



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра __метеорологических прогнозов__

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(магистерская диссертация)

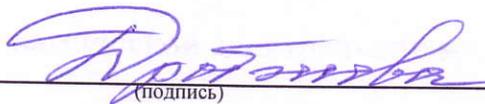
На тему Разработка баротропной гидродинамической модели на основе
спектрального подхода.

Исполнитель Юшин Виталий Андреевич
(фамилия, имя, отчество)

Руководитель кандидат физико-математических наук
(ученая степень, ученое звание)

Ольга Георгиевна Анискина
(фамилия, имя, отчество)

«К защите допускаю»
Заведующий кафедрой


(подпись)

доктор физико-математических наук, доцент
(ученая степень, ученое звание)

Дробжева Яна Викторовна
(фамилия, имя, отчество)

8 июня 2018 г.

Санкт-Петербург
2018

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Введение.....	3
1. Многоуровневая глобальная спектральная модель.....	6
1.1 Введение в спектральный метод.....	6
1.2 Аппроксимация функций в спектральных моделях.....	6
1.3 Ошибки ложного представления и максимальное количество коэффициентов разложения.....	10
1.4 Метод спектрально-сеточного преобразования.....	11
2. Расчёт коэффициентов взаимодействия.....	18
2.1 Коэффициенты Клебша-Гордана.....	22
3. Негеострофическая баротропная модель (модель «Мелкой воды»). Спектральная аппроксимация.....	53
3.1 Приближения «Мелкой воды».....	53
3.2 Аппроксимация модели «Мелкой воды» рядами.....	54
3.3 Коэффициент взаимодействия.....	72
4. Формулировка гидродинамической спектральной модели «мелкой воды».....	74
5. Анализ результатов.....	84
Заключение.....	90
Список использованных источников.....	91

ВВЕДЕНИЕ

В современном мире точный прогноз погоды очень важен. Начиная с безопасности полетов воздушных судов, заканчивая выбором одежды. Предсказывать погодные условия пытались все народы во все времена. Изначально основываясь многолетнем наблюдении за погодными явлениями и поведением птиц и животных.

Делая выводы по этим наблюдениям, человечество находило закономерности и зависимости погодных явлений от поведения животных. Таким способом в IV веке до нашей эры Аристотелем был создан первый научный трактат о погоде «Метеорологика». С научно-техническим развитием человечества за две тысячи лет появились новые методы и способы прогноза погоды, которые значительно усовершенствовались со временем: синоптический, физико-статистический и гидродинамический. В данной выпускной квалификационной работе магистра будет разрабатываться прогноз погоды, основанный на гидродинамическом методе прогноза. Данный метод основан на математическом моделировании процессов в атмосфере. За основу данной математической модели взяты уравнения гидродинамики атмосферы.

Система уравнений гидродинамики атмосферы при описании крупномасштабных атмосферных потоков является трёхмерной и включают в себя зависимость от двух горизонтальных координат и одной вертикальной. Многие из физических свойств атмосферных процессов, а также математических и вычислительных аспектов их описания можно исследовать, используя более простую двухмерную систему уравнений, в которой не рассматривается зависимость полей метеорологических величин от вертикальной координаты. Эти двухмерные уравнения описывают поведение вращающейся, однородной, несжимаемой и гидростатической жидкости, ограниченной сверху свободной поверхностью. Эта система

уравнений является системой баротропных негеострофических уравнений и называется системой уравнений «мелкой воды».

Уравнения мелкой воды способны создать полезную основу для анализа динамики крупномасштабных атмосферных потоков (например, процесс геострофического приспособления), а также анализ современных численных методов, которые будут применены к решению бароклинных трёхмерных уравнений гидродинамики атмосферы.

Актуальной данной выпускной работы обусловлена незаменимым статусом спектральных методов в глобальном численном моделировании. Методы коэффициентов взаимодействия способны описывать нелинейные взаимодействия волн. А баротропная негеострофическая модель хорошо анализирует динамику крупномасштабных процессов.

Целью данного исследования является построение гидродинамической модели прогноза погоды с использованием спектральных методов и методов коэффициентов взаимодействия, а так же изучение преимуществ их использования. Для достижения этой цели должны быть решены следующие задачи.

Задачи:

- 1) Изучить особенности построения современных гидродинамических спектральных моделей атмосферы.
- 2) Создать алгоритм расчета базисных сферических функций.
- 3) Создать алгоритм разложения полей метеорологических величин в ряд по сферическим функциям. Определить оптимальное количество членов разложения.
- 4) Создать алгоритм прогноза по уравнениям баротропной негеострофической модели атмосферы.
- 5) Создать программный комплекс по моделированию полей метеорологических величин спектральными методами.
- 6) Провести численные эксперименты с использованием разработанных моделей и проанализировать их результаты.

Выпускная квалификационная работа магистра состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованных источников. Первая глава посвящена формулировке основных уравнений гидродинамики атмосферы и их спектральному виду, вторая – расчету коэффициентов взаимодействия, третья – выводу определяющей системы уравнений, четвертая – формулировке гидродинамической спектральной модели «Мелкой воды», а пятая – анализу результатов.

При написании данной выпускной квалификационной работы были использованы учебники и статьи, 17 наименования.

1. Многоуровневая глобальная спектральная модель

1.1 Введение в спектральный метод

С 1970-х годов, спектральный метод становится все более популярным методом для глобального гидродинамического прогноза погоды. Глобальные гидродинамические модели, основанные на спектральном методе, используются во всем мире, как для научных исследований, так и для оперативных целей [1].

Метод Галеркина, который широко используется при построении большинства спектральных моделей, позволяет вычислять нелинейные слагаемые без ошибок ложного представления [1].

1.2 Аппроксимация функций в спектральных моделях

Любые поля (например, ζ и ψ) могут быть представлены в виде ряда по сферическим гармоникам.

$$\zeta(\lambda, \mu) = \sum_m \sum_n \zeta_n^m Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (1.1)$$

$$\psi(\lambda, \mu) = \sum_m \sum_n \psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (1.2)$$

где двойная сумма бесконечна в целом, иными словами, $-\infty \leq m \leq \infty$ и $|m| \leq n \leq \infty$. Однако, на практике представление в виде бесконечных рядов не представляется возможным и нужно усечь ряд. Это может быть сделано, выбором максимального количества спектральных компонент в двойной сумме. При этом пренебрегают волнами вне спектра, т.е. за пределами самого большого волнового числа.

Сегодня в глобальных спектральных моделях, как правило, используются два типа схем усечения. Их называют треугольным усечением и параллелограммным усечением. В случае треугольного усечения самая высокая степень различных сферических гармоник Y_n^m (m обозначает порядок сферической гармоники, а n - степень) фиксирована и устанавливается равной высшему порядку этих гармоник. Таким образом, это усечение представляется математически, как

$$\psi(\lambda, \mu) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \psi_n^m Y_n^m(\lambda, \mu), \quad (1.3)$$

и схематически представлено на рисунке 1.1.

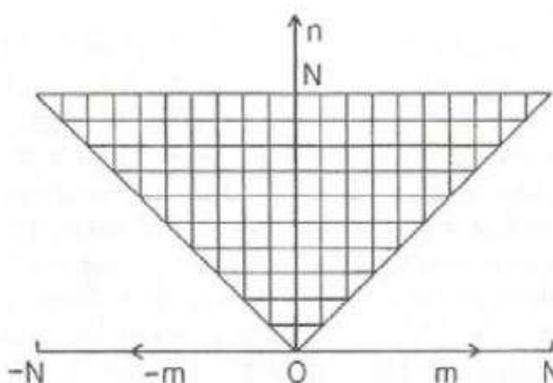


Рисунок 1.1 – Схематическое изображение треугольного усечения

В соответствии с этим усечением число нулей полиномов Лежандра P_n для различных волновых чисел m изменяется и, следовательно, разные волновые числа m имеют различную степень свободы вдоль широты. Двумерный волновой индекс имеет одинаковое максимальное значение для всех волн и все волны усекаются в одном и том же двумерном масштабе.

Параллелограммное усечение устанавливает фиксированное значение максимального числа нулей сферической функции с любым волновым числом m , что дает равные степени свободы вдоль широты для всех волн. Это усечение представляется, как

$$\psi(\lambda, \mu) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^{|m|+J} \psi_n^m Y_n^m. \quad (1.4)$$

Если $J = N$, усечение называется ромбовидным. При $J \neq N$, оно может быть названо параллелограммным усечением. Схематически это усечение представлено на рисунке 1.2. Треугольное усечение при волновом числе N часто обозначается как $T-N$ (или TN); аналогично ромбовидное усечение при волновом числе N сокращается как $R-N$.

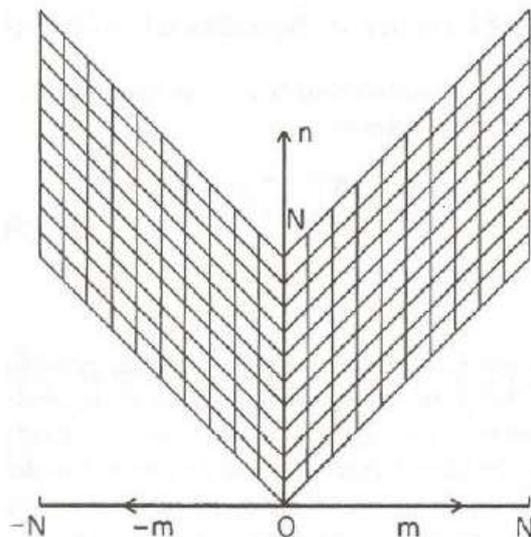


Рисунок 1.2 Схематическое изображение ромбовидного усечения.

Широко обсуждалось в научной литературе [2], [3], [4], [5], какое из двух усечений лучше подходит для различных задач. Оба эти представления

имеют свои преимущества и недостатки. Треугольное усечение предполагает, что дисперсия, содержащаяся в волнах короче определенной двумерной волны, равна нулю. Тем не менее, представление в меридиональном направлении не имеет одинаковые числа степеней свободы для всех волн. Доказано, что при одинаковом числе волновых компонент, треугольное усечение описывает большую дисперсию, чем ромбовидное [6].

Общее количество полиномов Лежандра для треугольного усечения, которое ограничено волновым числом N , равно $(N + 1)(N + 2) / 2$ (см. рисунок 1.1). Это может быть получено следующим образом: в треугольном усечении с максимальным волновым числом N , существует $N + 1$ функции Лежандра с $P_0^0, P_1^0, P_2^0, \dots, P_N^0$ зональными волновыми числами. Точно так же, количество функций Лежандра, содержащих волновые числа $1, 2, 3, \dots, N$, равняется $N, N-1, N-2, \dots, 1$, соответственно. Таким образом, в среднем есть $(N + 2) / 2$ функций Лежандра для каждого зонального волнового числа. Общее количество зональных волновых чисел, в том числе нулевых, равно $N + 1$. Это означает, что общее число функций Лежандра или спектральных компонент в треугольном усечении с максимальным волновым числом N равно $(N + 1)(N + 2) / 2$. Поэтому спектральная модель $T42$ (максимальное волновое число - 42) содержит $(43 \times 44) / 2 = 946$ спектральных компонент. $T106$ и $T170$ модели будут иметь 5778 и 14706 спектральных составляющих, соответственно.

Общее количество полиномов Лежандра для ромбовидного усечения $R-N$ равно $(N + 1)(N + 1)$. Это может быть получено следующим образом: в ромбовидном усечении есть $N + 1$ функция Лежандра $(P_n^m, P_{n+1}^m, P_{n+2}^m, \dots, P_{n+j}^m)$ для любого зонального волнового числа m . Общее количество зональных волновых чисел, в том числе нулевых, $N + 1$. Таким образом, общее число функций Лежандра или волновых компонент в этом усечении $(N + 1)(N + 1)$. Таким образом, $R42$ имеет $43 \times 43 = 1849$ полиномов Лежандра.

1.3 Ошибки ложного представления и максимальное количество коэффициентов разложения

Пусть дано $2N + 1$ точек вдоль линии (широты или долготы). Проанализируем на максимально возможное число компонент N ряда Фурье (N -синус компонент и N -косинус компонент). Если пытаться вычислить более N компонент, то происходит ложное представление или наложение спектров низших волновых чисел на высшие волновые числа. Чтобы показать это, предположим

$$y(x) = \sum_{m=0}^M a_m e^{imx}, \quad (1.5)$$

где $y (y_1, y_2, \dots, y_{2N+1})$ определено в $2N + 1$ равноотстоящих точках $x_1, x_2, \dots, x_{2N+1}$, при $x_1 = 0$ и $x_{2N+1} = 2\pi$.

Умножив обе части уравнения (1.5) на e^{-imx} и суммируя по всем возможным узлам сетки j , получим

$$a_m = \frac{1}{2N + 1} \sum_{j=1}^{2N+1} y_j e^{-imx_j} = \frac{1}{2N + 1} \sum_{j=1}^{2N+1} y_j e^{-im(\frac{\pi}{N})(j-1)} \quad (1.6)$$

Если $m > N$, то можно записать $m = 2N - m'$, где $m' < N$,

Видно, что амплитуда a_m фактически отражается как $a_{m'}$, которая является амплитудой нулевого волнового числа m' , где $m' < N$. Таким образом, если пытаться проанализировать набор данных в $2N + 1$

равноотстоящих точках с использованием волновых чисел больше N , то неизбежно появление проблем наложения спектров. Минимальное количество точек, необходимых для анализа поля в N -Fourier компонент это $2N + 1$ [1] и [7].

1.4 Метод спектрально-сеточного преобразования

Нелинейные слагаемые в спектральной модели с использованием разложения в усечённые ряды могут быть вычислены с помощью одного из следующих методов: (а) метод коэффициентов взаимодействия или (б) метод спектрально-сеточного преобразования. Метод коэффициентов взаимодействия состоит в получении спектральных амплитуд нелинейных произведений непосредственно из спектральных амплитуд функций Лежандра. Эта процедура является точной и лишенной каких-либо вычислительных ошибок. Если число спектральных компонент в модели мало, например, от четырех до шести, как это происходит во многих теоретических исследованиях, этот метод является очень эффективным и изящным. Тем не менее, при работе с большим количеством спектральных компонент число коэффициентов взаимодействия становится слишком большим и их хранение, расчет, загрузка и извлечение становится очень обременительным. Для получения большого количества волновых компонент метод спектрально-сеточного преобразования (трансформации) является более простым и более эффективным.

В методе спектрально-сеточного преобразования, нелинейные члены вычисляются в сеточном пространстве, а затем преобразуются в спектральное пространство. Нелинейные члены в атмосферной модели это, как правило, произведения вида $U \frac{\partial U}{\partial \lambda}, V \frac{\partial U}{\partial \mu}$ и т.д., где U и V представлены спектрально укороченными рядами.

Для того чтобы спектрально проанализировать произведение переменных $A(\lambda, \mu)$ и $B(\lambda, \mu)$, метод преобразования включает следующие три этапа, которые повторяются на каждом шаге по времени в процессе интегрирования уравнений модели:

1. Преобразовать переменные модели от спектрального к сеточному виду.

А. Вычисление амплитуд Фурье из коэффициентов разложения на каждой широте с помощью следующих соотношений:

$$A^m(\mu) = \sum_{n=|m|}^N a_n^m P_n^m(\mu), \quad (1.7)$$

$$B^m(\mu) = \sum_{n=|m|}^N b_n^m P_n^m(\mu), \quad (1.8)$$

где a_n^m и b_n^m – амплитуды разложения по сферическим функциям, включенных в нелинейный член, в то время как $A^m(\mu)$ и $B^m(\mu)$ являются их амплитудами Фурье на определенной широте μ .

В. Расчет сеточных значений по компонентам Фурье как

$$A(\lambda, \mu) = \sum_{m=-M}^M A^m(\mu) e^{im\lambda}, \quad (1.9)$$

$$B(\lambda, \mu) = \sum_{m=-M}^M B^m(\mu) e^{im\lambda}, \quad (1.10)$$

Процессы 1(А) и 1(В) являются обратными преобразованиями Лежандра и обратными преобразованиями Фурье, соответственно.

2. Произвести расчет нелинейных членов в узлах сетки. Компоненты $A(\lambda, \mu)$ и $B(\lambda, \mu)$ в каждой точке сетки перемножаются, чтобы получить нелинейный член $C(\lambda, \mu)$, то есть

$$C(\lambda, \mu) = A(\lambda, \mu) \cdot B(\lambda, \mu) \quad (1.11)$$

Здесь A и B могут быть сеточными значениями переменных, таких как $U, V, \frac{\partial U}{\partial \lambda}, \frac{\partial V}{\partial \mu}$ и так далее.

3. Выполнение спектрального преобразования нелинейных членов в точках сетки. Этот процесс вновь достигается двумя преобразующими шагами:

А. Преобразование Фурье сеточных членов на широтных кругах.

В. Преобразование Лежандра компонент Фурье, полученных на шаге 3(А).

Рассмотрим требования к ошибкам ложного представления в этих расчетах. Для этого пусть $A(\lambda, \mu)$ и $B(\lambda, \mu)$ – пространственные значения двух спектрально усеченных переменных порядка (зональное волновое число) M и степени N сферических гармоник. Тогда член $C(\lambda, \mu)$ может быть записан как

$$\begin{aligned} C(\lambda, \mu) &= \sum_{m_1=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N a_{n_1}^{m_1} Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_2=|m_2|}^N b_{n_2}^{m_2} Y_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) = \\ &= \sum_{m_1=-M}^M \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N a_{n_1}^{m_1} \cdot b_{n_2}^{m_2} \cdot P_{n_1}^{m_1} \cdot P_{n_2}^{m_2} \cdot e^{i(m_1+m_2)\lambda}. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Двумерная спектральная амплитуда C_n^m сферической гармонической волны задается

$$C_n^m = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} C(\lambda, \mu) Y_n^{m*}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 \left(\int_0^{2\pi} C(\lambda, \mu) e^{-im\lambda} d\lambda \right) P_n^m(\mu) d\mu \quad (1.13)$$

Подставляя $C(\lambda, \mu)$ в (1.13), получим

$$C_n^m = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m_1=-M}^M \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N a_{n_1}^{m_1} b_{n_2}^{m_2} P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} \cdot e^{i(m_1+m_2)\lambda} \cdot e^{-im\lambda} d\lambda \right) P_n^m(\mu) d\mu. \quad (1.14)$$

Интеграл по λ в правой части (1.14) отличен от нуля только в тех случаях, когда $m=m_1+m_2$. Таким образом, зональное волновое число m нелинейного слагаемого возникает от взаимодействия этих компонент произведения с волновыми числами m_1 и m_2 , для которых $m=m_1+m_2$. Интегрирование по λ приводит к анализу Фурье $C(\lambda, \mu)$ вдоль широтных кругов. Кроме того, если C^m - амплитуда Фурье с волновым числом m , то

$$C_n^m = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 C^m(\mu) P_n^m(\mu) d\mu. \quad (1.15)$$

Приравнивая (1.14) и (1.15), получаем

$$C_n^m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{m_1=-M}^M \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N a_{n_1}^{m_1} b_{n_2}^{m_2} P_{n_1}^{m_1}(\mu) P_{n_2}^{m_2}(\mu) \cdot$$

$$\cdot e^{i(m_1+m_2-m)\lambda} d\lambda = \sum_{m_1=-M}^M \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N a_{n_1}^{m_1} b_{n_2}^{m_2} P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2}, \quad (1.16)$$

где $m_1 + m_2 = m$.

Таким образом

$$C^m = \sum_{m_1=-M}^M \sum_{m_2=-M}^M \sum_{n_1=|m_1|}^N \sum_{n_2=|m_2|}^N \frac{1}{2} a_{n_1}^{m_1} b_{n_2}^{m_2} \int_{-1}^1 P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} P_n^m d\mu. \quad (1.17)$$

Этот расчет спектральных компонент C_n^m из произведения $C = A \cdot B$ включает в себя оценку интеграла вида

$$\int_{-1}^1 P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} P_n^m d\mu, \quad (1.18)$$

где $m_1 + m_2 = m$. Во время преобразования Лежандра, необходимо, чтобы этот интеграл оценивался точно. Рассмотрим требования численных квадратур для достижения такой точной оценки интеграла.

Мы можем записать нормированную функцию Лежандра

$$\begin{aligned} P_n^m(\mu) &= \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right)^{1/2} \left(\frac{2n+1}{2} \right)^{1/2} (1-\mu^2)^{m/2} \frac{d^{n+m}(\mu^2-1)^n}{d\mu^{n+m}} = \\ &= (1-\mu^2)^{m/2} P_{n-m}, \end{aligned} \quad (1.19)$$

где P_{n-m} есть многочлен степени $n-m$. С этим, можно записать

$$\begin{aligned} P_{n_1}^{m_1}(\mu) P_{n_2}^{m_2}(\mu) P_n^m(\mu) &= \\ &= (1-\mu^2)^{m_1/2} P_{n_1-m_1} (1-\mu^2)^{m_2/2} P_{n_2-m_2} (1-\mu^2)^{m/2} P_{n-m} = \end{aligned}$$

$$= (1 - \mu^2)^{(m_1+m_2+m)/2} P_{n_1-m_1} P_{n_2-m_2} P_{n-m} = P_{2m} P_{n_1-m_1} P_{n_2-m_2} P_{n-m}. \quad (1.20)$$

Так как $m_1 + m_2 = m$ то

$$(1 - \mu^2)^{(m_1+m_2+m)/2} - (1 - \mu^2)^m = P_{2m} \quad (1.21)$$

есть многочлен степени $2m$.

Кроме того, $P_{n_1-m_1} P_{n_2-m_2} P_{n-m}$ – многочлены в точке с координатой μ степени $n_1 - m_1$,

$n_2 - m_2$ и $n - m$, соответственно. Рассмотрим сначала Ромбовидное или параллелограммовидное усечение

$$\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^{|m|+J}$$

Самой высокой степенью у P_{2m} является $2N$, а у $P_{n_1-m_1}, P_{n_2-m_2}$ и P_{n-m} - J .

Таким образом, $P_{n_1}^{m_1}(\mu) P_{n_2}^{m_2}(\mu) P_n^m(\mu)$ имеет самую высокую степень $2N+3J$. Используя Гауссову квадратуру, можно проинтегрировать многочлен наивысшей степени $\leq 2k-1$ по их значениям, доступным на k точках гауссовой квадратуры. В этом случае наивысшая степень тройного перемножения $P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} P_n^m$ является $2N+3J$. Следовательно, интеграл (1.18) можно оценить точно, если $2k-1=2N+3J$ или $k=(2N+3J+1)/2$. В ромбовидном усечении $J=N$, следовательно, $k=(2N+3J+1)/2$ является минимальным числом Гауссовых широт для преобразования Фурье.

Рассмотрим треугольное усечение, которое имеет вид:

$$\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N .$$

Для треугольного усечения $P_{n_1}^{m_1}(\mu)P_{n_2}^{m_2}(\mu)P_n^m(\mu)$ может быть представлено в виде полинома вида (1.20). Тем не менее, в этом случае самая высокая степень $P_{n_1}^{m_1}(\mu), P_{n_2}^{m_2}(\mu)$ и $P_n^m(\mu)$ - N . Самая высокая степень $P_{n_1}^{m_1}(\mu)P_{n_2}^{m_2}(\mu)P_n^m(\mu)$ в этом случае может быть представлена полиномом

$$(1 - \mu^2)^{\frac{m_1+m_2+m}{2}} P_{N-m_1} P_{N-m_2} P_{N-m} = P_{2m} P_{N-m_1} P_{N-m_2} P_{N-m} = P_{3N} \quad (1.22)$$

с $m_1 + m_2 = m$. Самая высокая степень $P_{n_1}^{m_1}(\mu)P_{n_2}^{m_2}(\mu)P_n^m(\mu)$ в этом случае $3N$, и можно численно интегрировать с помощью квадратуры Гаусса с минимумом k гауссовых широт, где $2k-1=3N$ или $k=(3N+1)/2$.

Для преобразования Фурье в модельном разрешении $R42$ минимальное число точек сетки в зональном направлении $3 \cdot 42 + 1 = 127$. Так как быстрое преобразование Фурье требует, чтобы число точек было кратными 2, 3 или 5, минимальное количество точек берется как 128. Такое же количество точек в зональном направлении требуются для усечения $T42$. Тем не менее, минимальное число гауссовых широт для разрешения $R42$ равно 106 $[\geq(5 \cdot 42+1)/2]$ и для $T42$ равно 64 $[\geq(3 \cdot 42+1)/2]$.

2. Расчёт коэффициентов взаимодействия

Эта глава практически полностью основана на дипломной работе Е.В.Курзеновой [8].

Расчёт коэффициентов взаимодействия очень сложная задача. Долгое время в спектральных методах для расчёта коэффициентов разложения использовались приближенные методы. Достижения в математике позволяют сегодня взять двойной интеграл от умножения трёх полиномов Лежандра точно с использованием положений теории групп Ли [9].

Группой называется множество G с одной алгебраической операцией, ассоциативной (хотя не обязательно коммутативной), причем для этой операции обязательно должна существовать обратная.

Понятие представления группы является обобщением понятия показательной функции. Показательную функцию e^{ax} можно определить как непрерывное решение функционального уравнения:

$$f(x+y) = f(x) * f(y),$$

удовлетворяющего начальному условию $f'(0) = a$. Обобщая это уравнение на любую группу G , приходим к рассмотрению скалярных функций на группе G , удовлетворяющих уравнению:

$$f(g_1 g_2) = f(g_1) f(g_2) \quad (2.1)$$

где g_1, g_2 - элементы группы G . Знак группового оператора в $f(g_1 g_2)$ опущен. Однако, для некоммутативных групп таких функций слишком мало. Чтобы получить достаточно большой запас решений уравнений (2.1), надо перейти от скалярных функций к функциям, значениям которых являются матрицы или линейные преобразования. Так как умножение матриц некоммутативно, запас решений такого вида достаточно велик. Таким образом, приходим к рассмотрению решений функционального уравнения:

$$T(g_1 g_2) = T(g_1) T(g_2) \quad (2.2)$$

где $T(g)$ - функция на группе G , принимающая значения в множестве линейных преобразований некоторого линейного пространства \mathfrak{L} . Эти решения называют представлениями группы G . Строго представлением группы G называют непрерывную функцию $T(g)$ на этой группе, принимающую значения в группе невырожденных непрерывных линейных преобразований линейного пространства \mathfrak{L} и удовлетворяющую функциональному неравенству (2.2).

Вращением трёхмерного евклидова пространства называют линейное преобразование этого пространства, сохраняющее расстояние между точками пространства и началом координат и не меняющее ориентацию этого пространства. Вращения трёхмерного евклидова пространства составляют группу $SO(3)$. Она изоморфна группе $\mathcal{SU}(2)$. Если угол Эйлера ψ меняется от 0 до 2π , то вращения трёхмерного евклидова пространства можно задавать тремя углами Эйлера. Геометрический смысл углов Эйлера для вращений: вращение g трёхмерного евклидова пространства задаваемое углами Эйлера φ, θ, ψ является произведением вращения на угол ψ вокруг оси $0z$,

вращения на угол θ вокруг оси $0x$ и второго вращения на угол φ вокруг оси $0z$.

Если углы Эйлера матрицы U равны φ, θ, ψ , то ей соответствует точка M сферы со сферическими координатами θ и φ .

Каждой унимодулярной комплексной матрице второго порядка $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ соответствует линейное преобразование $f(Z_1, Z_2)$:

$$\begin{cases} \omega_1 = \alpha Z_1 + \gamma Z_2 \\ \omega_2 = \beta Z_1 + \delta Z_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

двумерного линейного комплексного пространства. Этому преобразованию отвечает оператор

$$T(g) f(Z_1, Z_2) = f(\alpha Z_1 + \gamma Z_2, \beta Z_1 + \delta Z_2)$$

в пространстве функций от двух комплексных переменных. Здесь $T(g_1, g_2) = T(g_1) T(g_2)$ и поэтому $T(g)$ является представлением группы унимодулярных комплексных матриц второго порядка.

Матричные элементы представления $(T_l(U)) \equiv (t_{mn}^l(U))$ могут быть представлены по-разному. Можно получить выражение для t_{mn}^l через α и β , через углы Эйлера. Через углы Эйлера t_{mn}^l будут иметь вид

$$t_{mn}^l(g) = e^{-i(m\varphi + n\psi)} P_{mn}^l(\cos\theta) \quad (2.4)$$

или для точки M со сферическими координатами $M(\varphi, \theta)$

$$t_{mn}^l(g) = e^{im\varphi} P_{mn}^l(\cos\theta) \quad (2.5)$$

где P_{mn}^l - некая функция, выражение для неё также получается из свойств группы $SO(3)$ и из свойств унитарных неприводимых представлений

$$P_{mn}^l(\mu) = i^{-m-n} \sqrt{\frac{(l-m)!(l-n)!}{(l+m)!(l+n)!}} \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{m+n}{2}} \sum_{j=\max(m,n)}^l \frac{(i+j)! i^2 j}{(l-j)!(l-m)!(j-k)!} \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^j \quad (2.6)$$

$$P_{mn}^l(\mu) = \frac{(-\alpha)^{l-n} i^{n-m}}{2^l} \sqrt{\frac{(l+m)!}{(l-n)!(l+n)!(l-m)!}} (1-\mu)^{\frac{-mn}{2}} \frac{d^{l-m}}{d\mu^{l-m}} [(1-\mu)^{l-n} (1+\mu)^{l+n}] \quad (2.7)$$

Свойства функции $P_{mn}^l(\mu)$ вытекают из свойств неприводимых унитарных представлений $T_l(g)$ и свойств группы $SO(3)$. Приведём некоторые из этих свойств:

$$P_{m,-n}^l(\mu) = P_{-m,n}^l(\mu) \quad (2.8)$$

$$P_{-m,-n}^l(\mu) = P_{m,n}^l(\mu) \quad \left. \vphantom{P_{-m,-n}^l(\mu)} \right\} \text{, - свойства симметрии} \quad (2.9)$$

$$P_{m,n}^l(\mu) = P_{n,m}^l(\mu) \quad (2.10)$$

$$\overline{P_{m,n}^l(\mu)} = (-1)^{m-n} P_{n,m}^l(\mu) \text{ - свойства сопряженности.} \quad (2.11)$$

Из формулы (2.6) и выражения для полиномов Лежандра

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n} \frac{d^n}{d\mu^n} (\mu^2 - 1)^2$$

следует связь функций $P_{mn}^l(\mu)$ и присоединённых полиномов Лежандра

$$P_n^m(\mu) = i^m (-1)^{n+m} \sqrt{\frac{(n+m)!}{(n-m)!}} P_{n0}^m(\mu). \quad (2.12)$$

Явное выражение для присоединённых полиномов Лежандра:

$$P_n^m(\mu) = \left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right)^{\frac{m}{2}} \sum_{j=\max(m,0)}^l \frac{(n+j)! (-1)^j}{(n-j)! (j-m)! j!} \left(\frac{1-\mu}{2}\right)^j \quad (2.13)$$

Функции $P_{mn}^l(\mu)$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$

$$\int_{-1}^1 P_{mn}^l(\mu) \overline{P_{mn}^l(\mu)} d\mu = \frac{2}{2l+1} \delta_{ls} \quad (2.14)$$

поэтому поля метеорологических величин удобно раскладывать и по обобщённым сферическим функциям

$$T_{mn}^l = e^{im\lambda} P_{mn}^l(\sin(\varphi)) \quad (2.15)$$

где λ, φ - географические координаты. При этом скалярные поля раскладываются по сферическим функциям T_{n0}^m , векторные по T_{n1}^m , а тензорные по T_{n2}^m и $T_{n,-2}^m$. При таком разложении в суммах разделяются переменные и пользоваться методом Галёркина или методом наименьших квадратов не надо.

2.1 Коэффициенты Клебша-Гордана

Пусть \mathfrak{V}_1 и \mathfrak{V}_2 - конечно мерные линейные пространства, а \mathfrak{V}'_1 и \mathfrak{V}'_2 - сопряженные с ними пространства. Тогда кронекеровским произведением пространств \mathfrak{V}_1 и \mathfrak{V}_2 называется пространство $\mathfrak{V}(\mathfrak{V}'_1, \mathfrak{V}_2)$, элементами которого являются линейные отображения пространства \mathfrak{V}'_1 в \mathfrak{V}_2 (обозначается $\mathfrak{V}_1 \otimes \mathfrak{V}_2$).

В пространстве $S_{\delta_1} \otimes S_{\delta_2}$ представления $T_{l_1} \otimes T_{l_2}$ есть два базиса. Первый из них образован попарными произведениями

$$f_j \otimes h_k \quad -l_1 \leq j \leq l_1 \quad , \quad (2.16)$$

векторов канонических базисов пространств S_{δ_1} и S_{δ_2} (f_j - канонический базис в S_{δ_1} , а h_k в S_{δ_2}). Далее $S_{\delta_1} \otimes S_{\delta_2}$ раскладывается на неприводимые пространства λ_l и второй базис a_m^l состоит из канонических базисов λ_l . Так как a_m^l и $f_j \otimes h_k$ - ортогональные базисы в одном и том же пространстве $S_{\delta_1} \otimes S_{\delta_2}$, существует унитарная матрица C , переводящая базис a_m^l в $f_j \otimes h_k$. Строки этой матрицы обозначаются парой индексов (l, m) , а столбцы - (j, k) , $-l_1 \leq j \leq l_1$, $-l_2 \leq k \leq l_2$, $|l_1 - l_2| \leq l \leq |l_1 + l_2|$, $-l \leq m \leq l$, то есть:

$$f_j \otimes h_k = \sum_{l=|l_1-l_2|}^{l_1+l_2} \sum_{m=-l}^l C_{(l m)(j k)} a_m^l, \quad (2.17)$$

Если мы хотим явно отметить зависимость C от l_1 и l_2 , то обозначим $C_{(l m)(j k)} = C_{(l_1, l_2, l, j, k, m)}$. Числа $C_{(l_1, l_2, l, j, k, m)}$ называют коэффициентами Клебша-Гордана (ККГ). Они определены неоднозначно, а с точностью до множителя α_l , такого, что $|\alpha_l| = 1$. Воспользовавшись этой неопределённостью, можно добиться, чтобы выполнялось условие:

$$C_{(l_1, l_2, l, j, k, m)} \geq 0, \quad (2.18)$$

или, что то же самое, коэффициенты C были вещественны.

Из связи матричных элементов T_{l_1} и T_{l_2} с каноническими базисами a_m^l , $f_j \otimes k_k$ следует соотношение:

$$C_{(l_1, l_2, l, j', k', m')} \bar{C}_{(l_1, l_2, l, j, k, m)} = (2l+1) \int t_{j'j}^{l_1}(u) \bar{t}_{kk}^{l_2}(u) du, \quad (2.19)$$

Элементы со знаком штриха появляются при суммировании. Из (2.19) следует

$$\frac{(2l+1)}{2} \int_{-1}^1 P_{j'j}^{l_1}(\mu) P_{k'k}^{l_1}(\mu) P_{m'm'}^{l_1}(\mu) d\mu = C_{(l_1, l_2, l, j', k', m')} \bar{C}_{(l_1, l_2, l, j, k, m)} \quad (2.20)$$

причём интеграл отличен от нуля лишь в случае:

$$m = j + k, \quad (2.21)$$

$$m' = j' + k'. \quad (2.22)$$

Таким образом, коэффициенты формально не зависят от последнего параметра: они отличны от нуля, если $m = j + k$:

$$C_{(l_1, l_2, l, j, k, m)} = C_{(l_1, l_2, l, j, k, 0+l)} \equiv C_{(l_1, l_2, l, j, k)} \quad (2.23)$$

Используя некоторые свойства обобщённых сферических функций можно получить интеграл в левой части равенства (2.20) и, отсюда, различные выражения для ККГ в виде суммы:

$$C_{(l_1, l_2, l, j, k)} = \sqrt{\frac{(2l+1)(l_1+j)!(l-j+k)!(l-l_1+l_2)!(l_1+l_2-l)!(l_1+l_2+l+1)!}{(l_1-j)!(l_2+k)!(l_2-k)!(l+j+k)!(l+l_1-l_2)!}} \times \quad (2.24)$$

$$\times \sum_{S=\max(j+k, l_1-l_2)}^l \frac{(-1)^{l+k-S} (l+S)!(l_2+S-j)!}{(l-S)!(S-j-k)!(S-l_1+l_2)!(l_1-l_2+S+1)!}$$

Как и функции $P_{mn}^l(\mu)$, ККГ обладают целых рядом соотношений симметрии. Эти свойства можно получить из различных выражений для ККГ [10]:

$$C_{(l_1, l_2, l, j, k)} = (-1)^{(l-l_1-l_2)} C_{(l_1, l_2, l, -j, -k)}, \quad (2.25)$$

$$C_{(l_1, l_2, l, j, k)} = (-1)^{(l-l_1-l_2)} C_{(l_2, l_1, l, j, k)}, \quad (2.26)$$

$$C_{(l_1, l_2, l, j, k)} = C\left(\frac{l_1+l_2+j+k}{2}, \frac{l_1+l_2-j-k}{2}, \frac{l_1-l_2+j-k}{2}, \frac{l_1-l_2-j+k}{2}\right), \quad (2.27)$$

$$(-1)^{l-l} \sqrt{\frac{2l_1+1}{2l+1}} C_{(l_1, l_2, l, j, k)} = C\left(\frac{l+l_1-k}{2}, \frac{l+l_1+k}{2}, l_2, \frac{l_1-l+k}{2} + j, \frac{l_1-l-k}{2} - j\right) \quad (2.28)$$

$$C_{(l_1, l_2, l, j, k)} = (-1)^{(l-l_1-k)} \sqrt{\frac{2l+1}{2l_1+1}} C_{(l_2, l_1, l, j, k, -j-k)} = \quad (2.29)$$

$$= (-1)^{(l-l_2+j)} \sqrt{\frac{2l+1}{2l_2+1}} C_{(l, l_1, l_2, -j-k, j)} = \quad (2.30)$$

$$= (-1)^{(l_2+k)} \sqrt{\frac{2l+1}{2l_1+1}} C_{(l, l_2, l, -j-k, k)} \quad (2.31)$$

Далее из различных выражений для ККГ можно вывести ещё одно свойство:

$$C(l_1, l_2, l, 0, 0, 0) = 0, \text{ при } l + l_1 + l_2 - \text{нечетное число.} \quad (2.32)$$

Из равенства (2.19) получается очень важное свойство функций P_{mn}^l : их произведение можно разложить в ряд по ККГ:

$$P_{m_1 n_1}^{l_1} P_{m_2 n_2}^{l_2} = \sum_{l=|l_2-l_1|}^{|l_2+l_1|} C_{(l_1, l_2, l, m_1, m_2)} C_{(l_1, l_2, l, n_1, n_2)} P_{m_1+m_2, n_1+n_2}^l. \quad (2.33)$$

И ещё одно важное свойство ККГ получается из вида производящей функции для P_{mn}^l : если $l_1 = l_1' + l_1''$, $l_2 = l_2' + l_2''$, $l = l' + l''$, то

$$\alpha C_{(l_1, l_2, l, j, k)} = \sum_{\substack{j'+j''=j \\ k'+k''=k}} \alpha' \alpha'' C_{(l_1', l_2', l', j', k')} C_{(l_1'', l_2'', l'', j'', k'')}, \quad (2.34)$$

$$\text{где } \alpha = \sqrt{\frac{(l_1+l_2-l)!(l+l_1-l_2)!(l-l_1+l_2)!(l_1+l_2+l+1)!}{(2l+1)(l+j)!(l-j)!(l_2+k)!(l_2-k)!(l+j+k)!(l-j-k)!}}. \quad (2.35)$$

Так как функция $n!$ определена для $n > 0$, то для ККГ будут справедливы ещё несколько правил отбора:

$$l_1 \geq |j|, \quad (2.36)$$

$$l_2 \geq |k|, \quad (2.37)$$

$$l \geq |j+k|, \quad (2.38)$$

$$l_1 + l_2 - l \geq 0, \quad (2.39)$$

$$l - l_1 + l_2 \geq 0, \quad (2.40)$$

$$l + l_1 - l_2 \geq 0. \quad (2.41)$$

Для нахождения интегралов, входящих в коэффициенты взаимодействия W_1, W_2, W_3, W_4 и W_5 воспользуемся результатами, полученными в теории представлений групп [2.1]. Для этого приведём нормированные присоединённые полиномы Лежандра к функциям P_{mn}^l и найдём выражения для интегралов через ККГ.

Сначала решим интеграл Q_4 , так как все остальные интегралы при помощи рекуррентных формул сводятся к нему.

В соответствии с ранее введёнными формулами

$$Q_4(m_1, m_2, m, n_1, n_2, n) = \int_{-1}^1 P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} P_n^m d\mu, \quad (2.42)$$

где P_n^m - нормированные присоединённые полиномы Лежандра (НППЛ).
 Вначале перейдём к обычным присоединённым полиномам Лежандра.
 Воспользуемся равенством

$$P_n^m = \sqrt{\frac{2n+1}{2} \frac{(n-m)!}{(n+m)!}} \underline{P}_n^m \quad (2.43)$$

где \underline{P}_n^m - присоединённые полиномы Лежандра. Так как \underline{P}_n^m определены для $m > 0$, а в суммировании участвуют все m , в дальнейшем будем писать $\underline{P}_n^{|m|}$. Получим

$$Q_4 = \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}{8}} \sqrt{\frac{(n_1-m_1)!(n_2-m_2)!(n-m)!}{(n_1+m_1)!(n_2+m_2)!(n+m)!}} \int_{-1}^1 P_{n_1}^{|m_1|} P_{n_2}^{|m_2|} P_n^m d\mu, \quad (2.44)$$

Теперь от \underline{P}_n^m перейдём к функциям, связанным с обобщёнными сферическими функциями, используя равенство (2.12), а также свойство сопряжённости (2.11)

$$Q_4 = Z \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}{8}} i^{|m_1|+|m_2|+|m|} (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} \int_{-1}^1 P_{|m_1|,0}^{n_1} P_{|m_2|,0}^{n_2} \bar{P}_n^m d\mu \quad (2.45)$$

$$\text{где } Z = \sqrt{\frac{(n_1-m_1)!(n_2-m_2)!(n-m)!(n+|m_1|)!(n+|m_2|)!(n+|m|)!}{(n_1+m_1)!(n_2+m_2)!(n+m)!(n_1-|m_1|)!(n_2-|m_2|)!(n-|m|)!}} \quad (2.46)$$

В соответствии с (2.20):

$$\int_{-1}^1 P_{|m_1|,0}^{n_1} P_{|m_2|,0}^{n_2} \bar{P}_m^n d\mu = \frac{2}{2n+1} C(n_1, n_2, n, |m_1|, |m_2|, |m|) C(n_1, n_2, n, 0, 0), \quad (2.47)$$

где C - коэффициенты Клебша-Гордана. Тогда:

$$Q_4 = Z \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}{8}} i^{|m_1|+|m_2|+|m|} (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} \times \quad (2.48)$$

$$\times C(n_1, n_2, n, |m_1|, |m_2|, |m|) C(n_1, n_2, n, 0, 0)$$

Исходя из (2.3), Q_4 - число действительное, а в формуле (2.48) правая часть число комплексное. Возьмём его действительную часть и окончательно получим:

$$Q_4 = \begin{cases} Z \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}{8}} i^{|m_1|+|m_2|+|m|} (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} \times \\ \quad C(n_1, n_2, n, |m_1|, |m_2|, |m|) C(n_1, n_2, n, 0, 0) & , \text{ если } |m_1| + |m_2| + |m| - \text{ чётное} \\ 0 & , \text{ если } |m_1| + |m_2| + |m| - \text{ нечётное} \end{cases} \quad (2.49)$$

Согласно

$$Q_1 = m_2 \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} P_n^m d\mu. \quad (2.50)$$

Сведём НППЛ к функциям P_{mn}^l , связанным с обобщёнными сферическими функциями, аналогично тому, как это было сделано для Q_4 :

$$Q_1 = m_2 Z \sqrt{\frac{(3n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}{8}} i^{|m_1|+|m_2|+|m|} \times \quad (2.51)$$

$$\times (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} \int_{-1}^1 P_{|m_1|,0}^{n_1} P_{|m_2|,0}^{n_2} \bar{P}_{|m|,0}^n d\mu$$

Найдём сначала $\int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{m_1,0}^{l_1} P_{m_2,0}^{l_2} P_{m,0}^l$. Для этого запишем рекуррентные

соотношения для $n=0$ и для индексов l_1, m_1 и l_2, m_2 :

$$i \frac{m_1}{\sqrt{1-\mu^2}} P_{m_1,0}^{l_1} = \frac{1}{2} \sqrt{l_1(l_1+1)} (P_{m_1,-1}^{l_1} - P_{m_1,1}^{l_1}) \quad (2.52)$$

$$i \frac{m_2}{\sqrt{1-\mu^2}} P_{m_2,0}^{l_2} = \frac{1}{2} \sqrt{l_2(l_2+1)} (P_{m_2,-1}^{l_2} - P_{m_2,1}^{l_2}) \quad (2.53)$$

Перемножим левые и правые части, домножим на $\bar{P}_{m,0}^l$, разделим на $m_1 m_2$ и проинтегрируем по области решения задачи:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{m_1,0}^{l_1} P_{m_2,0}^{l_2} P_{m,0}^l d\mu = -\frac{1}{4 m_1 m_2} \sqrt{l_1(l_1+1)l_2(l_2+1)} \times \quad (2.54)$$

$$\times \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l d\mu + \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l d\mu + \right.$$

$$\left. \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{m_1,0}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l d\mu + \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l d\mu \right]$$

Учтём, что $\int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{m_1, n_1}^{l_1} P_{m_2, n_2}^{l_2} \bar{P}_{m, 0}^l d\mu = 0$ при $n \neq n_1 + n_2$:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{m_1, 0}^{l_1} P_{m_2, 0}^{l_2} \bar{P}_{m, 0}^l d\mu = \frac{1}{4 m_1 m_2} \sqrt{l_1 (l_1 + 1) l_2 (l_2 + 1)} \times$$

$$\times \left[\int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{m_1, -1}^{l_1} P_{m_2, 1}^{l_2} \bar{P}_{m, 0}^l d\mu + \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} \bar{P}_{m, 0}^l d\mu \right] \quad (2.55)$$

Теперь применим (2.20) к (2.55)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{m_1, 0}^{l_1} P_{m_2, 0}^{l_2} \bar{P}_{m, 0}^l d\mu = \frac{1}{4 m_1 m_2} \sqrt{l_1 (l_1 + 1) l_2 (l_2 + 1)} \frac{2}{2l+1} \times$$

$$\times C(l_1, l_2, l, m_1, m_2, m) (C(l_1, l_2, l, -1, 1, 0) + C(l_1, l_2, l, 1, -1, 0)) \quad (2.56)$$

Учтём в (2.56) соотношения симметрии (2.25)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{m_1, 0}^{l_1} P_{m_2, 0}^{l_2} \bar{P}_{m, 0}^l d\mu = \frac{\sqrt{l_1 (l_1 + 1) l_2 (l_2 + 1)}}{m_1 m_2 (2l+1)} \times$$

$$\times C(l_1, l_2, l, m_1, m_2, m) C(l_1, l_2, l, -1, 1, 1), \quad \text{при } l - l_1 - l_2 \text{ нечётном} \quad (2.57)$$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{m_1, 0}^{l_1} P_{m_2, 0}^{l_2} \bar{P}_{m, 0}^l d\mu = 0, \quad \text{при } l - l_1 - l_2 \text{ чётном}$$

Переобозначим индексы и для $\int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{|m_1|, 0}^{n_1} P_{|m_2|, 0}^{n_2} \bar{P}_{|m|, 0}^n d\mu$:

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{|m_1|,0}^{n_1} P_{|m_2|,0}^{n_2} \bar{P}_{|m|,0}^n d\mu = \frac{\sqrt{n_1(n_1+1)n_2(n_2+1)}}{|m_1||m_2|(2n+1)} C(n_1, n_2, n, |m_1|, |m_2|, |m|) \times \quad (2.58)$$

$\times C(n_1, n_2, n, -1, 1, 0)$, при $n - n_1 - n_2$ нечётное,

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{|m_1|,0}^{n_1} P_{|m_2|,0}^{n_2} \bar{P}_{|m|,0}^n d\mu = 0, \quad \text{при } n - n_1 - n_2 \text{ чётное,}$$

Подставив (2.59) в (2.51) и взяв только действительную часть, получим

$$Q_1 = \frac{m_2}{|m_1||m_2|} \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)}{8(2n+1)}} (-1)^{n_1+n_2+n+|m|+1} Z C(n_1, n_2, n, |m_1|, |m_2|, |m|) \times \\ \times C(n_1, n_2, n, -1, 1, 0), \quad \text{при } |m_1|+|m_2|+|m| \text{ - чётное и } n - n_1 - n_2 - \quad (2.59)$$

нечётное,

$Q_1 = 0$, при $|m_1|+|m_2|+|m|$ - нечётное и $n - n_1 - n_2$ - чётное.

Для отыскания Q_2 разобьём его на две части:

$$Q_2 = \int_{-1}^1 \frac{\partial P_{n_1}^{m_1}}{\partial \mu} P_{n_2}^{m_2} P_n^m d\mu + \int_{-1}^1 \frac{\partial P_{n_2}^{m_2}}{\partial \mu} P_{n_1}^{m_1} P_n^m d\mu = Q_2(m_1, m_2, m) + Q_2(m_2, m_1, m) \quad (2.60)$$

Найдём $Q_2(m_1, m_2, m)$. Приведём НППЛ к функциям P_{mn}^l :

$$Q_2(m_1, m_2, m) = \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}{8}} Z i^{|m_1|+|m_2|+|m|} (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} \times \quad (2.61)$$

$$\times \int_{-1}^1 \frac{\partial P_{|m_1|,0}^{n_1}}{\partial \mu} P_{|m_2|,0}^{n_2} \bar{P}_{|m|,0}^n d\mu$$

Для определения второго интеграла воспользуемся рекуррентными соотношениями. Запишем один из них для индексов m_1, l_1 , а другой для индексов m_2, l_2 , положив в обоих соотношениях $n = 0$:

$$\sqrt{1-\mu^2} \frac{dP_{m_1,0}^{l_1}}{d\mu} = -\frac{i}{2} \sqrt{l_1(l_1+1)} (P_{m_1,1}^{l_1} + P_{m_1,-1}^{l_1}) \quad (2.62)$$

$$\frac{im_2}{\sqrt{1-\mu^2}} P_{m_2,0}^{l_2} = \frac{1}{2} \sqrt{l_2(l_2+1)} (P_{m_2,-1}^{l_2} - P_{m_2,1}^{l_2}) \quad (2.63)$$

Перемножим левые и правые части этих выражений, поделим на im_2 , домножим на $\bar{P}_{m,0}^l$ и проинтегрируем от -1 до 1 по μ :

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{dP_{m_1,0}^{l_1}}{d\mu} P_{m_2,0}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l \right) d\mu = \frac{-1}{4m_2} \sqrt{l_1(l_1+1)l_2(l_2+1)} \times \left[\int_{-1}^1 (P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l) d\mu \right. \\ \left. + \int_{-1}^1 (P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l) d\mu - \int_{-1}^1 (P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l) d\mu - \int_{-1}^1 (P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l) d\mu \right] \quad (2.64)$$

С учетом того, что $\int_{-1}^1 (P_{m_1,n_1}^{l_1} P_{m_2,n_2}^{l_2} \bar{P}_{m,n}^l) = 0$ при $n \neq n_1 + n_2$,

получим:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{dP_{m_1,0}^{l_1}}{d\mu} P_{m_2,0}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l \right) d\mu = \frac{-1}{4m_2} \sqrt{l_1(l_1+1)l_2(l_2+1)} \times$$

$$\times \left[\int_{-1}^1 (P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l) d\mu - \int_{-1}^1 (P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l) d\mu \right] \quad (2.65)$$

Теперь к (2.58) применим (2.20):

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{dP_{m_1,0}^{l_1}}{d\mu} P_{m_2,0}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l \right) d\mu = \frac{-1}{2m_2} \sqrt{l_1(l_1+1)l_2(l_2+1)} \frac{1}{2l+1} \times$$

$$c(l_1, l_2, l, m_1, m_2, m) \times (c(l_1, l_2, l, 1, -1, 0) - c(l_1, l_2, l, -1, 1, 0)) \quad (2.66)$$

Переобозначим индексы и найдем $\int_{-1}^1 \left(\frac{dP_{|m_1|,0}^{n_1}}{d\mu} P_{|m_2|,0}^{n_2} \bar{P}_{|m|,0}^n \right) d\mu$:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{dP_{|m_1|,0}^{n_1}}{d\mu} P_{|m_2|,0}^{n_2} \bar{P}_{|m|,0}^n \right) d\mu = -\frac{\sqrt{n_1(n_1+1)n_2(n_2+1)}}{2|m_2|(2n+1)} \times$$

$$c(n_1, n_2, n, |m_1|, |m_2|, |m|) \times (c(n_1, n_2, n, 1, -1) - c(n_1, n_2, n, -1, 1)) \quad (2.67)$$

Подставив (2.67) в (2.61), получим:

$$Q_2(m_1, m_2, m) = \frac{n_1(n_1+1)n_2(n_2+1)}{4|m_1|} \frac{1}{\sqrt{2(2n+1)}} Z i^{|m_1|+|m_2|+|m|} \times (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} \times$$

$$c(n_1, n_2, n, |m_1|, |m_2|, |m|) \times (c(n_1, n_2, n, -1, 1) - c(n_1, n_2, n, 1, -1)) \quad (2.68)$$

Отсюда, в силу соотношений симметрии (2.28) (взяв только действительную часть) найдем:

$$Q_2 = \begin{cases} \left[\frac{n_1(n_1+1)n_2(n_2+1)}{2} \sqrt{\frac{1}{2(2n+1)}} Z (-1)^{n_1+n_2+n+|m|} \times \right. \\ \left. \begin{aligned} & \left[\frac{C(n_1, n_2, n, |m_1|, |m_2|, |m|)}{|m_2|} C(n_1, n_2, n, 1, -1) + \right. \\ & \left. \left. \frac{C(n_2, n_1, n, |m_2|, |m_1|, |m|)}{|m_1|} C(n_2, n_1, n, -1, 1) \right] \right. \end{aligned} \right. \\ \left. \begin{aligned} & \text{, если } n - n_2 - n_1 - \text{нечетное} \\ & \text{и если } |m_1| + |m_2| + |m| - \text{чётное} \end{aligned} \right. \\ 0 & \begin{aligned} & \text{, если } n - n_2 - n_1 - \text{четное или} \\ & \text{, если } |m_1| + |m_2| + |m| - \text{нечётное} \end{aligned} \end{cases} \quad (2.69)$$

Теперь решим Q_3 .

$$Q_3 = \int_{-1}^1 \left(\frac{\partial P_{n_1}^{m_1}}{\partial \mu} \frac{\partial P_{n_2}^{m_2}}{\partial \mu} P_n^m \right) d\mu$$

Приведём НППЛ к функциям P_{mn}^l :

$$Q_3(m_1, m_2, m) = \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}{8}} Z i^{|m_1|+|m_2|+|m|} (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} \times \\ \times \int_{-1}^1 \frac{\partial P_{|m_1|,0}^{n_1}}{\partial \mu} P_{|m_2|,0}^{n_2} \bar{P}_{|m|,0}^n d\mu \quad (2.70)$$

Найдем $\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial P_{m_1,0}^{l_1}}{\partial \mu} \frac{\partial P_{m_2,0}^{l_2}}{\partial \mu} P_{m,0}^l \right) d\mu$. Запишем для индексов

m_1, l_1 и m_2, l_2 :

$$\sqrt{1-\mu^2} \frac{dP_{m_1,0}^{l_1}}{d\mu} = -\frac{1}{2} \sqrt{l_1(l_1+1)} (P_{m_1,1}^{l_1} + P_{m_1,-1}^{l_1}) \quad (2.71)$$

$$\sqrt{1-\mu^2} \frac{dP_{m_2,0}^{l_2}}{d\mu} = -\frac{1}{2} \sqrt{l_2(l_2+1)} (P_{m_2,1}^{l_2} + P_{m_2,-1}^{l_2}) \quad (2.72)$$

Перемножим эти выражения.

$$1-\mu^2 \frac{dP_{m_1,0}^{n_1}}{d\mu} \frac{dP_{m_2,0}^{n_2}}{d\mu} = -\frac{1}{2} \sqrt{l_1(l_1+1)l_2(l_2+1)} (P_{m_1,1}^{l_1} + P_{m_1,-1}^{l_1}) (P_{m_2,1}^{l_2} + P_{m_2,-1}^{l_2}) \quad (2.73)$$

Запишем рекуррентные соотношения для индексов $\frac{l}{2}, \frac{m}{2}, u, n=0$ и

возведем его в квадрат:

$$-\frac{m^2}{1-\mu^2} P_{\frac{m}{2},0}^{\frac{l}{2}} P_{\frac{m}{2},0}^{\frac{l}{2}} = \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + 1 \right) \left(P_{\frac{m}{2},-1}^{\frac{l}{2}} - P_{\frac{m}{2},1}^{\frac{l}{2}} \right)^2 \quad (2.74)$$

Разложим произведение $P_{\frac{m}{2},0}^{\frac{l}{2}} \times P_{\frac{m}{2},0}^{\frac{l}{2}}$ в сумму по формуле (4.61):

$$\begin{aligned} & -\frac{m^2}{1-\mu^2} \sum_{p=0}^l C\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p, \frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) C\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, p, 0, 0\right) P_{m,0}^p = \\ & = \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + 1 \right) \left(P_{\frac{m}{2},-1}^{\frac{l}{2}} - P_{\frac{m}{2},1}^{\frac{l}{2}} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.75)$$

Обозначим вектора $\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}, i\right) \equiv \lambda_1^i$, $\left(\frac{m}{2}, \frac{m}{2}\right) \equiv \chi_1$, $(0,0) = O$. В соответствии с

(2.11) преобразуется к виду:

$$-\frac{m^2}{1-\mu^2} \sum_{p=0}^l (-1)^{-m} C(\lambda_1^p, \chi_1) C(\lambda_1^p, 0) \bar{P}_{m,0}^p = \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + 1\right) \left(P_{\frac{m}{2}, -1}^{\frac{l}{2}} - P_{\frac{m}{2}, 1}^{\frac{l}{2}} \right)^2 \quad (2.76)$$

Запишем это выражение в виде:

$$\begin{aligned} & -\frac{m^2}{1-\mu^2} (-1)^m C(\lambda_1^p, \chi_1) C(\lambda_1^p, 0) \bar{P}_{m,0}^p - \frac{m^2}{1-\mu^2} (-1)^m \sum_{p=0}^{l-1} C(\lambda_1^p, \chi_1) C(\lambda_1^p, 0) \bar{P}_{m,0}^p \\ & = \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + 1\right) \left(P_{\frac{m}{2}, -1}^{\frac{l}{2}} - P_{\frac{m}{2}, 1}^{\frac{l}{2}} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Перемножим (2.73) и (2.77), разделим на $(-m^2 \times C(\lambda_1^l, \chi_1) C(\lambda_1^l, 0) (-1)^m)$ и проинтегрируем по μ от -1 до 1:

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \frac{dP_{m_1,0}^{l_1}}{d\mu} \frac{dP_{m_2,0}^{l_2}}{d\mu} \bar{P}_{m,0}^l d\mu + \sum_{p=0}^{l-1} \frac{C(\lambda_1^p, \chi_1) C(\lambda_1^p, 0)}{C(\lambda_1^l, \chi_1) C(\lambda_1^l, 0)} \int_{-1}^1 \frac{dP_{m_1,0}^{l_1}}{d\mu} \frac{dP_{m_2,0}^{l_2}}{d\mu} \bar{P}_{m,0}^l d\mu = \\ & = \frac{(-1)^m}{2m^2} \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + 1\right) \frac{\sqrt{l_1(l_1+1)l_2(l_2+1)}}{C(\lambda_1^l, \chi_1) C(\lambda_1^l, 0)} \times \\ & \times \int_{-1}^1 \left(P_{m_1,1}^{l_1} + P_{m_1,-1}^{l_1} \right) \left(P_{m_2,1}^{l_2} + P_{m_2,-1}^{l_2} \right) \left(P_{\frac{m}{2}, -1}^{\frac{l}{2}} - P_{\frac{m}{2}, 1}^{\frac{l}{2}} \right)^2 d\mu \end{aligned} \quad (2.78)$$

Предположим,

что

интеграл

$\int_{-1}^1 (P_{m_1,1}^{l_1} + P_{m_1,-1}^{l_1})(P_{m_2,1}^{l_2} + P_{m_2,-1}^{l_2}) \left(P_{\frac{m}{2},-1}^{\frac{l}{2}} - P_{\frac{m}{2},1}^{\frac{l}{2}} \right)^2 d\mu$ мы нашли, он равен A . Тогда,

если мы знаем сумму величин $\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial P_{m_1,0}^{l_1}}{\partial \mu} \frac{\partial P_{m_2,0}^{l_2}}{\partial \mu} \bar{P}_{m,0}^p \right) d\mu$ для всех $p = 0 \div (l-1)$,

мы сможем найти и $\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial P_{m_1,0}^{l_1}}{\partial \mu} \frac{\partial P_{m_2,0}^{l_2}}{\partial \mu} \bar{P}_{m,0}^l \right) d\mu$, т.е. (4.106) – это рекуррентное

соотношение для Q_3 . Таким образом, зная $\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial P_{m_1,0}^{l_1}}{\partial \mu} \frac{\partial P_{m_2,0}^{l_2}}{\partial \mu} \bar{P}_{m,0}^0 \right) d\mu$ мы сможем

по нему рассчитать все Q_3 для всех l . Для того, чтобы найти

$\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial P_{m_1,0}^{l_1}}{\partial \mu} \frac{\partial P_{m_2,0}^{l_2}}{\partial \mu} \bar{P}_{m,0}^0 \right) d\mu$, запишем (4.104) для $l = 0$:

$$-\frac{m^2}{1-\mu^2} (-1)^m C(\lambda_1^0, \chi_1) C(\lambda_1^0, 0) \bar{P}_{m,0}^0 = 0 \quad (2.79)$$

Умножая на (4.101), деля на $(-m^2)(-1)^m C(\lambda_1^0, \chi_1) C(\lambda_1^0, 0)$ и интегрируя по μ от -1 до 1 получим:

$$\int_{-1}^1 \left(\frac{\partial P_{m_1,0}^{l_1}}{\partial \mu} \frac{\partial P_{m_2,0}^{l_2}}{\partial \mu} \bar{P}_{m,0}^0 \right) d\mu = 0 \quad (2.80)$$

Итак, по формуле (2.79) теперь можно рассчитать все Q_3 для всех l .

Осталось найти A . Для этого раскроем $\left(P_{\frac{m}{2},-1}^{\frac{l}{2}} - P_{\frac{m}{2},1}^{\frac{l}{2}}\right)^2$ и воспользуемся формулой (4.61):

$$\left(P_{\frac{m}{2},-1}^{\frac{l}{2}} - P_{\frac{m}{2},1}^{\frac{l}{2}}\right)^2 = P_{\frac{m}{2},-1}^{\frac{l}{2}} P_{\frac{m}{2},-1}^{\frac{l}{2}} - 2P_{\frac{m}{2},-1}^{\frac{l}{2}} P_{\frac{m}{2},1}^{\frac{l}{2}} + P_{\frac{m}{2},1}^{\frac{l}{2}} P_{\frac{m}{2},1}^{\frac{l}{2}} = B \quad (2.81)$$

$$B = \sum_{p=0}^l C(\lambda_1^p, \chi_1) C(\lambda_1^p, -1, -1) P_{m,-2}^p - 2C(\lambda_2^p, -1, 1) P_{m,0}^p + C(\lambda_1^p, 1, 1) P_{m,2}^p \quad (2.82)$$

Теперь раскроем $C = (P_{m_1,1}^{l_1} + P_{m_1,-1}^{l_1})(P_{m_2,1}^{l_2} + P_{m_2,-1}^{l_2})$:

$$C = P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} + P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} + P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} + P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} \quad (2.83)$$

Перемножим C и B :

$$\begin{aligned} C \times B &= \sum_{p=0}^l C(\lambda_1^p, \chi_1) C(\lambda_1^p, -1, -1) \times \\ &\times \left(P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} P_{m,-2}^p + P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} P_{m,-2}^p + P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} P_{m,-2}^p + P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} P_{m,-2}^p \right) - \\ &- 2C(\lambda_2^p, -1, 1) \\ &\times \left(P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} P_{m,0}^p + P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} P_{m,0}^p + P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} P_{m,0}^p + P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} P_{m,0}^p \right) + \\ &C(\lambda_1^p, 1, 1) \left(P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} P_{m,2}^p + P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} P_{m,2}^p + P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} P_{m,2}^p + P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} P_{m,2}^p \right) \end{aligned} \quad (2.84)$$

Теперь проинтегрируем $C \times B$ по μ от -1 до 1 и учтем, что как

$$\int_{-1}^1 P_{m_1, n_1}^{l_1} P_{m_2, n_2}^{l_2} \bar{P}_{m, n}^l d\mu \text{ так и } \int_{-1}^1 P_{m_1, n_1}^{l_1} P_{m_2, n_2}^{l_2} P_{m, n}^l d\mu \text{ равны нулю при } n \neq n_1 + n_2 :$$

$$\begin{aligned} A = \int_{-1}^1 (C \times B) d\mu &= \sum_{p=0}^l C(\lambda_1^p, \chi_1) \left\{ C(\lambda_1^p, -1, -1) \int_{-1}^1 P_{m_1, -1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, -2}^p d\mu - \right. \\ &- 2C(\lambda_2^p, -1, 1) \left(\int_{-1}^1 P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, 0}^p d\mu + \int_{-1}^1 P_{m_1, -1}^{l_1} P_{m_2, 1}^{l_2} P_{m, 0}^p d\mu \right) + \\ &\left. C(\lambda_1^p, 1, 1) \int_{-1}^1 P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, 1}^{l_2} P_{m, 2}^p d\mu \right\} \end{aligned} \quad (2.85)$$

Возьмем интегралы, фигурирующие в (2.84) отдельно:

$$\int_{-1}^1 P_{m_1, -1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, -2}^p d\mu = (-1)^{-2-m} \frac{2}{2p+1} C(\lambda_2^p, \chi_2) C(\lambda_2^p, -1, -1) \quad (2.86)$$

$$\int_{-1}^1 P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, 1}^{l_2} P_{m, 2}^p d\mu = (-1)^{2-m} \frac{2}{2p+1} C(\lambda_2^p, \chi_2) C(\lambda_2^p, 1, 1)$$

$$\int_{-1}^1 P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, 0}^p d\mu = (-1)^{-m} \frac{2}{2p+1} C(\lambda_2^p, \chi_2) C(\lambda_2^p, 1, -1) \quad (2.87)$$

$$\int_{-1}^1 P_{m_1, -1}^{l_1} P_{m_2, 1}^{l_2} P_{m, 0}^p d\mu = (-1)^{-m} \frac{2}{2p+1} C(\lambda_2^p, \chi_2) C(\lambda_2^p, -1, 1), \quad (2.88)$$

где $\lambda_2^i = (l_2, l_2, i)$, $\chi_2 = (m_1, m_2, m)$;

$$(2.89)$$

Тогда:

$$\begin{aligned}
A = \sum_{p=0}^l \frac{2}{2p+1} C(\lambda_1^p, \chi_1) \{ & C(\lambda_1^p, -1, -1) C(\lambda_2^p, \chi_2) C(\lambda_2^p, -1, -1) (-1)^{2-m} + \\
& + C(\lambda_1^p, 1, 1) C(\lambda_2^p, \chi_2) C(\lambda_2^p, 1, 1) (-1)^{2-m} - \\
& - 2C(\lambda_2^p, -1, 1) (-1)^{-m} C(\lambda_2^p, \varphi_2) \times (C(\lambda_2^p, 1, -1) + C(\lambda_2^p, -1, 1)) \} \quad (2.90)
\end{aligned}$$

Воспользуемся соотношением симметрии (2.25):

$$\begin{aligned}
A = \sum_{p=0}^l (-1)^m \frac{2}{2p+1} C(\lambda_1^p, \chi_1) C(\lambda_2^p, \chi_2) \{ & C(\lambda_1^p, 1, 1) C(\lambda_2^p, 1, 1) ((-1)^{l+l_2+l} + 1) - \\
& - 2C(\lambda_1^p, -1, 1) C(\lambda_2^p, 1, -1) (1 + (-1)^{p+l_1+l_2}) \} \quad (2.91)
\end{aligned}$$

Вернемся к старым обозначениям: вместо l_i будет фигурировать n_i , а все m возьмем по модулю, т.е.

$$\lambda_1^i = \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, i \right) \quad \lambda_2^i = (n_1, n_2, i) \quad \chi_1 = \left(\frac{|m|}{2}, \frac{|m|}{2}, 0 \right) \quad \chi_2 = (|m_1|, |m_2|, |m|). \quad \text{Тогда равенства}$$

(2.78) и (2.91) примут вид:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{dP_{|m_1|,0}^{n_1}}{d\mu} \frac{dP_{|m_2|,0}^{n_2}}{d\mu} \bar{P}_{m,0}^n d\mu = \frac{(-1)^m n}{2m^2} \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} + 1 \right) \frac{\sqrt{n_1(n_1+1)n_2(n_2+1)}}{C(\lambda_1^n, \chi_1) C(\lambda_2^n, 0)} \times A - \\
\sum_{p=0}^{n-1} \frac{C(\lambda_1^p, \chi_1) C(\lambda_1^p, 0)}{C(\lambda_1^n, \chi_1) C(\lambda_1^n, 0)} \int_{-1}^1 \frac{dP_{|m_1|,0}^{n_1}}{d\mu} \frac{dP_{|m_2|,0}^{n_2}}{d\mu} d\mu \quad (2.92)
\end{aligned}$$

$$A = \sum_{p=0}^l (-1)^m c(\lambda_1^p, \chi_1) c(\lambda_2^p, \chi_2) \{ c(\lambda_1^p, 1, 1) c(\lambda_2^p, 1, 1) ((-1)^{n_1+n_2+n} + 1) - 2c(\lambda_1^p, -1, 1) c(\lambda_2^p, 1, -1) (1 + (-1)^{p+n_1+n_2}) \} \frac{2}{2p+1} \quad (2.93)$$

Исходя из (2.70):

$$\int_{-1}^1 \frac{dP_{|m_1|,0}^{n_1}}{d\mu} \frac{dP_{|m_2|,0}^{n_2}}{d\mu} \bar{P}_{m,0}^n d\mu = \sqrt{\frac{8}{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}} \frac{1}{Z_p} i^{|m_1|+|m_2|+|m|} \times \\ \times (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+p} \times Q_3(p), \quad (2.94)$$

где $Z_p = Z|_{n=p}$

Тогда $Q_3(0) = 0$, а $Q_3(n)$ можно рассчитать через $Q_3(n-1)$, $Q_3(n-2)$ и т.д. по формулам:

$$Q_3(n) = \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}{8}} Z i^{|m_1|+|m_2|+|m|} (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} \times \\ \times \left\{ \frac{(-1)^m n \binom{n}{2} \sqrt{n_1(n_1+1)n_2(n_2+1)}}{4m^2 \binom{n}{2} c(\lambda_1^n, \chi_1) c(\lambda_1^n, 0)} \times A - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{c(\lambda_1^p, \chi_1) c(\lambda_1^p, 0)}{c(\lambda_1^n, \chi_1) c(\lambda_1^n, 0)} \times \right. \\ \left. \sqrt{\frac{8}{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}} \frac{1}{Z_p} i^{|m_1|+|m_2|+|m|} \times (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+p} \times Q_3(p) \right\} \quad (2.95)$$

Где А определяется по формуле (2.93). Взяв действительную часть от Q_3 получим правило отбора. Отметим, что суммирование в (2.93) и (2.95) ведется по полуцелым p . Запишем Q_3 в виде:

$$Q_3(n) = \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}{8}} \times$$

$$\times Z \left\{ \frac{(-1)^m n \left(\frac{n}{2} + 1\right) \sqrt{n_1(n_1+1)n_2(n_2+1)}}{4m^2 C(\lambda_1^n, \chi_1) C(\lambda_1^n, 0)} \times A - \sum_{p=0}^{n-1} X'_p \right\} \quad (2.96)$$

$$A = \sum_{p=0}^n \frac{2}{2p+1} C(\lambda_1^p, \chi_1) C(\lambda_2^p, \chi_2) \{X''_p + X'''_p\} \quad (2.97)$$

$$X'_p = \frac{C(\lambda_1^p, \chi_1) C(\lambda_1^p, 0)}{C(\lambda_1^n, \chi_1) C(\lambda_1^n, 0)} \sqrt{\frac{8}{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}} \frac{1}{Z_p} i^{|m_1|+|m_2|+|m|} Q_3(p) (-1)^{n+p} \quad (2.98)$$

$$X''_p = C(\lambda_1^p, 1, 1) C(\lambda_2^p, 1, 1) i^{|m_1|+|m_2|+|m|} (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} \left((-1)^{n_1+n_2+n} + 1 \right) \quad (2.99)$$

$$X'''_p = 2C(\lambda_1^p, -1, 1) C(\lambda_2^p, 1, -1) i^{|m_1|+|m_2|+|m|} (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} \left((-1)^{n_1+n_2+p} + 1 \right) \quad (2.100)$$

Теперь можно сформулировать правило отбора для X'_p, X''_p, X'''_p .

Для X'_p :

$$1) p - \text{дробное} \Rightarrow X'_p = 0$$

$$2) p - \text{целое} \Rightarrow X'_p \text{ находится по (8.58), т.е. суммирование идет} \quad (2.101)$$

по целым p

Для X''_p :

$$1) \begin{cases} |m_1| + |m_2| + |m| - \text{четное} \\ n_1 + n_2 + n - \text{четное} \end{cases} \Rightarrow X''_p = C(\lambda_1^p, -1, 1) C(\lambda_2^p, 1, -1) \times 2(-1)^{|m|+n_1+n_2+n+1} \quad (2.102)$$

$$2) \begin{cases} |m_1| + |m_2| + |m| - \text{четное} \\ n_1 + n_2 + n - \text{нечетное} \end{cases} \Rightarrow X_p'' = 0 \quad (2.103)$$

$$3) |m_1| + |m_2| + |m| - \text{нечетное} \Rightarrow X_p'' = 0 \quad (2.104)$$

Для X_p''' :

$$1) \begin{cases} p - \text{целое} \\ |m_1| + |m_2| + |m| - \text{четное} \\ p + n_2 + n - \text{четное} \end{cases} \Rightarrow X_p''' = 4C(\lambda_1^p, -1, 1)C(\lambda_2^p, 1, -1) \times (-1)^{|m|+n_1+n_2+n+1} \quad (2.105)$$

$$2) \begin{cases} |m_1| + |m_2| + |m| - \text{четное} \\ p + n_2 + n - \text{нечетное} \\ p - \text{целое} \end{cases} \Rightarrow X_p''' = 0 \quad (2.106)$$

$$3) \begin{cases} p - \text{целое} \\ |m_1| + |m_2| + |m| - \text{нечетное} \end{cases} \Rightarrow X_p''' = 0 \quad (2.107)$$

$$4) \begin{cases} p - \text{дробное} \\ |m_1| + |m_2| + |m| - \text{четное} \end{cases} \Rightarrow X_p''' = 2C(\lambda_1^p, -1, 1)C(\lambda_2^p, 1, -1) \times (-1)^{|m|+n_1+n_2+n+1} \quad (2.108)$$

$$5) \begin{cases} p - \text{дробное} \\ |m_1| + |m_2| + |m| - \text{нечетное} \end{cases} \Rightarrow X_p''' = 2C(\lambda_1^p, -1, 1)C(\lambda_2^p, 1, -1) \times (-1)^{|m|+p+n+1} \quad (2.109)$$

Найдем $Q_5 = \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_{n_1}^{m_1} P_{n_2}^{m_2} P_n^m d\mu$. Для этого сначала приведем НППЛ к

функциям P_{mn}^l .

$$Q_5(n) = \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}{8}} Z i^{|m_1|+|m_2|+|m|} (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} i^{|m_1|+|m_2|+|m|} \times \\ \times \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\mu^2)^2} P_{|m_1|,0}^{n_1} P_{|m_2|,0}^{n_2} \bar{P}_{|m|,0}^n d\mu \quad (2.110)$$

Найдем $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\mu^2)^2} P_{m_1,0}^{l_1} P_{m_2,0}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l d\mu$. Для этого запишем рекуррентные

соотношения для индексов m_1, l_1 и m_2, l_2 при $n=0$:

$$\frac{im_1}{\sqrt{1-\mu^2}} P_{m_1,0}^{l_1} = \frac{1}{2} \sqrt{l_1(l_1+1)} (P_{m_1,-1}^{l_1} - P_{m_1,1}^{l_1}) \quad (2.111)$$

$$\frac{im_2}{\sqrt{1-\mu^2}} P_{m_2,0}^{l_2} = \frac{1}{2} \sqrt{l_2(l_2+1)} (P_{m_2,-1}^{l_2} - P_{m_2,1}^{l_2}) \quad (2.112)$$

И перемножим их:

$$-\frac{m_1 m_2}{1-\mu^2} dP_{m_1,0}^{l_1} dP_{m_2,0}^{l_2} = -\frac{1}{4} \sqrt{l_1(l_1+1)l_2(l_2+1)} (P_{m_1,-1}^{l_1} - P_{m_1,1}^{l_1}) (P_{m_2,-1}^{l_2} - P_{m_2,1}^{l_2}) \quad (2.113)$$

Домножим это выражение на (2.77):

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^m m_1 m_2 m^2}{(1-\mu^2)^2} P_{m_1,0}^{l_1} P_{m_2,0}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l C(\lambda_1^l, \chi_1) C(\lambda_1^l, 0) + (-1)^m m_1 m_2 m^2 \times \\ & \sum_{p=0}^{l-1} C(\lambda_1^p, \chi_1) C(\lambda_1^p, 0) \frac{1}{(1-\mu^2)^2} P_{m_1,0}^{l_1} P_{m_2,0}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^p = \frac{1}{8} \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + 1 \right) \sqrt{l_1(l_1+1)l_2(l_2+1)} \times \\ & \times (P_{m_1,-1}^{l_1} - P_{m_1,1}^{l_1}) (P_{m_2,-1}^{l_2} - P_{m_2,1}^{l_2}) \left(P_{\frac{m}{2},-1}^{\frac{l}{2}} - P_{\frac{m}{2},1}^{\frac{l}{2}} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.114)$$

Разделим (4.142) на $(-1)^m m_1 m_2 m^2 C(\lambda_1^l, \chi_1) C(\lambda_1^l, 0)$ и проинтегрируем от -1 до 1 по μ :

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\mu^2)^2} P_{m_1,0}^{l_1} P_{m_2,0}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^l d\mu = \frac{(-1)^m}{8m_1 m_2 m^2} \frac{l}{2} \left(\frac{l}{2} + 1 \right) \sqrt{l_1(l_1+1)l_2(l_2+1)} \times \\
& \times \frac{1}{C(\lambda_1^l, \chi_1) C(\lambda_1^l, 0)} \times \int_{-1}^1 \left(P_{m_1,-1}^{l_1} - P_{m_1,1}^{l_1} \right) \left(P_{m_2,-1}^{l_2} - P_{m_2,1}^{l_2} \right) \left(P_{\frac{m}{2,-1}}^{\frac{l}{2}} - P_{\frac{m}{2,1}}^{\frac{l}{2}} \right)^2 d\mu - \\
& - \sum_{p=0}^{l-1} \frac{C(\lambda_1^p, \chi_1) C(\lambda_1^p, 0)}{C(\lambda_1^l, \chi_1) C(\lambda_1^l, 0)} \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\mu^2)^2} P_{m_1,0}^{l_1} P_{m_2,0}^{l_2} P_{m,0}^p d\mu
\end{aligned} \tag{2.115}$$

Это рекуррентное соотношение для $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\mu^2)^2} P_{m_1,0}^{l_1} P_{m_2,0}^{l_2} P_{m,0}^l d\mu$. По нему,

исходя из $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\mu^2)^2} P_{m_1,0}^{l_1} P_{m_2,0}^{l_2} P_{m,0}^0 d\mu$ можно рассчитать по порядку все

$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\mu^2)^2} P_{m_1,0}^{l_1} P_{m_2,0}^{l_2} P_{m,0}^l d\mu$, а, в силу (2.79)

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\mu^2)^2} P_{m_1,0}^{l_1} P_{m_2,0}^{l_2} \bar{P}_{m,0}^0 d\mu = 0 \tag{2.116}$$

Необходимо найти:

$$D = \int_{-1}^1 \left(P_{m_1,-1}^{l_1} - P_{m_1,1}^{l_1} \right) \left(P_{m_2,-1}^{l_2} - P_{m_2,1}^{l_2} \right) \left(P_{\frac{m}{2,-1}}^{\frac{l}{2}} - P_{\frac{m}{2,1}}^{\frac{l}{2}} \right)^2 d\mu \tag{2.117}$$

Для этого раскроем скобки в выражении:

$$\begin{aligned}
E &= \left(P_{m_1,-1}^{l_1} - P_{m_1,1}^{l_1} \right) \left(P_{m_2,-1}^{l_2} - P_{m_2,1}^{l_2} \right) = \\
& P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} - P_{m_1,-1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2} - P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,-1}^{l_2} + P_{m_1,1}^{l_1} P_{m_2,1}^{l_2}
\end{aligned} \tag{2.118}$$

В то же время $B = \left(P_{\frac{m}{2}, -1}^{\frac{l}{2}} - P_{\frac{m}{2}, 1}^{\frac{l}{2}} \right)^2$ можно раскрыть по (2.82). Тогда,

перемножив (2.114) и (2.92), получим:

$$\begin{aligned}
E \times B &= \sum_{p=0}^l C(\lambda_1^p, \chi_1) C(\lambda_1^p, -1, -1) \times \\
&\times \left(P_{m_1, -1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, -2}^p - P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, -2}^p + P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, 1}^{l_2} P_{m, -2}^p \right) - \\
&- 2C(\lambda_1^p, -1, 1) \\
&\times \left(P_{m_1, -1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, 0}^p - P_{m_1, -1}^{l_1} P_{m_2, 1}^{l_2} P_{m, 0}^p - P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, 0}^p + P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, 1}^{l_2} P_{m, 0}^p \right) +
\end{aligned} \tag{2.119}$$

$$2(\lambda_1^p, 1, 1) \times \left(P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, 2}^p - P_{m_1, -1}^{l_1} P_{m_2, 1}^{l_2} P_{m, 2}^p - P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, 2}^p + P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, 1}^{l_2} P_{m, 2}^p \right)$$

Теперь проинтегрируем (2.119) от -1 до 1 по μ :

$$\begin{aligned}
D &= \int_{-1}^1 E \times B d\mu = \sum_{p=0}^l C(\lambda_1^p, \chi_1) \left\{ C(\lambda_1^p, -1, -1) \int_{-1}^1 P_{m_1, -1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, -2}^p d\mu + \right. \\
&\times \left(-P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, -2}^p + P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, 1}^{l_2} P_{m, -2}^p \right) - \\
&- 2C(\lambda_1^p, -1, 1) \times \left(\int_{-1}^1 P_{m_1, -1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, 0}^p d\mu + \int_{-1}^1 P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, -1}^{l_2} P_{m, 0}^p d\mu \right) + \\
&\left. + C(\lambda_1^p, 1, 1) \times \int_{-1}^1 P_{m_1, 1}^{l_1} P_{m_2, 1}^{l_2} P_{m, 2}^p d\mu \right\}
\end{aligned} \tag{2.120}$$

В соответствии с (2.86)-(2.89):

$$D = \sum_{p=0}^l \frac{2}{2p+1} C(\lambda_1^p, \chi_1) \left\{ C(\lambda_1^p, -1, -1) C(\lambda_2^p, \chi_2) C(\lambda_2^p, -1, -1) (-1)^{-2-m} + \right.
\end{aligned} \tag{2.121}$$

$$\begin{aligned}
& + 2C(\lambda_1^p, -1, -1)(C(\lambda_2^p, \chi_2)C(\lambda_2^p, 1, -1) + C(\lambda_2^p, \chi_2)C(\lambda_2^p, -1, 1))(-1)^m + \\
& + C(\lambda_1^p, 1, 1)C(\lambda_2^p, \chi_2)C(\lambda_2^p, 1, 1)(-1)^{2-m} \}
\end{aligned}$$

Воспользуемся соотношением симметрии (2.25):

$$\begin{aligned}
D = \sum_{p=0}^l (-1)^m \frac{2}{2p+1} C(\lambda_1^p, \chi_1)C(\lambda_2^p, \chi_2) \{ C(\lambda_1^p, 1, 1)C(\lambda_2^p, 1, 1)((-1)^{l+l_2+l} + 1) + \\
+ 2C(\lambda_1^p, -1, 1)C(\lambda_2^p, 1, -1)(1 + (-1)^{p+l_1+l_2}) \} \quad (2.122)
\end{aligned}$$

Вернемся к старым обозначениям: вместо l_i будет фигурировать n_i , а все m возьмем по модулю, т.е. переобозначим $\lambda_1^i = \left(\frac{n}{2}, \frac{n}{2}, i\right)$ $\lambda_2^i = (n_1, n_2, i)$

$\chi_1 = \left(\frac{|m|}{2}, \frac{|m|}{2}, 0\right)$ $\chi_2 = (|m_1|, |m_2|, |m|)$. Тогда равенства (2.115) и (4.) примут вид:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\mu^2)^2} P_{|m_1|,0}^{n_1} P_{|m_2|,0}^{n_2} \bar{P}_{|m|,0}^n d\mu = \frac{(-1)^{|m|}}{8|m_1||m_2||m|^2} \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2} + 1\right) \sqrt{n_1(n_1+1)n_2(n_2+1)} \times \\
\times \frac{1}{C(\lambda_1^n, \chi_1)C(\lambda_1^n, 0)} \times D - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{C(\lambda_1^p, \chi_1)C(\lambda_1^p, 0)}{C(\lambda_1^n, \chi_1)C(\lambda_1^n, 0)} \times \\
\times \int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\mu^2)^2} P_{|m_1|,0}^{n_1} P_{|m_2|,0}^{n_2} \bar{P}_{|m|,0}^p d\mu \quad (2.123)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D = \sum_{p=0}^n (-1)^m C(\lambda_1^p, \chi_1)C(\lambda_2^p, \chi_2) \{ C(\lambda_1^p, 1, 1)C(\lambda_2^p, 1, 1)((-1)^{n_1+n_2+n} + 1) + \\
+ 2C(\lambda_1^p, -1, 1)C(\lambda_2^p, 1, -1)(1 + (-1)^{p+n_1+n_2}) \} \frac{2}{2p+1} \quad (2.124)
\end{aligned}$$

Исходя из (2.110):

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1-\mu^2)^2} P_{|m_1|,0}^{n_1} P_{|m_2|,0}^{n_2} \bar{P}_{|m|,0}^n d\mu = \sqrt{\frac{8}{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}} \frac{1}{Z_p} i^{|m_1|+|m_2|+|m|} \times$$

$$\times (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+p} Q_5(p) \quad (2.125)$$

Тогда $Q_5(0)=0$, а $Q_5(n)$ можно рассчитать через $Q_5(n-1)$, $Q_5(n-2)$ и т. д. по формулам:

$$Q_5(n) = \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}{8}} Z i^{|m_1|+|m_2|+|m|} \times$$

$$(-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} i^{|m_1|+|m_2|+|m|} \times \frac{(-1)^m}{8|m_1||m_2|m^2} \frac{n}{2} \left(\frac{n}{2}+1\right) \times$$

$$\frac{\sqrt{n_1(n_1+1)n_2(n_2+1)}}{C(\lambda_1^n, \chi_1)C(\lambda_1^n, 0)} \times D - \sum_{p=0}^{n-1} \frac{C(\lambda_1^p, \chi_1)C(\lambda_1^p, 0)}{C(\lambda_1^n, \chi_1)C(\lambda_1^n, 0)} \times$$

$$\times \sqrt{\frac{8}{(2n_1+1)(2n_2+1)(2p+1)}} \frac{1}{Z_p} i^{|m_1|+|m_2|+|m|} \times (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+p} Q_5(p), \quad (2.126)$$

Где D определяется по формуле (2.124). Взяв действительную часть от Q_5 , получим правила отбора. Запишем Q_5 в виде:

$$Q_5(n) = \sqrt{\frac{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}{8}} Z \times \frac{n}{16|m_1||m_2|m^2} \left(\frac{n}{2}+1\right)$$

$$\times \frac{\sqrt{n_1(n_1+1)n_2(n_2+1)}}{C(\lambda_1^n, \chi_1)C(\lambda_1^n, 0)} \times D - \sum_{p=0}^{n-1} Y_p' \quad (2.127)$$

$$D = \sum_{p=0}^n \frac{2}{2p+1} C(\lambda_1^p, \chi_1)C(\lambda_2^p, \chi_2) \{Y_p'' + Y_p'''\}, \quad (2.128)$$

где

$$Y_p' = \frac{C(\lambda_1^p, \chi_1)C(\lambda_1^p, 0)}{C(\lambda_1^n, \chi_1)C(\lambda_1^n, 0)} \sqrt{\frac{8}{(2n_1+1)(2n_2+1)(2n+1)}} \frac{1}{Z_p} \times (-1)^{n+p} Q_5(p) \quad (2.129)$$

$$Y_p'' = C(\lambda_1^p, 1, 1)C(\lambda_2^p, 1, 1) i^{|m_1|+|m_2|+|m|} \times (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} \left((-1)^{n_1+n_2+n} + 1 \right) \quad (2.130)$$

$$Y_p''' = 2C(\lambda_1^p, -1, 1)C(\lambda_2^p, 1, -1) i^{|m_1|+|m_2|+|m|} \times (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} \left((-1)^{n_1+n_2+p} + 1 \right) \quad (2.131)$$

Из (2.129)-(2.131) и (2.100) видно, что

$$Y_p' = \chi_p' \quad (2.132)$$

$$Y_p'' = \chi_p'' \quad (2.133)$$

$$Y_p''' = \chi_p''' \quad (2.134)$$

И правило отбора для них, очевидно, одинаковы.

Нам осталось найти три интеграла T_1, T_2, T_3 . Сведем их к уже известным.

Решим $T_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_n^m P_{n'}^{m'} d\mu$. Заметим, что $P_0^0 = 1$, тогда:

$$T_1 = \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_n^m P_{n'}^{m'} P_0^0 d\mu = \frac{1}{m_2} Q_1(m, m', 0, n, n', 0) \quad (2.135)$$

т.е. индексы нужно переобозначить так:

$$\begin{array}{lll} m_1 \rightarrow m & m_2 \rightarrow m' & m \rightarrow 0 \\ n_1 \rightarrow n & n_2 \rightarrow n' & n \rightarrow 0 \end{array} \quad (2.136)$$

Тогда:

$$T_1 = \begin{cases} \frac{1}{|m||m'|} \sqrt{\frac{(2n+1)(2n'+1)}{8}} (-1)^{n+n'+1} Z_1 \times \\ \times C(n, n', 0, |m|, |m'|, 0) C(n, n', 0, -1, 1), \text{ при } |m| + |m'| - \text{четное} \\ 0, \text{ при } |m| + |m'| - \text{нечетное} \end{cases} \quad (2.137)$$

Где $Z_1 = Z$ при условии (2.136).

Теперь решим $T_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_n^m P_{n'}^{m'} P_1^0 d\mu$. Заметим, что $\mu = P_1^0$. Тогда:

$$T_2 = \int_{-1}^1 \frac{1}{1-\mu^2} P_n^m P_{n'}^{m'} P_1^0 d\mu = \frac{1}{m_2} Q_1(m, m', 0, n, n', 1) \quad (2.138)$$

т.е. индексы нужно переобозначить так:

$$\begin{array}{lll} m_1 \rightarrow m & m_2 \rightarrow m' & m \rightarrow 0 \\ n_1 \rightarrow n & n_2 \rightarrow n' & n \rightarrow 1 \end{array} \quad (2.139)$$

Тогда:

$$T_2 = \begin{cases} \frac{1}{|m||m'|} \sqrt{\frac{(2n+1)(2n'+1)}{24}} (-1)^{n+n'} Z_2 \times \\ \times C(n, n', 1, |m|, |m'|, 0) C(n, n', 1, -1, 1), \text{ при } |m| + |m'| - \text{четное} \\ 0, \text{ при } |m| + |m'| - \text{нечетное} \end{cases} \quad (2.140)$$

Где $Z_2 = Z$ при условии (2.139).

Найдем $T_3 = \int_{-1}^1 \frac{\partial P_n^m}{\partial \mu} P_{n'}^{m'} d\mu$. Заметим, что $\mu = P_1^0$. Тогда:

$$T_3 = \int_{-1}^1 \frac{\partial P_n^m}{\partial \mu} P_{n'}^{m'} P_0^0 d\mu \quad (2.141)$$

Этот интеграл – часть интеграла Q_2 , которая получилась, например, из $Q_2(m_1, m_2, m)$ при условии (4.164). Тогда:

$$T_3 = \begin{cases} \frac{n(n+1)n'(n'+1)}{4|m'|} \sqrt{\frac{1}{2}} Z_1(-1)^{n+n'} \times \\ \times C(n, n', 0, |m|, |m'|, 0) C(n, n', 0, -1, 1), \\ \text{при } |m| + |m'| - \text{четное и } -n - n' - \text{нечетное} \\ 0, \text{ при } |m| + |m'| - \text{нечетное и } -n - n' - \text{четное} \end{cases} \quad (2.142)$$

3. Негеострофическая баротропная модель (модель «Мелкой воды»). Спектральная аппроксимация.

3.1 Приближения «Мелкой воды».

Приближение мелкой воды предполагает, что атмосфера есть тонкая плёнка идеального газа, ограниченная снизу непроницаемой ровной поверхностью, а сверху вакуумом. Это приближение ранее использовалось в прогностических моделях, а сегодня для исследований методов решения. Именно в таком качестве модель мелкой воды будет использована в данном исследовании.

Модель представлена тремя прогностическими уравнениями для: меридиональной составляющей скорости ветра (3.1), зональной составляющей скорости ветра (3.2) и геопотенциала (3.3) [11]

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} U \frac{\partial U}{\partial \lambda} + \frac{\cos\varphi}{a} V \frac{\partial U}{\partial \mu} + \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda} - lV = 0, \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} U \frac{\partial V}{\partial \lambda} + \frac{\cos\varphi}{a} V \frac{\partial V}{\partial \mu} + \frac{\cos\varphi}{a} \frac{\partial \Phi}{\partial \mu} + lU = 0, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \frac{\partial U\Phi}{\partial \lambda} + \frac{\cos\varphi}{a} \frac{\partial V\Phi}{\partial \mu} = 0, \quad (3.3)$$

где

U - меридиональная составляющая скорости ветра,

V - зональная составляющая скорости ветра,

Φ - геопотенциал,

λ - долгота,

μ=sin(φ) - гауссова широта,

- φ - широта,
 t - время,
 a - радиус Земли,
 $l=2\omega\sin(\varphi)$ - параметр Кориолиса.

3.2 Аппроксимация модели «Мелкой воды» рядами.

Преобразуем систему уравнений (3.1) – (3.3) к спектральному виду. Для этого представим все метеорологические величины в виде ряда по сферическим функциям [1]. Подставляя в ряды в систему уравнений (3.1 – 3.3) и используя треугольное усечение, получим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \right] + \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \\
 & \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \right] + \frac{\cos\varphi}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \\
 & \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \right] + \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \right] \\
 & - \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N l_{mn} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) = \varepsilon \quad (3.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \right] + \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \\
 & \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \right] + \frac{\cos\varphi}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \right] + \frac{\cos \varphi}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \right] + \\
& + \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N l_{mn} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) = \varepsilon \quad (3.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial t} \left[\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \right] + \frac{1}{a \cdot \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \right. \\
& \cdot \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \left. \right] + \frac{\cos \varphi}{a} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \right. \\
& \cdot \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \left. \right] = \varepsilon \quad (3.6)
\end{aligned}$$

где ε – ошибка аппроксимации, вызванная заменой функции рядом.

Так как производная суммы равна сумме производных, то можем поменять местами дифференцирование и суммирование, а также воспользоваться правилом произведения сумм:

$$\sum_i^I A_i \cdot \sum_i^I B_i = \sum_{i_1}^I \sum_{i_2}^I A_{i_1} B_{i_2} \quad (3.7)$$

Учитывая (3.7), получим

$$\sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{\partial U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu)}{\partial t} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \frac{\partial U_{m_1 n_1}(t) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} + \\
& + \frac{\text{Cos}\varphi}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \frac{\partial U_{m_1 n_1}(t) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu)}{\partial \mu} + \\
& + \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{\partial \Phi_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} - \\
& - \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) = \varepsilon \quad (3.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{\partial V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu)}{\partial t} + \\
& + \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \frac{\partial V_{m_1 n_1}(t) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} + \\
& + \frac{\text{Cos}\varphi}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \frac{\partial V_{m_1 n_1}(t) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu)}{\partial \mu} + \\
& + \frac{\text{Cos}\varphi}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{\partial \Phi_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu)}{\partial \mu} + \\
& + \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) = \varepsilon \quad (3.9)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{\partial \Phi_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu)}{\partial t} + \\
& + \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N \frac{\partial U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \Phi_{m_1 n_1}(t) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos\varphi}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N \frac{\partial V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) \Phi_{m_1 n_1}(t) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = \\
& = \varepsilon \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Поскольку коэффициент разложения зависит только от времени, а базисная функция (в данном случае сферическая) – только от пространства, система уравнений (3.8 – 3.10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{dU_{mn}(t)}{dt} Y_n^m(\lambda, \mu) + \\
& + \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) U_{m_1 n_1}(t) \frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} + \\
& + \frac{\cos\varphi}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) U_{m_1 n_1}(t) \frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu)}{\partial \mu} + \\
& + \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) \frac{\partial Y_n^m(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} - \\
& - \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) = \varepsilon \tag{3.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{dV_{mn}(t)}{dt} Y_n^m(\lambda, \mu) + \\
& + \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) V_{m_1 n_1}(t) \frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} + \\
& + \frac{\cos\varphi}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) Y_n^m(\lambda, \mu) V_{m_1 n_1}(t) \frac{\partial Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu)}{\partial \mu} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos\varphi}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) \frac{\partial Y_n^m(\lambda, \mu)}{\partial \mu} + \\
& + \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) = \varepsilon, \quad (3.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt} Y_n^m(\lambda, \mu) + \\
& + \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \Phi_{m_1 n_1}(t) \frac{\partial Y_n^m(\lambda, \mu) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} + \\
& + \frac{\cos\varphi}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \Phi_{m_1 n_1}(t) \frac{\partial Y_n^m(\lambda, \mu) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = \\
& = \varepsilon, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

Исходя из того, что сферическая функция $Y_n^m(\lambda, \mu)$ равна произведению полинома Лежандра $P_n^m(\mu)$ на экспоненту $e^{im\lambda}$, можно взять производную

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y_n^m(\lambda, \mu)}{\partial \lambda} &= \frac{\partial P_n^m(\mu) e^{im\lambda}}{\partial \lambda} = P_n^m(\mu) \frac{\partial e^{im\lambda}}{\partial \lambda} = P_n^m(\mu) \cdot i \cdot m \cdot e^{im\lambda} = \\
&= i \cdot m \cdot Y_n^m(\lambda, \mu)
\end{aligned}$$

Учитывая рекуррентные соотношения [12]

$$(1 - \mu^2) \frac{\partial Y_n^m(\lambda, \mu)}{\partial \mu} = \alpha_{mn} Y_{n-1}^m(\lambda, \mu) - \beta_{mn} Y_{n+1}^m(\lambda, \mu),$$

$$\text{где } \alpha_{mn} = (n+1) \sqrt{\frac{n^2 - m^2}{4n^2 - 1}} \quad \text{и} \quad \beta_{mn} = n \sqrt{\frac{(n+1)^2 - m^2}{4(n+1)^2 - 1}}.$$

Следовательно, уравнения (3.11 – 3.13) примут вид:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{dU_{mn}(t)}{dt} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) + \\
& + \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \\
& \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot i \cdot m \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) + \\
& + \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot [\alpha_{mn} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) - \beta_{mn} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu)] + \\
& + \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) \cdot i \cdot m \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) - \\
& - \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) = \varepsilon,
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{dV_{mn}(t)}{dt} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) + \\
& + \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot i \cdot m \cdot \\
& \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) + \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot [\alpha_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) - \beta_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu)] + \\
& + \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) \cdot \alpha_{mn} \cdot Y_{n-1}^m(\lambda, \mu) - \beta_{mn} \cdot Y_{n+1}^m(\lambda, \mu) +
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) = \varepsilon. \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) + \\ & + \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot \\ & \cdot [Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot i \cdot m_1 \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) + Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot i \cdot m \cdot Y_n^m(\lambda, \mu)] + \\ & + \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot \\ & \cdot [Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot (\alpha_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) - \beta_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu)) + \\ & + Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot (\alpha_{mn} \cdot Y_{n-1}^m(\lambda, \mu) - \beta_{mn} \cdot Y_{n+1}^m(\lambda, \mu))] = \varepsilon. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Поскольку система уравнений (3.14 – 3.16) незамкнута – 3 уравнения и $3 * (N + 1) (N + 2) / 2$ неизвестных (N в данном исследовании равно 45), то далее минимизируем невязку методом Галёркина, для этого умножим ε на $\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu)$ и проинтегрируем результат по μ от -1 до 1 и по λ от 0 до 2π , то есть по всему земному шару:

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \varepsilon \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0,$$

где $\bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu)$ – это сопряженная сферическая функция,
равная $P_n^m(\mu) \cdot e^{-im\lambda}$.

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{dU_{mn}(t)}{dt} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \\
& \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot i \cdot m \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \\
& \cdot U_{m_1 n_1}(t) [\alpha_{mn} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) - \beta_{mn} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu)] \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) \cdot i \cdot m \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu - \\
& - \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \\
& \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0,
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{dV_{mn}(t)}{dt} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \\
& \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot i \cdot m \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot [\alpha_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) - \beta_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu)] \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) \cdot (\alpha_{mn} \cdot Y_{n-1}^m(\lambda, \mu) - \beta_{mn} \cdot Y_{n+1}^m(\lambda, \mu)) \cdot \\
& \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0,
\end{aligned} \tag{3.18}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt} Y_n^m(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot [Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot i \cdot m_1 \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) + Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot i \cdot m \cdot Y_n^m(\lambda, \mu)] \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \cos\varphi} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot [Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot (\alpha_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) - \beta_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu)) + \\
& + Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot (\alpha_{mn} \cdot Y_{n-1}^m(\lambda, \mu) - \beta_{mn} \cdot Y_{n+1}^m(\lambda, \mu))] \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Учитывая, что коэффициенты разложения не зависят от пространства, получаем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{dU_{mn}(t)}{dt} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{i}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot m \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) [\alpha_{mn} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) - \beta_{mn} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu)] \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{i}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) \cdot m \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu - \\
& - \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{dV_{mn}(t)}{dt} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{i}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot m \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \\
& \cdot [\alpha_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) - \beta_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu)] \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot (\alpha_{mn} \cdot Y_{n-1}^m(\lambda, \mu) - \beta_{mn} \cdot Y_{n+1}^m(\lambda, \mu)) \cdot \\
& \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0,
\end{aligned} \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot [Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot i \cdot m_1 \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) + Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot i \cdot m \cdot Y_n^m(\lambda, \mu)] \cdot \\
& \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot [Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot (\alpha_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) - \beta_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu)) + \\
& + Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot (\alpha_{mn} \cdot Y_{n-1}^m(\lambda, \mu) - \beta_{mn} \cdot Y_{n+1}^m(\lambda, \mu))] \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Раскрыв скобки, получаем:

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{dU_{mn}(t)}{dt} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{i}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot m \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) U_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \alpha_{mn} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu - \\
& - \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \beta_{mn} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{i}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) \cdot m \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu - \\
& - \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0,
\end{aligned}$$

(3.23)

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{dV_{mn}(t)}{dt} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{i}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot m \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \alpha_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu - \\
& - \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \beta_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \alpha_{mn} \cdot Y_{n+1}^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu - \\
& - \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \Phi_{mn}(t) \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot \beta_{mn} \cdot Y_{n+1}^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0,
\end{aligned}$$

(3.24)

$$\begin{aligned}
& \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \frac{d\Phi_{mn}(t)}{dt} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{i}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot m_1 \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\text{Cos}\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{i}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot m \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\text{Cos}\varphi} \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \alpha_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu - \\
& - \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \beta_{m_1 n_1} \cdot Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \alpha_{mn} \cdot Y_{n-1}^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \cos \varphi} \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \beta_{mn} \cdot Y_{n+1}^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0.
\end{aligned}
\tag{3.25}$$

Учитывая, что сферические функции ортогональны

$$\text{при } \begin{cases} m = m_2 \\ n = n_2 \end{cases} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 4\pi,$$

и

$$\text{при } \begin{cases} m \neq m_2 \\ n \neq n_2 \end{cases} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0,$$

система уравнений (3.22 – 3.25) упрощается, получаем окончательный вид определяющей системы уравнений модели «мелкой воды».

Окончательный вид прогностического уравнения меридиональной составляющей скорости ветра в спектральной форме.

$$\begin{aligned}
& \frac{dU_{m_2 n_2}(t)}{dt} 4\pi + \frac{i}{a \cdot \cos\varphi} \Phi_{m_2 n_2}(t) m_2 + \\
& + \frac{i}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) U_{m_1 n_1}(t) m \cdot \\
& \quad \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} Y_n^m(\lambda, \mu) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot \alpha_{mn} \cdot \\
& \quad \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} \cdot Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu - \\
& - \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot \beta_{mn} \cdot \\
& \quad \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} Y_n^m(\lambda, \mu) Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu - \\
& - \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \quad \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0
\end{aligned}
\tag{3.26}$$

Окончательный вид прогностического уравнения зональной составляющей скорости ветра в спектральной форме.

$$\begin{aligned}
& \frac{dV_{m_2 n_2}(t)}{dt} \cdot 4\pi + \frac{1}{a \cdot \text{Cos}\varphi} \cdot \Phi_{m_2 n_2}(t) \cdot (\alpha_{m_2 n_2} - \beta_{m_2 n_2}) \cdot 4\pi + \\
& + \frac{i}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) V_{m_1 n_1}(t) m \cdot \\
& \quad \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\text{Cos}\varphi} Y_n^m(\lambda, \mu) Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \cdot V_{m_1 n_1}(t) \cdot \alpha_{m_1 n_1} \cdot \\
& \quad \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\text{Cos}\varphi} Y_n^m(\lambda, \mu) Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu - \\
& - \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) V_{m_1 n_1}(t) \beta_{m_1 n_1} \cdot \\
& \quad \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\text{Cos}\varphi} Y_n^m(\lambda, \mu) Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N l_{mn} \cdot U_{m_1 n_1}(t) \cdot \\
& \quad \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0
\end{aligned}
\tag{3.27}$$

Окончательный вид прогностического уравнения геопотенциала в спектральной форме.

$$\begin{aligned}
& \frac{d\Phi_{m_2 n_2}(t)}{dt} + \\
& + \frac{i}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N U_{mn}(t) \cdot \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot (m_1 + m) \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \Phi_{m_1 n_1}(t) \alpha_{m_1 n_1} \cdot \\
& \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} Y_n^m(\lambda, \mu) \cdot Y_{n_1-1}^{m_1}(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu \\
& - \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \Phi_{m_1 n_1}(t) \beta_{m_1 n_1} \\
& \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} Y_n^m(\lambda, \mu) Y_{n_1+1}^{m_1}(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu + \\
& + \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot \alpha_{mn} \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) \cdot Y_{n-1}^m(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu - \\
& - \frac{1}{a} \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N \sum_{m_1=-N}^N \sum_{n_1=|m_1|}^N V_{mn}(t) \Phi_{m_1 n_1}(t) \cdot \beta_{mn} \cdot \\
& \cdot \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) Y_{n+1}^m(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = 0
\end{aligned}$$

(3.28)

3.3 Коэффициент взаимодействия

При преобразовании системы уравнений модели «Мелкая вода» в спектральный вид были получены слагаемые, представляющие собой интегралы от произведения трех базисных функций, которые являются коэффициентами взаимодействия. В системе уравнений (3.26-3.28) два типа коэффициентов взаимодействия.

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) Y_n^m(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = W1_{n,n_1,n_2}^{m,m_1,m_2} \quad (3.29)$$

$$\int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos\varphi} Y_{n_1}^{m_1}(\lambda, \mu) Y_{n+1}^m(\lambda, \mu) \bar{Y}_{n_2}^{m_2}(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = W2_{n,n_1,n_2}^{m,m_1,m_2} \quad (3.30)$$

Наличие коэффициентов взаимодействия – это достоинство данного метода, так как коэффициенты взаимодействия прекрасно описывают взаимодействие волн, в результате которого появляются более короткие новые волны. Недостаток коэффициентов взаимодействия в их количестве и сложности расчёта.

Взять данный интеграл можно с помощью коэффициентов Клебша-Гордана [10], что было описано в главе 2.

$$W_{n,n_1,n_2}^{m,m_1,m_2} = \begin{cases} Z \cdot S \cdot C(n_2, n_1, n, |m_1|, |m_2|, |m|) \cdot C(n_2, n_1, n, 0, 0) & \text{при (3.32)} \\ 0, & \text{при (3.33)} \end{cases} \quad (3.31)$$

$$|m| + |m_1| + |m_2| - \text{чётное число}, \quad (3.32)$$

$$|m| + |m_1| + |m_2| - \text{нечётное число}, \quad (3.33)$$

где

$$Z = \sqrt{\frac{(n_1 - m_1)! (n_2 - m_2)! (n - m)! (n + |m_1|)! (n + |m_2|)! (n + |m|)!}{(n_1 + m_1)! (n_2 + m_2)! (n + m)! (n_1 - |m_1|)! (n_2 - |m_2|)! (n - |m|)!}} \quad (3.34)$$

$$S = \sqrt{\frac{(2n_1 + 1)(2n_2 + 1)(2n + 1)}{8}} \cdot i^{|m|+|m_1|+|m_2|} \cdot (-1)^{|m_1|+|m_2|+n_1+n_2+n} \quad (3.35)$$

$$C(n_2, n_1, n, m_1, m_2, m) = \left[\frac{(2m + 1)(m_1 + n)! (m - n_2)!}{(m_1 - n)! (m_2 + n_1)! (m_2 - n_1)!} \cdot \frac{(m - m_1 + m_2)! (m_1 + m_2 - m)! (m_1 + m_2 + m + 1)!}{(m + n_2)! (m + m_1 + m_2)!} \right]^{1/2} \cdot \sum_{S=\max(n+n_1, m-m_1)}^l \frac{(-1)^{m_1+n_1+S} (m + S)! (m_2 + S - n)!}{(m - S)! (S - n - n_1)! (S - m_1 + m_2)! (m_1 - m_2 + S + 1)!} \quad (3.36)$$

4. Формулировка гидродинамической спектральной модели «мелкой ВОДЫ»

Для успешного анализа динамики крупномасштабных атмосферных потоков (например, процесса геострофического приспособления) использованы уравнения баротропной негеострофической модели. Уравнения меридиональной (U) и зональной (V) составляющих скорости ветра – номера (4.1) и (4.2), соответственно. Уравнение геопотенциала (F) – номер (4.3).

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \lambda} + V \frac{1}{a} \frac{\partial U}{\partial \varphi} = - \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial F}{\partial \lambda} + l V \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial V}{\partial \lambda} + V \frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = - \frac{1}{a} \frac{\partial F}{\partial \varphi} - l U \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + U \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial F}{\partial \lambda} + V \frac{1}{a} \frac{\partial F}{\partial \varphi} = -F \left(\frac{1}{a} \frac{\partial V}{\partial \varphi} + \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right) \quad (4.3)$$

Область интегрирования – земной шар с шагом по широте и по долготе – 1 градус и с шагом по времени – 600 с.

В качестве начальных данных были взяты поля меридиональной и зональной составляющих скорости ветра, а также геопотенциала за 00 часов 1 января 2016 года. На рисунке 4.1а представлено начальное поле геопотенциала, на рисунках 4.1б и 4.1в представлены начальные поля горизонтальных составляющих скорости ветра: U (меридиональная скорость ветра) и V (зональная скорость ветра), соответственно.

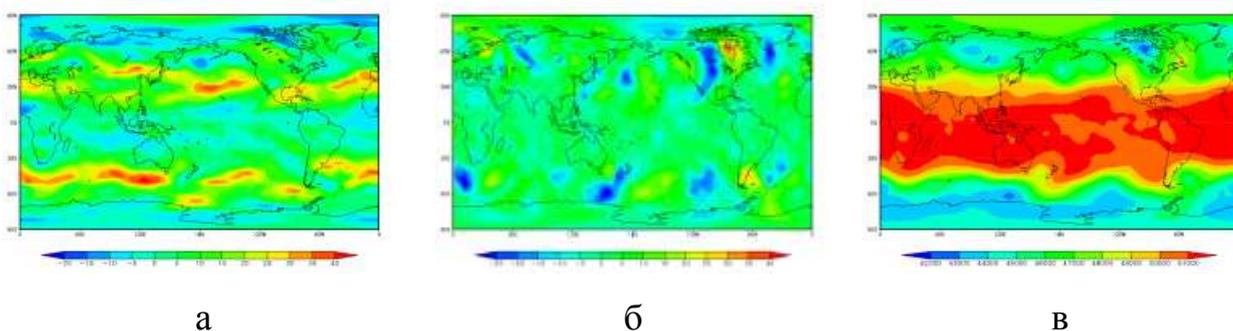


Рисунок 4.1 – Начальное поле геопотенциала (а), меридиональной скорости ветра (б), зональной скорости ветра (в).

Аппроксимация уравнений производилась спектральными методами, которые создают естественное решение проблем, вносимых сферической геометрией. Спектральный метод определяет поля метеовеличин, как суперпозицию волн с разной длиной, что позволяет рассматривать каждую волну в отдельности. Для этого используется разложение полей метеорологических величин в ряды, основная черта которого – сходимость. В данных рядах разделяют время и пространство. Время заменяется временным коэффициентом, который необходимо спрогнозировать, а пространство – базисной функцией, которая известна заранее, так как выбирается исследователем.

В спектральном методе реальной пространство проецируется в фазовое, где координатами являются волновые числа, а метеорологические величины представлены как суперпозиция волн с помощью коэффициентов разложения, которые являются аналогами амплитуд волн.

В данном исследовании прогностические уравнения модели «Мелкой воды» раскладывались в ряды Фурье с треугольным усечением. Для этого были поставлены на ограничения по волновым числам. $m=45$. Поставив такие ограничения, были определен спектр длин волн, которые модель будет рассматривать при расчёте прогноза. Волновые числа и длины волн связаны соотношением:

$$m = \frac{2\pi}{L} \quad (4.4)$$

В данном исследовании, рассматриваемые длины волн от 8° до 2π .

Алгоритм прогнозирования с использованием спектрального метода:

- 1) Прямое преобразование Фурье (ППФ). Первый этап – это разложение начальных значений метеорологической величины в ряд. Формула ППФ представлена ниже.

$$f_{mn}(t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \int_{-1}^1 f(t, \lambda, \mu) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} d\mu d\lambda \quad (4.5)$$

$$f_m(t, \mu) = \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q f_q(t, \mu) e^{im\lambda} \quad (4.6)$$

$$f_{mn}(t) = \sum_{j=1}^J f_m(t, \mu) P_n^m \omega_j \quad (4.7)$$

Формулы (4.6) и (4.7) – это два этапа прямого преобразования Фурье.

- 2) Второй этап - решение определяющей системы уравнений (ОСУ).
- 3) Заключительный этап называется обратным преобразованием Фурье (ОПФ). Перевод спрогнозированных коэффициентов разложения в поля метеорологических величин.

$$f(T, \lambda, \mu) = \sum_{m=-N}^N \sum_{n=|m|}^N f_{mn}(t) P_n^m(\mu) e^{im\lambda} \quad (4.8)$$

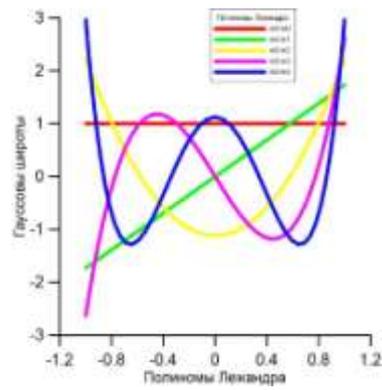
В качестве базисной функции были взяты сферические функции, которые представляют собой произведение полиномов Лежандра на экспоненту.

$$Y_n^m(\lambda, \mu) = P_n^m(\mu) \cdot e^{im\lambda} \quad (4.9)$$

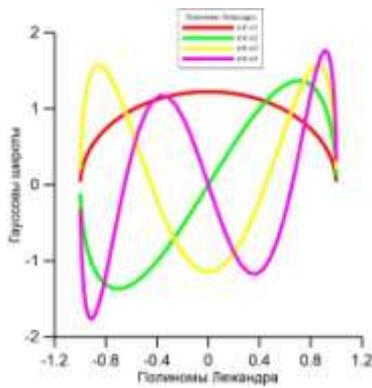
Полиномы Лежандра рассчитываются по следующей формуле:

$$P_n^m(\mu) = \frac{(1 - \mu^2)^{\frac{m}{2}}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}(\mu^2 - 1)^n}{d\mu^{m+n}}, n \geq m \geq 0 \quad (4.10)$$

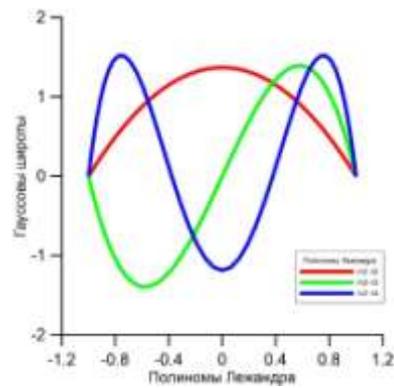
Графическая зависимость полиномов Лежандра от гауссовых широт при различных волновых числах показана на рисунке 4.1.



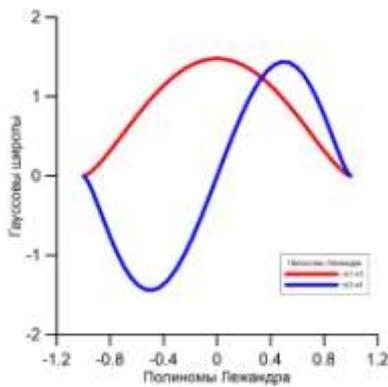
А



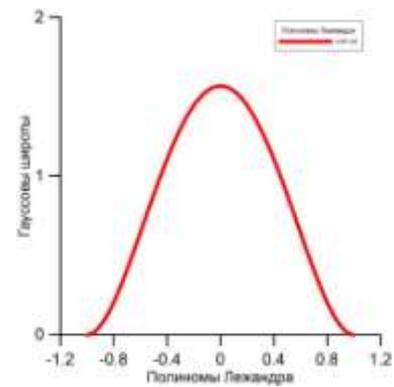
Б



В



Г



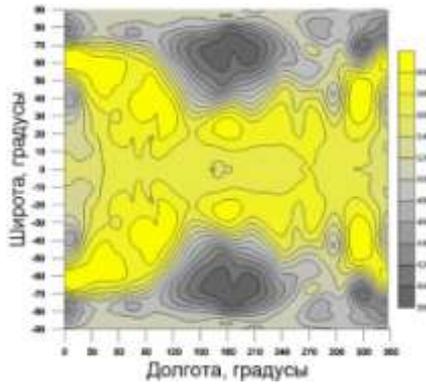
Д

Рисунок 4.1. А - полиномы Лежандра при волновом числе $m=0$. Б - полиномы Лежандра при волновом числе $m=1$. В - полиномы Лежандра при волновом числе $m=2$. Г - полиномы Лежандра при волновом числе $m=3$. Д - полиномы Лежандра при волновом числе $m=4$.

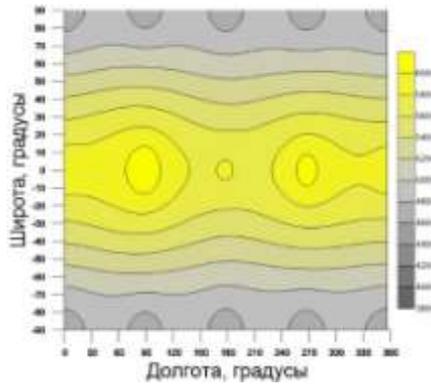
От количества волновых чисел в полиномах Лежандра зависит качество воспроизведения поля метеорологической величины. На рисунке 4.2 представлено истинное поле геопотенциала. На рисунке 4.3 восстановленные поля геопотенциала при различном количестве волновых чисел.

По данным изображениям видно, что самое большое осреднение значений метеорологических полей происходит при наименьших волновых числах, а более правдоподобное поле – это поле при 48 волновых числах. При увеличении максимального волнового числа поле меняется меньше.

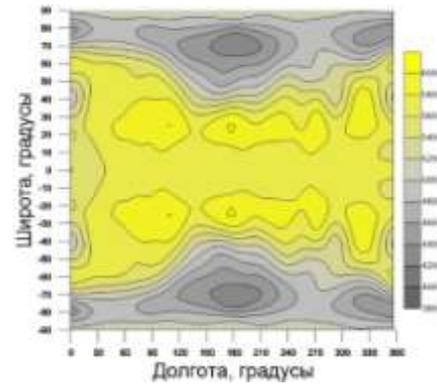
Для удобства визуализации можно также изобразить разность между истинным полем и полями, разложенными при различных максимальных волновых числах, то есть ошибки, которые представлены на рисунках 4.4а – 4.4г.



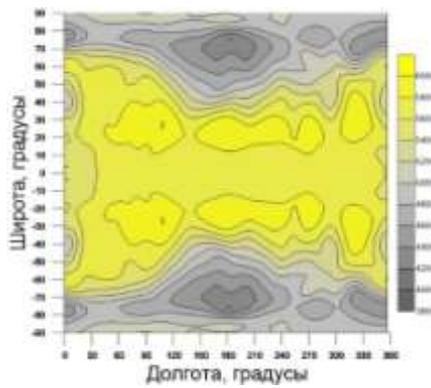
А



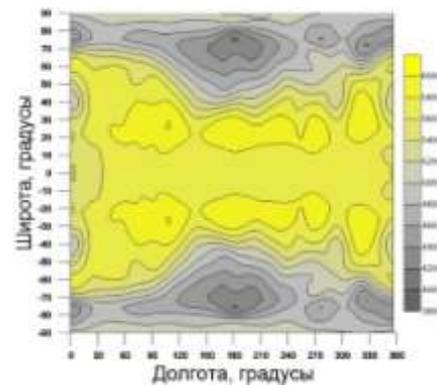
Б



В

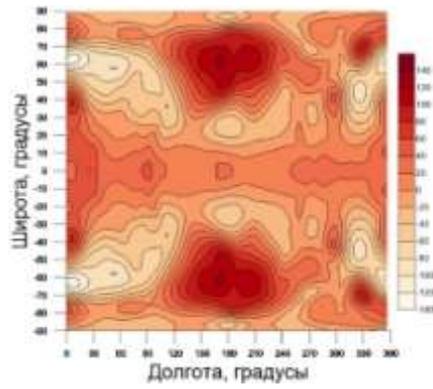


Г

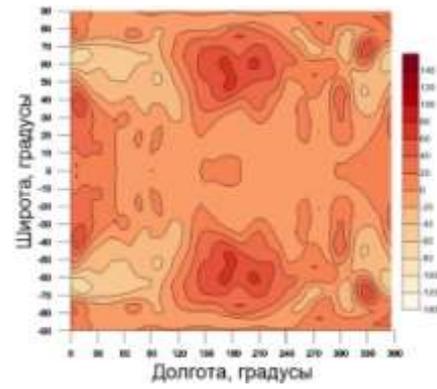


Д

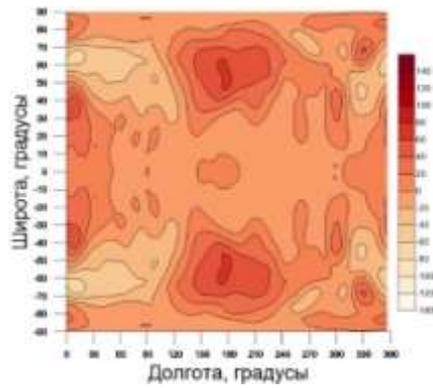
Рисунок 4.2. А - истинное поле геопотенциала. Б - восстановленное поле геопотенциала при максимальном волновом числе равном 2. В - восстановленное поле геопотенциала при максимальном волновом числе равном 10. Г - восстановленное поле геопотенциала при максимальном волновом числе равном 25. Д - восстановленное поле геопотенциала при максимальном волновом числе равном 48.



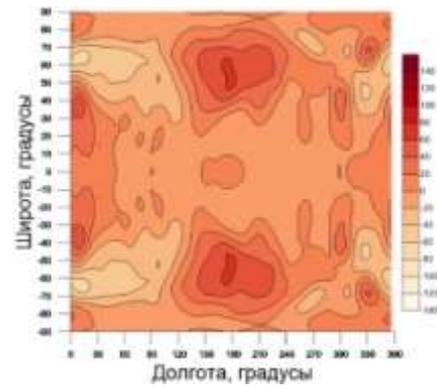
А



Б



В



Г

Рисунок 4.2. А - ошибки восстановления поля метеорологической величины при максимально волновом числе 2. Б - ошибки восстановления поля метеорологической величины при максимально волновом числе 10. В - ошибки восстановления поля метеорологической величины при максимально волновом числе 25. Г - ошибки восстановления поля метеорологической величины при максимально волновом числе 48.

По данным изображениям видно, что самое большое количество ошибок при наименьшем количестве волновых чисел, что прекрасно иллюстрирует рисунок 4.4 А. Поле ошибок при максимальном волновом числе 48 более сглаженное и имеет значения ошибок меньше, чем при меньшем количестве волновых чисел.

Невязка минимизирована методом Галеркина. Упрощение системы уравнений было произведено по правилу ортогональности.

В процессе преобразования уравнений модели «Мелкая вода» в спектральный вид были получены слагаемые, представляющие собой интегралы от произведения трех базисных функций, которые являются коэффициентами взаимодействия (3.29) – (3.30).

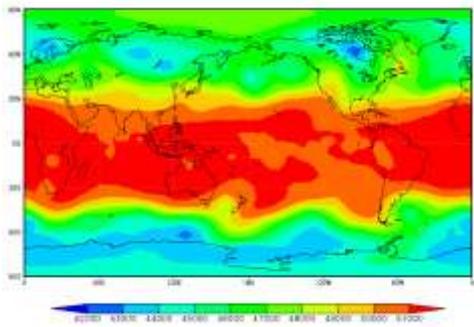
Наличие коэффициентов взаимодействия – это достоинство данного преобразования, так как коэффициенты взаимодействия прекрасно описывают нелинейное взаимодействие волн, в результате которого появляются более короткие новые волны.

Блок-схема прогноза полей метеорологических величин с использованием спектральных методов.

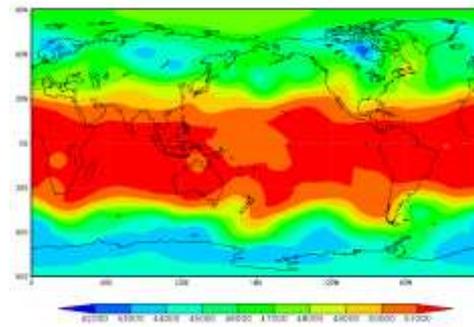


5. Анализ полученных результатов

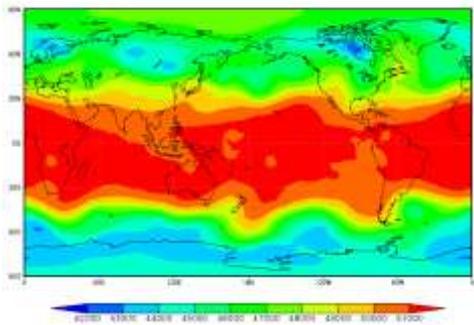
Используя спектральный метод с добавлением метода коэффициентов взаимодействия, был составлен прогноз на 24 часа с количеством коэффициентов разложения: 45. Спрогнозированные поля метеорологических величин будут представлены на 1-й, 5-й, 10-й, 15-й, 20-й и 24-й час прогноза. Рисунок 5.1 представляет спрогнозированные поля геопотенциала, рисунок 5.2 представляет спрогнозированные поля меридиональной составляющей скорости ветра, рисунки 5.3 представляют спрогнозированные поля зональной составляющей скорости ветра, а рисунки 5.4 иллюстрируют вектор ветра, основанный на меридиональной и зональной составляющих скорости ветра.



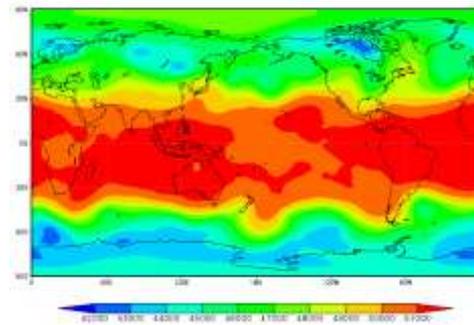
А



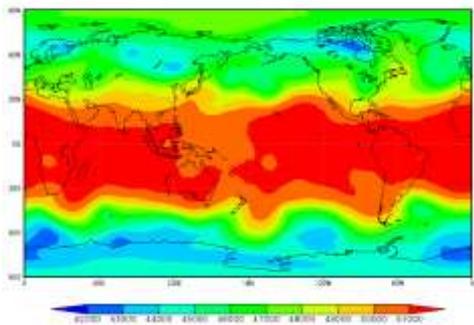
Б



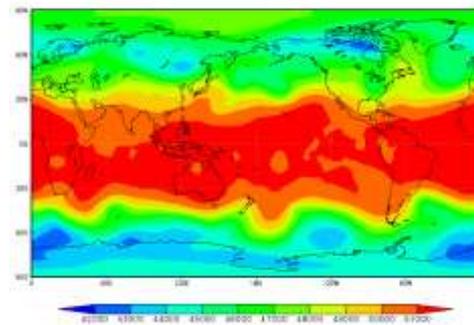
В



Г

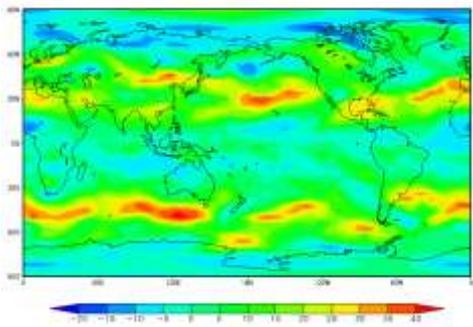


Д

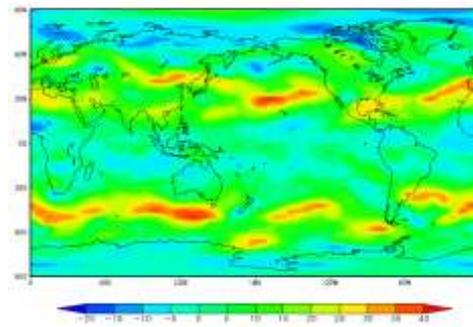


Е

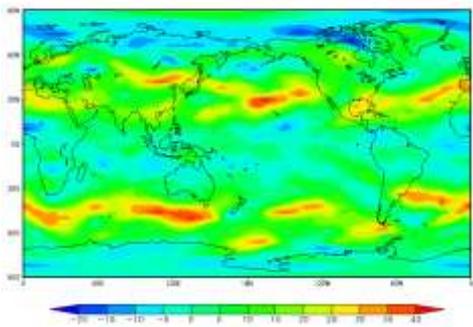
Рисунок 5.1. А - начальное поле геопотенциала. Б - спрогнозированное поле геопотенциала через 5 часов. В - спрогнозированное поле геопотенциала через 10 часов. Г - спрогнозированное поле геопотенциала через 15 часов. Д - спрогнозированное поле геопотенциала через 20 часов.. Е - спрогнозированное поле геопотенциала через 24 часов.



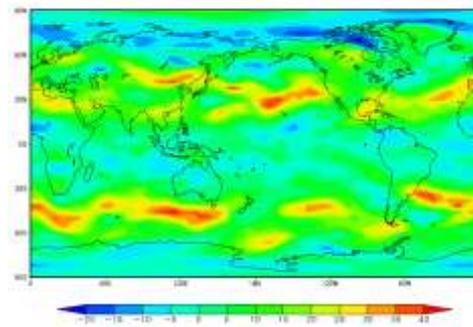
А



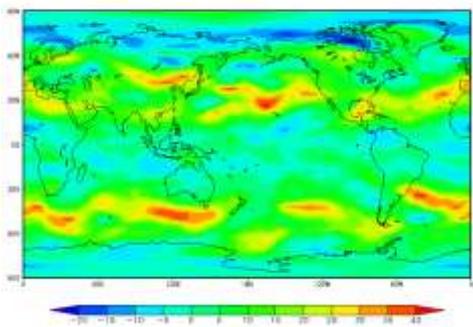
Б



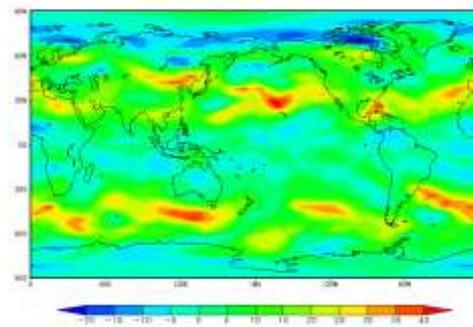
В



Г

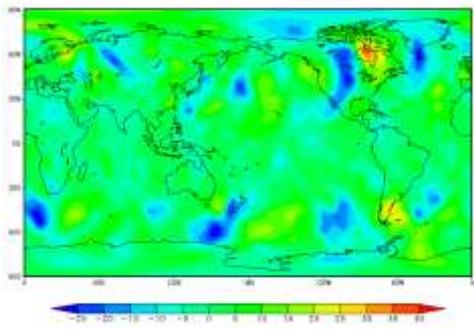


Д

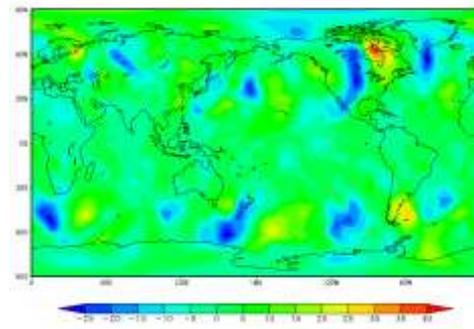


Е

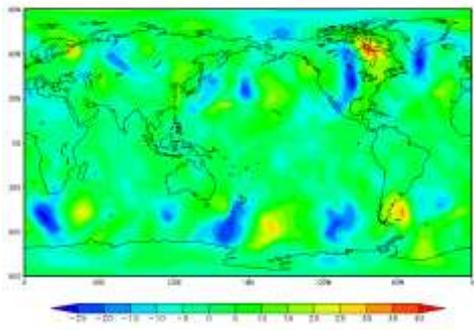
Рисунок 5.2. А - начальное поле меридиональной скорости ветра.
 Б - спрогнозированное поле меридиональной скорости ветра через 5 часов.
 В - спрогнозированное поле меридиональной скорости ветра через 10 часов.
 Г - спрогнозированное поле меридиональной скорости ветра через 15 часов.
 Д - спрогнозированное поле меридиональной скорости ветра через 20 часов.
 Е - спрогнозированное поле меридиональной скорости ветра через 25 часов.



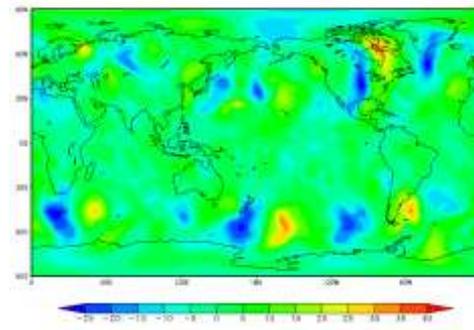
А



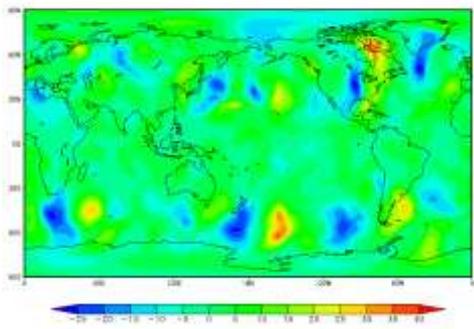
Б



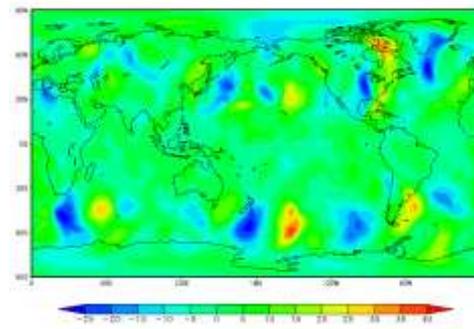
В



Г



Д



Е

Рисунок 5.3. А - начальное поле зональной скорости ветра.

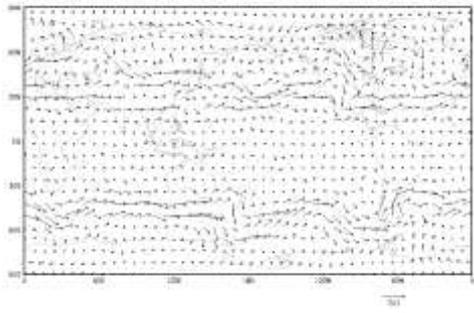
Б - спрогнозированное поле зональной скорости ветра через 5 часов.

В - спрогнозированное поле зональной скорости ветра через 10 часов.

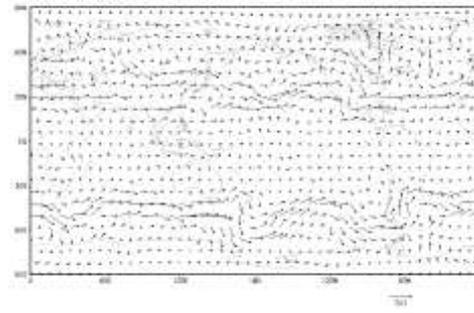
Г - спрогнозированное поле зональной скорости ветра через 15 часов.

Д - спрогнозированное поле зональной скорости ветра через 20 часов.

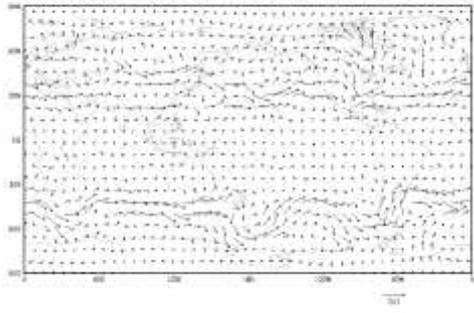
Е - спрогнозированное поле зональной скорости ветра через 24 часов.



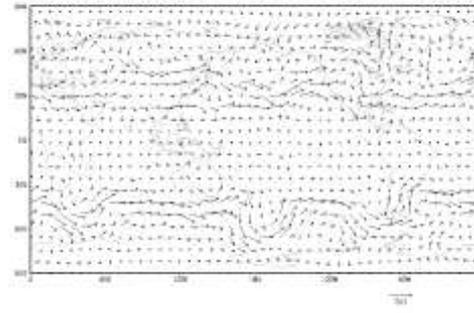
А



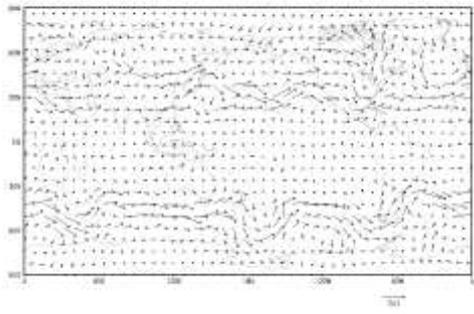
Б



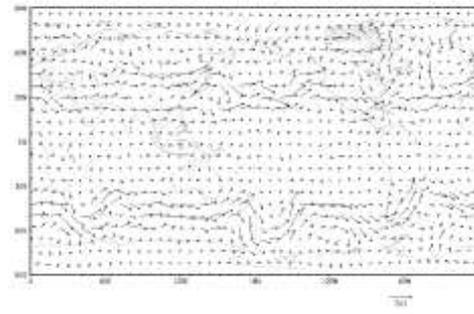
В



Г



Д



Е

Рисунок 5.4. А - начальное поле ветра. Б - спрогнозированное ветра через 5 часов. В - спрогнозированное ветра через 10 часов. Г - спрогнозированное ветра через 15 часов. Д - спрогнозированное ветра через 20 часов. Е - спрогнозированное ветра через 24 часов.

Спрогнозированные поля метеорологических величин соответствует реальным значениям. Отсутствуют завышение значений метеорологических величин с ходом прогноза. Даже наоборот, так как модель имеет адиабатическое приближение имеет место уменьшения значений, как заметно на примере меридиональной скорости ветра (Рисунок 5.2)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью данной выпускной квалификационной работы магистра было построение гидродинамической модели прогноза погоды с использованием спектральных методов и методов коэффициентов взаимодействия, а так же изучение преимуществ их использования. Для достижения этой цели были решены следующие задачи.

Задачи:

- 1) Изучены особенности построения современных гидродинамических спектральных моделей атмосферы.
- 2) Создан алгоритм расчета базисных сферических функций.
- 3) Создан алгоритм разложения полей метеорологических величин в ряд по сферическим функциям. Определить оптимальное количество членов разложения.
- 4) Создан алгоритм прогноза по уравнениям баротропной негеострофической модели атмосферы.
- 5) Создан программный комплекс по моделированию полей метеорологических величин спектральными методами.
- 6) Проведены численные эксперименты с использованием разработанных моделей и проанализировать их результаты.

На основе проведенных исследований можно сделать выводы:

- 1) Спектральные методы хорошо подходят для глобального численного моделирования, так как они решают проблемы, вызванные сферической геометрией Земли.
- 2) В отличие от метода сеток и псевдо-спектрального метода в ходе прогноза не появляется завышение значений, называемое нелинейная вычислительная неустойчивость. Это достигнуто благодаря использованию метода коэффициентов взаимодействия успешно описывает нелинейное взаимодействие волн.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Krishnamurti T. N. et al. An introduction to global spectral modeling. – Springer Science & Business Media, 2006. – Т. 35.
2. Bourke, W. 1974, A multi-level spectral model. I. Formulation and hemispheric integrations. *Mon. Weather Rev.*, 102, 687-701.
3. Dickinson, A. and Temperton, C. 1984. The operational numerical weather prediction model. Technical Note No. 183, Meteorological Office, Bracknell, England.
4. Eliassen, E., Machenhauer, B., and Rasmussen, E. 1970. On a numerical method for integration of the hydrodynamical equations with a spectral representation of the horizontal fields. Report No. 2, Institut für Teoretisk Meteorologi, Kobenhavns Universitet, Denmark.
5. Haltiner, G. J. and Williams, R. T. 1980. Numerical Prediction and Dynamic Meteorology, second edition, John Wiley & Sons, New York.
6. Machenhauer, B. 1974. On the use of the spectral method in numerical integrations of atmospheric models. In *Difference and Spectral methods for Atmosphere and Ocean Dynamics Problems*. USSR Academy of Sciences, Siberian Branch, Novosibirsk. September 1973.
7. Белов П. Н., Борисенков Е. П., Панин Б. Д. Численные методы прогноза погоды: Учебное пособие. – Гидрометеиздат, 1989. -376 с.
8. Курзенева Е.В. Разработка алгоритма баротропной негеострофической модели атмосферы (рукопись).– Л.:ЛГМИ, 1990. – 92 с.
9. Картан Э., Рашевский П. К. Геометрия групп Ли и симметрические пространства. – 2008.
10. Годунов С. К., Гордиенко В. М. КОЭФФИЦИЕНТЫ КЛЕБША—ГОРДАНА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ВЫБОРАХ БАЗИСОВ УНИТАРНЫХ И ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП $SU(2)$, $SO(3)$

- //Сибирский математический журнал. – 2004. – Т. 45. – №. 3. – С. 540-557.
11. Hack J. J., Jakob R. Description of a global shallow water model based on the spectral transform method. – National Center for Atmospheric Research, 1992.
 12. Белоусов С. Л., Гандин Л. С., Машкович С. А. Обработка оперативной метеорологической информации с помощью электронных вычислительных машин //Л.: Гидрометеиздат. – 1968. – Т. 282.
 13. Результаты реанализа Европейского Центра Среднесрочных Прогнозов Погоды [Электронный ресурс] : <http://www.ecmwf.int/en/research/climate-reanalysis/era-interim> (дата обращения 5 ноября 2017 года).
 14. Дж А. Лекции по группам Ли. – 1979.
 15. Шапуков Б. Н. Задачи по группам Ли и их приложениям. – РХД, 2002.
 16. Введение в алгебру угловых моментов.
 17. Годунов С. К., Михайлова Т. Ю. Представления группы вращений и сферические функции. – Научная Книга, 1998.