

26  
778  
МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО  
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

ЛЕНИНГРАДСКИЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Труды, выпуск 14

# ОБЛАКА, ОСАДКИ И ВОПРОСЫ АТМОСФЕРНОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

175263

**БИБЛИОТЕКА**  
ЛЕНИНГРАДСКОГО  
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКОГО  
ИНСТИТУТА

ЛЕНИНГРАД  
1963

М. А. ГЕРМАН

К ВОПРОСУ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК  
В ОБЛАКАХ ПО ДАННЫМ АКСЕЛЕРОГРАФИЧЕСКИХ ЗАПИСЕЙ  
С ПОМОЩЬЮ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ „УРАЛ“

Изучению энергетического спектра турбулентности свободной атмосферы посвящен ряд работ [1,3,9,10,12 и 13].

В настоящей работе рассматривается методика расчета структурных и энергетических характеристик турбулентности в облаках по материалам акселерографических записей болтанки самолета с помощью универсальной автоматической цифровой машины "Урал".

Известно, что определение спектральной плотности  $S(\omega)$  может быть выполнено несколькими методами. Наиболее распространенными из них являются те, которые дают возможность вычислить величину  $S(\omega)$  путем несложных расчетов непосредственно по экспериментальным данным.

Так, например, при исследовании характеристик систем автоматического регулирования часто используют метод, который заключается в определении коэффициентов  $a_k$  и  $b_k$  ряда Фурье исследуемой функции и вычислении значений по формуле

$$S(\omega_k) \approx \frac{1}{2T} (a_k^2 + b_k^2), \quad (1)$$

где  $T$  - некоторый конечный промежуток времени.

Точность полученной величины в этом случае в определенной степени зависит от интервала времени  $T$ , для которого вычисляется спектральная плотность. Определить же заранее оптимальный интервал времени для подобных расчетов не всегда удается.

Для определения энергетического спектра турбулентности наиболее удобным является метод, основанный на предварительном определении вида корреляционной зависимости рассматриваемой функции и получении  $S(\omega)$  с помощью преобразования Фурье:

$$\bar{S}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} p(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad (2)$$

где  $\bar{S}(\omega) = \frac{S(\omega)}{R_0}$  - нормированная спектральная плотность,  $p(\tau) = \frac{R(\tau)}{R(0)}$  - нормированная или автокорреляционная функция,  $R(\tau)$  - значение корреляционной функции для временного интервала  $\tau$ ,  $R(0)$  - значение корреляционной функции для нулевого промежутка времени.

При исследовании турбулентности в свободной атмосфере с помощью самолета самолет можно рассматривать как динамическую систему. Входными сигналами этой системы являются вертикальные порывы ветра, а выходными - вертикальные колебания самолета. В этом случае спектральная плотность турбулентности с учетом выражения (2) может быть записана в виде следующего соотношения:

$$S_{\omega}(\omega) = \frac{\bar{S}_n(\omega) R(0)}{|F(i\omega)|^2}, \quad (3)$$

где  $\bar{S}_n(\omega)$  - нормированная спектральная плотность перегрузок самолета,  $|F(i\omega)|^2$  - передаточная функция для самолета.

Не останавливаясь на способах определения передаточной функции для самолета, которые достаточно полно изложены в работе [4], рассмотрим подробно методику определения параметров турбулентности по данным акселерографических записей.

Спектральную плотность перегрузки будем искать через корреляционную функцию. Этот метод по сравнению с методом, основанным на определении коэффициентов разложения заданной экспериментальной кривой в ряд Фурье, имеет некоторые преимущества. В частности, зная вид корреляционной функции, можно правильно выбрать длительность интервала времени  $T$ , достаточную для получения требуемой точности, в то время как не зная этой функции, величину  $T$  необходимо брать с большим запасом.

Анализ большого числа корреляционных функций турбулентности, полученных по данным акселерографических записей болтанки самолета, показывает, что при  $T \geq 10$  сек. корреляционная функция удовлетворяет неравенству

$$\left| \frac{R(\tau)}{R(0)} \right| \leq 0,05.$$

Это означает, что функцию  $R(\tau)$  вполне достаточно вычислять для значений  $\tau$  20-25 сек., тогда, согласно работе [8], интервал  $T$  можно выбрать равным 100-125 сек.

Исходя из этих соображений, в работе использованы интервалы времени 120-180 сек.

Рассмотрим связь между указанными функциями, которая может быть получена из преобразования выражения структурной функции для стационарного процесса:

$$D_f(\tau) = [f(t+\tau) - f(t)]^2 = [f(t+\tau)]^2 + [f(t)]^2 - 2f(t+\tau)f(t). \quad (5)$$

Для случая стационарности функции  $f(t)$  можно записать  

$$[f(t)]^2 = [f(t+\tau)]^2 = R_f(0).$$

Тогда окончательно

$$D_f(\tau) = 2[R_f(0) - R_f(\tau)]; \quad (6)$$

с учетом соотношения  $\rho_f(\tau) = \frac{R_f(\tau)}{R_f(0)}$  нормированная корреляционная функция может быть представлена в виде выражения

$$\rho_f(\tau) = \frac{2R_f(0) - D_f(\tau)}{2R_f(0)}. \quad (7)$$

Переходя непосредственно к ординатам, снятым с акселерограммы, формулу нормированной корреляционной функции можно записать в следующем виде:

$$\rho(\tau) = \frac{2\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i\right)^2\right] - \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m [h(t_i+\tau) - h(t_i)]^2}{2\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i\right)^2\right]}, \quad (8)$$

где  $h_i$  - значение ординаты, снятой с акселерограммы, в мм;  
 $n$  и  $m$  - количество реализаций рассматриваемой величины.

Нетрудно видеть, что при необходимости, используя отдельные элементы формулы (8), можно получить не только автокорреляционную функцию, но также среднее значение вертикальной пульсации скорости ветра, структурную и корреляционную функции.

С учетом этого формула (8) была запрограммирована для производства расчетов на универсальной автоматической цифровой машине "Урал-1". Исходными данными для этих расчетов явились материалы самолетных зондирований в облаках различных форм, [2].

Для производства расчетов отобраны акселерографические записи с временным интервалом 120 сек. и более. Распределение случаев по формам облаков представлено в табл. 1.

Таблица 1

Количество акселерографических записей с болтанкой самолетов в различных облаках

Верхний ярус		Средний ярус		Нижний ярус			Облака вертикально-го развития С <sub>д</sub> -С <sub>б</sub>	Нижняя стратосфера	Общее число случаев
C <sub>1</sub>	C <sub>2</sub>	A <sub>2</sub>	A <sub>1</sub>	N <sub>2</sub>	St	Sc			
22	36	21	30	24	67	61	28	16	305

В работе было построено и проанализировано 305 кривых автокорреляционных и структурных функций.

Анализ такого большого числа кривых потребовался для решения вопроса их типизации и сведения в родственные по конфигурации группы. В результате исследования оказалось возможным всю совокупность кривых разделить на три группы. Типовые кривые этих групп представлены на рис.1.

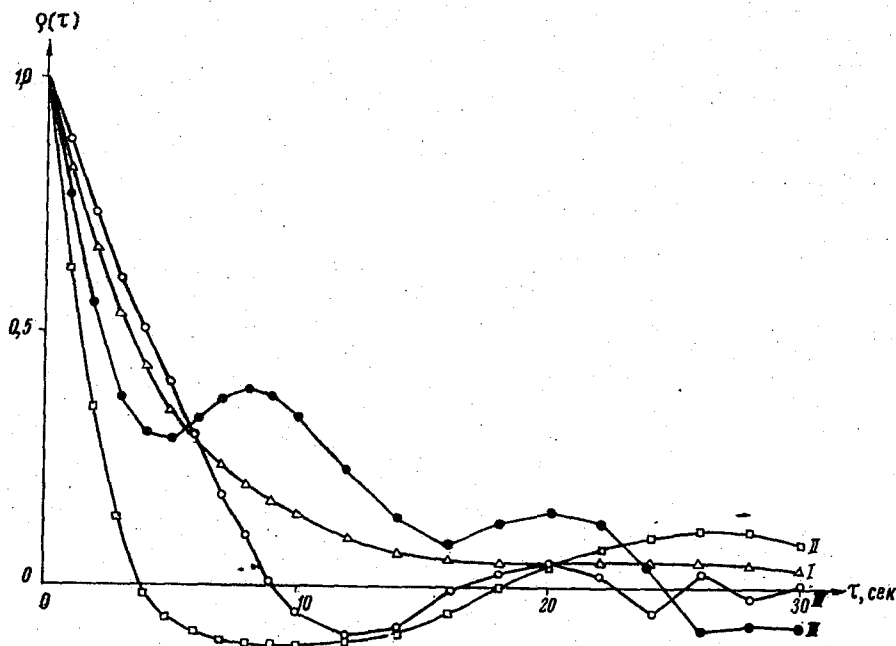


Рис.1. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПУЛЬСАЦИИ СКОРОСТИ ВОЗДУШНОГО ПОТОКА В ОБЛАКАХ.

I - тип монотонно убывающей функции, не пересекающей ось абсцисс; II - тип функции, резко убывающей при малых значениях временного интервала; III - тип убывающей функции с несколькими промежуточными максимумами.

Принятая типизация корреляционных функций удобна для дальнейшего подбора аналитических выражений, с помощью которых можно будет произвести аппроксимацию, необходимую для интегрирования выражения спектральной плотности.

Рассмотрим некоторые выражения, которые оптимально аппроксимируют корреляционные функции вертикальных пульсаций скорости ветра.

Наиболее простым способом представления экспериментальной кривой функции  $\rho(\tau)$  является аппроксимация несколькими экспонентами

$$\rho(\tau) = R(0) \left[ A_1 e^{-\alpha\tau} + A_2 e^{-\beta\tau} + A_3 e^{-\gamma\tau} \right], \quad (9)$$

1/ В этом и в других случаях аппроксимируется нормированная корреляционная функция, что вызвано возможностью дальнейшего сопоставления данных о распределении энергии по спектру при различной интенсивности турбулентности в облаках.

где  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\sigma$  - коэффициенты, зависящие от вида кривой, рассчитанной непосредственно по данным вертикальных пульсаций скорости ветра, определяются методом наименьших квадратов.

На рис.2 дано аналитическое представление средней кривой автокорреляционной функции для случая полета в высококучевом облаке на высоте 3000 м. Значения коэффициентов для рассчитанной кривой приведены в табл.2.

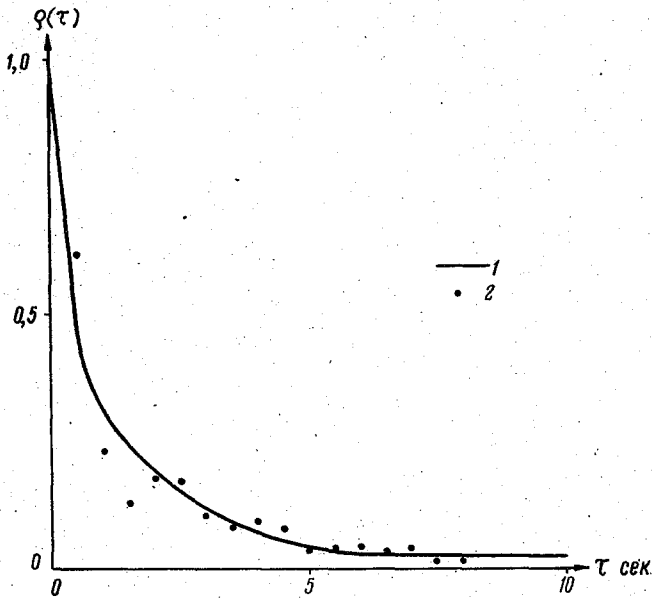


Рис.2: КРИВАЯ АВТОКОРРЕЛЯЦИОННОЙ ФУНКЦИИ ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПУЛЬСАЦИИ СКОРОСТИ ВЕТРА В ВЫСОКОКУЧЕВОМ ОБЛАКЕ.

1 - аналитическое представление, 2 - расчеты непосредственно по акселерографическим записям.

Таблица 2

Значения коэффициентов аппроксимированной автокорреляционной функции

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\alpha$	$\beta$	$\sigma$
0,415	0,865	0,975	0,523	0,633	1,150

Аналитическая кривая (рис.2) достаточно хорошо стилизует данные, полученные по непосредственным расчетам, однако несколько экспонент, употребленных при расчете, могут быть заменены одной при условии дробного показателя степени.

Подставляя соотношение (9) в выражение для спектральной плотности (2) и учитывая переход к пространственной частоте, получим следующую формулу:

$$\bar{S}_n(\Omega) = \frac{V R(0)}{\pi \beta^2} \int_0^{\infty} (\lambda_1 e^{-\alpha\tau} + \lambda_2 e^{-\beta\tau} - \lambda_3 e^{-\sigma\tau}) \cos \omega\tau d\tau, \quad (10)$$

или после взятия квадратур можно записать

$$\bar{S}_n(\Omega_j) = c_1 \left[ \lambda_1 \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega_j^2} + \lambda_2 \frac{\beta}{\beta^2 + \omega_j^2} - \lambda_3 \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega_j^2} \right], \quad (11)$$

где  $c_1 = \frac{V R(0)}{\pi \beta^2}$ ,  $V$  - воздушная скорость полета самолета,  $\beta$  - тангенс угла наклона тарировочной кривой датчика перегрузок.

Однако заметим, что рассмотренный тип автокорреляционной функции встречается относительно реже, чем другие кривые, представленные на рис.1. В этом отношении более общим случаем является стилизация автокорреляционных функций аналитическим выражением

$$\rho(\tau) = e^{-\mu\tau} \cos \nu\tau, \quad (12)$$

которая отличается от только что рассмотренной функции наличием множителя  $\cos \nu\tau$ , придающего  $\rho(\tau)$  вид затухающего гармонического колебания.

Для определения коэффициентов  $\mu$  и  $\nu$  можно потребовать, чтобы аппроксимирующая функция имела бы первый нуль в той же точке, что и  $\rho(\tau)$ , а в точке  $\tau_1$  имела бы ту же ординату, что и  $\rho(\tau_1)$ . Выполнение этих условий обеспечивает достаточно легкое определение  $\mu$  и  $\nu$  с помощью выражений

$$\nu = \frac{\pi}{2\tau_2}, \quad \mu = \ln \frac{\cos \nu\tau_1}{\rho(\tau_1)}$$

Значения коэффициентов для этого случая  $\mu = 0,500$ ;  $\nu = 0,892$ . В табл.3 приведены значения автокорреляционной функции в слоистом облаке (Арктика) на высоте 270 м, рассчитанные по формулам

(8) и (12).

Подставляя соотношение (12) в формулу (2) и интегрируя, получим расчетную формулу спектральной плотности

$$\bar{S}_n(\Omega_j) = \frac{c_1 \mu (\mu^2 + \nu^2 + \omega_j^2)}{[\mu^2 + (\nu + \omega_j)^2][\mu^2 + (\nu - \omega_j)^2]} \quad (13)$$

Формулы (10) и (13) являются достаточно простыми, поэтому их удобно использовать в тех случаях, когда необходимо быстро выполнить расчеты энергетического спектра турбулентности. Заметим, что форма кривых спектральной плотности, в особенности при низких частотах оказывается в определенной степени зависящей от вида аналитического выражения и интервала, на котором производится аппроксимирование.

Эти соображения указывают на целесообразность представления кривой автокорреляционной функции каким-либо аналитическим выражением на элементарных (минимальных) участках.

В случае автокорреляционных функций, полученных по акселерографическим записям болтанки самолетов, элементарный участок выпол-

Таблица 3

Значения автокорреляционных функций вертикальных пульсаций скорости в слоистом облаке

$\tau$ сек.	По формуле (8)	По формуле (12)	$\tau$ сек.	По формуле (8)	По формуле (12)	$\tau$ сек.	По формуле (8)	По формуле (12)
0,5	0,759	0,762	6,0	-0,100	-0,045	17,5	0,046	-0,002
1,0	0,517	0,561	7,0	-0,008	-0,038	20,0	-0,046	-0,004
1,5	0,334	0,392	8,0	0,018	-0,026	22,5	-0,100	-0,004
2,0	0,248	0,260	9,0	0,118	-0,015	25,0	0,186	-0,002
2,5	0,171	0,160	10,0	0,186	0,007	27,5	0,105	0,001
3,0	0,107	0,086	11,0	0,161	0,012	30,0	0,046	0,002
3,5	0,046	0,034	12,0	0,214	0,024	32,5	0,046	0,001
4,0	0,001	0,004	13,0	0,259	0,012	35,0	-0,046	0,001
4,5	-0,046	-0,020	14,0	0,279	0,008	37,5	-0,001	0,000
5,0	-0,047	-0,035	15,0	0,174	0,002	40,0	0,001	0,000



не может быть определен  $\Delta \tau = 0,5$  сек.

Действительно, если обратиться к рис. 1, то видно, что на участках, соответствующих этому интервалу времени, кривая автокорреляционной функции с достаточной точностью может быть представлена прямой линией или параболической дугой.

Остановимся на методах, которые позволяют произвести численное интегрирование выражения (2).

Аппроксимация экспериментальной кривой функции  $\rho(\tau)$  на элементарных участках может быть произведена уравнением прямой линии

$$\rho(\tau) = \rho(\tau_{i-1}) + K_i(\tau - \tau_{i-1}), \quad (14)$$

где 
$$K_i = \frac{\rho(\tau_i) - \rho(\tau_{i-1})}{\tau_i - \tau_{i-1}}.$$

Представляя выражение (2) в виде суммы интегралов на элементарных участках функции  $\rho(\tau)$  в пределах от  $\tau_{i-1}$  до  $\tau_i$ , где  $\Delta \tau = 0,5$  сек, получим

$$\bar{S}_n(\Omega) = c_1 \sum_{i=1}^n \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} [\rho(\tau_{i-1}) + K_i(\tau - \tau_{i-1})] \cos \omega \tau d\tau. \quad (15)$$

Проинтегрировав выражение (15), получаем формулу

$$\bar{S}_n(\Omega_j) = \frac{c_1}{\omega_j} \left[ \rho(\tau_n) \sin \omega_j \tau_n + \sum_{i=1}^n \frac{\rho(\tau_i) - \rho(\tau_{i-1})}{\omega_j(\tau_i - \tau_{i-1})} (\cos \omega_j \tau_i - \cos \omega_j \tau_{i-1}) \right]. \quad (16)$$

Для большей точности автокорреляционную функцию на элементарных участках иногда представляют в виде параболической дуги

$$\rho(\tau) = A + B(\tau - \tau_p) + c(\tau - \tau_p)^2, \quad (17)$$

где  $p$  - целое число. Выполняя интегрирование по частям, после несложных преобразований можно получить формулу, удобную для производства расчетов:

$$\bar{S}_n(\Omega_j) = c_1 \int_a^b \rho(\tau) \cos \omega_j \tau d\tau = c_1 h \left\{ a' [\rho(b) \sin \omega_j b - \rho(a) \sin \omega_j a] + \beta' c_{2p} + \sigma' c_{2p-1} \right\}, \quad (18)$$

где  $h = \frac{b-a}{2n}$  интервал интегрирования,

$$\left. \begin{aligned} a' &= \frac{\omega_j^2 h^2 + \omega_j h \sin \omega_j h \cos \omega_j h - 2 \sin^2 \omega_j h}{\omega_j^3 h^3} \\ \beta' &= \frac{2[\omega_j h(1 + \cos^2 \omega_j h) - 2 \sin \omega_j h \cos \omega_j h]}{\omega_j^3 h^3} \\ \sigma' &= \frac{4[\sin \omega_j h - \omega_j h \cos \omega_j h]}{\omega_j^3 h^3} \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$S_{2p}$  - сумма всех четных ординат кривой  $y = f(\tau) \cos \omega \tau$ , находящихся между  $a$  и  $b$ , за исключением половины первой и последней ординат;  $S_{2p-1}$  - сумма всех нечетных ординат.

Эти формулы были впервые предложены Филоном [1] и приводят по существу к методу Симпсона.

**Метод М.В. Николаевой.** Идея метода заключается в том, что при помощи интерполяционных полиномов аппроксимируется часть подынтегральной функции, в частности  $p(\tau)$ , как это было сделано в первом и во втором случаях.

М.В. Николаева рассматривает интеграл

$$S = \int_0^1 f(z) \varphi(az) dz, \quad (20)$$

допуская, что функция  $f(z)$  может быть достаточно точно аппроксимирована на промежутке  $(0,1)$  полиномом  $n$ -й степени  $P^{(n)}(z)$ , совпадающим с  $f(z)$  в  $n+1$  равностоящих узлах интерполяции  $(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1)$ , можно записать, что

$$\int_0^1 f(z) \varphi(az) dz \approx \int_0^1 P^{(n)}(z) \varphi(az) dz, \quad (21)$$

при этом погрешность в основном определяется порядком точности аппроксимации функции  $f(z)$  полиномом  $P^{(n)}(z)$ .

Значение этого интеграла можно выразить через ординаты  $y_i$  в узлах интерполяции, т.е. представить этот интеграл в виде

$$\int_0^1 P^{(n)}(z) \varphi(az) dz = A_0 y_0 + A_1 y_1 + \dots + A_n y_n. \quad (22)$$

Коэффициенты  $A_j$  не зависят от значений  $y_j$ ,  $a$ , значит и от вида полинома  $P^{(n)}(z)$ . Они должны быть определены так, чтобы формула (20) была справедлива для любого полинома  $P(z)$  степени меньшей или равной  $n$ . Для этого достаточно, чтобы она была справедлива для полиномов  $P(z) = 1; z; \dots; z^n$ .

Обозначая через

$$N^{(l)} = \int_0^1 z^l \varphi(az) dz, \quad (23)$$

можно увидеть, что при  $P(z) = 1$  все  $y_j = 1$  и

$$N^{(0)} = A_0 + A_1 + A_2 + \dots + A_j + \dots + A_n. \quad (24)$$

При  $P(z) = z^l$  имеем  $y_0 = 0$  и все остальные  $y_j = \frac{j^l}{n^l}$ .  
Поэтому

$$N^{(l)} = \frac{1}{n^{(l)}} A_1 + \frac{2^l}{n^{(l)}} A_2 + \dots + \frac{j^l}{n^{(l)}} A_j + \dots + A_n. \quad (25)$$

Решая систему уравнений, Николаева получила для  $n = 0, 1$  и 2 следующие значения коэффициентов:

$n = 0$	прямоугольник	$J_0 = N^{(0)}$
$n = 1$	трапеция	$J_0 = N^{(0)} - N^{(1)}$ $J_1 = N^{(1)}$
$n = 2$	парабола	$J_0 = N^{(0)} - 3N^{(1)} + 2N^{(2)}$ $J_1 = 4(N^{(1)} - N^{(2)})$ $J_2 = 2N^{(2)} - N^{(1)}$

Известно, что любые пределы интегрирования  $(c, d)$  можно привести к пределам  $(0, 1)$  подстановкой

$$x = c + (d - c)z.$$

Можно записать

$$\int_c^d f(x) \varphi(\alpha x) \approx \int_0^1 \rho^{(n)}(x) \varphi(\alpha x) dx = (d-c) \int_0^1 \rho^{(n)}[c + (d-c)z] \varphi\{\alpha[c - (d-c)z]\} dz = (d-c)(B_0 y_0 + B_1 y_1 + B_2 y_2 + \dots + B_n y_n), \quad (26)$$

В этом случае коэффициенты  $B_i$  зависят не только от  $\alpha$ , параметров, но также и от пределов интегрирования. Они определяются также из системы уравнений, как и в первом случае, свободными членами будут интегралы

$$M^{(i)} = \int_0^1 z^i \varphi\{\alpha_1 [c + (d-c)z]\} dz, \quad (27)$$

Интегралы (27) вычисляются интегрированием по частям.

Используя метод М.В. Николаевой [7], представим решение интеграла (2) в форме, удобной для вычислений. С этой целью ограничимся случаем, когда  $n = 1$ , промежутков  $(b-a)$  разбит на равные части; полагая степень интерполяционных полиномов одинаковой на всех промежутках интегрирования и  $\varphi(\alpha x) = \cos \omega t$ ,  $b-a = mh$ , получим, что

$$S(\alpha_j) = C_1 \left\{ \left[ -\frac{1}{\omega_j} \sin \omega_j \alpha + \frac{2}{\omega_j^2 h} \sin \frac{\omega_j h}{2} \sin \omega_j \left( a + \frac{h}{2} \right) \right] \rho_0 + \frac{4}{\omega_j^2 h} \sin^2 \left( \frac{\omega_j h}{2} \right) \sum_{k=1}^{m-1} \cos \omega_j (a + kh) \rho_k + \left[ \frac{1}{\omega_j} \sin \omega_j b - \frac{2}{\omega_j^2 h} \sin \frac{\omega_j h}{2} \sin \omega_j \left( b - \frac{h}{2} \right) \right] \rho_m \right\}. \quad (28)$$

Численные значения спектральной плотности определялись для круговых частот, представленных в табл. 4.

С помощью рассмотренных формул произведен расчет нормированной спектральной плотности перегрузки самолета Ил-12 в слоистом облаке. Для сопоставления результаты расчета представлены на рис. 3.

Из анализа кривых (рис. 3) вытекает следующее.

1. Все кривые с увеличением частоты стремятся к нулю, хотя и не достигая его. Это означает, что для возмущений малого масштаба плотность энергии не приводит к возникновению столь существенных ускорений, которые вызывали бы интенсивную болтанку самолета Ил-12. Наоборот, с уменьшением частоты (с увеличением размеров возмущений) спектральная плотность перегрузок растет, достигая максимума при волновом числе  $\Omega = 1,78 \cdot 10^{-3}$  рад/м.

Заметим, однако, что максимум энергетического спектра наблюдается не на всех кривых, в частности, он отсутствует на кривой  $S_n(\Omega)$ , рассчитанной по формуле (11), а по данным расчета с помощью формулы (13) он сдвинут обычно влево, в сторону высоких частот.

Этот факт, несомненно, связан со степенью точности принятой той или иной аппроксимации кривой автокорреляционной функции. Вместе с этим это указывает на нецелесообразность использования формул (11) и (13) для относительно точных расчетов энергетического спектра турбулентности.

2. При использованном интервале аппроксимирования, равном  $\tau = 0,5$  сек., результаты расчетов оказываются практически одинаковыми и не зависят от представления части подынтегральной функции выражения (2) прямой линией, дугой параболы или интерполяционным полиномом. Это обстоятельство позволяет принять для расчетов спектральной плотности вертикальных пульсаций скорости ветра выражение (17), которое является в определенной степени простым и удобным из всех рассмотренных формул для программирования расчетов на электронно-вычислительных машинах.

Значения круговой частоты ( $\omega$  рад/сек.) Таблица 4

№ п/п	$\omega$ рад/сек.	№ п/п	$\omega$ рад/сек.	№ п/п	$\omega$ рад/сек.
1	0,063	7	0,780	13	3,142
2	0,126	8	1,047	14	4,190
3	0,157	9	1,256	15	6,284
4	0,210	10	1,570	16	8,420
5	0,314	11	2,100	17	9,670
6	0,628	12	2,510		

Следует указать, что при необходимости получения более высокой точности вычислений интеграла (2) целесообразно использовать метод, предложенный М.В. Николаевой [7] для числа  $n = 2$  и более. В случае расчета энергетического спектра турбулентности по данным акселерографических записей (с учетом точности получения исходных данных) расчет по формуле (17) вполне соответствует необходимой точности получения конечных результатов.

С учетом высказанных ранее соображений был выполнен расчет энергетического спектра турбулентности в основных формах облаков.

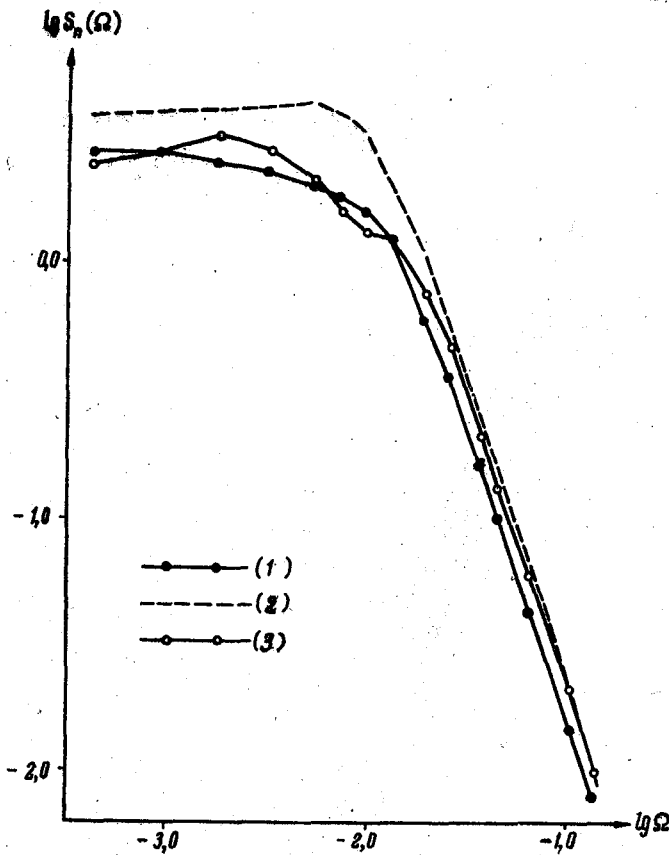


Рис.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ПЕРЕГРУЗОК  
САМОЛЕТА ИЛ-12.

1 - по формуле (11), 2 - по формуле (13),  
3 - по формулам (16), (18), (28).

Все вычисления производились на электронно-вычислительной машине "Урал-11".

На рис.4 приводится пучок кривых энергетического спектра вертикальных пульсаций скорости ветра в перисто-слоистом облаке <sup>1/</sup>. Если осреднить значения кривой автокорреляционной функции, которая входит в выражение (2), то средняя спектральная плотность вертикальных пульсаций скорости ветра примет вид кривой, которая также представлена на рис.4.

<sup>1/</sup> В этом случае при расчете энергетического спектра турбулентности значение коэффициента  $C_1$  принималось равным

$$C_1 = \frac{2\nu R(0) |F(i\omega)|^2}{\beta^2}$$

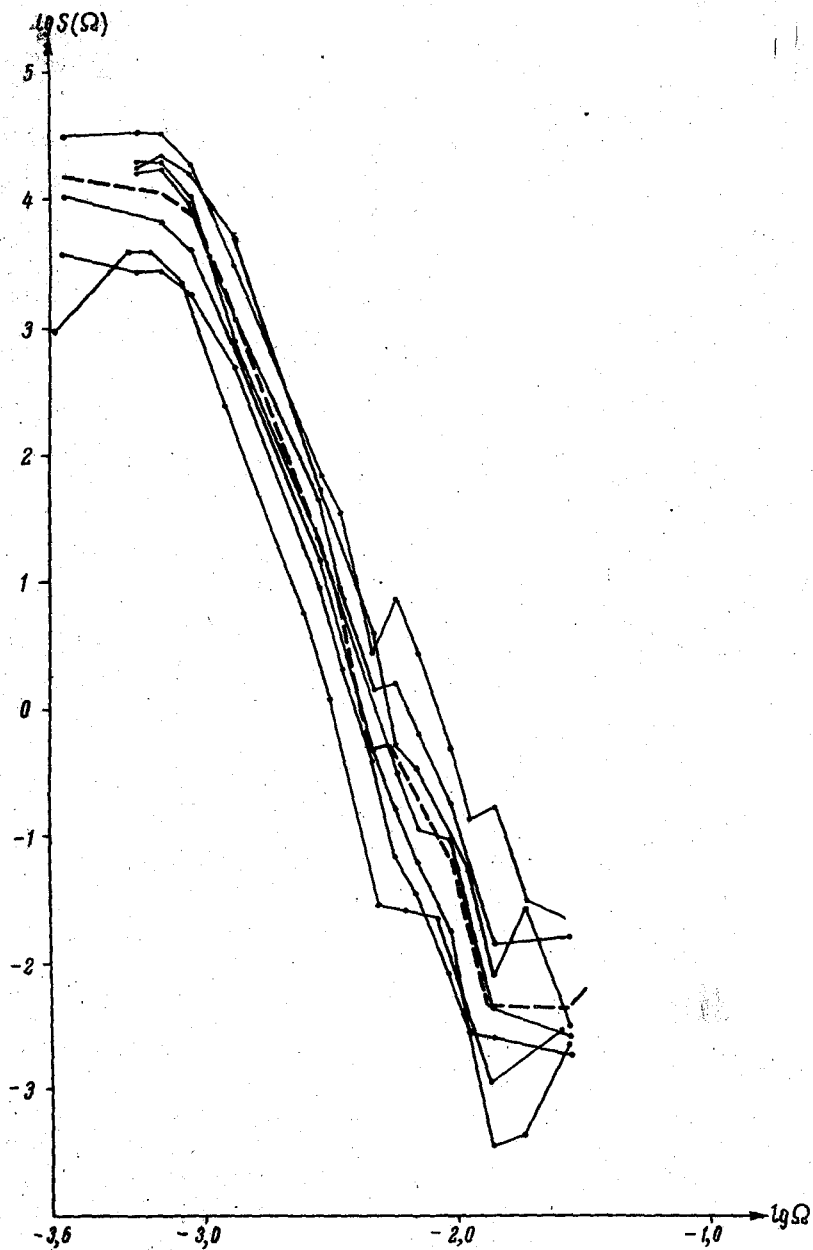


Рис.4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР  
ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ПЕРИСТО-СЛОИСТОМ ОБЛАКЕ.

Таким образом, полученная средняя кривая энергетического спектра турбулентности дает возможность судить о распределении плотности энергии в перисто-слоистом облаке в зависимости от волнового числа. Однако надежными данными следует считать величины спектральной плотности в пределах волновых чисел от  $\Omega = 2,7 \cdot 10^{-3}$  до  $\Omega = 2,7 \cdot 10^{-2}$  рад/м.

Это обстоятельство связано прежде всего с тем, что при малых частотах, как показал А.С.Дубов [5], определение спектральной плотности турбулентности по перегрузкам самолета оказывается недостаточно надежным. В этом участке спектра более эффективным оказывается привлечение в качестве исходных данных для расчета записи колебания угла тангажа. В рассматриваемом случае нижний предел частоты примерно равен  $\Omega = 0,628$  рад/сек. На этой частоте еще можно пользоваться передаточной функцией, связывающей вертикальную скорость турбулентного порыва и вертикальную перегрузку. В этом случае передаточная функция уже отлична от нуля и может быть практически определена с достаточной точностью.

Верхний предел ограничивается частотой  $\Omega = 6,28$  рад/сек., что связано с техническими характеристиками датчика перегрузок МП-66, которым регистрировались перегрузки самолета.

Рассмотренная методика расчета автокорреляционных функций, как ранее указывалось, удобна тем, что на отдельных этапах вычислений обеспечивает получение ряда других важных характеристик, в частности структурных функций.

По результатам вычислений выполнен анализ структурных функций во всех формах облаков.

Так же как в случае корреляционных функций, были построены графики, но в билогарифмическом масштабе. Все случаи, для которых построены структурные функции, можно разделить на три основные группы (рис.5).

Заметим, что для различных форм облаков характерны определенные типы кривых структурных функций.

Так, например, наиболее характерным для слоистых и слоисто-кучевых облаков является I тип, структурная функция которого имеет один максимум с дальнейшим ровным ходом. Для некоторой части слоисто-кучевых облаков характерны II и III типы структурных функций.

Аппроксимация структурной функции производилась с помощью степенного выражения

$$D(\tau) \sim A\tau^m, \quad (29)$$

где  $m$  - безразмерный показатель степени.

В этом случае она производилась только лишь до точки насыщения, т.е. до максимального значения функции  $D(\tau)$ .

Методом наименьших квадратов для каждого случая были определены значения коэффициента  $A$  и показатель степени  $m$ .

Результаты расчетов для некоторой части случаев приведены в табл.5. Данные величины  $m$ , приведенные в табл.5, показывают, что она подвержена колебаниям и изменяется от 0,25 до 1,03. Среднее значение  $m$  для облаков всех форм составляет 0,70.

Наличие достаточно большого числа структурных функций позволяет дать приближенную оценку диссипации турбулентной энергии в инерционном интервале спектра. Для этого воспользуемся выражением "закона двух-третей" Колмогорова-Обухова в виде

$$D(\tau) = C_2 \varepsilon^{2/3} \tau^{2/3}, \quad (30)$$

где  $C_2$  - безразмерная постоянная,  $\varepsilon$  - диссипация энергии в единицу времени на единицу массы.

Таблица 5  
 Параметры структурных функций вертикальной пульсации воздушного потока в облаках

№ п/п	Дата	Форма облака	Высота, м	$m$	эрг/г сек.
1	2/УШ 1957	St	700	0,95	332,0
2		St	600	0,34	292,0
3		St	500	1,02	278,0
4		St	400	0,88	193,0
5		St	300	0,94	112,0
6		Пог St	190	0,93	12,0
7		Над St	500	0,82	382,0
8		St	450	0,94	351,0
9		St	400	0,93	345,0
10		St	340	0,53	25,6
11		St	290	1,03	12,2
12	1/УШ	St	650	0,69	518,0
13		Sc	2700	0,65	0,2
14	29/УП	Sc	2600	0,88	0,2
15		Sc	400	0,30	1110,0
16	28/УП	Sc	300	0,25	299,0
17		Пог Sc	350	0,27	198,0
18		Над Sc	200	0,66	260,0
19		Sc	600	0,45	0,2
20		Sc	600	0,68	477,0
21		Cu hum.	700	0,69	1025,0
22		Cu hum.	800	0,71	453,0
23		Cu hum.	900	0,41	356,0
24		Cu hum.	900	0,88	4,9
25		Cu hum.	700	0,57	458,0
26		Cu hum.	850	0,96	481,0

$$\bar{m} = 0,70$$



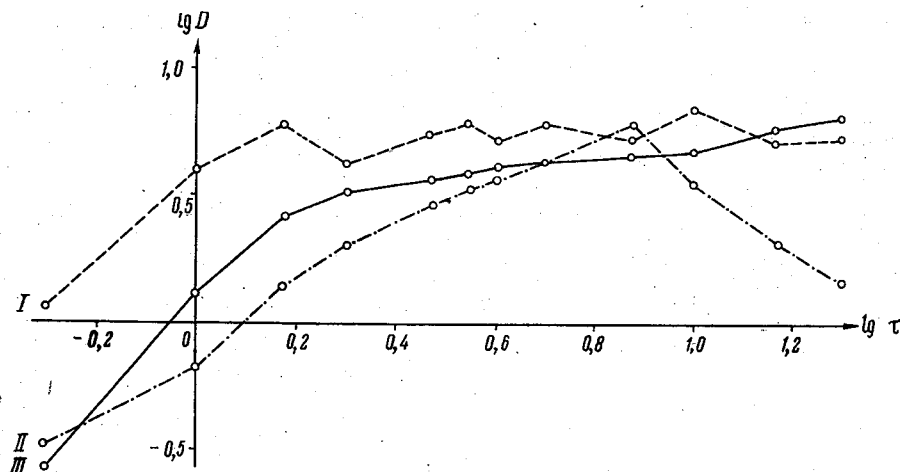


Рис.5. ТИПОВЫЕ КРИВЫЕ СТРУКТУРНЫХ ФУНКЦИЙ В ОБЛАКАХ.

1 - тип функции, имеющей после максимума ровный ход;  
 II - тип монотонной функции; III - тип функции, которая после достижения максимума резко падает.

При вычислении скорости диссипации турбулентной энергии в облаках значение безразмерной постоянной  $C_2$  принято равным 1,6, как это было сделано в работе Тейлора [14].

Результаты расчета энергетических характеристик для некоторой части случаев представлены в табл.5.

Просмотр приведенных в табл.5 значений диссипации показывает, что она в определенной степени зависит от превышения рассматриваемого уровня по отношению к границам облака.

Действительно, этот факт становится более понятным из тех соображений, что облачный массив в различных слоях стратифицирован по-разному. Поэтому очевидно, что в устойчиво стратифицированном слое облака диссипация энергии от крупных вихрей к мелким затруднена, и, наоборот, при неустойчивой стратификации она выражена более ярко.

Однако заметим, что существенное влияние на величину энергии диссипации могут оказывать и динамические факторы возбуждения турбулентности, это наводит на мысль о весьма сложном механизме эволюции диссипации турбулентной энергии в облаке.

По предварительным данным, полученным автором, интенсивность скорости диссипации в облаке, оказывается, имеет еще одну особенность. В частности, при сравнении данных величин  $\epsilon$  на различных уровнях в облаке обнаруживается тенденция увеличения энергии диссипации с высотой в тех облаках, у которых обычно влажность также растет с высотой, и наоборот. Это нетрудно заметить, если сравнить результаты расчета величины  $\epsilon$  по высотам в облаке (табл.5).

Наиболее отчетливо замеченная тенденция выражена в слоистых облаках (рис.6). Эта интересная связь энергии диссипации с влажностью в облаке требует тщательного исследования на более обширном материале, чем использовано в работе.

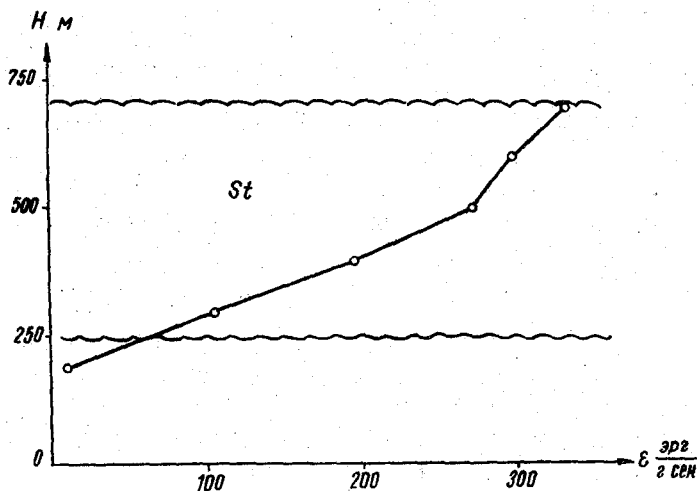


Рис.6. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ДИССИПАЦИИ ТУРБУЛЕНТНОЙ ЭНЕРГИИ В СЛОИСТОМ ОБЛАКЕ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ,

Наличие некоторых данных о диссипации энергии в атмосфере [6,14] позволяет сравнить результаты расчета. Значения величин  $\epsilon$ , полученные в облаках, в большинстве случаев имеют такой же порядок, что и для пограничного слоя [6]. Однако некоторые величины диссипации в облаках отличаются в сторону увеличения  $\epsilon$  на один порядок. Этот результат не противоречит существующим представлениям о диссипации турбулентной энергии в облаках.

Принятые в работе приближения в вычислении величины  $\epsilon$ , безусловно, сказываются на точности значений, но, к сожалению, отсутствие достаточно надежных методов и качественного исходного материала осложняет проведение точных расчетов.

#### Л и т е р а т у р а

1. Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности, ИЛ, 1955.
2. Герман М.А. Некоторые количественные характеристики турбулентного обмена в облаках. См. в настоящем сборнике.
3. Гурвич А.С. Частотные спектры и функции распределения вероятностей вертикальной компоненты скорости ветра. Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 7, 1960.

4. Д у б о в А.С. К вопросу определения вертикальных скоростей ветра по данным самолетного акселерографа. Труды ГГО, вып.81, 1959.
5. Д у б о в А.С. К вопросу определения спектральной плотности вертикальных порывов ветра по колебаниям самолета. Труды ГГО, вып.135, 1962.
6. И в а н о в В.Н. Диссипация турбулентной энергии в атмосфере. Изв.АН СССР, сер.геофиз., № 9, 1962.
7. Н и к о л а е в а М.В. О приближенном вычислении осциллирующих интегралов. Труды математического ин-та им.В.А.Стеклова, АН СССР, т.28, 1949.
7. С о л о д о в н и к о в В.В. Введение в статистическую динамику систем автоматического управления. Гостехтеориздат, 1952.
9. Т а т а р с к и й В.И. Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере. Изд.АН СССР, М.,1959.
10. Ц в а н г Л.Р. Измерение частотных спектров температурных пульсаций в приземном слое атмосферы. Изв.АН СССР, сер.геофиз., № 8, 1960.
11. Т р а н т е р К.Дж. Интегральные преобразования в математической физике. Гостехтеориздат,1956.
12. Ш у р Г.Н. Приборы для исследования спектра атмосферной турбулентности методом гармонического анализа с использованием магнитной памяти. Труды ЦАО, вып.31, 1959.
13. Mac Cready P., Structure of atmospheric turbulence. J. of Meteorol. v.10, N 6, 1953
14. Taylor R., A new approach to the measurement of turbulent fluxes in the lower atmosphere. J. of Fluid Mech.,v.10, N 3, 1961.