МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
HYDROMETEOROLOGIGAL INSTITUTE IN LEHINGRAD

Transactions

Труды
вып. 32

vol. 32

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ПРОБЛЕМЕ ОКЕАН—АТМОСФЕРА

INVESTIGATIONS
ON THE OCEAN—ATMOSPHERE PROBLEM

Сборник 2
работ научно-исследовательского института взаимодействия океана и атмосферы

issve 2
of the papers of the air sea interaction institute

ЛЕНИНГРАД
1970

Сборник содержит результаты исследований взаимодействия океана и атмосферы, выполняемых в Ленинградском гидрометеорологическом институте. Статьи посвящены формированию процессов в реальных океанах и морях, изменению метеорологических и гидрологических условий и их прогнозу. Некоторые статьи имеют теоретическое и методическое содержание.

Сборник рассчитан на широкий круг океанологов, метеорологов и геофизиков, а также на преподавателей, аспирантов и студентов.

Научный редактор | *В. В. Тимонов* |

Ответственный редактор *О. А. Алекин*

2—9—6

Труды Ленинградского Гидрометеорологического института
Исследования по проблеме океан — атмосфера

СБОРНИК 2

Работ научно-исследовательского института взаимодействия океана и атмосферы

Редактор *Б. И. Леонова*

М-13 525. Сдано в набор 21/V-1968 г. Подписано к печати 2/VII-1970 г. Формат бум. 70 × 108$^1/_{16}$. Бумага тип. № 3. Печ. л. 16. Уч.-изд. л. 19. Тираж 500. Заказ 2329. Цена 1 р. 84 к. Тем. план 1968 г.

Типография профессионально-технического училища № 4. Ленинград, 12-я Красноармейская ул., 27.

СОДЕРЖАНИЕ

Часть первая. ФИЗИКА ОКЕАНА И АТМОСФЕРЫ

Теория, эксперименты, методы расчета

Формирование процессов в реальных океанах и морях

Изменение метеорологических и гидрологических условий, их прогноз

Методы натурных исследований, приборы

Часть вторая. ХИМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ОКЕАНА И АТМОСФЕРЫ

CONTENTS

Part first. PHYSICS OF THE OCEAN AND THE ATMOSPHERE

К ВОПРОСУ О РАСЧЕТЕ ВЕТРОВОГО НАГОНА

А. С. Балуева, В. Н. Веретенников

Расчет подъема воды в различных водных бассейнах, за счет ветрового нагона является, безусловно, актуальной задачей. Следствием ветровых нагонов часто являются наводнения, как, например, наводнения в Ленинграде, у Японских островов и другие. Теме ветровых и штормовых нагонов посвящено большое количество работ и у нас и за рубежом.

Все эти научные работы, с нашей точки зрения, можно разделить на три типа. К первой группе относятся описательные работы, где используются элементарные статистические методы. Число таких работ за последние годы постепенно уменьшается, так как результаты их неточточны.

Ко второй группе относятся работы, в которых применяются методы гидромеханики и для математической постановки задачи используются уравнения «мелкой воды». Уравнения полностью или частично линеаризируются и решаются численно с помощью метода сеток. Наиболее интересными из этих работ являются работы Веландера [1], Фишера [2], Свенссона [3], Вольцингера и Симуни [4]. При таком методе решения теоретической трудностью является доказательство сходимости для той конечно-разностной схемы, которую принимает каждый из авторов. В этом плане работа Вольцингера и Симуни особенно интересна, так как в ней используются удачные способы доказательства устойчивости и сходимости конечно-разностной схемы, почерпнутые из численных методов газовой динамики в связи с имеющейся математической аналогией задач.

К третьей группе относятся работы, где авторы находят аналитическое решение так или иначе упрощенных уравнений «мелкой воды». Одним из примеров является статья Ван-Дантцига и Ловерье [5], где с помощью метода Грина отыскивается решение граничной задачи для линеаризированных уравнений в случае установившегося движения.

В настоящей работе авторы поставили целью получить аналитическое решение нестационарной задачи о ветровом нагоне. Будут рассматриваться окраинные моря и заливы, форма которых, как, например, у Финского залива, такова, что движение можно считать одноразмерным, учитывая лишь изменение площади поперечного сечения бассейна с координатой вдоль движения. Кроме того, для подобных бассейнов можно пренебречь силой Кориолиса.

Используя известные уравнения «мелкой воды», линеаризируем их, считая скорость частиц жидкости и превышение уровня над средним малыми величинами. Таким образом, исследуется система двух линейных уравнений с переменными коэффициентами.

Для решения авторы используют газодинамическую аналогию и применяют метод характеристик, сводя уравнения к обобщенному уравнению Дарбу [6, 7, 8], пользуясь при этом аппроксимацией одного из коэффициентов. В результате авторами получен, при различных предположениях относительно коэффициентов, ряд общих решений системы уравнений. В заключение приведены примеры решения граничных задач. Расчеты по методу характеристик показывают, что погрешность аппроксимации может быть сделана достаточно малой, если разбить водный бассейн на отдельные участки.

Рассмотрим систему уравнений «мелкой воды»

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+g\frac{\partial \xi}{\partial x}=\bar{\varphi}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial x},\\ \frac{\partial F}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(uF)=0,\end{gathered}\tag{1}$$

где u — средняя скорость частиц жидкости в сечении x; ξ — превышение уровня над неподвижной водной поверхностью; p_a — атмосферное давление; F — площадь поперечного сечения; x — координата вдоль движения жидкости; t — время; $\bar{\varphi}=\frac{1}{h_0}(k_2|w|w-k_1u|u|)$,* $k_1=2{,}6\cdot10^{-3}$, $k_2=3{,}2\cdot10^{-6}$, w — скорость ветра, h_0 — средняя глубина в сечении x.

Примем, что $F=F_0+b_0\xi$, где F_0 — площадь поперечного сечения при неподвижной жидкости, а b_0 — ширина водного зеркала. Кроме того, введем расход $Q=uF$.

Положим, что u и ξ — величины малые, квадратами которых можно пренебречь. После обычных преобразований получим

$$\begin{gathered}\frac{1}{F_0}\frac{\partial Q}{\partial t}+g\frac{\partial \xi}{\partial x}=\varphi,\\ b_0\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{\partial Q}{\partial x}=0,\end{gathered}\tag{2}$$

где

$$\varphi=\bar{\varphi}+\frac{\partial p_a}{\partial x}.$$

Примем, что φ — известная функция координат и времени. При расчете практически берется при этом среднее значение u на рассчитываемом участке. Остальные члены вычисляются точно по формуле. Так как характеристики системы (2) имеют вид $\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{\frac{F_0g}{b_0}}$, то удобно ввести новую переменную z по формуле: $\int\limits_0^x\frac{dx}{\sqrt{\frac{F_0g}{b_0}}}=z.$

При расчете следует вычислить z соответственно для всех имеющихся сечений x, чтобы в дальнейшем пользоваться только этой переменой.

Преобразуя систему (2) к новой переменной, получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial Q}{\partial t}+\sqrt{b_0gF_0}\frac{\partial \xi}{\partial z}=\varphi(t,z),\\ \frac{\partial Q}{\partial z}+\sqrt{b_0gF_0}\frac{\partial \xi}{\partial t}=0.\end{gathered}\tag{3}$$

Если в частном случае считать, что функция φ $(t,\ z)$ для данного

* Функция $\bar{\varphi}$ приведена в работе Вольцингера и Симуни [4].

участка бассейна с достаточной точностью может быть представлена в виде $\varphi = \varphi(i, z(x_0))$, то система (3) упрощается. Обозначая

$$\overline{Q} = Q - \int_{t_0}^{t} \varphi(t)\, dt,$$

получим:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{Q}}{\partial t} + \sqrt{b_0 g F_0}\,\frac{\partial \xi}{\partial z} = 0, \\ &\frac{\partial \overline{Q}}{\partial z} + \sqrt{b_0 g F_0}\,\frac{\partial \xi}{\partial t} = 0. \end{aligned} \tag{3'}$$

Перейдем в системах (3) и (3′) к новым характеристическим переменным

$$\begin{aligned} z - t &= 2\alpha - C, \\ z + t &= 2\beta + C, \end{aligned} \tag{4}$$

где α и β — новые переменные, $C = \text{const}$, которая будет определена ниже. После простых преобразований системы (3) и (3′) соответственно примут вид:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q}{\partial \beta} + \sqrt{b_0 g F_0}\,\frac{\partial \xi}{\partial \beta} = \varphi, \\ -&\frac{\partial Q}{\partial \alpha} + \sqrt{b_0 g F_0}\,\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \varphi \end{aligned} \tag{5}$$

или

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\ln\sqrt{b_0 g F_0}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \xi}{\partial \xi}\right) = -\frac{1}{2\sqrt{b_0 g F_0}}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right) \tag{6}$$

и

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \overline{Q}}{\partial \beta} + \sqrt{b_0 g F_0}\,\frac{\partial \xi}{\partial \beta} = 0, \\ -&\frac{\partial \overline{Q}}{\partial \alpha} + \sqrt{b_0 g F_0}\,\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = 0; \end{aligned} \tag{5'}$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial \alpha \partial \beta} + \frac{1}{2}\frac{d}{dz}\ln\sqrt{b_0 g F_0}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \alpha} + \frac{\partial \xi}{\partial \beta}\right) = 0. \tag{6'}$$

Уравнения (6) и (6′) являются обобщенными уравнениями Дарбу и были рассмотрены в работе Валландера [6] и Гриба [7]. Чтобы уравнение (6) имело общее решение, необходимо

$$\sqrt{b_0 g F_0} = A(z + C)^2. \tag{7}$$

Чтобы уравнение (6′) имело общее решение, необходимо

$$\sqrt{b_0 g F_0} = A(z + C)^{2n}. \tag{7'}$$

Здесь A и C — любые постоянные, а n — любое целое положительное или отрицательное число.

В исходных обозначениях условия (7) и (7′) сводятся к следующим:

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{b_0}{gF}}\, dx = A^{-1/4}(b_0 g F_0)^{-1/4} - C, \tag{8}$$

$$\int_{x_0}^{x} \sqrt{\frac{b_0}{gF_0}}\, dx = A^{-1/4n}(b_0 g F_0)^{-1/4n} - C \tag{8'}$$

или

$$b_0 gF_0 = C_1\left(\int\limits_{x_0}^{x}\sqrt{\frac{b_0}{gF_0}}\,dx + C_2\right)^{\frac{2n}{2n+1}}. \tag{8''}$$

Для определения A, C и n или C_1, C_2 и n следует построить график, где аргументом явится $(b_0gF_0)^{1/4}$, а функцией $\int\limits_{x^0}^{x}\sqrt{\frac{b_0}{gF_0}}\,dx$, и разбив его на удобные части, подобрать с нужной точностью A, C и n, что возможно в большей части случаев.

При выполнении условий (7) и (7′) уравнения (6) и (6′) упрощаются

$$\frac{d^2\xi}{d\alpha d\beta} + \frac{1}{d+\beta}\left(\frac{d\xi}{d\alpha} + \frac{d\xi}{d\beta}\right) = D, \tag{9}$$

$$\frac{d^2\xi}{d\alpha d\beta} + \frac{n}{\alpha+\beta}\left(\frac{d\xi}{d\alpha} + \frac{d\xi}{d\beta}\right) = 0; \tag{9'}$$

где

$$D = \left(\frac{du}{d\alpha} + \frac{du}{d\beta}\right)\frac{1}{2A(\alpha+\beta)^2}.$$

Решение уравнения (9) имеет вид

$$\xi = \frac{F_1(\alpha)+F_2(\beta)}{\alpha+\beta} + \frac{1}{\alpha+\beta}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha}d\alpha\int\limits_{\beta_0}^{\beta}(\alpha+\beta)D(\alpha,\beta)\,d\beta. \tag{10}$$

Решение уравнения (9′) при $n > 0$

$$\xi = \frac{d^{2n-2}}{d\alpha^{n-1}d\beta^{n-1}}\left[\frac{f_1(\alpha)+f_2(\beta)}{\alpha+\beta}\right], \tag{10'}$$

при $n < 0$ решать уравнение (9′) неудобно. В этом случае легче перейти к функции $\overline{Q}$.

$$\overline{Q} = \frac{d^{2|n|-2}}{d\alpha^{|n|-1}d\beta^{|n|-1}}\left[\frac{F_1(\alpha)+F_2(\beta)}{\alpha+\beta}\right]. \tag{10''}$$

Оставшуюся функцию Q и $\overline{Q}$ в случае (10) и (10′), и в ξ, в случае (10″), определяют из систем (5) или (5′) соответственно.

Рассмотрим примеры решения граничных задач, для чего используем решение (10′) при $n = 1$:

$$\xi = (b_0gF_0)^{-1/4}\left[f_1\left(\int\limits_0^x\sqrt{\frac{b_0}{gF_0}}\,dx - t\right) + f_2\left(\int\limits_0^x\sqrt{\frac{b_0}{gF_0}}\,dx + t\right)\right], \tag{11}$$

$$\overline{Q} = (b_0gF_0)^{1/4}\left[f_1\left(\int\limits_0^x\sqrt{\frac{b_0}{gF_0}}\,dx - t\right) + f_2\left(\int\limits_0^x\sqrt{\frac{b_0}{gF_0}}\,dx + t\right)\right] +$$

$$+ 2\sqrt{A}\left[\int\limits_0^\beta f_2(\beta)\,d\beta - \int\limits_0^\alpha f_1(\alpha)\,d\alpha\right].^* \tag{12}$$

---

* В решении за x_0, α_0 и β_0 приняты нули, так как рассматривается участок, примыкающий к началу координат.

Как было указано выше, перейдем к переменной z, а затем к α и β. Решение (11), (12) примет вид

$$\xi = \frac{t_1(\alpha) + t_2(\beta)}{\alpha + \beta}, \tag{13}$$

$$\overline{Q} = (\alpha + \beta)\left[f_1(\alpha) - f_2(\beta)\right] - 2\sqrt{A}\left[\int_0^\alpha f_1(\alpha)\,d\alpha - \int_0^\beta f_2(\beta)\,d\beta\right]. \tag{14}$$

Пусть начальные условия имеют вид

$$\xi|_{t=0} = \Psi_1(x), \quad \overline{Q}|_{t=0} = Q|_{t=0} = uF|_{t=0} = \Psi_2(x). \tag{15}$$

Прямая волна, распространяющаяся вдоль по течению, определится из граничного условия в начале координат

$$\xi|_{x=0} = \Psi_3(t). \tag{16}$$

Это условие определяет изменение глубины в заданном сечении.

Рассматривая при решении плоскость zOt, получим две области. Первая область лежит между положительной частью оси Oz и характеристикой $z = t$. Значения ξ и Q будут снабжены индексами (1) сверху. Вторая область лежит между положительной частью оси Ot и характеристикой $z = t$.

Следует отметить дополнительно, что характеристики в плоскости zOt прямые, и вдоль характеристик $\alpha = \mathrm{const}$, $z - t = \mathrm{const}$ не меняется функция $f_1(\alpha)$, а вдоль характеристик $\beta = \mathrm{const}$, $z + t = \mathrm{const}$ не меняется $f_2(\beta)$, как в классической задаче о волновом уравнении.

Используя начальные условия, найдем значения $f_1^{(1)}(\alpha)$ и $f_2^{(1)}(\beta)$ в первой области. Подставляя (13) и (14) в начальные условия (15) и перейдя к переменной z, получим:

$$\Psi_1(z) = \frac{f_1^{(1)}(z) + f_2^{(1)}(z)}{z + C}, \tag{17}$$

$$\Psi_2(z) = (z + C)\left[f_1(z) - f_2(z)\right] - 2\sqrt{A}\int_0^z \left[f_1^{(1)}(z) - f_2^{(2)}(z)\,dz.\right] \tag{18}$$

Используя равенство (17), преобразуем (18). Обозначая

$$\Psi_1(z)\cdot(z + C) - 2f_2(z) = W(z)$$

и дифференцируя (18) по z, будем иметь

$$W' + \frac{W}{z + C}(1 - 2\sqrt{A}) = \frac{\Psi_2(z)}{z + C}.$$

Откуда

$$W = (z + C)^{\sqrt{A} - 1}\left[\int_0^z \Psi_2(z)(z + C)^{-2\sqrt{A}}\,dz + \Psi_1(0)\cdot C - 2f_2(0)\right]$$

или

$$f_2^{(1)}(z) = \frac{1}{2}(z + C)\left\{\Psi_1(z) - (z + C)^{2\sqrt{A} - 1}\left[\int_0^z \frac{\Psi_2(z)}{(z + C)^{2\sqrt{A}}}\,dz + \Psi_1(0)\,C - \right.\right.$$

$$\left. - 2f_2^1(0)\right],$$

$$f_1^{(1)}(z)=\frac{1}{2}(z+C)\left\{\Psi_1(z)+(z+C)^{2\sqrt{A}-1}\left[\int_0^z\frac{\Psi_2'(z)}{(z+C)^{2\sqrt{A}}}+\Psi_1(0)\cdot C-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2f_2'(0)\right]\right..$$

Постоянное значение $f_2(0)$ можно определить, зная $\psi_1(0)$ и $\psi_2(0)$ по формуле

$$f_1^{(1)}(0)=\frac{1}{2}\left[C\cdot\Psi_1(0)-\frac{\Psi_2(0)}{C}\right].$$

Следовательно, окончательные значения функций $f_1^{(1)}(\alpha)$ и $f_2^{(1)}(\beta)$ примут вид:

$$f_1^{(1)}(\alpha)=\frac{1}{2}(\alpha+C)\left\{\Psi_1(\alpha)-(\alpha+C)^{2\sqrt{A}-1}\left[\int_0^\alpha\frac{\Psi_2(z)}{(z+C)^{2\sqrt{A}}}d\alpha+\frac{\Psi_2(0)}{C}\right]\right\},\tag{19}$$

$$f_2^{(1)}(\beta)=\frac{1}{2}(\beta+C)\left\{\Psi_1(\beta)+(\beta+C)^{2\sqrt{A}-1}\left[\int_0^\beta\frac{\Psi_2(z)}{(z+C)^{2\sqrt{A}}}\beta d+\frac{\Psi_2(0)}{C}\right]\right\}.\tag{20}$$

Отсюда по формулам (13) и (14) можно получить значения $\overline{Q}$ и ξ в первой области, а используя формулы связи Q, $\overline{Q}$ и u, можно получить u и ξ.

Во второй области функция $f_2(\beta)$ переходит по приведенному выше правилу без изменений. Следовательно, нужно определить только $f_1^{(2)}(\alpha)$. Для этого используем условие (16)

$$\Psi_3(t)=\frac{f_1^{(2)}(t)+f_2^{(2)}(t)}{C}.$$

Примем $f_2^{(2)}(t)=f_2^{(1)}(t)$.

Отсюда

$$f_1^{(2)}(-t)=C\cdot\Psi_3(t)-f_2^{(1)}(t),$$

$$f_2^{(2)}(-t)=C\cdot\Psi_3(t)-\frac{1}{2}(z+C)\left\{\Psi_1(t)+(z+C)^{2\sqrt{A}-1}\left[\int_0^t\frac{\Psi'(z)}{(z+C)^{2\sqrt{A}}}dz\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\Psi_2(0)}{C}\right]\right\}.$$

Окончательно, для второй области

$$f_1^{(2)}(\alpha)=C\cdot\Psi_3(-\alpha)+\frac{1}{2}(C-\alpha)\left\{\Psi_1(-\alpha)+(C-\alpha)^{2\sqrt{A}-1}\times\right.$$

$$\left.\times\left[-\int_{-\alpha}^0\frac{\Psi_2'(z)}{(z+C)^{2\sqrt{A}}}dz+\frac{\Psi_2(0)}{C}\right]\right\},\tag{21}$$

$$f_2^{(2)}(\beta)=f_2^{(1)}(\beta).\tag{22}$$

Используя (21) и (22), можно построить значения ξ и u во второй области.

Очевидно, что если имеются условия, описывающие отражение прямой волны, то в последующих областях получить вид функций $f_1(\alpha)$ и $f_2(\beta)$ также несложно.

Авторы предполагают в дальнейшем провести ряд расчетов методом характеристик для линейного и нелинейного случая ветровых нагонов в Финском заливе.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. Веландер. Численное предсказание штормовых нагонов. В сб. «Численные методы расчета штормовых нагонов». Под ред. М. С. Грушевского. Л., Гидрометиздат, 1964.
2. Г. Фишер. Численный метод расчета ветрового нагона и приливов в окраинных морях. В сб. «Численные методы расчета штормовых нагонов». Под ред. М. С. Грушевского. Л., Гидрометиздат, 1964.
3. А. Свенссон. Расчеты уровня и течений в Балтийском море. Сб. «Численные методы расчета штормовых нагонов». Под ред. М. С. Грушевского. Л., Гидрометиздат, 1964.
4. Н. В. Вольцингер и Л. И. Симуни. Численное интегрирование уравнений мелкой воды для прогноза невских наводнений. Тр. ГОИН, вып. 74, 1963.
5. Д. Ван-Данциг и Н. Ловерье. Проблема Северного моря. I. Общее рассмотрение гидродинамической проблемы движения Северного моря. В сб. «Численные методы расчета штормовых нагонов». Под ред. М. С. Грушевского. Л., Гидрометиздат, 1964.
6. С. В. Валландер. О нелинейных гиперболических дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка. ДАН СССР, т. XXXIX, № 2, 1953.
7. А. А. Гриб. Интегрирование уравнений неустановившегося движения жидкости при гидравлическом ударе в длинных трубопроводах. ДАН СССР, т. XXXIX, № 1, 1952.
8. А. С. Балуева. Гидравлический удар в длинном трубопроводе Тр. ЛГМИ, вып. 5—6, 1956.