Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.В. Петрова

Теоретическая механика в метеорологии

Учебное пособие

Санкт-Петербург
РГГМУ
2022

УДК 531(075.8)
ББК 22.21я73
П30

Рецензент: Бровкина Е.А., ст. преподаватель кафедры высшей математики и теоретической механики РГГМУ

Петрова, Вера Валерьевна.
П30 Теоретическая механика в метеорологии. Учебное пособие / В.В. Петрова. – Санкт-Петербург : РГГМУ, 2022. – 72 с.
ISBN 978-5-86813-542-2

В методических указаниях разобраны основные положения теоретической механики и приведено решение практических задач.

ISBN 978-5-86813-542-2

Введение.

Теоретическая механика является наукой, в которой изучаются перемещения тел (механическое движение) и условия равновесия тел. Она служит базой другим разделам механики – теории упругости, сопротивления материалов, теории пластичности и т.д.

В основе теоретической механики, как и всякой науки, лежат представления и абстракции, отражающие главные черты изучаемых явлений. *Сила* – количественная мера механического воздействия между физическими объектами. Она характеризуется модулем, направлением и точкой приложения, т.е. является вектором. *Материальная точка* – тело, размерами которого в данных условиях задачи можно пренебречь. *Абсолютно твердое тело* – система материальных точек, расстояния между которыми не меняются в процессе движения.

Механика ставит перед собой две основные задачи.

1. Изучение различных движений и обобщение полученных результатов в виде законов движения – законов, с помощью которых может быть предсказан характер движения в каждом конкретном случае.
2. Отыскание общих механических свойств, т.е. общих теорем или принципов, присущих любой системе, независимо от конкретного рода взаимодействий между телами системы.

Первую задачу изучает *кинематика* – раздел механики, исследующий движение точек и тел безотносительно к причинам, его вызывающим (возникла из астрономии). Вторую задачу изучает *динамика*; в этом разделе рассматривается движение материальных точек и тел в зависимости от причин движения (возникла из развития промышленности, мореплавания, военного дела). Статика изучает равновесие сил, приложенных к твердым телам, и способы сложения сил (самый старый раздел механики, возник из строительства).

1. Кинематика. Скорость и ускорение точки в декартовой системе координат.

Положение точки относительно ортогональной декартовой системы координат $Oxyz$ задается тремя числами x, y, z, которые можно рассматривать как проекции радиус – вектора $\vec{r}$

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

Тогда

$$\vec{\imath} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}, \vec{\jmath} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}, \vec{k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}.$$

Если положение точки задается с помощью радиус – вектора:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k},$$

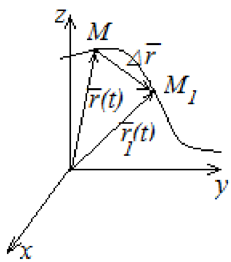
то это *векторный способ задания движения точки*. Если же изменение положения точки с течением времени задается с помощью зависимости координат от времени

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \\ z = f_3(t), \end{cases} \qquad (1.1)$$

то это *координатный способ задания движения точки*. Функции f_1, f_2, f_3, очевидно, должны быть однозначными. Мы будем считать их по крайней мере дважды дифференцируемыми. Уравнение (1.1) можно рассматривать как параметрическую форму некоторой пространственной кривой. Функции f_1, f_2, f_3 называются *законами движения точки*.

Траектория точки – это геометрическое место последовательных положений движущейся точки в данной системе отсчета.

Пусть за время Δt точка перешла из положения M в положение M_1.



Тогда $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ - *средняя скорость* за промежуток времени Δt. А *скорость* точки в данный момент времени

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

(точкой сверху в теоретической механике обозначают производную по времени). Поскольку радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}(x, y, z)$, то производную по времени можно вычислить как производную сложной функции следующим образом

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \dot{x}\vec{\imath} + \dot{y}\vec{\jmath} + \dot{z}\vec{k}.$$

Таким образом, получаем формулы для проекций вектора скорости на оси координат

$$v_x = \dot{x}, \qquad v_y = \dot{y}, \qquad v_z = \dot{z}.$$

А модуль вектора скорости, соответственно, вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}.$$

Аналогично, для ускорения точки в данный момент времени

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{\imath} + \ddot{y}\vec{\jmath} + \ddot{z}\vec{k},$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Задача 1.1. Закон движения точки задан в виде

$$x = a\cos\omega t\,, \qquad y = b\sin\omega t\,, \qquad z = 0,$$

где a,b, ω – константы. Определить траекторию точки, ее скорость и ускорение.

Решение. Для нахождения траектории из уравнений движения необходимо исключить время t. Поскольку

$$\cos\omega t = \frac{x}{a}, \qquad \sin\omega t = \frac{y}{b},$$

то по основному тригонометрическому тождеству

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

и в качестве траектории получаем уравнение эллипса. Для определения скорости и ускорения вычисляем первые и вторые производные от координат.

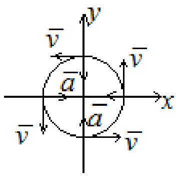
$$\dot{x} = -a\omega\sin\omega t\,, \qquad \dot{y} = b\omega\cos\omega t,$$

$$\ddot{x} = -a\omega^2\cos\omega t\,, \qquad \ddot{y} = -b\omega^2\sin\omega t.$$

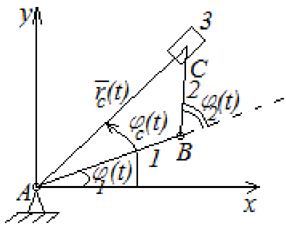
Таким образом,

$$v_x = -\frac{a}{b}\omega y, \qquad v_y = \frac{b}{a}\omega x,$$
$$a_x = -\omega^2 x, \qquad a_y = -\omega^2 y,$$
$$v = \omega\sqrt{\frac{a^2}{b^2}y^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2}, a = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Если $a = b = R$,точка движется по окружности со скоростью $v = \omega R$ и ускорением $a = \omega^2 R$.



Задача 1.2. Плоский механизм манипулятора, состоящий из стержней 1, 2 и схвата 3, переносит груз из одного положения в другое по траектории, определяемой полярными координатами центра схвата $r_C = r_C(t), \varphi_C = \varphi_C(t)$. Найти законы изменения углов φ_1, φ_2, отрабатываемых соответствующими приводами, для выполнения заданной программы. Длины стержней l_1, l_2.



Решение.

Пусть $|AB| = l_1, |BC| = l_2$.Рассмотрим ΔABC. По теореме косинусов

$$r_C^2 = l_1^2 + l_2^2 - 2l_1 l_2 \cos(\pi - \varphi_2),$$

$$\cos(\pi - \varphi_2) = -\cos(\varphi_2) = \frac{l_1^2 + l_2^2 - r_C^2}{2l_1 l_2},$$

$$\varphi_2 = \arccos\frac{r_C^2 - l_1^2 - l_2^2}{2l_1 l_2}.$$

Для определения φ_1 используем равенство

$$l_2^2 = r_C^2 + l_1^2 - 2l_1 r_C \cos(\varphi_C - \varphi_1),$$

$$\cos(\varphi_C - \varphi_1) = \frac{r_C^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 r_C},$$

$$\varphi_1 = \varphi_C - \arccos\frac{r_C^2 + l_1^2 - l_2^2}{2l_1 r_C}.$$

2. Естественный способ задания движения точки.

Формулы предыдущей лекции, выражающие скорость и ускорение в декартовых координатах, очень просты. Это объясняется тем, что оси декартовых координат ортогональны и постоянны по направлению. Их недостатком является, во-первых, то, что из них непосредственно не видно, как скорость и ускорение связаны с траекторией, а во-вторых, они зависят от расположения кривой в пространстве $Oxyz$.

Существует другой способ задания движения. Некоторую точку O на траектории примем за начало отсчета некоторой *дуговой координаты* s. Необходимо также задать положительное направление отсчета этой координаты. Задание траектории точки, т.е. $\vec{r}(s)$ и закона движения по ней $s = f(t)$ называется *естественным способом задания движения*. При этом

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s}\frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Вектор $\Delta\vec{r}/\Delta s$ направлен по касательной к кривой в точке M в сторону возрастания дуговой координаты. Так как $|\Delta\vec{r}|$ и $|\Delta s|$ являются эквивалентными бесконечно малыми, то

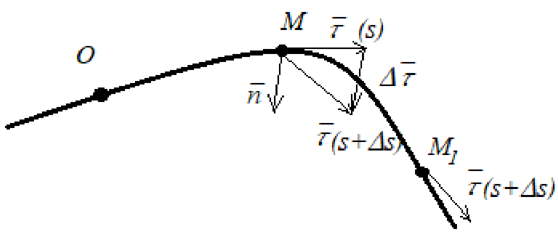
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{ds}$$

 - *единичный касательный вектор*. В этом случае формула для скорости дает

$$\vec{v} = \dot{s}\vec{\tau}. \qquad (2.1)$$

Аналогичным образом, если продифференцировать формулу (2.1), получим формулу для ускорения.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\dot{s}\vec{\tau})}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}\frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\vec{\tau} + \dot{s}^2\frac{d\vec{\tau}}{ds}.$$



$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\vec{\tau}(s+\Delta s) - \vec{\tau}(s)}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta s} = K \cdot \vec{n},$$

где $\vec{n}$ – *вектор нормали* к траектории в точке M единичной длины. Поскольку мы не можем гарантировать, что $|d\vec{\tau}/dt| = 1$, вектор $\vec{n}$ умножен на некоторую константу K.

K называют *кривизной кривой*. Обычно вводят также величину

$$\rho = \frac{1}{K},$$

которую называют *радиусом кривизны*. Геометрический смысл кривизны кривой: при $K \neq 0$ траектория движения в окрестности рассматриваемой точки может быть аппроксимирована дугой окружности радиуса ρ. При $K = 0$ радиус кривизны $\rho = \infty$ и точка движется по окружности бесконечного радиуса, т.е. по прямой.

Таким образом, в приведенных обозначениях формула для ускорения имеет вид

$$\vec{a} = \ddot{s}\vec{\tau} + \frac{\dot{s}^2}{\rho}\vec{n}$$

и вектор ускорения имеет две составляющие: по касательной к кривой и по нормали к кривой. Итак, мы имеем два орта: вектор $\vec{\tau}$ и вектор $\vec{n}$. Третий орт $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$ называется *вектором бинормали*. Эти три орта образуют так называемый *трехгранник Френе*. Через вектора $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ проходит *соприкасающаяся плоскость*, через $\vec{n}$, $\vec{b}$ - *нормальная плоскость*, через $\vec{b}$, $\vec{\tau}$ - *спрямляющая плоскость*. Трехгранник Френе отличается от обычной декартовой системы координат тем, что он движется вместе с рассматриваемой точкой по траектории с течением времени.

Итак, для скорости и ускорения можем записать следующие формулы для их проекций на естественные оси координат

$$v_\tau = \dot{s}, \qquad v_n = v_b = 0,$$

$$a_\tau = \ddot{s} \text{ - касательное ускорение,}$$

$$a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} \text{ – нормальное ускорение,}$$

$$a_b = 0.$$

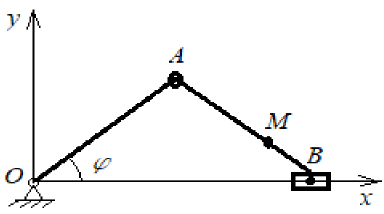
Пусть нам заданы скорость и ускорение в декартовых координатах. Запишем формулы для перехода к естественной системе координат. Единичный касательный вектор можно найти с помощью вектора скорости

$$\vec{\tau} = \pm \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

Знак «плюс» ставится, если вектор скорости направлен в сторону возрастания дуговой координаты, а знак «минус» в противоположном случае. Далее можно найти касательное и нормальное ускорение, а также радиус кривизны.

$$a_\tau = \vec{a} \cdot \vec{\tau}, \qquad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}, \qquad \vec{n} = \frac{\overrightarrow{a_n}}{|\vec{a}_n|}, \qquad \rho = \frac{v^2}{a_n}.$$

Задача 2.1. Найти траекторию точки M кривошипно-ползунного механизма, если $|OA| = |AB| = l$, $|MB| = l/3$, $\varphi = \omega t$, а также определить скорость, ускорение и радиус кривизны траектории точки в момент, когда $\varphi = 0$.



Решение. Из приведенного рисунка очевидно, что координаты точки M

$$x = l\cos\varphi + \frac{2}{3}l\cos\varphi = \frac{5}{3}l\cos\varphi = \frac{5}{3}l\cos\omega t,$$

$$y = \frac{l}{3}\sin\varphi = \frac{l}{3}\sin\omega t.$$

Таким образом, можно выразить

$$\cos\omega t = \frac{3x}{5l}, \quad \sin\omega t = \frac{3y}{l}.$$

А используя основное тригонометрическое тождество, можем записать уравнение траектории

$$\left(\frac{x}{5l/3}\right)^2 + \left(\frac{y}{l/3}\right)^2 = 1,$$

которая является эллипсом с центром в начале координат.

Составляющие скоростей и ускорений можем вычислить с помощью дифференцирования.

$$v_x = \dot{x} = -\frac{5}{3}l\omega\sin\omega t, \qquad v_y = \dot{y} = \frac{l}{3}\omega\cos\omega t,$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{\frac{25}{9}(l\omega\sin\omega t)^2 + \frac{l^2}{9}(\omega\cos\omega t)^2}$$

$$= \frac{l\omega}{3}\sqrt{24(\sin\omega t)^2 + 1}.$$

$$a_x = \ddot{x} = -\frac{5}{3}l\omega^2\cos\omega t, \qquad a_y = \ddot{y} = -\frac{l}{3}\omega^2\sin\omega t,$$

$$a = \sqrt{\frac{25}{9}(l\omega^2\cos\omega t)^2 + \frac{l^2}{9}(\omega^2\sin\omega t)^2}$$

$$= \frac{\omega^2 l}{3}\sqrt{24(\cos\omega t)^2 + 1}.$$

При $\varphi = 0$, очевидно

$$v_x = 0, \qquad v_y = v = \frac{\omega l}{3}, \qquad a_x = -\frac{5}{3} l\omega^2, \qquad a_y = 0.$$

Далее, используя формулы лекции, можем найти касательное и нормальное ускорение.

$$a_\tau = \vec{a} \cdot \vec{\tau} = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{a_x \cdot v_x + a_y \cdot v_y}{v} = 0,$$

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = a = \frac{5\omega^2 l}{3}.$$

А зная нормальное ускорение, можем определить и радиус кривизны.

$$\rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{l^2\omega^2}{9}\frac{3}{5\omega^2 l} = \frac{l}{15}.$$

Задача 2.2. Точка движется по окружности радиуса 1 метр по закону $s = t^2 - t$ (s – в метрах, t – в секундах). Определить момент времени, когда касательное ускорение точки равно ее нормальному ускорению.

Решение. Вычислим касательное и нормальное ускорения.

$$v_\tau = \dot{s} = 2t - 1, a_\tau = \ddot{s} = 2,$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{4t^2 - 4t + 1}{1} = 4t^2 - 4t + 1.$$

Приравняв касательное и нормальное ускорения, получим квадратное уравнение

$$4t^2 - 4t - 1 = 0,$$

положительный корень которого $t = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ секунд.

3. Частные случаи движения точки.

Частные случаи движения точки – это *равномерное* и *равнопеременное* движение. При равномерном движении скорость постоянна, т.е. $v_\tau = const$. При естественном способе задания уравнение движения имеет вид

$$s = s_0 + v_\tau t,$$

а при координатном способе задания движения необходимо в общем случае записать три уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + at, \\ y = y_0 + bt, \\ z = z_0 + ct. \end{cases}$$

Скорость при естественном способе задания $v = \dot{s} = v_\tau$, а при координатном способе задания движения, очевидно, для скорости можно записать

$$v_x = \dot{x} = a, v_y = \dot{y} = b, v_z = \dot{z} = c,$$

$$v = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = v_\tau.$$

Ускорение при равномерном движении равно нулю.

При равнопеременном движении касательное ускорение точки постоянно и в естественных координатах пройденный путь задается формулой

$$s = s_0 + v_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2},$$

а декартовы координаты точки, соответственно, задаются следующим образом

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t + \dfrac{a_2 t^2}{2}, \\ y = y_0 + b_1 t + \dfrac{b_2 t^2}{2}, \\ z = z_0 + c_1 t + \dfrac{c_2 t^2}{2}. \end{cases}$$

Тогда для скорости точки в этих двух координатных системах, соответственно, можем записать

$$v = \dot{s} = v_0 + a_\tau t,$$

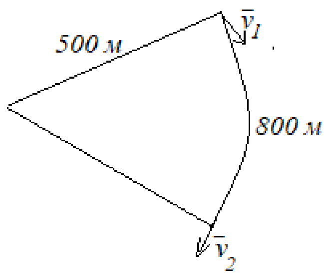
$$v_x = \dot{x} = a_1 + a_2 t, \qquad v_y = b_1 + b_2 t, \qquad v_z = c_1 + c_2 t.$$

Если $a_\tau > 0,$ то движение называется *равноускоренным*, если $a_\tau < 0,$ то *равнозамедленным*. Ускорение при равнопеременном движении в декартовых координатах, очевидно, будет

$$a_x = \dot{v_x} = a_2, \qquad a_y = \dot{v_y} = b_2, \qquad a_z = \dot{v_z} = c_2,$$

$$a = \sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}.$$

Задача 3.1. Поезд движется равнозамедленно по дуге окружности радиуса R=500 м и проходит путь s=800 м, имея начальную скорость 15 м/с и конечную 5 м/с. Определить полное ускорение в начале и в конце дуги и время движения по этой дуге.



Решение. Поскольку движение равнозамедленное, то $a_\tau < 0$ и можем записать формулы для пути и скорости как систему уравнений.

$$\begin{cases} s = v_0 t - \dfrac{a_\tau t^2}{2}, \\ v = v_0 - a_\tau t. \end{cases}$$

Подставив известные нам величины, получим

$$\begin{cases} 800 = 15t - \dfrac{a_\tau t^2}{2}, \\ 5 = 15 - a_\tau t. \end{cases}$$

Решение этой системы: $t = 8\ c, a_\tau = 0.125$ м/с. Касательное ускорение в начале и конце дуги одинаково (по определению равнозамедленного движения), так что осталось определить нормальное. А оно в начале и конце пути разное, определяется по формуле

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{v^2}{R}.$$

Таким образом,

$$a_n^{(1)} = \frac{15^2}{500} = 0.45\,\text{м}/\text{с}^2, a_n^{(2)} = \frac{5^2}{500} = 0.05\,\text{м}/\text{с}^2.$$

И можем вычислить полное ускорение в начале и конце пути

$$a^{(1)} = \sqrt{0.125^2 + 0.45^2} = 0.467\,\text{м}/\text{с}^2,$$
$$a^{(2)} = \sqrt{0.125^2 + 0.05^2} = 0.136\,\text{м}/\text{с}^2.$$

Задача 3.2. Точка движется по окружности радиуса R по закону

$$s = v_0 t - \frac{1}{2} w t^2.$$

Чему равна величина ускорения точки? Когда эта величина станет равной w и сколько оборотов сделает точка к этому моменту?

Решение. Вычислим касательное и нормальное ускорение точки.

$$\dot{s} = v_0 - wt, \qquad a_\tau = \ddot{s} = -w, \qquad a_n = \frac{\dot{s}^2}{\rho} = \frac{(v_0 - wt)^2}{R}.$$

Тогда для полного ускорения можно записать формулу

$$a = \sqrt{w^2 + \frac{1}{R^2}(v_0 - wt)^2}.$$

Очевидно, что $a = w$ при $t = {}^{v_0}/_{w}$. Путь, пройденный точкой к этому моменту времени, можно вычислить следующим образом

$$s = v_0 \cdot \frac{v_0}{w} - \frac{1}{2} w \frac{v_0^2}{w^2} = \frac{v_0^2}{2w}.$$

Для того, чтобы получить число оборотов точки, разделим пройденный путь на длину одного оборота, что и даст нам требуемый ответ.

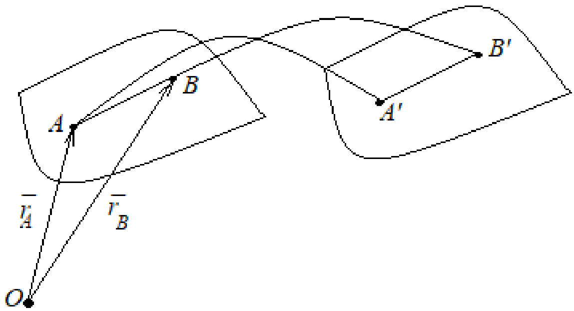
$$N = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi w R}.$$

4. Кинематика твердого тела. Поступательное движение и вращение вокруг неподвижной оси.

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во все время движения параллельной своему первоначальному положению. Для поступательного движения можно доказать следующее утверждение.

Теорема. При поступательном движении твердого тела траектории, скорости и ускорения точек тела одинаковы.

Доказательство.



Из приведенного рисунка очевидно, что $\overrightarrow{r_B}(t) = \overrightarrow{r_A}(t) + \overrightarrow{AB}$ для любого t, причем $\overrightarrow{AB}$ – постоянный вектор. Дифференцируя это равенство по времени, получим

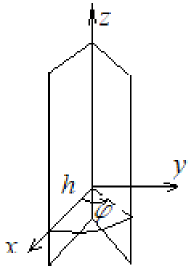
$$\frac{d\overrightarrow{r_B}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt}, \qquad \frac{d^2\overrightarrow{r_B}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{r_A}}{dt^2}.$$

А это и означает, что скорости и ускорения любых двух точек тела одинаковы. Теорема доказана.

Таким образом, для задания поступательного движения твердого тела достаточно задать движение одной из его точек. Уравнения поступательного движения твердого тела имеют вид

$$\begin{cases} x_A = x_A(t), \\ y_A = y_A(t), \\ z_A = z_A(t). \end{cases}$$

При *вращении твердого тела вокруг неподвижной оси* точки, лежащие на оси вращения, неподвижны, а остальные описывают окружности с центрами, лежащими на оси вращения.



Дуговая координата любой точки, движущейся по окружности, определяется формулой

$$s = s_0 + h\varphi,$$

где s_0 – начальное значение дуговой координаты, h – кратчайшее расстояние от точки до оси вращения, φ – угол поворота твердого тела вокруг оси в радианах. Зависимость $\varphi = \varphi(t)$ называется *уравнением вращения* твердого тела вокруг неподвижной оси.

Угловая скорость твердого тела характеризует быстроту изменения угла поворота твердого тела. Это вектор $\vec{\omega}$, направленный по оси вращения в ту сторону, откуда вращение видно происходящим против хода часовой стрелки. По абсолютной величине $\omega = |\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$. Единицы измерения: рад/с.

Угловое ускорение характеризует быстроту изменения угловой скорости. Это вектор $\vec{\varepsilon}$, совпадающий по направлению с направлением угловой скорости, если вращение ускоренное, и направленный прямо противоположно угловой скорости, если вращение замедленное. По модулю $\varepsilon = |\vec{\varepsilon}| = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$. Единицы измерения: рад/с^2.

Если $\omega = \text{const}$, то вращение называется *равномерным* и происходит по закону

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t.$$

Если $\varepsilon = \text{const}$, то вращение называется *равнопеременным* (*равноускоренным* или *равнозамедленным*) и происходит согласно уравнениям

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon t.$$

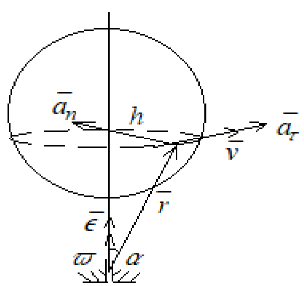
Если же нас интересуют обычные, линейные скорость и ускорение вращающегося твердого тела, то для них выводятся приведенные ниже формулы.

$$v_\tau = \dot{s} = \frac{d}{dt}(s_0 + h\varphi) = h\dot{\varphi} = \omega h,$$

$$a_\tau = \ddot{s} = \dot{\omega} h = \varepsilon h, \qquad a_n = \frac{v^2}{h} = \frac{\omega^2 h^2}{h} = \omega^2 h,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = h\sqrt{\omega^4 + \varepsilon^2}.$$

Касательное и нормальное ускорения при вращающемся движении называются также *вращательным* и *центростремительным*.



Из приведенного рисунка видно, что модуль скорости $v = \omega h = \omega r \sin\alpha$ совпадает с модулем векторного произведения $\vec{\omega} \times \vec{r}$. Направление скорости тоже совпадает с направлением этого векторного произведения. Поэтому

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}.$$

Эта формула называется *формулой Эйлера*. Исходя из нее, можем записать для ускорения

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

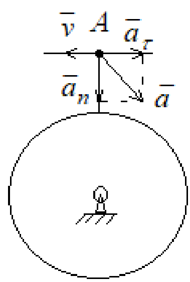
Таким образом, получается, что

$$\overrightarrow{a_\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}, \overrightarrow{a_n} = \vec{\omega} \times \vec{v}.$$

Задача 4.1. Вал с присоединенными к нему пластинами вращается в подшипниках согласно уравнению

$$\varphi = k \ln\left(1 + \frac{\omega_0 t}{k}\right),$$

где k, ω_0 – постоянные коэффициенты. Определить угловую скорость и угловое ускорение вала. Найти скорость и ускорение центра пластины A, отстоящего на расстояние R от оси вращения.



Решение. Угловую скорость и угловое ускорение вала можно найти, дифференцируя уравнение вращения.

$$\omega = \dot{\varphi} = k\frac{1}{1+\frac{\omega_0 t}{k}} \cdot \frac{\omega_0}{k} = \frac{\omega_0 k}{k+\omega_0 t},$$

$$\varepsilon = \ddot{\varphi} = -\frac{\omega_0 k}{(k+\omega_0 t)^2}\omega_0 = -\frac{\omega_0^2 k}{(k+\omega_0 t)^2}.$$

А с помощью приведенных выше в лекции формул можем найти линейную скорость, вращательное, центростремительное и полное ускорение.

$$v_\tau = \omega h = \omega R = \frac{\omega_0 k R}{k+\omega_0 t},$$

$$a_\tau = \varepsilon R = -\frac{\omega_0^2 k R}{(k+\omega_0 t)^2}, a_n = \omega^2 R = \frac{\omega_0^2 k^2 R}{(k+\omega_0 t)^2},$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\frac{\omega_0^4 k^2 R^2}{(k+\omega_0 t)^4} + \frac{\omega_0^4 k^4 R^2}{(k+\omega_0 t)^4}}$$

$$= \frac{\omega_0^2 k R}{(k+\omega_0 t)^2}\sqrt{1+k^2}.$$

Задача 4.2. Маховое колесо радиуса *R=2 м* вращается равноускоренно из состояния покоя; через *t=10 с* точки, лежащие на ободе, обладают линейной скоростью *v=100 м/с*. Найти скорость, нормальное и касательное ускорение точек обода колеса для момента *t=15 с*.

Решение. Поскольку колесо вращается равноускоренно, его угловое ускорение одинаково во все моменты времени. Сопоставляя формулы $v = \omega R$, $\omega = \varepsilon t$, получим

$$\frac{v}{R} = \varepsilon t.$$

Отсюда легко вычислить

$$\varepsilon = \frac{v}{Rt} = \frac{100}{2 \cdot 10} = 5\,\text{м/с}^2.$$

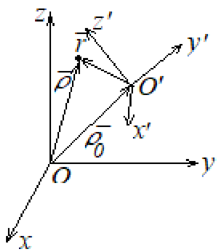
Тогда для момента времени *t=15 с*

$$\omega = \varepsilon t = 5 \cdot 15 = 75\,\text{рад/с}\,, v = \omega R = 75 \cdot 2 = 150\,\text{м/с},$$

$$a_\tau = \varepsilon R = 5 \cdot 2 = 10\,\text{м/с}^2, \qquad a_n = \omega^2 R = 75^2 \cdot 2 = 11250\,\text{м/с}^2.$$

5. Сложное движение точки.

Пусть даны две системы отсчета: неподвижная *Oxyz* и подвижная $Ox'y'z'$.



Движение точки *M* относительно системы $Ox'y'z'$ называется *относительным* (скорость и ускорение этого движения обозначают $\overrightarrow{v_r}$, $\overrightarrow{a_r}$), а относительно *Oxyz* – *абсолютным* (со скоростями $\overrightarrow{v_a}$, $\overrightarrow{a_a}$). Движение системы $Ox'y'z'$ в системе *Oxyz* называется *переносным* движением (его скорость и ускорение обозначают $\overrightarrow{v_e}$, $\overrightarrow{a_e}$). Движение точки М называют еще *сложным* движением, т.к. оно является суммой относительного и переносного движений.

Пусть нам надо определить скорость и ускорение. Проще всего это сделать для переносного движения.

$$\overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r},$$

$$\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_e} = \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega_e} \times (\overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r}),$$

где $\overrightarrow{\omega_e}$ – угловая скорость поворота подвижной системы координат относительно неподвижной, $\vec{\varepsilon} = \dot{\overrightarrow{\omega_e}}$.

Займемся теперь вычислением скорости и ускорения абсолютного движения. Очевидно, что

$$\overrightarrow{v_a} = \dot{\vec{\rho}} = \dot{\overrightarrow{\rho_0}} + \dot{\vec{r}} = \overrightarrow{v_0} + \dot{\vec{r}}.$$

Поскольку $\vec{r} = x'\overrightarrow{i'} + y'\overrightarrow{j'} + z'\overrightarrow{k'}$, то

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}'\overrightarrow{i'} + \dot{y}'\overrightarrow{j'} + \dot{z}'\overrightarrow{k'} + x'\dot{\overrightarrow{i'}} + y'\dot{\overrightarrow{j'}} + z'\dot{\overrightarrow{k'}}$$

$$= \overrightarrow{v_r} + x'\dot{\overrightarrow{i'}} + y'\dot{\overrightarrow{j'}} + z'\dot{\overrightarrow{k'}}.$$

Можно вывести формулы, в соответствии с которыми

$$\dot{\overrightarrow{i'}} = \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{i'}, \qquad \dot{\overrightarrow{j'}} = \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{j'}, \qquad \dot{\overrightarrow{k'}} = \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{k'}.$$

Тогда

$$\dot{\vec{r}} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \left(x' \cdot \overrightarrow{i'} + y' \cdot \overrightarrow{j'} + z' \cdot \overrightarrow{k'}\right) = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r}$$

и можем записать

$$\overrightarrow{v_a} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{v_e}.$$

Последнее равенство носит название *теоремы сложения скоростей*.

Формулу, аналогичную формуле для радиус-вектора $\vec{r}$, можно вывести и для любого вектора $\vec{a}$, изучаемого в двух системах координат. Если $\vec{a} = a_x{}'\overrightarrow{i'} + a_y{}'\overrightarrow{j'} + a_z{}'\overrightarrow{k'}$, то

$$\dot{\vec{a}} = \dot{a_x}'\overrightarrow{i'} + \dot{a_y}'\overrightarrow{j'} + \dot{a_z}'\overrightarrow{k'} + a_x{}'\dot{\overrightarrow{i'}} + a_y{}'\dot{\overrightarrow{j'}} + a_z{}'\dot{\overrightarrow{k'}}$$

$$= \dot{a_x}'\overrightarrow{i'} + \dot{a_y}'\overrightarrow{j'} + \dot{a_z}'\overrightarrow{k'} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{a}.$$

В сокращенном виде это можно записать

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{d'\vec{a}}{dt} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{a},$$

где ${d\vec{a}}/{dt}$ – *полная* или *абсолютная производная по времени*, т.е. производная в неподвижной системе координат, ${d'\vec{a}}/{dt}$ – *локальная* или *относительная производная по времени*, т.е. производная в подвижной системе координат. Введя такие обозначения, можем записать для абсолютного ускорения следующее.

$$\overrightarrow{a_a} = \frac{d\overrightarrow{v_a}}{dt} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{v_e} + \overrightarrow{v_r}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r} + \overrightarrow{v_r})$$

$$= \frac{d\overrightarrow{v_0}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{\omega_e}}{dt} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt}.$$

Поскольку

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d'\vec{r}}{dt} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r} = \overrightarrow{v_r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r},$$

$$\frac{d\overrightarrow{v_r}}{dt} = \frac{d'\overrightarrow{v_r}}{dt} + \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_r},$$

то подставляя эти выражения в формулу для ускорения, раскрывая скобки и приводя подобные члены, получим

$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_0} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega_e} \times (\overrightarrow{\omega_e} \times \vec{r}) + \overrightarrow{a_r} + 2\overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_r}.$$

Первые три слагаемых в правой части формулы представляют собой переносное ускорение, а последнее слагаемое обозначают $\overrightarrow{a_c}$ и называют *ускорением Кориолиса*. Таким образом, мы получаем *теорему сложения ускорений*

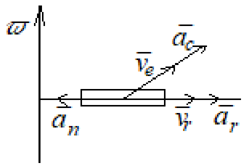
$$\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c}.$$

Задача 5.1. Горизонтально расположенный стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω

вокруг вертикальной оси, укрепленной на столе и проходящей через один из концов стержня. По стержню движется небольшая муфта. Её скорость относительно стержня меняется по закону

$$\vec{v} = b\vec{r},$$

где $b = const$, $\vec{r}$ - радиус-вектор, характеризующий расстояние от муфты до оси вращения. Найти скорость и ускорение муфты относительно стола в зависимости от r.



Решение. Согласно условию задачи, относительная и переносная скорости могут быть выражены следующим образом

$$v_r = br, \qquad v_e = \omega r.$$

Из рисунка легко заметить, что векторы этих скоростей перпендикулярны друг другу, поэтому складываются они по теореме Пифагора.

$$v_a = \sqrt{b^2r^2 + \omega^2r^2} = r\sqrt{b^2 + \omega^2}.$$

Что же касается ускорения, то относительное движение муфты – это просто движение по прямой, так что относительное ускорение является просто производной от относительной скорости.

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = b\frac{dr}{dt} = bv_r = b^2r.$$

Для переносного ускорения, строго говоря, нужно писать $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_{e\tau}} + \overrightarrow{a_{en}}$, но в нашей задаче $a_{e\tau} = 0$, т.к. вращение равномерное и угловое ускорение равно нулю. Для переносного центростремительного ускорения можем записать формулу

$$a_{en} = \omega^2 r.$$

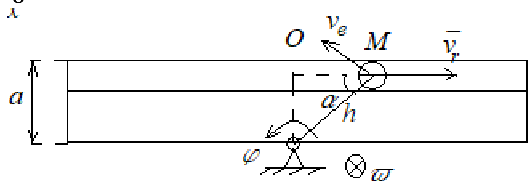
Поскольку ускорение Кориолиса $\overrightarrow{a_c} = 2\overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{v_r}$, то можем вычислить его длину по правилам векторной алгебры

$$a_c = 2\omega v_r \sin\frac{\pi}{2} = 2\omega b r.$$

Если нанести на рисунок эти три вектора, то окажется что относительное и переносное ускорения лежат на одной прямой и направлены в разные стороны, а ускорение Кориолиса перпендикулярно им обоим. Складывая их по правилам векторной алгебры, получим выражение для абсолютного ускорения муфты.

$$a_a = \sqrt{(a_r - a_n)^2 + a_c^2} = \sqrt{(b^2 r - \omega^2 r)^2 + 4\omega^2 b^2 r^2}$$
$$= r\sqrt{b^4 + 2\omega^2 b^2 + \omega^4} = (b^2 + \omega^2) r.$$

Задача 5.2. Найти абсолютные скорость и ускорение точки *M* в момент *t=2 с*, если в начальный момент времени точка находилась в положении *O*, $s = OM = 12\sin\frac{\pi t}{8}$, *а=6 см*, $\varphi = 0.2t - 0.3t^2$.



Решение. Определим сначала положение точки в нужный нам момент времени.

$$s|_{t=2} = 12\sin\frac{\pi}{4} = 6\sqrt{2}\text{ см}.$$

Из заданного уравнения движения точки M легко определить относительную скорость

$$v_r = \dot{s} = 12\cos\frac{\pi t}{8}\cdot\frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi t}{8},$$

$$v_r|_{t=2} = \frac{3\pi}{2}\cos\frac{\pi}{4} = \frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\ \text{см/с}.$$

Переносная же скорость определяется по формуле $v_e = \omega h$, в которой предварительно надо вычислить каждый из множителей.

$$\omega = \dot{\varphi} = 0.2 - 0.6t, \qquad \omega|_{t=2} = 0.2 - 1.2 = -1\,\frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Знак угловой скорости показывает, что она направлена от нас перпендикулярно плоскости рисунка. Расстояние h определяется по теореме Пифагора.

$$h = \sqrt{a^2 + s^2} = \sqrt{36 + 36.2} = 6\sqrt{3}\ \text{см}.$$

Таким образом, $v_e = 6\sqrt{3}\,\frac{\text{см}}{\text{с}}$. Осталось сложить относительную и переносную скорость для вычисления абсолютной скорости. Согласно чертежу, относительная и переносная скорости складываются по теореме косинусов, т.к. угол между ними $\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_e^2 + 2v_r v_e\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)}$$

$$= \sqrt{v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e\sin\alpha}$$

$$= \sqrt{v_r^2 + v_e^2 - 2v_r v_e\frac{a}{h}} = 8.894\,\frac{\text{см}}{\text{с}}.$$

Перейдем теперь к вычислению ускорений. Относительное ускорение легко определить из уравнения движения.

$$a_r = \ddot{s} = -\frac{3\pi}{2}\sin\frac{\pi t}{8}\cdot\frac{\pi}{8} = -\frac{3\pi^2}{16}\sin\frac{t}{8},$$

$$a_r|_{t=2} = -3\frac{\pi^2}{16}\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{3\sqrt{2}\pi^2}{32}.$$

Для переносного ускорения можем записать $\overrightarrow{a_e} = \overrightarrow{a_{e\tau}} + \overrightarrow{a_{en}}$, каждое из слагаемых нужно считать отдельно по своей формуле.

$$a_{e\tau} = \varepsilon h, \qquad \varepsilon = \ddot{\varphi} = \dot{\omega} = -0.6,$$

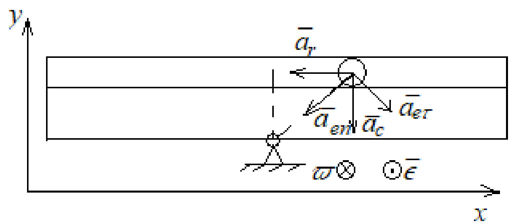
$$a_{e\tau} = 0.6\cdot 6\sqrt{3} = 3.6\sqrt{3}\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

$$a_{en} = \omega^2 h = 1\cdot 6\sqrt{3} = 6\sqrt{3}\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Вычислим теперь величину ускорения Кориолиса.

$$a_c = 2\omega v_r\sin(\vec{\omega},\overrightarrow{v_r}) = 2\cdot 1\cdot\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}\cdot 1 = \frac{3\sqrt{2}\pi}{2}\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

Таким образом, абсолютное ускорение $\overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_{e\tau}} + \overrightarrow{a_{en}} + \overrightarrow{a_c}$. Нанесем вектора на рисунок и для простоты вычислений спроектируем на оси координат.



$$a_{ax} = -a_r + a_{e\tau}\sin\alpha - a_{en}\cos\alpha = -a_r + a_{e\tau}\frac{a}{h} - a_{en}\frac{s}{h}$$
$$= -6.194\ \text{см}/\text{с}^2,$$

$$a_{ay} = -a_{e\tau}\cos\alpha - a_{en}\sin\alpha - a_c = -17.755\ \text{см}/\text{с}^2.$$

Тогда величина абсолютного ускорения вычисляется по теореме Пифагора.

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2} = 18.804\,\frac{\text{см}}{\text{с}^2}.$$

6. Основные законы динамики. Уравнения движения материальной точки.

В кинематике речь в основном шла о движении геометрических объектов, теперь перейдем к рассмотрению движения материальных тел. Основной характеристикой тел является их *масса*. Единица измерения: *кг*. Величина $\rho_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta V}$ определяет *среднюю плотность тела*, если Δm - его масса, а ΔV – объем. Тогда *плотность тела в точке* вычисляется с помощью предела.

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}.$$

Величина $\rho = \rho(x, y, z)$. Если $\rho = \text{const}$, то тело называется *однородным*. Единица измерения плотности: $\text{кг}/\text{м}^3$.

Пусть тело движется поступательно со скоростью $\vec{v}$. Если его масса m, то $m\vec{v}$ - *количество движения* тела. Это векторная величина, совпадающая по направлению со скоростью. Единица измерения: $\text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}$.

Характер движения тела зависит еще и от внешних условий. Эти условия, заставляющие тело изменять свое движение, называются силами. Ввести в механику силы мы можем только с помощью некоторых положений, каковыми являются законы Ньютона.

Первый закон Ньютона (закон инерции): если на тело не действуют силы, то оно находится в покое или движется прямолинейно и равномерно. Этот закон позволяет определить, когда на тело действует сила.

Второй закон Ньютона (об ускорении и силе): сила является векторной величиной, совпадающей по направлению с ускорением и при этом равная произведению массы тела на ускорение.

$$m\vec{a} = \vec{F}.$$

Если на тело действует несколько сил, то $\vec{F}$ - их геометрическая сумма. Второй закон позволяет вычислять силы. Сила характеризуется точкой приложения, модулем и направлением.

Третий закон Ньютона (о действии и противодействии): источником силы $\vec{F}$, действующей на тело массы m, служит некоторое другое тело массы m_1, на которое действует сила $\overrightarrow{F_1}$, равная по модулю, но противоположная по направлению силе $\vec{F}$.

$$\overrightarrow{F_1} = -\vec{F}.$$

Силу $\vec{F}$ называют *действием*, а $\overrightarrow{F_1}$ - *противодействием*. Этот закон позволяет определить источник каждой силы. Ведь если тело движется, то подразумевается, что около него находятся и другие тела. Если бы тело было одно, то не было бы оснований считать, что оно движется.

Основное уравнение динамики $m\vec{a} = \vec{F}$ называют еще *уравнением движения* точки в векторной форме. Оно эквивалентно трем скалярным дифференциальным уравнениям движения. В декартовой системе координат эти уравнения записываются в виде

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x, \\ m\ddot{y} = F_y, \\ m\ddot{z} = F_z, \end{cases}$$

а при естественном способе задания необходимо записать:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_s, \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n, \\ 0 = F_b. \end{cases}$$

Сила, действующая на частицу, может зависеть от времени, положения частицы и ее скорости: $\vec{F} = \vec{F}(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$. *Прямая задача динамики* состоит в том, чтобы по данному закону движения $\vec{r} = \vec{r}(t)$ найти силу $\vec{F}$. Эта задача решается просто: надо продифференцировать $\vec{r}$ два раза и подставить в уравнение динамики. *Обратная задача динамики*: известной является сила $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \vec{v})$ и начальные условия $\overrightarrow{r_0}, \overrightarrow{v_0}$ в момент времени t_0; требуется найти $\vec{r} = \vec{r}(t)$. В этой задаче требуется решать дифференциальные уравнения движения.

Пусть систему дифференциальных уравнений движения нам удалось заменить равносильной

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\varphi_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\varphi_2(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\varphi_3(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = 0. \end{cases}$$

Тогда эту систему легко проинтегрировать и получить следующее

$$\begin{cases} \varphi_1(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_1, \\ \varphi_2(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_2, \\ \varphi_3(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = C_3, \end{cases}$$

где C_1, C_2, C_3 - константы. Это так называемые *первые интегралы* дифференциальных уравнений движения.

Допустим далее, что систему первых интегралов мы тоже можем свести к равносильной:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\vartheta_1(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\vartheta_2(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\vartheta_3(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) = 0, \end{cases}$$

а затем тоже проинтегрировать ее.

$$\begin{cases} \vartheta_1(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) = C_4, \\ \vartheta_2(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) = C_5, \\ \vartheta_3(t, x, y, z, C_1, C_2, C_3) = C_6, \end{cases}$$

где C_4, C_5, C_6 - константы. Это *вторые интегралы* дифференциальных уравнений движения, которые не содержат скоростей. Они определяют функции x, y, z

$$\begin{cases} x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \\ z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6), \end{cases}$$

которые являются *общим решением* дифференциальных уравнений движения. Чтобы найти *частное решение*, надо воспользоваться начальными условиями

$$x_0 = x(t_0, C_1, \cdots C_6), \quad v_{0x} = \dot{x}(t_0, C_1, \cdots C_6),$$
$$y_0 = y(t_0, C_1, \cdots C_6), \quad v_{0y} = \dot{y}(t_0, C_1, \cdots C_6),$$
$$z_0 = z(t_0, C_1, \cdots C_6), \quad v_{0z} = \dot{z}(t_0, C_1, \cdots C_6)$$

и вычислить с их помощью все произвольные постоянные.

Таким образом решение задачи об определении движения по заданной силе и начальным данным приводится к нахождению некоторого частного решения уравнений движения.

7. Примеры решения основных задач динамики.

Рассмотрим простейший случай прямолинейного движения частицы вдоль оси *Ox*. Т.е. уравнение траектории имеет вид

$$\begin{cases} y = \text{const}, \\ z = \text{const} \end{cases}$$

и, следовательно, необходимо положить $F_y = 0, F_z = 0$. Но этого условия недостаточно, т.к. дифференциальные уравнения $\ddot{y} = 0, \ddot{z} = 0$ имеют решения

$$y = at + \alpha, \qquad z = bt + \beta,$$

где

$$y|_{t=t_0} = a = \dot{y_0}\ , \ z|_{t=t_0} = b = \dot{z_0}\ .$$

Следовательно, траектория частицы будет прямолинейной, если сила, приложенная к ней, имеет постоянное направление и начальная скорость параллельна этому направлению. В виде формул это можно записать

$$\begin{cases} F_y = 0, F_z = 0, \\ \dot{y_0} = 0, \dot{z_0} = 0. \end{cases}$$

Тогда в проекции на ось *Ox* основное уравнение динамики имеет вид

$$m\ddot{x} = F_x, \qquad F_x = F_x(t, x, \dot{x}).$$

Рассмотрим некоторые случаи решения этого уравнения.

1. *Движение под действием силы, зависящей лишь от времени*. Если $F_x = F_x(t)$, то уравнение решается простым интегрированием. Пример: *прямолинейное движение весомой частицы*. Если ось Ox направить вертикально вниз, то

$$m\ddot{x} = mg, \qquad \ddot{x} = g.$$

Проинтегрируем это уравнение первый раз и найдем произвольную постоянную из начальных условий.

$$\dot{x} = gt + C_1, \qquad v_0 = gt_0 + C_1, \qquad C_1 = v_0 - gt_0.$$

Подставив произвольную постоянную в дифференциальное уравнение, можем записать

$$\dot{x} = g(t - t_0) + v_0.$$

Проинтегрировав это уравнение второй раз и найдя произвольную постоянную, получим уравнение прямолинейного движения частицы под действием силы тяжести.

$$x = v_0 t + \frac{g(t - t_0)^2}{2} + C_2,$$

$$x_0 = v_0 t_0 + C_2, \qquad C_2 = x_0 - v_0 t_0,$$

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{g(t - t_0)^2}{2}.$$

Если $v_0 > 0$, то с самого начала движения частица падает вниз, если же $v_0 < 0$, то до некоторого момента времени она движется вверх, достигает максимальной высоты и затем падает вниз.

2. *Движение под действием силы, зависящей лишь от положения частицы*. Дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$\ddot{x} = f(x).$$

Чаще всего это уравнение решается как уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Но есть и другой способ: умножение обеих частей равенства на тождество $\dot{x}dt = dx$. Тогда получим

$$\dot{x}\ddot{x}dt = f(x)dx$$

и можем в левой чисти равенства произвести внесение под знак дифференциала и затем проинтегрировать уравнение.

$$\dot{x}d(\dot{x}) = f(x)dx,$$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 = \int f(x)dx = \varphi(x) + C,$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \pm\sqrt{2\varphi(x) + C}.$$

Далее применяется метод разделения переменных.

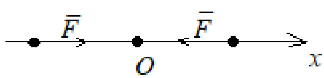
Пример: *прямолинейное движение частицы под действием силы притяжения к неподвижному центру прямо пропорционально расстоянию*. Если коэффициент пропорциональности принять равным k^2m, то модуль силы притяжения к неподвижному центру можно записать в виде

$$F = k^2mr,$$

где r – расстояние от частицы до начала координат, т.е. до центра притяжения. В проекции на ось Ox $F_x = \pm k^2mx$, а поскольку угол между силой притяжения и осью равен π, получим дифференциальное уравнение

$$m\ddot{x} = -k^2mx$$

или $\ddot{x} + k^2x = 0$.



Это однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение, как известно, получается из решения квадратного характеристического уравнения. В нашем случае

$$x(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Тогда $\dot{x}(t) = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt$. Пусть при *t=0* $x = x_0 \quad v = v_0$. Тогда, подставляя начальные условия в формулы для координаты и скорости, получим

$$x_0 = C_1, v_0 = C_2 k.$$

И, следовательно, $C_1 = x_0$, $C_2 = v_0/k$. Таким образом,

$$x(t) = x_0 \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Это решение можно записать в другом виде, если положить $C_1 = A \sin \alpha$, $C_2 = A \cos \alpha$. В таком случае

$$x(t) = A \sin \alpha \cdot \cos kt + A \cos \alpha \cdot \sin kt = A \sin(kt + \alpha).$$

Мы получили уравнение *простых гармонических колебаний*. При такой форме записи *А – амплитуда* колебаний, *α- начальная фаза* колебаний, k – *циклическая или круговая частота*.

3. *Движение под действием силы, зависящей лишь от скорости частицы*. Пусть

$$m\ddot{x} = f(\dot{x}).$$

Тогда можно разделить переменные и проинтегрировать уравнение первый раз.

$$m\frac{d\dot{x}}{dt} = f(\dot{x}),$$

$$\frac{m}{f(\dot{x})} d\dot{x} = dt, \qquad \varphi(\dot{x}) = t + C_1.$$

Если это уравнение удастся разрешить и записать в виде $\dot{x} = \vartheta(t + C_1)$, то можно еще раз разделить переменные и проинтегрировать второй раз.

$$\frac{dx}{dt} = \vartheta(t + C_1), \qquad dx = \vartheta(t + C_1)dt,$$

$$x = \int \vartheta(t + C_1)dt = \sigma(t + C_1) + C_2.$$

Если же этот способ не годится (нельзя выразить $\dot{x}$), то можно решить дифференциальное уравнение с помощью домножения на тождество $\dot{x}dt = dx$. Тогда тоже можно провести разделение переменных и интегрирование.

$$m\dot{x}\ddot{x}dt = f(\dot{x})dx,$$

$$\frac{m\dot{x}d(\dot{x})}{f(\dot{x})} = dx, \qquad \delta(\dot{x}) = x + C_3.$$

Допустим, в полученном уравнении удастся выразить $\dot{x}$. Тогда можно проинтегрировать вторично.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \mu(x + C_3), \qquad \frac{dx}{\mu(x + C_3)} = dt,$$

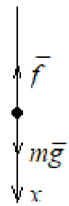
$$\Omega(x + C_3) = t + C_4.$$

Если же и этим способом не удается выразить $\dot{x}$, то можно использовать оба способа и из полученных половинок решений составить систему

$$\begin{cases} \varphi(\dot{x}) = t + C_{1,} \\ \delta(\dot{x}) = x + C_3. \end{cases}$$

В этой системе уравнения дополняют друг друга, т.к. первое описывает зависимость скорости от времени, а второе – от координаты.

Пример: *прямолинейное движение весомой частицы в среде, сопротивляющейся пропорционально* *первой степени скорости*. Пусть на падающую частицу, помимо силы тяжести, действует еще сила сопротивления воздуха, пропорциональная скорости с коэффициентом пропорциональности $k^2 m$. Тогда, если ось *Ox* направить вниз, дифференциальное уравнение движения запишется следующим образом:



$$m\ddot{x} = mg - k^2 m\dot{x}.$$

Его легко можно решить с помощью разделения переменных.

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = g - k^2\dot{x}, \frac{d\dot{x}}{g - k^2\dot{x}} = dt,$$

$$-\frac{1}{k^2}\ln|g - k^2\dot{x}| = t + C_1, \qquad g - k^2\dot{x} = C_1 e^{-k^2 t}.$$

Пусть при *t=0* $v = v_0$. Тогда $C_1 = g - k^2 v_0$ и можем записать

$$g - k^2\dot{x} = (g - k^2 v_0)e^{-k^2 t}.$$

Выразим скорость и снова разделим переменные.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{g}{k^2} - \left(\frac{g}{k^2} - v_0\right)e^{-k^2 t},$$

$$dx = \left[\frac{g}{k^2} - \left(\frac{g}{k^2} - v_0\right)e^{-k^2 t}\right]dt,$$

$$x = \frac{g}{k^2}t - \left(\frac{g}{k^2} - v_0\right)\left(-\frac{1}{k^2}\right)e^{-k^2 t} + C_2.$$

Если при $t=0$ $x = x_0$, то легко вычислить, что $C_2 = x_0 - \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right)$, и таким образом получим ответ

$$x = x_0 + \frac{g}{k^2}t + \frac{1}{k^2}\left(\frac{g}{k^2} - v_0\right)\left(e^{-k^2 t} - 1\right).$$

Итоговый результат показывает, что движение частицы асимптотически приближается к равномерному со скоростью g/k^2, на зависящей от начальных условий.

8. Криволинейное движение материальной точки.
Траектории искусственных спутников Земли.

Пусть равнодействующая сил, действующих на частицу, такова, что

$$F_x = f_1(t, x, \dot{x}), \qquad F_y = f_2(t, y, \dot{y}), \qquad F_z = f_3(t, z, \dot{z}).$$

Тогда

$$\begin{cases} m\ddot{x} = f_1(t, x, \dot{x}), \\ m\ddot{y} = f_2(t, y, \dot{y}), \\ m\ddot{z} = f_3(t, z, \dot{z}). \end{cases}$$

и каждое уравнение можно решать в отдельности.

Рассмотрим задачу о притяжении частицы неподвижным центром прямо пропорционально расстоянию, т.е. $\vec{F} = -k^2 m\vec{r}$, где $\vec{r}$ - радиус-вектор. Тогда система дифференциальных уравнений движения имеет вид

$$\begin{cases} \ddot{x} = -k^2 x, \\ \ddot{y} = -k^2 y, \\ \ddot{z} = -k^2 z. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений было решено ранее в параграфе 7 (пункт 2). Остальные решаются аналогично, так что сразу можем записать ответ.

$$\begin{cases} x = x_0 \cos kt + \dfrac{v_{0x}}{k} \sin kt\,, \\ y = y_0 \cos kt + \dfrac{v_{0y}}{k} \sin kt\,, \\ z = z_0 \cos kt + \dfrac{v_{0z}}{k} \sin kt\,. \end{cases}$$

Направим ось *Ox* так, чтобы она проходила через начальное положение частицы. Тогда $y_0 = z_0 = 0$. Кроме того, проведем плоскость *Oxy* через направление начальной скорости, так что $\dot{z}_0 = 0$. Подстановка этих начальных данных в решение системы дифференциальных уравнений движения дает нам следующее

$$\begin{cases} x = x_0 \cos kt + \dfrac{v_{0x}}{k} \sin kt\,, \\ y = \dfrac{v_{0y}}{k} \sin kt\,, \\ z = 0. \end{cases}$$

Таким образом, траектория движения частицы под действием силы притяжения к неподвижному центру – это плоская кривая. Из приведенных выше уравнений можно выразить

$$\sin kt = \frac{ky}{v_{0y}}, \qquad \cos kt = \frac{1}{x_0}\left(x - \frac{v_{0x}}{k} \cdot \frac{ky}{v_{0y}}\right).$$

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, можем записать уравнение траектории в плоскости *Oxy*.

$$\frac{k^2}{v_{0y}^2} y^2 + \frac{1}{x_0^2}\left(x - \frac{v_{0x}}{v_{0y}} y\right)^2 = 1.$$

Это уравнение кривой второго порядка. Чтобы было очевидно, что это за кривая, положим $v_{0x} = 0$. Тогда получим

$$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{v_{0y}^2/k^2} = 1 \text{ - уравнение эллипса.}$$

Таким образом, искусственные спутники Земли, как частицы, притягивающиеся к неподвижному центру, движутся вокруг Земли по эллиптическим траекториям.

9. Относительное движение материальной точки.

Ранее была разобрана задача о сложном движении точки. Мы определяли абсолютное движение, если известно относительное и переносное. Но можно непосредственно определить относительное движение.

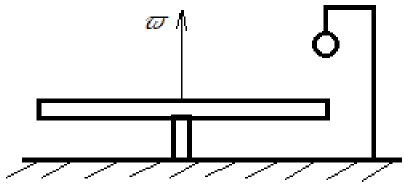
$$m\overrightarrow{a_a} = \vec{F}, \qquad \overrightarrow{a_a} = \overrightarrow{a_r} + \overrightarrow{a_e} + \overrightarrow{a_c},$$

$$m\overrightarrow{a_r} = \vec{F} + (-m\overrightarrow{a_e}) + (-m\overrightarrow{a_c}).$$

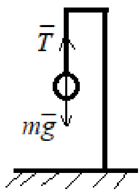
Это *основное уравнение динамики относительного движения*. $(-m\overrightarrow{a_e})$ - *переносная сила инерции*, $(-m\overrightarrow{a_c})$ - *кориолисова сила инерции*. Обе силы инерции направлены противоположно соответствующим ускорениям.

Если подвижная система координат совершает поступательное, равномерное и прямолинейное движение, то $\overrightarrow{a_r} = \overrightarrow{a_c} = 0$ и $m\overrightarrow{a_r} = \vec{F}$. Системы отсчета, для которых это справедливо, называются *инерциальными*, а для которых несправедливо – *неинерциальными*.

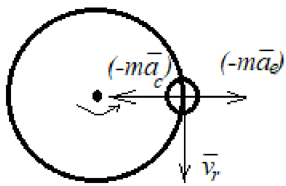
Задача 9.1. На поверхности стола находится горизонтальный диск, свободно вращающийся вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$. Над диском висит шарик массой m. Рассмотреть поведение этого шарика в системе отсчета, связанной со столом (она предполагается инерциальной), и в системе, связанной с вращающимся с диском.



В системе отсчета, связанной со столом, шарик покоится.



В системе отсчета, связанной с диском



$$m\overrightarrow{a_r} = m\vec{g} + \vec{T} + (-m\overrightarrow{a_c}) + (-m\overrightarrow{a_e}).$$

Если записать это равенство в виде проекций, то получим следующее

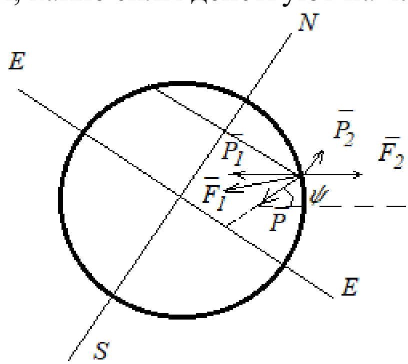
$$ma_r = 2m\omega v_r \sin\left(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v_r}}\right) - m\omega^2 r,$$

т.к. a_e – центростремительное ускорение, $v_r = \omega r$. Таким образом

$$ma_r = 2m\omega^2 r - m\omega^2 r = m\omega^2 r, \qquad a_r = \omega^2 r$$

и в системе отсчета, связанной с диском, шарик движется с ускорением, равным $\omega^2 r$.

Задача 9.2. Рассмотрим задачу о движении частицы по отношению к вращающейся Земле. Пусть неподвижная система координат связана с Солнцем, а подвижная с Землей. Определим, какие силы действуют на частицу.



На приведенном рисунке $\vec{F_1}$ - сила притяжения Земли. Она направлена приблизительно к центру Земли и является равнодействующей всех сил притяжения, с которыми действуют все точки земного шара. $\vec{F_2}$ - сила притяжения к Солнцу. Она направлена по прямой, соединяющей Солнце и Землю. По модулю

$$F_2 = k\frac{m \cdot m_c}{d^2},$$

где m – масса частицы, m_c - масса Солнца, d – расстояние от Земли до Солнца, k – гравитационная постоянная. $\vec{P_1}$ -

сила инерции от вращения Земли вокруг Солнца. Можно вычислить, что

$$\overrightarrow{P_1} = m\overrightarrow{a_{\text{вр}}}, \qquad a_{\text{вр}} = \frac{F_2}{m} = k\frac{m_c}{d^2}.$$

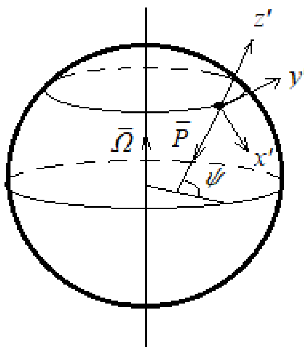
Таким образом, $P_1 = k\frac{mm_c}{d^2}$ и $\overrightarrow{P_1} + \overrightarrow{F_2} = 0$.

Сила $\overrightarrow{P_2}$ является силой инерции от вращения Земли вокруг своей оси. Таким образом,

$$\overrightarrow{P_2} = m\overrightarrow{a_{\text{ц}}}, \qquad a_{\text{ц}} = r\Omega^2,$$

где $\Omega = 0.0000729$ рад/с – угловая скорость вращения Земли, r – расстояние от частицы до оси вращения. Вектор $\vec{P} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{P_2}$ называют силой тяжести, а вектор $\vec{g} = \vec{P}/m$ – ускорением силы тяжести.

Прямая, служащая основанием силы тяжести, называется *отвесной* или *вертикальной*, угол ψ - *географическая широта* места наблюдения. Плоскость, перпендикулярная отвесу и проходящая через точку его пересечения с поверхностью Земли, называется *плоскостью горизонта*.



Запишем уравнение относительного движения точки относительно Земли, учитывая кориолисову силу инерции.

$$m\overrightarrow{a_r} = m\vec{g} - 2m\vec{\Omega}\times\overrightarrow{v_r},$$

$$\overrightarrow{a_r} = \vec{g} - 2\vec{\Omega}\times\overrightarrow{v_r}.$$

Проинтегрируем один раз по времени. Тогда можем записать следующее равенство

$$\overrightarrow{v_r} = \vec{g}t - 2\vec{\Omega}\times\vec{r} + \overrightarrow{v_{r0}},$$

где $\overrightarrow{v_{r0}}$ - начальная скорость. Дальнейшее интегрирование затруднено, поэтому воспользуемся следующим приемом. Найденное выражение для $\overrightarrow{v_r}$ подставим в уравнение относительного движения.

$$\overrightarrow{a_r} = \vec{g} - 2\vec{\Omega}\times\left(\vec{g}t - 2\vec{\Omega}\times\vec{r} + \overrightarrow{v_{r0}}\right),$$

$$\overrightarrow{a_r} = \vec{g} - 2\vec{\Omega}\times\vec{g}t + 4\vec{\Omega}\times\left(\vec{\Omega}\times\vec{r}\right) - 2\vec{\Omega}\times\overrightarrow{v_{r0}}.$$

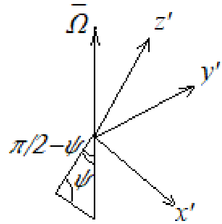
Поскольку угловая скорость вращения Земли очень мала, то третье слагаемое в правой части приведенной формулы можно считать равным нулю. Если этим слагаемым пренебречь, то оставшуюся формулу можно проинтегрировать по времени два раза.

$$\overrightarrow{v_r} = \vec{g}t - 2\vec{\Omega}\times\vec{g}\frac{t^2}{2} - 2\vec{\Omega}\times\overrightarrow{v_{r0}}t + \overrightarrow{v_{r0}},$$

$$\vec{r} = \vec{g}\frac{t^2}{2} - \vec{\Omega}\times\vec{g}\frac{t^3}{3} - 2\vec{\Omega}\times\overrightarrow{v_{r0}}\frac{t^2}{2} + \overrightarrow{v_{r0}}t + \overrightarrow{r_0}.$$

Начальное положение $\overrightarrow{r_0} = 0$, т.к. точка в начальный момент времени находится в начале координат. Полученное векторное выражение запишем в проекциях. Поскольку вектора имеют координаты $\vec{\Omega}(-\Omega\cos\psi, 0, \Omega\sin\psi)$, $\vec{g}(0,0,-g)$, $\overrightarrow{v_{r0}}\left(v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}\right)$, то можно вычислить по правилам векторной алгебры:

$$\vec{\Omega}\times \vec{g} = (0, -\Omega g \cos\psi, 0),$$
$$\vec{\Omega}\times \overrightarrow{v_{r0}} = \left(-\Omega v_{y0}\sin\psi, \quad \Omega v_{x0}\sin\psi + \Omega v_{z0}\cos\psi, \quad -\Omega v_{y0}\cos\psi\right).$$



Если обозначить координаты радиус-вектора $\vec{r}(x', y', z')$, то для них можем записать следующие выражения.

$$\begin{cases} x' = -\Omega v_{0y}\sin\psi\cdot t^2 + v_{x0}t, \\ y' = \dfrac{\Omega g\cos\psi}{3}t^3 - \Omega(v_{0x}\sin\psi + v_{0z}\cos\psi)t^2 + v_{0y}t, \\ z' = \left(-\dfrac{g}{2} + \Omega v_{0y}\cos\psi\right)t^2 + v_{0z}t. \end{cases}$$

Следовательно, траектория частицы в общем случае не является плоской кривой. Если частица падает с нулевой начальной скоростью, то

$$\begin{cases} x' = 0, \\ y' = \dfrac{\Omega g\cos\psi}{3}t^3, \\ z' = -\dfrac{g}{2}t^2. \end{cases}$$

Таким образом, движение происходит в плоскости, перпендикулярной меридиану. Частица падает не вертикально вниз, а отклоняется к востоку, т.к. *y'>0*. Если частица брошена вертикально вверх, то $v_{0x} = v_{0y} = 0, v_{0z} > 0$. Тогда для координат радиус-вектора справедливы равенства

$$\begin{cases} x' = 0, \\ y' = \dfrac{\Omega g \cos\psi}{3} t^3 - \Omega v_{0z} \cos\psi \cdot t^2, \\ z' = -\dfrac{g}{2} t^2 + v_{0z} t. \end{cases}$$

Значит, движение опять происходит в плоскости, перпендикулярной меридиану. Когда точка прекратила движение вверх, то $\dot{z}' = -gt + v_{0z} = 0$, а следовательно $t = v_{0z}/g$. Если подставить этот момент времени в среднюю формулу системы, то получим

$$y' = \frac{\Omega g \cos\psi}{3} \cdot \frac{v_{0z}^3}{g^3} - \Omega v_{0z} \cos\psi \frac{v_{0z}^2}{g^2} = -\frac{2}{3} \frac{\Omega \cos\psi \cdot v_{0z}^3}{g^2}.$$

Таким образом точка отклоняется к западу, т.к. $y'<0$. Когда она окончит движение, то $z' = -\frac{g}{2} t^2 + v_{0z} t = 0$, т.е. $t = 2v_{0z}/g$. В этом случае

$$y' = \frac{\Omega g \cos\psi}{3} \cdot \frac{8v_{0z}^3}{g^3} - \Omega v_{0z} \cos\psi \frac{4v_{0z}^2}{g^2} = -\frac{4}{3} \frac{\Omega \cos\psi \cdot v_{0z}^3}{g^2}.$$

Получается, что по окончании движения частица еще больше отклоняется к западу.

10. Теорема об изменении количества движения.

Как известно, второй закон Ньютона имеет вид $m\vec{a} = \vec{F}$. Если предположить, что у материальной точки m=const, то можем записать

$$m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

и таким образом

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}.$$

Это и есть *теорема об изменении количества движения для материальной точки*. В координатном виде это векторное равенство даст нам систему из трех скалярных равенств.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x, \\ \dfrac{d}{dt}(m\dot{y}) = F_y, \\ \dfrac{d}{dt}(m\dot{z}) = F_z. \end{cases}$$

Можно записать этот закон в другой форме, если сначала домножить на dt $(d(m\vec{v}) = \vec{F}dt)$, а потом проинтегрировать по времени от некоторого начального момента до конечного. Тогда получим

$$m\vec{v} - m\overrightarrow{v_0} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt.$$

Правая часть этого равенства называется *импульсом силы* за промежуток времени $(t_0,\, t)$. Таким образом равенство показывает, что изменение количества движения за некоторый промежуток времени равно импульсу силы за этот промежуток времени.

Замкнутой системой частиц называют систему, на которую не действуют никакие посторонние тела (или их воздействие пренебрежимо мало). Согласно теореме, импульс системы может меняться только под действием внешних сил. Отсюда вытекает *закон сохранения импульса*: импульс замкнутой системы частиц остается постоянным, т.е. не меняется с течением времени.

$$m\vec{v} = \text{const}.$$

Задача 10.1. Человек массы m_1 находится на узком плоту массы m_2, который покоится на поверхности озера. Человек совершил перемещение $\Delta r'$ и остановился. Сопротивление воды пренебрежимо мало. Найти соответствующее перемещение Δr_2 плота относительно берега.

Решение. Человек и плот – замкнутая система, поэтому суммарный импульс не меняется и равен нулю.

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = 0,$$

где $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ - скорости человека и плота относительно берега. Но по теореме сложения скоростей

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v'},$$

где $\overrightarrow{v'}$ - скорость человека относительно плота. Т.к. все скорости направлены по одной прямой, можем записать систему уравнений без векторов.

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0, \\ v_1 = v_2 + v'. \end{cases}$$

Из первого уравнения, таким образом, $v_1 = -\frac{m_2}{m_1}v_2$ и подставляя во второе уравнение получим

$$-\frac{m_2}{m_1}v_2 = v_2 + v', \qquad v_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}v'.$$

Следовательно,

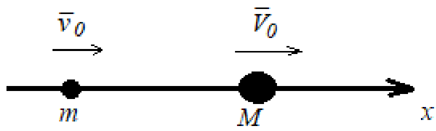
$$\frac{dr_2}{dt} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\frac{dr'}{dt},$$

а поскольку $dr_2 \cong \Delta r_2,\ dr' \cong \Delta r'$, то

$$\Delta r_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\Delta r'.$$

Отсюда видно, что перемещение плота Δr_2 не зависит от траектории движения человека.

Задача 10.2 (понятие об ударе). Рассмотрим задачу, когда две материальные точки массами m и M движутся со скоростями $\overrightarrow{v_0}$ и $\overrightarrow{V_0}$, Сталкиваются и получают после соударения скорости $\vec{v}$ и $\vec{V}$. Надо найти скорости точек после взаимодействия.



Решение. Как бы ни происходил удар – упруго или неупруго –всегда верен третий закон Ньютона. Т.е.

$$m\vec{v} - m\overrightarrow{v_0} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt, \qquad M\vec{V} - M\overrightarrow{V_0} = -\int_{t_0}^{t} \vec{F}dt,$$

где $\vec{F}$- сила соударения. Или (т.к. взаимодействие происходит по одной прямой, знак вектора можно опустить)

$$mv - mv_0 + MV - MV_0 = 0,$$
$$mv + MV = mv_0 + MV_0.$$

Для полного решения задачи нам нужно еще одно уравнение. Будем считать удар *абсолютно упругим*, при котором

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{MV^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2} + \frac{MV_0^2}{2},$$
$$m(v^2 - v_0^2) = -M(V^2 - V_0^2).$$

Таким образом, имеем систему

$$\begin{cases} m(v^2 - v_0^2) = -M(V^2 - V_0^2), \\ m(v - v_0) = -M(V - V_0). \end{cases}$$

Разделив первое уравнение на второе, получим

$$\begin{cases} v + v_0 = V + V_0, \\ m(v - v_0) = -M(V - V_0). \end{cases}$$

Теперь уже легко решить эту систему линейных уравнений. Ее решением являются следующие выражения

$$\begin{cases} v = \dfrac{m - M}{m + M} v_0 + \dfrac{2M}{m + M} V_0, \\ V = \dfrac{2m}{m + M} v_0 + \dfrac{M - m}{m + M} V_0. \end{cases}$$

Для двух равных масс (m=M) получим

$$v = V_0, \qquad V = v_0,$$

т.е. точки при взаимодействии обмениваются скоростями (столкновение бильярдных шаров). С другой стороны, если $m \ll M,$ то

$$v = -v_0 + 2V_0 = V_0 - (v_0 - V_0), \qquad V = V_0.$$

Т.е. большая масса после соударения сохраняет скорость почти неизменной, а меньшая масса следует за большей со скоростью, отличающейся от последней на величину первоначальной относительной скорости обеих масс.

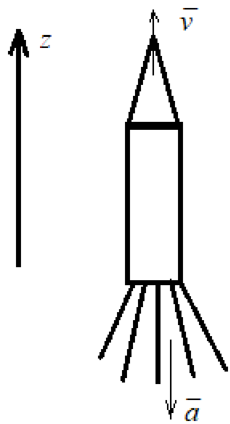
Рассмотрим еще случай абсолютно неупругого удара, т.е. считаем, что после соударения обе массы движутся вместе (v=V). Тогда

$$(m + M)V = mv_0 + MV_0, \qquad v = V = \frac{mv_0 + MV_0}{m + M}.$$

Задача 10.3 (понятие о реактивном движении). Рассмотрим задачу о вертикальном полете ракеты. Пусть скорость истечения пороховых газов относительно ракеты $\vec{a}$ и масса вытекающих в секунду газов постоянна с течением времени. Движение совершается без трения с постоянной силой тяжести g. Начальная скорость ракеты у поверхности Земли равна нулю. Надо составить зависимость высоты подъема от времени и определить высоту через t=10, 30, 50 секунд. Масса вытекающего топлива $\mu = \frac{1}{100} m_0$, $a = 2000$ м/с.

Решение. Теорема об изменении импульса в данном случае выглядит следующим образом

$$\frac{d}{dt}(mv) - \mu a = -mg.$$



Кроме того, необходимо учесть, что масса ракеты меняется в течение полета из-за отработанного топлива.

$$\frac{dm}{dt} = -\mu$$

- уравнение для изменения массы. Проинтегрируем сначала это уравнение, считая, что в начальный момент времени масса ракеты была m_0. Тогда, очевидно, решением уравнения изменения массы будет следующая функция

$$m = m_0 - \mu t.$$

Подставив полученную функцию в уравнение изменения импульса, получим

$$\frac{d}{dt}\big((m_0-\mu t)v\big)-\mu a=-(m_0-\mu t)g.$$

Дифференцирование произведения даст нам в конце концов следующее дифференциальное уравнение

$$(m_0-\mu t)\frac{dv}{dt}-\mu v=\mu gt-m_0g+\mu a.$$

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Решим его методом вариаций произвольной постоянной. Для этого сначала отбросим правую часть и решим другое дифференциальное уравнение.

$$(m_0-\mu t)\frac{dv}{dt}=\mu v.$$

Оно решается методом разделения переменных.

$$\frac{dv}{v}=\frac{\mu dt}{m_0-\mu t},$$

$$\ln v=-\ln|m_0-\mu t|+\ln C\,,\qquad v=\frac{C}{m_0-\mu t}.$$

Теперь, согласно методу вариаций произвольной постоянной, считаем постоянную C не константой, а неизвестной нам функцией от времени. Тогда

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\dot C(m_0-\mu t)+\mu C}{(m_0-\mu t)^2}=\frac{\dot C}{m_0-\mu t}+\frac{\mu C}{(m_0-\mu t)^2}.$$

Подставив это выражение в исходное дифференциальное уравнение, получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными для C.

$$(m_0-\mu t)\left(\frac{\dot C}{m_0-\mu t}+\frac{\mu C}{(m_0-\mu t)^2}\right)-\mu\frac{C}{m_0-\mu t}$$
$$=\mu gt-m_0g+\mu a,$$

$$\frac{dC}{dt} = \mu g t - m_0 g + \mu a, \qquad C = \mu g \frac{t^2}{2} - (m_0 g - \mu a)t + C_1.$$

Таким образом,

$$v = \frac{\mu g \frac{t^2}{2} - (m_0 g - \mu a)t + C_1}{m_0 - \mu t}.$$

Поскольку начальная скорость равна нулю, легко установить, что $C_1 = 0$. Если подставить в полученную формулу выражение для массы вытекающего топлива, скорость истечения пороховых газов и положить ускорение свободного падения равным 10 м/с^2,то

$$v = \frac{\frac{1}{100} m_0 \cdot 10 \frac{t^2}{2} - 10 m_0 t + \frac{1}{100} m_0 \cdot 2000t}{m_0 - \frac{1}{100} m_0 t}$$

$$= \frac{5t^2 + 1000t}{-t + 100}.$$

Следовательно,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{5t^2 + 1000t}{-t + 100} = -5t - 1500 + \frac{150000}{-t + 100}.$$

$$z = -5\frac{t^2}{2} - 1500t - 150000 \ln|100 - t| + C_2.$$

В начальный момент времени высота равна нулю, поэтому $C_2 = 150000 \ln 100$. И таким образом, окончательная формула для высоты

$$z = -\frac{5}{2}t^2 - 1500t - 150000 \ln\left|\frac{100}{100 - t}\right|.$$

Подставляя в нее вместо t 10, 30 и 50, вычислим нужные нам высоты.

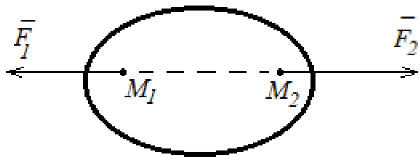
z=553.7 м, z=6271.2 м=6.27 км, z=22722.1м= =22.72 км.

11. Законы статики.
Основные типы связей и их реакции.

Статикой называют раздел механики, который рассматривает условия равновесия материальных систем. *Положение равновесия* системы, находящейся под действием данных сил – это положение системы, в котором она может неопределенное время оставаться в покое относительно данной системы отсчета. В основе статики лежит ряд законов.

Закон 1 (закон инерции). Изолированная материальная точка находится в покое либо движется равномерно и прямолинейно.

Закон 2. Две силы, приложенные к твердому телу, называются *уравновешивающимися* только в том случае, если они равны по модулю и направлены в противоположные стороны по общей линии действия.

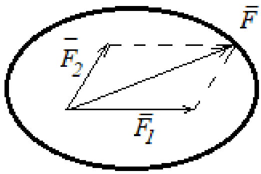


Закон 3. Не нарушая состояния твердого тела, можно добавлять и отбрасывать уравновешивающиеся силы.

Следствие. Не нарушая состояния твердого тела, силу можно переносить по линии её действия в любую точку тела.

Две системы сил называются *эквивалентными*, если одну из них можно заменить другой, не нарушая состояния твердого тела. *Равнодействующая сила* – это сила, эквивалентная данной системе сил.

Закон 4. Равнодействующая двух сил, приложенных в одной точке, приложена в этой же точке и равна векторной сумме двух сил.

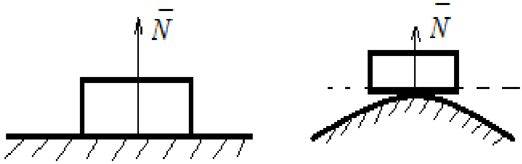


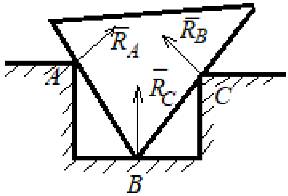
$$F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\left(\widehat{\overrightarrow{F_1}, \overrightarrow{F_2}}\right)}.$$

Закон 5 (закон равенства действия и противодействия). Силы, с которыми два тела действуют друг на друга, равны по модулю и направлены в противоположные стороны. Эти силы не являются уравновешивающимися, т.к. приложены к разным телам.

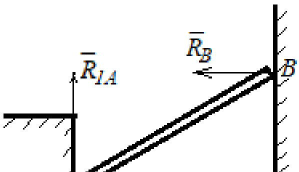
Формулируя статическую задачу, ограничения, которые наложены в задаче на перемещение тела, заменяют приложенными к телу силами. Рассмотрим правила, по которым это делается.

1. Нормальная реакция или реакция опоры. Её направляют перпендикулярно к опоре или перпендикулярно к касательной к опоре. Если в какой-то задаче ни то, ни другое невозможно (например, тело опирается на угол), реакцию опоры направляют перпендикулярно к самому телу.

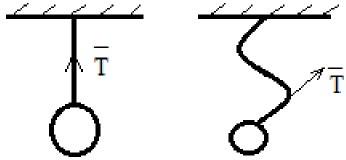




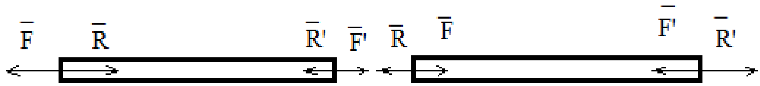
2. Если твердое тело упирается острием в угол (лестница, вид сбоку), то это ограничение следует рассматривать как двойное: угол препятствует движению и в сторону и вниз. Поэтому в общем случае вводят две неизвестных реакции опоры, а затем можно вычислить их равнодействующую, которая является их геометрической суммой.



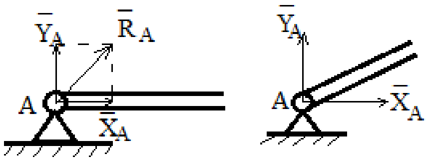
3. Силу натяжения нити обычно направляют вдоль нити, а если это невозможно, то по касательной к ней.



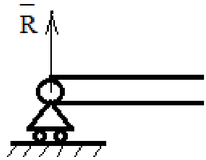
4. Абсолютно жесткий невесомый стержень. Реакции следует направлять вдоль стержня в зависимости от условий задачи. Если стержень растягивают с помощью силы $\overrightarrow{F}$, то сила реакции $\vec{R}$ направлена к середине стержня, если же стержень сжимают, то сила реакции направлена наружу.



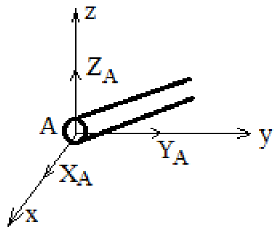
5. Цилиндрический шарнир. Направление реакции здесь не определено, поэтому она представлена двумя взаимно перпендикулярными составляющими.



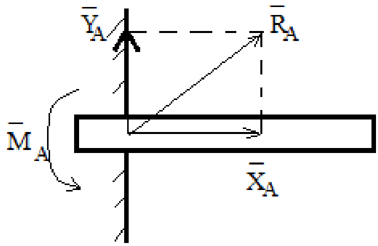
6. Шарнир на катках. Приведенный рисунок означает, что опора может двигаться влево и вправо. Так что ограничение остается только на перемещение вверх и вниз, соответствующим образом направлена и реакция опоры.



7. Сферический шарнир. Это пространственный шарнир, направление реакции не определено, поэтому приходится вводить три взаимно перпендикулярные неизвестные составляющие.



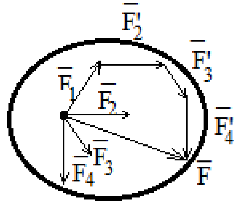
8. Жесткая заделка. Такое ограничение препятствует перемещению и повороту вокруг точки закрепления. Приходится вводить три неизвестных величины: две взаимно перпендикулярные составляющие и момент, препятствующий выкручиванию из заделки. Момент M_a называют *моментом заделки*.



12. Равновесие системы сходящихся сил.

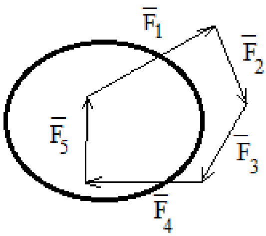
Сходящимися называются силы, линии действия которых пересекаются в одной точке. Равнодействующая такой системы находится путем построения силового многоугольника.

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4}.$$



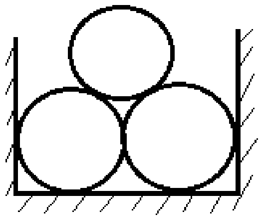
Чтобы тело находилось в покое, надо, чтобы силовой многоугольник был замкнут, $\vec{F} = 0$. В случае плоской задачи это означает наличие двух уравнений для проекций равнодействующей силы.

$$\begin{cases} F_x = F_{1x} + F_{2x} + \cdots + F_{nx} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ F_y = F_{1y} + F_{2y} + \cdots + F_{ny} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0. \end{cases}$$

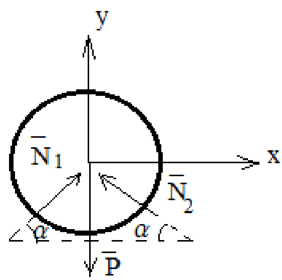


Это система уравнений равновесия для системы сходящихся сил. Задача называется *статически определенной*, если число неизвестных равно числу независимых уравнений равновесия. В противном случае задача называется *статически неопределенной* и не может быть решена одними уравнениями статики.

Задача 12.1. Три одинаковые трубы весом P каждая лежат как указано на рисунке. Определить давление каждой из нижних труб на землю и на удерживающие их с боков стенки.



Решение. Рассмотрим сначала верхнюю трубу и составим для неё уравнения равновесия.

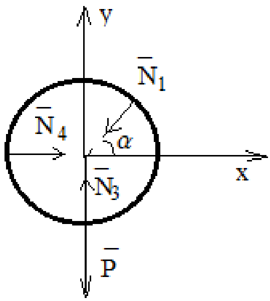


$$\begin{cases} x: N_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha = 0, \\ y: N_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha - P = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим, что

$$N_1 = N_2 = \frac{P}{2\sin\alpha}.$$

Теперь рассмотрим левую нижнюю трубу. Предположим, что правая труба на неё не давит (иначе задача будет статически неопределенной). Тогда можем составить систему уравнений равновесия.



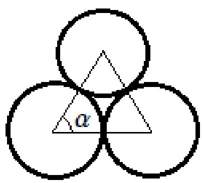
$$\begin{cases} x: N_4 - N_1 \cos\alpha = 0, \\ y: N_3 - N_1 \sin\alpha - P = 0. \end{cases}$$

Легко получим, что

$$N_4 = N_1 \cos\alpha = \frac{P}{2\operatorname{tg}\alpha},$$

$$N_3 = P + N_1 \sin\alpha = P + \frac{P}{2} = \frac{3P}{2}.$$

Осталось определить угол α. Треугольник, соединяющий центры окружностей, является равносторонним, поэтому $\alpha = \pi/3$. Таким образом,



$$N_3 = \frac{3P}{2}, \qquad N_4 = \frac{P}{2\sqrt{3}}.$$

13. Момент силы, пара сил.

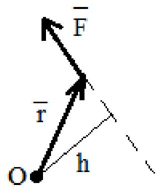
Моментом силы $\vec{F}$ относительно полюса О называют вектор

$$\overrightarrow{m_0}(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F},$$

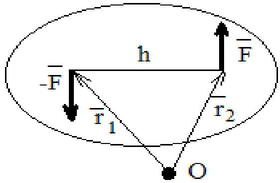
где $\vec{r}$ - радиус-вектор от полюса О до точки приложения силы $\vec{F}$. Из векторной алгебры известно, что модуль векторного произведения

$$\left|\overrightarrow{m_0}(\vec{F})\right| == \left|\vec{r} \times \vec{F}\right| = rF\sin\left(\widehat{\vec{F},\vec{r}}\right) = F \cdot h,$$

где h – *плечо силы*, т.е. кратчайшее расстояние от точки О до линии действия силы. Момент считается положительным, если сила стремится повернуть тело вокруг точки О против часовой стрелки, и отрицательным при повороте по часовой стрелке.



Система двух равных по модулю параллельных сил, направленных в противоположные стороны, называется *парой сил*. Расстояние h между линиями действия сил – *плечо пары*. Направлен момент в ту сторону, откуда вращение видится против часовой стрелки.



Согласно приведенному рисунку

$$\vec{M} = -\overrightarrow{r_1} \times \vec{F} + \overrightarrow{r_2} \times \vec{F} = (\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}) \times \vec{F},$$

$$M = |\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}| \cdot F \cdot \sin\frac{\pi}{2} = F \cdot h.$$

Таким образом, момент пары сил $M = \pm F \cdot h$.

Для равновесия системы пар, лежащих в одной плоскости и приложенных к одному телу, необходимо и достаточно, чтобы сумма моментов равнялась нулю.

$$\sum_{k=1}^{n} M_k = \sum_{k=1}^{n} \pm F_k h_k = 0.$$

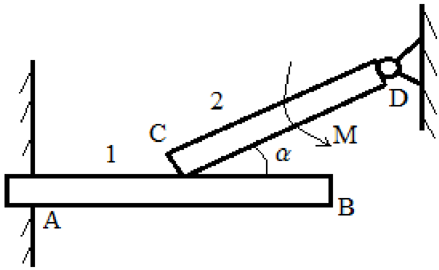
Если на твердое тело действует система параллельных сил, то главный момент в этом случае определяется как алгебраическая сумма моментов всех сил системы относительно выбранного полюса

$$M_0 = \sum_{k=1}^{n} m_0(\vec{F}).$$

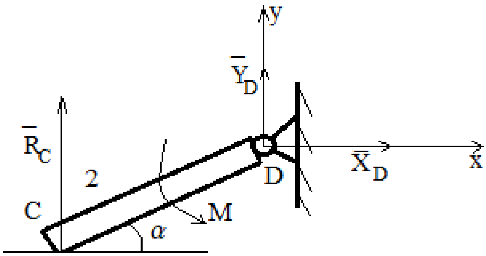
Уравнения равновесия в этом случае имеют вид

$$\begin{cases} F_x = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \\ F_y = \sum\limits_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \\ M_0 = 0. \end{cases}$$

Задача 13.1. Наклонная под углом α к горизонту балка 2 длины *l*, щарнирно закрепленная в точке D, опирается на консольную балку 1. На балку 2 действует пара сил с моментом *M*. Полагая заданными все геометрические параметры конструкции, определить реакции всех опор.



Решение. Рассмотрим сначала балку 2 и нарисуем согласно правилам реакции опор.



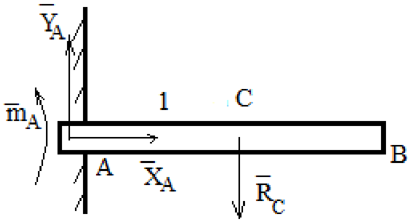
Система уравнений равновесия состоит из трех уравнений: суммарные проекции всех сил на оси Ох и Оу равны нулю и суммарный момент относительно, например, точки D, тоже равен нулю. Тогда можем записать

$$\begin{cases} X_D = 0, \\ Y_D + R_C = 0, \\ M - R_C \cos\alpha \cdot |CD| = 0. \end{cases}$$

Решив это уравнение, получим

$$X_D = 0, \qquad Y_D = -\frac{M}{l\cos\alpha}, \qquad R_C = \frac{M}{l\cos\alpha}.$$

Теперь рассмотрим балку 1 и составим для неё аналогичные уравнения равновесия (суммарный момент возьмем относительно точки А).



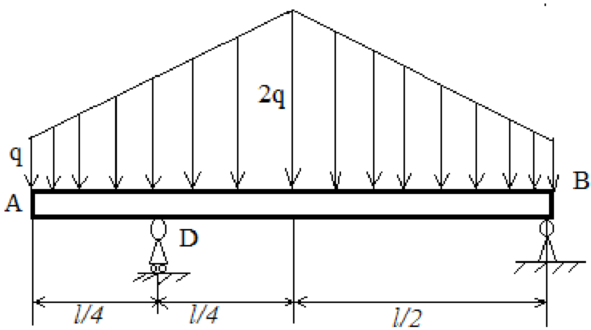
$$\begin{cases} X_A = 0, \\ Y_A - R_C = 0, \\ m_A - R_C \cdot |AC| = 0. \end{cases}$$

Решением этого уравнения являются

$$X_A = 0, Y_A = R_C = \frac{M}{l\cos\alpha}, m_A = \frac{M \cdot |AC|}{l\cos\alpha}.$$

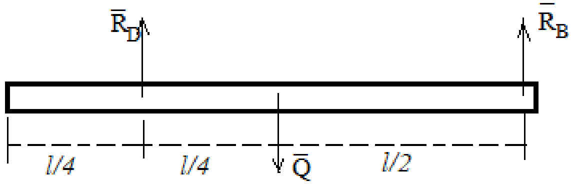
Таким образом, мы определили реакции всех опор.

Задача 13.2. Балка АВ длины l несет распределенную нагрузку, показанную на рисунке. Интенсивность нагрузки равна q Н/м на концах балки АВ и $2q$ Н/м в середине балки. Пренебрегая весом балки, найти реакции опор D и B.



Решение. Распределенную нагрузку можно заменить одной силой Q, вычисленной следующим образом

$$Q = q \cdot l + \frac{1}{2} q \cdot l = \frac{3}{2} q \cdot l.$$



Следовательно, в данной задаче мы имеем дело с системой параллельных сил, изображенных на рисунке. Система уравнений равновесия состоит из двух уравнений: суммарная проекция всех сил на вертикальную ось равна нулю и суммарный момент относительно, например, точки D, тоже равен нулю. Таким образом, имеем равенства

$$\begin{cases} R_B + R_D - Q = 0, \\ Q \cdot \dfrac{l}{4} - R_B \left(\dfrac{l}{2} + \dfrac{l}{4} \right) = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы: $R_B = \frac{Q}{3} = \frac{1}{2} q \cdot l\ H,\ \ R_D = Q - R_B = q \cdot l\ H.$

Содержание.

Учебное издание

Петрова Вера Валерьевна

Теоретическая механика в метеорологии

Печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 09.03.2022. Формат 60×90 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 4,375. Тираж 10 экз. Заказ № 1192.
РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская ул., д. 79.