	3,6	10,3
	21 15 - 23 15	3	19,6	26	85,8	0,23	3,6	11,8
	21 15 - 23 15	5	19,6	30	83,4	0,23	3,7	9,4
12/VIII	12 34 - 14 34	3	17,8	30	88,6	0,29	4,0	7,2
	12 34 - 14 34	5	17,8	26	76,4	0,29	3,9	9,8
13/VIII	14 20 - 16 20	3	17,8	24	92,2	0,18	3,7	8,4
	14 20 - 16 20	5	17,8	22	92,2	0,18	3,1	10,1
14/VIII	1 52 - 3 52	3	27,5	32	71,0	0,11	3,7	11,0
	1 52 - 3 52	5	27,5	28	85,4	0,11	3,8	13,9
	9 34 - 11 34	3	26,4	32	74,2	0,12	3,4	9,4
	9 34 - 11 34	5	26,4	28	71,0	0,12	5,0	13,6
15/VIII	18 34 - 20 34	3	45,0	28	92,2	0,02	5,0	14,6
	18 34 - 20 34	5	45,0	26	92,2	0,02	3,9	13,5
17/VIII	2 04 - 4 04	3	32,0		Не выделен	0,04		12,9
	3 16 - 5 16	5	32,0			0,04		14,0

Вернемся к системе (9.1), (9.2). Будем считать, что $i_{\text{тр}} = U^2 / C^2 h$ примерно равен i_0 и применим к системе уравнений метод прямых:

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{U_i}{\Delta x} (U_i - U_{i-1}) - g \frac{(h_i - h_{i-1})}{\Delta x}; \quad (9.10)$$

$$\frac{dh_i}{dt} = -h_i \left(\frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta x} \right) - U_i \left(\frac{h_i - h_{i-1}}{\Delta x} \right); \quad (9.11)$$

$i = 1, 2, 3, \dots$ На рис. 9.2 показано решение системы (9.10), (9.11) на фазовой плоскости, подтверждающее вывод Картвелишвили о невозможности существования замкнутых циклов.

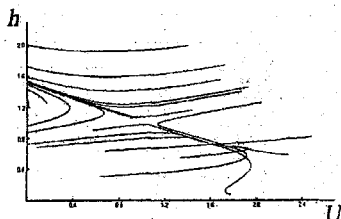


Рис. 9.2. Фазовый портрет системы (9.10), (9.11).

Модернизируем исходную систему Сен-Венана, учтя влияние инерционного характера движения на гидравлические сопротивления. В соответствии с результатами ранних исследований автора [31], отличие неустановившегося коэффициента сопротивления $\lambda_{\text{нст}}$ от установивше-

гося $\lambda_{\text{уст}}$ определяется выражением

$$\frac{\lambda_{\text{нст}}}{\lambda_{\text{уст}}} \approx \frac{1}{1 + \varpi^2 / 4} - \frac{2,5 \varpi^2 / 2}{1 + \varpi^2 / 4} N, \quad (9.12)$$

где $N = h(dU/dp)/(Uk)$ – безразмерное ускорение (здесь $p = t + x/U_0 k$, U_0, k – постоянные; подробнее см. в [31]); $\varpi = \omega h/k$ – безразмерная частота (рис. 9.3).

Таким образом, пренебрегая (пока) зависимостью от ϖ , имеем

$$\lambda_{\text{нст}} = g/C^2 = \lambda_{\text{уст}} - \lambda_{\text{уст}} \gamma (h/U^2 (\partial U / \partial t + U \partial U / \partial x)), \quad (9.13)$$

где $\gamma \approx 2,5$ (см. [31]). Подставим (9.13) в (9.1). В зависимости от знака $(\lambda_{уст}\gamma - 1)$ и численных значений $\lambda_{уст}$ и γ решение на фазовой плоскости будет иметь различный вид (некоторые примеры показаны на рис. 9.4 а, 9.4 б, 9.4 в).

Если попытаться дать «экологическую» интерпретацию этим результатам, то получается следующая картина. В случае аппроксимации стандартной модели (9.1), (9.2) методом прямых, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений, причем для обычных речных условий ($U \approx 1, h \approx 1, C \approx 30$) имеем

$$\begin{aligned}\partial(U)/\partial h &= gU^2/C^2 - gh < 0, \\ \partial(h)/\partial U &= -2U < 0.\end{aligned}$$

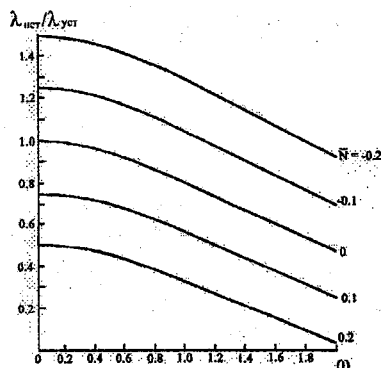
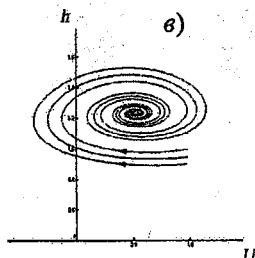
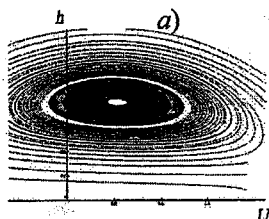


Рис. 9.3. Изменение $\lambda_{нст}/\lambda_{уст}$ в зависимости от ω и N .

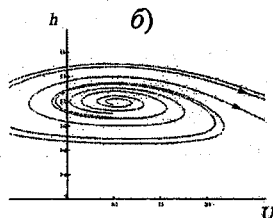


Рис. 9.4. Примеры, показывающие влияние γ на фазовые портреты: а) 2,652; б) 3,000; в) 2,520.

Таким образом имеет место конкурентное взаимодействие переменных h и U за «ресурс» Q , что исключает периодические решения. Если же учтем (9.13), то в случае $\lambda_{уст} \gamma > 1$ получим

$$\begin{aligned}\partial(U)/\partial h &\approx gh > 0, \\ \partial(h)/\partial U &= -2U < 0,\end{aligned}$$

т. е. имеет место взаимодействие по типу «хищник (U) – жертва (h)», допускающее в том числе и периодические решения.

Из (9.12) видно, что на сопротивления влияет еще безразмерная частота. Поэтому примем, что (в соответствии с видом передаточной функции (9.12))

$$Td\lambda/dt = -\lambda + g/C^2, \quad (9.14)$$

где $C = h^{1/6}/n$ (здесь n – коэффициент шероховатости); T – инерционный параметр.

Решение системы (9.1), (9.2), (9.14) с учетом выражения (9.13) дает ω -предельные множества (примеры см. рис. 9.5 а, 9.5 б).

Любая траектория изнутри и ближайшего окружения извне, притягивается к аттрактору, общее местоположение которого для случая, показанного на рис. 9.5 а, представлено на двумерной проекции фазового пространства (рис. 9.6). На рис. 9.7 а, 9.7 б и 9.7 в показана двумерная проекция и временные развертки фазовых переменных, соответствующие трехмерному изображению на рис. 9.5 б.

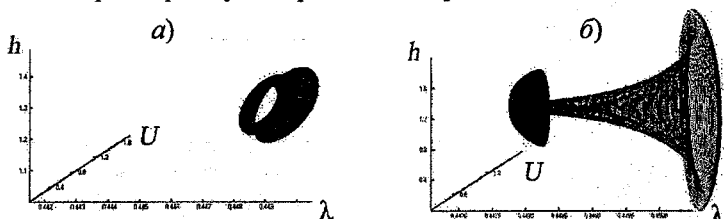


Рис. 9.5. Фазовые портреты решения системы (9.1), (9.2) и (9.14) с учетом выражения (9.13). Варианты (а) и (б) отличаются выбором начального условия.

Интересно проследить влияние третьей фазовой переменной λ . Если время релаксации T в модели (9.14) большое, то другие фазовые переменные воспринимают ее как постоянную величину, а фазовые траектории напоминают блюдце (с фрактальной размерностью немного больше двух и эта фрактальность есть индикатор существования «скрытой» переменной), которое после большого числа итераций и при сильном увеличении в окрестности равновесия напоминает воронку, перемещаясь по которой траектория достигает точки равновесия (рис. 9.8) и процесс затухает.

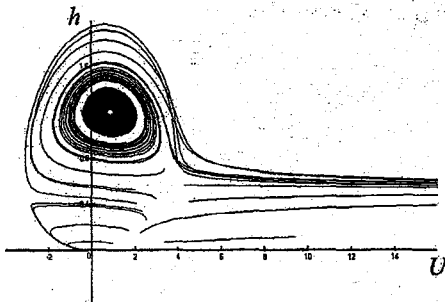


Рис. 9.6. Местоположение двумерной проекции аттрактора.

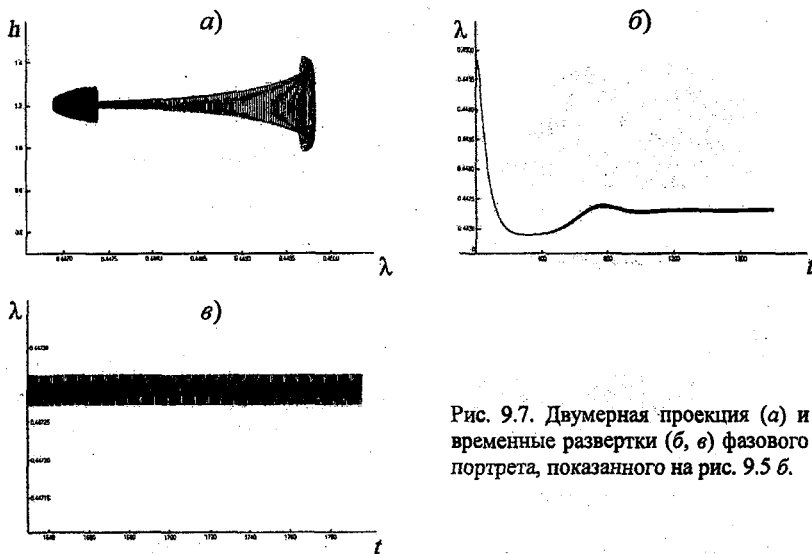


Рис. 9.7. Двумерная проекция (а) и временные развертки (б, в) фазового портрета, показанного на рис. 9.5 б.

В случае малых T фазовые переменные сразу начинают жить в одном темпомире, в котором происходят сложные переходные процессы (рис. 9.9 а, 9.9 б, 9.9 в) пока система не выйдет к предельному состоянию.

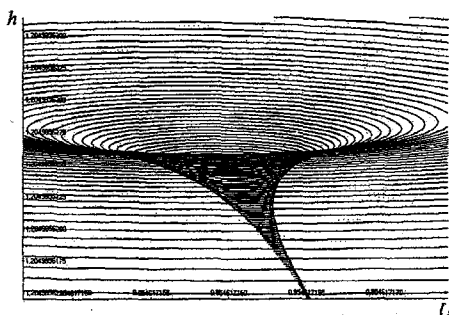


Рис. 9.8. Решение при большом времени релаксации в модели (9.14).

Любая траектория внутри белого кружка (рис. 9.9 а) неустойчива (выходит из него), но все-таки остается в пределах зачерненного множества (в него же притягиваются ближайшие траектории извне). Если процесс зафиксировать после сравнительно небольшого числа итераций, то получаем изображения типа показанных на рис. 9.10 а и 9.10 б.

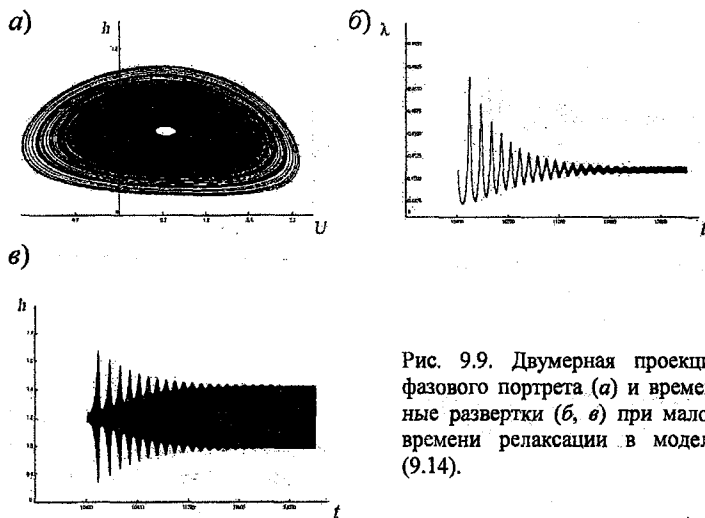


Рис. 9.9. Двумерная проекция фазового портрета (а) и временные развертки (б, в) при малом времени релаксации в модели (9.14).

Учитывая, что одномерная гидравлическая идеализация есть частный случай общих уравнений гидромеханики вязкой несжимаемой

жидкости, имеет смысл проследить взаимосвязь возникающих там математических проблем с полученными результатами.

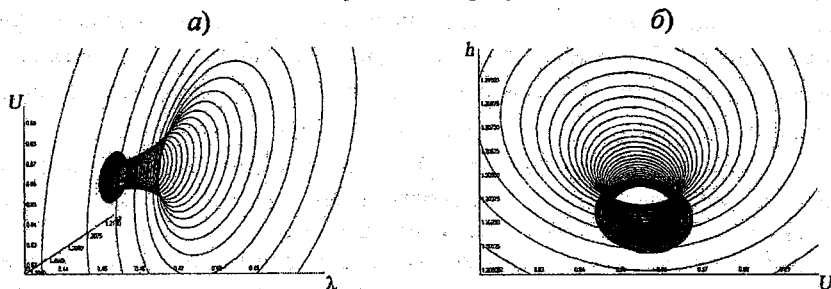


Рис. 9.10. Объемный (а) и плоский (б) фазовые портреты при небольшом числе итераций.

Основная проблема теории турбулентности – выяснение природы случайного движения нелинейной среды и способов его математического описания. Возникающие в этой области парадоксы (например: решение уравнений Навье – Стокса для бесконечно длинной трубы радиусом c с условиями прилипания на границе дается формулой Пуазейля

$$v_x = a(c^2 - r^2),$$

но подобные течения наблюдаются только при малых числах Рейнольдса, при превышении которых становятся турбулентными) привели к широкому фронту исследований [7, 51, 52, 53, 80] математических свойств уравнений вязкой несжимаемой жидкости:

$$\bar{v}_t - \Delta \bar{v} + v_k \bar{v}_{x_k} = -\text{grad} p + \bar{f}(x, t), \quad \text{div} \bar{v} = 0 \quad (9.15)$$

с условием прилипания на границе и начальным условием $\bar{v}|_{t=0} = \bar{a}(x)$ (здесь v – коэффициент вязкости; $\bar{f}(x, t)$ – внешняя «сила»).

В операторном виде задача выглядит так:

$$L\bar{v} = \bar{\Phi}, \quad (9.16)$$

где Φ — совокупность правых частей и краевых условий. Обычно v подчиняют определенным ограничениям, что позволяет искомую функцию рассматривать как элемент некоторого функционального пространства B_Φ . Это приводит к необходимости подчинять определенным условиям и правую часть первого уравнения (9.15), т. е. рассматривать ее как элемент некоторого функционального пространства B_Φ .

Изучать свойства решения (9.15) имеет смысл, если оно существует и единственно (для корректности нужна еще непрерывная зависимость от начальных данных). Поэтому любые исследования начинаются с доказательства теорем существования и единственности. Теорема единственности равносильна утверждению, что существует оператор L^{-1} , обратный оператору L , а теорема существования — что область значений оператора L совпадает с пространством B_Φ .

Корректность задачи равносильна ограниченности обратного оператора L^{-1} , причем некорректная задача в одной паре функциональных пространств может оказаться корректной в другой. Ограниченность же L^{-1} означает ограниченность нормы решения $\|v\|_{B_\Phi}$ в выбранном функциональном пространстве.

Одним из способов доказательства существования является использование метода Галеркина, когда решение (9.15) и начальное условие задаются в виде разложения по фундаментальной системе функций $\{a^k(x)\}$:

$$v^n(x, t) = \sum_{l=1}^n C_{ln}(t) a^l(x); \quad (9.17)$$

$$a_n(x) = \sum_{l=1}^n C_{ln}^0(t) a^l(x), \quad (9.18)$$

причем

$$C_{ln}|_{t=0} = C_{ln}^0, \quad l = 1, 2, \dots, n.$$

Учитывая (9.17), (9.18) и (9.15), приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для $C_{ln}(t)$:

$$\frac{dC_{ln}(t)}{dt} + \nu \sum_{l=1}^n a_{li} C_{in}(t) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij} C_{in}(t) C_{jn}(t) = f_l(t), \quad (9.19)$$

$$l = 1, 2, \dots, n,$$

где $f_l = (\vec{f}, \vec{a}')$ (интересно сравнить (9.19) с системой Эйгена (1.1)).

Что означает «разрешимость»? А то, что ограничены любые представители «популяции» $\{C_{ln}(t)\}$, а конкретнее ограничены $\max_{0 \leq t \leq T} |C_{ln}(t)|$. В силу ортонормированности фундаментальной системы функций (по определению), в обычно используемом функциональном пространстве $(L_2(\Omega))$ имеем

$$\|\vec{v}^n(x, t)\|^2 = \sum_{l=1}^n C_{ln}^2(t).$$

Так вот, оценивать надо норму скорости $\|\vec{v}^n\|$. Оказывается, что она «подчиняется» дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\vec{v}^n\|^2 + \nu \|\vec{v}_x^n\|^2 = (\vec{f}, \vec{v}^n). \quad (9.20)$$

Согласно работе [51], существуют априорные оценки для скорости в (9.20), из которых следует ограниченность $\max_{0 \leq t \leq T} |C_{ln}(t)|$. В той же работе показана и справедливость предельного перехода для $\vec{v}^n$ при $n \rightarrow \infty$.

Однако ограниченность нормы решения задачи, поставленной для уравнения (9.15), можно показать и не пытаясь конструктивно его построить (т. е. доказать существование решения без его фактического построения). Для этого используется энергетическое равенство для рассматриваемой задачи, отражающее баланс энергии:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|^2 + v \|v_x\|^2 = (\bar{f}, v).$$

Из него следует (см. [52]) неравенство

$$\frac{d}{dt} \|v\| + v \lambda_1 \|v\| \leq \|\bar{f}\| \quad (9.21)$$

(здесь λ_1 — собственное значение соответствующей спектральной задачи [52]), интегрирование которого дает:

$$\|v(t)\| \leq \|v(0)\| e^{-v \lambda_1 t} + \|\bar{f}\| (1 - e^{-v \lambda_1 t}) / v \lambda_1,$$

т. е. $\lim_{t \rightarrow \infty} \|v(t)\| \leq \rho_0 = (v \lambda_1)^{-2} \|\bar{f}\|$. Таким образом, любое решение исходной задачи втягивается в шар K_{ρ_0} , т. е. существует (не уходит на бесконечность). Что конкретно представляет из себя множество решений M из K_{ρ_0} требует специального изучения. Если бы траектория решения была единственной, то применение энергетического неравенства (9.21) к норме двух близких решений дало бы шар нулевого радиуса, т. е. единственность решений. Для системы же (9.15) этот подход показывает локальное разбегание траекторий (неустойчивость) и глобальное их сближение за некоторое время (устойчивость), т. е. M представляет собой аттрактор. При этом любая траектория в M восстанавливается по ее проекции $P_n v(t)$ в евклидовом пространстве размерности n , зависящей от Re , (чем больше Re , тем больше n). На физическом языке это означает (например), что при модовом описании в методе Галеркина достаточно использовать конечную «популяцию мод» (если уже совсем по простому, то вязкость препятствует существованию мелкомасштабных возмущений).

В работе [52] оценена и хаусдорфова размерность M , которая мажорируется размером области Ω («геометрией»), внешней «силой» $\bar{f}$ и вязкостью v . В дальнейшем подобному исследованию подвергались и уравнения гиперболического типа [53]. В обоих случаях (параболиче-

ском и гиперболическом) важно наличие у разрешающих операторов свойства полной непрерывности. Это означает, что они переводят исходную информацию не просто в ограниченное (замкнутое) множество, но — в компактное, т. е. такое, что пределы траекторий остаются в M (для гиперболических систем необходимо представление разрешающих операторов в виде сжимающей полугруппы и вполне непрерывных операторов). При этом надо отметить, что для получения подобных результатов в случае трехмерной системы Навье — Стокса пришлось модернизировать диссипативный член, сделать его более чувствительным к большим градиентам скоростей. Подытоживая эти результаты можно сделать выводы:

1. Компактный связный аттрактор может быть получен для обоих типов уравнений (параболических и гиперболических).

2. В случае уравнений Навье — Стокса потребовалось варьировать задаваемый параметр (вязкость).

3. Несмотря на установление факта существования конечномерных аттракторов, описать механизм их возникновения и «самоподдержания» не удастся. Единственное, что установлено, так это то, что, вопреки мнению Ландау и Хопфа, предельные режимы не обязаны быть квазипериодическими функциями времени, но что их динамика «в каком-то смысле конечномерна» [52]. Число несоизмеримых периодов контролируется размерностью M .

Какое ко всему этому имеет отношение частично инфинитное моделирование? А что такое изменение функциональных пространств, в которые погружается задача, как не попытка по-новому зафиксировать изучаемую предметную область (поле скоростей и давлений). И естественно на это затрачивается энергия (по крайней мере - интеллектуальная). Но когда это не приводит к успеху, то начинают «шевелить» вязкость (т. е. задаваемый параметр), расширяя, тем самым, предметную область. Если эти попытки довести до логического конца, то первоначально жестко задаваемый параметр должен стать новой фазовой переменной, как это сделано для уравнений гидравлической идеализации, в которых коэффициент сопротивления не только «управляет» режимом скорости и уровня, но и сам зависит от них. Причем это взаимодействие настолько глубоко, что варьирует тип математической модели.

Действительно, запишем (9.1), (9.2) с учетом (9.13) так:

$$0 = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) (\gamma \lambda - 1) - \lambda \frac{U^2}{h} + g i_0 - g \frac{\partial h}{\partial x}; \quad (9.22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -U \frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial U}{\partial x}. \quad (9.23)$$

Будем считать, что $\lambda U^2/h \approx g i_0$ (этого можно и не делать, так как в конечном итоге присутствие этих членов не меняет тип дифференциального уравнения, который определяется старшими производными) и линеаризуем систему (9.22), (9.23) относительно U_0 , h_0 (для классических уравнений гидравлики подобные преобразования впервые выполнены Н. Т. Мелещенко [58]):

$$\beta \frac{\partial U}{\partial t} + \beta U_0 \frac{\partial U}{\partial x} - g \frac{\partial h}{\partial t} = 0; \quad (9.24)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = -U_0 \frac{\partial h}{\partial x} - h \frac{\partial U}{\partial x}, \quad (9.25)$$

где $\beta = \lambda \gamma - 1$.

Дифференцируя (9.25) по x , а (9.24) по x и t и делая несложные алгебраические преобразования, приходим к уравнению

$$A \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + 2B \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x} + C \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0, \quad (9.26)$$

где $A = \beta/g$; $B = \beta U_0/g$; $C = (\beta U_0^2/g) + h_0$.

Если $\gamma = 0$ (используются классические зависимости для гидравлических сопротивлений), то в соответствии с классификацией уравнений математической физики имеем гиперболический тип, так как $B^2 > AC$. Ни параболического ($B^2 = AC$), ни эллиптического $AC > B^2$ типов быть не может.

Если же $\gamma \neq 0$, то возможны различные варианты. Таким образом, при изменении β меняется тип уравнения, т. е. β является управляющим параметром. Но чтобы этот механизм реализовался на практике, надо

чтобы β само зависело от n и h , что и следует из уравнения (9.14). Поэтому (видимо) можно и «обобщенную вязкость» $\nu_{об}$ сделать фазовой переменной

$$\nu_{об} = f(\nu_{об}, \bar{\nu}, p),$$

т. е. «заставить» ее сосуществовать с остальными фазовыми переменными в одном темпомире, а не просто реагировать на сильные градиенты скорости, как это сделано у О. А. Ладыженской [51].

Предложенный путь — это «втягивание» частично инфинитного (не очень понятного, так как он может зависеть от многих факторов) параметра вязкости в финитную (рационализированную) часть модели. Не надо думать, что ситуация в целом становится «более финитной», наоборот — происходит расширение предметной области (так как в нее «вошла» новая фазовая переменная), а значит расширился контакт с инфинитной реальностью. Мы просто выжигаем (тратя «интеллектуальную энергию») иррациональность (создавая новые рациональные структуры), но область контакта финитности с инфинитностью расширяется: вместо постоянной вязкости появляется переменная, определяемая дифференциальным уравнением со своими константами, которые рано или поздно также «оживут». Поэтому говорить о возможности «решения проблемы турбулентности» можно только метафорически.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ (КАК «РАБОТАЕТ» ФИЛОСОФИЯ ЧАСТИЧНО ИНФИНИТНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ)

К чему мы пришли? Как работает философия «частично инфинитного моделирования»?

Рассмотрим самую простую модель формирования речного стока:

$$dQ/dt = -Q/(k\tau) + X/\tau, \quad Q|_{t_0} = Q_0 \quad (3.1)$$

(все обозначения уже упоминались).

Где здесь «финитное» и «частично инфинитное»?

Любую модель определяют понятия, т. е. некие рационализованные структуры: расход воды Q , коэффициент стока k , интенсивность осадков X , дифференциал d , равно $=$, минус $-$, плюс $+$, делить $/$, начальное условие Q_0 . Степень «рационализации» разная. «Финитные» понятия (относительно, разумеется): $d, t, /, +, -, t_0, Q$, «частично инфинитные» $-k, \tau, Q_0, X$. Почему? Где онтология? Как возникают парадоксы и «неустойчивость» онтологии? Где переходный «гносеологический процесс»? Где рациональное и иррациональное?

Посмотрим на рис. 3.1. Все рациональное ($d, t, t_0, =, /, +, -, Q$) внутри круга. С помощью специфически гидрологического понятия Q и общенаучных понятий ($d, t, t_0, =, /, +, -$) выделяется в иррациональной среде (инфинитной реальности) некая гидрологическая предметная область с частично инфинитной границей. В богатом (красками, звуком и т. п.) явлении стока (можно представить себе бурный горный поток в раскатах грома и сверкании молнии), выделяется некая воднобалансовая сущность, описываемая моделью (3.1). Решение модели описывает процесс с помощью рациональной структуры-функции $Q(t)$ (это та самая плоскость (Q, t), рассекающая крону «дерева», см. п. 1.1).

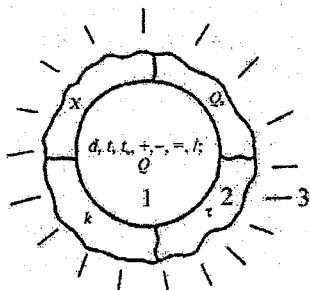


Рис. 3.1. Предметная область, фиксируемая моделью (3.1).

1 – финитное ядро; 2 – частично инфинитная граница; 3 – инфинитная (для модели (3.1)) реальность.

В этой выделенной (с помощью также и частично инфинитных понятий k, τ, X, Q_0) предметной области можно проводить «гидрологические исследования»: прогнозировать ход процесса $Q(t)$, изучать влияние на расход коэффициента стока k и т. д.

В рамках «онтологии», диктуемой выбором (3.1) (ее можно назвать детерминированной и линейной), можно вводить много рациональных понятий: залесенность f_n , заболоченность f_b , плотность населения ρ , распаханность f_p ($k = f(f_n, f_b, \rho, f_p, \dots)$), насыщая ими выделенную предметную область. Появляются разнообразные научные исследования по выявлению влияния на речной сток леса, распаханности и

т. д. (то, что раньше мы называли псевдоинформационным взрывом [46]). «Псевдо» – потому, что все эти «исследования» проводятся в рамках одной и той же онтологии O_1 (модель (3.1)).

Чтобы произошла ее замена необходимо появление парадоксов, необъяснимых в рамках онтологии O_1 . Откуда они могут взяться? Только из инфинитной реальности через частично инфинитные переменные (X , τ , k , Q_0). Параметры модели τ и k , внешнее воздействие X и начальное условие Q_0 частично инфинитны потому что, с одной стороны они осмыслены в рамках онтологии (3.1), выделяющей фиксированную (гидрологическую) предметную область, а с другой – породить их может «что угодно»: что стоит за «коэффициентом стока» мы не знаем. Можем догадываться, что – свойства почво-грунтов, процент залесенности и т. д.

Как может проявиться неустойчивость онтологии O_1 ? Например, при заданных, k , τ , X , Q_0 мы решаем (3.1), находим $Q(t)$ и сравниваем с измеренным значением $Q_n(t)$. Выявляем $\Delta Q = Q_n - Q \neq 0$. Модель (3.1) не описывает (или не описывает «точно») процессы в предметной области. Почему? Потому что Q_0 , k , τ , X , Q_n частично инфинитны. Они известны (например из измерений) не точно, за ними еще что-то стоит.

Таким образом, затрачивая энергию (деятельность) на измерения, т. е. «выжигая» инфинитную реальность, мы порождаем ΔQ , которую надо рационализировать, расширив предметную область новой рациональной структурой («погрешностью»).

Это делается путем стохастического обобщения модели (3.1) и перехода к модели ФПК

$$\frac{\partial p(Q, t)}{\partial t} = -\frac{\partial(ap)}{\partial Q} + 0,5 \frac{\partial^2(bp)}{\partial Q^2} \quad (3.2)$$

(обозначения прежние). В рамках онтологии O_2 (т. е. модели 3.2) изучаются не расходы, а плотность вероятности $p(Q)$ и «погрешность» входит в описание расширенной предметной области. Онтологию O_2 можно назвать «стохастической».

Неустойчивость предыдущей онтологии вызвала «соприкасающаяся» с предметной областью инфинитная реальность. Таким образом источник

неустойчивости не в самой онтологии, а в ее неспособности отражать реальность, окружающую предметную область.

Стохастическая онтология начинает плодить псевдоинформацию (огромное число исследований по вероятностным законам распределения речного стока, дробления его на годовой, минимальный, максимальный и т. д.).

Но и стохастическая онтология сталкивается с парадоксами (неустойчивостью). Например, в уравнении для моментов

$$dm_n / dt = (-\bar{c} + 0,5nG_c)m_n + \dots$$

при $\bar{c} < 0,5nG_c$ возникает неустойчивость n -го момента и при $n = 1$ всего распределения в целом (т. е. его не существует в рамках модели ФПК). Часто реальное распределение двухмодально, что выходит за рамки кривых Пирсона. И порождают эту неустойчивость шумы, т. е. опять же инфинитная для модели ФПК реальность, которая моделью не фиксируется, но «учитывается» частично инфинитными параметрами – интенсивностью шумов.

Ликвидация этой неустойчивости и переход к двухмодальному распределению может обеспечить «включение» в (3.1) нелинейности: $\tau = WQ^{-1}$ (W – гидрологическая емкость среды), т. е. появление второй фазовой переменной в расширенной предметной области и замена линейной онтологии O_1 на нелинейную – O_3 . Параметр τ стал «почти финитным», так как это уже фазовая переменная, но появился новый частично инфинитный параметр W , ибо мы можем только догадываться, что его порождает. Чтобы эти «догадки» рационализировать, надо затратить энергию (действовать).

Таким образом, оставаясь в фиксированной онтологии, мы можем промоделировать ее неустойчивость и указать какая частично инфинитная константа станет финитной переменной в расширенной онтологии, а также – какая связь старых и новой переменных (должно быть, нелинейное взаимодействие предметной области и частично инфинитной реальности с положительными и отрицательными обратными связями). Но мы не можем спрогнозировать качество этой новой фазовой переменной, рожденной из инфинитного шума (гидрологическую емкость среды может определять и водохранилище и биомасса и т. д.). Это можно либо угадать, либо создавать (действием), либо наблюдать (затрачивать энергию).

ИЗ РЕЦЕНЗИИ ПРОФ. И. Ф. КАРАСЕВА*

«...Не умаляя значения рецензируемой монографии (еще раз повторю, что это методологический прорыв не только в области гидрологии суши, но и, подозреваю, в науке вообще...) должен обратить внимание издателя и читателей на некоторые моменты.

1. Автор молча, самым фактом появления книги, заявляет примерно следующее: онтологически случайность бесправна. Если мир (которого по мнению проф. Коваленко вообще не существует гносеологически как единого целого, см. его работу [46]) это некие предметные области, то очевидно, что событиями в изучаемой предметной области управляет инфинитная реальность, которая частично себя проявляет через параметры моделей. А это возврат к одному из положений раннего марксизма-ленинизма («случайность – это непознанная необходимость»). Тем самым автор входит в противоречие с общепринятым в настоящее время взглядом на случайность как объективную необходимость, которая вполне самодостаточна и не требует формулировки каких-либо дополнительных условий.

2. Как следствие п.1, Коваленко обходит молча проблему самоорганизации! Что собственно должно самоорганизовываться, если событиями в изучаемой предметной области управляют другие («инфинитные») предметные области? Правда (справедливости ради) надо заметить, что в одной из своих предыдущих монографий (см. В. В. Коваленко «Частично инфинитное моделирование и прогнозирование процессов развития» – СПб.: изд. РГТМУ, 1998. – 113 с.) автор открыто излагает свою точку зрения: «Таким образом, и расширенный диалектический материализм, и два враждующих между собой мировоззрения индо-буддийской цивилизации (имеется ввиду адвайта-веданта Шанкары и буддизм – И. К.) говорят об одном и том же: доля шаблонов, имеющих информационную размерность (а значит, рациональных), очень мала, настоящая реальность нами просто не замечается. А это значит, что финитное прогнозирование и, главное, управление – иллюзия, которая длится до тех пор, пока себя не проявит субъект («дерево»), осуществляющий реальное, но анонимное управление процессом. Нам только кажется, что существуют объективные процессы

* Публикуется по просьбе рецензента

самоуправления (самоорганизация). Управление осуществляется низкочастотными процессами (типа фликкер-шума...), продолжительность которых намного превосходит время наблюдения одним человеком... или любой структурой, ибо все структуризованное смертно по определению».

3. Чтобы лучше понять дух рецензируемой работы, следует обратить внимание на довольно вольное обращение автора с математической (и не только) терминологией. Текст (как видимо и мысли автора) настолько метафоричен, что, перечитывая его заново, можно до бесконечности выискивать новые оттенки смыслов. Автору ничего не стоит «поставить на одну полку» «биологическое» слово «хищник» и «физико-математическое» слово «мода». Фазовые переменные (моды) вдруг начинают взаимодействовать по типу «хищник – жертва» и т. д. Все это просто шокирует неподготовленного читателя. Но автору такая манера изложения «развязывает руки» и позволяет проводить очень далеко идущие аналогии.

4. В последние годы в нелинейной динамике появились понятия «русла» и «джокера». В рецензируемой книге они даже не упоминаются, хотя читателю (особенно гидрологам) было бы интересно иметь самое общее представление о них.

... Считаю целесообразным опубликовать первые четыре замечания и ответы на них автора (если таковые последуют)...

ОТВЕТЫ АВТОРА НА ЗАМЕЧАНИЯ РЕЦЕНЗЕНТА

«... 1. С позиций частично инфинитного моделирования действительно возникают проблемы с онтологическим статусом случайности. В фиксированной (например моделью (3.4)) предметной области (речном бассейне) может появиться что-то похожее на случайный процесс. Но разве можно утверждать, что эта «случайность» объективно присуща речному бассейну (точнее процессу формирования стока)? Ведь этой «случайностью» управляет частично инфинитный параметр r , куда входят осадки, формирующиеся в другой предметной области (атмосфере). Этот параметр можно «оживить», сделав его решением отображения типа (3.4) (или системы отображений), но уже для атмосферы. Однако его «случайные» колебания все равно будут управляться другим (частично инфинитным для атмосферы) параметром, связанным с солнеч-

ной системой и т. д. Можно всю эту управляющую цепочку и не рассматривать, а искусственно ввести в модель (3.4) «шумы» и размыть распределение $p(q)$, приблизив тем самым его к фактическому распределению (см. рис. 3.4 б).

Таким образом, никакая финитная реальность случайности породить не может, она «создается» (управляется) либо другими предметными областями, либо вводится искусственно (субъективно), если мы не хотим или не можем расширить моделируемую предметную область, включив в нее эти «другие предметные области».

Изложенное не означает, что случайность не имеет право на существование с точки зрения гносеологии.

2. Действительно, из п. 1 почти автоматически следует отсутствие «самоорганизации» в том примитивном смысле, который подчас вкладывают в это понятие. Все чем-то управляется, но управление – это не обязательно «прямое указание сверху». Управлять можно и не воздействуя напрямую на фазовую переменную, а путем изменения фиксации предметной области, например меняя численные значения задаваемых коэффициентов (параметров) модели. Параметры же (как это следует из данной монографии) всегда частично инфинитны. Следовательно любая финитная реальность находится под частично инфинитным управлением.

3.

4. Концепция «русел» и «джокеров» предполагает неоднородность фазового пространства изучаемой системы. Русли называют те области, в которых возможно маломодовое описание (а значит возможно построение маломодовых предикторов). Выйдя из русла, траектория попадает в область джокера, где подобное описание невозможно. Этот подход – сужение концепции частично инфинитного моделирования, в котором фиксированная предметная область («русло») погружается в инфинитное окружение («глобальный джокер», выражаясь метафорически). Выйти из области джокера можно только по руслу, создав (путем затраты энергии, в том числе и эмоциональной, см. [46]) новую финитную предметную область с частично инфинитной границей....

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдеев Р. Ф. Философия информационной цивилизации. – М.: ВЛАДОС, 1994. – 336 с.
2. Алибегова Ж. Д. Пространственно-временная структура полей жидких осадков. – Л.: Гидрометеиздат, 1985. – 230 с.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
4. Баблюяц А. Молекулы, динамика и жизнь. Введение в самоорганизацию материи. – М.: Мир, 1990. – 375 с.
5. Барабашев А. Г. Будущее математики: методологические аспекты прогнозирования. – М.: Изд. МГУ, 1991. – 160 с.
6. Винников К. Я. Чувствительность климата. – Л.: Гидрометеиздат, 1986. – 224 с.
7. Вишик М. И., Фурсиков А. В. Математические задачи статистической гидромеханики. – М.: Наука, 1980. – 240 с.
8. Волькенштейн М. В. Биофизика. – М.: Наука, 1988. – 592 с.
9. Гандин Л. С., Каган Р. Л. Статистические методы интерпретации метеорологических данных. – Л.: Гидрометеиздат, 1976. – 360 с.
10. Гледзер Е. Б., Должанский Ф. В., Обухов А. М. Системы гидродинамического типа и их применение. – М.: Наука, 1981. – 368 с.
11. Горошков И. Ф. Гидрологические расчеты. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 432 с.
12. Гринвальд Д. И., Никора В. И. Речная турбулентность. – Л.: Гидрометеиздат, 1988. – 152 с.
13. Гришанин К. В. Динамика русловых потоков. – Л.: Гидрометеиздат, 1979. – 312 с.
14. Демвильев В. В. Исследование пульсаций скорости течения на горных реках и ее влияние на точность измерения расхода воды. – Труды ГТИ. – 1962. – Вып. 98. – С. 56 – 98.
15. Дроздов О. А. Метод построения сети метеорологических станций равнинной местности // Труды ГГО. – 1936. – Вып. 12. – С. 10 – 112.
16. Дроздов О. А., Шепелевский А. А. Теория интерполяции в стохастическом поле метеорологических элементов и ее применение к вопросам метеорологических карт и рационализации сети // Тр. НИУ ГУГМС. – 1946 – Сер. 1, вып. 13 – 65. – 115 с.

17. Дроздов О. А. О принципах рационализации сети метеорологических станций // Тр. ГГО. – 1961. – Вып. 123. – С. 33 – 46.
18. Зверев А. С. Синоптическая метеорология. – Л.: Гидрометеоздат, 1977. – 712 с.
19. Исследование неуставившегося движения воды на реках Тверце и Оредеж / Под ред. Н. Е. Кондратьева и В. А. Урываева. – Л.: Гидрометеоздат, 1961. – 288 с.
20. Каган Р. Л. К оценке репрезентативности осадкомерных данных // Тр. ГГО. – 1967. – Вып. 191. – С. 22 – 34.
21. Калинин Г. П. Проблемы глобальной гидрологии. – Л.: Гидрометеоздат, 1968. – 378 с.
22. Карасев И. Ф. О принципах размещения и перспективах развития гидрологической сети // Труды ГГИ. – 1968. – Вып. 164. – С. 3 – 36.
23. Карасев И. Ф., Коваленко В. В. Стохастические методы речной гидравлики и гидрометрии. – СПб.: Гидрометеоздат, 1992. – 208 с.
24. Картвелишвили Н. А. Теория вероятностных процессов в гидрологии и регулировании речного стока. – Л.: Гидрометеоздат, 1967. – 292 с.
25. Картвелишвили Н. А. Неуставившиеся открытые потоки. – Л.: Гидрометеоздат, 1968. – 128 с.
26. Картвелишвили Н. А. Стохастическая гидрология. – Л.: Гидрометеоздат, 1975. – 164 с.
27. Картвелишвили Н. А., Галактионов Ю. И. Идеализация сложных динамических систем. – М.: Наука, 1976. – 272 с.
28. Клибашев К. П., Горошков И. Ф. Гидрологические расчеты. – Л.: Гидрометеоздат, 1970. – 460 с.
29. Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами. – М.: Наука, 1975. – 240 с.
30. Князева Е. Н., Курдюмов С. П. Законы эволюции и самоорганизация сложных систем. – М.: Наука, 1994. – 236 с.
31. Коваленко В. В. Измерение и расчет характеристик неуставившихся речных потоков. – Л.: Гидрометеоздат, 1984. – 160 с.
32. Коваленко В. В. Гидрометрическое оценивание речного стока с элементами стохастического подхода. Учебное пособие. – Л.: Изд. ЛПИ, 1986. – 61 с.

33. Коваленко В. В. Стохастическое оценивание гидравлического режима водопропускных сооружений. Сборник научных трудов «Вопросы эффективности гидрометеорологических исследований в целях интенсификации народного хозяйства». – Л.: Изд. ЛПИ, 1987, вып. 96. – С. 131 – 136.

34. Коваленко В. В. Динамические и стохастические модели гидрологического цикла. – Л.: Изд. ЛПИ, 1988. – 34 с.

35. Коваленко В. В. Стохастические модели формирования речного стока с сосредоточенными параметрами // Расчеты и прогнозы гидрологических характеристик. Межведомственный сборник научных трудов. – Л.: изд. ЛГМИ, 1989, вып. 103. – С. 61 – 73.

36. Коваленко В. В. К оценке гидрологических последствий изменения климата // Динамика русловых потоков и охрана природных вод. Сборник научных трудов (межвузовский). – Л.: изд. ЛГМИ, 1990, вып. 167. – С. 82 – 88.

37. Коваленко В. В. Моделирование гидрологических процессов. – СПб.: Гидрометеоиздат, 1993. – 256 с.

38. Коваленко В. В. Бифуркации в религиозной философии, естествознании и общественном развитии. – СПб: Гидрометеоиздат, 1994. – 160 с.

39. Коваленко В. В. Частично инфинитное моделирование и прогнозирование процессов развития. – СПб.: изд. РГГМУ, 1998. – 113 с.

40. Коваленко В. В. Частично инфинитное моделирование и прогнозирование процессов развития на основе идей эволюционной эпистемологии / Материалы итоговой сессии ученого совета. – СПб.: изд. РГГМИ, 1998. – С. 64 – 65.

41. Коваленко В. В., Хаустов В. А. Критерии устойчивого развития гидрологических процессов и картирование зон ожидаемых аномалий параметров годового стока рек СНГ при антропогенном изменении климата. – Метеорология и гидрология, 1998, 12. – С. 96 – 102.

42. Коваленко В. В. Вывод критериев оптимальной гидрологической сети из стохастической модели, учитывающей эффекты нелинейности в формировании речного стока. / Итоговая сессия Ученого совета. Тезисы докладов. – СПб.: изд. РГГМУ, 1999. – С. 39.

43. Коваленко В. В. Задача об оптимальном управлении водным режимом реки Сырдарья // Моделирование и прогнозирование гидроло-

гических процессов. Сборник научных трудов. – СПб: изд. РГГМУ, 1999, вып. 120. – С. 3 – 9.

44. Коваленко В. В., Хаустов В. А. Опыт ретроспективной оценки гидрологического режима Русской равнины // Моделирование и прогнозы гидрологических процессов. Сборник научных трудов. – СПб: изд. РГГМУ, 1999, вып. 120. – С. 10 – 18.

45. Коваленко В. В., Пивоварова И. И. Оптимизация режимной гидрологической сети на основе стохастической модели формирования речного стока. – СПб: изд. РГГМУ, 2000. – 44 с.

46. Коваленко В. В. Онтология и гносеология частично инфинитного моделирования. – СПб: изд. РГГМУ, 2001. – 47 с.

47. Конаржевский Л. М. Типовые формы кривой обеспеченности характеристик весеннего стока с водосборов степной и лесостепной зон. – Изв. Каз. филиала АН СССР, сер. энергетики и водного хозяйства, 1961, вып. 3. – С. 130 – 146.

48. Коплан-Дикс С. И. К вопросу о точности определения расхода воды. – Труды ГГИ, 1960, вып. 84. – С. 23 – 36.

49. Костицын В. А. Эволюция атмосферы, биосферы и климата. – М.: Наука, 1984. – 96 с.

50. Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г. Синергетика – теория самоорганизации (идеи, модели, перспектива) // Компьютеры, модели, вычислительный эксперимент. Введение в информатику с позиций математического моделирования. – М.: Наука, 1988. – С. 79 – 136.

51. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. – М.: Наука, 1970. – 288 с.

52. Ладыженская О. А. О конечномерности ограниченных инвариантных множеств для системы Навье – Стокса и других диссипативных систем. – В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 14 (Зап. научн. семина. ЛОМИ, т. 115). – Л.: Наука, 1982. – С. 137 – 155.

53. Ладыженская О. А. Об аттракторах нелинейных эволюционных задач с диссипацией. – В кн.: Краевые задачи математической физики и смежные вопросы теории функций. 18 (Зап. научн. семина. ЛОМИ, т. 152). – Л.: Наука, 1986. – С. 72 – 85.

54. Лаукс Д., Стедингсер Дж., Хейт Д. Планирование и анализ водохозяйственных систем: Пер. с англ. М.: Энергоатомиздат, 1984. – 400 с.

55. *Малинецкий Г. Г., Митин Н. А.* Нелинейная динамика в проблеме безопасности. – В кн.: Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. – М.: Наука, 1996. – С. 191 – 214.

56. *Малинецкий Г. Г., Потапов А. Б.* Нелинейность. Новые проблемы, новые возможности. – В кн.: Новое в синергетике. Загадки мира неравновесных структур. – М.: Наука, 1996. – С. 165 – 189.

57. *Малинецкий Г. Г.* Хаос. Структуры. Вычислительный эксперимент: Введение в нелинейную динамику. – М.: Наука, 1997. – 255 с.

58. *Мелешенко Н. Т.* Применение теории длинных волн малой амплитуды к вопросам суточного регулирования. Известия ВНИИГ, 1940, т. 28.

59. *Молчанов А. П., Занадворов П. Н.* Курс электротехники и радиотехники. – М.: Наука, 1969. – 480 с.

60. *Морозов А. Д., Драгунов Т. Н., Бойкова С. А., Мальшиева О. В.* Инвариантные множества динамических систем в Windows. – М.: Эдиториал УРСС, 1998. – 240 с.

61. *Мун Ф.* Хаотические колебания. Вводный курс для научных работников и инженеров. – М.: Мир, 1990. – 312 с.

62. *Николис Г., Пригожин И.* Познание сложного. Введение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 344 с.

63. *Николис Дж.* Динамика иерархических систем: Эволюционное представление. – М.: Мир, 1989. – 488 с.

64. *Пайтген Х.-О., Рихтер П. Х.* Красота фракталов. Образы комплексных динамических систем. – М.: Мир, 1993. – 176 с.

65. *Перменов-Зингер М. Я.* Основы сверхстандартного анализа. – СПб: Мета, 1992. – 68 с.

66. *Погосян Х. П.* Общая циркуляция атмосферы. – Л.: Гидрометеоиздат, 1959. – 260 с.

67. *Пособие по определению расчетных гидрологических характеристик.* – Л.: Гидрометеоиздат, 1984. – 448 с.

68. *Пригожин И.* От существующего к возникающему: Время и сложность в физических науках. – М.: Наука, 1985. – 328 с.

69. *Пригожин И., Стенгерс И.* Порядок из хаоса: Новый диалог человека с природой. – М.: Прогресс, 1986. – 432 с.

70. *Пространственно-временные колебания стока рек СССР* / Под. ред. А. В. Рождественского. – Л.: Гидрометеоиздат, 1988. – 376 с.

71. Рабинович М. И. Автоколебания распределенных систем. – Известия вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, № 4. – С. 477 – 510.
72. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн: Учебное пособие. – М.: Наука, 1984. – 432 с.
73. Рождественский А. Ф., Чеботарев А. И. Статистические методы в гидрологии. – Л.: Гидрометеиздат, 1974. – 424 с.
74. Руководство по классификации переходов через малые водотоки по водопропускной способности. – М.: ЦНИИС, 1975. – 160 с.
75. Свешников А. А. Прикладные методы теории случайных функций. – М.: Наука, 1968. – 464 с.
76. Современная философия науки: знание, рациональность, ценности в трудах мыслителей Запада. – М.: «Логос», 1996. – 400 с.
77. Соколовский Д. Л. Применение кривых распределения к установлению вероятностных колебаний годового стока рек Европейской части СССР. – Л.: Гостехиздат, 1930. – 77 с.
78. Соколовский Д. Л. Применение кривых вероятностей к расчетам годового и максимального стока. – М.-Л., ГЭИ, 1934. – 52 с.
79. Тарко А. М., Свирижев Ю. М. Проблема экологического равновесия и глобальные биологические циклы. Цикл углерода. – В кн.: Методы системного анализа в проблеме рационального использования ресурсов. – М.: ВЦ АН СССР, 1977, т. III, Ч. I. – С. 114 – 188.
80. Темам Р. Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. – М.: Мир, 1981. – 408 с.
81. Управление риском: Риск. Устойчивое развитие. Синергетика. – М.: Наука, 2000. – 431 с.
82. Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ? – М.: Наука, 1967. – 128 с.
83. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс Н. Фейнмановские лекции по физике. – М.: Мир, 1965, т. 2. – С. 135 – 136.
84. Федоров В. Д., Гильманов Т. Г. Экология. – М.: Изд. МГУ, 1980. – 464 с.
85. Федорченко А. М., Коцаренко Н. Я. Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах. – М.: Наука, 1981. – 176 с.
86. Хакен Г. Синергетика. – М.: Наука, 1980. – 408 с.
87. Хорстхемке В., Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы. Теория и применение в физике, химии и биологии. – М.: Мир, 1987. – 400 с.

88. Цымбал Л. А. – Синергетика информационных процессов. Закон информативности и его следствия. – М.: Наука, 1995. – 119 с.
89. Шелутко В. А. Статистические модели и методы исследования многолетних колебаний стока. – Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 160 с.
90. Швер Ц. А. Закономерности распределения количества осадков на континентах. – Л.: Гидрометеиздат, 1984. – 286 с.
91. Шустер Г. Детерминированный хаос: Введение. – М.: Мир, 1988. – 240 с.
92. Эйген М. Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул. – М.: Мир, 1973. – 216 с.
93. Bak P., Tang C., Creutz M. Self-organized criticality. Physical review A. Vol. 38. N 1, 1988. – pp. 364 – 374.
94. Foster A. Evaluation of Flood Losses and Benefice. Proc. Amer. Soc. of Eng. Mag, 1941.
95. Foster A. Theoretical frequency curves and their application to engineering problems. Proceeding of ASCE, 1923.
96. Foster A. Theoretical Frequency Curves. Trans. ASCE, vol. 87, 1924.
97. Hazen A. The Storage to be Provided in Impounding Reservoirs for Municipal Water Supply. Trans ASCE, vol. 77. 1914.
98. Hazen A. The Storage to be Provided in Impounding Reservoirs for Municipal Water Supply. Trans ASCE. 1917.
99. Sagan S. D. The limits of safety: Organization, accidents and nuclear weapons. Princeton: Univ. Press, 1993. – 286 p.
100. Stewart B. J. Integrated hydrological network // Technical reports in hydrology and water resources. No. 60. – 1998. – P. 18.
101. Yokosi Sh. The structure of river turbulence. – Bull. Dis. Prev. Res. Inst. Kyoto Univ., 1967, vol. 17, № 2. – p. 1 – 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение (почему так широко применяются линейные модели).....	3
1. Частично инфинитное моделирование на основе идей эволюционной эпистемологии.....	6
1.1. Философия.....	6
1.2. Теория Эйгена.....	9
1.3. Эпистемология.....	11
1.4. Стохастическое обобщение.....	13
2. Роль нелинейности.....	15
2.1. Механизм внутренней активности.....	15
2.2. Творческая эволюция и сверхстандартный анализ.....	19
3. Моделирование процесса формирования речного стока.....	24
3.1. Постановка задачи, вытекающая из дискуссии 50-х годов о статистических и генетических методах в гидрологии.....	24
3.2. Модель динамическая – решение «статистическое».....	27
3.3. Оценка «статистичности».....	31
3.4. Расширение фазового пространства.....	34
3.5. Модель формирования стока в виде комплексного отображения (отображение Жюлиа, множество Мандельброта, фрактальность, «бассейны притяжения»).....	40
3.6. Проявление инфинитности.....	44
3.7. Двумерное отображение, модель Эйгена и типы взаимодействия гидрологических фазовых переменных.....	46
4. Эволюция атмо-, гидро- и био- сфер.....	50

5.	Надежность при неустановившемся гидрометеорологическом режиме. Самоорганизованная критичность.....	56
5.1.	Существующий подход к оценке надежности.....	56
5.2.	Возражения Н. А. Картвелишвили.....	65
5.3.	Задача о «выбросах».....	66
5.4.	Теория «нормальных аварий».....	69
6.	Гидрометеорологические потенциалы. Явление переброса.....	73
7.	Нелинейные резонансы в гидрометеорологии.....	82
8.	Оптимизация режимной гидрологической сети на основе стохастической модели формирования речного стока.....	91
8.1.	Задача о рациональном размещении осадкомерной и стоковой сети.	91
8.2.	Определение оптимального числа стоковых постов с помощью критериев. Критика существующей методики и постановка задачи.....	99
8.3.	Пространственная стохастическая модель формирования речного стока и соответствующие ей критерии.....	101
8.4.	Связь оптимизации стоковой и осадкомерной сети.....	108
8.5.	Влияние нелинейности процессов формирования стока на критерии оптимальности.....	110
8.6.	Онтология оптимальной режимной сети, ее парадоксы и перспектива эволюции.....	113
8.6.1.	Существующая онтология и невозможность научно обоснованного прогнозирования принципиальных ее изменений.....	113
8.6.2.	Влияние устойчивости вероятностного процесса формирования стока на плотность сети.....	115
8.6.3.	Уменьшение роли гидрологических аспектов в действующей онтологии при увеличении водосборной	

площади.....	117
8.6.4. Взаимосвязь расчетных гидрологических характеристик с белыми шумами и метеорологическими структурами синоптического масштаба.....	118
8.6.5. Увеличение роли гидрологических аспектов в эволюционирующей онтологии при уменьшении водосборной площади. Разрыв между реальным состоянием гидрологических объектов и используемыми законами (моделями), описывающими их функционирование.....	119
8.6.6. Особенности оптимизации в горных районах.....	121
8.7. Связь задачи оптимизации сети с вопросами управления гидрологическими процессами.....	122
 9. О существовании периодических решений нелинейных уравнений одномерной гидравлической идеализации и исследовании математических свойств уравнений гидромеханики.....	123
 Заключение (как «работает» философия частично инфинитного моделирования.....	141
 Из рецензии проф. И. Ф. Карасева.....	145
 Ответы автора на замечания рецензента.....	146
 Список литературы.....	148

Монография

Коваленко Виктор Васильевич

**Нелинейные аспекты частично инфинитного моделирования в
эволюционной гидрометеозологии**

Редактор: И. Г. Максимова.

Компьютерный набор и верстка: Н. В. Викторова

ЛР № 020309 от 30.12.96

Подписано в печать

Формат $60 \times 90^{1/16}$ Бумага офсетная.

Печать офсетная.

Печ. л. 9.5

Уч.-изд. л. 10.6

тираж 150

Зак.

195196, СПб, Малоохтинский пр. 98. РГТУ.

Отпечатано ООО "Аркус"