

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Г. И. Беликова Е. А. Бровкина

РЯДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

2-е издание, переработанное



ПОЛИТЕХ-ПРЕСС

Санкт-Петербургский
политехнический университет
Петра Великого

Санкт-Петербург
2025

УДК 517.518(075.8)
ББК 22.16я73
Б43

Р е ц е н з е н т – кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры аудиовизуальных систем и технологий
Санкт-Петербургского государственного института кино и телевидения
Е. Н. Бегун

*Беликова Г. И. Ряды и их приложения : учеб. пособие / Г. И. Беликова,
Е. А. Бровкина. – 2-е изд., перераб. – СПб. : ПОЛИТЕХ-ПРЕСС, 2025. – 80 с.*

Книга содержит важный раздел математического анализа. В учебное пособие вошли числовые и функциональные ряды. Большое внимание уделено степенным и ортогональным рядам. Представлены примеры применения многочленов Тейлора для аппроксимации производных и примеры нахождения эквивалентных бесконечно малых с помощью рядов Маклорена. Теоретический материал сопровождается примерами и упражнениями. В приложениях представлены примеры решения двух дифференциальных уравнений. Одно из них решается разностным методом, в основе которого лежит аппроксимация производных с помощью многочлена Тейлора, другое решается с помощью тригонометрического ряда Фурье. В одном из приложений представлено построение интеграла Фурье.

ISBN 978-5-7422-8962-3

© Беликова Г. И., Бровкина Е. А., 2025
© Российский государственный
гидрометеорологический университет, 2025
© Санкт-Петербургский политехнический
университет Петра Великого, 2025

Оглавление

Предисловие	5
--------------------	----------

Глава 1. Фундаментальные понятия	6
---	----------

1.1. Числовые ряды	6
1.1.1. Сходящиеся ряды и их свойства	7
1.1.2. Линейные операции	8
1.2. Функциональные ряды	8
1.2.1. Равномерная сходимость	9
1.2.2. Линейно независимые функции	11
1.2.3. Ортогональные функции	12
1.2.4. Разложение функций по ортогональной системе	13
1.3. Немного истории	14

Глава 2. Числовые ряды	17
-------------------------------	-----------

2.1. Достаточные признаки сходимости положительных рядов	17
2.1.1. Примеры исследования рядов на сходимость	19
2.2. Знакопередающиеся ряды	23
2.2.1. Абсолютная и условная сходимости	24
2.2.2. Геометрические ряды	25
2.2.3. Примеры исследования рядов на сходимость	26
2.3. Немного истории	27

Глава 3. Степенные ряды	31
--------------------------------	-----------

3.1. Интервал сходимости	31
3.2. Примеры нахождения области сходимости	34
3.3. Ряды Тейлора и Маклорена	36
3.3.1. Примеры разложения функций в ряд Маклорена	37
3.3.2. Формула Эйлера	41
3.4. Многочлен Тейлора	41
3.4.1. Аппроксимация производных	42
3.5. Немного истории	44

Глава 4. Тригонометрические ряды Фурье	48
---	-----------

4.1. Гармоники	48
----------------	----

4.2.	Ортогональные тригонометрические системы функций	49
4.3.	Разложение чётных и нечётных функций	52
4.4.	Разложение функции на отрезке $[0; l]$	52
4.5.	Равенство Парсеваля	54
4.6.	Тригонометрические полиномы Фурье	55
4.7.	Аппроксимация табличной функции	56
4.8.	Примеры разложения функций в ряд Фурье	58
4.9.	Немного истории	61
Глава 5. Полиномы Чебышева первого рода		63
5.1.	Основные свойства полиномов $T_n(x)$	63
5.2.	Аппроксимация полиномами	65
5.3.	Немного истории	66
Приложение 1. Интеграл Фурье		68
Приложение 2. Разностный метод решения дифференциального уравнения с краевыми условиями		71
Приложение 3. Решение волнового уравнения методом Фурье		73
Приложение 4. Греческий и латинский алфавиты		78
Литература		79

Предисловие

*Знание – самое превосходное из владений.
Все стремятся к нему, само же оно не
приходит.*

Аль-Беруни (973-1048) – великий
персидский учёный

Традиционное представление о бесконечности – это числа, вечно бегущие вдаль. Великий математик XX в. Д. Гильберт был уверен, что с незапамятных времён бесконечность волновала человека более чем какой-либо другой вопрос. Он называл математику единой симфонией бесконечности. Знаменитый математик Г. Вейль тоже считал математику наукой бесконечности.

Математические ряды непосредственно связаны с бесконечностью, с этим загадочным понятием. Ряды стали важным инструментом математического анализа. Они удобны и весьма полезны для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений математической физики. Успешно используются в теории аппроксимации функций. Ряды Фурье играют важную роль в метеорологии, океанологии, гидрологии и экологии.

Знаменитый русский математик В. Стеклов писал: "Математика даёт нам возможность взять природу такой, какой она нам является через наблюдения, и извлечь из результатов наблюдений наибольшую пользу при наименьшей затрате сил".

Откуда природа знает, что ей полезно следовать абстрактной математике? Сама Вселенная либо подчиняется математике, либо, как минимум, поддается анализу с помощью математики.

Тысячелетия глубоких философских размышлений не смогли разгадать тайну могущества математики. Она остаётся такой же и в наше время.

Очень интересно изучать и применять удивительную математику. Для этого нужно немного смелости, фантазии и много любопытства.

Глава 1

Фундаментальные понятия

Бесконечность – это место, где происходит то, чего не бывает.

Из ответа школьника

1.1. Числовые ряды

Рассмотрим конечное количество заданных величин

$$a_1, a_2, \dots, a_{N-1}, a_N.$$

Выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_{N-1} + a_N$$

является суммой. Если число слагаемых бесконечно, то в общем случае такую бесконечную сумму вычислить невозможно. Поэтому в математике запись

$$a_1 + a_2 + \dots a_{k-1} + a_k + \dots \dots$$

называют рядом и записывают кратко в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \quad (1.1)$$

Если слагаемые этого ряда – числа, ряд называется **числовым**, если – функции, ряд называется **функциональным**.

Величина a_k в выражении (1.1) называется **общим членом**. Для любого ряда он представлен в виде некоторой формулы, которая зависит от значения целочисленного **параметра суммирования** k . С помощью общего члена можно построить любое слагаемое ряда.

Замечание 1. Начальное значение параметра суммирования зависит от аналитического вида общего члена. Это может быть 0 или 1, может быть другое натуральное число. Обозначать параметр суммирования можно любой латинской буквой, которая в математике и программировании по умолчанию считается целочисленной, это латинские буквы: k, l, m, n, i, j .

Представим ряд (1.1) в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^N a_k + R_N.$$

Первое слагаемое в правой части равенства называется **частичной суммой** и обозначается как

$$S_N = \sum_{k=1}^N a_k.$$

Второе слагаемое называется **остатком ряда** (*remainder*). Он содержит бесконечный хвост ряда:

$$R_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} a_k.$$

Определение 1. Суммой ряда называется предел частичных сумм:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Если этот предел существует, говорят, что **ряд сходится**. В этом случае

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S \in \mathbb{R}.$$

Если предел частичных сумм равен бесконечности или не существует, говорят, что **ряд расходится**.

1.1.1. Сходящиеся ряды и их свойства

Теорема 1. Необходимое условие сходимости ряда.

Если ряд сходится, то его общий член стремится к нулю (общий член – бесконечно малая величина):

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0.$$

Следствие 1. Из этой теоремы следует достаточное условие расходимости ряда. Ряд расходится, если его общий член не стремится к нулю:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n \neq 0.$$

Теорема 2. Необходимое и достаточное условие сходимости ряда.

Для сходимости ряда необходимо и достаточно, чтобы остаток ряда стремился к нулю:

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} R_N = 0.$$

Следствие 2. Отбрасывание конечного числа слагаемых ряда не влияет на его сходимости. Если ряд сходил, он будет сходить, если расходился, он будет расходиться.

Теорема 3. Последовательность частичных сумм $\{S_k\}_{k=N}^{\infty}$ ряда имеет конечный предел, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся такое натуральное число M , что как только $N \geq M$, так сразу будет выполняться неравенство

$$|S_N - S_{N+l}| < \varepsilon, \forall l \in \mathbb{N}.$$

Следствие 3. Если ряд сходится, тогда всегда по заданной погрешности ε найдётся такой номер N , при котором модуль разности частичной суммы S_N и

последующих частичных сумм станет меньше ε . В этом случае в качестве суммы ряда берётся частичная сумма S_N .

Замечание 2. Такой процесс нахождения суммы ряда реализован на компьютере в виде соответствующей стандартной программы.

1.1.2. Линейные операции

1. Умножение сходящегося ряда на число.

Для сходящихся рядов выполняется свойство *однородности*.

Пусть β — число, A — сумма ряда, тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \beta a_n = \beta \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \beta A.$$

2. Сложение сходящихся рядов.

Сходящиеся ряды можно складывать (свойство *аддитивности*). В результате получится сходящийся ряд:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A, \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = A + B.$$

Следствие 4. Наличие у сходящихся рядов и свойства однородности, и свойства аддитивности приводит к свойству *линейности*: если сходятся ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = A \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = B,$$

то сходится их *линейная комбинация*:

$$\beta_1 \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta_2 \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_1 a_k + \beta_2 b_k) = \beta_1 A + \beta_2 B.$$

1.2. Функциональные ряды

Возьмём бесконечную последовательность функций с общей областью определения X :

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x), \dots$$

и построим функциональный ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k(x), \tag{1.2}$$

где $\{c_k\}_{k=0}^{\infty}$ — действительные числа.

Разберёмся, какой смысл заключён в понятии *сумма функционального ряда*. Возьмём число x_0 из общей области определения X и подставим его в ряд (1.2). Ряд становится числовым. Предположим, что он сходится, и его сумма равна $S(x_0)$. Подставим другое число $x_1 \in X$. Пусть этот числовой ряд тоже сходится, и его сумма – $S(x_1)$. Процесс подстановки различных значений аргумента можно продолжать. Ясно, что сумма ряда (1.2) зависит от численного значения x , поэтому приходим к следующему заключению. Если в функциональный ряд подставлять те значения аргумента, при которых ряд сходится, тогда ясно, что суммой сходящегося функционального ряда является некоторая функция $S(x)$.

Определение 2. Множество значений аргумента x , при которых ряд (1.2) сходится, называется *областью сходимости функционального ряда*.

Замечание 3. Область сходимости функционального ряда принадлежит области определения функции $S(x)$:

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k(x).$$

1.2.1. Равномерная сходимость

Характер сходимости функциональных рядов стали исследовать только во второй половине XIX века. Конечная сумма непрерывных функций – непрерывная функция. Долгое время даже великий французский математик Коши считал, что сходящийся ряд, построенный из непрерывных функций – это непрерывная функция. Постепенно стали появляться примеры сходящихся функциональных рядов, для которых свойство непрерывности нарушалось.

Обратимся к первому знаменитому примеру

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \dots, \quad -\pi \leq x \leq \pi.$$

Этот ряд привлекал внимание математиков в течение десятилетий. Впервые о нём писал Эйлер (1783), потом – Фурье (1808). Великий норвежский математик Абель (1826) заметил, что сумма этого ряда имеет разрывы при $x = \pm\pi$.

Второй пример

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}.$$

Это ряд геометрической прогрессии (геометрический ряд), знаменатель которого

$$q = \frac{1}{1+x^2} < 1.$$

Величина $S(x)$ равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии и вычисляется по известной со школы формуле:

$$S(x) = \frac{x^2}{1 - 1/(1+x^2)} = \frac{x^2(1+x^2)}{1+x^2-1} = 1+x^2 \Rightarrow S(0) = 1.$$

Все слагаемое ряда – непрерывные функции, равные нулю при $x = 0$, а сумма ряда, функция $S(x)$ имеет разрыв в точке $x = 0$.

Примеры такой парадоксальной ситуации привели к необходимости введения понятия **равномерной сходимости** функциональных рядов. Это понятие ввёл знаменитый немецкий математик К. Вейерштрасс.

Рассмотрим некоторый ряд, сходящийся в области $x \in [a; b]$

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k(x) = \sum_{k=0}^M c_k f_k(x) + R_M, \quad (1.3)$$

где

$$\sum_{k=0}^M c_k f_k(x) = S_M(x)$$

является частичной суммой ряда, c_k – числовые коэффициенты. Такую сумму в математике ещё называют **линейной комбинацией функций**, R_M – остаток ряда. Для любых сходящихся рядов выполняется предельное соотношение

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} R_M = 0.$$

Определение 3. Функциональный ряд (1.3) называется **равномерно сходящимся** на $[a; b]$, если для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists!$ такое натуральное число N , что при $\forall$ натуральном числе $M > N$ и $\forall x \in [a; b]$ будет верным неравенство

$$|S(x) - S_M(x)| < \varepsilon,$$

где $S(x)$ – сумма сходящегося ряда (1.3).

Уточним смысл этого определения. Ряд равномерно сходится на $[a; b]$, если есть один номер N , после которого $M > N$ модуль разности между суммой ряда и частичной суммой $S_M(x)$ становится меньше любого заданного значения погрешности $\varepsilon > 0$ для всех $x \in [a; b]$.

Теорема 4. Вейерштрасса. Достаточное условие равномерной сходимости. Если все члены ряда (1.3) для $\forall x \in D_1$ удовлетворяют неравенству

$$|c_k f_k(x)| \leq a_k, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

где $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ – члены сходящегося положительного числового ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k,$$

тогда функциональный ряд (1.3) сходится равномерно на множестве D_1 .

СВОЙСТВА РАВНОМЕРНО СХОДЯЩИХСЯ РЯДОВ

1. Непрерывность. Если все слагаемые сходящегося ряда непрерывны на отрезке $[a; b]$ и ряд равномерно сходится на этом отрезке, то сумма ряда – это непрерывная функция на $[a; b]$.

2. Дифференцируемость. Предположим, что все слагаемые сходящегося ряда – *непрерывно дифференцируемые функции* на $[a; b]$ и ряд, составленный из производных этих слагаемых, равномерно сходится, тогда исходный ряд можно дифференцировать почленно:

$$S'(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k(x) \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} c_k f'_k(x).$$

3. Интегрируемость. Если все слагаемые сходящегося ряда непрерывны на отрезке $[a; b]$ и ряд равномерно сходится на этом отрезке, тогда на этом же отрезке ряд можно почленно интегрировать:

$$\int_a^b S(x) dx = \int_a^b \sum_{k=0}^{\infty} c_k f_k(x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b c_k f_k(x) dx.$$

Это свойство справедливо для любой области интегрирования $[c; d] \in [a; b]$.

Замечание 4. Если ряд сходится неравномерно, то почленное интегрирование не всегда возможно.

Теорема 5. Если ряд равномерно сходится, то для $\forall \varepsilon > 0 \exists$ такое натуральное число N , что при $\forall M > N$ и $\forall l > 0$ для всех $x \in [a; b]$ будет верно неравенство для частичных сумм

$$\left| \sum_{k=1}^M c_k f_k(x) - \sum_{k=1}^{M+l} c_k f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

1.2.2. Линейно независимые функции

Определение 4. Две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ называются линейно независимыми в области $x \in [a; b]$, если не существует такого числа $\gamma \in R$, при котором было бы верным равенство

$$f_2(x) = \gamma \cdot f_1(x).$$

Определение 5. Система функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ называется линейно независимой в области $x \in [a; b]$, если равенство

$$\gamma_1 f_1(x) + \gamma_2 f_2(x) + \gamma_3 f_3(x) + \dots = 0$$

возможно только в случае равенства нулю всех коэффициентов $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Примером системы линейно независимых функций является система простейших степенных функций

$$\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \quad \text{или} \quad \{(x - x_0)^k\}_{k=1}^{\infty}, \quad \text{где } x \in \mathbb{R}, x_0 - \text{некоторое число.}$$

Функциональные ряды, которые являются бесконечной линейной комбинацией таких линейно независимых функций, называются степенными рядами. Представление функции $f(x)$ в виде

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x - x_0)^k \quad \text{или} \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

называют разложением функции в степенной ряд, а сама функция в этом случае называется **аналитической функцией**.

1.2.3. Ортогональные функции

Определение 6. Функция $f(x)$ называется **интегрируемой на $[a; b]$** , если интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

равен некоторому числу.

Замечание 5. Все непрерывные на $[a; b]$ функции и функции, имеющие в этой области разрывы-скачки только первого рода, являются интегрируемыми функциями.

Определение 7. Нормой $\|f(x)\|$, интегрируемой с квадратом на $[a; b]$ функции $f(x)$, называется следующая положительная величина

$$\|f(x)\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}.$$

Определение 8. Бесконечная (или конечная) система интегрируемых с квадратом функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ называют **ортогональной с весом в области $[a; b]$** , если для этих функций выполняется равенство

$$\int_a^b \rho(x) f_n(x) f_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ \alpha_n > 0, & \text{если } n = m. \end{cases} \quad (1.4)$$

Функция $\rho(x)$ в подынтегральном выражении (1.4) называется **весовой (весом)**. При отсутствии весовой функции ($\rho(x) = 1$) система интегрируемых с квадратом функций называется **ортogonalной в области $[a; b]$** , если для этих функций выполняется равенство

$$\int_a^b f_n(x)f_m(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ \alpha_n > 0, & \text{если } n = m. \end{cases}$$

Система ортогональных функций всегда линейно независима, а система линейно независимых функций в общем случае может не быть ортогональной, но любую линейно независимую систему функций всегда можно преобразовать в ортогональную.

Интеграл от произведения двух функций называют **скалярным произведением функций** и записывают в виде:

$$(f_n(x), f_m(x)) = \int_a^b f_n(x)f_m(x)dx.$$

1.2.4. Разложение функции по ортогональной системе

Теорема 6. Любая интегрируемая на $[a; b]$ функция $G(x)$ может быть единственным образом разложена в равномерно сходящийся ряд по заданной ортогональной на $[a; b]$ системе функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$:

$$G(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x). \quad (1.5)$$

Ряды, построенные по ортогональной системе функций, называются **рядами Фурье**.

Далее представлен простой вывод формулы для вычисления коэффициентов $\{c_k\}_{k=1}^{+\infty}$ в разложении функции $G(x)$ по ортогональной системе функций. Вывод основан на условии ортогональности и 3-м свойстве равномерно сходящихся рядов.

Умножим равенство (1.5) на любую функцию $f_n(x)$ из заданной ортогональной системы $\{f_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$ и проинтегрируем полученное равенство:

$$\int_a^b G(x)f_n(x)dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} c_k f_k(x)f_n(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b f_k(x)f_n(x)dx.$$

Благодаря ортогональности набора $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b f_n(x)f_k(x)dx$$

имеет только одно ненулевое слагаемое, в котором $n = k$:

$$c_k \int_a^b f_k(x) f_k(x) dx = c_k \int_a^b f_k^2(x) dx.$$

Результатом этих преобразований становится равенство

$$\int_a^b G(x) f_k(x) dx = c_k \int_a^b f_k^2(x) dx,$$

из него следует формула для вычисления любого коэффициента в равенстве (1.5):

$$c_k = \frac{\int_a^b G(x) f_k(x) dx}{\int_a^b f_k^2(x) dx}, \quad \text{для } \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.6)$$

Такую же функцию $G(x)$ можно единственным образом разложить в равномерно сходящийся ряд по заданной на $[a; b]$ ортогональной с весом системе функций $\{f_k(x)\}_{k=1}^{+\infty}$. Аналогичным образом выводится формула для вычисления любого коэффициента c_k :

$$\int_a^b \rho(x) G(x) f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} c_k \rho(x) f_k(x) f_n(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \rho(x) f_k(x) f_n(x) dx;$$

$$\text{при } n = k \quad \sum_{k=1}^{\infty} c_k \int_a^b \rho(x) f_k(x) f_n(x) dx = c_k \int_a^b \rho(x) f_k^2 dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{\int_a^b \rho(x) G(x) f_k(x) dx}{\int_a^b \rho(x) f_k^2(x) dx}, \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (1.7)$$

Коэффициенты c_k , построенные по формуле (1.6) или (1.7), называются **коэффициентами Фурье**.

1.3. Немного истории

Невозможно установить время первого появления числовых рядов.

Известно, что вавилонские математики умели суммировать геометрическую и арифметическую прогрессии. Понятие бесконечных сумм было известно учёным Древней Греции (Евклид, Архимед). Бесконечные суммы использовали в методе исчерпывания, который применялся математиками для нахождения площадей фигур, объёмов тел и длин кривых. Для вычисления площади параболического сегмента Архимед применял сумму бесконечной геометрической

прогрессии со знаменателем $\frac{1}{4}$. В Индии (XV в.) ряды помогли приближённо вычислить число $\frac{\pi}{4}$.

На 1-м рисунке изображён исходный квадрат, стороны которого равны единице. С одной стороны площадь этого квадрата равна единице, с другой стороны эту же площадь можно представить в виде бесконечного ряда, сумма которого равна единице:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1.$$

Такой простой и интересный, с точки зрения теории рядов, рисунок придумал итальянский математик Пьетро Менголи (1626–1686).

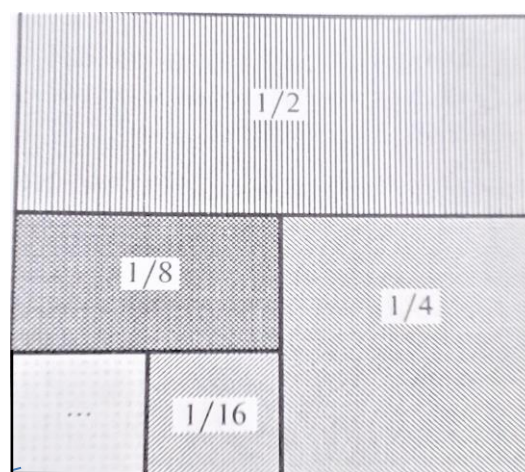


Рис. 1

Менголи ещё удалось доказать расходимость гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$$

Итальянский монах, философ и математик Гвидо Гранди (1671–1742) уверял, что верно равенство

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 + \dots = \frac{1}{1 - (-1)} = \frac{1}{2}$$

и оно иллюстрирует, как бог сотворил мир из ничего.

Слово *бесконечный*, как математический термин, впервые стал использовать с 1525 г. великий немецкий художник Альбрехт Дюрер (1471–1527). Знак бесконечности ∞ "любовный узел" ввёл (1655) знаменитый английский математик Джон Валлис (1616–1703). В древнем Риме этот символ означал число 1000. В математике знак ∞ стал общепринятым только с XVIII в.

Очень долго в математике не было чёткого понимания понятия сходимости числовых рядов. Современное определение сходимости ряда и его суммы

использует понятие предела и базируется на работах чешского математика Берхарда Больцано (1781–1848) и французского Луи Коши (1789–1857).

ЧИСЛО π

Среди всего множества действительных чисел особо выделяется число π . История этого числа теснейшим образом связана с появлением и дальнейшим развитием теории рядов. Его использовали математики, механики, астрономы и физики. О нём размышляли философы, религиозные деятели и художники.

Обозначение этого загадочного числа в виде греческой буквы π придумал английский математик Вильям Джонс (1675–1749). Всемирное признание это обозначение получило только после того, как его стал использовать Леонард Эйлер (1707–1783).

Многие математики пытались наиболее точно выразить число π через рациональные числа. Это удавалось сделать с помощью рядов.

Немецкий математик Готфрид Лейбниц (1638) открыл числовой ряд

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Английский математик Дункан Грегори (1670–1844) открыл другой интересный ряд

$$\frac{\pi}{6} = \left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{45} - \frac{1}{189} + \frac{1}{729} - \frac{1}{2673} + \dots \right);$$

этот ряд сходится гораздо быстрее ряда Лейбница.

Л Эйлер (1735), живя в Петербурге, построил ряд

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \dots$$

Индийский математик С. Рамануджан построил (1910) удачное равенство

$$\pi = \frac{9801}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k)!(1103 + 26390k)}{(k!)^4 396^{4k}}}.$$

По этой формуле число π вычисляется с точностью до 600 верных цифр, если $k = 100$. Интересный ряд для вычисления числа π был получен в 1995 г.

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right).$$

С 1988 года в Америке ежегодно 14-го марта (3,14) отмечают День числа π . Интересно, что в этот день родился великий Альберт Эйнштейн.

Глава 2

Числовые ряды

*Математика есть единая
симфония бесконечности.*

Давид Гильберт

2.1. Достаточные признаки сходимости положительных рядов

1. Первый признак сравнения. Даны два ряда

$$\text{I. } \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{II. } \sum_{n=1}^{\infty} b_n. \quad (2.1)$$

Предположим, что начиная с некоторого номера n выполняется неравенство

$$a_n \leq b_n. \quad (2.2)$$

Тогда из сходимости ряда II следует сходимость ряда I. Из расходимости ряда I следует расходимость ряда II.

Замечание 1. Если для рядов I и II выполняется неравенство (2.2), тогда ряд II называется **мажорантным** для ряда I.

2. Второй признак сравнения. Даны два ряда (2.1) и (2.2). Если существует не равный нулю конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = r \neq \begin{cases} 0, \\ \infty, \end{cases}$$

тогда эти ряды ведут себя одинаково в плане сходимости. Если известно, что сходится (расходится) один из этих рядов, то сходится (расходится) и другой. Можно сказать, что во 2-м признаке рассматриваются ряды, общие члены которых – бесконечно малые одного порядка:

$$a_n = O(b_n).$$

3. Признак Даламбера. Задан положительный числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \quad (2.3)$$

Находим для этого ряда предел отношения последующего члена ряда к предыдущему:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r.$$

Если $r < 1$ – ряд сходится, если $r > 1$ – ряд расходится, если $r = 1$, то вопрос о сходимости остаётся открытым.

4. Радикальный признак Коши. Для ряда (2.3) вычисляем предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = r.$$

Если $r < 1$ – ряд сходится, если $r > 1$ – ряд расходится, если $r = 1$ – вопрос о сходимости остаётся открытым.

5. Интегральный признак Коши. На основе ряда (2.3) строим родствен- ный ему несобственный интеграл. Процесс построения такого интеграла очень прост.

Численное значение любого слагаемого a_n ряда зависит от его номера n , поэтому можно a_n рассматривать как функцию целочисленного аргумента. Очевидно равенство

$$a_n = a(n),$$

где натуральная переменная n дискретно изменяется от 1 до $+\infty$. Поменяем обозначение переменной n на x , такое обозначение по умолчанию считается действительной непрерывной переменной. Пусть x изменяется в тех же пределах, что и переменная n . Строим несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} a(x) dx.$$

Если этот интеграл равен бесконечности, говорят, что он расходится. В этом случае ряд (2.3) тоже расходится. Если интеграл равен некоторому числу, то он сходится, тогда и ряд (2.3) сходится.

Разобраться с таким результатом просто, если вспомнить геометрический смысл определённого интеграла.

Интеграл

$$\int_1^{+\infty} a(x) dx$$

равен площади криволинейной трапеции с бесконечным "хвостом". Сумма ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) \cdot 1$$

равна площади ступенчатой фигуры, вписанной в эту криволинейную трапецию. Из геометрической интерпретации ясно, что если площадь криволинейной трапеции (рис. 2) бесконечна, то и площадь ступенчатой

фигуры бесконечна. Если площадь трапеции конечна, то площадь ступенчатой фигуры конечна.

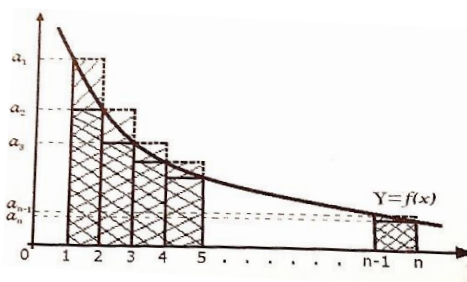


Рис.2

Представленные выше достаточные признаки сходимости не являются универсальными. Для одних рядов подходит признак Даламбера, для других радикальный признак Коши. Если интеграл, построенный на основе ряда, легко проинтегрировать, то используют интегральный признак Коши. Первый и второй признаки сравнения удобны в том случае, когда заранее известно, что сходится (расходится) ряд, общий член которого аналитически близок к общему члену изучаемого ряда.

2.1.1. Примеры исследования рядов на сходимость

Пример 1. Положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \dots$$

называется *гармоническим рядом*. Существует две версии появления такого названия. Возможно, из-за того, что каждый член ряда, начиная со второго – это среднее гармоническое двух соседних членов ряда:

$$a_i = \frac{2a_{i-1} \cdot a_{i+1}}{(a_{i-1} + a_{i+1})},$$

быть может из-за того, что такое соотношение встречается в музыке.

Исследуем этот ряд на сходимость с помощью интегрального признака Коши. Для этого строим несобственный интеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \ln x \Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln x - \ln 1 = +\infty.$$

Ответ: интеграл расходится, поэтому гармонический ряд расходится.

Пример 2. Положительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}, \quad (\forall p \neq 1, p \in \mathbb{R})$$

называется **обобщённым гармоническим рядом**. Исследуем его на сходимость с помощью интегрального признака Коши:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p} dx = \frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_1^{+\infty}.$$

Сходимость этого интеграла зависит от значения параметра p .

Ответ: возможны два случая:

$$1) \quad 1 - p > 0 \Rightarrow p < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} x^{-p+1} = +\infty \Rightarrow \text{ряд расходится.}$$

$$2) \quad 1 - p < 0 \Rightarrow p > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-p} x^{1-p} = 0 \Rightarrow \text{ряд сходится.}$$

Пример 3.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}.$$

Строим соответствующий несобственный интеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

С помощью введения новой переменной интегрирования (с помощью подстановки) он преобразуется в табличный интеграл:

$$\begin{aligned} t = \ln x \Rightarrow dt = d \ln x = \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{dt}{t} &= \ln|t| \Big|_{\ln 2}^{+\infty} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln|t| - \ln|\ln 2| = +\infty. \end{aligned}$$

Ответ: интеграл расходится, значит, исходный ряд тоже расходится.

Пример 4.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n!}.$$

Если общий член ряда содержит факториалы, лучше использовать признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n+1} = 0 < 1.$$

Ответ: по признаку Даламбера ряд сходится.

Пример 5.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}.$$

Используем признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{3^{n+1}}}{\frac{n^2}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2}.$$

Переменные $(n+1)^2$ и n^2 – эквивалентные бесконечно большие величины, если n стремится к бесконечности. Из теории пределов известно, что предел не изменится, если под знаком предела в операциях умножения и деления заменить бесконечно большую или бесконечно малую на эквивалентную ей величину, Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2} = ((n+1)^2 \sim n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{3n^2} = \frac{1}{3}.$$

Ответ: ряд сходится.

Пример 6.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(2n)!}.$$

Используем признак Даламбера

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3(2n)!}{(2(n+1))!n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3(2n)!}{(2n)!(2n+2)n^3} = 0 < 1.$$

Ответ: по признаку Даламбера ряд сходится.

Пример 7.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1} \right)^n.$$

Используем радикальный признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ответ: ряд сходится.

Пример 8.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}.$$

Для этого ряда удобен радикальный признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-1}\right)^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\frac{2n-1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{3n-1}\right)^{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{n}\right)} = \frac{1}{9}.$$

Ответ: ряд сходится.

Пример 9.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{n^n}.$$

Воспользуемся радикальным признаком Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^{n-1}}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n}}}{n} = 0^1 = 0.$$

Ответ: ряд сходится.

Пример 10.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

Сравним этот ряд с обобщённым гармоническим рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Очевидна справедливость неравенства

$$\frac{1}{n(n+3)} < \frac{1}{n^2}.$$

Ответ: ряд сходится по первому признаку сравнения.

Пример 11.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Сравним общий член этого ряда с общим членом гармонического ряда:

$$n > \ln(n+1) \Rightarrow \frac{1}{n} < \frac{1}{\ln(n+1)}.$$

Гармонический ряд расходится, значит, исходный ряд расходится по первому признаку сравнения.

Пример 12.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}.$$

Сравним ряд с гармоническим рядом и используем второй признак сравнения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ответ: предел не равен нулю и не равен бесконечности, поэтому по второму признаку сравнения исходный ряд расходится.

УПРАЖНЕНИЯ

Исследовать следующие ряды на сходимость.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}, \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^2}}{n^3+4}, \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{100^n}{n!}, \quad 4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+2}}, \quad 5. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n(n+2)}.$$

ОТВЕТЫ

Сходятся 1, 2, 3 ряды. Расходятся 4, 5 ряды.

2.2. Знакопередающие ряды

Особый интерес представляют числовые ряды, в которых знаки всех членов ряда чередуются. Они записываются в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \text{ или } \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n, \quad a_n > 0.$$

Для таких рядов Лейбниц вывел достаточный признак сходимости, который носит имя этого великого немецкого математика.

Достаточный признак Лейбница. Если модули всех членов знакопередающего ряда образуют монотонно убывающую последовательность:

$$a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > a_{n+1} \dots$$

и модуль общего члена стремится к нулю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

тогда знакопередающий ряд сходится.

Определение 1. Знакопередающий ряд, который удовлетворяет признаку Лейбница, называется *рядом Лейбница*.

ОСОБЕННОСТИ РЯДОВ ЛЕЙБНИЦА

1. Частичные суммы S_k , где k – чётное число, стремятся к сумме ряда возрастая, а частичные суммы S_m , где m – нечётное число, стремятся к сумме ряда убывая:

$$S_{2k} < S < S_{2k+1}, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} S_k = S, \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} S_m = S.$$

2. Знак суммы ряда Лейбница совпадает со знаком первого слагаемого ряда, а модуль этой суммы всегда меньше модуля его первого слагаемого

$$|S| < a_1.$$

3. Остаток сходящегося ряда является рядом Лейбница, поэтому модуль суммы остатка меньше модуля первого слагаемого остатка.

$$|R_N| < a_{N+1}.$$

Благодаря этому свойству очень просто оценить, насколько частичная сумма отличается от истинной суммы ряда.

2.2.1. Абсолютная и условная сходимости

Возьмём произвольный знакопередающий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$$

и построим новый положительный ряд, составленный из абсолютных величин слагаемых исходного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{2.4}$$

Определение 2. Знакопередающийся ряд называется *абсолютно сходящимся*, если сходится положительный ряд (2.4), составленный из модулей слагаемых исходного ряда.

Из абсолютной сходимости следует сходимость по Лейбницу. Из сходимости по Лейбницу не следует абсолютная сходимость ряда.

Определение 3. Знакопередающийся ряд называется *условно сходящимся*, если он сходится только по признаку Лейбница.

При исследовании положительного ряда (2.4) на сходимость можно использовать любой из перечисленных выше пяти признаков сходимости таких рядов.

Предположим, что удалось доказать расходимость ряда (2.4) по признаку Даламбера. Это означает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

Из этого неравенства следует, что бесконечная последовательность, составленная из модулей слагаемых знакопередающегося ряда, не является монотонно убывающей, поэтому такой ряд не сходится даже по признаку Лейбница.

Если установлено, что ряд абсолютно расходится с помощью других признаков сходимости, есть надежда, что он сходится хотя бы условно. Для этого надо дополнительно проверить ряд на сходимость по признаку Лейбница.

СРАВНЕНИЕ АБСОЛЮТНОЙ И УСЛОВНОЙ СХОДИМОСТЕЙ

Теорема 1. Если ряд сходится абсолютно, его сумма не изменится при любой перестановке слагаемых этого ряда. Можно сказать, что такой ряд обладает свойством коммутативности.

Если ряд сходится только по Лейбницу, то возможны такие перестановки слагаемых ряда, при которых знакопередающийся ряд будет иметь другую сумму или станет расходиться, поэтому ряды, сходящиеся только по Лейбницу, называют условно сходящимися. В них опасно менять местами слагаемые.

2.2.2. Геометрические ряды

Прогрессии в математике знали и использовали с древних времён. Термин произошёл от слова *progression*, смысл которого – *движение вперёд, успех, постепенное усиление*.

Определение 4. Бесконечной геометрической прогрессией называется числовая последовательность вида

$$b, bq, bq^2, \dots, bq^n, \dots$$

Число b называется первым членом прогрессии, q – знаменатель прогрессии.

На основе геометрической прогрессии строится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} bq^n,$$

который называют *геометрическим рядом* или *рядом геометрической прогрессии*. Если $|q| < 1$, геометрический ряд сходится, и его сумма вычисляется по известной со школы формуле

$$S = \frac{b}{1 - q}.$$

Прогрессия в этом случае называется бесконечно убывающей.

Если $|q| \geq 1$, геометрический ряд расходится.

2.2.3. Примеры исследования рядов на сходимость

Пример 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{5^{n^2}}{n!}.$$

Исследуем ряд на абсолютную сходимость с помощью признака Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{(n+1)^2} n!}{(n+1)! 5^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n^2+2n+1}}{(n+1) 5^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{2n+1}}{(n+1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Раскрыть такую неопределённость можно с помощью правила Лопиталья, если предположить, что дискретная переменная n будет непрерывно стремиться к бесконечности. Заменим дискретную величину n на непрерывную x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5^{2x+1}}{(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cdot 5^{2x+1} \cdot \ln 5}{1} = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{2n+1}}{(n+1)} = +\infty.$$

По признаку Даламбера исходный ряд абсолютно расходится

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1.$$

Ответ: ряд расходится.

Пример 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{5n+7}{9n+1} \right)^{3n}.$$

Для анализа ряда на абсолютную сходимость используем радикальный признак Коши:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n+7}{9n+1}\right)^{3n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+7}{9n+1}\right)^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n}{9n}\right)^3 = \left(\frac{5}{9}\right)^3 < 1.$$

Ответ: ряд сходится абсолютно, значит, сходится и по признаку Лейбница.

Пример 3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{7}{n^{0.5}}.$$

Ряд, составленный из модулей слагаемых исходного ряда, является обобщённым гармоническим рядом с показателем $0.5 < 1$, поэтому наш ряд абсолютно расходится. Проверим его на условную сходимость. Для этого обратимся к признаку Лейбница:

$$a_n = \frac{7}{n^{0.5}}, \quad a_{n+1} = \frac{7}{(n+1)^{0.5}} \Rightarrow a_n > a_{n+1} \text{ при } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Ответ: ряд сходится условно.

УПРАЖНЕНИЯ

Исследуйте знакочередующиеся ряды на абсолютную и условную сходимость.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^3}{2^n}, \quad 2. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{55n+1}, \quad 3. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^2}{n^2+1}.$$

ОТВЕТЫ

1. Сходится абсолютно. 2. Сходится только по Лейбницу (условно).

3. Расходится и абсолютно, и условно.

2.3. Немного истории

*Прогресс математики – накопленная
за века работа многих гениев.*

Тони Крыли «Математика, 50 идей,
о которых нужно знать»

Больцано Бернард (1781–1848) – чешский богослов, философ и математик. Он оказал большое влияние на Коши. Первый доказал, что если величины $f(x_1)$ и $f(x_2)$ имеют значения противоположных знаков, то между числами x_1 и x_2 , есть хотя бы одно число x_0 , при котором $f(x_0) = 0$, x_0 – корень функции. Он первый дал определение предела через $(\varepsilon; \delta)$ и определил бесконечно

малую величину на основе понятия предела. Ввёл одностороннюю непрерывность и окрестность точки. Нашёл критерии сходимости рядов.

В 1851 г. посмертно опубликовали его работу «Парадоксы бесконечности». Изучив эту работу, математический мир по праву стал считать Больцано основателем теории множеств. Он дал определения конечным и бесконечным множествам, ввёл понятие взаимно однозначного соответствия.

При жизни Больцано его математические рукописи долгие 15 лет были запрещены для публикации, так как императора Франца-Иосифа разгневали вольнодумные проповеди Больцано. Только в 1930 г. нашли и опубликовали его рукопись «Учение о функциях». Из содержания этого труда стало ясно, что он на несколько десятилетий обогнал своих современников.

Даламбер Жан ле Ронд (1717–1783) – французский математик. Современники считали его ведущим математиком-энциклопедистом.

Он был секретарём Французской академии наук и наиболее влиятельным учёным того времени. Даламбера интересовали многие вопросы математики. Он занимался несобственными интегралами, неопределённостями, теорией пределов и теорией сходимости рядов; поддерживал идею рассматривать время как четвёртое измерение.

Между Эйлером и Даламбером велась оживлённая переписка. Именно они дали (далёкое от совершенства) доказательство основной теоремы алгебры. Даламбер установил, что общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения и некоторого частного решения исходного неоднородного уравнения.

Даламбер первый ввёл понятие *натуральные числа*. Был лидером в изучении уравнений в частных производных. Он, как и Эйлер, стал представлять комплексные числа в тригонометрической форме. Вместе с Эйлером они изучали теорию колебания струн. У Даламбера первого возникла идея о бесконечностях различных порядков.

Имя Жан ле Ронд совпадает с названием церкви святого Жана ле Ронда. В Париже на ступенях этой церкви и был найден подкидыш – будущий знаменитый учёный Даламбер.

Дирихле Иоганн Петер (1805–1859) – немецкий математик и педагог. Дирихле первым привёл примеры условно сходящихся рядов, одна часть которых расходилась при определённых перестановках слагаемых, а другая часть сходилась, но для каждой новой перестановки была другая сумма для каждого из таких рядов.

Большой интерес к математике появился у Иоганна в раннем детстве. Сначала он окончил гимназию в Кёльне, потом отправился в Париж, где интенсивно занимался математикой совместно с Лежандром. Уже в 22 года он был хорошо известен и пользовался почётом в научных кругах Франции. После возвращения в Германию он 26 лет работал профессором в Берлинском университете, где продемонстрировал блестящие педагогические способности.

Его окружало много талантливых учеников, среди них были известные математики Л. Кронекер и Р. Липшиц.

Коши Огюстен Луи (1789–1857) – французский математик. Он окончил в Париже Политехническую школу и школу мостов и дорог. Стал профессором Политехнической школы, членом Парижской академии наук и почётным членом Петербургской академии наук.

После революции 1830 г. Коши находился в изгнании в Турине и Праге. Вернулся в Париж только в 1838 году. Через 10 лет, после новой революции, он получил должность профессора в Сорбонском университете.

Всё это время Коши интенсивно занимается математикой. Одной из первых теорем, доказанных Коши, была теорема о промежуточном значении непрерывной функции, поэтому её часто называют теоремой Коши. Он изучал числовые ряды, в результате, вывел два достаточных признака их сходимости. Эти признаки тоже носят имя его создателя: радикальный признак Коши, интегральный признак Коши. Исследуя функции комплексной переменной, Коши превратил эту работу в самостоятельную область математики.

Он был необычайно работоспособным. Опубликовал более 800 научных работ. Какое-то время Коши каждую неделю представлял в Парижскую академию новые статьи. Руководству пришлось ввести ограничение на их объём (не более четырёх страниц).

Предел последовательности использовал ещё Архимед, затем Галилей, Кавальери, Блез Паскаль и Сент-Винсент, который в 1764 году ввёл в употребление термин *limit*. Но стройную математическую теорию пределов создал Коши.

Он ввёл строгое определение предела функции в точке (1820), дал определение понятия непрерывности функции в точке и определение определённого интеграла как предела интегральных сумм.

Коши первый стал рассматривать бесконечно малую величину как переменную, предел которой равен нулю. После этого ушёл мистический туман, который покрывал понятие бесконечно малой.

В 1821 г. Коши опубликовал «Курс анализа», в основе которого лежала теория пределов. После Коши основой математического анализа стали понятия предела и предельного перехода.

Лейбниц Готфрид Вильгельм (1646–1717) – немецкий математик. В истории математики имена Ньютона и Лейбница стоят рядом. Но в жизни Лейбниц – противоположность Ньютону. Ньютон никогда не покидал Англию. Лейбниц, став дипломатом, жил и работал в разных странах Европы. Его интересовала философия и поэзия. Ньютон с детства увлекался изобретательством.

Отец Лейбница, Фридрих Лейбниц, был профессором философии. Он умер, когда сыну было всего 5 лет. С 8-и лет он читал книги из библиотеки отца. Почти все книги были написаны на греческом и латинском языках. Лейбниц самостоятельно выучил эти языки. В своей биографии Лейбниц писал: "Две вещи принесли мне большую пользу, хотя они часто приносят вред. Во-первых,

я был самоучкой; во-вторых, как только в какой-то науке я приобретал первые понятия, я всегда искал новое часто потому, что не мог хорошо усвоить первые понятия". В 15 лет Лейбниц стал студентом Лейпцигского университета. В 20 лет – доктор права и дипломат-международник.

В 1672г. Лейбниц-дипломат приехал в Париж для переговоров с королём Людовиком XIV. Ему всего 26 лет. В Париже он познакомился со знаменитым учёным Х. Гюйгенсом – президентом Французской академии наук. Под его руководством началось математическое образование Лейбница. Он изучил труды Декарта, Ферма, Паскаля и через четыре года сам подошёл к открытию дифференциального и интегрального исчисления. Его первая работа по дифференциальному исчислению была опубликована в 1684 году.

Лейбниц придумал названия: "дифференциальное исчисление", "интегральное исчисление", обозначения дифференциалов: dx , dy , знак интеграла $\int \dots$.

Благодаря Лейбницу математики стали пользоваться знаком равенства " $=$ ", знаком умножения " $\cdot$ ". Он ввёл в математику термины *функция* и *координаты*.

Лейбниц был чрезвычайно разносторонним человеком. Около 40 лет он совершенствовал свою счётную машину, которая могла выполнить четыре арифметических действия и извлекать квадратные корни. Он пришёл к идее парового двигателя и двоичного исчисления. Интересовался китайской философией. Старался помочь объединить разрозненную тогда Германию.

Постоянная публикация своих научных работ и активная научная переписка привели к появлению у Лейбница своей научной школы, в которую входили братья Бернулли, Эйлер и Лопиталь, ставший автором первого и очень удачного учебника по новому разделу математики, который сейчас называется математическим анализом. После публикации этой книги началось повсеместное распространение идей Лейбница, а исчисление бесконечно малых стало главным инструментом в математике XVIII столетия.

Слава Лейбница гремела по всей Европе. Он встречался со многими учёными и монархами. Основал и был президентом (1700) Бранденбургского научного общества, которое позже стало Берлинской академией наук.

По просьбе Петра I Лейбниц разрабатывал проекты развития образования и научных исследований в России. По совету Лейбница Пётр решил организовать в Петербурге Академию наук с университетом и гимназией. Предполагалось, что Академия станет не только научным, но и образовательным центром. В гимназии и университете должны были преподавать учёные. Подбор иностранных учёных сделали Вольф и Лейбниц. В Россию приехали молодые учёные. Среди них – братья Бернулли, Гольдбах и Эйлер.

Лейбниц рассматривал научную деятельность как религиозную миссию. Гармонию между реальным миром и миром математики Лейбниц объяснял единством реального мира и Бога.

Главный тезис Лейбница: "Наш мир – самый совершенный из всех миров и рациональное мышление открывает его законы".

Глава 3

Степенные ряды

Если тебе трудно сразу понять всю бесконечность, постарайся понять её хотя бы наполовину.
Из книги «Математики тоже шутят»

Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (3.1)$$

называется **степенным рядом**. Коэффициенты $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ и x_0 — действительные числа. Если $x_0 = 0$, степенной ряд становится рядом

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \quad (3.2)$$

Теорема 1. Теорема Абеля. Если степенной ряд (3.2) сходится для $x = x_1$ и $x_1 \neq 0$, то этот ряд абсолютно сходится при тех значениях переменной x , для которых верно неравенство

$$|x| < |x_1|.$$

3.1. Интервал сходимости

Поставим вопрос о сходимости ряда, составленного из абсолютных величин степенного ряда (3.2):

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|. \quad (3.3)$$

Очевидно, что из сходимости положительного ряда (3.3) следует сходимость степенного ряда (3.2). Зафиксируем в ряде (3.2) переменную x , тогда этот положительный ряд становится числовым. Его удобно исследовать на сходимость по радикальному признаку Коши или по признаку Даламбера.

Пусть $|a_n x^n| = b_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$. По признаку Даламбера числовой положительный ряд сходится, если

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} < 1 &\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 \Rightarrow |x| < \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Введём обозначение:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \quad (3.5)$$

Из последнего неравенства в (3.4) следует, что ряд (3.2) сходится, если

$$|x| < R$$

и расходится в случае

$$|x| > R.$$

Число R называется **радиусом сходимости степенного ряда** (3.2).

Если $R = 0$, то степенной ряд сходится только при $x = 0$. В случае $R = +\infty$, ряд сходится на всём множестве действительных чисел.

Положительный числовой ряд в (3.3) является мажорантным для степенного ряда (3.2), поэтому **интервал сходимости ряда** (3.2) равен $(-R; R)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \begin{cases} \text{сходится при } x \in (-R; R), \\ \text{расходится при } x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty). \end{cases}$$

Перейдём к случаю $|x| = R$. Для исследования на сходимость степенного ряда в граничных точках $x_1 = -R$, $x_2 = R$ заменяем в ряде (3.2) переменную x на радиус сходимости R . Ряд сразу станет числовым. Если он положительный, то по одному из пяти достаточных признаков легко ответить на вопрос о сходимости ряда. Если ряд станет знакопеременным, тогда проверяем его на абсолютную сходимость. В случае абсолютной расходимости, надо проверить ряд на условную сходимость. Такие же операции проводим для другой граничной точки $x = -R$.

Если степенной ряд имеет вид (3.1), то интервал сходимости такого ряда строится с помощью введения другой переменной. Сделаем подстановку. Пусть $x - x_0 = t$, тогда ряд приходит к виду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n.$$

Находим уже известным способом радиус сходимости этого ряда R . Ряд сходится в интервале

$$|t| < R \Rightarrow |x - x_0| < R \Rightarrow -R < x - x_0 < R \Rightarrow x_0 - R < x < R + x_0.$$

Из последнего двойного неравенства следует, что интервал сходимости ряда (3.1) равен $(x_0 - R; R + x_0)$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - c)^n - \begin{cases} \text{сходится при } x \in (x_0 - R; x_0 + R), \\ \text{расходится при } x \in (-\infty; x_0 - R) \cup (x_0 + R; +\infty). \end{cases}$$

Исследование на сходимость в граничных точках $x = x_0 - R$ и $x = x_0 + R$ проводится по той же схеме, что и для ряда (3.2).

РАВНОМЕРНАЯ СХОДИМОСТЬ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Для работы со степенными рядами важна следующая теорема.

Теорема 2. Если степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

сходится в интервале $(-R; R)$, то он равномерно сходится на любом отрезке из интервала сходимости этого ряда.

На таких отрезках степенные ряды обладают всеми свойствами равномерно сходящихся рядов. Обратимся к двум из этих свойств.

Пусть некоторая функция $f(x)$ равна степенному ряду, который сходится в интервале $(-R; R)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \forall x \in (-R; R).$$

1. Степенной ряд можно почленно дифференцировать:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \forall x \in [a; b] \in (-R; R)$$

В результате получился сходящийся степенной ряд, который вновь можно почленно дифференцировать:

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}, \forall x \in [a; b] \in (-R; R).$$

Процесс построения производных более высокого порядка неограничен. Производная любого порядка $f^{(n)}(x)$ будет снова равна равномерно сходящемуся степенному ряду для любого $x \in [a; b]$. Приходим к следующему выводу.

Если функция равна равномерно сходящемуся степенному ряду для $\forall x \in [a; b]$, то эта функция бесконечно дифференцируема в этом отрезке.

2. Степенной ряд можно почленно интегрировать по любому отрезку из интервала сходимости этого ряда:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_a^b x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \forall [a; b] \in (-R; R).$$

Результатом интегрирования является вновь степенной ряд.

Важно отметить, что степенные ряды, которые появляются при почленном дифференцировании и интегрировании, имеют тот же интервал сходимости,

что и исходный степенной ряд. Сходимость таких рядов в граничных точках области сходимости надо проверять отдельно.

3.2. Примеры нахождения области сходимости

Переходим к примерам нахождения областей сходимости степенных рядов.

Пример 1.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Вычисляем радиус сходимости

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1}; \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Ряд сходится в интервале $(-1; 1)$ и расходится в областях $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

Исследуем ряд на сходимость в граничных точках. Пусть $x = 1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Это – гармонический ряд, он расходится. Пусть $x = -1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Наш ряд абсолютно расходится, а по признаку Лейбница сходится, поэтому есть условная сходимость.

Ответ: ряд сходится, если $x \in [-1; 1)$ и расходится вне этой области.

Пример 2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n.$$

Вычисляем радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ответ: ряд сходится только при $x = 0$.

Пример 3.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad (0! = 1).$$

Находим радиус сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! (n+1)}{n!} = +\infty.$$

Ответ: ряд сходится на всём множестве действительных чисел ($\forall x \in \mathbb{R}$).

Пример 4.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} (x-5)^n.$$

Пусть $(x-5) = t$, тогда исходный ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} t^n.$$

Вычисляем радиус сходимости этого ряда

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3^n}{n^2}}{\frac{3^{n+1}}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{3n^2} = ((n+1)^2 \sim n^2) = \frac{1}{3}.$$

Ряд сходится, если

$$-\frac{1}{3} < t < \frac{1}{3}.$$

Проверяем ряд на сходимость в граничных точках этой области. Пусть $t = \frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Последний ряд – это обобщённый гармонический ряд с показателем 2, значит, он сходится. Перейдём к другой граничной точке $t = -\frac{1}{3}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Это – знакочередующийся ряд. Он сходится абсолютно, так как сходится ряд, составленный из абсолютных величин его слагаемых.

Область сходимости ряда относительно переменной t равна отрезку $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$,
но

$$(x-5) = t \Rightarrow x = t + 5,$$

поэтому область сходимости ряда относительно переменной x равна $\left[\frac{14}{3}; \frac{16}{3}\right]$.

Ответ: исходный степенной ряд сходится на отрезке $\left[\frac{14}{3}; \frac{16}{3}\right]$ и расходится вне этого отрезка.

УПРАЖНЕНИЯ

Определите область сходимости следующих рядов.

$$1. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^{n-1}n} x^{n-1}, \quad 2. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (x-2)^{n-1}, \quad 3. \sum_{n=4}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n \ln(n+3)} (x-3)^n.$$

ОТВЕТ

$$1. [-3;3), \quad 2. (-\infty, +\infty), \quad 3. (0;6].$$

3.3. Ряды Тейлора и Маклорена

Примерами разложения функции по системе линейно независимых функций являются ряды Тейлора и Маклорена.

Предположим, что некоторая функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в точке x_0 и некоторой её окрестности и равна сходящемуся степенному ряду:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R). \quad (3.6)$$

Найдём связь между функцией и коэффициентами степенного ряда (3.6).

Пусть $x = x_0$, тогда

$$a_0 = f(x_0) = \frac{f(x_0)}{0!}, \quad (0! = 1).$$

Продифференцируем равенство (3.6):

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} \Rightarrow a_1 = f'(x_0) = \frac{f'(x_0)}{1!}.$$

Возьмём вторую производную от равенства (3.6):

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (x - x_0)^{n-2} \Rightarrow a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}.$$

После взятия производной n -го порядка получаем формулу

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Приходим к следующему выводу. Если функция бесконечно дифференцируема в некоторой точке x_0 и её окрестности, тогда эту функцию можно представить единственным образом в виде степенного ряда:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n, \quad x \in (x_0 - R; x_0 + R). \quad (3.7)$$

Построенный степенной ряд называется **рядом Тейлора**. Если точка $x_0 = 0$, то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} x^n, \quad x_0 \in (-R; R). \quad (3.8)$$

Такой ряд называют **рядом Маклорена**.

Теорема 3. Условие разложимости функции в ряд Тейлора. Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема в области $(-R + x_0; x_0 + R)$ и модули её производных любого порядка ограничены некоторым числом M , тогда функцию можно разложить в ряд Тейлора в заданной области.

3.3.1. Примеры разложения функций в ряд Маклорена.

Достаточно просто представить в виде ряда Маклорена простейшие элементарные функции и найти по формуле (3.5) их радиусы сходимости. Приведём несколько примеров таких рядов.

$$1. e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$2. \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$3. \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$4. \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad x \in (-1; 1];$$

$$5. (1+x)^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)}{n!} x^n, \quad x \in (-1; 1).$$

Последний ряд называется биномиальным. Если показатель степени $\mu = -1$, то

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \quad x \in (-1; 1).$$

6. Функцию

$$y = \frac{1}{1-x}$$

можно рассматривать как сумму убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $|x| < 1$. Поэтому эту функцию можно сразу представить в виде степенного ряда Маклорена:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad x \in (-1; 1).$$

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Из теории пределов известно, что две функции $\beta(x)$ и $\gamma(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми в окрестности точки x_0 , если для них выполняются следующие соотношения

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \gamma(x) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = 1. \end{cases}$$

При нахождении пределов часто используется (без доказательства) список эквивалентных бесконечно малых функций. Напомним простейший вид этого списка.

Пусть переменная $x \rightarrow 0$, тогда

$$1. \quad e^x - 1 \sim x, \quad 2. \quad \sin x \sim x, \quad 3. \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad 4. \quad \ln(1+x) \sim x,$$

$$5. \quad (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x.$$

Теперь, с помощью рядов Маклорена, можно легко доказать справедливость таких эквивалентных соотношений.

$$1. \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \Rightarrow e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots.$$

Делим последнее равенство на переменную x и переходим к пределу

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right) = 1 \Rightarrow e^x - 1 \sim x.$$

Аналогичные преобразования можно сделать с равномерно сходящимися степенными рядами 2, 3, 4, 5. В результате придём к известным эквивалентным величинам

$$2. \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \Rightarrow \sin x \sim x.$$

$$3. \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + \dots \Rightarrow 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}.$$

$$4. \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \dots \Rightarrow \ln(1+x) \sim x.$$

$$5. (1+x)^\mu = 1 + \mu x + \frac{\mu(\mu-1)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\mu(\mu-1) \dots (\mu-n+1)}{n!} x^n + \dots \\ \Rightarrow (1+x)^\mu - 1 \sim \mu x.$$

Приведём примеры разложения других функций в ряд Маклорена.

Пример 1. Для разложения функции $y = \cos^2(x)$ используем известную тригонометрическую формулу понижения степени

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos(2x)).$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \Rightarrow \cos(2x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (2x)^{2n} \Rightarrow$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Пример 2. Для разложения функции $y = \frac{1}{1+x^2}$ используем разложение

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \Rightarrow \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad x \in (-1; 1).$$

Пример 3. Представим в виде ряда Маклорена функцию $y = \operatorname{arctg} x$. Для упрощения построения ряда обратимся к производной этой функции:

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \forall x \in (-1; 1) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg} x &= \int_0^x \operatorname{arctg}' x \, dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x x^{2n} \, dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{arctg} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \forall x \in [-1; 1].\end{aligned}$$

Этот степенной ряд сходится по признаку Лейбница на границе области, поэтому функция $\operatorname{arctg} x$ равна своему степенному ряду на отрезке $[-1; 1]$. Построенный ряд удобно использовать для представления числа $\frac{\pi}{4}$ в виде сходящегося числового ряда

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{arctg} 1 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

УПРАЖНЕНИЯ

Разложите следующие функции в ряд Маклорена и найдите радиус сходимости каждого ряда.

$$1. y = \frac{x}{5x-1}, \quad 2. y = \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad 3. y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Разложите следующие функции в ряд Тейлора в окрестности заданной точки и найдите интервал сходимости.

$$4. y = \ln x, \quad x_0 = 1, \quad 5. y = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1, \quad 6. y = \frac{1}{3x-5}, \quad x_0 = 2.$$

ОТВЕТЫ

$$1. \frac{x}{5x-1} = - \sum_{n=0}^{\infty} 5^n x^{n+1}, \quad x \in \left(-\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right);$$

$$2. \ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad x \in (-1; 1);$$

$$3. \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

$$4. \ln x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n, \quad x \in (0; 2]; \quad 5. \frac{1}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-1)^n, \quad x \in (0; 2);$$

$$6. \frac{1}{3x-5} = \sum_{n=0}^{\infty} (-3)^n (x-2)^n, \quad x \in \left(\frac{5}{3}; \frac{7}{3}\right).$$

3.3.2. Формула Эйлера

Первая встреча с формулой Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

произошла при изучении алгебры комплексных чисел. Теперь знаменитую формулу можно просто вывести с помощью рядов Маклорена. Для этого используем ряды 1, 2, 3:

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{ix} &= 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \dots + \frac{(ix)^n}{n!} + \dots. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Упростим ряд (3.9):

$$\begin{aligned} i^1 &= i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \\ i^5 &= i, \quad i^6 = -1, \quad i^7 = -i, \quad i^8 = 1, \\ &\dots\dots\dots \\ i^{4k+1} &= i, \quad i^{4k+2} = -1, \quad i^{4k+3} = -i, \quad i^{4k+4} = 1, \dots \end{aligned}$$

Теперь ряд (3.9) приобретает более простой вид

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} \dots\dots$$

Сгруппируем слагаемые ряда, не содержащие мнимую единицу, и слагаемые, в которых она есть:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \right) + i \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right).$$

В первых скобках расположено разложение в ряд функции $y = \cos x$, во вторых – разложение в ряд функции $y = \sin x$. Мы пришли к формуле Эйлера

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

3.4. Многочлен Тейлора

Ряд Тейлора можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_N. \quad (3.10)$$

Частичная сумма в этом равенстве называется *многочленом Тейлора*, а R_N называется *остаточным членом или остатком*.

Предположим, что функция $f(x)$ только $(N + 1)$ непрерывно дифференцируема в области $[a; b]$. Такие функции не разложить в ряд Тейлора, но тоже можно представить в виде

$$f(x) = \sum_{n=0}^N \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + R_N.$$

Есть различные формы оценки остатка R_N . Наиболее часто используют оценку остатка в форме Пеано

$$R_N = O((x - x_0)^{N+1})$$

или в форме Лагранжа

$$R_N = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N + 1)!} (x - x_0)^{N+1},$$

где ξ – некоторое число, расположенное между величинами x и x_0 .

3.4.1. Аппроксимация производных

Многочлены Тейлора успешно используют для аппроксимации (приближения) значений производных функций. Здесь мы ограничимся только простыми примерами аппроксимации первой и второй производных.

Пусть $y = f(x)$ – дважды непрерывно дифференцируемая функция и задана в области $[a; b]$. Разобьём область на n равных частей с достаточно малым шагом разбиения:

$$h = (b - a)/n, \quad (h \ll 1).$$

Пусть $\{x_i\}_{i=0}^n$ – **узлы разбиения отрезка** $[a; b]$, $\{y_i\}_{i=0}^n$ – соответствующие им значения функции. Выразим значение функции $y(x)$ в узле x_{i+1} через значение этой функции и её производной в предыдущем узле x_i . Для этого используем формулу (3.10):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{y'_i}{1!} h + O(h^2) \Rightarrow y_{i+1} - y_i = y'_i h + O(h^2).$$

Разделим последнее равенство на h

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{h} = y'_i + O(h).$$

Приходим к формуле

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}. \quad (3.11)$$

Порядок точности формулы (3.11) равен $O(h)$.

Формула (3.11) называется **правосторонней разностной аппроксимацией** первой производной в любом внутреннем узле x_i . В левой граничной точке отрезка $[a; b]$ производная функции вычисляется по формуле

$$y'(a) = y'_0 = \frac{y_1 - y_0}{h}.$$

В правой граничной точке

$$y'(b) = y'_n = \frac{y_{n-1} - y_n}{-h} = \frac{y_n - y_{n-1}}{h}.$$

С помощью формулы Тейлора построим другую формулу аппроксимации первой производной с более высоким порядком точности.

Пусть функция $y = f(x)$ трижды непрерывно дифференцируема на $[a; b]$ с тем же разбиением. Выразим y_{i+1} и y_{i-1} через значения функции и её производных во внутреннем узле разбиения x_i :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{y'_i}{1!}h + \frac{y''_i}{2!}h^2 + O(h^3),$$

$$y_{i-1} = y_i - \frac{y'_i}{1!}h + \frac{y''_i}{2!}h^2 - O(h^3).$$

От первого равенства отнимаем второе:

$$y_{i+1} - y_{i-1} = 2y'_i h + O(h^3).$$

Из последнего равенства выразим значение первой производной:

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2).$$

Получаем формулу

$$y'_i = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}. \quad (3.12)$$

Её называют **центрально-разностной аппроксимацией** первой производной. Эту формулу можно использовать в любом внутреннем узле x_i отрезка $[a; b]$. Порядок точности формулы (3.12) равен $O(h^2)$.

Предположим, что функция $y(x)$ имеет непрерывную производную 4-го порядка. Запишем для неё два многочлена Тейлора, используя соседние узлы x_{i-1} , x_i , x_{i+1} :

$$y_{i+1} = y_i + \frac{y'_i}{1!}h + \frac{y''_i}{2!}h^2 + \frac{y'''_i}{3!}h^3 + \frac{y^{(4)}(c_1)}{4!}h^4, \quad c_1 \in (x_i, x_{i+1}),$$

$$y_{i-1} = y_i - \frac{y'_i}{1!}h + \frac{y''_i}{2!}h^2 - \frac{y'''_i}{3!}h^3 + \frac{y^{(4)}(c_2)}{4!}h^4. \quad c_2 \in (x_{i-1}, x_i).$$

Складываем эти равенства

$$y_{i+1} + y_{i-1} = 2y_i + 2\frac{y''_i}{2!}h^2 + O(h^4).$$

Выразим из последнего равенства вторую производную:

$$y_i'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + O(h^2).$$

Построена формула

$$y_i'' = \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}. \quad (3.13)$$

Её называют **центрально-разностной аппроксимацией** второй производной и используют в любом внутреннем узле x_i отрезка $[a; b]$. Порядок погрешности этой формулы $O(h^2)$.

Разностные приближения производных используют для решения линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка с заданными краевыми условиями. С помощью формул (3.11) – (3.13) решение таких дифференциальных уравнений сводится к решению линейных алгебраических систем (приложение 2).

3.5. Немного истории

Вейерштрасс Карл Теодор Вильгельм (1815–1897) – немецкий математик, почётный член Петербургской академии наук. Родился в Вестфалии. Учился в Боннском университете. С 14 лет работал в католической гимназии, там преподавал математику, физику, ботанику, географию, историю, чистописание и немецкий язык. Свободное от работы время посвящал математике. В 1854 г. его пригласили работать в университет Кенисберга, где ему присвоили звание доктора наук за работы в области математического анализа. С 1856 г. Вейерштрасс более 30 лет читал лекции по математике в Берлинском университете.

Вейерштрасс не любил публиковать свои математические труды. Поэтому результаты его творчества, прежде всего, изучали ученики Вейерштрасса. Благодаря им учёный завоевал большой авторитет в научном мире. Его курсы лекций по математике считались образцовыми. Выражение *условная сходимостъ и равномерная сходимостъ ряда* он впервые использовал в своих лекциях.

В число учеников и друзей Вейерштрасса входила – знаменитая русская женщина – математик Софья Васильевна Ковалевская.

Лагранж Жозеф Луи (1736–1813) – французский математик. Император Наполеон любил беседовать с Лагранжем на философские, государственные и математические темы. Он считал Лагранжа самым скромным математиком и величественной пирамидой математических наук. Лагранж стал графом, сенатором и командиром ордена почётного легиона. Король Людовик XVI осыпал Лагранжа почестями. Некоторое время он даже жил в Лувре.

Лагранж родился в итальянском городе Турине. Дед его был французом, бабушка – итальянка. Лагранжа крестили под итальянским именем Джузеппе. В итальянской энциклопедии он – итальянский учёный. В других странах его считают французским математиком.

Лагранж был одиннадцатым и последним ребёнком в семье. Его отец ко времени рождения Лагранжа потерял своё состояние. Позже Лагранж писал: "Если бы я унаследовал состояние, то мне, вероятно, не пришлось бы связать свою судьбу с математикой".

В детстве Лагранж увлекался латынью и случайно изучил, написанную на этом языке, научную книгу «О преимуществах аналитического метода», автор книги Е. Галлей – друг Ньютона. Книга посвящена применению математического анализа в оптике. С тех пор и на всю жизнь Лагранж заболел математикой. К 17-и годам он изучил много известных к тому времени трудов по математике и приступил к самостоятельным исследованиям. В 19 лет Лагранж стал профессором Королевской артиллерийской школы. Ещё через год его избрали в Берлинскую академию наук. В родном Турине он организовал свою академию наук. По просьбе Эйлера Лагранж переехал в Берлин и стал руководить Берлинской академией, вместо уехавшего в Петербург Эйлера.

Лагранж настолько плодотворно использовал математику в механике, что пошёл дальше Ньютона. Сейчас классическая механика наполовину может быть названа "лагранжевой". Во время берлинского периода Лагранжу пять раз присуждали премии Парижской академии за работы в области небесной механики. Король Пруссии Фридрих II был покровителем Лагранжа и проводил многие часы в беседах с ним. После смерти Фридриха II учёный вернулся в Париж. В 1790 г. Лагранжа включили в комиссию по стандартизации системы мер и весов. Они сыграли главную роль в ведении десятичной метрической системы.

В 1794, 1795 гг. во Франции открылись две знаменитые школы: Политехническая школа для подготовки офицеров и инженеров и Нормальная школа для подготовки учителей. В этих школах Лагранж читал лекции по математическому анализу и элементарной математике.

В книге Лагранжа «Теория аналитических функций» (1797) впервые появились термины и обозначения, которые и сейчас успешно используют во всём математическом мире. Это термины: *производная*, *первообразная* и обозначения: y' и $f'(x)$. Лагранж ввёл понятие *остаточный член ряда* и оценил его для ряда Тейлора. Современный вид записи ряда Тейлора тоже придумал Лагранж.

Маклорен Колин (1698–1746) – знаменитый шотландский математик. Он первый оценил важность ряда Тейлора и стал исследовать его на сходимость. Опубликовал работу о разложении функций в степенные ряды. Эта работа была очень популярна в Европейском математическом сообществе в XVIII–XIX вв.

Интересно отметить, что интегральный признак сходимости числовых рядов был открыт Маклореном (1742), а затем вновь изобретён Коши, после чего этот признак стал широко известен. Ряд Маклорена тоже получил всеобщее признание только после того, как Эйлер представил его в работе «Дифференциальное исчисление».

Тейлор Брук (1685–1731) – знаменитый английский математик Тейлор Брук с шести лет учился в Кембридже в колледже Святого Джона. Получил хорошее общее, музыкальное и художественное образование. Тейлор обладал не только большими математическими способностями, но был ещё хорошим музыкантом и художником. Его научная работа была разнообразной. Тейлор занимался теорией полёта снарядов, исследовал взаимодействие магнитов и капиллярные явления.

В 1715 г. вышла книга Тейлора «Метод разностей». В этой работе впервые приращение функции представлено в виде ряда по степеням приращения аргумента. Он использовал свой ряд для интегрирования (решения) некоторых дифференциальных уравнений. Впоследствии этот ряд назвали рядом Тейлора.

Кроме занятий математикой, музыкой и живописью он несколько лет был секретарём комитета по рассмотрению приоритета между Ньютоном и Лейбницем относительно авторства в создании дифференциального и интегрального исчисления.

Эйлер Леонард (1707–1783). Вклад этого учёного в математику настолько велик, что XVIII век в науке часто называют веком Эйлера.

Л. Эйлер родился в швейцарском городе Базеле в семье пастора. Отец хотел, чтобы сын стал священником, но с раннего детства любил заниматься с сыном математикой, превращал эти занятия в игру. В 13 лет Эйлер стал студентом философского факультета университета, В 17 лет ему присвоили степень магистра искусств за доклад о сравнении философских взглядов Ньютона и Декарта. Большую роль в судьбе Эйлера сыграло знакомство с семьёй математиков Бернулли.

Эйлер приехал в Петербург в 1727г. в день смерти Екатерины I. Без её покровительства Академия быстро пришла в упадок, поэтому многие иностранные академики уезжали на родину. Но Эйлер остался и в 1729 г. стал профессором. Через год возглавил кафедру математики, а когда в 1733 году Даниил Бернулли возвратился в Швейцарию, Эйлер в возрасте двадцати шести лет стал ведущим математиком Петербургской академии.

Эйлер отличался уникальной трудоспособностью и постоянным стремлением к математическому творчеству. Он получил блестящие результаты в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, в теории чисел и дифференциальной геометрии. Ввёл двойные интегралы, заложил основы математической физики. Автор книг: «Введение в вычисление бесконечно малых», «Дифференциальное исчисление» и «Интегральное исчисление».

Благодаря Эйлеру Петербургская академия стала одним из крупнейших научных математических центров Европы.

В 1741 г. он уехал из России в Германию, так как после кончины императрицы Анны в Академии начались притеснения иностранных учёных. В Германии Эйлер руководил Берлинской академией наук.

Тем временем в России начиналось правление Екатерины II. Она высоко ценила Эйлера и настойчиво приглашала его вернуться. Обещала выполнить все требования учёного. В 1766 году Эйлер вернулся в Россию.

В одном из писем Екатерина II пишет: "Я уверена, что моя Академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека".

Эйлер прожил в России 31 год. Из 26-ти томов, выпущенных Академией за это время, более половины написаны Эйлером. Список трудов Эйлера содержит 850 наименований. Петербургская академия наук в течение 47-ми лет издавала рукописи Эйлера.

Интересы Эйлера были разнообразны. Кроме науки его увлекала техника, религия и музыка. Он обладал педагогическим мастерством. Сразу после 1-го приезда в Россию стал одним из первых преподавателей математики в академической гимназии. Эйлер первым в российском школьном образовании стал давать логические обоснования различным математическим правилам. Он уделял большое внимание проблемам математического образования и высоко ценил французскую педагогическую школу. Считал, что надо учить математике, совмещая научность с простотой. С помощью Эйлера образование в России очень быстро приблизилось к европейскому уровню.

Эйлер написал учебник «Полное введение в алгебру», по которому читатель мог бы самостоятельно изучить основы алгебры.

Ослепший Эйлер диктовал эту книгу мальчику-слуге, который до этого был портным и не знал математику. В процессе работы над книгой мальчик понял всё, что диктовал ему великий слепой и решил все задачи из этой книги.

Этот учебник стал основой для всех последующих учебников алгебры до начала XX века. Эйлер ещё написал на немецком языке учебник по математике. Русский перевод этой книги вышел под названием «Универсальная арифметика». Прекрасный подбор материала и простой язык изложения сделали этот учебник самым популярным. Книга много раз переиздавалась на немецком, русском, французском, английском и голландском языках.

До Эйлера понятие логарифма излагалось очень туманно, поэтому учение о логарифмах он изложил в своей книге заново. По просьбе Академии наук он написал интересную методическую работу «Руководство к арифметике».

В течение почти трёх столетий школьная математика в России строилась на основе идей Эйлера. Он уделял много внимания подготовке учёных для Академии наук. Первые русские академики учились у Эйлера.

Известный русский математик Б.И. Делоне писал, что нет учёного, имя которого упоминалось бы в учебной математической литературе так же часто, как имя Эйлера. Десятки формул, уравнений и интегралов носят его имя. Он внёс большой вклад в механику, гидродинамику, оптику, астрономию, картографию, теорию корабля, баллистику и артиллерию.

Математические труды Леонарда Эйлера заложили мощный фундамент для петербургской математической школы.

Глава 4

Тригонометрические ряды Фурье

*Тайна успеха состоит в том, чтобы
сделать работу удовольствием.*

Марк Твен (1864 – 1910) –
знаменитый американский писатель

Известный венгерский математик К. Ланцош считал, что открытие тригонометрического ряда Фурье оказало наиболее глубокое влияние на всё развитие математического анализа.

4.1. Гармоники

Перейдём к периодическим функциям $f(x)$ с периодом T :

$$f(x) = f(x + T).$$

В качестве примера периодических функций можно рассмотреть функцию вида

$$A \sin(\omega x + \varphi) = A \sin\left(\omega\left(x + \frac{2\pi}{\omega}\right) + \varphi\right) = A \sin(\omega x + \varphi + 2\pi). \quad (4.1)$$

Эта функция называется *элементарной гармоникой (гармоникой)*. Она связана с математическим описанием простейшего колебательного движения. Обратимся к смыслу параметров, входящих в правую часть равенства (4.1).

A – **амплитуда** – максимальное отклонение движущейся точки от её состояния покоя.

$\omega = \frac{2\pi}{T}$ – **частота** – число колебаний за время 2π .

φ – **начальная фаза** – характеризует положение точки в начальный момент.

$T = \frac{2\pi}{\omega}$ – **период** колебательного движения.

Замечание 1. График гармоник строится на основе графика простейшей синусоиды с помощью её равномерного сжатия или растяжения в направлении координатных осей и сдвига вдоль оси абсцисс.

При анализе гармоник её часто преобразуют к другому виду:

$$A \sin(\omega x + \varphi) = A \sin \varphi \cos \omega x + A \cos \varphi \sin \omega x.$$

Введём обозначения. Пусть $a = A \sin \varphi$, $b = A \cos \varphi \Rightarrow$

$$\Rightarrow A \sin(\omega x + \varphi) = a \cos \omega x + b \sin \omega x.$$

Верна и обратная операция. Если гармоника задана в виде

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x,$$

введём обозначения:

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin \varphi = \frac{a}{A}, \quad \cos \varphi = \frac{b}{A},$$

тогда гармоника будет представлена в виде

$$A \sin(\omega x + \varphi).$$

ПЕРИОДЫ ГАРМОНИК

В равенстве (4.1) периодом гармоник является $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Введём другое обозначение для периода. Пусть

$$T = 2l \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{2\pi}{2l} = \frac{\pi}{l}.$$

Теперь можно записать гармонику в другом виде

$$a \cos \omega x + b \sin \omega x = a \cos \frac{\pi}{l} x + b \sin \frac{\pi}{l} x.$$

Возьмём N элементарных гармоник с частотами $\omega_k = \frac{\pi k}{l}$, каждая из таких гармоник представляется как

$$a_k \cos \frac{\pi k}{l} x + b_k \sin \frac{\pi k}{l} x \quad (k = 1, 2, \dots, N),$$

периоды которых

$$T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2\pi l}{\pi k} \Rightarrow T_k = \frac{2l}{k}.$$

Построим сумму

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left(a_k \cos \frac{\pi k}{l} x + b_k \sin \frac{\pi k}{l} x \right), \text{ где } \frac{a_0}{2} = \text{const.}$$

В наших обозначениях период

$$T = 2l, \quad T_k = \frac{2l}{k} \Rightarrow l = \frac{kT_k}{2} \Rightarrow 2l = T = kT_k.$$

Из последнего равенства следует, что у всех гармоник этой суммы есть общий период $2l$. Значит, сумма $S_N(x)$ – это тригонометрический многочлен порядка N . Его период тоже равен $2l$.

4.2. Ортогональные тригонометрические системы функций

Докажем ортогональность системы тригонометрических функций

$$\left\{ \cos \frac{k\pi x}{l}; \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=0}^{+\infty}, \quad x \in [-l; +l]. \quad (4.2)$$

Пусть n, m – любые неотрицательные целые числа. Произведение чётной и нечётной функции – нечётная функция, а интеграл от нечётной функции по симметричной области всегда равен нулю, поэтому

$$\left(\cos \frac{m\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^{+l} \cos \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0.$$

Перейдём к исследованию на ортогональность функций $\left\{\cos \frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=0}^{+\infty}$ на отрезке $[-l; +l]$. Пусть $n \neq m$. Интеграл от чётной функции по симметричному интервалу равен удвоенному интегралу по половине области интегрирования:

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{m\pi x}{l}\right) &= \int_{-l}^{+l} \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = 2 \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{2}{2} \int_0^{+l} \left(\cos \frac{(n+m)\pi x}{l} + \cos \frac{(n-m)\pi x}{l}\right) dx = \\ &= \left(\frac{l}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi x}{l} + \frac{l}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi x}{l} +\right) \Bigg|_0^l = \\ &= \left(\frac{l}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi l}{l} + \frac{l}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi l}{l}\right) - 0 = \\ &= \frac{l}{(n+m)\pi} \sin \pi(n+m) + \frac{l}{(n-m)\pi} \sin \pi(n-m) = 0. \end{aligned}$$

Перейдём к случаю $n = m \neq 0$

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{n\pi x}{l}\right) &= 2 \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{2} \int_0^l \left(1 + \cos \frac{2n\pi x}{l}\right) dx = \\ &= \left(x + \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l}\right) \Bigg|_0^l = l + \frac{l}{2n\pi} \sin 2n\pi = l. \end{aligned}$$

Если $n = m = 0$, то

$$\left(\cos \frac{0\pi x}{l}, \cos \frac{0\pi x}{l}\right) = \int_{-l}^l 1^2 dx = l - (-l) = 2l.$$

Аналогично доказывается ортогональность $\left\{\sin \frac{n\pi x}{l}\right\}_{n=1}^{+\infty}$ на отрезке $[-l; +l]$.

Пусть $n \neq m$, тогда

$$\begin{aligned}
\left(\sin \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{m\pi x}{l}\right) &= \int_{-l}^{+l} \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 2 \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \\
&= \frac{-2}{2} \int_0^l \left(\cos \frac{(n+m)\pi x}{l} - \cos \frac{(n-m)\pi x}{l} \right) dx = \\
&= - \left(\frac{l}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi x}{l} - \frac{l}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi x}{l} \right) \Big|_0^l = \\
&= \left(\frac{l}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi l}{l} - \frac{l}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi l}{l} \right) - 0 = \\
&= \frac{l}{(n-m)\pi} \sin \pi(n-m) - \frac{l}{(n+m)\pi} \sin \pi(n+m) = 0.
\end{aligned}$$

Пусть $n = m$. Вычислим следующее скалярное произведение

$$\begin{aligned}
\left(\sin \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}\right) &= 2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{2}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l}\right) dx = \\
&= \left(x - \frac{l}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{l}\right) \Big|_0^l = l - \frac{l}{2n\pi} \sin 2n\pi = l.
\end{aligned}$$

Итак, доказано, что система функций

$$\left\{ \cos \frac{n\pi x}{l}; \sin \frac{n\pi x}{l} \right\}_{n=0}^{+\infty}$$

ортogonalна в области $[-l; +l]$. Значит, любую интегрируемую функцию на отрезке $[-l; +l]$ можно представить в виде тригонометрического ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right). \quad (4.3)$$

Коэффициенты в этом разложении вычисляются по формуле (1.6):

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx,$$

где $k = 1, 2, 3, \dots$.

4.3. Разложение чётных и нечётных функций

Чётная функция $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье на отрезке $[-l; +l]$ только по косинусам:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}, \text{ где } a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx,$$
$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0.$$

Нечётная функция $f(x)$ раскладывается в ряд Фурье на отрезке $[-l; +l]$ только по синусам:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx,$$
$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = 0.$$

4.4. Разложение функции на отрезке $[0; l]$

Перейдём к проверке на ортогональность функций $\left\{ \cos \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=0}^{+\infty}$ на $[0; l]$.

Пусть $n \neq m$

$$\begin{aligned} \left(\cos \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{m\pi x}{l} \right) &= \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{m\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l \left(\cos \frac{(n+m)\pi x}{l} + \cos \frac{(n-m)\pi x}{l} \right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{l}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi x}{l} + \frac{l}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi x}{l} \right) \Big|_0^l = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{l}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi l}{l} + \frac{l}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi l}{l} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{l}{(n+m)\pi} \sin \pi(n+m) + \frac{l}{(n-m)\pi} \sin \pi(n-m) = 0. \end{aligned}$$

Пусть $n = m \neq 0$

$$\begin{aligned}\left(\cos \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{n\pi x}{l}\right) &= \int_0^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 + \cos \frac{2n\pi x}{l}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(l + \frac{l}{2n\pi} \sin 2n\pi\right) = \frac{l}{2}.\end{aligned}$$

Если $n = m = 0$, то

$$\left(\cos \frac{0\pi x}{l}, \cos \frac{0\pi x}{l}\right) = \int_0^l 1^2 dx = l.$$

Таким же образом доказывается ортогональность функций $\left\{\sin \frac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{+\infty}$ на отрезке $[0; l]$. Пусть $n \neq m$

$$\begin{aligned}\left(\sin \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{m\pi x}{l}\right) &= \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = 2 \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{-1}{2} \int_0^l \left(\cos \frac{(n+m)\pi x}{l} - \cos \frac{(n-m)\pi x}{l}\right) dx = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{l}{(n-m)\pi} \sin \frac{(n-m)\pi l}{l} - \frac{l}{(n+m)\pi} \sin \frac{(n+m)\pi l}{l}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{l}{(n-m)\pi} \sin \pi(n-m) - \frac{l}{(n+m)\pi} \sin \pi(n+m) = 0.\end{aligned}$$

Пусть $n = m$

$$\left(\sin \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}\right) = \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{2} \int_0^l \left(1 - \cos \frac{2n\pi x}{l}\right) dx = \frac{l}{2}.$$

Итак, системы функций $\left\{\cos \frac{k\pi x}{l}\right\}_{k=0}^{+\infty}$ и $\left\{\sin \frac{k\pi x}{l}\right\}_{k=1}^{+\infty}$ ортогональны на $[0; l]$,

поэтому интегрируемую на отрезке $[0; l]$ функцию $f(x)$ можно разложить в тригонометрический ряд Фурье только по синусам или только по косинусам:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx;$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) dx.$$

Определение 1. Функция $f(x)$ называется **кусочно-дифференцируемой** на отрезке, если она кусочно-непрерывна, в каждой точке отрезка и у неё есть производная, у которой могут быть конечное число разрывов только 1-го рода.

Теорема 1. Дирихле. Если кусочно-дифференцируемая на числовом множестве $\mathbb{R}$ функция $f(x)$ является периодической с периодом $2l$, тогда её тригонометрический ряд Фурье везде сходится, и для его суммы верны равенства:

1. $S(x_k) = f(x_k)$ во всех точках непрерывности $f(x)$, где $x_k \in (-\infty; +\infty)$.
2. $S(x_n) = \frac{1}{2}(f(x_n - 0) + f(x_n + 0))$ во всех точках x_n разрыва функции.

Замечание 2. Согласно теореме Дирихле любой реальный периодический процесс можно разложить на сумму элементарных гармоник с кратными частотами. Множество таких частот называют **спектром периодического процесса**.

Замечание 3. Разложение функции в тригонометрический ряд Фурье с последующим анализом каждой гармоники, в рамках заданной прикладной задачи, называется **гармоническим анализом**.

4.5. Равенство Парсеваля

Пусть $2l$ периодическая функция представлена в виде ряда Фурье на отрезке $[-l; l]$:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (4.4)$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Умножим равенство (4.4) на $f(x)$ и разделим на l :

$$\frac{1}{l} f^2(x) = \frac{1}{l} \cdot \frac{f(x)a_0}{2} + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \right).$$

Проинтегрируем это равенство почленно:

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l \frac{f(x)a_0}{2} dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx + b_k \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right). \end{aligned}$$

Используя формулы для построения коэффициентов Фурье получим равенство Парсеваля.

$$\int_{-l}^l f^2(x) dx = l \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \right). \quad (4.5)$$

Для чётных и нечётных функций равенство (4.5) упрощается.

Если $f(x)$ – чётная функция, то

$$\int_0^l f^2(x) dx = l \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \right).$$

Если $f(x)$ – нечётная функция, то

$$\int_0^l f^2(x) dx = l \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2.$$

Равенство Парсеваля справедливо и для таблично заданных функций $f(x)$.

Замечание 4. Равенство Парсеваля является аналогом теоремы Пифагора в бесконечномерном пространстве функций на отрезке $[-l; +l]$.

4.6. Тригонометрические полиномы Фурье

Пусть $f(x)$ – кусочно-дифференцируемая функция, где $x \in [0; l]$. Ставится задача об аппроксимации функции $f(x)$ таким **тригонометрическим полиномом порядка M** :

$$\Phi_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^M a_n \cos \frac{n\pi x}{l} \quad \text{или} \quad \Phi_M(x) = \sum_{n=1}^M b_n \sin \frac{n\pi x}{l},$$

чтобы **квадратичное отклонение** δ_M – было наименьшим:

$$\delta_M = \int_0^l (f(x) - \Phi_M(x))^2 dx.$$

Величина δ_M характеризует **отклонение в среднем** полинома $\Phi_M(x)$ от $f(x)$. Аналогично ставится задача о построении тригонометрического полинома

$$\Phi_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M a_n \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

для интегрируемой на $[-l; l]$ функции $f(x)$.

Теорема 2. Среди всех тригонометрических полиномов заданного порядка M величина δ_M принимает наименьшее значение, если многочлен $\Phi_M(x)$ — является частичной суммой ряда Фурье функции $f(x)$.

Для таких полиномов Фурье всегда справедливо предельное равенство

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \delta_M = 0,$$

поэтому говорят, что тригонометрические ряды Фурье *сходятся в среднем*.

4.7. Аппроксимация табличной функции

Особое место в теории аппроксимации занимает приближение таблично заданных функций тригонометрическими полиномами Фурье, которые всегда используют при обработке временных рядов. Такая аппроксимация помогает выявлять в рядах наблюдений наиболее существенные элементарные гармонические процессы.

Пусть функция $f(x)$ задана таблично: $\{x_j, y_j\}_{j=1}^N$ в равноотстоящих узлах $x_j \in [a; b]$. Значения аргумента в этих узлах можно записать в виде

$$x_j = \left(a + \frac{j}{N} (b - a) \right). \quad (4.6)$$

Аппроксимирующую функцию будем строить в виде тригонометрического полинома Фурье $\Phi_M(x)$. Для этого, прежде всего, перейдём от области $[a, b]$ к отрезку $[-\pi, \pi]$ с помощью линейного преобразования

$$t = \frac{2\pi(x - a)}{(b - a)} - \pi \Rightarrow x = \frac{(b - a)(t + \pi)}{2\pi} + a. \quad (4.7)$$

Узлы x_j преобразуются в узлы $t_j \in [-\pi; \pi]$:

$$t_j = \frac{2\pi}{(b - a)} \left(\left(a + \frac{j}{N} (b - a) \right) - a \right) - \pi = \frac{2\pi j}{N} - \pi \Rightarrow t_i = \frac{\pi(2j - N)}{N}.$$

Полином Фурье приводится к виду

$$\Phi_M(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^M (a_k \cos kt + b_k \sin kt), \quad \text{где} \quad (4.8)$$

$$a_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^N y_j, \quad a_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N y_j \cos(kt_{lj}), \quad b_k = \frac{2}{N} \sum_{j=0}^N y_j \sin(kt_j), \quad k = 1, \dots, M.$$

После построения полинома $\Phi_M(t)$ возвращаемся к исходному аргументу x с помощью последнего равенства в (4.7).

Построение многочлена Фурье для дискретной функции основано на следующей теореме.

Теорема 3. Если $f(t)$ – периодическая функция с периодом 2π , и порядок полинома $\Phi_M(t)$ связан с числом узлов табличной функции неравенством

$$N \geq 2M + 1 \Rightarrow M \leq \frac{N - 1}{2},$$

тогда полином (4.8) минимизирует сумму квадратов отклонений

$$\sum_{i=1}^N (f(t_i) - \Phi_M(t_i))^2.$$

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ АППРОКСИМАЦИИ

В основе оценки погрешности аппроксимации полиномами $\Phi_M(x)$ лежит *среднее квадратичное отклонение*

$$\sigma_M = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{l=1}^N (f(x_l) - \Phi_M(x_l))^2} \quad (4.9)$$

или оценка погрешности с учётом равенства Парсеваля:

$$\delta_M = \sum_{l=1}^N (y_l)^2 - N \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n^2 + b_n^2) \right). \quad (4.10)$$

С увеличением количества слагаемых в $\Phi_M(x)$ уменьшаются правые части равенств (4.9) и (4.10), но при этом возможно увеличение осцилляции аппроксимирующей функции $\Phi_M(x)$.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ АППРОКСИМИРУЮЩЕЙ ФУНКЦИИ

Допустим, что известна погрешность γ исходных табличных данных $\{x_l, y_l\}_{l=1}^N$, тогда выбор оптимального порядка полинома $\Phi_M(x)$ можно построить по следующему алгоритму.

Пусть $K = 1$. Вычисляется первое слагаемое полинома Фурье: $\{\Phi_1(x_l)\}_{l=1}^N$.

I. Число K увеличивается на единицу, вычисляется следующее слагаемое полинома и сам полином $\{\Phi_K(x_l)\}_{l=1}^N$ во всех заданных точках $\{x_l\}_{l=1}^N$.

II. Сравнивается σ_1 (4.9) с исходной погрешностью γ . Возможны три случая:

1) $\sigma_1 \gg \gamma$, тогда происходит возвращение к пункту 1.

2) Для очередного значения K $\sigma_K < \gamma$, значит, построен аппроксимирующий полином (аппроксимант) $\Phi_K(x)$ оптимального порядка.

3) При очередном увеличении числа K $\sigma_K \ll \gamma$, тогда последнее слагаемое в полиноме $\Phi_K(x)$ надо убрать. Оставшийся после этого аппроксимант будет иметь оптимальный порядок.

ОБЪЁМ ТАБЛИЦЫ И ПОРЯДОК ПОЛИНОМА ФУРЬЕ

Интересна связь между объёмом N исходной табличной функции $\{x_l, y_l\}_{l=1}^N$ с оптимальным количеством слагаемых в многочлене $\Phi_K(x)$.

Перейдём к возможным ситуациям.

1. Если число N достаточно большое, а оптимальный порядок K намного меньше: $K \ll N$, тогда можно считать, что полином построен удачно.

2. Если при большом числе N оптимальное K тоже большое: $K \sim N$, следует искать другую аппроксимирующий полином.

3. При маленьком объеме исходной табличной функции поиск оптимального порядка аппроксиманта $\Phi_K(x)$ весьма затруднителен, следует подбирать другую аппроксимирующую функцию.

ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ПОЛИНОМЫ ФУРЬЕ

Рассмотрим отдельно случай, когда исходная табличная функция $\{x_l, y_l\}_{l=1}^N$ содержит чётное количество узлов $N = 2M$, а полином $\Phi_M(x)$ состоит из M гармоник. Каждая гармоника определяется парой чисел a_k, b_k . В этом случае полином определяется N коэффициентами. Построим систему из N линейных относительно $\{a_k, b_k\}_{k=1}^M$ алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y_1 = \Phi_M(x_1), \\ y_2 = \Phi_M(x_2), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_N = \Phi_M(x_N). \end{cases} \quad (4.11)$$

Если количество гармоник в полиноме Фурье равно половине объёма аппроксимируемой таблицы:

$$M = \frac{N}{2},$$

тогда у системы (4.11) существует единственное решение. Многочлен Фурье становится *интерполяционным* многочленом $\Phi_M(x)$. Это означает, что для построенного многочлена выполняется равенство

$$\Phi_M(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

4.8. Примеры разложения функций в ряд Фурье.

Пример 1. Нечётная функция $f(x) = x$ удовлетворяет теореме Дирихле. Разложим её в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Решение. Заданная функция – нечётна, $l = \pi$, поэтому разложим нашу функцию по ор ортогональной системе

$$\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty};$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = -\frac{2}{k\pi} x \cos kx \Big|_0^{+\pi} + \frac{2}{k\pi} \int_0^{+\pi} \cos kx dx = -\frac{2}{k} \cos k\pi + 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow b_k = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}.$$

Ответ:

$$x = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx.$$

Пример 2. Разложим в ряд Фурье периодическую функцию $f(x) = |x|$ с периодом $2l$ на отрезке $[-l; l]$.

Решение. Дана чётная функция, поэтому она раскладывается по системе функций $\left\{ \cos \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=0}^{\infty}$.

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x dx = l, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 2n, \\ -\frac{4l}{\pi^2 k^2} & \text{при } k = 2n - 1. \end{cases}$$

Ответ:

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}.$$

Пример 3. Разложим в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0; 1]$ функцию

$$f(x) = 1.$$

Решение. Продолжим (мысленно) функцию на область $[-1; 0)$ нечётным образом. Тогда функция станет нечётной. Её ряд Фурье будет содержать только синусы, поэтому вычислим только коэффициенты b_k .

$$b_k = 2 \int_0^1 \sin k\pi x dx = -2 \frac{\cos k\pi x}{k\pi} \Big|_0^1 = -\frac{2}{k\pi} (\cos k\pi - \cos 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b_k = -\frac{2}{k\pi}((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, \text{ если } k = 2n, \\ \frac{4}{\pi(2n-1)}, \text{ если } k = 2n-1. \end{cases}$$

Ответ:

$$1 = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)} \sin(2n-1)\pi x.$$

Пример 4. Разложим функцию $f(x) = 3 - x$ на отрезке $[0; 3]$ в ряд Фурье по косинусам.

Решение. Доопределим функцию на область $[-3; 0)$ чётным образом и продолжим (мысленно) эту функцию на всю числовую ось как периодическую с периодом 6. Построим коэффициенты Фурье для этой функции

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{3} \int_0^3 (3-x) dx = \frac{3}{2};$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{3} \int_0^3 (3-x) \cos \frac{k\pi x}{3} dx = \frac{2}{3} \left((3-x) \frac{3}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{3} \Big|_0^3 + \frac{3}{k\pi} \int_0^3 \sin \frac{k\pi x}{3} dx \right) = \\ &= \frac{-6}{k^2 \pi^2} \cos \frac{k\pi x}{3} \Big|_0^3 = \frac{-6}{k^2 \pi^2} ((-1)^k - 1) = \begin{cases} 0, \text{ если } k = 2n, \\ \frac{12}{k^2 \pi^2}, \text{ если } k = 2n-1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ:

$$3 - x = \frac{3}{2} + \frac{12}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{\pi(2n-1)x}{3}.$$

Задание

1. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$
2. Разложите в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0; 2\pi]$ функцию $f(x) = \frac{x}{2}.$
3. Разложите в ряд Фурье функцию $f(x) = x$ на отрезке $[-3; 3]$.

Ответы:

$$1. f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}; \quad 2. \frac{x}{2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{kx}{2};$$

$$3. x = \frac{6}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{3}.$$

4.9. Немного истории

Фурье Жан Батист Жозеф (1768–1830) – французский математик и физик, почётный член Петербургской АН, член Парижской АН.

Фурье родился в семье портного. В 8 лет остался сиротой. После чего всеми силами искал своё место в жизни. Он старался получить образование и устроиться на работу. Страсть и любовь к математике сочеталась у Фурье с планом стать монахом. В 1787 году Жозеф стал послушником в аббатстве, надеясь свою дальнейшую судьбу посвятить служению Господу. Однако через полгода он изменил планы и отправил письмо со своими научными заметками известному в те времена математику Жану Монтюклу.

В 1789 г. юноша, скопил немного денег, отправился в Париж и представил свою небольшую работу по алгебре в Королевскую академию наук. Статью оценили достаточно высоко и предложили Фурье занять пост преподавателя в той Военной школе, где в прошлом он сам учился. Несколько лет Фурье работал преподавателем в знаменитой Политехнической школе в Париже (высшее учебное заведение), затем вместе с группой учёных Франции принимал участие в Египетской экспедиции Наполеона Бонапарта. После этого Фурье полностью посвятил себя математике.

Его научные интересы были связаны с алгеброй, дифференциальными уравнениями и, прежде всего, с математической физикой.

Фурье вывел формулы для вычисления коэффициентов в разложении функции в ряд по тригонометрическим функциям. Для математиков XIX в. этот факт казался очень странным. Даже великий Эйлер не мог принять все идеи Фурье, хотя сам умел раскладывать некоторые функции в ряд по синусам.

Математиков долго волновал вопрос о сходимости таких рядов. Иногда они строили примеры непрерывных функций, которые не раскладывались в такие ряды. Великий русский математик А.Н. Колмогоров (1926) построил непрерывную функцию, для которой ряд Фурье расходился в каждой точке.

Основную теорему о сходимости тригонометрических рядов Фурье удалось доказать немецкому математику И. Дирихле. Эта теорема стала классической. Она есть во всех современных учебниках по математическому анализу.

Свои тригонометрические ряды Фурье использовал при решении уравнения теплопроводности методом разделения переменных. Благодаря этому он первый представил распределение температуры в виде суммы гармоник.

В 1857 г. великий немецкий математик Б. Риман предложил назвать рядами Фурье те ряды, которые исследовал и применял сам Фурье. Такое название стало общепринятым к концу XIX века.

Ряды Фурье существенно повлияли на развитие всего математического анализа. С помощью работ немецкого математика Гильберта (1862–1943) теория тригонометрических рядов Фурье стала частью общей теории разложения функций в ортогональные ряды.

Со временем творение Фурье стало мощным инструментом в исследовании и решении самых разных задач в области акустики, астрономии, в теории приливов, радиотехнике, электротехнике, в обработке сигналов и изображений, в анализе вибраций, в квантовой механике и др.

Фурье считал, что главная цель математики – общественная польза и объяснение явлений природы.

Имя Фурье внесено в список величайших учёных Франции. Этот список помещён на первом этаже Эйфелевой башни.

Парсеваль Марк-Антуан (1755–1836) – французский математик. Его труды связаны с дифференциальными уравнениями и математическим анализом. В 1799 г. Парсеваль нашёл соотношение между функцией и коэффициентами в её разложении в ряд Фурье. Это знаменитое и важное равенство называется в математике равенством Парсеваля или теоремой Парсеваля.

Парсеваль был представителем образованной аристократии и поддерживал монархию во время Французской революции. Оппозиционные взгляды Парсеваля послужили поводом к его тюремному заключению. Позднее он бежал из страны из-за публикации своих стихов, содержащих критику правительства Наполеона.

После возвращения в Париж за 1798-1804 гг. он написал несколько интересных математических работ, опубликованных Французской АН. Среди них: «Решение уравнений в частных производных второго порядка», «О рядах и о полном интегрировании линейного уравнения в частных производных второго порядка с постоянными коэффициентами», «Общее и полное интегрирование уравнений распространения звука в воздухе в трёхмерном пространстве».

В одной из этих работ содержалось доказательство равенства, которое с тех пор называется равенством Парсеваля или теоремой Парсеваля. Он использовал, доказанное им равенство, при решении некоторых дифференциальных уравнений.

В настоящее время неравенство Парсеваля остаётся фундаментальным соотношением при построении тригонометрических многочленов Фурье.

Глава 5

Полиномы Чебышева первого рода

Полюбить можно лишь то, что знаешь.

Леонардо да Винчи

Полиномы Чебышева первого рода определены на отрезке $[-1; 1]$. В тригонометрической форме они записываются очень кратко и просто в виде

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (5.1)$$

В математическом мире полиномы Чебышева обозначаются как $T_n(x)$. Французские учёные первые и весьма успешно использовали эти полиномы при разработке оптимальной конструкции поршня, а фамилия Чебышев на французском языке пишется в виде Tschebicheff.

5.1. Основные свойства полиномов $T_n(x)$

Полиномы Чебышева имеют много замечательных свойств. Отметим некоторые из них.

1. Любой полином Чебышева $T_n(x)$ ($n \neq 0$) имеет n различных действительных корней $\{x_k\}_{k=1}^n$, лежащих в области $(-1; 1)$:

$$T_n(x) = 0 \Rightarrow n \arccos x = \pi k - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \arccos x = \frac{\pi(2k-1)}{2n},$$

$$0 \leq \frac{\pi(2k-1)}{2n} \leq \pi \Rightarrow 0 \leq 2k-1 \leq 2n \Rightarrow 1 \leq 2k \leq 2n+1 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{2n+1}{2} \Rightarrow 1 \leq k \leq n \Rightarrow x_k = \cos \frac{\pi(2k-1)}{2n} \quad \text{для } k = 1, \dots, n.$$

Полученные корни называются **абсциссами (узлами) Чебышева**. На оси абсцисс эти узлы расположены неравномерно. Они сгущаются к концам отрезка $[-1; 1]$.

2. Количество экстремальных значений у полинома $T_n(x)$ на отрезке $[-1; 1]$ равно $(n+1)$. Модули всех экстремальных значений равны единице. Легко доказать, что экстремальные значения достигаются в точках

$$x_k = \cos \frac{\pi k}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

3. Очевидно, что $T_0(x) = 1$ и $T_1(x) = x$. Докажем, что полиномы $T_n(x)$, начиная с третьего $T_3(x)$, можно построить с помощью рекуррентной формулы. Для этого введём вспомогательное обозначение. Пусть $\arccos x = \gamma$. Далее используем две школьные тригонометрические формулы:

$$\cos(n+1)\gamma = \cos n\gamma \cos \gamma - \sin n\gamma \sin \gamma,$$

$$\cos(n-1)\gamma = \cos n\gamma \cos \gamma + \sin n\gamma \sin \gamma.$$

Сложение этих равенств приводит к следующей формуле

$$\begin{aligned} \cos(n+1)\gamma + \cos(n-1)\gamma &= 2 \cos \gamma \cos n\gamma \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos(n+1)\gamma &= 2 \cos \alpha \cos n\gamma - \cos(n-1)\gamma. \end{aligned}$$

Полученная формула верна для любого натурального числа $n \geq 2$, поэтому верна формула

$$\cos n\gamma = 2 \cos \gamma \cos(n-1)\gamma - \cos(n-2)\gamma.$$

Переходя в последнем равенстве к полиномам Чебышева ($\gamma = \arccos x$), получим рекуррентную формулу

$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x).$$

С помощью этой формулы полиномы $T_n(x)$ можно записать в алгебраическом виде. Ниже представлены первые восемь полиномов $T_n(x)$.

$$T_0(x) = 1,$$

$$T_1(x) = x,$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1,$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x,$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1,$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x,$$

$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1,$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x.$$

4. Полиномы с чётными номерами содержат только чётные степени x , а полиномы с нечётными номерами – только нечётные степени x . Благодаря этому полиномы Чебышева обладают следующим свойством.

5. Свойство симметрии. Если номер полинома Чебышева – чётное число, то полином – чётная функция:

$$k = 2n \Rightarrow T_k(x) = T_k(-x).$$

Если номер полинома – нечётен, то полином Чебышева – нечётная функция:

$$k = 2n + 1 \Rightarrow T_k(x) = -T_k(-x).$$

6. Старший коэффициент многочлена $T_n(x)$ всегда равен 2^{n-1} .

7. Многочлен Чебышева одинаково уклоняется от оси абсцисс в положительном и отрицательном направлениях.

8. Чебышев доказал, что среди всех алгебраических многочленов, заданных на $[-1; 1]$ с единичным старшим коэффициентом, многочлен

$$\hat{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$$

является единственным полиномом, наименее уклоняющимся от нуля. Это свойство представляет большой интерес в теории аппроксимации.

Приближение функции многочленами $\hat{T}_n(x)$ минимизирует максимальное значение погрешности в процессе аппроксимации функции (выполняется условие **минимакса**).

9. Многочлены $T_n(x)$ ортогональны с весом $\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ на $[-1; 1]$:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} T_n(x) T_m(x) dx = \begin{cases} 0, & \text{если } n \neq m, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{если } n = m \neq 0, \\ \pi, & \text{если } n = m = 0. \end{cases}$$

10. Для многих функций разложение в равномерно сходящийся ряд по многочленам $T_n(x)$ сходится намного быстрее разложений в другие сходящийся ряды

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n T_n(x) = \sum_{n=1}^M c_n T_n(t) + R, \quad (5.2)$$

где коэффициенты c_n вычисляются по формуле

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f(x) T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

5.2. Аппроксимация полиномами

Предположим, что надо аппроксимировать непрерывную функцию $f(x)$ многочленами $T_n(x)$, но $f(x)$ задана на отрезке $[a; b]$, не совпадающим с отрезком $[-1; 1]$. В этом случае предварительно делаем простое линейное преобразование с помощью уравнения прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow \frac{x - a}{b - a} = \frac{t + 1}{1 + 1} \Rightarrow x = a + \frac{(b - a)}{2}(t + 1) \Rightarrow$$

$$f(x) = f\left(a + \frac{(b - a)}{2}(t + 1)\right) = f(t), t \in [-1; 1].$$

Аппроксимация функции $f(t)$ многочленами Чебышева представляется в виде суммы

$$f(t) = \sum_{n=1}^M c_n T_n(t). \quad (5.3)$$

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ

Ряд по многочленам $T_n(x)$ сходится достаточно быстро, поэтому первое слагаемое остатка R ряда (5.2), рассматривается как модуль погрешности чебышевского приближения.

Приближение полиномами $T_n(x)$ уменьшает максимальные погрешности, но при этом возможна большая среднеквадратичная погрешность.

В настоящее время многочлены Чебышева – это универсальный инструмент в теории аппроксимации функций.

5.3. Немного истории

Мировое признание Российской математической школы пришло после того, как во второй половине XIX в. вокруг великого математика Чебышева сформировалась знаменитая петербургская математическая школа.

Будущий учёный Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894) получил домашнее образование. Едва выучив цифры, он часы проводил за столом, решая задачу за задачей. Занятия он предпочитал детским играм и забавам. Даже гуляя в саду, он занимался счётом, придумывая разные задачки с камешками.

В 1837 г. Пафнутий стал студентом физико-математического отделения философского факультета университета Москвы. Он всегда был готов к занятиям по всем предметам и учился только на отлично.

Чебышев участвовал в студенческом конкурсе и получил медаль за работу по нахождению корней уравнения n -й степени. Одним из его педагогов был учёный Н. Брашман. При его поддержке Чебышев быстро пришёл к большим успехам в теории механизмов.

В 1841 г. Чебышев с отличием окончил университет, остался там работать и защитил магистерскую диссертацию «Применение методов математического анализа в теории вероятностей». Сразу после блестящей защиты диссертации его пригласили поработать в Петербургском университете для подготовки к печати рукописей Леонарда Эйлера, посвящённых теорией чисел.

Чтение рукописей Эйлера вдохновило учёного на собственные исследования. В результате появилась книга «Теория сравнений», за которую автор получил Демидовскую премию и степень доктора наук. Книга была первой монографией по теории чисел в России. Её перевели на немецкий и английский языки. Более 50-ти лет студенты считали эту книгу самым интересным учебником по теории чисел.

В течение 35 лет Чебышев читал лекции по высшей алгебре, геометрии, механике и теории вероятностей.

На первой лекции каждого нового курса Чебышев рассказывал историю появления и развития той части математики, которой посвящался курс. Для этого он прерывал ход изложения, садился в поставленное перед первым рядом кресло и рассказывал о смысле того или иного научного положения. Он был педантично точным и аккуратным лектором. Никогда не пропускал лекций, не опаздывал и не задерживал аудиторию после окончания.

Перед сложными преобразованиями он, прежде всего, объяснял цель таких преобразований. Затем молча, очень подробно и быстро их записывал. Он был великолепным лектором, и студенты понимали молодого профессора.

В наследии Чебышева насчитывается более ста фундаментальных научных достижений, полученных в теории вероятностей, теории наилучшего приближения функций, теории чисел, теории механизмов, геометрии и прикладной механике.

В середине XIX в. французский математик Бертран высказал такую гипотезу. Между любым числом n и числом $2n$ найдётся хотя бы одно простое число. Эта гипотеза долгое время оставалась лишь эмпирическим фактом. Доказать или опровергнуть эту гипотезу математики не могли. В 1852 г. опубликовали статью Чебышева «О простых числах», в которой он представил анализ сходимости числовых рядов, зависящих от простых чисел. Нашёл критерий сходимости таких рядов и с их помощью доказал гипотезу Бертрана. Работа Чебышева стала величайшей победой математической мысли.

Один английский математик, изучив доказательство Чебышева, сказал: "Чтобы двинуться дальше в изучении вопроса распределения простых чисел, нужен ум, настолько превосходящий ум Чебышева, насколько ум Чебышева превосходит обыкновенный ум".

Заслуги П.Л. Чебышева высоко оценило всё мировое научное сообщество. Характеристика его заслуг выражена в одном из выступлений на заседании Российской академии наук (РАН) памяти Л.Н. Чебышева: "Он изобрёл новые методы для решения многих трудных, давно поставленных и нерешённых задач. Поставил ряд новых вопросов и над их ответами трудился до конца своих дней".

П.Л. Чебышев был академиком РАН. Его избрали почётным членом всех российских университетов и членом или членом-корреспондентом ещё 25-ти Академий мира.

В 1890 г. президент Франции вручил П.Л. Чебышеву орден Почетного легиона. Знаменитый математик Ш. Эрмит написал, в связи с этим, письмо Чебышеву. Приведём небольшой отрывок из этого длинного послания.

"Мой дорогой собрат и друг! Это отличие является лишь небольшой наградой за великие и прекрасные открытия, с которыми навсегда связано Ваше имя и которые давно уже выдвинули Вас в первые ряды математической науки нашей эпохи. Все члены нашей академии считают, что Вы являетесь гордостью науки в России, одним из первых геометров Европы, одним из величайших геометров всех времен".

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Интеграл Фурье

Размышления – это разговор души с самим собой.

Платон

Пусть непериодическая, непрерывная и кусочно-гладкая функция $f(x)$ определена на всём множестве действительных чисел и является абсолютно интегрируемой на этом множестве:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = Q \in \mathbb{R}.$$

Разложим эту функцию в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \text{где}$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \left(\cos \frac{k\pi t}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} + \sin \frac{k\pi t}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \right) dt = \\ &= \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi(x-t)}{l} dt. \end{aligned}$$

Теперь функцию $f(x)$ можно представить в виде

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi(x-t)}{l} dt. \quad (1)$$

Рассмотрим, как преобразуется правая часть равенства (1), если $l \rightarrow +\infty$. Для этого введём новые обозначения:

$$\gamma_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \gamma_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \gamma_3 = \frac{3\pi}{l}, \dots, \quad \gamma_k = \frac{k\pi}{l};$$

$$\gamma_{k+1} - \gamma_k = \frac{\pi}{l} = \Delta\gamma_k \quad \Rightarrow \quad \lim_{l \rightarrow +\infty} \Delta\gamma_k = 0.$$

Запишем равенство (1) с помощью этих обозначений

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \gamma_k(x-t) dt \right) \Delta\gamma_k. \quad (2)$$

Пусть

$$\int_{-l}^l f(t) \cos \gamma_k(x-t) dt = G(\gamma_k),$$

тогда сумму в равенстве (2) можно рассматривать как интегральную сумму:

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{-l}^l f(t) \cos \gamma_k(x-t) dt \right) \Delta\gamma_k = \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} G(\gamma_k) \Delta\gamma_k.$$

Из определения определённого интеграла следует, что

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} G(\gamma_k) \Delta\gamma_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} G(\gamma) d\gamma = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cos \gamma(x-t) dt d\gamma.$$

Рассмотрим отдельно поведение первого слагаемого в равенствах (1) и (2). Из свойств интегралов известно, что

$$\left| \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)| dt.$$

По условию наша функция является абсолютно интегрируемой, поэтому

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt < \frac{1}{2l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \frac{Q}{2l}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{Q}{2l} = 0 \Rightarrow \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt = 0.$$

Приходим к следующему интересному результату

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \gamma(x-t) dt d\gamma. \quad (3)$$

Построенный двойной интеграл называется интегралом Фурье. Его можно записать в более простом виде, если вернуться к коэффициентам Фурье:

$$f(x) = \int_0^{\infty} (a(\gamma) \cos \gamma x + b(\gamma) \sin \gamma x) d\gamma, \quad (4)$$

где

$$a(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \gamma t dt, \quad b(\gamma) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \gamma t dt.$$

Равенство (4) называется формулой Фурье, а интеграл в правой части – это интеграл Фурье. Он даёт разложение функции $f(x)$ на гармоники

$$a(\gamma) \cos \gamma x + b(\gamma) \sin \gamma x$$

с частотой γ , которая непрерывно меняется 0 до $+\infty$. Напомним, что в рядах Фурье функция раскладывается на гармоники с дискретно меняющийся частотой $\gamma_k = \frac{k\pi}{l}$.

ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ ДЛЯ ЧЁТНЫХ И НЕЧЁТНЫХ ФУНКЦИЙ

Перепишем равенство (3) в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \gamma x d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \gamma t dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \gamma x d\gamma \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \gamma t dt.$$

Если функция $f(x)$ чётная, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \gamma t dt = 2 \int_0^{\infty} f(t) \cos \gamma t dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \gamma t dt = 0.$$

Представление чётной функции в виде интеграла Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \gamma x d\gamma \int_0^{\infty} f(t) \cos \gamma t dt.$$

Представление нечётной функции $f(x)$ в виде интеграла Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \gamma x d\gamma \int_0^{\infty} f(t) \sin \gamma t dt.$$

Разностный метод решения дифференциального уравнения с краевыми условиями

*Чем больше я работаю,
тем больше живу.*

Бернард Шоу

Применение конечно-разностного метода (разностного метода) для решения краевых задач сводится к простой процедуре замены производных в дифференциальном уравнении на их разностные аппроксимации. После такой замены уравнение преобразуется в систему линейных алгебраических уравнений. Простота структуры полученной системы наиболее привлекательна в этом методе.

КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ ПЕРВОГО РОДА

В качестве примера разберём решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad (1)$$

с заданными непрерывными функциями $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ и **краевыми условиями первого рода**

$$x \in [a; b], \quad y(a) = \gamma_1, \quad y(b) = \gamma_2.$$

Разобьём отрезок $[a; b]$ на n равных частей с узлами разбиения x_i и шагом разбиения

$$h = x_{i+1} - x_i, \text{ где } i = 0, \dots, n-1; \quad a = x_0, \quad b = x_n.$$

Уравнение (1) в любом внутреннем узле x_i можно аппроксимировать разностным уравнением. Для этого заменим $y''(x_i)$ и $y'(x_i)$ на соответствующие центральные разности. Пусть $y(x_i) = y_i$.

Приходим к алгебраическому уравнению

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} + p(x_i) \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q(x_i)y_i = f(x_i).$$

Для упрощения аналитического вида этого уравнения введём новые обозначения и приведём подобные члены. Пусть $p(x_i) = p_i$, $q(x_i) = q_i$, $f(x_i) = f_i$:

$$\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right)y_{i-1} + \left(q_i - \frac{2}{h^2}\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right)y_{i+1} = f_i. \quad (2)$$

Это уравнение называется **разностной аппроксимацией** дифференциального уравнения (1). Запишем вид уравнения (2) в каждом внутреннем узле $\{x_i\}_{i=1}^{n-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}\right)y_0 + \left(q_1 - \frac{2}{h^2}\right)y_1 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_1}{2h}\right)y_2 = f_1, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_2}{2h}\right)y_1 + \left(q_2 - \frac{2}{h^2}\right)y_2 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_2}{2h}\right)y_3 = f_2, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_3}{2h}\right)y_2 + \left(q_3 - \frac{2}{h^2}\right)y_3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_3}{2h}\right)y_4 = f_3, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right)y_{i-1} + \left(q_i - \frac{2}{h^2}\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right)y_{i+1} = f_i, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_{n-1}}{2h}\right)y_{n-2} + \left(q_{n-1} - \frac{2}{h^2}\right)y_{n-1} + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_{n-1}}{2h}\right)y_n = f_{n-1}. \end{array} \right.$$

В первом и последнем уравнениях значения y_0 и y_n известны из краевых условий 1-го рода: $y_0 = y(a) = \gamma_1$, $y_n = y(b) = \gamma_2$, поэтому первое слагаемое в первом уравнении и последнее слагаемое в последнем уравнении перенесём в правую часть системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(q_1 - \frac{2}{h^2}\right)y_1 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_1}{2h}\right)y_2 = -\left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_1}{2h}\right)\gamma_1 + f_1, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_2}{2h}\right)y_1 + \left(q_2 - \frac{2}{h^2}\right)y_2 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_2}{2h}\right)y_3 = f_2, \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_3}{2h}\right)y_2 + \left(q_3 - \frac{2}{h^2}\right)y_3 + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_3}{2h}\right)y_4 = f_3, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h}\right)y_{i-1} + \left(q_i - \frac{2}{h^2}\right)y_i + \left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h}\right)y_{i+1} = f_i, \\ \dots\dots\dots \\ \left(\frac{1}{h^2} - \frac{p_{n-1}}{2h}\right)y_{n-2} + \left(q_{n-1} - \frac{2}{h^2}\right)y_{n-1} = -\left(\frac{1}{h^2} + \frac{p_{n-1}}{2h}\right)\gamma_2 + f_{n-1}. \end{array} \right. \quad (3)$$

Основная матрица этой системы трёхдиагональна. Решение $\{y_i\}_{i=1}^{n-1}$ находится быстро и с хорошей точностью прямым методом прогонки, который подробно описан в учебнике [5].

Решение системы (3) является решением дифференциального уравнения (1). Найденная функция построена в виде табличной функции:

$$\{x_i; y_i\}_{i=1}^{n-1}, \quad y(x_0) = y(a) = \gamma_1, \quad y(x_n) = y(b) = \gamma_2.$$

Порядок погрешности найденного решения совпадает с порядком погрешности формул разностной аппроксимации производных и равна $O(h^2)$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Решение волнового уравнения методом Фурье

*Какая наука может быть, более
благородна, более восхитительна,
более полезна для человечества, чем
математика?*

Б. Франклин (1706–1790) –
американский учёный

Рассмотрим решение линейного однородного уравнения 2-го порядка вида

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = \text{const}, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Это уравнение математической физики является простейшим волновым уравнением. Его часто ещё называют уравнением колебания струны.

Пусть на оси OX лежит струна с закреплёнными концами. Концы струны лежат в точках $x = 0$ и $x = l$. Неизвестная функция $u(x, t)$ в уравнении (1) – это отклонение от оси OX любой точки струны с абсциссой x в момент времени t в процессе колебания этой струны.

Предположим, что для уравнения (1) заданы нулевые (тривиальные) краевые условия первого рода:

$$u(0, t) = u(l, t) = 0$$

и начальные условия, для которых выполняется условие согласования с краевыми условиями:

$$\begin{cases} u(x, 0) = g(x), \quad g(0) = g(l) = 0, \\ u'_t(x, 0) = q(x). \end{cases}$$

Процесс решения уравнения (1) состоит из следующих трёх этапов.

I. Разделение переменных.

II. Задача Штурма-Лиувилля.

III. Метод Фурье.

I. РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ

Представим неизвестную функцию $u(x, t)$ в виде произведения двух других неизвестных функций, каждая из которых зависит только от одного аргумента:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t).$$

Уравнение (1) тогда приобретает вид

$$T''(t) \cdot X(x) = a^2 X''(x) \cdot T(t). \quad (2)$$

Строим ненулевое решение уравнения (1), поэтому $X(x) \neq 0$ и $T(t) \neq 0$.

Делим уравнение (2) на $a^2 X(x) T(t)$:

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \quad (3)$$

Левая часть полученного уравнения зависит только от переменной t , а правая часть только от переменной x , поэтому обе части этого уравнения равны некоторой неизвестной величине, которая не зависит от x и t . Для упрощения следующего этапа решения обозначим эту величину как $-\lambda$. Уравнение (3) превращается в систему

$$\begin{cases} \frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda, \\ \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \end{cases} \quad (4)$$

II. ЗАДАЧА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Запишем последнее уравнение системы в виде

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0. \quad (5)$$

Для неизвестной функции этого уравнения должны выполняться заданные краевые условия

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Найдём такую величину λ и нетривиальную (ненулевую) функцию $X(x)$, которая удовлетворяет уравнению (5) и нулевым краевым условиям. Такая задача называется задачей Штурма-Лиувилля.

Уравнение (5) – это линейное дифференциальное однородное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами, поэтому для его решения используем очень простой метод Эйлера. Строим характеристическое уравнение

$$r^2 + \lambda = 0 \Rightarrow r = \sqrt{-\lambda}.$$

Возможны три случая: $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.

$$1. \lambda < 0 \Rightarrow \text{Общее решение уравнения: } X(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \Rightarrow$$

$$X(0) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}0} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}0} = 0 \Rightarrow C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -C_1,$$

$$X(l) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} - C_1 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \Rightarrow C_1 (e^{\sqrt{-\lambda}l} - e^{-\sqrt{-\lambda}l}) = 0.$$

Последнее равенство будет верным только при $C_1 = 0$, но тогда $C_2 = 0$. Значит, есть только тривиальное решение $X(x) \equiv 0$.

2. $\lambda = 0 \Rightarrow X''(x) = 0$. Из этого равенства следует, что общее решение является линейной функцией. Но у линейной функции может быть только один

корень, а искомая функция должна равняться нулю в двух концах отрезка $[0; l]$. Приходим к выводу, что для задачи с нулевыми краевыми условиями нет решения в виде линейной функции

$$X(x) = C_1 x + C_2.$$

$$3. \lambda > 0 \Rightarrow X(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} x + C_2 \sin \sqrt{\lambda} x \Rightarrow$$

$$X(0) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} 0 + C_2 \sin \sqrt{\lambda} 0 = 0 \Rightarrow C_1 = 0,$$

$$X(l) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \Rightarrow \begin{cases} C_2 \neq 0 \\ \sin \sqrt{\lambda} l = 0 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{\lambda} l = \pi k, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Из последнего равенства следует, что есть бесконечное множество таких положительных чисел $\lambda = \lambda_k$, которые легко находятся из следующих равенств

$$\sqrt{\lambda_k} l = \pi k \Rightarrow \sqrt{\lambda_k} = \frac{\pi k}{l} \Rightarrow \lambda_k = \left\{ \left(\frac{\pi k}{l} \right)^2 \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Построено бесконечное множество положительных значений величины λ_k , при которых уравнение (5) имеет нетривиальные решения

$$X_k(x) = C_2 \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

В последнем равенстве C_2 – любая, не равная нулю, постоянная. Для простоты обычно выбирают $C_2 = 1$. Систему построенных решений задачи запишем в виде

$$X_k(x) = \left\{ \sin \frac{\pi k x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty}.$$

Найденные величины λ_k и решения $X_k(x)$ называются соответственно **собственными значениями (числами)** и **собственными функциями** задачи Штурма-Лиувилля.

III. МЕТОД ФУРЬЕ

После нахождения собственных значений легко построить решение другого дифференциального уравнения из системы (4):

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = -\lambda \Rightarrow T''(t) + \left(\frac{a \pi k}{l} \right)^2 T(t) = 0.$$

Последнее дифференциальное уравнение тоже легко решается методом Эйлера.

Характеристическое уравнение для последнего дифференциального уравнения имеет вид

$$r^2 + \left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2 = 0 \Rightarrow r = \sqrt{-\left(\frac{a\pi k}{l}\right)^2}.$$

Корни характеристического уравнения – мнимые числа, поэтому аналитический вид общего решения дифференциального уравнения записывается в виде

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{a\pi kt}{l} + B_k \sin \frac{a\pi kt}{l},$$

где A_k и B_k некоторые неизвестные величины, зависящие от k и от начальных условий в исходном волновом уравнении (1).

Теперь решение исходного уравнения (1) можно записать в виде

$$u_k(x, t) = T_k(t)X_k(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots.$$

Уравнение (1) – это линейное однородное дифференциальное уравнение, поэтому сумма всех его решений тоже является общим решением этого же уравнения:

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{a\pi kt}{l} + B_k \sin \frac{a\pi kt}{l} \right) \sin \frac{\pi kx}{l}. \quad (6)$$

Найдём такие коэффициенты A_k, B_k , при которых решение (6) будет удовлетворять заданным начальным условиям. Согласно первому начальному условию

$$u(x, 0) = g(x) \Rightarrow$$

$$g(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{a\pi k \cdot 0}{l} + B_k \sin \frac{a\pi k \cdot 0}{l} \right) \sin \frac{\pi kx}{l} \Rightarrow$$

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin \frac{\pi kx}{l}.$$

Последнее равенство является разложением функции $g(x)$ в ряд Фурье, по ортогональному базису $\{\sin \frac{\pi kx}{l}\}_{k=1}^{\infty}$, поэтому A_k – это коэффициенты Фурье:

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi kx}{l} dx.$$

Коэффициенты B_k находим с помощью второго начального условия

$$u'_t(x, 0) = q(x),$$

$$u'_t(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\pi k}{l} \left(-A_k \sin \frac{a\pi k t}{l} + B_k \cos \frac{a\pi k t}{l} \right) \sin \frac{\pi k x}{l},$$

$$u'_t(x, 0) = q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\pi k}{l} \left(-A_k \sin \frac{a\pi k 0}{l} + B_k \cos \frac{a\pi k 0}{l} \right) \sin \frac{\pi k x}{l} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a\pi k}{l} B_k \sin \frac{\pi k x}{l}.$$

Это равенство является разложением функции $q(x)$ в ряд Фурье, значит $\frac{a\pi k}{l} B_k$ — это коэффициенты Фурье:

$$\frac{a\pi k}{l} B_k = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx \Rightarrow B_k = \frac{2}{a\pi k} \int_0^l q(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx.$$

Поставленная задача решена полностью. Решение уравнения (1) с нулевыми краевыми условиями 1-го рода и с заданными начальными условиями имеет вид

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \frac{a\pi k t}{l} + B_k \sin \frac{a\pi k t}{l} \right) \sin \frac{\pi k x}{l},$$

где

$$A_k = \frac{2}{l} \int_0^l g(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx, \quad B_k = \frac{2}{a\pi k} \int_0^l q(x) \sin \frac{\pi k x}{l} dx.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

Математика – это часть духовной культуры человека.

В. Успенский «Апология математики»

ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ И ЕГО ПРОИЗНОШЕНИЕ

Буквы	Произношение	Буквы	Произношение
Α α	альфа	Β β	бета
Γ γ	гамма	Δ δ	дельта
Ε ε	эпсилон	Ζ ζ	дзета
Η η	эта	Θ θ	тэта
Ι ι	йота	Κ κ	каппа
Λ λ	лямбда	Μ μ	мю
Ν ν	ню	Ξ ξ	кси
Ο ο	омикрон	Π π	пи
Ρ ρ	ро	Σ σ	сигма
Τ τ	тау	Υ υ	ипсилон
Φ φ	фи	Χ χ	хи
Ψ ψ	пси	Ω ω	омега

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ И ЕГО ПРОИЗНОШЕНИЕ В РУССКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ

Буквы	Произношение	Буквы	Произношение
A a	а	N n	эн
B b	бэ	O o	о
C c	цэ	P p	пэ
D d	дэ	Q q	ку
E e	е	R r	эр
F f	эф	S s	эс
G g	жи	T t	тэ
H h	эйч	U u	у
I i	и	V v	вэ
J j	жи	X x	икс
K k	ка	Y y	игрек
L l	эль	Z z	зэт
M m	эм		

Литература

1. *Аксёнок И.М., Малыгина О.А., Чекалкин Н.С., Шухов А.Г.* Ряды. Интеграл Фурье и преобразование Фурье. Приложения. Изд. 2, испр. и доп. – М.: Ленанд, 2020. – 240 с.
2. *Александрова Н.В.* История математических терминов, понятий, обозначений: Словарь-справочник. Изд. 3-е, испр.– М.: Изд. ЛКИ, 2008.–240 с.
3. *Баврин И.И.* Высшая математика. 5-е изд. – М.: Издательство центр «Академия», 2005. – 616 с.
4. *Беликова Г.И., Бровкина Е.А., Вагер Б.Г., Витковская Л.В., Матвеев Ю.Л.* Численные методы. Учебное пособие. – СПб.: РГГМУ, 2019. –172 с.
5. *Беликова Г.И., Бровкина Е.А., Витковская Л.В.* Высшая Алгебра. Учебное пособие. – СПб.: РГГМУ, 2021. –170 с.
6. *Гусев И.Е.* Математика. (100 гениальных идей, о которых должен знать каждый образованный человек). – М.: Издательство АСТ, 2018. – 208 с. ил.
7. *Данилов Ю.А.* Многочлены Чебышева.–М.: Едиториал УРСС, 2003.–160 с.
8. *Крилли Тони.* Математика. 50 идей, о которых нужно знать. – М.: Фантом Пресс, 2014. – 208 с.
9. *Лоне Микаэль.* Большой роман о математике: история мира через призму математики. – М.: Эксмо, 2020. – 416 с.
10. *Лунгу К.Н.* и др. Сборник задач по высшей математике. – М.: Айрис-пресс, 2011. – 592 с.: ил. (Высшее образование).
11. *Соболь Б.В., Мишняков Н.Т., Поркшеян В.М.* Практикум по высшей математике. – Изд. Ростов н/Д: Феникс, 2010. – 630 с.
12. *Толстов Г.П.* Ряды Фурье. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980, –384 с.
13. *Файнимидт В.Д.* Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного аргумента. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 224 с.: ил.
14. *Шапира Х.* Восемь этюдов о бесконечности: Математическое приключение. [перевод с английского] – М.: Колибри Азбука-Аттикус, 2021. – 336 с.: ил.
15. *Шумихин С., Шумихина А.* Число Пи. История длиною в 4000 лет. – М.: Эксмо, 2011. – 192 с.

Беликова Галина Иосифовна
Бровкина Екатерина Анатольевна

РЯДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Учебное пособие

2-е издание, переработанное

Подписано в печать 15.04.2025. Формат 60×84/8. Печать цифровая.

Усл. печ. л. 10,0. Тираж 22. Заказ 1868.

Отпечатано с готового оригинал-макета, предоставленного авторами,
в Издательско-полиграфическом центре Политехнического университета.

195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул., 29.

Тел.: (812) 552-77-17; 550-40-14.