Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по дисциплине
“МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА”

Специальность: 012700 - океанология

Курс II

Р Г Г М У
Санкт-Петербург
2018

Одобрено методической комиссией факультета информационных технологий РГГМУ

УДК 517.95(072)
ББК 22.311я73
М33

Методические указания составлены в соответствии с программой дисциплины “Высшая математика (математическая физика)”. Даются основные теоретические сведения, примеры решения типичных задач и их физическое обоснование. Приводится рекомендуемая литература.

Составитель: В. В. Петрова, канд. физ.-мат. наук, доц., РГГМУ.

Ответственный редактор:
Рецензент: Бровкина Е. А., ст. преподаватель, РГГМУ.

Предисловие

Математическая физика – это раздел высшей математики, посвященный решению основных дифференциальных уравнений в частных производных: волновому уравнению и уравнению теплопроводности. Оба эти уравнения имеют большое значение для океанологии, поэтому данному разделу математики отводится большое количество учебных часов в программе океанологического факультета. Данные методические указания должны помочь в освоении теоретических основ дисциплины, а также в решении конкретных уравнений.

1. Основные уравнения математической физики

Пусть Ω - область двухмерного евклидова пространства с декартовыми ортогональными координатами x, y. *Дифференциальным уравнением с частными производными* называется уравнение, связывающее независимые переменные x, y, некоторую функцию $u(x, y)$ и частные производные от этой функции.

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок входящих в уравнение частных производных. Так, например

$$y\frac{\partial u}{\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

- дифференциальное уравнение первого порядка, а

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2u = 0$$

- дифференциальное уравнение второго порядка.

Для упрощения записи часто используют обозначения

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Решением дифференциального уравнения с частными производными в некоторой области Ω изменения независимых переменных называется функция $u(x, y)$ такая, что подстановка этой функции в уравнение обращает уравнение в тождество.

Первым основным уравнением математической физики является *уравнение колебания струны* или *волновое уравнение*. *Струной* называется твердое тело, в котором длина значительно превосходит остальные размеры. Сила натяжения, действующая на тело, предполагается значительной. Поэтому его сопротивлением при изгибании можно пренебречь по сравнению с натяжением.

Пусть направление этой струны в состоянии покоя совпадает с направлением оси Ox. Под влиянием поперечных сил она примет другую форму, вообще говоря, непрямолинейную (см. рис. 1).

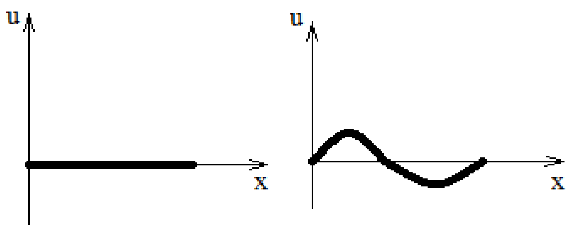


Рис.1. Положения равновесия струны и ее форма при воздействии поперечных сил.

Через $u(x, t)$ обозначим положение точки струны с абсциссой x в момент времени t.

Нужно заметить, что мы рассматриваем малые колебания, т.е. функция $u(x,t)$ и её производная $u_x(x,t)$ являются столь малыми, что их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с самими этими величинами. Если не сделать этих предположений, то получится очень сложное дифференциальное уравнение. При сделанных предположениях получим следующее уравнение:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t) \qquad (1.1)$$

Это так называемое *уравнение вынужденных колебаний струны*. В нем $a = const$, а $f(x,t)$ определяет внешнюю силу, действующую на каждую точку струны в любой момент времени. Если $f(x,t) = 0$, то из (1.1) получим *уравнение свободных колебаний струны*:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} \qquad (1.2)$$

Уравнение (1.2) называется еще *одномерным волновым уравнением*.

Вторым основным уравнением математической физики является *уравнение теплопроводности*. Пусть мы имеем тело G. Если части этого тела имеют разные температуры, то возникают тепловые потоки от участков с более высокой температурой к участкам с более низкой температурой. Поставим задачу составить уравнение этого процесса распределения тепла. Выберем систему координат $Oxyz$ и обозначим через $u(x,y,z,t)$ температуру тела в точке $M(x,y,z)$ в момент времени t. Уравнение теплового баланса имеет следующий вид:

$$Q = Q_1 + Q_2,$$

где Q - общее изменение количества теплоты, Q_1 - тепло, которое поступает через поверхность тела, Q_2 - тепло от источника или стока тепла, находящегося внутри тела.

Если вычислить все эти изменения количества теплоты, используя физические законы и правила высшей математики, то в конце концов для однородного тела получим уравнение:

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + f\left(x, y, z, t\right) \qquad (1.3)$$

Это *уравнение теплопроводности однородного тела*. В нем $a = const$ (зависит от физических свойств рассматриваемого тела), а $f\left(x, y, z, t\right)$ определяет мощность источника или стока тепла внутри тела. Если $f\left(x, y, z, t\right) = 0$, то получим *однородное уравнение теплопроводности*:

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right). \qquad (1.4)$$

В случае тонкой однородной пластинки (которая предполагается плоской) и стержня (толщиной которого можно пренебречь) формула (1.4) соответственно принимает вид

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \qquad (1.5)$$

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (1.6)$$

Если в рассматриваемом твердом теле установившийся режим теплообмена, то температура в любой точке не зависит от времени. Тогда уравнение теплопроводности (1.3) превращается в *уравнение Пуассона*:

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -{f\left(x, y, z\right)}\big/{a^2}\,. \qquad (1.7)$$

Если же тепловых источников в теле нет, то получим *уравнение Лапласа*:

$$\Delta u = 0\,. \qquad (1.8)$$

2. Задача Коши

Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что решение этих уравнений не определяется однозначно. Чтобы найти частное решение, необходимо задать начальные условия.

Аналогичная ситуация и при решении дифференциальных уравнений в частных производных. Например, если функция $u = u(x, y)$ и для неё справедливо уравнение

$$u_y = 0,$$

то решением этого уравнения будет любая функция, зависящая только от x: $u = f(x)$.

Поэтому каждая задача математической физики ставится как задача о решении некоторого уравнения при определенных дополнительных условиях, которые определяются из физических соображений. Тогда мы имеем дело с *задачей Коши*.

Укажем некоторые возможные постановки задач.

1. Уравнение колебания струны (1.1). Если струна считается неограниченной, то необходимо поставить начальные условия

$$u(x, 0) = \varphi_1(x), \quad u_t(x, 0) = \varphi_2(x),$$

определяющие начальное положение и начальную скорость струны.

Если же струна ограничена, то обычно предполагают, что $0 \le x \le l$. Тогда в добавление к начальным условиям надо задать граничные условия. При неподвижных концах струны задают

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0,$$

Если же концы движутся, то необходимо задать законы их движения:

$$u(0, t) = \mu_1(t), \quad u(l, t) = \mu_2(t),$$

Бывают также задачи, когда один конец струны считается неподвижным, то есть жестко закрепленным, а другой свободным. Тогда граничные условия принимают вид

$$u(0, t) = 0, \quad u_x(l, t) = 0,$$

так как мы должны исключить на правом конце продольное движение.

Физический смысл всех вышеприведенных граничных условий состоит в математическом описании отражения волны от границы среды.

2. Уравнение теплопроводности (1.6). Если тело считается неограниченным, то в этом случае задается одно начальное условие

$$u(x,0)=\varphi(x).$$

Оно задает начальное распределение температур в теле.

Если же тело считается ограниченным, то помимо начального условия нужно задать условия на границе тела S. Условия эти бывают трех видов.

$$u\big|_S = f(S)$$

- задает температуру на границе.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(S)$$

- задает тепловой поток на границе.

$$\alpha \cdot u\big|_S + \beta \cdot \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f(S), \quad \alpha, \beta = const$$

- смешанная задача.

3. Уравнения Лапласа и Пуассона. В этом случае начального условия нет, так как отсутствует переменная t. Граничные условия ставятся аналогично изложенному в предыдущем пункте. Если на границе задана температура, то поставленная задача называется задачей Дирихле, если тепловой поток – задачей Неймана.

Говорят, что математическая задача поставлена корректно, если

1) решение задачи существует в каком-то классе M_1 функций;

2) решение задачи единственно в каком-то классе M_2 функций;

3) решение непрерывно зависит от данных задачи (начальных и граничных условий, свободных членов, коэффициентов уравнения и так далее). То есть сколь угодно малому изменению данных соответствует сколь угодно малое изменение решения. Это требование проистекает из экспериментального характера задач.

Множество $M_1 \cap M_2$ называется *классом корректности* рассматриваемой математической задачи.

3. Линейные дифференциальные уравнения с частными производными

Уравнение называется *линейным*, если оно линейно относительно искомой функции и всех ее производных, входящих в уравнение.

$$\begin{gathered} a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + \\ + b_1(x,y)u_x + b_2(x,y)u_y + c(x,y) = f(x,y) \end{gathered} \tag{3.1}$$

Например:

$$u_{xx} = x^2 u_{yy} + \sin\left(x^2\right)$$

- линейное уравнение, а

$$y \cdot u_x - x \cdot u_y + u^2 = 0, \quad u \cdot u_{xx} + u_y = x^2 y$$

- нелинейные уравнения (содержат квадрат искомой функции и произведение искомой функции на ее производную соответственно).

Если в (3.1) $f(x,y) = 0$, то уравнение называется *однородным*, в противном случае – *неоднородным*.

Обозначим левую часть (3.1) через $L[u]$, где L - линейный дифференциальный оператор. Тогда однородное и неоднородное уравнения сокращенно можно записать в виде

$$L[u]=0, \qquad (3.2)$$

$$L[u]=f(x,y). \qquad (3.3)$$

Метод решения подобного рода уравнений основан на следующих теоремах.

Теорема 1. Если $u(x,y)$ есть решение однородного уравнения (3.2), то и $C\cdot u(x,y), C=const$ тоже является решением (3.2).

Теорема 2. Если $u_1(x,y)$, $u_2(x,y)$ - решения однородного уравнения (3.2), то их сумма $u_1(x,y)+u_2(x,y)$ тоже является решением этого уравнения.

Следствие. Если каждая из функций $u_1(x,y)$, $u_2(x,y),\ldots,u_k(x,y)$ является решением уравнения (3.2), то их линейная комбинация

$$C_1u_1(x,y)+C_2u_2(x,y)+\ldots+C_ku_k(x,y),$$

$$C_i=const, i=1,\ldots k$$

также является решением этого уравнения.

Таким образом, в задачах часто приходится иметь дело не только с линейной комбинацией конечного числа решений, но и с рядом $\sum_{n=1}^{\infty}C_nu_n(x,y)$, где $C_n=const$, а $u_n(x,y)$ - частные решения однородного уравнения.

Приведенные выше теоремы позволяют составить решение только однородного уравнения. Для неоднородного уравнения справедливы следующие утверждения.

Теорема 3. Если $u(x,y)$ есть решение неоднородного уравнения (3.3), а $v(x,y)$ - решение однородного уравнения (3.2), то их сумма $u(x,y)+v(x,y)$ есть решение неоднородного уравнения.

Теорема 4. Если $u_1(x,y)$ - решение уравнения $L[u]=f_1(x,y)$, а $u_2(x,y)$ - решение уравнения $L[u]=f_2(x,y)$, то сумма $u_1(x,y)+u_2(x,y)$ - решение уравнения $L[u]=f_1(x,y)+f_2(x,y)$.

Любое линейное уравнение (3.1) с помощью замены переменных

$$\xi=\xi(x,y), \quad \eta=\eta(x,y)$$

может быть приведено к наиболее простому виду - каноническому виду. В данном случае к наиболее простому виду приведет обнуление наибольшего числа коэффициентов при старших производных уравнения (то есть при первых трех слагаемых формулы (3.1)). Составим матрицу из этих коэффициентов

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

В любой фиксированной точке можно найти характеристические числа этой матрицы.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{12} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix}=0,$$

$$(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)-a_{12}^2=0,$$

$$\lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0,$$

$$\lambda_{1,2}=\left(a_{11}+a_{22}\pm\sqrt{(a_{11}+a_{22})^2+4\left(a_{12}^2-a_{11}a_{22}\right)}\right)\Big/2.$$

Далее все зависит от дискриминанта, а точнее, от выражения $a_{12}^2-a_{11}a_{22}$. В соответствии с ним дифференциальные уравнения делятся на три типа.

1. $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$. В этом случае $\lambda_1>0$, $\lambda_2<0$ и уравнение называется *уравнением гиперболического типа*.

2. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$. Тогда $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$ и уравнение – это *уравнение параболического типа*.

3. $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$. λ_1, λ_2 имеют одинаковые знаки и мы имеем дело с *уравнением эллиптического типа*.

Запишем также формулы для пересчета коэффициентов дифференциального уравнения при вводе новых переменных. Пусть $\xi = \xi(x, y)$, $\eta = \eta(x, y)$ - новые переменные. Тогда согласно формулам математического анализа

$$u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$

$$u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y.$$

Для второй производной по x можем записать

$$u_{xx} = \left(u_\xi \xi_x\right)'_x + \left(u_\eta \eta_x\right)'_x = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_\xi \xi_{xx} +$$

$$+ u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\eta \eta_{xx} =$$

$$= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}.$$

Аналогичным образом

$$u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy},$$

$$u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}.$$

Если подставить все эти формулы для первых и вторых производных в исходное уравнение (3.1), то, сгруппировав слагаемые, получим

$$\left(a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2\right)u_{\xi\xi}+$$
$$+2\left(a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+a_{22}\xi_y\eta_y\right)u_{\xi\eta}+$$
$$+\left(a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2\right)u_{\eta\eta}+$$
$$+\left(a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y\right)u_{\xi}+$$
$$+\left(a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y\right)u_{\eta}+c\cdot u=f\left(\xi,\eta\right).$$

Таким образом, видно, что уравнение осталось линейным. Введя новые коэффициенты, его можно записать

$$\tilde{a}_{11}u_{\xi\xi}+2\tilde{a}_{12}u_{\xi\eta}+\tilde{a}_{22}u_{\eta\eta}+\tilde{b}_1u_{\xi}+\tilde{b}_2u_{\eta}+c\cdot u=f\left(\xi,\eta\right), \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned}
&\tilde{a}_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2,\\
&\tilde{a}_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}\left(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x\right)+a_{22}\xi_y\eta_y,\\
&\tilde{a}_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2, \qquad (3.5)\\
&\tilde{b}_1=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y,\\
&\tilde{b}_2=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y.
\end{aligned}$$

Это и есть формулы для пересчета коэффициентов линейного уравнения при переходе к новым переменным.

Новые переменные ξ, η берутся таким образом, чтобы это были дважды непрерывно дифференцируемые функции с отличным от нуля якобианом.

$$\frac{D\left(\xi,\eta\right)}{D\left(x,y\right)}=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0. \qquad (3.6)$$

Тогда после замены не только сохранится линейность уравнения, но и тип его не изменится. Можно показать, что

$$\tilde{a}_{12}^2 - \tilde{a}_{11}\tilde{a}_{22} = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\left(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x\right)^2 =$$

$$= \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\left(\frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)}\right)^2 .$$

4. Приведение дифференциальных уравнений к каноническому виду

Для того, чтобы привести дифференциальное уравнение с частными производными к каноническому виду, составляют так называемое *уравнение характеристик*. Оно имеет следующий вид:

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0, \quad (4.1)$$

где a_{11}, a_{12}, a_{22} - коэффициенты уравнения (3.1). Согласно правилам решения квадратных уравнений

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{2a_{12} \pm \sqrt{4\left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)}}{2a_{11}} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}. \quad (4.2)$$

Дальнейшее решение зависит от типа дифференциального уравнения.

1. Уравнение гиперболического типа. В этом случае дискриминант больше нуля и квадратное уравнение (4.1) имеет два разных вещественных корня.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

Решая полученные дифференциальные уравнения, получим общие интегралы

$$\varphi(x,y) = C_1, \quad \psi(x,y) = C_2,$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные. Левые части этих равенств надо выбрать в качестве новых переменных

$$\xi=\varphi(x,y),\quad \eta=\psi(x,y).$$

Можно доказать, что при вычислении новых коэффициентов по формулам (3.5) должно получиться

$$\tilde{a}_{11}=\tilde{a}_{22}=0,\quad \tilde{a}_{12}\neq 0.$$

Таким образом, гиперболическое уравнение в каноническом виде запишется следующим образом:

$$u_{\xi\eta}=F\left(\xi,\eta,u,u_{\xi},u_{\eta}\right).$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$y\cdot u_{xx}+u_{yy}=0.$$

Его коэффициенты

$$a_{11}=y,\quad a_{12}=0,\quad a_{22}=1,\quad b_1=b_2=0.$$

Следовательно, $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-y$. При $y<0$ это уравнение гиперболического типа. Рассмотрим его именно в этой области. Тогда уравнение характеристик

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0,\quad \frac{dy}{dx}=\pm\frac{1}{\sqrt{-y}}.$$

Если решить эти дифференциальные уравнения методом разделения переменных, получим общие интегралы

$$x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=C_1,\quad -x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}=C_2.$$

Согласно теории, обозначим

$$\xi=x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2},\quad \eta=-x+\frac{2}{3}(-y)^{3/2}. \qquad (4.3)$$

Вычисляя первые и вторые производные от новых переменных и подставляя их в (3.5), получим

$$\tilde{a}_{11}=\tilde{a}_{22}=0,\quad \tilde{a}_{12}=-2y,\quad \tilde{b}_1=\frac{1}{2\sqrt{-y}},\quad \tilde{b}_2=\frac{1}{2\sqrt{-y}}.$$

По формуле (3.4) уравнение приобретает следующий вид

$$-4y\cdot u_{\xi\eta}+\frac{1}{2\sqrt{-y}}u_{\xi}+\frac{1}{2\sqrt{-y}}u_{\eta}=0.$$

Но это еще не канонический вид, так как нужно еще выразить y через новые переменные ξ, η. Используя формулы (4.3), получим

$$\xi+\eta=\frac{4}{3}(-y)^{3/2}=\frac{4}{3}\left(\sqrt{-y}\right)^{3},$$

$$\sqrt{-y}=\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{1/3},$$

$$-y=\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{2/3}.$$

И таким образом

$$4\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{2/3}u_{\xi\eta}+\frac{1}{2\left(\frac{3}{4}(\xi+\eta)\right)^{1/3}}\left(u_{\xi}+u_{\eta}\right)=0,$$

$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{6(\xi+\eta)}\left(u_{\xi}+u_{\eta}\right)=0$$

- канонический вид данного уравнения.

2. Уравнение параболического типа. В этом случае дискриминант уравнения характеристик равен нулю и, согласно (4.2), имеем одно дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx}=\frac{a_{12}}{a_{11}}.$$

Решая его, получаем соответственно один общий интеграл $\varphi(x,y)=C$. Левую часть этого интеграла надо взять в качестве новой переменной: $\xi=\varphi(x,y)$. Что касается второй новой переменной, то для нее можно взять любую функцию, для которой выполняется условие (3.6). Можно доказать, что по формулам (3.5) в этом случае новые коэффициенты

$$\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{12} = 0, \quad \tilde{a}_{22} \neq 0$$

и каноническое уравнение имеет вид

$$u_{\eta\eta} = F\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right).$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$x \cdot u_{xx} - 2\sqrt{xy} \cdot u_{xy} + y \cdot u_{yy} + 0{,}5u_y = 0, \left(x > 0,\ y > 0\right).$$

Очевидно, что

$$a_{11} = x, \quad a_{12} = -\sqrt{xy}, \quad a_{22} = y, \quad b_1 = 0, \quad b_2 = 0{,}5,$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = xy - xy = 0$$

и уравнение является уравнением параболического типа для любых $x, y > 0$. Характеристическое уравнение имеет вид

$$x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\sqrt{xy}\,\frac{dy}{dx} + y = 0,$$

$$D = 4xy - 4xy = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{\frac{y}{x}}.$$

Решением этого обыкновенного дифференциального уравнения является функция $\sqrt{x} + \sqrt{y} = C$. Левую часть данного равенства возьмем в качестве одной новой переменной, а в качестве второй переменной выберем, например, функцию y. Таким образом,

$$\xi = \sqrt{x} + \sqrt{y}, \quad \eta = y.$$

Используя формулы (3.5), получим новые коэффициенты уравнения:

$$\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{12} = 0, \quad \tilde{a}_{22} = y, \quad \tilde{b}_1 = -\frac{1}{4\sqrt{x}}, \quad \tilde{b}_2 = \frac{1}{2}.$$

Подставляя новые коэффициенты (см. (3.4)), получим

$$y \cdot u_{\eta\eta} - \frac{1}{4\sqrt{x}}u_\xi + \frac{1}{2}u_\eta = 0.$$

Или

$$\eta \cdot u_{\eta\eta} - \frac{1}{4\left(\xi - \sqrt{\eta}\right)} u_\xi + \frac{1}{2} u_\eta = 0 .$$

3. Уравнение эллиптического типа. Характеристическое уравнение имеет отрицательный дискриминант и, следовательно, комплексные корни.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \pm i \frac{\sqrt{a_{11}a_{22} - a_{12}^2}}{a_{11}} .$$

Такое дифференциальное уравнение будет иметь решение

$$\varphi(x, y) \pm i \cdot \psi(x, y) = const .$$

Если в качестве новых переменных выбрать вещественную и мнимую части этого выражения, то формулы (3.5) дадут следующий результат:

$$\tilde{a}_{11} = \tilde{a}_{22} \neq 0, \quad \tilde{a}_{12} = 0$$

и каноническое уравнение примет вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = F\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right).$$

Пример. Для примера рассмотрим уравнение с постоянными коэффициентами

$$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} + u_x + u_y = 0 ,$$

$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 1, \quad a_{22} = 2, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = 1 .$$

Его характеристическое уравнение, соответственно, запишется

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\frac{dy}{dx} + 2 = 0 ,$$

$$D = 4 - 8 = -4 ,$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = 1 + i, \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_2 = 1 - i .$$

Если по очереди решить эти дифференциальные уравнения, то получим два общих интеграла

$$(x - y) + i\,x = C_1, \quad (x - y) - i\,x = C_2 ,$$

которые можно объединить в один

$$\left(x-y\right) \pm i\,x = const\,.$$

Выберем новые переменные согласно теории

$$\xi = x-y, \quad \eta = x$$

и по формулам (3.5) вычислим

$$\tilde{a}_{11} = 1, \quad \tilde{a}_{12} = 0, \quad \tilde{a}_{22} = 1, \quad \tilde{b}_1 = 0, \quad \tilde{b}_2 = 1\,.$$

Таким образом, канонический вид данного уравнения:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + u_{\eta} = 0\,.$$

5. Формула Д'Аламбера для уравнения колебания струны

К уравнениям гиперболического типа приводят задачи о колебаниях сплошных сред. Они характеризуются тем свойством, что возмущения распространяются с конечной скоростью. Во внутренней точке среды влияние начальных и граничных условий не сказывается в течение некоторого времени. Поэтому для гиперболических уравнений имеет смысл рассматривать задачи, в которых известны только начальные условия.

Приведем уравнение колебания струны $a^2u_{xx} - u_{tt} = 0$ к каноническому виду. Его характеристическое уравнение можно записать (см. (4.1)):

$$a^2\left(\frac{dt}{dx}\right)^2 - 1 = 0 \text{ или } \frac{dx}{dt} = \pm a\,.$$

Решая дифференциальные уравнения, получим общие интегралы

$$x + at = C_1, \quad x - at = C_2\,.$$

Если в качестве новых переменных взять левые части общих интегралов ($\xi = x - at$, $\eta = x + at$) и вычислить новые коэффициенты по формулам (3.5), получим следующее простое уравнение

$$u_{\xi\eta} = \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi}\right) = 0 .$$

Его легко решить. Очевидно, что $\frac{\partial u}{\partial\xi} = \Phi(\xi)$. Следовательно,

$$u = \int \Phi(\xi)\,d\xi + \Phi_2(\eta) = \Phi_1(\xi) + \Phi_2(\eta).$$

Или, если вернуться к старым переменным

$$u(x-at, x+at) = \Phi_1(x-at) + \Phi_2(x+at). \qquad (5.1)$$

Это *общее решение (решение Д'Аламбера) волнового уравнения*. Для его существования необходимо, чтобы у Φ_1, Φ_2 существовали производные первого и второго порядков.

Функции Φ_1, Φ_2 уравнения (5.1) имеют четкий физический смысл. В начальный момент времени $t=0$ они задают начальные профили волны $\Phi_1(x_0)$, $\Phi_2(x_0)$. Затем функция $\Phi_1(x-at)$ описывает движение начального профиля $\Phi_1(x_0)$ вправо со скоростью a, причем профиль при движении не меняет своей формы. Поэтому $\Phi_1(x-at)$ называют *прямой бегущей волной*. Соответственно, $\Phi_2(x+at)$ описывает движение начального профиля $\Phi_2(x_0)$ влево со скоростью a и называется *обратной бегущей волной*. А данный метод построения решения волнового уравнения называется *методом характеристик* или *методом бегущих волн*.

Определить конкретный вид функций Φ_1, Φ_2 позволяют начальные условия. Пусть задача Коши имеет вид:

$$u_{tt} = a^2 u_{xx},$$
$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x).$$

Тогда согласно формуле (5.1)

$$u(x,0)=\Phi_1(x)+\Phi_2(x),$$

$$u_t(x,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\Phi_1(x-at)+\Phi_2(x+at)\right)= \\ =-a\Phi_1'(x-at)+a\Phi_2'(x+at).$$

$$u_t(x,0)=-a\Phi_1'(x)+a\Phi_2'(x).$$

И получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases}\Phi_1(x)+\Phi_2(x)=\varphi_0(x),\\ -\Phi_1(x)+\Phi_2(x)=\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x}\varphi_1(s)\,ds.\end{cases}$$

Решением этой системы являются функции

$$\Phi_2(x)=\frac{\varphi_0(x)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\varphi_1(s)\,ds\,,$$

$$\Phi_1(x)=\varphi_0(x)-\Phi_2(x)=\frac{\varphi_0(x)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\varphi_1(s)\,ds\,.$$

Складывая эти функции по формуле (5.1), получим

$$u(x-at,x+at)=\frac{\varphi_0(x-at)}{2}-\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x-at}\varphi_1(s)\,ds+ \\ +\frac{\varphi_0(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x+at}\varphi_1(s)\,ds.$$

Или в упрощенном виде

$$u(x-at,x+at)=\frac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\varphi_1(s)\,ds\,,\qquad(5.2)$$

где функции $\varphi_0(x)$, $\varphi_1(x)$ определены в начальных условиях задачи. Эта формула называется *формулой Д'Аламбера*. Можно показать, что для нее соблюдается условие непрерывной зависимости решения от начальных условий. Кроме того, из (5.2) очевидно, что значения решения $u(x,t)$ в точке $M(x,t)$ зависит только от значений функций φ_0, φ_1 на отрезке

$$\Delta = [x-at, x+at].$$

Этот отрезок называется *областью зависимости* для точки M.

Рассмотрим, например, задачу

$$u_{tt} = u_{xx},$$

$$u(x,0) = \begin{cases} 1-x^2, & x \in [-1,1], \\ 0, & x \notin [-1,1], \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = 0$$

(отметим, что в уравнении $a=1$). Тогда при $t=0$ формула (5.2) дает

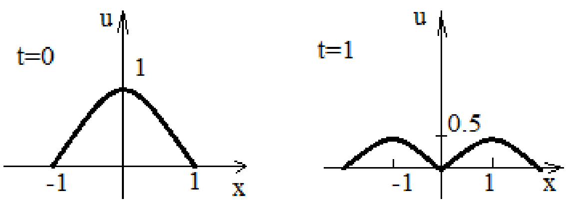
$$u(x,t) = 1-x^2, \quad -1 \le x \le 1.$$

При $t=1$ и $t=2$, соответственно, получаем

$$u(x,t) = \frac{1-(x-1)^2}{2} + \frac{1-(x+1)^2}{2},$$

$$u(x,t) = \frac{1-(x-2)^2}{2} + \frac{1-(x+2)^2}{2}$$

и так далее Графически это соответствует разбегающимся друг от друга волнам.



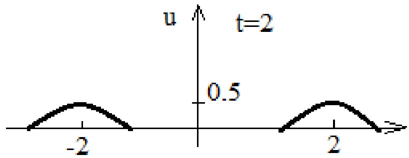


Рис. 2. Профили волн в начальный и последующий моменты времени.

6. Случаи ограниченной и полуограниченной струны

Рассмотрим струну с закрепленными концами, то есть задачу с начальными и граничными условиями

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x),$$
$$u(0,t) = u(l,t) = 0.$$

Для решения можно пользоваться формулой Д'Аламбера, но проблема в том, что функции φ_0, φ_1, а, следовательно, и функции Φ_1, Φ_2 в формуле (5.1) могут быть определены только на интервале $[0, l]$, а значения $x \pm at$ могут лежать вне этого интервала. Надо как-то доопределить функции φ_0, φ_1 на всю ось. Согласно граничным условиям

$$u(0,t) = \Phi_1(-at) + \Phi_2(at) = 0,$$
$$u(l,t) = \Phi_1(l - at) + \Phi_2(l + at) = 0.$$

Или иначе, если обозначить $at = x$:

$$\Phi_1(-x) = -\Phi_2(x), \qquad (6.1)$$
$$\Phi_1(l - x) = -\Phi_2(l + x). \qquad (6.2)$$

Из этих условий следует, что если изначально $x \in [0, l]$, то формула (6.1) определяет Φ_1 при $x \in [-l, 0]$. Далее можно вычислить

$$\Phi_1(2l + x) = \Phi_1(l - (-l - x)) = -\Phi_2(l + (-l - x)) =$$
$$= -\Phi_2(-x) = \Phi_1(x).$$

То есть Φ_1 является периодической функцией с периодом $2l$ и определена для всех x. То же самое можно доказать, используя условия (6.1), (6.2) для функции Φ_2. Следовательно, то же верно и для функций φ_0, φ_1, т.к.

$$\varphi_0(x) = \Phi_1(x) + \Phi_2(x),$$
$$\varphi_1(x) = a(\Phi_1'(x) - \Phi_2'(x)).$$

Все это означает, что функции φ_0, φ_1 продолжаются из промежутка $[0, l]$ в промежуток $[-l, 0]$ нечетным образом, а затем с периодом $2l$ на всю ось (см. рис. 3).

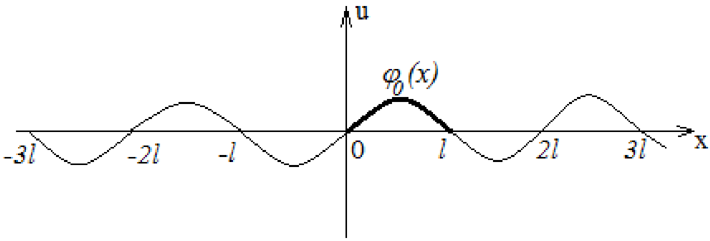


Рис. 3. Доопределение функций задачи Коши для струны с закркпленными концами.

Такое расширение области определения начальных функций φ_0, φ_1 позволяет решать задачу об ограниченной струне с помощью формулы Д'Аламбера.

Теперь рассмотрим задачу о полуограниченной струне, т.е. струне, у которой один конец закреплен, а другой находится в бесконечности.

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\le x<+\infty,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=\varphi_0(x),\quad u_t(x,0)=\varphi_1(x),$$
$$u(0,t)=0.$$

Для применения формулы Д'Аламбера построим нечетное продолжение функций φ_0, φ_1.

$$\theta_0(x)=\begin{cases}\varphi_0(x), & x\ge 0,\\ -\varphi_0(-x), & x<0,\end{cases}$$

$$\theta_1(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & x\ge 0,\\ -\varphi_1(-x), & x<0.\end{cases}$$

С одной стороны, такое доопределение позволяет использовать формулу Д'Аламбера (5.2):

$$u(x,t)=\frac{\theta_0(x-at)+\theta_0(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\theta_1(s)ds\,. \quad (6.3)$$

С другой стороны можно показать, что введение функций θ_0, θ_1 не испортит начальные и граничное условия задачи, они по прежнему будут выполняться. Таким образом решение (6.3) оказывается вполне корректным. Возвращаясь к прежним обозначениям, его можно записать

$$u(x,t)=\begin{cases}\dfrac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{x-at}^{x+at}\varphi_1(s)ds, & x-at\ge 0,\\[2ex] \dfrac{-\varphi_0(at-x)+\varphi_0(x+at)}{2}+\dfrac{1}{2a}\displaystyle\int\limits_{at-x}^{x+at}\varphi_1(s)ds, & x-at<0.\end{cases}$$

Физически это означает, что через некоторое время волны могут отражаться от закрепленного конца.

Аналогично решается задача о полуограниченной струне со свободным концом.

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x < +\infty, \quad t \ge 0,$$
$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x),$$
$$u_x(0,t) = 0.$$

Составим четные продолжения функций φ_0, φ_1.

$$\theta_0(x) = \begin{cases} \varphi_0(x), & x \ge 0, \\ \varphi_0(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$\theta_1(x) = \begin{cases} \varphi_1(x), & x \ge 0, \\ \varphi_1(-x), & x < 0. \end{cases}$$

Тогда снова можно записать решение в виде (6.3) и доказать, что начальные и граничное условия не нарушаются. Возвращаясь к прежним обозначениям, получим решение задачи

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_0(x-at)+\varphi_0(x+at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \varphi_1(s)\,ds, \; x-at \ge 0, \\ \dfrac{\varphi_0(at-x)+\varphi_0(x+at)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{0}^{x+at} \varphi_1(s)\,ds + \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{0}^{at-x} \varphi_1(s)\,ds, \quad x-at < 0. \end{cases}$$

С физической точки зрения эта формула также описывает отражение волны от границы среды.

7. Метод Фурье. Задача Штурма-Лиувилля

Рассмотрим другой способ решения задачи о колебании струны с закрепленными концами.

$$\begin{aligned} &u_{tt} = a^2 u_{xx}, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0, \\ &u(x,0) = \varphi_0(x), \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x), \qquad (7.1) \\ &u(0,t) = u(l,t) = 0. \end{aligned}$$

Будем искать решение в виде

$$u(x,t) = X(x)T(t). \qquad (7.2)$$

Если предположить, что решение в виде (7.2) существует и подставить (7.2) в уравнение (7.1), то получим

$$T'' \cdot X = a^2 X'' \cdot T.$$

Или

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)}. \qquad (7.3)$$

Это равенство будет выполняться для любых x, t только в том случае, если каждая из дробей равна одной и той же константе. Введем в рассмотрение эту константу и приравняем к ней по очереди каждую из дробей.

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda = const,$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Подставим (7.2) в граничные условия задачи (7.1). Тогда получим следующее

$$u(0,t) = X(0)T(t) = 0,$$

$$u(l,t) = X(l)T(t) = 0$$

для любых t. Эти равенства выполняются, если $X(0)=X(l)=0$. Таким образом, для функции $X(x)$ сформулирована следующая задача

$$\begin{aligned} &X''(x)+\lambda X(x)=0, \\ &X(0)=X(l)=0. \end{aligned} \qquad (7.4)$$

Эта задача называется *задачей Штурма-Лиувилля*. Константы λ, при которых задача имеет решение, называются *собственными числами*, а решения $X(x)$ - *собственными функциями*. Решением (7.4), очевидно, является функция $X(x)\equiv 0$, но это решение тривиально и неинтересно. Будем искать нетривиальные решения.

Дифференциальное уравнение (7.4) - это дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Его решение зависит от знака числа λ. Рассмотрим разные случаи.

1. $\lambda<0$. В этом случае решение (7.4) имеет вид

$$X(x)=C_1e^{\sqrt{\lambda}x}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}x},$$

где C_1, C_2 - произвольные постоянные.

$$X(0)=C_1+C_2=0,$$

$$X(l)=C_1e^{\sqrt{\lambda}l}+C_2e^{-\sqrt{\lambda}l}=0.$$

Эти условия выполняются только, если $C_1=C_2=0$, а значит, мы получаем тривиальное решение.

2. $\lambda=0$. Тогда $X''(x)=0$ и решение имеет вид

$$X(x)=C_1x+C_2.$$

Проверяя условия, легко установить, что и в этом случае решение может быть только нулевым.

3. $\lambda>0$. В этом случае

$$X(x)=C_1\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right),$$

$$X(0)=C_1=0,$$
$$X(l)=C_2\sin\left(\sqrt{\lambda}l\right)=0.$$

Положим $C_2\neq 0$. Тогда

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}l\right)=0,\quad \sqrt{\lambda}l=\pi n,\quad \lambda_n=\frac{\pi^2n^2}{l^2},\quad n=1,2,3,\ldots$$

λ_n - собственные числа, $X_n(x)=\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right),\quad n=1,2,3,\ldots$ - собственные функции. Теперь вернемся к (7.3) и рассмотрим задачу для функции $T(t)$.

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=-a^2\lambda_n,\quad \lambda_n>0,$$
$$T''(t)+a^2\lambda_nT(t)=0,\quad n=1,2,3,\ldots.$$

Это дифференциальное уравнение по структуре ничем не отличается от уравнения для функции $X(x)$, так что его решение имеет такой же вид

$$T_n(t)=A_n\cos\left(\sqrt{\lambda_n}at\right)+B_n\sin\left(\sqrt{\lambda_n}at\right)=$$
$$=A_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right).$$

Таким образом, получается, что вместо одного решения $u(x,t)$ мы получили бесконечное множество решений $u_n(x,t)=T_n(t)X_n(x)$, которые, согласно теоремам о решении линейных уравнений, можно объединить в один бесконечный ряд.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right). \tag{7.5}$$

Константы A_n, B_n находятся из начальных условий задачи (7.1). Проверим первое начальное условие

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=\varphi_0(x).$$

Чтобы определить A_n, необходимо разложить функцию $\varphi_0(x)$ в ряд Фурье по собственным функциям задачи. Пусть

$$\varphi_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{0n}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

где $\varphi_{0n}=\dfrac{2}{l}\int\limits_0^l\varphi_0(x)\sin\left(\dfrac{\pi n}{l}x\right)dx$ - коэффициенты Фурье. Тогда $A_n=\varphi_{0n}$.

Второе начальное условие (7.1) – это условие для скорости, так что для его проверки необходимо продифференцировать по времени решение (7.5).

$$u_t(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{\pi na}{l}\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+B_n\frac{\pi na}{l}\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Тогда

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\pi n}{l}a\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=\varphi_1(x).$$

Снова нужно разложить функцию $\varphi_1(x)$ в ряд Фурье. Если

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{1n}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),\quad \varphi_{1n}=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi_1(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx,$$

то $B_n=\dfrac{l}{\pi n a}\varphi_{1n}$.

Таким образом, получим ответ

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{0n}\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+\frac{l\varphi_{1n}}{\pi n a}\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

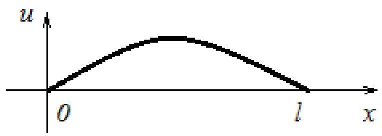
Выражения

$$u_n(x,t)=\left(\varphi_{0n}\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+\frac{l\varphi_{1n}}{\pi n a}\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

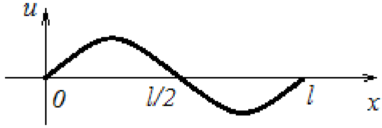
называются *собственными колебаниями* или *стоячими волнами*. Такая волна оставляет неподвижными ряд точек, определяющихся из условия

$$\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=0,\quad \frac{\pi n}{l}x=\pi k,\quad k=1,2,3,\ldots,\quad x=\frac{k}{n}l.$$

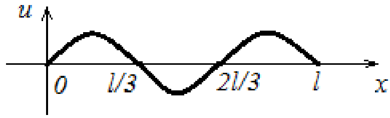
Таким образом, точки $x=\dfrac{1}{n}l,\ \dfrac{2}{n}l,\ \dfrac{3}{n}l$ и так далее остаются неподвижными. Такие точки называются *узлами*. Точки максимальных отклонений называются *пучностями*. На рис. 4.видно, что стоячие волны при разных n представляют собой синусоиды с разными периодами.



$n=1,\quad u_1=T_1X_1.$



$n=2,\quad u_2=T_2X_2.$



$$n=3,\quad u_3=T_3X_3.$$

Рис. 4. Графическое изображение функций, используемых в методе Фурье.

Мы подробно рассмотрели задачу о струне с неподвижными концами. Аналогичным образом решается уравнение колебания струны, в котором один конец считается закрепленным, а другой свободным.

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\le x\le l,\quad t\ge 0,$$
$$u(x,0)=\varphi_0(x),\quad u_t(x,0)=\varphi_1(x),$$
$$u(0,t)=0,\quad u_x(l,t)=0.$$

Для функции $X(x)$ в этом случае можем записать

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,$$
$$X(0)=0,\quad X'(l)=0.$$

Решением уравнения, а, следовательно, и собственными функциями будут

$$X_n(x)=\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right),\quad n=1,2,3,\ldots$$

Задача для $T_n(t)$ решается аналогично предыдущему. Ответ, таким образом, запишется в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_{0n}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}at\right)+\frac{2l\varphi_{1n}}{\pi(2n-1)a}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}at\right)\right)\cdot$$
$$\cdot\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right),\quad n=1,2,3,\ldots,$$

где предполагается, что

$$\varphi_0(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{0n}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right),$$

$$\varphi_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{1n}\sin\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right).$$

8. Неоднородные волновые уравнения и волновые уравнения с неоднородными граничными условиями

Рассмотрим сначала неоднородное уравнение колебания струны с начальными и граничными условиями.

$$\begin{aligned}&u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t),\quad 0\le x\le l,\quad t\ge 0,\\&u(x,0)=\varphi_0(x),\quad u_t(x,0)=\varphi_1(x),\\&u(0,t)=u(l,t)=0.\end{aligned}\qquad(8.1)$$

Сначала, как и в предыдущем параграфе, определим собственные числа и собственные функции задачи. Так как в методе Фурье

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)X_n(x),\qquad(8.2)$$

Подставим разложение (8.2) в уравнение (8.1).

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''X_n-a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_nX_n''=f(x,t),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''X_n-a^2T_nX_n''\right)=f(x,t).$$

Из задачи Штурма-Лиувилля (7.4) известно, что

$$X_n''=-\lambda_nX_n,$$

поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n'' + a^2\lambda_n T_n\right)X_n = f\left(x,t\right). \quad (8.3)$$

Далее раскладываем функцию $f\left(x,t\right)$ по собственным функциям задачи. Допустим,

$$f\left(x,t\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n X_n .$$

Тогда для функции $T_n\left(t\right)$ получаем дифференциальное уравнение

$$T_n'' + a^2\lambda_n T_n = f_n . \quad (8.4)$$

Решив его и определив коэффициенты из начальных условий, получим решение уравнения (8.1).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + \left(3x+1\right)e^{-t}, \quad 0 \le x \le l, \quad t \ge 0,$$

$$u\left(x,0\right) = 0, \quad u_t\left(x,0\right) = 0,$$

$$u\left(0,t\right) = u\left(l,t\right) = 0.$$

Собственными числами и собственными функциями этого уравнения (см. (7.4)) являются

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Подставив эти значения в (8.3), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n'' + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}a^2 T_n\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \left(3x+5\right)e^{-t} .$$

Теперь необходимо разложить правую часть равенства в ряд Фурье. По определению такого ряда можно представить

$$3x+5 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

где

$$c_n=\frac{2}{l}\int_0^l(3x+5)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx=\frac{10-2(3l+5)(-1)^n}{\pi n}. \quad (8.5)$$

И согласно (8.4) получим уравнение

$$T_n''+\frac{\pi^2n^2}{l^2}a^2T_n=c_ne^{-t}.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение представляет собой сумму общего и частного решений. В данном случае оно имеет вид

$$T_n(t)=A_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+\frac{l^2c_ne^{-t}}{l^2+\pi^2n^2a^2},$$

где c_n определяются по формуле (8.5), а A_n, B_n - произвольные постоянные. Таким образом

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+B_n\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+\frac{l^2c_ne^{-t}}{l^2+\pi^2n^2a^2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Константы A_n, B_n находим из начальных условий задачи.

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n+\frac{l^2c_n}{l^2+\pi^2n^2a^2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=0.$$

$$A_n=-\frac{l^2c_n}{l^2+\pi^2n^2a^2}.$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(B_n\frac{\pi n}{l}a-\frac{l^2c_n}{l^2+\pi^2n^2a^2}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)=0.$$

$$B_n=\frac{l}{\pi na}\frac{l^2c_n}{l^2+\pi^2n^2a^2}.$$

И можно записать окончательный ответ (c_n подставляем из (8.5)):

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{l^2}{l^2+\pi^2n^2a^2}\frac{10-2(3l+5)(-1)^n}{\pi n}$$

$$\left(-\cos\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+\frac{l}{\pi na}\sin\left(\frac{\pi n}{l}at\right)+e^{-t}\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$$

Рассмотрим теперь случай однородного уравнения с неоднородными граничными условиями (случай движущихся концов).

$$u_{tt}=a^2u_{xx},\quad 0\le x\le l,\quad t\ge 0,$$

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\quad u_t(x,0)=\varphi_1(x),$$

$$u(0,t)=\mu_1(t),\quad u(l,t)=\mu_2(t).$$

При такой постановке задачи необходимо произвести замену неизвестной функции. Пусть

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)\,,\qquad (8.6)$$

где

$$w(x,t)=\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1(t)+\frac{x}{l}\mu_2(t)\,,$$

то есть для $w(x,t)$ выполняются неоднородные граничные условия. Функция $v(x,t)$ будет новой неизвестной функцией. Тогда можно записать

$$u_{tt}=v_{tt}+w_{tt}=v_{tt}+\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1''(t)+\frac{x}{l}\mu_2''(t)\,,$$

$$u_{xx}=v_{xx}+w_{xx}=v_{xx}\,,$$

так как $w_{xx}=0$. Начальные и граничные условия тоже можно переписать

$$u(x,0)=v(x,0)+w(x,0)=$$

$$=v(x,0)+\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1(0)+\frac{x}{l}\mu_2(0)=\varphi_0(x),$$

$$u_t(x,0)=v_t(x,0)+w_t(x,0)=$$
$$=v_t(x,0)+\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1'(0)+\frac{x}{l}\mu_2'(0)=\varphi_1(x),$$
$$u(0,t)=v(0,t)+w(0,t)=v(0,t)+\mu_1(t)=\mu_1(t),$$
$$u(l,t)=v(l,t)+\mu_2(t)=\mu_2(t).$$

Таким образом, получаем задачу для новой неизвестной функции.

$$v_{tt}=a^2v_{xx}-\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1''(t)-\frac{x}{l}\mu_2''(t),$$
$$v(x,0)=\varphi_0(x)-\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1(0)-\frac{x}{l}\mu_2(0),$$
$$v_t(x,0)=\varphi_1(x)-\left(1-\frac{x}{l}\right)\mu_1'(0)-\frac{x}{l}\mu_2'(0),$$
$$v(0,t)=0,\quad v(l,t)=0.$$

Это неоднородное уравнение с нулевыми граничными условиями. Решение таких уравнений разобрано в начале данного параграфа, то есть задача с неоднородными граничными условиями сводится к задаче, решенной ранее. Получив решение $v(x,t)$, необходимо вернуться к функции $u(x,t)$, воспользовавшись формулой (8.6).

9. Задача Коши для уравнения теплопроводности

Рассмотрим теперь задачу о распределении тепла в стержне. Функция $u(x,t)$, $0\le x\le l$, $t\ge 0$ - температура в каждой точке стержня в любой момент времени. Одномерное уравнение теплопроводности бывает однородное и неоднородное (см. (1.3) - (1.6)), это зависит от наличия или отсутствия источников тепла внутри тела. Неоднородное уравнение можно записать в виде

$$u_t = a^2 u_{xx} + f\left(x,t\right). \quad (9.1)$$

Для уравнения (9.1) необходимо задать одно начальное условие (начальную температуру):

$$u\left(x,0\right) = \varphi\left(x\right).$$

Граничные условия могут быть различными в зависимости от температурного режима на концах стержня. Рассмотрим три основных типа граничных условий.

1. На концах стержня задана температура.

$$u\left(0,t\right) = \psi_1\left(t\right), \quad u\left(l,t\right) = \psi_2\left(t\right),$$

$t \in \left[0,T\right]$, в течение которого изучается процесс.

2. На концах стержня заданы тепловые потоки, проходящие через торцевые концы стержня.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = \psi_1\left(t\right), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = \psi_2\left(t\right).$$

Если функции $\psi_1\left(t\right)$ или $\psi_2\left(t\right)$ тождественно равны нулю, то соответствующий конец стержня теплоизолирован.

3. На концах стержня происходит теплообмен с окружающей средой, имеющей заданную температуру, которая зависит от времени.

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = h\left(u\left(0,t\right) - \psi_1\left(t\right)\right),$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = -h\left(u\left(l,t\right) - \psi_2\left(t\right)\right).$$

Разумеется, на разных концах стержня могут задаваться разные условия.

Для уравнения теплопроводности можно сформулировать следующие теоремы.

Теорема 1 (принцип максимума). Если функция $u(x,t)$, непрерывная вместе со своими частными производными первого и второго порядка, удовлетворяет однородному уравнению теплопроводности

$$u_t = a^2 u_{xx}$$

в точках области $\Omega = \{0 \le x \le l, 0 \le t \le T\}$, то максимальное и минимальное значение функции $u(x,t)$ достигается или в начальный момент времени $t = 0$, или в точках границы $x = 0$, $x = l$.

Физический смысл теоремы: если температура тела не превосходит значения T_0 в граничных точках или в начальный момент времени, то при отсутствии источников тепла внутри тела не может возникнуть температура, большая T_0.

Теорема 2. Решение уравнения теплопроводности в прямоугольнике Ω единственно и непрерывно зависит от начальных и граничных функций.

10. Метод Фурье для уравнения теплопроводности

Рассмотрим сначала однородное уравнение с заданной на концах нулевой температурой.

$$\begin{aligned} &u_t = a^2 u_{xx}, \\ &u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0, \qquad (10.1) \\ &u(x,0) = \varphi(x). \end{aligned}$$

Если функцию $u(x,t)$ представить в виде (7.2) и подставить в уравнение (10.1), получим

$$X \cdot T' = a^2 X'' \cdot T .$$

Или

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda = const.$$

Если рассматривать по отдельности уравнения для функций $X(x)$ и $T(t)$, то для $X(x)$ получим задачу Штурма-Лиувилля (7.4), решение которой

$$\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}, \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Для функции $T(t)$ получаем другое уравнение

$$T' + \lambda a^2 T = 0.$$

Или, если подставить значения λ,

$$T_n' + \frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 T_n = 0.$$

Это обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, которое решается с помощью разделения переменных. Проинтегрировав его, получим

$$T_n = C_n \exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 t\right\}, C_n = const, n = 1, 2, 3, \ldots$$

Таким образом

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2} a^2 t\right\} \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Коэффициенты C_n находятся из начального условия

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = \varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right),$$

где $\varphi_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)dx$ - коэффициенты ряда Фурье. Тогда

$$C_n = \varphi_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

и можно записать ответ в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}a^2 t\right\}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Другой вариант задачи: это когда хотя бы на одном конце задан тепловой поток. Тогда просто будет другая собственная функция $X(x)$.

$$\begin{aligned}&u_t=a^2u_{xx},\\ &u_x(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\\ &u(x,0)=\varphi(x).\end{aligned}$$

В этом случае для функции $X(x)$ получим следующую задачу (см. параграф 7):

$$\begin{aligned}&X''(x)+\lambda X(x)=0,\\ &X'(0)=0,\quad X(l)=0,\end{aligned}$$

решение которой имеет вид

$$X_n=\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right),\quad n=1,2,3,\ldots$$

Тогда

$$T_n=C_n\exp\left\{-\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4l^2}a^2t\right\}$$

и решение уравнения теплопроводности можно записать следующим образом

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n \exp\left\{-\frac{\pi^2(2n-1)^2}{4l^2}a^2t\right\}\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{l}x\right),$$

где

$$C_n=\varphi_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\cos\left(\frac{\pi(2n-1)}{2l}x\right)dx\,.$$

Если хотя бы на одном конце задан теплообмен с окружающей средой, то это приводит к трудностям при вычислении λ_n. Рассмотрим следующую задачу:

$$u_t = a^2 u_{xx} - 5u,$$
$$u_x(0,t) - h \cdot u(0,t) = 0,$$
$$u_x(l,t) = 0,$$
$$u(x,0) = T_0.$$

То есть начальная температура стержня предполагается постоянной, правый конец теплоизолирован, а на левом происходит теплообмен. Задача Штурма-Лиувилля в этом случае имеет вид

$$X'' + \lambda X = 0,$$
$$X'(0) - h \cdot X(0) = 0, \quad X'(l) = 0.$$

Дифференциальное уравнение уже было решено ранее. Попытаемся найти коэффициенты из граничных условий.

$$X(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right), \quad (10.2)$$
$$X'(x) = -C_1\sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda} x\right) + C_2\sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda} x\right).$$

Тогда

$$X'(0) - h \cdot X(0) = C_2\sqrt{\lambda} - h \cdot C_1 = 0$$

и значит $\dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{\sqrt{\lambda}}{h}$.

Второе граничное условие дает нам следующее

$$X'(l) = -C_1\sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda} l\right) + C_2\sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda} l\right) = 0,$$
$$-\frac{C_1}{C_2}\sqrt{\lambda} \sin\left(\sqrt{\lambda} l\right) + \sqrt{\lambda} \cos\left(\sqrt{\lambda} l\right) = 0.$$

Если использовать полученное из первого граничного условия уравнение для C_1/C_2, придем к следующему равенству:

$$\operatorname{tg}\left(\sqrt{\lambda} l\right) = \frac{h}{\sqrt{\lambda}}. \qquad (10.3)$$

Это уравнение имеет бесконечное множество решений $\lambda_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$, но их можно найти только с помощью приближенных вычислений. Так что в этом случае собственные функции придется записать:

$$X_n(x) = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{h} \cos\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) + \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где λ_n - решения уравнения (10.3).

Если подставить теперь разложение (8.2) метода Фурье в решаемое нами уравнение, то получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n' X_n - a^2 T_n X_n'' + 5 T_n X_n\right) = 0$$

Из задачи Штурма-Лиувилля следует, что $X_n'' = -\lambda_n X_n$, а значит, уравнение можно преобразовать

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n' + \left(a^2 \lambda_n + 5\right) T_n\right) X_n = 0.$$

Для T_n получаем обыкновенное дифференциальное уравнение, которое можно решить разделением переменных.

$$T_n' + \left(a^2 \lambda_n + 5\right) T_n = 0,$$

$$T_n = C_n \exp\left\{-\left(a^2 \lambda_n + 5\right) t\right\}.$$

Таким образом

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp\left\{-\left(a^2 \lambda_n + 5\right) t\right\} \left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{h} \cos\left(\sqrt{\lambda_n} x\right) + \sin\left(\sqrt{\lambda_n} x\right)\right)$$

Осталось проверить начальные условия и найти C_n.

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{h}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)+\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)\right)=T_0 .$$

Можно показать, что

$$T_0=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2T_0}{\sqrt{\lambda_n}l}\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{h}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)+\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)\right),$$

если разложить T_0 по собственным функциям, используя уравнения, полученные из граничных условий. Таким образом $C_n=\dfrac{2T_0}{\sqrt{\lambda_n}l}$ и

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2T_0}{\sqrt{\lambda_n}l}\exp\left\{-\left(a^2\lambda_n+5\right)t\right\}$$

$$\left(\frac{\sqrt{\lambda_n}}{h}\cos\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)+\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right)\right),$$

где λ_n - решения уравнения (10.3).

11. Случаи неоднородного уравнения теплопроводности и неоднородных граничных условий

Рассмотрим неоднородное уравнение, то есть случай, когда в теле находятся источники тепла. Пусть, например, имеем уравнение

$$u_t=a^2u_{xx}+3\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right),$$

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,$$

$$u(x,0)=0.$$

Собственные функции этого уравнения: $X_n(x) = \sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right)$.

Если в уравнение подставить разложение (8.2) и сделать преобразования, аналогичные приведенным в (8.3), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n' + a^2\frac{\pi^2 n^2}{l^2}T_n\right)\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right) = 3\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right).$$

Очевидно, чтобы равенство выполнялось, требуется решить два уравнения:

$$T_3' + \frac{9\pi^2}{l^2}a^2 T_n = 3, \qquad (11.1)$$

$$T_n' + \frac{\pi^2 n^2}{l^2}a^2 T_n = 0, \quad n \neq 3. \quad (11.2)$$

Решение (11.2) приведено в предыдущем параграфе.

$$T_n = C_n \exp\left\{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}a^2 t\right\}, \quad n \neq 3.$$

Уравнение (11.1) – это неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Оно решается методом вариаций произвольной постоянной или методом Бернулли. Использовав любой из этих методов, получим в результате

$$T_3(t) = \frac{l^2}{3\pi^2 a^2} + C_3 \exp\left\{-\frac{9\pi^2}{l^2}a^2 t\right\},$$

где C_3 - произвольная постоянная.

Таким образом, функцию $u(x,t)$ придется записать в виде

$$u(x,0)=T_3X_3+\sum_{n=1,n\neq 3}^{\infty}T_nX_n=$$

$$=\left(\frac{l^2}{3\pi^2a^2}+C_3\exp\left\{-\frac{9\pi^2}{l^2}a^2t\right\}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right)+$$

$$+\sum_{n=1,n\neq 3}^{\infty}C_n\exp\left\{-\frac{\pi^2n^2}{l^2}a^2t\right\}\sin\left(\frac{\pi n}{l}x\right).$$

Для определения произвольных постоянных, как обычно, используем начальное условие задачи. В нашем случае получим

$$C_3=-\frac{l^2}{3\pi^2a^2},\quad C_n=0,\quad n\neq 3.$$

И окончательно функция, задающая распределение температур, запишется:

$$u(x,t)=\frac{l^2}{3\pi^2a^2}\left(1-\exp\left\{-\frac{9\pi^2}{l^2}a^2t\right\}\right)\sin\left(\frac{3\pi}{l}x\right).$$

Если же мы имеем дело с неоднородными граничными условиями, то надо сделать замену неизвестной функции, которая обнулит эти граничные условия. Пусть, например, надо решить уравнение

$$u_t=a^2u_{xx},$$
$$u(0,t)=T_0,\quad u(l,t)=T_0,$$
$$u(x,0)=0.$$

Обозначим

$$u(x,t)=v(x,t)+w(x,t),$$

где $w(x,t)=T_0$. Тогда, сделав пересчет уравнения, а также начального и граничных условий, для новой неизвестной функции $v(x,t)$ (см. параграф 8, где все это сделано для волнового уравнения), получим

$$v_t = a^2 v_{xx},$$
$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0,$$
$$v(x,0) = -T_0.$$

Уравнения такого типа уже были разобраны ранее.

12. Задача Коши для стержня бесконечной длины

Рассмотрим уравнение теплопроводности, которое сформулировано для любого x и, следовательно, его решение должно удовлетворять только начальному условию.

$$\begin{aligned} & u_t = a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t \geq 0, \\ & u(x,0) = \varphi(x). \end{aligned} \qquad (12.1)$$

Физический смысл данной задачи заключается в определении температуры однородного бесконечного стержня по известной начальной температуре. Считается, что боковая поверхность стержня теплоизолирована.

Если подставить разложение (7.2) метода Фурье в уравнение (12.1), то для функций $X(x)$, $T(t)$ получим уравнения

$$X'' + \lambda X = 0, \qquad (12.2)$$
$$T' + \lambda a^2 T = 0. \qquad (12.3)$$

Теперь у нас нет граничных условий для определения собственных чисел λ. Однако есть физический смысл задачи, по которому функции $X(x)$, $T(t)$ должны быть вещественными и ограниченными. С помощью разделения переменных легко получить решение уравнения (12.3):

$$T = Ce^{-\lambda a^2 t},$$

а значит λ должно быть положительным и вещественным. Обозначим $\lambda = \mu^2$. Тогда решение (12.2) имеет вид

$$X(x) = \tilde{A}\cos(\mu x) + \tilde{B}\sin(\mu x).$$

А решение (12.3) запишется

$$T(t) = Ce^{-\mu^2 a^2 t}.$$

Объединив эти формулы по правилу (7.2), получим

$$u_\mu(x,t) = \left(A\cos(\mu x) + B\sin(\mu x)\right)e^{-\mu^2 a^2 t},$$

где $A = \tilde{A}\cdot C$, $B = \tilde{B}\cdot C$. По способу построения функции ясно, что для каждого μ можно выбрать свое A и B, то есть $A = A(\mu)$, $B = B(\mu)$.

Каждая из функций $u_\mu(x,t)$ является решением уравнения теплопроводности. Ранее для составления общего решения мы суммировали все функции $u_n(x,t)$. Теперь это невозможно, так как допустимые значения μ - вся числовая ось. Поэтому

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} u_\mu(x,t)\,d\mu = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A(\mu)\cos(\mu x) + B(\mu)\sin(\mu x)\right)e^{-\mu^2 a^2 t}\,d\mu. \end{aligned} \tag{12.4}$$

Проверим начальное условие (12.1). При $t = 0$ получим

$$u(x,0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(A(\mu)\cos(\mu x) + B(\mu)\sin(\mu x)\right)d\mu = \varphi(x).$$

Необходимо представить $\varphi(x)$ в виде, соответствующем левой части равенства. Это достигается с помощью *интеграла Фурье*.

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a(\mu)\cos(\mu x) + b(\mu)\sin(\mu x)\right)d\mu,$$

где $$a(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos(\mu\xi)\,d\xi,$$

$b(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin(\mu\xi)\,d\xi$. Сравнивая интегралы, можем записать

$$A(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos(\mu\xi)\,d\xi,$$

$$B(\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin(\mu\xi)\,d\xi.$$

Подставив коэффициенты в (12.4), получим

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos(\mu\xi)\,d\xi\cdot\cos(\mu x)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin(\mu\xi)\,d\xi\cdot\sin(\mu x)]e^{-\mu^2a^2t}d\mu=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)(\cos(\mu\xi)\cos(\mu x)+$$

$$+\sin(\mu\xi)\sin(\mu x))d\xi]e^{-\mu^2a^2t}d\mu.$$

Из тригонометрии известно, что

$$\cos(\mu\xi)\cos(\mu x)+\sin(\mu\xi)\sin(\mu x)=\cos\big(\mu(\xi-x)\big).$$

Кроме того, по свойству несобственных интегралов

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\mu^2a^2t}\cos\big(\mu(\xi-x)\big)d\mu=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{-\mu^2a^2t}\cos\big(\mu(\xi-x)\big)d\mu.$$

Тогда решение уравнения теплопроводности для бесконечного стержня запишется в виде:

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left(\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{-\mu^2a^2t}\cos\left(\mu(\xi-x)\right)d\mu\right)d\xi .$$

Внутренний интеграл можно вычислить

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}e^{-\mu^2a^2t}\cos\left(\mu(\xi-x)\right)d\mu=\frac{\sqrt{\pi}}{2a\sqrt{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}$$

и таким образом

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi . \quad (12.5)$$

Формула (12.5) дает решение задачи и называется *интегралом Пуассона*.

Можно доказать, что для любой непрерывной и ограниченной функции $\varphi(x)$ можно вычислить по этой формуле $u(x,t)$, которая будет удовлетворять уравнению и начальному условию.

13. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности

Функция

$$G(x,t,\xi)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}, \qquad (13.1)$$

входящая в интеграл Пуассона, называется *фундаментальным решением уравнения теплопроводности*. Оно удовлетворяет уравнению теплопроводности и имеет важный физический смысл.

Пусть начальное распределение температур имеет вид

$$\varphi(x)=\begin{cases}1/2\varepsilon, & |x-x_0|<\varepsilon,\\ 0, & |x-x_0|>\varepsilon.\end{cases}$$

Тогда формула (12.5) дает нам следующее распределение температур в теле с течением времени:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon}\frac{1}{2\varepsilon}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi .$$

Применив теорему о среднем для определенных интегралов, можем записать:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\frac{1}{2\varepsilon}\cdot 2\varepsilon\cdot e^{-\frac{(x-\tilde{\xi})^2}{4a^2t}},$$

где $\tilde{\xi}\in[x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon]$.

Если $\varepsilon\to 0$, то $x\to x_0$ и получим

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2t}}=G(x,t,x_0).$$

Это означает, что функция $G(x,t,x_0)$ представляет распределение температур в стержне при $t>0$, если при $t=0$ в точке $x=x_0$ имелся бесконечный пик температур, а в остальных точках стержня температура была равна нулю. Графически это можно изображено на рис.5.

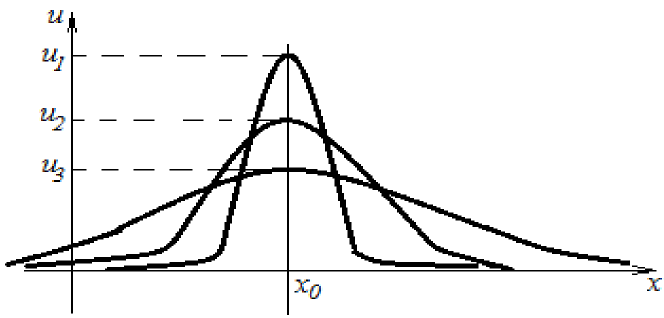


Рис. 5. Фундаментальное решение уравнения теплопроводности в различные моменты времени.

На рис. 5 имеется в виду, что $u_i = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t_i}}$, $i = 1, 2, 3$, $t_1 < t_2 < t_3$. Получается, что фундаментальное решение уравнения теплопроводности математически описывает выравнивание температур.

Из формулы (13.1) и ее графической иллюстрации следуют два свойства фундаментального решения уравнения теплопроводности.

1. График фундаментального решения симметричен относительно прямой $x = x_0$, максимум достигается в точке $x = x_0$.

2. Площади под каждой из этих кривых равны между собой.

Последнее свойство означает, что количество теплоты, сообщенное телу в настоящий момент, остается неизменным.

В качестве примера применения фундаментального решения уравнения теплопроводности рассмотрим задачу о нахождении распределения температуры как функции t, если в начальный момент времени

$$u(x,0) = \begin{cases} T_1, & -\infty < x \le 0, \\ T_2, & 0 < x < +\infty. \end{cases}$$

Используя (12.5), можно записать формулу для распределения температур в виде:

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{0} T_1 e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi + \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{+\infty} T_2 e^{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}} d\xi .$$

Сделаем замену: $p^2 = \dfrac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}$. Тогда $\xi = x + 2a\sqrt{t}\,p$, $d\xi = 2a\sqrt{t}\,dp$, а при $\xi = 0$ $p = -\dfrac{x}{2a\sqrt{t}}$. Интегралы, следовательно, запишутся следующим образом

$$u(x,t)=\frac{T_1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-p^2}2a\sqrt{t}dp+\frac{T_2}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-p^2}2a\sqrt{t}dp=$$

$$=\frac{T_1}{\sqrt{\pi}}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-p^2}dp-\int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{0} e^{-p^2}dp\right]+\frac{T_2}{\sqrt{\pi}}\left[\int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{0} e^{-p^2}dp+\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-p^2}dp\right].$$

Как известно из высшей математики

$$\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-p^2}dp=\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-p^2}dp=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Используя это, а также свойства определенных интегралов, можем преобразовать формулу к виду

$$u(x,t)=\frac{T_1+T_2}{2}+\frac{T_2-T_1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{0} e^{-p^2}dp. \quad (13.2)$$

Интеграл в (13.2) можно вычислить только с помощью приближенных методов, но зато эта короткая формула задает весь процесс перераспределения тепла.

Если надо найти распределение температур на полупрямой, то возникает необходимость доопределить функцию $\varphi(x)$. Например, надо решить следующую задачу

$$u_t=a^2u_{xx},\quad 0\le x<+\infty,\quad t\ge 0,$$
$$u(0,t)=0,$$
$$u(x,0)=\varphi(x).$$

Тогда

$$u(x,0)=\begin{cases}\varphi(x), & 0\le x<+\infty,\\ -\varphi(-x), & -\infty<x<0,\end{cases}$$

то есть мы доопределили $\varphi(x)$ нечетным образом. После этого мы имеем право использовать для решения задачи формулу (12.5). Подставив начальное распределение и упростив интегралы, получим решение:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left(e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}-e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi)\,d\xi\,.$$

Соответственно, в случае решения задачи

$$\begin{aligned}&u_t=a^2u_{xx},\quad 0\le x<+\infty,\quad t\ge 0,\\&u_x(0,t)=0,\\&u(x,0)=\varphi(x)\end{aligned}$$

надо доопределить функцию $\varphi(x)$ четным образом

$$u(x,0)=\begin{cases}\varphi(x), & 0\le x<+\infty,\\ \varphi(-x), & -\infty<x<0.\end{cases}$$

Тогда по формуле (12.5) решение будет иметь следующий вид:

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_0^{+\infty}\left(e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2t}}\right)\varphi(\xi)\,d\xi\,.$$

14. Уравнения эллиптического типа. Уравнение Лапласа

Уравнения эллиптического типа обычно получаются из уравнений гиперболического и параболического типов при изучении стационарных, то есть не зависящих от времени процессов. Чаще всего при решении задач рассматривается уравнение Лапласа (1.8).

Функция $u(x,y,z)$ называется *гармонической* в области Ω, если она непрерывна в этой области вместе со своими частными производными вплоть до второго порядка и удовлетворяет уравнению (1.8).

Так как мы в данном случае рассматриваем стационарные процессы, то теряют смысл начальные условия. Остаются только граничные. Они бывают трех типов.

1. $u\big|_{\partial\Omega} = f\left(\partial\Omega\right)$, где $\partial\Omega$ - граница области Ω. Это *первая краевая задача* или задача Дирихле.

2. $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = f\left(\partial\Omega\right)$, где $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ - производная в направлении внешней нормали к поверхности S. Это *вторая краевая задача* или задача Неймана.

3. $\left.\left(\dfrac{\partial u}{\partial n} + h\cdot u\right)\right|_{\partial\Omega} = f\left(\partial\Omega\right)$ - *третья краевая задача*.

Кроме того, задача Дирихле для уравнения (1.8) делится на *внутреннюю* и *внешнюю*. При решении внутренней задачи требуется найти решение внутри области Ω по заданным значениям на границе, а при решении внешней задачи надо найти значения $u\left(x,y,z\right)$ вне области Ω, если заданы значения на границе.

При рассмотрении стационарных процессов перемещения частиц или тепла часто для удобства решения переходят к криволинейным координатам. Обратимся для примера к механике жидкости. Уравнение неразрывности (уравнение сохранения массы) для однородной жидкости имеет вид

$$\operatorname{div}\vec{v} = 0, \qquad (14.1)$$

где $\vec{v}$ - скорость потока жидкости в каждой точке. Пусть течение потенциально, то есть существует функция $u\left(x,y,z\right)$ такая, что

$$v_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial u}{\partial z},$$

или $\vec{v} = \operatorname{grad} u$. Тогда уравнение неразрывности примет вид

$$\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}\operatorname{grad} u = \Delta u = 0 .$$

Таким образом мы приходим к уравнению Лапласа. Введем криволинейные координаты q_1, q_2, q_3 и перепишем уравнение неразрывности для потенциального потока в этих координатах. Оказывается, в этом случае уравнение (14.1) записывается в виде

$$\frac{1}{H_1H_2H_3}\left(\frac{\partial\left(v_1H_2H_3\right)}{\partial q_1}+\frac{\partial\left(v_2H_1H_3\right)}{\partial q_2}+\frac{\partial\left(v_3H_1H_2\right)}{\partial q_3}\right)=0 , \tag{14.2}$$

где

$$H_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2}, \quad i=1,2,3$$

и называются *коэффициентами Ламе*.

Пусть криволинейные координаты – это цилиндрические координаты.

$$x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi, \quad z=z.$$

То есть $q_1=r, \quad q_2=\varphi, \quad q_3=z$. Тогда коэффициенты Ламе

$$H_1=H_r=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}=\sqrt{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}=1,$$

$$H_2=H_\varphi=\sqrt{r^2\sin^2\varphi+r^2\cos^2\varphi}=r ,$$

$$H_3=H_z=1.$$

Уравнение (14.2), таким образом, запишется

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\left(rv_r\right)}{\partial r}+\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial\left(rv_z\right)}{\partial z}\right)=0 .$$

Пусть существует функция $u\left(r,\varphi,z\right)$ такая, что

$$v_r=\frac{1}{H_r}\frac{\partial u}{\partial r}, \quad v_\varphi=\frac{1}{H_\varphi}\frac{\partial u}{\partial\varphi}, \quad v_z=\frac{1}{H_z}\frac{\partial u}{\partial z} .$$

Тогда

$$\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+r\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0 .$$

Но при этих предположениях мы должны получить уравнение Лапласа $\Delta u = 0$. Поэтому

$$\Delta u=\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+r\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0 . \quad (14.3)$$

- *уравнение Лапласа в цилиндрических координатах*.

Аналогичным образом рассмотрим сферические координаты

$$x = R\sin\theta\cos\varphi, \quad y = R\sin\theta\sin\varphi, \quad z = R\cos\theta.$$

Коэффициенты Ламе в этом случае

$$H_R = 1, \quad H_\varphi = R\sin\theta, \quad H_\theta = R .$$

А уравнение (14.3) в данной системе координат примет вид

$$\begin{gathered}\Delta u=\frac{1}{R^2}\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial u}{\partial R}\right)+\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}+ \\ +\frac{1}{R\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right)=0\end{gathered} \quad (14.4)$$

- *уравнение Лапласа в сферических координатах*.

Уравнения (14.3), (14.4) можно значительно упростить, если рассматривать их как уравнения распространения тепла. Если функция u - это температура, то в задачах она часто зависит только от расстояния от источника тепла и совершенно не зависит от направления движения от источника. Тогда в цилиндрических координатах можно считать, что $u = u(r)$ и уравнение (14.3) можно записать следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)=0 .$$

Частным решением этого уравнения является функция

$$u_0(r) = \ln\frac{1}{r},$$

которая называется *фундаментальным решением уравнения Лапласа на плоскости*.

Аналогичным образом, если в сферических координатах считать, что $u = u(R)$, уравнение (14.4) сократится до следующей формулы

$$\frac{\partial}{\partial R}\left(R^2\frac{\partial u}{\partial R}\right) = 0.$$

Частное решение этого уравнения записывают в виде

$$u_0(R) = \frac{1}{R}$$

и называют *фундаментальным решением уравнения Лапласа в пространстве*.

15. Двумерное уравнение Лапласа. Решение задачи Дирихле в круге методом Фурье

При решении задачи Дирихле в круге обычно переходят к полярным координатам. Пусть $u = u(r, \varphi)$ и требуется найти решение уравнения Лапласа внутри кольца $a \le r \le b$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u(a,\varphi) = 0, \quad u(b,\varphi) = \cos\varphi. \qquad (15.1)$$

Уравнение (14.3) на плоскости имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Следуя методу Фурье, предположим, что $u(r,\varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$. Подставляя это разложение в уравнение и разделив переменные, получим

$$-\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)}=\frac{rR'(r)+r^2R''(r)}{R(r)}=\lambda=\text{const}\,.$$

Тогда для функции $\Phi(\varphi)$ можно записать уравнение:

$$\Phi''+\lambda\Phi=0\,,$$

решение которого $\Phi(\varphi)=C_1\cos\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\lambda}\varphi\right)$. В (15.1) отсутствуют условия для φ, так как мы решаем задачу в кольце, но согласно здравому смыслу необходимо потребовать чтобы $\Phi(\varphi)$ удовлетворяла условию периодичности: $\Phi(0)=\Phi(2\pi)$. В этом случае

$$C_1=C_1\cos\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right)+C_2\sin\left(2\pi\sqrt{\lambda}\right).$$

Это возможно только при $\sqrt{\lambda}=n$. Таким образом, получается бесконечное множество собственных функций

$$\Phi_n(\varphi)=C_{1n}\cos(n\varphi)+C_{2n}\sin(n\varphi),\; n=0,1,2,\ldots \quad (15.2)$$

Здесь необходимо отметить, что n может быть равно нулю.

Для функции $R(r)$ имеем следующее уравнение:

$$r^2R''+rR'=\lambda R$$

или

$$r^2R''+rR'-n^2R=0\,.$$

С помощью подстановки можно превратить это уравнение в дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение можно записать в виде

$$R_n(r)=\frac{A_n}{r^n}+B_nr^n,\quad n=1,2,3,\ldots \quad (15.3)$$

Отдельно приходится рассмотреть случай с $n=0$. Его решение запишется следующим образом

$$R_0(r)=-A_0\ln r+B_0\,. \quad (15.4)$$

Суммирование функций (15.2) – (15.4) даст нам решение уравнения Лапласа в круге

$$u(r,\varphi) = -A_0 \ln r + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{r^n} + B_n r^n \right) \cdot \\ \cdot \left(C_{1n} \cos(n\varphi) + C_{2n} \sin(n\varphi) \right). \tag{15.5}$$

Проверим теперь граничные условия. Первое условие (15.1) даст нам следующее равенство

$$u(a,\varphi) = -A_0 \ln a + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{a^n} + B_n a^n \right) \cdot \\ \cdot \left(C_{1n} \cos(n\varphi) + C_{2n} \sin(n\varphi) \right) = 0.$$

Выполнение этого условия возможно, если

$$\begin{cases} -A_0 \ln a + B_0 = 0, \\ \dfrac{A_n}{a^n} + B_n a^n = 0 \end{cases} \tag{15.6}$$

для любого n. Второе условие (15.1) дает нам возможность приравнять

$$u(b,\varphi) = -A_0 \ln b + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{A_n}{b^n} + B_n b^n \right) \cdot \\ \cdot \left(C_{1n} \cos(n\varphi) + C_{2n} \sin(n\varphi) \right) = \cos\varphi.$$

Тогда

$$\begin{cases} -A_0 \ln b + B_0 = 0, \\ C_{2n} = 0, \\ \left(\dfrac{A_1}{b} + B_1 b \right) C_{11} = 1, \\ \dfrac{A_n}{b^n} + B_n b^n = 0 \quad \text{при } n \neq 1. \end{cases} \tag{15.7}$$

Для того чтобы найти коэффициенты, придется составлять новые системы уравнений из систем (15.6), (15.7). Начнем с A_0, B_0. Можно записать

$$\begin{cases} -A_0 \ln a + B_0 = 0, \\ -A_0 \ln b + B_0 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы очевидно: $A_0 = B_0 = 0$. Для A_1, B_1 система будет выглядеть по-другому:

$$\begin{cases} \left(\dfrac{A_1}{b} + B_1 b \right) C_{11} = 1, \\ \left(\dfrac{A_1}{a} + B_1 a \right) C_{11} = 0 \cdot C_{11}. \end{cases}$$

Второе уравнение – это уравнение системы (15.6) при $n = 1$, помноженное на C_{11}. Обозначим: $\tilde{A}_1 = A_1 \cdot C_{11}$, $\tilde{B}_1 = B_1 \cdot C_{11}$. Тогда система примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{\tilde{A}_1}{b} + \tilde{B}_1 b = 1, \\ \dfrac{\tilde{A}_1}{a} + \tilde{B}_1 a = 0. \end{cases}$$

Ее решение: $\tilde{A}_1 = \dfrac{a^2 b}{a^2 - b^2}$, $\tilde{B}_1 = -\dfrac{b}{a^2 - b^2}$. Для всех остальных номеров n можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{A_n}{a^n} + B_n a^n = 0, \\ \dfrac{A_n}{b^n} + B_n b^n = 0, \quad n \neq 1. \end{cases}$$

Ее решение, очевидно, нулевое. Таким образом, подставляя вычисленные коэффициенты в (15.5), запишем решение уравнения Лапласа в кольце при граничных условиях (15.1):

$$u(r, \varphi) = \left(\frac{a^2 b}{a^2 - b^2} \cdot \frac{1}{r} - \frac{b}{a^2 - b^2} \cdot r \right) \cos \varphi .$$

Если задача Дирихле поставлена не в кольце, а в круге, то при решении внутренней задачи Дирихле в формуле (15.5) надо отбросить все слагаемые, которые не существуют в центре круга при $r = 0$.

$$A_0 = 0, \quad A_n = 0.$$

Остальные коэффициенты находятся из граничного условия. Если же мы имеем дело с внешней задачей Дирихле, то надо исключить слагаемые, стремящиеся к бесконечности при бесконечном возрастании r.

$$A_0 = 0, \quad B_n = 0,$$

а для остальных коэффициентов использовать граничное условие.

16. Формулы Грина

В теории поля существует формула Остроградского-Гаусса, позволяющая связать тройной интеграл по пространственной области Ω и двойной интеграл по границе этой области $\partial\Omega$, если в области $\Omega \cup \partial\Omega$ определена некоторая векторная функция $\vec{a}$.

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{a} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_{\partial\Omega} \left(a_x \cos\left(\vec{n}, x\right) + a_y \cos\left(\vec{n}, y\right) + a_z \cos\left(\vec{n}, z\right) \right) dV =$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}\, dV,$$

где $\vec{n}$ - внешняя нормаль к границе области. Положим $\vec{a} = v \cdot \operatorname{grad} u$ и будем считать, что функции u и v непрерывны вместе с первыми и вторыми производными в $\Omega \cup \partial\Omega$. Тогда

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}\, dV = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z} \right) dV =$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v\, dV.$$

Очевидно, можно представить

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial v}{\partial x}\right)-u\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial y}\right)-u\frac{\partial^2 v}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial v}{\partial z}\right)-u\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

Тогда

$$\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v\,dV=\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{div}\left(u\cdot\operatorname{grad}v\right)dV-\iiint\limits_{\Omega}u\cdot\Delta v dV.$$

Преобразовав первый интеграл в правой части равенства по формуле Гаусса-Остроградского, получим

$$\iiint\limits_{\Omega}\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v\,dV=\iint\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial n}dS-\iiint\limits_{\Omega}u\cdot\Delta v\,dV. \quad (16.1)$$

Или

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\operatorname{grad}u\cdot\operatorname{grad}v+u\cdot\Delta v\right)dV=\iint\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial n}dS. \quad (16.2)$$

Это так называемая *первая формула Грина*.

Левая часть равенства (16.1) не меняется при перестановке функций u, v, поэтому то же можно сказать и о правой части.

$$\iint\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial n}dS-\iiint\limits_{\Omega}u\cdot\Delta v\,dV=\iint\limits_{\partial\Omega}v\frac{\partial u}{\partial n}dS-\iiint\limits_{\Omega}v\cdot\Delta u\,dV\ .$$

Из этого вытекает

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(u\cdot\Delta v-v\cdot\Delta u\right)dV=\iint\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS. \quad (16.3)$$

Это *вторая формула Грина*. *Третья формула Грина* получается из (16.2), если $u=v$:

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(\left(\operatorname{grad}u\right)^2+u\cdot\Delta u\right)dV=\iint\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial u}{\partial n}dS.$$

Формулы Грина играют важную роль при решении уравнения Лапласа. Рассмотрим фундаментальное решение уравнения Лапласа в пространстве. Пусть

$$v(R)=\frac{1}{R},$$

где $R=\left|M_0M\right|=\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}$.

Функция $v(R)$ удовлетворяет уравнению Лапласа в любой точке M , кроме точки M_0. Выведем формулу для решения уравнения в точке M_0. Поскольку функция $v(R)$ разрывна в этой точке, непосредственное применение формул Грина невозможно. Окружим точку M_0 сферической ε-окрестностью и введем в рассмотрение новую область $\Omega_1=\Omega\cup\partial\Omega\cup\partial\Omega_\varepsilon$.

Применим в этой области вторую формулу Грина, полагая $v=\dfrac{1}{R}$.

$$\iiint\limits_{\Omega_1}\left(u\cdot\Delta\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\cdot\Delta u\right)dV=\iint\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)-\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS+$$

$$+\iint\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)dS-\iint\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}dS.$$

Поскольку ε-окрестность имеет сферическую форму, можно считать, что $\dfrac{\partial}{\partial n}=-\dfrac{\partial}{\partial R}$ на поверхности $\partial\Omega_\varepsilon$. Таким образом

$$\left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right|_{\partial\Omega_\varepsilon}=-\left.\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{R}\right)\right|_{\partial\Omega_\varepsilon}=\left.\frac{1}{R^2}\right|_{R=\varepsilon}=\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Тогда

$$\iint\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)dS=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint\limits_{\partial\Omega_\varepsilon}u\,dS=\frac{1}{\varepsilon^2}4\pi\varepsilon^2\cdot\tilde{u}=4\pi\tilde{u},$$

где $\tilde{u}$ - среднее значение функции u на поверхности $\partial\Omega_\varepsilon$. Аналогично,

$$\iint\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}dS = \frac{1}{\varepsilon}\iint\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial n}dS = \frac{1}{\varepsilon}4\pi\varepsilon^2 \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 4\pi\varepsilon \frac{\partial \tilde{u}}{\partial n},$$

где $\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial n}$ - среднее значение производной от функции u по нормали к поверхности $\partial\Omega_\varepsilon$. Подставив полученные выражения в исходную формулу и учитывая, что $\Delta\left(\dfrac{1}{R}\right) = 0$ по определению фундаментального решения, получим

$$\iiint\limits_{\Omega_1}\left(-\frac{1}{R}\cdot\Delta u\right)dV = \iint\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS + 4\pi\tilde{u} - 4\pi\varepsilon\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}.$$

Устремим теперь ε к нулю. Тогда $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\tilde{u} = u(M_0)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\varepsilon\dfrac{\partial \tilde{u}}{\partial n} = 0$, так как из непрерывности производных вытекает их ограниченность. Область Ω_1 в пределе станет областью Ω и, следовательно, можем записать следующее выражение

$$-\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{R}\cdot\Delta u\,dV = \iint\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right) - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS + 4\pi u(M_0).$$

Или

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right)dS - \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\Delta u}{R}dV.$$

(16.4)

Таким образом, всякая функция $u(M_0)$ представляет собой сумму трех интегралов

$$-\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{\Omega}\frac{\Delta u}{R}dV,\ \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n}dS,\ -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)dS,$$

которые называются *объемным потенциалом*, *потенциалом простого слоя* и *потенциалом двойного слоя*.

Теорема. Любая гармоническая в области Ω функция есть сумма потенциалов простого и двойного слоя.

Доказательство этой теоремы следует прямо из формулы (16.4), если положить в ней $\Delta u = 0$, т.к. u гармоническая функция. Тогда

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{R} \right) \right) dS . \quad (16.5)$$

Это основная формула теории гармонических функций. Она показывает, что значение функции во внутренней точке области выражается через значение функции и ее производной на границе области.

Такие же рассуждения можно повторить для фундаментального решения на плоскости

$$v(r) = \ln \frac{1}{r} ,$$

где $r = |M_0 M| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$. Аналогичным образом изменяя плоскую область Ω, окружая точку M_0 круговой ε-окрестностью и устремляя потом ε к нулю, получим

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Omega} \ln \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial n} dl - \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial\Omega} u \cdot \frac{\partial}{\partial n} \left(\ln \frac{1}{r} \right) dl . \quad (16.6)$$

Первый интеграл в правой части (16.6) называется *логарифмическим потенциалом простого слоя*, второй – *логарифмическим потенциалом двойного слоя*. Таким образом, всякая гармоническая функция на плоскости есть сумма двух логарифмических потенциалов.

17. Свойства гармонических функций

Формулы Грина и вытекающие из них формулы (16.5), (16.6) позволяют сформулировать несколько теорем, описывающих свойства гармонических функций.

Теорема 1. Если $u(M)$ - гармоническая в области Ω функция, непрерывная вместе с первыми производными на $\Omega \cup \partial\Omega$, то

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS = 0 .$$

Доказательство. Пусть u - гармоническая функция, а $v \equiv 1$. Тогда вторая формула Грина (16.3) дает утверждение теоремы, так как $\Delta u = \Delta v = \partial v / \partial n = 0$.

Это свойство гармонических функций выражает факт отсутствия источников внутри области.

Теорема 2. Если существует решение задачи Неймана для уравнения Лапласа, то оно определено в точностью до постоянного слагаемого.

Доказательство. Пусть решений два: $u_1(M)$, $u_2(M)$. Оба они являются решениями задачи Неймана, поэтому можем записать

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u_1}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = f(\partial\Omega), \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u_2}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = f(\partial\Omega). \end{cases}$$

Тогда функция $u = u_1 - u_2$ будет решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Для такой функции третья формула Грина дает

$$\iiint\limits_{\Omega} (\operatorname{grad} u)^2 dV = 0 .$$

Это возможно только при $(\operatorname{grad} u)^2 = 0$. Таким образом, $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0$, а значит функция $u = u_1(M) - u_2(M) = const$.

Отметим, что согласно теореме 1, функция f в задаче Неймана должна удовлетворять условию

$$\iint\limits_{\partial\Omega} f\, dS = 0$$

Иначе задача Неймана решения не имеет.

Теорема 3 (о среднем значении гармонической функции). Если $u(M)$ - гармоническая функция внутри шара радиуса R с центром в точке M_0, непрерывная вместе с производными до его границы, то значения функции $u(M)$ в центре шара равно среднему арифметическому всех значений $u(M)$ на границе шара:

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\partial\Omega} u(S)\, dS.$$

Доказательство. Применим основную формулу теории гармонических функций (16.5) к сфере. Тогда на поверхности сферы $r = R$, $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial R}$ и можем записать

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial n} + u \frac{1}{R^2} \right) dS =$$

$$= \frac{1}{4\pi R} \iint\limits_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} dS + \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\partial\Omega} u\, dS = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{\partial\Omega} u\, dS,$$

так как интеграл от $\partial u / \partial n$ равен нулю по теореме 1.

Теорема 4. Гармоническая в области Ω функция $u(M)$, не равная тождественно постоянной, не может иметь локальных экстремумов внутри области.

Доказательство. Эта теорема является следствием предыдущей теоремы 3. Если предположить, что в некоторой точке M_0 функция имеет локальный максимум, ее можно окружить шаром и окажется, что значение в центре шара (в точке M_0) равно среднему значению функции u на поверхности шара, а значит, максимальным не является.

Теорема 5 (теорема единственности). Решение внутренней задачи Дирихле

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = f(\partial\Omega), \end{cases}$$

непрерывное в области $\Omega \cup \partial\Omega$, единственно.

Доказательство. Если предположить, что решений два ($u_1(M)$, $u_2(M)$), то их разность $u = u_1 - u_2$ является решением задачи

$$\begin{cases} \Delta u = 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Тогда по теореме 4 у функции u минимальное и максимальное значения равны нулю. Значит, сама она равна нулю и функция $u_1(M) = u_2(M)$.

Теорема 6 (о непрерывной зависимости решений от граничных значений). Пусть $u_1(M)$, $u_2(M)$ - решения задач

$$\begin{cases} \Delta u_1 = 0, \\ u_1|_{\partial\Omega} = \varphi_1(S), \end{cases} \quad \begin{cases} \Delta u_2 = 0, \\ u_2|_{\partial\Omega} = \varphi_2(S), \quad S \in \partial\Omega, \end{cases}$$

непрерывные в $\Omega \cup \partial\Omega$. Тогда если всюду на границе $\partial\Omega$

$$|\varphi_1(S) - \varphi_2(S)| < \varepsilon, \quad S \in \partial\Omega,$$

то всюду в области Ω

$$\left|u_1(M)-u_2(M)\right|<\varepsilon, \quad M\in\Omega.$$

Доказательство. Пусть $u(M)=u_1(M)-u_2(M)$. Это гармоническая и непрерывная функция, на границе области принимающая значения

$$u\big|_{\partial\Omega}=\varphi_1(S)-\varphi_2(S).$$

Если $\left|\varphi_1(S)-\varphi_2(S)\right|<\varepsilon$, то по теореме 4 минимальное и максимальное значения функции u также должны удовлетворять этому неравенству. А значит, $\left|u_1(M)-u_2(M)\right|<\varepsilon$ при любом $M\in\Omega$.

18. Функции Грина

Кроме метода Фурье существует еще один метод решения краевых задач для эллиптических уравнений – метод функций Грина. Формулы (16.5), (16.6) непосредственно не дают решения задачи, так как требуют не только значений функции u на поверхности (или кривой), но и значений $\partial u/\partial n$. Необходимо исключить из этих формул производную по нормали.

Сначала рассмотрим пространственный случай. Пусть M_0 - фиксированная точка области Ω. Пусть известна функция $G_1(M_0,M)$, обладающая следующими свойствами:

1. $G_1(M_0,M)$ является гармонической функцией в Ω как функция точки M;

2. на поверхности $\partial\Omega$ ее значения равны $1/r$, $r=\left|M_0M\right|$.

Применим вторую формулу Грина (16.3) к гармоническим функциям $u(M)$, $G_1(M_0,M)$. Получим

$$\iint\limits_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial G_1}{\partial n}-G_1\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS=0,$$

так как $\Delta u=0$, $\Delta G_1=0$. Умножим это равенство на $1/4\pi$ и сложим с (16.5). Тогда можем записать следующее

$$u(M_0)=\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)+u\frac{\partial G_1}{\partial n}-G_1\frac{\partial u}{\partial n}\right)dS\,.$$

Так как на поверхности $\partial\Omega$ $G_1=1/r$, первое и последнее слагаемое подынтегральной функции сокращаются и получаем равенство

$$u(M_0)=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega}u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}-G_1(M_0,M)\right)dS\,. \quad (18.1)$$

Таким образом, если задать $u(M)$ на $\partial\Omega$, эта формула дает решение задачи Дирихле, но нужно знать функцию $G_1(M_0,M)$.

Аналогично на плоскости, если считать функцию $G_1(M_0,M)$ гармонической в плоской области S и равной $\ln\frac{1}{r}$, $r=|M_0M|$ на границе области S, получим формулу

$$u(M_0)=-\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\partial\Omega}u\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}-G_1(M_0,M)\right)dl\,. \quad (18.2)$$

Функция

$$G(M_0,M)=\frac{1}{r}-G_1(M_0,M)$$

в пространстве, или

$$G(M_0,M)=\ln\frac{1}{r}-G_1(M_0,M)$$

на плоскости называется *функцией Грина*. Из определения $G_1(M_0,M)$ вытекают основные свойства функции Грина.

1. $G(M_0, M)$ является гармонической везде в области решения задачи, кроме точки $r=0$, где она обращается в бесконечность, но разность $G-\frac{1}{r}$ в пространстве или $G-\ln\frac{1}{r}$ на плоскости при $r=0$ должна быть конечной.

2. Значения $G(M_0, M)$ на границе области равны нулю.

3. $G(M_0, M)=G(M, M_0)$.

Из этих свойств вытекает, что если можно для данной задачи записать функцию Грина, то она будет единственной функцией, обладающей перечисленными свойствами.

19. Построение функций Грина. Задача Дирихле для полупространства и шара

Если функция Грина найдена, легко найти решение задачи Дирихле. Одним из методов построения функции Грина является *метод отражения*.

Пусть требуется решить задачу

$$\Delta u=0, \quad -\infty<x, y<+\infty, \quad 0 \leq z<+\infty,$$

$$u(x, y, 0)=\varphi(x, y), \quad -\infty<x, y<+\infty.$$

Предположим, что $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - особая точка функции Грина, r - расстояние от нее до точки $M(x, y, z)$. Построим точку M_1 симметрично точке M_0 относительно плоскости $z=0$ и обозначим $r_1=|M_1 M|$.

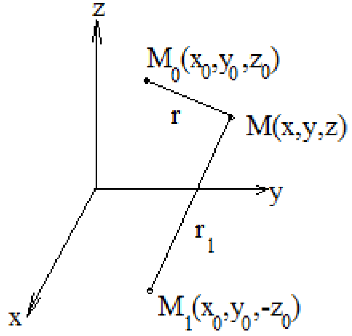


Рис. 6. Решение задачи Дирихле для полупространства методом отражения.

Тогда функция Грина

$$G\left(M_0, M\right) = \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}.$$

Легко убедиться, что эта функция удовлетворяет выдвинутым условиям: она гармоническая в области решения задачи и на границе области (при $z = 0$) обращается в ноль. По формуле (18.1)

$$u\left(M_0\right) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial\Omega} u\left(M\right)\frac{\partial G}{\partial n}dS.$$

На поверхности $\partial\Omega$, по которой берется интеграл, $u = \varphi\left(x, y\right)$. Найдем $\partial G/\partial n$. Направление внешней нормали к плоскости $z = 0$ противоположно оси z, то есть $\frac{\partial}{\partial n} = -\frac{\partial}{\partial z}$, поэтому

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{\partial G}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right).$$

Из рисунка очевидно, что

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}},$$

$$\frac{1}{r_1}=\frac{1}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z+z_0\right)^2}}.$$

Так что, вычисляя производную, получим

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{z-z_0}{\left(\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2\right)^{3/2}}-$$

$$-\frac{z+z_0}{\left(\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z+z_0\right)^2\right)^{3/2}}.$$

Нам нужно значение этой производной на границе области (так как именно по границе области вычисляется интеграл). Легко определить, что

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}=\frac{-2z_0}{\left(\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+z_0{}^2\right)^{3/2}}.$$

Подставляя полученную производную в (18.1), можем записать

$$u\left(M\right)=\frac{z_0}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi\left(x,y\right)}{\left(\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+z_0{}^2\right)^{3/2}}\,dx\,dy\,. \tag{19.1}$$

Это *интеграл Пуассона для полупространства*. Отметим, что интеграл несобственный и для его сходимости функция $\varphi\left(x,y\right)$ должна быть ограниченной.

Рассмотрим теперь задачу Дирихле для шара:

$$\Delta u=0,\quad \Omega: x^2+y^2+z^2\le R^2,$$

$$\left.u\right|_{\partial\Omega}=\varphi\left(x,y,z\right).$$

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - особая точка, которая находится внутри шара, $M(x, y, z)$ - текущая точка, возьмем ее на поверхности шара, O - центр шара. Обозначим $\rho_0 = |OM_0|$, $r = |M_0M|$. Построим точку M_1 на одной прямой с M_0 так, чтобы расстояние $\rho_1 = |OM_1|$ удовлетворяло равенству $\rho_0 \cdot \rho_1 = R^2$.

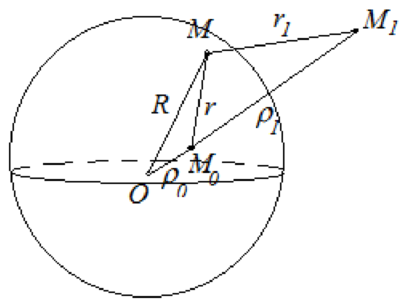


Рис. 7. Решение задачи Дирихле для шара методом отражения.

Тогда точка M_1 будет симметрична точке M_0 относительно поверхности шара. Можем нарисовать подобные треугольники, изображенные на рис. 8.

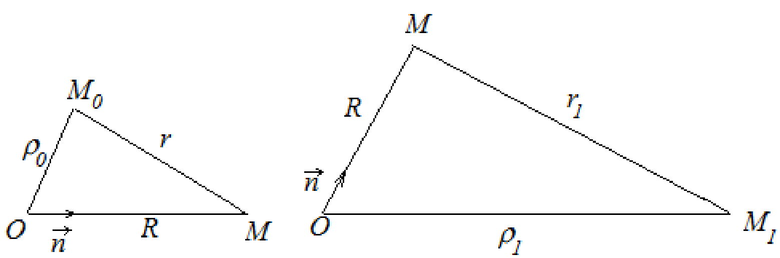


Рис. 8. Подобные треугольники, позволяющие записать соотношения при решении задачи Дирихле для шара.

Из соотношений для данных подобных треугольников легко получить, что

$$\frac{1}{r}=\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1}.$$

А значит, можно записать функцию Грина в виде

$$G\left(M_0,M\right)=\frac{1}{r}-\frac{R}{\rho_0}\frac{1}{r_1},$$

которая также будет гармонической внутри шара и обращаться в ноль на его поверхности. Осталось вычислить производную по нормали

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{R}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right).$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial n}=-\frac{1}{r^2}\cos\left(\vec{r},\vec{n}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_1}\right)=-\frac{1}{r_1^{\,2}}\cos\left(\vec{r}_1,\vec{n}\right).$$

По теореме косинусов (см. рис. 8)

$$\rho_0^{\,2}=R^2+r^2-2Rr\cos\left(\vec{n},\vec{r}\right),$$

$$\cos\left(\vec{n},\vec{r}\right)=\frac{R^2+r^2-\rho_0^{\,2}}{2Rr}.$$

Аналогичным образом

$$\cos\left(\vec{n},\vec{r}_1\right)=\frac{R^2+r_1^{\,2}-\rho_1^{\,2}}{2Rr_1}.$$

Если выразить $r_1=\frac{R}{\rho_0}r$, $\rho_1=\frac{R^2}{\rho_0}$ из подобия, то

$$\cos\left(\vec{n},\vec{r}_1\right)=\frac{\rho_0{}^2+r^2-R^2}{2\rho_0 r}.$$

Подставив эти косинусы в формулы производных по нормали и упростив выражения, в конце концов получим

$$\frac{\partial G}{\partial n}=-\frac{R^2-\rho_0{}^2}{Rr^3}=-\frac{R^2-\left(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2\right)}{R\left(\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2}\right)^3}.$$

И таким образом по формуле (18.1)

$$u\left(M\right)=\frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{\partial\Omega}\left.\frac{\varphi\left(x,y,z\right)\left(R^2-\left(x_0{}^2+y_0{}^2+z_0{}^2\right)\right)}{\left(\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2+\left(z-z_0\right)^2\right)^{3/2}}\right|_{z^2=R^2-x^2-y^2}dxdy \tag{19.2}$$

Формула (19.2) – это *интеграл Пуассона для шара*.

20. Задача Дирихле для полуплоскости и круга

Повторим теперь рассуждения предыдущего параграфа применительно к плоским фигурам. Пусть требуется решить задачу

$$\Delta u=0,\quad -\infty<x<+\infty,\quad y\geq 0,$$
$$u\left(x,0\right)=\varphi\left(x\right),\quad -\infty<x<+\infty.$$

По формуле (18.2)

$$u\left(M\right)=-\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\partial\Omega}\varphi\left(x\right)\cdot\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}-G_1\left(M_0,M\right)\right)dl.$$

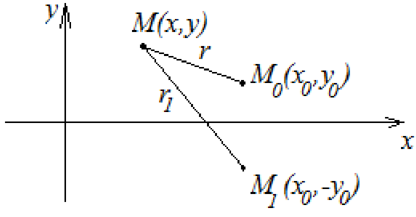


Рис. 9. Решение задачи Дирихле для полуплоскости методом отражения.

В нашем случае $\partial\Omega$ - это прямая $y=0$. Построим точку M_1 симметрично точке M_0 относительно границы. Тогда аналогично предыдущему $G_1\left(M_0,M\right)=\ln\frac{1}{r_1}$ и, следовательно, функция Грина

$$G\left(M_0,M\right)=\ln\frac{1}{r}-\ln\frac{1}{r_1},$$

так как она гармоническая в полуплоскости $y>0$ и на границе полуплоскости обращается в ноль. Внешняя нормаль $\vec{n}$ к области решения задачи направлена противоположно оси Oy, так что производную по нормали можно вычислить следующим образом

$$\frac{\partial G}{\partial n}=-\frac{\partial G}{\partial y}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\frac{1}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}}-\ln\frac{1}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2+\left(y+y_0\right)^2}}\right)=$$

$$=\frac{y-y_0}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}-\frac{y+y_0}{\left(x-x_0\right)^2+\left(y-y_0\right)^2}.$$

На границе области

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{y=0}=\frac{-2y_0}{\left(x-x_0\right)^2+y_0{}^2}.$$

Подставляя эти выражения в (18.2), получим формулу, аналогичную формуле (19.1) предыдущего параграфа.

$$u(M) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\frac{2y_0}{(x-x_0)^2 + y_0^2}dx =$$

$$= \frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{(x-x_0)^2 + y_0^2}dx.$$

Рассмотрим теперь задачу для круга

$$\Delta u = 0, \quad \Omega : x^2 + y^2 \le R^2,$$

$$u\big|_{x^2+y^2=R^2} = \varphi(x, y).$$

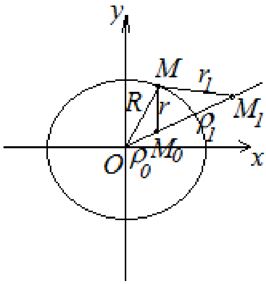


Рис. 10. Решение задачи Дирихле для круга методом отражения.

Пусть $M_0(x_0, y_0)$ - особая точка. Построим точку M_1 симметрично точке M_0 относительно окружности, то есть $\rho_0\rho_1 = R^2$ или $\rho_1 = R^2/\rho_0$. Тогда получим подобные треугольники, изображенные на рис. 8. Записав те же соотношения для их сторон, получим функцию Грина в виде

$$G(M_0, M) = \ln\frac{1}{r} - \ln\frac{R}{\rho_0 r_1}.$$

Для производной по нормали справедливы следующие вычисления

$$\frac{\partial G}{\partial n}=\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{1}{r}\right)-\frac{\partial}{\partial n}\left(\ln\frac{R}{\rho_0 r_1}\right)=$$

$$=r\left(-\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial n}-\frac{\rho_0 r_1}{R}\left(-\frac{R}{\rho_0 r_1^2}\right)\frac{\partial r_1}{\partial n}=$$

$$=-\frac{1}{r}\cos\left(\vec{r},\vec{n}\right)+\frac{1}{r_1}\cos\left(\vec{r}_1,\vec{n}\right).$$

Используя теорему косинусов для подобных треугольников, а также соотношения подобия для их сторон, сможем в конце концов записать

$$\frac{\partial G}{\partial n}=-\frac{R^2-\rho_0^{\ 2}}{Rr^2}.$$

Таким образом подстановка производной функции Грина по нормали в формулу (18.2) даст нам решение задачи Дирихле для круга.

$$u\left(M\right)=\frac{1}{2\pi}\oint\limits_{\partial\Omega}\varphi\left(x,y\right)\frac{R^2-\rho_0^{\ 2}}{Rr^2}dl=$$

$$=\frac{R^2-\rho_0^{\ 2}}{2\pi R}\int\limits_{-R}^{R}\varphi\left(x,\sqrt{R^2-x^2}\right)\frac{dx}{\left(x-x_0\right)^2+\left(\sqrt{R^2-x^2}-y_0\right)^2}.$$

21. Сведение задачи Неймана к задаче Дирихле

Ранее мы доказывали, что в задаче Неймана $\iint\limits_{\partial\Omega}\frac{\partial u}{\partial n}dS=0$ и что если решение задачи Неймана существует, то оно определено с точностью до постоянного слагаемого. Покажем теперь, что двумерную задачу Неймана можно свести к задаче Дирихле. Пусть дана задача для функции $u\left(x,y\right)$

$$\Delta u = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$
$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial\Omega} = f(S), \quad S \in \partial\Omega.$$

Введем в области $\Omega \cup \partial\Omega$ функцию $v(x, y)$ такую, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда

$$\Delta u = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos(l, x) + \frac{\partial u}{\partial y}\cos(l, y) =$$
$$= \frac{\partial v}{\partial y}\cos(l, x) - \frac{\partial v}{\partial x}\cos(l, y).$$

Введем направление l_1, полученное из l поворотом на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

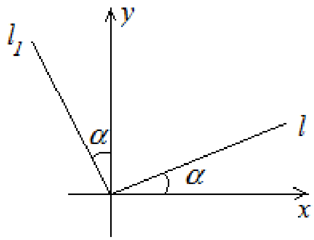


Рис. 11. Ввод нового направления, необходимого для сведения задачи Неймана к задаче Дирихле.

Тогда $\cos(l, x) = \cos\alpha$, $\cos(l, y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Для направления l_1, очевидно, можем записать

$$\cos\left(l_1, x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin\alpha = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = -\cos\left(l, y\right)$$

,

$$\cos\left(l_1, y\right) = \cos\alpha = \cos\left(l, x\right).$$

Получаем для производных по направлению следующие выражения:

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial v}{\partial x}\cos\left(l_1, x\right) + \frac{\partial v}{\partial y}\cos\left(l_1, y\right) = \frac{\partial v}{\partial l_1}.$$

Поэтому производная от функции u по нормали равна производной от функции v по касательной в точках границы.

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial u}{\partial n}$$

А значит, можно вычислить

$$\int_A^B \frac{\partial v}{\partial \tau} dS = \int_A^B \frac{\partial u}{\partial n} dS, \quad S \in \partial\Omega,$$

$$v\left(B\right) - v\left(A\right) = \int_A^B f\left(S\right) dS,$$

где A и B - граничные точки. Чтобы полученное условие можно было применить, надо фиксировать значение функции v в какой-нибудь начальной точке A. Тогда можно определить значение функции в любой точке границы и мы, таким образом, придем к задаче

$$\Delta v = 0,$$

$$v\big|_{B \in \partial\Omega} = v\left(A\right) + \int_A^B f\left(S\right) dS.$$

Это задача Дирихле, решение которой разными способами было рассмотрено в предыдущих параграфах.

Литература

1. Емельянова В.М., Рыбакина Е.А. Уравнения математической физики. Изд. Лань, Спб: 2016 г.
2. Стеклов В.А. Общие методы решения основных задач математической физики. М.: ЛЕНАНД, 2016 г.
3. Белоусов Ю.М., Кузнецов В.П., Смилга В.П. Практическая математика. Издательский дом «Интеллект», 2014 г.

Содержание

Учебное издание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по дисциплине
«МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА»

Составитель: Вера Валерьевна Петрова

ЛР № 020309 от 30.19.96

Подписано в печать 16.03.18. Формат 60×90 1/16.
Гарнитура Times New Roman.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 5,25. Тираж 100 экз. Заказ № 661.
РГГМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр., 98.