Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Беликова Г.И., Витковская Л.В.

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие
для иностранных студентов, обучающихся
по программе предвузовской подготовки

РГГМУ

Санкт-Петербург
2016

УДК [808.2 : 800.7 : 51] (073.8)

Рецензенты: Н.И. Герасименко, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и теоретической механики РГГМУ; Л.Е. Травина, ст. преподаватель кафедры русского языка и довузовской подготовки РГГМУ; Е.Н. Бегун, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и физики Санкт-Петербургского государственного института кино и телевидения.

Беликова Г.И., Витковская Л.В. Очерки по истории математики. Учебное пособие для иностранных студентов, обучающихся по программе предвузовской подготовки. — СПб.: РГГМУ, 2016. — 133 с.

«Очерки по истории математики» состоят из историко-биографических эссе, которые помогут студентам расширить кругозор и лексико-грамматические навыки. Эта книга может быть весьма полезной на занятиях по математике, русскому языку, культуре русской речи и истории России.

Belikova G.I., Vitkovskaya L.V. Sketches about mathematics history. The tutorial for foreign students, who study according to before university training program. — St. Petersburg, RSHU Publishers, 2016. — 133 pp.

The book «Sketches about mathematics history» consists of the series history-biography stories. The book will be very useful during learning mathematics, Russian language, Russia history and culture of Russian speech.

Светлой памяти
Татьяны Андреевой

ВВЕДЕНИЕ

Книга «Очерки по истории математики» является вторым приложением к учебному пособию «Математика» для иностранных студентов, обучающихся по программе предвузовской подготовки. Пособие «Математика» состоит из трёх частей: алгебры, геометрии и математического анализа. Этот объём преподаватель должен детально разобрать со студентами за 96 аудиторных часов. При такой интенсивности студенты хорошо усваивают материал, если объект изучения им достаточно интересен. Поэтому возникла идея написать очерки по истории математики, которые студенты могут читать в рамках занятий по русскому языку. Нашу идею поддержали на кафедре русского языка и предвузовской подготовки.

В исторические очерки вошли только те разделы математики, которые разбираются на лекциях и практических занятиях.

Цель этой книги — заинтересовать, увлечь математикой, показать её глубину, красоту, удивительное многообразие и высшую степень обобщённости.

Поскольку иностранные студенты учатся в Санкт-Петербурге и интересуются его историей, мы рассказываем о том, как появилась всемирно известная Петербургская математическая школа, и о тех математиках нашего города, чьи имена встречаются во всех университетских учебниках высшей математики.

Множество математических терминов являются международными, так как имеют греческое или латинское происхождение. Интересна история происхождения этих терминов и их первоначальный смысл. Поэтому в книге представлен этимологический и толковый словарь тех математических терминов, которые встречаются в данном курсе математики.

В настоящее время почти все иностранные студенты знают английский язык. Он часто помогает быстрее понять смысл текста на русском языке. В тексте книги есть небольшое количество слов и словосочетаний, выделенных жирным курсивом. Думаем, что эти слова могут вызывать затруднения при чтении очерков. Поэтому в работе есть небольшой русско-английский словарь (около 900 слов) с их переводом на английский язык.

Надеемся, что эта небольшая книга будет весьма полезна иностранным и российским студентам.

Благодарим наших рецензентов, преподавателей нашего университета: Ларису Евгеньевну Травину — старшего преподавателя кафедры русского языка и предвузовской подготовки и Николая Ивановича Герасименко — кандидата физико-математических наук. Благодарим Евгению Николаевну Бегун — кандидата физико-математических наук, доцента кафедры высшей математики и физики Санкт-Петербургского государственного института кино и телевидения. Спасибо им за доброе и внимательное отношение к нашей работе и ряд ценных замечаний, которые мы учли при редактировании текста.

ГЛАВА 1. ИСТОКИ МАТЕМАТИКИ

Математика настолько серьёзна,
что нужно не упускать случая,
сделать её немного занимательной.
Блез Паскаль

1.1. Древний Вавилон

Математика возникла одновременно с образованием первых ***земледельческих*** государств. Древние вавилонские тексты на ***глиняных*** табличках и египетские тексты на папирусах знакомят нас с ***зарождением*** математики. Это время XXVII–XX вв. до н.э.

Рассмотрим математику Древнего Вавилона (математику Двуречья). Одна из самых древних земледельческих культур мира возникла по берегам двух соседних рек Тигр и Евфрат. Сейчас там расположено государство Ирак. Эти реки капризны. Иногда они разливаются и несут с собой плодородный ил, иногда приносят огромные разрушения, иногда мелеют и приносят засуху.

Для жизни на такой земле необходим согласованный и ***совместный*** труд тысяч людей, поэтому появились города-государства, которые в XXIII в. до н.э. объединились в единое независимое государство.

Это было государство с неограниченной властью царя и ***регулярными*** общественными работами на каналах, плотинах и дамбах. Такими работами руководило ***сословие*** писцов, которые должны были хорошо знать математику, уметь делить земли. Из опыта работы писцов ***постепенно*** сформировалась знаменитая вавилонская алгебра.

Вавилон стал мощным в XIX в. до н.э. (при царе Хаммурапи). Математики Вавилона умели тогда решать линейные и квадратные уравнения. Они решали даже некоторые кубические и биквадратные уравнения, системы линейных и квадратных уравнений с двумя неизвестными. Знали формулы сокращённого умножения. Теорема Пифагора была начертана на глиняных вавилонских табличках за 1 000 лет до рождения самого Пифагора.

Вавилонская математика отличалась хорошо развитым вычислительным искусством. Там умели складывать и вычитать многозначные числа и дроби. Для упрощения процесса умножения и деления составлялись специальные таблицы умножения, таблицы обратных величин, таблицы квадратов, кубов и других степеней. В Вавилоне пользовались шестидесятеричной системой счисления. Оттуда идёт традиция делить градус на 60 минут и минуту на 60 секунд.

1.2. Древний Египет

Математика в Египте широко использовалась в практических целях. До наших дней сохранилось только два папируса из древнего Египта, которые содержат математические задачи. Один из них (папирус Генри Ринда) хранится в Британском музее в Лондоне. Длина этого папируса равна 5 метров, а ширина — 30 сантиметров. В нём записано 84 задачи с решениями. Второй папирус более древний (папирус Голенищева) находится в Москве в Государственном музее изобразительных искусств. Он содержит 25 задач с решениями. Длина этого папируса — около 5 с половиной метров, ширина — всего 8 сантиметров. Большинство задач из папирусов связано с практическим применением геометрии. Эти папирусы являются древнейшими учебниками математики.

Египтяне хорошо знали арифметику, пользовались десятичной системой и дробями вида $1/n$. Арифметика была аддитивной, то есть умножение сводилось к ***повторным*** сложениям. В Древнем Египте решали линейные уравнения, знали прогрессии, использовали свойства подобных фигур и пропорции. Художники и скульпторы использовали в своём творчестве симметрию фигур и линий. Египтяне умели вычислять площади прямоугольника, трапеции, треугольника. Могли найти ***приближённое*** значение площади круга с помощью формулы

$$S = \left(\frac{8}{9}d\right)^2,$$

где d — диаметр круга.

Из этой формулы следует, что в Египте знали число π с хорошей точностью:

$$\pi=3{,}14159.$$

В это же время в Вавилоне и Китае использовали число π, равное трём (π = 3).

Египетские математики оставили потомкам следующие две удивительные загадки. Как они смогли точно вычислить объём усечённой пирамиды с квадратными основаниями? Как они смогли точно вычислить площадь поверхности полусферы?

Математика Египта интересна своими геометрическими открытиями. Математика Вавилона — алгебраическими открытиями. Однако в математике этих стран не было одного из самых главных моментов — доказательства. Правила вычисления заучивались и передавались от одного поколения к другому. Критерием истинности была практика. Использовали и точные формулы, и приближённые. Такого же типа была математика 1,5–3 тысячи лет тому назад в древних государствах, которые находились на территориях современной Индии и Китая.

Математика Вавилона и Египта стала фундаментом для зарождения в Греции математической науки.

1.3. Древняя Греция

Математика в Греции начала развиваться значительно позже и ***заимствовала*** первые сведения по геометрии у Египта, а по алгебре — у Вавилона. Зарождение греческой математики происходило на другой социально-экономической основе. Греция не имела таких ***плодородных*** земель, как в долинах Нила, Тигра и Евфрата.

Постепенно орудия труда ***совершенствовали***, и малоплодородные почвы Греции стали приносить ***прибавочный*** продукт. Появилась материальная база для развития культуры и науки. ***Кроме того***, греки — морской народ. Торговые, рыболовные и ***завоевательные*** плавания ***способствовали*** развитию математических знаний.

В VI в. до н.э. Греция не знала централизации. Она состояла из множества маленьких самостоятельных городов-государств (полисов) с демократической формой управления. В некоторых полисах жило менее ста человек. В Афинах — не более трёхсот тысяч.

Ремесленники, ***купцы***, ***матросы***, земледельцы решали на народных собраниях государственные дела, избирали военачальников и многочисленных членов судов. Почти каждый гражданин участвовал в судах, привыкал к логике доказательств.

Греческая математика — творение свободных людей, которые привыкли рассуждать, ***слушать доводы*** и, если это необходимо, ***оспаривать*** их. Математика помогала грекам связывать идеи в логические ***цепочки***.

Характерные черты греческой математики — огромный интерес к чисто теоретическим вопросам и особое внимание к строгости доказательств. Так, великий греческий философ Платон считал, что только строгое доказательство, а не наши ***чувства*** может установить истину. Греки развивали математику для нахождения законов, ***управляющих миром***. Они считали, что такие законы можно ***свести к*** числу. Основой греческой математики стали рассуждения и доказательства. Благодаря этому греки за десятилетия ***превзошли достижения*** Египта и Вавилона, которые складывались в течение многих веков. Греки достаточно быстро доказали теоремы о свойствах прямоугольников, параллелограммов и других геометрических фигур.

Отцом греческой науки был Фалес Милетский. Он стал первым астрономом, первым физиком и первым геометром.

Фалес Милетский (Θαληδ, около 640–545 до н.э.)

Потомок знатного рода — Фалес Милетский родился и большую часть жизни прожил в портовом городе Милет, крупнейшем торговом центре Древней Греции.

Фалес — купец, политический деятель, философ, астроном и математик. Он первый ввёл понятие «доказательство» как вывод некоторого утверждения из других, более ***очевидных*** и верных ***утверждений***. В геометрии Фалес доказал:

- теорему Фалеса;
- теорему о том, что угол, вписанный в полуокружность, — прямой;
- теорему о равенстве двух треугольников по двум углам и стороне между ними;
- теорему о том, что диаметр делит круг пополам;
- теорему о равенстве двух углов при основании равнобедренного треугольника;
- теорему о том, что при пересечении двух прямых образуются два равных вертикальных угла.

Фалес много путешествовал по Египту и Вавилону. Он изучил математические школы этих стран. После возвращения Фалес основал у себя на родине милетскую ионийскую школу, в которой учились многие греческие математики и философы. В этой школе впервые в Европе систематически изучали астрономию, физику, географию, метеорологию, биологию и математику.

Фалес оставил потомкам много мудрых ***высказываний***, некоторые из них помнят и сейчас:

- *Что на свете трудно? — Познать себя.*
- *А что легко? — Советовать другим.*
- *Кто счастлив? — Тот, кто здоров телом и душой.*
- *Больше всего — пространство.*
- *Быстрее всего — мысль.*

— *Мудрее всего — время.*

— *Блаженство тела состоит в здоровье, блаженство ума — в знании.*

Фалес Милетский считается духовным отцом Пифагора.

Пифагор (Πυθαγορας, около 570–500 до н.э.)

Имя великого греческого математика Пифагора окружено легендами и мифами. Вся его жизнь — легенда.

Пифагор родился в греческом городе Самос. Сейчас этот город называется Пифагорионом.

Пифагор получил хорошее воспитание и образование. С раннего детства он полюбил музыку и поэзию Гомера. Всю жизнь Пифагор часто по утрам напевал песни Гомера и играл на лире.

Пифагор вырос крепким и смелым юношей, увлекался спортом. Однажды его не хотели допускать к соревнованиям на олимпийские игры из-за его маленького роста. Но ему удалось попасть на эти игры. Никому не известный Пифагор завоевал золотую медаль в ***кулачных боях***.

Около 550 г. до н.э. Пифагор покинул родительский дом. Побывал в Милете, где встречался и много общался со знаменитым старцем Фалесом. В ту эпоху греки боготворили культуру Египта, считали себя детьми по сравнению с египетской цивилизацией. Фалес сам в молодости учился у египетских жрецов. По его совету Пифагор в 548 г. до н.э. прибыл в Египет учиться мудрости. Через 11 лет Пифагор решил вернуться в Грецию.

Но по дороге домой он столкнулся с отрядом Вавилонского царя и попал в плен к персам. Пифагора отправили в Вавилон. Там он прожил ещё 6 долгих лет.

Есть три версии освобождения Пифагора. Одна версия — Пифагора выкупили греки. Вторая — персидский царь Дарий подарил Пифагору свободу. Третья версия — Пифагор сам вырвался из плена.

Пифагор вернулся на родину, когда ему было уже 56 лет. Потом переехал на Сицилию, где находилась греческая колония Иония.

Он прекрасно знал астрономию, астрологию, философию, религию, арифметику, геометрию, музыку и в результате разработал свою систему знаний и своё отношение к окружающему миру. Сила личности, мудрость Пифагора, его философские взгляды привлекли к нему многочисленных единомышленников. Пифагор вместе со своими друзьями организовал религиозно-философское братство и школу в городе Кротон. Так появилась знаменитая школа Пифагора.

Пифагорейская система знаний состояла из четырёх частей: арифметики, геометрии, астрономии и музыки. Следует отметить, что в

Древней Греции музыка считалась частью математики, а её теория была разделом теории чисел. Именно в музыке Пифагор нашёл доказательство своей знаменитой фразы: *«Всё есть число»*.

Систему знаний в школе Пифагора стали называть одним словом «матема», или математика, что означает — учение через размышление.

В Средние века к этой системе добавили грамматику, риторику и диалектику. Такая программа образования получила знаменитое название «Семь свободных искусств».

Трудно сказать, какие научные идеи принадлежали Пифагору, какие — его воспитанникам. Пифагор не записал своего учения. Оно известно только в пересказах Аристотеля и Платона.

Пифагорейцы были уверены, что у чисел есть божественная сила. Чётные числа они считали более разумными. Цифра 4 у них была символом здоровья и гармонии. Мистика цифр дожила до наших дней. Через много веков после смерти Пифагора число 12 стало знаком счастья, число 666 — числом зверя.

Основой философии школы Пифагора был девиз: «Всё есть число». Смысл этого девиза — ***вселенная*** подчиняется определённым законам, которые можно описать с помощью чисел. Многие хорошо известные в наше время свойства чисел были впервые описаны Пифагором.

Интересно отметить, что некоторые научные термины появились благодаря Пифагору: он — первый из философов, который назвал себя греческим словом «φιλοσφος (философ) — любитель мудрости»; первый назвал звёздный мир греческим словом «κοσμος (космос) — порядок, совершенство»; первый ввёл в математику термины: теория, теорема, параллельность.

Пифагор был уверен, что цель жизни — стремление к ***совершенству***. Совершенства можно ***достигнуть***, если исполнять (выполнять) созданную им систему нравственных правил. Многие из этих правил актуальны и сейчас. Познакомимся с некоторыми из них:

- *Будь справедлив и в словах и в делах.*
- *Великий талант жить счастливо заключается в умении радоваться сегодняшнему дню.*
- *Делай великое, не **обещая** великого.*
- *Начало есть половина дела.*
- *Не **гоняйся** за счастьем: оно находится в тебе самом.*
- *Не делай ничего **постыдного** ни при людях, ни в **одиночестве**. Твоим первым законом должно быть **уважение** к самому себе.*

Пифагор Самосский считается первым чистым математиком и основоположником современной математики. Он первый открыл человечеству могущество абстрактного знания.

Через 70 лет после смерти Пифагора на греческих монетах впервые появилось подписанное изображение человека. Это было изображение Пифагора с подписью ΠΥΘΑΓΟΡΗΣ.

Эпоха эллинизма

В результате завоевательных походов Александра Македонского была создана огромная империя, которая ***простиралась*** от Индии до Египта.

На этой территории стали возникать эллинистические государства, в которых проживало много греков. Они хранили и развивали свою уникальную культуру и традиции. Цари часто становились ***покровителями*** наук и искусства. Особую роль в расцвете эллинистической культуры сыграли цари из династии Птолемеев, которая царствовала почти 300 лет (последней была царица Клеопатра). В новой столице Египта (Александрии) Птолемей I основал Мусейон (дом муз), где работали и получали от государства вознаграждение многие видные учёные. В библиотеке дома муз собрали огромное научное и литературное наследие греков, хранили около 700 тысяч томов рукописных книг. Изучали литературу, математику, астрономию и медицину, но математика стояла на первом месте, к ней было особое отношение.

Постепенно в Мусейоне сформировалась первая в истории научная математическая Александрийская школа, основными традициями которой стали абсолютная строгость в доказательствах и геометрический стиль изложения.

К научной школе Александрии принадлежали Евклид, Архимед и Апполоний.

Евклид (Ευκλειδης, около 365–300 до н.э.)

Евклид — автор первых дошедших до нас теоретических трактатов о математике. Его знаменитый труд «Начала» состоит из 13 книг. В этой работе ***представлены*** планиметрия, стереометрия, учение об отношениях, геометрическая алгебра, решение квадратных уравнений.

«Начала» — результат собирания и систематизации работ великих предшественников и собственного творчества Евклида. Работа стала образцом научной строгости. В ней более сложные предложения выводятся из нескольких определений и аксиом, которые принимаются без доказательств.

Постоянно использовали «Начала» в своей работе Николай Коперник (Coppernicus, Nicolaus, 1473–1543) и Галилей (Galilei, Galileo, 1564–1642). Геометрией Евклида восхищался Альберт Эйнштейн

(Einstein, Albert, 1879–1955): *«Это удивительное произведение мысли дало человеческому разуму уверенность в себе, которая была необходима для последующей деятельности...»*.

К сожалению, ***подлинные*** работы древних греческих математиков до нас не дошли. Они известны только в письменных пересказах математиков более поздней эпохи. Только в 1482 г. в Венеции вышло первое печатное издание «Начал» на латинском языке. После изобретения ***книгопечатания*** появилась тысяча ***изданий*** «Начал». Это самый популярный математический труд в истории человечества.

Первые шесть книг «Начал» — основа нашей школьной геометрии. Трактат Евклида часто изучали для ***тренировки ума*** в логических ***построениях*** и для воспитания чувства ***прекрасного***. В английских частных школах в XVIII–XIX вв. школьников (будущих джентльменов) учили геометрии по Евклиду для того, чтобы они потом могли логично ***выражать*** свои мысли на выступлениях в судах, в администрации или парламенте.

О жизни Евклида (IV–III вв. до н.э.) не сохранилось ***достоверных*** сведений. Осталось лишь несколько старинных анекдотов о нём.

В одном анекдоте говорится, что царь Птолемей, покровитель Евклида, спросил: *«Неужели и ему, царю, для изучения геометрии нужно идти столь* ***трудным путём****, изучая леммы и теоремы, которые непонятно как* ***связаны*** *между собой?»* Евклид ***гордо*** ответил, что в математике и для царей нет лёгкого пути.

Архимед (Αρχιμηδης, 287–212 до н.э.)

Архимед — великий математик эпохи эллинизма и всего древнего мира. Он один из немногих учёных античности, о котором сохранились отдельные ***сведения***. Отец Архимеда — математик и астроном, состоял в близком ***родстве*** с царём Гиероном.

Архимед с детства дружил с миром чисел. Большую часть жизни он прожил в Сиракузах, окружённый ***почётом*** и ***вниманием***. Легенды говорят о том, что он настолько ***увлекался*** математикой и механикой, что забывал о еде и чертил везде: в ***пыли***, ***пепле***, на ***песке***, даже на собственном теле. Некоторые свои ***открытия*** он не записывал, поэтому мы никогда не узнаем, как ему удалось правильно извлекать квадратные корни из очень больших чисел (в то время не было правил извлечения корней).

Велики и многочисленны труды Архимеда по астрономии, геометрии, механике. Он доказал теоремы о площадях плоских фигур и об объёмах тел. Нашёл приближённое выражение для длины окружности, с помощью вписанных и описанных правильных многоугольников.

Архимед определил площадь круга, площадь поверхности шара и сферического сегмента; вычислил объёмы шара, параболоида и эллипсоида.

Эти задачи ***предшествовали*** интегральному исчислению, которое было разработано только в конце XVII в., через два тысячелетия после Архимеда. Обилие вычислений отличает его от большинства математиков Греции. Архимед — редчайшее в науке сочетание высокого теоретика с виртуозным инженером.

В трудах Плутарха описана ***осада*** Сиракуз римским полководцем Марцелом. Десятки ***катапульт*** и метательных машин, созданных Архимедом, ***метали камни*** и ***тучи копий*** во ***вражеские корабли***. Марцелл невесело шутил: *«Что ж, придётся нам прекратить войну против геометра»*. Архимед победил. Он совершил научный и гражданский подвиг. Когда ***предатели*** открыли римлянам ***ворота*** в город, он ***погиб*** как солдат от ***меча*** римского легионера.

На своей ***могильной плите*** Архимед ***заранее*** попросил изобразить шар и цилиндр — символы его геометрических открытий.

Аполлоний (Απολλονιος, 262–190 до н.э.)

Греческого математика Аполлония при жизни называли Великим геометром. Слава к нему пришла после создания книги «Конические сечения». Аполлоний ввёл в математику названия кривых второго порядка: парабола, гипербола, эллипс. Разработал теорию построения этих кривых, изучил и доказал их свойства используя только геометрию. В результате он построил законченную теорию кривых второго порядка, которую перевели на алгебраический язык Декарт и Ферма — создатели аналитической геометрии.

Теория Аполлония широко использовалась в астрономии начиная с XIV в. Иоган Кеплер (Kepler, Johann, 1571–1630) открыл, что траектории движения планет — эллипсы. Было доказано, что траекториями движения комет могут быть только гиперболы, параболы и эллипсы.

Остальные труды Аполлония не сохранились. Сейчас известны только их названия.

ГЛАВА 2. АРИФМЕТИКА

Мир построен на силе чисел.
Пифагор

2.1. Натуральные числа

Слово «арифметика» происходит от греческого «αριθμοζ», что означает «число». Греки считали числами только целые числа больше единицы, поэтому греческая арифметика была наукой о целых числах. Кроме арифметики была ещё наука «логистика», которая занималась счётом и правилами операций с числами.

История возникновения и эволюции понятия «натуральное число» — это часть истории культуры языка, литературы и религии.

Термин «натуральное число» впервые использовал римский математик Боэций (Boethius, 475–524). Этот термин встречается в рукописях XI в. Понятие «натуральное число» в ***современном смысле*** стал ***использовать*** французский математик и философ Жан Лерон Даламбер (d'Alembert Jean le Rond, 1717–1783). Он включил это понятие во французскую энциклопедию. С этого времени термин «натуральное число» используется в математике ***повсюду***.

Наибольшее натуральное число, ***освоенное*** на определённом ***этапе*** в древнем мире, имело ***ореол чудесного***. Такие числа становились основанием для ***возникновения суеверий***. Примером такого числа является цифра 7.

Магическая семёрка в культуре различных народов имела значение максимума: семь чудес света, семь мудрецов, семь великих богов Древнего Шумера, семь Духов в египетской религии. Француз даёт самую сильную клятву словами: *«крепко, как семь»*. Счастливый человек чувствует себя на седьмом небе (считает себя «бесконечно» счастливым).

В таком же смысле используется число семь во многих русских пословицах и поговорках:

– *У семи нянек дитя без глазу.*
– *Семь раз отмерь, один раз отрежь.*
– *За семь вёрст кисели хлебать.*
– *Семеро одного не ждут.*
– *Семь бед — один ответ.*

Про то, что нам совершенно непонятно, мы и теперь говорим, что эта книга «за семью печатями», а в сказках рассказывают о «семимильных сапогах».

Исследования в инженерной психологии ***подтверждают***, что число семь действительно связано с максимумом. Например, оптимальный размер первичного научного или военного коллектива равен семи. Максимальное число одинаковых по структуре элементов, которые может ***надёжно*** контролировать один человек, равно семи.

Распространены суеверия, связанные с числом 13. В некоторых американских домах нет тринадцатого этажа, в гостиницах нет тринадцатого номера. Мысль о том, что число тринадцать приносит несчастье, могла возникнуть после освоения числового ряда до двенадцати.

Особая роль отдельных натуральных чисел в истории культуры говорит о том, что человек с большим трудом строил этот числовой ряд. Прошли тысячелетия, пока люди поняли, что не существует наибольшего числа. Размышления о бесконечном числе натуральных чисел можно найти в сочинениях Архимеда.

Многим числам придавали глубокий смысл, они были символами различных понятий:

1 — символ мудрости (по Пифагору).

2 — символ невежества, но и мать мудрости.

3 — символ разделения мира: небеса, земля, подземный мир; символ разделения времени: прошедшее, настоящее и будущее. Число 3 — священное число.

4 — символ устойчивости, гармонии и здоровья.

5 — символ человека.

6 — символ шести индусских измерений пространства: вниз, вверх, назад, вперёд, налево, направо. В Индии число 6 считается священным.

7 — символ духовного таинства.

8 — символ гармонии, любви, соглашения (по Пифагору).

9 — символ физической природы человека, символ вечности материи, символ ошибок и недостатков, считается агрессивным числом.

10 — символ познания вселенной.

12 — символ гармонии (двенадцать знаков Зодиака, двенадцать апостолов).

13 — символ таинственной силы (тринадцать лунных месяцев в году), несчастливое число, его называют «чёртова дюжина».

20 — символ человека (у народов майя).

21 — символ совершенства. Самое совершенное из всех нечётных чисел, так как оно равно произведению двух священных чисел трёх и семи.

22 — символ трансформации духа и тела. Это ***сакральное*** число, оно равно числу букв еврейского алфавита

Нечётность символизирует ***незавершённость***, постоянное ***продолжение***. Поэтому в ***орнаментах***, в ***украшениях*** архитектурных или скульптурных ***сооружений*** обычно используется нечётное число элементов.

2.2. Пальцевый счёт

Единственной причиной появления десятичной системы счисления является количество пальцев. Десять пальцев — стандартное множество, с которым первобытный человек количественно сравнивал другие множества. В английском языке до сих пор первые десять чисел называют словом «digits», которое произошло от латинского слова «digitus — палец».

В римской арифметике цифра один обозначает один палец, пять — рука, десять — две руки. Выражение «десятичная система счисления» стало широко использоваться только с конца XVIII в.

Пальцевый счёт — обозначение чисел при помощи пальцев, был необходим в торговле разноязычных народов. Этому счёту обучали детей в школах. Двадцатеричная система счисления имела в основе пальцевый счёт. Об исторической роли пальцевого счёта говорят названия чисел в некоторых языках. Число пять называется «рука», десять — «две руки», двадцать — «весь человек».

2.3. Системы счисления

В качестве основания системы счисления можно формально взять любое число. Это положение было высказано ещё в 1665 г. французским математиком Блезом Паскалем.

Различные системы счисления использовались задолго до десятичной. Следы пятеричной системы счисления сохранились в римской письменной нумерации, в устройстве китайских и японских счётов. У некоторых африканских племён тоже была пятеричная система счисления.

Когда-то у народов Франции была двадцатеричная система. Она оставила следы в современном французском языке. Название чисел 80, 90 пишут так: quatre-vingts, quatre-vingts-dix. Известный роман Виктора Гюго «93-й год» на французском языке пишется «Quatre-vingts-treize». В английском языке среди многих значений слова «score» есть числовое — двадцать. Число 60 — three score, 80 — four score и т.д.

Шестидесятеричная система счисления была разработана в Древнем Вавилоне. Шестидесятеричные дроби были похожи на наши десятичные дроби. Во всём мире до сих пор используют вавилонские дроби при измерении времени.

О существовании когда-то двенадцатеричной системы счисления говорит традиция считать некоторые предметы, например, тарелки, вилки, предметы белья — дюжинами (12) и гроссами (Gross-большой, «большая дюжина» — 144).

Двоичная система счисления существовала в Китае. Изобрёл её император Фо Ги, который жил в четвёртом тысячелетии до новой эры. Мысли о преимуществе десятичной системы появились в Китае гораздо раньше, чем у европейцев и американцев.

Позиционная десятичная система возникла в Индии не позже начала нашей эры. В основе этого ***совершенного*** изобретения лежит изображение нуля. Французский математик Лаплас (Laplace Pierre, 1749–1827) писал о позиционной системе: *«Удивительно проста мысль — выражать все числа знаками, значения которых зависят от их формы и от места в числе. Как нелегко было прийти к этому, видно на примере таких гениев как Архимед и Апполоний. Для них эта мысль осталась* ***скрытой****»*.

Только к концу XII в. индийская система завоёвала Европу и вытеснила римскую систему. Это произошло благодаря ***уроженцу*** города Пиза (Италия) купцу Леонардо Фибоначчи (Leonardo Pisano, Fibonacci около 1170–1250).

Его отец был ***консулом*** в одном из ***портов*** Алжира, который входил в состав арабской империи. Леонардо получил очень хорошее образование в арабской школе Алжира. Вот что он вспоминал о своей школе: «Прекрасные преподаватели обучили меня искусству обращения с десятью индийскими символами. Искусство вычислений стало приносить мне ***высочайшее наслаждение***».

Фибоначчи много путешествовал и вернулся в Пизу только в 1200 г. Он написал несколько математических трудов, среди которых «Книга о вычислениях», или «Книга абака», стала научным шедевром. Она написана на латинском языке и опубликована в Пизе в 1202 г. В книге рассказывается о новых индийских обозначениях цифр, о сложении, вычитании, умножении и делении чисел. Объясняются действия с дробями. Есть сведения из геометрии и алгебры. Объём книги составляет 459 страниц. Эта книга стала математической энциклопедией Средневековья.

Многие годы книги Фибоначчи использовали в Европе как учебники. До наших дней дошли труды этого прекрасного математика, ***несмотря на то***, что во времена Фибоначчи ***тиражи*** книг делали вручную.

Новая арифметика распространялась благодаря появлению ***светских*** школ и изобретению книгопечатания. Книги по математике стали более дешёвыми и многочисленными. Первый печатный учебник математики появился в 1475 г.

2.4. Происхождение некоторых названий чисел

Чёрные дыры во Вселенной образовались там,
где Бог поделил на ноль.
Из книги «Математики тоже шутят»

Особое место в позиционной системе занимает число 0. У нуля не было геометрического образа, поэтому он очень долго и тяжело входил в мир чисел. Ноль признали числом только в XVII в. после работ Рене Декарта.

Число ноль ***возникло*** в Индии. Только там увлекались огромными числами. Например, у индусов было 68 000 божеств, у брамов сто миллионов божеств. В легенде о мудром Арджуме пытались вычислить количество всех ***мельчайших*** частиц во вселенной. Именно индийский ум создал понятие ***«небытия»***, которое играет важную роль в буддийской философии. Всё это привело к введению знака, который обозначал отсутствие цифры. Индусы называли такой знак словом «sunya», что значит «пустой». Арабы перевели это слово по смыслу и получили слово «al-sifr». Леонардо Фибоначчи нашёл соответствующее слово в латинском языке, поэтому называл в своей книге современный ноль словом «zephirum». Отсюда произошло французское и английское слово «zero» для обозначения нуля. Сторонники индийской нумерации в Италии сохранили арабское звучание «cifra», которое с XIII в. перешло во все европейские языки. На французском — «chiffre», на немецком — «ziffer», на английском — «cipher».

В латинских переводах арабских трактатов XII в. знак «0» назывался кружком «ciculus или nulla figura — никакой знак». В XV в. итальянцы заменили арабское слово «cifra» словом «nulla». Его заимствовали немцы и стали писать «null». Из Германии нуль перешёл в Россию. Введение нового термина освободило арабское слово «cifra» от значения 0

Слово «цифра» очень долго использовалось для обозначения нуля. Ещё в 1783 г. Эйлер использовал вместо слова «ноль» термин «цифра». Также поступал Гаусс. В Англии такое же использование слова можно было встретить в произведениях Шекспира и Теккерея. Английское слово «cipher» до сих пор сохраняет значение «ноль».

В России в конце XVIII в. число 0 называли цифрой. В это же время появилось в русском языке слово «нуль», а позже «ноль». Постепенно словом «цифра» стали называть изображение любого числового знака: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Грамматический состав русских слов числительных обычно понятен. К таким словам можно отнести слова: одиннадцать, двадцать, тридцать, полтора. Этимология двух числительных «сорок» и «девяносто» не так очевидна. Корень слова «сорок» тот же, что в слове «сорочка» (рубаха). На полную шубу шло 40 штук ***соболей***. Собольи шкуры играли роль единицы ценности. Сорок соболей, составляющие полную шубу, также служили единицей ценности. Постепенно это слово приобрело современный смысл.

Можно привести несколько ***аналогичных переносов*** терминов с ***конкретного*** счёта в абстрактный счёт. Римская унция была первоначально мерой веса, равной $1/12$ основной меры веса, позже унция стала названием дроби $1/12$. Датское слово «ol» — название числа 80 означает ***шест***. На шест ***надевали*** именно 80 рыб.

Русское числительное «девяносто» объясняется просто. Девяносто — это число «девять до ста». Так же образовано название числа 90 в греческом и латинском языках.

В древней Греции некоторые числа обозначались первыми буквами названий этих чисел: 5 (пента), 10 (дека), 1 000 (хилиой), 10 000 (мириой). Эти названия продолжают жить в современных терминах: пентаграмма, пентагон, километр, мириады.

В России в допетровскую эпоху числа выражались буквами, как у греков. Некоторые очень большие числа имели свои уникальные названия. Так, число 10 000 называлось, как у татар, словом ***«туман»***. Число 6 000 — «легион» от латинского слова «legio», что означает отряд из шести тысяч солдат.

Для обозначения любого числа использовали латинское слово «numerous». Это слово до сих пор есть во всех европейских языках и используется в таком же смысле.

ГЛАВА 3. АЛГЕБРА

Алгебра щедра, она даёт больше,
чем у неё спрашивают.
Даламбер (1717–1783)
(французский математик и философ)

3.1. Арабский этап

Начиная с V в. центр математической культуры ***переместился*** на восток к индусам и арабам.

Основные достижения индусов — введение в обращение десятичных цифр и позиционной системы записи чисел. Они ввели отрицательные числа и обозначение степеней. Распространили правила действия с рациональными числами на иррациональные числа. ***Обнаружили*** двузначность квадратного корня. Индусы улучшили алгебраическую символику.

Дальнейшее развитие алгебры связано с арабами.

Государство арабов возникло на Аравийском полуострове в VII в. За удивительно короткое время оно подчинило себе Западную Азию, Северную Африку, Португалию и Испанию. На этом огромном пространстве появились ***благоприятные*** условия для совместного ***развития*** восточной и западной культур. Одно из таких условий — ***удачное*** расположение Багдада — столицы этого государства.

Наука развивалась в обстановке широкого международного общения и поддержки правителей и меценатов. Многие учёные арабского востока были персами, таджиками, узбеками, египтянами, евреями, маврами. Они писали свои научные труды на арабском языке, потому что этот язык был общим языком арабского востока.

Начиная с IX в. и в течение шести столетий арабы собирали культурное наследие тех стран, которые они покорили. Переводили на арабский язык научные труды народов Европы и Азии. Многие математические труды древних греков известны в настоящее время только по арабским переводам. К концу IX в. на арабский язык перевели почти все труды Евклида и Архимеда.

Огромен вклад арабских и среднеазиатских народов в процесс распространения индийской позиционной системы. Арабы освоили позиционную систему нумерации и до сих пор называют её индийской.

Мухаммед ибн Мусса-ал-Хорезми (780–850)

Алгебра стала самостоятельной математической наукой благодаря учёным Средней Азии, которые жили на территории современного Узбекистана и Таджикистана.

Одним из таких учёных был математик Мухаммед ибн Мусса-ал-Хорезми. Он написал учебник по арифметике, используя индийскую позиционную систему счисления. После этого цифры, лежащие в основе индийской позиционной системы, стали называть арабскими.

В учебнике Муссы-ал-Хорезми представлены решения практических задач. Теоретическая часть книги — алгебра. Оригинал этой книги потерян, но в 1857 г. нашли её латинский перевод XII в. под названием «Алхорезми об индийском числе». Этот перевод начинается словами: *Dixit Algorihmi* (сказал ал-Хорезми). Отсюда произошло слово «алгоритм», которое означает правило выполнения операций в определённом порядке.

В начале IX в. Мухаммед ал-Хорезми вновь написал учебник по алгебре «Краткая книга об исчислении ал-джабра и ал-мукабалы» о числовом и геометрическом решении уравнений первой и второй степеней. Это первый учебник алгебры, по которому позже учились в Европе.

Название книги соответствует операциям при решении уравнений. Слово «Ал-джабр» означает восстановление отрицательного члена в одной части уравнения в виде положительного в другой. От этого слова позже появилось слово «алгебра». Слово «Ал-мукабала» означает приведение подобных членов к одному члену.

Омар Хайям (1048–1131)

Многое сделал для дальнейшего развития алгебры великий таджикский и персидский поэт, философ, астроном и математик Омар Хайям. Он родился в городе Нишапур. Это был один из главных культурных центров Ирана с большими библиотеками, средними и высшими школами. В родном городе Хайям получил хорошее образование и продолжил его в Самарканде, где изучил мусульманское право и медицину. Но постепенно математика и астрономия вышли на первое место.

Математика была интересна Хайяму с раннего детства. Ещё в школьном возрасте он занимался проблемой извлечения корня любой целой степени из целого числа и написал работу «Проблемы арифметики». Наиболее важен в алгебре его труд «Трактат о доказательствах задач алгебры и ал-мукабалы». В этой работе он представил геометрический способ решения уравнений третьего порядка. Хайям безуспешно пытался найти правило решения кубического уравнения в общем виде.

До нашего времени дошла прекрасная поэзия Омара Хайяма. Его замечательные четверостишья (рубаи) знают во всём мире. Здесь мы приводим одно из хорошо известных четверостиший Хайяма.

«Чтоб мудро жизнь прожить, знать надобно немало.
Два важных правила запомни для начала:
Ты лучше голодай, чем, что попало есть,
И лучше будь один, чем вместе с кем попало».

По легенде Омар Хайям писал свои рубаи в перерывах между занятиями математикой и астрономией.

Далее мы рассмотрим, как развивалась алгебра в странах западной Европы.

3.2. Италия

Только в XII–XIII вв. в Европе стали ***интенсивно*** переводить с арабского языка на латынь много математической и философской литературы и изучать ***наследие*** древних греков и арабов.

Леонардо Пизанский, Фибоначчи (Leonardo Pisano, 1170–1250)

Фибоначчи — первый европейский математик, который внес большой ***вклад*** в процесс ***становления*** математической науки в Европе. В его «Книге абака» арифметика и алгебра линейных и квадратичных уравнений представлены с редкой для того времени строгостью и полнотой. Задачи Леонардо и способы их решения ***разошлись*** в XV–XVI вв. по многим книгам на разных языках. Они встречаются даже в знаменитой «Алгебре» Эйлера, изданной в 1769 г.

Лука Пачоли (Pacioli, Luca, 1445–1514)

Выдающимся алгебраистом своего времени стал итальянский монах Лука Пачоли, близкий друг Леонардо да Винчи (Leonardo da Vinci, 1452–1519). Пачоли называл алгебру великим искусством. Он ввёл в алгебру буквенные обозначения, дал обозначения квадратным и кубическим корням. Для обозначения операции сложения он пользовался знаком $\widetilde{p}$ (plus — больше), для вычитания — знаком $\widetilde{m}$ (minus — меньше). Пачоли описал правила умножения чисел, перед которыми стоят эти знаки. Интересно, что Пачоли сосчитал количество металла, необходимого для ***статуи всадника***, созданной Леонардо да Винчи.

В XVI в. произошло величайшее открытие в алгебре. Удалось решить в общем виде уравнения третьей и четвёртой степеней. Сделали это итальянские математики.

Проблема нахождения общих решений таких уравнений ***волновала*** математиков в течение двух тысячелетий. Известно, что в 1505 г. итальянский математик Ферро нашел решение кубического уравнения, но держал это решение в ***секрете***. Он показал формулы корней уравнения только своему ученику Фиоре.

Обладание общим методом решения некоторого класса задач давало учёному большие ***преимущества перед*** другими математиками. В те времена получил распространение особый вид общения учёных — научный турнир. Два математика предлагали друг другу решить несколько десятков задач. Выигрывает поединок тот, кто решит бо́льше задач. Победитель получал денежный приз и известность. Ему предлагали ***должности*** на ***выгодных условиях***.

Николо Тарталья (Tartaglia, Niccolo, 1499–1557)

В одном из поединков, 12 февраля 1535 г., Фиоре встретился с Николо Тартальей, выдающимся итальянским математиком. Тарталья предполагал, что легко победит Фиоре, но, узнав, что Фиоре знаком с секретом решения кубических уравнений, Тарталья сам вывел такие формулы решения. К диспуту каждый участник подготовил 30 разных задач, связанных с кубическими уравнениями. Текст задач отдали на хранение нотариусу. За каждую решенную задачу давали 5 сольди. В день диспута Тарталья в течение двух часов решил все задачи. Фиоре не решил ни одной.

Популярность Тартальи сильно возросла. Его пригласили преподавать математику в Вероне и Венеции.

Николо Тарталья, настоящая фамилия которого Фонтано, прожил достаточно тяжелую жизнь. Шестилетним мальчиком, в 1506 г., он вместе с родителями спасался в церкви от жестокости французских войск. Старинный ***обычай*** прятаться в храме не ***уберёг*** ребёнка. Тарталье ***поранили*** мечом горло. После этого он остался на всю жизнь ***заикой*** и получил прозвище «tartaglia — заика».

Из-за ***бедности*** Тарталья не получил систематического образования. Мать Тартальи рано ***овдовела*** и смогла оплатить только начальный этап учёбы. Дальше он учился самостоятельно и ***проявил*** необыкновенную любовь к учению. В доме не было бумаги; это не остановило мальчика. Он упражнялся в письме и счёте на могильных плитах. В книге «Вопросы и различные изобретения» Тарталья пишет: *«С тех пор я учился сам, и у меня не было другого* ***наставника****, кроме* ***спутницы*** *бедности —* ***предприимчивости****»*.

Кардано (Cardano, Girolamo, 1501–1576)

Завершил построение алгоритма решения кубических уравнений Кардано — знаменитый учёный эпохи Возрождения. Он занимался философией, астрологией, медициной и математикой.

Джироламо Кардано с детства увлекался математикой. К двенадцати годам он изучил первые шесть книг «Начал» Евклида. Несмотря на огромную любовь к математике, Кардано поступил на медицинский факультет университета. Он мечтал оставить после себя как можно более значительный след, поэтому он учился следить за своим ***слабым здоровьем***. Во время обучения в университете Джироламо ***замещал*** в гимназиях профессоров: читал студентам лекции по геометрии, философии и диалектике. Кардано сам удивлялся тому, как мог без ***усталости усвоить*** столько самых ***разнообразных*** знаний.

В 1525 г. Кардано окончил университет и стал доктором медицины. Первая медицинская практика у него сложилась очень неудачно. Поэтому он какое-то время не работал, а занимался укреплением своего здоровья. Кардано уделял много времени физическим упражнениям — верховой езде, фехтованию, плаванию.

С помощью ***влиятельных*** друзей Кардано получил место преподавателя геометрии и математики в одной из школ Милана, где раньше работал его отец, а затем и место врача. В эти годы он написал много работ по медицине, философии и математике.

В 1539 г. была опубликована первая книга Кардано по математике — «Практическая арифметика». Книгу встретили очень холодно на родине автора и очень хорошо во Франции и Германии. В Нюрнберге выпустили книгу вторым изданием. В начале книги Кардано написал изречение: *«Никто не пророк в своём отечестве»*.

Издатель книги предложил Кардано написать новую большую книгу — энциклопедию всего известного в арифметике и алгебре. Кардано хотел поместить в такую книгу решения кубических уравнений. Он отправил Тарталье письмо с просьбой сообщить его способ решения.

Тарталья отказался. Но после очень долгих ***уговоров*** он приехал в Милан и встретился с Кардано, который ***поклялся*** на Евангелии никому не раскрывать секрет решения. Тарталья поверил клятве и рассказал свой способ решения.

В 1545 г. вышла знаменитая книга Кардано «Великое искусство, или об алгебраических правилах», содержащая решение уравнений третьей степени. Автор книги написал, что Тарталье принадлежит ***честь*** открытия. Несмотря на его ***признание***, формула для решения уравнений третьей степени и сейчас носит название «формула Кардано».

Феррари (Ferrari, 1522–1565)

В книге «Великое искусство...» впервые опубликовано решение уравнений четвёртой степени. Решил эту задачу 23-летний Феррари — ученик и воспитанник Кардано.

О Феррари известно немного. Он родом из Болоньи. Его отца убили французы. Ребёнком он ***скитался*** по стране и зарабатывал на жизнь чтением и письмом (тогда грамотность была ***редкостью***). Каким-то образом в Милане он попал в дом Кардано. Хозяин дома сразу заметил уникальные способности мальчика и его любовь к учению. Феррари быстро освоил латинский и греческий языки, математику, помогал Кардано ***оформлять*** книги.

К моменту очередного математического турнира с Тартальей Феррари уже овладел вершинами математики. После победы над Тартальей он получил выгодные предложения от кардинала города Мантуя и даже от короля.

3.3. Франция

Я мыслю, следовательно, я существую.
Рене Декарт

Франсуа Виет (Viéte, Francois, 1540–1603)

Фамилия французского математика XVI в. Франсуа Виета известна каждому школьнику. Виет получил юридическое образование. В 19 лет стал адвокатом, потом членом парламента, затем ***советником*** короля Генриха III, который высоко ценил Виета. Но истинной страстью Виета была математика. Ей он посвящал всё свободное время и работал ***самозабвенно***. Рассказывали, что, занимаясь математикой, Виет мог сидеть за письменным столом по трое суток. Он изучил работы древних классиков: Архимеда, Евклида, Аполлония, и Диофанта, а также труды своих ***непосредственных*** предшественников: Тартальи и Кардано.

Сначала интерес Виета к алгебре был связан с её приложениями к тригонометрии и геометрии. Он не пользовался словом «алгебра», эту науку он называл «искусством анализа». Виет разработал символику для обозначения неизвестных и впервые ввёл обозначения для произвольных величин, которые в настоящее время называются параметрами. Слово «коэффициент» тоже введено в алгебру Виетом.

Для трёх низших степеней он взял названия из геометрии. Мы и сейчас говорим «*a* в квадрате» или «*a* в кубе». Виет первый стал применять буквенные обозначения для коэффициентов и для неизвестных. Его символика помогала находить общие закономерности и ***обосновывать*** их. Работы Виета привели к выделению алгебры в самостоятельную ветвь математики, не зависящую от геометрии.

До Виета математики описывали некоторые правила, алгоритмы решений конкретных задач и давали соответствующие примеры. Виет впервые полностью изложил вопрос о решении уравнений первых четырёх степеней и разработал метод приближённого решения таких уравнений. Этот метод математики использовали до конца XVII в.

Работы Виета ***существенно повлияли*** на развитие математики. Его имя донесла до наших дней «теорема Виета» и «обобщённая теорема Виета».

Рене Декарт (Descartes, René, 1596–1650)

Реформа всей математики произошла после выхода знаменитой книги Рене Декарта «Геометрия» (1637).

Рене Декарт родился в Турени (Франция). Получил образование в одном из лучших иезуитских колледжей. Позже он с благодарностью вспоминал школьные занятия. Но к концу учёбы понял, что в каждой области знаний есть утверждения, в истинности которых можно сомневаться.

Декарт с детства увлекался математикой и посвящал ей много времени. Позже он пришёл к выводу, что только математика даёт надёжный путь к истине.

Некоторое время Декарт служил в армии во время Тридцатилетней войны. Много путешествовал по Европе. С тридцати пяти лет жил в Голландии (Нидерландах). В одной из своих книг Декарт написал о ***причинах*** переезда в эту страну. Ему необходимы были ***уединение*** и свобода. Его девизом были слова: *«Хорошо прожил тот, кто хорошо укрылся»*.

В Голландии Декарт написал и издал свои научные труды по философии, математике, физике, астрономии и физиологии. Там он основал

Картезианскую философскую школу (латинское написание его фамилии Cartesius).

Декарт ***продолжил*** идеи Виета и построил алгебру как самостоятельную часть математики. Он ***усовершенствовал*** буквенную символику. Стал обозначать известные величины буквами a, d, c, ..., а неизвестные (неопределённые величины) — буквами x, y, z. Он ввёл обозначения степеней: a^2, a^3. Декарт стал первым записывать уравнения в виде $P(x) = 0$ и формализовал алгебраические действия. Доказал, что ноль — это число.

Декарт разработал основы аналитической геометрии, в которой геометрические образы исследуются с помощью алгебры. После работ Декарта алгебра стала независимой от геометрии.

В работах Декарта впервые появляются переменные величины. До него в математике работали только с постоянными величинами.

Вместе со многими другими великими мыслителями XVII в. Декарт искал общий метод мышления, с помощью которого быстрее и проще решались бы научные математические проблемы.

В книге «Рассуждения о методе, чтобы хорошо направлять свой разум и отыскать истины в науках» (1637) Декарт пишет о четырёх правилах, которые дают возможность получить точное знание:

- избегать поспешности в любом рассуждении;
- делить каждую сложную задачу на столько частей, чтобы каждая из них была простой;
- руководить ходом своих мыслей;
- проверять себя, чтобы быть уверенным, что ничего не пропущено.

В этой же книге он написал свою знаменитую фразу: *«Я мыслю, следовательно, я существую»*. У него была идея о всеобщей математике, объединяющей все её разделы.

По приглашению шведской королевы в конце жизни он переехал в Швецию для занятия философией и организации Академии наук.

Рене Декарта очень высоко ценили его современники. Знаменитый нидерландский учёный Христиан Гюйгенс написал о нём в стихотворении «На смерть Декарта» следующие строки:

«...В последний раз угас священный факел,
Но ярче вспыхнул свет идей, рождённых им».

Марен Мерсенн (Mersenne, Marin, 1588–1648)

Деятельность Декарта и большинства математиков Европы того времени тесно связана с кружком (ассамблеей) Марена Мерсенна. Этот кружок стал ***зародышем*** Парижской Академии наук, а самого Мерсенна современники называли «генеральным секретарём учёной Европы».

Марен Мерсенн был францисканским ***монахом*** и ***незаурядным*** учёным. Его научные труды посвящены коническим сечениям, квадратным корням, рекам Франции, проблемам наследственности, проектам акустического телеграфа и подводной лодки. Он первый измерил скорость звука в воздухе, предложил схему зеркального телескопа, разрабатывал теорию музыки.

Центром французской науки была ***келья*** Марена в ***монастыре***. Мерсенн имел уникальный талант ставить новые научные проблемы. Он проводил конкурсы и назначал премии победителям.

Мерсенн систематически вёл переписку со всеми учёными Европы. Декарт отправил Мерсенну около 150 писем, многие из которых — ценные научные работы. Переписка ***заменяла*** тогда научные журналы, которые появились значительно позже. Через Мерсенна велись научные дискуссии по всем важным ***спорным*** вопросам. Он перевёл на французский язык некоторые сочинения учёных древней Греции; помогал Декарту издавать его научные труды.

В XVII в. мир рассматривался как механизм, действующий в соответствии с постоянными законами. Ведущее значение приобрела механика, а вместе с ней и математика. Она была тогда единственной наукой, которая имела системное ***строение***. Поэтому математика стала наиболее важным инструментом для изучения окружающего мира. В те времена многие учёные считали математику царицей наук.

Эварист Галуа (Galois, Evariste, 1811–1832)

В XIX в. во Франции родился гениальный математик Эварист Галуа. Галуа — сын мэра маленького городка Бур-ля-Рейне (рядом с Парижем). В этом городке есть улица Галуа, которую назвали в честь его отца — Николя-Габриеля Галуа. До двенадцати лет Эварист получал домашнее образование. Его первыми учителями были родители. Потом он поступил в Королевский лицей Людовика Великого. Математикой Эварист заинтересовался только в шестнадцать лет, но она захватила его целиком. Он даже потерял интерес к другим предметам.

Галуа самостоятельно изучил работы таких известных современников, как Абель, Гаусс, Лагранж, Лежандр, Коши, Эйлер. Он особо заинтересовался работой Нильса Абеля о решении алгебраических уравнений любой степени.

В 1827 г. Эварист решил учиться в Политехнической школе — центре математической мысли Франции тех лет. Но на устном экзамене по математике он не стал отвечать преподавателям на заданные вопросы. Галуа решил, что вопросы слишком просты, чтобы на них отвечать.

На следующий год он вновь сдавал экзамен в Политехническую школу. Экзаменаторы смеялись над ответами Галуа. От ***обиды*** Эварист бросил тряпку в экзаменаторов.

В 1829 г. Галуа удалось поступить в другое престижное учебное заведение — Высшую нормальную школу. Через год его исключили за участие в политических выступлениях на стороне республиканцев.

Галуа зарабатывал деньги уроками математики и со страстной любовью занимался математической наукой. Он решил участвовать в конкурсе на приз Академии. Поэтому послал Фурье — секретарю Парижской академии наук — две статьи о решении алгебраических уравнений выше четвёртой степени. Огюст Коши написал очень хорошую ***рецензию*** на эту работу и представил её на премию по математике. Но перед конкурсом Коши ***внезапно*** умер, а работы Галуа исчезли. В результате победил Нильс Абель.

Через год Галуа послал в Парижскую академию статью с новыми результатами и получил отрицательный отзыв. Резолюция известного французского математика Пуассона такова: *«Мы старались понять доказательства мсье Галуа. Но у нас нет мнения о его работе, о точности его рассуждений. Его статья слишком лаконична и не ясна»*.

Прошли годы, и в той же Парижской академии написали, что работы Галуа написаны очень ясно и точно.

Галуа принимал участие во французской революции 1830 г. на стороне республиканцев. Несколько месяцев провёл в тюрьме и вскоре после этого был убит на дуэли. Ему было тогда всего 20 лет. Проводить Галуа в последний путь пришли студенты юридического и медицинского факультетов, отряд парижских артиллеристов и около двух тысяч республиканцев.

В ночь перед дуэлью он написал одному из друзей (Огюсту Шевалье) резюме своих открытий в теории алгебраических уравнений. Этот драматический документ заканчивается такими словами: *«Ты публично попросишь Якоби или Гаусса дать заключение не о справедливости, а о* ***значении*** *этих теорем. После этого, я надеюсь, найдутся люди, которые расшифруют всю эту* ***галиматью****»*. Эта галиматья содержала новую теорию групп, ключ к современной алгебре.

Все математические работы Галуа написаны им всего на шестидесяти страницах. Брат Галуа передал эти страницы Шевалье, который послал копии трудов Гауссу, Якоби, Лиувиллю и другим знаменитым математикам того времени.

Лиувилль отредактировал рукопись Галуа, понял все доказательства и ценность результатов. После этого опубликовал работу в ***престижном*** математическом журнале.

Вся сила и глубина теории Галуа была раскрыта полностью только в 1870 г. французским математиком Жордано. Его книга «Трактат о подстановках» — первый систематический курс по теории Галуа.

Галуа ввёл в алгебру такие фундаментальные понятия как группа, подгруппа, нормальный делитель, поле. Сейчас один из разделов высшей алгебры называется «Теория Галуа». Он создал общий метод, с помощью которого можно установить, какие из уравнений степени выше четвёртой решаются в радикалах (с помощью четырёх арифметических действий и извлечения корня). Этот метод привёл к разработке новой области алгебры — теории групп, которая с успехом применяется в различных разделах естествознания, в квантовой механике и кристаллографии.

Идеи и методы Галуа оказали большое влияние на всю математику. В настоящее время математический мир считает, что теория Галуа самое выдающиеся достижение математики XIX в.

Велика роль французских и итальянских математиков в алгебре. Но необходимо отметить, что и в других странах Европы были математики, которые внесли большой вклад в алгебру.

Значительного успеха в совершенствовании «алгебраических букв» достигли немецкие алгебраисты — «косситы». Это слово возникло потому, что немецкие математики называли алгебру словом «Coss». По аналогии с итальянским словом «cosa — неизвестная величина». Косситы ввели знак «+» и знак «–». Впервые эти знаки появились в Лейпциге (1489) в книге «Быстрый и красивый счёт». После этого они распространились во многих странах Европы. В России их стали использовать после выхода в свет книги Магницкого «Арифметика» (XVIII в.).

3.4. Норвегия

Нильс Генрих Абель (Abel, Niels Hendrik, 1802–1829)

В начале XIX в. в Норвегии появился другой молодой гений, Нильс Генрих Абель.

В центре города Осло в Королевском парке благодарные потомки поставили памятник Абелю.

По традиции новые результаты в науке называют в честь того, кто их открыл. Поэтому в различных разделах высшей математики встречаются теоремы Абеля, абелевы интегралы, уравнения Абеля, абелевы группы, преобразования Абеля. Абель оставил яркий след в математике, занимаясь ею всего семь лет.

Абель родился 5-го августа 1802 г. в деревне Финней на юге Норвегии. Его отец был пастором местного прихода. С тринадцати лет Нильс вместе со своими братьями учился в школе, где математику вёл один из лучших учителей Норвегии. Очень скоро Нильс Абель увлёкся «королевой наук» и получал удовольствие от решения сложных задач. Математика давала ему столько радости, что Нильс занимался ею всё свободное время. Только иногда он ходил в театр или играл в шахматы.

В 1820 г. умер отец Нильса. После этого жизнь Абеля резко изменилась. Он постоянно подрабатывал, что бы помочь своей семье и самому не умереть от голода. Такая жизнь ***подорвала*** его слабое ***от рождения*** здоровье.

В 1821 г. Абель окончил школу и поступил в университет. Там оценили его выдающиеся математические способности, желание учиться и отличное поведение. В те времена студентам не платили стипендию, но Абелю разрешили бесплатно жить в общежитии. Несколько профессоров сами платили ему стипендию.

В 1822 г. Нильс успешно сдал экзамены за первый курс и получил звание кандидата философии. К этому времени Абель прочитал все книги по математике, которые можно было ***достать*** и начал заниматься собственным творчеством.

В 1823 г. в журнале «Естественнонаучный журнал» напечатали первую статью Абеля. Она связана с функциональными уравнениями. В этом же году он выполняет большую научную работу, в которой описывает общий метод проверки дифференциального уравнения на интегрируемость. За эту работу Абелю назначили государственную стипендию. После окончания университета он уехал за границу для продолжения образования. Поездку и учёбу оплатило государство. В этом же году Абель стал заниматься теорией алгебраических уравнений. До него математики уже научились решать точно (с помощью формул) алгебраические уравнения до четвёртой степени включительно. Надо было сделать следующий шаг — найти алгоритм для точного решения уравнений пятой степени. Над этой проблемой трудились лучшие математические умы в течение трёх веков. Они никак не могли найти формулу, которая выражала бы корни уравнения через его коэффициенты

Абель взялся за эту проблему. После нескольких недель работы он вывел такие формулы. Многие математики проверяли результат молодого учёного. Ошибки не нашли. Но Абелю посоветовали проверить формулы на конкретном примере. Формула дала неверные результаты (ответы)!

Отрицательный результат привёл Абеля к мысли: *«Может быть, алгебраическое уравнение пятой степени в общем случае не решается с помощью четырёх арифметических действий и корней (в радикалах)?»*

К концу 1823 г. Абель доказал, что уравнение вида

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0 = 0, \quad \text{где } n \geqslant 5$$

не может быть разрешено в радикалах.

После окончания университета в 1824 г. Абель побывал в Австрии, Италии, Швейцарии, Франции и Бельгии. Он одинаково хорошо владел французским, немецким, датским и норвежским языками, поэтому его статьи постоянно печатали в разных научных журналах Европы. Он познакомился с Лежандром, Коши и другими известными математиками.

В поездках Абель много работал, но и много болел. В 1829 г. его не стало.

Абеля посмертно наградили Большой премией академии за выдающиеся математические открытия.

ГЛАВА 4. ТРИГОНОМЕТРИЯ

Знание — самое превосходное из владений.
Все стремятся к нему, само же оно не приходит.
Аль-Бируни

Слово «тригонометрия» греческого происхождения (τριγωνον — треугольник и μετρεω — меряю). В переводе на русский язык оно означает «измерение треугольников». Термин впервые встречается в книге немецкого богослова и математика Питискуса (1595).

Тригонометрия появилась в глубокой древности вместе с астрономией. Есть два вида тригонометрии: плоская и сферическая. Исторически плоская тригонометрия развивалась позднее сферической и постепенно стала самостоятельной наукой, а сферическая осталась вспомогательной частью астрономии. Далее мы будем рассматривать только плоскую тригонометрию.

Задолго до новой эры египетские и вавилонские учёные умели ***предсказывать*** солнечные и лунные ***затмения***, следовательно, они владели некоторыми знаниями из тригонометрии. В Греции тригонометрия впервые встречается в работе известного астронома Аристарха Самосского.

Ко II в. до н.э. накопились большие ряды астрономических ***наблюдений***, а для научного анализа таких рядов необходимы тригонометрические таблицы. Автор первых таблиц — древнегреческий астроном Гиппарх. Эти таблицы вошли в сочинение знаменитого александрийского астронома Клавдия Птолемея, жившего во второй половине II в. н.э.

Важный вклад в развитие тригонометрии внесла индийская математика в период с V по XII в. Знаменитый математик Брахмагупта в VII в. открыл теорему синусов. Индийские математики составили таблицу синусов. Они знали соотношения, которые в современных обозначениях пишутся в виде:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1; \quad \cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha).$$

Большую роль в развитии тригонометрии сыграла наука о часах. На Ближнем и Среднем востоке служба времени была связана с требованиями религии. Для пяти обязательных ежедневных молитв надо знать точное время, и верующий человек во время молитвы должен быть обращён в сторону священного камня Кааба (направлен на Мекку).

Математика в течение всей своей истории очень тесно связана с астрономией. Поэтому многие математики одновременно занимались и астрономией.

Омар Хайям в 1079 г. составил новый календарь с помощью тригонометрии и астрономии. Ошибка величиной в одни сутки накапливалась в этом календаре за 4 500 лет. В современном григорианском календаре такая ошибка накапливается за 3 300 лет. Календарь Хайяма был первым персидским календарём до 1925 г. Его использовали для составления французского календаря в конце XVIII в.

Сегодня многие помнят фамилию Улугбек и связывают её с историей астрономии.

Известный учёный Мухаммед Улугбек (1394—1449) — внук великого завоевателя Тимура (Тамерлана). Империя Тимура после его ***кончины*** распалась на несколько более мелких государств. Одним из них стал править Улугбек. В столице своего государства Самарканде он организовал научные школы, построил обсерваторию, оборудованную на высочайшем уровне. В обсерватории работали математики и астрономы. Они разработали очень точный способ составления тригонометрических таблиц. Значения синусов и тангенсов в таких таблицах даны с шагом в одну секунду. Был составлен астрономический каталог, содержащий координаты 1 018 звёзд.

Знаменитый среднеазиатский философ, астроном и математик ал-Беруни из Хорезма (973—1050) в своих трактатах «Сферика» и «Хорды» разобрал много сложных вопросов по геометрии и тригонометрии, доказал теорему косинусов. Он был первым учёным Средней Азии, который считал, что Земля движется вокруг Солнца, и сказал об этом за 600 лет до Коперника.

Арабские учёные обобщили труды предшественников и к XIII в. построили тригонометрию независимо от астрономии. Первое изложение такой тригонометрии написал азербайджанский математик, астроном Насир-ад-Дин Туси (1201—1274), который работал в Марагинской обсерватории недалеко от Багдада. В XIII в. это был крупнейший научный центр.

Учёные Средней Азии ввели в тригонометрию шесть линий — линии синуса, косинуса, тангенса, котангенса, секанса и косеканса. Выдающийся астроном и математик Абу аль-Вефа из Харасана (Иран) выразил словесно алгебраические соотношения между тригонометрическими величинами, составил таблицы синусов с точностью $1/60^4$ через каждые $10'$ и таблицы тангенсов.

Первые научные работы по тригонометрии в Западной Европе относятся только к XV в., когда немецкий учёный Иоганн Мюллер написал трактат «Пять книг о различных треугольниках», где он дал систематическое изложение тригонометрии. Иоганн Мюллер составил таблицы синусов с точностью $1/10^7$.

Новую эру в тригонометрии открыл Виет. Он опубликовал книгу (1579), в которой представил первое в Западной Европе системное изложение методов решения плоских и сферических треугольников с помощью тригонометрии. Виет первый применил алгебраические преобразования в тригонометрии. До него такие задачи были задачами на построение. Виет вывел формулы для вычисления $\sin(n\alpha)$ и $\cos(n\alpha)$ при $n < 10$.

Дальнейшее развитие тригонометрии связано с великим Леонардом Эйлером. Он первый определил тригонометрические функции, открыл связь между тригонометрическими и показательными функциями. Благодаря Эйлеру стали использовать современные обозначения $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$. Эйлер определил знаки тригонометрических функций в различных четвертях, вывел формулы приведения.

Аналитическое построение теории тригонометрических функций, начатое Эйлером, ***завершил*** русский учёный — математик Николай Лобачевский.

Ученик Эйлера, племянник Ломоносова, Михаил Головин написал на основе работ Эйлера интересную книгу-***руководство*** по тригонометрии «Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами».

Некоторые математики ещё до Эйлера рассматривали тригонометрические линии в единичном круге. Такое рассмотрение ***существенно*** упрощало вычисления. Но только благодаря Эйлеру единичный круг вошёл в тригонометрию ***раз и навсегда***.

ГЛАВА 5. ГЕОМЕТРИЯ, КУЛЬТУРА И ТРАДИЦИИ

Геометрия — это искусство хорошо рассуждать на плохо выполненных чертежах.

Нильс Абель

5.1. Зарождение геометрии

Геометрия возникла из практических и ***духовных потребностей*** человека.

В древней Греции уделялось большое внимание геометрии.

Геометрия — в переводе с греческого языка означает «землемерие». Великий мыслитель древности Геродот считал, что началом египетской геометрии были измерения земельных участков, которые египтяне должны были делать из-за постоянных разливов реки Нил. Однако Аристотель называл методы измерения земли другим словом — «геодезия».

Фалес Милетский посетил Египет в VI в. до новой эры. Он изучил там геометрию и передал свои знания Греции. На этой основе геометрия постепенно сформировалась как самостоятельная ветвь математики со стройной структурой доказательств.

Геометрия стала в те времена самой популярной математической наукой благодаря широчайшей области её практических ***приложений***.

Первый систематический курс геометрии, основанный на определениях и аксиомах, был составлен Гиппократом Хиосским (450 г. до н.э.). Этот курс назывался Στοιχετον (стихии, элементы).

В III в. до н.э. издали знаменитую книгу Евклида с тем же названием. Этот труд постепенно вытеснил геометрию Гиппократа. На латинском языке работа Евклида называлась «Elementa», поэтому в русском переводе появился ***устойчивый*** термин «Элементарная геометрия».

Первой страной, в которой отошли от евклидовых традиций изложения геометрии, стала Франция. С середины XVI в. появилась серия учебников различных авторов. Немецкий художник Альбрехт Дюрер (Dürer, Albrecht, 1471–1528) — автор первой «Геометрии» на немецком языке.

Великий итальянец Галилео Галилей считал, что сама природа говорит на языке математики, а пишет геометрическими фигурами.

В качестве примеров теснейшей связи геометрии с природой рассмотрим симметрию и золотое сечение.

5.2. Симметрия

С глубокой древности человек замечал, что в природе существуют некоторые пространственные ***закономерности*** в расположении природных объектов. Рисунки, орнаменты, барельефы и постройки древнего мира показывают большой интерес человека к различным видам симметрии.

Термин «симметрия» произошёл от греческого слова «συμετρια», которое означает ***соразмерность***, гармонию. Идея симметрии положена древними греками в основу строения атома.

Понятие симметрии часто использовали философы Древней Греции. Они рассматривали понятие «симметрия» как некоторую пространственную закономерность и ***переносили*** это понятие в другие области человеческой деятельности. Например, у великого Аристотеля симметрия означала «среднюю меру», к которой должен стремиться в своих действиях человек. Римский врач Гален (II в.) в трактате «Темперамент» под симметрией понимал ***состояние духа***, одинаково далёкое от ***горя*** и ***радости*** или от ***апатии*** и ***возбуждения***. Дюрер считал, что прекрасное всегда пропорционально и симметрично.

К началу XVII в. в науке и искусстве слово симметрия означало простоту, совершенство и гармонию.

К началу нашей эры слово «симметрия» стало выражать вид ***согласованности*** отдельных частей, которые объединяются в единое целое.

5.3. Золотое сечение

Среди различных геометрических средних ***уникальными*** свойствами обладает одно, делящее данный отрезок a на две части x и $a - x$ в геометрической пропорции. Это означает, что отношение целого отрезка a к его большей части равняется отношению большей части x к меньшей $a - x$:

$$a : x = x : (a - x).$$

Эта геометрическая пропорция приводит к уравнению:

$$x^2 + ax - a^2 = 0.$$

Полученное уравнение имеет один положительный корень:

$$x = a(\sqrt{5} - 1)/2.$$

Если рассматривать отрезок единичной длины, то наше уравнение будет иметь вид

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения равен

$$x = \Phi = (\sqrt{5} - 1)/2 = 1{,}6180339...$$

Такая пропорция была известна ещё пифагорейцам. В эпоху Возрождения Леонардо да Винчи назвал её <u>золотым сечением</u>. Золотое сечение встречается в геометрии, природе и искусстве. Его широко используют в архитектуре, скульптуре, живописи и музыке.

Древние греческие вазы обычно имеют очень красивую форму. Анализ их размеров привёл к интересной закономерности. Большинство таких ваз вписываются в прямоугольник с отношением сторон, равным золотому сечению.

Золотое сечение есть в геометрических фигурах с осью симметрии пятого порядка. Это пятиконечная звезда и пятиугольник. Формы различных цветов, морских звёзд, морских ежей и формы многих других живых объектов имеют золотое сечение. Эту интересную закономерность описал Лука Пачоли в своей книге «О божественной пропорции». Книгу иллюстрировал его друг Леонардо да Винчи.

В 1855 г. немецкий учёный Цейзинг в работе ***«Эстетические исследования»*** показал, что золотое сечение близко к отношению высоты человека к расстоянию между его ***пупком*** и ***подошвами*** ног. Сразу после рождения человека это отношение равно двум. Постепенно оно уменьшается и ***примерно*** к 21 году становится равным 1,625. Эта величина очень близка числу Ф.

Опыты известного немецкого психолога Фехнера доказали, что среди различных отношений человек, как правило, выбирает золотое сечение. В 1876 г. он показал множеству людей различные прямоугольники и просил выбрать из них тот, который больше всего нравится своей формой. Большинство выбрало прямоугольник с отношением сторон, равным отношению золотого сечения.

Удивительна связь между золотым сечением и законами расположения листьев растений, геометрией живых организмов и пропорцией тела человека. Эта связь не случайна. Однако причины таких связей пока неизвестны.

5.4. Треугольник и круг

Некоторые геометрические фигуры играли символическую роль в культурных традициях разных народов.

- В христианстве треугольник — символ всевидящего ока Бога (глаз Бога, который всё видит).
- В Индии треугольник считался первой космической фигурой, которая возникла из ***хаоса***.
- В традициях народов западной Европы тройка в треугольнике — символ абсолюта, пифагорейский знак здоровья.
- Треугольник вершиной вниз — вода, женский принцип.
- Треугольник вершиной вверх — мужской принцип, огонь, небесные силы.
- Треугольник в квадрате — Божественное и человеческое, духовное и телесное.
- Треугольник в круге — троичность в едином (триединство).
- Во всех культурах круг символизирует солнечный диск. Например, у славян блины во время масленицы олицетворяют Солнце.
- Круг представлял небо.
- В Египте круг с точкой в центре был символом человека.
- Окружность (граница круга), как линия без начала и конца, символизировала время.
- Движение по окружности означало постоянное возвращение к самому себе.

ГЛАВА 6. ШКОЛА ПИФАГОРА

Геометрия приближает разум к истине.
Платон

6.1. Правильные фигуры и тела

В школе Пифагора геометрия оформилась в самостоятельную научную дисциплину. Пифагор и его ученики первыми стали изучать геометрию систематически — как учение о свойствах абстрактных геометрических фигур, а не как сборник прикладных ***рецептов*** по земледелию. Размеры геометрических фигур устанавливались не путём измерений, а с помощью логических доказательств.

Пифагорейцы объясняли источник широкого распространения геометрии некоторой случайностью. Один из пифагорейцев потерял деньги ***общины***. После этого несчастья община позволила ему зарабатывать деньги геометрией. В то время были популярны софисты — ***странствующие*** учителя ***мудрости***.

До нашего времени не дошло содержание первого греческого учебника геометрии, который назывался «Предания Пифагора». Сохранились только ***фрагменты*** из математических сочинений о геометрии греческого математика середины V в. до н.э. Гиппократа с ионийского острова Хиоса. Благодаря Гиппократу Хиоскому известно, что пифагорейцы изучили свойства треугольников, прямоугольников, параллелограммов и трапеций. Результаты пифагорейской геометрии составили основу 10-й книги «Начал» Евклида, которая завершается теоремой Пифагора.

Пифагорейцы очень интересовались правильными фигурами и телами. Правильные геометрические формы благодаря их зеркальной и поворотной симметрии соответствовали пифагорейской философии о гармоничном устройстве окружающего мира. Они доказали, что плоскость можно полностью (без ***дырок***) ***покрыть*** правильными многоугольниками только трёх видов: треугольниками, квадратами и шестиугольниками (рис. 1).

Особый интерес представляет построение правильного пятиугольника — главного символа пифагорейцев. Известно, что пифагорейцы образовывали его из трёх равнобедренных треугольников.

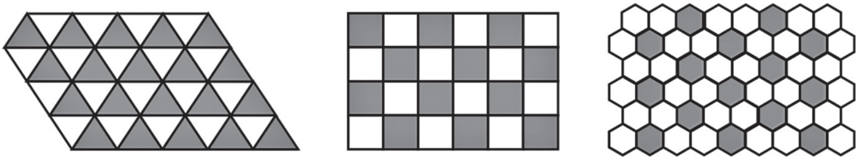


Рис. 1

Решением задачи построения правильного пятиугольника с помощью циркуля и линейки занимался древнегреческий математик Птолемей (150). Через полтора тысячелетия в 1525 г. Альбрехт Дюрер в книге «Руководство к измерению при помощи циркуля и линейки» показал способ построения правильного пятиугольника по заданной стороне с помощью циркуля. Этот способ, к сожалению, оказался приближённым.

Лишь в 1796 г. молодой немецкий математик Карл Фридрих Гаусс в 19 лет решил общую задачу построения правильного n-угольника с помощью циркуля и линейки. Он доказал, что эта задача ***равносильна*** задаче деления окружности на n равных частей и связана с нахождением корней уравнения $x^n = 1$. Гаусс доказал, что правильный n-угольник может быть построен с помощью циркуля и линейки ***только в том случае***, ***когда*** показатель n в уравнении — число вида

$$n = n_0^{\delta_1} \cdot n_1^{\delta_2} \cdot \ldots \cdot n_k^{\delta_k} \cdot 2^m, \quad \left(\delta_i = 0 \text{ или } 1; \quad m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\right),$$

$$\text{где} \quad n_k = 2^{2^k} + 1, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ .$$

Итак, правильный многоугольник можно построить циркулем и линейкой, если n = 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, ...; нельзя, когда n = 7, 9, 11, 13, 14, 18, ...

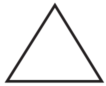
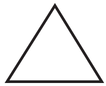
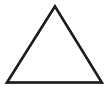
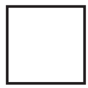
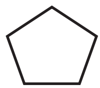
В круг интересов пифагорейцев входили правильные тела — правильные многогранники. <u>Их всего пять</u> (табл. 1).

В память о великом древнегреческом философе и математике Платоне у правильных многогранников есть ещё одно название — «платоновы тела».

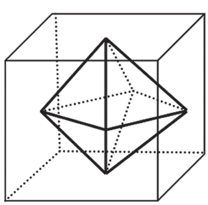
Платон (Πλατων 429–348 до н.э.) был уверен, что основа материального мира — четыре стихии: огонь, воздух, вода и земля. Согласно этой теории атомы каждой стихии имеют определённую форму. Форма атома воды — икосаэдр. Форма атома воздуха — октаэдр. Форма атома огня — тетраэдр (треугольная пирамида). Форма атома земли — куб.

В природе можно встретить фигуры правильной формы. Например, кристаллы поваренной соли имеют форму куба, кристаллы кварцов — октаэдра, а кристаллы пирита — додекаэдра. Пифагорейцы заметили много интересного в правильных фигурах. Они считали куб гармоническим телом, поскольку (потому что) число его вершин есть среднее гармоническое числа граней и числа рёбер. Кроме того, куб — единственный из правильных тел, которым можно полностью заполнить трёхмерное пространство.

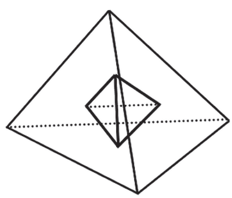
Таблица 1

Правильный многогранник	Число граней	Число вершин	Число рёбер	Вид грани	Число граней при вершине
Тетраэдр	4 (тетра)	4	6		3
Октаэдр	8 (окто)	6	12		4
Икосаэдр	20 (икоси)	12	30		5
Гексаэдр	6 (гекса)	8	12		3
Додекаэдр	12 (додека)	20	30		3

Во времена Евклида было замечено, что куб и октаэдр, додекаэдр и икосаэдр дуальны (***двойственны***). Это означает, что число граней одного тела равно числу вершин другого и наоборот. В этом случае одно тело может быть получено из другого, если ***центры тяжести*** граней одного принять (взять) за вершины другого (рис. 2).



Октаэдр в кубе



Тетраэдр в тетраэдре

Рис. 2

Важнейшее свойство многогранников установил Эйлер в середине XVIII в. Он доказал, что в любом ***выпуклом*** многограннике сумма числа вершин L и числа граней M минус число его рёбер N является постоянной величиной, равной двум:

$$L + M - N = 2.$$

Самое удивительное свойство правильных тел — их количество. Есть только пять правильных тел. Доказательство этого факта представлено в последней 13-й книге «Начал» Евклида.

6.2. Пентаграмма

Главным пифагорейским символом была пентаграмма, или пифагорейская звезда — звёздчатый пятиугольник, образованный диагоналями правильного пятиугольника. Нарисованная пентаграмма являлась тайным знаком, по которому пифагорейцы узнавали друг друга.

Пентаграмма обладает замечательными свойствами. Она содержит все пропорции, известные пифагорейцам: арифметическую ($a - b = c - d$), геометрическую ($a/b = c/d$), гармоническую ($1/a - 1/b = 1/c - 1/d$) и золотую ($a/x = x/(a - x)$).

Пентаграмма пропорциональна и, значит, красива (рис. 3).

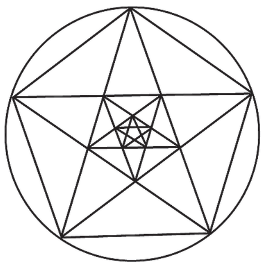


Рис. 3

Звёздчатый пятиугольник имеет поворотную симметрию пятого порядка. Именно такой вид симметрии наиболее распространён в живой природе (цветы незабудки, гвоздики, колокольчика, вишни, яблони, малины, рябины и т.д.).

Поворотная симметрия пятого порядка невозможна в кристаллических решётках неживой природы. Поэтому симметрию пятого порядка называют симметрией жизни. К геометрической красоте пятиконечной звезды добавилась числовая мистика. Число 5 = 2 + 3 было для пифагорейцев числом любви как сумма первого женского (2) и первого мужского (3) чисел. Благодаря таким свойствам пентаграмма была выбрана пифагорейцами в качестве символа жизни и здоровья. Поэтому ***не случайно***, что и в наше время пятиконечная звезда есть на флагах очень многих государств. Но именно пифагорейцы первыми превратили пятиконечную звезду в символ.

6.3. Открытие несоизмеримости

Открытие ***несоизмеримости*** — самое большое достижение пифагорейской школы и важнейший этап в развитии всей математики. Это открытие можно сравнить с открытием дифференциального и интегрального исчисления или с созданием теории относительности.

Проблема несоизмеримости была широко известна с античных времён. Представим здесь, в качестве примера, доказательство Евклида о несоизмеримости диагонали квадрата с его стороной.

Теорема. Сторона AB и диагональ AC квадрата несоизмеримы (отношение $AC:AB$ не выражается отношением целых чисел).

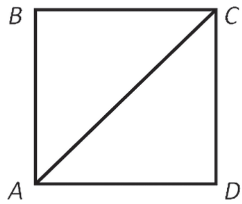


Рис. 4

Доказательство. ***Допустим противное***. Пусть AC и AB соизмеримы, то есть их отношение равно отношению целых чисел:

$$AC:AB = m:n,$$

где числа m и n ***одновременно*** не являются чётными, ***иначе*** дробь можно было бы сократить на 2. Возведём в квадрат последнее равенство:

$$AC^2:AB^2 = m^2:n^2.$$

По теореме Пифагора

$$AC^2 = 2AB^2 \Rightarrow AC^2:AB^2 = 2 \Rightarrow m^2:n^2 = 2 \Rightarrow m^2 = 2n^2.$$

Из последнего равенства следует, что число m^2 чётно. Произведение двух чётных чисел чётно, а произведение двух нечётных чисел нечётно. Поэтому мы приходим к выводу, что число m чётно: $m = 2k$, ***следовательно***

$$m^2 = 4k^2 \Rightarrow 4k^2 = 2n^2 \Rightarrow n^2 = 2k^2.$$

Из последнего равенства следует, что число n чётное число. ***Итак***, m и n чётные числа, что ***противоречит*** допущению о несократимости дроби на число 2. Следовательно, отношение длины диагонали квадрата к длине его стороны не может быть выражено отношением целых чисел. Теорема доказана.

По легенде несоизмеримость открыл сам Пифагор. Открытие долго держалось в тайне, так как оно противоречило философской системе пифагорейцев. Они знали только целые числа и их отношения, поэтому были уверены, что весь окружающий мир можно описать с помощью таких чисел. Пифагорейцы ***пытались преодолеть кризис***, связанный с открытием несоизмеримости. Они стали изучать эти «неразумные» величины, которые теперь называют иррациональными числами. Название произошло от латинского слова «irrationalis — неразумный».

Открытие несоизмеримости стало первым теоретическим результатом, который невозможно получить с помощью опыта. Это открытие противоречило практике. В жизни все величины соизмеримы в ***пределах точности*** измерительного инструмента.

Пифагорейцы пришли к выводу, что геометрические объекты имеют более общую природу, чем рациональные числа. ***В итоге*** они попытались построить всю математику на основе только геометрии. Для этого числа представлялись отрезками и площадями. Алгебраические операции интерпретировались геометрически. Геометрически решались даже уравнения. ***Таким образом***, в пифагорейской математической школе на первое место вышла геометрия.

Открытие несоизмеримости стало первым камнем в фундаменте современного математического анализа.

6.4. Доказательство в геометрии

Пифагор первым ввёл систематические доказательства в математику, и ***прежде всего*** в геометрию. Он первым пришёл к мысли, что в геометрии должны рассматриваться идеальные объекты: точки — то, что не имеет частей, линии — длина без ширины, поверхности — то, что имеет только длину и ширину. Свойства этих идеальных объектов должны изучаться с помощью ***рассуждений***, справедливых для бесконечного числа объектов одинакового вида. Цепь рассуждений, которая приводит неочевидные утверждения к очевидным истинам, рассматривалась как математическое доказательство.

Пифагор превратил математику из собрания ***эмпирических*** рецептов в самостоятельную ***дедуктивную*** науку.

К методу доказательства относится аксиоматический метод. Его сущность состоит в выделении конечного набора недоказуемых первоначальных истин — аксиом, из которых с помощью доказательств выводятся все остальные математические истины — теоремы. Идея аксиоматического метода родилась в школе Пифагора, а затем была развита в «Началах» Евклида, а ещё через две тысячи лет — в «Математических началах натуральной философии» Ньютона.

6.5. Теорема Пифагора и пифагоровы тройки

Теорема Пифагора. Площадь квадрата, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей квадратов, построенных на его катетах.

Эта теорема широко применяется в геометрии с давних времён. Результат теоремы прост, но сама теорема не очевидна. Существует около 500 (пятисот) различных доказательств этой теоремы, среди которых есть древнекитайское, древнеиндийское, доказательство Евклида.

Результат этой теоремы был обнаружен в древних папирусах от 2000 г. до н.э. и в древнейших китайских трактатах XII в. до н.э. Теорема Пифагора была начертана на глиняных вавилонских табличках более чем за 1 000 лет до рождения Пифагора.

Открытие теоремы Пифагором окружено легендами. По одной из них Пифагор в честь доказательства ***принёс в жертву быка***. По другой легенде — 100 быков. Эти легенды сохранились, несмотря на то, что по своему ***уставу*** пифагорейцы не должны были приносить такие жертвы.

Вопреки тому, что доказательство самого Пифагора не сохранилось, а содержание теоремы было известно задолго до рождения самого Пифагора, предложение «квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов», во всём мире давно называют теоремой Пифагора.

Пифагоровы тройки

Изучение свойств натуральных чисел привело пифагорейцев к следующей интересной задаче.

Найти такие натуральные числа x, y, z, для которых справедливо (выполняется соотношение):

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

В наше время эта задача называется задачей Пифагора, а её решения называются пифагорейскими тройками. Этой задаче можно дать геометрическую ***формулировку***: найти все прямоугольные треугольники, у которых длины всех сторон — натуральные числа, а квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

В древнем Египте существовала особая профессия «***натягивателей верёвок***». Во время ***торжественных*** церемоний ***закладки храмов*** и пирамид люди этой профессии ***размечали*** прямые углы с помощью верёвки, имеющей 12 (12 = 3 + 4 + 5) ***равноотстоящих узлов***. Поэтому прямоугольный треугольник с отношением сторон 3 : 4 : 5 называется египетским треугольником.

Отдельные ***частные решения*** этой задачи были известны ещё в древнем Вавилоне до Пифагора. Общая постановка и первые решения уравнения сделал Пифагор и Платон. Пифагор доказал, что решением задачи являются числа вида

$$\begin{cases} x = 2m + 1, \\ y = 2m^2 + 2m, \\ z = 2m^2 + 2m + 1, \quad m = 1, 2, 3\dots. \end{cases}$$

Платон — автор другого решения уравнения:

$$\begin{cases} x = 2n, \\ y = n^2 - 1, \\ z = n^2 + 1, \quad n = 2, 3, 4\dots. \end{cases}$$

Искать следует только примитивные пифагоровы тройки (x, y, z), для которых

$$\text{НОД}\,(x, y, z) = 1,$$

потому что для любого натурального числа $k > 1$ тройка чисел (kx, ky, kz) также будет пифагоровой тройкой.

Справедливо следующее утверждение общего вида.

Теорема. Если p и q — взаимно простые числа разной чётности $(p > q)$, то все примитивные пифагоровы тройки находятся по формулам

$$\begin{cases} x = 2pq, \\ y = p^2 - q^2, \\ z = p^2 + q^2. \end{cases}$$

Эта теорема была доказана и хорошо известна ещё в античную эпоху. Она есть в «Началах» Евклида.

6.6. Три классические задачи древности

В V в. до н.э. появились задачи, не решаемые с помощью циркуля и линейки. Это три знаменитые классические задачи древности, которые сыграли огромную роль в истории математики и были полностью решены только в XIX в.

Названия и постановки этих задач таковы:

1. Удвоение куба. Построить с помощью циркуля и линейки куб, объём которого в два раза больше объёма данного куба.

Задачу об удвоении куба называют ещё делосской проблемой. С ней связана такая легенда. Однажды на острове Делос вспыхнула ***эпидемия чумы***. ***Испуганные*** жители острова ***обратились за советом*** к Дельфийскому ***оракулу*** (***жрецу***). Он сказал, что нужно ***удвоить*** золотой ***жертвенник***, который имел форму куба. Мастера Делоса сделали ещё один куб и поставили его на первый. Однако чума не ***прекращалась***. Они опять спросили жреца. Жрец ответил, что люди не решили поставленной задачи. Новый жертвенник имел вдвое больший объём, но не имел формы куба.

Жители Делоса обратились к Платону, но великий философ ответил: *«Боги недовольны вами за то, что вы мало занимаетесь геометрией»*. Платон сам не знал решения этой задачи. Позже её ***приближённо решил*** Архит — друг Платона.

Архит (около 428–365 до н.э.) — яркая личность в античной истории: математик, механик, философ, музыкант, полководец, политический деятель. Он был последним пифагорейцем.

Однажды он с помощью дипломатии освободил из плена великого философа Платона. Самой яркой страницей в научной биографии Архита является решение делосской проблемы. Это решение было ***громоздко***, сложно и приближённо.

Если ребро данного куба равно a, а ребро искомого куба — x, то задача об удвоении куба приводит к уравнению

$$x^3 = 2a^3 \Rightarrow x = a\sqrt[3]{2}.$$

Сегодня такую задачу решит школьник, но школьник не сможет построить с помощью циркуля и линейки куб со стороной $a\sqrt[3]{2}$.

2. Трисекция угла. Разделить с помощью циркуля и линейки угол на три равные части.

Французский математик Ванцель в 1837 г. доказал, что невозможно точно разделить с помощью циркуля и линейки произвольный угол на три равные части.

3. Квадратура круга. Построить с помощью циркуля и линейки квадрат, равновеликий (равный по площади) данному кругу.

Решение задачи о квадратуре круга связано с числом π. Первую попытку точно определить число π сделал Анаксагор в X в. до н.э. Интересно отметить, что этой математической проблемой Анаксагор занимался в тюрьме, где он сидел за то, что считал Солнце раскаленным шаром.

В течение многих столетий одни математики пытались решить эту задачу, другие считали, что эта задача не может быть решена.

Только в XIX в. было установлено, что число π не может быть корнем алгебраического многочлена с действительными коэффициентами. В математике такие числа называют ***трансцендентными числами***. С помощью установленного факта математики доказали, что невозможно точно построить квадрат равный по площади заданному кругу.

Символом задачи о квадратуре круга является хорошо всем известная шляпа (рис. 5), которую надевают почётным учёным и выпускникам университетов.

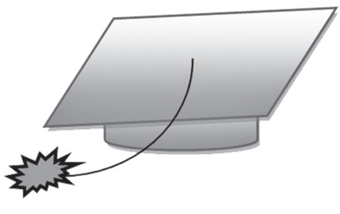


Рис. 5

ГЛАВА 7. НЕЕВКЛИДОВА ГЕОМЕТРИЯ

Если теорему так и не смогли доказать,
она становится аксиомой.

Евклид

7.1. Аксиомы Евклида

Геометрия, разработанная древними греками, — геометрия Евклида. Она основывалась на пяти постулатах (аксиомах):

1. Между любыми двумя точками можно провести прямую.
2. Ограниченную прямую можно неограниченно продолжать по прямой.
3. Из всякого центра может быть описан круг с любым радиусом.
4. Все прямые углы равны между собой.
5. Если прямая, пересекающая две прямые, образует внутренние односторонние углы, в сумме меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где сумма меньше двух прямых.

Пятый постулат неочевиден и ***отличается от*** других сложной формулировкой. Поэтому многие математики рассматривали его как теорему и пытались доказать. Так например, в 1077 г. Омар Хайям в работе «Трактат об истолковании ***тёмных положений*** у Евклида» пытался доказать пятый постулат на основе других более простых понятий. Этот трактат позже ***попал*** в Европу и ***повлиял*** на рождение неевклидовой геометрии.

7.2. Янош Бояйи (Boljai, Janos, 1802–1860)

Доказательством пятого постулата занимался венгерский математик Фархаш Бояйи. Когда в 1820 г. его сын Янош Бояйи стал работать над этой же проблемой, отец написал сыну: *«Ты не должен пытаться одолеть теорию параллельных линий. Я знаю этот путь. Прошу тебя, оставь в покое учение о параллельных линиях; оно лишит тебя здоровья, лишит радости не только в геометрии, но и во всей земной жизни»*. Однако сын продолжал заниматься теорией параллельных прямых.

В 1832 г. отец опубликовал работу сына в приложении к своему учебнику. Поэтому эта работа вошла в историю математики под названием «Appendix». Янош послал «Appendix» на отзыв великому Гауссу — старому другу отца. Гаусс ответил, что ничего нового для себя он не нашёл, и результаты Яноша совпадают с результатами, которые получил сам Гаусс ещё тридцать лет тому назад. Просто Гаусс решил при жизни не публиковать такие ***парадоксальные*** результаты.

Ответ Гаусса стал ***страшным ударом*** для Яноша. Он больше не публиковал никаких работ по неевклидовой геометрии.

7.3. Николай Иванович Лобачевский (1792–1856)

Однажды Лобачевский думал, кутаясь в пальто:
Как мир прямолинеен, видно, что-то здесь не то!
И он вгляделся пристальней в безоблачную высь,
И там все параллельные его пересеклись.

Из книги «Математики тоже шутят»

Основатель новой геометрии — Николай Иванович Лобачевский родился в Нижнем Новгороде в семье землемера. Он рано остался без отца, поэтому в семье было тяжёлое ***материальное положение***. Благодаря своим блестящим способностям Лобачевский учился за государственный счёт, окончил с отличием Казанский университет, а через пять лет стал его профессором. В 1827 г. его избрали ректором университета. На этом ***посту*** он работал до 1846 г. В эти годы университет быстро развивался и достиг очень хороших результатов.

Лобачевский много времени уделял воспитанию студентов. Был очень строг, но студенты его любили. Лобачевский пользовался у них большим авторитетом. Великий русский писатель Лев Николаевич Толстой вспоминал о Лобачевском: «Он всегда был очень серьёзным. Мне приходилось разговаривать с ним как с ректором. Ко мне он относился очень добродушно, хотя я был очень плохим студентом».

В 1829 г. в «Казанском вестнике» вышла работа Лобачевского «О началах геометрии». В этой работе ***древняя*** проблема пятого постулата получила новое решение.

Лобачевский ***утверждал***, что пятый постулат доказать нельзя. Если ***принять***, что сумма углов треугольника меньше двух прямых углов, то можно построить новую геометрию, ***отличную от*** геометрии Евклида. Лобачевский построил такую геометрию. Аксиомы новой геометрии ***необычны***. Вот некоторые из них:

1. В пространстве существует абсолютная единица длины, равная k.
2. Существует треугольник наибольшей площади, его площадь равна πk^2.
3. Не существует ***подобных*** фигур, в частности — подобных треугольников.
4. Если разные треугольники с тремя равными сторонами не равны между собой, то их углы не равны.
5. Чем больше треугольник, тем меньше сумма его углов.
6. Для прямоугольных треугольников не ***справедлива*** теорема Пифагора.

Различие между геометрией Лобачевского и Евклида обнаруживается лишь на расстояниях, больших по сравнению с абсолютной единицей длины k. С помощью астрономических наблюдений Лобачевский доказал, что постоянная k, если она существует, очень велика. Она не может быть меньше, чем сто тысяч диаметров земной орбиты. Таким образом, для практических целей можно пользоваться и геометрией Евклида и геометрией Лобачевского.

Лобачевский послал свою работу знаменитому русскому математику М.В. Остроградскому и получил отрицательный ***отзыв***. Но Лобачевский продолжал ***упорно защищать*** новую геометрию.

В 1841 г. в Германии выходит книга Лобачевского «Геометрические исследования по теории параллельных прямых». Гаусс высоко оценил эту работу и предложил избрать Лобачевского в члены-корреспонденты Геттингенского Учёного Королевского Общества «как одного из лучших математиков России и ректора Казанского университета». В 62 года Гаусс быстро выучил русский язык, чтобы читать Лобачевского в оригинале и написать ему письмо в Россию, но письмо так и не успел написать.

В математическом мире к мнению Гаусса относились с большим вниманием. Поэтому стали изучать работы Лобачевского. Появились переводы его трудов на языки западной Европы.

Сохранились записи, из которых видно, что Янош Бояйи читал работы Лобачевского, но Лобачевскому он ничего не написал. Лобачевский, скорее всего, не знал работы Яноша. К сожалению, пути этих двух творцов неевклидовой геометрии не ***пересеклись***.

В России при жизни Лобачевского с высокой оценкой его трудов публично выступил только один математик — профессор Казанского университета Пётр Иванович Котельников.

В 1855 г., больной и ослепший Лобачевский диктует свой последний труд — «Пангеометрия» (от греческого $\pi\alpha\nu$– весь). В следующем году эта работа вышла во Франции.

Признание геометрии Лобачевского в математическом мире пришло только в 1868 г. Молодой английский математик Клиффорд один из первых понял идеи Лобачевского и стал активно их пропагандировать. Он ставил Лобачевского рядом с Коперником. Считал, что геометрия Лобачевского — революция в понимании строения космоса.

7.4. Карл Фридрих Гаусс (Gauss, Karl Friedrich, 1777–1855)

Драматическую роль в открытии неевклидовой геометрии сыграл великий немецкий математик Карл Фридрих Гаусс.

Гаусс родился в семье мастера-водопроводчика, в маленьком немецком герцогстве Брауншвейг. Блестящие математические способности он проявлял с раннего детства. Гаусс учился в Геттингенском университете и первое выдающееся открытие опубликовал в студенческие годы. Он доказал, что циркулем и линейкой можно построить правильный 17-ти угольник.

Это открытие оставалось всю жизнь любимой работой Гаусса. Он завещал изобразить вписанный в круг правильный семнадцатиугольник на его ***надгробном памятнике***.

Всемирную славу Гауссу принесла работа по определению орбиты планеты по малому числу наблюдений. Эта работа появилась благодаря астрономии.

Первого января 1801 г. итальянский астроном Пиацци случайно открыл новую планету. Из-за плохой погоды он наблюдал планету только девятнадцать раз. Это очень мало для правильного расчёта орбиты планеты. Без знания орбиты невозможно вновь увидеть её на ***небосводе***. Ряд математиков и астрономов ***безуспешно*** пытались вычислить эту орбиту.

Успех пришёл только к Гауссу. Он разработал новый способ вычисления орбиты, а затем предсказал положение этой карликовой планеты (астероида), которую потом назвали Церерой. Эта планета вновь появилась 31 декабря в 1801 г. на том месте, которое предсказал Гаусс. Вскоре он вновь достаточно точно рассчитал положение другой малой планеты (астероида) Паллады. В 1804 г. Гаусс изложил разработанный им метод вычисления орбит в знаменитой монографии «Теория движения небесных тел». За великие заслуги в астрономии его именем назвали один из крупнейших кратеров Луны.

Многие результаты Гаусса были незаконченными или описаны в письмах к своим коллегам. Научное наследие Гаусса собирали и исследовали учёные Германии до начала второй мировой войны.

В результате такой работы было опубликовано 12-ти томное собрание трудов Гаусса.

С юных лет Гаусс интересовался пятым постулатом Евклида, пытался его доказать. Обсуждал свои идеи в письмах к друзьям. Из писем ясно, что Гаусс сам открыл основные идеи неевклидовой геометрии. Но он ничего не публиковал и просил никому не показывать эти письма. Почему Гаусс не печатал свои работы по неевклидовой геометрии? Точного ответа на этот вопрос пока нет.

7.5. Бернгард Риман (Riemann, Bernhardt Georg Friedrich, 1826–1866)

Большой ***вклад*** в развитие неевклидовой геометрии внёс немецкий математик Бернгард Риман (1826–1866).

Риман родился в Ганновере, в бедной пасторской семье, учился в Геттингенском и Берлинском университетах. Риман хотел стать преподавателем университета. Для этого он должен был прочитать пробную лекцию перед профессорами университета, среди которых был Гаусс. Тема лекции: «О гипотезах, лежащих в основаниях геометрии». Эта знаменитая лекция состоялась 10 июня 1854 г., а опубликована только через двенадцать лет. Из ***содержания*** лекции видно, что Риман не знал работ Лобачевского, Яноша Бояйи и Гаусса. Он самостоятельно пришёл к мысли о построении неевклидовых геометрий.

Риман предложил пятый постулат Евклида заменить допущением: «сумма углов треугольника больше двух прямых». Эту геометрию в наше время называют геометрией Римана. Геометрия Римана отвергает не только пятый постулат Евклида. Первый постулат Евклида заменяется на новый: «существуют точки, между которыми можно провести ***бесчисленное множество*** прямых, не ***совпадающих*** между собой».

На основе новых постулатов в геометрии Римана можно доказать ряд удивительных теорем. Перечислим некоторые из них:

1. Параллельных прямых не существует. Любые две прямые пересекаются в двух точках, расстояние между которыми конечно.
2. Не существует подобных фигур. Если у двух треугольников не равны стороны, то не равны и углы.
3. Теорема Пифагора не справедлива. Квадрат гипотенузы меньше суммы квадратов катетов.
4. Сумма углов треугольника равна $\pi + \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$; сумма углов тем больше, чем больше площадь треугольника.
5. Существует треугольник наибольшей площади.

Риман доказал следующее утверждение.

Если существует ***пространство*** с постоянной отрицательной кривизной, то в таком пространстве справедлива геометрия Лобачевского. Если кривизна пространства равна нулю — справедлива геометрия Евклида. При постоянной положительной кривизне пространства справедлива геометрия Римана.

Неевклидовы геометрии долго считались ***невероятным вымыслом***. Такое отношение связано со свойствами евклидовой геометрии. Она прекрасно подходит для описания твёрдых тел и объяснения простейших оптических явлений. В её основе лежит опыт многих поколений.

Аксиомы Евклида — изложение знаний о пространстве, полученных с помощью зрения.

В XX в. общая теория относительности подтвердила идеи Римана в области неевклидовой геометрии.

Из всех математических наук именно геометрия теснейшим образом связана с пространством. Проблемы пространства связывают между собой геометрию, естественные науки и философию. Давно известно, что свойства макромира, от молекул до галактик и вселенной, связаны с геометрией.

Краткие очерки по истории геометрии хочется закончить словами Сократа: *«То, что я понял, прекрасно, из этого я* ***заключаю****, что остальное, чего я пока не понял, тоже прекрасно».*

ГЛАВА 8. ИСТОРИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Если Бог есть, то он великолепный математик.
Поль Дирак
(английский физик (1902–1984),
лауреат Нобелевской премии)

8.1. Возникновение основных идей

История интегрального и дифференциального исчисления начинается с далёкой древности (III в. до н.э.). Зарождение интегрального исчисления связано с необходимостью вычисления различных площадей и объёмов, определения положения центров тяжести фигур.

В работе «Послание Архимеда к Эратосфену» Архимед изложил мысль о составлении плоских фигур из линий, а тел — из плоскостей. Он изучил вписанные и описанные ступенчатые фигуры (тела) — геометрические ***прообразы*** интегральных сумм. Математики XVII в. не были знакомы с содержанием этой книги. Два тысячелетия работа Архимеда считалась потерянной. Её случайно нашли только в начале двадцатого века.

Первую ***попытку*** раскрыть метод Архимеда сделал немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (Kepler, Johann, 1571–1630). Он написал книгу «Новая стереометрия винных бочек». В этой книге плоская фигура разбивалась на бесконечное число бесконечно малых элементов, площадь которых вычисляется просто. Сумма всех таких известных площадей — площадь исходной фигуры. Кеплер не только повторил идеи Архимеда, но дополнительно к этому вычислил объёмы 87-ми различных тел вращения.

Итальянский учёный монах — Бонавентура Кавальери (Cavalieri, Bonaventura, 1598–1647) широко пропагандировал идеи Кеплера. Основал «метод неделимых», написал и опубликовал несколько ценных работ, в которых показал применение этого метода и близко подошёл к современному понятию определённого интеграла.

Большой вклад в развитие понятий «определённый интеграл» и «бесконечно малые» внесли французские математики Пьер Ферма и Блез Паскаль.

8.2. Пьер Ферма (Fermat, Pierre, 1601–1665)

Пьер Ферма родился в городе Бомон-де-Ломань на юго-западе Франции. Он учился в школе францисканского ордена в Бомоне, затем в университете Тулузы, где получил фундаментальное филологическое образование. Ферма писал стихи на латинском, французском и испанском языках, делал комментарии к текстам древних авторов. После университета стал адвокатом, а затем советником парламента Тулузы. На этой службе у Ферма было много свободного времени, и он занимался любимой математикой.

С 1636 г. Ферма посещал научный ***семинар*** в королевской библиотеке. На этих семинарах он познакомился с Б. Паскалем и показал ему свою работу «Метод определения максимума кривых и касательных к ним».

Ферма один из первых понял, что максимум или минимум ***достигаются*** там, где скорость изменения функции равна нулю. Ферма решил задачу о нахождении вписанных в шар конуса и цилиндра, объёмы которых были бы наибольшими. Благодаря Ферма методы отыскания максимумов и минимумов начали использовать для нахождения оптимальных решений различных технических задач.

В 1934 г. нашли заметку Ньютона, где написано, что при ***разработке*** дифференциального исчисления, он ***опирался*** на «метод построения касательных месье Ферма».

Пьер Ферма считается одним из основателей дифференциального исчисления.

8.3. Блез Паскаль (Pascal, Blaise, 1623–1662)

Блез Паскаль — один из самых знаменитых людей в истории человечества. Паскаль прожил всего 39 лет, но вошёл в историю как выдающийся математик, физик, философ и писатель. Б. Паскаль — один из создателей математического анализа, теории вероятностей и вычислительной техники. Он ***особенно*** популярен во Франции. Его считают прекрасным писателем. Ему ***посвящено*** много книг.

Отец Паскаля, Этьен Паскаль, служил юристом и сборщиком налогов в парламенте города Клермон-Ферран. В свободное время он много и серьёзно занимался математикой. В геометрии есть кривая 4-го порядка, которая названа его именем, это ***улитка*** Паскаля.

Результаты Э. Паскаля в математике были ***скромными***, но благодаря своим фундаментальным знаниям он поддерживал контакты с большинством французских математиков. С великим Ферма он ***обменивался*** трудными задачами. В споре Ферма с Рене Декартом о задачах на максимум и минимум Э. Паскаль выступал на стороне Ферма.

Э. Паскаль много внимания уделял сыну. Он разработал свою систему образования. На первых шагах он исключил математику. Отец боялся, что ранняя ***увлечённость*** математикой ***помешает*** гармоническому развитию, а ***напряжённые размышления повредят*** слабому здоровью сына. Но 12-летний мальчик узнал о существовании геометрии, которой занимался его отец и ***уговорил*** его рассказать о математике. Блез настолько увлёкся математикой, что отец разрешил ему пользоваться собственной математической библиотекой. С 13-ти лет Паскаль вместе с отцом посещал знаменитый математический ***кружок*** Мерсенна, в который входило большинство парижских математиков.

Взрослым Блез Паскаль изучал задачи, которые не имели элементарных решений. Для решения некоторых из них он разработал теорию, близкую к теории дифференциального и интегрального исчисления. Лейбниц, который делит с Ньютоном ***славу создателя*** этой теории, писал, что когда он познакомился с работами Паскаля, его «***озарило*** новым *светом*», он ***удивился***, насколько Паскаль был близок к построению общей теории.

Интуиция математиков, которые заложили фундамент дифференциального и интегрального исчисления, сильно ***опережала*** возможности строгих доказательств. Математический язык был тогда ***недостаточно*** развит. Для выхода из этой ситуации позже были введены новые понятия и специальная символика.

Паскаль не использовал символику, но он ***виртуозно*** владел языком. Паскаль-писатель помог Паскалю-математику ***ясно*** и точно изложить свой взгляд на новый способ решения многих задач с помощью нового метода, который потом стал дифференциальным и интегральным исчислением.

Математики следующего поколения ввели в общей форме основные понятия нового исчисления, нашли ***взаимосвязь*** новых понятий, ***придумали удачную символику*** для них и алгоритмы соответствующих вычислений. ***Ведущие места*** в этом математическом творчестве занимают Ньютон и Лейбниц.

8.4. Исаак Ньютон (Newton Isaac, 1643–1727)

Имя Исаака Ньютона известно миллионам людей, его называют величайшим учёным в истории человечества. Он открыл многие законы механики, закон всемирного тяготения. В математике он является одним из создателей дифференциального и интегрального исчисления.

В астрономии сделал открытия в небесной механике, построил зеркальный телескоп.

Ньютон писал: «Если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов». В своей научной деятельности Ньютон придерживался принципа, который ***выдвинул*** Галилей, — искать не физическое, а математическое ***описание***.

В жизни Ньютона нет ***ярких внешних событий***. Учёба, научная деятельность, работа в Монетном дворе. Ньютон жил во время зарождения английской ***опытной*** науки, которая сыграла большую роль в истории мировой культуры и в научной жизни самого Ньютона.

В школе Ньютон учился ***средне***. В свободное время он делал механические игрушки. Построил ***мельницу***, которую приводила в движение ***мышь***. Изготовил водяные и солнечные часы. ***Запускал воздушных змей*** с ***фонариками***. Ньютон много читал, рисовал, писал стихи.

В 1661 г. Ньютон поступил в Кембриджский университет в Тринитиколледж (колледж Святой Троицы). Там он встретился с выдающимся учителем — Исааком Барроу. С этого момента и до 1696 г. жизнь Ньютона связана с Кембриджем. В 1665 г. из-за эпидемии чумы он уехал на два года в ***деревню*** на юго-восток Англии. В этот период Ньютон занимался научной работой по механике, математике и оптике. Он понял, что открытый им ***закон всемирного тяготения*** даёт ***ключ*** ко всей механике; установил, что белый свет включает в себя все цвета радуги от ***красного*** до ***фиолетового***. Ньютон разработал общий метод решения многих задач математического анализа.

Результаты своей научной работы Ньютон не ***спешил публиковать***. Классическое произведение Ньютона «Математические начала натуральной философии» вышло из печати только в 1687 г.

После выхода этой книги имя Ньютона стало ***широко известно***. Но книга была очень трудна для чтения, поэтому появились популярные ***изложения*** этого сочинения. Постепенно, почти за сто лет, математики довели содержание его книги до полной ясности.

Известный математик Клейн (Klein, Felix, 1849–1925) так определил значение «...Начал...» Ньютона: *«Эта книга открыла перед человечеством новый мир — Вселенную, управляемую единым сводом законов физики с их точным математическим выражением. Работа Ньютона доказала всему миру, что природа основана на математических принципах и что законы природы описываются математическим языком»*.

В 27 лет Ньютон стал профессором Кембриджского университета, а затем членом Лондонского королевского общества.

Анализом бесконечно малых занимались многие учёные, начиная с Архимеда и ***включая*** некоторых учёных XVII в. Но только Ньютон обобщил и систематизировал труды своих предшественников. В результате он построил интегральное и дифференциальное исчисление. Ньютон пришёл к понятию производной, когда определял в механике скорость ***прямолинейного неравномерного*** движения. Функцию от времени он называл флюэнтой, то есть текущей величиной (от латинского слова fluere — течь), а производную называл флюксией. Ньютон решал ***обратные задачи***, в которых по флюксиям надо было находить флюэнты. Говоря современным языком: по производным находились первообразные.

Ньютон считал, что задача науки состоит в том, чтобы раскрывать ***блистательные замыслы творца***. Он всю жизнь изучал и интерпретировал религиозные произведения, а в конце жизни целиком ***посвятил*** себя богословию (теологии), писал об этом книги.

Ньютон верил, что Бог сотворил мир. Он писал: *«Мне хотелось найти такие начала, которые были бы совместимы с верой людей в Бога; ...мой труд оказался не* ***напрасным****»*.

В 1696 г. начался лондонский период жизни Ньютона — время его ***прижизненной славы и признания***. Он становится членом парламента и директором Монетного двора.

В Кембридже на статуе Ньютона ***высечено***: «Разумом он превосходил род человеческий». В доме, где он родился, есть запись: «Природа и её законы были ***покрыты мраком***. Бог сказал: да будет Ньютон — и стал свет».

Сам о себе Ньютон сказал так: *«Не знаю, чем я могу* ***казаться*** *миру, но сам себе я кажусь только мальчиком, который играет на берегу и отыскивает* ***цветные*** *камешки или красивую* ***раковину****, а в это время великий океан* ***истины расстилается*** *передо мной неисследованным»*.

8.5. Готфрид Вильгельм Лейбниц (Leibnitz, Gottfried Wilhelm, 1646–1717)

В истории науки имена Исаака Ньютона и Готфрида Лейбница стоят рядом. Лейбниц был ***противоположностью*** Ньютона. Лейбниц — политик, историк, юрист, философ, путешественник и дипломат.

Отец Лейбница, Фридрих Лейбниц был профессором философии в университете города Лейпцига. Он умер, когда Лейбницу было всего 5 лет. В 8 лет ему ***разрешили*** читать книги из библиотеки отца. Почти все книги были написаны на греческом и латинском языках. Для их чтения Лейбниц ***самостоятельно*** выучил латынь и греческий. Он целыми днями просиживал в отцовской библиотеке и читал Платона, Аристотеля, Цицерона, Декарта.

В своей биографии Лейбниц писал: *«Две вещи принесли мне огромную **пользу**, хотя они часто приносят **вред**. Во-первых, я был самоучкой; во-вторых, как только в какой-то науке я **приобретал** первые понятия, я всегда искал новое часто потому, что не мог достаточно хорошо усвоить первые понятия»*.

В 15 лет Лейбниц стал студентом Лейпцигского университета. В 20 лет — доктор права и дипломат. Как дипломат он составляет проект экспедиции в Египет для Людовика XIV. Но король Франции не использовал труд Лейбница. Только через столетие проект Лейбница заинтересует Наполеона, и он совершит экспедицию в Египет. В этой экспедиции принимал участие другой замечательный французский математик Жан Фурье.

Во время поездки в Лондон Лейбниц познакомился с Ньютоном, который был старше его всего на три года, но годился ему в учителя. После этой встречи пройдёт 11 лет, и Лейбниц опубликует свой научный труд по дифференциальному исчислению. С этой публикации начнётся столетний спор о первенстве создания этого раздела математики.

В 1672 г. Лейбниц приехал в Париж для переговоров с королём Людовиком XIV. Ему всего 26 лет. В Париже он познакомился с главой Королевской Академии наук Христианом Гюйгенсом. Встреча с этим авторитетным учёным сыграла настолько важную роль в математике, что мы должны хотя бы кратко рассказать о нём.

Христиан Гюйгенс (Christan, Huygens, 1629–1695) родился в голландском городе Гаага. Его отец был дипломатом и поэтом, дружил с Декартом. С 16 лет Христиан изучал в университете математику и юридические науки. Но в процессе учёбы он увлёкся математикой, механикой, астрономией и физикой.

Гюйгенс усовершенствовал телескоп, с помощью него открыл спутник Сатурна (Титан) и его кольца. ***Изобрёл маятниковые часы***. Написал знаменитую книгу «Трактат о свете». В этой работе он изложил волновую теорию света и выступил против корпускулярной теории Ньютона. Ньютон тоже не признавал теорию Гюйгенса. Не смотря на это, учёные относились друг к другу с большим ***уважением*** и даже встречались в Лондоне. Созданная в XX в. квантовая теория показала, что верны обе теории.

Под руководством Гюйгенса началось математическое образование Лейбница. Он изучил труды Декарта, Ферма, Паскаля и через четыре года сам подошёл к открытию дифференциального и интегрального исчисления. Его первая работа по дифференциальному исчислению опубликована в 1684 г.

Лейбниц придумал названия «дифференциальное исчисление», «интегральное исчисление», обозначения дифференциалов dx, dy, знак интеграла $\int$. Благодаря Лейбницу математики стали пользоваться знаком равенства «=», знаком умножения «·». Лейбниц ввёл в математику термины «функция» и «координаты».

Постоянная публикация научных работ Лейбница и его большая научная переписка привели к появлению научной школы, в которую входили братья Бернулли (Bernoulli), Лопиталь (l'Hôpital) и Леонард Эйлер. Братья Бернулли освоили метод Лейбница и решили с помощью этого метода ***широкий круг*** задач. Лопиталь стал автором первого учебника по новому исчислению. Книга издана в 1690 г. под названием «Анализ бесконечно малых для познания кривых линий».

Лопиталь много заимствовал у братьев Бернулли, под ***руководством*** которых он изучал новое исчисление. Он собрал, систематизировал и педагогически обработал весь формальный аппарат нового исчисления, ***подобрал*** необходимые примеры и задачи. После выпуска первого учебника началось распространение новых идей. В XVIII в. исчисление бесконечно малых становится главным инструментом в математике.

Лейбниц был ***чрезвычайно разносторонним*** человеком. Около 40 лет он совершенствовал свою счётную машину, которая могла выполнить четыре арифметических действия и извлекать квадратные корни. Он пришёл к идее парового двигателя, двоичного исчисления, интересовался китайской философией, старался помочь объединить ***разрозненную*** тогда Германию.

К началу XVIII в. ***слава*** Лейбница ***гремела по всей Европе***. Он вёл огромную научную переписку, встречался со многими учёными и монархами. Лейбниц стал основателем и президентом (с 1700 г.) Бранденбургского научного общества, которое позже стало Берлинской Академией наук. По ***просьбе*** Петра I Лейбниц ***разрабатывал*** проекты развития образования и научных исследований в России.

Лейбниц рассматривал научную деятельность как религиозную миссию. Гармонию между реальным миром и миром математики Лейбниц объяснял единством реального мира и Бога. Главный тезис Лейбница: *«Наш мир — **самый совершенный** из всех миров и рациональное мышление открывает его законы».*

Дальнейшее развитие интегрального и дифференциального исчисления ***связано со*** многими именами математиков XVIII в.: Эйлер, Лагранж, Клеро, Д. Бернулли, Лаплас, Даламбер, Лежандр, Риккати, Коши и др. Остановимся на двух именах.

8.6. Жозеф Луи Лагранж (Lagrange, Joseph Louis, 1736–1813)

Император Наполеон Бонапарт любил ***беседовать*** с Лагранжем на философские, государственные и математические темы. Наполеон считал Лагранжа самым скромным математиком XVIII в. и ***величественной*** пирамидой математических наук. Он сделал Лагранжа сенатором, графом и ***командиром ордена почётного легиона***. Король Франции Людовик XVI и королева Мария Антуанетта ***осыпали*** Лагранжа ***почестями***. Некоторое время он даже жил в Лувре. После казни короля и королевы революционная «общественность» не ***тронула*** Лагранжа.

Жозеф Луи Лагранж родился в итальянском городе Турине. Дед его был французом, женился на итальянке. Лагранжа крестили под итальянским именем Джузеппе Людовико Лагранж. В итальянской энциклопедии он — итальянский учёный. В других странах его считают французским математиком.

Лагранж был одиннадцатым и последним ребёнком в семье. Его отец ко времени рождения Лагранжа ***потерял*** своё ***состояние***. Позже Лагранж писал: *«Если бы я* ***унаследовал*** *состояние, то мне,* ***вероятно,*** *не пришлось бы* ***связать свою судьбу*** *с математикой».*

В детстве Лагранж увлекался латынью и случайно изучил научную книгу «О преимуществах аналитического метода», написанную на латыни. Автор книги Э. Галлей — друг Ньютона. Его именем названа планета Галлея. Книга посвящена применению математического анализа в оптике. С тех пор и на всю жизнь Лагранж «заболел» математическим анализом.

К семнадцати годам Лагранж изучил все известные к тому времени труды по математике и ***приступил*** к самостоятельным исследованиям.

В августе 1755 г. юный Лагранж послал письмо знаменитому Эйлеру, в котором изложил новые идеи в вариационном исчислении. Эйлер ***высоко оценил*** это письмо.

В 19 лет Лагранж становится профессором Королевской артиллерийской школы. Ещё через год его избрали в Берлинскую Академию наук. В родном Турине он организовал свою Академию наук. По просьбе Эйлера Лагранж переехал жить в Берлин и занял место руководителя Берлинской Академии, ***вместо*** уехавшего в Санкт-Петербург Эйлера.

Лагранж настолько плодотворно использовал математику в механике, что пошёл дальше Ньютона. Сейчас классическая механика ***наполовину*** может быть названа «лагранжевой». Во время берлинского периода Лагранжу пять раз ***присуждали премии*** Парижской Академии за работы в области небесной механики.

Король Пруссии Фридрих II был покровителем Лагранжа и проводил многие часы в беседах с ним. Через полгода после смерти Фридриха II Лагранж переехал в Париж. В 1790 г. его включили в комиссию по стандартизации системы мер и весов. Благодаря Лагранжу была введена десятичная метрическая система.

В 1794–1795 гг. во Франции открылись две знаменитые школы: Политехническая школа (Ecole Polytechique) для подготовки офицеров и инженеров и Нормальная школа (Ecole Normale) для подготовки учителей. В этих школах Лагранж читал лекции по математическому анализу и элементарной математике.

Важно отметить, что в работе Лагранжа «Теория аналитических функций» (1797) впервые появились новые термины и обозначения, которые с тех пор успешно используются во всём математическим мире. Это термины: «производная», «первообразная» и обозначения: y' и $f'(x)$.

8.7. Огюст Луи Коши (Cauchy, Louis Augustin, 1789–1857)

Коши Огюст Луи — французский математик, почётный член Петербургской Академии Наук. ***Окончил*** Политехническую школу и Школу мостов и дорог в Париже. Был профессором Политехнической школы. Коши издал курс лекций, в которых дал строгие обоснования математического анализа.

После революции Коши жил в ***изгнании*** в Турине и Праге. Вернулся в Париж он только в 1838 г. и получил должность профессора в Сорбонском университете.

Всё это время Коши интенсивно занимается математикой. Он был ***необычайно работоспособным*** математиком. Коши опубликовал более 800 научных работ. Были периоды, когда Коши каждую неделю представлял в Парижскую Академию новые мемуары. Из-за него ввели ограничение на объём статей (не более четырёх страниц).

Одной из первых теорем, доказанных Коши в «Курсе анализа», была теорема о промежуточном значении непрерывной функции, поэтому часто её называют теоремой Коши.

Коши сыграл большую роль в создании теории пределов. Пределами последовательностей фактически пользовались ещё Архимед, а затем Галилей, Блез Паскаль и другие математики. Ньютон первым понял важность этого понятия. Но строгое понятие предела функции в точке ввёл только Коши (1820).

Он создал ***стройную*** теорию пределов. После этого ушёл ***мистический туман***, который покрывал понятие бесконечно малой. Коши дал определение понятия непрерывности функции в точке и определение интеграла как предела сумм.

В XVIII в. государственные деятели многих европейских стран оценили великую пользу и возможности математики. Появились математики, которым государство платило деньги за решённые задачи и за разработки новых математических идей. Поэтому математика в это время развивалась в основном в академиях наук: в Париже, Берлине, Петербурге и Лондоне.

Отсутствие точных определений и понятий в начале развития теории бесконечно малых приводило к многочисленным ***спорам***. В течение XIX в. математики ***полностью устранили*** этот ***недостаток***. В настоящее время интегральное и дифференциальное исчисление является важной частью математики.

ГЛАВА 9. ПЕТЕРБУРГСКАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Процветание и совершенствование
математики тесно связано
с благосостоянием государства.
Наполеон

9.1. Пётр I и математика

До Петра I специального математического образования и математической науки в России фактически не было. Татаро-монгольское нашествие отрезало Русь от западной Европы. Это задержало развитие математической культуры в нашей стране. Первое русское математическое сочинение написано новгородским учёным монахом Кириллом только в 1136 г., а геометрия Евклида оставалась неизвестной до эпохи Петра I.

При Петре I в России началось систематическое математическое образование, а затем и наука. При его ***участии*** в России организовали первые государственные школы, математика в которых была на первом месте.

Для ***просвещения*** России Пётр ***пытался*** использовать научно-образовательные ***достижения*** Западной Европы. При Петре ***поощрялась*** учёба за границей, нередко юношей даже ***заставляли*** уезжать на учёбу.

Пётр I многое сделал для организации выпуска учебников, в которые были включены различные разделы математики. Сначала такие книги печатали в Амстердаме. Но в России их покупали ***плохо***.

К концу XVII в. Пётр I организует государственное руководство профессиональными школами. В начале XVIII в. создаются математико-навигационная, инженерная, артиллерийская школы и горное училище. Математика там была основным предметом.

Есть две причины такого большого внимания Петра к математике. Прежде всего, Пётр с юности увлекался математикой и постепенно освоил её в хорошем объёме. Он знал те разделы, которыми ***пользовались*** инженеры высокой квалификации, архитекторы и навигаторы; принимал участие в издании математических книг.

Второй причиной было знакомство Петра со ***знаменитым*** немецким математиком Готфридом Лейбницем. Пётр вёл постоянную ***переписку*** с

Лейбницем. Великий математик ***предлагал*** царю системную организацию школьного образования. Лейбниц говорил, что именно с помощью образования можно преобразовать мир к лучшему.

В 1714 г. по ***указу*** Петра во многих городах были образованы «цифирные» школы. Цифирью в те времена называли то, что мы сейчас называем элементарной математикой. В этих школах преподавали выпускники математико-навигационной школы. Математика с тех пор стала основным предметом во всех школах России первой четверти XVIII в.

Значительный вклад в математическое образование внесли представители «учёной дружины» Петра: Андрей (Генри) Фархварсон, Феофан Прокопович, Яков Брюс и Леонтий Магницкий.

В 1698 г. Пётр I познакомился в Англии с английским математиком Генри Фархварсоном, который в это время преподавал математику в одном из университетов Англии. По приглашению Петра он стал работать в математико-навигационной школе. Под его руководством перевели и издали некоторые книги «Начал» Евклида. Он ввёл арабские цифры в России.

Феофан Прокопович — выдающийся деятель России: математик, педагог, писатель, государственный деятель. На собственные деньги он организовал частную школу. Математика в этой школе была основным предметом.

Курс лекций по математике Феофана Прокоповича отличался высоким теоретическим уровнем, поэтому его можно считать первым преподавателем математики Российской высшей школы.

Яков Брюс — ближайший помощник Петра в деле образования и культуры. Благодаря обширным математическим познаниям он написал учебник по геометрии. Текст этого учебника редактировал сам Пётр I.

Первая русская математическая школа зародилась в математико-навигационной школе. Сначала учителями в ней были только иностранцы, которые проводили занятия по математике на английском языке, русского языка они не знали. Ученики ничего не понимали, так как не знали английского. Тогда в школу пригласили преподавать математику ***талантливого*** педагога Леонтия Магницкого, которого хорошо знал Пётр I.

Леонтий Магницкий получил образование в Московской славяно-греко-латинской академии. Там он изучил латинский и греческий языки и самостоятельно голландский, немецкий и итальянский, а затем математику по европейской учебной литературе. Он хорошо знал достижения западноевропейских математиков.

В 1702 г. Магницкий в ***кратчайший*** срок написал уникальный учебник по математике под названием «Арифметика». Этот учебник издали в 1703 г. и переиздавали ***в течение*** 50-ти лет. Книга была очень популярна и не имела ***конкурентов***.

Михайло Ломоносову очень нравилась эта книга. Он знал её наизусть и называл ***«вратами учёности»***.

В книге представлены арифметика, алгебра, геометрия, тригонометрия, сведения о метеорологии, астрономии, навигации. Этот учебник был в те времена энциклопедией математических знаний. В книге ***уделено внимание*** истории, философии, даны ***советы*** читателю. Часто различные разделы учебника изложены в стихотворной форме. Книга прекрасно оформлена, содержит много ***красочных*** картинок. Этот учебник стал выдающимся литературным памятником петровской эпохи и сыграл ***огромную роль*** в математическом образовании России.

9.2. Создание Петербургской Академии наук

Первая четверть XVIII в. — время развития математического образования в России, которое стало базой для начала развития математической науки в России.

Лейбниц ***советовал*** Петру организовать Академию наук. История организации Академии наук связана с ***перепиской*** Петра со знаменитым немецким профессором математики Христианом Вольфом, будущим учителем Ломоносова.

В 20-х гг. XVIII в. в немецких газетах появилось сообщение, что изобретатель Орфиреус построил ***вечный двигатель***. Петр I хотел ***приобрести*** такой двигатель и написал об этом Вольфу. Профессор ответил, что математики не видели этого изобретения, поэтому ***уверенности*** в его вечности нет.

Царь пригласил Вольфа приехать в Россию на любых условиях, лишь бы он взялся за изучение изобретённого вечного двигателя. Но Вольф ***отказался***. Он считал (думал), что для России важнее заняться распространением научных знаний. Для этого не нужны знаменитые учёные, достаточно пригласить из Европы молодых начинающих учёных.

В итоге Пётр решил организовать Академию и университет с гимназией при Академии. 22 января 1724 г. в Зимнем дворце на ***заседании*** Сената обсуждали проект основания Академии, а 28 января Сенат издал ***указ*** о ***создании*** Академии.

Академия состояла из трёх классов, одним из которых был математический. Математический класс делился на четыре кафедры: математики, астрономии, географии и навигации.

Пётр I, к сожалению, не дожил до торжественного открытия Академии наук, университета и гимназии.

Образование Академии наук ***совпало*** с периодом ***расцвета*** математики в Европе. При участии Вольфа в Россию приехали семь математиков. Это были представители самой знаменитой в то время европейской математической школы. Среди них были три брата Бернулли: Якоб, Герман, Николай и Христиан Гольдбах.

В 1727 г. по совету братьев Бернулли из Швейцарии в Петербург приехал молодой швейцарский математик Леонард Эйлер.

Приглашённые учёные должны были следить за научной литературой, новыми открытиями, каждую неделю ***участвовать*** в заседаниях, разрабатывать учебные курсы на латинском языке и читать ежедневно одну часовую публичную лекцию. Однако слушателей в университете не было. Пришлось пригласить из Западной Европы восемь студентов. Профессоры тоже ходили друг к другу на лекции. Россия ещё была далека от науки. Не было в русском языке слов «студент» и «наука». Для гимназии набирали детей ***солдат***, ***крепостных*** и ***мастеровых***. Гимназия давала очень мало хорошо подготовленных выпускников для учебы в университете. Поэтому студентов брали из славяно-греко-латинской Академии. Таким образом в Петербургский университет попал Михайло Ломоносов.

В 1783 г. Академический университет ***временно*** закрыли, так как в университете было только два студента.

9.3. Леонард Эйлер (Euler, Leonhard, 1707–1783)

Читйате, читайте Эйлера —
он наш общий учитель.
Пьер Лаплас

Вклад этого учёного в развитие математики и механики настолько велик, что XVIII в. в науке часто называют веком Эйлера

Леонард Эйлер родился в швейцарском городе Базеле в семье пастора. Отец мечтал, чтобы сын стал священником, но с раннего детства любил заниматься с сыном математикой, превращал эти занятия в игру. В 13 лет Эйлер стал студентом философского факультета университета в Базеле, а в 17 лет ему присвоили степень магистра искусств за доклад о сравнении философских взглядов Ньютона и Декарта. Большую роль в судьбе Эйлера сыграло знакомство с семьёй математиков Бернулли.

Эйлер приехал в Петербург в 1727 г. в день смерти Екатерины I. Без её ***покровительства*** Академия быстро пришла в ***упадок***, поэтому многие академики уезжали на родину. Этот ***негативный*** процесс способствовал быстрому профессиональному росту Эйлера. В 1729 г. он стал профессором. Через год возглавил кафедру математики, а когда в 1733 г. Даниил Бернулли возвратился в Швейцарию, Эйлер в возрасте двадцати шести лет стал ведущим математиком Академии.

У Эйлера была прекрасная память, и в первый же год он научился хорошо говорить, а затем и писать на русском языке. Эйлер отличался ***феноменальной*** (уникальной) трудоспособностью и постоянным ***стремлением*** к математическому творчеству. Он внёс большой вклад в такие разделы математики как вариационное исчисление, обыкновенные дифференциальные уравнения, степенные ряды, специальные функции, дифференциальная геометрия, теория чисел. Ввёл двойные интегралы, заложил основы математической физики. Эйлер написал для университетов учебники по высшей математике: «Введение в вычисление бесконечно малых», двухтомник «Дифференциальное исчисление» и трёхтомник «Интегральное исчисление».

За 13 лет было опубликовано около 70 его научных работ. Благодаря Эйлеру Петербургская Академия стала одним из крупнейших научных математических центров Европы.

В 1741 г. Эйлер уехал из России в Германию, так как после кончины императрицы Анны материальное положение Академии стало совсем плохим. В Германии он стал руководить Берлинской Академией.

Тем временем в России начинает ***править*** Екатерина II. Она высоко ценила Эйлера и ***настойчиво*** приглашала его вернуться в Петербургскую Академию наук, обещала выполнить все ***требования*** учёного. В 1766 г. Эйлер вернулся в Россию.

В одном из писем Екатерина II пишет: *«**Я уверена**, что моя Академия **возродится из пепла** от такого важного **приобретения**, и заранее **поздравляю** себя с тем, что **возвратила** России великого человека».*

Эйлер прожил в России 31 год. Из 26 томов, выпущенных академией за это время, более половины написаны Эйлером. Список трудов Эйлера содержит 850 ***наименований***. При жизни Эйлера опубликовали около 550. Петербургская Академия наук в течение 47 лет издавала рукописи Эйлера.

В Швейцарии издано семидесяти двух томное (72 тома) собрание сочинений Эйлера и его научная переписка.

Огромное разнообразие больших проблем было поставлено математической науке в XVII–XVIII вв. Эти проблемы невозможно было решить в рамках математики прежних веков. Поэтому появились новые понятия: функция, производная, интеграл. Благодаря Ньютону и Лейбницу был создан математический аппарат для изучения технических и природных явлений.

Оказалось, что законы движения тел могут быть с высокой точностью записаны в виде дифференциальных уравнений — уравнений, которые связывают ***искомые*** функции с их производными. Механика, физика и другие науки требовали от математики нахождения способов решения таких уравнений. В наше время во всех учебниках по теории дифференциальных уравнений представлены приёмы и методы Эйлера для решения таких уравнений.

Много интересных результатов получил Эйлер в теории чисел. Известно свыше 100 его научных работ, посвящённых этому разделу математики. Рассмотрим кратко одну из таких работ.

С давних времён математиков волновал вопрос о расположении простых чисел в множестве натуральных чисел. Учёные пытались найти формулы, которые давали бы только простые числа. Эйлер вывел большое количество таких формул.

Приведём три примера.

1. Полином $2x^2 + 29$ даёт 29 простых чисел, если вместо x подставлять числа 0, 1, 2, ..., 28.
2. Полином $x^2 + x + 41$ даёт 40 простых чисел, если вместо x подставлять числа 0, 1, 2, ..., 39.
3. Полином $x^2 - 79x + 1001$ даёт 80 простых чисел, если вместо x подставлять числа 0, 1, 2, ..., 79.

Эйлер доказал, что ни один алгебраический полином с целыми коэффициентами

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n$$

не может для любых целых значений x равняться простому числу.

Интересы Эйлера были обширны и разнообразны. Кроме науки его увлекала техника, религия, музыка. Он ***обладал*** педагогическим мастерством. Сразу после первого приезда в Россию стал одним из первых преподавателей математики в академической гимназии. Эйлер первым в Российском школьном образовании стал давать логические ***обоснования*** различным математическим правилам. Он уделял большое внимание проблемам математического образования. Эйлер высоко ценил французскую педагогическую школу; считал, что надо преподавать математику, совмещая научность с простотой. Математическое образование в России очень быстро ***приблизилось*** к европейскому уровню.

Эйлер ***задумал*** (планировал) написать учебник «Полное введение в алгебру», по которому читатель мог бы самостоятельно изучить основы алгебры.

Ослепший Эйлер ***диктовал*** эту книгу мальчику-слуге, который до этого был ***портным*** и не знал математику. В процессе работы над книгой мальчик понял всё, что диктовал ему великий слепой и решил все задачи из этой книги.

Этот учебник стал прообразом всех ***последующих*** учебников алгебры до начала XX в. Двухтомное «Полное введение в алгебру» Эйлер написал на немецком языке. Русский перевод этой книги вышел под названием «Универсальная арифметика». Прекрасный подбор материала и простой язык изложения сделали этот учебник самым популярным. Книга ***несколько раз*** переиздавалось на немецком языке, в русском, французском, английском и голландском переводах

До Эйлера понятие логарифма трактовалось (излагалось) совершенно неудовлетворительно (плохо) даже такими учёными, как Лейбниц, Иоганн Бернулли и Даламбер. Поэтому учение о логарифмах Эйлер изложил в своей книге заново. Логарифм он определяет как показатель степени некоторого основания. Большое внимание Эйлер уделил процессу логарифмирования. ***Общепризнанно*** (***бесспорно***), что учение о логарифмах — одна из лучших частей книги «Универсальная арифметика».

По просьбе Петербургской Академии наук Эйлер написал интересную методическую работу «Руководство к арифметике». Эта книга сыграла большую роль в создании последующих русских учебников по математике.

Эйлер создал современную теорию тригонометрии. До Эйлера тригонометрические функции не рассматривались как функции числового аргумента. Не было ясности в знаках тригонометрических величин, не было единых обозначений. Большинство теорем доказывалось на основе ***наглядных соображений***.

Эйлер ввёл круг единичного радиуса. Это упростило вид всех формул тригонометрии. Решил вопрос о знаках тригонометрических функций. Вывел формулы приведения. Ввёл ***единообразные*** обозначения. Ввёл понятие тригонометрических функций. Доказал, что иррациональные числа можно представить в виде бесконечных непериодических десятичных дробей.

В течение почти трёх столетий школьная математика в России строилась по идеям Эйлера. Большое внимание Эйлер уделял подготовке учёных для Петербургской Академии наук. Первые русские академики учились у Эйлера.

Он поддерживал Ломоносова, дал положительный отзыв на его диссертацию.

Известный русский математик Б.И. Делоне писал, что нет учёного, имя которого упоминалось бы в учебной математической литературе так же ***часто***, как имя Эйлера. Несколько десятков формул, уравнений и интегралов носят имя Эйлера. Много доказанных им теорем и разработанных методов решения различных задач давно используют без связи с именем Эйлера.

Похоронен Эйлер в Петербургском некрополе — Александро-Невской лавре. Потомки его живут в России.

Леонард Эйлер является одним из самых выдающихся математиков, труды которого и сейчас ***влияют*** на прогресс математики.

Интересную роль сыграла Россия в жизни другого западноевропейского математика, короля математики, Гаусса.

Несмотря на все его великие открытия в математике, Гаусс работал только приват-доцентом Геттингенского университета. Петербургская Академия наук пригласила его в Россию. В Германии ***испугались потерять*** Гаусса, и он сразу стал профессором и директором астрономической обсерватории. После этого Гаусс ***отказался*** от ***переезда*** в Россию.

Большой вклад в развитие Петербургской математической школы в XIX в. внёс известный французский математик Ламе (Lamé Gabriel, 1795–1870). В 1820 г. выпускник Парижской Политехнической школы Габриэль Ламе стал работать приглашённым профессором Института инженеров путей сообщения в Петербурге. Ламе вёл большую инженерно-научную работу. Основные его научные интересы ***сформировались*** за те 11 лет, которые он провёл в Петербурге. Ламе ***проектировал железную дорогу*** в России, мосты, шлюзы в Шлиссербурге, первый цепной мост через Фонтанку. По заказу архитектора Монферана сделал математические расчёты проекта ***триумфальной колонны*** на Дворцовой площади в честь победы над Наполеоном.

Труды Ламе высоко ценили его ***современники***. Гаусс ставил Ламе во главе французских математиков.

9.4. Пафнутий Львович Чебышев (Чебышёв) (1821–1894)

Пафнутий Львович Чебышев оставил ***глубокий след*** в истории математики. Его считают одним из величайших представителей математической науки XIX в. Чебышев был ***основателем*** российских научных школ по теории вероятностей, теории чисел, теории приближения функций, которые с ***успехом*** продолжают работу в наши дни.

Родился Чебышев 26 мая в 1821 г. в маленьком селе Окатово Калужской губернии. Получил домашнее образование. В 1832 г. семья Чебышевых переехала в Москву для подготовки своих детей к поступлению в университет.

В 16 лет Чебышев стал студентом Московского университета и уже через год был награждён медалью за математическое сочинение, тему которого предложил университет. После окончания университета он переехал в Петербург для работы в Петербургском университете.

Чебышев преподавал и занимался научной работой. Постепенно он создал свою научную школу. Основная черта этой школы — связь проблем математики с ***принципиальными*** вопросами естествознания и техники.

На своих лекциях Чебышев обычно рассказывал историю и научное значение изучаемого математического открытия, факта или положения. Он объяснял цель и ход нужных в лекции математических преобразований, а затем молча и очень подробно, делал эти преобразования на доске.

Первые ***выдающиеся*** работы Чебышева относились к наиболее абстрактному разделу математики — теории чисел. Докторскую диссертацию он защитил в 28 лет. В течение 50 лет студенты пользовались книгой Чебышева «Теория ***сравнений***», потому что это был лучший учебник по теории чисел.

В 1852 г. Чебышев уехал в ***командировку*** во Францию. Там он изучил конструкцию ***парового двигателя***, который в те времена был основой передовой французской ***промышленности***. В паровых двигателях тогда использовали ***шарнирные*** механизмы. Эти механизмы двигали поршень. Движение поршня должно минимально ***отличаться от*** прямолинейного движения. Изучение поведения таких шарнирных механизмов привело Чебышева к созданию знаменитых полиномов, наименее ***уклоняющихся*** от нуля. В тригонометрическом виде эти полиномы записываются в виде

$$T_n(x) = \cos(n\ \arccos x), \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ . \tag{9.1}$$

Позже их назвали полиномами Чебышева. В математическом мире они обозначаются всегда символом $T_n(x)$, так как фамилия Чебышев на французском языке пишется в виде Tschebicheff.

Полиномы Чебышева имеют много замечательных свойств. ***Отметим*** некоторые из них.

1. Все корни любого полинома Чебышева ненулевой степени действительны, различны и лежат на отрезке [−1; 1]. Эти корни называются абсциссами (узлами) Чебышева и вычисляются по формуле

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right) \quad \text{для} \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

2. Количество экстремальных значений у полинома Чебышева $T_n(x)$ на отрезке $[-1; 1]$, $(n > 0)$ равно $n + 1$. Модули всех экстремальных значений равны единице.
3. Очевидно, что $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$. Все полиномы Чебышева, начиная с третьего $T_3(x)$ легко построить по ***рекуррентной формуле***:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x). \tag{9.2}$$

Эту формулу можно получить с помощью двух элементарных (школьных) формул:

$$\cos(n+1)x = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x,$$
$$\cos(n-1)x = \cos nx \cos x + \sin nx \sin x.$$

После сложения этих формул приходим к равенству:

$$\cos(n+1)x + \cos(n-1)x = 2\cos x \cos nx \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos(n+1)x = 2\cos x \cos nx - \cos(n-1)x.$$

Переходя в последнем равенстве к классическим обозначениям полиномов Чебышева (9.1), получим рекуррентную формулу (9.2).
4. Полиномы с чётными номерами содержат только чётные степени x, а полиномы с нечётными номерами содержат только нечётные степени x. Благодаря этому полиномы Чебышева обладают следующим свойством.
5. <u>Свойство симметрии</u>.

Если номер полинома Чебышева — чётное число, то полином — чётная функция:

$$k = 2n \Rightarrow T_k(x) = T_k(-x).$$

Если номер полинома — нечётное число, то полином Чебышева — нечётная функция:

$$k = 2n + 1 \Rightarrow T_k(x) = -T_k(-x).$$

Для истории математики интересно, что теория ***конструирования*** механизмов стала основой для создания нового раздела математики — теории наилучшего приближения функций полиномами.

Вопрос о вычислении значений функций для заданных значений аргумента встаёт при изучении различных процессов, связанных либо с изучением природных явлений, либо явлений, связанных с деятельностью человека. <u>Точное вычисление значений</u> функции может быть выполнено лишь для полиномов и отношений полиномов (дробно-рациональных функций). Поэтому в математике давно ставилась задача о замене сложной вычисляемой функции близким к ней полиномом или отношением полиномов.

Особый интерес был к задаче построения ***интерполяционных*** полиномов, то есть к задаче нахождения полинома n-ой степени, значения которого совпадают с известными значениями исходной (часто табличной) функции. До Чебышева такие интерполяционные полиномы создали Ньютон, Лагранж, Гаусс и Бессель. Их полиномы имеют два ***существенных недостатка***:

1. Добавление одного или нескольких новых значений табличной функции приводит к полному пересчёту (надо считать всё с начала).
2. Увеличение порядка интерполяционного многочлена не ***гарантирует увеличение*** точности в расчётах.

Аппроксимация (приближение) функций с помощью полиномов Чебышева не имеет таких недостатков.

Многие математические открытия Чебышева связаны с ***прикладными*** работами. Он считал, что большая часть вопросов практики сводится к задачам о нахождении наибольших и наименьших величин: «*Как располагать своими средствами для достижения бо́льшей* ***выгоды***». Так, например, в работе «О построении географических карт» он определил (нашёл) ***проекцию*** карты Европейской части России, для которой ***искажение масштаба*** было минимальным.

Заслуги П.Л. Чебышева в области математики ***признал*** весь научный мир ещё при его жизни. Чебышева избрали иностранным членом Парижской Академии наук, Итальянской королевской Академии, Лондонского королевского общества, Шведской Академии наук.

П.Л. Чебышев оставил после себя много учеников, среди которых были такие известные во всём мире математики как А.М. Ляпунов и А.А. Марков.

9.5. Андрей Андреевич Марков (1856–1922)

Математика — это то. чем занимаются
Гаусс, Чебышев, Ляпунов, Стеклов и я.
А.А. Марков

Развитие классических работ П.Л. Чебышева по теории вероятностей продолжил его ученик А.А. Марков. Вся современная теория вероятностей связана с его именем.

Марков родился 14 июня 1856 г. в Рязанской губернии. Его отец сначала служил в церкви, потом переехал в Петербург, получил юридическое образование и стал адвокатом.

В гимназии все предметы, кроме математики, Маркову давались с большим трудом. Математика его увлекала настолько, что он гимназистом самостоятельно изучал высшую математику. В 18 лет Марков поступил в Петербургский университет, где в это время работал П.Л. Чебышев. Влияние Чебышева было решающим. Университет Марков окончил в 1878 г. с золотой медалью. После защиты магистерской диссертации остался преподавать в университете. В 1886 г. получил звание профессора.

Учебники, автором которых был Марков, написаны на таком высоком математическом и литературном уровне, что после их выпуска на русском языке книги были переведены и выпущены в других странах. Его книги интересно читать и сегодня.

Заслуги Маркова были настолько велики, что через восемь лет научной работы он стал членом Академии наук, а ещё через 6 лет был избран академиком.

Научное творчество Маркова разнообразно. Сначала он интересовался теорией чисел, дифференциальными уравнениями, теорией функций, позднее занялся целиком теорией вероятностей. Труды Маркова по теории вероятностей привели к преобразованию всей этой науки. Принесли ему всемирную известность среди математиков, физиков, техников и естествоиспытателей.

Первые работы Маркова по теории вероятностей связаны с доказательством закона больших чисел и с доказательством центральной предельной теоремы теории вероятностей.

Закон больших чисел ***состоит в следующем***: <u>среднее арифметическое очень большого числа случайных величин, которые принимают свои значения независимо друг от друга, с практической ***достоверностью*** равно постоянной величине</u>.

Для понимания смысла этого закона приведём два примера.

<u>Пример 1</u>. Известно, что любое ***измерение*** всегда содержит ***погрешность***. Поэтому при очень большом количестве ***однотипных*** измерений получается множество ***близких*** между собой, но не равных величин. Возникает вопрос: какое измерение считать истинным? Закон больших чисел утверждает, что среднее арифметическое большого числа независимых измерений практически не будет отличаться от ***истинного*** значения измеренной величины.

<u>Пример 2</u>. Рассмотрим ***давление*** газа на ***стенки сосуда***. Это давление — результат ударов о стенки молекул газа, которые двигаются со случайными скоростями. Таким образом, давление на стенки сосуда

должно ***колебаться***, поскольку количество ударов и скорость ударов случайны. Но из опыта известно, что давление на стенки сосуда ***распределено равномерно***. Возникает противоречие, которое устраняется законом больших чисел.

Давление складывается из огромного количества ударов отдельных частиц, поэтому среднее арифметическое отдельных давлений, а значит и результирующее давление, практически является постоянной величиной.

Марков определил, при каких условиях выполняется закон больших чисел. Благодаря этим условиям закон больших чисел стали использовать в естествознании и технике.

Результаты отдельных измерений могут сильно отличаться от среднего значения. Поэтому часто возникает вопрос: как часто случайная величина, которую мы измеряем, будет иметь некоторое определённое значение? Например, какая часть молекул газа, заключённого в сосуд, обладает данной скоростью?

Ответ на поставленный вопрос даёт центральная предельная теорема теории вероятностей. После доказательства этой теоремы появились правильные прогнозы при изучении ***независимых*** случайных величин произвольной (любой) природы.

Второй период работы Маркова в области теории вероятностей связан с зависимыми случайными величинами. Такие случайные величины встречаются часто. Например, численности некоторых ***колоний бактерий*** за два близких момента времени являются зависимыми случайными величинами. Численность колонии в начальный момент влияет на её ***дальнейшее*** развитие.

А.А. Марков создал новую математическую теорию для изучения таких случайных величин. Он исследовал с помощью теории вероятностей системы, в которых предыдущие состояния системы влияют на состояние системы в последующие моменты. Если вероятность перехода системы из одного произвольного состояния в другое зависит только от этих двух состояний и не зависит от предыдущей истории развития системы, то такие переходы Марков назвал простыми ***цепями***. Если эти вероятности зависят от предыдущих состояний, то такие переходы он назвал сложными цепями.

Марков обнаружил, что основные теоремы, полученные для системы независимых случайных величин, могут быть доказаны и для сложных цепей. Во всём математическом мире такие цепи называют цепями Маркова. В качестве примера использования цепей он исследовал зависимость в ***чередовании*** гласных и согласных букв в первых главах «Евгения Онегина».

Прошли годы, и цепи Маркова стали использовать во многих разделах физики, а в математике на этой основе создали новый раздел теории вероятностей — теорию случайных процессов.

9.6. Александр Михайлович Ляпунов (1845–1918)

А.М. Ляпунов родился 25 мая 1857 г. в городе Ярославле. Отец Ляпунова в молодости учился вместе с Лобачевским в Казанском университете, а в Ярославле он был директором Демидовского лицея. Начальное образование Ляпунов получил дома у отца и в гимназию пошёл сразу в третий класс. Гимназию окончил с золотой медалью и поступил на физико-математический факультет Петербургского университета. В 1880 г. его наградили золотой медалью за сочинение, тема которого была предложена университетом.

В студенческие годы Ляпунов находился под большим влиянием Чебышева, слушал его лекции, пользовался его советами. Решал задачи, которые ставил перед ним Чебышев.

В 1884 г. Ляпунов защитил магистерскую диссертацию, после этого уехал работать в Харьковский университет. Первые два года ушли только на подготовку лекций. С 1888 г. Ляпунов публикует серию научных работ, посвящённых проблемам устойчивости ***движения***.

Исследования Ляпунова фактически являлись готовой докторской диссертацией, но Ляпунов был очень ***строг*** к себе, отказался от защиты диссертации и продолжал исследования. Только в 1892 г. Ляпунов представил на защиту свою докторскую диссертацию «Общая задача устойчивости движения». Эта работа принесла Ляпунову ***всемирную известность***.

В 1901 г. он становится действительным членом Академии наук, возвращается в Петербург и занимается только научной работой.

В области теории устойчивости движения у Ляпунова почти не было предшественников. Были только попытки у английских учёных Томсона и Тэта, у французского математика А. Пуанкаре и русского механика Жуковского. Общей теории устойчивости не было. В настоящее время общую теорию устойчивости Ляпунова используют в авиации, в кораблестроении, космонавтике и в теории механизмов.

Вопрос о фигурах ***равновесия жидкой однородной вращающейся*** массы связан с вопросом образования планет солнечной системы. Многие математики занимались этой задачей до Ляпунова. Маклорен, Лаплас, Лагранж, Якоби и другие исследовали только отдельные частные случаи этой задачи. Было, например, известно, что возможной фигурой равновесия является эллипсоид вращения (эллипсоид Маклорена).

Рассмотрим, как поставил Чебышев задачу о фигурах равновесия.

Предположим, что при некоторой скорости ω эллипсоид является возможной фигурой равновесия для вращающейся однородной жидкости. Какие ещё фигуры равновесия возможны при скорости $\omega + \delta$, где δ невелико?

Ляпунов не только решил задачу своего учителя, но и за 8 лет создал общую теорию фигур равновесия.

Известный русский математик академик В.А. Стеклов, вспоминая о Ляпунове, говорил, что все свои силы он отдавал служению математике, ею одной жил, в ней одной видел смысл жизни и часто говорил, что без научного творчества жизнь для него ничего не стоит.

Заслуги Ляпунова были высоко оценены математическим миром. Он был избран членом Римской Академии наук и членом-корреспондентом Парижской Академии наук.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1.
ЭТИМОЛОГИЧЕСКИЙ И ТОЛКОВЫЙ СЛОВАРЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ТЕРМИНОВ И ПОНЯТИЙ

А

абак

Греческое «αβαξ — *доска, стол*». Доска, покрытая пылью или песком, на которой проводили чёрточки, разделяющие её на столбцы, и раскладывали камешки для различных вычислений. Такие доски использовали в Древней Греции, Риме и в Западной Европе до XVIII в. В России роль абака выполняли счёты.

аксиома

Греческое слово «αξιομα — *достоинство, уважение, авторитет*». Латинский перевод «*axiota — предложение, достойное уважения, бесспорное*».

алгебраическое число

Числа, которые являются корнями алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами.

анализ

Греческое слово «αναλυσις — *решение, разрешение*». Первоначально «*анализ*» представлял собой переход от данной единицы измерения к более мелкой единице. В «Началах» Евклида встречаются слова «*анализ*» и «*синтез*». В математику термин настойчиво вводил Виет.

анализ математический

Дифференциальное и интегральное исчисления, их обоснование и приложения.

Лейбниц написал Я. Бернулли, что до 1700 г. основное в математическом анализе было завершено. Но оказалось, что многое ещё осталось для трудов Эйлера, Гаусса, Коши, Вейерштрасса и многих других математиков.

Первый трактат о дифференциальном исчислении создан Иоганном Бернулли (1691) для своего ученика — маркиза Лопиталя, который стал автором первого опубликованного учебного пособия «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий». Русский математик С.К. Котельников (1771) впервые изложил математический анализ на русском языке. Это был перевод сжатого конспекта трудов Эйлера.

аналитический
Это слово ввёл в математику Виет, так как он отвергал слово «*алгебраический*», считая его варварским.

апофема
Высота боковой гра́ни правильной пирамиды.

аппроксимация
Термин происходит от латинского слова «*approximare — приближаться*». Приближённое выражение функций через более простые функции. Теория аппроксимации функций была основана Вейерштрассом и Чебышевым.

аргумент
Термин произошёл от латинского «*argumentum — знак, признак, довод, содержание*». Лейбниц разделил величины на постоянные и переменные и ввёл термины «*variable valeur, variable quantite*». Эти выражения, а также «*independente variable, independente quantite*» сначала означали только аргумент функции. Самое первое появление в печати выражения «*аргумент функции*» относится к 1862 г. В русской литературе используется только с конца XIX в. В русском разговорном языке слово «*аргумент*» впервые встречается в письмах Курбского к Ивану Грозному.

Термин «*аргумент*» для угла комплексной переменной ввёл Коши (1847).

арк
Сокращение латинского слова «*arcus — лук, дуга*».

асимптота
Термин греческого происхождения. Первая буква слова соответствует греческой букве α, которая имеет смысл отрицания, если стоит в начале слова. Остальная часть слова от греческого прилагательного «συμπτωτος — *совпадающий, сливающийся*». Термин ввёл греческий учёный Аполлоний (около 225 г. до н.э.) при изучении свойств гиперболы. Греческий математик и философ Прокл (410–485) относил

термин также к параллельным прямым. В русский язык термин ввёл Буняковский (1839).

Асимптота — это такая прямая, расстояние от которой до данной кривой стремится к нулю при неограниченном удалении точки по бесконечной ветви кривой.

Б

базис
Греческое слово «βασις — *основа*».

бесконечность
Слово «*бесконечный*» в математическом смысле стало употребляться благодаря немецкому художнику Дюреру (1525). Слово «*конечный*» появилось в математике гораздо позднее у немецкого профессора математики Райера из города Киль (1708).

Математики Греции пытались дать определения таким понятиям, как «*бесконечность, предел*», но столкнулись с трудностями, которые они не смогли преодолеть. Эти понятия были корректно определены только в XIX в. Знак ∞ для указания неограниченного возрастания был введён Валлисом (1655). Предполагают, что он использовал римский символ ∞, означавший 1 000. Знак стал общепринятым с XVIII в.

бесконечно малая величина (функция)
Метод исчерпывания знали ещё древнегреческие математики. Этот метод позволял им проводить вычисления с любой заданной точностью. Позже он стал фундаментом, на котором строились новые теории Ферма, Паскаля. Дальнейшее развитие бесконечно малых связано с Ньютоном и Лейбницем.

Ньютон использовал «*моменты*», которые были эквивалентны бесконечно малым приращениям Ферма. Лейбниц использовал «*характеристический треугольник*» Паскаля. Такой треугольник образован бесконечно малыми отрезками касательной, абсциссы и ординаты. Ньютон не открыл суть своего метода в письмах к Лейбницу (1676). Только после публикации работ Лейбница Ньютон предоставил некоторые идеи своего метода. В своих работах Ньютон старался избегать бесконечно малых. Его «*отношения исчезающих приращений*» — это производные. Новое исчисление не имело прочной базы, пока не стало ясности и строгости в определении самого понятии бесконечно малой. Определение бесконечно малой величины на основе понятия предела дал Больцано (1817), а затем Коши (1821).

В

вертикаль
От латинского слова «*vertex — вершина*».

великая теорема Ферма
Один скромный юрист из французского города Тулузы Пьер Ферма любил заниматься в свободное от работы время математическими упражнениями. Во время чтения книги Диофанта «Арифметика» он сделал запись на полях книги: *«...никакую степень выше второй нельзя разложить на сумму двух степеней с теми же показателями. Я открыл это поистине чудесное доказательство, но эти поля для него слишком узки»*.

Так, на полях Диофантовой «Арифметики» Ферма сформулировал утверждение, которое вошло в историю математики как великая теорема Ферма: для любого натурального числа $n > 2$ уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

не имеет решений в целых положительных числах x, y, z.

Общее доказательство теоремы, о котором писал Ферма, никто не видел. В его работах было найдено только доказательство для случая $n = 4$.

Удивительна история доказательства этой теоремы.

Прошло более 350 лет, в течение которых многие математики разных стран пытались доказать эту теорему. В 1770 г. Эйлер доказал теорему для $n = 3$. Дирихле и Лежандр — для $n = 5$. Ламе — для $n = 7$. Затем теорема Ферма была доказана для всех простых чисел n из отрезка $[3; 100]$. Страсти вокруг теоремы Ферма накалялись. В 1907 г. за её доказательство была объявлена международная премия в 100 000 немецких марок.

Новый поворот в деле доказательства теоремы Ферма произошёл в 1955 г. Молодой японский математик Таниямa сформулировал некоторую гипотезу о свойствах кривых, которые описываются уравнением

$$y^2 = x^3 + ax + b,$$

где a и b — целые числа.

Через 20 лет об этой гипотезе вспомнил немецкий математик Г. Фрей и предположил, что теорема Ферма вытекает из этой гипотезы как следствие. В 1985 г. американский математик Кеннет Рибет доказал предположение Фрея. Теперь оставалось сделать последний шаг — доказать гипотезу Таниямы. В 1993 г. американский математик Э. Уайлс нашёл доказательство гипотезы Таниямы и доложил его на конференции в Институте математических наук имени Исаака Ньютона в Кембридже. Доказательство занимало 150 страниц. Его достаточно долго изучали и обнаружили ошибку. Уайлсу совместно с другим математиком Тейлором удалось исправить ошибку. В 1995 г. исправленное доказательство теоремы Ферма было опубликовано.

В 1998 г. на Всемирном математическом конгрессе в Берлине Уайлс доложил своё доказательство. На докладе присутствовало 2000 математиков.

величина
Величиной называют параметр, функцию, коэффициент или другие математические объекты, если они принимают какие-либо числовые значения (если они равны каким-то числам).

вывод
Процесс получения какого-либо результата и сам результат этого процесса.

выражение
Формула или её часть.

вычисление
Получение численного результата по исходным данным с помощью заданного алгоритма.

Г

геометрия
Часть математики, которая изучает пространственные отношения и формы тел.

<u>Аналитическая геометрия</u>

Раздел геометрии, в котором геометрические объекты изучаются с помощью алгебры на основе метода координат.

<u>Дифференциальная геометрия</u>

Раздел геометрии, в котором свойства геометрических объектов изучаются методами математического анализа.

<u>Евклидова геометрия</u>

Древнейшая геометрическая система; впервые систематически представлена в «Началах» Евклида. Эта геометрия справедлива в пространстве с постоянной нулевой кривизной.

Геометрия Лобачевского

Неевклидова геометрия в пространстве с отрицательной постоянной кривизной.

Геометрия Римана

Неевклидова геометрия в пространстве с положительной постоянной кривизной.

гипотеза

От греческого термина «υποθετις». В древности он обозначал некоторое геометрическое предположение, которое принимали сначала без доказательства. Этот термин использовали Евклид, Архимед и Платон.

Научное предположение, с помощью которого можно объяснить определённое явление. Гипотеза проверяется либо опытным путём, либо должна быть доказана теоретически.

градус

Латинское слово «*gradus — шаг*». Вавилонские жрецы заметили, что солнечный диск укладывается по дневному пути Солнца 180 раз (Солнце делает 180 шагов). Тогда путь за сутки равен — 360 шагов. Круг стали делить на 360 частей. Обозначения градуса, минуты и секунды, похожие на современные, использовал ещё Птолемей, который употреблял шестидесятеричную систему исчисления.

график

От греческого слова «γραφωικος — *изображение, связанное с письмом или рисунком*».

Д

двучлен (бином)

Сумма или разность двух одночленов.

дедукция

От латинского слова «*deductio — выведение*». Способ рассуждения, при котором новое положение выводится чисто логическим путём из некоторых исходных правильных утверждений. Греческий философ Платон ввёл в математику дедуктивный метод доказательства.

деление

В математике древности не было деления. Вместо деления пользовались вычитанием. Термины: «*деление, делимое, делитель*» появились только в X в. в работах Герберта, который в те времена был центральной фигурой среди учёных Западной Европы того времени. Позже он стал Папой Римским — Сильвестром II.

Старейший знак деления — горизонтальная чёрточка. Знак деления в виде двоеточия появился в XVI в. Такой знак деления использовал Лейбниц. Знак деления «÷» был введён в Швейцарии и широко использовался в Англии.

диагональ
Отрезок прямой, соединяющий две вершины многоугольника (или многогранника), которые не лежат на одной стороне (или на одной грани).

дискриминант
От латинского слова «*discriminantis — разделяющий, различающий*». В математику термин ввёл англо-американский математик Джеёмс Джозеф Сильвестр (1814 –1897). Он придумал столько разных алгебраических терминов, что называл себя «математическим Адамом».

дифференциал
Латинское слово «*differentia — разность*», употреблялось в смысле «*приращение*» в работах Лейбница, Якоби и Иоганна Бернулли, но не имело никаких пояснений. От И. Бернулли пошла традиция обозначать приращение греческой буквой Δ. Лейбниц для бесконечно малой разности использовал обозначение d. В исчислении Лейбница не было функций, не было производных, были переменные величины и дифференциалы. Благодаря трудам Эйлера, Лагранжа и Коши производная стала основой дифференциального исчисления. Но дифференциал тоже используют в математическом анализе и в дифференциальных уравнениях.

дифференцируемость
Существование производной функции в заданной точке или области.

Почти до конца XIX в. считали, что непрерывная функция всегда имеет производные. Когда поняли, что это не так, стали употреблять термин «*функция без производной*». Первые примеры непрерывных функций, не имеющих производной ни в одной точке области определения, построили Больцано и Вейрштрасс. Понятие «*недифференцируемая функция*» с большим трудом входило в математику. Так, например, знаменитый математик Жордан понимал, что есть недифференцируемые функции, но писал: «*Мы не будем рассматривать эти ненормальные функции...*».

дуга
Часть кривой, заключённая между двумя любыми её точками.

Е

e
Существование предела $\lim_{n\to\infty}(1 + 1/n)^n = e$ впервые установил Даниил Бернулли (1728). Обозначение *e* введено Эйлером. Этот символ быстро стал общепринятым.

единица
В древней математике единица не считалась числом. Такой взгляд продолжался довольно долго. Ещё в XVI в. приходилось бороться за признание единицы числом. Справедливости ради следует отметить, что понятие «*число* 1», не является простым понятием.

И

i
Это обозначение для числа $\sqrt{-1}$ ввёл Эйлер (1777) по первой букве латинского «*imaginarius — воображаемый, мнимый*». Прочно в математику обозначение вошло благодаря Гауссу, который принял его в 1801 г.

В формулах интегрального исчисления буква *i* используется как индекс (первая буква слова «*index*»).

изо
От греческого слова «ἴσος — *равный, одинаковый, подобный*». Входит как приставка во многие математические термины.

инвариант
От латинских «*in — отрицание*» и «*varians — изменяющийся*». В математике инвариантом называют выражение, которое остаётся неизменным при некоторых преобразованиях переменных. Инвариантом является первый дифференциал функции одного аргумента. Форма дифференциала не меняется при переходе к новой независимой переменной.

индекс
Латинское слово «*index — указатель, титул, надпись*». Лейбниц активно пользовался индексами. С усовершенствованием книгопечатания индексы стали ставить ниже строки, как это делал Лейбниц. Он впервые

стал использовать два индекса. Двойные индексы (в теории детерминантов) впервые использовал Якоби.

интеграл

В первой половине XVII в. операцию вычисления площади фигуры записывали фразой «*omnes lineae — совокупность всех неделимых*». Постепенно эту фразу стали сокращать. Лейбниц ради сокращения записи вводит начальную букву слова «*Summa*», которая во времена Лейбница изображалась как наш современный знак интеграла. Первоначально Лейбниц писал $\int y$, но через месяц он стал писать $\int y\,dy$ — это уже не сумма неделимых, а сумма площадей бесконечно малых прямоугольников. Лейбниц систематически придерживался нового обозначения после того, как заметил его инвариантность относительно переменной интегрирования.

В печати современное обозначение появилось в 1686 г. В это же время И. Бернулли обозначал операцию интегрирования буквой I по первой букве введённого им названия «*интегральное исчисление*». Впоследствии этот символ сохранился для обозначения конкретных интегралов: I_1, I_2 и т.д.

Слово «интеграл» употребил впервые Я. Бернулли (1690). По одному предположению термин образован от латинского «*integer — целый*». По другому предположению Я. Бернулли придумал термин от «*integro — приводить в прежнее состояние, восстанавливать*». Действительно, восстанавливается первообразная функция. Новый термин обсуждался с Лейбницем и его ввели в математику в 1696 г. И. Бернулли предложил название «*calculus integralis —интегральное исчисление*».

интеграл неопределённый

Лейбниц вначале пришёл к понятию определённого интеграла. В 1694 г. он впервые ввёл аддитивную постоянную и таким образом появился неопределённый интеграл.

В XVIII в. были созданы почти все известные методы интегрирования элементарных функций в конечном аналитическом виде. Б. Паскаль применял интегрирование по частям и метод подстановки. Интегрирование дробно-рациональных функций с помощью разложения на простейшие применял И. Бернулли. Позже этот метод модернизировали Эйлер и Коши. Они упростили способ определения коэффициентов. Ньютон мог заменить функцию её разложением в степенной ряд, поэтому ему было достаточно одного интеграла от x^n.

В работах Коши была впервые опубликована таблица интегралов, приближенно похожая на современную. Только в учебниках начала

XX в. появились таблицы интегралов. Таблицы производных появились значительно позже.

Эйлер употреблял термины «*общий интеграл и частный интеграл*» для неопределённого интеграла и одной первообразной.

интеграл определённый

Лейбниц (1693) рассматривал связь между интегралом (как площадью) и производной. С помощью геометрии вывел формулу этой связи.

Аналогичную связь нашёл Ньютон. Поэтому знаменитая формула $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ называется формулой Ньютона – Лейбница. К аналитическому определению определённого интеграла был близок Эйлер. Он первый стал писать пределы интегрирования над и под знаком интеграла.

интервал

Термин происходит от латинского «*intervallum — промежуток, расстояние*».

Множество действительных чисел x, удовлетворяющих строгому двойному неравенству $a < x < b$, где a и b — действительные числа. Интервал обозначается в виде $(a; b)$ или $]\,a; b\,[$.

интерполяция

Термин произошёл от латинского слова «*interpolare — подделывать, подновлять*». Приближённое восстановление значений функции в заданной области с помощью известных значений этой же функции внутри заданной области.

Интерполяционные многочлены — многочлены, численные значения которых совпадают с известными значениями интерполируемой функции при заданных значениях аргумента. С помощью таких многочленов восстанавливается значение функции в любой внутренней точке рассматриваемой области изменения аргумента.

интерпретация

От латинского слова «*interpretatio — толкование, объяснение*».

иррациональность

Наличие в математическом выражении радикала с натуральным показателем или иррационального числа.

Открытие иррациональных чисел приписывают Пифагору. Термин появился как буквальный перевод с греческого языка на латынь «*ir — отрицание, ratio — отношение, разум*». До XVI в. иррациональности не считались настоящими числами. Важный шаг был сделан Декартом. Позже Ньютон дал определение числа, которое включало иррациональности.

Математически строгая теория иррациональных чисел была создана только в конце XIX в. трудами Дедекинда, Кантора, Вейерштрасса и других математиков.

искомая величина
Величина, значение которой находится в данной задаче.

К

канон
Латинское слово «*canon — правило, норма*».

квадратура
Вычисление определённого интеграла. Латинское слово «*quadratura — придание квадратной формы*».

В древней Греции вычисление площади плоской фигуры или площади поверхности сводилось к построению равновеликого квадрата, то есть к квадратуре, поэтому квадратурой стали называть составление какого-нибудь интеграла. Создатели интегрального исчисления считали, что определённый интеграл представляет некоторую квадратуру. Отсюда появились выражения: «*уравнение решается в квадратурах, задача решается в квадратурах*». Аналитическое определение интеграла появилось только в XIX в.

комплексные числа
Комплексное число — составное число. Термин «*комплексное число*» впервые ввёл итальянский математик Карно (1803). Позднее Гаусс стал использовать этот термин систематически. Декарт впервые противопоставил действительные и мнимые корни уравнения (*reele — imaginaire*). Первой буквой латинского слова «*imaginaire*» обозначалась мнимая единица. Обозначение $\sqrt{-1} = i$ стало широко использоваться благодаря Гауссу. Термины «*сопряжённые комплексные числа, аргумент комплексного числа, показательная форма комплексного числа*» были введены Коши.

Тригонометрическая форма комплексного числа впервые была представлена Эйлером и Даламбером. Геометрическое представление комплексных чисел стало известным благодаря Гауссу.

композиция функций
Построение функции на основе двух или более других функций.

Например, $z = h(y)$; $y = g(x)$. Композицию из этих функций можно записать в виде $z = h(g(x))$. В русской математической литературе композиции функций часто называют сложными функциями.

континуум

Латинское слово «*continuum — непрерывный, смежный, следующий*».

Существуют не меньше двух различных видов бесконечности: счётная бесконечность натуральных чисел и несчётная бесконечность. Немецкий математик Кантор доказал, что множество всех действительных чисел несчётно.

Два множества называются эквивалентными, если они имеют одинаковое количество элементов. Если бесконечные множества эквивалентны, в математике говорят, что им соответствует одинаковое кардинальное число, или мощность. Множество чисел отрезка [0; 1] является несчётным множеством. Все множества эквивалентные множеству чисел отрезка [0; 1] — несчётные множества. Такие несчётные множества называют множествами мощности континуум.

конус

Греческое слово «*κῶνος — сосновая шишка, остроконечный предмет*».

координаты

Слово образовано от латинского «*co — совместно*» и «*ordinatus — упорядоченный, определённый*». Координаты появились в географии, астрономии, математике в различных формах в Вавилоне и Греции. Современные термины «*абсцисса, ордината, аппликата*» появились в Греции в учении о конических сечениях.

Термин «*координаты*» ввёл в математику Лейбниц. Благодаря этому термины «*абсцисса, ордината, аппликата*» стали равноправными.

Для обозначения начала координат французский математик Лагир (1679) употребил слово «*origine — начало*». Первой буквой этого слова отмечается начало координат.

Координаты полярные — название появилось только в XIX в. у французских математиков. В русском языке в конце XIX в. встречаются названия «*полярные*» и «*полу-полярные*» координаты.

Координаты криволинейные — впервые такие координаты использовал Я. Бернулли. Криволинейные координаты в пространстве впервые ввёл Ламе.

коэффициент

Термин составлен из латинских «*co — с, вместе*» и «*efficiens —*

производящий». Буквальное значение «*coefficiens — содействующий*».

Числовой множитель при буквенном выражении, известный множитель при неизвестном выражении, постоянный множитель при переменной величине.

куб

Греческое слово «*κύβος — игральная кость*». Название перешло на любое тело той же формы. Название введено пифагорейцами, а затем его использовал Евклид.

М

максимум, минимум

Латинские слова «*maximum, minimum — наибольшее, наименьшее*».

Отдельные задачи на нахождение экстремумов были решены древнегреческими математиками. До XVII в. для решения каждой такой задачи составлялся индивидуальный метод. Первый общий алгоритм изобрёл Ферма (1629). Лейбниц нашёл связь между убыванием и возрастанием функции и точками максимума и минимума. Случай, когда первые *n* производных обращаются в ноль, рассмотрел впервые английский математик Маклорен (1742).

математика

От греческого глагола «μαθάνω — *учусь через размышление*».

В России в XV в. астрологию называли математикой, а математику называли геометрией. Только к XVII в. математикой стали называть арифметику и геометрию.

медиана

Термин образован от латинского слова «*meduis— средний*».

метод

От греческого слова «μέθοδος — *дорога, ведущая за чем-либо*».

Платон и Аристотель стали использовать это слово как название совокупности математических действий, необходимых для получения правильного результата.

модуль

От латинского слова «*modulus — мера*». Широко используется в математике. Сейчас говорят: *модуль функции, модуль вектора, модуль комплексного числа*.

Н

неизвестная
Виет с 1591 г. обозначал неизвестные величины гласными буквами, а известные — согласными. Декарт в качестве неизвестных (или переменных) использовал буквы x, y, z.

неопределённость
Неопределённости вида $0/0$, ∞/∞ исследовал Лопиталь (1696). Неопределённости вида $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ рассматривал Эйлер (1748), а неопределенности ∞^0, 1^∞ — Коши (1821). Позднее Коши дал общее правило исследования неопределённостей вида 0^∞, 0^0. Это правило есть в современных учебниках.

О

овал
Французское слово «*oval*» произошло от латинского слова «*ovum — яйцо*».

окрестность
Впервые слово в математику ввёл Коши. Такой же смысл английского «*neighbourhood*». Слово с лёгкостью вошло во французскую математическую литературу, а позже в немецкую и итальянскую. Вейерштрасс в первых же курсах лекций по математическому анализу (1856) ввёл понятие «*окрестность точки*».

оператор, операция
Латинское слово «*operator — работник*». Оператор — знак, символ (обозначение) некоторого математического действия. Например, символ Σ — оператор суммирования.

орт
Термин ввёл математик Хевисайд (1892) как сокращение слова «*ориентация*».

П

параллельность
Греческое слово «παράλληλος — *рядом идущая*». Слово стали использовать как математический термин 2 500 лет назад в школе Пифагора.

параметр

От греческого слова «παραμετρεω — *измеряю что-нибудь, сравнивая с чем-то другим*». Лейбниц называл параметром любую произвольную постоянную величину, входящую в уравнение.

переменная

Этот термин ввёл Лейбниц при обсуждении понятия функции в последнее десятилетие XVII в.

периметр

От греческого слова «περιμετρος — *измерять около*». Это слово встречается ещё у Архимеда.

перпендикуляр

От латинского слова «*perpendicularum — отвес*». Термин появился в Средние века.

пирамида

Средневековые учёные считали, что этот термин произошёл от греческого слова πυρ — *огонь*». В некоторых учебниках геометрии XVI в. вместо слова «*пирамида*» писали «*тело огненной формы*».

планиметрия

Термин образован в Средние века. В нём соединены латинское и греческое слова: «*planum*» и «μετρεω».

плоскость

Процесс математического определения плоскости был очень долгим. Лейбниц удачно предложил определить плоскость как геометрическое место точек, равноотстоящих от двух данных точек.

поверхность

Множество точек в трёхмерном евклидовом пространстве, координаты которых удовлетворяют уравнению $\Phi(x; y; z) = 0$ (неявное задание функции) или уравнению $z = f(x; y)$ (явное задание функции).

постулат

От латинского слова «*postulatum — требование*». В греческой геометрии постулаты были геометрическими аксиомами. Например: «*Прямую можно бесконечно продолжать*».

правило Лопиталя

Маркиз Гийом Лопиталь должен был стать офицером по семейной традиции, но из-за плохого зрения был не пригодным к военной службе. Поэтому он всё свободное время занимался любимой математикой.

И. Бернулли читал ему лекции и даже написал курс лекций специально для Лопиталя. Под влиянием этих лекций Лопиталь сам написал учебник по дифференциальному исчислению (1696). Книга оказалась настолько удачной, что по ней учились во Франции многие десятилетия. В 1730 г. вышел английский перевод. В 1764 г. в Вене вышел латинский перевод. Курс содержал правило Лопиталя, которое доказал И. Бернулли. Учебник Лопиталя содержал в основном результаты, полученные братьями Бернулли и Лейбницем.

предел

В начале XIX в. математики давали только словесное описание предела. Современные обозначения предела придумали Гамильтон, Вейерштрасс и Риман. В русском издании лекций Коши (1831) слово «*limit*» перевели как «*предел*» и обозначение «*lim*» заменили на «*пр*».

призма

Греческое слово «πρισμα — *отпиленный кусок*». Это слово встречается у Евклида и Архимеда.

прогрессия

Латинское «*progressio — движение вперёд, успех*». Знак «$\div$» используется с середины XVII в. для обозначения арифметической прогрессии. Знак «$\div\!\div$» используется с конца XVII в. для обозначения геометрической прогрессии.

Знаменитую формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии вывел итальянский математик Торричелли.

проекция

От латинского слова «*projection — бросание вперёд*». Первая ортогональная проекция встречается в книге Дюрера «Наставления об измерении циркулем и линейкой» (1525). Это был первый немецкий учебник геометрии.

производная

В русский язык слово «*производная*» ввёл впервые В.И. Висковатов (1810). Слово «*derivare*» впервые появилось в переписке Ньютона и Лейбница. Лейбниц называл производную дифференциальным отношением и использовал обозначение dy/dx. Исчисление, созданное

Лейбницем, было именно дифференциальным, так как он использовал только дифференциалы, и в его исчислении не было места производным. Благодаря Коши широко распространилось слово «*derivation*». Интересно, что таблицы производных появились в учебниках позднее таблиц интегралов.

промежуток
Обобщённое название для множества чисел, лежащих между двумя числами a и b с включением или без включения одного или обоих чисел a, b.

пропорция
В IV в. до новой эры в Греции полностью построили общую теорию пропорций. Греческие математики использовали термин «αναλογια» для обозначения пропорции. В I в. до новой эры. Цицерон перевёл это греческое слово на латынь. Получилось слово «*proportio — соразмерность*», которое сразу стали использовать в математике.

Пропорцией называют равенство между двумя отношениями четырёх величин: $a/b = c/d$. Числа b, c называют средними, a, d — крайними. В школе Пифагора было три вида пропорций:

арифметическая: $a - b = c - d$;

геометрическая: $a/b = c/d$;

гармоническая: $1/a - 1/b = 1/c - 1/d$.

Если в этих пропорциях рассматривать одинаковые средние величины $b = c$, то приходим к известным соотношения для средних:

среднее арифметическое: $b = (a + d)/2$;

среднее геометрическое: $b = \sqrt{ad}$;

среднее гармоническое: $b = 2ad/(a + d)$.

О важности пропорций писал Леонардо да Винчи: *«Пропорция — мать и королева искусств. В результате пропорциональности получается гармония»*.

Р

равенство
До появления специального знака в разных странах использовали соответствующее слово. В 1557 г. английский математик и врач Рекорд

предложил знак «=». Свой выбор он объяснял просто: *«Ничего нет более равного, чем две параллельные прямые»*. Этот знак равенства широко распространился только к концу XVIII в. К сожалению, изобретатель знака, который наиболее часто встречается в математике, умер в Лондонской долговой тюрьме.

радикал

От латинского слова «*radix — корень*».

Радикалом в математике называют знак $\sqrt[n]{\ }$ извлечения корня любой степени. Знак квадратного корня с чертой над подкоренным выражением ввёл Декарт в книге «Геометрия». Ньютон распространил обозначение Декарта на корни любой степени в своей книге «Всеобщая арифметика».

Древние греки вместо слов «*извлечь корень*» говорили: *«найти сторону по данной площади квадрата»*, а квадратный корень называли стороной. Греческие слова «*сторона, бок, корень*» переводятся на латынь одним словом «*radix*».

радиус

Латинское слово «*radius — палочка*».

В древности этого термина не было. Евклид и другие математики тех времён говорили: *«прямая из центра»*. Слово радиус впервые встречается в 1569 г. у французского учёного Рамуса, затем у Виета. Становится общепринятым термином только в конце XVII в.

рекуррентность

От латинского слова «*recurro — бегу назад, возвращаюсь*».

Свойство последовательности, при котором любой её член может быть вычислен через предыдущие члены последовательности. Формулы, с помощью которых делают такие вычисления, называются рекуррентными формулами. Первая рекуррентная формула в математике появилась в работе Фибоначчи.

ромб

От греческого слова «ραμβος — *бубен*». Ромб похож на четырёхугольный бубен. В «Началах» Евклида дано строгое определение ромба, но его свойства не представлены.

С

сегмент

Латинское слово «*segments — отрезок*».

Знаменитый греческий астроном Птолемей делил окружность круга на 360 частей. Для этих частей Птолемей использовал греческое слово «τμηματα — *отрезок*», которое было переведено латинским словом «*segments*».

сигнум

Функция $sgn\,x$ получила название и обозначение от латинского «*signum — знак*». Такую функцию ввёл в рассмотрение Л. Кронекер.

символ

От греческого слова «συμβολος — *условный знак, примета*». Слово обозначает любой условный графический знак.

симметрия

Греческое слово «σνμεκτρια — *соразмерность, правильное отношение*». В переводе с греческого на латинский «*symmetria*».

Свойство геометрического объекта совмещаться с собой при некоторых преобразованиях. В широком смысле симметрия — неизменность структуры некоторого объекта относительно его преобразований. Существует несколько видов геометрической симметрии.

<u>Осевая симметрия (симметрия относительно прямой)</u>

Отображение точек плоскости или пространства, при котором каждая точка A переходит в точку A', симметричную относительно фиксированной прямой (оси симметрии), то есть точки A и A' лежат на одном перпендикуляре к оси симметрии. Эти точки расположены по разные стороны от оси и на одинаковом расстоянии от неё. Точки оси симметрии отображаются сами на себя.

<u>Симметрия относительно плоскости (зеркальная симметрия)</u>

Отображение точек пространства, при котором каждая точка переходит в точку, которая лежит на том же перпендикуляре к плоскости и на том же расстоянии от плоскости, но с другой стороны от неё.

<u>Центральная симметрия (симметрия относительно точки)</u>

Отображение точек плоскости или пространства, при котором каждая точка A переходит в точку A'. Эти точки лежат на прямой, проходящей через фиксированную точку (центр симметрии), расположены по разные стороны от этого центра симметрии и на одинаковом расстоянии от него.

система
Греческое слово «συστημα — *составленное из частей, соединение*».

скаляр
От латинского слова «*scale — шкала, лестница*». Виет первым стал называть величины «*скалярами*». В таком смысле слово скаляр впервые вошло в математику.

скачок
Французские математики Паш и Раймон (XIX в.) впервые назвали «*скачком функции в точке a*» величину $|\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a-h))|$.

среднее

Среднее арифметическое

Числовая характеристика совокупности чисел, $\{a_i\}_{i=1}^n$, которая определяется по формуле

$$\overline{a}=\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}.$$

Среднее взвешенное

Числовая характеристика совокупности чисел $\{a_i\}_{i=1}^n$, равная дроби

$$\frac{\sum_{i=1}^n p_i a_i}{\sum_{i=1}^n p_i},$$

где числа p_i называются весами чисел a_i.

Среднее гармоническое

Числовая характеристика совокупности чисел $\{a_i\}_{i=1}^n$, равная дроби

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}.$$

Среднее геометрическое

Числовая характеристика совокупности чисел $\{a_i\}_{i=1}^n$, равная квадратному корню из произведения этих чисел:

$$\sqrt{\prod_{i=1}^n a_i},$$

Среднее квадратичное

Числовая характеристика совокупности чисел $\{a_i\}_{i=1}^{n}$, равная квадратному корню из суммы квадратов этих чисел, делённому на количество этих чисел:

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}}{n}.$$

стереометрия
Термин составлен из греческих слов «στερεος — *объём*» и «μετοεω — *измерение*». Этот термин использовали со времён Аристотеля.

сфера
От греческого слова «σφαιρα — *шар, мяч*». Термин использовался ещё до Евклида.

Т

таблица
От латинского слова «*tabula — доска, стол*».

текущая точка
Впервые такое выражение встречается у Кавальери (1635). Если прямая перемещается параллельно самой себе, то он говорил, что прямая течёт, и называл её «*текущей*». Ньютон обобщил термин Кавальери и называл «*текущей*» любую непрерывно меняющуюся величину.

теорема
От греческого слова «θεωρημα — *зрелище, представление*», которое у Пифагора стало означать «*умозаключение, математическая теорема*».

теория
Греческое слово «θεωριά — *наблюдение, исследование, опыт*». В математику это слово вошло благодаря Пифагору.

термин
От латинского слова «*terminus — межа, граница, конец*».

тип
От греческого слова «τυπος — *образ, отображение*».

тождество
Равенство выражений с одной или несколькими переменными, левая и правая части которого равны при всех возможных значениях переменных. Знак тождества «$\equiv$» впервые употребил Риман (1857).

точка
Лобачевский говорил, что это слово происходит от прикосновения отточенного пера, поэтому «*точка*» означает остриё гусиного пера, которым писали во времена Лобачевского, следовательно, слово образовано от глагола «*точить*».

траектория
Термин образован от латинского «*trajectorius — перемещение*». Слово появилось в письмах И. Бернулли к Лейбницу.

Непрерывная кривая, которую описывает материальная точка при своём движении.

трансцендентное число
Числа, которые не являются корнями алгебраических многочленов с рациональными коэффициентами, называются трансцендентными числами. Например, числа π и e — трансцендентные числа.

Ф

факториал
Термин происходит от английского слова «*factor — множитель*». Обозначение $n!$ встречается впервые в 1808 г. Наряду с этим обозначением в XIX в. употребляли много других обозначений. В 1916 г. Совет Лондонского математического общества рекомендовал принять к использованию только знак $n!$.

фигура
Латинское слово «*figura — образ, внешний вид, начертание*». Геометрическая фигура — множество точек на плоскости или в пространстве.

фокус
Латинское слово «*focus — очаг, огонь*». Термин ввёл в науку Кеплер. Слово «*focus*» появилось как буквальный перевод арабского термина, которое означало «*место зажигания*». Параболу арабы называли «*зажигательным зеркалом*».

функция
От латинского слова «*functio — свершение, исполнение*». Первые обозначения функций ввёл Лейбниц.

Невозможно точно указать, когда впервые появились функции в виде таблиц и графиков. Вавилонские математики пользовались таблицами задолго до новой эры. Важную роль в развитии этого понятия сыграли в Средние века натурфилософские школы Оксфорда и Парижа.

Слово «*функция*» как математический термин появилось впервые у Лейбница (1673). Позднее И. Бернулли определил функцию как переменную величину, заданную аналитическим выражением.

Эйлер определял функцию как некоторую зависимость одной величины от другой. Он ввёл неявно заданные функции и параметрически заданные функции. Распространил определение функции на величины, которые зависят от нескольких переменных.

Х

хорда
От греческого слова «χορδη′ — *струна, тетива*». Отрезок, соединяющий любые две точки кривой.

Ц

центр
От греческого слова «κεντρον». Это слово обозначало палку с заострённым концом, которой подгоняли быков. Позднее это слово обозначало ножку циркуля, помещённую в центр описываемой окружности.

Ч

числа Фибоначчи
Числа последовательности, составленной по рекуррентной формуле: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ при $a_0 = a_1 = 1$, то есть числа 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

Э

эквивалентность
Термин происходит от латинских слов «*aequus — равный*» и «*valens — имеющий силу, сильный*». Смысл термина — «*равносильный*».

экспонента
От латинского слова «*exponenet — показатель*» введено для показателя степени (1553). Лейбниц ввёл термины «*экспоненциальная кривая, экспоненциальная функция*».

экстремум
Латинское слово «*extremum — крайний, последний*». Этот термин был предложен Дебуа Раймоном (1879) для обозначения минимума и максимума в тех случаях, где не важно их различие.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2.
РУССКО-АНГЛИЙСКИЙ СЛОВАРЬ
(ДЛЯ ЧТЕНИЯ ОЧЕРКОВ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ)

А

аналоги́чный analogous, similar
апа́тия apathy
астроно́мия astronomy

Б

ба́зис basis, foundation
бакте́рия bacterium
бе́дность poverty
безразли́чно indifferently
безуспе́шно unsuccessfully
бесе́довать talk with
бессле́дно исчеза́ть disappear without a trace
бесспо́рно undoubtedly, indeed, no doubt
бесчи́сленное мно́жество innumerable set, countless set
благодаря́ thanks to
благоприя́тный favorable
блестя́щий brilliant
бли́зкий (между собой) close, similar
блиста́тельный за́мысел творца́ brilliant conception of the creator
богосло́вие (теология) theology
богослуже́ние divine service
большо́й big, large
бу́дто as if, as though
бы́к bull

В

веду́щий leading
вели́кий great

величáйший most great
велúчественный majestic
велúчественное движéние звёздного небосвóда majestic motion of star sky
верёвка rope
верóятно probably
вéчный eternal
взаимосвя́зь intercommunication, interconnection
взрóслый grown-up
виртуóз virtuoso
в итóге in the end, finally
вклáд contribution
он внёс вáжный вклад в наýку he made a valuable contribution to science
включáть include
владéть to be able to use
влады́чество dominion
влия́ние (влия́ть) influence
влия́тельный influential
вмéсто instead of
внестú вклáд make a contribution
внéшний external, outward
вниманиe attention
возбуждéние (волнéние) excitement, agitation
возвратúть return, give back
возмóжность possibility
вознаграждéние (дéнежное) gratuity
возникáть arise, spring up
возродúться úз пéпла revive from ashes, be born again
волновáться worry, be nervous
вопрекú in spite of, despite of, contrary to
врáжеский enemy
вратá (ворóта) gate
вращáться rotate
вращéние rotation
врéд harm, injury
в результáте as a result, in the end
врéменно temporarily
вручнýю by hand, manually
всáдник horse rider
вселéнная the whole world, the universe
всемúрный world-wide
в течéние during

вы́года benefit, gain, profit
вы́годный profitable
выдаю́щийся outstanding
выдвига́ть put forward
вы́мысел fiction, invention
вы́пуклый gibbous
вы́пуск (кни́г) publication
выража́ть express
высека́ть cut on
выска́зывание statement
высоко́ high
высоко́ оцени́ть express a high opinion
высоча́йшее наслажде́ие highest enjoyment

Г

галиматья́ nonsense, rubbish
гаранти́ровать guarantee
гармо́ния harmony
геогра́фия geography
геоде́зия geodesy
геоме́трия geometry
гли́на clay
глубо́кий deep
глубо́кий сле́д profound mark
глубоко́ deeply
гоня́ться pursue
го́рдо proudly
го́ре grief, sorrow, misfortune
госуда́рственное управле́ние the country government
грандио́зный grand
громо́здкий cumbersome, bulky

Д

давле́ние pressure
дальне́йший further, subsequent
дви́гатель motor, engine
ве́чный дви́гатель perpetual motion machine
движе́ние motion
дво́йственный (дуа́льный) ambiguous, dual

дворяни́н nobleman
деви́з motto
дедукти́вный deductive
дере́вня village
диале́ктика dialectics
диапазо́н range
диктова́ть dictate
дире́ктор Моне́тного двора́ director of the mint
ди́спут debate, discussion
доброде́тельный челове́к virtuous person
довести́ рабо́ту до по́лной я́сности bring the work to complete clearness.
до́гма dogma
до́лжность position, post, work, job
дополни́тельно in addition
допусти́ть проти́вное assume contrary, believe opposite, suppose contrary
дорого́й expensive, costly, valuable
досло́вный перево́д word for word translation
доста́ть get, obtain
достига́ть achieve
достиже́ние achievement
нау́чное достиже́ние scientific achievement
достове́рность reliability
досту́пный available, accessible
дре́вний ancient
духо́вные потре́бности spiritual needs
ды́рка hole

Е

единообра́зный uniform
еди́нство unity

Ж

жа́лованье (зарпла́та) salary
желе́зная доро́га railway
же́рдь pole
же́ртва victim
же́ртвенник altar
жи́дкий fluid
жре́ц oracle, priest

З

заверши́ть complete, end, accomplish
завеща́ть bequeath
завоева́тельный expansionist
задо́лго до long before
заду́мать think up
за́йка stutterer
заи́мствовать borrow, benefit from
закла́дка laying
закла́дывать хра́м lay a temple
заключе́ние conclusion
заключи́ть (сде́лать вы́вод) conclude
зако́н law
зако́н всеми́рного тяготе́ния the law of gravitation
зако́н приро́ды law of nature
закономе́рный predictable
заменя́ть change
замеща́ть deputize (for), stand in (for)
запуска́ть возду́шных зме́ев fly air kites
зараба́тывать себе́ на пропита́ние earn enough to buy food
зара́нее beforehand, in advance
заро́дыш embryo, germ
зарожде́ние origination
заседа́ние conference, session, meeting, sitting
заслу́ги services
заставля́ть make to
затме́ние eclipse
защища́ть protect, defend
защища́ть го́род defend a town
земледе́льческий agricultural
знамени́тый famous
зна́тный noble, high-born
значе́ние importance
значи́тельный significant

И

иеро́глиф hieroglyph
изве́стно it is known that
изве́стность popularity, fame

изгна́ние expulsion, exile
изгото́вить make, produce, manufacture
изда́ние edition
изда́тель publisher
изложе́ние exposition, interpretation, statement
изложи́ть state
измере́ние measuring, measurement
изобрести́ invent
и́менно exactly, precisely, just
ина́че otherwise, differently, in another, a different way, or else
интенси́вно intensively
интерве́нт interventionist
интерве́нция intervention
интерполяцио́нный interpolating
интерпрета́ция interpretation
интерпрети́ровать interpret
интуи́ция intuition
искаже́ние distortion, falsification
исказы́ть (искажа́ть) distort
иско́мая величина́ (фу́нкция) unknown value (function)
испо́льзовать use, make use, utilize
испу́ганный frightened, scared
испуга́ться be (feel) frightened (of), get frightened
иссле́дование research
и́стина truth
и́стинный true
ита́к thus, hence
ито́г result
в ито́ге in the end, finally

К

каза́ться seem
ка́мень stone
катапу́льта catapult
ке́лья cell
кла́дбище cemetery
клю́ч key, clue
книгопеча́тание book printing
колеба́ние oscillation
колеба́ться oscillate

коло́ния colony
коло́ния бакте́рий colony of bacteria
командиро́вка study tour, posting
команди́р о́рдена почётного легио́на commander of respect legion order
коме́та comet
комменти́ровать comment on
конкре́тный (реа́льный) concrete
конкуре́нт competitor, rival, contender
конструи́рование construction
ко́нсул consul
конта́кт contact
вступи́ть в конта́кт с ке́м-ли́бо get in touch with
контроли́ровать check up, control
кончи́на death
кора́бль ship, vessel
кра́сный red
кра́сочный paint, colorful
кратча́йший shortest
кре́постной serf
крести́ть christen, baptize
крите́рий criterion
кро́ме того́ besides (that), other than that
кружо́к group, circle
кула́чный бо́й fist fight
купе́ц merchant

Л

ли́шь бы if only

М

ма́сса mass
ма́сса (мно́го) a lot of
мастерово́й maker
масшта́б scale
материа́льная (ба́за) material
материа́льное положе́ние financial position, economic conditions
матро́с sailor
ма́ятниковые часы́ pendulum clock, balance clock
ме́льница mill

мельча́йший smallest
ме́сто place
мета́ть throw, cast
механи́зм mechanism
ме́ч sword
меша́ть distract
ми́стика mysticism
мисти́ческий тума́н mystic mist, mystic fog
моги́льная плита́ gravestone
могу́щество power, might
моле́кула molecule
монасты́рь monastery, cloister
католи́ческий монасты́рь abbey
мона́х monk
му́дрость wisdom
му́дрый wise, sage
му́жество courage
механи́зм mechanism
мышле́ние thinking, thought, mentality
мы́шь mouse

Н

наблюда́ть watch, observe
наблюде́ние observation
нагля́дный visual, obvious, clear
надгро́бный па́мятник memorial
наде́ть put on
надежда hope
надёжный reliable
назва́ние (кни́ги) title
назна́чить allot, fix, allocate, assign
наименова́ние name
наполови́ну half
напра́сный vain, useless
напряжённые отноше́ния tense, strained relations
напряжённый intensive
наро́дный people's
насле́дие heritage
насле́довать inherit, succeed
наста́вник mentor

насто́йчиво insistently
насто́йчивый insistent
натяну́ть (натя́гивать) pull tight
небосво́д the heavens
небытие́ nonexistence
невероя́тный вы́мысел incredible (improbable) fiction
негати́вный (негати́в) negative
недоста́ток (дефе́кт) defect, shortage, lack
недоста́точно insufficiently, not fully
незавершённый unfinished
незави́симый independent
незауря́дный uncommon
неиссле́дованный unexplored
необыкнове́нный extraordinary, exceptional
необыча́йный extraordinary, unusual
необы́чность strangeness
необы́чный strange
неожи́данно unexpectedly, suddenly
непосре́дственный direct, immediate, spontaneous
не́сколько ра́з several times
несмотря́ на in spite of, despite
несогла́сие disagreement
несоизмери́мый incommensurable
неуста́нный tireless

О

обеща́ть promise
оби́да insult, offence, offense
облада́ть have, possess
обме́ниваться exchange
обнару́живать discover
обобщи́ть generalize, summarize
обозначе́ние designation
обосно́вывать substantiate
о́браз image
образова́ние education
обрати́ться за сове́том к жрецу́ come to oracle for advice, consult an oracle
обра́тная зада́ча inverse task, reverse problem
обсужда́ть discuss, debate
общепри́знанный universally recognized

общéственность the public, the community
общи́на community
объедини́ть unite, join
объéкт object
объясня́ть explain, tell how
обы́чай custom
обя́зан must
обя́занность duty
овдовéть become a widow
огрóмный huge, enormous, vast
огрóмный успéх great success
одинóчество loneliness, solitude
однáко however, but
одноврéменно at the same time
однорóдный homogeneous, similar
однoти́пный of the same type
озари́ть light up, illuminate
окáзывается it appears that
океáнские прили́вы ocean rising tide, ocean flood tide
окóнчить graduate from, finish
опережáть forestall
опережáть своё врéмя be ahead of one's time
опирáться base on, rely on
описáние description
опубликовáть publish
опускáться put into
óпыт experience
орáкул (жрец) oracle
орби́та orbit
ореóл (слáва) aureole
оригинáл (истóчник) original
орнáмент ornament
осáда siege
освободи́ться get free, become free
освóить (овладéть) master
ослéпший blind
основáтель founder
основнóй basic, main
осóбенно especially, particularly
осóбый special
осознáть realize, recognize

оспа́ривать question, dispute
останови́ть stop, put an end
останови́ться fix on, pay attention
осыпа́ть по́честями shower honors
осяза́ние touch
отде́льный separate, some, isolated
о́тзыв review, opinion
отказа́ться refuse
откры́тие discovery
отлича́ться от (отли́чный от) differ from
отме́тить note, draw attention, mark
относи́тельная свобо́да relative freedom
отноше́ния relations
отсу́тствие absence, lack of
оформля́ть кни́гу design the layout of a book
оча́г centre
очеви́дный obvious, evident
о́черк essay, sketch

П

паде́ние ка́мня falling of a stone
парадокса́льный paradoxical
парово́й дви́гатель steam-engine
пелена́ veil
у него́ сло́вно пелена́ с гла́з упа́ла the scales fell from his eyes
пе́пел ashes
перее́зд journey, move
переизда́ть republish
перемести́ть shift
перено́с transfer, hyphen
переноси́ть в други́е о́бласти transfer to other areas
перепи́ска correspondence, exchange of letters
пересека́ть cross, intersect
перечисля́ть enumerate
песо́к sand
пирами́да pyramid
плане́та planet
плани́ровать plan
плита́ plate
надгро́бная плита gravestone

плодоро́дная земля́ rich soil
плодотво́рно fruitfully, productively
пло́хо badly
пове́рить believe
по-ви́димому probably, apparently
повлия́ть (влия́ть) influence
повреди́ть сла́бому здоро́вью damage the delicate health
повсю́ду everywhere
повто́рный repeated
поги́бнуть be killed
погре́шность error
подгото́вка preparation
по́длинный original, real, true
подо́бный similar
подобра́ть select
подойти́ approach
подо́шва sole
подро́бный detailed
поеди́нок duel
по́здний late
поздравля́ть congratulate
по́зже later
позицио́нная positional
познако́миться get to know, acquaint (oneself) with
показа́ться imagine, seem, look
покида́ть leave
покля́сться swear
поколе́ние generation
покори́ть conquer
покрови́тель patron, protector
покрови́тельство protection
покры́ть cover
покры́ть мра́ком cover with darkness
покры́ть расхо́ды cover expenses
по́лностью completely, fully
по́лностью устрани́ть недоста́ток eliminate defect completely
получи́ть до́лжность профе́ссора be appointed to a professorship
по́льза use, benefit
по́льзоваться use
помеша́ть prevent
поня́тие conception, notion, idea

поощря́ть encourage
попа́сть get (to)
популя́рность popularity
попы́тка attempt
пора́нить hurt
портно́й tailor
по́ршень piston
посвяти́ть себя́ чему́ то devote
посвяща́ть (сде́лать в че́сть кого́-ли́бо) dedicate
посеща́ть attend, visit
поско́льку since, inasmuch as
посла́ть (письмо́) send
после́дующий following, subsequent
по́ст (до́лжность) post
постаме́нт pedestal
постепе́нно gradually, little by little, bit by bit
построе́ние construction
постро́ить build up, construct
посты́дный shameful
потеря́ть lose
потеря́ть состоя́ние lose fortune
пото́к stream, flow
потре́бность need, necessity
похорони́ть с больши́ми по́честями bury with great homage
почёт respect
почётный чле́н honorary member
появля́ться appear
пра́вильность correctness
пра́вить (страно́й) rule
практи́ческий practical
превзойти́ excel, surpass
превосходи́ть род челове́ческий surpass human race
преда́тельство betrayal
преде́л то́чности limit of precision
предлага́ть offer, recommend, suggest
предприи́мчивость enterprise
предска́зывать predict
представля́ть present, introduce
предше́ственник precursor, predecessor
предше́ствовать precede
пре́жде всего́ first of all

преиму́щество preference, advantage (over)
прекра́сный excellent, beautiful
прекраща́ть stop, discontinue
преодоле́ть кри́зис overcome crisis
препя́тствовать prevent
прести́ж prestige
приба́вочный проду́кт surplus product
приближённое значе́ние approximate value
приближённо реши́ть solve approximately
прибли́зиться к approach
приглаша́ть invite
приглаше́ние invitation
приду́мать make up, devise, invent
прижи́зненная сла́ва и по́чести fame and homage during the life
при́з prize
призна́ние acknowledgment
при́знанный (быть при́знанным) acknowledged, recognized
призна́ть acknowledge, admit
прикладно́й applied
приложе́ние (дополне́ние) appendix
приложе́ние (примене́ние) application, supplement
приме́рно about, approximately
принести́ в же́ртву sacrifice
при́нцип principle
принципиа́льный principled
приня́ть accept, take
приобрести́ acquire
приобрести́ из о́пыта experience
приобрете́ние acquirement, acquisition
приро́да nature
приступа́ть begin, start
присужда́ть пре́мию award
причи́на cause. reason
продолже́ние continuation
продо́лжить continue
прое́кт (проекти́ровать) project, design
прое́кция projection
промежу́точное значе́ние intermediate value
промы́шленность industry
проница́тельный acute, shrewd
прооб́раз prototype

пропага́нда promotion, propaganda
пропаганди́ровать propagandize, engage in propaganda
пропа́сть disappear, be lost, be missing
просве́щение education
простира́ться extend
просто́й simple, easy
простра́нство space
косми́ческое простра́нство outer space
про́сьба request
противополо́жность contrast, opposition
противоре́чие contradiction
противоре́чить contradict
проявля́ть show, manifest, display, demonstrate
прямолине́йное неравноме́рное движе́ние rectilinear not uniform motion
публика́ция publication
публикова́ть publish
пупо́к navel
путеше́ствие trip, journey
морско́е путеше́ствие voyage, cruise
пу́ть way
пы́ль dust
пыта́ться try, attempt
пыта́ться преодоле́ть кри́зис try to overcome crisis

Р

работоспосо́бность capacity for work, efficiency
работоспосо́бный hard-working, efficient
равнове́сие balance
равноме́рный even
равноотстоя́щие узлы́ equal-distance knots
равноси́льный equivalent (to)
ра́дость joy
ра́дуга rainbow
разби́ть на divide into, break
разви́тие development
ра́з и навсегда́ once and for all
размеча́ть mark off, mark up, mark out
размышля́ть reflect on, think about
разнообра́зие variety, diversity
разносторо́нние спосо́бности numerous abilities

разносторо́нний many-sided
разносторо́нний у́м many-sided mind
разойти́сь (распространя́ться) spread
тира́ж разошёлся the print run was sold
разраба́тывать work out
разреша́ть (позво́лить) allow, let, permit
разреша́ть вопро́с resolve a problem
разро́зненный odd, incomplete, isolated
ра́й paradise
ра́ковина shell
распростране́ние spreading, dissemination
распространи́ть spread, diffuse
рассмотре́ть regard, consider
расстила́ться spread out, extend
рассужде́ние (выска́зывание) reasoning
расцве́т prosperity, golden age
регуля́рный regular
ре́дкость rarity
результа́т result
рекурре́нтная фо́рмула recurrence formula
религио́зная ми́ссия religious mission
религио́зные произведе́ния religious works
реме́сленник craftsman
реце́нзия review
реце́пт recipe
реше́ние solution
рито́рика rhetoric
рожде́ние birth
ме́сто рожде́ния birthplace
ро́ль role
руково́дство leadership

С

сакра́льный (свяще́нный) sacred
самозабве́нный selfless
самостоя́тельный independent
са́мый соверше́нный the most perfect, the most absolute
све́дение information
свести́ к lead down
све́т light

све́тский secular
своего́ ро́да in his way
свя́занный link, connected with
связа́ть свою́ судьбу́ с throw in one's lot with
секре́т secret
семина́р seminar
симво́лика symbolism
системати́ческое (образова́ние) systematic
скита́ться roam, wander
скро́мный moderate, modest
скры́тый secret
сла́бое здоро́вье poor health
сла́ва fame
сла́ва греме́ла по всей Евро́пе fame resound throughout the Europe
сле́д trace, track
следи́ть за watch over, follow
сле́довательно hence, consequently, therefore
сле́довать follow
сле́дующий following, next
сло́жный compound, complex, difficult
слу́жба service, work
служи́ть serve, work
слу́шать до́воды listen to reasons
случа́йно accidentally
случа́йный accidental, occasional, sporadic, casual
смы́сл meaning
со́боль sable
со́бственный one's own
собы́тие event
соверше́нный perfect
соверше́нство perfection
соверше́нствовать improve, make improvements
сове́т advice
сове́тник advisor
сове́товать advice, consult
совмести́мость compatibility
совме́стный joint, cooperative
совмеща́ть (сочета́ть) combine
совпа́сть coincide
совреме́нник contemporary
совреме́нный modern, contemporary, up-to-date

согласо́ванность coordination
содержа́ние content
сожале́ние (к сожале́нию) unfortunately
созда́ние creation, making
созда́тель creator
солда́т soldier
соображе́ние consideration, reason
сооруже́ние structure, construction
соразме́рность proportion
сора́тник comrade
сосло́вие social class
состоя́ние (бога́тство) fortune
состоя́ние ду́ха state of mind
состоя́ть в сле́дующем consist in following
сотвори́ть в соотве́тствии с create in conformity with
спеши́ть hurry, hasten, make haste
сподви́жник loyal supporter, fellow campaigner
спо́р argument, dispute, debate
спо́рный disputable, questionable, debatable
спо́соб method, way, mode
спосо́бствовать promote, further, aid
справедли́вость (пра́вильность) justice, fairness
спустя́ after, later
спу́тник (есте́ственный) satellite
сравне́ние comparison
сре́дне so-so, moderately
стандартиза́ция standardization
становле́ние formation
стара́ться try
ста́туя statue
сте́нка wall
с те́х по́р from then on
стипе́ндия grant, scholarship
стра́нный strange
стра́нствующий wandering
стра́шный уда́р terrible blow
стремле́ние aspiration, striving (for)
стро́гое поня́тие strict concept
стро́гость strictness, severity
строе́ние structure, construction
стро́йная well balanced

стро́йная и вну́тренне не противоречи́вая тео́рия well-balanced and inwardly not contradiction theory
структу́рный structural
су́д court of law
суеве́рие superstition
суще́ственно substantially
суще́ственный important, essential, considerable
существо́ (по существу́) as a matter of fact, essence
поня́ть существо́ вопро́са understand the essence of the problem
сформирова́ть form
схе́ма (пла́н) scheme
счётная маши́на calculating machine, calculator
сыгра́ть большу́ю ро́ль play the great role

Т

таки́м о́бразом thus
тала́нтливый talented, gifted
тво́рчество creation, creative work
те́м вре́менем at that time
тёмные положе́ния dark principles
тира́ж кни́ги print run
то́лько в то́м слу́чае, когда́ only when
торже́ственный solemn
трансценде́нтное число́ transcendental number
тре́бование demand
трениро́вка training
триумфа́льная коло́нна triumphal column
тро́нуть touch
тру́дный hard, difficult
трудоспосо́бность capacity for work
тума́н mist
турни́р tournament
ту́ча cloud

У

убере́чь protect
уважа́ть respect
уваже́ние respect, esteem
увеличе́ние increase, rise

уве́ренный sure
уве́ренность assurance, confidence
увлека́ться carry away
увлече́ние enthusiasm, animation
угово́р persuasion
уговори́ть persuade
удалённый от кра́йностей remote from the extremes
уда́р blow, impact
уда́чный successful
удво́ить double, redouble
уделя́ть внима́ние give attention to
удиви́ться be surprised
удовлетвори́тельно satisfactorily
уедине́ние solitude
у́зел knot
ука́з (по ука́зу) decree
уклоня́ться от avoid, deviate from
украше́ние decoration
укры́ться shelter
ули́тка snail
у́м mind, brains
унасле́довать inherit
упа́док decline
упо́рное сопротивле́ние stubborn resistance
упо́рный persistent, stubborn
управля́ть (руководи́ть) direct
управля́ть госуда́рством rule the country
управля́ющий еди́ным сво́дом зако́нов guided of the united code of laws
управля́ющий ми́ром guided the world
уроже́нец native
усво́ить master, learn
усло́вие condition
усоверше́нствовать improve
успева́ть be on time
успе́х success
уста́в rules, by-laws
уста́лость tiredness
установи́ть (откры́ть, доказа́ть) establish
усто́йчивость stability
усто́йчивый steady, stable
устраня́ть недоста́ток eliminate defect

устреми́ться вперёд rush forward
устремлённость tendency
ута́ивать keep secret, appropriate
утверди́ть approve, establish
утвержде́ние statement
утоми́ться get tired
уча́ствовать take part in, participate in, be in
уча́стие (при уча́стии) participation
учёность erudition, learning

Ф

феномена́льный phenomenal
фиоле́товый violet
фона́рик lantern
формирова́ть form
формулиро́вка formulating, formulation
фрагме́нт (отры́вок) fragment

Х

ха́ос chaos, mess
хра́м temple

Ц

цветно́й colored
цени́ть appreciate, estimate, value
це́нный valuable
це́нтр тя́жести centre of gravity
це́пь chain
церемо́ния ceremony

Ч

ча́стное реше́ние individual solution, partial solution
части́чно partly
ча́сто often, frequently
чередова́ние alternation, interchange
че́сть honor
чрезвыча́йно extremely

чу́вство sense, feeling
чуде́сный wonderful

Ш

шарни́р hinge
ше́ст pole
широ́кий (о масшта́бе) large
широ́кий (о смы́сле) broad
широ́кий кру́г wide section
широко́ widely, broadly

Э

эмпири́ческий (опытный) empirical
энтузиа́зм enthusiasm
энциклопе́дия encyclopedia
эпиде́мия чумы́ epidemic plague
эпо́ха epoch
эстети́ческий aesthetical
эта́п stage

Я

я́вно obviously, evidently
я́ркий bright, vivid, impressive
я́ркий тала́нт outstanding talent
я́сно clearly
я́сность clearness, clarity

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александрова Н.В.* История математических терминов, понятий, обозначений. Словарь-справочник. Изд. 3-е, испр. — М.: изд-во ЛКИ, 2008. — 248 с.
2. *Волошинов А.В.* Пифагор: Союз истины, добра и красоты. Изд. 2-е. — М.: изд-во ЛКИ, 2007. — 224 с.
3. *Гнеденко Б.В.* Очерки по истории математики в России. — М.: изд-во ЛКИ, 2007. — 296 с.
4. *Гнеденко Б.В., Гнеденко Д.Б.* Об обучении математике в университетах и педвузах на рубеже двух тысячелетий (психология, педагогика, технология обучения: математика). — М.: КомКнига, 2006. — 160 с.
5. *Данилов Ю.А.* Многочлены Чебышева. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 160 с.
6. *Земляков А.Н.* Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический дискурс. Элективный курс. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. — 320 с.
7. *Колмогоров А.Н.* Математика в её историческом развитии. — М.: изд-во ЛКИ, 2007. — 224 с.
8. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? — М.: МЦНМО, 2010. — 558 с.
9. *Левитин К.* Геометрическая рапсодия. — М.: Знание, 1984. — 176 с.
10. *Лишевсий В.П.* Рассказы об учёных. — М.: Наука, 1986. — 168 с.
11. *Мачкин Ю.Е., Коршунова Т.С.* Русско-английский англо-русский словарь заимствованных слов. — М.: Экзамен, 2000. — 688 с.
12. *Микишина А.М., Орлов В.Б.* Толковый математический словарь. Основные термины. — М.: Знание, 1987. — 208 с.
13. *Мюллер В.К.* Англо-русский. Русско-английский словарь. 250 000 слов. — М.: АСТ, 2015. — 1184 с.
14. *Никифоровский В.А.* Из истории алгебры XVI–XVII вв. — М.: Наука, 1979. — 208 с.
15. *Петров Ю.П.* История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика. — СПб.: БХВ-Петербург, 2005. — 448 с.
16. *Полякова Т.С.* Леонард Эйлер и математическое образование в России. — М.: КомКнига, 2007. — 184 с.

17. *Сонин А.С.* Постижение совершенства (Симметрия, асимметрия, диссеметрия, антисимметрия). — М.: Знание, 1987. — 208 с.
18. *Стретерн П.* Лейбниц за 90 минут. — М.: АСТ. Астрель, 2005. — 79 с.
19. *Успенский В.А.* Апология математики. — СПб: Амфора. ТИД Амфора, 2009. — 554 с.
20. *Ушаков И.А.* История науки сквозь призму озарений. Кн. 2: Сначала было число. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 208 с.
21. *Ушаков И.А.* История науки сквозь призму озарений. Кн. 3: Колдовство геометрии. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. — 168 с.
22. *Ушаков И.А.* История науки сквозь призму озарений. Кн. 4: От арифметики до алгебры: Таинственная страна Аль-Джебр. — М.: КомКнига, 2010. — 144 с.
23. *Федин С.Н.* Математики тоже шутят. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. — 216 с.
24. *Филинова О.Е.* Математика в истории мировой культуры. — М.: Гелиос АРВ, 2006. — 224 с.
25. *Шейнина Е.Я.* Энциклопедия символов. — М.: Торсинг, 2003. — 591 с.
26. *Штейнгауз Г.* Математика — посредник между духом и материей. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. — 351 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Галина Иосифовна Беликова
Лариса Валериевна Витковская

ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

Учебное пособие
для иностранных студентов, обучающихся
по программе предвузовской подготовки

Редактор: Л.Е. Травина
Компьютерная вёрстка: Ю.И. Климов

ЛР № 020309 от 30.12.96

Подписано в печать 16.12.15. Формат 60×90 1/16. Гарнитура Newton.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 8,4. Тираж 150 экз. Заказ № 471.
РГГМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр. 98.
Отпечатано в ЦОП РГГМУ