Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«РОССИЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ГИДРОМЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»

Г.И. Беликова, Л.В. Витковская

МАТЕМАТИКА

ЧАСТЬ 3

ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебное пособие
для иностранных студентов, обучающихся
по программе предвузовской подготовки

РГГМУ

Санкт-Петербург
2015

УДК [808.2: 800.7:51] (073.8)

Рецензенты: Герасименко Н.И., к.ф.-м.н., доц. каф. высшей математики и теоретической механики РГГМУ; Матвеев Ю.Л., д.ф.-м.н., зав. каф. высшей математики и информатики Государственной полярной академии; Травина Л.Е., ст. преп. каф. русского языка и предвузовской подготовки РГГМУ.

Беликова Г.И., Витковская Л.В. Математика. Часть 3. Основы математического анализа. Учебное пособие для иностранных студентов, обучающихся по программе предвузовской подготовки. — СПб.: РГГМУ, 2015. — 208 с.

ISBN 978-5-86813-425-8

Основная цель пособия: подготовить иностранных студентов к успешному пониманию лекций по математике, активной работе на практических занятиях, воспитать математическую культуру устного и письменного изложения материала в рамках традиций Русской математической школы.

Учебное пособие предназначено для иностранных студентов, обучающихся по программе предвузовской подготовки. Третья часть пособия посвящена введению в математический анализ. В пособие включены следующие разделы: пределы, непрерывность, дифференцирование, исследование функций, интегрирование. Кроме этого пособие знакомит с историей становления математического анализа.

Belikova G.I., Vitkovskaya L.V. Mathematics. Part 3. The fundamentals of mathematical analysis. The tutorial for foreign students, who study according to before university training program. — St. Petersburg, RSHU Publishers, 2015. — 208 pp.

Main purpose of this book: to preparation of foreign students for understanding mathematical lectures, for active work at the practice lessons, to educate mathematical culture of verbal and written exposition some object within framework of Russian mathematical school.

This tutorial is intended for foreign students, who study according to before university training program. The tutorial is introduction in mathematical analysis and consists of several parts: limits, continuity, derivation, study functions, integration. Moreover this book tells about mathematical analysis history.

ISBN 978-5-86813-425-8

© Беликова Г.И., Витковская Л.В., 2015
© Российский государственный гидрометеорологический университет (РГГМУ), 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

Введение

Представленная вашему вниманию книга – третья заключительная часть учебного пособия для иностранных студентов, которые обучаются по программе предвузовской подготовки. Содержание книги – вводные лекции по математическому анализу, которые читались иностранным студентам в течение десяти лет. Цель книги – помочь студентам как можно быстрее и легче адаптироваться к соответствующим лекциям по высшей математике, которые читаются на первом курсе в большинстве университетов нашей страны.

Форма изложения материала учитывает разный уровень знаний математики и разный уровень владения русским языком. В тексте есть таблицы, символьные и схематические записи некоторых математических высказываний. Кроме того, жирным курсивом выделены устойчивые математические термины и выражения. Там где это было уместно, в скобках даны синонимы (с точки зрения математики). Звучание некоторых математических выражений дано курсивом в скобках.

Следует отметить, что представленная в работе часть математики вызывает у студентов особенно живой интерес. Те, кто изучал математический анализ в школах или университетах, рады встрече с хорошим знакомым. Те, кто услышал этот материал впервые, рады новому для них и очень интересному разделу математики.

Так же, как и в предыдущих двух книгах, есть очерки об учёных, которые стояли у истоков дифференциального и интегрального исчисления. Иногда иностранные студенты не узнают фамилии всем известных учёных (Пифагор, Лопиталь и др.). В связи с этим рядом с русским написанием в скобках приводятся их фамилии с использованием латинского алфавита.

В книге мы продолжаем показывать гуманитарную составляющую математики, поэтому в работе дан этимологический и толковый словарь терминов, связанных с математическим анализом.

По просьбам многих иностранных студентов в книгу включена алгебра комплексных чисел (приложение 1).

При написании пособия мы старались, чтобы русский текст был максимально простым для иностранных студентов. Там, где была такая возможность, использованы русские слова, заимствованные из латыни.

Студентам, которые пока не дружат с математикой, полезно знать, что математика – не только точная, красивая, но и весёлая наука. В начале многих разделов мы поставили в качестве эпиграфов маленькие кусочки из удивительной книги «Математики тоже шутят» [21].

Начиная читать эту книгу, вспомните о следующих трёх важных моментах математики.

1. Математика – часть человеческой культуры. Она принадлежит духовной культуре.
2. Математические занятия развивают:
   - умение отличить истину от лжи;
   - умение отличить смысл от бессмыслицы;
   - умение отличить понятное от непонятного.
3. Математика подобна искусству – это особый способ познания. В роли художественных образов выступают математические образы, которые являются особой формой отражения действительности.

Надеемся, что пособие будет полезно не только иностранным студентам, но и тем, для кого русский язык – родной.

Благодарим Ларису Евгеньевну Травину – старшего преподавателя кафедры русского языка и предвузовской подготовки и Николая Ивановича Герасименко – доцента кафедры высшей математики и теоретической механики за очень внимательное прочтение учебного пособия и ценные замечания. Особые благодарности Юрию Леонидовичу Матвееву – доктору физико-математических наук за доброжелательное отношение к этой книге и редактору Ольге Сергеевне Крайновой за чрезвычайно строгое отношение к каждой странице работы.

Математику уже за то любить стоит,
что она ум в порядок приводит.

Михайло Ломоносов

Глава 1
ПРЕДЕЛЫ

1.1. Основные понятия и определения

Уточняйте значения слов, и вы избавите
человечество от половины заблуждений.
Рене Декарт
(французский математик (1596–1650))

Понятие «предел функции» является центральным в математическом анализе. Поэтому разберёмся с этим понятием более детально.

Слово «предел» встречается не только в математике. Когда мы произносим фразу «…предел моих мечтаний…», это значит, что мы ***стремимся*** к нашей мечте (к цели). Иногда в жизни можно достичь своей мечты, иногда нет.

В математике смысл слова «предел» такой же. Но в математической науке определения имеют максимальную степень обобщения. Для этого введено понятие «***предельная точка множества***». Рассмотрим это понятие.

Возьмём часть множества (подмножество) действительных чисел X $(X \in R)$. Это может быть некоторый отрезок или интервал, или один из полуинтервалов:

$$X = \begin{cases} [a;\, b] \text{ – отрезок}, \\ (a;\, b) \text{ – интервал}, \\ [a;\, b) \text{ – полуинтервал}, \\ (a;\, b] \text{ – полуинтервал}. \end{cases}$$

Окрестность точки

Любая точка x_0 из интервала $(a;\ b)$ $(x_0 \in (a;\ b))$ называется ***внутренней точкой*** множества X. Точки a и b называются ***граничными точками*** множества X. Они могут принадлежать или не принадлежать X.

Определение. Любой интервал, который содержит внутреннюю точку x_0, называется ***окрестностью этой точки***.

Для внутренней точки обычно рассматривают ***симметричную окрестность*** с центром в самой точке: $x_0 \in (x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$. Такую окрестность называют δ-окрестностью точки x_0. В любой симметричной окрестности внутренней точки находится ***бесчисленное множество*** точек из этого же множества *X*.

Определение. Интервал $(a; a + \delta)$ называется δ-окрестностью левой граничной точки a. Интервал $(b - \delta; b)$ называется δ-окрестностью правой граничной точки b.

Интервалы $(a; a + \delta)$ и $(b - \delta; b)$ называются ***несимметричными окрестностями*** граничных точек. В этих окрестностях тоже содержится бесчисленное множество точек из множества *X*. Обычно окрестности точек обозначаются малыми греческими буквами ε или δ. Виды окрестностей изображены на рис. 1.1 и в табл. 1.1.

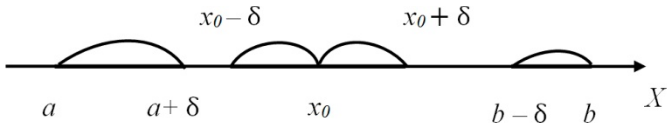

Рис. 1.1

Существование окрестностей с бесчисленным множеством точек из множества *X* объединяет внутренние и граничные точки множества. Объединение таких точек называется множеством ***предельных точек множества*** *X*.

Таблица 1.1

δ-окрестности точек ($\boldsymbol{\delta > 0}$)	**Название предельных точек**
$(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$	внутренняя точка
$(a;\ a + \delta)$	правая граничная точка
$(b - \delta;\ b)$	левая граничная точка

Замечание. Пусть у нас есть множество $L \in R$ и $L = [a;\ b] \cup \{c;\ d\}$ (рис. 1.2). Точки c и d не предельные точки, так как можно построить такую окрестность для каждой из этих точек, что в этих окрестностях не будет содержаться ни одной точки из множества L.

Такие точки называются ***изолированными***. В теории пределов используют только предельные точки.

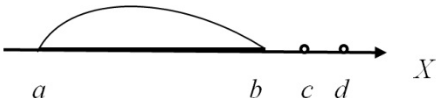

Рис. 1.2

Рассмотрим графические примеры, которые приводят к математическому понятию «предел».

<u>Пример 1</u>. Предположим, что функция $y = f(x)$ начинает с некоторого места возрастать, но ограничена прямой $y = A$. График функции приближается к прямой всё ближе и ближе, но может встретиться с ней только на бесконечности. В этом случае можно сказать, что предел «мечтаний» функции – число A, но этого предела функция ***не достигнет*** (функция никогда не будет равна числу A) (рис. 1.3).

<u>Пример 2.</u> Предположим, что график функции стремится попасть в точку $M\ (x_0;A)$, но в самой точке x_0 функция не задана, то есть точка x_0 не принадлежит области определения этой функции (рис. 1.3). В этом примере график приближается к точке M ***сколь угодно близко***, но попасть в неё не может. Значит можно сказать, что число A – предел «мечтаний» функции $y = f(x)$.

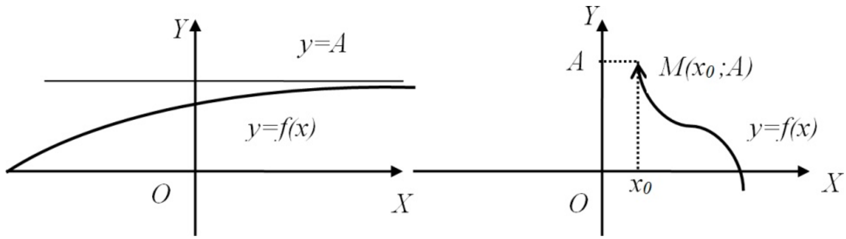

Рис. 1.3

Перейдём теперь к строгому математическому определению понятия «предел». Определение зависит от того, к чему стремится аргумент: к конечной предельной точке или к бесконечности.

Определение зависит от конечности или бесконечности самого предела. Рассмотрим все возможные случаи.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности некоторой предельной точки x_0.

Определение 1 (по Коши). Число A называется ***пределом функции в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ ***,*** если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всех x из интервала $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ будет выполняться неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Для краткости используют равенство $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, которое означает, что число A – предел функции $f(x)$ при стремлении x к числу x_0.

Это определение часто называют определением ***на языке*** $\boldsymbol{\varepsilon}$**-**$\boldsymbol{\delta}$ Его можно записать в символьном виде:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x, |x - x_0\ | < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon\ ).$$

Замечание. Важно отметить, что в определении предела функции $x \neq x_0$.

Перейдём к определению предела функции $y = f(x)$ при стремлении x к $+\infty$ $(-\infty)$.

Определение 2. Число A называется ***пределом функции в плюс бесконечности,*** если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $x_0\ > 0$, что для всех $x > x_0$ будет выполняться неравенство $|\ f(x) - A| < \varepsilon$.

Краткая запись: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Определение 3. Число A называется ***пределом функции в минус бесконечности,*** если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $x_0 < 0$, что для всех $x < x_0$ будет справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Краткая запись: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

1.2. Понятие бесконечного предела

Если тебе трудно сразу понять всю бесконечность, постарайся понять её хотя бы наполовину.

Из книги «Математики тоже шутят»

Определение 1. Предел функции $f(x)$ равен плюс бесконечности при стремлении x к плюс бесконечности, если для любого числа $A > 0$ найдётся такое число x_0, что как только x станет больше x_0 $(x > x_0)$, так сразу будет верно неравенство $f(x) > A$.

Краткая запись: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Определение 2. Предел функции $f(x)$ равен минус бесконечности при стремлении x к плюс бесконечности, если для любого числа $A < 0$ найдётся такое число x_0, что как только x станет больше x_0 $(x > x_0)$, так сразу будет верно неравенство $f(x) < A$.

Краткая запись: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Определение 3. Предел функции $f(x)$ равен плюс бесконечности при стремлении x к минус бесконечности, если для любого числа $A > 0$ найдётся такое отрицательное число x_0, что как только x станет меньше x_0 $(x < x_0)$, так сразу будет верно неравенство $f(x) > A$.

Краткая запись: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

Определение 4. Предел функции $f(x)$ равен минус бесконечности при стремлении x к минус бесконечности, если для любого числа $A < 0$ найдётся такое отрицательное число x_0, что как только x станет меньше x_0 $(x < x_0)$, так сразу будет верно неравенство $f(x) < A$.

Краткая запись: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

Определение 5. Предел функции $f(x)$ равен плюс бесконечности в точке x_0, если для любого числа $A > 0$ найдётся такое число δ, что как только будет верно неравенство $|x - x_0| < \delta$, так сразу будет верно неравенство $f(x) > A$.

Краткая запись: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.

Определение 6. Предел функции $f(x)$ равен минус бесконечности в точке x_0 , если для любого числа $A < 0$ найдётся такое число δ, что как только будет верно неравенство $|x - x_0| < \delta$, так сразу будет верно неравенство $f(x) < A$.

Краткая запись: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

Функция $f(x)$ называется ***бесконечно большой***, если она стремится к плюс или минус бесконечности при стремлении x к некоторой предельной точке или к бесконечности. Символы $+\infty$ и $-\infty$ математики часто называют ***несобственными числами***, так как они не имеют числового изображения.

1.3. Свойства

Определение предела (по Коши) стало основой для вывода свойств и доказательств теорем о пределах функций. Перечислим эти свойства и некоторые теоремы. Будем в дальнейшем предполагать, что предельная точка x_0 может быть несобственным числом ($+\infty$ или $-\infty$).

1. Единственность

Если предел функции в точке существует, то он единственный:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A;\ \lim_{x\to x_0} f(x) = B\ \Rightarrow A = B.$$

2. Предел константы равен самой константе

$$\lim_{x\to x_0} C = C.$$

3. Аддитивность

Предел суммы равен сумме пределов. Рассмотрим функцию, которая равна конечной сумме других функций:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x).$$

Предположим, что для $i = 1,2, \dots, N$ существуют пределы

$$\lim_{x \to x_0} f_i(x) = A_i\,. \tag{1.1}$$

В этом случае существует предел функции $f(x)$ и он вычисляется по формуле

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{i=1}^{N} f_i(x) = \sum_{i=1}^{N} \lim_{x \to x_0} f_i(x).$$

4. Однородность

Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to x_0} Cf(x) = C \lim_{x \to x_0} f(x).$$

5. Предел произведения равен произведению пределов

Пусть функция равна конечному произведению других функций:

$$f(x) = \prod_{i=1}^{N} f_i(x).$$

Предположим, что для $i = 1,2, \dots, N$ существуют пределы (1.1). Тогда предел произведения функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x \to x_0} \prod_{i=1}^{N} f_i(x\,) = \prod_{i=1}^{N} \lim_{x \to x_0} f_i(x).$$

6. Предел отношения равен отношению пределов

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ и допустим,что существуют пределы

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = A;\ \lim_{x \to x_0} f_2(x) = B \neq 0.$$

В этом случае справедлива формула

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f_1(x)}{f_2(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}.$$

7. Переход к пределу в неравенстве (свойство монотонности)

Если в некоторой области X верно неравенство

$$f(x)\le g(x),\bigl(f(x)<g(x)\bigr) \text{ или } f(x)\ge g(x),\bigl(f(x)>g(x)\bigr),$$

то при переходе к пределу справедливо соответствующее неравенство:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\le \lim_{x\to x_0} g(x) \text{ или } \lim_{x\to x_0} f(x)\ge \lim_{x\to x_0} g(x).$$

8. Теорема о сжатой функции (теорема о промежуточной функции)

Рассмотрим три функции, для которых в некоторой области X справедливо двойное неравенство

$$p(x)\le f(x)\le g(x),$$

и существуют два равных предела

$$\lim_{x\to x_0} p(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=A.$$

Тогда существует предел $f(x)$ и он тоже равен A:

$$\lim_{x\to x_0} p(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=A\Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=A.$$

9. Предел сложной функции

Пусть существует предел функции $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$. Справедливы следующие предельные соотношения (см. глава 2, раздел 2.2):

если $A>0,$ то $\Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} a^{f(x)}=a^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)},$

если $A>0,$ то $\Longrightarrow \quad \lim\limits_{x\to x_0} \log_a f(x)=\log_a \lim\limits_{x\to x_0} f(x),$

$$\lim_{x\to x_0} \sin f(x) = \sin \lim_{x\to x_0} f(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \cos f(x) = \cos \lim_{x\to x_0} f(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \tan f(x) = \tan \lim_{x\to x_0} f(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{ctan} f(x) = \operatorname{ctan} \lim_{x\to x_0} f(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \arcsin f(x) = \arcsin \lim_{x\to x_0} f(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \arccos f(x) = \arccos \lim_{x\to x_0} f(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \arctan f(x) = \arctan \lim_{x\to x_0} f(x),$$

$$\lim_{x\to x_0} \operatorname{arcctan} f(x) = \operatorname{arcctan} \lim_{x\to x_0} f(x),$$

если $n \in N$, то $\Longrightarrow$ $$\lim_{x\to x_0} f^n(x) = \left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^n.$$

1.4. Техника вычисления пределов

Чёрные дыры во Вселенной образовались там, где Бог поделил на ноль.

Из книги «Математики тоже шутят»

Предположим, что нам надо найти предел некоторой элементарной функции $y = f(x)$ в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) - ?$$

Для этого, прежде всего, надо вычислить значение функции в этой предельной точке. Если $f(x_0)$ – число, то это число – предел функции в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = (f(x_0)) = f(x_0).$$

$$\text{Если } f(x_0) = +\infty\ (-\infty), \text{то } \lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty\ (-\infty).$$

<u>Пример 1.</u>

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x^3+5} = \left(\frac{9-1}{27+5} = \frac{8}{32}\right) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-1}{x^3+5} = \frac{1}{4}.$$

<u>Пример 2.</u>

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x-1} = \left(\frac{2}{1-1} = \frac{2}{0}\right) = \infty.$$

Ответ: предел равен бесконечности.

<u>Пример 3.</u>

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+5} = \left(\frac{0}{6}\right) = 0.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2+5} = 0.$$

<u>Замечание.</u> Вычисление значения $f(x_0)$ традиционно записывается в скобках.

<u>Неопределённости</u>

При вычислении пределов мы часто встречаемся с очень странными выражениями, которые в математике называются ***неопределённостями***. Рассмотрим сначала некоторые простейшие примеры с различными видами неопределённости.

<u>Пример 4.</u>

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \left(\frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0}\right) - ?$$

После подстановки предельной точки получается ***неопределённость вида ноль разделить на ноль***: $\frac{0}{0}$.

Пример 5.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)-?$$

В этом примере возникает неопределённость вида ***бесконечность разделить на бесконечность***.

Пример 6.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\right)=(\infty-\infty)-?$$

Появилась неопределённость вида ***бесконечность минус бесконечность***.

Пример 7.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = (1^\infty)-?$$

Эта неопределённость вида ***один в степени бесконечность***.

Преобразуем (тождественно) каждую функцию в наших примерах так, чтобы значения пределов стали очевидными. Такой процесс в математике называется ***раскрытием неопределённостей***.

Пример 4.

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1}(x+1)=(1+1=2)=2.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}=2.$$

Пример 5.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3+1}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{\frac{1}{x}}=$$

$$=\left(\frac{1+\frac{1}{+\infty}}{\frac{1}{+\infty}}=\frac{1}{+0}\right)=+\infty.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+1}{x^2}=+\infty\,.$$

Пример 6.

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})=\big(+\infty-(+\infty)\big)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x-1-x}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}=\left(\frac{-1}{+\infty+\infty}\right)=0.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x})=0.$$

Пример 7.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\left(\left(1+\frac{1}{\infty}\right)^\infty=1^\infty\right)=(\text{см. раздел } 1.6)=e.$$

Для того чтобы научиться вычислять более интересные пределы, в следующих двух разделах рассмотрим новые для нас понятия: «бесконечно малые функции» и «бесконечно большие функции».

Упражнения

Найдите пределы следующих функций.

1. $\lim\limits_{x\to -1}(4x+3)$.
2. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-4x+8)$.
3. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\sqrt{1-x^2}$.
4. $\lim\limits_{x\to \sqrt{3}}\dfrac{x^2+5}{x^2-1}$.
5. $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2^x-1}{2^x+1}$.
6. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt[3]{x^3-x+1}+\sqrt{2x^3+1}}{5\sqrt[4]{x^6+x+2}-x}$.

1.5. Бесконечно малые

Блох больших кусают блошки.
Блошек тех – малютки крошки.
Нет конца тем паразитам.
Как говорят, ad infinitum.

Джонатан Свифт
(английский писатель (1667–1745))

Определение. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при стремлении x к точке x_0, если

$$\lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0. \tag{1.2}$$

Бесконечно малые функции играют большую роль в математике. Обычно их обозначают малыми греческими буквами. Вместо фразы «бесконечно малая функция» можно использовать выражение «бесконечно малая величина» или просто «бесконечно малая». Для краткости записи обычно используют сокращение **б. м.**

Классификация бесконечно малых
(сравнение бесконечно малых)

1. Две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta\,(x)$ называются бесконечно малыми ***одного порядка*** (однопорядковыми), если предел их отношения существует и не равен нулю или бесконечности:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta\,(x)}=A\ (A\neq 0 \text{ или } A\neq\infty). \tag{1.3}$$

Для обозначения однопорядковости двух бесконечно малых удобно использовать следующую запись:

$$\alpha(x) = O\big(\beta\,(x)\big)\ (\textit{альфа-о большое от бета}),$$

$$\text{или } \beta\,(x) = O\big(\alpha(x)\big).$$

2. Бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой ***более высокого порядка,*** чем $\beta\,(x)$, если предел их отношения равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta\,(x)} = 0. \tag{1.4}$$

Кратко это записывается в виде

$$\alpha(x) = o(\beta(x))\ (\textit{альфа-о малое от бета}).$$

3. Две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta\,(x)$ называются ***эквивалентными***, если предел их отношения равен единице:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta\,(x)} = 1. \tag{1.5}$$

Эквивалентность двух бесконечно малых можно записать с помощью знака эквивалентности $\sim$

$$\alpha(x) \sim \beta\,(x).$$

4. Две бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta\,(x)$ называются ***несравнимыми***, если предел их отношения не существует.

В предельных соотношениях (1.2–1.5) точка x_0 может быть не только числом, но и бесконечностью со знаком плюс или минус (может быть несобственным числом).

<u>Замечание.</u> Символы о – (*о малое*) и О – (*о большое*) называются символами Ландау (Landau 1877–1978).

<u>Свойства бесконечно малых</u>

Пусть $\alpha(x) - \text{б. м. и } \{\alpha_i(x)\}_{i=1}^{n} - \text{б. м. при } x \to x_0$.

1. Конечная сумма бесконечно малых – бесконечно малая эквивалентная слагаемому низшего порядка. Такое слагаемое называется ***главной частью*** суммы.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = \alpha(x), \text{где } \alpha(x) \sim \alpha_j(x) - \text{главная часть суммы.}$$

2. Произведение бесконечно малых – бесконечно малая более высокого порядка, чем множители:

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = \alpha(x), \text{где } \alpha(x) = o\big(\alpha_i(x)\big) \text{ при } \forall\, i = 1, \dots, n.$$

3. Произведение бесконечно малой на ограниченную функцию $f(x)$ – бесконечно малая.

$$\alpha(x) \cdot f(x) = \gamma(x) - \text{ б. м.}$$

Замечание. Напомним, что функция $f(x)$ называется ограниченной, если существует такое число M, что для любого числа x из области определения ($\forall\, x \in X$) выполняется (справедливо) неравенство

$$|f(x)\,| \leq M.$$

4. Разность двух эквивалентных бесконечно малых – бесконечно малая ***более высокого порядка малости***, чем каждая из них:

$$\alpha(x) \sim \beta\,(x) \Rightarrow \alpha(x)\; - \;\beta\,(x) = o\big(\alpha(x)\big) = o\big(\beta(x)\big).$$

5. Если число A – предел функции $f(x)$ в точке x_0, то разность функции и её предела – бесконечно малая $\alpha(x)$ при стремлении x к x_0 $(x \to x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Rightarrow f(x) - \mathrm{A} = \alpha(x) \;\Rightarrow f(x) = \mathrm{A} + \alpha(x)\;(x \to x_0).$$

6. Предел не изменится, если под знаком предела в операциях умножения и деления заменить одну бесконечно малую на эквивалентную:

$$\alpha(x) \sim \alpha_1\,(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta\,(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha_1\,(x)}{\beta\,(x)};$$

$$\alpha(x) \sim \alpha_1(x) \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \alpha(x)\cdot\beta(x) = \lim_{x\to x_0} \alpha_1(x)\cdot\beta(x);$$

$$\begin{cases} \alpha(x) \sim \alpha_1(x) \\ \beta(x) \sim \beta_1(x) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)};$$

$$\begin{cases} \alpha(x) \sim \alpha_1(x) \\ \beta(x) \sim \beta_1(x) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to x_0} \alpha(x)\cdot\beta(x) = \lim_{x\to x_0} \alpha_1(x)\cdot\beta_1(x).$$

<u>Список основных эквивалентных бесконечно малых</u>

Предположим, что функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, тогда справедливы следующие соотношения:

1. $\sin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
2. $\tan\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
3. $1-\cos\alpha(x) \sim \frac{1}{2}\alpha^2(x)$;
4. $\arcsin\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
5. $\arctan\alpha(x) \sim \alpha(x)$;
6. $\ln\big(1+\alpha(x)\big) \sim \alpha(x)$, $\log_a\big(1+\alpha(x)\big) \sim \dfrac{\alpha(x)}{\ln a}$;
7. $e^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)$, $a^{\alpha(x)}-1 \sim \alpha(x)\cdot\ln\alpha$;
8. $\big(1+\alpha(x)\big)^{\mu}-1 \sim \mu\cdot\alpha(x), \forall\mu\in R$.

Рассмотрим примеры вычисления пределов с помощью понятия эквивалентности бесконечно малых. Такие примеры связаны с неопределённостью $\frac{0}{0}$.

<u>Пример 1.</u>

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\ln(1+4x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{4x} = \frac{5}{4}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^2}{\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{4}} = 4.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}.$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos \mathrm{x}}{\sqrt[4]{1+x^2}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln\big(1+(\cos x-1)\big)}{\frac{1}{4}x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\frac{1}{4}x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{2}x^2}{\frac{1}{4}x^2} = -2.$$

Упражнения

Вычислите пределы функций, переходя к эквивалентным бесконечно малым.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)^2}{\mathrm{tg}^3 x - \sin^3 x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 15x}{\mathrm{tg}\, 10x}$.
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin^2 2x}{x^3 - x^2}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 3x}{\ln(1+9x^2)}$.
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^{6x}-1)^2}{x\cdot \sin 3x}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arctg}\sqrt[3]{x^4}}{x\sqrt{x}}$.

1.6. Бесконечно большие

Реальный диалог на экзамене:
– Что будет, если бесконечно большую умножить на бесконечно малую?
– Будет бесконечно средняя!
Из книги «Математики тоже шутят»

Определение. Функцию $f(x)$ называют бесконечно большой (б.б.) при стремлении x к точке x_0, если справедливо (выполняется) равенство

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \ (+\infty \text{ или } -\infty). \qquad (1.6)$$

Если функция $f(x) -$ бесконечно большая при $x \to x_0$, то функция $\alpha(x) = \frac{1}{f(x)} -$ бесконечно малая при $x \to x_0$.

Классификация бесконечно больших
(сравнение бесконечно больших)

1. Две бесконечно большие $f(x)$ и $g(x)$ называются бесконечно большими одного порядка (однопорядковыми), если предел их отношения существует и не равен нулю или бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = A \ (A \neq 0 \text{ и } A \neq \infty). \qquad (1.7)$$

Для обозначения однопорядковости двух бесконечно больших используют запись

$$f(x) = O\big(g(x)\big) \ (\textit{эф-о большое от же}).$$

2. Бесконечно большая функция $f(x)$ называется бесконечно ***большой более высокого порядка***, чем $g(x)$ при $x \to x_0$, если предел их отношения равен бесконечности:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty. \qquad (1.8)$$

3. Две бесконечно большие $f(x)$ и $g(x)$ называются эквивалентными, если предел их отношения равен единице (равен одному):

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1. \tag{1.9}$$

Эквивалентность двух бесконечно больших можно записать с помощью знака эквивалентности:

$$f(x) \sim g(x).$$

4. Предел не изменится, если под знаком предела в операциях умножения и деления заменить одну бесконечно большую на эквивалентную:

$$f(x) \sim f_1(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g(x)};$$

$$f(x) \sim f_1(x) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot g(x);$$

$$\begin{cases} f(x) \sim f_1(x) \\ g(x) \sim g_1(x) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)};$$

$$\begin{cases} f(x) \sim f_1(x) \\ g(x) \sim g_1(x) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot g_1(x).$$

В предельных соотношениях (1.6–1.9) точка x_0 может быть не только числом, но и бесконечностью со знаком плюс или минус (может быть несобственным числом).

Пример 1. Рассмотрим функцию, равную алгебраическому многочлену степени m:

$$y(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_1 x^{m-2} + \cdots + a_m.$$

Докажем, что эта функция эквивалентна старшему слагаемому $(a_0 x^m)$ этого многочлена при стремлении точки x_0 к бесконечности.

Доказательство:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{a_0x^m}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\cdot$$

Раскроем эту неопределённость:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a_0x^m}{a_0x^m}+\frac{a_1x^{m-1}}{a_0x^m}+\frac{a_2x^{m-2}}{a_0x^m}+\cdots+\frac{a_m}{a_0x^m}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a_1}{a_0x^1}+\frac{a_2}{a_0x^2}+\cdots+\frac{a_m}{a_0x^m}\right)\cdot$$

Очевидно, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_1}{a_0x^1}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_2}{a_0x^2}=\cdots=\lim_{x\to\infty}\frac{a_m}{a_0x^m}=0.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a_1}{a_0x^1}+\frac{a_2}{a_0x^2}+\cdots+\frac{a_m}{a_0x^m}\right)=\lim_{x\to\infty}(1+0)=1.$$

Мы доказали, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{a_0x^m}=1.$$

По определению это означает, что

$$a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m\sim a_0x^m \text{ при } x\to\infty.$$

Решим пример с помощью эквивалентности бесконечно больших.

Пример 2. Найти предел дробно-рациональной функции

$$y(x)=\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\cdots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\cdots+b_n} \text{ при } x\to\infty.$$

Решение: В этом примере возникает неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для раскрытия неопределённости используем эквивалентные бесконечно большие.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\dots+b_n}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{a_0}{b_0}\frac{x^m}{x^n}=\frac{a_0}{b_0}\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{x^n}.$$

Рассмотрим отдельно последний предел

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^m}{x^n}=\begin{cases}\infty, & \text{если } m>n,\\ 1, & \text{если } m=n,\\ 0, & \text{если } m<n.\end{cases}$$

Мы приходим к следующему результату (ответу)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_0x^m+a_1x^{m-1}+a_2x^{m-2}+\dots+a_m}{b_0x^n+b_1x^{n-1}+b_2x^{n-2}+\dots+b_n}=\begin{cases}\infty, & \text{если } m>n,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } m=n,\\ 0, & \text{если } m<n.\end{cases}$$

Замечание. Знак бесконечности в ответе зависит от знаков коэффициентов a_0 и b_0 и от знака бесконечности, к которой стремится переменная x.

Упражнения

Найдите пределы дробно-рациональных функций.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{13x^3+2x^2+x^1}{11x^2-x^3+x^1}$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{13x^3+x^2+x^1}{11x^2-x^5+x^3}$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^5+x^4-13}{40x^7-x^6+25}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{7x^2-x^1+x^0}{15x^3+x^2}$.
5. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{9x^7+x^5}{12x^5+x^2}$.
6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{68x^9+x^7-13}{30x^6-x^4+x^3+x^2}$.

1.7. Замечательные пределы

Один математик говорит другому:
– Назови какое-нибудь число.
– Ну, пусть будет π *в степени е.*
– Ха-ха-ха! А у меня е в степени π!
У меня больше, я выиграл!
Из книги «Математики тоже шутят».

<u>Первый замечательный предел</u>

Предположим, что угол x измеряется в радианах и изменяется в интервале $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Равенство

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1.10}$$

называется ***первым замечательным пределом***.

Докажем справедливость этого равенства. Подстановка предельной точки $x_0 = 0$ в функцию $\frac{\sin x}{x}$ приводит к неопределённости $\frac{0}{0}$. Раскроем эту неопределённость.

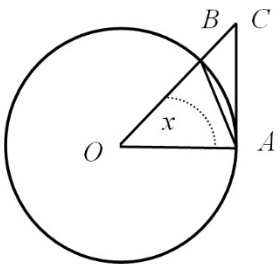

Рис. 1.4

На рис. 1.4 изображён круг единичного радиуса ($R = 1$). Введём следующие обозначения:
S_1 − площадь треугольника BOA с центральным углом BOA;
S_2 − площадь прямоугольного треугольника CAO;
S − площадь сектора BOA;
x − угол BOA.

Очевидно, что для площадей справедливо двойное неравенство

$$S_1 < S < S_2. \tag{1.11}$$

Из геометрии известны формулы, по которым вычисляются эти площади:

$$S_1 = \frac{1}{2}\ R^2 \sin x;\ S = \frac{1}{2}\ R^2 x;\ S_2 = \frac{1}{2}\ R^2 \tan x. \tag{1.12}$$

Подставим в неравенство (1.11) соответствующие правые части формул (1.12):

$$\frac{1}{2}\ R^2 \sin x\ < \frac{1}{2}\ R^2 x < \frac{1}{2}\ R^2 \tan x.$$

Сокращаем все части неравенства на $\frac{1}{2}\ R^2$ и приходим к неравенству

$$\sin x\ <\ x\ < \tan x.$$

Делим неравенство на $\sin x$ ($\sin x > 0$):

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}\ .$$

Последнее неравенство будет проще, если перейти к обратным величинам:

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Из определения косинуса угла следует, что

$$\lim_{x\to 0} cos\, x = (cos\, 0) = 1.$$

Из теоремы о сжатой функции (свойство 8) следует, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Легко доказать первый замечательный предел для случая $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$.

Второй замечательный предел

Степенно-показательная функция имеет вид

$$y(x) = u(x)^{v(x)} \ (u(x) > 0).$$

Предположим, что существуют два предела

$$\lim_{x\to x_0} v(x) = A \ (A > 0); \quad \lim_{x\to x_0} u(x) = B. \qquad (1.13)$$

В этом случае

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} u(x)^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)} = A^B. \qquad (1.14)$$

Если предел основания равен единице ($A = 1$), а предел показателя равен бесконечности ($B = \infty$), тогда возникает неопределённость вида 1^∞.

В математике интересен предел степенно-показательной функции

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}.$$

Подстановка предельной точки $x_0 = 0$ в функцию $(1+x)^{\frac{1}{x}}$ приводит к неопределённости 1^∞:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \left((1+0)^{\frac{1}{0}} = 1^\infty \right).$$

Эту неопределённость можно раскрыть. Доказано, что этот предел равен знаменитому числу e:

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e. \qquad (1.15)$$

Предел (6) называется ***вторым замечательным пределом***. Этот предел можно записать в другой форме:

$$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e. \qquad (1.16)$$

Если аргумент функции принадлежит множеству натуральных чисел $x \in N$, то второй замечательный предел записывают в виде

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e. \tag{1.17}$$

С помощью пределов (1.15–1.17) можно найти пределы многих степенно-показательных функций.

Обобщение первого и второго замечательных пределов

Допустим, что функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to x_0$, тогда справедливы два предела более общего вида:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1;$ 2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e.$

Обобщение первого замечательного предела мы уже использовали, когда находили пределы с помощью эквивалентных бесконечно малых.

Разберём примеры вычисления пределов. В этих примерах ***используется*** второй замечательный предел и его обобщение.

Пример 1.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x-2+3}{x-2}\right)^{2x-1} =$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{(x-2)3}{3(x-2)}(2x-1)} = \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right)^{\frac{3(2x-1)}{x-2}}.$$

Вычислим отдельно два предела:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}} = e \text{ (обобщение второго замечательного предела).}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3(2x-1)}{x-2} = \lim_{x\to\infty}\frac{6x}{x} = 6 \text{ (используем эквивалентность).}$$

Окончательно получаем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = \left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x-2}\right)^{\frac{x-2}{3}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2x-1)}{x-2}} = e^6.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1} = e^6.$$

<u>Пример 2.</u>

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1+2}{x^2-1}\right)^{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{(x^2-1)}{2}\frac{2x^2}{(x^2-1)}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x^2-1}\right)^{\frac{(x^2-1)}{2}}\right)^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(x^2-1)}} = e^2.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2} = e^2.$$

<u>Пример 3.</u>

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+kx)^{\frac{k}{kx}} = \ln\lim_{x\to 0}\left((1+kx)^{\frac{1}{kx}}\right)^k = \ln e^k = k.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+kx)}{x} = k.$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x-1+2}{x-1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}\cdot\frac{2}{x-1}\cdot x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{2}}\right)^{\frac{2x^2}{x-1}}=e^{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^2}{x-1}}.$$

Вычислим предел показателя в двух случаях.

$$1.\ \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x}=+\infty\,;$$

$$2.\ \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x}=-\infty.$$

Пример имеет два ответа.

Ответ:

$$1.\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2}=(e^{+\infty})=+\infty;$$

$$2.\ \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x^2}=(e^{-\infty})=0.$$

Упражнения

Найдите пределы следующих функций.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{7x}$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^{x}$.
3. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{3x}}$.
4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{mx}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{x}$.

Глава 2
НЕПРЕРЫВНОСТЬ

2.1. Односторонние пределы

Возьмём $\varepsilon > 0$. *Нет, не будем брать* $\varepsilon > 0$. *Зачем? Ведь жизнь не только из* $\varepsilon > 0$ *состоит.*

Из книги «Математики тоже шутят»

Предположим, что функция $f(x)$ задана на интервале $(a; x_0)$.

Определение 1. Число A называют ***левосторонним пределом функции $f(x)$ в точке*** x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всех значений x из интервала $(x_0 - \delta; x_0)$ верно (справедливо) неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Краткая запись имеет вид:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A.$$

Предположим, что функция $f(x)$ задана на интервале $(x_0; b)$.

Определение 2. Число A называют ***правосторонним пределом функции $f(x)$ в точке*** x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для всех значений x из интервала $(x_0; x_0 + \delta)$ верно (справедливо) неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Краткая запись имеет вид:

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Правосторонний и левосторонний пределы называются ***односторонними пределами.***

Примеры вычисления односторонних пределов

Пример 1.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2x+1}{x-2}=\left(\frac{2(2-0)+1}{2-0-2}=\frac{5}{-0}\right)=-\infty.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{2x+1}{x-2}=\left(\frac{2(2+0)+1}{2+0-2}=\frac{5}{+0}\right)=+\infty.$$

Пример 3.

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{1}{(x-2)(x-3)}=$$

$$=\left(\frac{1}{(2-0-2)(2-0-3)}=\frac{1}{-0\cdot(-1)}=\frac{1}{+0}\right)=+\infty.$$

Пример 4.

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{(x-2)(x-3)}=$$

$$=\left(\frac{1}{(3-0-2)(3-0-3)}=\frac{1}{1\cdot(-0)}=\frac{1}{-0}\right)=-\infty.$$

Пример 5. Найти односторонние пределы функции в точке $x_0=1$,

$$\text{если } f(x)=\begin{cases}\sqrt{4-x^2} \text{ при } x<1,\\ x-2 \text{ при } x\geq 1.\end{cases}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 1-0}\sqrt{4-x^2}=\left(\sqrt{4-1^2}=\sqrt{3}\right)=\sqrt{3},$$

$$\lim_{x\to 1+0}x-2=(1-2=-1)=-1.$$

Упражнения

Найдите односторонние пределы функций в заданных точках.

1. В точке $x_0 = \pi$, если $f(x) = \begin{cases} \sin x \text{ при } x < \pi, \\ x \text{ при } x \geq \pi. \end{cases}$

2. В точке $x_0 = -2$, если $f(x) = \begin{cases} 2 \text{ при } x < -2, \\ \sqrt{4 - x^2} \text{ при } x \geq -2. \end{cases}$

3. В точке $x_0 = 2$, если $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 \text{ при } x < 2, \\ 3x \text{ при } x \geq 2. \end{cases}$

4. В точке $x_0 = 1$, если $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4 - x^2} \text{ при } x < 1, \\ x - 2 \text{ при } x \geq 1. \end{cases}$

2.2. Непрерывность в точке

Существует несколько определений непрерывности функции в точке. Представим три из них. Предположим, что функция $f(x)$ задана в области $X = (a; b)$.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке $x_0 \in X$, если существуют конечные, одинаковые левосторонний и правосторонний пределы, равные значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Определение 2. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Для третьего определения непрерывности в точке нам нужно ввести понятие «приращение».

Приращение – это разность двух значений переменной. Если переменной является аргумент x, говорят о ***приращении аргумента*** и обозначают его Δx. Если переменной является функция $f(x)$, говорят о ***приращении функции*** и обозначают его Δf.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\big)=\lim_{\Delta x \to 0}\Delta f=0.$$

Эти определения непрерывности равносильны (эквивалентны). В работе с непрерывными функциями используют то определение, которое более удобно для данной задачи. При использовании любого определения остальные два становятся свойствами непрерывной функции (табл. 2.1).

Таблица 2.1

Номер определения	**Свойства**
$1 \Rightarrow$	определение 2 и определение 3
$2 \Rightarrow$	определение 1 и определение 3
$3 \Rightarrow$	определение 1 и определение 2

Устойчивость знака непрерывной функции в точке

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и $f(x_0) \neq 0$, то существует такая окрестность точки x_0 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$, в которой функция $f(x)$ не равна нулю, и её знак совпадает со знаком числа $f(x_0)$.

Действия (операции) с непрерывными функциями в точке

Возьмём две непрерывные функции $f(x)$ и $g(x)$ в точке x_0. Для таких функций справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Сумма $f(x)+\ g(x)$, разность $f(x)-\ g(x)$, произведение $f(x)\cdot\ g(x)$ и отношение (частное) $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$ двух непрерывных функций в точке x_0 непрерывны в той же точке x_0.

Замечание. Сумма функций $f(x)+\ g(x)$ и разность функций $f(x)-\ g(x)$ в математике называются алгебраической суммой. Для алгебраической суммы и произведения теорема 1 верна для любого конечного числа функций.

Теорема 2. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $u = g(y)$ непрерывна в точке y_0. Тогда композиция этих функций $u = g\big(f(x)\big)$ будет непрерывна в точке x_0.

Напомним, что композиция (суперпозиция) функций обычно называется сложной функцией.

Теорема 3. Пусть существует предел функции $u = g(x)$ в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = u_0,$$

а другая функция $y = f(u)$ непрерывна в точке u_0. Тогда сложная функция $y = f\big(g(x)\big)$ имеет предел в точке x_0, и этот предел равен $f(u_0)$:

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(u_0).$$

Односторонняя непрерывность

Если есть левосторонний предел функции $f(x)$ в точке x_0 и он равен значению функции в этой точке, то функция называется ***непрерывной слева***:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0).$$

Если есть правосторонний предел функции $f(x)$ в точке x_0 и он равен значению функции в этой точке, то функция называется ***непрерывной справа***:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0).$$

Если функция непрерывна слева и справа в точке x_0, то функция непрерывна в этой точке x_0.

Упражнения

Исследуйте функции на непрерывность в заданных точках.

1. $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2-1} \text{ при } x\neq\pm1,\\ -\dfrac{1}{2} \text{ при } x=\pm1.\end{cases}$ в точках $x_0=1$ и $x_0=-1$.

2. $f(x)=\dfrac{2x^2-x-1}{x^2+x-2}$ в точке $x_0=2$.

3. $f(x)=\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$ в точке $x_0=1$.

2.3. Непрерывность в области

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной на интервале*** $(a;b)$, если она непрерывна в каждой точке этого интервала (рис. 2.1).

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a;b\,]$, если она непрерывна в интервале $(a;b)$, непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b:

$$\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a);\ \lim_{x\to b-0} f(x)\ =f(b).$$

Множество функций, непрерывных на отрезке $[a;b\,]$, обозначается символом $C_{[a;b]}$.

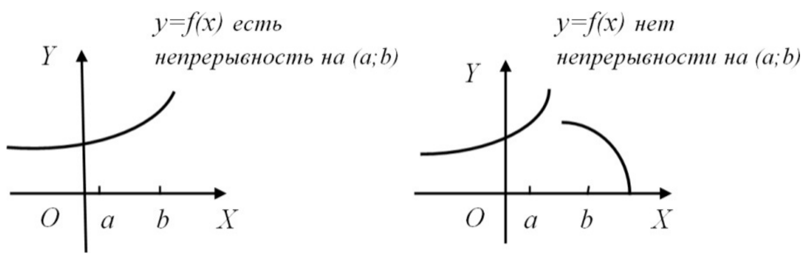

Рис. 2.1

Основные свойства функций, непрерывных на отрезке

Для непрерывных на отрезке функций доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 (первая теорема Вейерштрасса (Weierstrass)).

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b\,]$, то она ограничена на этом отрезке. Это значит, что существует такое число $K > 0$, что для всех $x \in [a; b]$ верно неравенство $|f(x)| \leq K$.

Теорема 2 (вторая теорема Вейерштрасса).

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она достигает на этом отрезке своего ***наименьшего*** m и ***наибольшего*** M значений. Это значит, что на отрезке $[a; b]$ всегда найдётся ***хотя бы одна*** точка x_1, в которой функция принимает наименьшее значение $f(x_1) = m$, и всегда найдётся хотя бы одна точка $x_2 \in [a; b]$, в которой функция принимает наибольшее значение $f(x_2) = M$.

Теорема 3 (теорема Коши (Cauchy)) (о промежуточных значениях непрерывной функции).

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах отрезка принимает разные значения:

$$f(a) = A, f(b) = B, A \neq B.$$

В этом случае функция $f(x)$ принимает все промежуточные значения между числами A и B. Это значит, что для любого числа C, которое находится между числами A и B, найдётся такое значение аргумента $x_1 \in [a; b]$, для которого будет справедливо равенство

$$f(x_1) = C.$$

Теорема 4 (Больцано (Bolzano) – Коши) (о нуле функции).

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и на концах этого отрезка значения функции имеют разные знаки:

$$f(a)f(b) < 0,$$

то в интервале $(a; b)$ всегда найдётся хотя бы одна точка $c \in (a; b)$, в которой функция $f(x)$ обращается в ноль: $f(x) = 0$.

Теорема 5.

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b\,]$, $(x \in [a; b])$ и монотонна на этом отрезке, то функция $x = g(y)$, обратная к функции $f(x)$, также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке $[c; d\,]$, $(y \in [c; d\,])$.

Теорема 6.

Все элементарные функции непрерывны там, где они определены.

<u>Замечание.</u> Напомним, что ***элементарной функцией*** называется такая функция, которая задана одной формулой с конечным числом арифметических действий и суперпозиций основных (простейших) элементарных функций.

<u>Равномерная непрерывность</u>

<u>Определение 3.</u> Функция $f(x)$ называется ***равномерно непрерывной*** в интервале $(a; b)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любых точек x_1 и x_2 из интервала $(a; b)$ из условия

$$|x_1 - x_2| < \delta$$

следует неравенство

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

Теорема 7 (теорема Кантора (Cantor)).

Если функция непрерывна на отрезке $[a; b\,]$ $(f(x) \in C_{[a;b]})$, то она равномерно непрерывна на этом отрезке.

<u>Пример.</u> Задана функция

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 \text{ при } x < 1, \\ 3 - ax^2 \text{ при } x \geq 1. \end{cases}$$

При каком значении параметра a заданная функция будет непрерывной?

Решение. На множестве действительных чисел $R \setminus \{1\}$ наша функция непрерывна, так как каждая из её ветвей – элементарная функция. Запишем условие непрерывности функции в точке $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1-0} (x + 1) = \lim_{x \to 1+0} (3 - ax^2) = f(1).$$

Вычислим левосторонний предел и с его помощью найдём неизвестный параметр:

$$\lim_{x\to 1-0}(x+1)=2 \Rightarrow f(1)=3-a1^2=2 \Rightarrow a=1.$$

Ответ: заданная функция будет непрерывной, если параметр a равен единице ($a=1$).

Упражнения

Исследуйте функции на непрерывность в заданных областях.

1. $y=\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$ на отрезке $[2;5]$.

2. $y=\dfrac{1}{x^2-26x+25}$ на отрезке $[6;10]$.

3. Дана функция

$$f(x)=\begin{cases} -2\sin x \text{ при } x\le -\dfrac{\pi}{2}, \\ a\sin x+b \text{ при } -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}, \\ \cos x \text{ при } x\ge \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдите такие числа a и b, при которых заданная функция будет непрерывной.

2.4. Точки разрыва и их классификация

Вернёмся к первому определению непрерывности функции в точке:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=\lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0). \qquad (2.1)$$

Из этого определения следует, что функция будет непрерывной в точке только в том случае, когда левосторонний предел равен правостороннему пределу и равен значению функции в этой точке.

Если хотя бы одно из этих равенств не выполняется, то функция не является непрерывной.

Определение 1. Если функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, говорят***, что эта функция имеет разрыв в точке*** $\boldsymbol{x_0}$ (***функция терпит разрыв в точке*** $\boldsymbol{x_0}$). Точку x_0 называют ***точкой разрыва*** функции $f(x)$.

Все точки разрыва функций делятся на два рода. Классификация зависит от вида нарушения условия непрерывности (2.1).

Разрывы первого рода

Определение 2. Точка x_0 называется ***точкой разрыва первого рода***, если в этой точке существуют два односторонних конечных предела функции:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A\,, \lim_{x\to x_0+0} f(x) = B \ (A \text{ и } B \text{ числа}).$$

Для точек разрыва первого рода могут быть два случая.

Первый случай. Если $A \neq B$, точка x_0 называется точкой ***конечного разрыва***. Величина $|A - B|$ называется ***конечным скачком*** функции в точке разрыва.

Замечание. Значение функции может совпадать с одним из односторонних пределов, может и не совпадать:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} f(x_0) = A, \\ f(x_0) = B, \end{array}\right. \\ A \neq B; \end{cases} \\ \\ \begin{cases} f(x_0) = C, \\ C \neq A, \\ C \neq B. \end{cases} \end{array}\right.$$

Примеры конечных скачков

Пример 1. Функция вида

$$1(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x < 0\,, \\ 1 \text{ при } x > 0 \end{cases}$$

называется ***единичной функцией***, или ***функцией единичного скачка,*** или ***функцией Хевисайда.*** Она имеет разрыв - скачок первого рода (рис. 2.2)

График функции Хевисайда имеет вид

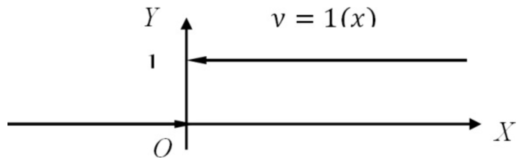

Рис. 2.2

<u>Пример 2.</u>

Исследуем функцию

$$y = \arctan\frac{x}{x-4} \text{ на непрерывность в точке } x = 4.$$

Для этого вычислим односторонние пределы.

$$\lim_{x\to 4-0} \arctan\frac{x}{x-4} =$$

$$= \left(\arctan\frac{4}{4-0-4} = \arctan\frac{4}{-0} = \arctan(-\infty)\right) = -\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to 4+0} \arctan\frac{x}{x-4} =$$

$$= \left(\arctan\frac{4}{4+0-4} = \arctan\frac{4}{+0} = \arctan(+\infty)\right) = +\frac{\pi}{2}\cdot$$

Односторонние пределы существуют, но они различны. Точка $x = 4$ – точка разрыва первого рода, точка скачка. Скачок функции (рис. 2.3) в этой точке равен

$$+\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

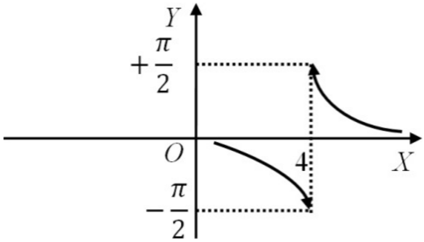

Рис. 2.3

<u>Второй случай.</u> Пусть односторонние пределы – равные числа: $A = B$, а в точке x_0 функция либо не определена, но существует предел $\lim_{x\to x_0} f(x)$, либо функция определена, но её значение в точке x_0 не равно односторонним пределам:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \\ \nexists\, f(x_0); \end{cases} \\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A, \\ \exists\, f(x_0) \neq A. \end{cases} \end{array}\right.$$

Такие разрывы первого рода называются ***устранимыми разрывами*** (рис. 2.4).

<u>Графические примеры устранимых разрывов</u>

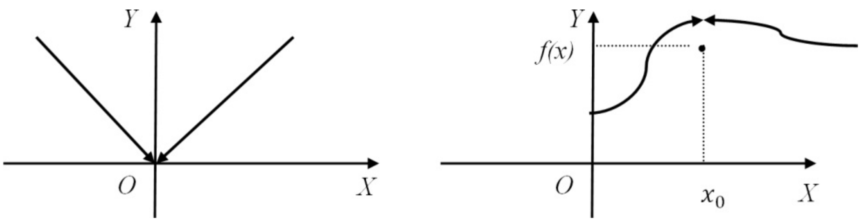

Рис. 2.4

Замечание. Если оба односторонних предела существуют и равны, а предел

$$\lim_{x \to x_0} f(x)$$

не существует, точка x_0 называется **точкой неустранимого разрыва.**

Разрывы второго рода

Определение 3. Если в точке разрыва не существует или равен бесконечности хотя бы один из односторонних пределов, такую точку называют ***точкой разрыва второго рода***.

Примеры разрывов второго рода

а) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty, \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0); \end{cases}$ б) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty, \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0); \end{cases}$

в) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0), \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty; \end{cases}$ г) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0), \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty; \end{cases}$

д) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty, \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty; \end{cases}$ е) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty, \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty; \end{cases}$

ж) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty, \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty; \end{cases}$ з) $\begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty, \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty. \end{cases}$

Графический вид разрывов второго рода

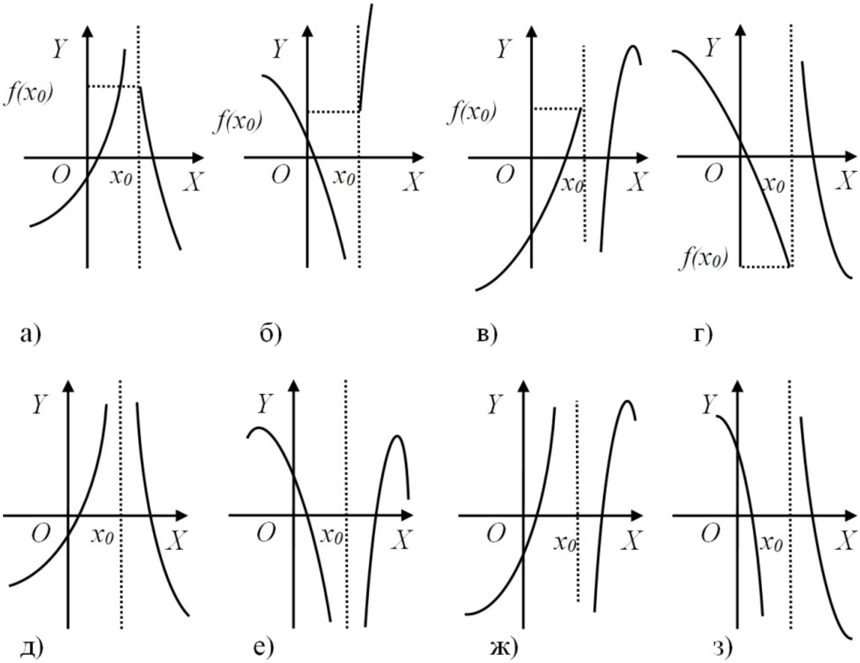

Рис. 2.5

Функция вида

$$\mathcal{D}(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x- \text{ рациональное число,}\\ 0, \text{ если } x-\text{иррациональное число,}\end{cases}$$

где x – любое число из множества действительных чисел $(\forall x \in R)$, называется функцией Дирихле. Доказано, что эта функция не является непрерывной в любой точке области определения, то есть у этой функции есть разрывы в любой точке.

Упражнения

Найдите точки разрыва функций и определите их род.

1. $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$.

2. $y = \dfrac{|x+1|}{x+1}$.

3. $y = \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

4. $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

5. $y = \dfrac{\sin x}{x}$.

6. $y = \dfrac{\cos x}{x}$.

Глава 3
ПРОИЗВОДНАЯ И ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Легко убедиться, что эта функция бесконечно дифференцируема. Сейчас мы продифференцируем один раз, а дома вы закончите.

Из книги «Математики тоже шутят».

3.1. Определение производной

Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой точке x_0. ***Зададим приращение*** Δx переменной в этой точке. Обозначим за Δy ***полученное приращение*** функции.

Замечание. Функция $f(x)$ предполагается непрерывной, поэтому при стремлении Δx к нулю, приращение функции тоже стремится к нулю.

Определение 1. Производная функции $f(x)$ в точке x_0 – это предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0). \qquad (3.1)$$

Из определения следует, что если предел (3.1) существует, то у функции есть производная в точке x_0. Если предела нет, то и производной нет. Вычисление производной функции называется ***дифференцированием функции*** (слово *differentia* означает *«разность»)*. Если у функции в каждой точке некоторой области X есть производная, такая функция называется ***дифференцируемой*** в этой области.

Производная функции называется ***первой производной***, или ***производной первого порядка***. Если ничего не говорится о порядке производной, то она (***по умолчанию***) первого порядка.

Если точка x_0 − фиксированное число, то производная функции – число. Если x_0 – переменная, то производная функции тоже будет переменной (функцией), поэтому можно говорить о производной от производной: $(f'(x))'$. Эту производную называют ***второй производной*** функции $f(x)$, или ***производной второго порядка*** и обозначают $f''(x)$:

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Функция $f(x)$ в этом случае называется ***дважды дифференцируемой***.

Определение 2. Непрерывная функция $y = f(x)$ называется непрерывно дифференцируемой, если её первая производная – непрерывная функция. Непрерывно дифференцируемые функции часто называют гладкими функциями (***гладкая функция*** $\Rightarrow$ ***непрерывно дифференцируемая функция***).

Производные простейших элементарных функций

Пример 1. Найдём производную функции $y = sin\, x$. По определению производной

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Подставим в это предельное соотношение нашу функцию и с помощью формулы

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

перейдём от разности к произведению:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos(2x + \Delta x) \cdot \sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}. \quad (3.2)$$

В равенстве (3.2) $\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$ – бесконечно малая, эквивалентная $\frac{\Delta x}{2}$ $\left(\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right) \sim \frac{\Delta x}{2}\right)$. Из теории пределов мы знаем, что предел не изменится, если в операциях умножения и деления заменить одну бесконечно малую на эквивалентную. Поэтому мы заменяем $\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)$ на $\frac{\Delta x}{2}$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x = \sin' x.$$

Ответ: если $y = \sin x$, то $y' = \cos x$.

Пример 2. Найдём производную функции $y = e^x$. По определению производной

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}.$$

Бесконечно малая величина $e^{\Delta x} - 1$ эквивалентна Δx. Заменяем под знаком предела одну бесконечно малую на эквивалентную:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^x \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} e^x = e^x \Rightarrow (e^x)' = e^x.$$

Ответ: если $y = e^x$, то $y' = e^x$.

Пример 3. Выведем производную функции $y = \ln x$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln \frac{(x + \Delta x)}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(1 + \frac{\Delta x}{x})}{\Delta x} =$$

$$= \left(\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \sim \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{x \Delta x} = \frac{1}{x} \Rightarrow (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Ответ: если $y = \ln x$, то $y' = \frac{1}{x}$.

Пример 4. Найдём производную функции $y = x^n$, где $n \in N$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^n + n\Delta x \cdot x^{n-1} + \cdots - x^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n\Delta x \cdot x^{n-1} + O((\Delta x)^2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (nx^{n-1} + O(\Delta x)) \Rightarrow (x^n)' =$$

$$= nx^{n-1}.$$

Ответ: если $y = x^n$, то $y' = nx^{n-1}$.

Ниже мы приводим таблицу производных простейших элементарных функций (табл. 3.1). Эти производные выводятся или на основе определения 1 (примеры 1–4), или с помощью дифференцирования обратных функций (раздел 3.4).

Таблица 3.1

N	$f(x)$	$f'(x)$
1	x^R	Rx^{R-1}
2	a^x	$a^x \ln a$
2'	e^x	e^x
3	$\log_a x$	$1/(x \cdot \ln a)$
3'	$\ln x$	$1/x$
4	$\sin x$	$\cos x$
5	$\cos x$	$-\sin x$
6	$\tan x$ $\mathrm{tg}\, x$	$1/\cos^2 x$
7	$\mathrm{ctan}\, x$ $\mathrm{ctg}\, x$	$-1/\sin^2 x$
8	$\arcsin x$	$1/\sqrt{1-x^2}$
9	$\arccos x$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
10	$\arctan x$ $\mathrm{arctg}\, x$	$1/(1+x^2)$
11	$\mathrm{arcctan}\, x$ $\mathrm{arcctg}\, x$	$-1/(1+x^2)$

3.2. Свойства производных

Далее мы будем рассматривать только дифференцируемые функции. На основе определения производной легко доказываются следующие свойства.

1. Свойство аддитивности

Производная конечной суммы функций равна сумме производных этих функций:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\,(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i'\,(x). \tag{3.3}$$

2. Производная константы равна нулю

$$const' = 0. \tag{3.4}$$

3. Свойство однородности

Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$\big(const\ f(x)\big)' = const\ f'(x). \tag{3.5}$$

4. Дифференцирование произведения

Производная произведения функций выражается формулой

$$\big(f(x)\ g(x)\big)' = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x). \tag{3.6}$$

Докажем справедливость этой формулы.

$$\big(f(x)\ g(x)\big)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\ g(x+\Delta x) - f(x)\ g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)\ g(x+\Delta x) - f(x+\Delta x)\ g(x) + f(x+\Delta x)\ g(x) - f(x)\ g(x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(f(x+\Delta x)\ \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x)\ \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} f(x+\Delta x) \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0} g(x) \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

$$= f(x)\ g'(x) + f'(x)\ g(x) = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x).$$

Приравняем начало и конец полученной цепочки равенств:

$$\big(f(x)\, g(x)\big)' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x).$$

В результате доказана справедливость формулы (3.6).

<u>5. Дифференцирование отношения функций</u>

Производная отношения функций выражается формулой

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}. \tag{3.7}$$

Докажем справедливость этой формулы.

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)\, g(x)\ -\ f(x)\, g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\, g(x)\, \Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x+\Delta x)\, g(x) - f(x)\, g(x)\big) - \big(f(x)\, g(x+\Delta x) - f(x)\, g(x)\big)}{g(x+\Delta x)\, g(x)\, \Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\big(f(x+\Delta x) - f(x)\big)\, g(x) - f(x)\, \big(g(x+\Delta x) - g(x)\big)}{g(x+\Delta x)\, g(x)\, \Delta x}.$$

Перейдём к разности пределов:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)\, g(x)}\, g(x) - f(x) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{g(x+\Delta x)\, g(x)}.$$

Используя определение производной, приходим к формуле (3.7):

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}.$$

Описанные выше свойства производных часто называют «***действия с производными***» или «***правила дифференцирования***».

Объединение свойств аддитивности и однородности называют свойством ***линейности***. ***Операция дифференцирования – линейная операция***:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i\,f_i\,(x)\right)' = \sum_{i=1}^{n} c_i\,f_i'\,(x).$$

<u>Замечание.</u> Выражение

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\,f_i\,(x)$$

называют в математике ***линейной комбинацией функций***.

3.3. Дифференцирование сложных функций

Сложными функциями называют ***композицию***, или ***суперпозицию*** нескольких функций. Например: $y = \sin\sqrt{x}\,;\, y = \cos(5\ln 7^{x+9})$.

Предположим, что у нас есть функция вида

$$u(x) = u\Big(v\big(z(w(x))\big)\Big) \tag{3.8}$$

и все функции, входящие в сложную функцию, имеют производные (дифференцируемые функции). Выразим производную $u^{'}(x)$ через производные функций, составляющих $u(x)$. Для этого обратимся к определению производной

$$u'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}.$$

Умножим и разделим одновременно отношение $\Delta u/\Delta x$, стоящее под знаком предела, на $\Delta v, \Delta z, \Delta w$:

$$u'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta z \cdot \Delta w}{\Delta x \cdot \Delta v \cdot \Delta z \cdot \Delta w} \right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u \cdot \Delta v \cdot \Delta z \cdot \Delta w}{\Delta v \cdot \Delta z \cdot \Delta w \cdot \Delta x} \right) \cdot$$

Из дифференцируемости функций следует их непрерывность, а из непрерывности следует:

$$\Delta x \to 0 \Rightarrow \Delta w \to 0 \Rightarrow \Delta z \to 0 \Rightarrow \Delta v \to 0 \Rightarrow \Delta u \to 0.$$

Предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \frac{\Delta v}{\Delta z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta w} \cdot \frac{\Delta w}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta v \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta v} \cdot \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta z} \cdot \lim_{\Delta w \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

Каждый множитель является производной, поэтому мы приходим к формуле

$$u'(x) = u'(v) \cdot v'(z) \cdot z'(w) \cdot w'(x) = u'_v \cdot v'_z \cdot z'_w \cdot z'_x. \qquad (3.9)$$

Замечание. Нижний индекс в изображении производной показывает, по какой независимой переменной берётся производная:

u'_v– (*производная от u по v*).

Формула (3.9) доказана достаточно просто. Но для её ***использования*** на практике необходима небольшая тренировка.

Примеры дифференцирования сложных функций.

1. $y = \cos(x^3)$ – композиция из двух функций;

$$y' = -\sin(x^3) \cdot 3x^2.$$

2. $y = \tan^3(\ln x)$ – композиция из трёх функций;

$$y' = 3\tan^2(\ln x) \cdot \frac{1}{\cos^2(\ln x)} \cdot \frac{1}{x}.$$

3. $y = \tan^4(\ln^3 x)$ – композиция из четырёх функций;

$$y' = 4\tan^3(\ln^3 x) \cdot \frac{1}{\cos^2(\ln^3 x)} \cdot 3\ln^2 x \cdot \frac{1}{x}.$$

Для успешного дифференцирования полезно запомнить общую таблицу производных элементарных функций (табл. 3.2).

Таблица 3.2

N	$y(x)$	$y'(x)$
1	$f(x)^R$	$R\cdot f(x)^{R-1}\cdot\ f'(x)$
2	$a^{f(x)}$ $e^{f(x)}$	$a^{f(x)}\cdot\ln a\cdot f'(x)$ $e^{f(x)}\cdot f'(x)$
3	$\log_a f(x)$ $\ln f(x)$	$f'(x)/(f(x)\cdot\ln a)$ $f'(x)/f(x)$
4	$\sin f(x)$	$\cos f(x)\cdot f'(x)$
5	$\cos f(x)$	$-\sin f(x)\cdot f'(x)$
6	$\tan f(x)$ $\mathrm{tg}\, f(x)$	$f'(x)/\cos^2 f(x)$
7	$\mathrm{ctan}\, f(x)$ $\mathrm{ctg}\, f(x)$	$-f'(x)/\sin^2 f(x)$
8	$\arcsin f(x)$	$f'(x)/\sqrt{1-f(x)^2}$
9	$\arccos f(x)$	$-f'(x)/\sqrt{1-f(x)^2}$
10	$\arctan f(x)$ $\mathrm{arctg}\, f(x)$	$f'(x)/(1+f(x)^2)$
11	$\mathrm{arcctan}\, f(x)$ $\mathrm{arcctg}\, f(x)$	$-f'(x)/(1+f(x)^2)$

Упражнения

Найдите производные следующих функций.

1. $y=\mathrm{arctg}(\ln x)+\ln(\mathrm{arctg}\, x)$.
2. $y=\ln\ (5x^3-x)$.
3. $y=\arccos\sqrt{x}$.
4. $y=\dfrac{\sin x}{1+\mathrm{tg}\, x}$.
5. $y=\ln^2\left(\mathrm{arctg}\left(\dfrac{x}{3}\right)\right)$.
6. $y=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$.

3.4. Дифференцирование обратных и параметрически заданных функций

Предположим, что две дифференцируемые функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ – ***взаимно обратные функции*** и производная $f'(x) \neq 0$. Докажем, что для производных таких функций справедливо равенство

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \tag{3.10}$$

Формула (3.10) вытекает из определения производной. По определению производной

$$x' = g'(y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x)} \Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

<u>Пример 1.</u> Найдём производную обратной тригонометрической функции $y = \arctan x$.

Решение:

$$y = \arctan x \Leftrightarrow \begin{cases} x = \tan y, \\ -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$\tan' y = \frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\cos^2 y + \sin^2 y}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y =$$

$$= 1 + x^2 \Rightarrow \tan' y = 1 + x^2.$$

Переходим к производной обратной функции (3.10):

$$\arctan' x = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Докажем, что производная y'_x ***параметрически заданной функции***

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t) \end{cases} \tag{3.11}$$

вычисляется по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}. \qquad (3.12)$$

Предположим, что существует функция $t = t(x)$, обратная функции $x = x(t)$ (3.11).

Функцию $y = y(t)$ (3.11) можно выразить через функцию $t(x)$:

$$y = y(t) = y(t(x)) = y(x).$$

Продифференцируем полученную сложную функцию:

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Справедливость формулы (3.12) доказана.

Пример 2. Найдём производную от параметрически заданной функции

$$x = 2\cos t\,, y = 3\sin t.$$

Решение. Производная находится по формуле (3.12):

$$y'(x) = \frac{(3\sin t)'}{(2\cos t)'} = -\frac{3\cos t}{2\sin t} = -\frac{3}{2}\operatorname{ctan} t.$$

Упражнения

Найдите производные обратных тригонометрических функций.

1. $y = \arcsin x$.
2. $y = \arccos x$.

Найдите производные параметрически заданных функций.

3. $x = \dfrac{t+1}{t}, y = \dfrac{t-1}{t}$.
4. $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$.
5. $x = t^3, y = 3t$.
6. $x = t - \operatorname{arctg} t, y = \dfrac{t^3}{3} + 1$.

3.5. Логарифмическое дифференцирование

Если результат не зависит от способа решения – то это математика, а если зависит – бухгалтерия.

Из книги «Математики тоже шутят»

Найдём производную степенно-показательной функции $y = u(x)^{v(x)}$. Будем предполагать, что функция $u(x) > 0$. В таблице производных таких функций нет. Поэтому до дифференцирования необходимо преобразовать эту функцию. Возможны два способа.

<u>Первый способ</u>. Преобразуем степенно-показательную функцию в показательную. Для этого используем логарифмическое тождество $b = e^{\ln b}$:

$$y = u(x)^{v(x)} = e^{\ln u(x)^{v(x)}} = e^{v(x)\,\ln u(x)}.$$

Теперь степенно-показательная функция стала показательной функцией, поэтому можно переходить к дифференцированию:

$$y' = \left(u(x)^{v(x)}\right)' = \left(e^{v(x)\,\ln u(x)}\right)' = e^{v(x)\,\ln u(x)}(v(x)\,\ln u(x))' =$$

$$= u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\,\ln u(x) + \frac{v(x)\,u'^{(x)}}{u(x)}\right).$$

<u>Второй способ</u>. Прологарифмируем равенство $y = u(x)^{v(x)}$:

$$\ln y(x) = \ln u(x)^{v(x)} = v(x)\,\ln \mathrm{u(x)} \Rightarrow \ln y(x) = v(x)\,\ln u(x).$$

Продифференцируем последнее равенство:

$$(\ln y(x))' = (v(x)\,\ln u(x))';$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = \left(v'\,(x)\ln u(x) + \frac{v(x)\,u'(x)}{u(x)}\right).$$

Выразим из последнего равенства $y'(x)$:

$$y' = u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\,\ln u(x) + \frac{v(x)\,u'^{(x)}}{u(x)}\right).$$

Пример. Продифференцируем степенно-показательную функцию $y = x^x$ двумя способами.

Первый способ:

$$y = x^x = e^{x\ \ln x} \Longrightarrow \left(e^{x\ \ln x}\right)' = e^{x\ \ln x}\left(1 \cdot \ln x + \frac{x}{x}\right) = x^x(\ln x + 1).$$

Ответ: $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$.

Второй способ:

$$y = x^x \Rightarrow \ln y(x) = \ln\ x^x = x\ \ln x;$$

$$(\ln y(x))' = (x\ \ln x)' \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \left(\ln x + \frac{x}{x}\right);$$

$$y'(x) = x^x\ (\ln x + 1).$$

Ответ: $(x^x)' = x^x\ (\ln x + 1)$.

Замечание. Дифференцирование произведений может быть иногда упрощено, если использовать логарифмирование:

$$P(x) = f_1(x)\ f_2(x) \ldots f_n(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i\ (x);$$

$$\ln P(x) = \sum_{i=1}^{n} \ln f_i(x) \Rightarrow \frac{P'^{(x)}}{P(x)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i{}'(x)}{f_i(x)} \Rightarrow P'(x) = \prod_{i=1}^{n} f_i\ (x) \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{f_i{}'(x)}{f_i(x)}.$$

Упражнения

Найдите производные следующих функций.

1. $y = x^{\operatorname{arctg} x}$.
2. $y = \left(\sqrt{\operatorname{tg} x}\right)^{x+1}$.
3. $y = x^{\frac{1}{\ln x}}$.
4. $y = (\cos x)^{\sin x}$.
5. $y = x^{\operatorname{tg} x}$.
6. $y = (x^2 + 1)^{\sqrt{x}}$.

3.6. Дифференциальные теоремы о среднем

Преподаватель говорит на лекции студентам:
– Это не какая-нибудь ерундовина, это самая могучая теорема анализа!
Из книги «Математики тоже шутят».

Приведём ниже (без доказательств) четыре ***фундаментальные*** теоремы, которые используются в теоретических и некоторых прикладных вопросах в ***дифференциальном исчислении***.

Теорема Ферма (Fermat).

Если у дифференцируемой на интервале $(a; b)$ функции $f(x)$ существует такая точка $c \in (a; b)$, в которой функция принимает наибольшее или наименьшее значение, то первая производная функции $f(x)$ равна нулю в этой точке:

$$f'(c) = 0.$$

Теорема Ролля (Roll).

Если дифференцируемая на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ имеет одинаковые значения в граничных точках отрезка $f(a) = f(b)$, тогда существует такая точка $c \in (a; b)$, в которой первая производная равна нулю:

$$f'(c) = 0.$$

Теорема Лагранжа (Lagrange).

Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$, то существует такая точка $c \in (a; b)$, в которой справедливо равенство (справедлива формула)

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Теорема Коши (Cauchy).

Если $f(x)$ и $g(x)$ – дифференцируемые на отрезке $[a; b]$ функции, то существует такая точка $c \in (a; b)$, в которой будет справедливо равенство (справедлива формула)

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

3.7. Правило Лопиталя (I’ Hopital)

Если нельзя, но очень хочется, то и невозможное возможно.

Русская пословица

Операция дифференцирования часто помогает найти пределы отношения двух функций

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$$

в тех случаях, когда возникает неопределённость вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пусть две функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в окрестности точки $x = a$. Предположим, что справедлива одна из двух групп равенств:

$$f(a) = g(a) = 0 \text{ или } \lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty.$$

Для этих двух случаев справедливо (без доказательства) следующее правило Лопиталя

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\cdot \tag{3.13}$$

Сформулируем кратко правило Лопиталя (3.13).

При появлении неопределённостей $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ предел отношения дифференцируемых функций равен пределу отношения их производных.

Неопределённости вида $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^{∞}; ∞^{0}; 0^{0} можно свести, с помощью тождественных преобразований, к неопределённостям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ ·

Пример 1.

$$\lim_{x\to 2}\ (2-x)\tan\frac{\pi x}{4} - ?$$

Решение:

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\tan\frac{\pi x}{4} = (\infty\cdot 0) = \lim_{x\to 2}\frac{2-x}{\operatorname{ctan}\frac{\pi x}{4}} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{-\frac{\pi}{4\sin^2\frac{\pi x}{4}}} = \frac{4}{\pi}.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to 2}(2-x)\tan\frac{\pi x}{4} = \frac{4}{\pi}.$$

Пример 2.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) - ?$$

Решение:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{\ln x\,(x-1)}\right) = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1-\frac{1}{x}}{\frac{x-1}{x}+\ln x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}.$$

Ответ:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{2}.$$

Упражнения

Найдите пределы с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln x}$.
2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}$.
3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin x}$.
5. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$.
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} 2x}$.

3.8. Физический смысл производной

Нет вещи столь малой, в которую не вмещалась бы ещё меньшая.

Козьма Прутков

Из физики хорошо известна формула нахождения средней скорости прямолинейного неравномерного движения некоторого объекта между точками A_1 и A_2 (рис. 3.1).

$$\overset{S}{A_1 \bullet - - - - - - - - - - \bullet A_2}$$

Рис. 3.1

Пусть S – расстояние, t – время, тогда средняя скорость вычисляется по формуле

$$v = \frac{S}{t}. \tag{3.14}$$

Будем считать, что в пространстве движется некоторая точка. Хорошим примером непрерывно движущейся точки является самолёт, который летит очень высоко в небе и с Земли кажется точкой. Поставим задачу о вычислении скорости движущегося объекта в некоторой точке пространства. Скорость в точке A по формуле (3.14) не вычислить. Поэтому мы будем предполагать, что точка A – упругая точка, и её можно слегка растянуть на отрезок (приращение) ΔS (рис. 3.2):

$$\underset{\Delta t = 0}{\overset{\Delta S = 0}{\bullet\!\longleftarrow\!\bullet\, A \longrightarrow\!\bullet}} \;\Rightarrow\; \underset{\Delta t \neq 0}{\overset{\Delta S \neq 0}{A_1 \bullet - - - - - \bullet A_2}} \;\Rightarrow\; \underset{\Delta t \to 0}{\overset{\Delta S \to 0}{A_1 \bullet\!\longrightarrow\!\bullet\, A \longleftarrow\!\bullet\, A_2}}$$

Рис. 3.2

Предположим, что точка проходит расстояние ΔS за время (приращение) Δt. Используем формулу (3.14) для наших приращений:

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Отпустим концы приращения ΔS. Приращение ΔS стремится к нулю, значит и Δt стремится к нулю. Запишем описанный выше ход рассуждений (рис. 3.2) с помощью предела:

$$\lim_{\substack{\{\Delta S \to 0 \\ \Delta t \to 0}} \frac{\Delta S}{\Delta t} = V. \tag{3.15}$$

Мы рассматриваем непрерывное движение объекта. Из свойств непрерывности следует, что если $\Delta t \to 0$, то $\Delta S \to 0$, поэтому в равенстве (3.15) достаточно оставить только $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = S' = V_{\text{в точке } A}\,. \tag{3.16}$$

Предельное отношение в равенстве (3.16) – производная функции $S(t)$, следовательно, физический смысл производной – скорость объекта в точке. Часто скорость в точке называют ***мгновенной скоростью.***

Из физики мы знаем, что скорость изменения скорости называется ускорением. Поэтому физический смысл второй производной – ускорение в точке (мгновенное ускорение).

Пример. Точка совершает колебательные движения вдоль оси абсцисс по закону $x = \cos \omega t$. Найти момент времени, когда скорость равна нулю. Чему в это время равно ***смещение*** x?

Решение:

$$v = -\omega \sin \omega t\,; \omega \sin \omega t = 0 \Rightarrow \omega t = k\pi \Rightarrow t = \frac{k\pi}{\omega} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \cos \omega \frac{k\pi}{\omega} = \pm 1.$$

Ответ: $x = \pm 1$.

Упражнения

1. Точка движется прямолинейно по закону

$$S = \frac{t^2}{2} + 2t^2 - t,$$

где S − расстояние (км), t − время (сек.).

Найдите скорость движения точки через одну секунду после начала движения.

2. Точка движется прямолинейно по закону

$$S = \frac{(t^4 - 4t^3 + 2t^2 - 12t)}{4},$$

где S − расстояние (км), t − время (сек.).

В какой момент времени точка остановится?

3. Найдите ускорение тела, которое движется по закону

$$S = 0{,}5\sin 2t \text{ в момент } t = \frac{\pi}{4}\cdot$$

4. Движение двух материальных точек задано уравнениями:

$$S = 4t + 8t^2 - 16t^3;\ S = 2t - 4t^2 + t^3.$$

Найдите, в какой момент времени (сек.) ускорения будут одинаковыми (равными).

3.9. Геометрический смысл производной

Дайте-ка я крупнее нарисую бесконечно малые треугольники.

Из книги «Математики тоже шутят»

Предположим, что кривая на рис. 3.3 изображает график дифференцируемой функции $y = f(x)$. Проведём секущую L_1 через две точки этого графика (точка P_1 и точка P). Рассмотрим прямоугольный треугольник PQP_1. Тангенс угла наклона α_1 секущей L_1 к оси абсцисс равен отношению противолежащего катета Δy к прилежащему катету Δx:

$$\tan \alpha_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot$$

Будем теперь ***устремлять*** точку P_1 к точке P вдоль графика функции $y = f(x)$. Угол α_1 при таком движении будет изменяться $(\alpha_1 \to \alpha)$. Прямоугольный треугольник PQP_1 остаётся прямоугольным, но его катеты будут стремиться к нулю $(\Delta x \to 0, \Delta y \to 0)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \tan \alpha\,. \tag{3.17}$$

При таком предельном переходе секущая L_1 превратится в касательную L к графику функции в точке P. Угол α – угол наклона касательной к положительному направлению оси абсцисс. В результате простых геометрических построений и предельного перехода мы получили следующий геометрический смысл производной.

Производная функции в точке x_0 равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой к графику функции в точке $P(x_0; y_0)$.

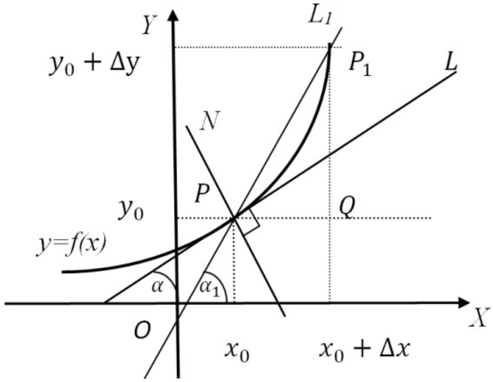

Рис. 3.3

Уравнения касательной и нормали

Уравнение касательной L к графику функции легко написать как каноническое уравнение прямой, проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом:

$$y - y_0 = k_1(x - x_0).$$

В нашем случае прямая L касается графика функции $f(x)$ в точке $P(x_0; y_0)$. Угловой коэффициент k_1 равен тангенсу угла наклона касательной L следовательно, $k_1 = f'(x_0)$. Уравнение касательной L можно записать в виде

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ или } y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (3.18)$$

Пусть прямая N перпендикулярна (ортогональна) касательной $L(N \perp L)$ и тоже проходит через заданную точку $P(x_0; y_0)$. Такая прямая называется ***нормалью*** к графику функции в заданной точке. Мы знаем, что произведение угловых коэффициентов ортогональных (перпендикулярных) прямых равно минус единице:

$$k_1 \cdot k_2 = -1. \quad (3.19)$$

Поэтому угловой коэффициент нормали равен

$$k_2 = \frac{-1}{f'(x_0)}.$$

Уравнение нормали строится аналогично уравнениям (3.18):

$$y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ или } y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0). \quad (3.20)$$

Предполагается, что в уравнении нормали $f'(x_0) \neq 0$.

<u>Упражнения</u>

1. Составьте уравнение касательной и нормали к графику функции $y = 2x^2 - 6x + 3$, в точке с абсциссой $x_0 = 1$.

2. В какой точке плоскости касательная к графику функции $y = \ln x$ параллельна прямой $y = 2x + 5$?

3. Найдите угол, под которым пересекаются графики двух функций $y^2 = 2x$ и $x^2 + y^2 = 8$.

4. В каких точках плоскости касательная к параболе $y = -x^2 + 4x - 6$ наклонена к оси абсцисс под углом 45^0 или параллельна оси абсцисс?

3.10. Дифференциал

Вычислив производную, дифференциал
вы получаете совершенно бесплатно.
Из книги «Математики тоже шутят»

Рассмотрим интересное и важное понятие ***дифференциал функции.***

По определению, производная функции $y = f(x)$ это

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x).$$

По свойству бесконечно малых (св. 5) в достаточно малой δ-окрестности точки x_0 справедливо равенство:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(x) \ \ (\Delta x \to 0),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая.

Из последнего равенства следует, что

$$\Delta y = f'(x_0)\,\Delta x + \alpha(x)\,\Delta x\ (\Delta x \to 0). \qquad (3.21)$$

Функция $\alpha(x)$ – бесконечно малая и Δx – бесконечно малая, поэтому произведение $\alpha(x)\Delta x = o(\Delta x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx. Произведение $f'(x)\,\Delta x$ линейно относительно приращения аргумента Δx.

Определение. Дифференциалом dy функции $y = f(x)$ называется линейная относительно Δx часть приращения функции:

$$dy = f'(x)\Delta x. \qquad (3.22)$$

Приращение и дифференциал функции связаны равенством

$$\Delta y = dy + o(\Delta x)(\Delta x \to 0). \qquad (3.23)$$

Если модуль приращения аргумента намного меньше единицы ($|\Delta x| \ll 1$), то приращение функции ***приближённо равно*** дифференциалу функции:

$$\Delta y \approx dy. \qquad (3.24)$$

Формула (3.24) используется в приближённых вычислениях.

Пример 1. Вычислить приближённое значение $\sqrt{1{,}07}$.

Решение:

$$1{,}07 = 1 + 0{,}07 \Rightarrow x_0 = 1;\ \Delta\, x = 0{,}07;$$

$$]\ f(x) = \left(\sqrt{x}\right) \quad \Rightarrow\ f'(x) = \left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow df = \frac{1}{2}\, 0{,}07.$$

$$f(1{,}07) = f(1) + \Delta f \approx f(1) + df = \sqrt{1} + \frac{1}{2}\, 0{,}07 = 1{,}035.$$

Ответ: $\sqrt{1{,}07} \approx 1{,}035.$

Пример 2. Ребро куба $a = 2\ м$. Объём куба $V = a^3$ равен 8 м^3 . Ребро увеличили на $\Delta a = 1$ см. Оценить приближённо увеличение объёма куба dV. Оценить ***абсолютную*** и ***относительную погрешности*** приближённого вычисления.

Решение:

Вычислим ***точно*** увеличение объёма ΔV:

$$V = a^3 \Rightarrow \Delta V = (a + \Delta a)^3 - a^3 = (2{,}01)^3 - 2^3 = 0{,}120601\ \text{м}^3.$$

Вычислим приближённо увеличение объёма с помощью дифференциала:

$$dV = (a^3)'\, \Delta a = 3 \cdot 2^2 \cdot 0{,}01 = 0{,}12\ \text{м}^3.$$

Находим абсолютную погрешность:

$$|\Delta V - dV| = 0{,}120601 - 0{,}12 = 0{,}000601\ \text{м}^3.$$

Находим относительную погрешность:

$$\left|\frac{\Delta V - dV}{\Delta V}\right|\ 100\% = \frac{0{,}000601}{0{,}120601} = 0{,}5\%.$$

Дифференциал аргумента

Докажем, что приращение аргумента равно дифференциалу аргумента. Для этого возьмём функцию $y = x$ и проведём элементарные преобразования:

$$y = x \Rightarrow y' = 1 \Rightarrow dy = \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x.$$

Теперь можно выразить дифференциал функции через дифференциал аргумента и представить производную как отношение дифференциалов:

$$dy = f'(x)\,dx \Rightarrow f'(x) = \frac{dy}{dx}. \qquad (3.25)$$

Замечание. Символ $\frac{d}{dx}$ – оператор дифференцирования.

Основные свойства

1. Свойство однородности

Постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала:

$$d\big(C \cdot f(x)\big) = C \cdot df(x). \qquad (3.26)$$

Доказательство:

$$d\big(C \cdot f(x)\big) = \big(C \cdot f(x)\big)' dx = Cf'(x)dx = Cdf(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d\big(C \cdot f(x)\big) = Cdf(x).$$

2. Свойство аддитивности

Дифференциал суммы функций равен сумме дифференциалов этих функций:

$$d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x).$$

Доказательство:

$$d(f(x) + g(x)) = \big(f(x) + g(x)\big)' dx = f'(x)dx + g'(x)dx =$$

$$= df(x) + dg(x).$$

Если $g(x) = const$, то свойство аддитивности приводит к равенству

$$d(f(x) + const) = df(x), \tag{3.27}$$

которое означает, что дифференциал функции не изменится, если к ней прибавить любую константу.

3. Дифференциал произведения

Дифференциал произведения функций можно выразить через дифференциалы сомножителей:

$$d\big(u(x)\,v(x)\big) = du(x)\,v(x) + dv(x)\,u(x). \tag{3.28}$$

Доказательство:

Дифференциал произведения функций по определению это

$$d\big(u(x)\,v(x)\big) = \big(u(x)\,v(x)\big)'dx.$$

Производную произведения можно представить как сумму (в виде суммы)

$$\big(u(x)\,v(x)\big)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x).$$

Умножим обе части последнего равенства на dx:

$$\big(u(x)\,v(x)\big)'dx = u'(x)\,v(x)dx + u(x)\,v'(x)dx.$$

Левая часть этого равенства – дифференциал произведения, а правую часть можно выразить через дифференциалы сомножителей (множителей):

$$d\big(u(x)\,v(x)\big) = v(x)\,du(x) + u(x)\,dv(x) =$$

$$= u(x)\,dv(x) + v(x)\,du(x).$$

Последнее выражение есть формула (3.28).

Геометрический смысл дифференциала

Геометрический смысл дифференциала функции очевиден из рис. 3.4. Рассмотрим прямоугольный треугольник APQ. Гипотенуза AP – часть касательной к графику функции $y = f(x)$. Угол α – угол наклона касательной к оси абсцисс. Тангенс угла наклона касательной равен $f'(x_0)$. Катет PQ равен дифференциалу аргумента dx. Катет AQ равен дифференциалу функции dy:

$$AQ = f'(x_0)\,dx \Rightarrow AQ = dy = df(x).$$

Отрезок P_1Q равен приращению функции:

$$P_1Q = \Delta f = df(x) + AP_1.$$

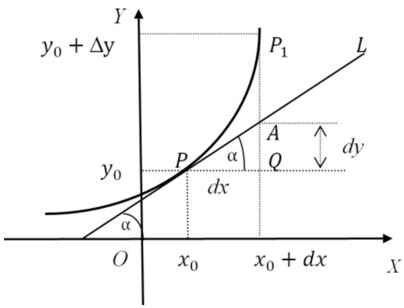

Рис.3.4

Инвариантность формы первого дифференциала

Докажем, что вид формулы дифференциала функции не изменится, если аргумент функции тоже является функцией другой независимой переменной.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, где переменная x зависит от другой независимой переменной t: $x = g(t)$. Функцию $f(x)$ можно записать в виде $y = f\big(g(t)\big)$. Перейдём к дифференциалу этой функции

$$df(x) = f'_x(x)dx = f'_x(x(t))x'_t dt = f'_t(t)dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'_x(x)dx = f'_t(t)dt.$$

Из последнего равенства следует ***инвариантность дифференциала функции***:

$$df(x) = f'_x(x)dx = f'_t(t)dt,$$

где переменные x и t связаны равенством $x = g(t)$.

<u>Пример 3.</u> Найти дифференциал функции $y = 3x + x^2$ в точке $x = 2$.

Решение:

$$dy = y'dx;\ y'(x) = 3 + 2x;\ y'(2) = 3 + 2 \cdot 2 = 7 \Rightarrow dy = 7dx.$$

<u>Пример 4.</u> Найти дифференциал функции $y = x^3 - 3^x$.

Решение:

$$dy = y'dx;\ y'(x) = (3x^2 - 3^x \ln 3);\ dy = (3x^2 - 3^x \ln 3)dx.$$

<u>Упражнения</u>

Найдите дифференциалы функций.

1. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.
2. $y = x^2 \ln x$.
3. $y = (x^3 - x) \operatorname{tg} x$.

Найдите приращение и дифференциал функции в заданной точке, с заданным приращением.

4. $y = x^3 + 2x, x_0 = 1, \Delta x = 0{,}01$.
5. $y = x^2 + x - 5,\ x_0 = 0, \Delta x = 0{,}5$.

Глава 4
ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ

4.1. Асимптоты

Бесконечное в математике связывается с
некоторым процессом, не имеющим конца.
Рихард Курант
(немецкий математик (1888–1972))

Прямая линия L называется асимптотой кривой $y = f(x)$ с бесконечной ветвью, если расстояние ρ от точки $M(x; y)$ на кривой до прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении точки M в (на) бесконечность.

Различают три вида асимптот.

Наклонная асимптота

Асимптота называется наклонной, если она появляется при стремлении аргумента функции к бесконечности (рис. 4.1). Такие асимптоты могут появиться только у функций с неограниченной областью определения. Уравнения таких асимптот удобно записывать в виде уравнения прямой с угловым коэффициентом:

$$y = kx + b. \tag{4.1}$$

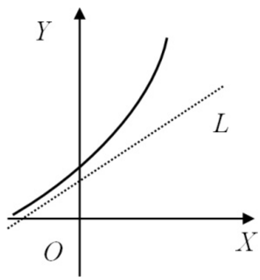

Рис. 4.1

Горизонтальная асимптота

Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты (рис. 4.2), угловой коэффициент которой равен нулю ($k = 0$).

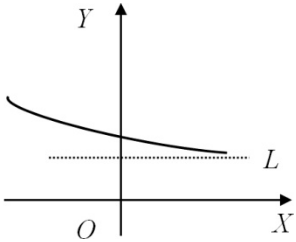

Рис. 4.2

Вертикальная асимптота

Прямая $x = x_0$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если хотя бы один из двух односторонних пределов

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x), \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

равен плюс или минус бесконечности:

$$\left[\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty, \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty; \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = -\infty, \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty; \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \text{или} \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty\ (-\infty), \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = +\infty\ (-\infty); \end{cases} \\ \begin{cases} \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = +\infty\ (-\infty), \\ \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = -\infty\ (+\infty). \end{cases} \end{array}\right. \qquad (4.2)$$

В равенствах (4.2) предельная точка x_0 является конечной граничной точкой области определения функции $f(x)$, но не принадлежит этой области. Для графика функции точка x_0 – точка разрыва второго рода. Ниже (рис. 4.3) даны примеры графиков с вертикальными асимптотами.

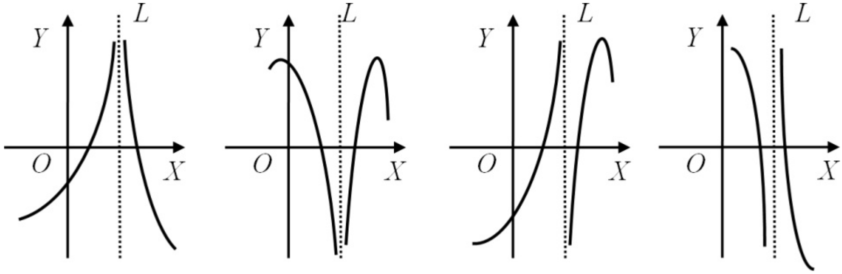

Рис. 4.3

Рассмотрим вопрос о нахождении наклонной асимптоты. Уравнение асимптоты (4.1) содержит два параметра: k и b. Выведем формулы для нахождения этих параметров. ***Для определённости*** будем рассматривать случай, когда независимая переменная x стремится к плюс бесконечности ($x \to +\infty$).

Стремление графика функции $f(x)$ к прямой $y = kx + b$ означает (рис. 4.4), что расстояние ρ между асимптотой и графиком функции стремится к нулю, следовательно (поэтому), отклонение AB графика от асимптоты тоже стремится к нулю:

$$\lim_{x\to+\infty} AB = \lim_{x\to+\infty}\big(f(x) - (kx+b)\big) = 0. \qquad (4.3)$$

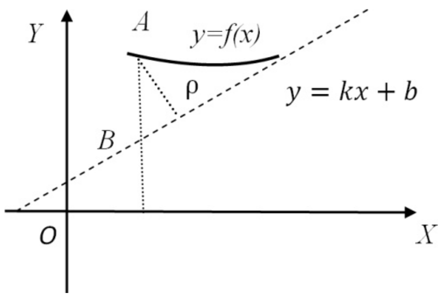

Рис. 4.4

Предельное равенство (4.3) можно записать в виде

$$f(x) - (kx+b) = 0 + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to +\infty$.

Перепишем последнее равенство в виде

$$f(x) = (kx + b) + \alpha(x),$$

разделим его на переменную x

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{kx + b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}$$

и перейдём к пределу

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{kx + b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right).$$

Очевидно, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{b}{x} = 0; \ \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(x)}{x} = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} k = k.$$

Мы пришли к формуле для нахождения углового коэффициента асимптоты:

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \cdot \qquad (4.4)$$

Если предел (4.4) не существует, наклонной асимптоты у графика функции нет. Будем предполагать, что предел существует, и мы нашли угловой коэффициент k. Теперь построим формулу для нахождения параметра b. Для этого вновь обратимся к равенству (4.3) и сделаем несколько элементарных преобразований:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} ((f(x) - kx) - b) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) - \lim_{x\to+\infty} b = 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} b = b.$$

Окончательную формулу мы получим, если приравняем конец и начало этой цепочки равенств

$$b = \lim_{x \to +\infty} (f(x) - kx). \tag{4.5}$$

Если предел (4.5) существует, параметр b равен этому пределу. В этом случае уравнение асимптоты найдено. Если предела (4.5) нет, то наклонной асимптоты нет. Запишем результат в символьном виде:

$$\left.\begin{array}{r} \exists \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = b, \\ \\ \exists \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - kx) = k \end{array}\right\} \Rightarrow \text{наклонная асимптота есть;}$$

$$\left.\begin{array}{r} \nexists \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}, \\ \\ \nexists \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) \end{array}\right\} \Rightarrow \text{наклонной асимптоты нет.}$$

Формулы (4.4) и (4.5) справедливы при стремлении x к минус бесконечности.

У графика функции может быть несколько вертикальных асимптот. У периодической функции их может быть бесконечно много. Наклонных (горизонтальных) асимптот не может быть больше двух, но график функции может её пересекать бесконечно много раз.

Наличие асимптот у графика функции упрощает исследование характера функции. Поэтому после нахождения области определения функции и проверки её на чётность или нечётность лучше сразу решить вопрос об асимптотах.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Дана функция

$$\frac{x^2 + 1}{x - 2}.$$

Найти асимптоты.

Решение:
1. Область определения $X = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.
2. Проверим функцию на чётность (нечётность).

$$] \, x = 1; \; y(1) = \frac{1^2+1}{1-2} = -2;$$

$$y(-1) = \frac{(-1)^2+1}{-1-2} = \frac{2}{-3} \Rightarrow y(1) \neq y(-1) \text{ и } y(1) \neq -y(-1).$$

Проверка показала, что наша функция является функцией общего вида.
3. Наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x(x-2)} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (\frac{x^2+1-x^2+2x}{x-2}) = 2.$$

Есть одна наклонная асимптота $y = x + 2$. В нашем примере значения k и b не изменятся, если $x \to -\infty$ (если x стремится к минус бесконечности). Поэтому прямая $y = x + 2$ тоже будет асимптотой при $x \to -\infty$ (*при стремлении x к минус бесконечности)*.

Возможна вертикальная асимптота $x = 2$, так как точка $x_0 = 2$ является граничной точкой области определения исходной функции и не принадлежит этой области. Используем два односторонних предела:

$$\lim_{\text{x}\to2-0} f(x) = \lim_{x\to2-0} \frac{x^2+1}{x-2} = \left(\frac{5}{-0}\right) = -\infty;$$

$$\lim_{x\to2+0} f(x) = \lim_{x\to2+0} \frac{x^2+1}{x-2} = \left(\frac{5}{+0}\right) = +\infty.$$

Левосторонний и правосторонний пределы равны бесконечности. Есть вертикальная асимптота. График функции стремится к асимптоте $x = 2$, уходя вниз $(-\infty)$ при $x \to 2 - 0$. График стремится к асимптоте $x = 2$, уходя вверх $(+\infty)$ при $x \to 2 + 0$.

<u>Пример 2</u>. Исследовать функцию на асимптоты

$$y = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Решение:

1. Область определения $X = R = (-\infty; +\infty)$.
2. Функция общего вида:

$$y(x) \neq y(-x) \text{ и } y(x) \neq -y(-x)$$

для любого числа x из области определения нашей функции. Например, пусть $x = 2$, тогда

$$y(2) = \frac{3}{5};\ y(-2) = \frac{-1}{5} \Rightarrow y(x) \neq y(-x) \text{ и } y(x) \neq -y(-x).$$

3. Для нахождения наклонных асимптот найдём параметры k и b по формулам (4.4) и (4.5):

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)x} = 0;\ b = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{(x^2+1)} = 0.$$

Полученные значения пределов не зависят от знака несобственных чисел ($+\infty$ или $-\infty$). Из полученных значений k и b следует, что у функции есть одна горизонтальная асимптота – ось абсцисс. Вертикальных асимптот нет, так как область определения функций – всё множество действительных чисел.

<u>Пример 3</u>. Найти асимптоты функции

$$y = \frac{x^3+1}{x-5}.$$

Решение:

1. Область определения $X = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.
2. Функция общего вида.
3. Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+1}{(x-5)x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x = \infty.$$

Предел равен бесконечности, поэтому углового коэффициента нет, следовательно, наклонных асимптот нет. Возможна вертикальная асимптота $x = 5$. Вычислим два односторонних предела:

$$\lim_{x \to 5-0} \frac{x^3 + 1}{x - 5} = \left(\frac{125+1}{5-0-5}\right) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to 5+0} \frac{x^3 + 1}{x - 5} = \left(\frac{125+1}{5+0-5}\right) = +\infty.$$

Левосторонний и правосторонний пределы равны бесконечности. Есть вертикальная асимптота (рис. 4.5). Бесконечности имеют разные знаки, поэтому график функции стремится к асимптоте $x = 5$, уходя вниз при $x \to 5 - 0$, и стремится к асимптоте $x = 5$, уходя вверх при $x \to 5 + 0$.

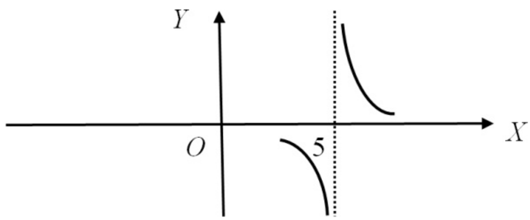

Рис. 4.5

Упражнения

Исследуйте функции на асимптоты.

1. $y = \dfrac{2x^2 - 1}{x^2 - 3}$.

2. $y = \dfrac{6x^3}{x^2 - 4}$.

3. $y = \dfrac{x^3}{(1 + x)^2}$.

4. $y = \dfrac{1}{x} + \operatorname{arctg} x$.

5. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4x + 5}$.

6. $y = \dfrac{7x^2}{x + 1}$.

4.2. Монотонность

Пусть на отрезке $[a; b] = X$ рассматривается дифференцируемая функция $f(x)$.

Напомним, что функция называется монотонной, если для любых двух значений аргумента $x_2 \in X, x_1 \in X$ из неравенства $x_2 > x_1$ следует одно из четырёх неравенств:

$$x_2 > x_1 \Longrightarrow \begin{cases} f(x_2) > f(x_1) \Rightarrow \text{ функция (строго) возрастает,} \\ f(x_2) \geq f(x_1) \Rightarrow \text{ функция не убывает,} \\ f(x_2) < f(x_1) \Rightarrow \text{ функция (строго) убывает,} \\ f(x_2) \leq f(x_1) \Rightarrow \text{ функция не возрастает.} \end{cases}$$

Признаки монотонности

1. Для того чтобы функция $f(x)$ была возрастающей функцией, необходимо и достаточно, чтобы первая производная в интервале $(a; b)$ была положительной $f'(x) > 0$.
2. Для того чтобы функция $f(x)$ была неубывающей функцией, необходимо и достаточно, чтобы первая производная в интервале $(a; b)$ была неотрицательной $f'(x) \geq 0$.
3. Для того чтобы функция $f(x)$ была убывающей функцией, необходимо и достаточно, чтобы первая производная в интервале $(a;\ b)$ была отрицательной $f'(x) < 0$.
4. Для того чтобы функция $f(x)$ была невозрастающей функцией, необходимо и достаточно, чтобы первая производная в интервале $(a; b)$ была неположительной $f'(x) \leq 0$.

У дифференцируемой немонотонной функции всегда можно выделить интервалы монотонности с помощью первой производной. Рассмотрим пример нахождения областей монотонности функции.

Пример.

$$f(x) = x^2\, e^{-x}.$$

Решение: Возьмём производную $f'(x) = (2x - x^2)\, e^{-x}$ и решим неравенство

$$(2x - x^2)\, e^{-x} \geq 0 \Rightarrow (2x - x^2) \geq 0 \Rightarrow x(2 - x) \geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\,(x - 2) \leq 0.$$

Производная равна нулю (обращается в ноль) при $x = 0$ и $x = 2$. Последнее неравенство элементарно решается методом интервалов (рис. 4.6). В интервалах $(-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$ производная отрицательна, значит, в этой области функция убывает. В интервале $(0; 2)$ производная положительна, следовательно, функция в этой области возрастает (рис. 4.6).

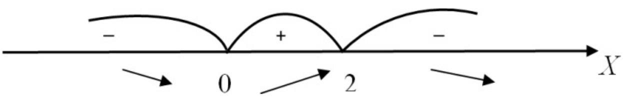

Рис. 4.6

Упражнения

Найдите интервалы возрастания и убывания следующих функций.

1. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$.
2. $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 4)$.
3. $f(x) = (x - 2)^2\,(x + 2)$.
4. $f(x) = x \ln x$.
5. $f(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$.
6. $f(x) = x + e^x$.

4.3. Максимумы и минимумы

Внутренняя точка x_0 из области определения X $(x_0 \in X)$ функции $f(x)$ называется ***точкой максимума функции***, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, для всех точек которой справедливо неравенство

$$f(x_0) \geq f(x)\ (\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset X).$$

Внутренняя точка x_0 называется ***точкой минимума функции***, если существует такая окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, для всех точек которой справедливо неравенство

$$f(x_0) \leq f(x)\ (\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \subset X).$$

Точки максимума и минимума называются ***точками экстремума***, или ***экстремальными точками.***

Значение функции $f(x)$ в точке максимума – ***локальный максимум***, значение функции в точке минимума – ***локальный минимум*** $f(x)$. Локальные минимумы и максимумы функции – ***локальные экстремумы***.

Необходимое условие существования точек экстремума

Теорема Ферма. Если x_0 – точка экстремума для функции $f(x)$, то в этой точке производная функции либо равна нулю ($f'(x) = 0$), либо не существует.

В экстремальных точках дифференцируемой функции $f(x)$ первая производная всегда равна нулю $f'(x) = 0$. Если функция дифференцируема не во всех точках области определения, то в точках экстремума производная может не существовать.

Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются ***критическими точками.***

Точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю, ***называются стационарными точками.***

Два достаточных условия экстремума

Первое условие

Если производная $f'(x)$ меняет свой знак с $+$ на $-$ при переходе аргумента (переменной x) через критическую точку x_0, то точка x_0 – точка максимума.

Если производная $f'(x)$ меняет знак с $-$ на $+$ при переходе переменной x через критическую точку x_0, тогда точка x_0 – точка минимума.

Второе условие

Предположим, что функция $f(x)$ дважды дифференцируемая.

Стационарная точка x_0 – точка максимума, если производная второго порядка в этой точке отрицательна:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0, \\ f''(x_0) < 0, \end{array}\right\} \Longrightarrow x_0 - \text{точка максимума.}$$

Стационарная точка x_0 – точка минимума, если производная второго порядка в этой точке положительна:

$$\left.\begin{array}{l} f'(x_0) = 0, \\ f''(x_0) > 0, \end{array}\right\} \Longrightarrow x_0 - \text{точка минимума.}$$

Рассмотрим на примерах процесс нахождения экстремумов функций.

Пример 1.

$$y = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 7.$$

Решение: Область определения – все действительные числа $(X = R)$. Дифференцируем функцию:

$$y' = 6x^2 - 12x - 18 = 6(x^2 - 2x - 3) = 6(x + 1)(x - 3).$$

Есть две стационарные точки $x_1 = -1, x_2 = 3$. Производная – знакопеременная функция. Найдём области, в которых первая производная положительна или отрицательна. Для этого решим неравенство методом интервалов (рис. 4.7):

$$6(x + 1)(x - 3) > 0.$$

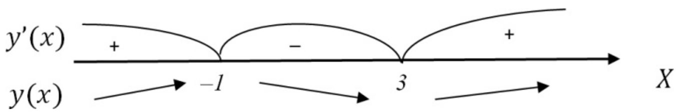

Рис. 4.7

Точка $x_1 = -1$ – точка максимума. Точка $x_2 = 3$ – точка минимума (рис. 4.7). Вычислим значения функции в этих точках

$$y_{max} = y(-1) = 17;$$

$$y_{min} = y(3) = -47.$$

Пример 2.

$$y = (x-5)^2 \sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

Решение: Область определения – все действительные числа $(X = R)$. Дифференцируем функцию:

$$y' = 2(x-5)(x+1)^{\frac{2}{3}} + (x-5)^2 \, \frac{2}{3} \, (x+1)^{\frac{-1}{3}} =$$

$$= \frac{4(x-5)(2x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}} = 0.$$

Стационарные точки $x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 5$.

Решаем неравенство $y' > 0$ методом интервалов (рис. 4.8):

$$\frac{4(x-5)(2x-1)}{3\sqrt[3]{x+1}} > 0.$$

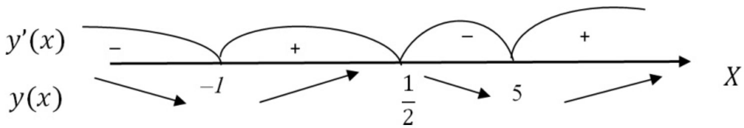

Рис. 4.8

В точке $x = -1$ производная не существует, но при переходе через эту точку первая производная меняет знак. У функции есть три критические точки, две из которых стационарные.

Точки $x_1 = -1$ и $x_3 = 5 -$ точки минимума, $x_2 = \frac{1}{2}$ – точка максимума. Вычисляем значения функции в этих точках:

$$y_{min} = y(-1) = y(5) = 0; \; y_{max} = y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{8}\sqrt[3]{18}.$$

Пример 3.

$$y = x - \ln(1 + x^2).$$

Решение: Область определения – все действительные числа $(X = R)$.

$$y' = 1 - \frac{2x}{1 + x^2} = \frac{(x-1)^2}{1 + x^2}.$$

Из последнего равенства видно, что производная везде неотрицательна, поэтому экстремальных точек у функции нет.

Упражнения

Найдите экстремумы следующих функций.

1. $y = x^3 - 3x + 1.$
2. $y = e^{x^2 - 4x + 5}.$
3. $y = x - \operatorname{arctg} x.$
4. $y = x + \sqrt{5 - 2x}\,.$
5. $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}.$
6. $y = \dfrac{x}{e^x}.$

4.4. Наибольшее и наименьшее значения

Рассмотрим непрерывную функцию $f(x)$ на отрезке $[a; b]$. Для такой функции справедлива следующая теорема.

Теорема Вейерштрасса *(Weirstrass)*.

Непрерывная на отрезке функция всегда имеет (принимает) на этом отрезке наибольшее и наименьшее значения (достигает на этом отрезке наибольшего и наименьшего значений).

Замечание. Наибольшее значение функция может достигнуть в точках максимума или в граничных точках отрезка. Наименьшее значение функция может принимать в точках минимума или в граничных точках отрезка.

Алгоритм нахождения наибольшего
и наименьшего значений функции

1. Найти все точки максимума.
2. Вычислить значения функции в точках максимума (локальные максимумы).
3. Вычислить значения функции на границах отрезка.
4. Выбрать наибольшее значение из всех вычисленных выше значений функции.

5. Найти все точки минимума.
6. Вычислить значения функции в точках минимума (локальные минимумы).
7. Вычислить значения функции на границах отрезка.
8. Выбрать наименьшее значение из всех вычисленных выше значений функции.

Пример. Из квадратного листа картона со стороной 12 сантиметров решили сделать открытую коробку. Для этого надо вырезать во всех углах этого листа одинаковые квадраты со стороной x (рис. 4.9). При каком значении x сделанная коробка будет иметь наибольший объём?

Решение: Объём коробки V зависит от размера стороны x. Выразим объём через переменную х с помощью известной формулы

$$V = V(x) = x\,(12 - 2x)^2, 0 \leq x \leq 6.$$

Берём производную от построенной функции:

$$V' = (12 - 2x)^2 - 4x\,(12 - 2x) = 12(6 - x)(2 - x).$$

Точки $x_1 = 6, x_2 = 2$ являются критическими (стационарными) точками.

Вычислим вторую производную

$$V'' = -12\big((2 - x) + (6 - x)\big) = -12(8 - 2x);\ V''(2) < 0.$$

Вторая производная в стационарной точке $x_2 = 2$ отрицательна, поэтому в этой точке у функции $V(x)$ есть максимум. Вычислим объём коробки при $x = 2$:

$$V(2) = 2(12 - 2 \cdot 2)^2 = 128\ \text{см}^3.$$

На концах отрезка $0 \leq x \leq 6$ объём равен нулю, поэтому наибольший объём коробки будет в точке максимума $x = 2$.

Ответ: Наибольший объём коробки будет равен 128 см^3 при $x = 2$.

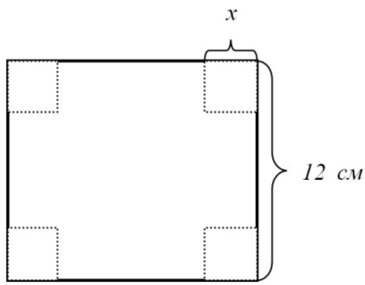

Рис. 4.9

Упражнения

1. Представьте число 20 в виде суммы двух положительных чисел так, чтобы сумма куба одного из них и квадрата другого была наименьшей.
2. Сумма квадратов двух положительных чисел равна 300. Выберите (подберите) эти числа так, чтобы произведение одного из них на квадрат другого было наибольшим.
3. В прямоугольной трапеции острый угол равен $\pi/4$, периметр равен 4. Найдите такую высоту трапеции, при которой у трапеции будет максимальная площадь.
4. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна $\sqrt{2}$. Найдите такое основание треугольника, при котором у треугольника будет максимальная площадь.

4.5. Выпуклость кривых и точка перегиба

Рассмотрим дифференцируемую функцию $f(x)$ в интервале $(a; b)$.

Определение 1. График функции $f(x)$ называется ***выпуклым вверх,*** если он лежит не выше любой своей касательной.

Определение 2. График функции $f(x)$ называется ***выпуклым вниз (вогнутым),*** если он лежит не ниже любой своей касательной.

Для ***дважды дифференцируемой*** функции в интервале $(a; b)$ справедлива следующая теорема.

Теорема. Для того чтобы в интервале $(a; b)$ кривая $y = f(x)$ была выпукла вверх, необходимо и достаточно, чтобы в этом интервале выполнялось условие $f''(x) < 0$ (*вторая производная отрицательная*). Для того чтобы в интервале $(a; b)$ кривая $y = f(x)$ была выпукла вниз, необходимо и достаточно, чтобы в этом интервале выполнялось условие $f''(x) > 0$ (*вторая производная положительная*) (рис. 4.10).

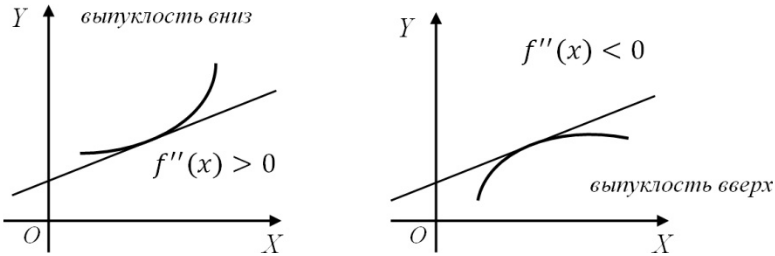

Рис. 4.10

Определение 3. Точка графика функции $P_0(x_0; f(x_0))$ называется ***точкой перегиба кривой*** $y = f(x)$, если существует такая δ окрестность точки x_0 , что для любого $x < x_0$ из этой окрестности выпуклость кривой направлена в одну сторону, а для любого $x > x_0$ из этой же окрестности выпуклость кривой направлена в другую сторону.

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Точка $P_0(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба кривой, если $f''(x_0) = 0$ (или $f''(x_0)$ не существует) и при переходе аргумента функции через точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет свой знак (рис. 4.11).

Пример 1. Найти направления выпуклости графика функции

$$y = x^5 + 5x - 6.$$

Решение: Найдём вторую производную: $y' = 5x^4 + 5$, $y'' = 20x^3$. Если $x < 0$, то $y'' < 0 \Longrightarrow$ кривая выпукла вверх. Если $x > 0$, то $y'' > 0 \Longrightarrow$ кривая выпукла вниз.

Ответ: График функции выпуклый вверх, если $x \in (-\infty; 0)$, и выпуклый вниз, если $x \in (0; +\infty)$.

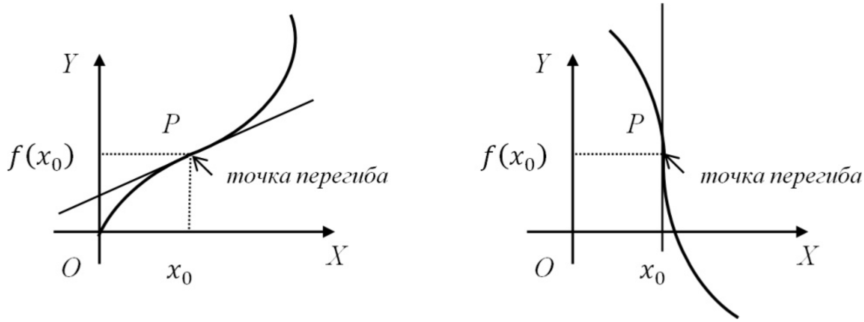

Рис. 4.11

Пример 2. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y = \ln(1 + x^2)$.

Решение:

$$y' = (\ln(1 + x^2))' = \frac{2x}{1 + x^2}; y'' = \left(\frac{2x}{1 + x^2}\right)' =$$

$$= \frac{2(1 + x^2) - 2x2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2};$$

$$y'' \geq 0 \Rightarrow \frac{2(1 - x^2)}{(1 + x^2)^2} \geq 0 \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow (x - 1)(1 + x) \leq 0.$$

Решаем последнее неравенство методом интервалов и приходим к следующему результату. Вторая производная равна нулю в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. При переходе через точку x_1 вторая производная меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, график исходной функции выпуклый вверх в области $x \in (-\infty; 1)$, выпуклый вниз в области $x \in (-1; 1)$. При переходе через точку x_2 вторая производная меняет знак с плюс на минус. Поэтому график функции выпуклый вверх в области $x \in (1; +\infty)$.

Полученный результат можно изобразить в виде таблицы (табл. 4.1).

Таблица 4.1

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;+1)$	$+1$	$(1;+\infty)$
y	выпуклость вверх: $\cap$	$y_{\text{т.п}} = \ln 2$	выпуклость вниз: $\cup$	$y_{\text{т.п}} = \ln 2$	выпуклость вверх: $\cap$
y''	–	0	+	0	–

<u>Упражнения</u>

Найдите точки перегиба и интервалы выпуклости графиков функции.

1. $y = \ln(1 + x^2)$.
2. $y = xe^{-x^2}$.
3. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 5$.
4. $y = e^{-x^2}$.
5. $y = \dfrac{x^4}{(1+x)^3}$.
6. $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

4.6. Алгоритм исследования функций

Представленный в этом разделе материал даёт возможность полностью исследовать функцию и построить её график. Изучение поведения функции можно вести в следующем порядке:

1. Найдите область определения функции X .
2. Проверьте функцию на периодичность.
3. Проверьте функцию на чётность, нечётность.
4. Если среди граничных точек X есть несобственные числа $+\infty$ или $-\infty$, проверьте функцию на наклонные асимптоты. Если есть конечные граничные точки области X, но ей не принадлежат, исследуйте функцию на вертикальные асимптоты.
5. Найдите промежутки монотонности и точки экстремума. Вычислите значения функции в экстремальных точках.
6. Найдите направления выпуклости кривой и точки перегиба. Вычислите значения функции в точках перегиба.
7. Найдите точки пересечения графика функции с координатными осями. Для нахождения точки пересечения графика с осью абсцисс решается уравнение $f(x) = 0$. Для нахождения точки пересечения графика с осью ординат вычисляется значение функции в нуле: $y = f(0)$.
8. Постройте график функции.

Удобно строить график функции постепенно. Построить декартову систему координат. Нанести на оси абсцисс область определения функции. Если функция чётная или нечётная, её область определения симметрична относительно начала координат. Такую функцию достаточно изучить в положительной полуплоскости и построить там соответствующую часть графика.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, поэтому построенную часть графика надо отразить симметрично оси ординат на левую полуплоскость. В результате получится окончательный график функции.

График нечётной функции симметричен относительно начала координат. Поэтому построенную часть графика надо повернуть на 180° относительно начала координат. Эта кривая есть вторая ветвь графика в левой полуплоскости. В результате получится окончательный график функции.

Если функция периодическая, достаточно исследовать её только в рамках одного периода и построить там график. Остальные части графика периодической функции будут такими же.

Асимптоты дают возможность быстро увидеть ***эскиз*** графика функции, поэтому найденные асимптоты сразу рисуются в построенной системе координат.

<u>Пример полного исследования функций</u>

$$f(x) = \frac{2x^2}{x^2 - 4}.$$

1. Функция определена на множестве

$$(-\infty; +2) \cup (-2; +2) \cup \ (2; +\infty).$$

2. Функция непериодическая.
3. Функция чётная:

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow \frac{2x^2}{x^2 - 4} = \frac{2(-x)^2}{(-x)^2 - 4}.$$

График функции будет симметричен относительно оси ординат, поэтому достаточно исследовать функцию в области $[0; 2) \cup (2; +\infty)$.

4. Возможны вертикальная и наклонная асимптоты.

Вычислим левосторонний и правосторонний пределы:

$$\lim_{x\to 2-0}\frac{2x^2}{x^2-4}=\left(\frac{2\cdot 4}{4-0-4}=\frac{8}{-0}\right)=-\infty.$$

$$\lim_{x\to 2+0}\frac{2x^2}{x^2-4}=\left(\frac{2\cdot 4}{4+0-4}=\frac{8}{+0}\right)=+\infty.$$

Есть первая вертикальная асимптота $x=2$ в правой полуплоскости и вторая вертикальная асимптота $x=-2$ в левой полуплоскости. График функции стремится к минус бесконечности при стремлении аргумента функции к двум с левой стороны и к плюс бесконечности при стремлении аргумента функции к двум с правой стороны.

Вычислим угловой коэффициент наклонной асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{(x^2-4)x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2\,x}=2\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0\Rightarrow k=0.$$

Угловой коэффициент равен нулю, значит, ***возможна*** горизонтальная асимптота. Вычисляем параметр b:

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2\Rightarrow b=2.$$

Есть одна горизонтальная асимптота $y=2$ при стремлении аргумента к плюс бесконечности и к минус бесконечности.

5. Найдём интервалы монотонности функции и стационарные точки:

$$y'(x)=2\,\frac{2x\,(x^2-4)-x^2\,2x}{(x^2-4)^2}=2\frac{-8x}{(x^2-4)^2}\,.$$

Очевидно, что в области $(0;2)\cup(2;+\infty)$ производная отрицательна, следовательно, наша функция в этой области убывает.

Точка $x=0$ – стационарная точка. Первая производная при переходе через эту точку меняет знак с + на – (*с плюса на минус*). Поэтому точка $x=0$ – точка максимума. Вычислим соответствующее значение функции

$$f(0)=\frac{2\cdot 0}{0-4}=0.$$

6. Рассмотрим вопрос о выпуклости графика функции.

Возьмём вторую производную функции:

$$f''(x) = -16\left(\frac{x}{(x^2-4)^2}\right)' = -16\,\frac{(x^2-4)^2 - x\,2(x^2-4)\,2x}{(x^2-4)^4} =$$

$$= -16\,\frac{(x^2-4)\left((x^2-4)-4x^2\right)}{(x^2-4)^4} = -16\,\frac{-3x^2-4}{(x^2-4)^3} =$$

$$= 16\,\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3};$$

$$f''(x) = 16\,\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}.$$

Вторая производная больше нуля (положительна) в интервале $(2;+\infty)$. График функции в этой области имеет выпуклость вниз. Вторая производная меньше нуля (отрицательна) в области [0;2). График функции в этой области имеет выпуклость вверх.

7. График функции не пересекает ось абсцисс, а только касается её в начале координат, так как $f(0) = 0$.

8. Строим график функции, который будет симметричен относительно оси ординат (рис. 4.12).

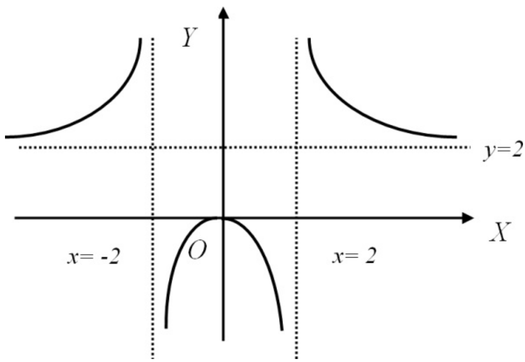

Рис. 4.12

Упражнения

Проведите полное исследование и постройте графики следующих функций.

1. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ (график функции называется "локон Марии Аньези") .

2. $y = \dfrac{1}{x} + x^2$ (график функции называется "трезубец Ньютона") .

3. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$ (функция Гаусса).

4. $y = \ln\dfrac{x}{x-1}$; 5. $y = (x-1)\sqrt{x}$; 6. $y = \dfrac{x^2}{x^2-4}$.

Глава 5
НЕОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

5.1. Основные понятия и определения

Думай о смысле, а слова придут сами.
Льюис Кэрролл
(английский математик (1832–1898))

Предположим, что некоторая функция $f(x)$ является производной дифференцируемой функции $F(x)$. При таком сопоставлении функцию $F(x)$ называют ***первообразной***. Все функции вида $F(x)+C$ имеют одинаковую производную, поэтому первообразная – всё множество функций вида $F(x)+C$ с одинаковой производной $f(x)$.

Операция нахождения производной называется ***дифференцированием*** и обозначается ***оператором*** $\boldsymbol{\frac{d}{dx}}$ (***оператор дифференцирования***). Если по заданной первообразной находится производная, то можно написать

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)\ (F'(x) = f(x)\ ). \tag{5.1}$$

Операция нахождения первообразной по заданной производной называется ***интегрированием*** и обозначается оператором $\int dx$ (***оператор интегрирования***). Если по заданной производной находится первообразная, то соответствующая запись имеет вид

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C. \tag{5.2}$$

Запомним термины, связанные с равенством (5.2):
$\int$ – ***знак интеграла;***
$\int f(x)dx$ – ***неопределённый интеграл;***
$f(x)dx$ – ***подынтегральное выражение;***
$f(x)$ – ***подынтегральная функция, или функция, стоящая под интегралом;***
x – ***переменная интегрирования.***

Операции интегрирования и дифференцирования – две взаимно обратные операции. При интегрировании находится бесконечное семейство первообразных, которые отличаются друг от друга только произвольной аддитивной константой C $(\forall C \in R)$:

$$\frac{d(F(x)+C)}{dx} = (F(x)+C\,)' = F'(x)+C' = F'(x) = f(x).$$

Первообразную, найденную с помощью интегрирования, называют интегралом (неопределённым интегралом).

Доказано, что у любой непрерывной функции всегда есть первообразная (неопределённый интеграл), но не всегда эти первообразные могут быть найдены с помощью элементарных функций.

Примеры интегралов, которые не выражаются (не берутся) через элементарные функции:

интеграл Пуассона – $\int e^{-x^2}\,dx$,

интегральный синус – $\int \frac{\sin x}{x}dx$,

интегральный косинус – $\int \frac{\cos x}{x}dx$,

интегральный логарифм – $\int \frac{1}{\ln x}dx$,

интегральная показательная функция – $\int \frac{e^x}{x}dx$,

интегралы Френеля – $\int \cos x^2 dx, \int \sin x^2 dx$.

Выражение «***найдите первообразную***» обычно заменяют одним из эквивалентных выражений: «***возьмите интеграл***», «***найдите интеграл***», «***проинтегрируйте функцию***».

Ниже мы приводим объединённую таблицу производных и интегралов (табл. 5.1), из которой видно, что операции дифференцирования и интегрирования взаимно обратны. Интегралы из этой таблицы называют ***табличными интегралами.***

Таблица 5.1

	Операция дифференцирования		Операция интегрирования (табличные интегралы)	
	$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$		$\int f(x)dx = F(x) + C$	
N	$F(x)$	$f(x)$	$f(x)$	$F(x) + c$
1	$(kx+b)^R$	$R(kx+b)^{R-1}$	$(kx+b)^R$ $R \neq -1$	$\frac{(kx+b)^{R+1}}{(R+1)k} + c$
2	$a^{(kx+b)}$	$k\, a^{(kx+b)} \ln a$	$a^{(kx+b)}$	$\frac{a^{(kx+b)}}{k \ln a} + c$
2’	$e^{(kx+b)}$	$k\, e^{(kx+b)}$	$e^{(kx+b)}$	$\frac{e^{(kx+b)}}{k} + c$
3	$\log_a(kx+b)$	$\frac{k}{(kx+b) \ln a}$	----------	----------
3’	$\ln(kx+b)$	$\frac{k}{(kx+b)}$	$\frac{1}{(kx+b)}$	$\frac{1}{k} \ln(kx+b) + c$
4	$\sin(kx+b)$	$k \cos(kx+b)$	$\cos(\mathrm{kx+b})$	$\frac{1}{k} \sin(kx+b) + c$
5	$\cos(kx+b)$	$-k \sin(kx+b)$	$\sin(kx+b)$	$\frac{-1}{k} \cos(kx+b) + c$
6	$\mathrm{tg}(kx+b)$	$\frac{k}{\cos^2(kx+b)}$	$\frac{1}{\cos^2(kx+b)}$	$\frac{1}{k} \mathrm{tg}(kx+b) + c$
7	$\mathrm{ctg}(kx+b)$	$\frac{-1}{sin^2(kx+b)}$	$\frac{1}{sin^2(kx+b)}$	$\frac{-1}{k} \mathrm{ctg}(kx+b) + c$
8	$\arcsin(kx+b)$	$\frac{k}{\sqrt{1-(kx+b)^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-(kx+b)^2}}$	$\frac{1}{k} \arcsin(kx+b) + c$
9	$\arccos(kx+b)$	$\frac{-k}{\sqrt{1-(kx+b)^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1-(kx+b)^2}}$	$\frac{-1}{k} \arccos(kx+b) + c$
10	$\mathrm{arctg}(kx+b)$	$\frac{k}{1+(kx+b)^2}$	$\frac{1}{1+(kx+b)^2}$	$\frac{1}{k} \mathrm{arctg}(kx+b)$
11	$\mathrm{arcctg}(kx+b)$	$\frac{-k}{1+(kx+b)^2}$	$\frac{1}{1+(kx+b)^2}$	$\frac{-\mathrm{arcctg}(kx+b)}{k} + c$

5.2. Свойства неопределённых интегралов

1. Интеграл от дифференциала функции равен самой функции плюс произвольная константа:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

2. Производная от интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

3. Свойство однородности

Интеграл не изменится, если постоянный множитель вынести за знак интеграла:

$$]C - const \;\Rightarrow \int Cf(x)dx = C\int f(x)dx\,.$$

4. Свойство аддитивности

Интеграл от конечной алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\;(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{n}\int f_k(x)dx.$$

Объединение свойств однородности и аддитивности называется ***линейностью:***

$$\int\left(\sum_{k=1}^{n} c_k f_k\;(x)\right)dx = \sum_{k=1}^{n} c_k\int f_k(x)dx.$$

Операция интегрирования – линейная операция. Оператор интегрирования – линейный оператор.

5.3. Простейшие способы интегрирования

Вместо того чтобы думать, интегрируема функция или нет, надо просто взять её и проинтегрировать.

Из книги «Математики тоже шутят»

Метод разложения

Этот метод состоит в разложении подынтегральной функции на линейную комбинацию более простых функций, интегралы от которых берутся легко с помощью табл. 5.1. Перейдём к примерам.

Пример 1.

$$\int \frac{x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}} dx + \int x^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{1}{6}} dx + \int x^{\frac{-1}{4}} dx =$$

$$= \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} + \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx - \int \frac{sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} =$$

$$= -\mathrm{ctan} x - \tan x + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{\cos 2x + \sin^2 x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x} =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C.$$

Пример 4.

$$\int \frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx = \int \frac{1+\cos^2 x}{2\cos^2 x}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int dx = \frac{1}{2}(\tan x + x) + C.$$

Интегрирование подстановкой (замена переменной)

Замена переменной интегрирования делается с помощью подстановки $t = g(x)$, где t – новая переменная интегрирования. Формула замены переменной для такой подстановки имеет вид:

$$\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)dx = \int f(t)\, dt.$$

Функцию $g(x)$ выбирают так, чтобы интеграл в правой части равенства был более простым для нахождения первообразной. Некоторые интегралы с помощью замены переменной можно сразу ***свести к табличным интегралам***. После нахождения интеграла надо вернуться к исходной переменной. Обратимся к примерам.

Пример 5.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx = \left(\sqrt{x} = t; d\sqrt{x} = dt \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \Rightarrow dx = 2tdt\right) =$$

$$= \int \frac{e^t}{t}2tdt = 2\int e^t dt = 2\,e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C.$$

Пример 6.

$$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \left(\sqrt{x} = t; d\sqrt{x} = dt \Rightarrow \frac{dx}{2\sqrt{x}} = dt \Rightarrow dx = 2tdt\right) =$$

$$= \int \frac{\cos t}{t}2tdt = 2\int \cos t dt = 2\sin t + C = 2\sin\sqrt{x} + C.$$

Пример 7.

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \left(e^x = t \Rightarrow de^x = dt \Rightarrow e^x dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{t}\right) =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+1)t} = \int \frac{t-t+1}{(t+1)t} dt = \int \frac{t+1}{(t+1)t} dt - \int \frac{t}{(t+1)t} dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t} - \int \frac{dt}{t+1} = \ln|t| - \ln|t+1| = \ln \frac{e^x}{e^x+1} + C.$$

Пример 8.

$$\int \frac{(\mathrm{arctan}x)^5}{1+x^2} dx =$$

$$= \left(\mathrm{arctan}x = t \Rightarrow d(\mathrm{arctan}x) = dt \Rightarrow \frac{dx}{1+x^2} = dt\right) =$$

$$= \int t^5\, dt = \frac{t^6}{6} + C = \frac{1}{6}(\mathrm{arctan}x)^6 + C.$$

Пример 9.

$$\int \frac{\sin x\, dx}{e^{\cos x}} =$$

$$= (\cos x = t \Rightarrow d\cos x = dt \Rightarrow -\sin x dx = dt \Rightarrow \sin x dx = -dt)$$

$$= -\int \frac{dt}{e^t} = -\int e^{-t}\, dt = e^{-t} + C = \frac{1}{e^{\cos x}} + C.$$

Пример 10.

$$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left(\arcsin x = t \Rightarrow d(\arcsin x) = dt \Rightarrow \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt\right) =$$

$$= \int t dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{1}{2}(\arcsin x)^2 + C.$$

Упражнения

Возьмите интегралы (проинтегрируйте).

1. $\int \operatorname{tg}x\,dx$.

2. $\int \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,dx$.

3. $\int \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$.

4. $\int \dfrac{x}{x^2+a^2}\,dx$.

5. $\int \dfrac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\,dx$.

6. $\int \left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{x^2}\right)dx$.

5.4. Интегрирование по частям

Лучший момент в жизни математика – это когда он уже вывел формулу, но ещё не нашёл в ней ошибки.

Из книги «Математики тоже шутят»

Вывод формулы интегрирования по частям

Докажем справедливость следующей важной формулы

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,du(x) + C, \qquad (5.3)$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Для вывода используем известную формулу дифференцирования произведения функций:

$$\big(u(x)\,v(x)\big)' = u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x).$$

Очевидно, что если равны функции, то равны их первообразные. Поэтому последнее равенство можно интегрировать:

$$\int \big(u(x)\,v(x)\big)'\,dx = \int \big(u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x)\big)dx \Rightarrow$$

$$u(x)\,v(x) = \int u'(x)\,v(x)dx + \int u(x)\,v'(x)dx \Rightarrow$$

$$u(x)\,v(x)=\int v(x)\,u'(x)dx\ +\int u(x)\,v'(x)dx \Longrightarrow$$

$$u(x)\,v(x)=\int v(x)\,du(x)\ +\int u(x)\,dv(x).$$

Выразим из последнего равенства второй интеграл через первый:

$$\int u(x)\,dv(x)=\ u(x)\,v(x)-\int v(x)\,du(x)+C.$$

В результате мы пришли к формуле (5.3), которая называется формулой интегрирования по частям (***формула интегрирования по частям***).

Интегрирование (процесс интегрирования) с помощью формулы (5.3) называется ***интегрированием по частям.*** Произвольная аддитивная константа C записывается только один раз в конце ответа.

Интегрирование по частям – не универсальный метод интегрирования. Формула интегрирования по частям используется только в том случае, когда интеграл в правой части формулы (5.3) будет более простым для интегрирования, чем исходный интеграл в левой части формулы. Иногда к результату приводит только повторное интегрирование по частям.

Интегрирование по частям успешно при интегрировании следующих видов интегралов:

1. $\int (kx+b)^n \sin(lx+d)\,dx, \int (kx+b)^n \cos(lx+d)\,dx,$

$$\int (kx+b)^n e^{(lx+d)}dx\,;$$

2. $\int \sin(kx+b)\,e^{(lx+d)}dx,\ \int \cos(kx+b)\,e^{(lx+d)}dx;$

3. $\int (kx+b)^n \operatorname{arcctan}(lx+d)\,dx, \int (kx+b)^n \operatorname{arcctan}(lx+d)\,dx;$

$$\int (kx+b)^n \arcsin(lx+d)\,dx, \int (kx+b)^n \arccos(lx+d)\,dx;$$

4. $\int (kx+b)^n \ln(lx+d)dx\,, \int \ln^n x dx.$

В этих интегралах показатель n – любое натуральное число $n \in N$

Примеры интегрирования по частям

Удобно до интегрирования по частям записывать в скобках аналитические выражения для $u(x), du(x), dv(x), v(x)$.

Пример 1.

$$\int \ln x dx = \begin{pmatrix} u(x) = \ln x;\ dv(x) = dx \\ du(x) = \frac{1}{x}dx;\ v(x) = \int dx = x \end{pmatrix} =$$

$$= u(x)\,v(x) - \int v(x)\,du(x) = x\ln x - \int \frac{x}{x}dx = x\ln x - x + C.$$

Пример 2.

$$\int xe^x\,dx = \begin{pmatrix} u(x) = x; & dv(x) = e^x dx \\ du(x) = dx; & v(x) = e^x \end{pmatrix} = x\,e^x - \int e^x dx =$$

$$= x\,e^x - e^x + C.$$

Пример 3.

$$\int \arctan x dx = \begin{pmatrix} u = \arctan x;\ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2};\ v = x \end{pmatrix} = x\arctan x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} =$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= (1+x^2 = t) = x\arctan x - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln|t| =$$

$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C.$$

Пример 4.

$$\int x\,\sin x dx = \begin{pmatrix} u = x;\ dv = \sin x dx \\ du = dx;\ v = -\cos x \end{pmatrix} = -x\cos x + \int \cos x dx =$$

$$= -x\cos x + \sin x + C.$$

Пример 5.

$$\int \arcsin x dx = \begin{pmatrix} u = \arcsin x;\ dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}};\ v = x \end{pmatrix} = x\arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} = x\arcsin x + \begin{pmatrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2xdx \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}}dt = x\arcsin x + \frac{2}{2}\,t^{\frac{1}{2}} = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C.$$

Упражнения

Найдите интегралы с помощью интегрирования по частям.

1. $\int 3x\cos(2x+1)dx.$
2. $\int (2x-1)\,e^{x}dx.$
3. $\int \ln(7x-1)\,dx.$
4. $\int \arcsin(6x+5)\,dx.$
5. $\int \arctan(3x-6)\,dx.$
6. $\int x^3\ln x dx.$

5.5. Рекурсивное интегрирование и рекуррентные формулы

«Точнее не скажешь». Определение из словаря для математиков: рекурсия (существительное) – см. рекурсия.

Из книги «Математики тоже шутят»

Рассмотрим несколько интересных примеров, когда интегрирование по частям приводит к линейному, относительно исходного интеграла, уравнению. В таком случае интеграл является просто решением этого уравнения.

Пример 1.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx\ (|x| < |a|).$$

Обозначим исходный интеграл буквой G.

$$G = \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx = \begin{pmatrix} u = \sqrt{a^2 - x^2}; & dv = dx \\ du = -\dfrac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}; & v = x \end{pmatrix} =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \frac{-x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int \frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx =$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\ dx.$$

Преобразования исходного интеграла привели к уравнению, линейному относительно G:

$$G = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a} - G \Longrightarrow 2G = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a};$$

$$G = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin\frac{x}{a}\right) + C.$$

Пример 2.

$$\int e^x \sin x dx.$$

Для нахождения этого интеграла используем два раза формулу интегрирования по частям.

$$\int e^x \sin x dx = \begin{pmatrix} u = e^x & dv = \sin x dx \\ du = e^x dx & v = -\cos x \end{pmatrix} = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx =$$

$$= \begin{pmatrix} u = e^x; & dv = \cos x dx \\ du = e^x dx; & v = \sin x \end{pmatrix} = -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.$$

Введём обозначение

$$Q = \int e^x \sin x dx.$$

Получаем линейное, относительно Q, уравнение

$$Q = e^x(\sin x - \cos x) - Q \Rightarrow 2Q = e^x(\sin x - \cos x) \Rightarrow$$

$$Q = \int e^x \sin x dx = \frac{e^x}{2}(\sin x - \cos x) + C.$$

<u>Пример 3.</u>

$$\int \cos(\ln x)\, dx.$$

Для нахождения этого интеграла используем два раза формулу интегрирования по частям.

$$\int \cos(\ln x)\, dx = \begin{pmatrix} u = \cos(\ln x); & dv = dx \\ du = -\sin(\ln x)\dfrac{dx}{x}; & v = x \end{pmatrix} =$$

$$= x\cos(\ln x) + \int \sin(\ln x)\, dx = \begin{pmatrix} u = \sin(\ln x); & dv = dx \\ du = \cos(\ln x)\dfrac{dx}{x}; & v = x \end{pmatrix} =$$

$$= x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - \int \cos(\ln x)\, dx.$$

Обозначим исходный интеграл буквой Z:

$$Z = \int \cos(\ln x) dx.$$

Приходим к уравнению

$$Z = x\cos(\ln x) + x\sin(\ln x) - Z \Rightarrow 2Z = x\,(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)) \Rightarrow$$

$$Z = \int \cos(\ln x)\, dx = \frac{x}{2}\big(\cos(\ln x) + \sin(\ln x)\big) + C.$$

Способ интегрирования, представленный в примерах 2 и 3, можно назвать способом приведения интеграла к самому себе (рекурсия).

Рекуррентные формулы

Рекуррентные формулы выражают интеграл, который содержит натуральный показатель степени n, через интеграл того же вида, но с меньшим показателем. Иногда такие формулы можно получить с помощью интегрирования по частям. Рассмотрим примеры.

Пример 4.

Выведем рекуррентную формулу для вычисления интеграла

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}.$$

$$\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} = \begin{pmatrix} u = \dfrac{1}{(a^2 + x^2)^n}; & dv = dx \\ du = -\dfrac{2nxdx}{(a^2 + x^2)^{n+1}}; & v = x \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(a^2 + x^2)^{n+1}}\, dx =$$

$$= \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n \int \frac{a^2 + x^2 - a^2}{(a^2 + x^2)^{n+1}}\, dx =$$

$$= \frac{x}{(a^2 + x^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n} - 2na^2 \int \frac{1}{(a^2 + x^2)^{n+1}}\, dx.$$

Введём обозначения. Пусть

$$I_n = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}; \;\; I_{n+1} = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{n+1}}.$$

Последняя цепочка равенств в этих обозначениях имеет вид

$$I_n = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + 2n\,I_n - 2na^2 I_{n+1}.$$

Это равенство легко превращается в рекуррентную формулу:

$$2na^2 I_{n+1} = \frac{x}{(a^2+x^2)^n} + I_n\,(2n-1) \Rightarrow$$

$$I_{n+1} = \frac{(2n-1)}{2na^2}\,I_n + \frac{x}{2na^2(a^2+x^2)^n}. \tag{5.4}$$

Пример 5.

Используем полученную рекуррентную формулу (5.4) для нахождения интеграла

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2}.$$

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^2} I_1 + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}.$$

$$I_1 = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} \Rightarrow \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)} + C.$$

5.6. Интегрирование дробно-рациональных функций

Диалог на экзамене.
Преподаватель:
– Вы один решали эту задачу?
Студент:
– Нет, при помощи двух неизвестных.
Из книги «Математики тоже шутят»

Определение рациональных функций и их классификация

Функция вида

$$f(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_1 x^1 + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + b_{m-2}x^{m-2} + \cdots + bx^1 + b_0}$$

называется дробно-рациональной функцией. Числитель и знаменатель такой дроби – многочлены. Числитель дроби $P_n(x)$ – многочлен степени n, знаменатель дроби $Q_m(x)$ – многочлен степени m.

Дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя: $n < m$.

Дробь называется ***неправильной***, если степень числителя больше или равна степени знаменателя: $n \geq m$.

$\dfrac{3x+5}{x^2+3x}$ ***– правильная дробь;*** $\dfrac{3x^3+5}{x^2+3x}$ ***– неправильная дробь.***

Простейшими (элементарными) дробями называются правильные дроби вида

1. $\dfrac{A}{(x-a)}$;

2. $\dfrac{Bx+C}{x^2+px+q}$;

3. $\dfrac{A}{(x-a)^k}$;

4. $\dfrac{Bx+C}{(x^2+px+q)^k}$.

где показатель степени k – натуральное число, $k > 1$ и квадратный трёхчлен x^2+px+q имеет отрицательный дискриминант: $p^2-4q<0$ (у квадратного трёхчлена x^2+px+q нет действительных корней).

Интегрирование простейших дробей

Простейшие дроби всегда легко интегрируются. Рассмотрим примеры.

Пример 1.

$$\int \frac{dx}{x-5}.$$

Перед нами табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{x-5} = \ln|x-5| + C.$$

Пример 2.

$$\int \frac{dx}{(x-5)^3}.$$

Это табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{(x-5)^3} = \int (x-5)^{-3}\, dx = \frac{(x-5)^{-2}}{-2} + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{1+x^2}.$$

Это табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

Пример 4.

$$\int \frac{dx}{1+(2x+3)^2}.$$

Это табличный интеграл:

$$\int \frac{dx}{1+(2x+3)^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}\,(2x+3) + C.$$

Пример 5.

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Это не табличный интеграл, но его можно легко ***свести к табличному***. Для этого рассмотрим отдельно знаменатель – квадратный трёхчлен $x^2 + x + 1$. У этого трёхчлена нет действительных корней, поэтому он не раскладывается на линейные множители. Выделим в нём полный квадрат:

$$x^2+x+1= x^2+2x\,\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 =$$

$$\frac{3+(2x+1)^2}{4}=\frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right).$$

Сделаем подстановку (введём новую переменную интегрирования):

$$\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}=t;\ x=\frac{1}{2}(\sqrt{3}t-1);\ dx=\frac{\sqrt{3}}{2}dt\,.$$

Вернёмся к заданному интегралу

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{\frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{dt}{1+t^2}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctan}\,t+C.$$

Запишем результат относительно исходной переменной x:

$$\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathrm{arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Пример 6.

$$\int\frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}dx.$$

Это не табличный интеграл. Подынтегральная функция – простейшая дробь четвёртого вида. Дискриминант квадратного трёхчлена x^2-4x+5 отрицателен, поэтому действительных корней нет и трёхчлен не раскладывается на линейные множители. Преобразуем подынтегральную функцию так, чтобы наш интеграл можно было выразить через табличные интегралы. Прежде всего, выделим полный квадрат в квадратном трёхчлене:

$$x^2-4x+5= x^2-4x+4+1=(x-2)^2+1.$$

Сделаем подстановку (введём новую переменную интегрирования):

$$t = x - 2;\ x = t + 2 \Longrightarrow\ dx = dt;\ \ x^2 - 4x + 5 = t^2 + 1.$$

Запишем исходный интеграл с новой переменной интегрирования:

$$\int \frac{t+3}{(t^2+1)^2}dt = \frac{1}{2}\int \frac{2t}{(t^2+1)^2}dt + \int \frac{3}{(t^2+1)^2}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{(t^2+1)^2} + \ 3\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+1)}{(t^2+1)^2} + \ 3\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} =$$

$$= (t^2 + 1 = z) = \frac{1}{2}\int \frac{dz}{z^2} + \ 3\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = -\frac{1}{2(t^2+1)} + 3\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}.$$

Последний интеграл берётся с помощью рекуррентной формулы (разд. 5.5):

$$\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^2} = \frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a} \quad + \frac{x}{2a^2(a^2+x^2)}\ .$$

В нашем случае

$$\int \frac{dt}{(1+t^2)^2} = \frac{1}{2}\arctan t \quad + \frac{t}{2(1+t^2)}\ .$$

Мы взяли интеграл относительно переменной интегрирования t:

$$\int \frac{t+3}{(t^2+1)^2}dt = -\frac{1}{2(t^2+1)} + 3\left(\frac{1}{2}\arctan t \quad + \frac{t}{2(1+t^2)}\right) + \mathrm{C}.$$

Запишем результат относительно исходной переменной x:

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2}dx = -\frac{3x-7}{2(x^2-4x+5)} + \frac{3\arctan\,(x-2)}{2} + \mathrm{C}.$$

<u>Разложение правильных дробей на простейшие</u>

Разложение правильных дробей на простейшие дроби базируется на следующих двух фундаментальных теоремах.

Теорема 1.

Любой многочлен (полином) с действительными коэффициентами раскладывается на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами. Квадратичные множители в таком разложении всегда имеют отрицательный дискриминант (нет действительных корней).

Теорема 2.

Правильная дробь $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$**,** знаменатель которой имеет вид

$$Q_m(x) =$$

$$= (x - x_1)^{k_1} \cdot \ldots \left(x - x_j\right)^{k_j} \cdot (x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1} \cdot \ldots (x^2 + p_i x + q_i)^{l_i},$$

где $k_1 + k_2 + \cdots k_j + 2(l_1 + l_2 + \cdots + l_i) = m$; раскладывается ***единственным образом*** на сумму простейших дробей:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{(x - x_1)^1} + \frac{A_2}{(x - x_1)^2} + \cdots + \frac{A_{k_1}}{(x - x_1)^{k_1}} + \cdots$$

$$+ \frac{B_1}{\left(x - x_j\right)^1} + \frac{B_2}{\left(x - x_j\right)^2} + \cdots + \frac{B_{k_j}}{\left(x - x_j\right)^{k_j}} + \cdots$$

$$+ \frac{C_1 x + D_1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^1} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \cdots + \frac{C_{l_1} x + D_{l_1}}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{l_1}} + \cdots$$

$$+ \frac{M_1 x + N_1}{(x^2 + p_i x + q_i)^1} + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + p_i x + q_i)^2} + \cdots + \frac{M_{l_i} x + N_{l_i}}{(x^2 + p_i x + q_i)^{l_i}},$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_{k_1}, B_1, B_2, \ldots, B_{k_j}$, $C_1, D_1, C_2, D_2, \ldots, C_{l_1}, D_{l_1}, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_{l_i}, N_{l_i}$ – некоторые постоянные, часть которых может быть равна нулю.

Алгоритм разложения дроби на простейшие

В основе алгоритма разложения дроби на простейшие лежат определение равенства алгебраических многочленов и следующие два свойства дробей.

1. Дроби с разными знаменателями всегда можно привести к одному, общему знаменателю.
2. Если дроби равны и их знаменатели равны, то числители этих дробей тоже равны.

Определение. Два алгебраических многочлена равны, если они имеют одинаковую степень и равные коэффициенты при одинаковых степенях при любых значениях независимой переменной (аргумента).

Рассмотрим на примерах алгоритм (порядок) разложения правильных дробей на простейшие.

Пример 7.

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)}.$$

1. Процесс разложения правильной дроби на простейшие начинается со знаменателя. Знаменатель состоит из двух линейных множителей, поэтому нашу дробь можно представить как сумму двух элементарных дробей первого вида:

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}.$$

2. Для нахождения двух неизвестных числителей A и B сложим две элементарные дроби (приведём к общему знаменателю):

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{A(x-3)+B(x-2)}{(x-2)(x-3)}.$$

3. Две дроби равны, их знаменатели равны, значит, числители тоже равны:

$$x = A(x-3) + B(x-2).$$

Мы пришли к равенству алгебраических многочленов. Это равенство (по определению) верно при любых значениях x:

$$]\; x = 3 \Rightarrow 3 = A(3-3) + B(3-2) \Rightarrow B = 3;$$

$$]\; x = 2 \Rightarrow 2 = A(2-3) + B(2-2) \Rightarrow A = -2.$$

4. В результате элементарных преобразований мы разложили дробь на простейшие:

$$\frac{x}{(x-2)(x-3)} = \frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3}.$$

<u>Пример 8.</u>

$$\frac{2x+1}{x^3-4x}.$$

1. Знаменатель этой правильной дроби можно разложить на линейные множители:

$$x^3 - 4x = x(x-2)(x+2).$$

Дробь раскладывается на три простейшие дроби первого вида:

$$\frac{2x+1}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

2. Для нахождения неизвестных *A, B, C* складываем простейшие дроби (приводим к общему знаменателю):

$$\frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x+2)}.$$

3. Две дроби равны, их знаменатели равны, следовательно, числители тоже равны:

$$2x + 1 = A(x-2)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-2).$$

$$]\, x = 0 \Rightarrow$$

$$2 \cdot 0 + 1 = A(0-2)(0+2) + B \cdot 0 \cdot (0+2) + C \cdot 0 \cdot (0-2) \Rightarrow$$

$$-4A = 1 \Rightarrow A = \frac{-1}{4}.$$

$$] \, x = 2 \Rightarrow$$

$$2 \cdot 2 + 1 = A(2-2)(2+2) + B \cdot 2(2+2) + C \cdot 2(2-2) \Rightarrow$$

$$5 = 8B \Rightarrow B = \frac{5}{8}.$$

$$] \, x = -2 \Rightarrow$$

$$-3 = A(-2-2)(-2+2) + B \cdot 2(-2+2) + C \cdot 2(-2-2) \Rightarrow$$

$$-3 = -8C \Rightarrow C = \frac{3}{8}.$$

4. Исходная дробь представлена в виде суммы трёх простейших дробей:

$$\frac{2x+1}{x^3-4x} = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{8} \cdot \frac{1}{x-2} + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{x+2}.$$

Пример 9.

$$\frac{x}{x^3+1}.$$

1. Знаменатель раскладывается на два множителя. Один линейный, другой квадратичный:

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

Исходная дробь может быть представлена как сумма двух простейших дробей первого и третьего видов:

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}.$$

2. Складываем простейшие дроби (приводим к общему знаменателю):

$$\frac{x}{x^3+1} = \frac{A(x^2-x+1) + (Cx+D)(x+1)}{x^3+1}.$$

3. Приравниваем числители двух дробей:

$$x = A(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x + 1). \qquad (5.5)$$

$$] \; x = -1 \Rightarrow -1 = A((-1)^2 + 1 + 1) + (C(-1) + D)(-1 + 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{-1}{3} \cdot$$

Если среди множителей знаменателя есть квадратичные множители, то для нахождения неизвестных констант надо ещё использовать определение равенства алгебраических многочленов. Такой способ нахождения неизвестных констант называется ***методом неопределённых коэффициентов.***

Для нахождения неизвестных C и D приравняем коэффициенты многочленов (5.5) при степени x^2 и при степени x^1:

$$x^2 \; \vdots \; 0 = A + C \Rightarrow C = \frac{1}{3};$$

$$x^1 \; \vdots \; 1 = -A + C + D \Rightarrow D = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \cdot$$

4. Исходная дробь представлена в виде суммы двух простейших дробей:

$$\frac{x}{x^3 + 1} = \frac{-1}{3} \cdot \frac{1}{x + 1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x + 1}{x^2 - x + 1} \cdot$$

Интегрирование правильных дробей

Используем теперь разложение правильных дробей на простейшие для интегрирования правильных дробей. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.

Неопределённый интеграл от любой правильной дробно-рациональной функции (рациональной функции) всегда существует и выражается через конечное число элементарных функций. Этот интеграл является алгебраической суммой натуральных логарифмов, арктангенсов и правильных рациональных дробей.

Проинтегрируем те правильные дроби, которые мы выше разложили на простейшие.

<u>Пример 10.</u>

$$\int \frac{x}{(x-2)(x-3)}dx =$$

$$= \int \left(\frac{-2}{x-2} + \frac{3}{x-3}\right)dx = \int \frac{-2}{x-2}dx + \int \frac{3}{x-3}dx =$$

$$= -2\ln|x-2| + 3\ln|x-3| + C = \ln\left|\frac{(x-3)^3}{(x-2)^2}\right| + C.$$

Ответ:

$$\int \frac{x}{(x-2)(x-3)}dx = \ln\left|\frac{(x-3)^3}{(x-2)^2}\right| + C.$$

<u>Пример 11.</u>

$$\int \frac{2x+1}{x^3-4x}dx = \int \left(\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{x} + \frac{5}{8}\cdot\frac{1}{x-2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx =$$

$$= \frac{-1}{4}\int \frac{1}{x}dx + \frac{5}{8}\int \frac{dx}{x-2} + \frac{3}{8}\int \frac{dx}{x+2} =$$

$$= \frac{-1}{4}\ln|x| + \frac{5}{8}\ln|x-2| + \frac{3}{8}\ln|x+2| + C.$$

Ответ:

$$\int \frac{2x+1}{x^3-4x}dx = \frac{-1}{4}\ln|x| + \frac{5}{8}\ln|x-2| + \frac{3}{8}\ln|x+2| + C.$$

<u>Пример 12.</u>

$$\int \frac{x\,dx}{x^3+1} = \int \left(\frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{x+1} + \frac{1}{3}\cdot\frac{x+1}{x^2-x+1}\right)dx =$$

$$=\frac{-1}{3}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{3}\int\frac{(x+1)dx}{x^2-x+1}=\frac{-1}{3}\ \ln|x+1|+\frac{1}{3}\int\frac{(x+1)dx}{x^2-x+1}.$$

Проинтегрируем отдельно последний интеграл

$$\frac{1}{3}\int\frac{(x+1)dx}{x^2-x+1}=\frac{1}{3}\int\frac{(x+1)dx}{x^2-2x\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=\frac{1}{3}\int\frac{(x+1)dx}{\frac{3}{4}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}=$$

$$=\left(x-\frac{1}{2}=t;\ x=t+\frac{1}{2};dx=dt\right)=\frac{1}{3}\int\frac{\left(t+\frac{3}{2}\right)}{\frac{3}{4}+t^2}dt=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\int\frac{2tdt}{\frac{3}{4}+t^2}+\frac{3}{2}\int\frac{dt}{\frac{3}{4}\left(1+\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2\right)}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\int\frac{d\left(\frac{3}{4}+t^2\right)}{\frac{3}{4}+t^2}+\frac{2}{3}\int\frac{dt}{1+\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{6}\ \ln\left(\frac{3}{4}+t^2\right)+\frac{1}{\sqrt{3}}\ \arctan\left(\frac{2t}{\sqrt{3}}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{1}{\sqrt{3}}\ \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Ответ:

$$\int\frac{x\,dx}{x^3+1}=\frac{-1}{3}\ \ln|x+1|+\frac{1}{6}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\ \arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+C.$$

Интегрирование неправильных дробей

Любую неправильную рациональную дробь $(n\geq m)$ всегда можно представить как сумму многочлена и правильной дроби:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = L_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)}, \tag{5.6}$$

где $L_{n-m}(x)$ − многочлен степени $n-m$; $\frac{R_k(x)}{Q_m(x)}$ −правильная дробь.

Для представления неправильной дроби в виде (5.6) надо числитель $P_n(x)$ разделить на знаменатель $Q_m(x)$. Рассмотрим примеры.

Пример 13.

Приведём дробь $\frac{x^4-5x+9}{x-2}$ к виду (5.6). Разделим ***столбиком (уголком)*** числитель на знаменатель:

$$\begin{array}{r|l}
-\;\; x^4 \qquad\quad - 5x + 9 & x-2 \\ \cline{2-2}
x^4 - 2x^3 \qquad\qquad\quad & x^3 + 2x^2 + 4x + 3 \\ \cline{1-1}
-\;\; 2x^3 - 5x + 9 & \\
2x^3 - 4x^2 \qquad & \\ \cline{1-1}
-\;\; 4x^2 - 5x + 9 & \\
4x^2 - 8x \qquad & \\ \cline{1-1}
-\;\; 3x + 9 & \\
3x - 6 & \\ \cline{1-1}
15. &
\end{array}$$

Процесс деления окончен. Частное от деления – многочлен

$L_3(x) = x^3 + x^2 + 4x + 3$, остаток от деления $R_k(x) = 15$.

Ответ:

$$\frac{x^4 - 5x + 9}{x - 2} = x^3 + x^2 + 4x + 3 + \frac{15}{x-2}.$$

Пример 14.

Приведём дробь $\frac{x^4-x^3+1}{x^2+x-2}$ к виду (5.6). Разделим числитель на знаменатель:

$$
\begin{array}{r|l}
-\;x^4 - x^3 + 1 & x^2 + x - 2 \\
x^4 + x^3 - 2x^2 & \overline{x^2 - 2x + 4} \\
\hline
-\;-2x^3 + 2x^2 + 1 & \\
-2x^3 - 2x^2 + 4x & \\
\hline
-\;4x^2 - 4x \;\; + 1 & \\
4x^2 + 4x \;\; - 8 & \\
\hline
-8x + 9. &
\end{array}
$$

Ответ:

$$\frac{x^4 - x^3 + 1}{x^2 + x - 2} = x^2 - 2x + 4 + \frac{-8x + 9}{x^2 + x - 2}\,.$$

Из формулы (5.6) и приведённых примеров ясно, что интегрирование неправильных дробей сводится к интегрированию правильных дробей. Интегралы от многочленов $L_{n-m}(x)$ – табличные интегралы.

Упражнения

Найдите интегралы от следующих дробно-рациональных функций.

1. $\displaystyle\int \frac{x^3}{x\,(x-1)}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{2x}{x^2 - 5x + 6}\,dx.$

3. $\displaystyle\int \frac{5x^3}{x^3 - 4x}\,dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{x+1}{(x-1)^2}\,dx.$

5. $\displaystyle\int \frac{x^3 + 3}{(x+1)(x-1)}\,dx.$

6. $\displaystyle\int \frac{x}{x^2 + 2}\,dx.$

5.7. Интегрирование некоторых тригонометрических функций

Знаменитый американский учёный Джон фон Нейман однажды выступал с докладом перед другими математиками и сказал:
– Математика – лишь очень малая и очень простая часть жизни.
Математики в аудитории зашумели. Тогда Нейман добавил:
– Если многие не верят, то это потому, что они не знают, насколько сложна жизнь.

Из книги «Математики тоже шутят»

<u>Переход от произведения к сумме</u>

Интегралы вида

$$\int \sin(ax+g)\ \sin(bx+q)\,dx, \qquad \int \sin(ax+g)\cos(bx+q)\,dx,$$

$$\int \cos(ax+g)\cos(bx+q)\,dx$$

интегрируются с помощью формул перехода от произведения к сумме:

$$\sin\alpha\ \sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos\alpha\ \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)).$$

<u>Пример1.</u>

$$\int \sin 5x\ \sin 3x dx = -\frac{1}{2}\int(\cos 8x-\cos 2x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{1}{16}\sin 8x + C.$$

Пример2.

$$\int \sin 5x \cos 3x\, dx = \frac{1}{2}\int (\sin 8x + \sin 2x)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{16}\cos 8x - \frac{1}{4}\cos 2x + \mathrm{C}.$$

Пример 3.

$$\int \cos 5x \cos 3x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 8x + \cos 2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{16}\sin 8x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Нахождение интегралов с чётной степенью

Интегралы вида

$$\int \cos^{2n}(ax + b)dx, \int \sin^{2n}(ax + b)dx,$$

где *2n* – чётное число, интегрируются с помощью формул понижения степени:

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\,(1 + \cos 2\alpha),\ \sin^2\alpha = \frac{1}{2}\,(1 - \cos 2\alpha).$$

Пример 4.

$$\int \cos^2(2x + 3)dx = \frac{1}{2}\int \big(1 + \cos(4x + 6)\big)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin(4x + 6)\right) + C.$$

Пример 5.

$$\int \sin^2 (2x+3)dx = \frac{1}{2}\int \big(1-\cos(4x+6)\big)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\sin(4x+6)\right) + C.$$

Пример 6.

$$\int \sin^4 x dx = \int (\sin^2 x)^2\, dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)^2\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\, dx = \frac{1}{2}(x - \sin 2x) + \frac{1}{4}\int (1+\cos 4x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}(x-\sin 2x) + \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + C = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + C.$$

Нахождение интегралов с нечётной степенью

Рассмотрим способ взятия интегралов вида

$$\int \cos^{2n+1} (ax+b)dx, \int \sin^{2n+1} (ax+b)dx,$$

где показатель степени $2n+1$ – нечётное число.

Пример 7.

$$\int \cos^3 (x+1)dx = \int \cos^2 (x+1)\cdot \cos(x+1)dx =$$

$$= \big(\cos(x+1)dx = d\sin(x+1);\ \cos^2(x+1) = 1 - \sin^2(x+1)\big) =$$

$$= \int \big(1-\sin^2(x+1)\big)\, d\sin(x+1) = (\,]\ \sin(x+1) = t) =$$

$$= \int (1-t^2)\, dt = t - \frac{t^3}{3} + C = \sin(x+1) - \frac{\sin^3(x+1)}{3} + C.$$

Пример 8.

$$\int \sin^5 6x dx = \int \sin^4 6x \cdot \sin 6x\, dx = \left(\sin 6x\, dx = -\frac{1}{6} d\cos 6x\right) =$$

$$= -\frac{1}{6}\int \sin^4 6x d \cos 6x = -\frac{1}{6}\int (1-\cos^2 6x)^2\, d\cos 6x =$$

$$= (\,]\cos 6x = t) = -\frac{1}{6}\int (1-t^2)^2\, dt = -\frac{1}{6}\int (1-2t^2+t^4)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{6}\left(t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5}\right) + C = -\frac{1}{6}\left(\cos 6x - \frac{2\cos^3 6x}{3} + \frac{\cos^5 6x}{5}\right) + C.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка

Рассмотрим интеграл, в котором подынтегральная функция является рациональной функцией от $\sin x$ и $\cos x$:

$$\int R(\sin x; \cos x) dx.$$

Для нахождения таких интегралов используют формулы для выражения синуса и косинуса одного угла через тангенс половинного угла:

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}\,, \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}. \qquad (5.7)$$

Введём новую переменную интегрирования (сделаем подстановку). Пусть $t = \tan\frac{x}{2}$. Такая подстановка называется универсальной подстановкой. Формулы (5.7) в этом случае имеют вид

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ;\ \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \qquad (5.8)$$

Выразим старую переменную интегрирования и её дифференциал через новую переменную и её дифференциал:

$$x = 2\arctan t \Longrightarrow\ dx = 2d\arctan t = 2\,\frac{dt}{1+t^2}\cdot \qquad (5.9)$$

Формулы (5.8) и (5.9) преобразуют подынтегральную рациональную функцию $R(\sin x; \cos x)$ в рациональную функцию $R_1(t)$. Такие функции мы уже научились интегрировать.

Рассмотрим примеры использования универсальной подстановки.

Пример 9.

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}\,.$$

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \int \frac{\dfrac{2dt}{1+t^2}}{4\,\dfrac{2t}{1+t^2} + 3\,\dfrac{1-t^2}{1+t^2} + 5} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{8t + 3 - 3t^2 + 5 + 5t^2} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+2} + C.$$

Вернёмся к исходной переменной интегрирования:

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = -\frac{1}{\tan\frac{x}{2} + 2} + C.$$

Пример 10.

$$\int \frac{dx}{\sin x}\,.$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2\,\dfrac{dt}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C.$$

Упражнения

Найдите интегралы (проинтегрируйте).

1. $\int \sin^2 x \, \sin 3x \, dx.$

2. $\int \cos 5x \, \cos x \, dx.$

3. $\int \frac{dx}{\cos x}.$

4. $\int \sin^4(3x+1)\, dx.$

5. $\int \sin^3 7x \, dx.$

6. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}.$

5.8. Интегрирование простейших иррациональных функций

Иррациональная функция – функция, которая содержит в своём аналитическом виде аргумент с дробным показателем степени (радикалы с натуральными показателями). Рассмотрим на простейших примерах способы интегрирования таких функций.

Дробно-линейная подстановка

Если подынтегральная функция имеет (содержит) несколько корней вида

$$\sqrt[p]{x^n},\ \sqrt[q]{x^m},\ \sqrt[r]{x^l}, \tag{5.10}$$

то вводится подстановка $t = \sqrt[k]{x}$, где $k -$ наименьшее общее кратное показателей корней (5.10). После такой подстановки подынтегральная функция становится рациональной относительно новой переменной.

Пример 1. Найти интеграл (взять интеграл)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}.$$

Наименьшее общее кратное равно шести ($\text{НОК}(2,3) = 6$), поэтому делаем подстановку

$$t = \sqrt[6]{x} \Rightarrow dx = 6t^5 dt.$$

Переходим в интеграле к новой переменной:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6t^5dt}{t^3+t^2} = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt = 6\int \frac{t^3+1-1}{t+1}dt =$$

$$= 6\left(\int \frac{t^3+1}{t+1}dt - \int \frac{1}{t+1}dt\right) =$$

$$= 6\left(\int \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1}dt - \int \frac{1}{t+1}dt\right) =$$

$$= \int (t^2-t+1)dt - \ln|t+1| = 6\left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t - \ln|t+1|\right) + C.$$

Возвращаемся к исходной переменной и приходим к ответу.

Ответ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln\left|\sqrt[6]{x}+1\right| + C.$$

<u>Тригонометрическая подстановка</u>

<u>Пример 2.</u> Найти интеграл (взять интеграл)

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx,$$

где параметр a – любое действительное число.

Для того чтобы убрать иррациональность в этом интеграле, сделаем подстановку $x = a\sin t$ (или $x = a\cos t$) и выразим дифференциал старой переменной интегрирования x через дифференциал новой переменной интегрирования t:

$$dx = a\cos t\,dt;\ \sqrt{a^2-x^2} = a\sqrt{1-\sin^2 t} = a\,\cos t.$$

Исходный интеграл преобразуется к виду

$$\int a\cos t\ \ a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t dt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t\,dt\right) = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + C.$$

Вернёмся к прежней переменной x:

$$x = a\sin t \Rightarrow \sin t = \frac{x}{a} \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{a};$$

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t =$$

$$= 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\sin^2 t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2} = 2\frac{x}{a^2}\sqrt{a^2-x^2}.$$

Теперь мы можем записать найденный интеграл относительно исходной переменной x.

Ответ:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2-x^2}\right) + C.$$

Упражнения

Проинтегрируйте иррациональные функции.

1. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx.$

2. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\,dx.$

3. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}\,dx.$

4. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx.$

Глава 6
ОПРЕДЕЛЁННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1. Понятие определённого интеграла

Рассмотрим некоторую непрерывную функцию $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, где $a < b$. Разобьём этот отрезок на n частей произвольной длины:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_{n-1} < x_n = b.$$

Точки $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ называются **узлами разбиения** отрезка. Пусть Δx_i – длина **сегмента** $[x_i; x_{i+1}]$:

$$\Delta x_i = [x_i; x_{i+1}].$$

Внутри каждого сегмента возьмём произвольную точку $\mathrm{\gamma_i}$ и вычислим значения функции $f(x)$ в этих точках:

$$f(\mathrm{\gamma_1}), f(\mathrm{\gamma_2}), f(\mathrm{\gamma_3}), \dots, f(\mathrm{\gamma_{n-1}}), f(\mathrm{\gamma_n}).$$

Составим произведения

$$f(\mathrm{\gamma_1})\,\Delta x_1, f(\mathrm{\gamma_2})\,\Delta x_2, f(\mathrm{\gamma_3})\,\Delta x_3, \dots, f(\mathrm{\gamma_{n-1}})\,\Delta x_{n-1}, f(\mathrm{\gamma_n})\,\Delta x_n.$$

Образуем из этих произведений сумму $\sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{\gamma_i})\,\Delta x_i$. Эта сумма называется ***интегральной суммой*** (суммой Римана). Обозначим буквой λ длину наибольшего из сегментов Δx_i:

$$\lambda = \max(\Delta x_i).$$

<u>Определение.</u> Если при любых разбиениях отрезка $[a; b], a < b$ на сегменты Δx_i и при любом выборе точек $\mathrm{\gamma}_i$ в этих сегментах интегральные суммы

$$\sum_{i=1}^{n} f(\mathrm{\gamma}_i)\Delta x_i$$

имеют один и тот же конечный предел при стремлении λ к нулю $(\lambda \to 0)$, то этот предел называют определённым интегралом (в смысле Римана) от функции $f(x)$ по отрезку отрезка $[a;b]$ и обозначают символом $\int_a^b f(x)\,dx$.

Из определения следует, что определённый интеграл является пределом интегральных сумм:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\gamma_\mathrm{i})\Delta x_i\,. \qquad (6.1)$$

Функция $f(x)$ в равенстве (6.1) называется ***интегрируемой функцией.***

Условия интегрируемости функций.

1. Любая непрерывная на отрезке функция – интегрируемая на этом отрезке.

2. Функция будет интегрируемой на отрезке $[a;b]$, если она ***кусочно-непрерывна*** на этом отрезке и имеет конечное число точек разрыва первого рода на этом отрезке.

3. Функция будет интегрируемой на отрезке $[a;b]$, если она определена и монотонна на этом отрезке.

Для определённого интеграла используют термины:
число a – ***нижний предел интегрирования***;
число b – ***верхний предел интегрирования***;
переменная x – ***переменная интегрирования***;
функция $f(x)$ – ***подынтегральная функция***;
выражение $f(x)dx$ – ***подынтегральное выражение***.

6.2. Свойства

1. Замена переменной интегрирования

Из определения определённого интеграла следует, что численное значение определённого интеграла не зависит от имени переменной интегрирования:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt.$$

2. Связь пределов интегрирования

Определённый интеграл строился при условии, что нижний предел интегрирования меньше верхнего предела интегрирования $(a < b)$. Поэтому следствием определения являются два частных случая:

$$] \, a = b \Rightarrow \int_a^a f(t)dt = 0,$$

$$] \, a > b \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = -\int_b^a f(t)dt.$$

3. Свойство однородности

Интеграл не изменится, если постоянный множитель вынести за знак интеграла:

$$]C - const \;\Rightarrow \int_a^b Cf(x)\,dx = C\int_a^b f(x)\,dx.$$

4. Свойство аддитивности по подынтегральной функции

Интеграл от конечной алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{n} f_k\ (x)\right) dx = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k\,(x)dx.$$

Свойства однородности и аддитивности по подынтегральной функции приводят к свойству линейности определённого интеграла.

5. Свойство аддитивности по области интегрирования

Разобьём область интегрирования $[a; b]$ на n частей произвольной длины:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_{n-1} < x_n = b.$$

Точки x_i – узлы разбиения отрезка.

Интеграл от функции ***по отрезку*** (***на отрезке***) $[a; b]$ равен сумме интегралов от этой же функции по каждой области $[x_{k-1}; x_k]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)dx.$$

6. Свойство монотонности

Если две интегрируемые на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют неравенству $f(x) \le g(x)$ на этом отрезке, то такое же неравенство справедливо и для интегралов от этих функций по отрезку $[a; b]$:

$$]\, f(x) \le g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$$

7. Теорема о среднем

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, то существует такая точка $c \in (a; b)$, для которой справедливо равенство

$$\int_a^b f(x)dx = f(\text{c})\,(b - a).$$

Это свойство имеет простой геометрический смысл, если функция $f(x)$ неотрицательна ($f(x) \ge 0$). Значение определённого интеграла равно площади прямоугольника с основанием $|b - a|$ и высотой $f(c)$, где c – некоторая точка из интервала $(a; b), c \in (a; b)$ (рис. 6.1).

Число $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ называется средним значением $f(x)$ на $[a; b]$.

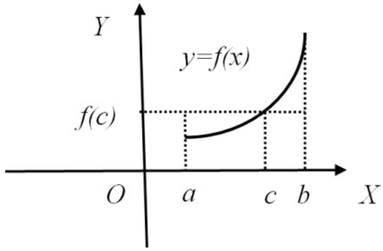

Рис. 6.1

8. Сохранение знака

Если функция $f(x)$ знакопостоянная на $[a;b]$, то интеграл $\int_a^b f(x)dx$ имеет тот же знак, что и подынтегральная функция $f(x)$.

9. Если $a < b$, то модуль интеграла от функции не превосходит интеграла от модуля функции:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

10. Оценка интеграла

Если числа m и M соответственно наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$:

$$m \le f(x) \le M,$$

то справедливо двойное неравенство

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a).$$

6.3. Вычисление

– Почему формула Ньютона–Лейбница обозначена двумя именами?
– Интеграл – он как песня. Ньютон написал к ней музыку, а Лейбниц – слова.
Из книги «Математики тоже шутят»

Формула Ньютона–Лейбница

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, а функция $F(x)$ является её первообразной на этом отрезке, тогда справедлива формула Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b. \tag{6.2}$$

Формулу Ньютона–Лейбница используют в тех случаях, когда можно найти первообразную.

Формулу Ньютона–Лейбница можно применять только в том случае, когда подынтегральная функция непрерывна в области интегрирования. Если функция кусочно-непрерывна в области интегрирования, область разбивается на промежутки непрерывности функции, для каждой такой области вычисляется интеграл по формуле (6.2). Численные значения полученных интегралов суммируется. Такая сумма – интеграл от кусочно-непрерывной функции.

Замена переменной

Рассмотрим определённый интеграл от функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a;b]$

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Предположим, что $x = g(t)$ и функция $g(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

– переменная t изменяется на отрезке $[c;d]$;

– функция $g(t)$ непрерывна на $[c; d]$;
– граничные точки отрезка $[c; d]$ соответствуют граничным точкам отрезка $[a; b]$: $g(c) = a, g(d) = b$;
– производная $g'(t)$ непрерывна на $[c; d]$.

При указанных выше условиях справедлива ***формула замены переменных***

$$\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f\big(g(t)\big)\, g'(t)dt.$$

Замечание 1. При вычислении определённого интеграла методом подстановки не надо возвращаться к старой переменной интегрирования и к старым пределам интегрирования.

Замечание 2. При вычислении определённого интеграла методом подстановки часто вместо подстановки в виде $x = g(t)$ используют подстановку в виде $t = q(x)$.

Интегрирование по частям

Предположим, что две функции $u = u(x), v = v(x)$ имеют на отрезке $[a; b]$ непрерывные производные ($u(x)$ и $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции). Для таких функций верна формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b u(x)d\, v(x) = u(x)\, v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)d\, u(x). \qquad (6.3)$$

Для доказательства этого равенства используем формулу дифференцирования произведения функций:

$$\big(u(x)\, v(x)\big)' = u(x)\ (x) + v(x)\, u'(x).$$

Проинтегрируем это равенство по отрезку $[a; b]$

$$\int_a^b \big(u(x)\, v(x)\big)'\, dx = \int_a^b \big(u(x)\, v'(x) + v(x)\, u'(x)\big)\, dx. \qquad (6.4)$$

По формуле Ньютона–Лейбница

$$\int_a^b \big(u(x)\,v(x)\big)'\,dx = u(x)\,v(x)\Big|_a^b.$$

Правую часть равенства (6.4) можно записать как сумму двух интегралов:

$$\int_a^b \big(u(x)v'(x) + v(x)u'(x)\big)\,dx =$$

$$= \int_a^b u(x)v'(x)\,dx + \int_a^b v(x)u'(x)\,dx =$$

$$= \int_a^b u(x)\,d\,v(x) + \int_a^b v(x)\,d\,u(x).$$

После преобразований равенство (6.4) можно записать в виде

$$\int_a^b u(x)\,d\,v(x) + \int_a^b v(x)\,d\,u(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

После переноса второго интеграла в правую часть равенства получаем формулу интегрирования по частям (6.3) для определённого интеграла:

$$\int_a^b u(x)\,d\,v(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\,d\,u(x).$$

Интегрирование чётных и нечётных функций

Рассмотрим интеграл от чётной функции $f(x)$ ***по симметричной области интегрирования*** $[-l; l]$, где $l > 0$. Справедливо следующее утверждение.

Интеграл от чётной функции по симметричной области интегрирования равен удвоенному интегралу по половине области интегрирования:

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx. \qquad (6.5)$$

Докажем справедливость равенства (6.5).

Из аддитивности определённого интеграла по области интегрирования следует, что

$$\int_{-l}^{l} f\,(x)\,dx = \int_{-l}^{0} f\,(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)\,dx. \qquad (6.6)$$

Сделаем подстановку в интеграле

$$\int_{-l}^{0} f\,(x)\,dx = (x = -t; dx = -dt) = -\int_{l}^{0} f\,(-t)\,dt =$$

$$= \int_{0}^{l} f\,(-t)\,dt. \qquad (6.7)$$

Из первого свойства определённых интегралов мы знаем, что значение интеграла не изменится при замене имени переменной интегрирования. Поэтому

$$\int_{0}^{l} f\,(-t)\,dt = \int_{0}^{l} f\,(-x)\,dx. \qquad (6.8)$$

Функция $f(x)$ чётная, поэтому

$$\int_{0}^{l} f\,(-x)\,dx = \int_{0}^{l} f\,(x)dx.$$

В результате таких элементарных преобразований равенство (6.6) преобразуется к равенству (6.5):

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \int_{0}^{l} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{l} f(x)\,dx.$$

Рассмотрим интеграл от нечётной функции $f(x)$ по симметричной области интегрирования $[-l; l]$, где $l > 0$. Справедливо следующее утверждение.

Интеграл от нечётной функции $f(x)$ по симметричной области интегрирования равен нулю:

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0. \qquad (6.9)$$

Докажем справедливость равенства (6.9). Для этого повторим преобразования (6.6 – 6.8). Функция $f(x)$ нечётная, поэтому

$$\int_{0}^{l} f(-x)\,dx = -\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

В результате мы приходим сразу к равенству (6.9):

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = -\int_{0}^{l} f(x)\,dx + \int_{0}^{l} f(x)\,dx = 0.$$

Запишем кратко полученный результат:

$$\int_{-l}^{l} f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} 2\displaystyle\int_{0}^{l} f(x)dx, \text{если } f(x) - \text{ чётная функция;} \\ 0, \text{если } f(x) - \text{нечётная функция.} \end{array}\right.$$

Примеры вычисления интегралов

Пример 1.

$$\int_{-1}^{2} x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_{-1}^{2} = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3.$$

Пример 2.

$$\int_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2} dx = \int_{1}^{4} \left(x^{-2} + x^{\frac{-3}{2}}\right) dx = \left(-\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Bigg|_{1}^{4} =$$

$$= \left(-\frac{1}{4} - \frac{2}{\sqrt{4}}\right) + 3 = \frac{7}{4}.$$

Пример 3.

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} = \left(\frac{dx}{x} = d(\ln x)\right) =$$

$$= \int_{1}^{e} \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2(x)}} = \arcsin(\ln x)\Bigg|_{1}^{e} =$$

$$= \arcsin(\ln e) - \arcsin(\ln 1) = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$$

Вычислим этот же пример вторым способом, с помощью замены переменных.

$$\int_{1}^{e} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} = \begin{pmatrix} \ln x = t \Rightarrow \dfrac{dx}{x} = dt \\ \text{меняем границы} \\ \begin{matrix} \text{гр.} & \text{н. пр.} & \text{в. пр.} \\ x & 1 & e \\ t & 0 & 1 \end{matrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

<u>Пример 4.</u>

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \left(\frac{dx}{x^2} = -d\left(\frac{1}{x}\right) \right) = -\int_1^2 e^{\frac{1}{x}} d\left(\frac{1}{x}\right) =$$

$$= -e^{\frac{1}{x}} \Bigg|_1^2 = e - \sqrt{e}.$$

Вычислим этот пример с помощью подстановки.

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} = t \Rightarrow \frac{dx}{x^2} = -dt \\ \text{меняем границы} \\ \begin{matrix} \text{гр.} & \text{н. пр.} & \text{в. пр.} \\ x & 1 & 2 \\ t & 1 & \frac{1}{2} \end{matrix} \end{pmatrix} = -\int_1^{\frac{1}{2}} e^t\, dt = -e^t \Bigg|_1^{\frac{1}{2}} = e - \sqrt{e}.$$

<u>Пример 5.</u>

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+3) \sin x dx = \begin{pmatrix} \text{интегрируем по частям} \\ x + 3 = u;\ du = dx \\ \sin x dx = dv;\ v = -\cos x \end{pmatrix} =$$

$$= -(x+3)\cos x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx =$$

$$= 3 + \sin x \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 3 + 1 - 0 = 4.$$

Упражнения

Вычислите следующие интегралы:

1. $\int_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

2. $\int_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}\ dx$.

3. $\int_{0}^{1} \text{arccsin} x dx$.

4. $\int_{0}^{1} x\, e^{-2x} dx$.

5. $\int_{0}^{3} \ln(x+3) dx$.

6. $\int_{0}^{\sqrt{3}} x\ \text{arctg} x dx$.

6.4. Геометрическое приложение определённых интегралов

Картинка стоит тысячи слов.
Английская пословица

Вычисление площади плоских фигур

Рассмотрим ***плоскую фигуру***, образованную графиком положительной функции $f(x)$, отрезком $[a; b]$ на оси абсцисс и прямыми $x = a; x = b$. Будем называть такую фигуру ***криволинейной трапецией*** (рис. 6.2). Покажем, что площадь S такой криволинейной трапеции можно вычислить с помощью определённого интеграла.

Разобьём отрезок $[a; b]$ на n частей точками x_i (***узлы разбиения***)

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b.$$

В каждом $\Delta x_i = [x_i; x_{i+1}]$ возьмём любую точку $\gamma_i : \forall\gamma_i \in [x_i; x_{i+1}]$. Построим n прямоугольников с основаниями Δx_i и высотами $f(\gamma_\mathrm{i})$. Площадь ΔS_i каждого из таких прямоугольников равна произведению ***высоты*** на ***основание***:

$$\Delta S_i = f(\gamma_\mathrm{i})\Delta x_i.$$

Площадь построенной ***ступенчатой фигуры*** S_{st} (рис. 6.2) равна сумме всех построенных прямоугольников:

$$S_{st} = \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_i)\Delta x_i.$$

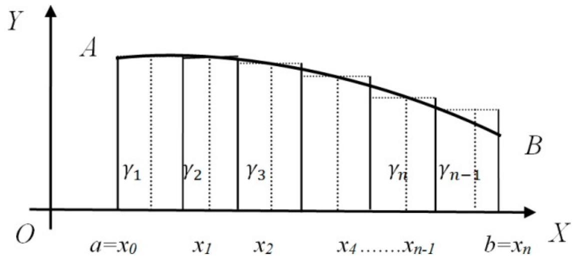

Рис. 6.2

Площадь нашей криволинейной трапеции приближённо равна площади ступенчатой фигуры:

$$S \approx \sum_{i=1}^{n} f(\gamma_\mathrm{i})\Delta x_i.$$

Будем теперь бесконечно увеличивать число узлов разбиения на отрезке $[a; b]$ и устремлять к нулю все Δx_i (устремлять к нулю $max\,\Delta x_i$). В этом случае ступенчатая фигура превратится в нашу криволинейную трапецию, и её площадь будет равна

$$S = \lim_{max\,(\Delta x_i)\to 0} \sum_{i=1}^{\infty} f(\gamma_\mathrm{i})\Delta x_{i.}$$

Правая часть последнего равенства – предел интегральных сумм, который по определению является определённым интегралом:

$$S = \int_a^b f(x)\,dx. \qquad (6.10)$$

Если функция $f(x)$ не положительна $[a; b]$: $f(x) \le 0$, тогда площадь соответствующей криволинейной фигуры вычисляется по формуле

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx \text{ или } S = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|. \quad (6.11)$$

Площадь фигуры, ограниченной графиками двух положительных функций $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, прямыми $x = a, x = b,$ при условии $f_2(x) \geq f_1(x),$ вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)\,dx. \quad (6.12)$$

Если плоская фигура имеет сложную форму, её можно ***разбить прямыми***, параллельными оси ординат, на такие части, к каждой из которых можно применить формулы (6.10–6.12).

Вычисление длины плоской кривой

Предположим, что на отрезке $[a; b]$ задана непрерывно дифференцируемая функция $y = f(x), (f'(x) -$ непрерывная функция$)$, графиком которой является кривая (дуга, линия) AB (рис. 6.3). Покажем, что длина L такой кривой может быть вычислена с помощью определённого интеграла.

Дугу AB разобьём на n частей точками $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$. Соединим эти точки хордами $AM_1,\ M_1\,M_2, \dots, M_{n-1}B$. Обозначим длины этих хорд соответственно через $\Delta l_1, \Delta l_n., \dots, \Delta l_n$. В результате мы построили ***ломаную линию***, вписанную в дугу AB (рис. 6.3). Точки $M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ называются ***вершинами вписанной ломаной***. Эти вершины лежат на графике функции $y = f(x)$, поэтому координаты любой вершины M_i равны $\big(x_i; f(x_i)\big) = (x_i; y_i)$. Длина такой ломаной равна сумме длин её ***звеньев*** (хорд):

$$L_{\text{лом}} = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i.$$

Предположим, что существует предел, к которому стремится длина $L_{лом}$ ломаной, вписанной в дугу AB, при стремлении к нулю максимальной длины звена этой ломаной $(\max(\Delta l_i) \to 0)$:

$$\exists \lim_{\max(\Delta l_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\, l_i.$$

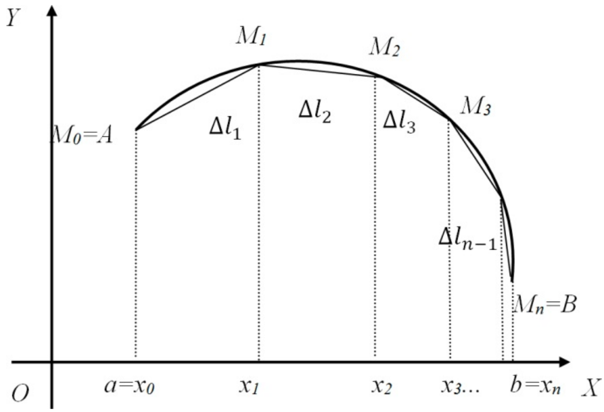

Рис.6.3

Предположим, что этот предел не зависит от выбора точек M_i на кривой *AB*. Кривая *AB* в этом случае называется ***спрямляемой.***

<u>Определение.</u> Длина *L* кривой *AB* это предел, к которому стремится длина $L_{\text{лом}}$ ломаной вписанной в дугу *AB*:

$$L = \lim_{\max(\Delta l_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta\, l_i. \qquad (6.13)$$

Обозначим разность координат ***соседних вершин*** ломаной ***через***

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \Delta y_i = y_{i+1} - y_i.$$

Рассмотрим одно ***i-е звено ломаной*** (рис. 6.4). Хорда $M_i M_{i+1}$ – гипотенуза прямоугольного треугольника $P_i\, M_i\, M_{i+1}$. Вычислим по формуле Пифагора длину Δl_i хорды $M_i M_{i+1}$:

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i. \qquad (6.14)$$

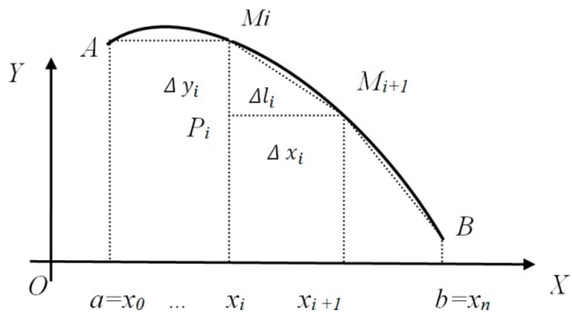

Рис. 6.4

Для последующих преобразований нам нужна теорема Лагранжа.

Теорема Лагранжа. Если функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a; b]$, то существует такая точка $c \in (a; b)$, в которой верно равенство

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Из этой теоремы следует, что в любом интервале $(x_{i+1}; x_i)$ существует точка c_i , в которой будет верно равенство

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = f'(c_i).$$

Теперь равенство (6.14) можно записать в виде

$$\Delta l_i = \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2} \Delta x_i.$$

Длина $L_{лом}$ вписанной ломаной равна сумме длин всех её звеньев, поэтому

$$L_{\text{лом}} = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2}\, \Delta x_i. \qquad (6.15)$$

Из определения длины кривой *AB* следует, что

$$L = \lim_{\max(\Delta l_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \lim_{\max(\Delta l_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2}\, \Delta x_i.$$

Последний предел по определению является определённым интегралом:

$$\lim_{\max(\Delta l_i) \to 0} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(f'(c_i)\right)^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

В результате мы пришли к формуле для вычисления длины дуги *AB*:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx. \qquad (6.16)$$

Вычисление объёма тела вращения

Предположим, что вокруг оси OX ***вращается*** криволинейная трапеция, ограниченная непрерывной линией $y = f(x)$, отрезком $a \leq x \leq b$ и прямыми $x = a, x = b$ (рис. 6.5). Полученная таким образом фигура называется ***телом вращения.***

Разобьём отрезок $[a; b]$ на n частей точками x_i

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b.$$

Через каждый узел разбиения проведём плоскость, ортогональную оси OX. Тело вращения будет разбито на n частей. В каждом отрезке $\Delta x_i = [x_i; x_{i+1}]$ возьмём любую точку γ_i: $\forall \gamma_i \in (x_i; x_{i+1})$. Каждую часть этого разбиения можно приближённо считать маленьким цилиндром с высотой Δx_i и с площадью основания

$$S_i = \pi R^2 = \pi \left(f(\gamma_i)\right)^2.$$

Пусть ΔV_i – объём такого цилиндра, тогда

$$\Delta V_i = \pi \left(f(\gamma_i)\right)^2 \Delta x_i.$$

Объединение всех построенных цилиндров – ступенчатое тело, вписанное в тело вращения. Объём такого ступенчатого тела равен сумме объёмов маленьких цилиндров:

$$V_{st} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \Delta V_i = \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(\gamma_{\mathrm{i}})\right)^2 \Delta x_i.$$

<u>Определение.</u> Объём V тела вращения это предел объёма ступенчатого тела:

$$V = \lim_{\max(\Delta V_i)\to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta V_i = \lim_{\max(\Delta V_i)\to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(\gamma_i)\right)^2 \Delta x_i.$$

Последний предел по определению является определённым интегралом:

$$\lim_{\max(\Delta V_i)\to 0} \pi \sum_{i=1}^{n} \left(f(\gamma_{\mathrm{i}})\right)^2 \Delta x_i = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx.$$

В итоге мы получили формулу для вычисления объёма тела вращения:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)\right)^2 dx.$$

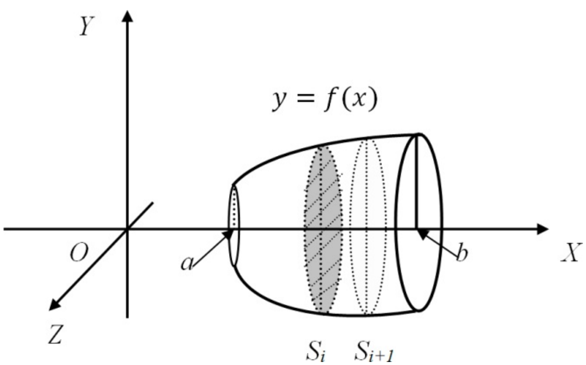

Рис. 6.5

Глава 7
ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ МАТЕМАТИКИ

7.1. Возникновение основных идей математического анализа

История интегрального и дифференциального исчисления начинается с далёкой древности (III в. до н.э.). Зарождение интегрального исчисления связано с необходимостью вычисления различных площадей и объёмов, определения положения центров тяжести фигур.

В работе «Послание Архимеда к Эратосфену» Архимед изложил мысли о составлении плоских фигур из линий, а тел – из плоскостей. Он рассматривал вписанные и описанные ступенчатые фигуры (тела), которые являются геометрическими прообразами интегральных сумм. К сожалению, математики XVII в. не были знакомы с содержанием книги «Послание Архимеда к Эратосфену». Два тысячелетия эта работа считалась потерянной. Её случайно нашли только в начале двадцатого века.

Первую попытку раскрыть метод Архимеда сделал немецкий астроном и математик Иоганн Кеплер (1571–1630). Он написал книгу «Новая стереометрия винных бочек». В этой книге плоская фигура раскладывалась на бесконечное число бесконечно малых элементов, площадь которых очень просто вычисляется. Сумма всех таких известных площадей была площадью исходной фигуры. Кеплер не только повторил идеи Архимеда, но дополнительно к этому вычислил объёмы 87-ми различных тел вращения.

Последователем идей Кеплера был итальянский учёный монах, ученик Галилея – Бонавентура Кавальери (1598–1647). Он пропагандировал идеи Кеплера. Основал «метод неделимых», написал и опубликовал несколько ценных работ, в которых показал применение этого метода и очень близко подошёл к современному понятию определённого интеграла.

Большой вклад в развитие понятий «определённый интеграл» и «бесконечно малые» внесли французские математики Пьер Ферма (1601–1665) и Блез Паскаль (1623–1662).

7.2. Пьер Ферма (Pierre Fermat)

Пьер Ферма родился в городе Бомон-де-Ломань на юго-западе Франции. Он учился в школе францисканского ордена в Бомоне, затем слушал право в университете Тулузы, где получил фундаментальное филологическое образование. Ферма писал стихи на латинском, французском и испанском языках. Комментировал тексты древних авторов. После университета стал адвокатом, а с 1631 г. был советником парламента Тулузы. На этой службе у Ферма было много свободного времени для занятий любимой математикой.

В 1636 г. Ферма стал посещать научный семинар в королевской библиотеке. Благодаря этим семинарам он познакомился с Б. Паскалем и показал ему свою работу «Метод определения максимума кривых и касательных к ним».

Ферма один из первых понял, что максимум или минимум достигаются там, где скорость изменения функции равна нулю. Ферма решил задачу о нахождении такого конуса и такого цилиндра, вписанных в шар, объёмы которых были бы наибольшими. Благодаря Ферма методы отыскания максимумов и минимумов стали использовать для нахождения оптимальных решений различных технических задач.

В 1934 г. нашли заметку Ньютона, где он писал, что при разработке дифференциального исчисления, он опирался на «метод построения касательных месье Ферма».

Пьер Ферма является одним из основателей дифференциального исчисления.

7.3. Блез Паскаль (Blaise Pascal)

Блез Паскаль – один из самых знаменитых людей в истории человечества. Паскаль прожил всего 39 лет, но вошёл в историю как выдающийся математик, физик, философ и писатель. Б. Паскаль – один из создателей математического анализа, теории вероятностей, вычислительной техники и проективной геометрии. Паскаль особенно популярен во Франции. Там его считают прекрасным писателем. Ему посвящено большое количество книг.

Отец Паскаля, Этьен Паскаль, служил юристом и сборщиком налогов в парламенте города Клермон-Ферран. В свободное время он много и серьёзно занимался математикой. В математике существует кривая 4-го порядка, которая названа его именем, это улитка

Паскаля. Собственные достижения Э. Паскаля в математике были скромными, но его фундаментальные знания позволяли ему поддерживать математические контакты с большинством французских математиков. С великим Ферма он обменивался трудными задачами. В споре Ферма с Рене Декартом о задачах на максимум и минимум Э. Паскаль выступал на стороне Ферма.

Э. Паскаль много внимания уделял своим детям. Он разработал свою систему образования. На первых порах он исключил математику. Отец боялся, что ранняя увлечённость математикой помешает гармоническому развитию, а напряжённые размышления повредят слабому здоровью сына. Однако 12-летний мальчик, узнав о существовании геометрии, которой занимался его отец, уговорил его рассказать о математике. Б. Паскаль настолько увлёкся математикой, что отец разрешил ему пользоваться собственной математической библиотекой. С 13-ти лет Паскаль вместе с отцом посещал знаменитый математический кружок Мерсенна, в который входило большинство парижских математиков.

Блез Паскаль унаследовал от отца добрые отношения со многими математиками и тяжёлые отношения с Декартом.

Много задач, которые изучал Б. Паскаль уже взрослым, не имели элементарных решений. Для решения некоторых из таких задач Паскаль разработал теорию, близкую к теории дифференциального и интегрального исчисления.

Лейбниц, который делит с Ньютоном славу создателя этой теории, писал, что когда он познакомился с работами Паскаля, его «озарило новым светом». Он удивился, насколько Паскаль был близок к построению общей теории, но неожиданно остановился, будто «на глазах его была пелена».

Интуиция математиков, которые заложили фундамент дифференциального и интегрального исчисления, сильно опережала возможности строгих доказательств. Математический язык был тогда недостаточно развит. Для выхода из такой ситуации позже были введены новые понятия и специальная символика.

Паскаль не использовал никакую символику, но он виртуозно владел языком. Паскаль-писатель помог Паскалю-математику ясно и точно изложить свой взгляд на новый способ решения многих задач с помощью дифференциального и интегрального исчисления.

Математики XVII в. подготовили почву для создания интегрального и дифференциального исчисления. Оставалось установить в общей форме основные понятия нового исчисления, взаимосвязь новых понятий, ввести удачную символику для новых понятий, алгоритмы соответствующих вычислений. Эти задачи были решены Ньютоном и Лейбницем по-разному и независимо друг от друга.

7.4. Исаак Ньютон (Isaac Newton)

Имя Исаака Ньютона (1643–1727) известно миллионам людей, его называют величайшим учёным в истории человечества. Он открыл многие законы механики, закон всемирного тяготения. В математике он является одним из создателей дифференциального и интегрального исчисления. В астрономии сделал открытия в небесной механике, построил зеркальный телескоп.

Ньютон писал: «Если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов». В своей научной деятельности Ньютон придерживался принципа, который выдвинул Галилей, – искать не физическое, а математическое описание.

В жизни Ньютона нет ярких внешних событий. Учёба, научная деятельность, работа в Монетном дворе. Но время, в которое жил Ньютон, было время возникновения английской опытной науки, сыгравшей большую роль в истории мировой культуры и, конечно, в научной жизни Ньютона.

В школе Ньютон учился средне, особых надежд не подавал. В свободное от учёбы время он делал механические игрушки. Построил мельницу, которую приводила в движение мышь. Изготовил водяные и солнечные часы. Запускал воздушных змей с прикреплёнными к ним фонариками. Ньютон много читал, рисовал, писал стихи.

В 1661 г. Ньютон поступил в Кембриджский университет в Тринити-колледж (колледж Святой Троицы). Там он встретился с выдающимся учителем – Исааком Барроу. С этого момента и до 1696 г. жизнь Ньютона связана с Кембриджем. В 1665 г. из-за эпидемии чумы он уехал на два года в деревню Вусторн на юго-восток Англии. В этот период Ньютон начал заниматься научной работой по механике, математике и оптике. Он понял, что открытый им закон всемирного тяготения даёт ключ ко всей механике. Ньютон разработал общий метод решения многих задач математического анализа. Он установил, что белый свет включает в себя все цвета радуги от красного до фиолетового.

Результаты своей научной работы Ньютон не спешил опубликовывать. Классическое произведение Ньютона «Математические начала натуральной философии» вышло из печати только в 1687 г.

После публикации этой книги имя Ньютона стало широко известно. Но «Математические начала натуральной философии» были очень трудны для чтения, поэтому появились популярные изложения этого сочинения. Постепенно, почти за сто лет, математики довели работу Ньютона до полной ясности.

Известный математик М. Клейн так определил значение «…Начал…» Ньютона: «Эта книга открыла перед человечеством новый мир – Вселенную, управляемую единым сводом физических законов, которые имеют точное математическое выражение. «…Начала…» содержат грандиозную схему, которая включает падение камня, океанские приливы, движения планет и их естественных спутников, блуждание комет и величественное движение звёздного свода. Работа Ньютона доказала всему миру, что природа основана на математических принципах и что истинные законы природы описываются математическим языком».

В возрасте 27-ми лет Ньютон стал профессором Кембриджского университета, а затем членом Лондонского королевского общества.

Анализом бесконечно малых занимались многие учёные, начиная с Архимеда и включая некоторых учёных XVII в. Но именно Ньютон обобщил и систематизировал труды своих предшественников. В результате он построил интегральное и дифференциальное исчисление. Ньютон пришёл к понятию производной, когда определял в механике скорость прямолинейного неравномерного движения. Функцию от времени он называл флюэнтой, то есть текущей величиной (от латинского слова *fluere* – течь), а производную называл флюксией. Ньютон решал обратные задачи, в которых по флюксиям надо было находить флюэнты. Говоря современным языком: по производным находились первообразные.

Ньютон был уверен, что мир сотворён в соответствии с математическими принципами. Учёный считал, что задача науки состоит в том, чтобы раскрывать блистательные замыслы творца.

М. Клейн писал: «Занятие наукой было для Ньютона своего рода богослужением». Ньютон всю жизнь изучал и интерпретировал религиозные произведения, а в конце жизни целиком посвятил себя богословию (теологии), писал богословские книги (трактаты).

Ньютон верил, что Бог сотворил мир. Он писал: «Мне хотелось найти такие начала, которые были бы совместимы с верой людей в Бога; …мой труд оказался не напрасным».

В 1696 г. начался лондонский период жизни Ньютона – время его прижизненной славы и признания. Он стал директором Монетного двора, был членом парламента.

Исаак Ньютон был похоронен с большими почестями в Вестминстерском аббатстве.

В Кембридже на статуе Ньютона высечено: «Разумом он превосходил род человеческий». В доме, где он родился, есть запись: «Природа и её законы были покрыты мраком. Бог сказал: да будет Ньютон – и стал свет».

Исаака Ньютона очень высоко почитали и почитают в настоящее время во всём мире.

Сам о себе Ньютон сказал так: «Не знаю, чем я могу казаться миру, но сам себе я кажусь только мальчиком, который играет на берегу и отыскивает камешек более цветистый или красивую раковину, а в это время великий океан истины расстилается передо мной неисследованным».

7.5. Готфрид Вильгельм Лейбниц (Gottfried Wilhelm Leibnitz)

В истории науки имена Исаака Ньютона и Готфрида Лейбница (1646–1717) стоят рядом. Лейбниц был противоположностью Ньютона. Ньютон никогда не покидал Англии. Лейбниц, став дипломатом, не только был в разных странах Европы, но и жил там. Ньютон с детства увлекался изобретениями, а Лейбниц увлекался философией и поэзией.

Лейбниц имел яркий математический талант, но кроме математики он занимался философией, историей, лингвистикой, биологией, геологией.

Отец Лейбница, Фридрих Лейбниц был профессором нравственной философии в университете города Лейпцига. Когда Лейбницу было всего 5 лет, его отец умер. Готфрида и его сестру воспитывала их мать. В 8 лет ему разрешили пользоваться библиотекой отца. Почти все книги были написаны на греческом и латинском языках. Мальчик Лейбниц самостоятельно выучил латынь и греческий. В своей биографии Лейбниц писал: «Две вещи принесли мне огромную пользу, хотя они часто приносят вред. Во-первых, я был самоучкой; во-вторых, как только в какой-то науке я приобретал первые понятия, я всегда искал новое часто потому, что не успевал достаточно усвоить первые понятия».

В 15 лет Лейбниц стал студентом Лейпцигского университета. В 20 лет – доктор права и дипломат. В 1672 г. Лейбниц как дипломат был в Париже. Там он познакомился с Христианом Гюйгенсом. Под влиянием этого учёного начал заниматься математикой. Изучил труды Декарта, Ферма, Паскаля. Через четыре года Лейбниц сам подошёл к открытию дифференциального и интегрального исчисления. Первая печатная работа по дифференциальному исчислению была опубликована в 1684 г.

Лейбниц придумал названия «дифференциальное исчисление», «интегральное исчисление», обозначения дифференциалов dx, dy, знак интеграла $\int$. Благодаря Лейбницу математики стали пользоваться знаком равенства « = », знаком умножения « · ». Лейбниц ввёл в математику термины «функция» и «координаты».

У Лейбница появилась школа, главными представителями которой были братья Бернулли: Якоб (1654–1705) и Иоганн (1667–1748), а также Гийом Франсуа де Лопиталь (1661–1704) – автор первого учебника по дифференциальному исчислению. Созданию школы содействовал научный энтузиазм Лейбница, непрерывная публикация его научных работ и большая научная переписка.

Идеи Лейбница были поддержаны братьями Бернулли, уроженцами города Базеля в Швейцарии. Бернулли не только освоили метод Лейбница, но и решили с помощью этого метода широкий круг задач.

Работы Лейбница заинтересовали знатного парижанина, маркиза Лопиталя. Именно Лопиталь стал автором первого учебника по новому исчислению, который был опубликован в 1690 г. под названием «Анализ бесконечно малых для познания кривых линий». Лопиталь много заимствовал у братьев Бернулли, под руководством которых он изучал новое исчисление. Лопиталь собрал, систематизировал и педагогически обработал весь формальный аппарат нового исчисления, подобрал необходимые примеры и задачи. После создания первого учебника началось распространение новых идей. В XVIII столетии исчисление бесконечно малых становится главным инструментом в математике.

Лейбниц был чрезвычайно разносторонним человеком. Около 40 лет он совершенствовал свою счётную машину, которая могла выполнить четыре арифметических действия и извлекать квадратные корни. Он пришёл к идее парового двигателя, двоичного исчисления, интересовался китайской философией, старался помочь объединить разрозненную тогда Германию.

К началу XVIII столетия слава Лейбница гремела по всей Европе. Он вёл большую научную переписку, встречался со многими учёными и монархами. Лейбниц стал основателем и президентом (с 1700 г.) Бранденбургского научного общества, которое позже стало Берлинской Академией наук. По просьбе Петра I Лейбниц разрабатывал проекты развития образования, научных исследований и государственного управления в России.

Подобно Ньютону, Лейбниц рассматривал научную деятельность как религиозную миссию. Гармонию между реальным миром и миром математическим Лейбниц объяснял единством реального мира и Бога. Главный тезис Лейбница состоял в том, что наш мир – самый совершенный из всех миров и что рациональное мышление открывает его законы.

Дальнейшее развитие интегрального и дифференциального исчисления связано со многими именами математиков XVIII в.: Эйлер, Лагранж, Клеро, Д. Бернулли, Лаплас, Даламбер, Лежандр, Риккати, Коши и др. Остановимся на двух именах.

7.6. Жозеф Луи Лагранж (Joseph Louis Lagrange)

Император Наполеон Бонапарт любил беседовать с Лагранжем на философские, государственные и математические темы. Наполеон считал Лагранжа и самым скромным математиком XVIII в., и величественной пирамидой математических наук. Он сделал Лагранжа сенатором, графом и командиром ордена почётного легиона. Король Франции Людовик XVI и королева Мария Антуанетта осыпали почестями Лагранжа. Поселили его в Лувре. После казни королевских особ революционная «общественность» не тронула Лагранжа.

Жозеф Луи Лагранж (1736–1813) родился в ныне итальянском городе Турине. Дед его был французом, женился на итальянке. Жозеф Луи был крещён под итальянским именем Джузеппе Людовико Лагранж. Лагранжа называют французским математиком. В итальянской энциклопедии он – итальянский учёный.

Лагранж был одиннадцатым и последним ребёнком в семье. Десять его братьев и сестёр умерли в раннем детстве. Отец ко времени рождения Лагранжа потерял своё состояние. Позже Лагранж писал: «Если бы я унаследовал состояние, то мне, вероятно, не пришлось бы связать свою судьбу с математикой».

В детстве Лагранж увлекался латынью и случайно изучил научную книгу «О преимуществах аналитического метода», написанную на латыни. Книга была издана в 1693 г. Автор книги Эдмунд Галлей – друг Ньютона. Книга посвящена применению математического анализа в оптике. С тех пор и на всю жизнь Лагранж «заболел» математическим анализом. Именно Лагранж в 1797 г. в своей работе «Теория аналитических функций» ввёл в обиход термины «производная», «первообразная» и обозначения y' и $f\,'(x)$.

К семнадцати годам Лагранж изучил все известные к тому времени труды по математике и приступил к самостоятельным исследованиям.

В августе 1755 г. Лагранж послал письмо Эйлеру, в котором изложил новые идеи в вариационном исчислении. Эйлер очень высоко оценил содержание этого письма. В 19 лет Лагранж становится профессором Королевской артиллерийской школы. Ещё через год его избирают в Берлинскую академию наук. В родном Турине он организовал свою Академию наук. По просьбе Эйлера Лагранж переезжает жить в Берлин и занимает место руководителя Берлинской Академии, вместо уехавшего в Санкт-Петербург Эйлера.

Лагранж настолько плодотворно использовал математику в механике, что пошёл дальше великого Ньютона. Сейчас классическая механика наполовину может быть названа «лагранжевой». Во время берлинского периода Лагранжу пять раз присуждали премии Парижской Академии за работы в области небесной механики.

Король Пруссии Фридрих II был покровителем Лагранжа и проводил многие часы в беседах с ним. Через полгода после смерти Фридриха II Лагранж (1787) переехал в Париж. В 1790 г. он был включён в комиссию по стандартизации системы мер и весов. Именно благодаря Лагранжу была введена десятичная метрическая система.

В 1794–1795 гг. во Франции открылись две знаменитые школы: Политехническая школа (Ecole Polytechique) для подготовки офицеров и инженеров и Нормальная школа (Ecole Normale) для подготовки учителей. В этих школах Лагранж читал лекции по математическому анализу и элементарной математике.

7.7. Огюст Луи Коши (Augustin Louis Cauchy)

Коши Огюст Луи (1789–1857) французский математик, почётный член Петербургской Академии Наук. Он окончил Политехническую школу и Школу мостов и дорог в Париже; был профессором Политехнической школы. Коши издал курс лекций, в которых дал строгие обоснования математического анализа.

После революции Коши был в изгнании в Турине и Праге. Вернулся в Париж он только в 1838 г. и получил должность профессора в Сорбонском университете.

Всё это время Коши интенсивно занимается математикой. Он был необычайно разносторонним и работоспособным математиком. Коши опубликовал более 800 научных работ. Были периоды, когда Коши каждую неделю представлял в Парижскую Академию новые мемуары. Поэтому с 1835 г. из-за него было введено ограничение на объём статей (не более четырёх страниц).

Одной из первых теорем, доказанных Коши в «Курсе анализа» 1821 г., была теорема о промежуточном значении непрерывной функции, поэтому часто её называют теоремой Коши.

Большую роль сыграл Коши в создании теории пределов. Пределами последовательностей фактически пользовались ещё Архимед, а затем Галилей, Кавальери, Блез Паскаль и Сент-Винцент, который в 1764 г. ввёл в употребление термин «*limit*» (предел). Ньютон первым понял важность этого понятия. Но строгое понятие предела функции в точке ввёл только Коши (1820).

Коши создал стройную и внутренне не противоречивую теорию пределов. Благодаря этому ушёл мистический туман, которым до него было покрыто понятие бесконечно малого. Коши дал определение понятия непрерывности функции в точке, определение интеграла как предела сумм.

Благодаря бурному развитию математического анализа в XVIII в. государственные деятели многих европейских стран оценили великую пользу и возможности математики. Появились математики, которым государство платило деньги за решённые задачи и за разработки новых математических идей. Поэтому математика в это время развивалась в основном в стенах академий наук: в Париже, Берлине, Петербурге, Лондоне.

В заключение отметим, что исчисление бесконечно малых в первый период своего развития вызывало много споров и несогласий. Причиной тому было отсутствие точных определений и точных понятий. В течение XIX в. этот недостаток полностью устранили. В настоящее время интегральное и дифференциальное исчисление – стройная, непротиворечивая и важная часть математики.

Приложение 1
Алгебра комплексных чисел

Комплексное число можно определить как упорядоченную пару вещественных чисел: $z = (x, y)$ или в виде $z = x + iy$. Последний вид записи называют ***алгебраической формой комплексного числа.***

Множество всех комплексных чисел обозначается латинской буквой C **(**первая буква латинского слова *complex*).

П.1. Алгебраическая форма комплексного числа

Основные понятия

Введём основные понятия для комплексного числа $z = x + iy$.
$x -$ ***действительная часть комплексного числа***,
$y -$ ***мнимая часть комплексного числа***,
$i -$ ***мнимая единица***, которая по определению удовлетворяет условию $i^2 = -1$ $\left(\sqrt{-1} = i\right)$.

Действительная часть комплексного числа обозначается символом **Re *z***, мнимая часть обозначается символом **Im *z***:

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z.$$

Если действительная часть комплексного числа равна нулю, такое комплексное число называется ***мнимым числом (чисто мнимым числом)***:

$$z = 0 + iy = iy \Rightarrow z - \text{ мнимое число (чисто мнимое число).}$$

Если мнимая часть комплексного числа равна нулю, такое комплексное число является действительным числом:

$$z = x + i0 = x \Rightarrow z - \text{действительное число } z \in R.$$

Множество действительных чисел принадлежит множеству комплексных чисел: $R \subset C$.

Два комплексных числа $z_1 = x + iy$ и $z_2 = x - iy$ называются ***комплексно сопряжёнными числами***:
число $z_1 = x + iy$ ***сопряжённое числу*** $z_2 = x - iy$,
число $z_1 = x - iy$ ***сопряжённое числу*** $z_2 = x + iy$.

Если комплексное число имеет вид $z = x + iy$, то сопряжённое к нему число записывается в виде $\bar{z}$: $\bar{z} = x - iy$.

Очевидно следующее равенство $\overline{(\bar{z})} = z -$ сопряжённое к сопряжённому есть исходное комплексное число.

Комплексное число, у которого действительная и мнимая части одновременно равны нулю, является нулём:

$$z = 0 + i0 = 0.$$

<u>Определение.</u> Два комплексных числа

$$z_1 = x_1 + iy_1 \text{ и } z_2 = x_2 + iy_2$$

называются равными, если равны их действительные и мнимые части:

$$z_1 = z_2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}.$$

<u>Алгебраические операции над комплексными числами</u>

1. Сложение.

Суммой двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число $z = z_1 + z_2$ вида

$$z = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \quad (1)$$

<u>Определение.</u> Два комплексных числа называются противоположными, если их сумма равна нулю.

Из определения следует, что числа $z = x + iy$ и $z = -x - iy$ являются противоположными числами.

2. Вычитание.

Разностью двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число $z = z_1 - z_2$ вида

$$z = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \quad (2)$$

3. Произведение.

Произведением двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число $z = z_1 z_2$ вида

$$z = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (3)$$

Формулу (3) можно не запоминать. Её легко вывести, если просто умножить двучлен $(x_1 + iy_1)$ на двучлен $(x_2 + iy_2)$ и использовать равенство $i^2 = -1$:

$$z = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + iiy_1y_2 =$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1).$$

4. Деление.

Частным от деления двух комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называется число

$$z = x + iy = \frac{z_1}{z_2},$$

которое удовлетворяет равенству

$$z_1 = z_2\, z. \tag{4}$$

В формуле (4) мы предполагаем, что $z_2 \neq 0$.

Формулы для нахождения действительной и мнимой частей частного z (результат деления) могут быть получены двумя способами.

Первый способ. Формулы легко выводятся с помощью равенства (3) и определения равенства комплексных чисел:

$$z_2z = (x_2 + iy_2)(x + iy) = (x_2x - y_2y) + i(x_2y + xy_2),\ z_1 = x_1 + iy_1 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_2x - y_2y = x_1 \\ x_2y + xy_2 = y_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1 \\ xy_2 + yx_2 = y_1 \end{cases}\left|\begin{matrix} x_2 \\ y_2 \end{matrix}\right. + \Rightarrow x(x_2^2 + y_2^2) = x_1x_2 + y_1y_2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,. \tag{5}$$

$$\begin{cases} xx_2 - yy_2 = x_1 \\ xy_2 + yx_2 = y_1 \end{cases}\left|\begin{matrix} (-y_2) \\ x_2 \end{matrix}\right. + \Rightarrow x(x_2^2 + y_2^2) = y_1x_2 - x_1y_2 \Rightarrow$$

$$y = \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\,. \tag{6}$$

Второй способ. Формулы (5) и (6) могут быть получены с помощью числа $\overline{z_2}$, сопряжённого знаменателю:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2},$$

$$z = x + iy = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Свойства алгебраических операций

В алгебре комплексных чисел сохраняются основные законы сложения и умножения:

1. $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ – коммутативный закон сложения;
2. $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ – ассоциативный закон сложения;
3. $z_1 z_2 = z_2 z_1$ – коммутативный закон умножения;
4. $(z_1 z_2)\, z_3 = z_1 (z_2 z_3)$ – ассоциативный закон умножения;
5. $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ – дистрибутивный закон относительно сложения.

Свойства комплексно сопряжённых чисел

1. Число, сопряжённое сумме чисел, равно сумме чисел, сопряжённых слагаемым:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}.$$

2. Число, сопряжённое произведению чисел, равно произведению чисел, сопряжённых множителям:

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\ \overline{z_2}.$$

3. Число, сопряжённое отношению чисел, равно отношению чисел, сопряжённых соответственно числителю и знаменателю:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

4. Произведение комплексно сопряжённых чисел – действительное число:

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2.$$

5. Сумма комплексно сопряжённых чисел – действительное число:

$$z + \bar{z} = 2x = 2\mathrm{Re}\, z.$$

Графический образ комплексного числа

Рассмотрим плоскость с декартовой прямоугольной системой координат Oxy. Любому комплексному числу $z = x + iy$ можно поставить в соответствие точку $M(x; y)$ с абсциссой x и ординатой y. Если построить радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$, начало которого совпадает с началом координат, а конец в точке $M(x; y)$, то такой вектор тоже можно поставить в соответствие комплексному числу $z = x + iy$.

Можно сказать, что графическим образом комплексного числа является точка или радиус-вектор (рис. 1).

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется комплексной плоскостью. Ось OX, в этом случае, называют ***действительной осью*** Re, ось OY называют ***мнимой осью*** Im.

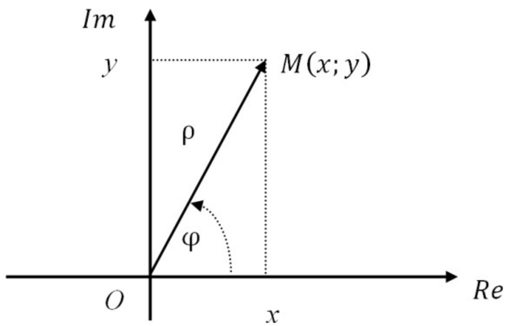

Рис. 1

В алгебре комплексных чисел ещё используют тригонометрическую форму комплексных чисел. Для знакомства с таким представлением комплексных чисел нам нужна полярная система координат.

П.2. Полярная система координат

Переходим к полярным координатам –
это будет приключение.
Из книги «Математики тоже шутят»

Для определения положения точки на плоскости удобно использовать полярную систему координат, которая определяется следующим образом.

На плоскости выбирают произвольную (любую) точку , обозначают её буквой O и называют ***полюсом***. От полюса проводят горизонтальный луч и называют его ***полярной осью***. Выбирают масштаб для измерения длин и положительное направление для измерения углов. Положительное направление отсчитывается против часовой стрелки от полярной оси.

Любая точка M на плоскости с полярной системой координат однозначно определяется расстоянием от этой точки до полюса O и углом φ между полярной осью и отрезком OM (рис. 2). Для однозначности предполагается, что

$$-\pi \le \varphi < \pi \text{ или } 0 \le \varphi < 2\pi. \qquad (7)$$

Отрезок OM называется полярным радиусом и обозначается буквой ρ или r. Угол φ называется полярным углом. Каждая точка на плоскости определяется двумя полярными координатами: $M(\rho;\ \varphi)$, где ρ – полярный радиус, φ – полярный угол.

В математике часто в одной задаче используют и декартову прямоугольную и полярную системы координат. Поэтому необходимы формулы перехода из одной системы координат в другую. Для вывода этих формул совместим две системы координат. Полюс совместим с началом декартовой системы, полярную ось с положительным направлением оси абсцисс (рис. 3).

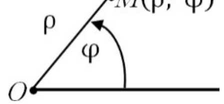

Рис. 2

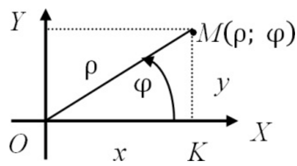

Рис. 3

Формулы перехода из полярной системы координат в декартову

Из прямоугольного треугольника OMK очевидно, что

$$x = \rho\cos\varphi\,;\; y = \rho\sin\varphi\,. \tag{8}$$

Формулы перехода из декартовой системы координат в полярную

В треугольнике OMK гипотенуза равна полярному радиусу, а катеты равны абсциссе и ординате точки M, поэтому

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2};\ \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ ;\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,. \tag{9}$$

Для нахождения полярного угла надо учитывать, в какой четверти находится точка в декартовой системе координат:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x}, \text{если } x > 0, y \geq 0; \\ +\pi + \arctan\dfrac{y}{x}, \text{ если } x < 0, y \geq 0; \\ -\pi + \arctan\dfrac{y}{x}, \text{если } x < 0, y < 0; \\ \dfrac{\pi}{2}, \text{если } x = 0, y > 0; \\ -\dfrac{\pi}{2}, \text{если } x = 0, y < 0. \end{cases} \tag{10}$$

Замечание. Полярные координаты это криволинейные координаты. Координатными линиями в этой системе координат являются лучи, выходящие из полюса, и концентрические окружности с центром в полюсе.

П.3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Алгебраическую форму комплексного числа можно преобразовать к тригонометрическому виду, если перейти к полярной системе координат:

$$z = x + i\,y = \rho\cos\varphi + i\,\rho\sin\varphi = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi\,).$$

Тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (11)$$

В алгебре комплексных чисел полярный радиус ρ называется **модулем** комплексного числа и обозначается символом $|\boldsymbol{z}|$ или $\mathbf{mod}\,\boldsymbol{z}$. Полярный угол называется аргументом комплексного числа и обозначается символом $\mathbf{Arg}\,\boldsymbol{z}$. Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ определяется с точностью до аддитивной константы:

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \arg z + 2k\pi,$$

где $\arg z$ — главное значение аргумента, $\forall k \in Z$.

Для однозначности в качестве аргумента комплексного числа можно брать только его главное значение, которое удовлетворяет неравенству

$$-\pi < arg\, z \leq \pi \ \Rightarrow\ -\pi < \varphi \ \leq \pi.$$

<u>Замечание.</u> Аргумент комплексного числа $z = 0$ может быть любым, а модуль равен нулю.

<u>Свойства модулей</u>

1. Модуль комплексного числа всегда неотрицателен. Модуль равен нулю, если комплексное число рано нулю:

$$|z| \geq 0;\ \text{если } |z| = 0, \text{то } z = 0.$$

2. ***Неравенство треугольника***. Модуль суммы не превосходит суммы модулей:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

3. Модуль произведения равен произведению модулей:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

4. Модуль отношения равен отношению модулей:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

5. Модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между соответствующими точками комплексной плоскости (рис. 4):

$$|z_1 - z_2| = AB.$$

6. Модули комплексно сопряжённых чисел равны. Аргументы имеют противоположные знаки. Точки комплексной плоскости, соответствующие сопряжённым числам, симметричны относительно оси абсцисс (рис. 5).

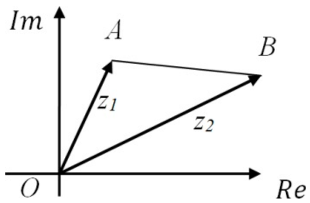

Рис. 4

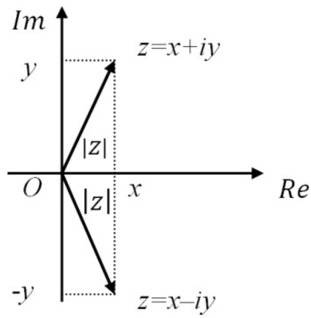

Рис. 5

Показательная (экспоненциальная) форма комплексного числа

В алгебре комплексных чисел часто используется знаменитая ***формула Эйлера***:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi. \qquad (12)$$

Справедливость этой формулы доказывается в теории рядов (высшая математика 1 курс). Из формулы (12) следует периодичность $e^{i\varphi}$:

$$e^{i\varphi} = e^{i\varphi + 2k\pi}.$$

С помощью формулы Эйлера любое комплексное число $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно записать в виде $(z = \rho e^{i\varphi})$ – ***показательная (экспоненциальная) форма комплексного числа.*** Показательная форма комплексного числа удобна для вывода формул, которые используются в операциях с комплексными числами.

Операции с комплексными числами в показательной и тригонометрической форме

1. Умножение.

Умножим два комплексных числа в показательной форме:

$$z_1 z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1}\,\rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1\rho_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \tag{13}$$

Запишем равенство (13) в тригонометрической форме

$$z_1 z_2 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\,\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= \rho_1\rho_2\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big) =$$

$$= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \tag{14}$$

Равенства (13) и (14) – очень простые формулы для вычисления произведения комплексных чисел. При умножении комплексных чисел их модули ***перемножаются***, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|,\ \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{15}$$

2. Деление.

Разделим два комплексных числа в показательной форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 e^{i\varphi_1}}{\rho_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \tag{16}$$

Используем формулу Эйлера для записи равенства (16) в тригонометрической форме:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\ \sin(\varphi_1-\varphi_2)). \tag{17}$$

Формулу (17) можно получить с помощью числа сопряжённого знаменателю и простейших тригонометрических формул для вычисления косинуса и синуса разности двух углов:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{\rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big)}{\sin^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_2} =$$

$$= \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)).$$

При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются:

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2. \qquad (18)$$

3. Возведение в степень с натуральным показателем.

Мы знаем, что при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются (15). Это свойство справедливо для любого конечного числа множителей. Рассмотрим число $z = \rho e^{i\varphi}$

$$z^n = z \cdot z \cdot \ldots \cdot z \ (n \text{ множителей}) \Rightarrow \left(\rho e^{i\varphi}\right)^n = \rho^n e^{i\varphi n}. \qquad (19)$$

Из равенства (19) следует, что степень комплексного числа с натуральным показателем тоже является комплексным числом.

Запишем полученный результат в тригонометрической форме

$$z^n = \big(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (20)$$

Формула (20) называется ***формулой Муавра***.

При возведении в степень с натуральным показателем модуль возводится в степень *n, а* аргумент умножается на число n:

$$|z^n| = \rho^n, \arg(z^n) = n\varphi. \qquad (21)$$

4. Извлечение корня.

Предположим, что мы знаем комплексное число $z = \rho e^{i\varphi}$, которое удовлетворяет равенству

$$z = w^n, \text{где } n - \text{ натуральное число}. \qquad (22)$$

Из этого равенства следует, что

$$w = \sqrt[n]{z}\ (w - \text{корень } n - \text{ой степени из } z).$$

Найдём такие числа w, которые удовлетворяют равенству (22). Для этого запишем w в показательной форме и возведём его в степень n:

$$w = re^{i\alpha} \Rightarrow\ w^n = r^n e^{in\alpha},$$

где величины r и α неизвестны.

Запишем равенство (22) в показательной форме.

$$\rho e^{i\varphi} = r^n e^{in\alpha}.$$

Используем определение равенства комплексных чисел в показательной форме

$$r^n = \rho, n\alpha = \varphi + 2\pi k.$$

Из этих равенств находим неизвестные величины

$$r = \sqrt[n]{\rho} - \text{арифметический корень}, \alpha = \frac{\varphi + 2\pi k}{n},\ \ k \in Z. \quad (23)$$

Мы построили формулу для нахождения всех корней. Обозначим их символом w_k

$$w_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\ \sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right). \quad (24)$$

В качестве параметра k берутся только значения $k = 0,1, 2, 3, \dots, n - 1,$ так как (потому что) при остальных значениях k корни w_k будут повторяться.

В результате мы приходим к выводу, что в множестве комплексных чисел, при извлечении корня степени n из комплексного числа, всегда будет ровно n различных корней. Модули всех корней одинаковы $r = \sqrt[n]{\rho}$, аргументы различны и вычисляются по формуле

$$\alpha_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, k = 0,1, 2, 3, \dots, n - 1. \quad (25)$$

Все точки плоскости, соответствующие корням, являются вершинами правильного многоугольника, вписанного в окружность радиуса $r = \sqrt[n]{\rho}$ и с центром в начале координат (рис. 6). Разница между аргументами соседних корней – величина постоянная:

$$\alpha_{k+1} - \alpha_k = \frac{\varphi + 2\pi(k+1)}{n} - \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{2\pi}{n}.$$

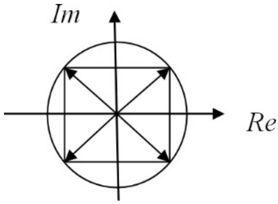

Рис. 6

Можно сказать, что все точки, соответствующие корням, делят окружность с центром в начале координат на n равных частей. Радиус такой окружности равен $\sqrt[n]{\rho}$.

Замечание. В множестве комплексных чисел нет операций сравнения $>$ (больше) и $<$ (меньше), если комплексное число $z \in C \setminus R$ (если число z не является действительным числом).

Рассмотрим простые примеры работы с комплексными числами.

Пример 1. Представить в тригонометрической и показательной форме комплексное число $z = -2 + 2\sqrt{3}i$.

Вычисляем модуль и аргумент комплексного числа (8) – (11):

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2} = 4;$$

$$\cos\varphi = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}, \sin\varphi = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Главное значение аргумента равно

$$\arg z = \frac{2\pi}{3}.$$

В результате тригонометрическая и показательная формы комплексного числа имеют вид

$$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right), z = 4e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Пример 2. Вычислить z^{10}, если $z = 1 + i$.

Сначала представим число $z = 1 + i$ в тригонометрической форме:

$$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,,\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}}, \arg z = \frac{\pi}{4}\cdot$$

Тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Для возведения в степень используем формулу Муавра (20):

$$z^{10} = \sqrt{2}^{10}\left(\cos\frac{10\pi}{4} + i\sin\frac{10\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^5\left(\cos\left(2\pi + \frac{2\pi}{4}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{2\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 32\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 32i \Rightarrow (1+i)^{10} = 32i.$$

Пример 3. Вычислить i^{10}.

$$i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i, i^4 = 1;$$

$$i^5 = i,\ i^6 = -1,\ i^7 = -i, i^8 = 1.$$

Из этой цепочки равенств ясно, что

$$i^{4k} = 1, i^{4k+1} = i, i^{4k+2} = -1,\ i^{4k+3} = -i,$$

где k – любое натуральное число.

Поэтому $i^{10} = i^{4\cdot 2+2} = i^2 = -1$.

Пример 4. Найти все корни 3-ей степени из числа $z = -2 + i\,2\sqrt{3}$.
Из первого примера мы знаем, что

$$z = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Используем формулу (24):

$$\sqrt[3]{z_k} = w_k = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{3}\right), \text{где } k = 0,1,2.$$

Запишем тригонометрическую форму каждого из трёх корней:

$$w_0 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{2\pi}{9} + i\sin\frac{2\pi}{9}\right) - \text{ первый корень;}$$

$$w_1 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{8\pi}{9} + i\sin\frac{8\pi}{9}\right) - \text{ второй корень;}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{14\pi}{9} + i\sin\frac{14\pi}{9}\right) - \text{ третий корень.}$$

Следующие примеры связаны с геометрическим образом комплексных чисел.

На комплексной плоскости изобразим все точки,
для которых верны следующие неравенства

Пример 5. $\operatorname{Re} z \geq 0$.
Это правая полуплоскость (рис. 7).

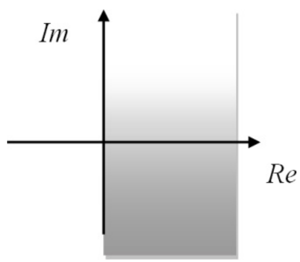

Рис. 7

<u>Пример 6</u>. $|\mathrm{Im}\, z| \leq 2$.

Это бесконечная полоса (рис. 8), параллельная действительной оси.

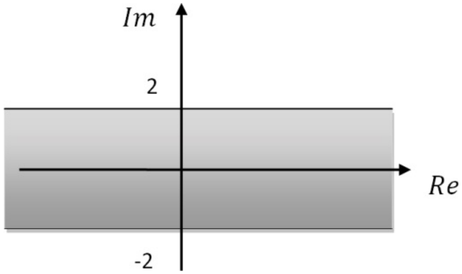

Рис. 8

<u>Пример 7.</u> $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$.

Это бесконечный угол (рис. 9), одна сторона которого совпадает с действительной осью, а вторая сторона совпадает с прямой $x = y$.

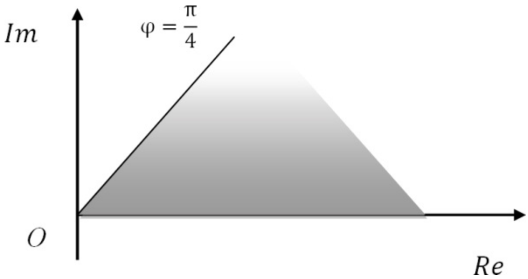

Рис. 9

<u>Пример 8.</u> $|z| \leq 1$.

Это круг с центром в начале координат (рис. 10). Радиус круга равен единице. Граница этого круга (окружность) принадлежит геометрическому образу неравенства.

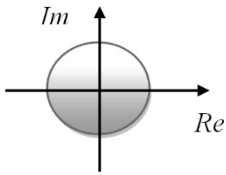

Рис. 10

<u>На комплексной плоскости изобразим все точки, для которых верны следующие равенства</u>

<u>Пример 9.</u> $|z + i| = 2$.

Приведём это равенство к виду

$$|z - (-i)| = 2.$$

Из этого равенства следует, что расстояние между точками комплексной плоскости и точкой с координатами $(0; -1)$ равно двум (см. пятое свойство модулей). Геометрический образ – окружность (рис. 11), радиус которой равен двум, центр в точке с координатами $(0; -1)$.

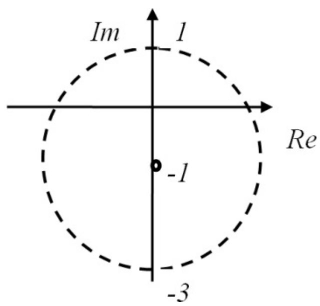

Рис. 11

<u>Пример 10.</u> $z = \bar{z}$.

Запишем это равенство в алгебраической форме

$$x + iy = x - iy \Longrightarrow 2iy = 0 \Longrightarrow y = 0.$$

Множество точек, ординаты которых равны нулю, это действительная ось (рис. 12).

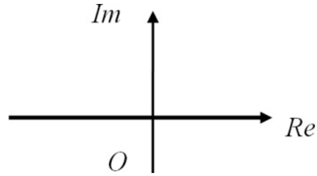

Рис. 12

Упражнения

На комплексной плоскости изобразите все точки, для которых верны следующие неравенства.

1. $0 \leq \operatorname{Im} z < 1$.
2. $|z - i| \leq |z + 2|$.
3. $1 \leq |z + 2| \leq 2$.
4. $|\pi - \arg z| \leq \frac{\pi}{4}$.
5. $|z| \geq 1 - \operatorname{Re} z$.
6. $|z| \geq 2$.

Приложение 2
Этимологический и толковый словарь математических терминов и понятий

А

анализ
Греческое слово означает «*решение, разрешение*». Первоначально «*анализ*» представлял собой переход от данной единицы к низшей.

В «Началах Евклида» встречаются слова *анализ* и *синтез.* В новую математику термин настойчиво вводил Виет.

анализ математический
Дифференциальное и интегральное исчисления, их обоснование и приложения.

Лейбниц написал Я. Бернулли, что до 1700 г. основное в математическом анализе было завершено. Но оказалось, что многое ещё осталось для трудов Эйлера, Гаусса, Коши, Вейерштрасса и многих других математиков.

Первый трактат дифференциального исчисления создан Иоганном Бернулли в 1691 г. для своего ученика – маркиза Лопиталя, который стал автором первого опубликованного учебного пособия «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий» (1696).

Русский математик С.К. Котельников (1771) впервые изложил математический анализ на русском языке. Это был перевод сжатого конспекта трудов Эйлера.

аргумент
Термин произошёл от латинского «*argumentum – знак, признак, довод, содержание*».

Лейбниц разделил величины на постоянные и переменные и ввёл термины «*variable valeur, variable quantite* ». Именно эти выражения, а также «*independente variable, quantite* » означали аргумент функции в первых её определениях.

Самое первое появление в печати выражения «*аргумент функции*» относится к 1862 г.

В русской литературе используется только к концу XIX в. В русском разговорном языке впервые встречается в письмах Курбского к Ивану Грозному.

Термин *аргумент* для угла комплексной переменной ввёл Коши (1847).

асимптота

Термин состоит из греческого отрицания α и греческого прилагательного, имеющего смысл: совпадающий, сливающийся. Буквальное значение слова *асимптота – несовпадающий, несливающийся*. Слово появилось у Апполония (225 г. до н.э.). Прокл относил термин также к параллельным прямым.

В русский язык термин ввёл Буняковский (1839).

Б

бесконечность

Слово *бесконечный* в математическом смысле стало употребляться благодаря немецкому художнику Дюреру (с 1525 г.). Слово *конечный* появилось в математике гораздо позднее: у немецкого профессора математики Райера из города Киль (1708).

Математики Греции пытались дать определения таким понятиям, как *бесконечность*, *предел*, но столкнулись с трудностями, которые они не смогли преодолеть. Эти понятия были корректно определены только в XIX в.

Современное определение бесконечного предложил Дедекинд. Знак ∞ для указания неограниченного возрастания был введён Валлисом (1655). Предполагают, что он использовал римский символ ∞, означавший 1000.

Знак стал общепринятым с XVIII в.

бесконечно малая величина (функция)

Метод исчерпывания древнегреческих математиков позволял им проводить вычисления с точностью до произвольно малого остатка. Эти методы стали фундаментом, на котором строились новые теории Кавальери, Ферма, Паскаля и др. Следующий этап – труды Ньютона и Лейбница.

Ньютон использовал моменты, которые вполне эквивалентны бесконечно малым приращениям Ферма. Лейбниц использовал «характеристический треугольник» Паскаля, треугольник, образованный бесконечно малыми отрезками касательной, абсциссы и ординаты. Ньютон не открыл суть своего метода в письмах к Лейбницу (1676).

Только после публикации работ Лейбница Ньютон предоставил некоторые идеи своего метода. В своих публикациях Ньютон старался избегать бесконечно малых. Его «отношения исчезающих приращений» – это производные.

Новое исчисление не имело прочной базы, пока не стало ясности и строгости в основном понятии бесконечно малой. Эйлер и Лагранж обосновали только правила действий в дифференциальном исчислении.

Определение бесконечно малой величины на основе понятия предела дал Больцано (1817), а затем Коши (1821–1823).

Г

градус

Латинское «gradus – шаг».

Вавилонские жрецы заметили, что солнечный диск укладывается по дневному пути Солнца 180 раз, т е. (Солнце делает 180 шагов). Тогда путь за сутки равен (360 шагов). Круг стали делить на 360 частей.

Обозначения, похожие на современные, использовал ещё Птолемей, который употреблял шестидесятеричную систему исчисления.

график

Греческое слово, которое означает «относится к письму или к живописи».

Д

дифференциал

Слово «*differentia – разность*» употреблялось в смысле «*приращение*» в работах Лейбница, Якоби и Иоганна Бернулли, но не имело никаких пояснений. От И. Бернулли пошла традиция обозначать приращение греческой буквой Δ. Лейбниц для бесконечно малой разности использовал обозначение d.

В исчислении Лейбница не было функций, не было производных, были переменные величины и дифференциалы. Благодаря трудам Эйлера, Лагранжа, Коши производная заменила дифференциал в качестве основного понятия исчисления. Но и дифференциал устоял при всех попытках вытеснить его из анализа.

дифференцируемость

Почти до конца XIX в. на существование производной смотрели как на неизбежную принадлежность непрерывности. Когда поняли, что это не так, стали употреблять термин *функция без производной*.

Первые примеры функций, не имеющих производной ни в одной точке области определения, построили Больцано и Вейрштрасс. Понятие «*недифференцируемая функция*» с большим трудом входило в математику. Жордан понимал, что есть недифференцируемые функции, но писал: «Мы не будем рассматривать эти ненормальные функции…».

Е

e

Существование предела $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ впервые установил Даниил Бернулли в 1728 г. Обозначение *e* введено Эйлером. Этот символ быстро стал общепринятым.

единица

Это слово у греков обозначало только *натуральное число, количество, составленное из единиц*. Поэтому *1* не считалось числом. Такой взгляд продолжался довольно долго. Ещё в XVI в. приходилось бороться за признание единицы числом.

Справедливости ради следует отметить, что понятие *число 1*, не является простым понятием.

И

i

Это обозначение для числа $\sqrt{-1}$ ввёл Эйлер в 1777 г. по первой букве латинского «*imaginarius – воображаемый, мнимый*». Прочно в математику обозначение вошло благодаря Гауссу, который принял его в 1801 г.

В формулах интегрального исчисления буква *i* используется как индекс (первая буква слова индекс).

инвариант

Французское «invariant – неизменяющийся».

В математике инвариантом называют выражение, которое остаётся неизменным при некоторых преобразованиях переменных. Инвариантом является первый дифференциал функции одного аргумента. Форма дифференциала не меняется при переходе к новой независимой переменной.

изо

Греческое слово, входящее во многие математические термины, означает «*равный, одинаковый, подобный*».

индекс

Латинское «index – доносчик, указатель, титул, надпись».

Лейбниц активно пользовался индексами. С усовершенствованием книгопечатания индексы стали ставить ниже строки, как это делал Лейбниц. Он впервые стал использовать два индекса. Двойные индексы (в теории детерминантов) впервые использовал Якоби.

интеграл

В первой половине XVII в. операцию вычисления площади фигуры записывали фразой «*omnes lineae – совокупность всех неделимых*». Постепенно эту фразу стали сокращать.

Лейбниц ради сокращения записи вводит начальную букву слова «*Summa*», которая во времена Лейбница изображалась как наш современный знак интеграла. Первоначально Лейбниц писал $\int y \int y$, но через месяц он стал писать $\int ydy$ – это уже не сумма неделимых, а сумма площадей бесконечно малых прямоугольников.

Лейбниц систематически придерживался нового обозначения после того, как заметил его инвариантность относительно переменной интегрирования. В печати современное обозначение появилось в 1686 г. В это же время И. Бернулли обозначал операцию интегрирования буквой I по первой букве введённого им названия «*интегральное исчисление*». Впоследствии этот символ сохранился для обозначения конкретных интегралов: I_1, I_2 и т.д.

Слово *интеграл* употребил впервые Я. Бернулли в 1690 г. По одному предположению термин образован от латинского «*integer – целый*». По другому предположению Я. Бернулли придумал термин от «*integro – приводить в прежнее состояние, восстанавливать*». Действительно, восстанавливается первообразная функция. Новый термин был обсуждён с Лейбницем и введён в математику в 1696 г. И. Бернулли предложил название «*calculus integralis –интегральное исчисление*».

интеграл неопределённый

Лейбниц вначале пришёл к понятию определённого интеграла. В 1694 г. он впервые ввёл аддитивную постоянную и таким образом чётко выделил неопределённый интеграл.

В XVIII в. были созданы почти все известные методы интегрирования элементарных функций в конечном аналитическом виде. Б. Паскаль применял интегрирование по частям и метод подстановки. Интегрирование дробно-рациональных функций с помощью разложения на простейшие применял И. Бернулли. Позже этот метод модернизировали Эйлер и Коши. Они упростили способ определения коэффициентов. Ньютон мог заменить функцию её разложением в степенной ряд, поэтому ему было достаточно одного интеграла от x^n .

В работах Коши была впервые опубликована таблица интегралов, приближенно похожая на современную и только в учебниках начала XX в. появились таблицы интегралов (но не производных). Таблицы производных появились значительно позже.

Эйлер употреблял термины «*общий и частный интеграл*» для неопределённого интеграла и первообразной.

интеграл определённый
Лейбниц (1693) рассматривал связь между интегралом (как площадью) и производной. С помощью геометрии вывел формулу этой связи.

Аналогичную связь отметил в своих трудах и Ньютон. Поэтому знаменитая формула $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ называется формулой Ньютона – Лейбница.

К аналитическому определению определённого интеграла был близок Эйлер. Он первый стал писать пределы интегрирования над и под знаком интеграла.

интервал
Термин происходит от латинского «*intervallum – промежуток, расстояние*».

В математике интервалом называется множество действительных чисел *x*, удовлетворяющих строгому двойному неравенству $a < x < b$, где a и b – действительные числа, обозначается $(a\ ;\ b)$ или $]\ a\ ;\ b\ [$.

интерпретация
Латинское «*interpretatio – толкование, объяснение*».

иррациональность
Наличие в алгебраическом выражении радикала с натуральным показателем (иррациональное выражение или число).

Открытие иррациональных чисел приписывают Пифагору. Термин появился как буквальный перевод с греческого языка на латынь «*ir – отрицание, ratio – отношение, разум*».

До XVI в. иррациональности не считались настоящими числами. Важный шаг был сделан Декартом, а затем Ньютон дал определение числа, которое включало иррациональности.

Математически строгая теория была создана только в конце XIX в. трудами Дедекинда, Кантора, Вейерштрасса и др.

К

квадратура

Вычисление определённого интеграла.

Латинское «*quadratura – придание квадратной формы*». В древней Греции вычисление площади плоской фигуры или площади поверхности сводилось к построению равновеликого квадрата, то есть к квадратуре, поэтому квадратурой стали называть составление какого-нибудь интеграла.

Создатели интегрального исчисления считали, что определённый интеграл представляет некоторую квадратуру. Отсюда появились выражения: «*уравнение решается в квадратурах, задача решается в квадратурах*».

Аналитическое определение интеграла появилось только в XIX в.

комплексные числа

Комплексное число – сложное, составное число.

Термин «*комплексное число»* впервые ввёл итальянский математик Карно (1803). Позднее Гаусс стал использовать этот термин систематически. Декарт впервые противопоставил действительные и мнимые корни уравнения *(reele, maginaire)*. Первой буквой термина «*imaginaire*» обозначалась мнимая единица. Обозначение $\sqrt{-1} = i$ стало широко использоваться благодаря Гауссу. Термины *«сопряжённые комплексные числа, аргумент комплексного числа* и *показательная форма комплексного числа»* были введены Коши.

Тригонометрическая форма комплексного числа впервые была представлена Эйлером и Д'Аламбером. Геометрическое представление комплексных чисел стало известным благодаря Гауссу.

континуум

Существуют не меньше двух различных видов бесконечности: счётная бесконечность натуральных чисел и несчётная бесконечность. Немецкий математик Кантор доказал, что множество всех действительных чисел несчётно.

Два множества называются эквивалентными, если они имеют одинаковое количество элементов. Если бесконечные множества эквивалентны, в математике говорят, что им соответствует одинаковое кардинальное число, или мощность.

Множество чисел отрезка [0;1] является несчётным множеством. Все множества эквивалентные множеству чисел отрезка [0;1] – несчётные множества. Такие несчётные множества называют множествами мощности континуум. Латинское «*continuum – непрерывный, смежный, следующий*».

коэффициент

Числовой множитель при буквенном выражении, известный множитель при неизвестном выражении, постоянный множитель при переменной величине.

Термин составлен из латинских «*co – с, вместе* и *efficiens – производящий*». Буквальное значение «*coefficiens – содействующий*».

М

максимум, минимум

Это русское изображение латинских слов «maximum, minimum – наибольшее, наименьшее».

Отдельные задачи на нахождение экстремумов были решены древнегреческими математиками. До XVII в. для решения каждой такой задачи составлялся индивидуальный метод. Первый общий алгоритм изобрёл Ферма (1629). Он умел различать максимум и минимум по знаку $\Delta^2 y$.

Лейбниц нашёл связь между убыванием и возрастанием функции и точками максимума и минимума. Случай, когда первые n производных обращаются в ноль, рассмотрел впервые английский математик Маклорен (1742).

метод

Слово греческого происхождения и означает «*дорога вслед за чем-либо*».

Платон и Аристотель стали употреблять это слово как название совокупности математических действий, необходимых для получения результата.

модуль

Термин происходит от латинского «*modulus – мера*».

Широко использовался в математике. Сейчас говорят: *модуль функции, модуль вектора, модуль комплексного числа*.

Н

неизвестная

Виет с 1591 г. обозначал неизвестные величины гласными буквами, а известные – согласными. Декарт в качестве неизвестных (или переменных) использовал буквы *x, y, z.*

неопределённость

Неопределённости вида $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ исследовал Лопиталь (1696).

Неопределённости вида $\infty - \infty, 0 \cdot \infty$ рассматривал Эйлер (1748), а неопределенности $\infty^0, 1^\infty$– Коши (1821). Позднее Коши дал общее правило исследования неопределённостей вида $\frac{\infty}{\infty} 0^\infty, 0^0$. Это правило есть в современных учебниках.

О

окрестность

Впервые слово в математику ввёл Коши. Такой же смысл английского слова «neighbourhood». Слово с лёгкостью вошло во французскую математическую литературу, а позже в немецкую и итальянскую. Вейерштрасс в первых же курсах лекций по математическому анализу (1856) вводит понятие «*окрестность точки*».

оператор, операция

Оператор – знак, символ (обозначение) некоторого математического действия. Термин произошёл от латинского «*operator – работник»*. Например, символ Σ – оператор суммирования.

П

параметр

Термин произошёл от греческого слова, которое означает «измеряю что-нибудь, сравнивая с чем-то другим».

Лейбниц называл *параметром* любую произвольную постоянную величину, входящую в уравнение.

переменная

Этот термин ввёл Лейбниц при обсуждении понятия функции в последнее десятилетие XVII в.

правило Лопиталя

Маркиз Гийом Франсуа Лопиталь должен был стать офицером по семейной традиции, но из-за плохого зрения был не пригоден к военной службе. Поэтому он всё своё свободное время занимался любимой математикой.

И. Бернулли читал ему лекции и даже написал курс лекций специально для Лопиталя. Под влиянием этих лекций Лопиталь сам написал учебник по дифференциальному исчислению (1696).

Книга оказалась настолько удачной, что по ней учились во Франции многие десятилетия. В 1730 г. вышел английский перевод. В 1764 г. в Вене вышел латинский перевод. Курс содержал и «правило Лопиталя», которое доказал И. Бернулли. Учебник Лопиталя содержал не только результаты, полученные братьями Бернулли и Лейбницем, но и немало собственных результатов Лопиталя.

предел

В начале XIX в. математики давали только словесное описание предела. Современные обозначения предела придумали Гамильтон, Вейерштрасс и Риман.

В русском издании лекций Коши (1831) слово «*limit*» перевили как «*предел*» и обозначение *lim* заменили на *пр.*

производная

Название «*derivee*» (производная) ввёл Лагранж. В русский язык слово «*производная*» ввёл впервые В.И. Висковатов (1810).

Слово «*derivare*» впервые появилось в переписке Ньютона и Лейбница.

Лейбниц называл производную дифференциальным отношением и использовал обозначение $\frac{dy}{dx}$.

Исчисление, созданное Лейбницем, было именно дифференциальным, так как он использовал только дифференциалы, и в его исчислении не было места производным. Благодаря Коши широко распространилось слово «*derivation*».

Интересно, что таблицы производных появились в учебниках позднее таблиц интегралов.

С

сигнум

Функция sgn x получила название и обозначение от латинского «*signum – знак*». Такую функцию ввёл в рассмотрение Л. Кронекер.

символ

Русское написание греческого слова, которое означает «*условный знак, примета*». Древние греки обозначали символом устный опознавательный знак для членов определённого общества.

система

Русское написание греческого слова, которое означает «*составленное из частей, соединение*».

скаляр

Виет первым стал называть величины *скалярами*. В таком смысле слово скаляр впервые вошло в математику. Современный термин «*скалярная величина*» (в отличие от векторной) придумал Гамильтон, образовав его от латинского «*scale – шкала, лестница*».

скачок

Французские математики Паш и Раймон (XIX в.) впервые назвали *скачком функции в точке* a величину $\left|\lim_{h\to 0}\left(f(a+h)-f(a-h)\right)\right|$.

суперпозиция

Термин составлен из латинских «*super – над* и *position – положение*». Термин означает «*наложение одного на другое*». Этот термин встречается впервые у английского математика Уинстоуна и у Коши (XIX в.).

Идея принципа суперпозиции принадлежит Даниилу Бернулли. Он считал этот принцип фундаментальным законом.

Т

текущая точка

Впервые такое выражение встречается у Кавальери (1635). Если прямая перемещается параллельно самой себе, то он говорил, что прямая течёт, и называл её *текущей*.

Ньютон обобщил термин Кавальери и называл *текущей* любую непрерывно меняющуюся величину.

теория

Термин образован от греческого слова, которое означало «*наблюдение, исследование, опыт*».

термин

Латинское слово «*terminus* – *межа, граница, конец*».

тип

Термин образован от греческого слова, которое означало «*образ, отображение*».

тождество

Равенство выражений с одной или несколькими переменными, левая и правая части которого равны при всех возможных значениях переменных. Знак тождества ≡ впервые употребил Риман (1857).

Ф

факториал

Термин происходит от слова «*factor* – *множитель*». Обозначение $n!$ встречается впервые в 1808 г. Наряду с этим обозначением в XIX в. употребляли много других обозначений.

В 1916 г. Совет Лондонского математического общества рекомендовал принять к использованию только знак $n!$.

функция

Невозможно точно указать, когда впервые появились функции в виде таблиц и графиков. Вавилонские математики пользовались таблицами задолго до новой эры. Важную роль в развитии этого понятия сыграли в Средние века натурфилософские школы Оксфорда и Парижа.

Латинское слово «*function – свершение, исполнение*». Слово «*функция*» как математический термин появилось впервые у Лейбница (1673). Позднее И. Бернулли определил функцию как переменную величину, заданную аналитическим выражением.

Эйлер дал общее определение функции как произвольной зависимости одной величины от другой; при этом он ввёл неявно заданные функции и параметрически заданные функции (1755) и распространил определение на величины, зависящие от нескольких переменных.

Первые обозначения функций ввёл Лейбниц.

Э

эквивалентность

Термин происходит от латинского «*aequius – равный* и *valens – имеющий силу, сильный*»; смысл термина – «*равносильный*».

экспонента

Слово «*exponenet – показатель*» введено для показателя степени в 1553 г. Лейбниц ввёл термины «*экспоненциальная кривая, экспоненциальная функция».*

экстремум

Термин происходит от латинского «*extremum – крайний, последний*». Этот термин был предложен Дебуа Раймоном (1879) для обозначения минимума и максимума в тех случаях, где не обязательно их различие.

Приложение 3
Греческий алфавит и его произношение

Греческие буквы	Произношение	Греческие буквы	Произношение
Α α	альфа	**Β β**	бета
Γ γ	гамма	**Δ δ**	дельта
Ε ε ϵ	эпсилон	**Ζ ζ**	дзета
Η η	эта	**Θ θ ϑ**	тэта
Ι ι	йота	**Κ κ**	каппа
Λ λ	лямбда	**Μ μ**	мю
Ν ν	ню	**Ξ ξ**	кси
Ο ο	омикрон	**Π π**	пи
Ρ ρ ϱ	ро	**Σ σ**	сигма
Τ τ	тау	**ϒ υ**	ипсилон
Φ φ ϕ	фи	**Χ χ**	хи
Ψ ψ	пси	**Ω ω**	омега

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

Глава 1

1.4 **1.5**

№	Значения пределов	№	Значения пределов
1	$-1\ (x \to -1)$	1	∞
2	$4\ (x \to 2)$	2	$3/2$
3	$\sqrt{3}/2 (x \to 1\ /\ 2)$	3	-4
4	$4\ (x \to \sqrt{3})$	4	1
5	$1\ (x \to +\infty);\ -1\ (x \to \infty)$	5	12
6	$\sqrt{2}/5\ \ (x \to +\infty)$	6	$+\infty$

1.6 **1.7**

№	Значения пределов	№	Значения пределов
1	-13	1	e^7
2	0	2	$1/e$
3	0	3	$e^{1/3}$
4	0	4	$1/a$
5	$+\infty$	5	e^{km}
6	$-\infty$	6	1

Глава 2

2.1

№	Левосторонний предел	Правосторонний предел
1	0	π
2	2	0
3	9	6

2.2

№	Есть непрерывность в точке	Нет непрерывности в точке
1	$x = -1$	$x = 1$
2	$x = 2$	----------

3	$x = 1$	----------

2.3

№	Есть непрерывность в области	Нет непрерывности в области
1	----------	Разрыв в точке $x = 5$
2	$[6; 10]$	----------
3	$(-\infty; +\infty)$, если $a = -1; b = 1$	----------

2.4

№	Точки разрыва 1-го рода	Точки разрыва 2-го рода
1	----------	$x = 1$ и $x = 5$
2	$x = -1$ (разрыв-скачок)	----------
3	$x = 3$ (устранимый разрыв)	----------
4	$x = 0$ (разрыв скачок)	----------
5	$x = 0$ (устранимый разрыв)	----------
6	----------	$x = 0$

Глава 3

3.3

№	Производная функции
1	$\frac{1}{1+\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$
2	$\frac{15x^2 - 1}{5x^3 - x}$
3	$\frac{-1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$
4	$\frac{\cos x(1+\operatorname{tg} x) - \sin x \cdot 1/\cos^2 x}{(1+\operatorname{tg} x)^2}$
5	$2\ln\left(\operatorname{arctg}(x/3)\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{arctg}(x/3)} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2} \cdot \frac{1}{3}$
6	$\frac{-2\cos x \cdot \sin x(1+\sin^2 x) - 2\sin x \cdot \cos^3 x}{(1+\sin^2 x)}$

3.4

№	Производная
1	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
2	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
3	-1
4	$-\operatorname{tg} t$
5	$\frac{1}{t^2}$
6	$1 + t^2$

3.5 **3.7**

№	Производная	№	Предел
1	$x^{\operatorname{arctg}x}\left(\frac{\ln x}{1+x^2}+\frac{\operatorname{arctg}x}{x}\right)$	1	1
2	$\left(\sqrt{\operatorname{tg}x}\right)^{x+1}\left(\frac{\ln(\operatorname{tg}x)}{2}+\frac{x+1}{2\sin x\cdot\cos x}\right)$	2	6
3	0	3	0
4	$(\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\cdot\ln(\cos x)-\frac{\sin^2 x}{\cos x}\right)$	4	1
5	$x^{\operatorname{tg}x}\cdot\left(\frac{\ln x}{\cos^2 x}+\frac{\operatorname{tg}x}{x}\right)$	5	$+\infty$
6	$(x^2+1)^{\sqrt{x}}\cdot\left(\frac{\ln(x^2+1)}{2\sqrt{x}}+\frac{2x\sqrt{x}}{x^2+1}\right)$	6	0

3.8 **3.9**

№	Физический смысл производной	№	Геометрический смысл производной
1	Скорость движения через секунду $v=4$	1	$y+1=-2(x+1)$ – ур. касат. $y+1=\frac{1}{2}(x+1)$ – ур. норм.
2	Точка остановится через 3 секунды	2	Параллельна заданной прямой в точке М $\left(\frac{1}{2};\ -\ln 2\right)$
3	Ускорение тела $a=-2$	3	Угол $\alpha=\operatorname{arcctg}3$
4	Ускорения будут равными через $\frac{4}{17}$ часа	4	Наклонена под углом 45° в точке $M(3;\ -3)$; параллельна в точке $M(2;\ -2)$

3.10

№	Дифференциал функции dy	----------
1	$\frac{dx}{2\sqrt{x(1+x)}}$	----------
2	$(2x\ln x+x)dx$	----------
3	$\left((3x^2-1)\operatorname{tg}x+\frac{x^3-x}{\cos^2 x}\right)dx$	----------

№	Численное значение dy в точке	Численное значение Δy в точке
4	0,05	0,050301
5	0,5	0,75

Глава 4

4.1

№	Наклонная асимптота	Вертикальная асимптота
1	$y = 2$ – горизонтальная	$x = +\sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$
2	$y = 6x$	$x = +2, x = -2$
3	$y = x - 2$	$x = -1$
4	$y = \frac{\pi}{2}$ при $x \to +\infty$ $y = \frac{\pi}{2}$ при $x \to -\infty$	$x = 0$
5	$y = x + 4$	----------
6	$y = 7x - 7$	$x = -1$

4.2

№	Область возрастания	Область убывания
1	$(-\infty; 0) \cup (4; +\infty)$	$(0; 4)$
2	$(1; +\infty)$	$(-\infty; 1)$
3	$\left(-\infty; -\frac{2}{3}\right) \cup (2; +\infty)$	$\left(-\frac{5}{2}; 2\right)$
4	$\left(\frac{1}{e}; +\infty\right)$	$\left(0; \frac{1}{e}\right)$
5	$(0; 1) \cup (1; +\infty)$	$(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$
6	$(-\infty; +\infty)$	----------

4.3

№	Максимум	Минимум
1	$x = -1$ $y = 3$	$x = 1$ $y = -1$
2	----------	$x = 2$ $y = e$
3	----------	----------

4	$x = 2$ $y = 3$	----------
5	$x = 1$ $y = 1/2$	$x = -1$ $y = -1/2$
6	$x = 1$ $y = e^{-1}$	----------

4.4

№	Наибольшее и наименьшее значения
1	$x_1 = \frac{10}{3};\ x_2 = \frac{50}{3}$
2	$x_1 = 10;\ x_2 = 2\sqrt{10}$
3	Высота $h = \frac{2}{1+\sqrt{2}}$
4	Основание $b = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

4.5

№	Выпуклость вверх	Выпуклость вниз	Точки перегиба
1	$(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$	$(-1; +1)$	$x = -1$ $x = +1$
2	$\left(-\infty; -\sqrt{3/2}\right) \cup \left(0; \sqrt{3/2}\right)$	$\left(-\sqrt{3/2}; 0\right) \cup \left(\sqrt{3/2}; +\infty\right)$	$x = -\sqrt{3/2}$ $x = 0$ $x = \sqrt{3/2}$
3	$(-\infty; 5/3)$	$(5/3; +\infty)$	$x = 5/3$
4	$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}; +\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$	$(-\infty; -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}; +\infty)$	$x = -1/\sqrt{2}$ $x = +1/\sqrt{2}$

Глава 5

5.3

№	Первообразная
1	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$
2	$\sqrt{x^2 - 1} + C$

3	$\frac{2}{3}\ln^{\frac{3}{2}} x + C$
4	$\frac{1}{2}\ln(x^2 + a^2) + C$
5	$-2\sqrt{\cos x} + C$
6	$6\sqrt{x} \; - {}^1\!/_x + C$

5.4

№	Первообразная
1	$\frac{3}{2}\left(x\sin(2x+1) + \frac{1}{2}\cos(2x+1)\right) + C$
2	$e^x(2x-3) + C$
3	$\left(x - \frac{1}{7}\right)\ln(7x-1) - x + C$
4	$\left(x + \frac{5}{6}\right)\arcsin(6x+5) + \frac{1}{6}\sqrt{1-(6x+5)^2} + C$
5	$(x-2)\mathrm{arctg}\,(3x-6) - \frac{1}{6}\ln(1+(3x-6)^2) + C$
6	$\frac{x^4}{4}\left(\ln x - {}^1\!/_4\right) + C$

5.6

№	Первообразная
1	$\frac{x^2}{2} + x + \ln\lvert x-1\rvert + C$
2	$-4\ln\lvert x-2\rvert + 6\ln\lvert x-3\rvert + C$
3	$5\left(x + \ln\left\lvert\frac{x-2}{x+2}\right\rvert\right) + C$
4	$\ln\lvert x-1\rvert - \frac{2}{x-1} + C$
5	$\ln\frac{(x-1)^2}{\lvert x+1\rvert} + {}^{x^2}\!/_2 + C$
6	$\frac{1}{2}\ln(x^2+2) + C$

5.7

№	Первообразная
1	$\frac{1}{20}\cos 5x - \frac{1}{6}\cos 3x + \frac{1}{4}\cos x + C$
2	$\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{12}\sin 6x + C$
3	$\ln\left\|\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1\right\| - \ln\left\|\operatorname{tg}\frac{x}{2} - 1\right\| + C$
4	$\frac{3x}{8} - \frac{\sin(6x+2)}{12} + \frac{\sin(12x+4)}{96} + C$
5	$\frac{-1}{7}\left(\cos 7x - \frac{\cos^3 7x}{3}\right) + C$
6	$\frac{1}{2}\ln\|1 + \operatorname{tg}x\| - \frac{1}{4}\ln(1 + \operatorname{tg}^2 x) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x) + C$

5.8

№	Первообразная
1	$6\left(\frac{1}{4}\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{2}\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} + \ln\left\|\sqrt[6]{x} - 1\right\|\right) + C$
2	$2\left(\frac{x}{2} - \sqrt{x} + \ln\left\|\sqrt{x} + 1\right\|\right) + C$
3	$\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln\left\|\sqrt[4]{x^3} + 1\right\|\right) + C$
4	$6\left(\frac{\sqrt[6]{x^7}}{7} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[6]{x^3}}{3} - \sqrt[6]{x} + \operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}\right) + C$

Глава 6

6.3

№	Численное значение определённого интеграла	№	Численное значение определённого интеграла
1	2	4	$\frac{1 - 3e^{-2}}{4}$
2	$\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}$	5	$6\ln 6 - 3(\ln 3 + 1)$
3	$\frac{\pi}{2} - 1$	6	$\frac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$

Литература

1. *Александрова Н.В.* История математических терминов, понятий, обозначений. Словарь-справочник. – М.: Изд-во ЛКИ, 2008. – 248 с.
2. *Баврин И.И.* Высшая математика. Учебник. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 616 с.
3. *Беликова Г.И.* Математика. Учебное пособие для иностранных студентов, обучающихся по программе предвузовской подготовки. Часть 1. – СПб.: РГГМУ, 2012. – 232 с.
4. *Беликова Г.И., Витковская Л.В.* Математика. Учебное пособие для иностранных студентов, обучающихся по программе предвузовской подготовки. Часть 2. – СПб.: РГГМУ, 2011. – 186 с.
5. *Гнеденко Б.В., Гнеденко Д.Б.* Об обучении математике в университетах и педвузах на рубеже двух тысячелетий (психология, педагогика, технология обучения: математика). – М.: КомКнига, 2006. – 160 с.
6. *Данко П.Е.* Высшая математика в примерах и задачах. – М.: ООО «Издательство Оникс», 2009. – 368 с.
7. *Журбенко Л.Н., Никонова Г.А., Никонова Н.В., Нуриева С.Н., Дектярёва О.М.* Математика в примерах и задачах. Учебное пособие. – М.: ИНФРА-М, 2011. – 372 с.
8. *Земляков А.Н.* Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический дискурс. Элективный курс. Учебное пособие. – М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007. – 320 с.
9. *Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И.* Вся высшая математика. Т. 1. Учебник. – М.: Едиториал УРСС, 2012. – 336 с.
10. *Краснов М.Л., Киселёв А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И.* Вся высшая математика. Т. 2. Учебник. – М.: Издательство ЛКИ, 2007. – 192 с.
11. *Курант Р., Роббинс Г.* Что такое математика? – М.: МЦНМО, 2010. – 558 с.
12. *Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А.* Сборник задач по высшей математике. 1 курс. – М.: Айрис-пресс, 2010. – 576 с.

13. *Мачкин Ю.Е., Коршунова Т.С.* Русско-английский англо-русский словарь заимствованных слов. – М.: «Экзамен», 2000. – 688 с.
14. *Петров Ю.П.* История и философия науки. Математика, вычислительная техника, информатика. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 448 с.
15. *Письменный Д.Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс. – М.: Айрис-пресс, 2009. – 608 с.
16. *Соболь Б.В., Мишняков Н.Т, Поркшеян В.М.* Практикум по высшей математике. – Ростов на Дону: Феникс, 2010. – 630 с.
17. *Сретерн П.* Лейбниц за 90 минут. – М.: АСТ: Астрель, 2005. – 79 с.
18. *Успенский В.А.* Апология математики. – СПб.: Амфора. ТИД Амфора, 2009. – 554 с.
19. *Ушаков И.А.* История науки сквозь призму озарений. Книга 2. Сначала было число. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2009. – 208 с.
20. *Файншмидт В.Л.* Дифференциальное и интегральное исчисление функций одного аргумента. – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 224 с.
21. *Федин С.Н.* Математики тоже шутят. – М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2010. – 216 с.
22. *Филинова О.Е.* Математика в истории мировой культуры. Учебное пособие для студентов вузов. – М.: Гелиос АРВ, 2006. – 224 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Галина Иосифовна Беликова
Лариса Валериевна Витковская

МАТЕМАТИКА
Часть 3
Основы математического анализа

Учебное пособие
для иностранных студентов, обучающихся
по программе предвузовской подготовки

Редактор: О.С. Крайнова
Компьютерная верстка: Ю.И. Климов

ЛР № 020309 от 30.12.96

Подписано в печать 09.09.15. Формат 60×90 1/16. Гарнитура Times New Roman.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 13,0. Тираж 150 экз. Заказ № 439.
РГГМУ, 195196, Санкт-Петербург, Малоохтинский пр. 98.
Отпечатано в ЦОП РГГМУ