

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ



В.Ю. Чанцев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
по дисциплине
«Численные методы математического
моделирования»

Часть 1: Решение уравнения адвекции

Санкт-Петербург
РГГМУ
2021

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

В.Ю. Чанцев

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

по дисциплине

«Численные методы математического
моделирования»

Часть 1: Решение уравнения адвекции

Направление 05.03.05 – Прикладная гидрометеорология
Профиль – Прикладная океанология

Санкт-Петербург
РГГМУ
2021

УДК 519.63:532.5.032
ББК 22.192.322:22.253.322
Ч-18

Чанцев, Валерий Юрьевич

Ч-18 Методические указания по дисциплине «Численные методы математического моделирования». Часть 1 : Решение уравнения адвекции / В.Ю. Чанцев. – Санкт-Петербург : РГГМУ, 2021. – 32 с.

Методические указания составлены в соответствии с программой дисциплины «Численные методы математического моделирования». В пособии раскрывается раздел дисциплины, связанный с выполнением лабораторной работы, даются рекомендации по ее выполнению и представлению отчетного материала.

УДК 519.63:532.5.032
ББК 22.192.322:22.253.322

ISBN 978-5-86813-527-9

© В.Ю. Чанцев, 2021
© РГГМУ, 2021

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение	4
1 Цель работы и постановка задачи	7
2 Краевые условия и порядок точности аппроксимаций дискретизации	9
3 Ход выполнения задания	14
3.1 Численное решение уравнения адвекции скалярной величины	14
3.2 Численное решение уравнения адвекции импульса	18
4 План отчета по проведенному исследованию	22
Рекомендуемая литература	31

Введение

«Численные методы математического моделирования» является дисциплиной, изучаемой студентами океанологической направленности. Изучение процессов и явлений Мирового океана, как и всей климатической системы, отражающейся во взаимодействии океана и атмосферы, невозможно без обращения к математическому моделированию сложных динамических систем. Современное математическое моделирование основывается не просто на методах вычислительной математики, а на специализированных методах численного решения дифференциальных задач в частных производных [1, 2]. Поэтому освоение данной дисциплины позволяет студентам получить достаточно глубокие знания теоретических и методических основ численного решения задач математической физики в области гидрометеорологии.

Целью дисциплины является подготовка специалистов, владеющих глубокими теоретическими знаниями и практическими навыками, которые необходимы для профессиональной подготовки и проведения вычислительных экспериментов по изучению пространственно-временной изменчивости процессов и явлений в водной и воздушной среде на основе современных методов численного моделирования.

В результате изучения дисциплины студент овладевает знаниями о различных методах численного решения

дифференциальных уравнений в частных производных, описывающих процессы в динамических системах. Студент получает представление о возможности применения тех или иных численных методов в зависимости от целей решаемой задачи. Визуализация результатов численного решения задач позволяет студенту получить представление о влиянии тех или иных параметров на процесс вычислений. Эти знания помогут студенту правильно формулировать математическую основу исследовательской задачи, и целенаправленно выбирать и сочетать численные методы решения для обеспечения максимальной эффективности исследовательского процесса.

Изучение данной дисциплины осуществляется на последнем курсе бакалавриата и предполагает, что студенты получили достаточные знания курсов «Физика», «Высшей математика», «Физика океана», «Химия океана» и «Гидромеханика». Освоение курса рекомендуется начинать с общего ознакомления с рабочей программой дисциплины, предлагаемыми методическими пособиями и списком рекомендованных литературных источников. После этого следует внимательно проработать рабочую программу и методические указания по выполнению практических заданий. Необходимо учесть, что при подготовке по данному курсу, целесообразно выдерживать определенное единство методики его изучения и определенный план работы учащегося.

Весь курс дисциплины «Численные методы математического моделирования» разделен на несколько

обобщенных разделов, освоение которых сопровождается выполнением индивидуальных практических заданий.

В представляемых методических указаниях рассматривается первое практическое задание, направленное на изучение особенностей численного решения уравнения адвекции пассивного скаляра и импульса, записанного в виде дифференциального уравнения первого порядка в частных производных.

1 Цель работы и постановка задачи

Основой данной работы является изучение особенностей решения уравнения переноса скалярной характеристики:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}(C) = \text{grad}(K_C \text{grad}(C)) \quad (1.1)$$

или импульса:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \text{grad}(\vec{V}) - \rho \cdot 2\vec{\omega} \times \vec{V} = \\ = \rho \cdot \vec{g} - \text{grad}(P) + \rho \cdot \text{grad}(K_V \text{grad}(\vec{V})) \end{aligned} \quad (1.2)$$

где C – скалярный трассер, \vec{V} – вектор скорости движения среды, \vec{g} – гравитационного ускорения, $\vec{\omega}$ – угловая скорость вращения Земли, ρ – плотность среды, P – давление, K_C , K_V – коэффициенты термической и динамической вихревой диффузии, соответственно.

Уравнения адвекции пассивного трассера и импульса являются разложением полных производных по времени [1]:

для скалярного трассера

$$\frac{dC(\vec{r}, t)}{dt} \equiv \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{\partial C}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}(C) \quad (1.3)$$

и для импульса

$$\frac{d\vec{V}(\vec{r}, t)}{dt} \equiv \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{d\vec{r}}{dt} \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{r}} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \text{grad}(\vec{V}) \quad (1.4)$$

Уравнение, описывающее инерционный перенос пассивного трассера (1.3) или импульса (1.4), является только частью общего уравнения адвективно-диффузионного переноса скаляра (1.1) или самой сплошной среды (1.2). Однако, при этом, именно адвекция, как нелинейная часть дифференциального уравнения в частных производных, заставляет для их решения применять численные методы, и в значительной степени влияет на устойчивость и сходимость решения дифференциальной задачи.

Целью данного задания является исследование устойчивости и сходимости численного решения конечно-разностных аппроксимаций уравнения адвекции при различной пространственной и временной дискретизации расчетных параметров.

Для достижения поставленной задачи, необходимо сформулировать краевые условия, проанализировать порядок точности задаваемых конечно-разностных аппроксимаций и оценить необходимые условия устойчивости и сходимости численного решения.

2 Краевые условия и порядок точности аппроксимаций дискретизации

Выполнение индивидуального задания по исследованию устойчивости и сходимости численного решения конечно-разностных аппроксимаций уравнения адвекции построено на анализе одномерной записи уравнения:

$$\text{для скалярной характеристики } \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

или

$$\text{для импульса } \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (2.2)$$

Так как индивидуальное задание предполагает решение задачи Коши, необходимо для решения уравнений (2.1) и (2.2) задать начальные и граничные условия.

Под начальными условиями понимается задание распределения расчетного параметра на всей расчетной области на момент времени, с которого начинается расчет. В данном случае задается нулевое распределение расчетного параметра, т.е.:

$$C(x, t)|_{t=0} \equiv C(x, 0) = 0 \text{ – для скалярной величины} \quad (2.3)$$

$$U(x,t)|_{t=0} \equiv U(x,0) = 0 \text{ – для импульса} \quad (2.4)$$

В связи с тем, что рассматривается одномерное пространство, то это означает рассмотрение распространения параметра вдоль только одной декартовой оси X . Заданное начальное условие говорит о том, что либо C , либо U на всем протяжении оси X равняется 0 в начальный момент времени расчета.

Граничные условия предполагают задание значений расчетного параметра на всем контуре расчетной области. В данном случае необходимо задать значение расчетного параметра на правом и левом краях оси X . Причем граничные условия задаются на весь период интегрирования по времени.

На левой границе:

$$C(x,t)|_{x=x_0} \equiv C(x_0,t) = C_0 \text{ для скаляра} \quad (2.5)$$

$$U(x,t)|_{x=x_0} \equiv U(x_0,t) = U_0 \text{ для импульса} \quad (2.6)$$

На правой границе:

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{x=x_N} = 0 \text{ для скаляра} \quad (2.7)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=x_N} = 0 \text{ для импульса} \quad (2.8)$$

Сформулированные граничные условия показывают, что на левой границе задан постоянный источник скалярного параметра (2.5) или постоянно действующий источник импульса (2.6). На правой границе оси X задается свободное вытекание, которое определяется нулевым градиентом величины (2.7) или (2.8).

Задание свободного протекания на правой границе расчетной области обеспечивает максимальную гладкость решения задачи, и не позволяет формироваться паразитным волнам.

Порядок точности аппроксимации

Порядок точности или ошибка конечно-разностной аппроксимации дифференциального уравнения в частных производных чаще всего определяется путем разложения расчетных параметров в ряд Тейлора в окрестности пространственного или временного узла расчетной сетки [3]. Полученные разложения преобразуем в разностные аппроксимации производных и определяем ошибку, как остаточные члены.

- ❖ Направленная разностная аппроксимация первой производной

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} \quad (2.9)$$

- ❖ Центральная разностная аппроксимация первой производной

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} \approx \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.10)$$

Проведем разложение параметра $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности $\pm\Delta x$:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{\Delta x}{1!} \frac{df}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} + \\ + \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{d^4 f}{dx^4} \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} f(x - \Delta x) = f(x) - \frac{\Delta x}{1!} \frac{df}{dx} + \frac{\Delta x^2}{2!} \frac{d^2 f}{dx^2} - \\ - \frac{\Delta x^3}{3!} \frac{d^3 f}{dx^3} + \frac{\Delta x^4}{4!} \frac{d^4 f}{dx^4} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Преобразуем разложение (2.12), и получим следующее

$$\frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dots \quad (2.13)$$

Порядок точности конечно-разностной аппроксимации определяется первым остаточным членом в правой части

после преобразования. Так в преобразованном разложении (2.13) таким членом выступает член со второй производной. Ошибка определяется показателем степени Δx , т.е. этот член можно записать как $O(\Delta x^n)$. Чем больше n , тем меньше ошибка используемой аппроксимации [4]. Тогда выражение (2.13) можно записать как

$$\frac{f(x) - f(x - \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} + O(\Delta x^1) \quad (2.13 \text{ a})$$

Если из разложения (2.11) вычесть выражение (2.12), после преобразования получим:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} + \dots \quad (2.14)$$

Тогда можно записать:

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2\Delta x} = \frac{\partial f}{\partial x} + O(\Delta x^2) \quad (2.14 \text{ a})$$

3 Ход выполнения задания

Для выполнения данного задания определяются общие для всех исходные данные и индивидуальные данные по вариантам.

Общими для всех являются следующие данные:

- Длина оси X .
- Продолжительность периода интегрирования по времени.
- Скорость потока U вдоль оси X для адвекции скалярной величины.

Индивидуальными данными являются:

- Левое граничное условие скалярной величины C_0
- Левое граничное условие скорости течения U_0
- Пространственный шаг Δx дискретизации оси X .

Расчет по уравнению адвекции осуществляется для направленной и центральной разностной аппроксимаций. Это связано с тем, что условия устойчивого решения сильно отличаются при использовании центральной разностной аппроксимации от направленной.

3.1 Численное решение уравнения адвекции скалярной величины

В первую очередь после получения варианта индивидуальных данных необходимо записать уравнение

адвекции (2.1) в виде конечно-разностной аппроксимации, и определить шаг дискретизации по времени Δt .

В конечно-разностном виде нужно записать все производные уравнения (2.1), и представить уравнение в рекуррентном виде:

Для направленной разностной аппроксимации

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 &\rightarrow \\ \rightarrow \frac{C_x^{t+\Delta t} - C_x^t}{\Delta t} + U \frac{C_x^t - C_{x-\Delta x}^t}{\Delta x} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$C_x^{t+\Delta t} = C_x^t - U \frac{C_x^t - C_{x-\Delta x}^t}{\Delta x} \Delta t \quad (3.2)$$

Рекуррентное уравнение (3.2) можно представить как:

$$C_x^{t+\Delta t} = (1 - \mu)C_x^t + \mu C_{x-\Delta x}^t \quad (3.3)$$

где $\mu = U \frac{\Delta t}{\Delta x}$

Введение параметра μ значительно упрощает процесс расчета временной эволюции скалярного параметра C вдоль оси X . В случае многочисленных и продолжительных вычислений введение μ уменьшает количество вычислительных операций как минимум на две (умножение U на Δt и деление на Δx) в каждом цикле.

Для центральной разностной аппроксимации

$$\begin{aligned} \frac{\partial C}{\partial t} + U \frac{\partial C}{\partial x} = 0 & \rightarrow \\ \rightarrow \frac{C_x^{t+\Delta t} - C_x^t}{\Delta t} + U \frac{C_{x+\Delta x}^t - C_{x-\Delta x}^t}{2\Delta x} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

Рекуррентное уравнение для центральной разностной аппроксимации (3.4) представим в следующем виде:

$$C_x^{t+\Delta t} = C_x^t + 0.5\mu(C_{x+\Delta x}^t - C_{x-\Delta x}^t) \quad (3.5)$$

После получения рекуррентных уравнений для направленной разностной аппроксимации (3.3) и центральной разностной аппроксимации (3.5) требуется установить необходимое условие устойчивости численного решения уравнения адвекции.

Критерием устойчивости численного решения дифференциального уравнения первого порядка в частных производных является критерий Куранта-Фридрихса-Леви (КФЛ). Критерий КФЛ представляет собой безразмерное соотношение ($u \cdot \Delta t / \Delta x$), которое должно быть меньше или равно единицы. Доказательство этого необходимого условия можно посмотреть в работе [3, 4].

В уравнениях (3.3) и (3.5) параметр μ соответствует критерию устойчивости КФЛ. Это означает, что для выполнения необходимого условия устойчивости

численного решения уравнения адвекции необходимо задавать $\mu \leq 1$.

Чтобы выполнить условие $\mu \leq 1$, необходимо определить величину шага дискретизации по времени Δt , которое можно получить при заданных значениях параметров U , Δx и μ .

Для исследования устойчивости численного решения уравнения адвекции необходимо задать различные значения критерия КФЛ. Обязательно нужно проверить неустойчивый режим решения уравнения адвекции. Это соответствует не выполнению необходимого условия устойчивости, т.е. нужно задать КФЛ > 1 . Далее необходимо проверить устойчивость численного решения при КФЛ = 1. И посмотреть, будет ли численное решение уравнения адвекции устойчивым при КФЛ < 1 . Причем, в этом случае можно оценить скорость сходимости численного решения к точному [5].

Все проводимые численные расчеты должны сопровождаться построением графиков для каждого расчета. При этом необходимо особо отметить тот случай, который показывает, что для численного решения центральной разностной аппроксимации уравнения адвекции критерий КФЛ ≤ 1 является необходимым условием, но **не достаточным**. Это означает, что необходимо проведение дополнительных расчетов при $\mu \ll 1$.

3.2 Численное решение уравнения адвекции импульса

Решение уравнения адвекции импульса (2.2) значительно отличается от решения уравнения адвекции скалярного трассера (2.1). Если при решении уравнений (3.3) и (3.5) скорость переноса вдоль оси X принималась постоянной ($U = \text{const}$), то в данном случае она является величиной переменной.

Величина скорости U , на которую домножается пространственная производная ($\partial U/\partial x$) в уравнении (2.2), в конечно-разностных аппроксимациях уравнения адвекции импульса играет плохую роль. При задании начального распределения скорости U вдоль оси X равной 0 (2.4), это начальное условие не даст распространяться импульсу и в дальнейшем.

Рассмотрим численное решение направленной разностной аппроксимации уравнения адвекции только на один временной шаг и вторую от левой границы точку на оси X .

$$U_2^1 = U_2^0 - U_2^0 \frac{U_2^0 - U_0}{\Delta x} \Delta t, \quad (3.6)$$

Здесь $U_2^0 = 0$, а значит и $U_2^1 = 0$ и все остальные значения скорости на оси X будут равны нулю на всех временных шагах.

Приведенный пример показывает, что уравнение (2.2) необходимо преобразовать, чтобы его можно было решить

численно. Для этого воспользуемся правилом дифференцирования и получим преобразованное уравнение адвекции импульса:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} = 0 \quad (3.7)$$

Теперь для уравнения (3.7) можно записать его конечно-разностные аппроксимации, которые будут выглядеть совсем иначе, чем для скалярной величины. Тем не менее такая запись разностной аппроксимации не повышает ее точности.

Для направленной разностной аппроксимации

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial U^2}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \\ \rightarrow \quad \frac{U_x^{t+\Delta t} - U_x^t}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{(U_x^t)^2 - (U_{x-\Delta x}^t)^2}{\Delta x} = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Тогда рекуррентное уравнение примет вид

$$U_x^{t+\Delta t} = U_x^t - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left[(U_x^t)^2 - (U_{x-\Delta x}^t)^2 \right] \quad (3.9)$$

Для центральной разностной аппроксимации

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = 0 & \rightarrow \\ \rightarrow \frac{U_x^{t+\Delta t} - U_x^t}{\Delta t} + \frac{1}{2} \frac{(U_{x+\Delta x}^t)^2 - (U_{x-\Delta x}^t)^2}{2\Delta x} = 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Рекуррентное уравнение для центральной разностной аппроксимации (3.11) представим в следующем виде:

$$U_x^{t+\Delta t} = U_x^t + \frac{\Delta t}{4\Delta x} \left[(U_{x+\Delta x}^t)^2 - (U_{x-\Delta x}^t)^2 \right] \quad (3.11)$$

Критерий устойчивости численного решения разностных аппроксимаций (3.9) и (3.11) будет определяться заданной скоростью U_0 на левой границе, шагом пространственной дискретизации Δx и шагом временной дискретизации Δt (КФЛ = $U_0 \cdot \Delta t / \Delta x$). Шаг дискретизации по времени Δt должен определяться в соответствии с условиями устойчивости КФЛ ≤ 1 , а также КФЛ $\ll 1$.

Как и в случае исследования устойчивости уравнения адвекции скалярного трассера, для исследования устойчивости численного решения уравнения адвекции импульса необходимо задать различные значения критерия КФЛ. Также обязательно нужно проверить неустойчивый режим решения уравнения адвекции, т.е. нужно задать КФЛ > 1 . Далее необходимо проверить устойчивость

численного решения при $KФЛ = 1$. Основной частью исследования на устойчивость будут численные решения уравнения адвекции при $KФЛ < 1$. Причем, в этом случае можно оценить скорость сходимости численного решения к точному.

И опять все проводимые численные вычисления должны сопровождаться построением графиков для каждого расчета.

4 План отчета по проведенному исследованию

Любое проводимое исследование должно быть структурировано, что позволяет остальному научному сообществу правильно понимать и оценивать представляемый труд. От того, как представлена проведенная работа, как выстроена структурная логика зависит проявление интереса к работе и возможность дальнейшего развития данного научного направления. Поэтому учиться правильно структурировать результаты проводимых исследований необходимо уже со студенческой скамьи.

Любой отчет нужно начинать с описания рассматриваемой проблемы и целей исследования. Далее следует постановка задачи исследования, способы или методы проведения исследования, ход выполнения исследования, и, наконец, выводы или анализ результатов исследования. Таким образом выстраивается алгоритм отчета о проведенном исследовании.

В случае исследования устойчивости численного решения уравнения адвекции, план (этапы) отчета будет следующим:

- ✓ Цель исследования.
- ✓ Постановка задачи. Включает в себя представление самого уравнения адвекции в дифференциальной форме, и описание начальных и граничных условий.

- ✓ Представление конечно-разностной аппроксимации уравнения адвекции
- ✓ Демонстрация точности аппроксимации (разложение в ряд Тейлора).
- ✓ Представление записи рекуррентного вида конечно-разностной аппроксимации уравнения адвекции.
- ✓ Графическое представление каждого численного расчета.
- ✓ Анализ проведенного исследования.
- ✓ Приложение. В Приложении должны быть представлены Блок-схема и программный код вычислительного процесса

Графики, которые необходимо построить по результатам численных расчетов, должны иметь следующий вид.

Графики численного расчета по направленной разностной аппроксимации уравнения адвекции для скалярной величины:

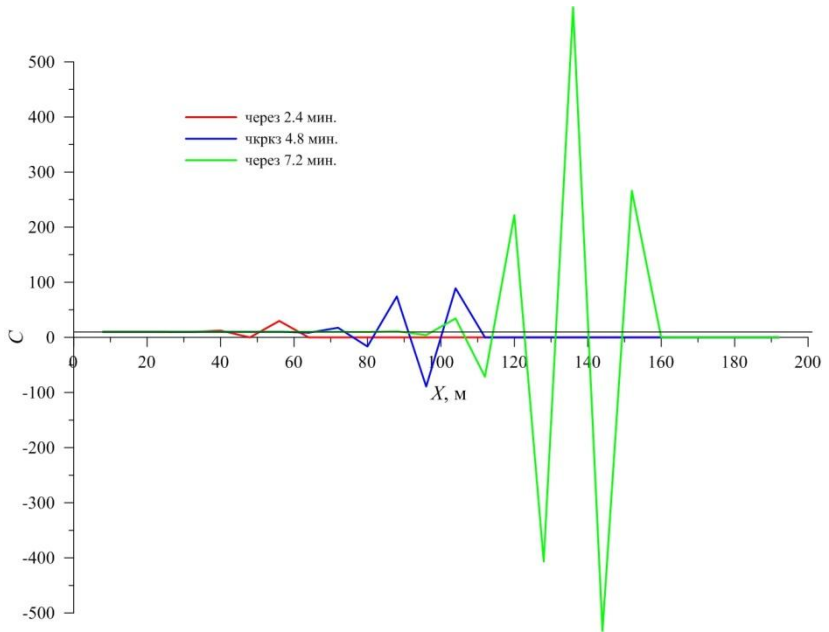


Рис. 4.1 Временной ход изменчивости C для направленной разностной аппроксимации уравнения адвекции при $\mu = 1,2$ и $\Delta t = 24$ с.

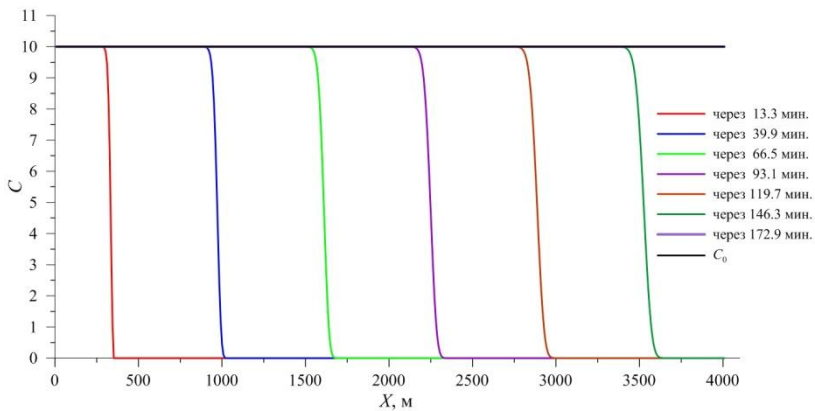


Рис. 4.2 Временной ход изменчивости C для направленной разностной аппроксимации уравнения адвекции при $\mu = 1$ (0,999) и $\Delta t = 19$ с.

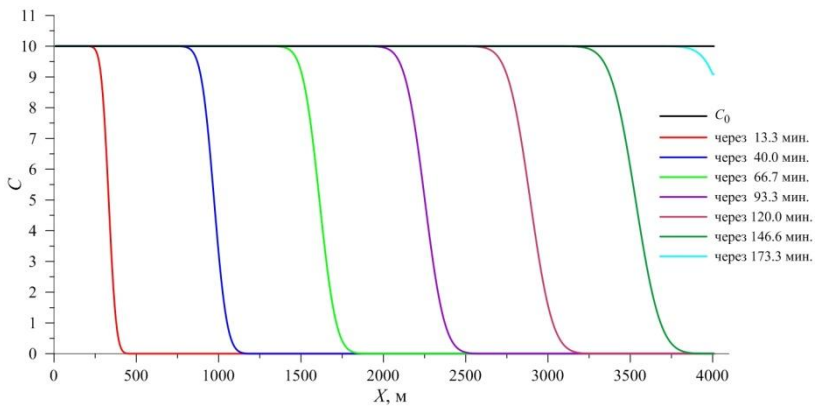


Рис. 4.3 Временной ход изменчивости C для направленной разностной аппроксимации уравнения адвекции при $\mu = 0,01$ и $\Delta t = 0,2$ с.

Графики численного расчета по центральной разностной аппроксимации уравнения адвекции для скалярной величины:

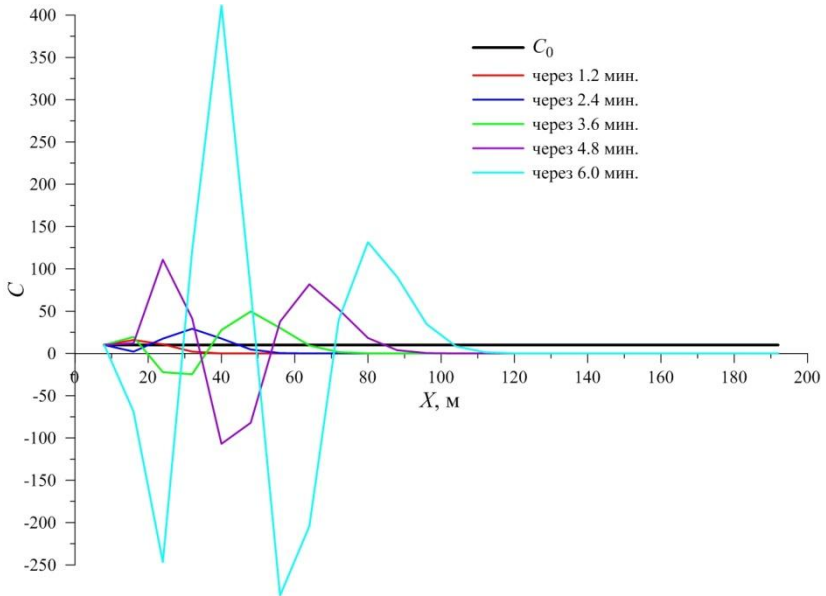


Рис. 4.4 Временной ход изменчивости C для центральной разностной аппроксимации уравнения адвекции при $\mu = 1,2$ и $\Delta t = 24$ с.

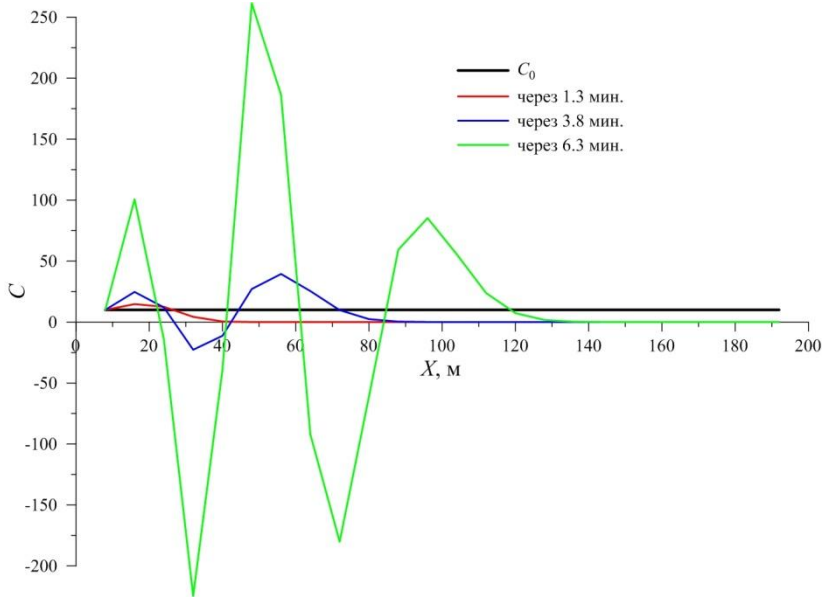


Рис. 4.5 Временной ход изменчивости C для центральной разностной аппроксимации уравнения адвекции при $\mu = 1$ (0,999) и $\Delta t = 19$ с.

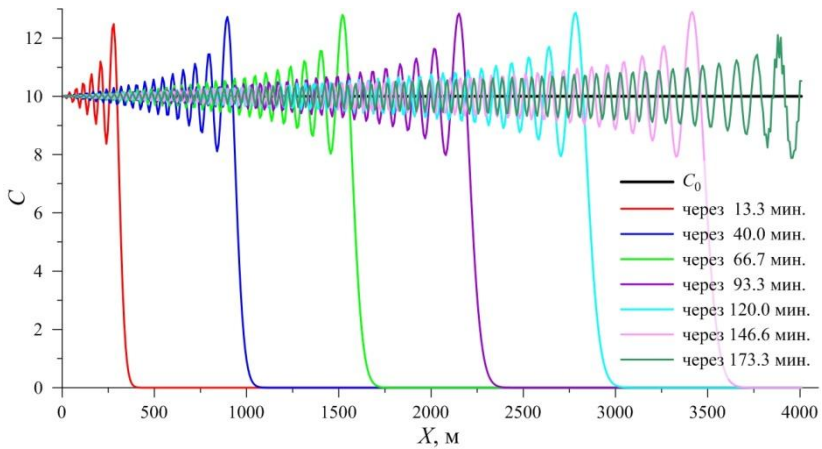


Рис. 4.6 Временной ход изменчивости C для центральной разностной аппроксимации уравнения адвекции при $\mu = 0,001$ и $\Delta t = 0,02$ с.

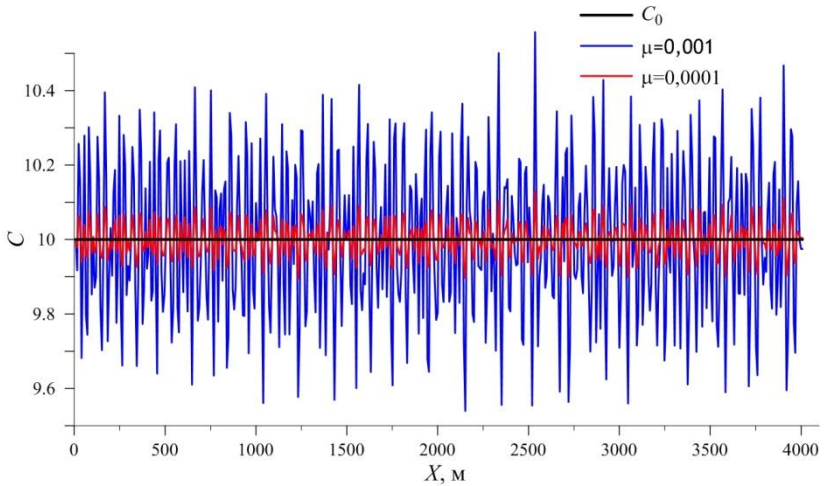


Рис. 4.7 Установившийся режим изменчивости C для центральной разностной аппроксимации уравнения адвекции при $\mu = 0,001$ и $\mu = 0,0001$.

Такие же рисунки нужно делать и при условии исследования устойчивости численного решения уравнения адвекции импульса.

Анализ полученных результатов должен проводиться тщательно. Путем сравнения графиков продемонстрировать условия устойчивого режима численного решения уравнения адвекции. Описать точность направленной и центральной разностной аппроксимации, и показать особенности выхода их решений на устойчивый режим. Особенно это касается центральной разностной аппроксимации.

На сравнении вычислений по направленной и центральной разностным аппроксимациям уравнения адвекции оценить скорость сходимости численного решения к точному решению при различных значениях критерия устойчивости КФЛ.

Рекомендованная литература

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. — М.: Мир, 1980. — 618 с.
2. Мезингер Ф., Аракава А. Численные методы, используемые в атмосферных моделях. — Л.: Гидрометеиздат, 1979. — 136 с.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989. — 616 с.
4. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Введение в теорию. — М.: Наука, 1973. — 400 с.
5. Турчак Л.И. Основы численных методов. — М.: Наука, 1987. — 318 с.

Учебное издание

Чанцев Валерий Юрьевич,
доцент, канд. геогр. наук

Методические указания
по дисциплине
«Численные методы математического моделирования»

Часть 1: Решение уравнения адвекции»

Печатается в авторской редакции.

Подписано в печать 28.06.2021. Формат 60×90 1/16.
Гарнитура Times New Roman. Печать цифровая.
Усл. печ. л. 2. Тираж 15 экз. Заказ № 1118.
РГГМУ, 192007, Санкт-Петербург, Воронежская ул., д.79.

