Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

И.В. Зайцева

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
РГГМУ
2022

УДК [514.12+514.742.2+517.2](072.5+078.5)
ББК 22.1я73
З-17

Печатается по решению Учебно-методического совета РГГМУ

Рецензенты:

Гурнович Татьяна Генриховна, доктор экономических наук, профессор, профессор кафедры финансового менеджмента и банковского дела ФГБОУ ВО «Ставропольский государственный аграрный университет»;

Тарасенко Елена Олеговна, кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры вычислительной математики и кибернетики ФГАОУ ВО «Северо-Кавказский федеральный университет»

Зайцева, Ирина Владимировна.

З-17 Математический анализ для экономистов : учебное пособие / И.В. Зайцева. – Санкт-Петербург : РГГМУ, 2022. – 116 с.

Учебное пособие содержит методические рекомендации для студентов в соответствие с рабочей программой дисциплины «Математический анализ» (для студентов экономических направлений 38.03.05 Бизнес-информатика, 38.03.04 Государственное и муниципальное управление, 38.03.01 Экономика). Представлены основные теоретические сведения и примеры решения типичных задач, рекомендации по изучению дисциплины. Приводятся вопросы для самопроверки, рекомендуемая литература, контрольные работы. Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений. Также может быть полезно инженерам и научным работникам разных специальностей, изучающим или использующим методы высшей математики.

УДК [514.12+514.742.2+517.2](072.5
+078.5) ББК 22.1я73

ISBN 978-5-86813-554-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. ОБЩИЕ УКАЗАНИЯ

В результате изучения дисциплины «Математический анализ» студент развивает логическое и алгоритмическое мышление; овладевает основными методами исследования и решения математических задач; вырабатывает умения самостоятельно расширять математические знания и проводить математический анализ прикладных гидрометеорологических задач, что позволяет создать необходимую основу для изучения последующих дисциплин. Целью математического образования бакалавра является: воспитание достаточно высокой математической культуры, привитие навыков современных видов математического мышления, привитие навыков использования математических методов и основ математического моделирования при построении и исследовании моделей сложных гидрометеорологических явлений в практической деятельности.

По дисциплине «Математический анализ» на первом и втором курсах предусматривается изучение разделов «Дифференциальное исчисление», «Интегральное исчисление», «Обыкновенные дифференциальные уравнения». Студенты должны выполнить четыре контрольные работы:

1. Дифференциальное исчисление.
2. Приложения дифференциального исчисления.
3. Интегральное исчисление.
4. Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Студенты по итогам изучения дисциплины «Математический анализ» сдают экзамен. Для сдачи экзамена необходимо получить зачет по контрольным работам.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Основные теоретические сведения по теме «Дифференциальное исчисление»

Литература

[1], гл. VII–X; [2], т. 1, гл. 1, 2, 7, п. 1–5; [3], гл. II, гл. III, п. 1–4; [4], гл. 1–5; [5], ч. 1 гл. 5, 6; [6], 5, 6; [8]; [11].

1. Если даны числовые множества $\mathrm{X}=\{x\}, \mathrm{Y}=\{y\}$, и по некоторому закону f каждому элементу $x \in \mathbf{X}$ поставлен в соответствие один и только один элемент $y \in \mathbf{Y}$, то говорят, что на множестве **X** задана ***функция*** $y=f(x)$, x называют ***аргументом*** функции, y – ее ***значением***.

Через $f(a)$ или $y(a)$ обозначается то значение y, которое соответствует значению $x=a$.

Множество **X** называется ***областью определения функции***, множество **Y** – ***областью изменения функции***.

К ***основным элементарным функциям*** относятся: степенная функция $y=x^n$; показательная функция $y=a^x$; логарифмическая функция $y=\log_a x$; тригонометрические функции $y=\sin x,\ y=\cos x,\ y=\mathrm{tg}\,x,\ y=\mathrm{ctg}\,x$; обратные тригонометрические функции: $y=\arcsin x,\ y=\arccos x,\ y=\mathrm{arctg}\,x,\ y=\mathrm{acrctg}\,x$.

Графиком функции $y=f(x)$ называется множество точек $(x;y)$ плоскости, координаты x и y которых связаны соотношением $y=f(x)$, x принадлежит области определения данной функции.

2. Число A называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***в точке*** a (при $x \to a$), если $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta(\varepsilon)>0$ такое, что $\forall x \in \mathbf{X}$, удовлетворяющих условию $0<|x-a|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=A$, или $f(x)\to A$ при $x\to a$.

Если существует предел вида $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$, который обозначается также $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$, или $f(a-0)$, то он называется ***пределом слева функции*** $f(x)$ в точке a.

Аналогично, если существует предел вида $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$, в другой записи $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$, или $f(a+0)$, то он называется ***пределом справа функции*** $f(x)$ в точке a. Пределы слева и справа называются ***односторонними.***

Функция $f(x)$ $(F(x))$ называется ***бесконечно малой*** (***бесконечно большой***) при $x\to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ $\left(\lim\limits_{x\to a} F(x)=\infty\right)$.

Для сравнения двух бесконечно малых функций $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to a$ находят предел их отношения.

Если $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ при $x\to a$ называются ***эквивалентными*** (***равносильными***).

Обозначение: $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

Например, при $x\to a$ $\sin ax\sim ax$, $\operatorname{tg} ax\sim ax$, $\ln(1+ax)\sim ax$, $e^{ax}-1\sim ax$.

Предел отношения бесконечно малых (бесконечно больших) функций при $x\to a$ не изменится, если каждую из них заменить эквивалентной ей функцией, т.е.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}, \qquad (1)$$

где $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$, $\beta(x)\sim\beta_1(x)$.

3. Предел элементарной функции в точке ее определения равен частному значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Нарушение ограничений, накладываемых на функции при вычислении их пределов, приводит к неопределенностям вида $\infty-\infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0\cdot\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.

Элементарными приемами раскрытия неопределенностей являются:

1) сокращение на множитель, создающий неопределенность;

2) деление числителя и знаменателя на старшую степень аргумента (для отношения многочленов при $x \to \infty$);

3) применение эквивалентных бесконечно малых и бесконечно больших функций;

4) использование двух замечательных пределов

$$\lim_{\alpha(x)\to 0} \frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1; \quad \lim_{\alpha(x)\to 0} \left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = \mathrm{e}. \qquad (2)$$

Отметим также, что

$$\lim_{x\to a} \frac{C}{f(x)} = 0, \quad \text{если} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty; \quad \lim_{x\to a} \frac{C}{f(x)} = \infty, \quad \text{если} \quad \lim_{x\to a} f(x) = 0;$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \text{если} \quad \lim_{x\to a} f(x) = 0, \ \lim_{x\to a} g(x) = \infty;$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty, \quad \text{если} \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty, \ \lim_{x\to a} g(x) = 0.$$

4. Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** $x = x_0$, если:

1) функция $f(x)$ определена в точке x_0 и ее окрестности;

2) существует конечный предел функции $f(x)$ в точке x_0;

3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (3)$$

Если положить $x = x_0 + \Delta x$, то условие непрерывности (3) будет равносильно условию $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\right) = 0$, т.е. функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции $\Delta f(x_0)$.

Приращением функции $y = f(x)$ ***называется разность***

$$\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x),$$

где Δx – ***приращение аргумента***.

Для того чтобы функция $y = f(x)$ была непрерывна в точке $x = x_0$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись три условия:

1) существовал предел слева $f(x_0 - 0)$ и предел справа $f(x_0 + 0)$;

2) пределы слева и справа были равны друг другу

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = C;$$

3) выполнялось условие $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Если не выполняется хотя бы одно из этих условий, то функция называется разрывной в точке.

1) Точка $x = x_0$, называется ***точкой разрыва первого рода***, если оба односторонних предела конечны, но $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ (нарушено условие 2).

2) Точка $x = x_0$ называется ***точкой разрыва второго рода***, если хотя бы один из односторонних пределов равен бесконечности (нарушено условие 1).

3) Точка $x = x_0$ называется ***точкой устранимого разрыва***, если $f(x_0) \neq C$ (нарушено условие 3).

5. Предел отношения приращения функции к вызвавшему его приращению аргумента Δx при произвольном стремлении Δx к нулю называется ***производной функции*** $y = f(x)$ ***в точке*** x и обозначается одним из следующих символов: $y', f'(x), \frac{dy}{dx}$. Таким образом, по определению

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (4)$$

Если указанный в формуле (3.4) предел существует, то функцию $f(x)$ называют ***дифференцируемой в точке*** x, а операцию нахождения производной y' – ***дифференцированием.***

Геометрически величина производной $f'(x_0)$ представляет ***тангенс угла*** α ***наклона касательной в точке*** $M_0(x_0, y_0)$, ***к графику функции*** $y = f(x)$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0). \qquad (5)$$

Уравнение нормали (перпендикуляра) к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \ \left(f'(x_0) \neq 0\right). \qquad (6)$$

Производная обратной функции.

Теорема 1. *Если функция* $y = f(x)$ *строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности точки* x_0, *имеет производную в точке* x_0 *и* $f'(x_0) \neq 0$, *то существует обратная функция* $x = f^{-1}(y)$, *которая определена в некоторой окрестности точки* $y_0 = f(x_0)$ *и имеет производную в точке* y_0, *причем*

$$\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}. \qquad (7)$$

Физическая интерпретация формулы (3.7): производная $\left(f^{-1}(y_0)\right)'$ есть скорость изменения переменной x по отношению к изменению переменной y, а $f'(x_0)$ – скорость изменения переменной y по отношению к изменению переменной x. Ясно, что эти величины являются взаимно обратными.

Производная сложной функции.

Теорема 2. *Если функция* $u = u(x)$ *имеет в точке* x_0 *производную* $u'(x_0)$, *а функция* $y = f(u)$ *имеет в точке* $u_0 = u(x_0)$ *производную* $f'(u_0)$, *то сложная функция* $y = f(u(x)) \equiv f(x)$ *имеет производную в точке* x_0, *причем*

$$f'(x_0) = f'(u(x_0)) \cdot u'(x_0). \tag{8}$$

Физическая интерпретация формулы (3.8): производная $u'(x_0)$ есть скорость изменения переменной *u* по отношению к изменению переменной *x*, а производная $f'(u_0)$ − скорость изменения переменной *y* по отношению к изменению переменной *u*. Ясно, что скорость $f'(x_0)$ изменения переменной *y* по отношению к переменной *x* равна произведению скоростей $f'(u_0)$ и $u'(x_0)$. (Если *u* движется быстрее *x* в *k* раз, а *y* − быстрее *u* в *l* раз, то *y* движется быстрее *x* в *kl* раз.)

Производная функции, заданной параметрически. Пусть функции

$$x = x(t),\ y = y(t) \tag{9}$$

определены на некотором промежутке изменения переменной *t*, которую назовем ***параметром***. Пусть функция $x = x(t)$ является строго монотонной на этом промежутке. Тогда существует обратная функция $t = x^{-1}(x)$, подставляя которую в уравнение $y - y(t)$ получим $y = y(x^{-1}(x)) = f(x)$.

Таким образом, переменная *y* является сложной функцией переменной *x*. Задание функции $y = f(x)$ с помощью уравнений (9) называется ***параметрическим***.

Уравнения (9) можно интерпретировать как зависимость координат точки, движущейся на плоскости (*x*; *y*), от времени *t*. При такой интерпретации график функции $y = f(x)$ представляет собой траекторию точки.

Если функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ имеют производные $x'(t) \neq 0$ и $y'(t)$, то функция $y = f(x)$ также имеет производную, причем

$$f'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}. \tag{10}$$

Заметим, что существование производной $x'(t)$ определенного знака является достаточным условием строгой монотонности функции $x = x(t)$ и, следовательно, существования функции $y = f(x)$, заданной параметрически.

6. Функция $y = f(x)$ называется ***дифференцируемой*** в точке x_0, если ее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha \Delta x, \tag{11}$$

где A − некоторое число, а α − функция аргумента Δx, бесконечно малая и непрерывная в точке $\Delta x = 0$ (т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \alpha(0) = 0$).

Теорема 3. *Для того чтобы функция* $y = f(x)$ *была дифференцируемой в точке* x_0, *необходимо и достаточно, чтобы существовала производная* $f'(x_0)$.

Отметим, что при этом $A = f(x_0)$.

Дифференциалом (или ***первым дифференциалом***) функции $y = f(x)$ в точке x_0 (дифференцируемой в этой точке) называется функция аргумента Δx: $dy = f'(x_0)\Delta x$.

Если $f'(x_0) \neq 0$, то дифференциал является ***главной*** (***линейной*** относительно Δx) частью приращения функции в точке x_0.

Дифференциалом независимой переменной x называется приращение этой переменной: $dx = \Delta x$. Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$dy = f'(x_0)dx, \tag{12}$$

откуда

$$f'(x_0)=\frac{dy}{dx},$$

т.е. *производная функции* $y=f(x)$ *в точке* x_0 *равна отношению дифференциала функции в этой точке к дифференциалу независимой переменной*.

Геометрический и физический смысл дифференциала. Геометрический смысл дифференциала нетрудно уяснить из рисунка 3, на котором изображены график функции $y=f(x)$ (жирная линия) и касательная *MP* к графику в точке $M(x_0;\, f(x_0))$.

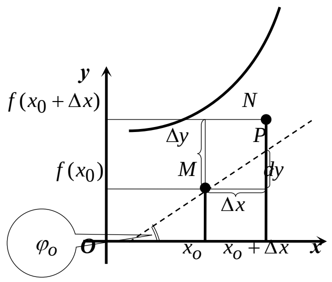


Рис. 3

Дифференциал dy равен приращению линейной функции, графиком которой является касательная *MP*.

Если *x* − время, а $y=f(x)$ − координата точки на прямой линии в момент *x*, то дифференциал $dy=f'(x_0)\Delta x$ равен тому изменению координаты, которое получила бы точка за время Δx, если бы скорость точки на отрезке времени $[x_0;\, x_0+\Delta x]$ была постоянной и равной $f'(x_0)$.

Использование дифференциала для приближенных вычислений. Так как $\Delta y\cong dy$ при малых значениях Δx, т.е. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cong f'(x_0)\Delta x$, то

$$f(x_0+\Delta x)\cong f(x_0)+f'(x_0)\Delta x. \tag{13}$$

Эта формула позволяет находить приближенные значения $f(x_0+\Delta x)$ при малых значениях Δx, если известны $f(x_0)$ и $f'(x_0)$. При этом погрешность при замене

$f(x_0+\Delta x)$ правой частью формулы (13) тем меньше, чем меньше Δx, и, более того, эта погрешность при значении $\Delta x \to 0$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем Δx.

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

▲ Многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, обращаются в нуль при значении $x=-2$. Если $x=-2$ – корень многочлена, то этот многочлен делится на двучлен $x+2$ без остатка. По теореме Безу в этом случае каждый многочлен (в числителе и знаменателе) может быть представлен в виде произведения двучлена $(x+2)$ на некоторый многочлен. Таким образом, нахождение предела сводится, прежде всего, к выделению в числителе и знаменателе множителя $(x+2)$, незримое присутствие которого и создает неопределенность $\frac{0}{0}$. Практически это достигается каким-либо способом разложения числителя и знаменателя на множители, например, делением «уголком».

$$\begin{array}{r|l} -\,x^3+3x^2+2x & \underline{x+2} \\ \underline{x^3+2x^2} & x^2+x \\ -\,x^2+2x & \\ \underline{x^2+2x} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\,x^2-\ \ x-6 & \underline{x+2} \\ \underline{x^2+\ 2x\quad} & x-3 \\ -\,-3x-6 & \\ \underline{-3x-6} & \end{array}$$

Теперь искомый предел можно представить в виде

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to -2}\frac{(x+2)(x^2+x)}{(x+2)(x-3)}=\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x}{x-3}.$$

Неопределенность исчезла. По теореме о пределе частного находим

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2+x}{x-3}=\frac{4-2}{-2-3}=-\frac{2}{5}.\ ▼$$

Раскрытие неопределенностей $\frac{0}{0}$

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида $\frac{0}{0}$ при отыскании предела отношения многочленов $\lim\limits_{x\to a}\frac{P_n(x)}{Q_n(x)}$, нужно

1) определить тип неопределенности,

2) если неопределенность вида $\frac{0}{0}$, то поделить числитель и знаменатель на двучлен $(x-a)$.

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{1-2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

▲ При отыскании пределов от иррациональных функций с неопределенностями вида $\frac{0}{0}$ используется рассмотренный выше прием, но только после предварительных алгебраических преобразований. Умножим числитель и знаменатель на выражения, сопряженные числителю и знаменателю

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 4}\frac{(\sqrt{1+2x}-3)(\sqrt{1+2x}+3)\,(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)(\sqrt{1+2x}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(1+2x-9)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(x-4)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)(\sqrt{1+2x}+3)}=\lim_{x\to 4}\frac{2(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{1+2x}+3)}=\frac{4}{3}.$$ ▼

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2+5}{3x^3+x-1}$.

▲ В данном примере теорема о пределе частного (дроби) неприменима, так как пределы числителя и знаменателя дроби не существуют. При $x\to\infty$ и числитель, и знаменатель дроби функции бесконечно большие. Значит, мы имеем дело с отношением двух бесконечно больших функций. Чтобы найти предел, преобразуем данную дробь, разделив ее числитель и знаменатель на величину x^3, т.е. на старшую степень переменной x. Пользуясь свойствами пределов, получим $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2+5}{3x^3+x-1}=\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{2x^3+x^2+5}{x^3}}{\dfrac{3x^3+x-1}{x^3}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}{3+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}}=\dfrac{2}{3}$.

Слагаемое $\frac{1}{x}$ при $x\to\infty$ – величина бесконечно малая. А потому $\frac{1}{x^2},\frac{1}{x^3}$ и $\frac{5}{x^3}$ – величины бесконечно малые и пределы этих величин равны нулю, когда переменная $x\to\infty$. После деления числителя и знаменателя на величину x^3 оказалось возможным применить теорему о пределе частного, так как теперь и числитель и знаменатель дроби имеют пределы, равные соответственно 2 и 3, и предел знаменателя не равен нулю. ▼

Раскрытие неопределенностей вида $\frac{\infty}{\infty}$

Если предел отношения двух алгебраических функций при $x\to\infty$ дает неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, то нужно числитель и знаменатель поделить на старшую степень x встречающуюся в этой функции.

Раскрытие неопределенностей вида $\infty-\infty$ и $0\cdot\infty$

Для того чтобы раскрыть неопределенность вида $\infty-\infty$, необходимо с помощью алгебраических действий (приведение к общему знаменателю, освобождение от иррациональности) свести ее к неопределенности вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\left(0\cdot\infty\Rightarrow 0\cdot\tfrac{1}{0}=\tfrac{0}{0},\ 0\cdot\infty\Rightarrow\tfrac{1}{\infty}\cdot\infty=\tfrac{\infty}{\infty}\right)$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

▲ На основании первой из формул (2) получаем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\dfrac{\sin 7x}{7x}\cdot 7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}}{\dfrac{\sin 7x}{7x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{5x}{7x}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 7x}{7x}=1\right\}=\frac{5}{7}.\ \blacktriangledown$$

Пределы тригонометрических функций

Пределы тригонометрических функций находятся с помощью первого замечательного предела $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$, алгебраических и тригонометрических преобразований.

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

$$\blacktriangle\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin 2x}=\left\{1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin 2x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{(1+\cos x+\cos^2 x)}{x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1}{2x}=$$

$$=\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}=1,\ \lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x)=3\right\}=$$

$$=\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{2x}=\frac{3}{4}.\ \blacktriangledown$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{2x}$.

$\blacktriangle\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 3x}{2x}=\left\{\frac{0}{0}\right.$, обозначим $\arcsin 3x=y$, тогда $3x=\sin y$ и $y\to 0$

при $x \to 0\Big\} = \lim\limits_{y\to 0}\dfrac{3y}{2\sin y} = \dfrac{3}{2}$. ▼

Если под знаком предела делается замена переменной, то все величины, входящие под знак предела, должны быть выражены через эту новую переменную, а из равенства, выражающего зависимость между старой переменной и новой, должен быть определен предел новой переменной.

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x$.

▲ $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x = \{0\cdot\infty;$ обозначим $1-x=y$, тогда $y\to 0$ при $x\to 1\} =$

$$= \lim_{y\to 0} y\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{2}y\right) = \left\{\operatorname{tg}\left(\tfrac{\pi}{2}-\tfrac{\pi}{2}y\right) = \operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{2}y\right\} = \lim_{y\to 0}\operatorname{ctg}\tfrac{\pi}{2}y =$$

$$= \lim_{y\to 0} y\frac{\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y} = \lim_{y\to 0} y\frac{\frac{\pi}{2}y\cdot\cos\frac{\pi}{2}y}{\sin\frac{\pi}{2}y\cdot\frac{\pi}{2}y} = \frac{2}{\pi}. \ ▼$$

Пределы, связанные с числом е. Второй замечательный предел принято писать в одном из ниже указанных видов:

$$\lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \mathrm{e},\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \mathrm{e}.$$

Если во втором замечательном пределе непосредственно подставить предел аргумента, то получится неопределенность вида 1^{∞}; поэтому, если при $x \to 0$ или $x \to \pm\infty$ функция $f(x)$ дает неопределенность вида 1^{∞}, то предел этой функции связан с числом е.

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

$$▲\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\left\{1^{\infty};\ \frac{x+1}{x-2}=1+\frac{x+1}{x-2}-1=1+\frac{x+1-x+2}{x-2}=1+\frac{3}{x-2};\right.$$

таким путем из дроби $\frac{x+1}{x-2}$ выделяется бесконечно малая функция

$$\left.\alpha=\frac{3}{x-2}\ \text{при}\ \ x\to\infty\right\}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}\cdot\frac{3}{x-2}(2x-1)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{3}{x-2}(2x-1)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-3}{x-2}}=\mathrm{e}^{6}.\ ▼$$

Пример 9. Найти пределы функции $y=2^{\frac{1}{x-3}}$ слева и справа в точках $x_1=3, x_2=5$. Узнать, является ли функция непрерывной в этих точках.

▲ Исследуем точку $x=3$.

$f(3-0)=\lim\limits_{x\to 3-0}2^{\frac{1}{x-3}}=\{$ вместо переменной x подставляем его предельное

значение в символах; $\left.2^{\frac{1}{3-0-3}}=2^{\frac{1}{-0}}=2^{-\infty}=\frac{1}{2^{\infty}}\right\}=0$,

$$f(3+0)=\lim_{x\to 3+0}2^{\frac{1}{x-3}}=\left\{2^{\frac{1}{3+0-3}}=2^{\frac{1}{+0}}=2^{\infty}\right\}=\infty.$$

В точке $x=3$ предел справа не существует, и функция терпит бесконечный разрыв.

Исследуем точку $x=5$.

$$f(5-0)=\lim_{x\to 5-0}2^{\frac{1}{x-3}}=\left\{2^{\frac{1}{5-0-3}}\right\}=2^{\frac{1}{2}},$$

$$f(5+0)=\lim_{x\to 5+0} 2^{\frac{1}{x-3}}=\left\{2^{\frac{1}{5+0-3}}\right\}=2^{\frac{1}{2}},\ \ f(5)=2^{\frac{1}{5-3}}=2^{\frac{1}{2}}.$$

Итак, $f(5-0)=f(5+0)=f(5)$ – предел слева равен пределу справа и равен значению функции в точке. Следовательно, $f(x)$ непрерывна при $x=5$. ▼

Пример 10. Исследовать функцию $f(x)$ на непрерывность; найти точки разрыва функции и определить их тип

$$f(x)=\begin{cases} x-2, & \text{если} \quad x\le 0, \\ x^2+1, & \text{если} \quad 0<x<2, \\ 2x+1, & \text{если} \quad x\ge 2. \end{cases}$$

▲ Так как функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;0), (0;2)$ и $(2;\infty)$ (рис. 4), где она задана непрерывными элементарными функциями, то «подозрительными на разрыв» являются те точки, в которых изменяется аналитическое выражение функции, т.е. точки $x=0$ и $x=2$.

Исследуем точку $x=0$.

$f(0-0)=\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\{$ символ $x\to 0-0$ позволяет выбрать нужное аналитическое выражение $f(x)$ из уравнений, ее определяющих$\}=\lim\limits_{x\to 0-0}(x-2)=-2$.

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x^2+1)=1.$$

Односторонние пределы функции в точке $x=0$ существуют, но не равны между собой (нарушено условие 2). Следовательно, эта точка является точкой разрыва первого рода. Скачок $|f(0-0)-f(0+0)|=3$.

Исследуем точку $x=2$.

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x^2+1)=4+1=5,$$

$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(2x+1)=5, \quad f(2)=(2x+1)\big|_{x=2}=5.$$

Односторонние пределы функции при $x\to 2$ равны между собой и равны частному значению функции $f(2-0)=f(2+0)=f(2)$. Следовательно, исследуемая точка $x=2$ является точкой непрерывности.

Односторонние пределы функции при $x\to 2$ равны между собой и равны частному значению функции $f(2-0)=f(2+0)=f(2)$. Следовательно, исследуемая точка $x=2$ является точкой непрерывности. ▼

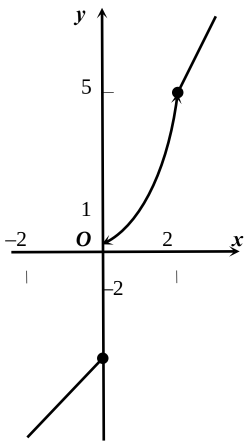


Рис. 4

Пример 11. Найти производную функции $y=\sin(3\operatorname{tg}\ln^3 x)$.

▲ $y'=\cos\left(3\operatorname{tg}\ln^3 x\right)\cdot 3\dfrac{1}{\cos^2\ln^3 x}\cdot 3\ln^2 x\cdot\dfrac{1}{x}$. ▼

> **Порядок дифференцирования обратный порядку вычисления значения функции в точке. Вычисление значения функции начинается справа налево, а дифференцирование наоборот – слева направо.**
>
> **Первой дифференцируется та функция, которая вычислялась бы последней – это самое главное!**

Вопросы для самопроверки

1. Что называется приращением функции $y = f(x)$ в точке x_0?

2. От какого аргумента зависит разностное отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$? Какова область определения функции е $\frac{\Delta y}{\Delta x}$?

3. Дайте определение производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

4. Каков физический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке x_0?

5. Каков геометрический смысл производной функции $y = f(x)$ в точке x_0? Дайте определение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$ и напишите уравнение касательной.

6. Когда говорят, что функция имеет в точке x_0 бесконечную производную? Приведите пример функции, график которой имеет в некоторой точке вертикальную касательную.

7. Что такое односторонние производные функции в точке? Какова связь между односторонними производными и производной функции в точке? Приведите пример функции, у которой существуют односторонние производные в некоторой точке, но не существует производная в этой точке.

8. Выведите формулы для производных суммы, разности, произведения и частного двух функций.

9. Сформулируйте теорему о производной обратной функции. Какова физическая интерпретация формулы для производной обратной функции?

10. Что называется сложной функцией?

11. Как сложную функцию записать в виде цепочки простых функций?

12. Сформулируйте теорему о производной сложной функции. Какова физическая интерпретация формулы для производной сложной функции?

13. Запишите правило дифференцирования сложной функции.

14. Каков порядок дифференцирования сложной функции?

15. В чем состоит метод логарифмического дифференцирования?

16. Что такое параметрическое задание функций?

17. Дайте определение дифференцируемости функции в точке.

18. Сформулируйте теорему о связи между дифференцируемостью функции в точке и существованием в этой точке производной.

19. Что такое дифференциал функции в данной точке? От какого аргумента он зависит?

20. Для каких точек графика функции ее дифференциал больше приращения? Для каких точек он меньше приращения?

21. Для каких функций дифференциал тождественно равен приращению?

22. Каков геометрический смысл дифференциала?

23. Каков физический смысл дифференциала?

24. В чем заключается свойство инвариантности формы дифференциала функции?

25. На чем основано применение дифференциала в приближенных вычислениях?

26. Сформулируйте определения: а) последовательности; б) ограниченной и неограниченной последовательности; в) предела последовательности. Дайте геометрическую интерпретацию этих определений.

27. Какая последовательность называется: а) сходящейся; б) расходящейся?

28. Пусть последовательность сходится. Является ли сходящейся последовательность, которая получается из исходной последовательности, если: а) из нее удалить конечное число членов, а оставшиеся заново перенумеровать в порядке их следования? б) к ней добавить конечное число членов, перенумеровав члены последовательности в порядке их следования? в) в ней изменить произвольным образом конечное число членов?

29. Сформулируйте необходимое условие сходимости последовательности.

30. Что называется числовой осью? Как изображаются на числовой оси области изменения переменной величины?

31. Дайте определение функции. Что называется областью определения функции?

32. Каковы основные способы задания функции?

33. Какая функция называется периодической?

34. Какая функция называется сложной?

35. Какие функции называются элементарными?

36. Как, зная график функции $y = f(x)$, можно построить графики функций $y = f(ax),\ y = f(ax+b),\ y = k\,f(ax+b)+c$?

37. Сформулируйте определение предела функции в точке.

38. Дана функция $f(x) = \frac{|x|}{x}$. Определена ли функция $f(x)$ в точке $x = 0$? Существует ли $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$?

39. Как связано понятие предела функции с понятиями ее пределов слева и справа?

40. Существует ли $f(3+0)$ и $f(3-0)$, если $f(x) = \frac{|3-x|}{3-x}$? Существует ли $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$?

41. При каких условиях из существования односторонних пределов следует существование предела функции.

42. Какая функция называется бесконечно малой, и каковы ее основные свойства?

43. Сформулируйте определение и приведите примеры бесконечно малой функции $\alpha(x)$: а) одного порядка с функцией $\beta(x)$ в точке а; б) эквивалентной функции $\beta(x)$ в точке а; в) более высокого порядка при $x \to a$, чем $\beta(x)$.

44. Что означает символическая запись $\alpha = o(\beta),\ \alpha = O(\beta)$ при $x \to a$?

45. Какая функция называется бесконечно большой и какова её связь с бесконечно малой?

46. Докажите основные теоремы о пределах функций.

47. Что означает такая краткая запись $\forall\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0, |x - x_0| < \delta, \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$?

48. В чем состоит геометрический смысл предела функции?

49. Сформулируйте определение порядка одной бесконечно малой относительно другой бесконечно малой.

50. Покажите, что при $x \to 0$ бесконечно малые $\sin x, \arcsin x, \operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$ попарно эквивалентны.

51. Пусть $x \to 0$. При каком значении a бесконечно малые величины $a\sin^2 x$ и $1-\cos x$ эквивалентны?

52. Перечислите известные вам эквивалентные бм величины.

53. Какие свойства эквивалентных бм величин используются при отыскании пределов?

54. Сформулируйте определения: а) непрерывности функции в точке; б) непрерывности функции справа (слева) в точке.

55. Сформулируйте определение непрерывности: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

56. Аналогично другое определение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

57. Сформулируйте необходимые и достаточные условия непрерывности функции в точке.

58. Какие точки называются точками разрыва функции?

59. Какого типа разрывы существуют и с чем они связаны?

60. Какие операции надо вспомнить, чтобы исследовать точку разрыва?

61. Какие операции, и в какой последовательности надо вспомнить, чтобы, исследуя точку разрыва, построить график функции?

62. Сформулируйте теорему о непрерывности сложной функции.

63. Сформулируйте основные свойства функций, непрерывных на отрезке, и дайте геометрическое истолкование этим свойствам.

64. Для каких функций область непрерывности совпадает с областью определения функции?

65. Сформулируйте правило раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ для $\lim\limits_{x \to a} \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, где $P_n(x), Q_m(x)$ – многочлены.

66. Сформулируйте правило раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$, если нужно найти $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, $f(x), g(x)$ – любые алгебраические функции.

67. Как раскрыть неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$?

68. Что устанавливает первый замечательный предел?

69. Какими пределами можно заменить число е?

70. Как и когда применяется замена переменных при отыскании пределов от тригонометрических функций и пределов, связанных с числом е?

71. Усвоили ли вы, как быстро, в уме найти $\lim\limits_{z \to \pm\infty} \frac{ax+b}{cx+d}$?

2.2. Основные теоретические сведения по теме «Приложения дифференциального исчисления»

Л и т е р а т у р а

[1], гл. X; [2], т. 1, гл. 4, 5; [3], гл. III, § 5; [4], гл. 6; [5], гл. VI, § 2; [6], 6; [8]; [11].

1. Правило Лопиталя. ***Предел отношения двух бесконечно малых или бесконечно больших функций (неопределенность*** $\frac{0}{0}$ ***или*** $\frac{\infty}{\infty}$***) равен пределу отношения их производных***

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \qquad (1)$$

если предел справа существует.

2. Если в некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ или $f(x) > f(x_0)$, то точка x_0 называется ***точкой экстремума*** функции $f(x)$ (соответственно ***точкой максимума*** или ***минимума***).

Необходимое условие экстремума: если x_0 – экстремальная точка функции $f(x)$, то первая производная $f'(x_0)$ либо равна нулю или бесконечности, либо не существует.

Достаточное условие экстремума: x_0 является экстремальной точкой функции $f(x)$, если ее первая производная $f'(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0: с плюса на минус – при максимуме, с минуса на плюс – при минимуме.

3. Точка x_0 называется точкой перегиба кривой $y = f(x)$, если при переходе через точку x_0 меняется направление выпуклости.

Необходимое условие точки перегиба: если x_0 – точка перегиба кривой $y = f(x)$, то вторая производная $f''(x_0)$ либо равна нулю или бесконечности, либо не существует.

Достаточное условие точки перегиба: x_0 является точкой перегиба кривой $y=f(x)$, если при переходе через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак.

4. Прямая линия $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой*** кривой $y=f(x)$, если расстояние от точки $(x;\, f(x))$ кривой до этой прямой стремится к нулю при $x\to\infty$. При этом

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\; b=\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-kx\big), \qquad (2)$$

При значении $k=0$ имеем ***горизонтальную асимптоту***: $y=b$. Если

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\pm\infty \text{ или } \lim_{x\to a+0} f(x)=\pm\infty, \qquad (3)$$

то прямая линия $x=a$ называется ***вертикальной асимптотой.***

5. Общая схема исследования функции и построения ее графика.

I. ***Элементарное исследование:***

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на симметричность (определить четность и нечетность функции) и периодичность;

3) вычислить предельные значения функции в ее граничных точках;

4) выяснить существование асимптот;

5) определить, если это не вызовет особых затруднений, точки пересечения графика функции с координатными осями, найти интервалы знакопостоянства;

6) сделать эскиз графика функции, используя полученные результаты.

II. ***Исследование графика функции по первой производной:***

1) найти решение уравнений $f'(x)=0$ и $f'(x)=\infty$;

2) точки, «подозрительные» на экстремум, исследовать с помощью достаточного условия экстремума, определить вид экстремума;

3) вычислить значения функции в точках экстремума;

4) найти интервалы монотонности функции;

5) нанести на эскиз графика экстремальные точки;

6) уточнить вид графика согласно полученным результатам.

III. ***Исследование графика функции по второй производной:***

1) найти решения уравнений $f''(x)=0$ и $f''(x)=\infty$;

2) точки, «подозрительные» на перегиб, исследовать с помощью достаточного условия;

3) вычислить значения функции в точках перегиба;

4) найти интервалы выпуклости и вогнутости графика функции;

5) нанести на эскиз графика функции точки перегиба;

6) окончательно построить график функции.

Если исследование проведено без ошибок, то результаты всех этапов должны согласовываться друг с другом. Если же согласование отсутствует, необходимо проверить правильность результатов отдельных этапов и исправить найденные ошибки.

График функции лучше всего строить в таком порядке:

1) построить все асимптоты, если они есть;

2) нанести на график характерные точки: точки пересечения с осями координат, точки, в которых есть экстремумы, точки перегиба;

3) построение проводить по интервалам непрерывности с учетом проведенных исследований.

6. При определении наибольших и наименьших значений функции на отрезке необходимо:

1) найти значения функции на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$;

2) определить критические точки первого рода (к.т.I);

3) вычислить значения функции к.т.I $\left(f(x_i),\text{ где } i=1,2,\ldots\right)$;

4) выбрать из величин $f(a),\ f(b),\ f(x_i)\ (i=1,2,\ldots)$ наименьшее значение (m) и наибольшее значение (M) функции.

Пример 1. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = -\frac{x^3}{(x+1)^2}$

При исследовании функции на монотонность и экстремумы (по первой производной y') необходимо:
1) найти область определения функции;
2) найти y';
3) определить к.т.I и пронумеровать их в порядке возрастания;
4) построить таблицу 1.

Таблица 1

x	Интервалы монотонности и к.т.I
y'	Поведение y' на интервалах монотонности и к.т.I
y	Поведение функции на интервалах монотонности и ее значения к.т.I

▲ 1) $-\infty < x < -1; -1 < x < \infty;$ 2) $y' = -\frac{x^2(x+3)}{(x+1)^3}$;

3) $y' = 0$ при $x_1 = -3,\ x_2 = 0;\ y'$ не существует при $x = -1$. Критические точки $x_1 - 3$ и $x_2 = 0$, точка $x = -1$ не является критической, так как она является границей области определения функции.

Таблица 1

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;\infty)$
y'	–	0	+	∞	–	0	–
y	↘	$y_{\min} = \frac{27}{4}$	↗	∞	↘	не т	↘

Знак y' на интервале монотонности определяем по ее знаку в произвольной точке этого интервала. Условимся в дальнейшем возрастание (убывание) функции на интервале обозначать символами ↗ или ↘.

Исследуемая функция, как следует из таблицы 1, имеет минимум в точке $x=-3;\ y(-3)=\frac{27}{4}$. Точки $x=-1$ и $x=0$ не являются точками экстремума, так как в первой точке функция не определена, а в окрестности второй точки первая производная сохраняет знак. ▼

Пример 2. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$.

При исследовании функции на интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба, необходимо:
1) найти область определения функции;
2) найти y', y'';
3) определить критические точки 2-го рода (к.т. II) и пронумеровать их в порядке возрастания;
4) составить таблицу 2.

Таблица 2

x	Интервалы выпуклости, вогнутости и к.т.II
y''	Поведение y'' на интервалах выпуклости, вогнутости и к.т.II
y	Поведение функции на интервалах выпуклости (вогнутости), значения к.т.II

▲ 1) $-\infty<x<-1; -1<x<\infty;$ 2) $y=-\frac{x^3}{(x+1)^2}$, $y''=-\frac{6x}{(x+1)^4}$;

3) $y''=0$ при $x=0, y''$ не существует при $x=-1$; $x=0$ – единственная критическая точка (к.т.II), $x=-1$ области определения функции не принадлежит.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 0)$	0	$(0; \infty)$

y''	$+$	∞	$+$	0	$-$
y	$\cup$	не опр.	$\cup$	$y_{\text{т.п.}}=0$	$\cap$

Знак y'' на интервалах выпуклости и вогнутости определяем по ее знаку в произвольной точке. Точка $(0;0)$ – точка перегиба. Условимся в дальнейшем выпуклость (вогнутость) графика в таблице обозначать символом $\cup$ или $\cap$. ▼

Пример 3. Найти асимптоты графика функции $y=-\dfrac{x^3}{(x+1)^2}$.

▲ Точка $x=-1$ является точкой разрыва функции. Так как

$$\lim_{x\to-1-0}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=+\infty,\ \lim_{x\to-1+0}\frac{-x^3}{(x+1)^2}=+\infty,$$

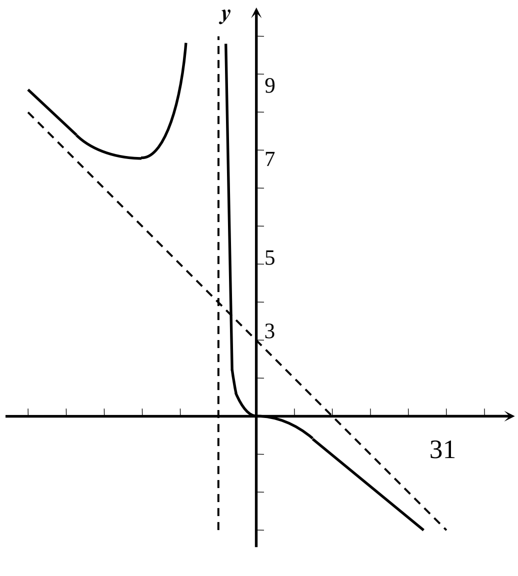
то прямая $x=-1$ служит вертикальной асимптотой графика функции (см. формулы (3)).

Ищем наклонные асимптоты $y_{\text{ас}}=kx+b$, используя формулы (2):

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-x^3}{x(x+1)^2}=-1$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{-x^3}{(x+1)^2}-(-1)x\right)=2.$$

Таким образом, уравнение наклонной асимптоты имеет следующий вид $y_{\text{ас}}=-x+2$.



−6 −4
−2 O 2 4 6 x
−1
−3

Рис. 5. График функции $y = -\frac{x^3}{(x+1)^2}$ (примеры 1-3).

Вопросы для самопроверки

1. Сформулируйте теорему Ролля. Каков ее геометрический смысл?

2. Сформулируйте теорему Лагранжа. Каков ее геометрический смысл?

3. Выведите правило Лопиталя для раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$. Перечислите различные типы неопределенностей, для раскрытия которых может быть использовано правило Лопиталя.

4. Дайте определение второй производной функции $y = f(x)$ в точке x_0

5. Дайте определение n-й производной функции $y = f(x)$ в точке x_0.

6. Запишите формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Когда эту формулу называют формулой Маклорена, и какой вид принимает она в этом случае?

7. Как используется формула Тейлора для вычисления приближенных значений функции с заданной точностью?

8. Дайте определение возрастания (убывания) функции в точке. Каков достаточный признак возрастающей функции?

9. Сформулируйте теорему, выражающую необходимое и достаточное условие монотонности дифференцируемой функции на промежутке.

10. Дайте определение локального экстремума функции.

11. Сформулируйте правила для отыскания экстремумов функции.

12. Сформулируйте теоремы, выражающие достаточные условия экстремума функции.

11. Приведите пример, показывающей, что обращение в некоторой точке производной в нуль не является достаточным условием наличия в этой точке экстремума функции.

12. Как найти наибольшее и наименьшее значения функции, дифференцируемой на отрезке?

13. Сформулируйте определения направления выпуклости и вогнутости графика функции, точки перегиба. Как находятся интервалы направления выпуклости и вогнутости и точки перегиба графика функции?

14. Сформулируйте определения вертикальной и наклонной асимптоты графика функции. Как находятся вертикальные и наклонные асимптоты графика функции?

2.3. Основные теоретические сведения по теме «Интегральное исчисление»

Литература

[1], гл. XII-XIV; [2], т. 1, гл. 10-12; [3], гл. 5, 6; [4], гл. 7, 8; [5], гл. 8, 9; [6], 8, 9; [8].

1. Определение первообразной функции (первообразной) и неопределенного интеграла. Пусть на интервале $(a;\ b)$ задана функция $f(x)$.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на промежутке $(a;\ b)$, если $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a;b)$.

Теорема 1. *Если* $F_1(x)$ *и* $F_2(x)$ *– две любые первообразные для функции* $f(x)$ *на* $(a;\ b)$, *то* $F_1(x) - F_2(x) = C = \mathrm{const}$.

Следствие. Если $F(x)$ – одна из первообразных для функции $f(x)$ на $(a;\ b)$, то любая другая первообразная $\Phi(x)$ для функции $f(x)$ на промежутке $(a;\ b)$ имеет вид $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – некоторая постоянная.

Совокупность всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$ и **обозначается** $\int f(x)dx$.

В силу следствия из теоремы 1

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – одна из первообразных для $f(x)$, C – некоторая постоянная.

2. Основные свойства неопределенного интеграла

1) $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

2) $\int dF(x) = F(x) + C$.

3) Линейность интеграла. Если существуют первообразные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, а c_1 и c_2 – любые вещественные числа, то существует первообразная функция для функции $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, причем

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 \int f_1(x)dx + c_2 \int f_2(x)dx.$$

3. При интегрировании наиболее часто используется следующие методы.

1. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то

$$\int f(ax)dx = \tfrac{1}{a}F(ax) + C, \int f(x+b)dx = F(x+b) + C,$$
$$\int f(ax+b)dx = \tfrac{1}{a}F(ax+b) + C \qquad (1)$$

где a и b – некоторые постоянные.

2. Простейшие приемы интегрирования, основанные на алгебраических преобразованиях подынтегральных функций.

3. ***Подведение под знак дифференциала***

$$\int f(u(x))u'(x)dx = \int f(u(x))d(u(x)), \qquad (2)$$

так как $u'(x)dx = d(u(x))$.

4. Формула ***интегрирования по частям***:

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (3)$$

Обычно выражение dv выбирается так, чтобы его интегрирование не вызывало особых трудностей. За u, как правило, принимается такая функция, дифференцирование которой приводит к ее упрощению. К классам функций, интегрируемых по частям, относятся, в частности, функции вида $P_n(x)\cdot f(x)$:

$$P_n(x)\cdot \mathrm{e}^{ax},\ P_n(x)\cdot \sin ax,\ P_n(x)\cdot \cos ax,\ P_n(x)\cdot \ln x,\ P_n(x)\cdot \arcsin x,\ P_n(x)\cdot \operatorname{arctg} x,$$

где $P_n(x)$ – многочлен от x

Указания

1. Правило выбора частей:

Если $f(x)$ – тригонометрическая или показательная функция, то следует положить $u = P_n(x),\ dv = f(x)dx$.

Если $f(x)$ – логарифмическая или обратная тригонометрическая функция, то $u = f(x),\ dv = P_n(x)dx$.

2. Интегрирование по частям можно применять несколько раз подряд.

3. Интегрирование по частям $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx dx$ и некоторых других интегралов можно привести к линейному уравнению относительно этих интегралов после двукратного применения формулы (3).

5. ***Интегрирование рациональных дробей***, т. е. отношений двух многочленов $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ (соответственно m-й и n-й степени): $R(x) = \frac{Q_m(x)}{P_n(x)}$, сводится к интегрированию правильных дробей. Если $m < n$, то $R(x)$ называется ***правильной дробью***, если $m \geq n$ – ***неправильной дробью***.

Всякую неправильную дробь путем деления числителя на знаменатель можно представить в виде суммы некоторого многочлена и правильной дроби

$$\frac{Q_m(x)}{P_n(x)} = S_{n-m}(x) + \frac{Q_k(x)}{P_n(x)},$$

где $S_{n-m}(x)$, $Q_k(x)$ – многочлены; $\frac{Q_k(x)}{P_{(x)}}$ – правильная дробь $(k < n)$.

Например, $\frac{x^4+4}{x^2+3x-1}$ – неправильная дробь. Разделив ее числитель на знаменатель (по правилу деления многочленов «уголком», см. пример 1 ”Дифференциальное исчисление“), получим $\frac{x^4+4}{x^2+3x-1} = x^2-3x+10+\frac{-33x+14}{x^2+3x-1}$.

Интегрирование правильных дробей сводится к разложению подынтегральной функции $R(x)$ на простейшие, всегда интегрируемые дроби, вида

$$1.\ \frac{A}{x-a};\ 2.\ \frac{A}{(x-a)^k};\ 3.\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ 4.\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}, \qquad (4)$$

где A, a, M, N, p, q – постоянные числа; k – целое положительное число, а трехчлен x^2+px+q не имеет действительных корней.

6. ***Интегрирование методом замены переменной*** (***способ подстановки***) является одним из эффективных приемов интегрирования. Его сущность состоит в переходе от переменной x к новой переменной t: $x = \varphi(t)$.

*При выборе подстановки оправдан был бы выбор по принципу “**что хуже, сложнее − принять за новую переменную** t”.*

Два способа замены переменной

Переменную интегрирования в неопределенном интеграле можно заменить любой непрерывной функцией:

$$\int f(x)dx = \left\{ \begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ dx = \varphi'(t)dt \end{array} \right\} = \int f(\varphi)\varphi'(t)dt. \qquad (5)$$

Формула (5) определяет собой два способа замены переменной. При чтении формулы слева направо получается способ I: $x=\varphi(t),\, dx=\varphi'(t)dt$. Если $\int f(\varphi)\varphi'(t)dt$ будет проще, чем интеграл $\int f(x)dx$, то эта замена переменной целесообразна. При чтении справа налево получается способ II:

$$\int f(\varphi)\varphi'(t)dt=\left\{\begin{matrix}\varphi(t)=x, \\ \varphi'(t)dt=dx\end{matrix}\right\}=\int f(x)dx\,.$$

Если последний интеграл проще первого, то замена переменной целесообразна

Наиболее целесообразная для данного интеграла замена переменной, т. е. выбор функции $\varphi(t)$, не всегда очевидна. Однако для некоторых часто встречающихся классов функций можно указать такие стандартные подстановки, как

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx,\ t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}};\ \int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dx,\ x=a\sin t;$$

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dx,\ x=a\,\mathrm{tg}\,t;\ \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dx,\ x=\frac{a}{\sin t},$$

где R – символ рациональной функции.

4. Вычисление определенного интеграла. Определенный интеграл вычисляется по ***формуле Ньютона-Лейбница***:

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)\,, \tag{6}$$

если $F'(x)=f(x)$ и первообразная функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$.

Определенный интеграл численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной прямыми линиями $x = a,\ x = b$ и частью графика функции $y = f(x)$, взятой со знаком плюс, если $f(x) \ge 0$, и со знаком минус, если $f(x) \le 0$.

Замена переменной в определенном интеграле осуществляется по тем же правилам, что и в неопределенном интеграле, только **нет обратного перехода** к исходной переменной, и **есть новая операция** − замена пределов интегрирования (новые пределы интегрирования вычисляются по старым пределам через замену).

Самое главное при замене переменной не забывать заменять пределы интегрирования.

Интегрирование по частям определенного интеграла. Для интегралов вида $\int_a^b P_n(x) \cdot f(x)dx$, где $P_n(x)$ − многочлен, а $f(x)$ − основная элементарная функция, применяется формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v du\,. \qquad (7)$$

Отличие от аналогичной формулы для неопределенного интеграла только в расстановке пределов.

Вычисление определенных интегралов с симметричными пределами. Если, пределы интегрирования симметричны относительно нуля, то

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \begin{bmatrix} 0, & \text{если } f(-x) = -f(x), \\ 2\int_0^a f(x)dx, & \text{если } f(-x) = f(x). \end{bmatrix} \qquad (8)$$

5. Если интервал интегрирования $[a;\,b]$ не ограничен $(b\to\infty$ или $a\to-\infty)$ или функция $f(x)$ не ограничена в окрестности одного из пределов интегрирования (ппр $x=a,\ x=b,\ x=c\in(a;\,b)$), то по определению полагают

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,\quad \int_{-\infty}^b f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \tag{9}$$

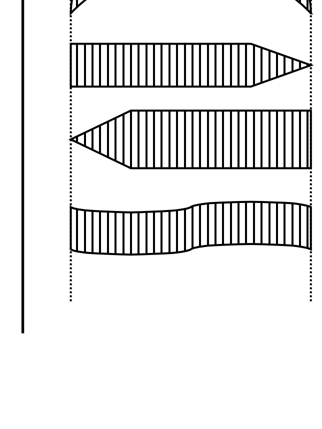
и

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)dx,\quad \int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to+0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to+0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to+0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx. \tag{10}$$

Интегралы в левых частях равенств (9) и (10) называются ***несобственными интегралами***. Несобственный интеграл называется ***сходящимся***, если существует конечный предел в правой части равенств (9) и (10). Если же предел не существует, то несобственный интеграл называется ***расходящимся***.

6. Вычисление площадей плоских фигур. Область называется правильной относительно оси $Oy\,(Ox)$, если любая горизонтальная (вертикальная) прямая пересекает границу области не более чем в двух точках. Если область правильная относительно осей *Ox* и *Oy*, то она просто называется правильной областью. Области на рис. 6 – правильные относительно оси Oy, на рис. 7 – относительно оси Ox.



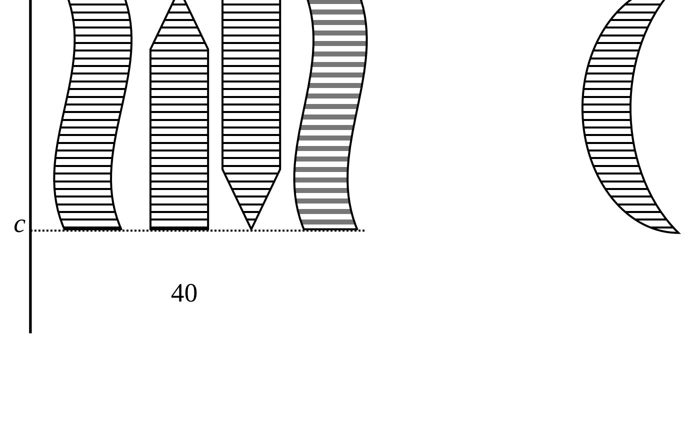


Рис. 6.

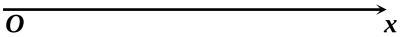


Рис. 7.

Условимся дальше области, правильные относительно оси $Oy(Ox)$, штриховать линиями, параллельными оси $Oy(Ox)$.

1. Если область *G*, правильная относительно оси Oy, проектируется на ось *Ox* в отрезок $[a; b]$, то ее граница разбивается на две линии: нижнюю границу области, задаваемую уравнением $y = f_1(x)$, и верхнюю, задаваемую уравнением $y = f_2(x)$. Тогда область *G* определяется системой неравенств

$$G: \begin{cases} a \le x \le b, \\ f_1(x) \le y \le f_2(x), \end{cases}$$

а площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = f_2(x)$ и $y = f_1(x)$, на отрезке $[a; b]$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx. \qquad (11)$$

Если область *G*, правильная относительно оси *Ox*, проектируется на ось *Oy* в отрезок $[c; d]$, то ее граница разбивается на две линии: левую границу области, задаваемую уравнением $x = g_1(y)$, и правую, задаваемую уравнением $x = g_2(y)$. В этом случае область *G* определяется системой неравенств

$$G: \begin{cases} g_1(y) \le x \le g_2(y), \\ c \le y \le d, \end{cases}$$

а площадь фигуры, заключенной между кривыми $x = g_2(y)$ и $x = g_1(y)$, на отрезке $[c; d]$ вычисляется по формуле

$$S=\int_c^d \left(g_2(y)-g_1(y)\right)dy. \qquad (12)$$

2. Если кривая, ограничивающая криволинейную трапецию, задана параметрическими уравнениями $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$, то площадь криволинейной трапеции

$$S=\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,dt; \qquad (13)$$

где α и β определяются из уравнений $\varphi(\alpha)=a$ и $\varphi(\beta)=b$.

3. В случае, когда непрерывная кривая задана в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, площадь криволинейного сектора OM_1M_2, ограниченного данной кривой и двумя полярными радиусами OM_1 и OM_2, которые соответствуют значениям φ_1 и φ_2 полярного угла, выражается интегралом

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)d\varphi. \qquad (13)$$

7. Вычисление длины дуги

1. Пусть дуга *AB* кривой задана уравнением $y=f(x)$, где $f(x)$ – непрерывно дифференцируемая функция. Тогда длина дуги *AB*

$$l=\int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\,dx. \qquad (14)$$

2. В случае, когда кривая задана параметрическими уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, где $x(t),\ y(t)$ – непрерывно дифференцируемые функции, длина дуги вычисляется по формуле

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,dt\,. \qquad (15)$$

Здесь α, β – значения параметра t, соответствующие концам дуги AB.

3. Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $r=r(\varphi)$, то длина l дуги AB вычисляется по формуле

$$l=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi\,, \qquad (16)$$

где φ_1 и φ_2 соответствуют концам дуги AB.

8. Пусть криволинейная трапеция, ограниченная прямыми линиями $x=a$, $x=b,\ y=0$ и частью графика кривой $y=f(x)$, вращается вокруг оси Ox. Тогда объем полученного при этом тела вращения вычисляется по формуле

$$V=\pi\int_a^b y^2dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx\,. \qquad (17)$$

Пример 1. Найти $\int\frac{dx}{(2x-3)^2}$.

▲ Используя формулы (5.1), имеем

$$\int\frac{dx}{(2x-3)^2}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x-3)}{(2x-3)^2}=\frac{1}{2}\int(2x-3)^{-2}\,d(2x-3)=-\frac{1}{2(2x-3)}+C\,.$$

Проверка. $\left(-\frac{1}{2(2x-3)}+C\right)'=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2x-3}\right)'=-\frac{1}{2}\frac{-2}{(2x-3)^2}=\frac{1}{(2x-3)^2}$. ▼

Пример 2. Найти $\int\frac{dx}{x(1+\ln x)}$.

▲ Применяя (5.2), получим

$$\int \frac{dx}{x(1+\ln x)} = \left\{ \frac{dx}{x} = d(1+\ln x) \right\} = \int \frac{d(1+\ln x)}{1+\ln x} = \ln\left|1+\ln x\right| + C. \ ▼$$

Пример 3. Найти $\int x\cos 2x dx$.

▲ Применяя формулу (5.3), имеем

$$\int x\cos 2x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x, & du = dx, \\ dv = \cos 2x dx, & v = \int \cos 2x dx = 0.5\sin 2x \end{matrix} \right\} =$$

$$= 0.5x\sin 2x - 0.5\int \sin 2x dx = 0.5x\sin 2x - 0.25\int \sin 2x d(2x) =$$

$$= 0.5x\sin 2x + 0.25\cos 2x + C. \ ▼$$

Пример 4. Найти $\int e^{2x}\sin x dx$.

$$▲ \ \int e^{2x}\sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \sin x, & du = \cos x dx, \\ dv = e^{2x}dx, & v = \int e^{2x}dx = 0.5e^{2x} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 0.5e^{2x}\sin x - 0.5\int e^{2x}\cos x dx = \left\{ \begin{matrix} u = \cos x, & du = -\sin x dx, \\ dv = e^{2x}dx, & v = 0.5e^{2x} \end{matrix} \right\} =$$

$$= 0.5e^{2x}\sin x - 0.5\left(0.5e^{2x}\cos x + 0.5\int e^{2x}\sin x dx\right) =$$

$$= 0.5e^{2x}\sin x - 0.25e^{2x}\cos x - 0.25\int e^{2x}\sin x dx.$$

Перенося последний интеграл в левую часть равенства, получим

$$1.25\int e^{2x}\sin x dx = 0.5e^{2x}\sin x - 0.25e^{2x}\cos x + C.$$

Следовательно, $\int e^{2x}\sin x dx = 0.4e^{2x}\sin x - 0.2e^{2x}\cos x + C$. ▼

Пример 5. Найти $\int \frac{3x^2-7x+10}{(x^2+4)(x-2)}dx$.

▲ Рациональная подынтегральная дробь является правильной (см. методы интегрирования 4) и разлагается на простейшие дроби вида (5.4):

$$\frac{3x^2-7x+10}{(x^2+4)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Mx+N}{x^2+4}.$$

Если привести дроби из данного разложения к общему знаменателю, то он совпадает со знаменателем исходной подынтегральной функции. Числители в левой и правой частях последнего равенства будут тождественно равными, т.е.

$$3x^2-7x+10 = A(x^2+4) + (Mx+N)(x-2).$$

Для нахождения неизвестного коэффициента A используем ***метод частных значений***, т. е. подставим вместо переменной x ее частное значение, совпадающее с вещественным корнем знаменателя, $x=2$. Получим равенство $8=8A$, откуда следует, что $A=1$.

Для вычисления значений M, N используем ***метод неопределенных коэффициентов***. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях полученного тождества, получаем систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 3 = A+M, \\ x & -7 = N-2M, \end{array}$$

Решение этой системы: $M=2,\ N=-3$. Таким образом,

$$\int \frac{3x^2-7x+10}{(x^2+4)(x-2)}dx = \int\left(\frac{1}{x-2} + \frac{2x-3}{x^2+4}\right)dx = \int\frac{dx}{x-2} + \int\frac{2xdx}{x^2+4} -$$

$$-3\int\frac{dx}{x^2+4}=\int\frac{d(x-2)}{x-2}+\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}-3\int\frac{dx}{x^2+4}=$$

$$=\ln|x-2|+\ln(x^2+4)-1.5\operatorname{arctg}\tfrac{x}{2}+C\,.\ \blacktriangledown$$

Пример 6. Найти $\int\limits_3^8\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$.

$$\int\limits_3^8\frac{xdx}{\sqrt{1+x}}=\left\{\begin{array}{l}\sqrt{1+x}=t,\ dx=2tdt,\\ x=t^2-1\end{array}\quad\begin{array}{|c|c|c|}x&3&8\\ \hline t&2&3\end{array}\right\}=\int\limits_2^3\frac{(t^2-1)2t}{t}dt=$$

$$=2\int\limits_2^3(t^2-1)dt=2\left(\frac{t^3}{3}-t\right)\Bigg|_2^3=2(9-3)-2\left(\frac{8}{3}-2\right)=\frac{32}{3}.\ \blacktriangle$$

Пример 7. Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость: 1) $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}$; 2) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\sin^2 x}$.

▲ 1) Первый интеграл является несобственным интегралом с бесконечным верхним пределом интегрирования. Согласно определению (5.9), имеем

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+13}=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b\frac{dx}{(x+2)^2+9}=\lim_{b\to+\infty}\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{3}\Bigg|_1^b=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{b+2}{3}-\operatorname{arctg}1\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{12}.$$

2) Второй интеграл является несобственным интегралом от неограниченной функции; функция $f(x)=\frac{1}{\sin^2 x}$ терпит бесконечный разрыв в нижнем пределе при $x=0$. Согласно определению (10) получаем

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{tg} x \Big|_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{tg}\varepsilon = 1.$$

Оба несобственных интеграла сходятся. ▼

Пример 8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x - x^2$ и $y = -x$.

▲ Находим точки пересечения данных кривых:

$$\begin{cases} y = 3x - x^2, \\ y = -x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x = 3x - x^2, \\ y = -x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x-4) = 0, \\ y = -x, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ y_1 = 0, \end{cases} \vee \begin{cases} x_2 = 4, \\ y_2 = -4. \end{cases}$$

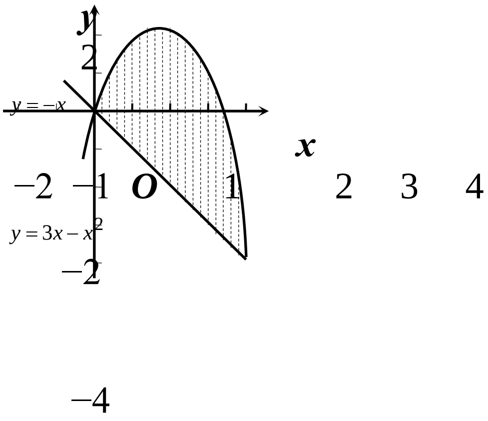


Рис.8

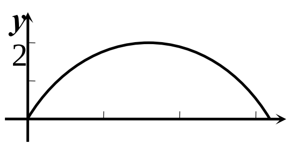
Следовательно, по формуле (5.11) имеем (см. рис. 8) $\begin{cases} 0 \le x \le 4, \\ -x \le y \le 3x - x^2; \end{cases}$

$$S = \int_0^4 \left(3x - x^2 - (-x)\right)dx = \int_0^4 (4x - x^2)dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4 = \frac{32}{3}. \ ▼$$

Пример 9. Вычислить длину одной арки циклоиды

$$x = a(t - \sin t), \ y = a(1 - \cos t).$$

▲ Поскольку все арки циклоиды одинаковы, рассмотрим ее первую арку, вдоль которой параметр *t* изменяется от 0 до 2π (см. рис. 9). Тогда, согласно формуле (5.15), имеем $x'_t = a(1 - \cos t), \ y'_t = a\sin t$,



O 2 4 6 ***x***

Рис. 9

$$l=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt=\int_0^{2\pi}a\sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}dt=$$

$$=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1-\cos t)}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{2\sin^2\tfrac{t}{2}}dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\tfrac{t}{2}dt=-4a\cos\tfrac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8a\ .\ ▼$$

Пример 10. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой $y=\sqrt{4x-x^2},\ y=0,\ x=2\ (0\le x\le 2)$.

▲ Объем полученного тела вращения найдем по формуле (17):

$$V=\pi\int_0^2 y^2dx=\pi\int_0^2(4x-x^2)dx=\pi\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=16\frac{\pi}{3}\ .\ ▼$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение определенного интеграла и укажите его геометрический смысл.
2. Пусть $\int_a^b f(x)dx=0,\ f(x)\ne 0$. Как это истолковать геометрически?
3. Докажите, что $\int_{-a}^{a}\Phi(x^2)dx=2\int_0^a\Phi(x^2)dx$.
4. Перечислите свойства определенного интеграла.
5. Каков геометрический смысл теоремы о среднем для определенного интеграла?
6. Следует ли из интегрируемости суммы интегрируемость слагаемых?
7. Рассмотрите аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух функций.

8. Интегрируема ли сумма двух функций, если одно слагаемое интегрируемо, а другое нет?

9. Рассмотрите аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух функций.

10. Интегрируема ли сумма двух интегрируемых функций?

11. Рассмотрите аналогичные вопросы для разности, произведения и частного двух неинтегрируемых функций.

12. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a;c]$ и неинтегрируема на $[c;b]$. Что можно сказать о ее интегрируемости на $[a;b]$?

13. При каких условиях справедлива формула Ньютона-Лейбница?

2.3.1. Перечислите условия, при выполнении которых справедливы: а) формула замены переменной; б) формула интегрирования по частям.

14. С помощью, каких подстановок вычисляются интегралы, содержащие дробно-линейные иррациональности?

15. Для вычисления, каких типов интегралов удобны тригонометрические подстановки?

16. Для вычисления, каких типов интегралов удобен метод интегрирования по частям?

1. Дайте определение первообразной функции для функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$.

2. Приведите примеры функций, имеющих первообразные.

3. Приведите примеры двух различных первообразных для одной и той же функции $f(x)$.

4. Что называется неопределенным интегралом?

5. Напишите таблицу основных интегралов.

6. Допишите формулы: $\int kf(x)dx = ...,\ \int\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = ...$. Если $\int f(x)dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)dx = ...$. $\int \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx = ...$

7. Каковы простейшие свойства неопределенного интеграла?

8. Найдите $\int (2x-1)^2 dx$ двумя способами: а) непосредственно как интеграл от степенной функции со сложным аргументом; б) раскрыв скобки и проинтегрировав полученную сумму. Покажите, что полученные результаты не противоречат друг другу.

9. В чем состоит прием «прибавить-отнять»?

10. В чем состоит прием «умножить-разделить»?

11. Как выделить целую часть рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ при $n \geq m$?

12. Как интегрировать четные положительные степени синуса или косинуса?

13. Как интегрировать положительные степени тангенса?

14. Какие можно два способа замены переменной?

15. Что значит подвести функцию под знак дифференциала?

16. Какие функции удобно интегрировать по частям?

17. Укажите типы интегралов, вычисление которых целесообразно производить с помощью метода интегрирования по частям.

18. Изложите методы интегрирования простейших рациональных дробей I, II, III и IV типов.

19. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби в случае простых вещественных корней знаменателя.

20. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби в случае простых вещественных кратных корней знаменателя.

21. Изложите правило разложения правильной рациональной дроби на простейшие дроби для случая, когда среди корней знаменателя имеются пары простых комплексно-сопряженных корней.

22. Что такое метод неопределенных коэффициентов при разложении дроби на сумму простейших дробей?

23. Что такое метод частных значений при вычислении неопределенных коэффициентов?

24. На какие простейшие дроби разлагается дробь $\frac{x+2}{(x+1)^2(x^2+x+1)}$?

25. Найдите методом частных значений неопределенные коэффициенты в разложении дроби $\frac{x}{(x+2)(x-3)}$

26. Найдите методом частных значений неопределенные коэффициенты в разложении дроби $\frac{x^2}{(x^2-2)(x^2+3)}$. Указание. Положите $y = x^2$ и затем примените метод частных значений.

27. Какие подстановки рационализируют интеграл от дробно-линейной иррациональности?

28. С помощью, каких тригонометрических подстановок вычисляются интегралы $\int\sqrt{1-x^2}dx, \int\sqrt{x^2-3}dx, \int\sqrt{x^2+3}dx$?

29. Изложите методы нахождения интегралов вида $\int R\left(x;\,(ax+b)^p;\,(ax+b)^q;\,\ldots;\,(ax+b)^r\right)dx$, где $p, q, \ldots, r$ – рациональные числа; R – рациональная функция.

30. Изложите метод нахождения интегралов вида $\int R(\sin x : \cos x)dx$, где R – рациональная функция.

2.4. Основные теоретические сведения по теме «Обыкновенные дифференциальные уравнения»

Литература

[1], гл. XXI, XXII; [2], т. 2, гл. 13; [3], гл. 11, п. 1–3, 5; [4], гл. 15; [5], ч. 2, гл. 4; [6], 11; [8].

1. Основные понятия теории дифференциальных уравнений 1-го порядка

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой аргумент, функцию, ее производные: $F\left(x; y; y'; \ldots; y^{(n)}\right) = 0$.

Порядок дифференциального уравнения равен порядку высшей производной, содержащейся в уравнении. Дифференциальное уравнение первого порядка $F(x; y; y') = 0$.

Решение (интеграл) − явная (неявная) функция $y = y(x)$ $(\Phi(x; y) = 0)$, обращающая дифференциальное уравнение в тождество.

Общим решением (совокупность всех решений) − функция, которая удовлетворяет трем условиям:

1) содержит n произвольных постоянных величин, если n − порядок дифференциального уравнения;

2) при любых значениях произвольных постоянных является решением;

3) при произвольных начальных условиях позволяет решать задачу Коши (по заданным начальным условиям определить частное решение).

Решение уравнения $y' = f(x; y)$ существует в области **X**, где функция $f(x; y)$ непрерывна.

Геометрический смысл основных понятий

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x; y)$ геометрически представляет собой ***поле направлений касательных*** к интегральным кривым.

Общее решение − однопараметрическое семейство интегральных кривых $y = y(x; C)$, где C − параметр.

Решения, получающиеся из общего решения $y = y(x, C)$ при определенном значении произвольной постоянной C, называется ***частными***.

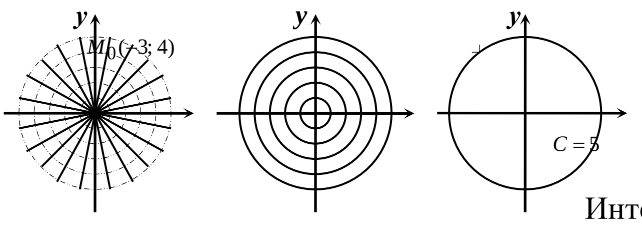
График всякого решения $y = y(x)$ данного дифференциального уравнения, построенный на плоскости xOy, называется ***интегральной кривой*** этого уравнения.

Частное решение уравнения $y' = f(x; y)$ − интегральная кривая $y = y(x; C^{(0)})$, угловые коэффициенты касательных к которой определяются данным дифференциальным уравнением. Задача нахождения частного решения, удовлетворяющего начальным условиям $y = y_0$ при $x = x_0$ (другая запись $y\big|_{x=x_0} = y_0$ или $y(x_0) = y_0$), называется ***задачей Коши***.

Пример. Пусть дано дифференциальное уравнение $y' = -\frac{x}{y}$.

Что есть что?

1) Дифференциальное уравнение 2) Общее решение $y^2 + x^2 = C^2$ 3) Частное решение $y^2 + x^2 = 25$



Интегральная кривая, соответствующая начальному условию $y(-3) = 4$.

Рис. 10.

2. Рассмотрим методы нахождения решений дифференциальных уравнений 1-го порядка. Отметим, что общего метода нахождения решений не существует. Обычно рассматривают типы уравнений, и для каждого из них находят свой способ нахождения решения.

Уравнения с разделяющимися переменными. Уравнение вида

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y), \tag{1}$$

где, $f_1(x)$ и $f_2 y)$ − непрерывные функции, называется дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными.

Для отыскания решения уравнения (1) нужно, как говорят, разделить в нем переменные. Для этого

1) заменим в (6.1) y' на $\frac{dy}{dx}$,

2) умножим обе части уравнения на dx,

3) разделим обе части уравнения $f_2(y)$ $(f_2(y) \neq 0)$.

Тогда уравнение принимает вид

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \tag{2}$$

В этом уравнении переменная x входит только в правую часть уравнения, а переменная y − только в левую часть. Следовательно, ***переменные разделены***. Далее необходимо проинтегрировать уравнение (6.2) и записать общий интеграл (решение).

Однородные дифференциальные уравнения. Функция $f(x, y)$ называется ***однородной функцией измерения*** k относительно аргументов x и y если равенство $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y)$ справедливо для любого числа $\lambda \in \mathbf{R}$, при котором функция $f(\lambda x, \lambda y)$ определена, $k = \text{const}$.

Например, функция $f(x, y) = 3x^4 - x^2y^2 + 5y^4$ является однородной четвертого измерения $(k = 4)$, так как

$$f(\lambda x, \lambda y) = 3(\lambda x)^4 - (\lambda x)^2(\lambda y)^2 + 5(\lambda y)^4 = \lambda^4(3x^4 - x^2y^2 + 5y^4) = \lambda^4 f(x, y).$$

Если $k = 0$, то функция будет однородной нулевого измерения, т.е.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Дифференциальное уравнение в нормальной форме

$$y' = f(x, y) \qquad (3)$$

называется ***однородным*** относительно переменных x и y, если $f(x, y)$ – однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Так как однородное дифференциальное уравнение (1) в нормальной форме всегда можно записать в виде $y' = f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$, то, положив $\lambda = \frac{1}{x}$, получим $y' = \frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$. Следовательно, уравнение (3) с помощью замены $y = xt$ $\left(t = \frac{y}{x}\right)$, $y' = t + xt'$ сводится к уравнению с разделяющимися переменными относительно x и новой функции $t = t(x)$.

Чтобы решить однородное уравнение, нужно
1) ввести подстановку $t = \frac{y}{x}$ или $y = xt, y' = t + xt'$ и упростить полученное уравнение;
2) разделить переменные и проинтегрировать уравнение;
3) результат интегрирования упростить, пропотенцировать, если нужно, и записать общий интеграл, вернувшись к исходной переменной.

Линейные уравнения. Уравнение называется ***линейным***, если функция, а также ее производная входят в него в первой степени (линейно), т.е. уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x). \qquad (4)$$

Если $q(x) = 0$, то уравнение называется ***однородным***; если $q(x) \neq 0$ – ***неоднородным***. Общее решение однородного линейного уравнения получается путем разделения переменных; общее решение неоднородного уравнения получается из общего решения соответствующего однородного уравнения с помощью вариации произвольной постоянной интегрирования *C*.

Данное линейное уравнение можно интегрировать также с помощью замены $y = u(x)\cdot v(x)$, где $u(x), v(x)$ – две неизвестные функции. Для определения *u* и *v* можно составить две идентичные системы. Подставьте $y = u\cdot v$ и $y' = u'v + v'u$ в уравнение (6.4) и убедитесь в этом сами

$$u'v + v'u + p(x)uv = q(x) \nearrow \quad u'v + u(v' + p(x)v) = q(x) \qquad (5)$$

$$\searrow \quad v'u + v(u' + p(x)u) = q(x) \qquad (6)$$

Из уравнений (5) получается одна система, $\begin{cases} v' + p(x)v = 0, \\ u'v = q(x), \end{cases}$ а из (6) − вторая $\begin{cases} u' + p(x)u = 0, \\ v'u = q(x). \end{cases}$

В каждой из систем первое уравнение выбрано произвольно потому, что две неизвестные *u* и *v* нельзя найти из одного уравнения. Пользоваться можно любой системой.

Что необходимо для решения линейных уравнений

Прежде всего, нужно проверить признаки линейного уравнения: y и y' входят в уравнение в первой степени (линейно). Затем следует выполнить следующие операции:

1) Положить $y = u\cdot v$, тогда $y' = u'v + v'u$ и подставить y и y' в уравнение (6.4).

2) Составить систему для определения *u* и *v*. Решить ее (допустим относительно *v*) . При определении *v* не нужно писать произвольную постоянную, ибо $v(x)$ достаточно знать с точностью до постоянной величины.

3) Подставить в уравнение $u'v = q(x)$ величину v и решить полученное уравнение.

4) Записать ответ $y = uv$, используя пункты 2) и 3).

5) Чтобы найти частное решение, нужно начальное условие подставить в общее решение и определить C.

Уравнение Бернулли. Одним из уравнений, сводящимся к линейным уравнениям, является уравнение Бернулли, которое имеет вид

$$y' + p(x)y = q(x) \cdot y^{\alpha}, \tag{7}$$

где α − любое вещественное число, кроме 0 и 1.

Чтобы свести уравнение (7) к линейному уравнению, нужно поделить обе его части на выражение y^{α}: $y^{-\alpha} + p(x)y^{-\alpha+1} = q(x)$. Положить $z = y^{-\alpha+1},\ z' = (-\alpha+1)y^{-\alpha}y'$, тогда $\frac{1}{-\alpha+1}z' + p(x) \cdot z = q(x)$ − линейное уравнение, которое можно решать методом замены переменной или методом вариации, а затем найти y из замены $y^{-\alpha+1} = z$.

3. Дифференциальные уравнения высших порядков, допускающие понижение порядка.

1. Уравнение n-го порядка $y^{(n)} = f(x)$ (**не содержит явно** $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$) решается последовательным интегрированием.

2. Уравнение 2-го порядка $F(x, y', y'') = 0$ (**не содержит явно искомой функции** y) преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y' = z(x)$ (откуда $y'' = z' = \frac{dz}{dx}$).

3. Уравнение 2-го порядка $F(x, y', y'') = 0$ (**не содержит явно аргумента** x) преобразуется в уравнение 1-го порядка посредством подстановки $y' = z(y)$ (откуда $y'' = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = z' \cdot z$).

Что необходимо для решения

уравнений 2-го порядка допускающих понижение порядка

1. Определить тип уравнения.

2. По типу подобрать нужную подстановку.

3. Получить и решить уравнение 1-го порядка.

4. Вернуться к исходной функции. Решить полученное уравнение 1-го порядка.

4. Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид $py'' + qy' + ry = f(x)$, где p, q, r – числа, причем $p \neq 0$. Если $f(x) = 0$, то уравнение называется ***однородным***, а если $f(x) \neq 0$ – ***неоднородным***.

Квадратное уравнение $pk^2 + qk + r = 0$ называется ***характеристическим уравнением*** дифференциального уравнения $py'' + qy' + ry = 0$.

Пусть $D = q^2 - 4pr$ – дискриминант характеристического квадратного уравнения. Возможны следующие случаи зависимости общего решения от корней характеристического уравнения $(k_1; k_2)$:

1. $D > 0$ (корни действительные разные $k_1 \neq k_2$) – общим решением служит функция $y = C_1 \mathrm{e}^{k_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{k_2 x}$;

2. $D = 0$ (корни действительные равные $k_1 = k_2$) – общим решением служит функция $y = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{k_1 x}$;

3. $D < 0$ (корни комплексные $k_{1,2} = a \pm bi$) – общим решением является функция $y = \mathrm{e}^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$.

Что нужно знать для составления общих решений уравнения

$$y'' + py' + qy = 0$$

1) Уметь составить характеристическое уравнение по виду дифференциального уравнения. Для этого нужно формально заменить $y^{(n)}$ $(n = 0, 1, 2)$ любой буквой в степени n: $y = y^{(0)}$ заменить $k^0 = 1$, $y' = y^{(1)}$ заменить $k^1 = k$, $y'' = y^{(2)}$ заменить k^2.

2) Уметь решать квадратное уравнение $k^2 + pk + q = 0$ по формуле

$$k_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

или по теореме Виета $k_1 k_2 = q,\ k_1 + k_2 = -p$.

3) Знать на память вид общего решения в зависимости от k_1 и k_2.

5. Решение неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами основывается на следующей теореме.

Теорема. Если $y_ч$ – некоторое частное решение неоднородного уравнения $py''+qy'+ry=f(x)$ и y_o – общее решение соответствующего однородного уравнения $py''+qy'+ry=0$, то общее решение неоднородного уравнения имеет вид $y=y_o+y_ч$.

Правило нахождения частного решения $(y_ч)$ неоднородного уравнения методом неопределенных коэффициентов.

1. Пусть $f(x)=P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, тогда:

а) $y_ч=Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени n с неопределенными коэффициентами, если $k_1\neq 0$ и $k_2\neq 0$;

б) $y_ч=x\cdot Q_n(x)$, если $k_1=0$ (или $k_2=0$);

в) $y_ч=x^2\cdot Q_n(x)$, если $k_1=k_2=0$.

2. Пусть $f(x)=P_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, тогда:

а) $y_ч=Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, если $\alpha\neq k_1, \alpha\neq k_2$;

б) $y_ч=x\cdot Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, если $\alpha=k_1$ (или $\alpha=k_2$);

в) $y_ч=x^2\cdot Q_n(x)\cdot e^{\alpha x}$, если $\alpha=k_1=k_2$.

3. Пусть $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x+S_n(x)\sin\beta x)$, где $P_n(x)$ и $S_n(x)$ – многочлены, наибольшая степень которых n, тогда:

а) $(y_ч)'=e^{\alpha x}(Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x)$, если $\alpha+\beta i\neq a+bi$;

б) $(y_ч)'=x\cdot e^{\alpha x}(Q_n(x)\cos\beta x+R_n(x)\sin\beta x)$, если $\alpha+\beta i=a+bi$, где $Q_n(x)$ и $R_n(x)$ – многочлены с неопределенными коэффициентами.

Пример 1. Найти общее решение уравнения $xyy'=x^2+y^2$.

▲ Так как функции xy и x^2+y^2 – однородные второго измерения, то данное уравнение – однородное (см. п. 2). Сделаем замену $y=tx,\ y'=t+t'x$. Тогда

$$x\cdot tx(t+t'x)=x^2+(tx)^2,\ tx^2(t+t'x)=x^2(1+t^2).$$

Предполагая, что $x\neq 0$, сокращаем обе части уравнения на x^2. Далее имеем:

$$t^2+tx\tfrac{dt}{dx}=1+t^2,\ \ txdt=dx.$$

Разделяя переменные (для разделения переменных необходимо перенести все, что содержит *t* в одну сторону, а все, что содержит *x* – в другую, при этом dx и dt должны быть только в числителях), последовательно находим:

$$tdt=\frac{dx}{x},\int tdt=\int\frac{dx}{x},\frac{t^2}{2}=\ln|x|+\ln C,\ \ t^2=2\ln|Cx|.$$

В последнее выражение вместо переменной *t* подставим значение $\frac{y}{x}$. Получим общий интеграл $y^2=2x^2\ln|Cx|$. Разрешив его относительно *y*, найдем общее решение исходного дифференциального уравнения: $y=\pm x\sqrt{2\ln|Cx|}$. ▼

Пример 2. Найти общее решение уравнения $xy'-\mathrm{e}^{-x}+xy=0$.

▲ 1. Убедившись, что данное уравнение линейное (см. п. 2), полагаем

$$y(x)=u(x)\cdot v(x)\text{, тогда } y'=u'v+v'u$$

и данное уравнение преобразуется к виду

$$x(u'v+v'u)+xuv=\mathrm{e}^{-x},\ \ xu'v+xu(v'+v)=\mathrm{e}^{-x}.$$

Составим систему для определения u и v: $\begin{cases} v' + v = 0, \\ xu'v = \mathrm{e}^{-x}. \end{cases}$

Решаем первое уравнение системы $\frac{dv}{dx} + v = 0,\ \frac{dv}{v} = -dx,\ \ln|v| = -x,\ v = \mathrm{e}^{-x}$ (при определении v не нужно писать произвольную постоянную величину, ибо $v(x)$ достаточно знать с точностью до постоянной величины). Подставляем во второе уравнение системы $v = e^{-x}$ и решаем полученное уравнение:

$$xu'\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x},\ x\tfrac{du}{dx} = 1,\ du = \tfrac{dx}{x},\ u = \ln|x| + C.$$

Зная u и v, находим искомую функцию y: $y = uv = (C + \ln|x|)\mathrm{e}^{-x}$.

2. Перепишем данное уравнение так: $xy' + xy = \mathrm{e}^{-x}$. Рассмотрим однородное уравнение $xy' + xy = 0 \Rightarrow x(y' + y) = 0$. Так как $x \neq 0$ (значение $x = 0$ не является решением неоднородного уравнения), то

$$y' + y = 0 \Rightarrow \tfrac{dy}{dx} = -y \Rightarrow \ln|y| = -x + \ln C \Rightarrow \ln\tfrac{|y|}{C} = -x \Rightarrow y = C\mathrm{e}^{-x} \;-$$

общее решение однородного уравнения.

Применяем далее метод вариации произвольной постоянной C. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде

$$y = C(x)\mathrm{e}^{-x};\ y' = C'(x)\mathrm{e}^{-x} - C(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Подставив значения y и y' в неоднородное уравнение, получим

$$xC'(x)\mathrm{e}^{-x} - xC(x)\mathrm{e}^{-x} + xC(x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x} \Rightarrow xC(x)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}.$$

Т.к. $\mathrm{e}^{-x} \neq 0$, то $xC'(x) = 1 \Rightarrow x\frac{dC(x)}{dx} = 1 \Rightarrow dC(x) = \frac{dx}{x} \Rightarrow C(x) = \ln|x| + C$.

Подставив это значение $C(x)$ в общее решение неоднородного уравнения, получим $y=(\ln|x|+C)e^{-x}$ – общее решение неоднородного уравнения. ▼

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y''x\ln x=y'$.

▲ В уравнении нет в явном виде искомой функции *y*. Понизим порядок этого уравнения, положив $y'=z(x)$. Тогда $y''=z'$ и исходное уравнение превращается в уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dz}{dx}x\ln x=z\Rightarrow\frac{dz}{z}=\frac{dx}{x\ln x}\Rightarrow\ln|z|=\ln\ln x+\ln C_1\Rightarrow z=C_1\ln x.$$

Т.к. $z=y'=\frac{dy}{dx}$, то последнее уравнение является дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными

$$\tfrac{dy}{dx}=C_1\ln x\Rightarrow dy=C_1\ln xdx\Rightarrow y=C_1\int\ln xdx=$$

$$=\left\{\begin{matrix}u=\ln x, & du=\frac{dx}{x}\\ dv=dx, & v=x\end{matrix}\right\}=C_1\left(x\ln x-\int dx\right)=C_1x(\ln x-1)+C.$$

Получили общее решение исходного уравнения $y=C_1x(\ln x-1)+C_2$. ▼

Пример 4. Найти общее решение уравнения $(y')^2+2yy''=0$.

▲ В уравнении нет в явном виде аргумента *x*. Понизим порядок уравнения подстановкой $y'=z(y)$, тогда $y''=z\frac{dz}{dy}$ и исходное уравнение превращается в уравнение с разделяющимися переменными

$$z^2+2yz\frac{dz}{dy}=0\Rightarrow\frac{dz}{z}=-\frac{dy}{2y}\Rightarrow\ln|z|=-\frac{1}{2}\ln|y|+\ln C_1\Rightarrow z=\frac{C_1}{\sqrt{y}}.$$

Т.к. $z=y'=\frac{dy}{dx}$, то последнее уравнение является дифференциальным уравнением 1-го порядка с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx}=\frac{C_1}{\sqrt{y}} \Rightarrow \sqrt{y}dy = C_1dx \Rightarrow \frac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = C_1x + C_2 \Rightarrow y = (C_1x + C_2)^{\frac{2}{3}}. \ \blacktriangledown$$

Пример 5. Найти общее решение уравнения $y'' + 4y' + 13y = 5\sin 2x$ и частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = \frac{2}{29}$, $y'(0) = \frac{1}{29}$.

▲ Рассмотрим однородное уравнение $y'' + 4y' + 13y = 0$. Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + 4k + 13 = 0$, откуда $k_1 = -2 - 3i$, $k_2 = -2 + 3i$. Следовательно, $y_o = \mathrm{e}^{-3x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$ – общее решение однородного уравнения.

Подберем вид частного решения для данного уравнения.

$$f(x) = 5\sin 2x\text{: } P_n(x) = 0,\ S_n(x) = 5,\ n = 0,\ \alpha = 0,\ \beta = 2,\ \alpha + \beta i \neq k_{1,2},$$
$$Q_0(x) = A,\ R_0(x) = B,\ y_ч = A\cos 2x + B\sin 2x.$$

Подставляя $(y_ч)'$ и $(y_ч)''$ в неоднородное исходное уравнение, получим тождество ($y_ч$ – решение данного уравнения). Для удобства вычислений будем выписывать выражения $y_ч$, $(y_ч)'$, $(y_ч)''$ в отдельные строки и слева за вертикальной чертой помещать коэффициенты, стоящие перед ними в уравнении. Умножая эти выражения на коэффициенты, складывая и приводя подобные члены, имеем:

$$\begin{array}{r|l} 13 & y_ч = A\cos 2x + B\sin 2x, \\ 4 & (y_ч)' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x, \\ 1 & (y_ч)'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x, \end{array}$$

$$(y_ч)'' + 4(y_ч)' + 13y_ч = (13A + 8B - 4A)\cos 2x + (13B - 8A - 4B)\sin 2x \equiv 5\sin 2x.$$

Приравнивая коэффициенты при подобных членах в левой и правой части последнего тождества, находим A, B и $y_ч$:

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & 9A+8B=0, \quad A=-\frac{8}{29} \\ \sin 2x & -8A+9B=5, \quad B=\frac{9}{29} \end{array}$$

Итак, частное решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y_ч = -\tfrac{8}{29}\cos 2x + \tfrac{9}{29}\sin 2x,$$

а общее решение неоднородного уравнения –

$$y = y_о + y_ч = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) - \tfrac{8}{29}\cos 2x + \tfrac{9}{29}\sin 2x.$$

Найдем частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$y(0) = \tfrac{2}{29} \Rightarrow C_1 - \tfrac{8}{29} = \tfrac{2}{29} \Rightarrow C_1 = \tfrac{10}{29};$$
$$y' = -2\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right) + e^{-3x}\left(-3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x\right) + \tfrac{16}{29}\sin 2x + \tfrac{18}{29}\cos 2x;$$
$$y'(0) = \tfrac{1}{29} \Rightarrow -2C_1 + 3C_2 + \tfrac{18}{29} \Rightarrow C_2 = \tfrac{1}{29}.$$

Искомое частное решение таково:

$$y = e^{-2x}\left(\tfrac{10}{29}\cos 3x + \tfrac{1}{29}\sin 3x\right) - \tfrac{8}{29}\cos 2x + \tfrac{9}{29}\sin 2x. \ \blacktriangledown$$

Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение дифференциального уравнения 1-го порядка и его общего и частного решения (интеграла).
2. Сформулируйте задачу Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка и укажите ее геометрический смысл.
3. Дайте геометрическое истолкование дифференциального уравнения 1-го порядка, выясните геометрический смысл общего и частного решений.

4. Сформулируйте теорему о существовании и единственности решения дифференциального уравнения 1-го порядка. Найдите общее решение уравнения $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$ и укажите, где условия этой теоремы не выполняются.

5. Дайте определение уравнения с разделяющимися переменными. Изложите метод нахождения его общего решения.

6. Дайте определение однородного дифференциального уравнения 1-го порядка. Изложите метод нахождения его общего решения.

7. Дайте определение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка. Изложите метод нахождения его общего решения.

8. Дайте определение уравнения Бернулли. Изложите метод нахождения его общего решения.

9. Что называется особым решением дифференциального уравнения 1-го порядка?

10. Какие виды уравнения 2-го порядка допускают понижение порядка?

11. Как понизить порядок уравнения $y^{(n)}=f(x)$?

12. Как понизить порядок уравнения $y''=f(x;y')$?

13. Как понизить порядок уравнения $y''=f(y;y')$?

14. Как решить задачу Коши для уравнений 2-го порядка?

15. Дайте определение линейного дифференциального уравнения n-го порядка (однородного и неоднородного). Докажите основные свойства частных решений линейного однородного дифференциального уравнения.

16. Дайте определение линейно зависимых и линейно независимых функций. Докажите, что для линейно зависимых функций определитель Вронского равен нулю.

17. Сформулируйте теорему об общем решении линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

18. Изложите метод нахождения общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка, если известно одно его частное решение.

19. Выведите формулу для общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае вещественных различных корней характеристического уравнения.

20. Выведите формулу общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае равных вещественных корней характеристического уравнения.

21. Выведите формулу общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных корней характеристического уравнения.

22. Сформулируйте теорему об общем решении линейного неоднородного дифференциального уравнения 2-го порядка.

23. Изложите правило нахождения частного решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $\mathrm{e}^{\alpha x} P_n(x)$, где $P_n(x)$ − многочлен степени $n \geq 0$.

24. Изложите правило нахождения частного решения линейного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами и правой частью вида $\mathrm{e}^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x)$.

25. В чем состоит краевая задача для дифференциального уравнения?

3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа должна быть сделана в отдельной тетради, на обложке которой следует разборчиво написать свою фамилию, инициалы и адрес, название дисциплины и дату отправки работы в университет.

Задачи контрольной работы выбираются согласно тому варианту, который совпадает с первой буквой фамилии студента. Решение задач необходимо проводить в последовательности, указанной в контрольной работе. При этом условие задачи должно быть полностью переписано перед ее решением. Решение задач следует излагать подробно, вычисления располагать в строгом порядке, отделяя вспомогательные вычисления от основных вычислений.

В прорецензированной зачтенной работе студент должен исправить отмеченные рецензентом ошибки и учесть его рекомендации и советы. Если же работа не зачтена, то ее выполняют еще раз и отправляют на повторную рецензию. Зачтенная контрольная работа предъявляется студентом перед сдачей зачета или экзамена.

Контрольная работа 1
Дифференциальное исчисление

I. Найти пределы функций, не пользуясь правилом Лопиталя.

А. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x}{3x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{5x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$.

П. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+3x^2-2}{x^3-x-6}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{6x+1}-5}{\sqrt{x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin 3x}{\cos x-\cos^3 x}$;

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)\ln\dfrac{3-2x}{4-2x}$.

Б. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{2x^3+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{2x-5}-3}{x-7}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x}$.

Р. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x+2}{2x^4+3x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x-1}-\sqrt{2}}{\sqrt{2x+3}-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x\,\mathrm{tg}\,3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(2x-3)^{\frac{x}{x-2}}$.

В. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x^2-5}{x^3+x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos 2x}}{|x|}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x}\right)^{2x}$.

С. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^5-4x^3+8}{2x^5-3x^3-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{\sqrt{2x-2}-4}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(2-3x)\ln\dfrac{1-3x}{2-3x}$.

Г. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x^2-6}{2x^4-x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\mathrm{arctg}\,x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

Т. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4-4x^2+2}{6x^4+2x^2-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}(3-2x)^{\frac{2x}{x-1}}$.

Д. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+6x-5}{5x^2-x-1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^3 x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\big(\ln(x+1)-\ln x\big)$.

У. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2+3x^2-x^5}{2x+3x^2-3x^5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{3+x}}{5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin 2x\,\mathrm{ctg}^2\,x$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(3x+2)\ln\dfrac{x+3}{x+4}$.

Е. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{x^4-12x+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\dfrac{\operatorname{ctg}2x}{\sin 3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x+1)\ln\dfrac{x+3}{x}$.

Ф. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^5+7x^2-4}{6x^5-3x^2+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-4}{\sqrt{5x+5}-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x\operatorname{tg}2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^{x-4}$.

Ж. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-2x^2+5x^4}{2+3x^2+x^4}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{1-\cos 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-5)\ln\dfrac{x-3}{x}$.

Х. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4}{3x^2-3x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x+8}\right)^{-3x}$.

З. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+1}{3x^2+x-5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}(7-6x)^{\frac{x}{3x-3}}$.

Ц. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x^2-x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x-\sin x}{5x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -3}(7+2x)^{-\frac{4}{x+3}}$.

И. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4-2x^2+2}{x^4+3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2x\operatorname{tg}2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{2x}{x^2-4}}$.

Ч. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+7x}{2x^3-x^2+5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^{2x-3}$.

К. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^5-3x^2+9}{2x^5+2x^2+5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}5x\operatorname{ctg}3x$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}(3x-8)^{\frac{2}{x-3}}$.

Ш. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^4-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{2\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}(10-3x)^{\frac{1}{9-3x}}$.

Л. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-x^2+x}{x^5-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-2}{x^2-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{arctg}3x}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+2)\ln\dfrac{2x-3}{2x+1}$.

Щ. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-2x^2+4x}{2x^3+5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{2x+7}-5}{3-\sqrt{x}}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{3x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to -2}(5+2x)^{\frac{1}{x+2}}$.

М. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-2x+7}{3x^3-5x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-2}-2}{\sqrt{x+1}-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{tg}3x\operatorname{ctg}^2 2x$;

4) $\lim\limits_{x\to 3}(2x-5)^{\frac{2x}{x-3}}$.

Э. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+10x+3}{2x^2+5x-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+5}{2x+1}\right)^{5x}$.

Н. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+2x+1}{x^4-x^3+2x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^3-8}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$;

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}(x+3)\ln\dfrac{x+1}{x-2}$.

Ю. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-3x^4+x^2+x}{x^4+3x-2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^3+x^2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^2}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$.

О. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5+6x-5}{x^5+2x^2-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -1}(4+3x)^{\frac{3}{x+1}}$.

Я. 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^2+3x+1}{3x^2+x-5}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$;

4) $\lim\limits_{x\to -4}(9+2x)^{\frac{1}{2x+8}}$.

II. Задана функция $y=f(x)$. Найти точки разрыва функции, если они существуют. Сделать чертеж.

А. $f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1; \\ x^2+2, & -1\le x<1; \\ 2x, & x\ge 1. \end{cases}$

П. $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{2}x, & x\le 0; \\ \cos x, & 0<x\le \frac{\pi}{2}; \\ x-\frac{\pi}{2}, & x>\frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Б. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\le -1; \\ x^2+1, & -1<x\le 1; \\ -x+3, & x>1. \end{cases}$

Р. $f(x)=\begin{cases} x^2, & x\le 0; \\ x, & 0<x\le 2; \\ 1, & x>2. \end{cases}$

В. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ -(x-1)^2, & 0<x<2; \\ x-3, & x\ge 2. \end{cases}$

С. $f(x)=\begin{cases} \sqrt{-x}, & x\le 0; \\ 2, & 0<x\le 2; \\ x, & x>2. \end{cases}$

Г. $f(x)=\begin{cases} \cos x, & x\le 0; \\ x^2+1, & 0<x<1; \\ x, & x\ge 1. \end{cases}$

Т. $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 0; \\ (x+1)^2, & 0<x\le 2; \\ -x+4, & x>2. \end{cases}$

Д. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ x^2, & 0<x\le 2; \\ x+1, & x>2. \end{cases}$

У. $f(x)=\begin{cases} -2(x+1), & x\le -1; \\ (x+1)^3, & -1<x<0; \\ x, & x\ge 0. \end{cases}$

Е. $f(x)=\begin{cases} -x, & x\le 0; \\ \sin x, & 0<x\le \pi; \\ x-2, & x>\pi. \end{cases}$

Ф. $f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\le 1; \\ 2x, & 1<x\le 3; \\ x+2, & x>3. \end{cases}$

Ж. $f(x)=\begin{cases}-(x+1), & x\le -1;\\ (x+1)^2, & -1<x\le 0;\\ x, & x>0.\end{cases}$ **Х.** $f(x)=\begin{cases}x-3, & x<0;\\ x+1, & 0\le x\le 4;\\ 3+x, & x>4.\end{cases}$

З. $f(x)=\begin{cases}-x^2, & x\le 0;\\ \operatorname{tg} x, & 0<x\le \frac{\pi}{4};\\ 2, & x>\frac{\pi}{4}.\end{cases}$ **Ц.** $f(x)=\begin{cases}2x^2, & x\le 0;\\ x, & 0<x\le 1;\\ 2+x, & x>1.\end{cases}$

И. $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ x^2+1, & 0<x\le 1;\\ 2, & x>1.\end{cases}$ **Ч.** $f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0;\\ x, & 0\le x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$

К. $f(x)=\begin{cases}-2x, & x\le 0;\\ \sqrt{x}, & 0<x<4;\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$ **Ш.** $f(x)=\begin{cases}\cos x, & x\le \frac{\pi}{2};\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi;\\ 2, & x\ge \pi.\end{cases}$

Л. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x\le 2;\\ \frac{1}{2}x, & x>2.\end{cases}$ **Щ.** $f(x)=\begin{cases}x-1, & x\le 0;\\ x^2, & 0<x<2;\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$

М. $f(x)=\begin{cases}-x, & x\le 0;\\ \operatorname{tg} x, & 0<x<\frac{\pi}{4};\\ 2, & x\ge \frac{\pi}{4}.\end{cases}$ **Э.** $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0;\\ x^2-1, & 0\le x<1;\\ -x, & x\ge 1.\end{cases}$

Н. $f(x)=\begin{cases}x+1, & x<0;\\ x^2+1, & 0\le x<1;\\ 1, & x\ge 1.\end{cases}$ **Ю.** $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0;\\ 1, & 0<x\le 2;\\ x^2-2, & x>2.\end{cases}$

О. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, & x<0;\\ 1-x, & 0\le x\le 2;\\ 2, & x>2.\end{cases}$ **Я.** $f(x)=\begin{cases}x+3, & x\le 0;\\ 1, & 0<x\le 2;\\ x^2-2, & x>2.\end{cases}$

III. Найти производные первого порядка данных функций.

А. 1) $y = 2\sqrt{4x+3} - \dfrac{3}{\sqrt{x^3+x+3}}$;

2) $y = \left(e^{\cos x}+3\right)^2$;

3) $y = \ln\sin(2x+5)$;

4) $y = \left(\ln(8x+3)\right)^{\mathrm{tg}\,5x}$;

5) $\mathrm{tg}\dfrac{y}{x} = 5x$.

П. 1) $y = \sqrt{x+\sqrt[3]{x}}$;

2) $y = e^{\mathrm{tg}\,x}\cos x$;

3) $y = 2^{\arcsin 3x}$;

4) $y = (\cos x)^{\mathrm{tg}\,x}$;

5) $\mathrm{tg}(x+2y) - 3x + y = 0$.

Б. 1) $y = \dfrac{4\sin x}{\cos^2 x}$;

2) $y = x^2\sqrt{1-x^2}$;

3) $y = \mathrm{arctg}\, e^{2x}$;

4) $y = x^{\frac{1}{x}}$;

5) $x - y + \mathrm{arctg}\, y = 0$.

Р. 1) $y = \sqrt{x^2+1} + \sqrt[3]{x^3+1}$;

2) $y = \arcsin \mathrm{tg}\, x$;

3) $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right)$;

4) $y = (\cos 3x)^x$;

5) $\ln(x+y) - \mathrm{arctg}\dfrac{x}{y} = 0$.

В. 1) $y = x\sqrt{\dfrac{1+x^2}{1-x}}$;

2) $y = \dfrac{1}{\mathrm{tg}^2\, 2x}$;

3) $y = \arcsin\sqrt{1-3x}$;

4) $y = x^{\ln x}$;

5) $y\sin x = \cos(x-y)$.

С. 1) $y = \sqrt{\dfrac{x+\sqrt{x}}{x-\sqrt{x}}}$;

2) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

3) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

4) $y = (\sin 3x)^x$;

5) $\ln\dfrac{x}{y} - x + 2y = 0$.

Г. 1) $y=\dfrac{3+6x}{\sqrt{3-4x+5x^2}}$;

2) $y=\sin x-x\cos x$;

3) $y=x^m\ln x$;

4) $x^{\lg x}$;

5) $\dfrac{y}{x}=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

Т. 1) $y=\left(1+\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\right)^2$;

2) $y=\dfrac{\sin x}{1+\operatorname{tg} x}$;

3) $y=\operatorname{arctg} e^{3x}$;

4) $y=x^{\sqrt{x+1}}$;

5) $\operatorname{arctg}(x+y)-x-2y=0$.

Д. 1) $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

2) $y=\dfrac{\sin^2 x}{2+3\cos^2 x}$;

3) $y=\dfrac{x\ln x}{x-1}$;

4) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\ln x}$;

5) $(e^x-1)(e^y-1)-1=0$.

У. 1) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^3+1}{3x-2}}$;

2) $y=\dfrac{e^x}{\cos x}$;

3) $y=\operatorname{arccostg} x$;

4) $y=(\operatorname{tg} 2x)^{\sin x}$;

5) $\sin(2x+y)+2x-3y=0$.

Е. 1) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}+5\sqrt[3]{x^3+1}$;

2) $y=2\operatorname{tg}^3(x^2+1)$;

3) $y=3^{\operatorname{arctg} x^3}$;

4) $y=(\operatorname{arctg} x)^x$;

5) $y^2x=y^{\frac{y}{x}}$.

Ф. 1) $y=\sqrt[3]{3x^4+2x-5}+\dfrac{4}{(x-2)^5}$;

2) $y=\sin^3 2x\cos 8x^5$;

3) $y=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$;

4) $y=\left(\cos(x+2)\right)^{\ln x}$;

5) $\ln y-\dfrac{y}{x}=7$.

Ж. 1) $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^2}{1-x^2}}$;

2) $y=0.5\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos x$;

3) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$;

4) $y=(x+x^2)^x$;

Х. 1) $y=\sqrt[3]{(x-3)^4}-\dfrac{3}{2x^3-3x+1}$;

2) $y=\cos^5 3x\operatorname{tg}(4x+1)^3$;

3) $y=\ln^2(x+\cos x)$;

4) $y=(\sin 3x)^{\arccos x}$;

5) $x^3+y^3-3axy=0$.

5) $xy=\operatorname{ctg} y$.

З. 1) $y=3\sqrt[3]{x^5+5x^4-\frac{5}{x}}$;

2) $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$;

3) $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x)$;

4) $y=(\sin x)^{\ln x}$;

5) $x-y+a\sin y=0$.

Ц. 1) $y=\frac{2x^2-x-1}{3\sqrt{2+4x}}$;

2) $y=\operatorname{arcctg}^2 5x\ln(x-4)$;

3) $y=\ln^3(1+\cos x)$;

4) $y=\left(\sqrt{3x+2}\right)^{\operatorname{arcctg}3x}$;

5) $4\sin^2(x+y)=x$.

И. 1) $y=5\sqrt[5]{x^5+x+\frac{1}{x}}$;

2) $y=2^x\mathrm{e}^{-x}$;

3) $y=\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$;

4) $y=(\cos x)^x$;

5) $\ln y=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

Ч. 1) $y=\sqrt[5]{7x^2-3x+5}-\frac{5}{(x-1)^3}$;

2) $y=\operatorname{arctg}^3 2x\ln(x+5)$;

3) $y=\ln^3(1+\cos x)$;

4) $y=\left(\sqrt{x+5}\right)^{\arccos 3x}$;

5) $xy-6=\cos y$.

К. 1) $y=\sqrt{x^2+1}+\sqrt[3]{x^3+1}$;

2) $y=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg}x+x$;

3) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3-x}{x-2}}$;

4) $y=(\cos x)^{x^2}$;

5) $x-y+\mathrm{e}^y\operatorname{arctg}x=0$.

Ш. 1) $y=\frac{4+3x^3}{x\sqrt[3]{2+x^3}}$;

2) $y=\operatorname{tg}^3 2x\arcsin x^5$;

3) $y=\ln\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}$;

4) $y=(\sin 4x)^{\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}$;

5) $\sin y=xy^2+5$.

Л. 1) $y=\sqrt[5]{x+\sqrt{x}}$;

2) $y=\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}$;

Щ. 1) $y=\sqrt{3x^4-2x^3+x}-\frac{4}{(x+2)^3}$;

2) $y=\operatorname{ctg}^7 x\arccos 2x^8$;

3) $y=5^{\operatorname{arctg}^2 x}$;

4) $y=x^{\frac{2}{\ln^2 x}}$;

5) $e^{x+y}-xy$.

3) $y=\ln\sin\dfrac{2x+4}{x+1}$;

4) $y=\left(\operatorname{tg}3x^4\right)^{\sqrt{x+3}}$;

5) $\sin^2(3x+y^2)=5$.

М. 1) $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x^3+3x+1}}-2\sqrt{6x+5}$;

2) $y=\cos 2x\sin^2 x$;

3) $y=\ln\operatorname{arctg}x$;

4) $y=(\operatorname{arctg}7x)^{\ln(x+1)}$;

5) $e^{xy}-(x+3y)=0$.

Э. 1) $y=3\dfrac{\sqrt[3]{x^2+x+1}}{x+1}$;

2) $y=2^{\cos x}\operatorname{arcctg}5x^3$;

3) $y=\ln\cos\dfrac{2x+3}{2x+1}$;

4) $y=(\arccos x)^{\sqrt{\cos x}}$;

5) $y^2+x^2=\sin y$.

Н. 1) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x^3}}$;

2) $y=\sin^3 5x\cos^5 3x$;

3) $y=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

4) $y=\left(\ln(7x+4)\right)^{\operatorname{tg}x}$;

5) $y\sin(x+y)-x=0$.

Ю. 1) $y=\sqrt[5]{(x+4)^6}-\dfrac{2}{2x^2-3x+7}$;

2) $y=4^{-x}\ln^5(x+2)$;

3) $y=\operatorname{arctg}(e^x-e^{-x})$;

4) $y=\left(\ln(7x-5)\right)^{\operatorname{arctg}2x}$;

5) $e^y=4x-7y$.

О. 1) $y=x\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

2) $y=e^{\cos^2 9x}$;

3) $y=\ln\arcsin x$;

4) $y=\left(\sqrt{x+5}\right)^{\arccos x}$;

5) $\operatorname{tg}(x+y)-xy=0$;

Я. 1) $y=\dfrac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}}$;

2) $y=3^{\operatorname{tg}x}\arcsin 7x^4$;

3) $y=x(\cos\ln x+\sin\ln x)$;

4) $y=\left(\operatorname{ctg}(7x+4)\right)^{\sqrt{x+3}}$;

5) $3y=7+xy^3$.

IV. Найти $\frac{dy}{dx}$ и $\frac{d^2y}{dx^2}$ для заданных функций: 1) $y=f(x)$;

2) $x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$.

Таблица 1

	$f(x)$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$		$f(x)$	$\varphi(t)$	$\psi(t)$
А	$\frac{x}{x^2-1}$	$\cos\frac{t}{2}$	$t-\sin t$	**П**	$x\mathrm{e}^{-x}$	$4t+2t^3$	$5t^3-3t^2$
Б	$\ln\mathrm{ctg}\,2x$	t^3+8t	t^5+2t	**Р**	$x\cos x^2$	$2t^3+t$	$\ln t$
В	$x^3\ln x$	$t-\sin t$	$1-\cos t$	**С**	$\frac{\ln x}{x^2}$	e^{-2t}	e^{4t}
Г	$x\,\mathrm{arctg}\,x$	e^{2t}	$\cos t$	**Т**	$\frac{\ln(x-1)}{\sqrt{x-1}}$	$\mathrm{e}^t\cos t$	$\mathrm{e}^t\sin t$
Д	$\mathrm{arctg}\,x$	$3\cos^2 t$	$2\sin^3 t$	**У**	$x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$	$\mathrm{ctg}\,t$	$\frac{1}{\cos^2 t}$
Е	$\mathrm{e}^{\mathrm{ctg}\,3x}$	$3\cos t$	$4\sin^2 t$	**Ф**	$x^2\sin 5x$	t^4	$\ln t$
Ж	$\mathrm{e}^x\cos x$	$3t-t^3$	$3t^2$	**Х**	$x^3\mathrm{e}^{4x+3}$	$\sqrt{1-t^2}$	$\frac{1}{t}$
З	$\mathrm{e}^{-x}\sin x$	$2t-t^3$	$2t^2$	**Ц**	$5x\ln^2 x$	$t+\sin t$	$2-\cos t$
И	$x\sqrt{1+x^2}$	$6\cos^3 t$	$2\sin^3 t$	**Ч**	$5x2^{-x}$	$\mathrm{e}^t\cos t$	$\mathrm{e}^t\sin t$
К	$x\mathrm{e}^{-x^2}$	$\frac{\ln t}{t}$	$t\ln t$	**Ш**	$\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sin 2x$	$5\cos t$	$4\sin t$
Л	$x\cos x^2$	$2t-t^2$	$3t-t^3$	**Щ**	$\frac{\ln x}{x^3}$	$\sin 2t$	$\cos^2 t$
М	$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$	$2\cos^2 t$	$3\sin^2 t$	**Э**	$\frac{\sin 2x}{x}$	e^{-3t}	e^{8t}
Н	$\frac{\ln x}{x}$	$2\cos^3 t$	$4\sin^3 t$	**Ю**	$3x3^{-x}$	$t\mathrm{e}^t$	$\frac{t}{e^t}$
О	$x^2\ln x$	$\sqrt{t}$	$\sqrt[5]{t}$	**Я**	$x^3\cos x$	$6t^2-4$	$3t^5$

Контрольная работа 2
Приложения дифференциального исчисления

I. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Таблица 2

	$f(x)$	$[a;b]$		$f(x)$	$[a;b]$
А	$x^3-12x+7$	$[0;3]$	**П**	$x^2+\frac{16}{x}-16$	$[1;4]$
Б	$x^5-\frac{5x^3}{2}+2$	$[0;2]$	**Р**	$4-x-\frac{4}{x^2}$	$[1;4]$
В	$\frac{\sqrt{3}X}{2}+\cos x$	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	**С**	$2\sqrt{x}-x$	$[0;4]$
Г	$3x^4-16x^3+2$	$[-3;1]$	**Т**	$x-4\sqrt{x}+5$	$[1;9]$
Д	x^3-3x+1	$[0.5;2]$	**У**	$\frac{10x}{1+x^2}$	$[0;3]$
Е	x^4+4x	$[-2;2]$	**Ф**	$2x^2+\frac{108}{x}-59$	$[2;4]$
Ж	$\frac{\sqrt{3}x}{2}-\sin x$	$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$	**Х**	$\frac{x^2}{2}+\frac{8}{x}+8$	$[-4;-1]$
З	$81x-x^4$	$[-1;4]$	**Ц**	$8x+\frac{4}{x^2}-15$	$[0.5;2]$
И	$3-2x^2$	$[-1;3]$	**Ч**	$\frac{4}{x^2}-8x-15$	$[-2;-0.5]$
К	$x-\sin x$	$[-\pi;\pi]$	**Ш**	$x-4\sqrt{x+2}+8$	$[-1;7]$
Л	$\frac{x-3}{x^2+7}$	$[2;8]$	**Щ**	$\frac{4x}{4+x^2}$	2$[-4;2]$
М	$\frac{x}{2}+\cos x$	$\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$	**Э**	$3-x-\frac{4}{(x+2)^2}$	$[-1;2]$
Н	$\frac{x-2}{x^2+5}$	$[2;8]$	**Ю**	$\frac{2x-1}{(x-1)^2}$	$[-0.5;0]$
О	$\frac{x}{2}-\sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$	**Я**	$\frac{3x}{x^2+1}$	$[0;5]$

II. Исследовать методами дифференциального исчисления функцию $y = f(x)$ и, используя результаты исследования, построить ее график.

Таблица 3

	$f(x)$	$f(x)$		$f(x)$	$f(x)$
А	$\frac{4x}{4+x^2}$	$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	**П**	$\frac{1}{x^2+x}$	$(x+4)e^{2x}$
Б	$\frac{x^2-1}{x^2+1}$	$x e^{-x^2}$	**Р**	$\frac{x^2-1}{x^2+2}$	$\frac{e^{2-x}}{2-x}$
В	$\frac{x^2+1}{x^2-1}$	e^{2x-x^2}	**С**	$\frac{1-2x}{x^2-x-2}$	$x e^{2x-1}$
Г	$\frac{x^2}{x-1}$	$x^2-2\ln x$	**Т**	$\frac{4x^3+5}{x}$	$\ln\frac{x-1}{x-2}$
Д	$\frac{x^3}{x^2+1}$	$\ln(x^2-4)$	**У**	$\frac{x^2-2x+2}{x-1}$	$x+\frac{\ln x}{x}$
Е	$\frac{4x^3+5}{x}$	$e^{\frac{1}{2-x}}$	**Ф**	$\frac{x+1}{(x-1)^2}$	$\frac{e^{3-x}}{3-x}$
Ж	$\frac{x^2-5}{x-3}$	$\ln(x^2+1)$	**Х**	$\frac{x}{9-x}$	$x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$
З	$\frac{x^4}{x^3-1}$	$\frac{4e^{x^2}-1}{e^{x^2}}$	**Ц**	$\frac{4x-x^2-4}{x}$	$-\ln\frac{1+x}{1-x}$
И	$\frac{4x^3}{x^3-1}$	$\ln(9-x^2)$	**Ч**	$\frac{x^2}{4x^2-1}$	$x\ln x$
К	$\frac{2-4x^2}{1-4x^2}$	$\frac{\ln x}{x}$	**Ш**	$\frac{x^3}{x^2-x+1}$	$x\ln^2 x$
Л	$\frac{2(x+1)^2}{x-2}$	$(x-2)e^{3-x}$	**Щ**	$\frac{x^2-x-1}{x^2-2x}$	$x e^{\frac{1}{x}}$
М	$\frac{1-x^2}{(x-2)^2}$	$\ln(1+x^2)$	**Э**	$\frac{(x-2)^2}{x+1}$	$\frac{e^{2x+2}}{2x+2}$
Н	$\frac{x^3-8}{2x^2}$	$x^2 e^{-x}$	**Ю**	$\frac{x^2+6}{x^2+1}$	$(x+2)e^{1-x}$
О	$\left(\frac{x-1}{x}\right)^2$	$\ln\frac{x}{x-1}$	**Я**	$\frac{4-x^3}{x^2}$	$\frac{e^{-x-2}}{x+2}$

Контрольная работа 3
Интегральное исчисление

I. Найти неопределенные интегралы. В п. 1) и 2) результаты проверить дифференцированием.

А. 1) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x dx$;

2) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}dx$;

3) $\int \frac{dx}{x^3+8}$;

4) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

П. 1) $\int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x}dx$;

2) $\int x^3 e^{-x^2} dx$;

3) $\int \frac{xdx}{x^3+x^2+2x+2}$;

4) $\int \frac{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$.

Б. 1) $\int \frac{xdx}{(x^2+4)^6}$;

2) $\int e^x \ln(1+3e^x)dx$;

3) $\int \frac{2x^2-3x+1}{x^3+1}dx$;

4) $\int \frac{dx}{\sin x+\operatorname{tg} x}$.

Р. 1) $\int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

2) $\int \sqrt{x}\ln^2 xdx$;

3) $\int \frac{x^3+2}{x^4+3x^2}dx$;

4) $\int \frac{(\sqrt[3]{x}+1)(\sqrt{x}+1)}{\sqrt[6]{x^5}}dx$.

В. 1) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$;

2) $\int x\cdot 3^x dx$;

3) $\int \frac{(3x-7)dx}{x^3+4x^2+4x+16}$;

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}+\sqrt[3]{(x+3)^2}}$.

С. 1) $\int \frac{\sin 2xdx}{3\sin^2 x+4}$;

2) $\int x^2\cos 6xdx$;

3) $\int \frac{2x^2-x-1}{x^3-x^2-6x}dx$;

4) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$.

Г. 1) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg} x+1)}$;

Т. 1) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-e^x}}$;

2) $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;   2) $\int \frac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;

3) $\int \frac{dx}{x^3+x^2+2x+2}$;   3) $\int \frac{x^4+2x-2}{x^4-1} dx$;

4) $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx$.   4) $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx$.

Д. 1) $\int \frac{\cos 3x dx}{4+\sin 3x}$;   **У.** 1) $\int x\sqrt{3-x^2} dx$;

2) $\int x^2 e^{3x} dx$;   2) $\int e^{3x} \sin x dx$;

3) $\int \frac{x^2 dx}{x^3+5x^2+8x+4}$;   3) $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} dx$;

4) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$.   4) $\int \frac{\sqrt{x-1} dx}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}}$.

Е. 1) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}$;   **Ф.** 1) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;

2) $\int x \arcsin \frac{1}{x} dx$;   2) $\int (5x-2)\ln x dx$;

3) $\int \frac{(x+3)dx}{x^3+x^2-2x}$;   3) $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8} dx$;

4) $\int \frac{(\sqrt[4]{x}+1)dx}{(\sqrt{x}+4)\sqrt[4]{x^3}}$.   4) $\int \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[6]{x}} dx$.

Ж. 1) $\int \frac{x+\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$;   **Х.** 1) $\int \sin 2x\sqrt{2-\cos^2 x} dx$;

2) $\int x\ln(x^2+1) dx$;   2) $\int x\cos^2 x dx$;

3) $\int \frac{(x^2-3)dx}{x^4+5x^2+6}$;   3) $\int \frac{(3x+13)dx}{(x-1)(x^2+2x+5)}$;

4) $\int \frac{\sqrt{x+5} dx}{1+\sqrt[3]{x+5}}$.   4) $\int \frac{\sqrt{x} dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$.

З. 1) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)} dx$;   **Ц.** 1) $\int \frac{\sin x dx}{1-\cos x}$;

2) $\int x\sin x\cos x dx$; 2) $\int \ln(3+x^2)dx$;

3) $\int \frac{x^2dx}{x^4-81}$; 3) $\int \frac{2x^3+5x^2-1}{x^3+x^2}dx$;

4) $\int \frac{dx}{3\cos x+4\sin x}$. 4) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$.

И. 1) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}$; **Ч.** 1) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln x}}{x}x$;

2) $\int x^2\sin 4xdx$; 2) $\int x\arcsin xdx$;

3) $\int \frac{x^2-x+1}{x^4+2x^2-3}dx$; 3) $\int \frac{dx}{x^3-x^2}$;

4) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$. 4) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{1-\sqrt[3]{x}}$.

К. 1) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx$; **Ш.** 1) $\int \frac{1-\operatorname{tg} x}{\cos^2 x}dx$;

2) $\int x\ln^2 xdx$; 2) $\int (2-x)\sin xdx$;

3) $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$; 3) $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1}dx$;

4) $\int \frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}$. 4) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{x-\sqrt[4]{x}}$.

Л. 1) $\int \frac{3^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$; **Щ.** 1) $\int \frac{x^2dx}{8+x^3}$;

2) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$; 2) $\int (1-\ln x)dx$;

3) $\int \frac{x^4-2x^2-1}{x^3-2x+1}dx$; 3) $\int \frac{7x-10}{x^3+8}dx$;

4) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-4}}$. 4) $\int \frac{\sqrt{x}dx}{4x-\sqrt[3]{x^2}}$.

М. 1) $\int \frac{\ln\operatorname{tg} xdx}{\sin x\cos x}$; **Э.** 1) $\int \frac{\ln\operatorname{tg} xdx}{\sin x\cos x}$;

2) $\int x^2e^{-\frac{x}{2}}dx$; 2) $\int (3x+4)\cos xdx$;

3) $\int \frac{2x+1}{x^3-1}dx$;

3) $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2}dx$;

4) $\int \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt[6]{x}+1)}{\sqrt[3]{x^2}}dx$.

4) $\int \frac{\sqrt{x+3}dx}{1+\sqrt[3]{x+3}}$.

Н. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$;

2) $\int \cos\ln x dx$;

3) $\int \frac{(x^2-3)dx}{x^4+5x^2+4}$;

4) $\int \sqrt{\frac{3+2x}{x-2}}dx$.

Ю. 1) $\int \frac{x^2dx}{\cos^2 x^3}$;

2) $\int \operatorname{arctg} 4x dx$;

3) $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2}dx}{\sqrt[3]{x^2}+3}$.

О. 1) $\int \frac{1+3x}{\sqrt{1+4x^2}}dx$;

2) $\int x^2 5^{\frac{x}{2}} dx$;

3) $\int \frac{x-1}{4x^3+x}dx$;

4) $\int \frac{(3+\sqrt[3]{x+2})dx}{(1+\sqrt{x+2})(\sqrt[6]{x+2})^5}$.

Я. 1) $\int \sqrt[3]{1+\sin x}\cos x dx$;

2) $\int x\ln^2 x dx$;

3) $\int \frac{3-9x}{x^3-1}dx$;

4) $\int \frac{\sqrt{x-2}dx}{1+\sqrt{x-2}}$.

II. Вычислить несобственный интеграл или доказать его расходимость.

А. $\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx$.

Б. $\int\limits_{-\infty}^{-3} \frac{xdx}{(x^2+1)^2}$.

В. $\int\limits_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x+1}$.

Л. $\int\limits_{-3}^{5} \frac{dx}{\sqrt[3]{x+3}}$.

М. $\int\limits_{e}^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

Н. $\int\limits_{4}^{5} \frac{dx}{(x-4)^2}$.

Х. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}$.

Ц. $\int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi(1+4x^2)}dx$.

Ч. $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}$.

Г. $\int\limits_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **О.** $\int\limits_1^2 \frac{xdx}{x-1}$. **Ш.** $\int\limits_0^\infty xe^{-3x}dx$.

Д. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$. **П.** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^0 \operatorname{tg} x dx$. **Щ.** $\int\limits_1^3 \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}$.

Е. $\int\limits_{-3}^2 \frac{dx}{(x+3)^2}$. **Р.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin^2 x}dx$. **Э.** $\int\limits_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx$.

Ж. $\int\limits_2^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x}$. **С.** $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{x^2+2x+5}$. **Ю.** $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{9x^2-9x+2}$.

З. $\int\limits_0^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$. **Т.** $\int\limits_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{(1+x)^3}}$. **Я.** $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-4x)}}$.

И. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}$. **У.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$.

К. $\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2+4x+5}$. **Ф.** $\int\limits_0^\infty \frac{xdx}{16x^4+1}$.

III. Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) площадь фигуры, ограниченной указанными линиями.

А. $y=3x^2+1,\ y=3x+7$. **Е.** $x=a(1-\sin t),\ y=a(1-\cos t)$.

Б. $3x^2=4y,\ 2x-4y+1=0$. **Ж.** $r=3(1+\cos\varphi)$.

В. $y=x+1,\ y=\cos x,\ y=0$. **З.** $r=4\sin 2\varphi$.

Г. $x=7\cos^3 t,\ y=7\sin^3 t$. **И.** $r=4\cos 3\varphi$.

Д. $x=3\cos t,\ y=2\sin t$. **К.** $r=2(1-\cos\varphi)$.

Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) объем тела, полученного вращением фигуры Ω вокруг указанной оси координат.

Л. $y = x^2,\ y = \sqrt{x};\ Ox$.

Р. $y = 2 - \frac{1}{2}x^2,\ x + y = 2;\ Oy$.

М. $y = \dfrac{2}{1+x^2}, y = x^2,\ Oy$.

С. $y = 3\sqrt{1-x^2},\ x = \sqrt{1-y};\ Ox$.

Н. $y = -4x^3,\ x = 0,\ y = 4;\ Ox$.

Т. $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t;\ Ox$.

О. $y^2 = 4 - x,\ x = 0;\ Oy$.

У. $\begin{cases} x = 6(t - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t); \end{cases} Ox$.

П. $y = x^2,\ y^2 = x;\ Ox$.

Вычислить (с точностью до двух знаков после запятой) длину дуги данной линии

Ф. $y = e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}\ (0 \le x \le 2)$.

Щ. $\begin{cases} x = 5\cos^2 t, \\ y = 5\sin^2 t \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

Х. $y = 1 - \ln\cos x\ \left(0 \le x \le \frac{\pi}{8}\right)$.

Э. $x = 2\cos^3 t,\ y = 2\sin^3 t$.

Ц. $r = 3(1 - \cos\varphi)$.

Ю. $x = 3(t - \sin t),\ y = 3(1 - \cos t)$.

Ч. $r = 3\cos\varphi$.

Я. $\begin{cases} x = 2(\cos t + t\sin t), \\ y = 2(\sin t - t\cos t) \end{cases} 0 \le t \le \pi$.

Ш. $r = 2(1 - \cos\varphi)$.

Контрольная работа 4
Обыкновенные дифференциальные уравнения

I. Найти общее решение дифференциального уравнения.

А. $(x^2-y^2)y'=2xy$; $(1-x^2)y''=xy'$.

Б. $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$; $2yy''+(y')^2+(y')^4=0$.

В. $xy'=y\ln\dfrac{y}{x}$; $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$.

Г. $xy'+y=3$; $y''+\dfrac{y'}{x}=x^2$.

Д. $xy'+x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}-y=0$; $1+(y')^2+yy''=0$.

Е. $y'\cos x=(y+1)\sin x$; $(1+y)y''-5(y')^2=0$.

Ж. $xy'-y=\sqrt{x^2+y^2}$; $xy''+2y'=x^3$.

З. $x^2y'-2xy=3$; $y''\operatorname{tg}y=2(y')^2$.

И. $x^2y'+y^2-2xy=0$; $y''-2y'\operatorname{tg}x=\sin x$.

К. $xy'+y=x+1$; $3yy''+(y')^2=0$.

Л. $\mathrm{e}^{x+3y}\,y'=x$; $y''x\ln x=y'$.

М. $xy'-3y=x^4\,\mathrm{e}^x$; $(1-x^2)y''-xy'=2$.

Н. $y'\sin x=y\ln y$; $2xy'y''=(y')^2-1$.

О. $(y^2-3x^2)y'+2xy=0$; $x^3y''+x^2y'=1$.

П. $y'\cos x+y\sin x=1$; $y''+y'\operatorname{tg}x=\sin 2x$.

Р. $y'=(2x-1)\operatorname{ctg}y$; $y''=y'\mathrm{e}^y$.

С. $xy'-y=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$; $(y')^2+2yy''=0$.

Т. $xy'+y=\sin x$; $y''x\ln x=y'$.

У. $(1+\mathrm{e}^x)yy'-\mathrm{e}^y=0$; $xy''-y'=x^2\,\mathrm{e}^x$.

Ф. $xy'=y-x\mathrm{e}^{\frac{y}{x}}$; $x^2y''+xy'=1$.

Х. $x^2y'+2xy=1$; $y''+2y(y')^3=0$.

Ц. $x(y^2+3)-\mathrm{e}^x\,yy'=0$; $y''\operatorname{tg}y=2(y')^2$.

Ч. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$; $x^2y'' + xy' = 1$.

Ш. $y' - y\cos x = -\cos x$. $xy'' = y' + x^2$.

Щ. $y'\sin y\cos x = \cos y\sin x$; $xy'' = y'\ln\frac{y'}{x}$.

Э. $y + \sqrt{xy} = xy'$; $y''\operatorname{tg} x = y' + 1$.

Ю. $x^2y' + xy + 1 = 0$; $y'' = 2 - y$.

Я. $y' = (2y+1)\operatorname{tg} x$; $y''(1-y) + 2(y')^2 = 0$.

II. Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям.

А. $y'' + 4y' - 12y = 8\sin 2x$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

Б. $y'' - 6y' + 9y = x^2 - x + 3$; $y(0) = \frac{4}{3},\ y(0) = \frac{4}{3}$.

В. $y'' + 4y = \mathrm{e}^{-2x}$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

Г. $y'' - 2y' + 5y = x\mathrm{e}^{2x}$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

Д. $y'' + 5y' + 6y = 12\cos 2x$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 3$.

Е. $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)\mathrm{e}^{-x}$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 0$.

Ж. $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$.

З. $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 3$.

И. $y'' - 2y' + y = 16\mathrm{e}^{x}$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

К. $y'' + 6y' + 9y = 10\mathrm{e}^{-3x}$; $y(0) = 3,\ y'(0) = 2$.

Л. $y'' + 6y' + 13y = 8\mathrm{e}^{-x}$; $y(0) = \frac{2}{3},\ y(0) = 2$.

М. $y'' - 4y' + 8y = 8x^2 + 4$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 3$.

Н. $y'' + y' - 6y = 50\cos x$; $y(0) = 3,\ y'(0) = 5$.

О. $y'' + 2y' + 5y = 13\mathrm{e}^{2x}$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 4$.

П. $y'' - 4y' + 5y = 10x$; $y(0) = 10,\ y'(0) = 6$.

Р. $y'' - 4y' + 4y = 3x - x^2$; $y(0) = 3,\ y(0) = \frac{4}{3}$.

С. $y'' - 6y' + 9y = 4\mathrm{e}^{x}$; $y(0) = 3,\ y'(0) = 8$.

Т. $y'' - 4y' + 4y = -169\sin 3x$; $y(0) = -12,\ y'(0) = 16$.

У. $y'' - 2y' + y = -12\cos 2x - 9\sin 2x$; $y(0) = -2,\ y'(0) = 0$.

Ф. $y'' - 6y' + 9y = 9x^2 - 39x + 65$; $y(0) = -1,\ y'(0) = 1$.

Х. $y'' + 2y' + 2y = 2x^2 + 8x + 6$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 4$.

Ц. $y'' - 6y' + 25y = 9\sin 4x - 24\cos 4x$; $y(0) = 2,\ y'(0) = -2$.

Ч. $y'' + 6y = \mathrm{e}^x(\cos 4x - 8\sin 4x)$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 5$.

Ш. $y'' - 4y' + 20y = 16x\,\mathrm{e}^{2x}$; $y(0) = 1,\ y'(0) = 2$.

Щ. $y'' - 12y' + 36y = 32\cos x + 24\sin 2x$; $y(0) = 2,\ y'(0) = 4$.

Э. $y'' - y = (14 - 16x)\,\mathrm{e}^{-x}$; $y(0) = 0,\ y'(0) = -1$.

Ю. $y'' + 8y' + 16y = 16x^2 - 16x + 66$; $y(0) = 3,\ y'(0) = 0$.

Я. $y'' + 10y' + 34y = -9\,\mathrm{e}^{-5x}$; $y(0) = 0,\ y'(0) = 6$.

4. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

4.1. Производная функции. Основные правила дифференцирования

Пример 1. Найти производную функции $y=\sin x$ по определению.

Решение. Имеем:

$$\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x\cdot 1=\cos x.$$

Следовательно, $(\sin x)'=\cos x$.

Пример 2. Найти производную функции $y=9x^5-\frac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^7}-3x+4$.

Решение. Воспользуемся правилами дифференцирования и таблицей производных:

$$y'=\left(9x^5-\frac{4}{x^3}+\sqrt[3]{x^7}-3x+4\right)'=\left(9x^5\right)'-\left(\frac{4}{x^3}\right)'+\left(\sqrt[3]{x^7}\right)'-\left(3x\right)'+\left(4\right)'=$$

$$=9\cdot 5x^4-4\cdot(-3)x^{-4}+\frac{7}{3}x^{4/3}-3=45x^4+12/x^4+\frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4}-3.$$

Пример 3. Найти производную: $y=\dfrac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. Воспользуемся правилами дифференцирования и таблицей производных:

$$y'=\left(\frac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}\right)'=\frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+2)'\sqrt{1-x^4}-(x^2+2)(\sqrt{1-x^4})'}{(\sqrt{1-x^4})^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2x\sqrt{1-x^4}-\dfrac{(x^2+2)\cdot(-4x^3)}{2\sqrt{1-x^4}}}{1-x^4}\right)=\frac{x(1-x^4)+x^3(x^2+2)}{(1-x^4)\sqrt{1-x^4}}=\frac{x-x^5+x^5+2x^3}{\sqrt{(1-x^4)^3}}=$$

$$=\frac{2x^3+x}{\sqrt{(1-x^4)^3}}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y=\mathrm{tg}^5(x+2)\cdot\arccos 3x^2$.

Решение: Воспользуемся правилами дифференцирования:

$$y' = \left(\mathrm{tg}^5(x+2)\cdot\arccos 3x^2\right)' = 5\,\mathrm{tg}^4(x+2)\cdot\frac{1}{\cos^2(x+2)}\cdot\arccos 3x^2 +$$

$$+\mathrm{tg}^5(x+2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}}\right)\cdot 6x = \frac{5\,\mathrm{tg}^4(x+2)\cdot\arccos 3x^2}{\cos^2(x+2)} - \frac{\mathrm{tg}^5(x+2)\cdot 6x}{\sqrt{1-9x^4}}.$$

Пример 5. Найти производную: $y = \ln\sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}}$.

Решение. При дифференцировании некоторых логарифмических выражений рациональнее предварительно упростить первоначальную функцию по свойствам логарифма:

$$y = \ln\sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}} = \frac{1}{6}\ln\frac{1+3x}{1-3x} = \frac{1}{6}\left(\ln(1+3x)-\ln(1-3x)\right);$$

$$y' = \frac{1}{6}(\ln(1+3x))' - (\ln(1-3x))') = \frac{1}{6}\left(\frac{(1+3x)'}{1+3x} - \frac{(1-3x)'}{1-3x}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{1+3x} - \frac{-3}{1-3x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+3x}+\frac{1}{1-3x}\right) = \frac{1}{2}\frac{(1-3x+1+3x)}{1-9x^2} = \frac{1}{1-9x^2}.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = \left(\cos x\right)^{\sin x}$.

Решение. По формуле

$$y' = \left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(g'(x)\cdot\ln f(x) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right)\cdot f(x)^{g(x)}$$

имеем

$$y' = \left(\cos x\right)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x + \frac{\sin x}{\cos x}\left(\cos x\right)'\right) = \left(\cos x\right)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x - \sin x\,\mathrm{tg}x\right)$$

Пример 7. Используя метод логарифмического дифференцирования, вычислить производную функции $y = \frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5}$.

*Решение***.** Применим метод логарифмического дифференцирования. Для этого предварительно прологарифмируем обе части данного выражения и используя свойства логарифма преобразуем правую часть.

$$\ln y = \frac{6}{7}\ln(x+5) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3).$$

Продифференцируем обе части равенства, учитывая, что y сложная функция

$$\left(\ln y\right)' = \left(\frac{6}{7}\ln(x+5) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3)\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3}.$$

Выражая производную искомой функция, получим

$$y' = y \cdot \left(\frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3} \right)$$

Учитывая, что $y = \dfrac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2 (x+3)^5}$, окончательно получим $y' = \dfrac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2 (x+3)^5} \cdot \left(\dfrac{6}{7(x+5)} - \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{5}{x+3} \right)$.

Пример 8. Для функции, заданной параметрически, найти $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\begin{cases} x = 3\sin t + \sin 3t, \\ y = 3\cos t + \cos 3t. \end{cases}$$

*Решение***.** Находим производные от x и от y по параметру t

$$x'_t = \frac{dx}{dt} = 3\cos t + 3\cos 3t, \; y'_t = \frac{dy}{dt} = -3\sin t - 3\sin 3t.$$

Искомую производную от y по x находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{3(\sin t + \sin 3t)}{3(\cos t + \cos 3t)} = -\frac{2\sin\frac{t+3t}{2} \cdot \cos\frac{t-3t}{2}}{2\cos\frac{t+3t}{2} \cdot \cos\frac{t-3t}{2}} = -\frac{\sin 2t}{\cos 2t} = -\operatorname{tg} 2t.$$

Пример 9. Найти производную y'_x, если $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение.

1 способ. Продифференцируем уравнение, считая переменную x аргументом, а переменную y функцией $y = y(x)$. Получим $3x^2 + 3y^2 \cdot y'_x - 3(y + xy'_x) = 0$. Решаем уравнение относительно y'_x:

$$y'_x = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

2 способ. $F(x, y(x)) = x^3 + y^3 - 3xy$. Воспользуемся формулой для нахождения производной функции, заданной неявно

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\left(x^3 + y^3 - 3xy\right)'_x}{\left(x^3 + y^3 - 3xy\right)'_y} = -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = \frac{3(x^2 - y)}{-3(y^2 - x)} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

4.2. Производные высших порядков

Пример 1. Найти вторую производную функции $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Решение. Сначала найдем $f'(x)$ и обязательно упростим полученное выражение:

$$f'(x)=\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)'=\frac{x'\sqrt{1-x^2}-(\sqrt{1-x^2})'x}{(1-x^2)}=\frac{\sqrt{1-x^2}-x\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)}=$$

$$=\frac{\sqrt{1-x^2}+\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)}=\frac{(1-x^2)+x^2}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}=(1-x^2)^{-3/2}.$$

$$f''(x)=\left((1-x^2)^{-3/2}\right)'=-\frac{3}{2}(1-x^2)^{-5/2}(-2x)=\frac{3x}{(1-x^2)^{5/2}}=\frac{3x}{\sqrt{(1-x^2)^5}}.$$

Пример 2. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x=\sqrt{t}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$.

Решение. Найдем производную первого порядка:

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\left((1-t)^{-\frac{1}{2}}\right)'}{(\sqrt{t})'}=\frac{-\dfrac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(1-t)'}{\dfrac{1}{2\sqrt{t}}}=-\sqrt{t}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(-1)=\sqrt{t}(1-t)^{-\frac{3}{2}};$$

$$y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t};\ (y'_x)'_t=(\sqrt{t}(1-t)^{-\frac{3}{2}})'=(\sqrt{t})'(1-t)^{-\frac{3}{2}}+\sqrt{t}((1-t)^{-\frac{3}{2}})'=\frac{(1-t)^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{t}}-$$

$$-\frac{3}{2}\sqrt{t}(1-t)^{-\frac{5}{2}}(1-t)'=\frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{(1-t)^3}}+\frac{3\sqrt{t}}{2\sqrt{(1-t)^5}};$$

$$y''_{xx}=\left(\frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{(1-t)^3}}+\frac{3\sqrt{t}}{2\sqrt{(1-t)^5}}\right):\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{1}{\sqrt{(1-t)^3}}+\frac{3t}{\sqrt{(1-t)^5}}=\frac{1+2t}{\sqrt{(1-t)^5}}.$$

Пример 3. Найти производную n-го порядка: $y=\sqrt{e^{5x+3}}$.

Решение. Найдем последовательно несколько производных высших порядков:

$$y'=(\sqrt{e^{5x+3}})'=\frac{e^{5x+3}\cdot 5}{2\sqrt{e^{5x+3}}}=\frac{5}{2}\sqrt{e^{5x+3}};$$

$$y''=\left(\frac{5}{2}\sqrt{e^{5x+3}}\right)'=\left(\frac{5}{2}\right)(\sqrt{e^{5x+3}})'=\left(\frac{5}{2}\right)^2\sqrt{e^{5x+3}};$$

$$y'''=\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2\sqrt{e^{5x+3}}\right)'=\left(\frac{5}{2}\right)^2(\sqrt{e^{5x+3}})'=\left(\frac{5}{2}\right)^3\sqrt{e^{5x+3}}.$$

И так далее. Выведем формулу для n-го члена получившейся последовательности $y^{(n)}=\left(\frac{5}{2}\right)^{(n)}\sqrt{e^{5x+3}}$.

4.3. Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к кривой

Пример 1. Составить уравнение нормали и уравнение касательной к кривой $y=x+\sqrt{x^3}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение. Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид: $y-y_0=y_0'(x-x_0)$. Уравнение нормали имеет вид: $y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0)$.

Найдем производную функции в точке с абсциссой $x_0=1$.

$$y'=\left(x+\sqrt{x^3}\right)'=1+\frac{3}{2}\sqrt{x};\; y'(1)=1+\frac{3}{2}\sqrt{1}=\frac{5}{2};\; y(1)=1+\sqrt{1^3}=2.$$

Запишем уравнения касательной к кривой $y=x+\sqrt{x^3}$ в точке с абсциссой $x_0=1$: $y-2=\frac{5}{2}(x-1)$ или $y=\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$. Уравнение нормали в этой же точке: $y-2=-\frac{2}{5}(x-1)$ или $y=-\frac{2}{5}x+2\frac{2}{5}$.

Пример 2. Составить уравнения касательной и нормали к эллипсу $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ в точке $M_0(3;2)$.

*Решение***.** Находим производную неявной функции $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}-1=0$:

$\frac{2x}{18}+\frac{2y\cdot y'}{8}=0$, откуда $y'(x)=-\frac{4x}{9y}$, $y'(x_0)=y'(3)=-\frac{4\cdot 3}{2\cdot 9}=-\frac{2}{3}$. Подставляя значения $x_0=3$, $y_0=2$, $y'(x_0)=-\frac{2}{3}$ в формулы уравнений касательной $y-y_0=y_0'(x-x_0)$ и нормали $y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0)$, получим $y-2=-\frac{2}{3}(x-3)$ или $2x+3y-12=0$ – уравнение касательной; $y-2=\frac{3}{2}(x-3)$ или $3x-2y-5=0$ – уравнение нормали.

4.4.Дифференциал. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Пример 1. Найти дифференциал функции $f(x)=e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

Решение. Сначала найдем первую производную исходной функции:

$$f'(x)=e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)'=e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\frac{(1-\cos x)'(1+\cos x)-(1+\cos x)'(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}=$$

$$=e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\frac{\sin x(1+\cos x)+\sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2}=e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}.$$

Далее в силу равенства $df(x)=f'(x)dx$ получим $df(x)=e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\dfrac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$.

Пример 2. Найти дифференциал функции, заданной неявно $x^2+y^2+x^2y^2=1$.

Решение. Найдем дифференциал обеих частей равенства. Получим $2xdx+2ydy+2xy^2dx+x^2 2ydy=0$. Отсюда выразим дифференциал dy:

$$dy=-\frac{2xdx+2xy^2dx}{2y+2x^2y}=-\frac{x}{y}\frac{1+y^2}{1+x^2}dx.$$

Пример 3. Вычислить приближенно значение $\sin 32^\circ$.

*Решение***.** Воспользуемся формулой $f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$. Для этого определим функцию $f(x)=\sin x$ и положим $x=32^\circ$, $x_0=30^\circ$ или в радианах $x=\dfrac{32\pi}{180}$ и $x_0=\dfrac{\pi}{6}$.

Тогда, учитывая, что $(\sin x)'=\cos x$, получим

$$\sin x\approx\sin x_0+\cos x_0\cdot(x-x_0),\text{ или}$$

$$\sin 32^\circ\approx\sin\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{6}\cdot\left(\frac{32\pi}{180}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{90}\approx 0,5+\frac{1,73\cdot 3,14}{90}\approx$$

$$\approx 0,5+0,03=0,53.$$

Для сравнения: имеет место равенство $\sin 32^\circ=0,5299$ с четырьмя верными знаками.

Пример 4. Вычислить приближенно $\sqrt{24,89}$.

*Решение***.** Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x}$ и выберем $x_0=25$, $x=24,89$. Найдем:

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}},\quad f(x_0)=\sqrt{25}=5,\quad f'(x_0)=\frac{1}{2\sqrt{25}}=0,1.$$

Тогда $f(24,89)=\sqrt{24,89}\approx 5+0,1\cdot(-0,11)=5-0,011=4,989$. Для сравнения: приближенно $\sqrt{24,89}=4,988987873$ с точностью до 9-го знака после запятой.

4.5. Правило Лопиталя

Пример. Найти с помощью правила Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+x)-2\sin x+x^2}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to +0} x\ln(\sin x)$.

Решение. а)

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\ln(1+x)-2\sin x+x^2}{x^3}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 0}\frac{(2\ln(1+x)-2\sin x+x^2)'}{(x^3)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{2}{1+x}-2\cos x+2x}{3x^2}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{1}{1+x}-\cos x+x\right)'}{(x^2)'}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-1}{(1+x)^2}+\sin x+1}{2x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}$$

$$\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\left(\dfrac{-1}{(1+x)^2}+\sin x+1\right)'}{(x)'}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{-1\cdot(-2)}{(1+x)^3}+\cos x}{1}=\frac{2+1}{3}=1.$$

Итак, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\ln(1+x)-2\sin x+x^2}{x^3}=1.$

При решении этого примера правило Лопиталя фактически было применено трижды (в тех местах, где над знаком равенства указан вид неопределенности). При этом для обеспечения строгости рассуждений необходимо каждый раз проверять условия сформулированного выше утверждения.

б) Очевидно, что здесь вообще нет эквивалентных функций. Кроме того, при $x\to +0$ $(x\to 0, x>0)$ $\sin x\to +0$ и $\ln\sin x\to -\infty$. Это неопределенность вида $[0\cdot\infty]$, к которой правило Лопиталя не применяется, однако можно учесть, что если $f(x)$ – бесконечно малая при $x\to a$ функция, то $\dfrac{1}{f(x)}$ будет бесконечно большой при $x\to a$. Поскольку $x\ln\sin x=\dfrac{\ln\sin x}{x^{-1}}$,то мы приходим к неопределенности $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ и далее действуем так, как при решении задания а). Обе функции требуемым условиям удовлетворяют, поэтому

$$\lim_{x\to +0}x\ln(\sin x)=\lim_{x\to +0}\frac{\ln\sin x}{x^{-1}}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to +0}\frac{(\ln\sin x)'}{(x^{-1})'}=\lim_{x\to +0}\frac{\dfrac{\cos x}{\sin x}}{-x^{-2}}=-\lim_{x\to +0}\frac{x^2\cos x}{\sin x}=$$

$$=-\lim_{x\to +0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to +0}\frac{x\cos x}{1}=1\cdot\lim_{x\to +0}x\cos x=0.$$

4.6. Промежутки монотонности и экстремумы функций

Пример 1. Исследовать функцию $y=\sqrt[3]{x^2-4x}$ на экстремум и монотонность.

Решение. Область определения – множество всех действительных чисел $\mathbb{R}$.

1)Находим производную функции:

$$y'=\left(\left(x^2-4x\right)^{\frac{1}{3}}\right)'=\frac{1}{3}\left(x^2-4x\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2-4x\right)'=\frac{2x-4}{3\sqrt[3]{\left(x^2-4x\right)^2}}.$$

2)Найдем стационарные и критические точки. Решим уравнение $y'=0$: $2x-4=0\Rightarrow x=2-$ стационарная. y' не существует при $\sqrt[3]{x^2-4x}=0\Rightarrow$ $\Rightarrow x^2-4x=0\Rightarrow x(x-4)=0\Rightarrow x=0$ или $x=4$. Эти точки входят в область определения функции, следовательно, являются критическими.

3) Разобьем область определения $\mathbb{R}$ точками 0, 2, 4 на интервалы $\left(-\infty;0\right)$, $\left(0;2\right)$, $\left(2;4\right)$, $\left(4;+\infty\right)$, в каждом из которых производная сохраняет знак. Найдем знаки производной в этих интервалах (см. рис.4)

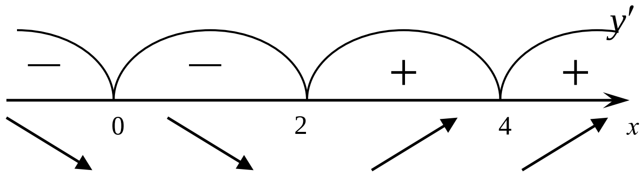


Рис. 4

4) Функция убывает в интервалах $\left(-\infty;0\right)$ и $\left(0;2\right)$, возрастает в интервалах $\left(2;4\right)$ и $\left(4;+\infty\right)$. Однако можно сделать более сильный вывод. В самом деле, в окрестностях критических точек $x=0$ и $x=4$ производная не меняет знака, значит, они не являются точками экстремума. Функция убывает в интервале $\left(-\infty;2\right)$ и возрастает в интервале $\left(2;+\infty\right)$.

5) Стационарная точка $x=2$ является точкой минимума. Тогда $y_{\min}=y(2)=\sqrt[3]{2^2-4\cdot 2}=\sqrt[3]{4-8}=-\sqrt[3]{4}$.

4.7. Наибольшее и наименьшее значения функции на числовом промежутке

Пример 1. Найти наибольшее и наименьшее значения $f(x)=\dfrac{4}{3}x^3-3x^2$ на отрезке $\left[1;4\right]$.

Решение. $f'(x)=4x^2-6x=2x(2x-3)$, причем производная определена всюду, критических точек нет. Чтобы найти стационарные точки, приравниваем производную к нулю: $2x(2x-3)=0$. Итак, $x=3/2$ и $x=0$ – стационарные точки. При этом $3/2\in[1;4]$, а $0\notin[1;4]$, поэтому последняя точка нас не интересует. Вычисляем значения исходной функции в выбранной точке и на концах отрезка: $f(1)=\frac{4}{3}-3=-\frac{5}{3}$; $f(\frac{3}{2})=\frac{4\cdot 27}{3\cdot 8}-\frac{3\cdot 9}{4}=\frac{9}{2}-\frac{27}{4}=-\frac{9}{4}$; $f(4)=\frac{4\cdot 64}{3}-3\cdot 16=\frac{112}{3}$.

Сравнивая значения, получаем: $\min\limits_{x\in[1;4]} f(x)=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{4}$, $\max\limits_{x\in[1;4]} f(x)=f(4)=\frac{112}{3}$.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения $f(x)=\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}$ в интервале $\left(0;3\right)$.

Решение. $f'(x)=\left(\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}\right)'=\frac{2}{3}\left(x^2-2x\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot(2x-2)=\frac{4(x-1)}{3\sqrt[3]{x^2-2x}}$, причем производная не существует при $x=0$ и $x=2$. Эти точки являются критическими. Чтобы найти стационарные точки, приравниваем производную к нулю: $4(x-1)=0$, т.е. $x=1$. Итак, $x=1$- стационарная точка. При этом $1\in\left(0;3\right)$ и $2\in\left(0;3\right)$, а $0\notin\left(0;3\right)$, поэтому последняя точка нас не интересует. Вычисляем значения исходной функции в выбранных точках:

$$f(1)=\sqrt[3]{\left(1^2-2\cdot 1\right)^2}=1,\ f(2)=\sqrt[3]{\left(2^2-2\cdot 2\right)^2}=0.$$

Находим предельные значения функции на границах интервала:

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}=0;$$

$$f(3-0)=\lim_{x\to 3-0}\sqrt[3]{\left(x^2-2x\right)^2}=3^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{9}\approx 2{,}08.$$

Эти значения в точках $x=0$ и $x=3$ функция не достигает, поскольку эти точки не принадлежат интервалу $\left(0;3\right)$.

Сравнивая $f(1)=1$, $f(2)=0$, $f(0+0)=0$ и $f(3-0)\approx 2{,}08$, получаем $\max\limits_{x\in(0;3)} f(x)$ не существует, $\min\limits_{x\in(0;3)} f(x)=f(2)=0$.

При решении **задач практического характера** полезно пользоваться следующим фактом.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на открытом числовом интервале $(a;b)$ и имеет на нем единственную стационарную точку x_0. Если x_0 – точка локального максимума, то $\max\limits_{x\in(a;b)} f(x) = f(x_0)$; если x_0 - точка локального минимума, то $\min\limits_{x\in(a;b)} f(x) = f(x_0)$

Пример 3. Определить наибольшую площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг радиуса R.

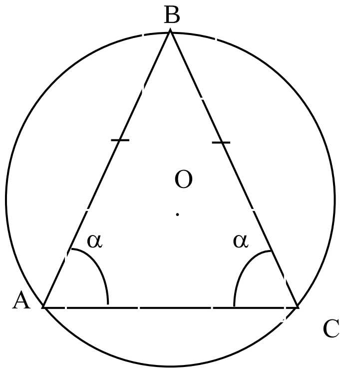


Рис. 5

Решение. Пусть $AB = BC$ и $\angle BAC = \alpha$, тогда $\angle ABC = \pi - 2\alpha$, α – острый угол. Из теоремы синусов имеем

$AB = BC = 2R\sin\alpha$, а $AC = 2R\sin(\pi - 2\alpha) = 2R\sin 2\alpha$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 2R\sin\alpha\cdot 2R\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha =$$
$$= 2R^2\sin^2\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 4R^2\sin^3\alpha\cos\alpha.$$
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot AC\sin\alpha = \frac{2}{2}\cdot R\sin\alpha\cdot 2R\sin 2\alpha\cdot\sin\alpha = 2R^2\sin^2\alpha\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= 4R^2\sin^3\alpha\cos\alpha.$$

$S' = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2\alpha = \frac{2\pi}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ – стационарная точка функции $S(\alpha)$.

$$S''(\alpha) = 4R^2(\sin^2\alpha + 2\sin^2\alpha\cdot\cos 2\alpha)' = 4R^2(2\sin\alpha\cos\alpha +$$
$$+2\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos 2\alpha + 2\cdot 2\sin^2\alpha\cdot(-\sin 2\alpha)) == 4R^2\sin 2\alpha(1 + 2\cos 2\alpha - 4\sin^2\alpha)$$
$$S''\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4R^2\cdot\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\left(1 + 2\cos\frac{2\pi}{3} - 4\sin^2\frac{\pi}{3}\right) = 4R^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(1 - 2\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) < 0$$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$ – точка локального максимума, так как функция $S(\alpha)$ непрерывна на

$\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ и имеет единственную точку локального максимума, то в этой точке обязательно достигается наибольшее значение функции на этом интервале. Найдем $S_{наиб} = 4R^2 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}R^2}{4}$ (кв.ед.)

4.8. Построение эскиза графика функции одной переменной

Пример 1. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^2}{2(x-1)}$

Решение.

1) $D(y) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

2) $y(-x) = \dfrac{(-x)^2}{2(-x-1)} = -\dfrac{x^2}{2(x+1)}$, т.е. $y(-x) \neq -y(x)$ и $y(-x) \neq y(x)$. Функция является функцией общего вида, непериодической.

3) Так как $\dfrac{x^2}{2(x-1)} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$, то график пересекает оси координат только в точке $(0;0)$.

4) $y' = \dfrac{2x \cdot 2(x-1) - 2x^2}{4(x-1)^2} = \dfrac{4x^2 - 4x - 2x^2}{4(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x}{4(x-1)^2} = \dfrac{x^2 - 2x}{2(x-1)^2}$.

$y' = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 2x = 0 \quad x = 0$ или $x = 2$. y' не существует в точке $x = 1$, но она не входит в область определения функции. Следовательно, имеются две стационарные точки $x = 0$ и $x = 2$. Разобьем этими точками область определения на интервалы знакопостоянства производной: $(-\infty;0)$, $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;+\infty)$. Определим знаки производной в этих интервалах (см. рис. 8).

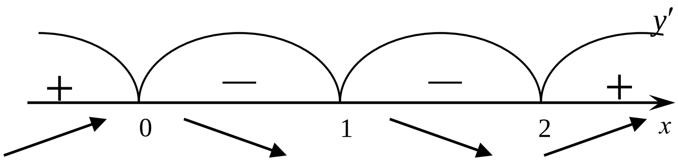


Рис.8

Используя достаточные условия монотонности и экстремума, можно сделать следующие выводы: функция возрастает в интервалах $(-\infty;0)$ и $(2;+\infty)$, убывает в $(0;1)$ и $(1;2)$. Значение максимума $y_{\max} = y(0) = 0$, значение минимума $y_{\min} = y(2) = 2$.

5) $y'' = \dfrac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x-1)(x^2-2x)}{2(x-1)^4} = \dfrac{1}{(x-1)^3}$.

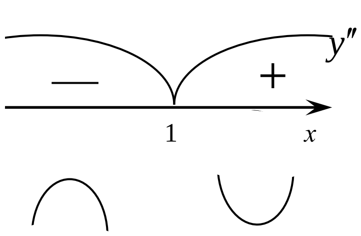


Рис. 9

y'' не обращается в 0, а в точке 1, где y'' не существует, функция не определена, поэтому график функции не имеет точки перегиба. Таким образом, имеются два интервала $(-\infty;1)$ и $(1;+\infty)$, знакопостоянства второй производной (см. рис.9).

В силу достаточных условий выпуклости и вогнутости графика в интервале $(-\infty;1)$ график выпуклый (вверх), а в интервале $(1;+\infty)$ график вогнутый (выпуклый вниз).

6)Так как $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^2}{2(x-1)}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x^2}{2(x-1)}=+\infty$, то прямая $x=1$ – вертикальная асимптота графика функции.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x(x-1)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2x^2-2x}\overset{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}{=}\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^2\left(2-\dfrac{2}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{2-\dfrac{2}{x}}=\frac{1}{2}.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2}{2(x-1)}-\frac{x}{2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-x^2+x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, прямая $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ – наклонная асимптота графика функции при $x\to\pm\infty$.

7) Построим график функции. Сначала изобразим асимптоты $x=1$ и $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ (пунктирной линией). Наносим на чертеж точки (0, 0) и (2, 2), найденные в пункте 4. Проводим через эти точки линию, согласно результатам исследования функции в пунктах 4, 5, 6. Еще раз сравниваем полученный график с результатами исследования и убеждаемся в правильности построения графика.

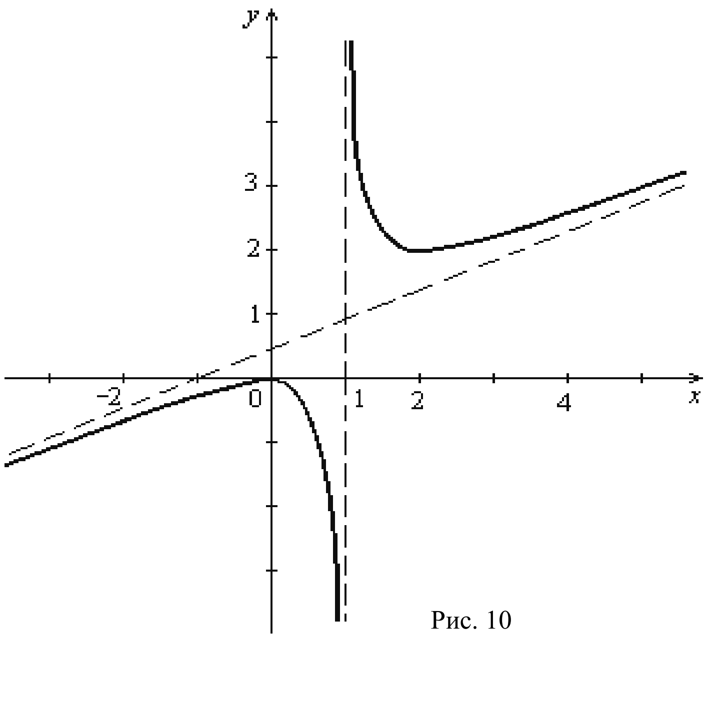


Рис. 10

5. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

I. Вычислить производные следующих функций:

1) $y = 2x^2 - 3x + 5$;

2) $y = 4 - x^4$;

3) $y = x^4 - x^2$;

4) $y = 5x^4 - 7x^2 + x - 3$;

5) $y = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 9x - 5$;

6) $y = \dfrac{2x^3}{3} - 3x^2 + 6x - 1$;

7) $y = \dfrac{3x^6}{2} + 4x^5 - 2x^3 - \dfrac{1}{2x}$;

8) $y = 2 - \dfrac{x}{2} - 5x^2 - \dfrac{3}{x^2}$;

9) $y = \dfrac{x^5 + 2x^3 - 9x + 7}{x}$;

10) $y = \dfrac{5x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 6x - 11}{3x^2}$;

11) $y = (2x-3)^2$;

12) $y = (2x-3)(3x^4 + 5x - 8)$;

13) $y = 3x^{-2}$;

14) $y = 4x^{-3}$;

15) $y = 3x^{-\frac{2}{3}}$;

16) $y = 5x^{-\frac{3}{5}}$;

17) Найти $f'(-1)$, *если* $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$;

18) Найти $f'(0{,}5)$, *если* $f(x) = -x^3 + 9x^2 - x + 2$;

19) $y = (x^3 - 2)(x^2 + x + 1)$;

20) $y = (x + 2)(2x^3 - x)$;

21) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3+1}$;

22) $y=\dfrac{1-x^5}{1+x^5}$;

22а) $y = e^x x^2$;

22б) $y = 3x^4 sinx$.

II. Вычислите производные сложных функций:

23) $y=3\sin 5x$;

24) $y=4\cos\dfrac{x}{2}$;

25) $y=\arccos 3x$;

26) $y=\ln\sqrt{2x-1}$;

27) $y=\left(x^4-x-1\right)^4$;

28). $y=\sqrt{x^3+2x-5}$;

29) $y=\sqrt{\left(1-x^2\right)^2}$;

30) $y=\cos^2 x$;

31) $y=\sin^3 x$;

32) $y=\ln\sin 3x$;

33) $y=\ln\sqrt{2x-1}$;

34) $y=3^{\sin x}-2^{2x}+e^{5x}$;

35) $y=3^{\sqrt{x}}-4^{7x}+3e^{2x}$;

36) $y=\arcsin\ln x$;

37) $y=arctgx^3$;

38) $y=arctg\cos x$.

III. Вычислите производные высших порядков:

39) $f'''(x)$, *если* $f(x)=4x^3$;

40) $f^{(5)}(x)$, *если* $f(x)=\frac{1}{7}x^7$;

41) $f'''(x)$, *если* $f(x)=\cos x$;

42) $f^{(4)}(x)$, *если* $f(x)=2\sin 3x$.

IV. Вычислите производные показательно-степенных функций:

43) $y=x^x$;

44) $y=x^{x^x}$;

45) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

46) $y=x^{\ln x}$;

47) $y=x^{tgx}$;

48) $y=(arctgx)^{\ln x}$;

49) $y=(arctgx)^x$;

50) $y=(x+x^2)^x$.

V. Геометрический и физический смысл производной.

51) Составьте уравнение касательной к параболе $y=x^2-4x$ в точке с абсциссой **а)** $x_0=-1$; **б)** $x_0 = 0$; **в)** $x_0 = 1$.

52) Дана кривая $y=2x^3-4x^2+5x-1$. Составьте уравнение касательной в точке, абсцисса которой равна **а)** -1; **б)** 0; **в)** 1.

53) В какой точке касательная к кривой $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+4$ параллельна прямой **а)** $2x+2y-5=0$; **б)** y – 3x -5 =0; **в)** y + x =0?

54) В какой точке касательная к кривой $y=x^2+2$ образует с осью Ox **а)** угол 30^o; **б)** угол 45^0; **в)** угол 135^0 ?

55) Составьте уравнения касательных к кривой $y = x^2–4x$, проходящих через точку A (0; -1). Выполните чертеж.

56) Найдите скорость и ускорение материальной точки в конце третьей секунды, если движение точки задано уравнением $S(t) = t^2 + 11t + 30$.

57) Тело массой 8 кг движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^2 + 3t - 1$. Найдите кинетическую энергию тела ($\frac{mv^2}{2}$) через 3 c после начала движения.

VI. Проведите исследование функций и постройте их графики:

58) $y = 8 - 2x - x^2$;

59) $y = x^3 - 3x^2 + 4$;

60) $y = 3 - 3x + x^3$;

61) $y = 4x^2 - x^4 - 3$;

62) $y = x^3 - 12x$;

63) $y = x^4 + 2x^3 - 5x^2$;

64) $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$;

65) $y = x\sqrt{2 - x}$;

66) $y = \ln(x^2 + 1)$;

67) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$;

68) $y = x^2\sqrt{1 + x}$;

69) $y = 2x^4 - 8x^2 + 3$

70) $y = 2x^3 - 9x^2 + 15x - 6$;

71) $y = 3x - x^3$;

72) $y = \frac{x}{x^2 + 1}$;

73) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$

VII. Вычислите приближенно:

74) $2{,}005^4$;

75) $2{,}995^5$;

76) $1{,}995^{10}$;

77) $\sqrt{1{,}07}$;

78) $\sqrt{0{,}84}$;

79) $\sqrt{25{,}4}$;

80) $\sqrt{81{,}8}$;

81) $\sqrt{36{,}7}$;

82) $\cos 61^\circ$;

83) $\sin 60^\circ 3'$;

84) $2^{2{,}98}$.

VIII. Решите задачи на наибольшее и наименьшее значение функции:

85) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 6x$ на отрезке $[-3;\ \ 4]$.

86) Число 54 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых, два из которых пропорциональны числам 1 и 2, таким образом, чтобы произведение всех слагаемых было наибольшим.

87) Найдите число, которое, будучи сложено со своим квадратом, дает наименьшую сумму.

88) Число 24 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

89) Найти такое положительное число, чтобы разность между этим утроенным числом и его кубом была наибольшей.

90) Площадь прямоугольника 64 см^2. Какую длину должны иметь его стороны, чтобы периметр был наименьшим?

91) Требуется вырыть силосную яму объемом 32м^3, имеющую квадратное дно, так, чтобы на облицовку ее дна и стен пошло наименьшее количество материала. Каковы должны быть размеры ямы?

92) Из круглого бревна вырезают балку с прямоугольным сечением наибольшей площади. Найдите размеры сечения балки, если радиус сечения бревна равен 20см.

93) Открытый бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать 13,5 л жидкости. При каких размерах бака на его изготовление потребуется наименьшее количество металла?

IX. Дополнительные задачи:

94) При каком *k* длина интервала, на котором функция $y = \frac{x^3}{3} - kx^2 - x$ убывает, равна 4?

95) Исследуйте функцию $y = \sin^2 x + \sin x$ и постройте ее график.

96) Вычислить $f'(0) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, если $f(x) = (x^2 - 3x)\cos 3x$.

97) Сколько корней имеет уравнение $x^3 - 3x^2 = a$, если $a \in (-4;0)$?

98) Найти наибольшее значение функции $y = -x^2 + px + q$, если ее график проходит через точки $P(-1;-13)$ и $Q(3;-1)$.

99) Найдите все положительные значения параметра *a*, при которых функция $y = ax^2 - \ln x$ убывает в интервале (0; 5).

X. *Непосредственное интегрирование.*

1. $\int x^6 dx$;

2. $\int \frac{dx}{x^2}$;

3. $\int x^{\frac{2}{3}} dx$;

4. $\int \sqrt{x} dx$;

5. $\int (5x^3 - 2x^2 + 3x - 8) dx$;

6. $\int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3) dx$;

7. $\int (2x-1)^3 dx$;

8. $\int x^3(1+5x)dx$;

9. $\int \frac{3x^3-2x^2+5x}{2x}dx$;

10. $\int \frac{x^3+3x^2+4x}{x}dx$;

11. $\int \frac{4x^4-2x^3+x^2}{x^2}dx$;

12. $\int \frac{x^3-2x^2-3x-4}{x^2}dx$;

13. $\int \frac{(3x+1)^2}{x}dx$;

14. $\int \frac{dx}{1+x}$;

15. $\int \frac{2xdx}{1+x^2}$;

16. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$;

17. $\int \frac{x^2dx}{x^3+5}$;

18. $\int \frac{x^3dx}{x^4+2}$;

19. $\int (2x-4^x+e^{3x})dx$;

20. $\int \left(\frac{2}{x}+8e^x+5^x-x^{\frac{3}{5}}\right)dx$;

21. $\int \frac{\sin 2x}{\cos x}dx$;

22. $\int \left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

23. $\int \left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx$;

24. $\int \sin(-4x)dx$;

25. $\int x\sin x^2 dx$;

26. $\int \cos(5-2x)dx$;

27. $\int \frac{\cos^2 x+3}{\cos^2 x}dx$;

28. $\int \frac{4+\cos^3 x}{\cos^2 x}dx$;

29. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$;

30. $\int tg^2 x dx$;

31. $\int \frac{2dx}{3\sqrt{1-x^2}}$;

32. $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$;

33. $\int \frac{x^4 dx}{1+x^2}$;

34. $\int \frac{1+x^2+3\cos^2 x}{(1+x^2)\cos^2 x}dx$.

XI. *Способ подстановки.*

35. $\int (7-2t)^3 dt$;

36. $\int (5u-1)^3 du$;

37. $\int (1+x^5)^7 x^4 dx$;

38. $\int (9-2x^3)^4 x^2 dx$;

39. $\int 4(x^4+5)^2 x^3 dx$;

40. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

41. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

42. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x}}$;

43. $\int \sin^2 x \cos x dx$;

44. $\int \cos^3 x dx$;

45. $\int 4\sin^3 x dx$;

46. $\int \left(\cos^3 x + 1\right)^2 \sin x dx$;

47. $\int tgx dx$;

48. $\int ctgx dx$;

49. $\int \frac{arctgx}{1+x^2} dx$;

50. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$;

51. $\int \frac{dx}{5 + x^2}$;

52. $\int \frac{dx}{25 + 36x^2}$;

53. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$;

54. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}}$;

55. $\int \frac{dx}{\sqrt{16 - 25x^2}}$;

56. $\int \frac{\sin^4 x dx}{2\sin x \cos x}$;

57. $\int \frac{\sin 3x dx}{2 + \cos 3x}$;

58. $\int \frac{x^2 dx}{1 + x^6}$;

59. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}$;

60. $\int \frac{dx}{ax + b}$;

61. $\int \frac{2dx}{3x - 4}$;

62. $\int \frac{3x^6 dx}{x^5 - 4}$;

63. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx$.

XII. *Способ интегрирования по частям.*

64. $\int x \cos x dx$;

65. $\int x e^x dx$;

66. $\int x^5 \ln x dx$;

67. $\int x e^{2x} dx$;

68. $\int x^2 \sin x dx$;

69. $\int arctgx dx$;

70. $\int x \sin x dx$;

71. $\int x \ln x dx$;

72. $\int (4x^3 + 6x - 7) \ln x dx$;

73. $\int x \sin 2x dx$;

74. $\int x \cos 3x dx$;

75. $\int \ln x dx$;

76. $\int \frac{\ln x dx}{x^2}$;

77. $\int \frac{\ln x dx}{x^3}$;

78. $\int e^x \ln(1 + 3e^x) dx$;

79. $\int x 3^x dx$;

80. $\int x^2 e^{3x} dx$;

81. $\int x \ln(x^2 + 1) dx$;

82. $\int x^2 \sin 4x dx$;

83. $\int x \ln^2 x dx$.

XIII. *Вычисление определенных интегралов.*

84. $\int_3^5 dx$;

85. $\int_0^1 x dx$;

86. $\int_0^2 3x^2 dx$;

87. $\int_{-1}^1 (2x+1) dx$;

88. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x dx$;

89. $\int_1^2 \frac{dx}{x}$;

90. $\int_1^3 8x^3 dx$;

91. $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$;

92. $\int_0^2 3e^{3x} dx$;

93. $\int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx$;

94. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx$;

95. $\int_{-1}^1 \left(2x+3x^2+4x^3+5x^4\right) dx$;

96. $\int_1^5 \left((x-3)^2-4\right) dx$;

97. $\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{4dx}{\cos^2 x}$;

98. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

99. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{1+x}dx$;

100. $\int\limits_{1}^{e} \frac{3\ln^2 xdx}{x}$.

XIV. ***Применение определенного интеграла.***

Вычислите площади фигур, ограниченных указанными линиями:

101. Осью Оx, прямыми $x=-1$, $x=2$ и параболой $y=9-x^2$;

102. $y^2 = 9x$, $x = 16$, $x = 25$, $y = 0$;

103. $y = -x^2 + 4$ и $y = 0$;

104. $y = x^2$, $y = 1/x$, $x \in [1; e]$;

105. $y^2 = x$, $y = x^2$;

106. $y = 8+2x-x^2$, $y = x+6$;

107. $xy = 6$ и $x + y - 7 = 0$;

108. $x - 2y + 4 = 0$, $x + y - 5 = 0$, $y = 0$.

109. Вычислите длину гладкой кривой $y = ln(sinx)$ на отрезке $[\pi/3; \pi/2]$.

110. Вычислите объем тела, образованного вращением кривых $y^2 = x$ и $y = x^2$ вокруг оси OX.

6. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Веретенников В. Н. Высшая математика. Математический анализ функций одной переменной. – СПб.: РГГМУ, 2008. – 254 с.

2. Веретенников В. Н. Высшая математика. Множества. Элементы линейной алгебры. Векторная алгебра. Учебные пособия. – СПб.: РГГМУ, 2004.

3. Веретенников В. Н. Математика. Учебно-методическое пособие для выполнения контрольных работ. – СПб.: изд. РГГМУ, 2000. – 68 с.

4. Веретенников В. Н. Определители. Матрицы. Системы линейных алгебраических уравнений. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Индивидуальное домашнее задание. – СПб.: РГГМУ, 2004.

5. Веретенников В. Н. Программа дисциплины “Математика” для высших учебных заведений. – СПб.: изд. РГГМУ, 2007. – 21 с.

6. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Ч. I–III. – М.: Высшая школа, 1980.

7. Ефимов, Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. – М.: Наука, 1970. – 528 с.: с ил.

8. Зайцева И.В. Экономико-математическое моделирование рынка труда: монография НОУ ВПО СКСИ. Ставрополь, 2009. – 116 с.

9. Зайцева И.В., Малафеев О.А. Линейная алгебра с приложениями к математическому анализу и моделированию демографических аспектов интеллектуальной аналитической системы. - Санкт-Петербург, 2021. (2-е издание, переработанное и дополненное). – 382 с.

10. Зайцева И.В., Ржонсницкая Ю.Б. Математика и статистика. - Санкт-Петербург, 2021. – 184 с.

11. Колосова А.А., Степанов В.Е.- Матрицы и определители, решение задач. 18. Льюс, Р.Д. Игры и решения. Введение и критический обзор / Р.Д. Льюс, Х. Райфа. – М.: Издательство иностранной литературы, 1961. – 644 с.

12. Краснов М.Л. и др. Вся высшая математика: Учебник. Т. 1– Т. 3. – М.: Эдиториал УРСС, 2000–2001.

13. Малафеев О. А. О существовании значения игры преследования // Сибирский журнал исследования операций. – 1970. – № 5. – С. 25–36.

14. Малафеев О. А. О существовании обобщенного значения динамической игры // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 1. Математика. Механика. Астрономия. – 1972. – № 4. – С. 41–46.

15. Малафеев О. А. Управляемые конфликтные системы. – СПб.: СПбГУ, 2000. – 280 с.

16. Малафеев О. А., Зубова А. Ф. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости, надежности). – СПб.: Мобильность-плюс, 2006. – 1006 с.

17. Малафеев О. А., Зубова А. Ф. Устойчивость по Ляпунову и колебательность в экономических моделях. – СПб.: Санкт-Петербургский государственный университет, 2001. – 101 с.

18. Малафеев О. А., Муравьев А. И. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 2000. – Т. 1. – 283 с.

19. Малафеев О. А., Муравьев А. И. Математические модели конфликтных ситуаций и их разрешение. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 2001. – Т. 2. – 294 с.

20. Малафеев О. А., Муравьев А. И. Моделирование конфликтных ситуаций в социально-экономических системах. – Санкт-Петербург: Санкт-Петербургский государственный университет экономики и финансов, 1998. – 317 с.

21. Малафеев, О.А. Математическое и компьютерное моделирование социально-экономических систем на уровне многоагентного взаимодействия (введение в проблемы равновесия, устойчивости и надежности) / Малафеев О. А., А. Ф. Зубова. – СПб.: Изд-во СПбГУ, 2006. – 1006 с.

22. Меньшиков, Г. Г. Практические начала интервальных вычислений: учебное пособие / Г.Г. Меньшиков. – Л.: РИО ЛГУ, 1991. – 92 с.

23. Натансон И. П. Краткий курс высшей математики. – СПб: Лань, 1997. – 727 с.

24. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М.: Наука, 1970-1985, т. 1, 2.

25. Рябушко А. П. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: Учебное пособие. В 3 ч. – Мн. Выш. шк., 1991.

26. Щипачев В. С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1985. – 471 с.

Учебное издание

Зайцева Ирина Владимировна,

канд. физ.-мат. наук, доцент, заведующий кафедрой высшей математики и теоретической механики ФГБОУ ВО «Российский государственный гидрометеорологический университет»

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ ЭКОНОМИСТОВ

Печатается в авторской редакции

Подписано в печать 01.07.2022. Формат 60х90 1/16.

Гарнитура Times New Roman. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 7,25. Тираж 10 экз. Заказ № 1158.

РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская, 79.