Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.В. Петрова

ГИДРОМЕХАНИКА

Учебное пособие

Санкт-Петербург
РГГМУ
2022

УДК 532
ББК 22.253
П30

Петрова, Вера Валерьевна.

П30 Гидромеханика. Учебное пособие / В.В. Петрова. – Санкт-Петербург : РГГМУ, 2022. – 44 с.

В учебном пособии разобраны основные положения гидромеханики, приведено решение практических задач, варианты контрольной работы.

ISBN 978-5-86813-569-9

Введение.

В теоретической механике рассматривается материальная точка и система материальных точек, причем под системой может подразумеваться как дискретная система, так и сплошная (твердое тело). Вообще же сплошная среда объединяет твердые, жидкие и газообразные системы; различие заключается лишь в том, малыми или большими будут деформации, производимые действующими силами, механика же деформируемых тел может быть построена по одной и той же схеме.

Раздел теоретической механики о малых деформациях твердых тел, где сцепление между частицами достаточно велико, носит название *механики упругого тела* или *теории упругости*. Раздел же, рассматривающий жидкие и газообразные среды (сцепление между частицами настолько мало, что не может противостоять силам, совершающим большие деформации и перемещение частиц) – *механикой жидкости и газа* или *гидромеханикой*.

Как и твердые тела, жидкости и газы являются сплошными средами с непрерывным, как правило, распределением физических величин. Основным отличием является легкая подвижность жидкости и газа. Если твердое тело при движении испытывает малые деформации и смещения своих частиц, то жидкости и газы претерпевают большие деформации (текут). В поле силы тяжести жидкости могут иметь граничную поверхность, а газы заполняют весь сосуд, в который они помещены. Далее, капельные жидкости крайне сильно сопротивляются сжатию, газы же сжимаются легко, следовательно, жидкости считаются практически *несжимаемыми*, а газы – *сжимаемыми*. Вместе с тем, и жидкость, и газ крайне слабо сопротивляются деформации сдвига.

Изучению гидромеханики предшествует изучение математики, в особенности векторной алгебры и математического анализа, а также физики, где следует обратить внимание на основные законы сохранения. Практическое значение гидромеханики проявляется в кораблестроении, авиации, гидротехнике (построение трубопроводов, турбин и водопровода), гидрологии и океанографии (изучение волновых и турбулентных течений). Метеорология же исследует динамику атмосферы, а именно турбулентное движение воздуха, солнечную радиацию, испарение и т.п.

1. Скалярные и векторные поля. Поток и циркуляция векторного поля.

В гидромеханике приходится иметь дело с величинами различной природы. Наиболее простым из них является *скаляр* – это просто число, соотнесённое определенной точке пространства. *Вектором* называется расположенный в пространстве направленный отрезок. Численное значение вектора называется *модулем* и равно его длине. Для определения вектора достаточно задать три его проекции a_x, a_y, a_z на координатные оси. Тогда модуль вектора определяется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, как известно, является следующая величина

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right).$$

Перечислим свойства скалярного произведения.

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

2. Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm|\vec{a}||\vec{b}|$.
3. Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$.
5. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.
6. $\lambda \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b})$, λ=const.
7. Если координаты перемножаемых векторов $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, то
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является вектор $\vec{c}$, перпендикулярный к плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, образующий с ними правую тройку и имеющий длину
$$|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right).$$
Записывается векторное произведение следующим образом: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$. Свойства векторного произведения:

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$.
2. Если вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ параллельны, то $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.
3. $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.
4. $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$.
5. $\lambda \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$, λ=const.
6. Если координаты перемножаемых векторов $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b}(b_x, b_y, b_z)$, то
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} =$$
$$= (a_y b_z - a_z b_y)\vec{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\vec{k}.$$

Скалярным полем или *скалярной функцией точки* называется некоторая скалярная величина, которая ставится в соответствие каждой точке пространства или его части. Например, поле температур или поле давления. Обозначают его обычно в виде $\varphi(\vec{r})$ или $\varphi(x, y, z)$. *Векторное поле* определяется *векторной функцией точки*, т.е. это вектор, каждая координата которого является функцией от координат точки. В координатной форме

$$\vec{a} = a_x(x, y, z)\vec{i} + a_y(x, y, z)\vec{j} + a_z(x, y, z)\vec{k}.$$

Наиболее наглядными примерами векторного поля являются поля скоростей и ускорений потока жидкости или газа.

В гидромеханике часто приходится исследовать изменение различных параметров в зависимости от координат. В связи с этим вводятся в рассмотрение следующие дифференциальные операторы.

Градиентом скалярной функции точки $\varphi(\vec{r})$ является вектор

$$\mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}.$$

В каждой точке вектор градиента направлен по нормали к поверхности, определяемой функцией $\varphi(x, y, z)$, в сторону её возрастания.

Дивергенцией векторного поля $\vec{a}$ является скаляр

$$\mathrm{div}\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Векторное поле, дивергенция которого равна нулю, называется *соленоидальным*.

Ротором или *вихрем* векторного поля $\vec{a}$ называется вектор

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/_{\partial x} & \partial/_{\partial y} & \partial/_{\partial z} \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{k}.$$

Вихрь является соленоидальным вектором, т. к. $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{a}) = 0$. Кроме того, можно показать, что

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) = 0,$$

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\varphi) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi.$$

Оператор, получившийся во второй формуле, носит название *оператора Лапласа*.

Циркуляция вектора есть линейный интеграл от этого вектора по замкнутой кривой (с определенным направлением обхода):

$$Ц = \oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r} = \oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz.$$

Потоком векторного поля $\vec{a}$ через данную поверхность S называется скаляр, который вычисляется с помощью двойного интеграла по этой поверхности:

$$П = \iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}dS = \iint\limits_S a_n dS,$$

где $\vec{n}$ – единичная нормаль к поверхности S.

Теорема Гаусса. Поток векторного поля через замкнутую поверхность равен объемному интегралу от дивергенции вектора ($\vec{n}$ – орт *внешней* нормали).

$$П = \iint\limits_S \vec{a}\cdot\vec{n}dS = \iiint\limits_V \mathrm{div}\vec{a}\,dV.$$

Следствие из теоремы Гаусса. Если требуется вычислить двойной интеграл по поверхности S от некоторой скалярной функции, умноженной на единичный вектор нормали к поверхности, то подынтегральное выражение можно преобразовать и применить теорему Гаусса.

$$\iint\limits_S \varphi\vec{n}\,dS = \iint\limits_S \left(\varphi\vec{\imath}\cos\left(\widehat{\vec{n},Ox}\right) + \varphi\vec{\jmath}\cos\left(\widehat{\vec{n},Oy}\right)\right.$$
$$\left. + \varphi\vec{k}\cos\left(\widehat{\vec{n},Oz}\right)\right)dS =$$
$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi\vec{\imath}) + \frac{\partial}{\partial y}(\varphi\vec{\jmath}) + \frac{\partial}{\partial z}(\varphi\vec{k})\right)dV$$
$$= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)dV =$$
$$= \iiint\limits_V \mathrm{grad}\varphi dV.$$

Теорема Стокса. Циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку вихря через любую поверхность, ограниченную этим контуром.

$$\text{Ц} = \oint_L \vec{a}\cdot d\vec{r} = \iint\limits_S \mathrm{rot}\vec{a}\cdot\vec{n}dS.$$

Следствие из теоремы Стокса: если $\vec{a} = \mathrm{grad}\varphi$, то $\mathrm{rot}\vec{a} = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\varphi) = 0$ и, значит, циркуляция равна нулю.

Задача 1. Найти поток радиус-вектора $\vec{r}(x,y,z)$ через замкнутую область $z = 1 - \sqrt{x^2+y^2}, z = 0, (0 \leq z \leq 1)$.

Решение. Используем формулу из теоремы Гаусса, применяя при вычислении интеграла цилиндрические координаты.

$$\mathrm{div}\vec{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

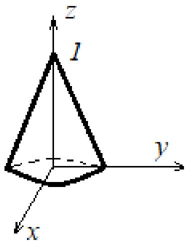

Рис.1.

$$\Pi = \iiint\limits_V 3dV = 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 dr \int\limits_0^{1-r} rdz$$

$$= 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 rz|_{z=0}^{z=1-r} dr$$

$$= 3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 (r-r^2)dr = 6\pi\left(\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right)\Big|_0^1$$

$$= \pi.$$

Задача 2. Вычислить циркуляцию вектора $\vec{a}(y,-x,10)$ вдоль окружности $x^2+y^2=1$, $z=0$ в положительном направлении (против часовой стрелки), используя определение циркуляции. Проверить правильность вычислений с помощью формулы Стокса.

Решение. Вычислим циркуляцию векторного поля по определению. Зададим окружность параметрическим уравнением

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} dx = -\sin t\, dt, \\ dy = \cos t\, dt, \\ dz = 0. \end{cases}$$

$$\text{Ц} = \oint_L a_x dx + a_y dy + a_z dz = \oint_L ydx - xdy + 10dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t\,(-\sin t) - \cos t \cdot \cos t + 0)dt$$

$$= -\int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)dt = -2\pi.$$

Проверим правильность вычислений с помощью формулы Стокса. Очевидно,

$$\mathrm{rot}\vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/_{\partial x} & \partial/_{\partial y} & \partial/_{\partial z} \\ y & -x & 10 \end{vmatrix} = -2\vec{k}.$$

Нормаль к окружности при положительном обходе контура $\vec{n} = \vec{k}$. Следовательно,

$$\text{Ц} = \iint_S \mathrm{rot}\vec{a} \cdot \vec{n} dS = -2 \iint_S \vec{n} \cdot \vec{k} dS = -2 \iint_S dxdy$$

$$= -2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr = -2\frac{1}{2}2\pi = -2\pi.$$

2. Кинематика жидкой среды.

Общей задачей кинематики является описание движения среды безотносительно к причинам, вызвавшим это движение. Вследствие этого кинематика изучает главным образом свойства векторного поля скоростей $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$. Мы будем рассматривать случай плоского движения, т.е. считаем, что

$$\vec{v} = v_x(x, y, t)\vec{i} + v_y(x, y, t)\vec{j},$$

где x, y – координаты точки, t – время.

Траекторией частицы называется геометрическое место точек, через которые движущаяся частица последовательно переходит во времени. Поскольку траектория характеризует скорость одной частицы в разные моменты времени, она определяется следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x(x, y, t), \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y(x, y, t). \end{cases} \qquad (2.1)$$

Интегрируя и решая систему дифференциальных уравнений (2.1), мы получим бесчисленное множество решений. Для определения произвольных постоянных должны быть дополнительно заданы условия

$$x|_{t=t_0} = x_0, \qquad y|_{t=t_0} = y_0.$$

В таком случае мы получим траекторию, проходящую в момент времени $t = t_0$ через точку (x_0, y_0).

Линией тока называется линия, у которой в данный момент времени в любой точке вектор скорости направлен по касательной к ней. Таким образом, линия тока определяет направление скоростей разных точек среды в один момент времени $t = t_0$. Уравнение для определения линии тока запишется следующим образом

$$\frac{dx}{v_x(x, y, t_0)} = \frac{dy}{v_y(x, y, t_0)}. \qquad (2.2)$$

Уравнение (2.2) также дает бесчисленное множество решений, поэтому для нахождения конкретной линии тока следует задать точку (x_0, y_0), через которую она проходит в момент времени $t = t_0$.

В общем случае траектории и линии тока не совпадают. Совпадают они только при *стационарном* течении, когда v_x, v_y не зависят от времени.

Если мы выделим в жидкости некоторый малый объем и рассмотрим его движение, то с течением времени этот объем, очевидно, будет деформироваться. Для численной характеристики этой деформации вводится так называемый *тензор скоростей деформации*, представляющий собой следующую таблицу

$$\begin{Vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{Vmatrix}, \qquad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial v_x}{\partial x}, \qquad \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right), \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v_y}{\partial y}, \qquad \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right), \qquad (2.4) \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial v_z}{\partial z}, \qquad \varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Физический смысл диагональных компонент ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} состоит в том, что они определяют скорость растяжения (или сжатия) объема жидкости вдоль осей Ox, Oy, Oz. Остальные, недиагональные компоненты характеризуют скорость скашивания объема жидкости, которое будет происходить при движении. Поскольку мы рассматриваем плоское движение, элементы ε_{zz}, $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$, $\varepsilon_{xz} = \varepsilon_{zx}$ будут равны нулю.

При движении объем жидкости может не только деформироваться, но и расширяться (или сжиматься). Это явление численно характеризуется *скоростью объемного расширения жидкости*

$$I = \mathrm{div}\vec{v}. \qquad (2.5)$$

В случае, когда $I = 0$, жидкость называется *несжимаемой*.

В гидромеханике вводится также величина, характеризующая вихревое движение точек среды. Это так называемый *вектор вихря скорости*.

$$\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\vec{v}. \qquad (2.6)$$

Если в пространстве существует область, где $\vec{\Omega} = 0$, то в этой области течение называется *безвихревым*.

Иногда в задачах требуется вычислить полные производные по времени от гидродинамических величин (от скорости, температуры, давления и т.п.). Гидродинамические величины зависят от времени и координат, а координаты могут также зависеть от времени, если частица перемещается. Следовательно, согласно формулам математического анализа, можем записать для полной производной по времени от гидродинамического параметра $A(x, y, t)$ следующее выражение.

$$\frac{dA(x,y,t)}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + v_x \frac{\partial A}{\partial x} + v_y \frac{\partial A}{\partial y}.$$

В частности, если $A = \vec{v}$, то мы получим формулу для вычисления ускорения

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \vec{v}}{\partial y}. \qquad (2.7)$$

Или в проекциях

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_x}{\partial y}, \\ a_y = \dfrac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \dfrac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \dfrac{\partial v_y}{\partial y}. \end{cases} \qquad (2.8)$$

Таким образом мы можем вычислить ускорение любой точки среды в любой момент времени.

В случае безвихревого течения (когда $\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\vec{v} = 0$) вводится понятие *потенциала скорости* – функция $\varphi(x, y, t)$. По определению

$$\vec{v} = \mathrm{grad}\varphi,$$

т.е.

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \qquad (2.9)$$

Если же нам известно поле скоростей, а нужно найти потенциал в некоторой точке, то необходимо вычислить криволинейный интеграл по произвольному контуру, соединяющему точку A – начало отсчета потенциала и точку B, в которой ищется потенциал.

$$\varphi(B) = \int_A^B v_x dx + v_y dy.$$

Для плоского движения несжимаемой жидкости (когда $\operatorname{div}\vec{v} = 0$) вводят *функцию тока* $\psi(x, y)$. По определению

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (2.10)$$

Аналогично формуле для потенциала

$$\psi(x, y) = \int_A^B v_x dy - v_y dx. \qquad (2.11)$$

Функция $\psi(x, y)$ называется функцией тока, т.к. на каждой линии тока она сохраняет постоянное значение. Это свойство позволяет проводить исследование линий тока, когда их трудно найти непосредственно.

Остановимся на решении характерных задач по кинематике жидкости.

Задача 1. Для плоского поля скоростей $\vec{v}(4y + t^2/2\,, -x)$ определить

1). линию тока и траекторию, проходящие через точку $A(0, 1/16)$ в момент времени $t = 0$;

2). тензор скоростей деформации и сжимаемость среды;

3). поле вихрей скорости;

4). ускорение точек среды.

Решение. 1). Траекторию, согласно формуле (2.1), определяем из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = v_x = 4y + t^2/2\,, \\ \dfrac{dy}{dt} = v_y = -x. \end{cases}$$

Продифференцируем второе уравнение системы еще раз по t. Получим

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dx}{dt} = -\left(4y + \frac{t^2}{2}\right) = -4y - \frac{t^2}{2}$$

или

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 4y = -\frac{t^2}{2}.$$

Это линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение складывается из общего решения однородного уравнения $y_1(t)$ и частного решения неоднородного уравнения $y_2(t)$. Решение $y_1(t)$ находится путем отыскания корней характеристического уравнения.

$$\lambda^2 + 4 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = \pm 2i.$$

Следовательно,

$$y_1(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t.$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, по виду неоднородной правой части дифференциального уравнения заключаем, что решение $y_2(t)$ нужно искать в виде

$$y_2(t) = at^2 + bt + c.$$

Вычисляя $\frac{dy_2}{dt}$ и $\frac{d^2y_2}{dt^2}$, подставляем вторую производную в исходное неоднородное уравнение. Получим

$$2a + 4(at^2 + bt + c) = -t^2/2.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, имеем

$$4a = -1/2\,, \qquad 4b = 0, \qquad 2a + 4c = 0,$$

откуда

$$a = -\frac{1}{8}, \qquad b = 0, \qquad c = \frac{1}{16}.$$

$$y(t) = C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t - \frac{1}{8}t^2 + \frac{1}{16}.$$

$$x(t) = -\frac{dy}{dt} = 2C_1 \sin 2t - 2C_2 \cos 2t - \frac{1}{4}t.$$

Определим теперь произвольные постоянные. По условию

$$x(0) = 0, \qquad y(0) = 1/16,$$

Откуда находим, что $C_1 = C_2 = 0$. Уравнение траектории, таким образом, имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = -\dfrac{1}{4}t, \\ y(t) = -\dfrac{1}{8}t^2 + \dfrac{1}{16}, \end{cases}$$

или $x^2 = -\frac{1}{2}\left(y - \frac{1}{16}\right)$. Это уравнение параболы.

Для определения линий тока воспользуемся формулой (2.2). В нашем случае можем записать

$$\frac{dx}{4y} = -\frac{dy}{x}, \qquad -xdx = 4ydy.$$

Разделив таким образом переменные и интегрируя, получим

$$x^2 + 4y^2 = C.$$

Подставляя начальные значения, найдем $C = 1/64$. Таким образом, уравнением линии тока является уравнение эллипса

$$x^2 + 4y^2 = \frac{1}{64}.$$

2). Компоненты тензора скоростей деформации находятся по формулам (2.4). Проведя вычисления, легко определить, что почти все элементы тензора равны нулю, за исключением двух.

$$\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) = \frac{1}{2}(4 - 1) = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, тензор скоростей деформации жидкости в данном потоке имеет вид (см. (2.3))

$$\begin{vmatrix} 0 & 3/2 & 0 \\ 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Сжимаемость среды в этом случае также нулевая (см. формулу (2.5)): $I = \mathrm{div}\vec{v} = 0$.

3). Поле вихрей скорости находится по формуле (2.6) и с помощью определения ротора.

$$\vec{\Omega} = \mathrm{rot}\vec{v} = \left(\frac{\partial(-x)}{\partial x} - \frac{\partial(4y + t^2/2)}{\partial y}\right)\vec{k} = -5\vec{k}.$$

4). Для вычисления ускорения частиц жидкости воспользуемся формулами (2.7), (2.8). Получим

$$a_x = -4x + t, \qquad a_y = -4y - t^2/2.$$

$$\vec{a}(-4x + t, -4y - t^2/2\,, 0\,).$$

Задача 2. По известному потенциалу скорости $\varphi(x, y) = e^x \sin y$ найти функцию тока $\psi(x, y)$.

Решение. Прежде всего проверим, выполнено ли условие несжимаемости среды $\mathrm{div}\vec{v} = 0$, т.к. только в этом случае возможно существование функции тока.

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} = e^x \sin y\,, \qquad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = e^x \cos y,$$

$$\mathrm{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0.$$

Найдем функцию тока на основании формулы (2.11), начальную точку отсчета выберем в начале координат. Пусть точка B имеет координаты (x_0, y_0). Т.к. мы имеем право интегрировать по произвольному пути, выберем в качестве контура ломаную OAB (см. рис.2). Очевидно,

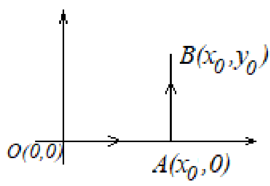

Рис.2

на AC: $y = 0,\ 0 \le x \le x_0,\ dy = 0,$

на CB: $x = x_0,\ 0 \le y \le y_0,\ dx = 0.$

Подставляя это в формулу (2.11), получим

$$\psi(x_0, y_0) = -\int_0^{x_0} v_y(x, 0)dx + \int_0^{y_0} v_x(x_0, y)dy$$

$$= \int_0^{x_0} (-e^x \cos 0)dx + \int_0^{y_0} (e^{x_0} \sin y)dy$$

$$= -e^{x_0} + 1 - e^{x_0} \cos y_0 + e^{x_0}$$

$$= 1 - e^{x_0} \cos y_0.$$

3. Гидростатика.

Для решения основных задач необходимо сформулировать закон движения жидкости. За основу закона берется, конечно, второй закон Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$, где $\vec{F}$ – равнодействующая всех сил, действующих на тело. В нашем случае

$$m\vec{a} = \iiint\limits_V \rho\vec{a}dV,$$

а что касается сил, действующих на частицы жидкости, то различают два класса сил, приложенных к частицам выделенного объема жидкости или газа: объемные и поверхностные.

Объемные силы приложены к частицам жидкой среды, заполняющим некоторый объем, и действуют на каждый элемент объема одинаково, независимо от того, существуют или нет рядом другие частицы жидкости. Примеры: сила тяжести, сила инерции, сила электростатического притяжения.

Поверхностные силы действуют на боковую поверхность данного объема жидкости, к ним относятся силы взаимодействия между частицами жидкости, трение жидкости о поверхность твердого тела, давление тела на обтекающую его жидкость и пр. Если мы рассматриваем объем V жидкости, ограниченной поверхностью S, то равнодействующая всех сил, действующих на данный объем, может быть записана в виде

$$\iiint\limits_V \rho\vec{F}dV + \iint\limits_S \overrightarrow{p_n}dS,$$

где $\vec{F}$ – равнодействующая объемных сил, отнесенная к единице массы, а $\overrightarrow{p_n}$ – равнодействующая поверхностных сил, отнесенная к единице площади ($\vec{n}$ – единичная нормаль к поверхности). Подставляя все интегралы во второй закон Ньютона, получим

$$\iiint\limits_V \rho\vec{a}dV = \iiint\limits_V \rho\vec{F}dV + \iint\limits_S \overrightarrow{p_n}dS,$$

$$\iiint\limits_V \left(\rho\vec{F} - \rho\vec{a}\right)dV + \iint\limits_S \overrightarrow{p_n}dS = 0.$$

Это *уравнение движения жидкости в интегральной форме*. Чтобы записать уравнение в дифференциальной форме, необходимо объединить интегралы, а для этого перевести двойной интеграл от поверхностной силы в тройной. Можно доказать, что

$$\overrightarrow{p_n} = \overrightarrow{p_x}n_x + \overrightarrow{p_y}n_y + \overrightarrow{p_z}n_z =$$
$$= \overrightarrow{p_x}\cos\left(\widehat{\vec{n}, Ox}\right) + \overrightarrow{p_y}\cos\left(\widehat{\vec{n}, Oy}\right) + \overrightarrow{p_z}\cos\left(\widehat{\vec{n}, Oz}\right),$$

где $\overrightarrow{p_x}$, $\overrightarrow{p_y}$, $\overrightarrow{p_z}$ - поверхностные силы, действующие вдоль соответствующих осей координат. Подставим это разложение в двойной интеграл и применим формулу Гаусса.

$$\iint_S \overrightarrow{p_n} dS = \iint_S \left(\overrightarrow{p_x}\cos\left(\widehat{\vec{n}, Ox}\right) + \overrightarrow{p_y}\cos\left(\widehat{\vec{n}, Oy}\right)\right.$$
$$\left. + \overrightarrow{p_z}\cos\left(\widehat{\vec{n}, Oz}\right)\right) dS$$
$$= \iiint_V \left(\frac{\partial \overrightarrow{p_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overrightarrow{p_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overrightarrow{p_z}}{\partial z}\right) dV.$$

Таким образом, мы преобразовали двойной интеграл в тройной и, подставляя его в уравнение движения, можем объединить интегралы

$$\iiint_V \left(\rho\vec{F} - \rho\vec{a} + \frac{\partial \overrightarrow{p_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overrightarrow{p_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overrightarrow{p_z}}{\partial z}\right) dV = 0.$$

Т.к. объем жидкости выбран абсолютно произвольно, то равенство нулю этого интеграла возможно только в том случае, если подынтегральная функция равна нулю. Таким образом, получаем *уравнение движения жидкости в дифференциальной форме*.

$$\rho\vec{a} = \rho\vec{F} + \frac{\partial \overrightarrow{p_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overrightarrow{p_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overrightarrow{p_z}}{\partial z}$$

или

$$\rho\frac{d\vec{v}}{dt} = \rho\vec{F} + \frac{\partial \overrightarrow{p_x}}{\partial x} + \frac{\partial \overrightarrow{p_y}}{\partial y} + \frac{\partial \overrightarrow{p_z}}{\partial z}. \qquad (3.1)$$

Это векторное равенство, оно эквивалентно трем скалярным, которые получатся, если спроектировать уравнение движения на оси координат

$$\begin{cases} \rho\dfrac{dv_x}{dt} = \rho F_x + \dfrac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{xz}}{\partial z}, \\ \rho\dfrac{dv_y}{dt} = \rho F_y + \dfrac{\partial p_{yx}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{yz}}{\partial z}, \\ \rho\dfrac{dv_z}{dt} = \rho F_z + \dfrac{\partial p_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial p_{zy}}{\partial y} + \dfrac{\partial p_{zz}}{\partial z}. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Система уравнений (3.2) называется *уравнением движения жидкости в напряжениях*. Величины p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} называются *нормальными напряжениями*, а остальные – *касательными напряжениями*. Полагают, что

$$p_{xy} = p_{yx}, \qquad p_{xz} = p_{zx}, \qquad p_{yz} = p_{zy}.$$

Если считать все касательные напряжения равными нулю, то жидкость называется *идеальной*. В этом случае полагают

$$p_{xx} = p_{yy} = p_{zz} = -p,$$

где p – давление. Тогда уравнение движения жидкости в напряжениях принимает вид

$$\begin{cases} \rho \dfrac{dv_x}{dt} = \rho F_x - \dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ \rho \dfrac{dv_y}{dt} = \rho F_y - \dfrac{\partial p}{\partial y}, \\ \rho \dfrac{dv_z}{dt} = \rho F_z - \dfrac{\partial p}{\partial z}. \end{cases} \qquad (3.3)$$

или в векторной форме

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \mathrm{grad} p. \qquad (3.4)$$

Это так называемое *уравнение движения идеальной жидкости*.

Рассмотрим уравнение движения жидкости в случае, когда жидкость покоится. В этом случае $\vec{v} = 0$, $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$, A – любой гидродинамический параметр. Рассмотрим уравнение движения идеальной жидкости (3.4). Левая часть уравнения, очевидно, обращается в ноль, так что получаем равенство

$$\rho \vec{F} = \mathrm{grad} p$$

или в проекциях на оси координат

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial x} = \rho F_x, \\ \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho F_y, \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = \rho F_z. \end{cases}$$

Умножим эти уравнения на *dx*, *dy*, *dz* соответственно и сложим. Тогда получится

$$\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz = \rho\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right),$$

$$dp = \rho\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right).$$

Обычно $\vec{F}$ – это сила тяжести, а она является потенциальной, т.е. существует функция $U(x, y, z) = -\mathrm{g}z$, такая, что

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \qquad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \qquad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\mathrm{g}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение, получим

$$dp = \rho\left(\frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz\right) = \rho dU \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho}dp = dU.$$

Проинтегрировать полученное выражение можно только в том случае, если предварительно определиться с плотностью ρ. Тут возможны несколько вариантов.

1. <u>Несжимаемая жидкость</u>. В этом случае $\rho = \mathrm{const}$ и мы можем внести ее под знак дифференциала. Тогда

$$d\left(\frac{p}{\rho}\right) = dU, \qquad d\left(\frac{p}{\rho} - U\right) = 0, \qquad \frac{p}{\rho} - U = \mathrm{const}.$$

Если вспомнить, что $U(x, y, z) = -\mathrm{g}z$, то можем записать следующую зависимость

$$\frac{p}{\rho} + \mathrm{g}z = \mathrm{const} = \frac{p_0}{\rho_0} + \mathrm{g}z_0, \qquad \text{где } \rho = \rho_0,$$

$$p = p_0 + \rho\mathrm{g}(z_0 - z). \qquad (3.5)$$

Это *основное гидростатическое уравнение*; из него видно, что давление в какой-либо точке жидкости равно весу столба жидкости, приходящегося на единицу площади и имеющего высоту от данной точки до поверхности, сложенному с давлением на поверхности.

2. Изотермический процесс. Пусть рассматриваемая нами среда такова, что удовлетворяет уравнению состояния идеального газа

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M},$$

где R – универсальная газовая постоянная, M – молярная масса газа, T – его температура. Пусть теперь температура газа постоянна. В таком случае можем записать

$$\frac{p}{\rho} = \mathrm{const} = \frac{p_0}{\rho_0}, \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{1}{p}.$$

Т.е. плотность среды уже не постоянное число, а функция, но зависит только от давления. Такая среда называется *баротропной*. Для баротропной среды можем ввести функцию

$$\mathbb{P}(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{1}{\rho} dp = \int_{p_0}^{p} \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \frac{1}{p} dp = \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \ln p \,\Big|_{p_0}^{p}$$
$$= \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \ln p - \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \ln p_0.$$

Эта функция замечательна тем, что по ее определению

$$d\mathbb{P} = \frac{1}{\rho} dp$$

и в выражении, полученном из уравнения движения, мы снова можем объединить дифференциалы.

$$d\mathbb{P} = dU, \quad d(\mathbb{P} - U) = 0, \;\; \mathbb{P} - U = \mathrm{const}.$$

Подставив в формулу выражения для функции $U(x, y, z)$ и для функции $\mathbb{P}(p)$ в случае изотермического процесса, получим следующую зависимость

$$\mathrm{g}z + \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \ln p = \mathrm{const} = \mathrm{g}z_0 + \frac{p_0}{\rho_0} \cdot \ln p_0. \qquad (3.6)$$

3. <u>Адиабатический процесс</u>. Это тоже случай баротропной среды, только в этой среде давление и плотность удовлетворяют уравнению адиабаты Пуассона:

$$\frac{p}{\rho^{æ}} = \mathrm{const} = \frac{p_0}{\rho_0^{æ}}.$$

Тогда легко вычислить, что

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho_0} \cdot \left(\frac{p_0}{p}\right)^{1/æ},$$

$$\mathbb{P}(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{1}{\rho} dp = \frac{p_0^{1/æ}}{\rho_0} \int_{p_0}^{p} p^{-1/æ} dp$$

$$= \frac{æ}{æ - 1} \frac{p_0^{1/æ}}{\rho_0} \left(p^{\frac{æ-1}{æ}} - p_0^{\frac{æ-1}{æ}}\right)$$

$$= -\frac{æ}{æ - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{æ-1}{æ}}\right).$$

Следовательно, подставив результат вычислений в формулу, полученную из уравнения движения для баротропной среды, имеем следующую зависимость

$$\mathrm{g}z - \frac{æ}{æ - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{æ-1}{æ}}\right) = \mathrm{const} = \mathrm{g}z_0. \qquad (3.7)$$

Выведенные формулы (3.5) – (3.7) позволяют решить основные задачи по вычислению атмосферного давления на различных высотах.

Задача. Определить давление газовой смеси на высоте $z = 5$ км, если на высоте $z_0 = 3$ км $p_0 = 37\ \text{кН}/\text{м}^2$, $\rho_0 = 1.24\ \text{кг}/\text{м}^3$. При вычислении считать, что 1) газовая смесь несжимаема; 2) процесс изменения давления является изотермическим; 3) процесс изменения давления считается адиабатическим ($æ = 1.4$).

Решение. 1. Если газовая смесь несжимаема, то из формулы (3.5) легко получить

$$p = p_0 + \rho g(z_0 - z).$$

Подставляя данные задачи и считая $g = 10\ \text{м/с}^2$, вычислим

$$p = 37 \cdot 10^3 - 1.24 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 10^3 = 12.2\ \text{кН/м}^2.$$

2. Если процесс изменения давления считается изотермическим, то необходимо выразить давление из формулы (3.6). Очевидно, что

$$\ln\frac{p}{p_0} = \frac{\rho_0}{p_0} g(z_0 - z),$$

$$p = p_0 \exp\left\{\frac{\rho_0}{p_0} g(z_0 - z)\right\}.$$

Следовательно,

$$p = 37 \cdot 10^3 \exp\left\{\frac{1.24}{37 \cdot 10^3} \cdot 10 \cdot (-2 \cdot 10^3)\right\} = 18.87\ \text{кН/м}^2.$$

3. Если процесс изменения давления адиабатический, то аналогичным образом выразим давление p из формулы (3.7).

$$1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{æ-1}{æ}} = -\frac{æ - 1}{æ} \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot g(z_0 - z),$$

$$p = p_0 \left(1 + \frac{æ - 1}{æ} \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot g(z_0 - z)\right)^{\frac{æ}{æ-1}}.$$

$$p = 37 \cdot 10^3 \cdot \left(1 + \frac{0.4}{1.4} \cdot \frac{1.24}{37 \cdot 10^3} \cdot 10 \cdot (-2 \cdot 10^3)\right)^{\frac{1.4}{0.4}} = 17.39\ \text{кН/м}^2.$$

4. Интеграл Бернулли.

Пусть жидкость идеальна, объемные силы имеют потенциал ($\vec{F} = -\text{grad}U$), течение установившееся и жидкость баротропна на линии тока. Тогда можно частично проинтегрировать уравнения движения жидкости (3.3), получив следующее выражение

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = dU - \frac{1}{\rho}dp. \qquad (4.1)$$

Т.к. жидкость баротропна на линии тока, можем на линии тока ввести функцию

$$\mathbb{P}(p) = \int_{p_0}^{p} \frac{1}{\rho}dp, \qquad d\mathbb{P} = \frac{1}{\rho}dp.$$

Таким образом,

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = dU - d\mathbb{P},$$

$$d\left(\frac{v^2}{2} - U + \mathbb{P}\right) = 0, \qquad U = -\mathrm{g}z,$$

$$\frac{v^2}{2} + \mathrm{g}z + \mathbb{P} = \mathrm{const}.$$

Это так называемый *интеграл Бернулли*. Частным случаем этой формулы является случай идеального газа, для которого верна адиабата Пуассона и, следовательно

$$\mathbb{P}(p) = \frac{æ}{æ - 1}\frac{p}{\rho} + \mathrm{const}.$$

Тогда

$$\frac{v^2}{2} + \mathrm{g}z + \frac{æ}{æ - 1}\frac{p}{\rho} = \mathrm{const}. \qquad (4.2)$$

Если жидкость несжимаема, то, поскольку $\rho = \mathrm{const}$, формулу (4.1) можно проинтегрировать гораздо проще:

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = dU - d\left(\frac{p}{\rho}\right), \qquad d\left(\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho}\right) = 0,$$

$$\frac{v^2}{2} + \mathrm{g}z + \frac{p}{\rho} = \mathrm{const}. \qquad (4.3)$$

Это *интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости*.

Задача 1. Задача об истечении жидкости из сосуда через малое отверстие. Найти скорость истечения жидкости из сосуда через малое отверстие площадью s, если площадь поверхности жидкости S, начальная высота столба жидкости H.

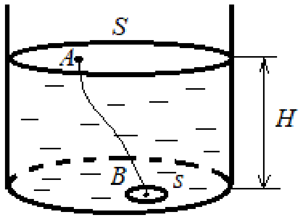

Рис. 3.

Решение. Считаем жидкость несжимаемой. Если $s \ll S$, то течение жидкости можно считать установившимся. Следовательно, для точек A и B можем применить интеграл Бернулли для идеальной несжимаемой жидкости и приравнять в этих точках следующие значения

$$\frac{v_A^2}{2} + U_A + \frac{p_A}{\rho_A} = \frac{v_B^2}{2} + U_B + \frac{p_B}{\rho_B}.$$

Поскольку точка A находится на высоте H, а точка B на нулевой высоте, то

$$U_A = \mathrm{g}H, \qquad U_B = 0.$$

Очевидно также, что $\rho_A = \rho_B = \rho$. Поскольку жидкость открыта и сверху, и снизу, то давление в точках A и B одинаково и равно атмосферному давлению: $p_A = p_B = p$. Осталось решить вопрос со скоростями v_A, v_B. Запишем условие постоянства расхода жидкости, т.е. условие того, что сколько жидкости вытекло снизу, на столько уменьшилось ее количество сверху.

$$Q = v_A \cdot S = v_B \cdot s, \qquad v_A = v_B \frac{s}{S}.$$

Подставив все приведенные формулы в интеграл Бернулли, получим

$$\frac{1}{2}\frac{s^2}{S^2}v_B^2 + gH + \frac{p}{\rho} = \frac{v_B^2}{2} + \frac{p}{\rho}.$$

Таким образом

$$v_B = \sqrt{\frac{2gH}{1 - s^2/S^2}}.$$

Если $s \ll S$, то $1 - s^2/S^2 \approx 1$, формулу обычно записывают в сокращенном виде

$$v_B = \sqrt{2gH}$$

и называют *формулой Торричелли*.

Задача 2. Из резервуара с постоянным напором H=4 м через трубопровод вытекает вода. Определить расход Q, если d=5 см.

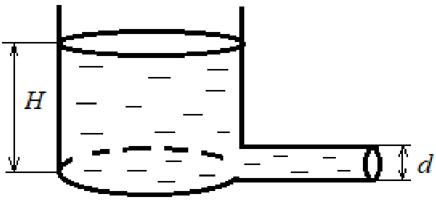

Рис. 4.

Решение. По формуле Торричелли можем вычислить скорость истечения воды:

$$v = \sqrt{2gH} = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 4} = 8.9 \text{ м/с}.$$

Легко также вычислить площадь отверстия, из которого вода вытекает

$$s = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 \cdot (0.05)^2}{4} = 0.00196 \text{ м}^2.$$

Следовательно, расход воды

$$Q = v \cdot s = 0.00196 \cdot 8.9 = 0.017 \text{ м}^3/\text{с} = 17 \text{ л/с}.$$

Задача 3. Диаметр горизонтальной трубы, подводящей воду к насадке (рис.5) $D = 150$ мм, диаметр насадка $d = 50$ мм. Скорость истечения струи из насадка $V = 30$ м/с. Считая жидкость несжимаемой, определить давление p_1 в подводящей трубе. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

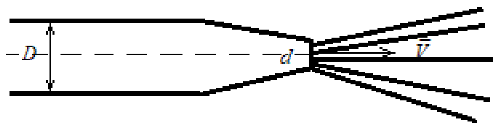

Рис. 5.

Решение. Запишем интеграл Бернулли для несжимаемой жидкости.

$$\frac{v^2}{2} + gz_1 + \frac{p_1}{\rho} = \frac{V^2}{2} + gz_2 + \frac{p_2}{\rho}.$$

Т.к. труба расположена горизонтально, то $z_1 = z_2$ и соответствующие слагаемые в уравнении сокращаются. Кроме того, если в задаче требуется определить давление в трубе, то, очевидно, имеется в виду избыточное давление, т.е. атмосферное давление не учитывается. Положим тогда атмосферное давление равным нулю, следовательно, $p_2 = 0$, т.к. вода выливается наружу. Скорость течения воды в трубе v найдем из условия постоянства расхода $v \cdot S = V \cdot s$.

$$v \cdot \frac{\pi D^2}{4} = V \cdot \frac{\pi d^2}{4},$$

$$v = V\left(\frac{d}{D}\right)^2 = 30\left(\frac{50 \cdot 10^{-3}}{150 \cdot 10^{-3}}\right)^2 = 3.33 \text{ м/с}.$$

Теперь можно вычислить давление воды в подводящей трубе.

$$p_1 = \rho\left(\frac{V^2}{2} - \frac{v^2}{2}\right) = 445 \text{ кПа}.$$

Варианты контрольной работы.

Варианты контрольной работы обозначены буквами алфавита. Студенту требуется выполнить тот вариант, с буквы которого начинается его фамилия.

1. Поток и циркуляция векторного поля.

Даны координаты векторного поля $\vec{a}$ и уравнения поверхностей S_1, S_2. Требуется:

1. вычислить поток векторного поля $\vec{a}$ через замкнутую поверхность $S_1 \cup S_2$, используя формулу Гаусса;

2. вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}$ вдоль замкнутой кривой $S_1 \cap S_2$, используя определение циркуляции;

3. проверить правильность вычисления циркуляции с помощью формулы Стокса.

Вариант	$\vec{a}$	S_1	S_2
А	$(3y-5x)\vec{i}+(6x+4y)\vec{j}+(4z-xy+4)\vec{k}$	$x^2+y^2=(z+1)^2$	$z=1$
Б	$(x-y)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+(x^3+3z+6)\vec{k}$	$x^2+y^2=(z+2)^2$	$z=-4$
В	$(3x+2y)\vec{i}+(5x+2y)\vec{j}+(y^2-2z)\vec{k}$	$x^2+y^2=(z-1)^2$	$z=3$
Г	$(3x-4y)\vec{i}+(2y-x)\vec{j}+(xy+z+4)\vec{k}$	$x^2+y^2=(z-2)^2$	$z=4$
Д	$(-x-2y)\vec{i}+(x+3y)\vec{j}+(4z-2xy+9)\vec{k}$	$x^2+y^2=(z+3)^2$	$z=-1$
Е	$(7x+5y)\vec{i}+(8x-2y)\vec{j}+(3xy+4z-2)\vec{k}$	$x^2+y^2=(z+1)^2$	$z=-3$

Ж	$(2x-3x)\vec{i}+(3z-4y)\vec{j}+(5z-xy+6)\vec{k}$	$x^2+y^2=(z-1)^2$	$z=-1$
З	$(6x+5z)\vec{i}+(3x-y)\vec{j}+(y^2+4z-4)\vec{k}$	$x^2+y^2=(z-4)^2$	$z=6$
И	$(y-2x)\vec{i}+(4x+3y)\vec{j}+(2z+x^2-1)\vec{k}$	$x^2+y^2=(z+3)^2$	$z=-5$
К	$(5x+4y)\vec{i}+(7x-2y)\vec{j}+(2xy+3z-4)\vec{k}$	$x^2+y^2=(z-4)^2$	$z=2$
Л	$(3y-5x)\vec{i}+(6x+5y)\vec{j}+(xy^2+3z-4)\vec{k}$	$x^2+y^2=z+1$	$z=1$
М	$(x-y)\vec{i}+(2x+y)\vec{j}+(3x^2+z-4)\vec{k}$	$x^2+y^2=z+2$	$z=0$
Н	$(3x+2y)\vec{i}+(5x-2y)\vec{j}+(2z-y^2-5)\vec{k}$	$x^2+y^2=z-1$	$z=3$
О	$(3x+4y)\vec{i}+(3y-x)\vec{j}+(xy+z+2)\vec{k}$	$x^2+y^2=z-2$	$z=4$
П	$(-x-2y)\vec{i}+(x+2y)\vec{j}+(4z-xy+1)\vec{k}$	$x^2+y^2=z+3$	$z=-1$
Р	$(7x+5y)\vec{i}+(8x-y)\vec{j}+(3xy-z-1)\vec{k}$	$x^2+y^2=z+1$	$z=3$
С	$(2x-3y)\vec{i}+(5z-4y)\vec{j}+(6z+xy^2-2)\vec{k}$	$x^2+y^2=z-1$	$z=5$
Т	$(6x+5z)\vec{i}+(3x-y)\vec{j}+(y-2z+3)\vec{k}$	$x^2+y^2=z-4$	$z=6$
У	$(y-2x)\vec{i}+(4x+3y)\vec{j}+(3z+xy)\vec{k}$	$x^2+y^2=z+3$	$z=5$

Ф	$(5x + \_4y)\vec{i} + (7x - 3y)\vec{j} + (2xy + z - 4)\vec{k}$	$x^2 + y^2 = z - 4$	$z = 6$
Х	$(3y - 5x)\vec{i} + (6x + 5y)\vec{j} + (3z - xy + 3)\vec{k}$	$x^2 + y^2 = (z + 1)^2$	$z = 1$
Ц	$(x - y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (x^2 + 2z + 4)\vec{k}$	$x^2 + y^2 = z - 2$	$z = 4$
Ч	$(3x + 2y)\vec{i} + (5x - 2y)\vec{j} + (5z - y^2 - 3)\vec{k}$	$x^2 + y^2 = (z - 1)^2$	$z = 3$
Ш	$(3x - 4y)\vec{i} + (3y - x)\vec{j} + (z - 2xy)\vec{k}$	$x^2 + y^2 = z - 1$	$z = 3$
Щ	$(-x - 2y)\vec{i} + (x + 2y)\vec{j} + (5z - x^2 + y)\vec{k}$	$x^2 + y^2 = (z + 3)^2$	$z = -1$
Э	$(7x + 5y)\vec{i} + (8x - y)\vec{j} + (xy - 4z)\vec{k}$	$x^2 + y^2 = z + 1$	$z = 1$
Ю	$(2x - 3y)\vec{i} + (5z - 4y)\vec{j} + (y^2 + 5z)\vec{k}$	$x^2 + y^2 = (z + 1)^2$	$z = -3$
Я	$(6x + 5z)\vec{i} + (3x - y)\vec{j} + (2z - x^2 + 3)\vec{k}$	$x^2 + y^2 = z - 4$	$z = 6$

2. Кинематика жидкости.

Задача 1. По заданному полю скоростей $\vec{v}(v_x, v_y)$ вычислить

1. Траекторию частиц жидкости, проходящую при $t = 0$ через точку с координатами (x_0, y_0);
2. Линию тока, проходящую при $t = 0$ через точку с координатами (x_0, y_0);

3. Тензор скоростей деформации для данного течения;
4. Скорость объемного расширения жидкости;
5. Вектор вихря скорости;
6. Ускорение частиц жидкости.

Вариант	$\boldsymbol{v_x}$	$\boldsymbol{v_y}$	$(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$
А	$x-t$	$-y+t$	$(1,-1)$
Б	$4x$	$-3y+e^{3t}$	$\left(1,\frac{1}{6}\right)$
В	$3y$	$-3x-2t^2$	$\left(\frac{4}{27},0\right)$
Г	$-4y+\sin t$	$4x$	$\left(\frac{1}{15},0\right)$
Д	$3x-1$	$2t-5$	$(0,0)$
Е	$2x+3t$	$4y-t$	$\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{16}\right)$
Ж	$x+e^t$	$5y$	$(1,1)$
З	$-y$	$4x+\sin t$	$\left(0,\frac{1}{3}\right)$
И	$9y-\frac{t^2}{2}$	$-x$	$\left(0,-\frac{1}{18}\right)$
К	$x-t$	$t+1$	$(1,1)$
Л	$-2y$	$8x+5\sin t$	$\left(0,\frac{1}{3}\right)$
М	$x+2t$	$2y-t$	$\left(-2,\frac{1}{4}\right)$
Н	$5x$	$y-e^t$	$(1,1)$
О	$y+\sin t$	$-9x$	$\left(\frac{1}{8},0\right)$
П	$y+t$	$-4x$	$\left(\frac{1}{4},0\right)$
Р	$x+3e^t$	t^2+3	$(0,0)$

С	$-y+t$	$9x$	$\left(\frac{1}{9},0\right)$
Т	$8x$	$4y-5t$	$\left(1,\frac{5}{16}\right)$
У	$6x-t$	y	$\left(\frac{1}{36},1\right)$
Ф	$y+t$	$-x$	$(1,0)$
Х	$3y-2t$	$3x$	$\left(\frac{2}{9},0\right)$
Ц	$4x-t$	y	$\left(\frac{1}{16},1\right)$
Ч	$x+2t$	$y-3t$	$(-2,3)$
Ш	$x-2$	y	$(1,1)$
Щ	$2y-t$	$-8x$	$\left(-\frac{1}{16},0\right)$
Э	$-y$	$x+e^t$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$
Ю	$x-3t$	$2t+1$	$(3,0)$
Я	$x-e^t$	$7y$	$(0,1)$

Задача 2. По известному потенциалу скорости $\varphi(x,y)$ найти функцию тока $\psi(x,y)$.

Вариант	$\boldsymbol{\varphi(x,y)}$
А	xy
Б	$-x^2+y^2$
В	$8x-3y$
Г	$7xy$
Д	$3x-2y$
Е	$\frac{1}{2}x(x^2-3y^2)$
Ж	$6xy$
З	$x+2y$

И	$2x(x^2 - 3y^2)$
К	$3xy - 1$
Л	$x + 2xy$
М	$\frac{1}{4}x(x^2 - 3y^2)$
Н	$3xy + 4$
О	$8x + 5y$
П	$4x(x^2 - 3y^2)$
Р	$5x(x^2 - 3y^2)$
С	$xy - 8y$
Т	$-x(x^2 - 3y^2)$
У	$x - xy$
Ф	$x - 10y$
Х	$4x - y$
Ц	$x(x^2 - 3y^2)$
Ч	$x - y$
Ш	$3x + y$
Щ	$xy + 2y$
Э	$x^2 - y^2$
Ю	$11x + 2y$
Я	$7x(x^2 - 3y^2)$

3. Гидростатика.

Вычислить давление p на высоте z, если задано давление p_0 на высоте z_0, плотность ρ и указана зависимость давления от высоты (несжимаемая жидкость, изотермический процесс или адиабатический процесс).

Вариант	Числовые данные задачи
А	$p_0 = 22$ кН/м^2, $z_0 = 0$, $\rho = 1.2$ кг/м^3, $z = 10$ м, $\rho = \mathrm{const}$.
Б	$p_0 = 12$ кН/м^2, $z_0 = 6$ м, $\rho_0 = 1.35$ кг/м^3, æ $= 1.4$, $z = 15$ м, адиабатический процесс.
В	$p_0 = 30$ кН/м^2, $z_0 = 0$, $\rho_0 = 2.1$ кг/м^3,

	$æ = 1.6,\quad z = 1.5$ км, адиабатический процесс.
Г	$p_0 = 40$ кН/м^2 , $z_0 = 15$ м, $\rho_0 = 2$ кг/м^3 , $z = 300$ м, изотермический процесс.
Д	$p_0 = 35$ кН/м^2 , $z_0 = 0$, $\rho_0 = 1.3$ кг/м^3, $z = 115$ м, изотермический процесс.
Е	$p_0 = 21$ кН/м^2 , $z_0 = 3$ км, $\rho_0 = 2.3$ кг/м^3 , $æ = 1.7$, $z = 3.5$ км, адиабатический процесс.
Ж	$p_0 = 40$ кН/м^2 , $z_0 = 0$, $\rho_0 = 1.2$ кг/м^3 , $z = 10$ км, изотермический процесс.
З	$p_0 = 33$ кН/м^2, $z_0 = 1$ км, $\rho = 1.8$ кг/м^3 , $z = 2$ км, $\rho = \mathrm{const}$.
И	$p_0 = 19$ кН/м^2, $z_0 = 2$ км, $\rho = 1.9$ кг/м^3 , $z = 2.3$ км, $\rho = \mathrm{const}$.
К	$p_0 = 38$ кН/м^2 , $z_0 = 10$ м, $\rho_0 = 2$ кг/м^3 , $æ = 1.2$, $z = 65$ м, адиабатический процесс.
Л	$p_0 = 46$ кН/м^2 , $z_0 = 0$, $\rho = 1.3$ кг/м^3 , $z = 3.5$ м, $\rho = \mathrm{const}$.
М	$p_0 = 21$ кН/м^2 , $z_0 = 0$, $\rho_0 = 1.2$ кг/м^3 , $æ = 1.4$, $z = 2$ км, адиабатический процесс.
Н	$p_0 = 20$ кН/м^2 , $z_0 = 2$ км, $\rho_0 = 1.8$ кг/м^3 , $z = 6$ км, изотермический процесс.
О	$p_0 = 29$ кН/м^2 , $z_0 = 4$ м, $\rho_0 = 1.9$ кг/м^3 , $z = 200$ м, изотермический процесс.
П	$p_0 = 80$ кН/м^2, $z_0 = 2$ км, $\rho = 2.4$ кг/м^3 , $z = 5$ км, $\rho = \mathrm{const}$.
Р	$p_0 = 40$ кН/м^2 , $z_0 = 0$, $\rho_0 = 1.3$ кг/м^3 , $æ = 1.8$, $z = 142$ м, адиабатический процесс.
С	$p_0 = 10$ кН/м^2, $z_0 = 2$ м, $\rho = 1.35$ кг/м^3 , $z = 5$ м, $\rho = \mathrm{const}$.

Т	$p_0 = 25$ кН/м^2, $z_0 = 3$ км, $\rho_0 = 1.8$ кг/м^3, æ $= 1.6$, $z = 5$ км, адиабатический процесс.
У	$p_0 = 15$ кН/м^2, $z_0 = 2$ м, $\rho_0 = 1.9$ кг/м^3, æ $= 1.2$, $z = 40$ м, адиабатический процесс.
Ф	$p_0 = 43$ кН/м^2, $z_0 = 6$ км, $\rho_0 = 2.4$ кг/м^3, $z = 12$ км, изотермический процесс.
Х	$p_0 = 77$ кН/м^2, $z_0 = 3$ км, $\rho_0 = 2.4$ кг/м^3, æ $= 1.8$, $z = 5$ км, адиабатический процесс.
Ц	$p_0 = 64$ кН/м^2, $z_0 = 1$ км, $\rho = 2.3$ кг/м^3, $z = 2$ км, $\rho = \text{const}$.
Ч	$p_0 = 42$ кН/м^2, $z_0 = 6$ м, $\rho_0 = 1.35$ кг/м^3, $z = 100$ м, изотермический процесс.
Ш	$p_0 = 27$ кН/м^2, $z_0 = 0$, $\rho = 2.1$ кг/м^3, $z = 3$ м, $\rho = \text{const}$.
Щ	$p_0 = 35$ кН/м^2, $z_0 = 0$, $\rho_0 = 2.1$ кг/м^3, $z = 1$ км, изотермический процесс.
Э	$p_0 = 34$ кН/м^2, $z_0 = 10$ м, $\rho = 2$ кг/м^3, $z = 15$ м, $\rho = \text{const}$.
Ю	$p_0 = 45$ кН/м^2, $z_0 = 4$ км, $\rho_0 = 2.3$ кг/м^3, $z = 6.6$ км, изотермический процесс.
Я	$p_0 = 41.5$ кН/м^2, $z_0 = 0$, $\rho = 1.43$ кг/м^3, $z = 45$ м, $\rho = \text{const}$.

4. Интеграл Бернулли.

Диаметр горизонтальной трубы, подводящей воду к насадке (см. рис.5) D, диаметр насадка d. Считая жидкость несжимаемой, определить скорость истечения V, если в подводящей трубе избыточное давление p_1. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

Вариант	**Числовые данные задачи**
А	$D = 200$ мм, $d = 50$ мм, $p_1 = 500$ кПа.
Б	$D = 200$ мм, $d = 20$ мм, $p_1 = 400$ кПа.
В	$D = 300$ мм, $d = 20$ мм, $p_1 = 450$ кПа.
Г	$D = 300$ мм, $d = 50$ мм, $p_1 = 500$ кПа.
Д	$D = 250$ мм, $d = 10$ мм, $p_1 = 300$ кПа.
Е	$D = 200$ мм, $d = 30$ мм, $p_1 = 650$ кПа.

Диаметр насадка, изображенного на рис.5, равен d. Скорость истечения воды из насадка V, давление в подводящей трубе p_1.Считая жидкость несжимаемой, определить диаметр подводящей трубы D. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

Вариант	**Числовые данные задачи**
Ж	$d = 50$ мм, $V = 40$ м/с, $p_1 = 765.2$кПа.
З	$d = 20$ мм, $V = 40$ м/с, $p_1 = 600$кПа.

И	$d = 35$ мм, $V = 50$ м/с, $p_1 = 800$кПа.
К	$d = 40$ мм, $V = 40$ м/с, $p_1 = 650$кПа.
Л	$d = 50$ мм, $V = 50$ м/с, $p_1 = 800$кПа.
М	$d = 55$ мм, $V = 45$ м/с, $p_1 = 800$кПа.

По горизонтальному трубопроводу диаметром D перекачивается вода с расходом Q. На трубопроводе имеется сужение до диаметра d (см. рис.6). Считая жидкость несжимаемой, найти разность давлений в трубе и на суженном участке. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

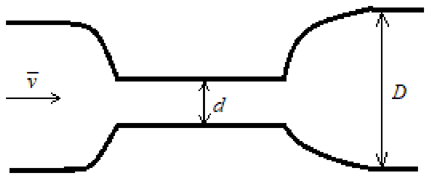

Рис. 6.

Вариант	**Числовые данные задачи**
Н	$D = 100$ мм, $d = 75$ мм, $Q = 12$ л/с.
О	$D = 200$ мм, $d = 100$ мм, $Q = 15$ л/с
П	$D = 150$ мм, $d = 50$ мм, $Q = 15$ л/с
Р	$D = 100$ мм, $d = 30$ мм, $Q = 10$ л/с
С	$D = 200$ мм, $d = 50$ мм, $Q = 15$ л/с

Т	$D = 250$ мм, $d = 100$ мм, $Q = 12$ л/с

Труба длиной l и диаметром d опущена вертикально вниз из резервуара (см. рис.7). Глубину воды в резервуаре h можно считать постоянной. Считая жидкость несжимаемой, определить расход воды Q, вытекающей из резервуара по трубе. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

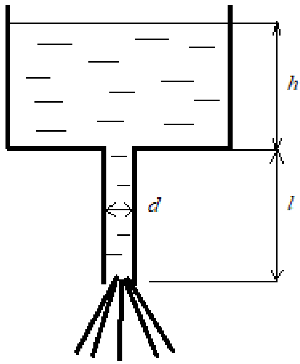

Рис. 7.

Вариант	Числовые данные задачи
У	$h = 2$ м, $l = 8$ м, $d = 100$ мм.
Ф	$h = 3$ м, $l = 7$ м, $d = 50$ мм.
Х	$h = 1.5$ м, $l = 5.5$ м, $d = 50$ мм.
Ц	$h = 2$ м, $l = 12$ м, $d = 100$ мм.
Ч	$h = 3$ м, $l = 7$ м, $d = 70$ мм.

По горизонтальному трубопроводу диаметром D перекачивается вода. На трубопроводе имеется сужение до диаметра d (см. рис.6). Разница давлений в сужении и за ним $p_1 - p_2$. Считая жидкость несжимаемой, определить расход воды. Плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3.

Вариант	**Числовые данные задачи**
Ш	$D = 150$ мм, $d = 75$ мм, $p_1 - p_2 = 1.5$кПа.
Щ	$D = 200$ мм, $d = 50$ мм, $p_1 - p_2 = 2$кПа.
Э	$D = 100$ мм, $d = 50$ мм, $p_1 - p_2 = 1.5$кПа.
Ю	$D = 150$ мм, $d = 20$ мм, $p_1 - p_2 = 1$кПа.
Я	$D = 100$ мм, $d = 30$ мм, $p_1 - p_2 = 2$кПа.

Содержание.

Учебное издание

Петрова Вера Валерьевна, канд. физ.-мат. наук

ГИДРОМЕХАНИКА

Печатается в авторской редакции .

Подписано в печать 27.12.2022. Формат 60×90 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 2,75. Тираж 10 экз. Заказ № 1325.
РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская ул., д. 79.