Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по дисциплине

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Направление подготовки 05.03.05. – Прикладная гидрометеорология
Профиль подготовки – Прикладная метеорология
Квалификация (степень) – бакалавр

(Подлежит возврату
на метеорологический факультет)

РГГМУ

Санкт-Петербург
2016

УДК [551.46+551.5+556]:519.22(076)
ББК 26.22.1я73
М54

Составители: О.Г. Анискина, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. метеорологических прогнозов (РГГМУ);
Л.О. Неёлова, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. метеорологических прогнозов (РГГМУ).

Ответственный редактор: Я.В. Дробжева, д-р физ.-мат. наук, зав. кафедрой метеорологических прогнозов (РГГМУ).

Рекомендовано ученым советом метеорологического факультета РГГМУ
Протокол № 139 от 18 октября 2016 г.

Методические указания по дисциплине «Численные методы математического моделирования» для бакалавров по направлению подготовки 05.03.05 – «Прикладная гидрометеорология», профиль – «Прикладная метеорология» / Сост. О.Г. Анискина, Л.О. Неёлова – СПб.: РГГМУ, 2016. – 48 с.

Методические указания составлены в соответствии с программой дисциплины «Численные методы математического моделирования» для бакалавров по направлению подготовки 05.03.05 – «Прикладная гидрометеорология», профиль подготовки – «Прикладная метеорология». Даются рекомендации по изучению разделов дисциплины. Приводятся вопросы для самопроверки, рекомендуемая литература, контрольная работа.

Предисловие

Цель дисциплины «Численные методы математического моделирования» – подготовка бакалавров прикладной гидрометеорологии, обучающихся по профилю «Прикладная метеорология», владеющих знаниями в объеме, необходимом для глубокого понимания принципов построения и функционирования гидродинамических моделей атмосферы, способных создавать гидродинамические модели атмосферных процессов и грамотно использовать результаты моделирования.

Основные задачи дисциплины «Численные методы математического моделирования» связаны с освоением:

- физических основ построения гидродинамических моделей атмосферы;
- теоретических принципов разработки и функционирования гидродинамических моделей атмосферы;
- численных методов решения уравнений гидродинамики атмосферы;
- основ применения результатов гидродинамического моделирования при составлении оперативных прогнозов погоды.

Дисциплина изучается всеми студентами, обучающимися по программе подготовки академического бакалавра на метеорологическом факультете.

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины. Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОК-2 – способность решать стандартные профессиональные задачи на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом требований информационной безопасности;

ОК-5 – способность к самообразованию, саморазвитию и самоконтролю, приобретению новых знаний, повышению своей квалификации;

ОПК-3 – способность анализировать и интерпретировать данные натурных и лабораторных наблюдений, теоретических расчетов и моделирования;

ОПК-5 – готовность к освоению новой техники, новых методов и новых технологий;

ПК-3 – способность прогнозировать основные параметры атмосферы, океана и вод суши на основе проведенного анализа имеющейся информации;

ПК-5 – способность реализации решения гидрометеорологических задач и анализа полученных результатов.

В результате освоения компетенций в рамках дисциплины «Численные методы математического моделирования» обучающийся должен:

Знать

– физическую и математическую постановку задачи гидродинамического прогноза погоды на основе уравнений гидротермодинамики атмосферы;

– системы координат, использующиеся в гидродинамическом моделировании;

– методы аппроксимации уравнений с помощью конечных разностей;

– методы анализа конечно-разностных схем;

– способы борьбы с вычислительными ошибками, возникающими при интегрировании уравнений гидротермодинамики атмосферы численными методами;

– численные методы интегрирования уравнений прогностических моделей.

Уметь

– разрабатывать алгоритмы гидродинамического прогноза погоды;

– аппроксимировать уравнения в частных производных конечными разностями;

– анализировать ошибки конечно-разностных схем;

– осмысленно использовать результаты гидродинамического прогноза погоды в синоптической практике.

Владеть

– методикой построение гидродинамических моделей атмосферы в целом и отдельных атмосферных процессов и явлений;

– методикой обработки результатов гидродинамического моделирования;

– методами визуализации результатов гидродинамического моделирования атмосферных процессов.

Общие указания

По дисциплине «Численные методы математического моделирования» на четвертом курсе факультета заочного обучения предусматривается изучение следующих разделов.

Постановка задачи гидродинамического прогноза погоды. Система уравнений гидродинамики атмосферы. Системы координат, используемые в гидродинамических моделях атмосферы. Метод сеток. Конечно-разностные аналоги производных и уравнений. Анализ устойчивости конечно-разностных схем. Методы интегрирования прогностических уравнений по времени. Квазигеострофические модели и методы их интегрирования. Система уравнений мелкой воды и методы ее интегрирования. Аппроксимация уравнений модели мелкой воды на расшатанных сетках Аракава.

Студент должен выполнить две контрольные работы, в первую работу входят задания № 1–10, во вторую – № 11–20. Изучение дисциплины завершается экзаменом.

Литература

А) Основная литература:

1. *Клемин В.В., Кулешов Ю.В., Суворов С.С., Волконский Ю.Н.* Динамика атмосферы: учебник. – СПб.: Наука, 2013. – 421 с.
2. *Бахвалов Н.С.* Численные методы в задачах и упражнениях [Электронный ресурс]: учеб. пос. / под ред. В.А. Садовничего. – М.: Высш. шк., 2000. – 190 с. URL: http://www.library.ugatu.ac.ru/pdf/teach/bahvalov_chisl_metody_2010.pdf (дата обращения 26.01.2017).
3. *Толстых М.А., Ибраев Р.А., Володин Е.М. и др*. Модели глобальной атмосферы и Мирового океана: алгоритмы и суперкомпьютерные технологии. – М.: изд-во МГУ, 2013. – 144 с.
4. *Лыкосов В.Н., Глазунов А.В., Кулямин Д.В. и др.* Суперкомпьютерное моделирование в физике климатической системы: учеб. пос. – М.: Изд-во. МГУ, 2012. – 408 с.
5. *Калиткин Н.Н., Альшина Е.А., Корякин П.В.* Численные методы: в 2 кн. – М.: Академия, 2013. – 304 с.

Б) Дополнительная литература:

6. *Белов Н.П., Борисенков Е.П., Панин Б.Д*. Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1989. – 376 с.
7. *Белов Н.П*. Численные методы прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 392 с.

8. *Мезингер Ф., Аракава А.* Численные методы, используемые в атмосферных моделях / пер. с англ. – Л.: Наука, 1979. – 136 с.

9. *Репинская Р.П., Анискина О.Г.* Конечно-разностные методы в гидродинамическом моделировании атмосферных процессов: учеб. пос. – СПб.: РГГМУ, 2002. – 173 с.

10. *Машкович С.А.* Спектральные модели общей циркуляции атмосферы и численного прогноза погоды. – Л.: Гидрометеоиздат, 1986. – 286 с.

11. *Kalnay E.* Atmospheric Modeling, Data Assimilation and Predictability. Cambridge University Press, 2003. – 341 p.

12. *Randall D*. An Introduction to Atmospheric Modeling AT604 Department of Atmospheric Science Colorado State University [Электронный ресурс], 2004 – 350 p. URL: https://imcs.dvfu.ru/struc/kkt/inform/science/Metodi/Randall.pdf (дата обращения 26.01.2017).

13. *Численные* методы, используемые в атмосферных моделях. Т. 2 / пер. с англ.; под ред. В.П. Садокова. – Л.: Гидрометеоиздат, 1982. – 360 с.

14. *Марчук Г.И*. Методы расщепления. – М.: Наука, 1988. – 263 с.

В) Интернет-ресурсы, посвященные гидродинамическим прогнозам погоды:

15. *Сайт* Национального Центра Исследований окружающей среды (National Center for Environmental information NOAA) URL: https://www.ncdc.noaa.gov/data-access/model-data/model-datasets/global-forcast-system-gfs (дата обращения 18. 02. 2017 г.).

16. *Сайт* Метеорологической администрации Кореи [Korea Meteorological Administration (KMA)] URL: http://web.kma.go.kr/eng/biz/forecast_02.jsp (дата обращения 18. 02. 2017).

17. *Сайт* метеорологической организации Великобритании (Met Office UK) URL: http://www.metoffice.gov.uk/research/modelling-systems/unified-model/weather-forecasting (дата обращения 18.02.2017).

18. *Сайт* Королевского Метеорологического агентства Великобритании (RMetS Reading) URL: http://www.rmets.org/weather-and-climate/weather/numerical-weather-prediction-nwp (дата обращения 18.02.2017).

19. *Сайт* Гидрометцентра России URL: http://meteoinfo.ru/sm-forc-maps (дата обращения 18.02.2017).

Указания по разделам

Система уравнений гидродинамики атмосферы

В этом разделе применяются знания, полученные при освоении дисциплины «Динамика атмосферы и океана».

Изучив этот раздел, необходимо знать:

– основные уравнения гидродинамики атмосферы, являющиеся математическим выражением физических законов сохранения;

– уравнения движения (закон сохранения количества движения, второй закон Ньютона);

– уравнение притока тепла (второе начало термодинамики);

– уравнение неразрывности (закон сохранения массы);

– уравнение закона сохранения воды в атмосфере;

– уравнение закона сохранения массы примеси в атмосфере;

– уравнение состояния;

– уравнение статики.

Все уравнения гидродинамики атмосферы являются дифференциальными уравнениями в частных производных. Здесь следует обратить внимание на различия между частной и индивидуальной (полной) производными и связь между этими производными.

С точки зрения математики (математической физики, которая была изучена ранее) решить систему уравнений гидродинамики атмосферы значит решить смешанную задачу – начальную (задачу Коши) и граничную (краевую).

Все уравнения гидродинамики подразделяются на *линейные* и *нелинейные*. В нелинейных уравнениях присутствует произведение двух или более неизвестных функций. Необходимо уметь проводить классификацию уравнений по этому признаку.

Все уравнения гидродинамики атмосферы подразделяются на *эволюционные* (прогностические) и *диагностические*. В эволюционных уравнениях присутствует производная по времени, а в диагностических производной по времени нет, при этом описывается связь между различными переменными в один фиксированный момент времени.

Для того чтобы система уравнений могла быть решена, необходимо выполнение требования замкнутости системы, т. е. количество уравнений должно быть равно количеству неизвестных.

Изучив данный раздел дисциплины, следует знать предмет и задачи дисциплины, уметь записывать основные уравнения гидродинамики атмосферы в общем виде и их классифицировать, знать процессы и волны, которые описываются системой полных уравнений гидродинамики атмосферы.

Литература: [1], [6], [7], [12].

Вопросы для самопроверки

1. Какие физические законы используются при записи системы уравнений гидродинамики атмосферы?
2. Что такое замкнутая система уравнений?
3. Какие метеорологические величины используются при математическом моделировании атмосферных процессов?
4. Какие уравнения гидродинамики атмосферы являются линейными?
5. Чем линейное уравнение отличается от нелинейного уравнения?
6. Какие уравнения гидродинамики атмосферы являются прогностическими?
7. Какая метеорологическая величина определяется по диагностическому уравнению?
8. Что такое волны Россби?

Постановка задачи гидродинамического прогноза погоды

Изучив данный раздел дисциплины, следует знать уравнения гидродинамики и уметь формулировать основную задачу гидродинамического моделирования атмосферных процессов атмосферы.

Необходимо обратить внимание на многомасштабность атмосферных процессов, описываемых уравнениями гидродинамики атмосферы; рассмотреть волны, которые описываются полной системой уравнений гидродинамики атмосферы (волны Россби, гравитационные волны, акустически волны); понять суть фильтрующих гипотез (квазистатичность, квазигеострофичность, соленоидальность), позволяющих упростить систему полных (не преобразованных) уравнений гидродинамики атмосферы.

Необходимо рассмотреть замыкающие гипотезы: параметризация неадиабатических процессов и гипотеза адиабатичности.

Необходимо понять суть фильтрующих гипотез и ознакомиться с концепциями фильтрованных моделей.

Рассмотрите баротропную и бароклинную гипотезы. Применение этих гипотез для уравнений гидродинамики атмосферы влияет на физику, описываемую уравнениями и на возможность корректного описания вертикальной структуры атмосферы.

В связи с тем, что решение уравнений гидродинамики атмосферы представляет собой смешанную начально-конечную задачу, для решения уравнений необходима постановка начальных и граничных условий.

Поставить начальные условия это значит определить значения всех прогностических переменных в начальный момент времени. Постановка граничных условий предполагает определение переменных на границах (вертикальных и горизонтальных) области решения уравнения.

Обратите внимание на принципиальную схему гидродинамического прогноза погоды, формулировку граничных (боковых и по вертикали) и начальных условий.

Обратите внимание на то, что разные слагаемые в уравнениях отвечают за описание различных процессов. Учащиеся должны уметь во всех уравнениях определять адвективные слагаемые, слагаемые, описывающие силы (барического градиента, Кориолиса, тяжести, трения, турбулентности), различать линейные и нелинейные слагаемые, слагаемые, ответственные за медленные волны Россби и быстрые гравитационные волны.

Литература: [1], [3], [4], [6], [7], [12].

Вопросы для самопроверки

1. Какие волны описываются системой уравнений гидродинамики атмосферы?
2. Какими волнами можно пренебречь при краткосрочном прогнозе погоды?
3. Какие волны, описываемые в системе полных уравнений, являются метеорологически значимыми?
4. Что такое метеорологически значимые волны?
5. Когда важно описывать звуковые волны?
6. За какие процессы в атмосфере отвечают гравитационные волны?
7. Что такое фильтрующие гипотезы?
8. Какие фильтрующие гипотезы существуют?
9. Напишите выражения для геострофического ветра.
10. Чем отличается геострофическое приближение от квазигеострофического?
11. Что такое соленоидальное приближение?

12. Что такое задача Коши?

13. Что значит поставить начальные условия?

14. Что значит определить граничные условия?

15. Какие слагаемые в уравнениях движения отвечают за волны Россби?

16. В чем физический смысл квазистатического приближения? Какие атмосферные возмущения отфильтровываются при его использовании? Как преобразуются основные уравнения гидродинамики атмосферы?

17. В чем физический смысл квазигеострофического приближения? Какие атмосферные возмущения отфильтровываются при его использовании? К какому классу относятся гидродинамические модели, использующие квазигеострофическое приближение?

18. На какие сроки можно давать прогноз погоды в адиабатическом приближении?

Системы координат, используемые в гидродинамических моделях атмосферы

Изучив данный раздел дисциплины, следует знать, что системы координат, используемые в гидродинамических моделях атмосферы, подразделяются на *горизонтальные* и *вертикальные*, которые могут комбинироваться различным образом.

Сегодня в качестве горизонтальных используются, в основном, две системы координат – *сферические*, описывающие форму Земли, и *декартовые* (плоские). В зависимости от решаемой задачи предпочтение отдается или одной или другой координатной системе.

При использовании плоской декартовой системы координат земной шар проецируют на плоскость. Чаще всего в гидродинамическом моделировании атмосферных процессов применяют следующие проекционные методы: полярную стереографическую проекцию (для прогнозов в средних широтах), коническую равноугольную проекцию (ламбертову, для прогноза в полярных регионах) и цилиндрическую (меркаторскую) проекцию (для прогноза в экваториальных областях). Проекции искажают расстояния, формы, углы, направления. При моделировании атмосферных процессов особенно сильное влияние оказывают искажения расстояний. Для преодоления этого недостатка используются масштабные множители.

Вертикальных координатных систем, используемых в гидродинамических моделях атмосферы, больше, и они продолжают развиваться. На сегодняшний момент чаще всего используются:

– декартовая;
– изобарическая;
– сигма (σ);
– гибридная;
– изэнтропическая.

Важно понять, что при смене системы координат по вертикали изменяется не только вид уравнений, но и способ описания скорости перемещения по вертикали.

Необходимо обратить внимание на различия в постановки граничных условий в разных системах координат по вертикали; знать достоинства и недостатки различных систем координат и горизонтальных и вертикальных.

Литература: [1], [3], [4], [6], [7], [12].

Вопросы для самопроверки

1. Какие системы горизонтальных координат используются при гидродинамическом прогнозе погоды? В чем их достоинства и недостатки?
2. Какие системы координат по вертикали используются при гидродинамическом прогнозе погоды? В чем их достоинства и недостатки?
3. Как учитывают искажения декартовой системы координат?
4. Запишите замкнутую систему уравнений гидродинамики в квазистатическом и адиабатическом приближениях.
5. В какой системе координат точно определяется нижнее граничное условие?
6. Какая система координат удобна для использования синоптиком?
7. Какая система координат используется в современных прогностических моделях?
8. В каких системах координат возникают проблемы с расчетом силы барического градиента?
9. В какой части атмосферы удобно использовать изэнтропическую систему координат?

Фильтрованные модели атмосферы

Фильтрованные модели атмосферы основаны на преобразованных уравнениях гидродинамики атмосферы. В зависимости от применяемых гипотез различаются разные модели:

- квазигеострофические баротропные;
- квазигеострофические бароклинные;
- квазисоленоидальные баротропные.
- квазисоиноидальные бароклинные.

Фильтрация заключается в том, что в модельной атмосфере описываются не все волны, присутствующие в реальной атмосфере.

Необходимо изучить разные фильтрующие гипотезы и модели, к которым они приводят. Большинство фильтрованных моделей в качестве прогностических уравнений используют дифференциальные уравнения второго и более порядка, поэтому методы их решения очень сложны.

Необходимо изучить концепцию итерационных методов, понять суть метода последовательных приближений.

Основное внимание следует уделить методам простой итерации, Либмана и релаксации.

Очень важно понять, как влияет на точность прогноза задание начального приближения, выбор принципа останова итераций, количество итераций.

Литература: [1], [6], [7].

Вопросы для самопроверки

1. Какие причины привели к появлению фильтрованных моделей?
2. При решении каких задач сегодня могут использоваться фильтрованные модели?
3. Какие волны отфильтровываются при использовании гипотезы квазистатичности?
4. О чем говорит уравнение статики в системе уравнений гидродинамики атмосферы?
5. Какие волны описываются в квазигеострофической баротропной модели атмосферы?
6. На каком уровне атмосферы может быть обоснован прогноз по квазигеострофической баротропной модели?
7. В чем суть уравнения вихря?
8. Опишите алгоритм итерационного метода решения уравнения.
9. Чем принципиально отличается метод простой итерации от метода Либмана?

Модель мелкой воды

Модель мелкой воды относится к моделям, основанным на полных уравнениях (нефильтрованных), хотя в ней отсутствуют акустические (звуковые) волны.

Необходимо понять гипотезу мелкой воды и возможность ее применения к описанию атмосферных движений. Необходимо обратить внимание на ограничения в использовании модели мелкой воды для описания атмосферных процессов.

Модель мелкой воды состоит из трех уравнений: два уравнения движения (для горизонтальных составляющих скорости) и уравнение неразрывности. Обратите внимание, что уравнения движения и уравнение неразрывности могут быть записаны как в авдективной, так и в дивергентной форме.

Необходимо научиться записывать уравнения модели мелкой воды в форме Лэмба–Громеко.

Уравнения модели мелкой воды могут быть выведены в изобарической и в сигма-системах координат по вертикали и иметь разный вид.

Необходимо уметь выводить уравнения модели мелкой воды и получать результирующие уравнения в различном виде.

Литература: [1], [6], [7].

Вопросы для самопроверки

1. Какие основные упрощения положены в основу гипотезы мелкой воды? Когда они могут быть использованы?
2. В какой части атмосферы можно обоснованно использовать модель мелкой воды?
3. Какие волны описываются системой уравнения мелкой воды?
4. Какие из гипотез мелкой воды не соответствуют действительности?
5. Что такое адвективная форма уравнений?

Инварианты гидродинамических моделей атмосферы. Бокс-метод

Инвариантом называется величина, значение которой в некотором пространстве не меняется с течением времени. В атмосфере присутствуют интегральные инварианты, т. е. суммарные (средние) для всей атмосферы величины, которые не меняются с течением времени. Для того чтобы модельная атмосфера соответствовала реальной, необходимо наличие в модельном пространстве тех же инвариантов, что и в физическом. Кроме этого, наличие инвариантов в модели используются для достижения устойчивости решения.

Необходимо понять, как используется аппарат инвариантов при гидродинамическом моделировании атмосферных процессов.

Следует обратить внимание на методы доказательства наличия инвариантов и на условия существования инвариантов при решении системы уравнений гидродинамики атмосферы.

Необходимо уметь выводить уравнения модели мелкой воды, сохраняющие инварианты массы атмосферы, интегрального потенциального вихря и интегральной потенциальной энстрофии.

Необходимо изучить бокс-метод, который основан на теории инвариантов.

Литература: [6], [8], [13].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое инвариант?
2. Что такое интегральный инвариант?
3. Для чего используются инварианты?
4. При каких условиях можно вывести уравнения, обладающие инвариантами?
5. Какими инвариантами обладают уравнения модели мелкой воды?
6. Что такое энстрофия?
7. Какие ошибки предотвращаются, если система уравнений обладает инвариантом потенциальная энстрофия?
8. В чем суть бокс-метода решения уравнений гидродинамики атмосферы?
9. Возможно ли доказать наличие интегральных инвариантов в региональной модели атмосферы?

Метод расщепления. Методы (явные, неявные и полунеявные) интегрирования уравнений гидротермодинамики атмосферы

Система уравнений гидродинамики атмосферы не может быть решена точно. Моделирование производят приближенными методами, которые различаются своими характеристиками. С точки зрения записи слагаемых, которые не содержат производную по времени, все конечно-разностные схемы делятся на *явные*, *неявные* и *полунеявные*.

Явные схемы просты в реализации, но малоустойчивы. Неявные схемы требуют сложных алгоритмов для решения, но обладают высокой устойчивостью. Свойства компромиссных полунеявных схем могут быть очень разными.

Одна из проблем, которая возникает при решении уравнений гидродинамики атмосферы, связана с многомасштабностью атмосферных процессов: очень трудно подобрать такую конечно-разностную схему, которая одновременно хорошо бы описывала процессы разных пространственно-временных масштабов. Для решения этой проблемы применяют метод расщепления, при использовании которого сложная система уравнений разделяется (расщепляется) на несколько более простых. Каждая более простая система уравнений описывает свой процесс, и можно подобрать соответствующую конечно-разностную схему.

Метод расщепления Г.И. Марчук предложил использовать при моделировании атмосферных процессов. В гидродинамических моделях атмосферы чаще всего рассматривается расщепление по процессам, что позволяет выбрать наилучшую схему интегрирования при описании процессов разных масштабов. Необходимо рассмотреть применение метода расщепления для решения уравнений гидродинамики атмосферы в изобарической системе координат по вертикали.

Необходимо уметь записывать любое уравнение по явной, неявной и полунеявной схемам и создавать алгоритм решения уравнений гидродинамики по указанной схеме; уметь расщеплять сложную систему уравнений гидродинамики атмосферы на более простые системы уравнений согласно описываемых физических процессов.

Литература: [7], [14].

Вопросы для самопроверки

1. Почему возникает необходимость решения системы уравнений методом расщепления?
2. Каковы физические предпосылки применения метода расщепления для решения уравнений гидродинамики атмосферы?
3. Что такое явные и неявные методы?
4. Что такое метод расщепления?
5. По каким процессам расщепляются уравнения гидродинамики атмосферы в задаче краткосрочного прогноза погоды?

6. Какими достоинствами обладают неявные методы?
7. Какие методы аппроксимации уравнений чаще используются в современных прогностических уравнениях?

Расшатанные сетки. Дисперсионные свойства

Дисперсионные свойства – это свойства описания моделью фазовых и групповых скоростей. Дисперсионные свойства зависят от явности или неявности схемы, а также от вида сетки, на которой аппроксимированы уравнения гидродинамики атмосферы.

Если все зависимые переменные системы заданы в одних и тех же узлах и это расположение не зависит от времени, то сетка *нерасшатанная*. Если зависимые переменные системы заданы в разных узлах и это расположение не зависит от времени, то сетка, *расшатанная по пространству*. Если зависимые переменные системы меняют свое расположение в зависимости от номера шага времени, то сетка, *расшатанная по времени*. Если зависимые переменные системы заданы в разных узлах и это расположение зависит от номера шага по времени, то сетка является *расшатанной по пространству и по времени*.

На дисперсионные свойства конечно-разностных схем влияет расшатанность сетки по пространству.

Необходимо изучить основные принципы создания расшатанных сеток. Изучить классификацию расшатанных сеток по Аракаве. Освоить методы анализа дисперсионных свойств на примере системы уравнений адаптации модели мелкой воды. Следует обратить особое внимание на аппроксимацию уравнений гидродинамики на расшатанных сетках.

Литература: [7], [8].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое фазовая скорость?
2. Что такое групповая скорость?
3. К чему приводит ошибки в описании фазовой скорости?
4. Какие существуют сетки по классификации Аракавы?
5. На каких расшатанных сетках лучше описывается групповая скорость?
6. О чем говорит нулевая фазовая скорость?
7. Что такое расшатанная сетка?
8. Существуют ли расшатанные сетки по вертикали?
9. Дисперсионные свойства описываются лучше явной или неявной схемой?

Анализ устойчивости и дисперсионных свойств уравнений адаптации

Анализ устойчивости и дисперсионных свойств позволяет выбрать схему и характеристики алгоритма, обеспечивающие эффективность решения.

Существуют несколько методов анализа устойчивости конечно-разностных схем: *энергетический метод, прямой метод* и *метод Неймана*.

Анализ устойчивости и дисперсионных свойств удобнее производить с использованием метода Неймана. Анализ необходимо проводить в три этапа:

- получить систему уравнений адаптации из системы уравнений модели мелкой воды;
- для упрощения выкладок записать систему уравнений адаптации в одномерном приближении и полудискретном виде, оставить производную по времени непрерывной, а производную по пространству аппроксимировать конечно-разностными аналогами;
- полученную систему уравнений проанализировать с использованием метода Неймана; сравнить с точным решением.

Литература: [7], [8], [9].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое устойчивость?
2. Что такое дисперсионные свойства?
3. От чего зависит устойчивость?
4. Какими методами анализируется устойчивость?
5. В чем суть метода Неймана для анализа устойчивости?
6. Почему анализируют устойчивость конечно-разностных схем на примере линейного уравнения адвекции?
7. Что такое система уравнений адаптации?

Методы борьбы с нелинейной вычислительной неустойчивостью

Нелинейная вычислительная неустойчивость является следствием ошибок ложного представления, которые всегда появляются при решении методом конечных разностей нелинейных уравнений. Нелинейная вычислительная неустойчивость проявляется в быстром, от шага к шагу по времени, росте амплитуды решения (быстрее экспоненты) и в результате «вычислительном коллапсе».

Необходимо изучить два подхода к борьбе с неустойчивостью – *методы предотвращения* и *методы подавления*.

К методам предотвращения относятся использование консервативных схем при аппроксимации уравнений гидродинамики, построение схем, сохраняющих интегральные инварианты. Необходимо изучить методику построения консервативных схем и создание моделей, сохраняющих интегральные инварианты.

К методам подавления относятся *фильтрация* и *сглаживание*.

Изучить методики сглаживания решения с использованием нерасшатанных и расшатанных сеток. Изучить методики фильтрации. Уметь применять фильтры (Фурье, Асселина, Шапиро) при решении различных уравнений.

Предотвращение возникновения нелинейной вычислительной неустойчивости возможно при использовании полулагранжева подхода при описании адвекции. Следует изучить особенности эйлерова, лагранжева и полулагранжева подходов к описанию адвекции, преимущества полулагранжева подхода над другими и методику реализации полулагранжева подхода в гидродинамических моделях атмосферы на примере нелинейного уравнения адвекции.

***Литература**:* [7], [8], [9].

Вопросы для самопроверки

1. Какие слагаемые является линейными?
2. Чем отличаются линейные слагаемые от нелинейных?
3. Что такое неустойчивость?
4. Что такое ошибки ложного представления?
5. К чему приводит нелинейная вычислительная неустойчивость?
6. Как проявляется при решении уравнений нелинейная вычислительная неустойчивость?
7. Что такое сглаживание?
8. Что такое фильтрация?
9. Что более физически обосновано – сглаживание или фильтрация?
10. Что такое эйлеров и лагранжев подходы?
11. В каких ситуациях предпочтительнее лагранжев подход?
12. В чем суть полулагранжева подхода?
13. Что такое вычислительный коллапс?

Постановка задачи регионального гидродинамического прогноза

Все гидродинамические модели атмосферы по области интегрирования подразделяются на *глобальные* (область решения – весь земной шар) и *региональные* (область решения – часть земного шара).

Региональные прогностические модели – это модели, позволяющие прогнозировать процессы мезомасштаба. Необходимо изучить классификацию мезомасштабов. Необходимо уметь определять процессы, описываемые в региональных моделях атмосферы, в зависимости от разрешения модели.

Региональные модели позволяют описывать процессы мезо- и даже микромасштабов. Повышаются требования к определению начальных данных, постановке граничных условий и качеству параметризации физических процессов.

Необходимо уделить особое внимание постановке граничных условий при решении уравнений гидродинамики атмосферы в ограниченном регионе. Следует рассмотреть следующие граничные условия:

- фиктивные граничные условия;
- граничные условия излучения;
- использование зоны релаксации;
- использование буферной зоны;
- использование вложенных сеток;
- условия одностороннего и двухстороннего взаимодействия;
- постановку граничных условий из модели с большим разрешением.

Литература*:* [7], [12].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое региональная модель атмосферы?
2. Что значит поставить граничные условия?
3. В какой ситуации обосновано использование фиктивных граничных условий?
4. Что такое телескопизация?
5. В чем достоинство одностороннего взаимодействия при постановки граничных условий?
6. Что такое α-, β- и γ-мезомасштабы?
7. Где важнее описывать конвективные процессы – в глобальной или региональной моделях?

8. Какие граничные условия используются в современных региональных моделях атмосферы?

9. Какие физические процессы должны быть описаны в современных гидродинамических моделях атмосферы?

Метод сеток. Конечно-разностные аналоги производных

Изучите метод сеток, способы конечно-разностной аппроксимации производных. При этом важно обратить внимание на то, что все конечно-разностные аналоги позволяют получить только приближенное значение производных. Ошибка зависит от метода аппроксимации. Рассмотрите, как изменяется ошибка аппроксимации в зависимости от вида конечно-разностного аналога, длины волны, размера шага и их соотношения.

Необходимо изучить методы аппроксимации производных и уравнений конечными разностями; уметь аппроксимировать конечными разностями любое уравнение и производную любого порядка.

Следует обратить внимание на схемы интегрирования по времени и особенности алгоритма прогноза в зависимости от выбранной схемы.

Необходимо разобраться в особенностях интегрирования по времени по двухуровневым и трехуровневым схемам, понять, в чем достоинства и недостатки явного и неявного алгоритмов.

Литература: [2], [5], [6], [7], [8], [9], [12].

Вопросы для самопроверки

1. Как вводится сетка точек?
2. Что такое разрешающая способность сетки?
3. Чем отличаются сетки равномерные от неравномерных?
4. Аппроксимируйте $\left(\dfrac{\partial f}{\partial r}\right)_q$ центральными разностями.
5. Какой конечно-разностный аналог производной имеет наибольший порядок точности: центральные разности, направленные разности вперед или направленные разности назад?
6. Аппроксимируйте $\left(\dfrac{\partial f}{\partial t}\right)^S$ направленными разностями вперед.
7. Получите конечно-разностных аналог второй производной на основе центральных разностей.

8. Можно ли использовать при решении уравнения адвекции для аппроксимации производной по времени направленных разностей назад?

Повышение порядка точности аппроксимации производных

Стандартные конечно-разностные аналоги производных имеют первый или второй порядок точности. При решении большого количества задач такой порядок точности недостаточен для получения решения удовлетворительной точности.

Изучить возможности повышения порядка точности аппроксимации с привлечением дополнительных точек. Уметь получать конечно-разностный аналог четвертого порядка точности.

Изучить достоинства и недостатки конечно-разностного аналога четвертого порядка точности по сравнению с конечно-разностным аналогом второго порядка точности.

***Литература**:* [7].

Вопросы для самопроверки

1. Чем определяется точность аппроксимации производной?
2. Что такое ошибка аппроксимации?
3. Как можно повысить порядок точности конечно-разностного аналога?
4. Получите конечно-разностный аналог третьей производной на основе центральных разностей.
5. Получите конечно-разностный аналог первой производной шестого порядка точности.

Метод шагов по времени

В гидродинамических моделях атмосферы прогностические уравнения решаются методом шагов по времени, который заключается в том, что весь прогностический интервал делится на небольшие интервалы времени и на каждом интервале рассчитывается производная по времени. Зная, как меняется функция во времени (производную по времени), находят значение функции в конце рассматриваемого интервала.

Необходимо изучить методику аппроксимации производной по времени, способы аппроксимации уравнений с точки зрения шагов по времени. Обратите внимание на реализацию алгоритма метода шагов по времени.

Необходимо изучить классификацию схем по количеству моментов времени в ней – двух- и трехуровенные схемы. Изучить особенности двух- и трехуровенных схем. Особое внимание следует уделить изучению алгоритма решения уравнений с использованием двух- и трехуровенных схем; обратить внимание на необходимость постановки дополнительных «вычислительных» начальных условий при использовании трехуровенных схем.

Изучить особенности ошибок, которые возникают при использовании трехуровенных схем – вычислительных мод.

Изучить методики борьбы с вычислительными модами (фильтр Асселина).

Литература: [2], [5], [6], [7], [8], [9], [12].

Вопросы для самопроверки

1. Какие схемы представления производной по времени называют явными, а какие – неявными?
2. В чем суть метода шагов по времени?
3. Чем отличаются методы решения уравнений аппроксимированных явной и неявной схемами?
4. В чем смысл вычислительной вязкости?
5. Что такое и зачем нужны вычислительные начальные условия?
6. Какая схема называется трехуровенной?
7. Сколько вычислительных начальных условий необходимо поставить для пятиуровенной схемы?
8. Что такое вычислительная мода?
9. Напишите фильтр Асселина.
10. Нарисуйте график решения, в котором присутствует вычислительная мода.
11. Какую схему по времени лучше использовать на первом шаге по времени для подавления вычислительной моды?

Анализ ошибок, возникающих при аппроксимации линейного уравнения адвекции конечными разностями

Уравнения гидродинамики атмосферы решаются приближенными методами, и поэтому при моделировании всегда возникают ошибки. Проанализировать ошибки, возникающие при решении системы уравнений гидродинамики атмосферы, практически невозможно из-за сложности решаемых систем. Для разработки новых схем интегрирования уравнений, анализа уже существующих схем, выбора наиболее эффективной схемы для конкретной задачи используются более простые уравнения, самое простое из которых *линейное уравнение адвекции*.

Линейное уравнение адвекции содержит слагаемое, которое присутствует в большинстве уравнений гидродинамики атмосферы, но линейное уравнение довольно простое для анализа, и известно точное решение этого уравнения. Это позволяет легко сравнивать приближенное (численное) решение уравнения с точным и делать выводы о качестве анализируемых численных схем.

Необходимо изучить ошибки, возникающие при использовании конечно-разностных методов и научиться их анализировать на примере линейного уравнения адвекции. Здесь следует обратить внимание на следующие характеристики конечно-разностных схем:

– ошибка аппроксимации;
– порядок точности;
– вязкость конечно-разностных схем;
– коэффициент вязкости;
– согласованность конечно-разностных схем;
– устойчивость схемы;
– сходимость конечно-разностных схем;
– дисперсионные свойства;
– ошибка в описании фазы.

Необходимо уметь анализировать все перечисленные ошибки для любой схемы, примененной к линейному уравнению адвекции.

Обратите внимание на анализ ошибки аппроксимации, которая является причиной большинства неточностей и ошибок, возникающих при моделировании атмосферных процессов. Одной из самых сложных проблем, возникающей при интегрировании прогностических уравнений, является вычислительная неустойчивость решения, появление которой зависит от схемы интегрирования во времени.

Изучите метод Неймана для анализа устойчивости. Разберитесь, как на основе анализа устойчивости выбирается шаг интегрирования по времени. Обратите внимание на критерий Куранта–Фридрихса–Леви. Изучите причины возникновения вычислительной дисперсии и методы анализа искажения скоростей при аппроксимации уравнения адвекции различными конечно-разностными схемами.

Литература: [2], [5], [6], [7], [8], [9].

Вопросы для самопроверки

1. Почему при математическом моделировании атмосферных процессов возникают ошибки?
2. Какие ошибки возникают при использовании конечных разностей?
3. Что такое ошибка аппроксимации?
4. Как проявляется вычислительная вязкость при решении уравнений методом конечных разностей?
5. Возможно ли использование несогласованных конечно-разностных схем? Почему?
6. Можно ли использовать конечно-разностные схемы с вычислительной вязкостью?
7. Что такое критерий устойчивости?
8. Что такое критерий Куранта–Фридрихса–Леви?
9. Что такое число Куранта?
10. В чем суть метода Неймана?
11. Аппроксимируйте линейное уравнение адвекции конечно-разностной схемой, обладающей вторым порядком точности по времени и по пространству.

Схемы интегрирования по времени

Схема интегрирования по времени – это методика аппроксимации производной по времени и метод записи слагаемых, не содержащих производную по времени.

Все схемы интегрирования по времени подразделяются на *явные, неявные* и *полунеявные*.

Необходимо изучить методику аппроксимации уравнений по этим схемам и уметь любое уравнение аппроксимировать по времени, а также изучить алгоритмы решения уравнений гидродинамики атмосферы по явным, неявным и полунеявным схемам. При этом следует обратить внимание на разные свойства схем интегрирования по времени.

Все схемы интегрирования по времени характеризуются количеством моментов времени, которые присутствуют в конечно-разностном аналоге уравнения. Чаще всего используются в практике двух- и трехуровенные схемы.

Необходимо изучить характеристики различных схем интегрирования по времени, их достоинства и недостатки, особенности вычислительных алгоритмов при использовании двух- и трехуровенных схем.

Литература: [2], [5], [6], [7], [8], [9].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое схема интегрирования по времени?
2. Почему говорят об интегрировании дифференциальных уравнений?
3. Чем определяется уровенность схемы по времени?
4. Связана ли уровенность конечно-разностной схемы с порядком точности?
5. Что такое явные, неявные схемы?
6. В чем достоинства неявных схем?
7. Какие схемы чаще используются в современных прогностических моделях?

Устойчивость конечно-разностных схем

В общем случае устойчивость означает, что малые возмущения (ошибки) в начальных данных и правой части уравнений приводят к малому возмущению решения. При моделировании атмосферных процессов всегда присутствуют ошибки, связанные с неточностью в начальных данных, неточностью методов решения уравнений, ошибками округления при реализации моделей на компьютерах, неточностью описания физических процессов.

Устойчивость является очень важным свойством численных схем решения уравнений гидродинамики атмосферы. При реализациях моделей на компьютерах неустойчивость конечно-разностных схем вызывает проблемы, связанные с невозможностью представления чисел. Наличие устойчивости является необходимым (но не достаточным) условием сходимости приближенного решения к точному.

Необходимо изучить все определения устойчивости и методы определения устойчивости конечно-разностных схем.

Литература: [2], [5], [6], [7], [8], [9].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое устойчивость конечно-разностных схем?
2. Чем определяется устойчивость конечно-разностных схем?
3. Как проявляется неустойчивость при численном интегрировании?
4. Возможно ли использование неустойчивых схем при решении уравнений гидродинамики атмосферы?
5. Как связана устойчивость и сходимость?
6. Как связаны устойчивость и порядок точности аппроксимации производных?

7. Какая схема устойчивее – явная или неявная?

8. Каким образом можно повысить устойчивость конечно-разностной схемы?

9. От каких характеристик конечно-разностной схемы зависит устойчивость?

Анализ дисперсионных свойств

Дисперсионные свойства конечно-разностных схем отвечают за точность описания скоростей переноса отдельных волн и энергии в решении уравнения.

Необходимо изучить методику анализа дисперсионных свойств разных схем на примере линейного уравнения адвекции. Сравнить полученный результат с точными значениями фазовой и групповой скоростей.

Литература: [7], [8], [9].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое дисперсионные свойства конечно-разностных схем?
2. Что значит ускоряющая схема?
3. Какая схема лучше – ускоряющая или замедляющая?
4. Что значит схема лучшая?
5. Как создать конечно-разностный аналог уравнения, обладающий лучшими дисперсионными свойствами?
6. Чему равна фазовая скорость решения линейного уравнения адвекции?
7. Скорость какой волны будет искажаться больше – двухшаговой или семишаговой?

Уравнения колебаний, трения. Конечно-разностная аппроксимация и анализ. Анализ изменения фазы решения

Кроме уравнения адвекции, очень часто для анализа численных методов решения используются уравнения колебаний и трения. Точные решения этих уравнений известны, и можно оценить ошибки использования численных методов решения простым сравнением. Эти уравнения более простые, чем уравнение адвекции, поэтому и процедура исследования свойств и анализ результатов более простые.

Необходимо научиться аппроксимировать уравнение колебания и трения конечно-разностными схемами.

Необходимо изучить методы анализа следующих ошибок:

– ошибка аппроксимации;
– порядок точности;
– вязкость конечно-разностных схем;
– коэффициент вязкости;
– согласованность конечно-разностных схем;
– устойчивость схемы;
– сходимость конечно-разностных схем;
– дисперсионные свойства;
– ошибка в описании фазы.

Особое внимание уделяется анализу ошибки в описании фазы, которая очень сложно анализируется в случае линейного уравнения адвекции.

Литература: [7], [8], [9].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое ошибка аппроксимации? Как она рассчитывается?
2. Что такое согласованность конечно-разностных аналогов и схем интегрирования по времени?
3. К чему приводит неустойчивость конечно-разностных схем?
4. В чем суть анализа устойчивости методом Неймана?
5. Как можно проанализировать дисперсионные свойства конечно-разностных аналогов?

Нелинейное уравнение адвекции. Нелинейная вычислительная неустойчивость

Нелинейное уравнение адвекции более близко по своим характеристикам к основным уравнениям гидродинамики, чем линейное уравнение, но и более сложное.

Необходимо обратить внимание на то, чем линейное уравнение отличается от нелинейного, и уметь различать линейные и нелинейные слагаемые в уравнениях.

Нелинейные слагаемые описывают нелинейное взаимодействие волн, в результате которого возникают новые волны. Необходимо изучить алгоритм определения длин волн, которые возникают за счет нелинейного взаимодействия. Обратите особое внимание на особенности появления ошибок ложного представления и возникновения нелинейной вычислительной неустойчивости.

Рассмотреть методы борьбы с нелинейной вычислительной неустойчивостью.

Литература: [7], [8], [9].

Вопросы для самопроверки

1. Чем линейное уравнение отличается от нелинейного?
2. Что такое нелинейное взаимодействие?
3. Какие волны возникнут в результате нелинейного взаимодействия двух четырехшаговых волн?
4. Каким образом можно предотвратить появление нелинейной вычислительной неустойчивости?
5. Что такое ошибки ложного представления?
6. Что является причиной появления нелинейной вычислительной неустойчивости?
7. Возникнет ли нелинейная вычислительная неустойчивость при решении уравнения колебаний?

Аппроксимация уравнений модели мелкой воды на расшатанных и нерасшатанных сетках

Изучить аппроксимацию уравнений гидродинамики на примере уравнений модели мелкой воды.

Необходимо уметь аппроксимировать любые уравнения на любых сетках.

Необходимо научиться использовать операторы дифференцирования и сглаживания для аппроксимации уравнений.

Обратите внимание на то, что при аппроксимации уравнений, особенно на расшатанных сетках, используются дополнительные сглаживания.

Литература: [7], [8], [9].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое аппроксимация уравнений методом конечных разностей?
2. Что такое сетка?
3. Что такое расшатанная сетка?
4. Можно ли использовать стандартные операторы дифференцирования при аппроксимации производных направленными разностями назад?

5. Для какого узла сетки С Аракавы надо аппроксимировать уравнение зональной составляющей скорости ветра?

6. На какой сетке удобнее всего аппроксимировать уравнения гидродинамики атмосферы?

7. Какая сетка требует большего количества сглаживаний?

Система уравнений гидротермодинамики атмосферы в сферической системе координат

В современных гидродинамических моделях атмосферы часто все уравнения гидродинамики записываются в сферической системе координат, которая позволяет более корректно описывать форму Земли.

Необходимо уметь записывать уравнения гидродинамики атмосферы в сферической системе координат; изучить достоинства и недостатки сферической системы координат. При этом обратите внимание на изучение методов решения проблемы полюсов и преодоление отрицательного влияния сходимости меридианов.

Необходимо изучить сферическую систему координат со смещенным полюсом.

Литература: [1], [3], [4], [7], [11], [12].

Вопросы для самопроверки

1. Какие независимые переменные используются в сферической системе координат?
2. Где расположено начало сферической системы координат?
3. Что такое коэффициенты Ламе?
4. Какие коэффициенты Ламе используются в сферической системе координат?
5. Что такое проблема полюса?
6. Что такое сходимость меридианов?
7. Почему сходимость меридианов является проблемой при решении уравнений гидродинамики атмосферы?
8. Что такое система координат со сдвинутым полюсом?
9. Что такое особая точка в сферической системе координат?

Спектральные методы решения уравнений гидродинамики атмосферы

Перед изучением данного раздела стоит повторить основные свойства рядов, операций с ними. В метеорологии ряды используются очень широко как в прогнозе, так и в анализе атмосферных процессов. Спектральные методы решения уравнений гидродинамики атмосферы основаны на представлении полей метеорологических величин в виде рядов по определенным базисным функциям. Спектральные методы являются проекционными методами, в которых физическое пространство проецируется в фазовое. При этом прогнозируются не сами метеорологические величины, а их коэффициенты разложения.

Необходимо изучить принципы, по которым выбираются базисные функции для разложения в ряд метеорологических величин. Изучить основные свойства тригонометрических и сферических функций. Знать методику определения коэффициентов разложения в ряд по сферическим и тригонометрическим функциям.

Для решения уравнений гидродинамики спектральными методами строят определяющую систему уравнений. Для ее построения используют методы минимизации невязки: метод коллокации, метод наименьших квадратов и метод Галёркина. Необходимо изучить основные принципы построения определяющей системы уравнений на примере линейного и нелинейного уравнения адвекции.

Для решения определяющей системы уравнений используются в основном три метода: *метод коэффициентов взаимодействия, метод спектрально-сеточного преобразования* и *псевдоспектральный метод*. Необходимо изучить применение этих методов на примере нелинейного уравнения адвекции.

Для аппроксимации производных по времени и по вертикали в спектральных моделях используют конечно-разностные аналоги. Следует рассмотреть разные методы аппроксимации производных по времени в спектральных моделях атмосферы.

Несколько обособленно среди всех методов решения уравнений стоит *метод конечных элементов*, который относится к проекционно-сеточным методам. Этот метод использует представление полей метеорологических величин в ряд, но не глобально, а локально на ограниченном пространстве – конечном носителе. Получаемая система уравнений аналогична системе уравнений при использовании метода сеток. Необходимо изучить представление метеорологических величин по финитным функциям и получение системы уравнений для решения на примере нелинейного уравнения адвекции.

Литература: [1], [7], [11].

Вопросы для самопроверки

1. В чем основная суть спектральных методов решения уравнений гидродинамики атмосферы?
2. Почему спектральные методы решения уравнений гидродинамики атмосферы называются проекционными?
3. Как в спектральных моделях рассчитываются производные по времени и вертикали? Почему?
4. Какие требования предъявляются к базисным функциям?
5. Какое из свойств базисных функций используется при выводе определяющей системы уравнений?
6. Что такое определяющая система уравнений?
7. Почему метод коэффициентов взаимодействия не используется сегодня в оперативных моделях прогноза погоды?
8. Почему метод коллокации при получении определяющей системы уравнений редко используется при построении моделей прогноза погоды?
9. В чем достоинства метода конечных элементов?

Специальные схемы интегрирования уравнений гидротермодинамики атмосферы

Для решения некоторых задач гидродинамического моделирования требуются специальные схемы. Специальными называются схемы, обладающие определенными свойствами.

Необходимо изучить, какие системы уравнений являются *жесткими*.

К специальным схемам в первую очередь относятся консервативные схемы, которые обеспечивают сохранение суммарного или среднего значения моделируемой функции.

Монотонные схемы очень популярны при решении экологических задач и задач переноса малых атмосферных примесей. Монотонными называются схемы, которые переводят монотонную функцию в монотонную с тем же направлением роста.

Монотонные схемы очень сложны для реализации, поэтому их часто заменяют квазимонотонными схемами, к которым можно отнести схемы коррекции потоков, TVD-схемы, схемы Кабаре.

Необходимо изучить все перечисленные схемы, научиться аппроксимировать любое уравнение переноса вышеперечисленными схемами.

Литература: [2], [5], [7].

Вопросы для самопроверки

1. В каких задачах нельзя использовать стандартные конечно-разностные схемы?
2. Что такое стандартные конечно-разностные схемы?
3. Что такое монотонная функция?
4. Что такое монотонная схема?
5. Какие уравнения решаются с использованием монотонных схем?
6. Чем монотонные схемы отличаются от квазимонотонных?
7. Что такое ограничитель в TVD-схемах?
8. Что такое полулагранжев подход?
9. Какая схема является самой простой монотонной схемой?
10. Используются ли в современных гидродинамических моделях прогноза погоды монотонные схемы?
11. Какие схемы используются при решении жестких задач?

Различные схемы интегрирования уравнений гидротермодинамики атмосферы по времени (на примере уравнений модели мелкой воды)

Любое уравнение можно аппроксимировать с использованием явной, неявной и полунеявной схемы.

Необходимо научиться аппроксимировать уравнения гидродинамики атмосферы явной и неявной схемами и разрабатывать алгоритмы реализации этих схем.

Для моделей мелкой воды возможны четыре варианта полунеявной схемы. Необходимо научиться аппроксимировать уравнения с использованием полунеявной схемы.

Обратить внимание на различные алгоритмы реализации полунеявных алгоритмов.

Изучить достоинства и недостатки различных полунеявных схем.

Литература: [7], [8].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое явная схема?
2. Что такое неявная схема?
3. Что такое полунеявная схема?
4. Какая схема обеспечивает большую устойчивость решения?
5. Какая схема решения более проста при практической реализации?
6. Какие слагаемые в полунеявных схемах эффективнее записывать по неявной схеме?
7. Возможно ли решение уравнений аппроксимированных полунеявной схеме без итераций?

Повышение точности интегрирования уравнений по вертикали

Во многих уравнениях гидродинамики атмосферы присутствуют производные по вертикали. Обычно разрешение моделей по вертикали меньше разрешения по горизонтали. Производные по вертикали могут быть аппроксимированы стандартными конечными разностями второго или первого порядка точности.

Для увеличения точности расчета производных по вертикали используются расшатанные сетки. Расшатанные сетки по способу распределения зависимых переменных подразделяются на сетки Лоренца и Чарни–Филлипса.

Необходимо изучить различные сетки и научиться аппроксимировать уравнения гидродинамики на различных сетках.

Литература: [12].

Вопросы для самопроверки

1. Нарисуйте сетку Лоренца.
2. Нарисуйте сетку Чарни–Филлипса.
3. Аппроксимируйте производную $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ на сетке Чарни–Филлипса.
4. Аппроксимируйте производную $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ на сетке Лоренца.
5. Аппроксимируйте производную $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ на нерасшатанной сетке.

Исследование чувствительности гидродинамических моделей атмосферы

В гидродинамических моделях атмосферы много неопределенностей и неточностей. Для изучения влияние различных компонент прогностической системы на качество прогноза исследуют чувствительность гидродинамической модели к различным параметрам модели.

Необходимо изучить прямой метод исследования чувствительности.

Литература: [7].

Вопросы для самопроверки

1. Что такое чувствительность?
2. Что такое прямой метод определения чувствительности гидродинамических моделей атмосферы?
3. Как можно использовать чувствительность гидродинамических моделей атмосферы?

Контрольные работы

Общие указания

К выполнению контрольных работ следует приступить после тщательного изучения рекомендованных разделов.

В результате самостоятельного изучения дисциплины необходимо выполнить две контрольные работы, состоящие из 10 заданий. Каждое задание представлено в 10 вариантах. В приложении приведено 100 видов сочетаний разных вариантов этих заданий. Студент выполняет обе контрольные работы с таким сочетанием вариантов, номер которого соответствует последним двум цифрам номера его зачетной книжки. Например, если последние две цифры номера зачетной книжки – 54, то студент выполняет контрольную работу под номером сочетания 54. Как видно из приложения, при решении первого задания следует отвечать на вопрос «*в*», пятого – на вопрос «*д*», седьмого – на вопрос «*д*» и т. д.

Ответы на вопросы контрольной работы должны быть сформулированы достаточно подробно, чтобы был ясен физический смысл излагаемого материала, который должен быть подтвержден математическими формулами. Все выводы должны быть обоснованы.

Контрольная работа № 1

1.1. Запишите систему уравнений гидродинамики атмосферы в адиабатическом и квазистатическом приближении в заданных координатах и выполните задание. Обоснуйте свои результаты.

А) Сферическая система координат по горизонтали, декартова система по вертикали. Отметьте нелинейные слагаемые.

Б) Декартова система координат по горизонтали, декартова система по вертикали. Отметьте слагаемые, описывающие волны Россби.

В) Сферическая система координат по горизонтали, изобарическая система по вертикали. Отметьте линейные слагаемые.

Г) Декартова система координат по горизонтали, изобарическая система по вертикали. Отметьте слагаемые, описывающие действующие в атмосфере силы.

Д) Сферическая система координат по горизонтали, сигма-система по вертикали. Отметьте слагаемые, описывающие адвективные процессы.

Е) Декартова система координат по горизонтали, сигма-система по вертикали. Отметьте, описывающие процессы адаптации.

Ж) Декартова система координат по горизонтали, декартова система по вертикали. Отметьте прогностические уравнения.

З) Сферическая система координат по горизонтали, сигма-система по вертикали. Отметьте диагностические уравнения.

И) Сферическая система координат по горизонтали, сигма-система по вертикали. Отметьте слагаемые, описывающие силу барического градиента.

К) Сферическая система координат по горизонтали, сигма-система по вертикали. Отметьте слагаемые, описывающие силу Кориолиса.

1.2. Преобразуйте уравнения полной системы, учитывающие следующие упрощающие и фильтрующие гипотезы, и запишите.

А) Уравнение притока тепла с применением адиабатической гипотезы.

Б) Уравнения движения с применением адиабатической гипотезы.

В) Уравнения движения в квазистатическом приближении.

Г) Баротропное уравнение вихря скорости.

Д) Уравнение баланса.

Е) Уравнение для аналога вертикальной скорости в сигма-системе координат.

Ж) Уравнение вихря скорости в геострофическом приближении.
З) Первое приближение уравнение дивергенции.
И) Уравнения движения в геострофическом приближении.
К) Уравнение неразрывности в сигма-системе координат.

1.3. Запишите систему уравнений гидродинамики, используемую в следующих моделях.

А) Баротропная квазигеострофическая модель.
Б) Кзазисоленоидальная модель.
В) Модель мелкой воды в изобарической системе координат.
Г) Баротропная квазигеострофическая модель.
Д) Соленоидальная модель.
Е) Модель мелкой воды в сигма системе координат.
Ж) Баротропная квазигеострофическая модель.
З) Кзазисоленоидальная модель.
И) Модель мелкой воды применительно к уровню 500 гПа.
К) Соленоидальная модель.

1.4. Получите конечно-разностный аналог.

А) Второй производной, имеющий четвертый порядок точности.
Б) Оператора Лапласа, имеющий четвертый порядок точности.
В) Якобиана, имеющий четвертый порядок точности.
Г) Четвертой производной, имеющий второй порядок точности.
Д) Второй производной, имеющий первый порядок точности.
Е) Третьей производной, имеющий второй порядок точности.
Ж) Третьей производной, имеющий первый порядок точности.
З) Оператора Лапласа, имеющий первый порядок точности.
И) Четвертой производной, имеющий первый порядок точности.
К) Пятой производной, имеющий второй порядок точности.

1.5. Запишите линейное уравнение адвекции. Аппроксимируйте его одной из следующих схем.

А) Производную по времени аппроксимировать направленными разностями вперед, производную по пространству – направленными разностями вперед. Схема явная.

Б) Производную по времени аппроксимировать направленными разностями назад, производную по пространству – направленными разностями вперед. Схема неявная.

В) Производную по времени аппроксимировать центральными разностями, производную по пространству – направленными разностями вперед. Схема явная.

Г) Производную по времени аппроксимировать направленными разностями вперед, производную по пространству – направленными разностями назад. Схема явная.

Д) Производную по времени аппроксимировать направленными разностями вперед, производную по пространству – центральными разностями. Схема явная.

Е) Производную по времени аппроксимировать центральными разностями, производную по пространству – направленными разностями назад. Схема явная.

Ж) Производную по времени аппроксимировать центральными разностями, производную по пространству – направленными разностями назад. Схема неявная.

З) Производную по времени аппроксимировать центральными разностями, производную по пространству – направленными разностями вперед. Схема неявная.

И) Производную по времени аппроксимировать центральными разностями, производную по пространству – центральными разностями. Схема явная.

К) Производную по времени аппроксимировать направленными разностями вперед, производную по пространству – центральными разностями. Схема трапеций.

1.6. Для записанной в задании 1.5 схемы найти ошибку аппроксимации.

1.7. Для записанной в задании 1.6 схемы проанализировать устойчивость методом Неймана.

1.8. Для записанной в задании 1.5 схемы определить наличие или отсутствие вычислительных мод. Обосновать свой ответ.

1.9. Для записанной в задании 1.5 схемы определить шаг по времени, удовлетворяющий условию устойчивости, для интегрирования линейного уравнения адвекции при следующих параметрах.

А) Шаг по пространству 100 км, скорость переноса 5 м/с.

Б) Шаг по пространству 1000 км, скорость переноса 15 м/с.

В) Шаг по пространству 10 км, скорость переноса 7 м/с.

Г) Шаг по пространству 50 км, скорость переноса 10 м/с.

Д) Шаг по пространству 70 км, скорость переноса 12 м/с.

Е) Шаг по пространству 1 км, скорость переноса 3 м/с.

Ж) Шаг по пространству 20 км, скорость переноса 4 м/с.

З) Шаг по пространству 50 км, скорость переноса 9 м/с.

И) Шаг по пространству 300 км, скорость переноса 14 м/с.

К) Шаг по пространству 5 км, скорость переноса 5 м/с.

1.10. Записать по схеме, предложенной в задании 1.5, уравнение колебаний и проанализировать ошибку в фазе колебаний.

Контрольная работа № 2

2.1. Аппроксимировать уравнения модели мелкой воды согласно следующим условиям.

А) Производную по времени аппроксимировать направленными разностями вперед, производную по пространству – центральными разностями. Схема явная. Сетка *A* Аракавы

Б) Производную по времени аппроксимировать направленными разностями вперед, производную по пространству – центральными разностями. Схема явная. Сетка *B* Аракавы

В) Производную по времени аппроксимировать направленными разностями вперед, производную по пространству – центральными разностями. Схема явная. Сетка *C* Аракавы.

Г) Производную по времени аппроксимировать направленными разностями вперед, производную по пространству – центральными разностями. Схема явная. Сетка *Д* Аракавы.

Д) Производную по времени аппроксимировать направленными разностями вперед, производную по пространству – центральными разностями. Схема неявная. Сетка *A* Аракавы.

Е) Производную по времени аппроксимировать направленными разностями вперед, производную по пространству – центральными разностями. Схема неявная. Сетка *B* Аракавы.

Ж) Производную по времени аппроксимировать направленными разностями вперед, производную по пространству – центральными разностями. Схема неявная. Сетка *C* Аракавы.

З) Производную по времени аппроксимировать направленными разностями вперед, производную по пространству – центральными разностями. Схема неявная. Сетка *Д* Аракавы.

И) Производную по времени аппроксимировать центральными разностями, производную по пространству – центральными разностями. Схема неявная. Сетка *C* Аракавы.

К) Производную по времени аппроксимировать центральными разностями, производную по пространству – центральными разностями. Схема неявная. Сетка *B* Аракавы.

2.2. Запишите систему уравнений адаптации модели мелкой воды. Получите одномерный вариант этих моделей, запишите их в полудискретной форме по указанной схеме, проанализируйте устойчивость.

А) Производную по пространству – центральными разностями. Схема явная. Сетка *A* Аракавы.

Б) Производную по пространству – центральными разностями. Схема явная. Сетка *В* Аракавы.

В) Производную по пространству – центральными разностями. Схема явная. Сетка *С* Аракавы.

Г) Производную по пространству – центральными разностями. Схема явная. Сетка *Д* Аракавы.

Д) Производную по пространству – центральными разностями. Схема неявная. Сетка *А* Аракавы.

Е) Производную по пространству – центральными разностями. Схема неявная. Сетка *В* Аракавы.

Ж) Производную по пространству – центральными разностями. Схема неявная. Сетка *С* Аракавы.

З) Производную по пространству – центральными разностями. Схема неявная. Сетка *Д* Аракавы.

И) Производную по пространству – центральными разностями. Схема неявная. Сетка *С* Аракавы.

К) Производную по пространству – центральными разностями. Схема неявная. Сетка *В* Аракавы.

2.3. Для уравнений модели мелкой воды выведите и объясните использование интегральных инвариантов:

А, Б, В, Г, Д) Масса.

Е, Ж, З, И, К) Потенциальная энергия.

2.4. Примените метод расщепления для решения уравнений модели мелкой воды и разработайте алгоритм решения следующей системы наилучшим образом:

А, Г, Е, Ж, З) Адвекции.

Б, В, Д, И, К) Адаптации.

2.5. Запишите указанное уравнение полной системы уравнений гидродинамики атмосферы и поставьте необходимое фиктивное граничное условие.

А) Уравнение движения для зональной составляющей в изобарической системе координат.

Б) Уравнение движения для меридиональной составляющей в изобарической системе координат.

В) Уравнение притока тепла.

Г) Уравнение неразрывности в изобарической системе координат.

Д) Уравнение статики в изобарической системе координат.

Е) Уравнение статики в сигма-системе координат.

Ж) Уравнение неразрывности в сигма-системе координат.

З) Уравнение движения для зональной составляющей в сигма-системе координат.

И) Уравнение движения для меридиональной составляющей в сигма-системе координат.

К) Уравнение неразрывности в изобарической системе координат.

2.6. Разработайте алгоритм решения линейного уравнения в сферической системе координат по явной схеме с центральными разностями по времени и пространству. Определите количество узлов в области решения, поставьте начальные и определите граничные условия. Область решения круг широты – 60° с. ш., заблаговременность прогноза – 24 часа.

А) Шаг по долготе 1°, с = 10 м/с, шаг по времени 5 минут.
Б) Шаг по долготе 2°, с = 10 м/с, шаг по времени 10 минут.
В) Шаг по долготе 5°, с = 20 м/с, шаг по времени 20 минут.
Г) Шаг по долготе 10° , с = 30 м/с, шаг по времени 60 минут.
Д) Шаг по долготе 20°, с = 50 м/с, шаг по времени 120 минут.
Е) Шаг по долготе 1°, с = 20 м/с, шаг по времени 5 минут.
Ж) Шаг по долготе 3°, с=10 м/с, шаг по времени 8 минут.
З) Шаг по долготе 4°, с = 5 м/с, шаг по времени 30 минут.
И) Шаг по долготе 5°, с = 10 м/с, шаг по времени 10 минут.
К) Шаг по долготе 6°, с = 1 м/с, шаг по времени 5 минут.

2.7. Определите оптимальное значение коэффициентов разложения по сферическим функциям на фиксированной поверхности по вертикали $\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N} f(t,\mu,\lambda,z)\,Y_j^q(\mu,\lambda)$ *функции, заданной на всем земном шаре на следующей сетке точек:*

А) $\Delta\lambda = 1;\ \Delta\mu = 0{,}1.$

Б) $\Delta\lambda = 2;\ \Delta\mu = 0{,}2.$

В) $\Delta\lambda = 5;\ \Delta\mu = 0{,}25.$

Г) $\Delta\lambda = 2{,}5;\ \Delta\mu = 0{,}1.$

Д) $\Delta\lambda = 1{,}25;\ \Delta\mu = 0{,}2.$

Е) $\Delta\lambda = 1{,}5;\ \Delta\mu = 0{,}25.$

Ж) $\Delta\lambda = 2{,}25;\ \Delta\mu = 0{,}1.$

З) $\Delta\lambda = 7{,}375;\ \Delta\mu = 0{,}2.$

И) $\Delta\lambda = 4;\ \Delta\mu = 0{,}25.$

К) $\Delta\lambda = 3;\ \Delta\mu = 0,5.$

2.8. Получите спектральную форму уравнения. В качестве базисных функций используйте экспоненту.

А) $\frac{\partial f}{\partial t} + c\frac{\partial f}{\partial x} = 0;\ \ c = \text{const}.$

Б) $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{c}{a\cos(\varphi)}\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0;\ \ c = \text{const}.$

В) $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial c f}{\partial x} = 0;\ \ c = \text{const}.$

Г) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial c u}{\partial x} = 0;\ \ c = \text{const}.$

Д) $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial u f}{\partial x} = 0;\ \ u \neq \text{const}.$

Е) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u u}{\partial x} = 0.$

Ж) $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{a}\frac{\partial u f}{\partial \varphi} = 0;\ \ u \neq \text{const}.$

З) $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f}{a\cos(\varphi)}\frac{\partial f}{\partial \lambda} = 0.$

И) $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{a\cos(\varphi)}\frac{\partial u}{\partial \lambda} = 0.$

К) $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{f}{a}\frac{\partial f}{\partial \mu} = 0.$

2.9. Получите определяющую систему уравнений для решения нелинейного уравнения адвекции спектральным методом с использованием тригонометрических функций в качестве базисных и с минимизацией невязки методом:

А, Г, К, И) Галёркина.

Б, Д, З) Наименьших квадратов.

В, Е, Ж) Коллокаций.

2.10. Рассчитайте количество коэффициентов взаимодействия в слагаемом

$$\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=|m|}^{N}\sum_{l=-N}^{N}\sum_{k=|l|}^{N}\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi} Y_n^m(\mu,\lambda)\, Y_j^q(\mu,\lambda)\, i m \frac{\partial Y_k^l(\mu,\lambda)}{\partial \mu}\, d\lambda\, d\mu$$

при разных максимальных волновых числах, используемых в разложении

А) 5.
Б) 6.
В) 7.
Г) 8.
Д) 9.
Е) 3.
Ж) 4.
З) 10.
И) 11.
К) 15.

Различные сочетания вариантов вопросов по контрольным работам

Контрольная работа № 1

№ варианта	Номера заданий					№ варианта	Номера заданий					№ варианта	Номера заданий				
	1	**3**	**5**	**2**	**9**		**1**	**3**	**5**	**2**	**9**		**1**	**3**	**5**	**2**	**9**
	Номера вопросов						Номера вопросов						Номера вопросов				
00	а	а	а	а	а	33	б	а	б	а	в	67	а	б	б	а	б
01	б	б	б	б	б	34	в	б	в	б	а	68	б	в	в	б	в
02	в	в	в	в	в	35	г	в	г	в	б	69	в	а	г	в	г
03	г	г	г	а	г	36	д	г	д	а	в	70	г	б	д	а	д
04	д	д	д	б	д	37	а	д	а	б	а	71	д	в	а	б	а
05	е	е	е	в	е	38	б	е	б	в	б	72	е	г	б	в	б
06	ж	ж	ж	а	ж	39	в	ж	в	а	в	73	ж	д	в	а	а
07	ж	ж	ж	б	ж	40	г	ж	г	б	а	74	ж	е	г	б	б
08	з	з	з	в	з	41	а	з	д	в	б	75	з	ж	д	в	в
09	и	и	и	а	и	42	б	и	е	а	в	76	и	ж	е	а	г
10	а	б	в	б	а	43	в	а	ж	б	а	77	а	з	ж	б	д
11	б	в	а	в	б	44	г	б	ж	в	б	78	с	и	ж	в	е
12	а	г	б	а	в	45	д	б	з	а	ж	79	и	а	з	а	ж
13	б	д	в	б	г	46	е	б	и	б	а	80	а	и	и	б	ж
14	в	е	г	в	д	47	ж	в	а	в	б	81	з	а	а	в	з
15	г	ж	д	а	е	48	ж	г	и	а	ж	82	а	з	и	а	и
16	д	ж	а	б	ж	49	з	д	з	б	ж	83	б	в	а	б	а
17	е	з	б	в	ж	50	и	а	а	в	ж	84	в	а	б	в	и
18	ж	и	в	а	з	51	а	б	б	а	б	85	г	б	в	а	е
19	ж	а	г	б	и	52	а	в	в	б	б	86	д	в	г	б	а
20	з	е	д	в	а	53	б	г	г	в	в	87	е	г	д	в	б
21	и	в	е	а	б	54	в	д	д	а	а	88	ж	д	е	а	в
22	а	б	ж	б	а	55	г	е	е	б	б	89	ж	е	ж	Б	г
23	б	в	ж	в	б	56	д	ж	ж	в	в	90	з	ж	ж	в	д
24	г	г	з	а	в	57	е	ж	ж	а	г	91	и	ж	з	а	е
25	д	д	и	б	г	58	ж	д	з	б	д	92	а	з	и	б	ж
26	е	е	а	в	д	59	ж	е	и	в	е	93	е	и	а	в	ж
27	ж	ж	ж	а	а	60	з	ж	а	а	ж	94	ж	а	ж	а	з
28	ж	ж	з	б	б	61	и	ж	ж	б	ж	95	ж	е	ж	б	и
29	з	з	и	в	в	62	а	з	ж	в	з	96	з	ж	з	в	а
30	и	и	а	а	г	63	з	и	з	а	и	97	и	ж	и	а	и
31	а	а	е	б	д	64	в	а	и	б	а	98	а	з	а	б	а
32	ж	е	ж	в	е	65	и	ж	а	в	ж	99	з	и	з	в	з
33	д	с	в	а	ж	66	а	в	в	а	в						

№ варианта	Номера заданий					№ варианта	Номера заданий					№ варианта	Номера заданий				
	2	4			10		2	4			10		2	4			10
	Номера вопросов						Номера вопросов						Номера вопросов				
00	а	а			а	33	б	а			в	67	а	б			б
01	б	б			б	34	в	б			а	68	б	в			в
02	в	в			в	35	г	в			б	69	в	а			г
03	г	г			г	36	д	г			в	70	г	б			д
04	д	д			д	37	а	д			а	71	д	в			а
05	е	е			е	38	б	е			б	72	е	г			б
06	ж	ж			ж	39	в	ж			в	73	ж	д			а
07	ж	ж			ж	40	г	ж			а	74	ж	е			б
08	з	з			з	41	а	з			б	75	з	ж			в
09	и	и			и	42	б	и			в	76	и	ж			г
10	а	б			а	43	в	а			а	77	а	з			д
11	б	в			б	44	г	б			б	78	с	и			е
12	а	г			в	45	д	б			ж	79	и	а			ж
13	б	д			г	46	е	б			а	80	а	и			ж
14	в	е			д	47	ж	в			б	81	з	а			з
15	г	ж			е	48	ж	г			ж	82	а	з			и
16	д	ж			ж	49	з	д			ж	83	б	в			а
17	е	з			ж	50	и	а			ж	84	в	а			и
18	ж	и			з	51	а	б			б	85	г	б			е
19	ж	а			и	52	а	в			б	86	д	в			а
20	з	е			а	53	б	г			в	87	е	г			б
21	и	в			б	54	в	д			а	88	ж	д			в
22	а	б			а	55	г	е			б	89	ж	е			г
23	б	в			б	56	д	ж			в	90	з	ж			д
24	г	г			в	57	е	ж			г	91	и	ж			е
25	д	д			г	58	ж	д			д	92	а	з			ж
26	е	е			д	59	ж	е			е	93	е	и			ж
27	ж	ж			а	60	з	ж			ж	94	ж	а			з
28	ж	ж			б	61	и	ж			ж	95	ж	е			и
29	з	з			в	62	а	з			з	96	з	ж			а
30	и	и			г	63	з	и			и	97	и	ж			и
31	а	а			д	64	в	а			а	98	а	з			а
32	ж	е			е	65	и	ж			ж	99	з	и			з
33	д	с			ж	66	а	в			в						

Контрольная работа № 2

№ варианта	Номера заданий					№ варианта	Номера заданий					№ варианта	Номера заданий				
	12	**14**	**16**	**18**	**20**		**12**	**14**	**16**	**18**	**20**		**12**	**14**	**16**	**18**	**20**
	Номера вопросов						Номера вопросов						Номера вопросов				
00	б	а	б	а	в	33	а	б	б	а	б	67	а	а	а	а	а
01	в	б	в	б	а	34	б	в	в	б	в	68	б	б	б	б	б
02	г	в	г	в	б	35	в	а	г	в	г	69	в	в	в	в	в
03	д	г	д	а	в	36	г	б	д	а	д	70	г	г	г	а	г
04	а	д	а	б	а	37	д	в	а	б	а	71	д	д	д	б	д
05	б	е	б	в	б	38	е	г	б	в	б	72	е	е	е	в	е
06	в	ж	в	а	в	39	ж	д	в	а	а	73	ж	ж	ж	а	ж
07	г	ж	г	б	а	40	ж	е	г	б	б	74	ж	ж	ж	б	ж
08	а	з	д	в	б	41	з	ж	д	в	в	75	з	з	з	в	з
09	б	и	е	а	в	42	и	ж	е	а	г	76	и	и	и	а	и
10	в	а	ж	б	а	43	а	з	ж	б	д	77	а	б	в	б	а
11	г	б	ж	в	б	44	с	и	ж	в	е	78	б	в	а	в	б
12	д	б	з	а	ж	45	и	а	з	а	ж	79	а	г	б	а	в
13	е	б	и	б	а	46	а	и	и	б	ж	80	б	д	в	б	г
14	ж	в	а	в	б	47	з	а	а	в	з	81	в	е	г	в	д
15	ж	г	и	а	ж	48	а	з	и	а	и	82	г	ж	д	а	е
16	з	д	з	б	ж	49	б	в	а	б	а	83	д	ж	а	б	ж
17	и	а	а	в	ж	50	в	а	б	в	и	84	е	з	б	в	ж
18	а	б	б	а	б	51	г	б	в	а	е	85	ж	и	в	а	з
19	а	в	в	б	б	52	д	в	г	б	а	86	ж	а	г	б	и
20	б	г	г	в	в	53	е	г	д	в	б	87	з	е	д	в	а
21	в	д	д	а	а	54	ж	д	е	а	в	88	и	в	е	а	б
22	г	е	е	б	б	55	ж	е	ж	б	г	89	а	б	ж	б	а
23	д	ж	ж	в	в	56	з	ж	ж	в	д	90	б	в	ж	в	б
24	е	ж	ж	а	г	57	и	ж	з	а	е	91	г	г	з	а	в
25	ж	д	з	б	д	58	а	з	и	б	ж	92	д	д	и	б	г
26	ж	е	и	в	е	59	е	и	а	в	ж	93	е	е	а	в	д
27	з	ж	а	а	ж	60	ж	а	ж	а	з	94	ж	ж	ж	а	а
28	и	ж	ж	б	ж	61	ж	е	ж	б	и	95	ж	ж	з	б	б
29	а	з	ж	в	з	62	з	ж	з	в	а	96	з	з	и	в	в
30	з	и	з	а	и	63	и	ж	и	а	и	97	и	и	а	а	г
31	в	а	и	б	а	64	а	з	а	б	а	98	а	а	е	б	д
32	и	ж	а	в	ж	65	з	и	з	в	з	99	ж	е	ж	в	е
33	а	в	в	а	в	66	а	в	г	ж	з		д	с	в	а	ж

№ варианта	Номера заданий					№ варианта	Номера заданий					№ варианта	Номера заданий				
	11	**13**	**15**	**17**	**19**		**11**	**13**	**15**	**17**	**19**		**11**	**13**	**15**	**17**	**19**
	Номера вопросов						Номера вопросов						Номера вопросов				
00	а	а	в	а	б	33	а	а	а	а	а	67	б	а	б	а	в
01	б	б	а	б	в	34	б	б	б	б	б	68	в	б	в	б	а
02	в	в	б	в	г	35	в	в	в	в	в	69	г	в	г	в	б
03	г	а	в	г	д	36	г	г	г	а	г	70	д	г	д	а	в
04	д	б	а	д	а	37	д	д	д	б	д	71	а	д	а	б	а
05	е	в	б	е	б	38	е	е	е	в	е	72	б	е	б	в	б
06	ж	а	в	ж	в	39	ж	ж	ж	а	ж	73	в	ж	в	а	в
07	ж	б	а	ж	г	40	ж	ж	ж	б	ж	74	г	ж	г	б	а
08	з	в	б	з	д	41	з	з	з	в	з	75	а	з	д	в	б
09	и	а	в	и	е	42	и	и	и	а	и	76	б	и	е	а	в
10	а	б	а	в	ж	43	а	б	в	б	а	77	в	а	ж	б	а
11	б	в	б	а	ж	44	б	в	а	в	б	78	г	б	ж	в	б
12	в	а	ж	б	з	45	а	г	б	а	в	79	д	б	з	а	ж
13	г	б	а	в	и	46	б	д	в	б	г	80	е	б	и	б	а
14	д	в	б	г	а	47	в	е	г	в	д	81	ж	в	а	в	б
15	е	а	ж	д	и	48	г	ж	д	а	е	82	ж	г	и	а	ж
16	ж	б	ж	а	з	49	д	ж	а	б	ж	83	з	д	з	б	ж
17	ж	в	ж	б	а	50	е	з	б	в	ж	84	и	а	а	в	ж
18	з	а	б	в	б	51	ж	и	в	а	з	85	а	б	б	а	б
19	и	б	б	г	в	52	ж	а	г	б	и	86	а	в	в	б	б
20	а	в	в	д	г	53	з	е	д	в	а	87	б	г	г	в	в
21	б	а	а	е	д	54	и	в	е	а	б	88	в	д	д	а	а
22	а	б	б	ж	е	55	а	б	ж	б	а	89	г	е	е	б	б
23	б	в	в	ж	ж	56	б	в	ж	в	б	90	д	ж	ж	в	в
24	в	а	г	з	ж	57	г	г	з	а	в	91	е	ж	ж	а	г
25	г	б	д	и	з	58	д	д	и	б	г	92	ж	д	з	б	д
26	д	в	е	а	и	59	е	е	а	в	д	93	ж	е	и	в	е
27	а	а	ж	ж	а	60	ж	ж	ж	а	а	94	з	ж	а	а	ж
28	б	б	ж	з	ж	61	ж	ж	з	б	б	95	и	ж	ж	б	ж
29	в	в	з	и	ж	62	з	з	и	в	в	96	а	з	ж	в	з
30	г	а	и	а	з	63	и	и	а	а	г	97	з	и	з	а	и
31	д	б	а	е	и	64	а	а	е	б	д	98	в	а	и	б	а
32	е	в	ж	ж	а	65	ж	е	ж	в	е	99	и	ж	а	в	ж
33	ж	а	в	в	в	66	д	с	в	а	ж		а	в	в	а	в

Содержание

Учебное издание

Составители:
Ольга Георгиевна Анискина,
Людмила Олеговна Неёлова

Методические указания по дисциплине
«Численные методы математического моделирования»

Начальник РИО Н.И. Афанасьева
Редактор Л.Ю. Киреева
Верстка М.В. Ивановой

Подписано в печать 29.12.16. Формат 60×90 $^{1}/_{16}$. Гарнитура Times New Roman.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 3,0. Тираж 100 экз. Заказ № 614.
РГГМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98.