Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Петрова В.В., Бровкина Е.А.

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
РГГМУ
2022

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
П30

Петрова В.В., Бровкина Е.А.
П30 Теоретическая механика в задачах. Учебное пособие / Петрова В.В., Бровкина Е.А. –Санкт-Петербург : РГГМУ, 2022. – 60 с.

ISBN 978-5-86813-550-7

В учебном пособии разобраны основные положения теоретической механики, приведено решение практических задач, варианты контрольной работы.

ISBN 978-5-86813-550-7

Предисловие.

Теоретическая механика является наукой, в которой изучаются перемещения тел (механическое движение) и условия равновесия тел. Она служит базой другим разделам механики – теории упругости, сопротивления материалов, теории пластичности и т.д.

В основе теоретической механики, как и всякой науки, лежат представления и абстракции, отражающие главные черты изучаемых явлений. *Сила* – количественная мера механического воздействия между физическими объектами. Она характеризуется модулем, направлением и точкой приложения, т.е. является вектором. *Материальная точка* – тело, размерами которого в данных условиях задачи можно пренебречь. *Абсолютно твердое тело* – система материальных точек, расстояния между которыми не меняются в процессе движения.

Механика ставит перед собой две основные задачи.

1. Изучение различных движений и обобщение полученных результатов в виде законов движения – законов, с помощью которых может быть предсказан характер движения в каждом конкретном случае.
2. Отыскание общих механических свойств, т.е. общих теорем или принципов, присущих любой системе, независимо от конкретного рода взаимодействий между телами системы.

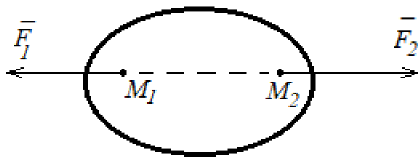
Первую задачу изучает *кинематика* – раздел механики, исследующий движение точек и тел безотносительно к причинам, его вызывающим (возникла из астрономии). Вторую задачу изучает *динамика*; в этом разделе рассматривается движение материальных точек и тел в зависимости от причин движения (возникла из развития промышленности, мореплавания, военного дела). Статика изучает равновесие сил, приложенных к твердым телам, и способы сложения сил (самый старый раздел механики, возник из строительства).

1. Статика.

Статикой называют раздел механики, который рассматривает условия равновесия материальных систем. *Положение равновесия* системы, находящейся под действием данных сил – это положение системы, в котором она может неопределенное время оставаться в покое относительно данной системы отсчета. В основе статики лежит ряд законов.

Закон 1 (закон инерции). Изолированная материальная точка находится в покое либо движется равномерно и прямолинейно.

Закон 2. Две силы, приложенные к твердому телу, называются *уравновешивающимися* только в том случае, если они равны по модулю и направлены в противоположные стороны по общей линии действия.

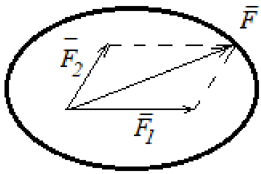


Закон 3. Не нарушая состояния твердого тела, можно добавлять и отбрасывать уравновешивающиеся силы.

Следствие. Не нарушая состояния твердого тела, силу можно переносить по линии её действия в любую точку тела.

Две системы сил называются *эквивалентными*, если одну из них можно заменить другой, не нарушая состояния твердого тела. *Равнодействующая сила* – это сила, эквивалентная данной системе сил.

Закон 4. Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в этой же точке и равна векторной сумме двух сил.

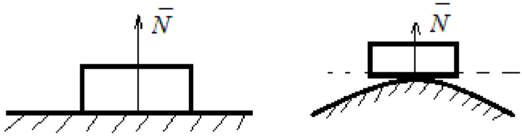


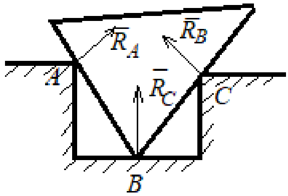
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\left(\widehat{\overrightarrow{F_1},\overrightarrow{F_2}}\right)}.$$

Закон 5 (закон равенства действия и противодействия). Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Эти силы не являются уравновешивающимися, т.к. приложены к разным телам.

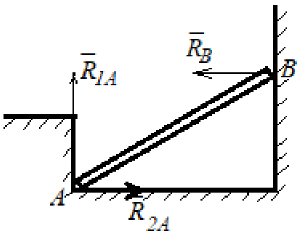
Формулируя статическую задачу, ограничения, которые наложены в задаче на перемещение тела, заменяют приложенными к телу силами. Рассмотрим правила, по которым это делается.

1. Нормальная реакция или реакция опоры. Её направляют перпендикулярно к опоре или перпендикулярно к касательной к опоре. Если в какой-то задаче ни то, ни другое невозможно (например, тело опирается на угол), реакцию опоры направляют перпендикулярно к самому телу.

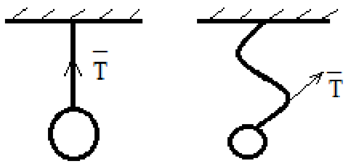




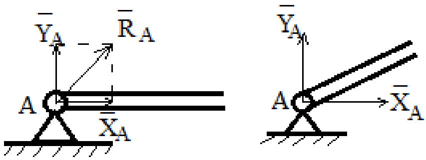
2. Если твердое тело упирается острием в угол (лестница, вид сбоку), то это ограничение следует рассматривать как двойное: угол препятствует движению и в сторону и вниз. Поэтому в общем случае вводят две неизвестных реакции опоры, а затем можно вычислить их равнодействующую, которая является их геометрической суммой.



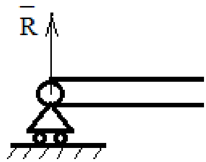
3. Силу натяжения нити обычно направляют вдоль нити, а если это невозможно, то по касательной к ней.



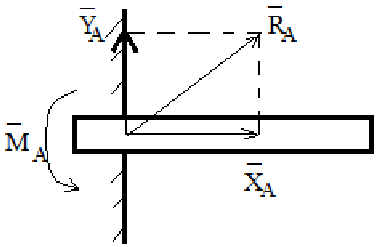
4. Цилиндрический шарнир. Направление реакции здесь не определено, поэтому она представлена двумя взаимно перпендикулярными составляющими.



5. Шарнир на катках. Приведенный рисунок означает, что опора может двигаться влево и вправо. Так что ограничение остается только на перемещение вверх и вниз, соответствующим образом направлена и реакция опоры.

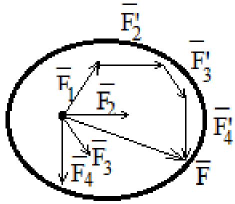


6. Жесткая заделка. Такое ограничение препятствует перемещению и повороту вокруг точки закрепления. Приходится вводить три неизвестных величины: две взаимно перпендикулярные составляющие и момент, препятствующий выкручиванию из заделки. Момент M_A называют *моментом заделки*.



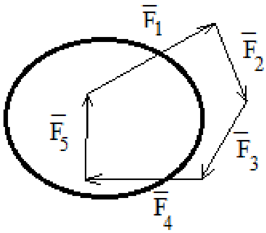
Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке. Равнодействующая такой системы находится путем построения силового многоугольника.

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}.$$



Чтобы тело находилось в покое, надо, чтобы силовой многоугольник был замкнут, $\vec{F} = 0$. В случае плоской задачи это означает наличие двух уравнений для проекций равнодействующей силы.

$$\begin{cases} F_x = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ F_y = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \end{cases}$$



Это система уравнений равновесия для системы сходящихся сил. Задача называется *статически определенной*, если число неизвестных равно числу независимых уравнений равновесия. В противном случае задача называется *статически неопределенной* и не может быть решена одними уравнениями статики.

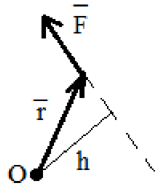
Моментом силы $\vec{F}$ относительно полюса O называют вектор

$$\overrightarrow{m_0}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

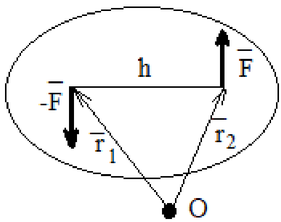
где $\vec{r}$ - радиус-вектор от полюса O до точки приложения силы $\vec{F}$. Из векторной алгебры известно, что модуль векторного произведения

$$\left|\overrightarrow{m_0}(\vec{F})\right| = \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = rF\sin\left(\widehat{\vec{F},\vec{r}}\right) = F \cdot h,$$

где h – *плечо силы*, т.е. кратчайшее расстояние от точки O до линии действия силы. Момент считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг точки O против часовой стрелки, и отрицательным при повороте по часовой стрелке.



Система двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, называется *парой сил*. Расстояние h между линиями действия сил – *плечо пары*. Пара сил вращает тело, вращение характеризуется некоторым моментом. Направлен момент в ту сторону, откуда вращение видится против часовой стрелки.



Согласно приведенному рисунку

$$\vec{M} = -\overrightarrow{r_1} \times \vec{F} + \overrightarrow{r_2} \times \vec{F} = (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) \times \vec{F},$$

$$M = |\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}| \cdot F \cdot \sin\frac{\pi}{2} = F \cdot h.$$

Таким образом, момент пары сил $M = \pm F \cdot h$.

Для равновесия системы пар, лежащих в одной плоскости и приложенных к одному телу, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов равнялась нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n} \pm F_k h_k = 0.$$

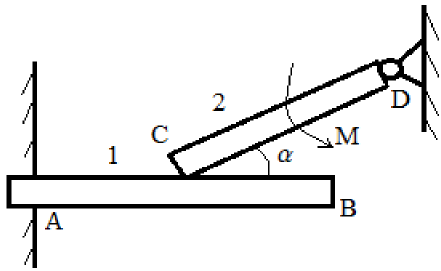
Если на твердое тело действует система параллельных сил, то главный момент в этом случае определяется как алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно выбранного полюса

$$M_0 = \sum_{k=1}^{n} m_0(\vec{F}).$$

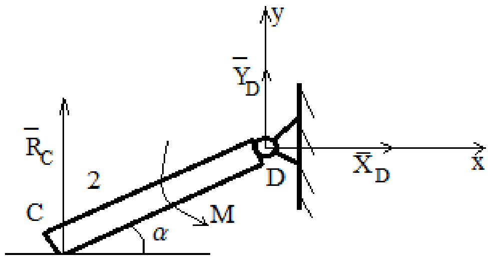
Уравнения равновесия в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} F_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ F_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \\ M_0 = 0. \end{cases}$$

Задача 1. Наклонная под углом α к горизонту балка 2 длины *l*, щарнирно закрепленная в точке *D*, опирается на консольную балку 1. На балку 2 действует пара сил с моментом *M*. Полагая заданными все геометрические параметры конструкции, определить реакции всех опор.



Решение. Рассмотрим сначала балку 2 и нарисуем согласно правилам реакции опор.



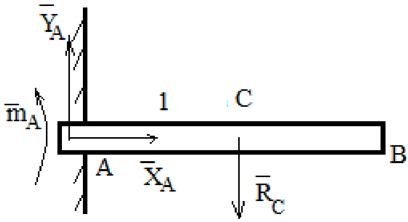
Система уравнений равновесия состоит из трех уравнений: суммарные проекции всех сил на оси *Ox* и *Oy* равны нулю и суммарный момент относительно, например, точки *D*, тоже равен нулю. Тогда можем записать

$$\begin{cases} X_D = 0, \\ Y_D + R_C = 0, \\ M - R_C \cos\alpha \cdot |CD| = 0. \end{cases}$$

Решив это уравнение, получим

$$X_D = 0, \qquad Y_D = -\frac{M}{l\cos\alpha}, \qquad R_C = \frac{M}{l\cos\alpha}.$$

Теперь рассмотрим балку 1 и составим для неё аналогичные уравнения равновесия (суммарный момент возьмем относительно точки *A*).



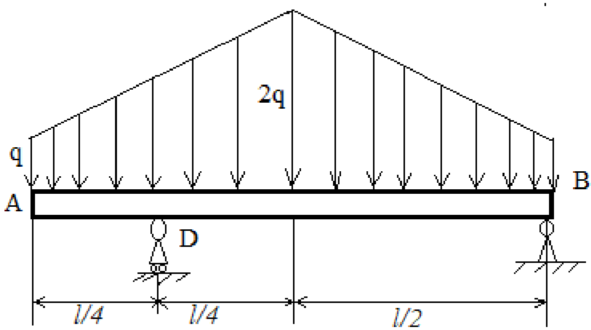
$$\begin{cases} X_A = 0, \\ Y_A - R_C = 0, \\ m_A - R_C \cdot |AC| = 0. \end{cases}$$

Решением этого уравнения являются

$$X_A = 0, Y_A = R_C = \frac{M}{l\cos\alpha}, m_A = \frac{M \cdot |AC|}{l\cos\alpha}.$$

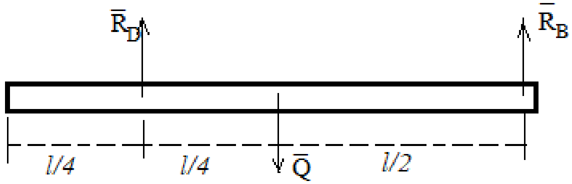
Таким образом, мы определили реакции всех опор.

Задача 2. Балка *AB* длины *l* несет распределенную нагрузку, показанную на рисунке. Интенсивность нагрузки равна *q* Н/м на концах балки *AB* и *2q* Н/м в середине балки. Пренебрегая весом балки, найти реакции опор *D* и *B*.



Решение. Распределенную нагрузку можно заменить одной силой *Q*, численно равной площади фигуры, изображенной на рисунке. Таким образом

$$Q = q \cdot l + \frac{1}{2} q \cdot l = \frac{3}{2} q \cdot l.$$



Следовательно, в данной задаче мы имеем дело с системой параллельных сил, изображенных на рисунке. Система уравнений равновесия состоит из двух уравнений: суммарная проекция всех сил на вертикальную ось равна нулю и суммарный момент относительно, например, точки D, тоже равен нулю. Таким образом, имеем равенства

$$\begin{cases} R_B + R_D - Q = 0, \\ Q \cdot \dfrac{l}{4} - R_B\left(\dfrac{l}{2} + \dfrac{l}{4}\right) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы: $R_B = \frac{Q}{3} = \frac{1}{2} q \cdot l\ H,\ \ R_D = Q - R_B = q \cdot l\ H.$

2. Кинематика. Скорость и ускорение точки в декартовой системе координат. Естественный способ задания движения точки.

Положение точки относительно ортогональной декартовой системы координат $Oxyz$ задается тремя числами $x,\ y,\ z$, которые можно рассматривать как проекции радиус – вектора $\vec{r}$

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Тогда

$$\vec{\imath} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}, \vec{\jmath} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}, \vec{k} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}.$$

Если положение точки задается с помощью радиус – вектора:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k},$$

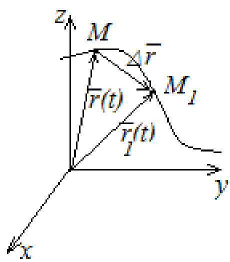
то это *векторный способ задания движения точки*. Если же изменение положения точки с течением времени задается с помощью зависимости координат от времени

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{cases} \qquad (2.1)$$

то это *координатный способ задания движения точки*. Функции f_1, f_2, f_3, очевидно, должны быть однозначными. Мы будем считать их по крайней мере дважды дифференцируемыми. Уравнение (2.1) можно рассматривать как параметрическую форму некоторой пространственной кривой. Функции f_1, f_2, f_3 называются *законами движения точки*.

Траектория точки – это геометрическое место последовательных положений движущейся точки в данной системе отсчета.

Пусть за время Δt точка перешла из положения M в положение M_1.



Тогда $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ - *средняя скорость* за промежуток времени Δt. А *скорость* точки в данный момент времени

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

(точкой сверху в теоретической механике обозначают производную по времени). Поскольку радиус-вектор

$\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$, то производную по времени можно вычислить как производную сложной функции следующим образом

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}.$$

Таким образом, получаем формулы для проекций вектора скорости на оси координат

$$v_x = \dot{x}, \qquad v_y = \dot{y}, \qquad v_z = \dot{z}.$$

А модуль вектора скорости, соответственно, вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Аналогично, для ускорения точки в данный момент времени

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k},$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Существует другой способ задания движения. Некоторую точку O на траектории примем за начало отсчета некоторой *дуговой координаты* s. Необходимо также задать положительное направление отсчета этой координаты. Задание траектории точки, т.е. $\vec{r}(s)$ и закона движения по ней $s = f(t)$ называется *естественным способом задания движения*. При этом

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta s}\cdot\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}.$$

Вектор $\Delta\vec{r}/\Delta s$ направлен по касательной к кривой в точке M в сторону возрастания дуговой координаты. Так как $|\Delta\vec{r}|$ и $|\Delta s|$ являются эквивалентными бесконечно малыми, то

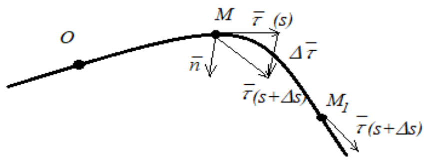
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

- *единичный касательный вектор*. В этом случае формула для скорости дает

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau}. \qquad (2.2)$$

Аналогичным образом, если продифференцировать формулу (2.2), получим формулу для ускорения.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{s}\vec{\tau})}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$



$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\vec{\tau}(s+\Delta s) - \vec{\tau}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s} = K \cdot \vec{n},$$

где $\vec{n}$ – *вектор нормали* к траектории в точке M единичной длины. Поскольку мы не можем гарантировать, что $|d\vec{\tau}/dt| = 1$, вектор $\vec{n}$ умножен на некоторую константу K. K называют *кривизной кривой*. Обычно вводят также величину

$$\rho = \frac{1}{K},$$

которую называют *радиусом кривизны*. Геометрический смысл кривизны кривой: при $K \neq 0$ траектория движения в окрестности рассматриваемой точки может быть аппроксимирована дугой окружности радиуса ρ. При $K = 0$ радиус кривизны $\rho = \infty$ и точка движется по окружности бесконечного радиуса, т.е. по прямой.

Таким образом, в приведенных обозначениях формула для ускорения имеет вид

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}$$

и вектор ускорения имеет две составляющие: по касательной к кривой и по нормали к кривой. Итак, мы имеем два орта: вектор $\vec{\tau}$ и вектор $\vec{n}$. Третий орт $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ называется *вектором бинормали*. Эти три орта образуют так называемый *трехгранник Френе*. Через вектора $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ проходит *соприкасающаяся плоскость*, через $\vec{n}$, $\vec{b}$ - *нормальная плоскость*, через $\vec{b}$, $\vec{\tau}$ - *спрямляющая плоскость*. Трехгранник Френе отличается от обычной декартовой системы координат тем, что он движется вместе с рассматриваемой точкой по траектории с течением времени.

Итак, для скорости и ускорения можем записать следующие формулы для их проекций на естественные оси координат

$$v_\tau = \dot{s}, \qquad v_n = v_b = 0,$$
$$a_\tau = \ddot{s} \text{ - } \textit{касательное ускорение},$$
$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} - \textit{нормальное ускорение},$$
$$a_b = 0.$$

Пусть нам заданы скорость и ускорение в декартовых координатах. Запишем формулы для перехода к естественной системе координат. Единичный касательный вектор можно найти с помощью вектора скорости

$$\vec{\tau} = \pm \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Знак «плюс» ставится, если вектор скорости направлен в сторону возрастания дуговой координаты, а знак «минус» в противоположном случае. Далее можно найти касательное и нормальное ускорение, а также радиус кривизны.

$$a_\tau = \vec{a} \cdot \vec{\tau}, \qquad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}, \qquad \vec{n} = \frac{\overrightarrow{a_n}}{|\vec{a}_n|}, \qquad \rho = \frac{v^2}{a_n}.$$

Задача 1. Закон движения точки задан в виде

$$x = a\cos\omega t\,, \qquad y = b\sin\omega t\,, \qquad z = 0,$$

где a,b, ω – константы. Определить траекторию точки, ее скорость и ускорение.

Решение. Для нахождения траектории из уравнений движения необходимо исключить время t. Поскольку

$$\cos\omega t = \frac{x}{a}, \qquad \sin\omega t = \frac{y}{b},$$

то по основному тригонометрическому тождеству

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

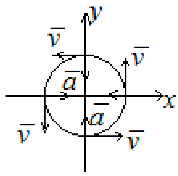
и в качестве траектории получаем уравнение эллипса. Для определения скорости и ускорения вычисляем первые и вторые производные от координат.

$$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t\,, \qquad \dot{y} = b\omega\cos\omega t,$$
$$\ddot{x} = -a\omega^2\cos\omega t\,, \qquad \ddot{y} = -b\omega^2\sin\omega t.$$

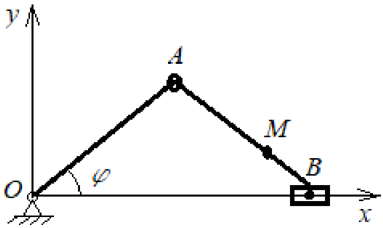
Таким образом,

$$v_x = -\frac{a}{b}\omega y, \qquad v_y = \frac{b}{a}\omega x,$$
$$a_x = -\omega^2 x, \qquad a_y = -\omega^2 y,$$
$$v = \omega\sqrt{\frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2}, a = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Если $a = b = R$,точка движется по окружности со скоростью $v = \omega R$ и ускорением $a = \omega^2 R$.



Задача 2. Найти траекторию точки M кривошипно-ползунного механизма, если $|OA| = |AB| = l$, $|MB| = l/3$, $\varphi = \omega t$, а также определить скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки в момент, когда $\varphi = 0$.



Решение. Из приведенного рисунка очевидно, что координаты точки M

$$x = l\cos\varphi + \frac{2}{3}l\cos\varphi = \frac{5}{3}l\cos\varphi = \frac{5}{3}l\cos\omega t,$$

$$y = \frac{l}{3}\sin\varphi = \frac{l}{3}\sin\omega t.$$

Таким образом, можно выразить

$$\cos\omega t = \frac{3x}{5l}, \quad \sin\omega t = \frac{3y}{l}.$$

А используя основное тригонометрическое тождество, можем записать уравнение траектории

$$\left(\frac{x}{5l/3}\right)^2 + \left(\frac{y}{l/3}\right)^2 = 1,$$

которая является эллипсом с центром в начале координат.

Составляющие скоростей и ускорений можем вычислить с помощью дифференцирования.

$$v_x = \dot{x} = -\frac{5}{3}l\omega\sin\omega t\,, \qquad v_y = \dot{y} = \frac{l}{3}\omega\cos\omega t,$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\frac{25}{9}(l\omega\sin\omega t)^2 + \frac{l^2}{9}(\omega\cos\omega t)^2}$$

$$= \frac{l\omega}{3}\sqrt{24(\sin\omega t)^2 + 1}.$$

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{5}{3}l\omega^2\cos\omega t\,, \qquad a_y = \ddot{y} = -\frac{l}{3}\omega^2\sin\omega t,$$

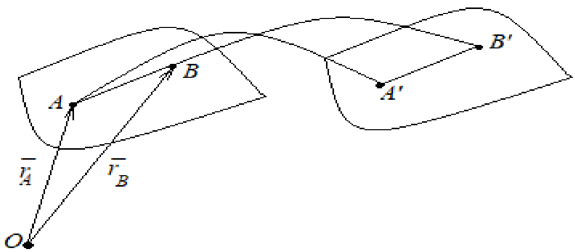
$$a = \sqrt{\frac{25}{9}(l\omega^2 \cos \omega t)^2 + \frac{l^2}{9}(\omega^2 \sin \omega t)^2}$$
$$= \frac{\omega^2 l}{3}\sqrt{24(\cos \omega t)^2 + 1}.$$
При $\varphi = 0$, очевидно
$$v_x = 0, \qquad v_y = v = \frac{\omega l}{3}, \qquad a_x = -\frac{5}{3} l\omega^2, \qquad a_y = 0.$$
Далее, используя приведенные выше формулы, можем найти касательное и нормальное ускорение.
$$a_\tau = \vec{a} \cdot \vec{\tau} = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{a_x \cdot v_x + a_y \cdot v_y}{v} = 0,$$
$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = a = \frac{5\omega^2 l}{3}.$$
А зная нормальное ускорение, можем определить и радиус кривизны.
$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{l^2\omega^2}{9}\frac{3}{5\omega^2 l} = \frac{l}{15}.$$

3. Поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси. Сложное движение точки.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во все время движения параллельной своему первоначальному положению. Для поступательного движения можно доказать следующее утверждение.

Теорема. При поступательном движении твердого тела траектории, скорости и ускорения точек тела одинаковы.

Доказательство.



Из приведенного рисунка очевидно, что $\overrightarrow{r_B}(t) = \overrightarrow{r_A}(t) + \overrightarrow{AB}$ для любого t, причем $\overrightarrow{AB}$ – постоянный вектор. Дифференцируя это равенство по времени, получим

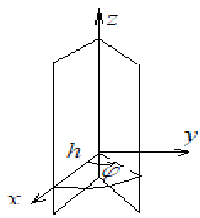
$$\frac{d\overrightarrow{r_B}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt}, \qquad \frac{d^2\overrightarrow{r_B}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{r_A}}{dt^2}.$$

А это и означает, что скорости и ускорения любых двух точек тела одинаковы. Теорема доказана.

Таким образом, для задания поступательного движения твердого тела достаточно задать движение одной из его точек. Уравнения поступательного движения твердого тела имеют вид

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ z_A = z_A(t). \end{cases}$$

При *вращении твердого тела вокруг неподвижной оси* точки, лежащие на оси вращения, неподвижны, а остальные описывают окружности с центрами, лежащими на оси вращения.



Дуговая координата любой точки, движущейся по окружности, определяется формулой

$$s = s_0 + h\varphi,$$

где s_0 – начальное значение дуговой координаты, h – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения, φ – угол поворота твердого тела вокруг оси в радианах. Зависимость $\varphi = \varphi(t)$ называется *уравнением вращения* твердого тела вокруг неподвижной оси.

Угловая скорость твердого тела характеризует быстроту изменения угла поворота твердого тела. Это вектор $\vec{\omega}$, направленный по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки. По абсолютной величине $\omega = |\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$. Единицы измерения: рад/с.

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости. Это вектор $\vec{\varepsilon}$, совпадающий по направлению с направлением угловой скорости, если вращение ускоренное, и направленный прямо противоположно угловой скорости, если вращение замедленное. По модулю $\varepsilon = |\vec{\varepsilon}| = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Единицы измерения: $\text{рад}/\text{с}^2$.

Если $\omega = \text{const}$, то вращение называется *равномерным* и происходит по закону

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Если $\varepsilon = \text{const}$, то вращение называется *равнопеременным* (*равноускоренным* или *равнозамедленным*) и происходит согласно уравнениям

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

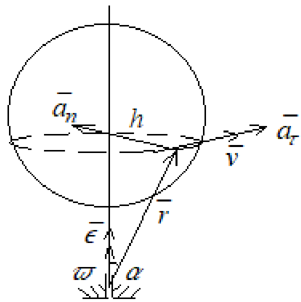
Если же нас интересуют обычные, линейные скорость и ускорение вращающегося твердого тела, то для них выводятся приведенные ниже формулы.

$$v_\tau = \dot{s} = \frac{d}{dt}(s_0 + h\varphi) = h\dot{\varphi} = \omega h,$$

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{\omega} h = \varepsilon h, \qquad a_n = \frac{v^2}{h} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Касательное и нормальное ускорения при вращающемся движении называются также *вращательным* и *центростремительным*.



Из приведенного рисунка видно, что модуль скорости $v = \omega h = \omega r \sin\alpha$ совпадает с модулем векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Направление скорости тоже совпадает с направлением этого векторного произведения. Поэтому

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

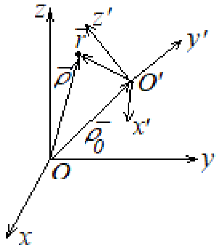
Эта формула называется *формулой Эйлера*. Исходя из нее, можем записать для ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Таким образом, получается, что

$$\overrightarrow{a_\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \overrightarrow{a_n} = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Пусть теперь даны две системы отсчета: неподвижная *Oxyz* и подвижная $Ox'y'z'$.



Движение точки M относительно системы $Ox'y'z'$ называется *относительным* (скорость и ускорение этого движения обозначают $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{a_r}$), а относительно *Oxyz* – *абсолютным* (со скоростями $\overrightarrow{v_a}$, $\overrightarrow{a_a}$). Движение системы $Ox'y'z'$ в системе *Oxyz* называется *переносным* движением (его скорость и ускорение обозначают $\overrightarrow{v_e}$, $\overrightarrow{a_e}$). Движение точки М называют еще *сложным* движением, т.к. оно является суммой относительного и переносного движений. Радиус-вектор в неподвижной системе координат обозначим $\vec{\rho}$, в подвижной системе координат $\vec{r}$. Очевидно, что

$$\vec{\rho} = \overrightarrow{\rho_0} + \vec{r},$$

где $\overrightarrow{\rho_0}$ – радиус-вектор, соединяющий начала подвижной и неподвижной систем координат.

Пусть нам надо определить скорость и ускорение. Проще всего это сделать для переносного движения.

$$\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r},$$

$$\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{\varepsilon_e} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{\varepsilon_e} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega_e} \times (\overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r}),$$

где $\overrightarrow{\omega_e}$ – угловая скорость поворота подвижной системы координат относительно неподвижной, $\overrightarrow{\varepsilon_e} = \dot{\overrightarrow{\omega_e}}$.

Займемся теперь вычислением скорости и ускорения абсолютного движения. Очевидно, что

$$\overrightarrow{v_a} = \dot{\vec{\rho}} = \dot{\overrightarrow{\rho_0}} + \dot{\vec{r}} = \overrightarrow{v_0} + \dot{\vec{r}}.$$

Поскольку $\vec{r} = x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} + z'\overrightarrow{k'}$, то

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}'\vec{i'} + \dot{y}'\vec{j'} + \dot{z}'\vec{k'} + x'\dot{\vec{i'}} + y'\dot{\vec{j'}} + z'\dot{\vec{k'}}$$
$$= \vec{v_r} + x'\dot{\vec{i'}} + y'\dot{\vec{j'}} + z'\dot{\vec{k'}}.$$
Можно вывести формулы, в соответствии с которыми
$$\dot{\vec{i'}} = \vec{\omega_e} \times \vec{i'}, \qquad \dot{\vec{j'}} = \vec{\omega_e} \times \vec{j'}, \qquad \dot{\vec{k'}} = \vec{\omega_e} \times \vec{k'}.$$
Тогда
$$\dot{\vec{r}} = \vec{v_r} + \vec{\omega_e} \times \left(x' \cdot \vec{i'} + y' \cdot \vec{j'} + z' \cdot \vec{k'}\right) = \vec{v_r} + \vec{\omega_e} \times \vec{r}$$
и можем записать
$$\vec{v_a} = \vec{v_0} + \vec{v_r} + \vec{\omega_e} \times \vec{r} = \vec{v_r} + \vec{v_e}.$$
Последнее равенство носит название *теоремы сложения скоростей*.

Формулу, аналогичную формуле для радиус-вектора $\vec{r}$, можно вывести и для любого вектора $\vec{a}$, изучаемого в двух системах координат. Если $\vec{a} = a_x{}'\vec{i'} + a_y{}'\vec{j'} + a_z{}'\vec{k'}$, то
$$\dot{\vec{a}} = \dot{a_x}'\vec{i'} + \dot{a_y}'\vec{j'} + \dot{a_z}'\vec{k'} + a_x{}'\dot{\vec{i'}} + a_y{}'\dot{\vec{j'}} + a_z{}'\dot{\vec{k'}}$$
$$= \dot{a_x}'\vec{i'} + \dot{a_y}'\vec{j'} + \dot{a_z}'\vec{k'} + \vec{\omega_e} \times \vec{a}.$$
В сокращенном виде это можно записать
$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d'\vec{a}}{dt} + \vec{\omega_e} \times \vec{a},$$
где ${d\vec{a}}/{dt}$ – *полная* или *абсолютная производная по времени*, т.е. производная в неподвижной системе координат, ${d'\vec{a}}/{dt}$ – *локальная* или *относительная производная по времени*, т.е. производная в подвижной системе координат. Введя такие обозначения, можем записать для абсолютного ускорения следующее.

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r} + \overrightarrow{v_r})$$
$$= \frac{d\overrightarrow{v_0}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{\omega_e}}{dt} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}.$$

Поскольку

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r},$$
$$\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} = \frac{d'\overrightarrow{v_r}}{dt} + \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_r},$$

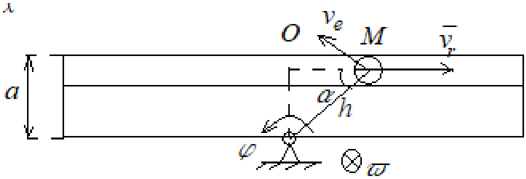
то подставляя эти выражения в формулу для ускорения, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_0} + \overrightarrow{\varepsilon_e} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega_e} \times (\overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r}) + \overrightarrow{a_r} + 2\overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_r}.$$

Первые три слагаемых в правой части формулы представляют собой переносное ускорение, а последнее слагаемое обозначают $\overrightarrow{a_c}$ и называют *ускорением Кориолиса*. Таким образом, мы получаем *теорему сложения ускорений*

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}.$$

Задача. Найти абсолютные скорость и ускорение точки *M* в момент *t=2 с*, если в начальный момент времени точка находилась в положении *O*, $s = OM = 12\sin\frac{\pi t}{8}$, a=6 *см*, $\varphi = 0.2t - 0.3t^2$.



Решение. Определим сначала положение точки в нужный нам момент времени.

$$s|_{t=2} = 12\sin\frac{\pi}{4} = 6\sqrt{2} \text{ см}.$$

Из заданного уравнения движения точки *M* легко определить относительную скорость

$$v_r = \dot{s} = 12\cos\frac{\pi t}{8}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{8},$$

$$v_r|_{t=2} = \frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\ \text{см/с}.$$

Переносная же скорость определяется по формуле $v_e = \omega h$, в которой предварительно надо вычислить каждый из множителей.

$$\omega = \dot{\varphi} = 0.2 - 0.6t, \qquad \omega|_{t=2} = 0.2 - 1.2 = -1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Знак угловой скорости показывает, что она направлена от нас перпендикулярно плоскости рисунка. Расстояние h определяется по теореме Пифагора.

$$h = \sqrt{a^2 + s^2} = \sqrt{36 + 36.2} = 6\sqrt{3}\ \text{см}.$$

Таким образом, $v_e = 6\sqrt{3}\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$. Осталось сложить относительную и переносную скорость для вычисления абсолютной скорости. Согласно чертежу, относительная и переносная скорости складываются по теореме косинусов, т.к. угол между ними $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

$$\begin{aligned} v_a &= \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)} \\ &= \sqrt{v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e \sin\alpha} \\ &= \sqrt{v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e \frac{a}{h}} = 8.894\,\frac{\text{см}}{\text{с}}. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к вычислению ускорений. Относительное ускорение легко определить из уравнения движения.

$$a_r = \ddot{s} = -\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{8}\cdot\frac{\pi}{8} = -\frac{3\pi^2}{16}\sin\frac{t}{8},$$

$$a_r|_{t=2} = -3\,\frac{\pi^2}{16}\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{3\sqrt{2}\pi^2}{32}.$$

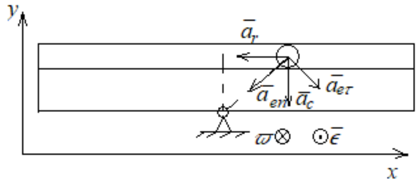
Для переносного ускорения можем записать $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_{e\tau}} + \overrightarrow{a_{en}}$, каждое из слагаемых нужно считать отдельно по своей формуле.

$$a_{e\tau} = \varepsilon h, \qquad \varepsilon = \ddot{\varphi} = \dot{\omega} = -0.6,$$
$$a_{e\tau} = 0.6 \cdot 6\sqrt{3} = 3.6\sqrt{3}\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$
$$a_{en} = \omega^2 h = 1 \cdot 6\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Вычислим теперь величину ускорения Кориолиса.

$$a_c = 2\omega v_r \sin(\vec{\omega}, \vec{v_r}) = 2 \cdot 1 \cdot \frac{3\sqrt{2}\pi}{4} \cdot 1 = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Таким образом, абсолютное ускорение $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_{e\tau}} + \overrightarrow{a_{en}} + \overrightarrow{a_c}$. Нанесем вектора на рисунок и для простоты вычислений спроектируем на оси координат.



$$a_{ax} = -a_r + a_{e\tau}\sin\alpha - a_{en}\cos\alpha = -a_r + a_{e\tau}\frac{a}{h} - a_{en}\frac{s}{h}$$
$$= -6.194\ \text{см/с}^2,$$
$$a_{ay} = -a_{e\tau}\cos\alpha - a_{en}\sin\alpha - a_c = -17.755\ \text{см/с}^2.$$

Тогда величина абсолютного ускорения вычисляется по теореме Пифагора.

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = 18.804\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

4. Динамика.

В кинематике речь в основном шла о движении геометрических объектов, теперь перейдем к рассмотрению движения материальных тел. Основной характеристикой тел является их *масса*. Единица измерения: *кг*. Пусть тело движется поступательно со скоростью $\vec{v}$. Если его масса m, то $m\vec{v}$ - *количество* *движения* тела. Это векторная величина, совпадающая по направлению со скоростью. Единица измерения: $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$.

Характер движения тела зависит еще и от внешних условий. Эти условия, заставляющие тело изменять свое движение, называются силами. Ввести в механику силы мы можем только с помощью некоторых положений, каковыми являются законы Ньютона.

Первый закон Ньютона (закон инерции): если на тело не действуют силы, то оно находится в покое или движется прямолинейно и равномерно. Этот закон позволяет определить, когда на тело действует сила.

Второй закон Ньютона (об ускорении и силе): сила является векторной величиной, совпадающей по направлению с ускорением и при этом равная произведению массы тела на ускорение.

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Если на тело действует несколько сил, то $\vec{F}$ - их геометрическая сумма. Второй закон позволяет вычислять силы. Сила характеризуется точкой приложения, модулем и направлением.

Третий закон Ньютона (о действии и противодействии): источником силы $\vec{F}$, действующей на тело массы m, служит некоторое другое тело массы m_1, на которое действует сила $\overrightarrow{F_1}$, равная по модулю, но противоположная по направлению силе $\vec{F}$.

$$\overrightarrow{F_1} = -\vec{F}.$$

Силу $\vec{F}$ называют *действием*, а $\overrightarrow{F_1}$ - *противодействием*. Этот закон позволяет определить источник каждой силы. Ведь если тело движется, то подразумевается, что около него находятся и другие тела. Если бы тело было одно, то не было бы оснований считать, что оно движется.

Основное уравнение динамики $m\vec{a} = \vec{F}$ называют еще *уравнением движения* точки в векторной форме. Оно эквивалентно трем скалярным дифференциальным уравнениям движения. В декартовой системе координат эти уравнения записываются в виде

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x, \\ m\ddot{y} = F_y, \\ m\ddot{z} = F_z. \end{cases}$$

Сила, действующая на частицу, может зависеть от времени, положения частицы и ее скорости: $\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. *Прямая задача динамики* состоит в том, чтобы по данному закону движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$ найти силу $\vec{F}$. Эта задача решается просто: надо продифференцировать $\vec{r}$ два раза и подставить в уравнение динамики. *Обратная задача динамики*: известной является сила $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$ и начальные условия $\overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{v_0}$ в момент времени t_0; требуется найти $\vec{r} = \vec{r}(t)$. В этой задаче требуется решать дифференциальные уравнения движения.

<u>Примеры решения основных задач</u>. Рассмотрим простейший случай прямолинейного движения частицы вдоль оси *Ox*. Т.е. уравнение траектории имеет вид

$$\begin{cases} y = \text{const}, \\ z = \text{const} \end{cases}$$

и, следовательно, необходимо положить $F_y = 0, F_z = 0$. Но этого условия недостаточно, т.к. дифференциальные уравнения $\ddot{y} = 0, \ddot{z} = 0$ имеют решения

$$y = at + \alpha, \qquad z = bt + \beta,$$

где

$$\dot{y}|_{t=t_0} = a = \dot{y}_0, \qquad \dot{z}|_{t=t_0} = b = \dot{z}_0.$$

Следовательно, траектория частицы будет прямолинейной, если сила, приложенная к ней, имеет постоянное направление и начальная скорость параллельна этому направлению. В виде формул это можно записать

$$\begin{cases} F_y = 0, F_z = 0, \\ \dot{y}_0 = 0, \dot{z}_0 = 0. \end{cases}$$

Тогда в проекции на ось Ox основное уравнение динамики имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad F_x = F_x(t, x, \dot{x}).$$

Рассмотрим некоторые случаи решения этого уравнения.

1. *Движение под действием силы, зависящей лишь от времени*. Если $F_x = F_x(t)$, то уравнение решается простым интегрированием. Пример: *прямолинейное движение весомой частицы*. Если ось Ox направить вертикально вниз, то

$$m\ddot{x} = m\mathrm{g}, \qquad \ddot{x} = \mathrm{g}.$$

Проинтегрируем это уравнение первый раз и найдем произвольную постоянную из начальных условий.

$$\dot{x} = \mathrm{g}t + C_1, \qquad v_0 = \mathrm{g}t_0 + C_1, \qquad C_1 = v_0 - \mathrm{g}t_0.$$

Подставив произвольную постоянную в дифференциальное уравнение, можем записать

$$\dot{x} = \mathrm{g}(t - t_0) + v_0.$$

Проинтегрировав это уравнение второй раз и найдя произвольную постоянную, получим уравнение прямолинейного движения частицы под действием силы тяжести.

$$x = v_0 t + \frac{\mathrm{g}(t - t_0)^2}{2} + C_2,$$

$$x_0 = v_0 t_0 + C_2, \qquad C_2 = x_0 - v_0 t_0,$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{\mathrm{g}(t - t_0)^2}{2}.$$

2. *Движение под действием силы, зависящей лишь от положения частицы*. Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\ddot{x} = f(x).$$

Чаще всего это уравнение решается как уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Но есть и другой способ: умножение обеих частей равенства на тождество $\dot{x}dt = dx$. Тогда получим

$$\dot{x}\ddot{x}dt = f(x)dx$$

и можем в левой чисти равенства произвести внесение под знак дифференциала и затем проинтегрировать уравнение.

$$\dot{x}d(\dot{x}) = f(x)dx,$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \int f(x)dx = \varphi(x) + C,$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2\varphi(x) + C}.$$

Далее применяется метод разделения переменных.

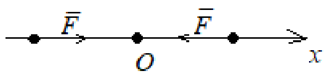
Пример: *прямолинейное движение частицы под действием силы притяжения к неподвижному центру прямо пропорционально расстоянию*. Если коэффициент пропорциональности принять равным k^2m, то модуль силы притяжения к неподвижному центру можно записать в виде

$$F = k^2mr,$$

где r – расстояние от частицы до начала координат, т.е. до центра притяжения. В проекции на ось *Ox* $F_x = \pm k^2mx$, а поскольку угол между силой притяжения и осью равен π, получим дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x} = -k^2mx$$

или $\ddot{x} + k^2x = 0$.



Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение, как известно, получается из решения квадратного характеристического уравнения. В нашем случае

$$x(t) = C_1\cos kt + C_2\sin kt.$$

Тогда $\dot{x}(t) = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt$. Пусть при *t=0* $x = x_0$ $v = v_0$. Тогда, подставляя начальные условия в формулы для координаты и скорости, получим

$$x_0 = C_1, v_0 = C_2 k.$$

И, следовательно, $C_1 = x_0$, $C_2 = v_0/k$. Таким образом,

$$x(t) = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

3. *Движение под действием силы, зависящей лишь от скорости частицы*. Пусть

$$m\ddot{x} = f(\dot{x}).$$

Тогда можно разделить переменные и проинтегрировать уравнение первый раз.

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = f(\dot{x}),$$

$$\frac{m}{f(\dot{x})} d\dot{x} = dt, \qquad \varphi(\dot{x}) = t + C_1.$$

Если это уравнение удастся разрешить и записать в виде $\dot{x} = \vartheta(t + C_1)$, то можно еще раз разделить переменные и проинтегрировать второй раз.

$$\frac{dx}{dt} = \vartheta(t + C_1), \qquad dx = \vartheta(t + C_1)dt,$$

$$x = \int \vartheta(t + C_1)dt = \sigma(t + C_1) + C_2.$$

Если же этот способ не годится (нельзя выразить $\dot{x}$), то можно решить дифференциальное уравнение с помощью домножения на тождество $\dot{x}dt = dx$. Тогда тоже можно провести разделение переменных и интегрирование.

$$m\dot{x}\ddot{x}dt = f(\dot{x})dx,$$

$$\frac{m\dot{x}d(\dot{x})}{f(\dot{x})} = dx, \qquad \delta(\dot{x}) = x + C_3.$$

Допустим, в полученном уравнении удастся выразить $\dot{x}$. Тогда можно проинтегрировать вторично.

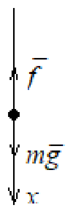
$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \mu(x + C_3), \qquad \frac{dx}{\mu(x + C_3)} = dt,$$
$$\Omega(x + C_3) = t + C_4.$$

Если же и этим способом не удается выразить $\dot{x}$, то можно использовать оба способа и из полученных половинок решений составить систему

$$\begin{cases} \varphi(\dot{x}) = t + C_1, \\ \delta(\dot{x}) = x + C_3. \end{cases}$$

В этой системе уравнения дополняют друг друга, т.к. первое описывает зависимость скорости от времени, а второе – от координаты.

Пример: *прямолинейное движение весомой частицы в среде, сопротивляющейся пропорционально первой степени скорости*. Пусть на падающую частицу, помимо силы тяжести, действует еще сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости с коэффициентом пропорциональности k^2m. Тогда, если ось *Ox* направить вниз, дифференциальное уравнение движения запишется следующим образом:



$$m\ddot{x} = m\mathrm{g} - k^2 m\dot{x}.$$

Его легко можно решить с помощью разделения переменных.

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \mathrm{g} - k^2\dot{x}, \qquad \frac{d\dot{x}}{\mathrm{g} - k^2\dot{x}} = dt,$$
$$-\frac{1}{k^2}\ln|\mathrm{g} - k^2\dot{x}| = t + C_1, \qquad \mathrm{g} - k^2\dot{x} = C_1 e^{-k^2 t}.$$

Пусть при t=0 $v = v_0$. Тогда $C_1 = \text{g} - k^2 v_0$ и можем записать

$$\text{g} - k^2\dot{x} = (\text{g} - k^2 v_0)e^{-k^2 t}.$$

Выразим скорость и снова разделим переменные.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{\text{g}}{k^2} - \left(\frac{\text{g}}{k^2} - v_0\right)e^{-k^2 t},$$

$$dx = \left[\frac{\text{g}}{k^2} - \left(\frac{\text{g}}{k^2} - v_0\right)e^{-k^2 t}\right]dt,$$

$$x = \frac{\text{g}}{k^2}t - \left(\frac{\text{g}}{k^2} - v_0\right)\left(-\frac{1}{k^2}\right)e^{-k^2 t} + C_2.$$

Если при t=0 $x = x_0$, то легко вычислить, что $C_2 = x_0 - \frac{1}{k^2}\left(\frac{\text{g}}{k^2} - v_0\right)$, и таким образом получим ответ

$$x = x_0 + \frac{\text{g}}{k^2}t + \frac{1}{k^2}\left(\frac{\text{g}}{k^2} - v_0\right)\left(e^{-k^2 t} - 1\right).$$

Основные законы динамики. Если предположить, что у материальной точки m=const, то второй закон Ньютона можем записать в виде

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

и таким образом

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}.$$

Это и есть *теорема об изменении количества движения для материальной точки*. В координатном виде это векторное равенство даст нам систему из трех скалярных равенств.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z. \end{cases}$$

Можно записать этот закон в другой форме, если сначала домножить на dt $(d(m\vec{v}) = \vec{F}dt)$, а потом проинтегрировать по времени от некоторого начального момента до конечного. Тогда получим

$$m\vec{v} - m\overrightarrow{v_0} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt.$$

Правая часть этого равенства называется *импульсом силы* за промежуток времени (t_0, t). Таким образом равенство показывает, что изменение количества движения за некоторый промежуток времени равно импульсу силы за этот промежуток времени.

Домножим равенство второго закона Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ слева и справа скалярно на элементарное перемещение $d\vec{r}$.

$$m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Левую часть равенства можно преобразовать

$$m\vec{a} \cdot d\vec{r} = m\frac{d\vec{v}}{dt}d\vec{r} = m\frac{d\vec{r}}{dt}d\vec{v} = m\vec{v}d\vec{v} = d\left(m\frac{v^2}{2}\right),$$

$$d\left(m\frac{v^2}{2}\right) = \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

Величина $m\frac{v^2}{2}$ называется *кинетической энергией* частицы. А в правой части равенства стоит так называемая *работа силы на элементарном перемещении* или *элементарная работа*.

$$d'A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Штрих у дифференциала ставится для того, чтобы показать, что элементарная работа не является, вообще говоря, полным дифференциалом. Полная работа силы $\vec{F}$ определяется по формуле

$$A = \int\limits_l \vec{F} \cdot d\vec{r},$$

где l – путь, который частица прошла за время (t_0, t). Величина A называется *работой* силы $\vec{F}$ на пути l.

Таким образом,

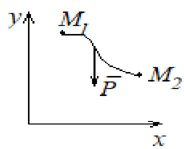
$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A(\vec{F}).$$

Это *закон изменения кинетической энергии*. В правой части равенства стоит работа, которую совершила сила $\vec{F}$ в промежуток времени от t_0 до t.

Если на тело действует несколько сил, то в правых частях закона изменения количества движения и закона изменения кинетической энергии стоят суммы импульсов сил и работ. Каждое слагаемое соответствует импульсу силы или работе, проделанной одной из сил в рассматриваемый промежуток времени.

Примеры вычисления работы.

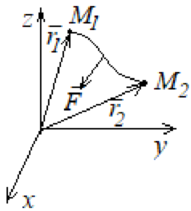
1. Работа силы тяжести. $\vec{P}(0, 0, -mg)$,



$$A = \int\limits_{M_1 M_2} P_x dx + P_y dy + P_z dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} (-mg) dz = mg(z_1 - z_2) = \pm mgh,$$

где h - перемещение точки по оси z.

2. Работа силы притяжения к неподвижному центру. $\vec{F} = -c\vec{r} = (-cx, -cy, -cz)$.



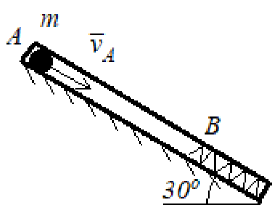
$$A = -c \int\limits_{M_1M_2} xdx + ydy + zdz = -c \int\limits_{M_1M_2} d\left(\frac{x^2+y^2+z^2}{2}\right)$$
$$= -\frac{c}{2}(r_2^2 - r_1^2).$$

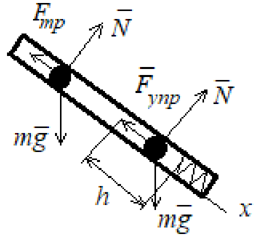
В частности, для работы силы упругости можем записать

$$A = -\frac{c}{2}(\lambda_2^2 - \lambda_1^2),$$

где λ_1, λ_2 – деформации пружины в начальном и конечном положениях.

Задача. Шарик массы $m = 0{,}5$ кг движется из положения A внутри прямой трубки, образующей угол 30° к горизонту. Шарик опускается на пружину, прикрепленную к концу трубки. От действия упавшего шарика пружина сжимается на величину h. Определить скорость шарика в точке B и наибольшее сжатие пружины h, если известны: $v_A = 3$ м/с – начальная скорость шарика, $\tau = 0{,}5$ с – время движения на участке AB, f – коэффициент трения скольжения шарика по стенке трубки, c – коэффициент жесткости пружины.





Решение. Скорость шарика в положении B найдем, применив на участке AB теорему об изменении количества движения материальной точки. К точке приложена сила тяжести $m\vec{g}$, реакция стенки трубки $\vec{N}$ и сила трения $\overrightarrow{F_{\text{тр}}}$:

$$F = f \cdot N = f \cdot mg\cos 30^\circ.$$

Проведем ось Ax вдоль оси трубки и запишем закон изменения количества движения в проекции на эту ось:

$$mv_A - mv_B = mg\sin 30^\circ \cdot \tau - fmg\cos 30^\circ \cdot \tau,$$

откуда

$$v_B = v_A + g\tau(\sin 30^\circ - f\cos 30^\circ) \approx 6{,}19\ \text{м/с}.$$

Для определения максимального сжатия h пружины применим на участке BD теорему об изменении кинетической энергии. На этом участке на шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$, реакция стенки трубки $\vec{N}$, сила трения $\overrightarrow{F_{\text{тр}}}$ и сила упругости $\overrightarrow{F_{\text{упр}}}$. Следовательно,

$$\frac{mv_D^2}{2} - \frac{mv_B^2}{2} = -\frac{ch^2}{2} + mgH - fmg\cos 30^\circ \cdot h.$$

Учитывая, что $v_D = 0$ и $H = h\sin 30^\circ$, получаем квадратное уравнение

$$\frac{c}{m}h^2 - 2g(\sin 30^\circ - f\cos 30^\circ) - v_B^2 = 0.$$

Решаем уравнение и выбираем положительный корень $h \approx 0{,}14$ м.

Варианты контрольной работы.

Статика.

Задача 1.1. На конструкцию, изображенную на рис.1.1, действует плоская система сил. Определить реакции опор $X_A,\ Y_A,\ R_B$, пренебрегая весом конструкции.

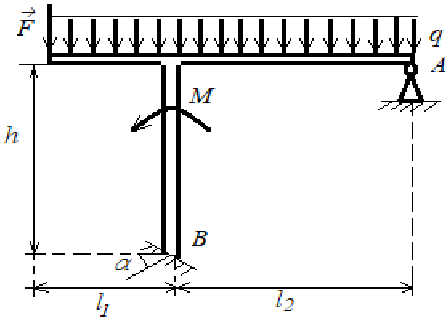


Рис. 1.1.

А. F=10 кН, q=5 кН, M=25 кН · м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 4$ м, h=2 м, $\alpha = 60^\circ$.

Б. F=20 кН, q=4 кН, M=10 кН · м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 2$ м, h=3 м, $\alpha = 30^\circ$.

В. F=15 кН, q=2 кН, M=10 кН · м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 4$ м, h=1 м, $\alpha = 45^\circ$.

Задача 1.2. На конструкцию, изображенную на рис.1.2, действует плоская система сил. Определить реакции опор $X_A,\ Y_A,\ R_B$, пренебрегая весом конструкции.

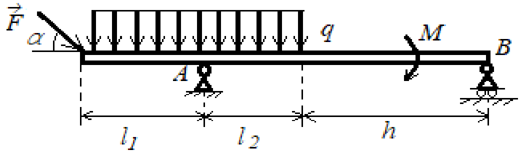


Рис. 1.2.

Г. F=5 кН, q=5 кН, M=20 кН $\cdot$ м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 1$м, h=3 м, $\alpha = 60^{\circ}$.

Д. F=10 кН, q=3 кН, M=10 кН $\cdot$ м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$ м, h=3 м, $\alpha = 45^{\circ}$.

Е. F=15 кН, q=2 кН, M=10 кН $\cdot$ м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 4$ м, h=2 м, $\alpha = 30^{\circ}$.

Задача 1.3. На конструкцию, изображенную на рис.1.3, действует плоская система сил. Определить реакции опор X_A, Y_A, R_B, пренебрегая весом конструкции.

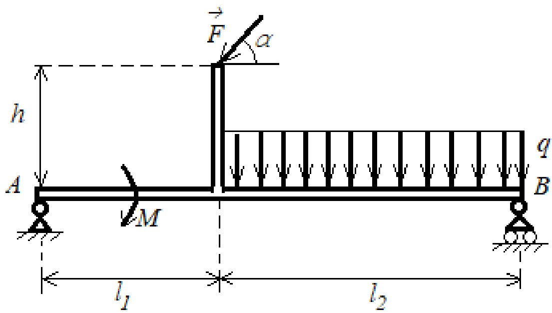


Рис. 1.3.

Ж. F=5 кН, q=10 кН, M=10 кН $\cdot$ м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 2$м, h=2 м, $\alpha = 60^{\circ}$.

З. F=10 кН, q=5 кН, M=5 кН $\cdot$ м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$ м, h=3 м, $\alpha = 45^{\circ}$.

И. F=15 кН, q=2 кН, M=5 кН $\cdot$ м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 1$ м, h=3 м, $\alpha = 30^{\circ}$.

Задача 1.4. На конструкцию, изображенную на рис.1.4, действует плоская система сил. Определить реакции опор X_A, Y_A, M_A, пренебрегая весом конструкции.

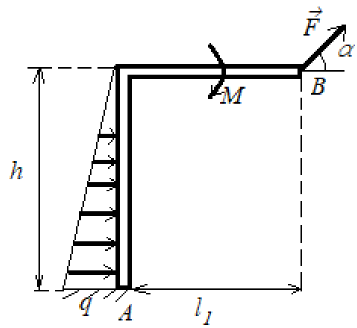


Рис. 1.4.

К. F=5 кН, q=2 кН, M=10 кН · м, $l_1 = 2$ м, h=4 м, $\alpha = 60^{\circ}$.

Л. F=10 кН, q=4 кН, M=5 кН · м, $l_1 = 2$ м, h=3 м, $\alpha = 45^{\circ}$.

М. F=15 кН, q=5 кН, M=5 кН · м, $l_1 = 3$ м, h=4 м, $\alpha = 30^{\circ}$.

Задача 1.5. На конструкцию, изображенную на рис.1.5, действует плоская система сил. Определить реакции опор X_A, Y_A, M_A, пренебрегая весом конструкции.

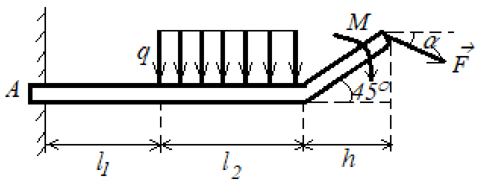


Рис. 1.5.

Н. F=10 кН, q=5 кН, M=15 кН · м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$м, h=2 м, $\alpha = 30^{\circ}$.

О. F=15 кН, q=2 кН, M=10 кН · м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 2$ м, h=1 м, $\alpha = 60^{\circ}$.

П. F=5 кН, q=10 кН, M=3 кН · м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 1$ м, h=2 м, $\alpha = 30^{\circ}$.

Задача 1.6. На конструкцию, изображенную на рис.1.6, действует плоская система сил. Определить реакции опор $X_A,\ Y_A,\ R_B$, пренебрегая весом конструкции.

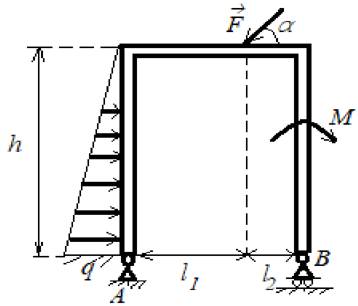


Рис. 1.6.

Р. F=2 кН, q=6 кН, M=5 кН · м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 1$ м, h=3 м, $\alpha = 60^{\circ}$.

С. F=10 кН, q=2 кН, M=3 кН · м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 2$ м, h=1 м, $\alpha = 45^{\circ}$.

Т. F=8 кН, q=4 кН, M=10 кН · м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$ м, h=3 м, $\alpha = 30^{\circ}$.

Задача 1.7. На конструкцию, изображенную на рис.1.7, действует плоская система сил. Определить реакции опор $X_A,\ Y_A,\ R_B$, пренебрегая весом конструкции.

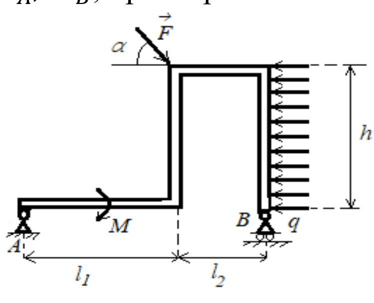


Рис. 1.7.

У. F=10 кН, q=5 кН, M=10 кН $\cdot$ м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 2$ м, h=1 м, $\alpha = 60^{\circ}$.

Ф. F=15 кН, q=2 кН, M=15 кН $\cdot$ м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 1$ м, h=2 м, $\alpha = 45^{\circ}$.

Х. F=7 кН, q=10 кН, M=7 кН $\cdot$ м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$ м, h=3 м, $\alpha = 30^{\circ}$.

Задача 1.8. На конструкцию, изображенную на рис.1.8, действует плоская система сил. Определить реакции опор X_A, Y_A, R_B, пренебрегая весом конструкции.

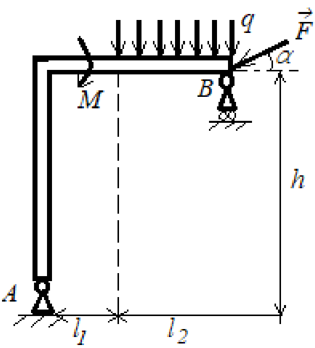


Рис. 1.8.

Ц. F=5 кН, q=4 кН, M=10 кН $\cdot$ м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 1$ м, h=3 м, $\alpha = 30^{\circ}$.

Ч. F=10 кН, q=2 кН, M=5 кН $\cdot$ м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 2$ м, h=4 м, $\alpha = 45^{\circ}$.

Ш. F=8 кН, q=3 кН, M=7 кН $\cdot$ м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$ м, h=3 м, $\alpha = 60^{\circ}$.

Задача 1.9. На конструкцию, изображенную на рис.1.9, действует плоская система сил. Определить реакции опор X_A, Y_A, M_A, пренебрегая весом конструкции.

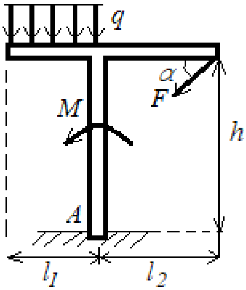


Рис. 1.9.

Щ. F=15 кН, q=10 кН, M=2 кН · м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 1$ м, h=3 м, $\alpha = 30^\circ$.

Э. F=10 кН, q=10 кН, M=5 кН · м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 2$ м, h=5 м, $\alpha = 45^\circ$.

Ю. F=6 кН, q=15 кН, M=15 кН · м, $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2$ м, h=4 м, $\alpha = 60^\circ$.

Я. F=7 кН, q=10 кН, M=10 кН · м, $l_1 = 2$ м, $l_2 = 1$ м, h=3 м, $\alpha = 30^\circ$.

2. Кинематика материальной точки.

Материальная точка движется в плоскости *Oxy*. Закон движения точки задан уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где x и y выражены в метрах, t в секундах.

Записать уравнение траектории точки и изобразить траекторию на чертеже. Для заданного момента времени t_* определить: 1) скорость точки, 2) ускорение точки, 3) касательное ускорение точки, 4) нормальное ускорение точки, 5) радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Вариант	$x(t)$	$y(t)$	t_*
А	$3t^2+6t+12$	t^2+2t+6	2

Б	$2t$	$2t^2+3t+1$	1
В	$2\cos(\pi t)$	$2\sin(\pi t)$	$1/4$
Г	$3t+3$	$-3/(t+1)$	0
Д	$2t$	$6t-4t^2$	1
Е	$8t^2+7$	$12t^2+11$	$1/2$
Ж	t^2-4t+1	$t+1$	1
З	$3\cos\left(\pi t^2/6\right)$	$3\sin\left(\pi t^2/6\right)$	1
И	$-2t-2$	$-4/(t+1)$	0
К	$5t^2-3t+2$	$4t$	1
Л	$2t^3+8t+12$	t^3+4t+3	1
М	$3t+1$	$2t^2+4$	2
Н	$\cos\left(\pi t^2/3\right)$	$\sin\left(\pi t^2/3\right)$	1
О	$7t+1$	$-8/(7t+1)$	$4/7$
П	$2-3\cos(2t)$	$3+2\sin(t)$	$\pi/2$
Р	$6t^3+12$	$2t^3+3$	1
С	$4t+5$	$5t^2+1$	1
Т	$4\cos(\pi t)$	$4\sin(\pi t)$	$1/3$
У	$-t-1$	$-2/(t+1)$	0
Ф	$4-\sin(t/2)$	$5-\cos t$	$5\pi/3$
Х	t^4+2t+1	$2t^4+4t+5$	1
Ц	t^2	$1.5t-1$	1
Ч	$9\cos\left(\pi t^2/4\right)$	$9\sin\left(\pi t^2/4\right)$	1
Ш	$-5t-5$	$-5/(t+1)$	0
Щ	t^8+1	t^8-6	1
Э	t^2+3	$t+2$	1

Ю	$4\cos(t)$	$4\sin(t)$	$\pi/3$
Я	$2.5t$	$-10/(5t+1)$	1

3. Сложное движение точки.

На приведенных ниже рисунках 3.1 – 3.9 рассматривается движение точки M в желобе вращающегося тела. По заданным уравнениям относительного движения $OM(t)$, переносного движения $\varphi(t)$ и геометрическим размерам определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение точки в указанный момент времени.

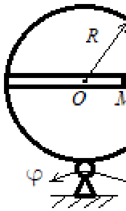


Рис. 3.1.

А. Рис. 3.1, $OM(t) = t^2 - t$, $\varphi(t) = 0.5t^2 + t$, $R = 20$ см, $t = 1$ с.

Б. Рис. 3.1, $OM(t) = 2t^2 - 2$, $\varphi(t) = 2t - 1$, $R = 10$ см, $t = 1$ с.

В. Рис. 3.1, $OM(t) = 3t - 6$, $\varphi(t) = t^2 + 1$, $R = 20$ см, $t = 2$ с.

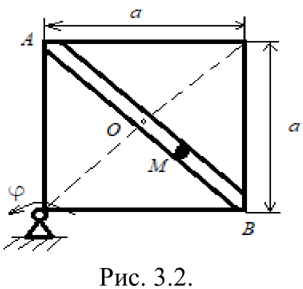


Рис. 3.2.

Г. Рис. 3.2, $OM(t) = 4t + 2t^3$, $\varphi(t) = t + 2t^2$, $a = 15$ см, $t = 1$ с.

Д. Рис. 3.2, $OM(t) = 4t^2 - 1$, $\varphi(t) = t^2 + 1$, $a = 10$ см, $t = 1$ с.

Е. Рис. 3.2, $OM(t) = 6t - 2$, $\varphi(t) = t^2$, $a = 20$ см, $t = 2$ с.

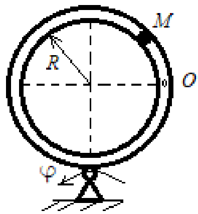


Рис. 3.3.

Ж. Рис. 3.3, $OM(t) = \pi(2t^2 + t)$, $\varphi(t) = 2t^2$, $R = 15$ см, $t = 1$ с.

З. Рис. 3.3, $OM(t) = \pi(2t - 1)$, $\varphi(t) = t^2$, $R = 10$ см, $t = 1$ с.

И. Рис. 3.3, $OM(t) = \pi(t^2 + 2)$, $\varphi(t) = t^2$, $R = 12$ см, $t = 1$ с.

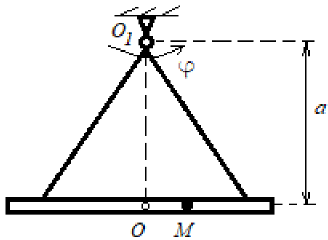


Рис. 3.4.

К. Рис. 3.4, $OM(t) = 9\sin\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, $\varphi(t) = 3t^3 - 2t^2$, $a = 10$ см, $t = 1/2$ с.

Л. Рис. 3.4, $OM(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right)$, $\varphi(t) = 6t^2$, $a = 12$ см, $t = 1$ с.

М. Рис. 3.4, $OM(t) = 3t^2 - 5$, $\varphi(t) = 2t^2$, $a = 10$ см, $t = 2$ с.

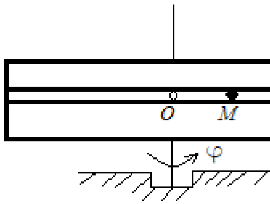


Рис. 3.5.

Н. Рис. 3.5, $OM(t) = 5(t^2 - t)$, $\varphi(t) = 0.5t^2 + t$, $t = 2$ с.

О. Рис. 3.5, $OM(t) = 2(t^3 + 1)$, $\varphi(t) = 2t^2 - 3$, $t = 1$ с.

П. Рис. 3.5, $OM(t) = 2(t^2 + 1)$, $\varphi(t) = 3t^2 - 2t$, $t = 1$ с.

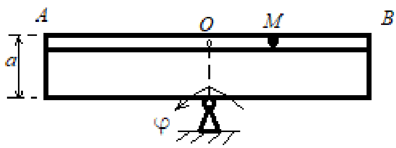


Рис. 3.6.

Р. Рис. 3.6, $OM(t) = 4\cos\left(\frac{\pi t}{4}\right)$, $\varphi(t) = 0.3t - 0.2t^2$, $a = 6$ см, $t = 1$ с.

С. Рис. 3.6, $OM(t) = 2\cos\left(\frac{\pi t}{8}\right)$, $\varphi(t) = 0.2t^2 + t$, $a = 10$ см, $t = 2$ с.

Т. Рис. 3.6, $OM(t) = 4\sin\left(\frac{\pi t}{4}\right)$, $\varphi(t) = t^2 - t$, $a = 15$ см, $t = 1$ с.

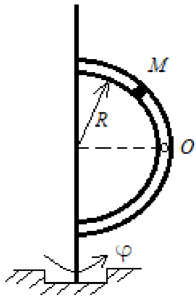


Рис. 3.7.

У. Рис. 3.7, $OM(t) = 6\pi(t^2 - 3)$, $\varphi(t) = 3t^2 - 8t$, $R = 20$ см, $t = 2$ с.

Ф. Рис. 3.7, $OM(t) = \frac{3}{2}\pi(t^2 + 1)$, $\varphi(t) = 2t^2 - t$, $R = 15$ см, $t = 1$ с.

Х. Рис. 3.7, $OM(t) = 6\pi(t - 1)$, $\varphi(t) = 2t^2$, $R = 10$ см, $t = 1$ с.

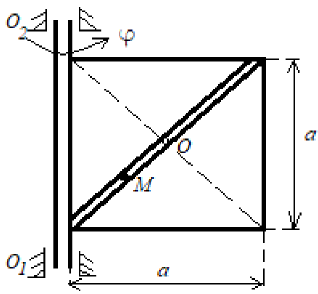


Рис. 3.8.

Ц. Рис. 3.8, $OM(t) = t^2 + 2t$, $\varphi(t) = 3t + 1$, $a = 10$ см, $t = 1$ с.

Ч. Рис. 3.8, $OM(t) = 3t^2 - 3t$, $\varphi(t) = 2t^2 + t$, $a = 15$ см, $t = 1$ с.

Ш. Рис. 3.8, $OM(t) = t^2 - 2t$, $\varphi(t) = 10t - 1$, $a = 10$ см, $t = 2$ с.

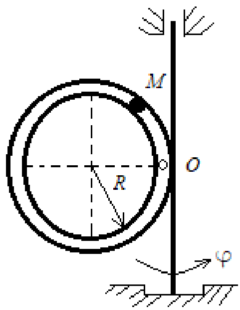


Рис. 3.9.

Щ. Рис. 3.9, $OM(t) = 5\pi t^2$, $\varphi(t) = 2t^2 - t$, $R =$ 20 см, $t = 1$ с.

Э. Рис. 3.9, $OM(t) = \pi t^3$, $\varphi(t) = t^2 + t$, $R = 5$ см, $t = 1$ с.

Ю. Рис. 3.9, $OM(t) = \frac{\pi t^2}{4}$, $\varphi(t) = 4t - 2$, $R = 10$ см, $t = 2$ с.

Я. Рис. 3.9, $OM(t) = \pi t^3$, $\varphi(t) = 2t^2 - 2t$, $R = 20$ см, $t = 1$ с.

4. Динамика.

А. На тело массой m, движущееся по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x, действует сила, проекция которой равна $F_x = 0{,}25mx$. В начальный момент тело находилось в покое в точке $x_0 = 1$ м. Определить скорость тела в момент, когда координата станет равной $x = 5$ м.

Б. Сила тяги винтов вертолета массой m при его вертикальном подъеме из состояния покоя в 1,5 раза превышает его вес. Сопротивление воздуха пропорционально скорости $\vec{R} = -0{,}7\vec{v}$. Определить скорость подъема в момент $t = 5$ с, а также максимальную скорость подъема вертолета.

В. На тело массой m, движущееся по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x, действует сила, проекция которой равна $F_x = 0{,}15mx$. В начальный момент тело находилось в покое в точке $x_0 = 2$ м. Определить скорость тела в момент, когда координата станет равной $x = 7$ м.

Г. Сила тяги винтов вертолета массой m при его вертикальном подъеме из состояния покоя в 1,5 раза превышает его вес. Сопротивление воздуха пропорционально скорости $\vec{R} = -0{,}5\vec{v}$. Определить скорость подъема в момент $t = 4$ с, а также максимальную скорость подъема вертолета.

Д. Лодке массой $m = 100$ кг сообщается начальная скорость $v_0 = 4$ м/с. При движении на лодку действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости $R = 5v^2$. Определить, в течение какого времени скорость лодки уменьшится в два раза.

Е. На тело массой m, движущееся по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x, действует сила, проекция которой равна $F_x = -0{,}36mx$. В начальный момент $x_0 = 0$, $v_{0x} = 3$ м/с. Определить максимальное значение координаты x тела.

Ж. Лодке массой $m = 50$ кг сообщается начальная скорость $v_0 = 5$ м/с. При движении на лодку действует сила сопротивления, пропорциональная квадрату скорости $R = 3v^2$. Определить, в течение какого времени скорость лодки уменьшится в два раза.

З. На тело массой m, движущееся по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x, действует сила, проекция которой равна $F_x = -0{,}5mx$. В начальный момент $x_0 = 0$, $v_{0x} = 10$ м/с. Определить максимальное значение координаты x тела.

И. Груз массой $m = 10$ кг опускается вертикально на парашюте без начальной скорости. Сопротивление воздуха пропорционально скорости $\vec{R} = -20\vec{v}$. Определить скорость груза в момент времени $t = 1$ с.

К. В момент выключения мотора катер массой $m = 200$ кг имел скорость $v_0 = 10$ м/с. Определить путь, который пройдет катер до того момента времени, когда скорость катера уменьшится в десять раз. Сила сопротивления движению пропорциональна квадрату скорости $R = 8v^2$.

Л. Груз массой $m = 15$ кг опускается вертикально на парашюте без начальной скорости. Сопротивление воздуха пропорционально скорости $\vec{R} = -10\vec{v}$. Определить скорость груза в момент времени $t = 2$ с.

М. В момент выключения мотора катер массой $m = 150$ кг имел скорость $v_0 = 10$ м/с. Определить путь, который пройдет катер до того момента времени, когда скорость катера уменьшится в пять раз. Сила сопротивления движению пропорциональна квадрату скорости $R = 5v^2$.

Н. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x под действием силы, проекция которой равна $F_x = 3(1 - 0{,}5t)$. Определить скорость и координату точки в тот момент времени, когда сила будет равной нулю. Начальную координату точки считать нулевой.

О. Лодке массой $m = 50$ кг сообщается начальная скорость $v_0 = 2{,}7$ м/с. При движении на лодку действует сила сопротивления, пропорциональная скорости $\vec{R} = -5\vec{v}$. Определить скорость лодки в момент времени $t = 10$ с.

П. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x под действием силы, проекция которой равна $F_x = 4(1 - 0{,}25t)$. Определить скорость и координату точки в тот момент времени, когда сила будет равной нулю. Начальную координату точки считать нулевой.

Р. Лодке массой $m = 70$ кг сообщается начальная скорость $v_0 = 3$ м/с. При движении на лодку действует сила сопротивления, пропорциональная скорости $\vec{R} = -7\vec{v}$. Определить скорость лодки в момент времени $t = 5$ с.

С. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x под действием силы, проекция которой равна $F_x = 3(1 - 0{,}5t)$. Определить максимальное значение координаты x тела и путь, пройденный точкой за время $t = 6$ с. Начальную координату точки считать нулевой.

Т. Тело массой $m = 4$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности под действием силы, проекция которой зависит от времени и скорости тела, и равна $F_x = 9t/v$. Определить путь, пройденный точкой за время $t = 4$ с.

У. Материальная точка массой $m = 2$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности вдоль оси x под действием силы, проекция которой равна $F_x = 4(1 - 0{,}25t)$. Определить максимальное значение координаты x тела и путь, пройденный точкой за время $t = 4$ с. Начальную координату точки считать нулевой.

Ф. Тело массой $m = 1$ кг движется из состояния покоя по горизонтальной гладкой поверхности под действием силы, проекция которой зависит от времени и скорости тела, и равна $F_x = 9t/v$. Определить путь, пройденный точкой за время $t = 2$ с.

Х. Самолет массой $m = 10^3$ кг летит горизонтально под действием силы тяги, развиваемой двигателем, горизонтальная составляющая которой равна $F = 3{,}82$ кН. Сила лобового сопротивления зависит от скорости самолета и равна $R = 0{,}05v^2$. Определить расстояние, пройденное самолетом, за то время, когда его скорость изменится от 100 м/с до 200 м/с.

Ц. Тело массой $m = 3$ кг движется по горизонтальной гладкой поверхности под действием силы, проекция которой зависит от времени, и равна $F_x = 6\pi \cos 2t$. В начальный момент $x_0 = 0$ и проекция скорости $v_{0x} = 2$ м/с. Определить значение координаты x тела в момент $t = 0{,}5\pi$ с.

Ч. Самолет массой $m = 10^3$ кг летит горизонтально под действием силы тяги, развиваемой двигателем, горизонтальная составляющая которой равна $F = 4$ кН. Сила лобового сопротивления зависит от скорости самолета и равна $R = 0{,}08v^2$. Определить расстояние, пройденное самолетом, за то время, когда его скорость изменится от 100 м/с до 200 м/с.

Ш. Тело массой $m = 2$ кг движется по горизонтальной гладкой поверхности под действием силы, проекция которой зависит от времени, и равна $F_x = 8\pi \cos 2t$. В начальный момент $x_0 = 0$ и проекция скорости $v_{0x} = 4$ м/с. Определить значение координаты x тела в момент $t = \pi$ с.

Щ. В момент прекращения работы двигателей судно массой 300 т имело скорость $v_{0x} = 10$ м/с. Определить время, прошедшее до остановки судна, если сила сопротивления воды зависит от скорости и равна $R = 2 \cdot 10^4(2 + v)$.

Э. Вертикальный спуск парашютиста массы m происходит без начальной скорости с высоты $h = 200$ м при наличии силы сопротивления воздуха, пропорциональной квадрату скорости, $R = 3mv^2$. Определить скорость парашютиста в момент приземления.

Ю. В момент прекращения работы двигателей судно массой 200 т имело скорость $v_{0x} = 12$ м/с. Определить время, прошедшее до остановки судна, если сила сопротивления воды зависит от скорости и равна $R = 2 \cdot 10^4(2 + v)$.

Я. Вертикальный спуск парашютиста массы m происходит без начальной скорости с высоты $h = 500$ м при наличии силы сопротивления воздуха, пропорциональной квадрату скорости, $R = 5mv^2$. Определить скорость парашютиста в момент приземления.

5. Основные теоремы динамики.

Шарик массы m движется из положения A внутри изогнутой трубки, расположенной в вертикальной плоскости. Шарик, пройдя путь l_0, отделяется от пружины. В точке B шарик, не меняя значения своей скорости, переходит на участок BC, где на него дополнительно действует переменная сила $\vec{F}$, направление которой указано на рисунке. Пользуясь общими теоремами динамики точки, определить скорость шарика в положениях B и C. В задании приняты следующие обозначения: v_A – начальная скорость шарика, AB – длина участка, τ – время движения на участке BC, f – коэффициент трения скольжения шарика по стенке трубки, c – коэффициент жесткости пружины.

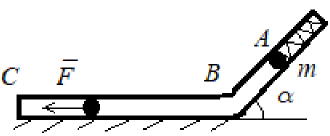


Рис. 5.1.

А. Рис. 5.1. $m = 0{,}4$ кг, $v_A = 2$ м/с, $f = 0{,}05$, $AB = 0{,}2$ м, $l_0 = 10$ см, $c = 1{,}96$ Н/см, $\alpha = 30^\circ$, $\tau = 1{,}5$ с, $F(t) = \sin(2t)$.

Б. Рис. 5.1. $m = 0{,}5$ кг, $v_A = 4$ м/с, $f = 0{,}1$, $AB = 0{,}3$ м, $l_0 = 5$ см, $c = 1{,}5$ Н/см, $\alpha = 45^\circ$, $\tau = 1$ с, $F(t) = 1{,}2\cos(0{,}5t)$.

В. Рис. 5.1. $m = 0{,}6$ кг, $v_A = 1$ м/с, $f = 0{,}12$, $AB = 0{,}5$ м, $l_0 = 15$ см, $c = 0{,}9$ Н/см, $\alpha = 60^\circ$, $\tau = 1{,}2$ с, $F(t) = 0$.

Г. Рис. 5.1. $m = 0{,}7$ кг, $v_A = 1$ м/с, $f = 0{,}13$, $AB = 0{,}7$ м, $l_0 = 10$ см, $c = 1$ Н/см, $\alpha = 30^\circ$, $\tau = 0{,}7$ с, $F(t) = 4t$.

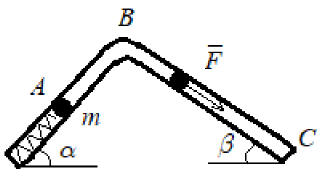


Рис. 5.2.

Д. Рис. 5.2. $m = 0{,}5$ кг, $v_A = 3$ м/с, $f = 0{,}1$, $AB = 0{,}3$ м, $l_0 = 15$ см, $c = 0{,}98$ Н/см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\tau = 0{,}5$ с, $F(t) = \sin(0{,}3t)$.

Е. Рис. 5.2. $m = 0{,}4$ кг, $v_A = 2$ м/с, $f = 0{,}01$, $AB = 0{,}2$ м, $l_0 = 5$ см, $c = 0{,}98$ Н/см, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ$, $\tau = 0{,}6$ с, $F(t) = 1{,}2\cos(2t)$.

Ж. Рис. 5.2. $m = 0{,}6$ кг, $v_A = 5$ м/с, $f = 0{,}02$, $AB = 0{,}5$ м, $l_0 = 15$ см, $c = 0{,}9$ Н/см, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $\tau = 0{,}5$ с, $F(t) = 2{,}3e^{-1{,}5t}$.

З. Рис. 5.2. $m = 0{,}7$ кг, $v_A = 3$ м/с, $f = 0{,}03$, $AB = 0{,}4$ м, $l_0 = 10$ см, $c = 1$ Н/см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\tau = 0{,}7$ с, $F(t) = 2t$.

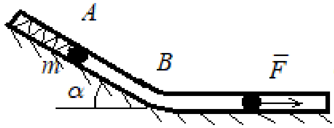


Рис. 5.3.

И. Рис. 5.3. $m = 0{,}3$ кг, $v_A = 5{,}5$ м/с, $f = 0{,}2$, $AB = 1{,}1$ м, $l_0 = 20$ см, $c = 1{,}8$ Н/см, $\alpha = 30^\circ$, $\tau = 1{,}2$ с, $F(t) = 0{,}5\cos(3t)$.

К. Рис. 5.3. $m = 0{,}4$ кг, $v_A = 2$ м/с, $f = 0{,}01$, $AB = 0{,}2$ м, $l_0 = 5$ см, $c = 1{,}7$ Н/см, $\alpha = 45^\circ$, $\tau = 1{,}3$ с, $F(t) = 1{,}3\sin(2t)$.

Л. Рис. 5.3. $m = 0{,}6$ кг, $v_A = 5$ м/с, $f = 0{,}02$, $AB = 0{,}5$ м, $l_0 = 15$ см, $c = 2$ Н/см, $\alpha = 60^\circ$, $\tau = 1{,}5$ с, $F(t) = 1{,}5(1 - t/2)$.

М. Рис. 5.3. $m = 0{,}7$ кг, $v_A = 3$ м/с, $f = 0{,}03$, $AB = 0{,}4$ м, $l_0 = 10$ см, $c = 1{,}5$ Н/см, $\alpha = 30^\circ$, $\tau = 0{,}5$ с, $F(t) = 4{,}5e^{-2t}$.

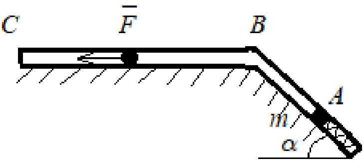


Рис. 5.4.

Н. Рис. 5.4. $m = 0{,}5$ кг, $v_A = 4{,}5$ м/с, $f = 0{,}12$, $AB = 0{,}8$ м, $l_0 = 10$ см, $c = 1{,}9$ Н/см, $\alpha = 15^\circ$, $\tau = 0{,}9$ с, $F(t) = 2{,}5(1 - t/2)$.

О. Рис. 5.4. $m = 0{,}6$ кг, $v_A = 3$ м/с, $f = 0{,}09$, $AB = 0{,}4$ м, $l_0 = 10$ см, $c = 1{,}5$ Н/см, $\alpha = 45^\circ$, $\tau = 1{,}5$ с, $F(t) = 3\sin(1{,}5t)$.

П. Рис. 5.4. $m = 0{,}7$ кг, $v_A = 5$ м/с, $f = 0{,}07$, $AB = 0{,}9$ м, $l_0 = 10$ см, $c = 0{,}5$ Н/см, $\alpha = 30^\circ$, $\tau = 1{,}8$ с, $F(t) = 2\cos(0{,}7t)$.

Р. Рис. 5.4. $= 0{,}5$ кг, $v_A = 4{,}5$ м/с, $f = 0{,}12$, $AB = 0{,}2$ м, $l_0 = 10$ см, $c = 1{,}9$ Н/см, $\alpha = 15^\circ, \tau = 0{,}9$ с, $F(t) = 0{,}4(1 - t/3)$.

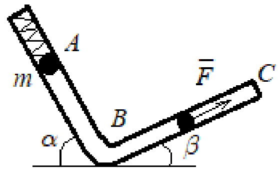


Рис. 5.5.

С. Рис. 5.5. $= 0{,}5$ кг, $v_A = 1$ м/с, $f = 0{,}12$, $AB = 0{,}5$ м, $l_0 = 15$ см, $c = 1{,}75$ Н/см, $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 15^\circ, \tau = 0{,}7$ с, $F(t) = e^{-2t}$.

Т. Рис. 5.5. $= 0{,}3$ кг, $v_A = 1$ м/с, $f = 0{,}05$, $AB = 0{,}3$ м, $l_0 = 20$ см, $c = 1{,}9$ Н/см, $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 15^\circ, \tau = 1{,}2$ с, $F(t) = 1{,}5(1 - t/3)$.

У. Рис. 5.5. $= 0{,}7$ кг, $v_A = 3$ м/с, $f = 0{,}15$, $AB = 0{,}7$ м, $l_0 = 10$ см, $c = 0{,}6$ Н/см, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ, \tau = 0{,}7$ с, $F(t) = 2{,}5\cos(0{,}3t)$.

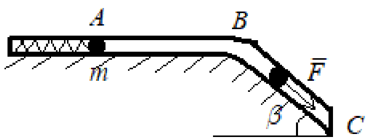


Рис. 5.6.

Ф. Рис. 5.6. $= 0{,}4$ кг, $v_A = 6$ м/с, $f = 0{,}04$, $AB = 0{,}2$ м, $l_0 = 5$ см, $c = 1{,}45$ Н/см, $\beta = 60^\circ, \tau = 0{,}3$ с, $F(t) = 10 - t$.

Х. Рис. 5.6. $= 0{,}5$ кг, $v_A = 4$ м/с, $f = 0{,}3$, $AB = 0{,}4$ м, $l_0 = 15$ см, $c = 0{,}9$ Н/см, $\beta = 45^\circ, \tau = 0{,}9$ с, $F(t) = 1{,}2\sin(0{,}6t)$.

Ц. Рис. 5.6. 0,6 кг, v_A 5 м/с, f 0,1, AB 0,5 м, l_0 20 см, c 1,4 Н/см, β 15°, τ 1 с, $F(t)$ $3t$.

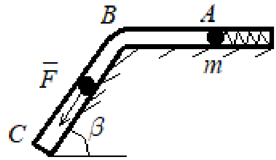


Рис. 5.7.

Ч. Рис. 5.7. 0,8 кг, v_A 5 м/с, f 0,07, AB 0,9 м, l_0 10 см, c 1,2 Н/см, β 45°, τ 1 с, $F(t)$ $0{,}5\cos(1{,}7t)$.

Ш. Рис. 5.7. 0,5 кг, v_A 3 м/с, f 0,13, AB 0,6 м, l_0 15 см, c 0,7 Н/см, β 30°, τ 1б3 с, $F(t)$ $1{,}5\sin(0{,}2t)$.

Щ. Рис. 5.7. 0,4 кг, v_A 4 м/с, f 0,09, AB 0,5 м, l_0 5 см, c 1,3 Н/см, β 60°, τ 0,8 с, $F(t)$ $0{,}5e^{-2t}$.

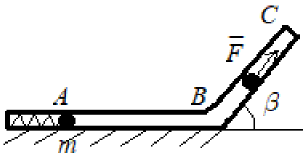


Рис. 5.8.

Э. Рис. 5.8. 0,6 кг, v_A 3 м/с, f 0,13, AB 0,8 м, l_0 20 см, c 2,1 Н/см, β 30°, τ 1,2 с, $F(t)$ $10\sin(2t)$.

Ю. Рис. 5.8. 0,4 кг, v_A 4 м/с, f 0,04, AB 0,5 м, l_0 15 см, c 1,9 Н/см, β 45°, τ 1 с, $F(t)$ $3\cos(1{,}5t)$.

Я. Рис. 5.8. 0,3 кг, v_A 5 м/с, f 0,08, AB 0,3 м, l_0 10 см, c 1,76 Н/см, β 15°, τ 1,5 с, $F(t)$ $2\sin(2t)$.